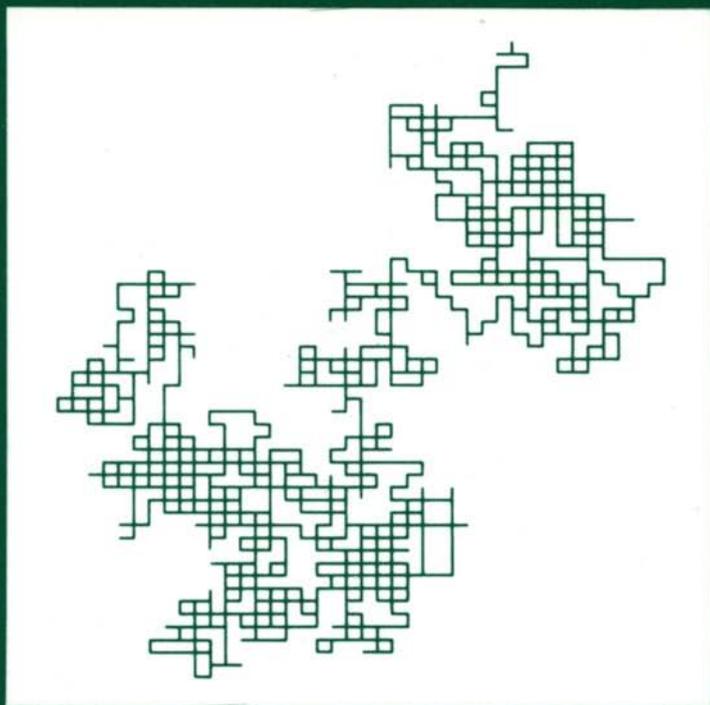


Claude Itzykson · Jean-Michel Drouffe

Théorie statistique des champs 1



S A V O I R S A C T U E L S

InterEditions/Editions du CNRS

Théorie statistique
des champs
1



Claude Itzykson · Jean-Michel Drouffe

Théorie statistique des champs 1

S A V O I R S A C T U E L S

InterEditions/Editions du CNRS

© 1989, **InterEditions**, 25, rue Leblanc, 75015 Paris.

et

Editions du CNRS, 1, Place Aristide Briand, 92195 Meudon.

Tous droits réservés. Aucun extrait de ce livre ne peut être reproduit, sous quelque forme ou par quelque procédé que ce soit (machine électronique, mécanique, à photocopier, à enregistrer ou tout autre) sans l'autorisation écrite préalable de InterEditions.

ISBN 2-7296-0273-9

ISBN 2-222-04300-X

TABLE DES MATIERES

Avant-propos	XI
Chapitre I – DU MOUVEMENT BROWNIEN AUX CHAMPS EUCLIDIENS	
1. Mouvement brownien	1
1.1 Marche au hasard	1
1.2 Somme sur les chemins	9
1.3 La dimension deux des courbes browniennes	11
2. Champs euclidiens	21
2.1 Champ libre	21
2.2 Champs en interaction et marches aléatoires	24
2.3 Marche au hasard avec retour exclu et limite $n \rightarrow 0$...	29
2.4 Développement de haute température	32
2.5 Le cas unidimensionnel	36
Appendice A. Réseaux	42
Notes	44
Chapitre II – INTEGRALES DE GRASSMANN ET MODELE D'ISING BIDIMENSIONNEL	
1. Intégrales de Grassmann	47
1.1 Variables anticommutantes	47
1.2 Intégrales	51
2. Modèle d'Ising bidimensionnel	57
2.1 Dualité	58
2.2 Matrice de transfert	60
2.3 Représentation fermionique	61
2.4 Energie libre	65
2.5 Aimantation spontanée	69
2.6 Fonction de corrélation	75
2.7 Tension superficielle	83
3. Théorie critique continue	89
3.1 Action effective	90
3.2 Fonctions de corrélation	93

Appendice A. Différences quadratiques et équations de Painlevé	95
Notes	102
Chapitre III – BRISURE SPONTANEE DE SYMETRIE CHAMP MOYEN	105
1. Approximation de champ moyen	105
1.1 Constante diélectrique d'un milieu polarisable	106
1.2 Modèle de spin classique - Symétrie discrète	109
1.3 Groupe continu d'invariance	115
1.4 L'approximation de Bethe	119
1.5 Exposants critiques	123
2. Singularités de Lee et Yang	129
2.1 Le théorème de Lee et Yang	129
2.2 Cas unidimensionnel	133
2.3 Propriétés générales	134
2.4 Racines dans le plan des températures	136
3. La limite $n \rightarrow \infty$	138
3.1 La méthode du col	138
3.2 Factorisation	142
3.3 Solution en champ extérieur	145
4. Corrections au champ moyen	148
4.1 Transformée de Laplace	149
Notes	156
Chapitre IV – LOIS D'ECHELLE – MODELE XY	159
1. Lois d'échelle. Transformations de renormalisation dans l'espace de configuration	159
1.1 Homogénéité et invariance d'échelle	159
1.2 Relations de récurrence	165
1.3 Exemples et approximations	172
1.3.1 Décimation unidimensionnelle	173
1.3.2 Déplacement des liens	175
1.3.3 Règle majoritaire	180
1.3.4 Amplitudes critiques	186
2. Le modèle XY	189
2.1 Comportement à haute température	192
2.2 Développement de basse température. Tourbillons	193
2.3 L'action de Villain	200
2.4 Corrélations	204
2.5 Flot de renormalisation	209
Appendice A. Systèmes bidimensionnels à symétrie continue	215
A.1 Inégalité sur l'aimantation	215
A.2 Inégalité sur les corrélations	218

Appendice B. Renormalisation phénoménologique	220
Notes	226
Chapitre V – GROUPE DE RENORMALISATION	229
1. Lagrangien et analyse dimensionnelle	229
1.1 Présentation	229
1.2 Fonctions génératrices et analyse dimensionnelle	232
2. Méthode perturbative	237
2.1 Série diagrammatique	237
2.2 Classement topologique	241
2.3 Prolongement dimensionnel	245
2.4 Facteurs associés à un groupe d'invariance	254
2.5 Comptage de puissances	256
2.6 Renormalisation perturbative	259
3. Groupe de renormalisation	265
3.1 Flot de renormalisation	265
3.2 Exposants critiques	273
3.3 Du point fixe gaussien au point critique	276
3.4 Fonctions de corrélation au point critique	278
3.5 Développement au voisinage du point critique	284
3.6 Lois d'échelle pour $T < T_c$	290
4. Corrections aux lois d'échelle	295
4.1 Déviation au point critique	295
4.2 Corrections logarithmiques en dimension quatre	297
4.3 Opérateurs inessentiels	300
5. Résultats numériques	304
5.1 Développement en ϵ	304
5.2 Equation d'état	306
5.3 Rapports d'amplitudes	308
5.4 Résultats tridimensionnels	310
Appendice A. Points multicritiques	311
Notes	319
Chapitre VI – CHAMPS DE JAUGE SUR RESEAU	321
1. Généralités	321
1.1 Présentation	321
1.2 Limite continue	325
1.3 Paramètre d'ordre et théorème d'Elitzur	333
1.4 Dualité	336
2. Structure du diagramme de phase	342
2.1 La solution de champ moyen	342
2.2 Corrections au champ moyen	348
2.3 Groupes discrets: développement en $1/d$	351
2.4 Groupes continus: calcul des corrections	353

3. Développement de couplage fort	357
3.1 Convergence	357
3.2 Développement en caractères	361
3.3 Energie libre	366
3.4 La tension de corde et la transition rugueuse	370
3.5 Le spectre de masse	375
4. Fermions sur réseaux	378
4.1 Le problème du doublement	378
4.2 Le théorème de Nielsen–Ninomiya	381
4.3 Fermions de Kogut–Susskind	383
Notes	386
INDEX	389

Avant-propos

La théorie quantique des champs vise à décrire les interactions fondamentales dans un cadre unique conciliant les principes de la mécanique quantique et les invariances géométriques et cinématiques. Cette discipline s'est enrichie, au cours des deux dernières décennies, d'applications insoupçonnées, qui tiennent à la parenté de ses méthodes avec celles de la physique statistique, à travers l'étude des phénomènes critiques ou des modèles de physique du solide. Certains développements ont permis de s'affranchir en partie des techniques perturbatives, qui sont à la source de succès considérables dans le domaine des interactions électromagnétiques et faibles. En jetant un jour nouveau sur le rôle du groupe de renormalisation, en permettant d'aborder des questions comme le confinement des constituants dans la chromodynamique, en s'ouvrant aux possibilités de simulation numérique, en découvrant des problèmes nouveaux comme ceux posés par la théorie des cordes quantiques, la théorie des champs s'est entièrement renouvelée.

Nous nous sommes attachés à en donner un panorama complétant un texte précédent sur la théorie quantique des champs écrit par l'un des auteurs en collaboration avec J.-B. Zuber. Bien qu'on suppose du lecteur qu'il possède quelques rudiments de cette théorie, le présent ouvrage veut éviter de faire de trop nombreux appels à des connaissances extérieures et s'inscrit dans le cadre d'un enseignement destiné à de jeunes chercheurs et, plus généralement, à des scientifiques intéressés par les progrès de cette discipline. L'abondance des matières, le rythme rapide des nouvelles contributions et les compétences limitées des auteurs ont cependant posé des bornes à l'ensemble des sujets traités.

Si l'on veut bien admettre ces limites, nous avons cependant tenté de décrire les fondements de la théorie euclidienne des champs, reposant sur l'usage des intégrales de chemins de Feynman et concrètement réalisée à travers les modèles statistiques qui utilisent un réseau discret, dont le paradigme est le modèle d'Ising. Ce point de vue permet d'attribuer un sens global aux quantités physiques, d'étudier des régimes de couplage fort, suggère l'existence de transitions de phases et montre le rôle du groupe de renormalisation agissant comme filtre des propriétés universelles au voisinage des théories critiques continues.

Le premier volume est consacré pour l'essentiel à l'illustration de ces thèmes. Il s'ouvre par une étude des chemins aléatoires et leur relation avec les champs bosoniques, et introduit les intégrales fermioniques sur l'exemple du modèle d'Ising bidimensionnel. Il expose la méthode du champ moyen, les propriétés relatives à l'invariance d'échelle, et illustre les idées de la renormalisation dans le cadre de la transition de Kosterlitz et Thouless du modèle des rotateurs. Un long chapitre est consacré à la théorie des transitions de phases continues à partir des idées de Wilson, où nous nous sommes appuyés sur les contributions de nos collègues E. Brézin, J.-C. Le Guillou et J. Zinn-Justin. C'est encore à Wilson qu'on doit la formulation des théories de champs de jauge sur réseau et leurs applications à la chromodynamique et au confinement dont la présentation clos la première partie.

Le second volume est plus éclectique. On y trouve d'abord des indications sur les développements de haute ou basse température et les applications des simulations numériques de Monte Carlo, en particulier à la chromodynamique. Un copieux chapitre décrit les résultats récents concernant les systèmes critiques bi-dimensionnels, dans le cadre des théories conformes, qui servent aussi d'outil à la théorie des cordes quantiques. Nous discutons ensuite les applications de l'intégration fermionique à des systèmes désordonnés simples. Enfin le dernier chapitre expose quelques résultats de géométrie aléatoire et introduit l'étude des surfaces fluctuantes.

Dans la première partie, au risque de répétitions, nous nous sommes efforcés de présenter le sujet de manière aussi élémentaire que possible. Nous ne supposons du lecteur qu'une certaine familiarité avec la notion de poids statistique de Gibbs, ainsi qu'avec la représentation des amplitudes de transition quantiques comme superpositions relatives à toutes les évolutions possibles, affectées d'un poids exponentiel dans l'action. C'est précisément ce parallélisme qui est à la source des convergences évoquées précédemment.

Le choix des sujets traités et les nombreuses omissions reflètent les intérêts des auteurs et leurs préoccupations. Nous ne sommes que trop conscients de nombreuses lacunes dont la liste serait à l'origine d'un texte encore plus volumineux. Il est quelque peu dangereux de vouloir systématiser ce que l'on a cru comprendre sans laisser percer deci-delà des ignorances. Il est bon de comprendre à quel point la recherche débouche sur des problèmes ouverts, des questions en suspens, des interrogations. Comprendre nécessite le plus souvent que l'on reprenne la plume, que l'on retrace les étapes d'un raisonnement, que l'on refasse un calcul, que d'une façon générale on ne se satisfasse jamais de ce que l'on trouve écrit ou dit ici et là.

Malgré tous nos efforts, et ils s'étaient hélas sur une trop longue période, il nous a été difficile, voire impossible, de polir suffisamment notre texte pour éviter les notations conflictuelles, fruit de l'usage, les erreurs matérielles, voire les erreurs tout court. Comme il est rituel, nous invitons le lecteur patient à les redresser et à nous en faire part. Nous espérons cependant que ces défauts inévitables ne nuisent pas trop à la compréhension de

l'ouvrage, même si une quantité change parfois de symbole de chapitre en chapitre, ou si la même lettre désigne dans des paragraphes voisins deux entités distinctes.

Nous avons inclus des passages en petits caractères, concernant des compléments, des explications et quelquefois des exercices, le plus souvent résolus. En outre, quelques appendices constituent de (trop) brefs résumés de sujets qu'il n'était pas possible de présenter en détail. Enfin des notes bibliographiques complètent chacun des chapitres et sont destinées à indiquer nos sources, fournir des jalons, et surtout à encourager le lecteur à poursuivre son étude dans les articles originaux ou de revue. Ces notes sont évidemment très incomplètes.

Parmi les textes qui servent de références, figurent bien entendu ceux de la série publiée par C. Domb et M.S. Green, et maintenant J. Lebowitz, intitulée *Phase Transitions and Critical Phenomena*, publiée par Academic Press (New York). En ce qui concerne la mécanique statistique, citons K. Huang, *Statistical Mechanics*, J. Wiley and Sons, New York (1963), H.E. Stanley *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press (1971), S.K. Ma *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin New York (1976) et *Statistical Mechanics*, World Scientific, Singapour (1985), D.J. Amit *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, World Scientific, Singapour (1984).

Tandis que nous préparions cette édition sont venus s'ajouter plusieurs ouvrages traitant des mêmes sujets. Il s'agit tout d'abord du livre de M. Le Bellac *Des phénomènes critiques aux champs de jauge, une introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs*, publié dans la même collection par InterEditions, Editions du CNRS Paris (1988) et de ceux de G. Parisi *Statistical Field Theory*, Addison Wesley, New York (1988) et S. Polyakov *Gauge Fields and Strings*, Harwood (1988). Enfin un traité de J. Zinn-Justin devrait paraître sous peu.

La référence classique où l'on trouve un traitement des intégrales de chemins est R.P. Feynman et A.R. Hibbs *Quantum Mechanics and Path Integrals*, Mc Graw Hill, New York (1965). Des aspects variés sont discutés dans C. Itzykson et J.-B. Zuber *Quantum Field Theory*, Mc Graw Hill, New York (1980), P. Ramond *Field Theory, A Modern Primer*, Benjamin, Cummings, Reading, Mass. (1981), J. Glimm et A. Jaffe *Quantum Physics*, Springer, New York (1981). De nombreux progrès récents de la théorie des champs qui n'ont pas trouvé place dans notre traitement sont présentés dans S. Coleman *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1985), S. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino et E. Witten *Current Algebra and Anomalies*, World Scientific, Singapour (1985). Pour s'initier aux systèmes intégrables, on consultera R. Baxter *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, New York (1982) et M. Gaudin *La Fonction d'Onde de Bethe*, Masson, Paris (1983). Bien entendu cette liste n'est qu'indicative et l'on trouve de nombreuses autres références dans les notes.

L'un des auteurs (C.I.) remercie ses collègues qui lui ont fourni l'occasion d'enseigner des parties de cet ouvrage dans le cadre du Troisième cycle de Suisse Romande à Lausanne, du Département de Physique de l'Université de Louvain la Neuve, du Troisième cycle de Physique Théorique à Marseille et à Paris, où les deux auteurs ont eu l'opportunité de participer à l'enseignement. Nos remerciements vont aux secrétaires de ces institutions qui ont pris part à la frappe des divers textes préliminaires, ainsi qu'à toutes celles et tous ceux qui ont permis la réalisation finale, à Dany Bunel et Sylvie Zaffanella qui ont eu la lourde charge de mettre au point le manuscrit, à M. Leduc qui a accueilli ce livre dans sa collection.

Nous remercions chaleureusement les chercheurs et amis du Service de Physique Théorique à Saclay qui au cours des années ont été nos interlocuteurs et collaborateurs et qui sont trop nombreux pour être tous cités ici.

Enfin le Commissariat à l'Energie Atomique et son Institut de Recherche Fondamentale nous ont toujours offert des conditions de travail d'une qualité difficile à égaler. C'est en quelque sorte témoigner de notre gratitude que de dédier ce livre aux futurs chercheurs. C'est aussi la raison pour laquelle nous sommes heureux de bénéficier d'une édition française grâce au concours du Centre National de la Recherche Scientifique. Bien souvent il nous est arrivé d'hésiter sur une formulation, simplement parce que nous avons perdu l'habitude de nous exprimer dans notre langue et que nous cherchions un précédent impossible à trouver, tant la langue anglaise a fini par envahir toutes les publications dans notre domaine. S'il n'est pas souhaitable de retourner à l'époque de la tour de Babel et si l'on ne peut espérer revenir aux siècles où le français était une langue scientifique universelle, du moins peut-on souhaiter maintenir un vocabulaire et une capacité d'exprimer les idées contemporaines dans sa propre langue. Sans prétendre aux effets de style, nous nous sommes attachés à trouver une terminologie simple qui puisse rendre compte de concepts nouveaux et nous nous associons à tous les efforts, heureusement de plus en plus nombreux, pour maintenir une langue scientifique vivante.

Saclay, Février 1989

Avertissement

Dans cet ouvrage, nous avons utilisé les notations internationales. Ainsi, les nombres décimaux ont un point décimal plutôt qu'une virgule, \ln représente le logarithme népérien, \tan la tangente, \sinh , \cosh , \tanh les lignes hyperboliques, etc.

CHAPITRE I

DU MOUVEMENT BROWNIEN

AUX CHAMPS EUCLIDIENS

On sera peut-être surpris de nous voir entreprendre cette étude par une description du mouvement brownien. Ce sujet constitue pourtant une introduction naturelle au concept de champ euclidien quantique, comme on le verra par la suite, et permet de donner une interprétation intuitive qui met en relief le rôle joué par la dimensionalité. Les courbes browniennes ont une dimension effective égale à deux (leur dimension de Hausdorff). Ce fait est particulièrement riche d'informations. Il signifie, entre autres, que deux courbes de ce type ne peuvent se couper, donc interagir, si la dimension est supérieure à quatre. C'est ce que nous montrons dans la première partie du chapitre I, où nous discutons aussi le passage d'une version discrète, c'est-à-dire faisant intervenir un réseau, à une marche dans l'espace continu. Nous présentons dans la deuxième partie une analyse semblable pour les champs en interaction, initialement développée par K. Symanzik. Cette analyse est reliée aux développements de couplage fort, ou encore à haute température, qui seront étudiés plus loin, en particulier au chapitre VI de ce volume et au chapitre VII du deuxième volume. L'utilisation des champs à n composantes fournit le moyen d'introduire les marches avec retour exclu, grâce à l'artifice d'un prolongement dans la variable n et un passage à la limite $n \rightarrow 0$. Nous concluons ce chapitre par une discussion des systèmes élémentaires à une dimension. Ceci nous offre l'occasion de présenter le concept de matrice de transfert.

1. Mouvement brownien

1.1 Marche au hasard

Considérons une marche au hasard sur un réseau régulier et infini de l'espace euclidien à d dimensions. Chaque point du réseau possède q voisins; q est appelé le nombre de coordination du réseau. A intervalles de temps réguliers $\Delta t = 1$, un marcheur choisit de quitter le point qu'il occupe pour l'un de ses voisins, choisi au hasard. La probabilité de le retrouver à l'un quelconque des points voisins est $1/q$. Les déplacements successifs sont indépendants. Pour simplifier, nous choisissons un réseau (hyper)cubique

engendré par d vecteurs de translation orthogonaux $\mathbf{e}_{(1)}, \dots, \mathbf{e}_{(d)}$ tels que $\mathbf{e}_{(\mu)} \cdot \mathbf{e}_{(\nu)} = \delta_{\mu\nu}$. Les points seront notés $\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_{(\mu)}$, les coordonnées x^μ étant des entiers. Pour un tel réseau, on a $q = 2d$. La figure 1 donne une illustration pour une marche au hasard de 2000 pas en dimension deux. Notez la présence des grands domaines où le marcheur a visité tous les points.

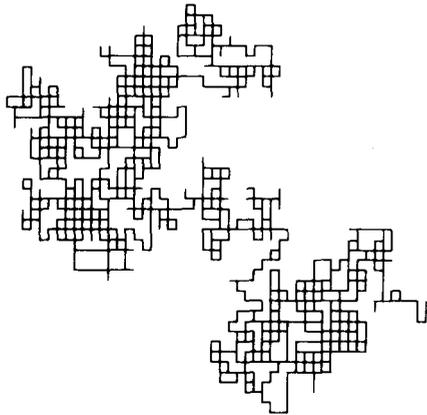


Figure 1 : Marche au hasard de 2000 pas en dimension 2.

Cherchons en premier lieu à déterminer la probabilité conditionnelle $P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0)$ qu'a le marcheur d'être au point \mathbf{x}_1 au temps t_1 sachant qu'il était au point \mathbf{x}_0 au temps t_0 . Pour $t_1 = t_0$, on a

$$P(\mathbf{x}_1, t_0; \mathbf{x}_0, t_0) = \delta_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0} \quad (1)$$

Le symbole $\delta_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0}$ est une notation compacte pour le produit $\prod_{\mu=1}^d \delta_{x_1^\mu, x_0^\mu}$. La probabilité P n'a de sens que pour $t_1 \geq t_0$ et ne dépend que des différences $t_1 - t_0$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, le processus étant invariant par translation dans le temps et dans l'espace. A t_1 fixé, la condition de normalisation s'écrit

$$\sum_{\mathbf{x}_1} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = 1 \quad (2)$$

Chacune des probabilités P est positive ou nulle.

La formulation discrète, adoptée ici, dépend fortement du choix du réseau. Par exemple si $t_1 - t_0$ est pair (impair) le marcheur ne peut se trouver que sur un site dont la somme des coordonnées de $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ est paire (impaire). Nous serons cependant intéressés par des caractéristiques asymptotiques qui ne dépendent plus de la structure du réseau.

Il existe une relation linéaire de récurrence entre les probabilités P au temps t et $t + 1$ qui exprime que le marcheur ne peut atteindre le point \mathbf{x} au temps $t + 1$ que s'il était en un site voisin $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \pm \mathbf{e}_{(\mu)}$ au temps t

$$P(\mathbf{x}, t+1; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{2d} \sum_{\substack{\mathbf{x}' \\ \text{voisin de } \mathbf{x}}} P(\mathbf{x}', t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (3)$$

Cette relation généralise évidemment la construction du triangle arithmétique de Pascal correspondant au cas $d = 1$. Les équations (1) et (3) déterminent alors P . Nous l'illustrons sur la figure 2 pour un cas bidimensionnel.

$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
		1	1
	1	2 . 2	3 . 3
1	1 . 1	1 . 4 . 1	1 . 9 . 9 . 1
	1	2 . 2	3 . 3
		1	1
1	4	16	64

Figure 2 : Probabilités relatives pour une marche au hasard en dimension 2 sur un réseau carré. Le facteur de normalisation est 4^{-t} .

L'équation (3) introduit une version discrétisée de l'opérateur laplacien que nous noterons Δ_r ,

$$\Delta_r f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2d} \sum_{\mu=1}^d [f(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{(\mu)}) + f(\mathbf{x} - \mathbf{e}_{(\mu)}) - 2f(\mathbf{x})] \quad (4)$$

ce qui permet de récrire

$$P(\mathbf{x}, t+1; \mathbf{x}_0, t_0) - P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \Delta_r P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (5)$$

approximation aux différences finies de l'équation de diffusion dans le continu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) P = 0 \quad (6)$$

La solution des équations (3) ou (5) s'obtient par transformation de Fourier. Notant

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{P}(\mathbf{k}, t) \quad (7)$$

nous trouvons

$$\tilde{P}(\mathbf{k}, t+1) = \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \cos k_{\mu} \tilde{P}(\mathbf{k}, t), \quad \text{avec } \tilde{P}(\mathbf{k}, t_0) = e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_0}$$

On en déduit

$$P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu} \right)^{t_1 - t_0} \quad (8)$$

Nous voulons maintenant examiner ces expressions avec une résolution grossière relativement au pas du réseau et pour des temps suffisamment longs. Il est commode pour cela de faire un changement d'échelle sur les vecteurs de base en introduisant une longueur élémentaire a , de sorte que $\mathbf{e}_{(\mu)} \cdot \mathbf{e}_{(\nu)} = a^2 \delta_{\mu\nu}$ et de considérer que l'intervalle de temps élémentaire est τ au lieu de 1. Dans les représentations précédentes il faut alors faire les substitutions $t \rightarrow t/\tau$, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/a$ et $\mathbf{k} \rightarrow a\mathbf{k}$, ce qui revient à

$$P(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos ak_{\mu} \right)^{(t_1 - t_0)/\tau} \quad (9)$$

Nous voulons maintenant faire tendre a et τ vers zéro, en maintenant les distances et les intervalles de temps fixes. La probabilité de trouver le marcheur au voisinage de \mathbf{x}_1 , dans un volume Δx suffisamment grand par rapport à la maille a^d , mais suffisamment petit pour que P ne varie pas de façon appréciable à l'intérieur de Δx (ce qui implique $(t_1 - t_0)/\tau$ grand), est donnée par

$$p(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) \Delta x = \sum_{\mathbf{x}'_1 \in \mathbf{x}_1 + \Delta x} P(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}_0; t_1 - t_0) \approx \frac{\Delta x}{a^d} P(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) \quad (10)$$

La densité de probabilité $p = P/a^d$ est alors

$$p(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) = \lim_{a, \tau \rightarrow 0} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)} \left(\frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos ak_{\mu} \right)^{(t_1 - t_0)/\tau} \quad (11)$$

La limite n'a de sens que pour a et τ tendant vers zéro de telle sorte que τ/a^2 reste fini, comme on le voit en développant le cosinus

$$\left(\frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos ak_{\mu} \right)^{(t_1-t_0)/\tau} = \left(1 - \frac{a^2}{2d} \mathbf{k}^2 + \dots \right)^{(t_1-t_0)/\tau} \rightarrow e^{-(t_1-t_0)\mathbf{k}^2} \quad (12)$$

où nous avons choisi une échelle de temps en posant

$$\tau = \frac{1}{2d} a^2 \quad (13)$$

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, t_1 - t_0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \exp[-(t_1 - t_0)\mathbf{k}^2 + i(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{k}] \\ &= \frac{1}{[4\pi(t_1 - t_0)]^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2}{4(t_1 - t_0)}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

Nous reconnaissons le noyau caractéristique de l'équation de la diffusion dans le continu. Ce noyau positif, symétrique, satisfait aux relations

$$\int d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 1 \quad (15a)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow t_0} p(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \delta^d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \quad (15b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) p(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad (15c)$$

$t_2 > t_1 > t_0 \Rightarrow$

$$\int d^d \mathbf{x}_1 p(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_1, t_1) p(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = p(\mathbf{x}_2, t_2; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (15d)$$

La condition (15a) exprime la conservation des probabilités; elle généralise au continu l'équation (2) établie pour le cas discret; (15b) redonne la condition initiale en mesure, malgré les approximations faites. Quant à (15c) c'est l'équation de diffusion. Enfin (15d) traduit le fait qu'à un temps intermédiaire t_1 compris entre t_0 et t_2 le marcheur qui a la mémoire (très) courte se trouvait quelque part. Cette dernière relation, caractéristique d'un processus Markovien est en accord avec la propriété de convolution des intégrales gaussiennes et nous permettra d'obtenir par la suite une représentation en terme d'intégrale sur les chemins, pendant continu d'une propriété analogue sur le réseau.

Avant d'élaborer ce point, revenons à la limite (11) ce qui nous a permis de trouver une loi de diffusion (14) isotrope et invariante par translation, fonction de $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)^2$, à partir d'une variante discrète qui ne possédait

que les symétries cubiques. Ce faisant, nous avons fixé les intervalles de temps $t_1 - t_0$ et les distances $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ physiques et nous avons considéré que les mailles spatiales a et temporelle τ tendaient vers zéro, le rapport τ/a^2 restant fixé. En toute rigueur, il fallait que les coordonnées de $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ et $t_1 - t_0$ soient des multiples de a et τ respectivement. Nous aurions bien sûr pu procéder à l'inverse en faisant tendre $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ et $t_1 - t_0$ vers l'infini à l'échelle des mailles, mais la visualisation en aurait souffert. La première démarche rappelle la limite ultraviolette en théorie des champs où un facteur de coupure (proportionnel ici à a^{-1} dans une échelle de nombre d'onde) tend vers l'infini, les quantités mesurables étant maintenues constantes. Dans le cas présent nous avons aussi utilisé un facteur de coupure τ^{-1} dans les fréquences, avec la relation $\tau^{-1} \sim a^{-2}$. Une interprétation que nous développerons plus loin est que la courbe brownienne typique a une "dimension" égale à deux. On parle de dimension de Hausdorff. La courbe étant parcourue à vitesse constante (les intervalles entre sauts sont égaux à τ), sa longueur est proportionnelle à $t_1 - t_0$, la distance typique parcourue n'étant que de l'ordre $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \sim (t_1 - t_0)^{\frac{1}{2}}$. De manière imagée, si avec une quasi-certitude l'ensemble des courbes browniennes issues d'un point sont contenues dans un (hyper) volume Ω et si on fait croître leur longueur $t_1 - t_0$ d'un facteur λ , le nouveau volume nécessaire pour les contenir aura une taille $\lambda^{d/2}\Omega$. Si on définit un exposant ν caractérisant la distance bord à bord selon

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \sim (t_1 - t_0)^\nu \quad (16)$$

alors la valeur de ν pour le mouvement brownien est

$$\nu = \frac{1}{2} \quad (17)$$

premier exemple simple d'*exposant critique*. Nous reviendrons souvent sur cette notion dans les chapitres qui suivent.

A vrai dire, l'explication la plus élémentaire du résultat (16)-(17) est le théorème central limite en théorie des probabilités. Les pas successifs sont des variables aléatoires non corrélées et l'écart quadratique moyen de la somme des distances ne croît que comme le nombre de termes, c'est-à-dire le nombre de pas.

Vérifier que la marche au hasard sur un réseau bidimensionnel triangulaire conduit à la même limite continue (14) que celle sur un réseau carré.

Sur un réseau triangulaire chaque point a $q = 6$ voisins. Il est commode, comme on le voit sur la figure 3, d'utiliser une base redondante de 3 vecteurs $\mathbf{e}_{(i)}$ tels que $\sum \mathbf{e}_{(i)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{e}_{(i)}^2 = 1$, $\mathbf{e}_{(i)} \cdot \mathbf{e}_{(j)} = -\frac{1}{2}$ ($i \neq j$). La probabilité conditionnelle que le marcheur soit au point \mathbf{x} au temps $t + 1$ est donnée par

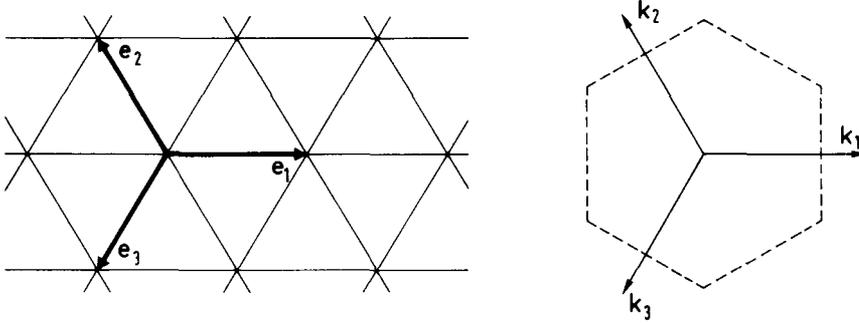


Figure 3 : Le réseau triangulaire et sa première zone de Brillouin.

$$P(\mathbf{x}, t+1) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 P(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{(i)}, t) + P(\mathbf{x} - \mathbf{e}_{(i)}, t)$$

Les points du réseau sont repérés par trois entiers $\{n_i\}$, avec $\mathbf{x} = \sum n_i \mathbf{e}_{(i)}$. On peut ajouter une constante aux n_i sans changer \mathbf{x} . De même la grandeur conjuguée $\mathbf{k} = \sum k_i \mathbf{e}_{(i)}$ est caractérisée par trois nombres k_i , auxquels on impose la condition supplémentaire $\sum k_i = 0$. On a donc

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \frac{3}{2} \sum k_i n_i \quad , \quad \mathbf{k}^2 = \frac{3}{2} (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)$$

Le domaine d'intégration dans la variable \mathbf{k} est l'hexagone $|k_i| < \pi$, dont l'aire est $2\pi^2\sqrt{3}$. Ceci conduit à

$$P(\mathbf{x}, t) = \int_{\text{hexagone}} \frac{d^2\mathbf{k}}{2\pi^2\sqrt{3}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left[\frac{1}{3} \left(\cos \frac{3}{2} k_1 + \cos \frac{3}{2} k_2 + \cos \frac{3}{2} k_3 \right) \right]^t$$

Changeons maintenant d'échelle selon la règle $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/a$, $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}a$, $t \rightarrow t/\tau$, $t = a^2/8$, nous obtenons alors, à la limite $a \rightarrow 0$ le même résultat que précédemment

$$p(\mathbf{x}, t) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} e^{-t\mathbf{k}^2 + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{4\pi t} e^{-\mathbf{x}^2/4t}$$

en utilisant le fait qu'il y a $2\Delta x/a^2\sqrt{3}$ points du réseau dans une portion d'aire Δx . Ce résultat confirme l'universalité de la limite isotrope.

En dimension arbitraire cette construction peut être considérée comme la projection de la base orthonormée d'un réseau hypercubique à $(d+1)$ dimensions sur l'hyperplan $x_1 + \dots + x_{d+1} = 0$. Le réseau ainsi obtenu est le dual de la section du réseau hypercubique par le plan précédent. Pour $d=3$, ceci donne le réseau cubique centré dual du réseau cubique à face centrée.

Le temps moyen passé en un point, fini ou infini, est donné par l'expression

$$G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \sum_{t_1=t_0}^{\infty} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu}} \quad (18)$$

qui satisfait à

$$G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \delta_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0} + \frac{1}{2d} \sum_{\mu} G(\mathbf{x}_1 + \mathbf{e}_{(\mu)} - \mathbf{x}_0) + G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{e}_{(\mu)} - \mathbf{x}_0) \quad (19)$$

soit encore

$$\Delta_r G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -\delta_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0} \quad (20)$$

Cette relation justifie le nom de fonction de Green (symétrique et positive) de l'opérateur $-\Delta_r$. On constate que $G(\mathbf{x})$ est bien défini pour $d > 2$. Pour $d = 1$ ou 2 le temps passé en un point est infini, en raison de la divergence infrarouge de l'intégrale (18) où l'intégrand se comporte comme $d^d \mathbf{k} / k^2$ pour k^2 petit. On peut cependant former alors la différence

$$\begin{aligned} G^s(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) &= G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) - G(\mathbf{0}) \\ &= \sum_{t_1=t_0}^{\infty} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) - P(\mathbf{x}_0, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) \\ &= \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{\cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) - 1}{1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu}} \end{aligned} \quad (21)$$

qui est bien définie quelle que soit la valeur de d . Elle satisfait encore à l'équation (20), puisque formellement on n'a fait que soustraire une constante, qui peut être infinie. Cependant on perd ainsi la propriété de positivité, comme l'illustre l'expression de G^s à une dimension

$$d = 1 \quad G^s(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0| \quad (22)$$

Plus généralement considérons

$$G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \lambda) = \lambda \sum_{t_1=t_0}^{\infty} \lambda^{t_1 - t_0} P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) \quad (23)$$

qui coïncide pour $\lambda = 1$ avec la fonction de Green considérée plus haut. Pour $|\lambda| < 1$, la somme est convergente et admet la représentation intégrale

$$G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \lambda) = \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)}}{\lambda^{-1} - \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu}} \quad (24)$$

qui montre en outre que

$$[-\Delta_r + (\lambda^{-1} - 1)] G(\mathbf{x}, \lambda) = \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{0}} \quad (25)$$

Il s'agit donc de l'analogue du propagateur massif en physique des particules. Si l'on réintroduit le pas du réseau, $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/a$, $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}a$, la quantité qui possède une limite continue est obtenue pour $1/\lambda \equiv 1 + m^2 a^2/2d$, à la limite où $a \rightarrow 0$

$$g(\mathbf{x}, m^2) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2da^{d-2}} G\left(\frac{\mathbf{x}}{a}, \lambda\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \quad (26)$$

1.2 Somme sur les chemins

Les propriétés du mouvement brownien peuvent aussi bien s'exprimer en terme de sommes sur les chemins parcourus. Ceci paraît tout naturel dans le contexte présent et se trouve à la source de généralisations de plus en plus puissantes. Cette interprétation découle directement de la relation (3) : un chemin de longueur $t + 1$ est obtenu en ajoutant un maillon à un chemin de longueur t . L'itération de cette relation conduit à

$$P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{\text{Nombre de chemins joignant } \mathbf{x}_0 \text{ à } \mathbf{x}_1 \text{ avec } t_1 - t_0 \text{ pas}}{\text{Nombre total de chemins issus de } \mathbf{x}_0 \text{ avec } t_1 - t_0 \text{ pas}} \quad (27)$$

Le dénominateur est égal à $(2d)^{t_1 - t_0} = q^{t_1 - t_0}$. Une autre démonstration découle de la formule (8), où l'on remplace les cosinus par des exponentielles, l'on développe l'intégrand et l'on intègre en \mathbf{k} les termes successifs. L'égalité (27) s'interprète en disant que tous les chemins effectués pendant le temps $t_1 - t_0$ sont équiprobables. Nous pouvons encore récrire cette formule

$$P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \frac{1}{(2d)^{t_1 - t_0}} \sum_{\mathbf{x}(t)} \prod_{t=0}^{t_1 - t_0 - 1} \delta_{1, \sum_{\mu=1}^d |x^{\mu}(t+1) - x^{\mu}(t)|} \quad (28)$$

où l'on a pris une longueur unité pour chaque maillon élémentaire et posé $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}(t_1 - t_0) = \mathbf{x}_1$. Cette expression se prête difficilement à un passage au continu. Il est bon d'introduire une notation plus compacte. Nous désignerons par ω un chemin joignant \mathbf{x}_0 à \mathbf{x}_1 . Par construction c'est un ensemble de liens du réseau dont la "frontière" $\partial\omega$, c'est-à-dire l'ensemble des sites qui appartiennent à un nombre impair de liens de ω , se réduit

à $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\}$. Plus précisément, la définition de ω suppose qu'on spécifie la manière dont on le décrit au cours du temps. On exprimera donc (27) comme

$$P(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \sum_{\substack{\omega, \partial\omega = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\} \\ |\omega| = t_1 - t_0}} \left(\frac{1}{2d}\right)^{|\omega|} \quad (29)$$

avec $|\omega|$ nombre de liens de ω . Ces expressions se généralisent aux fonctions de Green, et d'après (23) pour $\lambda < 1$,

$$G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \lambda) = \lambda \sum_{\omega, \partial\omega = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1\}} \left(\frac{\lambda}{2d}\right)^{|\omega|} \quad (30)$$

Le temps de séjour en \mathbf{x}_1 s'obtient par passage à la limite $\lambda \rightarrow 1$.

Cette formule suggère que le passage au continu implique une somme sur des chemins pondérés par une exponentielle de la forme $\exp(-A|\omega|)$ où $|\omega|$ désigne encore la longueur du chemin. Par abus de langage l'argument de l'exponentielle (au signe près) est désormais baptisé *action*, par analogie avec la mécanique quantique, alors qu'en mécanique statistique d'équilibre, à un facteur $\beta = 1/kT$ près, on l'identifierait plutôt à l'énergie d'une configuration classique – ici un chemin allant de \mathbf{x}_0 à \mathbf{x}_1 . Quoiqu'il en soit, la façon correcte de tendre vers la limite asymptotique du continu consiste, comme on la déjà vu, à regrouper de très nombreux termes infinitésimaux lorsque la maille a tend vers zéro. Ceci produit une forme très différente pour l'action, de sorte que les formules précédentes, se prêtent mal à cette opération. Nous allons plutôt procéder comme suit

Commençons par remarquer que (avec $a^2 = 2d\tau$)

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}, m^2) &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2da^{d-2}} G\left(\frac{\mathbf{x}}{a}, \lambda \equiv \left(1 + \frac{m^2 a^2}{2d}\right)^{-1}\right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2da^{d-2}} \sum_{t/\tau=0}^{\infty} \left(1 + \frac{m^2 a^2}{2d}\right)^{-t/\tau} P\left(\frac{\mathbf{x}}{a}, \frac{t}{\tau}; \mathbf{0}, 0\right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{2d} \sum_{t/\tau=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 a^2 t}{2d\tau}\right) p(\mathbf{x}, t) \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{-m^2 t} p(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (31)$$

On aurait d'ailleurs aussi pu procéder directement en combinant les relations (26) et (14). Utilisons alors la propriété de convolution (15d)

$$p(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}_0, t_0) = \int d^d \mathbf{x} p(\mathbf{x}_1, t_1; \mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, t_0) \quad t_0 < t < t_1 \quad (32)$$

En subdivisant ainsi l'intervalle de temps $t_1 - t_0$ un nombre arbitraire de fois et en utilisant l'expression (14) pour la fonction p , il vient

$$p(\mathbf{x}_f, t_f; \mathbf{x}_i, t_i) = \int \prod_{j=1}^{n-1} \frac{d^d \mathbf{x}_j}{[4\pi(t_{j+1} - t_j)]^{d/2}} \frac{1}{[4\pi(t_1 - t_i)]^{d/2}} \times \exp \left[-\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j)^2}{t_{j+1} - t_j} \right] \quad (33)$$

(avec $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_i$, $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_f$). Ceci donne un sens précis à la formule symbolique

$$p(\mathbf{x}_f, t_f; \mathbf{x}_i, t_i) = \int_{\substack{\mathbf{x}(t_i)=\mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}(t_f)=\mathbf{x}_f}} \mathcal{D}\mathbf{x}(t) \exp \left[-\frac{1}{4} \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\mathbf{x}}^2 \right] \quad (34)$$

où $\mathcal{D}\mathbf{x}(t)$ implique les intégrales sur les positions aux temps intermédiaires normalisées comme l'indique (33). De même (31) nous donne une formule semblable pour $g(\mathbf{x}, m^2)$

$$g(\mathbf{x}, m^2) = \int_0^\infty dt \int_{\substack{\mathbf{x}(0)=0 \\ \mathbf{x}(t)=\mathbf{x}}} \mathcal{D}\mathbf{x}(t') \exp \left[-\int_0^t dt' (m^2 + \frac{1}{4} \dot{\mathbf{x}}(t')^2) \right] \quad (35)$$

Ces intégrales de chemins dans le continu – qui malgré leur apparence symbolique ont un sens précis indiqué par la formule (33) – apparaissent assez différentes de leurs analogues discrets. L'action est à présent $\int_0^t dt' (m^2 + \frac{1}{4} \dot{\mathbf{x}}(t')^2)$, l'inverse de m donnant l'échelle des distances. Cette formule résulte du comportement à courte distance de la limite continue $p(\mathbf{x}, t) \sim \exp(-\mathbf{x}^2/4t)$, et non de son original discret P . Un petit incrément de distance continue est la somme d'un nombre infini de pas sur le réseau. On notera que dans la notation continue la longueur d'un chemin serait $\int_0^t dt' \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t')^2}$. Il faut remarquer aussi que les expressions discrètes étaient indépendantes d'une paramétrisation des chemins. Il n'en est plus ainsi formellement de l'action qui intervient dans (35).

1.3 La dimension deux des courbes browniennes

Dans l'espace tridimensionnel deux éléments de surface se coupent en général suivant une courbe, à quatre dimensions en des points isolés. Sauf situation exceptionnelle, en dimension plus grande que quatre une surface ne se recoupe pas. Un mouvement brownien ressemble plus à cet égard à une surface qu'à une courbe. En probabilité, nous nous attendons à des propriétés analogues qui seront à la source d'une compréhension intuitive de certaines caractéristiques fondamentales des phénomènes critiques.

Précisons ces idées en revenant à la marche au hasard sur le réseau cubique, avec la probabilité de présence au temps t au point \mathbf{x} donnée par (8). Cherchons maintenant à savoir quelle probabilité a le marcheur d'être passé par un site \mathbf{x} pendant l'intervalle de temps t , en supposant qu'il soit parti de l'origine au temps $t = 0$. On convient que si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, la probabilité de visite en question est celle de retour à l'origine en excluant ainsi l'instant de départ. Nous maintiendrons cette convention dans la suite sans nous y référer explicitement. Pour calculer la quantité cherchée il ne suffit évidemment pas de sommer $P(\mathbf{x}, t)$ sur t . Nous l'avons vu, cette somme n'est pas une probabilité mais le temps moyen passé au point \mathbf{x} ; nous verrons cependant que la quantité cherchée est intimement liée à cette somme qui est aussi la fonction de Green.

Définissons des quantités intermédiaires $P_i(\mathbf{x}, t)$ donnant la probabilité d'être au point \mathbf{x} pour la i -ème fois au temps t . Comme il s'agit d'événements exclusifs on a

$$P(\mathbf{x}, t) = \delta_{t,0}\delta_{\mathbf{x},\mathbf{0}} + \sum_{i=1}^{\infty} P_i(\mathbf{x}, t) \quad (36)$$

Seul un nombre fini de termes contribue à cette somme, puisque $P_i(\mathbf{x}, t)$ s'annule lorsque $i > t$. En outre $P_i(\mathbf{x}, 0) = 0$. Or un $i + 1$ -ème passage au point \mathbf{x} suit un i -ème passage. Etant donné l'homogénéité spatiale et temporelle du mouvement, on en tire la relation de récurrence

$$P_{i+1}(\mathbf{x}, t) = \sum_{t_1+t_2=t} P_i(\mathbf{x}, t_1)P_1(\mathbf{0}, t_2) \quad (37)$$

En sommant sur les valeurs de i de 1 à l'infini, on trouve

$$P(\mathbf{x}, t) - P_1(\mathbf{x}, t) - \delta_{\mathbf{x},\mathbf{0}}\delta_{t,0} = \sum_{t_1+t_2=t} P(\mathbf{x}, t_1)P_1(\mathbf{0}, t_2) - \delta_{\mathbf{x},\mathbf{0}}P_1(\mathbf{x}, t) \quad (38)$$

La quantité cherchée – probabilité $\Pi(\mathbf{x})$ d'être passé par \mathbf{x} au moins une fois – est la somme des probabilités des événements exclusifs de premier passage. Il est commode d'introduire la fonction génératrice

$$\Pi(\mathbf{x}, \lambda) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t P_1(\mathbf{x}, t) \quad (|\lambda| \leq 1) \quad (39)$$

telle donc que

$$\Pi(\mathbf{x}) = \Pi(\mathbf{x}, \lambda = 1) \quad (40)$$

En tenant compte de la définition du propagateur (33), on tire alors de (38) que

$$\lambda^{-1}G(\mathbf{x}, \lambda) = \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{0}} + (1 - \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{0}})\Pi(\mathbf{x}, \lambda) + \lambda^{-1}G(\mathbf{x}, \lambda)\Pi(\mathbf{0}, \lambda) \quad (41)$$

Le facteur λ supplémentaire introduit dans la définition de G explique l'apparition de la combinaison $\lambda^{-1}G$. En faisant successivement $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ dans (41) on obtient une nouvelle interprétation remarquable du propagateur en terme de la probabilité de visite Π

$$\Pi(\mathbf{0}, \lambda) = 1 - \frac{\lambda}{G(\mathbf{0}, \lambda)} \quad (42)$$

$$\Pi(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{G(\mathbf{x}, \lambda)}{G(\mathbf{0}, \lambda)} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (43)$$

Si $d \leq 2$, le temps passé en tout point est infini donc $G(\mathbf{x}, \lambda) = \infty$ et $\Pi(\mathbf{x}, \lambda) = 1$ quel que soit \mathbf{x} à la limite $\lambda \rightarrow 1$. Comme annoncé on a donc la certitude que le marcheur visite tout point (Pölya 1921), ce qui justifie l'ancien adage: "tous les chemins mènent à Rome". Si $d > 2$ la probabilité de retour à l'origine $\Pi(\mathbf{0}) = 1 - G(\mathbf{0}, 1)^{-1}$ est positive mais inférieure à l'unité et elle décroît avec $1/d$ aux grandes valeurs de d . D'ailleurs $G(\mathbf{0}, 1)$ admet un développement en d^{-1} d'après l'expression (18)

$$\begin{aligned} G(\mathbf{0}, 1) = & 1 + \frac{1}{2d} + 3 \left(\frac{1}{2d}\right)^2 + 12 \left(\frac{1}{2d}\right)^3 + 60 \left(\frac{1}{2d}\right)^4 + \\ & + 355 \left(\frac{1}{2d}\right)^5 + 2380 \left(\frac{1}{2d}\right)^6 + 17430 \left(\frac{1}{2d}\right)^7 + \\ & + 134190 \left(\frac{1}{2d}\right)^8 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{2d}\right)^9\right) \end{aligned} \quad (44)$$

qui exprime qu'en grande dimension le temps passé à l'origine tend vers l'intervalle avant le premier saut, ce qui fait que la probabilité de retour à l'origine est très faible

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{0}) = & \left(\frac{1}{2d}\right) + 2 \left(\frac{1}{2d}\right)^2 + 7 \left(\frac{1}{2d}\right)^3 + 35 \left(\frac{1}{2d}\right)^4 + 215 \left(\frac{1}{2d}\right)^5 + \\ & + 1501 \left(\frac{1}{2d}\right)^6 + 11354 \left(\frac{1}{2d}\right)^7 + 88978 \left(\frac{1}{2d}\right)^8 + \mathcal{O}\left(\left(\frac{1}{2d}\right)^9\right) \end{aligned} \quad (45)$$

En revanche au voisinage de $d = 2$, si on s'autorise un prolongement dimensionnel

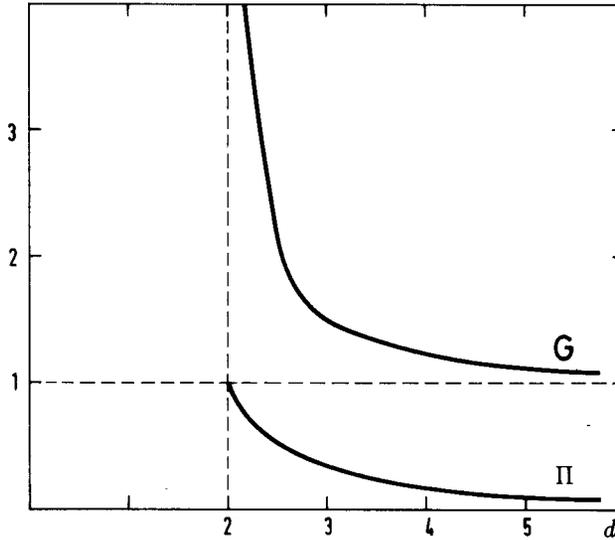


Figure 4 : Graphique des quantités $G(\mathbf{0}, 1)$ et $\Pi(\mathbf{0})$ en fonction de la dimension d .

$$G(\mathbf{0}, 1) = \frac{2}{\pi(d-2)} + \dots, \quad \Pi(\mathbf{0}) = 1 - \frac{1}{2}\pi(d-2) + \dots \quad (46)$$

Ces deux expressions sont portées en fonction de d sur la figure 4.

De même pour tout point \mathbf{x} différent de l'origine, $\Pi(\mathbf{x}) = 1$ si $d \leq 2$. Si $d > 2$ cette probabilité est inférieure à l'unité et décroît avec la distance à l'origine. Asymptotiquement

$$\Pi(\mathbf{x}) \xrightarrow{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} (1 - \Pi(\mathbf{0})) \frac{2d}{(d-2)S_d} \times \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}} \quad (47)$$

où S_d est l'aire de la sphère unité dans l'espace à d dimensions (sphère qui est elle même à $d-1$ dimensions)

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (48)$$

Notons au passage que si $d = 1$

$$G(\mathbf{0}, \lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{1 - \lambda \cos q} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \quad (49)$$

$$\Pi(\mathbf{0}, \lambda) = 1 - \sqrt{1 - \lambda^2}$$

On voit très explicitement que $G(\mathbf{0}, 1) = +\infty$ et que $\Pi(\mathbf{0}) = 1$.

Dans le cas général on peut aussi calculer la valeur moyenne du temps écoulé avant la première visite au point \mathbf{x} (en ce qui concerne l'origine il s'agit bien évidemment du premier retour à l'origine), cf. (39)

$$t(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{t=0}^{\infty} tP_1(\mathbf{x}, t)}{\Pi(\mathbf{x})} = \lambda \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln \Pi(\mathbf{x}, \lambda) \right|_{\lambda=1} \quad (50)$$

et, chose un peu surprenante, on constate que ce temps est infini en dimension inférieure ou égale à 4 ! Et ceci même quand on a la certitude que le chemin visite \mathbf{x} .

On peut donner une autre démonstration, très intuitive, des formules (42) et (43) en se souvenant que $G(\mathbf{x}, 1)$ est le temps moyen passé en \mathbf{x} (incluant le premier intervalle lorsque $\mathbf{x} = \mathbf{0}$). En effet, puisque $\Pi(\mathbf{0})$ est la probabilité de revisiter l'origine et $1 - \Pi(\mathbf{0})$ celle de ne jamais y revenir, on peut décomposer la moyenne $G(\mathbf{0}, 1)$ en termes correspondant à un, deux, trois... séjours, affectés des probabilités respectives $1 - \Pi(\mathbf{0})$, $\Pi(\mathbf{0})(1 - \Pi(\mathbf{0}))$, $\Pi^2(\mathbf{0})(1 - \Pi(\mathbf{0}))$, ... dont l'interprétation est immédiate; soit

$$\begin{aligned} G(\mathbf{0}, 1) &= 1[1 - \Pi(\mathbf{0})] + 2\Pi(\mathbf{0})[1 - \Pi(\mathbf{0})] + 3\Pi^2(\mathbf{0})[1 - \Pi(\mathbf{0})] + \dots \\ &= [1 - \Pi(\mathbf{0})][1 - \Pi(\mathbf{0})]^{-2} \\ &= [1 - \Pi(\mathbf{0})]^{-1} \end{aligned} \quad (51)$$

ce qui n'est autre que l'expression (42) pour $\lambda = 1$. De même si on se place en un point \mathbf{x} distinct de l'origine, on a une décomposition analogue

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, 1) &= 1\Pi(\mathbf{x})[1 - \Pi(\mathbf{0})] + 2\Pi(\mathbf{x})\Pi(\mathbf{0})[1 - \Pi(\mathbf{0})] \\ &\quad + 3\Pi(\mathbf{x})\Pi^2(\mathbf{0})[1 - \Pi(\mathbf{0})] + \dots \\ &= \Pi(\mathbf{x})[1 - \Pi(\mathbf{0})]^{-1} \\ &= \Pi(\mathbf{x})G(\mathbf{0}, 1) \end{aligned} \quad (52)$$

$$\Pi(\mathbf{x}) = \frac{G(\mathbf{x}, 1)}{G(\mathbf{0}, 1)} = \frac{\text{temps moyen passé en } \mathbf{x}}{\text{temps moyen passé à l'origine}} \quad (53)$$

ce qui complète la démonstration de (43).

On peut définir une quantité un peu plus fine que $G(\mathbf{x}, 1)$, soit $T(\mathbf{x}, t)$ le temps moyen passé au point \mathbf{x} dans l'intervalle de temps t , qui s'identifie au nombre moyen de visites au point \mathbf{x} . Bien évidemment, $\lim_{t \rightarrow \infty} T(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, 1)$. Si on en définit une fonction génératrice, on trouve

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{x}, \lambda) &= \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t T(\mathbf{x}, t) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t \sum_{t'=0}^t P(\mathbf{x}, t') \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{t'+t''=t} \lambda^{t''} \lambda^{t'} P(\mathbf{x}, t') = \frac{1}{1-\lambda} \lambda^{-1} G(\mathbf{x}, \lambda)
\end{aligned} \tag{54}$$

Nous allons maintenant examiner des propriétés d'intersection des chemins. Dans le temps t le nombre total de sites visités est t , mais certains le sont un grand nombre de fois. Soit $D(t)$ le nombre moyen de sites distincts visités dans le temps t . La différence $E(t) = t - D(t)$ est le nombre moyen de sites visités plus d'une fois affectés du poids 1 s'ils sont visités deux fois, 2 s'ils sont visités trois fois, etc. L'interprétation de ce poids est aisée si le marcheur procède comme le Petit Poucet en laissant un caillou à chaque site visité. Le poids représente le nombre de cailloux qu'il trouve au moment de son dernier passage à un site. Or on se souvient que $P_1(\mathbf{x}, t)$ est la probabilité de première visite en \mathbf{x} au temps t . Le nombre moyen de sites nouveaux visités au temps t est donc $\sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} P_1(\mathbf{x}, t)$, et l'on a

$$D(t) = 1 + \sum_{t'=1}^t \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} P_1(\mathbf{x}, t') \tag{55}$$

où 1 au membre de droite se réfère à l'origine visitée au temps 0, et puisque $P_1(\mathbf{x} \neq \mathbf{0}, 0) = 0$, la somme sur t' peut inclure $t' = 0$. Formant encore une fois une fonction génératrice

$$\begin{aligned}
D(\lambda) &= \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t D(t) = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t + \sum_{t''=0}^{\infty} \lambda^{t''} \sum_{t'=0}^{\infty} \lambda^{t'} \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} P_1(\mathbf{x}, t') \\
&= \frac{1}{1-\lambda} \left(1 + \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \Pi(\mathbf{x}, \lambda) \right) = \frac{1}{1-\lambda} \left(1 + \sum_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{G(\mathbf{x}, \lambda)}{G(\mathbf{0}, \lambda)} \right)
\end{aligned} \tag{56}$$

Or

$$\sum_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \lambda) = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

donc

$$\begin{aligned}
D(\lambda) &= \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2 G(\mathbf{0}, \lambda)} \\
E(\lambda) &= \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2} \left(1 - \frac{1}{G(\mathbf{0}, \lambda)} \right)
\end{aligned} \tag{57}$$

Il est à nouveau assez remarquable qu'on parvienne à trouver une expression compacte pour la fonction génératrice du nombre de sites distincts visités. Bien entendu les nombres positifs $D(t)$ vont croissant, ce qui permet de trouver le comportement pour t tendant vers l'infini en étudiant celui de $D(\lambda)$ au voisinage de $\lambda = 1$. On peut alors dresser la table I ci-dessous qui résulte du comportement de $G(\mathbf{0}, \lambda)$ au voisinage de $\lambda = 1$, lequel varie avec la dimension. Pour $d < 2$, $G(\mathbf{0}, \lambda)$ diverge en loi de puissance, en loi logarithmique à $d = 2$; les corrections à la limite finie sont en loi de puissance fractionnaire, puis incluent un logarithme pour $d = 4$, etc. La table I utilise la constante

$$K = \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{d/2} \quad (58)$$

qui est positive pour $0 < d < 2$ et négative pour $2 < d < 4$. La table ne fait apparaître que les comportements dominants. Il appelle un certain nombre de remarques. Les dimensions 2 et 4 y jouent le rôle de charnières. Tout d'abord, on pourrait penser estimer $D(t)$ intuitivement en disant que c'est le nombre de sites situés dans un volume effectif de taille $R \sim t^{1/2}$, soit $t^{d/2}$. Ce raisonnement apparaît correct pour $d < 2$. Mais bien évidemment il perd son sens quand $t^{d/2}$ croît plus vite que t qui est le nombre maximum de sites visités. Pour $d = 2$, nous trouvons une correction logarithmique typique. Pour $d > 2$, le terme dominant est en $tG(\mathbf{0}, 1)^{-1} = (1 - \Pi(\mathbf{0}))t$, tandis que la fraction des sites visités plus d'une fois se comporte en $\Pi(\mathbf{0})t$ où $\Pi(\mathbf{0})$ part de 1 pour $d = 2$ et décroît jusqu'à zéro lorsque d tend vers l'infini. Les corrections à ces comportements deviennent négligeables lorsque d est plus grand que 4. Cette discussion corrige les conclusions un peu hâtives que l'on déduirait de la dimensionalité deux de ces courbes aléatoires. D'ailleurs le comportement en $\Pi(\mathbf{0})t$ (ou t pour $d < 2$) de $E(t)$ se comprend assez bien, en disant que tout le long de la courbe (facteur t) il y a une probabilité $\Pi(\mathbf{0})$ de faire une boucle. Comme il y a surestimation de $E(t)$, la correction est négative. La quantité $E(t)$, comme $D(t)$, est évidemment majorée par t (on se souvient que $G(\mathbf{0}, 1) > 1$).

Il est aussi possible de discuter les intersections de la courbe brownienne en affectant les sites visités n fois d'un autre poids que $n - 1$, à savoir $n(n - 1)/2$. Cette quantité $I(t)$ qui compte le nombre moyen d'auto-intersections de la courbe est donnée par

$$I(t) = \sum_{0 \leq t_1 < t_2 \leq t} P(\mathbf{0}, t_2 - t_1) \quad (59)$$

et a pour fonction génératrice

	$0 < d < 2$	$d = 2$	$2 < d < 4$	$d = 4$
$G(\mathbf{0}, \lambda)$	$K(1 - \lambda)^{d/2-1}$	$-\frac{1}{\pi} \ln(1 - \lambda)$	$G(\mathbf{0}, 1) + K(1 - \lambda)^{d/2-1}$	$G(\mathbf{0}, 1) + \frac{4}{\pi^2}(1 - \lambda) \ln(1 - \lambda)$
$D(\lambda)$	$K^{-1}(1 - \lambda)^{-d/2-1}$	$\frac{-\pi(1-\lambda)^{-2}}{\ln(1-\lambda)}$	$G^{-1}(\mathbf{0}, 1)(1 - \lambda)^{-2} - \frac{K(1-\lambda)^{d/2-3}}{G(\mathbf{0}, 1)^2}$	$G^{-1}(\mathbf{0}, 1)(1 - \lambda)^{-2} - \frac{4(1-\lambda)^{-1}}{\pi^2 G^2(\mathbf{0}, 1)} \ln(1 - \lambda)$
$D(t)$	$\frac{K^{-1}t^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)}$	$\frac{\pi t}{\ln t}$	$G^{-1}(\mathbf{0}, 1)t - \frac{Kt^{2-d/2}}{G^2(\mathbf{0}, 1)\Gamma(3-d/2)}$	$G^{-1}(\mathbf{0}, 1)t + \frac{4 \ln t}{\pi^2 G^2(\mathbf{0}, 1)}$
$E(t)$	$t - \frac{K^{-1}t^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)}$	$t(1 - \frac{\pi}{\ln t})$	$\Pi(\mathbf{0})t + \frac{Kt^{2-d/2}}{G^2(\mathbf{0}, 1)\Gamma(3-d/2)}$	$\Pi(\mathbf{0})t - \frac{4 \ln t}{\pi^2 G^2(\mathbf{0}, 1)}$
$I(t)$	$\frac{Kt^{2-d/2}}{\Gamma(3-d/2)} - t$	$t(\frac{\ln t}{\pi} - 1)$	$t(G(\mathbf{0}, 1) - 1) + \frac{Kt^{2-d/2}}{\Gamma(3-d/2)}$	$t(G(\mathbf{0}, 1) - 1) - \frac{4 \ln t}{\pi^2}$

Table I: Comportement dominant des quantités introduites dans le texte lorsque $\lambda \rightarrow 1$ ou $t \rightarrow \infty$. Le coefficient K (dépendant de d) est défini par l'équation (58).

$$\begin{aligned}
I(\lambda) &= \sum_{t=1}^{\infty} \lambda^t I(t) = \sum_{t=1}^{\infty} \lambda^t \sum_{t'=1}^t (t-t'+1) P(\mathbf{0}, t') \\
&= \sum_{t_1=0}^{\infty} (t_1+1) \lambda^{t_1} \sum_{t_2=1}^{\infty} \lambda^{t_2} P(\mathbf{0}, t_2) \\
&= \frac{G(\mathbf{0}, \lambda) - \lambda}{\lambda(1-\lambda)^2}
\end{aligned} \tag{60}$$

A nouveau, ceci permet d'extraire le comportement dominant lorsque t tend vers l'infini, qui figure dans la table. On note que pour de grandes dimensions $E(t)$ et $I(t)$ ne se différencient pratiquement plus, car les intersections triples ou d'ordre plus élevé deviennent très rares.

Terminons cette section en examinant les propriétés d'intersection de deux courbes browniennes dans la limite continue. Considérons d'abord deux telles courbes sur le réseau issues de deux points distincts $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$ et soit $\mathcal{P}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \Lambda)$ la probabilité qu'elles se coupent dans un ensemble Λ non vide. On suppose que les deux marcheurs ont marché un temps infini. On a la majoration

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \Lambda) \leq \sum_{\mathbf{z} \in \Lambda} \Pi(\mathbf{z} - \mathbf{x}_1) \Pi(\mathbf{z} - \mathbf{x}_2) \tag{61}$$

où $\Pi(\mathbf{x})$, rappelons-le, est la probabilité de visiter \mathbf{x} partant de l'origine. L'inégalité s'applique car nous ne sommes pas sur des probabilités d'événements indépendants. Pour passer à la limite continue, il nous suffit de dilater d'un facteur $\xi \rightarrow \infty$ les positions et le domaine Λ avec les restrictions imposées par le réseau. Si on note $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \Lambda)$ la quantité analogue dans le continu on a donc

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \Lambda) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\xi \mathbf{x}_1, \xi \mathbf{x}_2, \xi \Lambda) \leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\xi^d}{G(\mathbf{0}, 1)^2} \\
&\quad \times \int_{\Lambda} d^d \mathbf{z} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \mathbf{q}_1 d^d \mathbf{q}_2}{(2\pi)^{2d}} \frac{\exp \{i\xi[\mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}) + \mathbf{q}_2 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{z})]\}}{\left(1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos q_1^{\mu}\right) \left(1 - \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos q_2^{\mu}\right)} \\
&\leq \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left(\frac{2d}{G(\mathbf{0}, 1)} \right)^2 \xi^{4-d} \\
&\quad \times \int_{\Lambda} d^d \mathbf{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d \mathbf{q}_1 d^d \mathbf{q}_2}{(2\pi)^{2d}} \frac{\exp \{i[\mathbf{q}_1 \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}) + \mathbf{q}_2 \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{z})]\}}{\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_2^2} \tag{62}
\end{aligned}$$

L'intégrale est convergente pour $d > 2$ et le facteur important, purement dimensionnel, est ξ^{4-d} . En conséquence, et conformément à l'intuition, la probabilité d'intersection tend vers zéro pour $d > 4$. Ceci établit très simplement le résultat que, dans le continu, en dimension supérieure à

quatre, deux chemins browniens ont une probabilité nulle de se croiser dans une région arbitraire. En revanche on montre qu'en dimension inférieure à quatre lorsque Λ est l'espace entier, cette probabilité est égale à 1 (certitude), propriété quasi-évidente en dimension inférieure ou égale à deux. La dimension quatre est marginale et nous laissons au lecteur le soin de se convaincre du résultat récent suivant.

(1) (d'après G.F. Lawler, *Comm. Math. Phys.* **86**, 539 (1982)). Considérons un réseau de dimension 4.

(i) Si deux chemins browniens de longueur t sont issus de deux points $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, situés à une distance de l'ordre de \sqrt{t} , leur probabilité d'intersection décroît comme $1/\ln t$. Il s'ensuit que, à la limite continue et pour des chemins infinis issus de deux points à distance finie, la probabilité d'intersection s'annule.

(ii) Si les deux chemins sont issus du même point, tous les deux de longueur t , le probabilité d'intersection tend vers 1 lorsque t tend vers l'infini. Les corrections à ce comportement sont vraisemblablement en $(\ln t)^{-\frac{1}{2}}$.

(2) Le nombre de sites distincts visités à la fois par deux chemins issus du même point, de longueur t_1 et t_2 est $D(t_1) + D(t_2) - D(t_1 + t_2)$. Pour $t_1 = \alpha t$, $t_2 = \beta t$ and $t \rightarrow \infty$, ce nombre diverge pour $d \leq 4$. A $d = 4$ la divergence est logarithmique et pour $d > 4$ la limite est finie.

(3) (d'après B. Derrida). En dimension 1, soit $P_t(N)$ la probabilité d'avoir visité N sites distincts au bout du temps t , avec $D(t) = \sum_N N P_t(N)$. Montrer que l'on a

$$P_t(N) = q_t(N) - 2q_t(N-1) + q_t(N-2)$$

$$q_t(N) = \frac{2}{N+1} \sum_{\substack{1 \leq q \leq N \\ q \text{ impair}}} \left(\cos \frac{q\pi}{N+1} \right)^t \cotan \frac{q\pi}{2(N+1)}$$

Pour $t, N \rightarrow \infty$ avec toutefois $t \gg N^2$, $P_t(N)$ devient exponentiellement petit, comme $(8\pi^2 t^2 / N^5) \exp(-\pi^2 t / 2N^2)$. On peut penser que la généralisation en dimension d , dans des conditions analogues, donne $P_t(N) \sim \exp(-Kt/N^{2/d})$.

(4) (d'après Watson, voir M.L. Glasser, I.J. Zucker, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **74**, 1800 (1977)). En dimension 3, le temps moyen passé à l'origine $G(\mathbf{0}, 1)$ et la probabilité d'échappement $\Pi(\mathbf{0}, 1) = 1 - G(\mathbf{0}, 1)^{-1}$ sont finis. Trouver une démonstration probabiliste des résultats suivants

$$G(\mathbf{0}, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 - c_1 c_2 c_3} = \frac{1}{4\pi^3} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4 \simeq 1.3932039297$$

pour le réseau cubique centré

$$G(\mathbf{0}, 1) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}(c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1)} = \frac{9\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^6}{2^{14/3}\pi^4} \simeq 1.3446610732$$

pour le réseau cubique à faces centrées et

$$\begin{aligned} G(\mathbf{0}, 1) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{1 - \frac{1}{3}(c_1 + c_2 + c_3)} \\ &= \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2} \Gamma\left(\frac{1}{24}\right) \Gamma\left(\frac{5}{24}\right) \Gamma\left(\frac{7}{24}\right) \Gamma\left(\frac{11}{24}\right) \simeq 1.5163860591 \end{aligned}$$

pour le réseau cubique simple. Dans ces formules on a adopté la notation simplifiée $c_i = \cos k_i$.

2. Champs euclidiens

Après un prolongement analytique de la variable temporelle à des valeurs imaginaires pures, le groupe de Poincaré de la mécanique devient le groupe euclidien des déplacements et réflexions. Les amplitudes de probabilité quantiques évaluées à l'aide du principe de superposition prennent la forme de sommes sur des poids analogues à ceux de la mécanique statistique. De la sorte, les problèmes d'évolution en théorie quantique des champs se transforment en questions relatives à un équilibre thermodynamique statique où les variables fondamentales sont des champs classiques stochastiques. Une première étape, destinée à donner un sens bien défini aux opérations de moyenne statistique, consiste à substituer un réseau à maille finie à l'espace \mathcal{R}^d continu. L'un des problèmes principaux consistera alors à examiner le passage à la limite d'un réseau infiniment fin. Nous commencerons par rappeler le formalisme du champ libre. Il fait un usage constant des intégrales gaussiennes et nous supposons que le lecteur est familier avec la formule

$$\int dX \exp\left(-\frac{1}{2} {}^T X A X + {}^T J X\right) = \left(\det \frac{A}{2\pi}\right)^{-1/2} \exp\left(\frac{1}{2} {}^T J A^{-1} J\right) \quad (63)$$

où X un vecteur et la matrice symétrique A a une partie réelle définie positive. De telles intégrales ont déjà été utilisées dans les paragraphes précédents.

2.1 Champ libre

La fonction $G(\mathbf{x}, \lambda)$ est le propagateur d'un champ euclidien libre $\varphi(\mathbf{x})$, défini en chaque point du réseau, qui peut prendre toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$. Dans ce contexte, l'expression champ libre implique un poids statistique gaussien

$$e^{-S(\varphi)} \quad (64a)$$

où l'action $S(\varphi)$ est quadratique en φ , et n'associe que des variables relatives à des sites voisins. Précisément

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \varphi(\mathbf{x}) [\lambda^{-1} \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} - J_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}] \varphi(\mathbf{x}') \quad (64b)$$

avec

$$J_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} = \begin{cases} 1/2d & \text{si } |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On introduit la fonction de partition

$$Z = \int \prod_{\mathbf{x}} \frac{d\varphi_{\mathbf{x}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-S(\varphi)} \quad (65)$$

en s'assurant d'abord que l'intégrale porte sur un nombre très grand mais fini de variables, par exemple en enfermant le système dans une boîte dont le volume L^d tendra vers l'infini à la fin des calculs. Cette limite thermodynamique sera sous entendue dans la plupart des cas. La fonction de corrélation à deux points entre les champs $\varphi(\mathbf{x})$ et $\varphi(\mathbf{0})$ prend la forme du propagateur $G(\mathbf{x}, \lambda)$ introduit plus haut pour le mouvement brownien

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \lambda) &= \langle \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{0}) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\lambda^{-1} - \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu}} \\ &= Z^{-1} \int \prod_{\mathbf{x}} \frac{d\varphi_{\mathbf{x}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-S(\varphi)} \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{0}) \end{aligned} \quad (66)$$

L'action de (64b) peut être diagonalisée par transformation de Fourier

$$S(\varphi) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \varphi(-\mathbf{k}) \left[\lambda^{-1} - \frac{1}{d} \sum_{\mu} \cos k_{\mu} \right] \varphi(\mathbf{k}) \quad (67)$$

avec $\varphi(-\mathbf{k}) \equiv \overline{\varphi(\mathbf{k})}$, si bien que le dénominateur du propagateur n'est autre que le noyau de la forme quadratique dans l'action. On note que le propagateur G étant positif, les corrélations entre φ sont positives bien que φ prenne des valeurs de signe arbitraire. Dans l'interprétation magnétique du modèle on associe cette propriété au caractère "ferromagnétique" de l'action. Plus précisément, pour $0 < \lambda < 1$, l'action est définie positive tandis que pour $\lambda = 1$ elle n'est plus que positive ou nulle en raison du mode nul $\varphi = Cst$.

Le paragraphe précédent nous a permis d'apprécier la relation entre mouvement brownien et fonction de Green du champ libre. Il est bon de noter en outre que nous introduisons une variable t supplémentaire, longueur ou temps propre le long des chemins, qui n'a pas d'analogue à l'équilibre mais qui peut servir à décrire l'approche à l'équilibre.

Examinons le passage à la limite continue en restituant le pas a du réseau. Pour cela, nous effectuons sur le champ du réseau φ_L une transformation d'échelle donnant φ_c , champ dans le continu

$$\varphi_L(\mathbf{x}/a) = \sqrt{2d} a^{d/2-1} \varphi_c(\mathbf{x}) \quad (68)$$

avec

$$\lambda^{-1} = 1 + \frac{m^2 a^2}{2d} \quad (69)$$

Au champ sans dimension φ_L est maintenant substitué un champ φ_c dont la dimension, en nombre d'onde $1/a$, est

$$[\varphi_c] = \frac{1}{2}(d-2) \quad (70)$$

dite dimension canonique. Dans ces conditions on peut récrire l'action

$$\begin{aligned} S(\varphi_L) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{x}/a, \mathbf{x}'/a \\ \text{entiers}}} \varphi_L(\mathbf{x}/a) [\lambda^{-1} \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} - J_{\mathbf{x}/a, \mathbf{x}'/a}] \varphi_L(\mathbf{x}'/a) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{x}}{a^d} 2da^{d-2} \left[\left(1 + \frac{m^2 a^2}{2d} \right) \varphi_c^2(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. - \varphi_c(\mathbf{x}) \frac{1}{d} \sum_{\mu=1}^d \left(\varphi_c(\mathbf{x}) + \frac{a^2}{2} \partial_\mu^2 \varphi_c(\mathbf{x}) \right) + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \varphi_c(\mathbf{x}) [m^2 - \Delta] \varphi_c(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(a^2) \\ &= \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} \left[m^2 \varphi_c^2(\mathbf{x}) + (\nabla \varphi_c(\mathbf{x}))^2 \right] + \mathcal{O}(a^2) \end{aligned} \quad (71)$$

où, dans la dernière expression, on néglige les contributions à l'infini dans l'intégration par parties.

A des termes négligeables d'ordre a^2 près, l'action possède donc une limite en fonction de φ_c , qui s'identifie avec la forme euclidienne dans le continu. Désormais, nous omettrons l'indice de φ et nous emploierons un symbole compact $\mathcal{D}\varphi$ pour la "mesure" d'intégration. Bien entendu, le changement d'échelle du champ s'accompagne d'un changement correspondant pour les corrélations indiqué en (31) et l'on a

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{0}) \rangle &= g(\mathbf{x}, m^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\varphi e^{-S(\varphi)} \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{0}) \end{aligned} \quad (72)$$

Plus généralement, les moyennes d'un nombre impair de champs s'annulent, tandis que celles d'un nombre pair sont données par le théorème de Wick

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \cdots \varphi(\mathbf{x}_{2n}) \rangle &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{perm.} \langle \varphi(\mathbf{x}_{p_1}) \varphi(\mathbf{x}_{p_2}) \rangle \cdots \langle \varphi(\mathbf{x}_{p_{2n-1}}) \varphi(\mathbf{x}_{p_{2n}}) \rangle \\
&= \sum_{\text{appariements}} \prod \langle \varphi(\mathbf{x}_s) \varphi(\mathbf{x}_t) \rangle
\end{aligned} \tag{73}$$

Le nombre de termes distincts au membre de droite, ou appariements, est $(2n)!/(2^n n!) = (2n-1)!!$. Une manière concise de résumer les identités (73) consiste à en donner une fonction génératrice

$$\begin{aligned}
\frac{Z(J)}{Z(0)} &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\varphi \exp \left\{ -S(\varphi) + \int d^d \mathbf{x} J(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x}_1 d^d \mathbf{x}_2 J(\mathbf{x}_1) \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \rangle J(\mathbf{x}_2) \right\}
\end{aligned} \tag{74}$$

où les deux noyaux $\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \varphi(\mathbf{x}_2) \rangle$ et $\delta^2 S / \delta \varphi(\mathbf{x}_1) \delta \varphi(\mathbf{x}_2)$ sont inverses l'un de l'autre. Les fonctions de corrélation peuvent être engendrées en prenant les dérivées fonctionnelles par rapport à J . Ceci conduit à une démonstration immédiate du théorème de Wick (73).

Chaque terme du membre de droite de l'équation (73) s'exprime à son tour comme une somme sur des chemins browniens indépendants. De ce point de vue, le champ libre sert de fonction génératrice à l'étude des ensembles (symétrisés) de "particules" browniennes. On s'attend de même à ce que les fonctions de Green d'un champ en interaction aient aussi une interprétation en terme de mouvement de particules soumises à des restrictions (Symanzik 1969), comme nous allons maintenant nous en convaincre.

2.2 Champs en interaction et marches aléatoires

Nous allons considérer une classe de modèles en interaction, invariants sous l'action du groupe orthogonal $O(n)$. En chaque point du réseau le champ sera donc un vecteur Φ à n -composantes. Le pas du réseau sert comme précédemment de régulateur ultraviolet et nous modifions la forme de l'action en ajoutant un terme d'interaction local proportionnel à $(\Phi^2)^2$

$$S(\Phi) = -\beta \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \Phi(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}') + \sum_{\mathbf{x}} V(\Phi^2(\mathbf{x})) \tag{75}$$

$$V(\Phi^2) = \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^2 + \frac{1}{4} g (\Phi^2)^2 \tag{76}$$

Un changement d'échelle pour Φ montre que seules deux des trois constantes β , μ^2 , g sont réellement indépendantes; et la constante de couplage g est positive pour avoir une action bornée inférieurement. Il apparaît que le

point $g = 0$, qui sert de point de départ à la théorie des perturbations au voisinage du champ libre, est un point singulier puisque les intégrales ne sont pas définies pour des valeurs de g arbitrairement petites, qui incluent des situations instables pour lesquelles $\text{Re } g < 0$. La notion $\sum_{(x,x')}$ implique qu'on somme sur des paires de voisins, elle équivaut donc à $d \sum_{x,x'} J_{x,x'}$. Si $n = 1$, ce modèle correspond au champ scalaire en auto-interaction. A la limite $g + \mu^2 = 0$, $g \rightarrow \infty$, il est équivalent au modèle d'Ising, où Φ est restreint à prendre les valeurs ± 1 . Pour $n > 1$, la même limite contraint $|\Phi|$ à être constant; on parle alors du modèle de Heisenberg classique. L'équivalent continu est le modèle σ non linéaire, par référence au modèle introduit par Gell-Mann et Lévy dans le cadre de la physique des particules, destiné à donner une description de la brisure spontanée de l'invariance chirale. Ces modèles seront décrits avec plus de détails dans les chapitres qui vont suivre.

La partie purement locale de l'action $\sum_x V(\Phi^2)$ s'associe naturellement à la mesure d'intégration. Nous écrivons la fonction de partition Z – toujours définie par passage à la limite d'un volume infini –

$$Z = \int \prod_x \left\{ e^{-V(\Phi^2)} \prod_{\alpha=1}^n \frac{d\Phi^\alpha(x)}{\sqrt{2\pi}} \right\} e^{\beta \sum_{(x,x')} \Phi(x) \cdot \Phi(x')} \quad (77)$$

Au terme de propagation (ou terme cinétique) près, la mesure est factorisée. Dans la version statistique, c'est donc ce dernier qui fait figure d'interaction entre valeurs de Φ correspondant à des sites distincts. Les fonctions de corrélations, ou fonctions de Green, s'expriment à leur tour comme

$$\langle \Phi^{\alpha_1}(x_1) \dots \Phi^{\alpha_{2k}}(x_{2k}) \rangle = Z^{-1} \int \prod_x \left\{ e^{-V(\Phi^2)} \prod_{\alpha=1}^n \frac{d\Phi^\alpha(x)}{\sqrt{2\pi}} \right\} \times e^{\beta \sum_{(x,x')} \Phi(x) \cdot \Phi(x')} \Phi^{\alpha_1}(x_1) \dots \Phi^{\alpha_{2k}}(x_{2k}) \quad (78)$$

La relation avec une somme sur des chemins va apparaître lorsqu'on développe le terme cinétique en puissances de β , procédé qui s'apparente au développement de haute température en mécanique statistique (avec β inversement proportionnel à la température). Cependant, comme le poids local $\exp(-V(\Phi^2))$ conduit à des intégrales compliquées, il est commode d'introduire sa transformée de Fourier par rapport à Φ^2 . De la sorte, les intégrales sur Φ deviendront gaussiennes et pourront être effectuées explicitement. Nous écrivons la transformée de Laplace

$$e^{-V(\Phi^2)} = \int d\mu(a) e^{-a\Phi^2} \quad (79)$$

qui définit la mesure $d\mu(a)$. L'intégrale contient implicitement une prescription pour le chemin d'intégration le long de l'axe a imaginaire pur (la

variable a est à distinguer du pas du réseau). Il est commode aussi de définir un opérateur σ lié au laplacien

$$\sigma f(\mathbf{x}) \equiv 2d(\Delta_r + 1)f(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\mu=1}^d [f(\mathbf{x} + \mathbf{e}_\mu) + f(\mathbf{x} - \mathbf{e}_\mu)] \quad (80)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{\mathbf{x}} \left\{ \prod_{\alpha=1}^n \frac{d\Phi^\alpha(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi}} d\mu(a_{\mathbf{x}}) \right\} e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) [2a_{\mathbf{x}} - \beta\sigma] \Phi(\mathbf{x})} \\ &= \int \prod_{\mathbf{x}} \frac{d\mu(a_{\mathbf{x}})}{(2a_{\mathbf{x}})^{n/2}} \det^{-n/2} \left[1 - \frac{\beta\sigma}{2a_{\mathbf{x}}} \right] \end{aligned} \quad (81)$$

Dans la dernière expression, nous avons effectué une intégrale gaussienne, ce qui donne l'inverse de la racine carrée d'un déterminant élevé à la puissance n , le nombre des composantes de champ. On a des expressions analogues pour les fonctions de Green. Nous n'écrivons la formule, aisément généralisée, que pour la fonction à deux points

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \Phi^{\alpha_2}(\mathbf{x}_2) \rangle &= Z^{-1} \int \prod_{\mathbf{x}} \left\{ \prod_{\alpha=1}^n \frac{d\Phi^\alpha(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi}} d\mu(a_{\mathbf{x}}) \right\} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) [2a_{\mathbf{x}} - \beta\sigma] \Phi(\mathbf{x})} \Phi^{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \Phi^{\alpha_2}(\mathbf{x}_2) \\ &= Z^{-1} \int \prod_{\mathbf{x}} \left\{ \prod_{\alpha=1}^n \frac{d\Phi^\alpha(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi}} d\mu(a_{\mathbf{x}}) \right\} \\ &\quad \times e^{-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x}) [2a_{\mathbf{x}} - \beta\sigma] \Phi(\mathbf{x})} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \langle \mathbf{x}_1 | \frac{1}{2a_{\mathbf{x}} - \beta\sigma} | \mathbf{x}_2 \rangle \end{aligned} \quad (82)$$

Dans l'intégrand de la dernière expression, on met ainsi en évidence la fonction de Green du champ libre, généralisée au cas où $a_{\mathbf{x}}$ dépend de \mathbf{x} . Les expressions impliquant la transformée de Fourier ne s'appliquent évidemment plus. Cependant le développement sur les chemins allant de \mathbf{x}_1 à \mathbf{x}_2 reste valable, de sorte que

$$\langle \mathbf{x}_1 | \frac{1}{2a_{\mathbf{x}} - \beta\sigma} | \mathbf{x}_2 \rangle = \sum_{\omega \in \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}} \beta^{|\omega|} \prod_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{2a_{\mathbf{x}}} \right)^{n_{\mathbf{x}}(\omega)} \quad (83)$$

L'équation (83) généralise l'équation (30). Ici $n_{\mathbf{x}}(\omega) \geq 0$, entier positif ou nul, indique le nombre de fois (extrémités comprises) où le chemin passe par le point \mathbf{x} . C'est encore le "temps" que le chemin passe au point \mathbf{x} . Bien

évidemment $\sum_{\mathbf{x}} n_{\mathbf{x}}(\omega) = |\omega| + 1$, de sorte que, dans le produit infini du membre de droite de (83), tous les facteurs sauf un nombre fini d'entre eux valent 1 pour $|\omega| < \infty$

Les quantités auxiliaires $a_{\mathbf{x}}$ - termes de masse variables - doivent maintenant être éliminées. Pour cela on utilise la représentation intégrale

$$(2a)^{-k} = \int d\nu_k(t) e^{-2at} \quad (84)$$

avec

$$d\nu_k(t) = \begin{cases} \theta(t) \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} dt & k > 0 \\ \delta(t) dt & k = 0 \end{cases} \quad (85)$$

En reportant (83) dans (82) et en utilisant la représentation ci-dessus, on obtient en définitive

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \Phi^{\alpha_2}(\mathbf{x}_2) \rangle &= \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \sum_{\partial\omega = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}} \beta^{|\omega|} Z^{-1} \\ &\times \int \prod_{\mathbf{x}} \left\{ \prod_{\alpha=1}^n \frac{d\Phi^{\alpha}(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi}} d\nu_{n_{\mathbf{x}}(\omega)}(t_{\mathbf{x}}) \right\} \\ &\times e^{\beta \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \Phi(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}') - \sum_{\mathbf{x}} V(\Phi^2(\mathbf{x}) + 2t_{\mathbf{x}})} \end{aligned} \quad (86)$$

La présence d'un facteur $\delta^{\alpha_1 \alpha_2}$ traduit l'invariance $O(n)$. La somme sur les chemins contient, outre $\beta^{|\omega|}$, un poids $z(\omega)$ donné par l'intégrale au second membre de (86) qui fait jouer un rôle particulier au nombre de visites $n_{\mathbf{x}}$ que fait le chemin ω aux points \mathbf{x} du réseau. Plus $n_{\mathbf{x}}$ est grand, plus le chemin est "pénalisé". Dans le cas particulier du champ libre où $V(\Phi^2) = \frac{1}{2}\mu^2\Phi^2$, l'intégrale sur Φ s'effectue, compense le facteur Z^{-1} , et l'expression résultante s'identifie au résultat de la section précédente au changement de notation près

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \Phi^{\alpha_2}(\mathbf{x}_2) \rangle &= \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \langle \mathbf{x}_1 | \frac{1}{\mu^2 - \beta\sigma} | \mathbf{x}_2 \rangle \\ &= \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{\mu^2} \sum_{\partial\omega = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}} \left(\frac{\beta}{\mu^2} \right)^{|\omega|} \end{aligned} \quad (87)$$

Cependant, dans le cas général, le poids positif

$$z(\omega) = Z^{-1} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\nu \exp \left\{ \beta \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \Phi(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}') - \sum_{\mathbf{x}} V(\Phi^2(\mathbf{x}) + 2t_{\mathbf{x}}) \right\} \quad (88)$$

ne peut simplement s'exprimer sous la forme simple $\exp(\text{Cst}|\omega|)$.

Le cas d'une fonction à $2k$ points donne lieu à une généralisation non triviale du théorème de Wick, où la fonction de corrélation est une somme de $(2k - 1)!!$ termes correspondants à des appariements. Si on désigne par \mathcal{P} ces appariements

$$\begin{aligned} \langle \Phi^{\alpha_1}(\mathbf{x}_1) \cdots \Phi^{\alpha_{2k}}(\mathbf{x}_{2k}) \rangle &= \sum_{\mathcal{P}} \delta^{\alpha_{\mathcal{P}_1} \alpha_{\mathcal{P}_2}} \cdots \delta^{\alpha_{\mathcal{P}_{2k-1}} \alpha_{\mathcal{P}_{2k}}} \\ &\times \sum_{\substack{\omega_1, \dots, \omega_k \\ \partial\omega_j = \{\mathbf{x}_{\mathcal{P}_{2j-1}}, \mathbf{x}_{\mathcal{P}_{2j}}\}}} \beta^{|\omega_1| + \cdots + |\omega_k|} z(\omega_1, \dots, \omega_k) \end{aligned} \quad (89)$$

avec

$$\begin{aligned} z(\omega_1, \dots, \omega_k) &= Z^{-1} \int \prod_{\mathbf{x}} \prod_{\alpha} \frac{d\Phi^{\alpha}(\mathbf{x})}{\sqrt{2\pi}} d\nu_{\mathcal{N}_{\mathbf{x}}} \\ &\times \exp \left\{ \beta \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \Phi(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}') - \sum_{\mathbf{x}} V(\Phi^2(\mathbf{x}) + 2t_{\mathbf{x}}) \right\} \end{aligned} \quad (90)$$

Le poids $z(\omega_1, \dots, \omega_k)$ fait apparaître le nombre total $\mathcal{N}_{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^k n_{\mathbf{x}}(\omega_j)$ de visites effectuées par l'ensemble des chemins au point \mathbf{x} .

Fröhlich (1982) a obtenu les inégalités remarquables suivantes

$$\begin{aligned} (i) \quad \omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset &\Rightarrow z(\omega_1, \omega_2) \geq z(\omega_1)z(\omega_2) \\ (ii) \quad \sum_{\omega_2} z(\omega_1, \omega_2) &\leq z(\omega_1) \sum_{\omega_2} z(\omega_2) \end{aligned} \quad (91)$$

La preuve de ces inégalités est fondée sur la propriété suivante. Les valeurs moyennes de produits de champs ne peuvent que diminuer si on fait varier dans l'action des paramètres dans un sens qui tend à baisser la mesure de la région Φ grand. Pour alléger les écritures, notons $\mathcal{D}\nu_{\omega}(t) = \prod_{\mathbf{x}} d\nu_{n_{\mathbf{x}}(\omega)}(t_{\mathbf{x}})$. Comme

$$a^{-n_1 - n_2} = \int d\nu_{n_1 + n_2}(t) e^{-at} = \int \int d\nu_{n_1}(t_1) d\nu_{n_2}(t_2) e^{-a(t_1 + t_2)},$$

on peut remplacer l'intégrale sur les $t_{\mathbf{x}}$ en intégrale double sur $t_{1\mathbf{x}}, t_{2\mathbf{x}}$ dans l'expression (90) écrite pour $k = 2$,

$$\begin{aligned} z(\omega_1, \omega_2) &= Z^{-1} \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}\nu_{\omega_1}(t_1) \mathcal{D}\nu_{\omega_2}(t_2) e^{\beta \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \Phi(\mathbf{x}) \cdot \Phi(\mathbf{x}') - \sum_{\mathbf{x}} V(\Phi^2 + 2t_{1\mathbf{x}} + 2t_{2\mathbf{x}})} \\ &= \int \mathcal{D}\nu_{\omega_1}(t_1) \mathcal{D}\nu_{\omega_2}(t_2) z(t_1 + t_2) \end{aligned}$$

$$z(t_1 + t_2) = e^{-\Sigma_{\mathbf{x}} \mu^2 (t_{1\mathbf{x}} + t_{2\mathbf{x}}) + g(t_{1\mathbf{x}} + t_{2\mathbf{x}})^2} \left\langle e^{-\Sigma_{\mathbf{x}} g \Phi^2(\mathbf{x})(t_{1\mathbf{x}} + t_{2\mathbf{x}})} \right\rangle$$

Les t_1 et t_2 étant les variables relatives aux chemins ω_1 et ω_2 respectivement. On a des formules analogues pour $z(\omega_1)$ et $z(\omega_2)$ séparément de sorte que l'inégalité (i) est satisfaite si

$$\omega_1 \cap \omega_2 = \emptyset \quad \Rightarrow \quad z(t_1 + t_2) \geq z(t_1)z(t_2)$$

En posant $\tilde{z}(t) = \left\langle \exp(-g \sum_{\mathbf{x}} \Phi^2(\mathbf{x})t_{\mathbf{x}}) \right\rangle$, il vient

$$\ln \tilde{z}(t_1 + t_2) = \ln \tilde{z}(t_2) + \int_0^1 d\lambda \tilde{z}^{-1}(\lambda t_1 + t_2) \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{z}(\lambda t_1 + t_2)$$

L'intégrand s'identifie avec $-g \sum_{\mathbf{x}} t_{\mathbf{x}} \langle \Phi^2(\mathbf{x}) \rangle_{\lambda t_1 + t_2}$, la notation utilisée $\langle \cdot \rangle_t$ s'entendant pour une valeur moyenne où l'action a été augmentée d'un terme $g \sum_{\mathbf{x}} t_{\mathbf{x}} \Phi^2(\mathbf{x})$ (bien évidemment $\langle \cdot \rangle_0 = \langle \cdot \rangle$). A ce stade, on utilise la remarque indiquée ci-dessus (t est positif ou nul) qui implique que $\langle \Phi^2 \rangle_t$ est une fonction décroissante de t . Plus précisément, on montre qu'on a l'inégalité de Griffiths

$$\begin{aligned} \langle \Phi^2(\mathbf{x}) \Phi^2(\mathbf{y}) \rangle_t^{\text{conn}} &= \langle \Phi^2(\mathbf{x}) \Phi^2(\mathbf{y}) \rangle_t - \langle \Phi^2(\mathbf{x}) \rangle_t \langle \Phi^2(\mathbf{y}) \rangle_t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda'} \langle \Phi^2(\mathbf{x}) \rangle_{\lambda t_1 + \lambda' t_2} &= -g \sum_{\mathbf{y}} t_{2\mathbf{y}} \langle \Phi^2(\mathbf{x}) \Phi^2(\mathbf{y}) \rangle_{\lambda t_1 + \lambda' t_2}^{\text{conn}} \leq 0 \end{aligned} \quad (92)$$

En conséquence on minore $\langle \Phi^2 \rangle_{\lambda t_1 + t_2}$ par $\langle \Phi^2 \rangle_{\lambda t_1}$. D'où

$$\ln \tilde{z}(t_1 + t_2) \geq \ln \tilde{z}(t_2) - \int_0^1 d\lambda g \sum_{\mathbf{x}} t_{1\mathbf{x}} \langle \Phi^2(\mathbf{x}) \rangle_{\lambda t_1} = \ln \tilde{z}(t_1) + \ln \tilde{z}(t_2)$$

et en revenant aux quantités $z(t)$,

$$\exp \left(g \sum_{\mathbf{x}} t_{1\mathbf{x}} t_{2\mathbf{x}} \right) z(t_1 + t_2) \geq z(t_1)z(t_2)$$

Lorsque les courbes ω_1 et ω_2 ne se coupent pas, on a $t_{1\mathbf{x}} t_{2\mathbf{x}} = 0$ en tout point \mathbf{x} , ce qui établit l'inégalité (91i). Pour l'inégalité (91ii), en sous-entendant que $\partial\omega_2 = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ est fixé, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_2} z(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{\omega_2} \int \mathcal{D}\nu_{\omega_1}(t_1) \mathcal{D}\nu_{\omega_2}(t_2) z(t_1 + t_2) \\ &= \int \mathcal{D}\nu_{\omega_1}(t_1) z(t_1) \langle \Phi^\alpha(\mathbf{x}_3) \Phi^\alpha(\mathbf{x}_4) \rangle_{t_1} \end{aligned}$$

en vertu des définitions adoptées ci-dessus. Dans le même esprit que précédemment, on utilise alors l'inégalité

$$\langle \Phi^\alpha(\mathbf{x}_3)\Phi^\alpha(\mathbf{x}_4) \rangle_t \leq \langle \Phi^\alpha(\mathbf{x}_3)\Phi^\alpha(\mathbf{x}_4) \rangle = \sum_{\omega_2} z(\omega_2) \quad (93)$$

qui achève la démonstration de (91ii). Ces formules sont utiles dans une étude fine et rigoureuse des propriétés des champs en interaction.

2.3 Marche au hasard avec retour exclu et limite $n \rightarrow 0$

Examinons la dépendance en n des fonctions de corrélations sur l'exemple de la fonction à deux points. Lorsque les deux indices internes coïncident, on peut l'écrire en utilisant (82) et (83)

$$\begin{aligned} \langle \Phi^1(\mathbf{x}_1)\Phi^1(\mathbf{x}_2) \rangle &= Z^{-1} \sum_{\omega=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}} \beta^{|\omega|} \int \prod_{\mathbf{x}} \left(d\mu(a_{\mathbf{x}}) (2a_{\mathbf{x}})^{-\frac{1}{2}n - n_{\mathbf{x}}(\omega)} \right) \\ &\quad \times \det^{-n/2} \left(1 - \frac{\beta\sigma}{2a_{\mathbf{x}}} \right) \\ Z &= \int \prod_{\mathbf{x}} \left(d\mu(a_{\mathbf{x}}) (2a_{\mathbf{x}})^{-n/2} \right) \det^{-n/2} \left(1 - \frac{\beta\sigma}{2a_{\mathbf{x}}} \right) \end{aligned} \quad (94)$$

La dépendance en n est explicite dans le déterminant et la puissance de $a_{\mathbf{x}}$, elle est éventuellement implicite dans la mesure d'intégration $d\mu(a_{\mathbf{x}})$. Quoi qu'il en soit, pour des choix simples de $V(\Phi^2)$, un prolongement analytique en n est possible, et nous envisageons la limite $n \rightarrow +0$. Une simplification apparaît d'abord puisque

$$\lim_{n \rightarrow 0} \det^{-n/2} \left(1 - \frac{\beta\sigma}{2a_{\mathbf{x}}} \right) = 1 \quad (95)$$

Du coup, le poids $z(\omega)$ se factorise en contributions relatives à chaque site

$$\begin{aligned} z(\omega) &= \sum_{\mathbf{x}} \rho_{n_{\mathbf{x}}(\omega)} \\ \rho_k &= \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\int d\mu(a) (2a)^{-(n/2)-k}}{\int d\mu(a) (2a)^{-n/2}} \end{aligned} \quad (96)$$

et donc

$$\lim_{n \rightarrow 0} \langle \Phi^1(\mathbf{x}_1)\Phi^1(\mathbf{x}_2) \rangle = \sum_{\omega=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}} \beta^{|\omega|} \sum_{\mathbf{x}} \rho_{n_{\mathbf{x}}(\omega)} \quad (97)$$

Par définition $\rho_0 = 1$. Evaluons ρ_k pour l'action (75)-(76) avec $d\mu(a)$ défini par (79). Pour $p > 0$,

$$\begin{aligned} \int d\mu(a)(2a)^{-p} &= \int d\mu(a) \int_0^\infty dt \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-2at} \\ &= \int_0^\infty dt \frac{t^{p-1}}{\Gamma(p)} e^{-(\mu^2 t + g t^2)} \end{aligned}$$

tandis que

$$\int d\mu(a) = \int d\mu(a) \int_{-\infty}^\infty dt \delta(t) e^{-2at} = 1$$

De la sorte, en reportant dans (96)

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 1 \\ \rho_k &= \int_0^\infty dt \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-(\mu^2 t + g t^2)} \quad (k \geq 1) \end{aligned} \quad (98)$$

On constate bien que, plus grand est le nombre de passages en un point x , plus le chemin est pénalisé (c'est-à-dire que ρ_k décroît si k augmente). En particulier nous pouvons considérer le modèle σ -non linéaire qui restreint Φ^2 à une valeur fixe qu'il est commode de choisir égale à n

$$\Phi^2 = n \quad (99)$$

dans la limite où n tend vers 0. Ceci conduit à choisir dans l'action précédente

$$\mu^2 = -ng \quad (100)$$

et à faire tendre $g \rightarrow \infty$ avant n vers zéro. En effet, pour une fonction régulière f

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\int \prod_\alpha \frac{d\Phi^\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{g[n\Phi^2/2 - (\Phi^2)^2/4]} f(\Phi)}{\int \prod_\alpha \frac{d\Phi^\alpha}{\sqrt{2\pi}} e^{g[n\Phi^2/2 - (\Phi^2)^2/4]}} = \frac{\int \prod_\alpha d\Phi^\alpha \delta(\Phi^2 - n) f(\Phi)}{\int \prod_\alpha d\Phi^\alpha \delta(\Phi^2 - n)} \quad (101)$$

Dans ces conditions

$$\rho_k = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\int d\nu_{k+n/2}(t) \delta(t - n/2)}{\int d\nu_{n/2}(t) \delta(t - n/2)} = \lim_{n \rightarrow 0} (n/2)^k \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n/2 + k)}$$

soit finalement

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (102)$$

On aboutit à ce fait remarquable (de Gennes, 1972), que la limite $n \rightarrow 0$ du modèle σ -non linéaire conduit pour la fonction de corrélation à une somme sur des chemins sans auto-intersection (effet dit de volume exclu), modèle servant à décrire des solutions diluées de polymères. Il est utile de distinguer ce modèle, où l'on a fait une somme sur des chemins sans auto-intersection, d'une marche au hasard où le marcheur choisirait avec une loi de probabilité égale les sites voisins non encore visités. Ce dernier problème n'attribuerait visiblement pas le même poids global (97),(102) aux différents "polymères" joignant \mathbf{x}_1 , à \mathbf{x}_2 . Il possède néanmoins son intérêt propre et appartient à une classe d'universalité différente. Ce terme signifie que les deux processus ont un comportement différent à grande distance.

Etendre la formule précédente aux fonctions à $2k$ points. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow 0} \langle \Phi^1(\mathbf{x}_1) \cdots \Phi^1(\mathbf{x}_{2k}) \rangle = \sum_{\substack{\text{appariements} \\ \mathcal{P}}} \sum_{\substack{\omega_1, \dots, \omega_k \\ \partial \omega_j = \{ \mathbf{x}_{p_{2j-1}}, \mathbf{x}_{p_{2j}} \}}} \beta^{|\omega_1| + \dots + |\omega_k|} \times \prod_{\mathbf{x}} \rho_{n_{\mathbf{x}}(\omega_1) + \dots + n_{\mathbf{x}}(\omega_k)} \quad (103)$$

avec ρ_n donné par (98) ou (102). Chaque terme est à nouveau une somme sur des ensembles de chemins qui ne se recourent pas.

En dimension supérieure à quatre, deux chemins browniens ont une probabilité nulle d'intersection. Ceci suggère que les interactions du type φ^4 , ou celle des modèles σ -non linéaires, n'influencent pas sur une limite critique qui se confondra avec une théorie de champ libre (modèle gaussien). En revanche, nous nous attendons à ce qu'en dimension quatre (marginale) ou inférieure, la limite continue devienne non triviale. C'est ce qui sera confirmé par la suite à l'aide de méthodes très différentes.

2.4 Développement de haute température

Le développement sur des chemins discuté jusqu'ici, et qui possède des propriétés à la fois suggestives et convenant à des discussions théoriques, ne se prête pas à des calculs très aisés. Il s'apparente à un développement plus simple, dit de haute température, ou de couplage fort, qui conduit à la construction de séries explicites qui seront étudiées avec plus de détail au chapitre VII. Pour effectuer cette comparaison, nous choisirons le cas du modèle d'Ising ("modèle- σ " avec $n = 1$) où le champ φ est restreint à prendre deux valeurs ± 1 . La mesure d'intégration est donc

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2\pi}} e^{-V(\varphi^2)} = 2\delta(\varphi^2 - 1)d\varphi = d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{\pi} e^{ia - ia\varphi^2} \quad (104)$$

Considérons la fonction de partition

$$Z = \sum_{\varphi_{\mathbf{x}} = \pm 1} \exp \left(\beta \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} \right) = \sum_{\varphi_{\mathbf{x}} = \pm 1} \prod_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \exp(\beta \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'}) \quad (105)$$

Chaque paire de voisins, ou lien, donne lieu à un terme $\exp \beta \varphi \varphi'$, que dans un premier temps nous développons brutalement en série

$$e^{\beta \varphi \varphi'} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta^j}{j!} \varphi^j \varphi'^j \quad (106)$$

Substituant dans (105) et tenant compte de

$$\sum_{\varphi = \pm 1} \varphi^n = 2\delta_{n,0}^{(\text{mod } 2)} = \begin{cases} 2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (107)$$

on obtient une somme de termes correspondant à des configurations d'entiers $\{q_l\}$ positifs ou nuls, attachés à chaque lien, satisfaisant à la condition

$$\partial \{q_l\} = \emptyset \quad (108)$$

où $\partial \{q_l\}$ est l'ensemble des sites \mathbf{x} tels que la somme des q_l relatifs aux liens incidents sur le site \mathbf{x} soit impaire. Si Ω est le volume total (nombre de sites),

$$Z = 2^\Omega \sum_{\partial \{q_l\} = \emptyset} \frac{\beta^{\sum q_l}}{\prod_l q_l!} \quad (109)$$

Un raisonnement analogue conduit à l'expression de la fonction à deux points

$$Z \langle \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{y}} \rangle = 2^\Omega \sum_{\partial \{q_l\} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}} \frac{\beta^{\sum q_l}}{\prod_l q_l!} \quad (110)$$

et à des expressions similaires pour les fonctions à plus de points. En réordonnant suivant les puissances croissantes de β , on obtient les développements annoncés de couplage fort, qui présentent en effet de fortes analogies avec ceux obtenus précédemment. Pour examiner ceci en détail, écrivons explicitement ces derniers ($d\mu(a) = e^{ia} da/\pi$)

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_{\mathbf{x}} d\varphi_{\mathbf{x}} d\mu(a_{\mathbf{x}}) \exp \left(\beta \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \varphi_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}'} - i \sum_{\mathbf{x}} a_{\mathbf{x}} \varphi_{\mathbf{x}}^2 \right) \\ &= \int \prod_{\mathbf{x}} \left(d\mu(a_{\mathbf{x}}) \sqrt{\frac{\pi}{ia_{\mathbf{x}}}} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{\beta \sigma}{2ia_{\mathbf{x}}} \right) \right) \end{aligned} \quad (111)$$

$$-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{\beta \sigma}{2ia_{\mathbf{x}}} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\omega_{\mathbf{x}}} \frac{\beta^{|\omega_{\mathbf{x}}|}}{|\omega_{\mathbf{x}}|} \prod_{\mathbf{y}} \left(\frac{1}{2ia_{\mathbf{y}}} \right)^{n_{\mathbf{y}}(\omega_{\mathbf{x}})} \quad (112)$$

où l'on voit apparaître une somme sur \mathbf{x} et sur les chemins partant de \mathbf{x} et revenant à \mathbf{x} , notés $\omega_{\mathbf{x}}$, visitant chaque point \mathbf{y} un nombre $n_{\mathbf{y}}(\omega_{\mathbf{x}})$ de fois. D'où

$$Z = \int \prod_{\mathbf{x}} \left(da_{\mathbf{x}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ia_{\mathbf{x}}} \right) \sum_{k, r_q} \frac{1}{2^{\sum_{q=1}^k r_q} \prod_{q=1}^k r_q!} \times \sum_{\substack{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \\ \omega_{\mathbf{x}_1}, \dots, \omega_{\mathbf{x}_k}}} \frac{\beta^{\sum_{q=1}^k |\omega_{\mathbf{x}_q}|}}{\prod_{q=1}^k |\omega_{\mathbf{x}_q}|} \prod_{\mathbf{y}} \left(\frac{1}{2ia_{\mathbf{y}}} \right)^{\frac{1}{2} + \sum_{q=1}^k n_{\mathbf{y}}(\omega_{\mathbf{x}_q})} \quad (113)$$

où le chemin $\omega_{\mathbf{x}}$ décrit la même image géométrique r fois. Si l'on fait l'intégration sur a on obtient

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int da e^{ia} \left(\frac{1}{2ia} \right)^{k + \frac{1}{2}} = \frac{2}{(2k-1)!!} \quad (114)$$

(en utilisant la convention $(-1)!! = 1$). En effet,

$$\begin{aligned} 2 &= \int d\varphi 2\delta(\varphi^2 - 1) \varphi^{2k} = \int \frac{da}{\pi} e^{ia} \int d\varphi e^{-ia\varphi^2} \varphi^{2k} \\ &= (2k-1)!! \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int da \frac{e^{ia}}{(2ia)^{k + \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

En définitive

$$Z = 2^{\Omega} \sum_{k, r_q} \frac{1}{2^{\sum_{q=1}^k r_q} \prod_{q=1}^k r_q!} \sum_{\substack{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \\ \omega_{\mathbf{x}_1}, \dots, \omega_{\mathbf{x}_k}}} \frac{\beta^{\sum_{q=1}^k |\omega_{\mathbf{x}_q}|}}{\prod_{q=1}^k |\omega_{\mathbf{x}_q}|} \times \prod_{\mathbf{y}} \frac{1}{(2 \sum n_{\mathbf{y}}(\omega_{\mathbf{x}_q}) - 1)!!} \quad (115)$$

On peut encore simplifier cette expression en observant que le facteur au dénominateur compense partiellement le choix de l'origine \mathbf{x}_q sur un chemin fermé et que le facteur 2^k compense l'orientation des chemins, sauf pour des chemins exceptionnels (par exemple de longueur 2). Ceci dit, la donnée des chemins sans origine ni orientation définit une configuration au

sens de (109). Essayons de nous convaincre que l'on peut alors l'identifier avec (115).

Le mieux est de considérer un exemple, où nous choisissons la configuration des $\{q_l\}$ bidimensionnelle représentée sur la figure 5. Le développement de haute température attribue à cette configuration le facteur $\beta^{12}/2$. Dans la décomposition en chemins, deux sites sont visités deux fois donnant lieu à un facteur $[\prod_{\mathbf{y}} (2 \sum n_{\mathbf{y}}(\omega_{\mathbf{x}_q}) - 1)!!]^{-1} = 1/3^2$. La puissance de β est évidemment la même. Chaque décomposition en chemins donne un terme affecté du poids $\frac{1}{3^2}$, sauf la dernière qui a le poids $\frac{1}{2 \cdot 3^2}$ à cause du chemin de longueur 2, qui à origine donnée, n'a qu'un sens de parcours. Au total $\frac{1}{2} = (4 + \frac{1}{2}) \times (\frac{1}{3^2})$ comme il se doit. Plus généralement, nous laissons au lecteur le soin de se convaincre en effet que les deux méthodes donnent des résultats identiques.

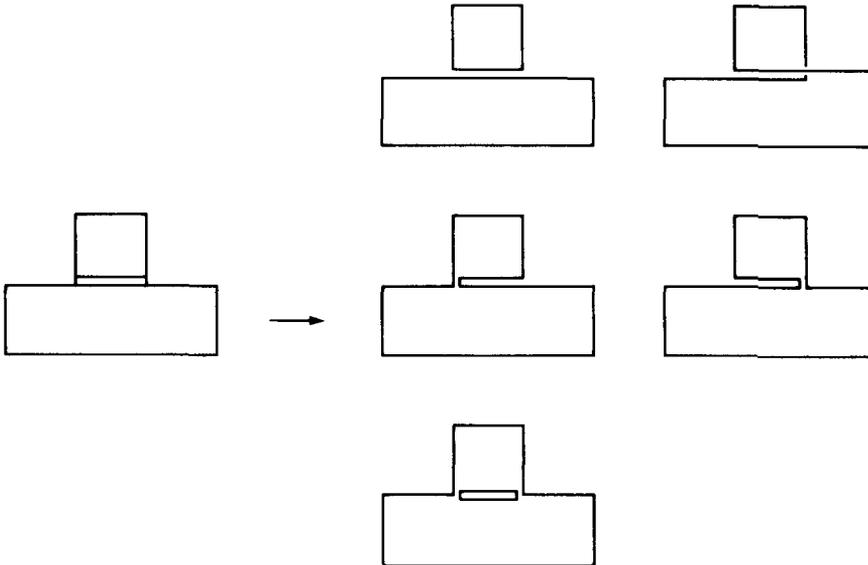


Figure 5 : Exemple de la relation entre diagrammes du développement de hautes températures et chemins fermés.

Dans le cas du modèle d'Ising – et nous en verrons d'autres exemples dans la suite – le développement de haute température mené comme il a été indiqué ci-dessus, n'est pas le plus économique, et il y a intérêt à remarquer que, puisque $\varphi\varphi' = \pm 1$, on a l'identité

$$e^{\beta\varphi\varphi'} = \cosh \beta + \varphi\varphi' \sinh \beta = \cosh \beta(1 + t\varphi\varphi') \quad (116)$$

avec $t = \tanh \beta$

On utilise cette identité pour chaque facteur dans (105) et par sommation sur les $\varphi_{\mathbf{x}}$, on aboutit à un développement sur des configurations restreintes où $q_l = 0, 1$. Si $L = \Omega d$ désigne le nombre total de liens aux effets de bord près,

$$Z = 2^\Omega (\cosh \beta)^L \sum_{\substack{\partial\{q_l\}=\emptyset \\ q_l=0,1}} t^{\sum q_l} \quad (117)$$

On obtient encore un ensemble de courbes fermées avec une définition ambiguë de la séparation en parties connexes lorsque ces courbes se croisent. De même, pour les fonctions de corrélation

$$Z \langle \varphi_{\mathbf{x}_1} \cdots \varphi_{\mathbf{x}_{2k}} \rangle = 2^\Omega (\cosh \beta)^L \sum_{\substack{\partial\{q_l\}=\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{2k}\} \\ q_l=0,1}} t^{\sum q_l} \quad (118)$$

Nous reviendrons plus tard en grand détail sur ces formules.

2.5 Le cas unidimensionnel

Les modèles unidimensionnels fournissent des cas simples d'intégrales fonctionnelles et correspondent à la version en champs aléatoires de la mécanique quantique, après un prolongement analytique aux temps imaginaires. Examinons d'abord les modèles à symétrie $O(n)$ avec conditions périodiques $\Phi_{L+x} = \Phi_x$, le système étant dans une "boîte" de longueur L . La fonction de partition s'écrit

$$Z = \int \prod_{x=1}^L \left(\frac{d^n \Phi_x}{(2\pi)^{n/2}} e^{-V(\Phi_x^2)} \right) \exp \beta \sum_x \Phi_x \cdot \Phi_{x+1} \quad (119)$$

Il est commode d'introduire la notion de matrice de transfert, qui se généralisera en dimension plus élevée. On définit pour cela un opérateur \mathcal{T} agissant sur des états, ou fonctions d'onde $\psi(\Phi)$, définies dans un espace à n -dimensions. L'opérateur \mathcal{T} est représenté par son noyau intégral

$$\mathcal{T}\psi(\Phi') = \int \frac{d^n \Phi}{(2\pi)^{n/2}} e^{-V(\Phi^2)} e^{\beta\Phi \cdot \Phi'} \psi(\Phi) \quad (120)$$

si bien que la fonction de partition s'écrit comme la trace de la L -ième puissance de \mathcal{T} . La trace correspond au choix de conditions aux limites périodiques et

$$Z_L = \text{Tr } \mathcal{T}^L = t_0^L + t_1^L + \cdots \quad (121)$$

où les valeurs propres $\{t_i\}$ de l'opérateur \mathcal{T} sont rangées par ordre décroissant. En général, la plus grande valeur propre n'est pas dégénérée, ce qui correspond à l'unicité de l'état fondamental des problèmes de mécanique quantique. Ceci généralise un théorème de Frobenius qui dit que la plus grande valeur propre d'une matrice réelle symétrique à coefficients positifs n'est pas dégénérée, et que les coordonnées du vecteur propre correspondant sont toutes de même signe. Notons que \mathcal{T} défini par (120) n'est pas symétrique, mais le devient par un changement de base approprié. Il suffit pour cela de substituer à $V(\Phi^2)$ la demi-somme $\frac{1}{2}(V(\Phi^2) + V(\Phi'^2))$ ce qui ne modifie pas (121). A proprement parler, remarquons que le théorème de Frobenius s'applique seulement à des matrices finies, alors que \mathcal{T} agit ici dans un espace de dimension infinie.

Dans la limite thermodynamique $L \rightarrow \infty$, la plus grande valeur propre est dominante, et l'énergie libre est donnée par

$$\mathcal{F} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \ln Z_L = \ln t_0 \quad (122)$$

Considérons en particulier le cas du modèle σ -non linéaire

$$\frac{d^n \Phi}{(2\pi)^{n/2}} e^{-V(\Phi^2)} = d^n \Phi \, 2\delta(\Phi^2 - n) \quad (123)$$

Les fonctions d'onde sont définies sur une sphère de rayon $\sqrt{n^{1/2}}$. Par un changement d'échelle on se ramène à la sphère unité dont nous normalisons la mesure $d^{n-1} \hat{\Phi}$ selon

$$\int d^{n-1} \hat{\Phi} = S_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

et l'équation (120) devient

$$\mathcal{T}\psi(\hat{\Phi}') = n^{(n/2)-1} \int d^{n-1} \hat{\Phi} e^{\beta n \hat{\Phi} \cdot \hat{\Phi}'} \psi(\hat{\Phi}) \quad (124)$$

L'opérateur \mathcal{T} est invariant par rotation dans l'espace isotopique des Φ . Ses vecteurs et valeurs propres s'obtiennent en décomposant les fonctions d'ondes ψ sur les harmoniques sphériques. La plus grande valeur propre correspond à $\psi = \text{Cste}$, et par conséquent

$$t_0 = n^{n/2-1} S_{n-1} \int_0^\pi d\theta \sin^{n-2} \theta e^{\beta n \cos \theta} = (2\pi)^{n/2} \frac{I_{n/2-1}(n\beta)}{\beta^{n/2-1}} \\ (=2 \cosh \beta \quad \text{pour } n = 1) \quad (125)$$

Ici $I_\nu(z)$ est la fonction de Bessel modifiée

$$I_\nu(z) = (z/2)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k}}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \quad (\nu \neq -1, -2, \dots) \quad (126)$$

$$I_{\nu-1} = \frac{2\nu}{z} I_\nu + I_{\nu+1}, \quad I'_\nu = \frac{\nu}{z} I_\nu + I_{\nu+1}$$

On obtient donc pour t_0 une fonction entière et paire en β , évidemment positive lorsque n est entier. Son expression en termes de fonction de Bessel permet un prolongement analytique en n . En particulier $t_0(\beta, n)$ tend vers 1 pour $n \rightarrow 0$, en accord avec la discussion donnée au paragraphe 2.3. Pour n grand en revanche

$$t_0(\beta, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2\pi}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{e^{\beta n}}{\sqrt{n}} \quad (127)$$

Calculons maintenant les fonctions de corrélations. En vertu de l'invariance par rotation

$$G(1, 2) = \langle \Phi^{\alpha_1}(x_1) \Phi^{\alpha_2}(x_2) \rangle = \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \frac{1}{n} \langle \Phi(x_1) \cdot \Phi(x_2) \rangle \quad (128)$$

Or l'opérateur \mathcal{T} défini par (124) est hermitique. Ses vecteurs propres (les harmoniques sphériques) sont orthogonaux. Si on les désigne par $|l, m\rangle$, m étant un indice de dégénérescence, on trouve

$$G(1, 2) = \frac{\delta^{\alpha_1 \alpha_2}}{n} \sum_{l, m} \left(\frac{t_l}{t_0} \right)^{|x_1 - x_2|} \langle 0 | \Phi | l, m \rangle \langle l, m | \Phi | 0 \rangle \quad (129)$$

et l'état fondamental $|0\rangle$ correspond à une constante $\psi_0(\Phi) = S_n^{-\frac{1}{2}}$. Cette expression est typique des méthodes de matrice de transfert. Lorsque $|x_1 - x_2| \rightarrow \infty$, les fonctions de corrélations sont dominées par $(t_1/t_0)^{|x_1 - x_2|}$ où t_1 est la seconde valeur propre, pourvu que les éléments de matrice correspondants ne s'annulent pas. Puisque $t_1 < t_0$, il y a décroissance exponentielle des corrélations tant que la seconde valeur propre n'est pas dégénérée avec la première, ce qui est le cas ici. Une composante de Φ appliquée à l'état fondamental engendre une harmonique d'ordre 1 (les harmoniques d'ordre p sont de la forme $s_{\alpha_1 \dots \alpha_p} \Phi^{\alpha_1} \dots \Phi^{\alpha_p}$, où $s_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ est un tenseur symétrique dont toutes les traces partielles sont nulles). Dans le cas présent, la somme (129) se réduit donc aux termes $l = 1, m = 1, 2, \dots, n$, et on trouve exactement

$$G(1, 2) = \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \left(\frac{t_1}{t_0} \right)^{|x_1 - x_2|} = \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \exp \left(- \frac{|x_1 - x_2|}{\xi} \right) \quad (130)$$

quel que soit l'intervalle entre x_1 et x_2 . La quantité ξ est une *longueur de corrélation*, reliée à la taille de la région où les champs sont corrélés. En particulier, pour deux sites voisins

$$t_1/t_0 = n^{-1} \langle \Phi_x \cdot \Phi_{x+1} \rangle = (nL)^{-1} \sum_{x=1}^L \langle \Phi_x \cdot \Phi_{x+1} \rangle$$

Cette dernière quantité n'est autre que $\frac{1}{nL} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_L = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln t_0$. D'où

$$e^{-1/\xi} = \frac{t_1}{t_0} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln t_0 \quad (131)$$

En définitive

$$e^{-1/\xi} = \frac{I_{n/2}(n\beta)}{I_{n/2-1}(n\beta)} = \beta - \frac{n}{n+2} \beta^3 + \frac{2n^2}{(n+2)(n+4)} \beta^5 + \mathcal{O}(\beta^7) \quad (132)$$

En particulier, si $n = 1$ (modèle d'Ising)

$$\xi^{-1} = -\ln \tanh \beta \quad (133)$$

et si $n = 2$ (modèle des rotateurs rigides)

$$\xi^{-1} = -\ln \frac{I_1(2\beta)}{I_0(2\beta)} \quad (134)$$

Dans le cas du modèle d'Ising, la formule (133) peut être aisément établie par un calcul direct. Quel que soit n entier supérieur ou égal à 1, la longueur de corrélation est finie pour tout β et tend vers l'infini lorsque $\beta \rightarrow \infty$ (température nulle). Par exemple pour $n = 2$, $\exp(-1/\xi) \sim 1 - 1/4\beta + \mathcal{O}(1/\beta^2)$ donc $\xi \sim 4\beta$. D'une certaine manière, on est donc en droit de dire que $\beta \rightarrow \infty$ est le seul *point critique* au voisinage duquel on peut substituer au modèle discret un modèle continu. D'ailleurs il en sera ainsi (Landau) pour tout modèle unidimensionnel lorsque les interactions sont à courte portée.

Deux cas limites sont intéressants. Tout d'abord, lorsque n tend vers 0, on a déjà vu que t_0 tend vers 1. En ce qui concerne t_1/t_0 , on vérifie sans peine que

$$e^{-1/\xi} = \frac{I_{n/2}(n\beta)}{I_{n/2-1}(n\beta)} = \beta \frac{I_{n/2}(n\beta)}{I_{n/2}(n\beta) + \beta I_{n/2+1}(n\beta)} \xrightarrow{n \rightarrow 0} \beta \quad (135)$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow 0} \langle \Phi^1(x_1) \Phi^1(x_2) \rangle = \beta^{|x_1 - x_2|} \quad (136)$$

qui est le résultat attendu puisqu'il n'existe qu'un seul chemin sans recouvrement allant de x_1 à x_2 . Lorsqu'on effectue des prolongements analytiques, comme dans le cas de la limite n tendant vers zéro, on perd certaines propriétés de positivité. Par exemple ici la fonction de corrélation peut être plus grande que l'unité.

Une autre limite intéressante est celle qui correspond à un nombre infini de composantes, cas qui sera traité plus en détail par la suite. Si on utilise le comportement asymptotique des fonctions de Bessel (résultat de la méthode du col)

$$I_\nu(\nu z) \underset{\nu \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp \left\{ \nu \left[\sqrt{1+z^2} + \ln \frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}} \right] \right\} \quad (137)$$

ou, plus simplement, si on observe que $t_1/t_0 = n^{-1} \langle \Phi_x \cdot \Phi_{x+1} \rangle$ est la valeur au col de $\cos \theta$ dans l'exponentielle de l'intégrand du noyau de $\exp n(\beta \cos \theta + \ln |\sin \theta|)$ (cf (125))

$$-\beta \sin \theta_c + \cotan \theta_c = 0$$

on trouve

$$\frac{t_1}{t_0} = \cos \theta_c = \beta \left(1 - \frac{t_1^2}{t_0^2} \right) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

soit

$$\frac{t_1}{t_0} = e^{-1/\xi} = \frac{\sqrt{1+4\beta^2} - 1}{2\beta} = \beta - \beta^3 + 2\beta^5 + \mathcal{O}(\beta^7) \quad (138)$$

On vérifie que le développement est en accord avec (132). Que t_1/t_0 vérifie une équation algébrique dans la limite où n tend vers l'infini résulte d'un autre raisonnement fort instructif qui conduit au même résultat (138). On a vu que

$$\frac{1}{n} \langle \Phi \cdot \Phi' \rangle = \frac{\int d^n \Phi 2\delta(\Phi^2 - n) e^{\beta \Phi \cdot \Phi'} \Phi \cdot \Phi' / n}{\int d^n \Phi 2\delta(\Phi^2 - n) e^{\beta \Phi \cdot \Phi'}} \quad (139)$$

Ici on peut donc entendre par $\langle \rangle$ la moyenne sur un seul vecteur Φ à l'aide de la mesure ci-dessus, où, bien sûr, Φ' est de longueur \sqrt{n} lui aussi. D'ailleurs on peut compléter (139) par une moyenne sur les orientations de Φ' . Considérons alors la quantité $\langle \Phi^\alpha \Phi^\beta \rangle$ et examinons l'effet d'un changement de la variable d'intégration $\Phi \rightarrow (1 + \delta A)\Phi$, où δA est une matrice antisymétrique $n \times n$ réelle infinitésimale qui correspond à une rotation infinitésimale du vecteur Φ , dans le numérateur de la valeur moyenne. Une telle opération ne peut évidemment pas modifier $\langle \Phi^\alpha \Phi^{\beta q} \rangle$. Compte tenu de l'invariance de la mesure on trouve donc que

$$\delta \langle \Phi'^{\alpha} \Phi^{\beta} \rangle = \delta A_{\beta\gamma} \langle \Phi'^{\alpha} \Phi^{\gamma} \rangle + \beta \delta A_{\gamma\delta} \langle \Phi'^{\alpha} \Phi^{\beta} \Phi'^{\gamma} \Phi^{\delta} \rangle = 0$$

Les matrices antisymétriques se développent sur une base de matrices indépendantes de la forme $A_{(\mu\nu)\alpha\beta} = \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu} - \delta_{\alpha\nu}\delta_{\beta\mu}$. En identifiant leur coefficient on obtient

$$0 = \delta_{\beta\mu} \langle \Phi'^{\alpha} \Phi^{\nu} \rangle - \delta_{\beta\nu} \langle \Phi'^{\alpha} \Phi^{\mu} \rangle + \beta \langle \Phi'^{\alpha} \Phi^{\beta} (\Phi'^{\mu} \Phi^{\nu} - \Phi'^{\nu} \Phi^{\mu}) \rangle$$

Posons $\mu = \alpha$, $\nu = \beta$, et sommons de 1 à n , il vient

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} \langle \Phi \cdot \Phi' \rangle = \beta \left(1 - \frac{1}{n^2} \langle (\Phi \cdot \Phi')^2 \rangle\right) \quad (140)$$

Lorsque $n = 1$, le membre de gauche s'annule, et l'équation nous rappelle que $(\Phi \cdot \Phi')^2 = 1$. Cette relation, valable pour tout n , se simplifie pour n tend vers l'infini. Dans ce cas, la méthode du col s'applique et les fluctuations de la quantité invariante $\Phi \cdot \Phi' / n$ deviennent relativement négligeables. On peut donc établir dans cette limite une propriété de factorisation des valeurs moyennes d'observables invariantes, dont un cas particulier est

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \langle (\Phi \cdot \Phi')^2 \rangle = \left(\frac{1}{n} \langle \Phi \cdot \Phi' \rangle \right)^2 \quad (141)$$

d'où il découle sans peine que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \langle \Phi \cdot \Phi' \rangle + \beta \left[\left(\frac{1}{n} \langle \Phi \cdot \Phi' \rangle \right)^2 - 1 \right] \right\} = 0 \quad (142)$$

qui n'est autre que l'équation algébrique conduisant à (138).

Absence de phase ordonné à une dimension.

Les expressions très simples obtenues pour le modèle d'Ising à une dimension illustrent bien le raisonnement de Landau sur l'absence d'ordre unidimensionnel. En effet, en rapportant l'action à sa valeur maximum, c'est-à-dire en normalisant la fonction de partition à 1 pour $\beta \rightarrow \infty$, on peut la récrire pour un échantillon de taille L

$$\tilde{Z}_L(\beta) = e^{-L\beta} Z_L(\beta) = (1 + e^{-2\beta})^L = \sum_{k=0}^L \binom{L}{k} e^{-2k\beta}$$

qui s'interprète en disant qu'on divise l'échantillon par k cloisons séparant des phases pures (tous les spins + ou tous les spins -). A chaque cloison, on a une variation de l'action -2β et il y a $\binom{L}{k}$ choix possibles pour les positions des cloisons. La fonction de partition est la somme sur toutes les possibilités

pour k . On voit que ce raisonnement pourrait s'appliquer dans un contexte général de coexistence de deux phases, où le terme -2β s'interpréterait comme l'énergie libre par interface (0-dimensionnel) et le facteur entropique $\binom{L}{k}$ serait le même. Maintenant, cherchons la valeur moyenne de k . Si les k petits sont favorisés, il pourra y avoir existence de vastes plages monophasées. Or, en utilisant la formule de Stirling (qui, comme on le sait, est une excellente formule asymptotique, même pour des valeurs de l'argument d'ordre unité)

$$\tilde{F}(\beta) = \frac{1}{L} \ln \tilde{Z}_L(\beta) = -(x \ln x + (1-x) \ln(1-x) + 2\beta x) \quad \text{avec } x = \frac{k}{L}$$

La condition $\partial \tilde{F} / \partial x = 0$ fournit $k = L / (1 + \exp(2\beta))$. Pour tout β fini, k reste proportionnel à L , le désordre l'emporte. Il est vrai cependant que lorsque $\beta \rightarrow \infty$ (température tendant vers zéro), k/L s'annule, ce qui explique que la longueur de corrélation, sensiblement (L/k) , tende vers l'infini. On vérifie bien entendu que la substitution $x = k/L = (1 + \exp(2\beta))^{-1}$ redonne $\tilde{F} = \ln(1 + e^{-2\beta})$ tandis que pour $\xi \sim \frac{1}{2}e^{2\beta}$ (lorsque $\beta \rightarrow \infty$) se compare bien à $L/k \sim e^{2\beta}$.

Ces raisonnements, valables pour la coexistence d'un nombre fini de phases, sont à modifier lorsque le système admet une symétrie continue donnant lieu à un ensemble continu de phases possibles. Ceci est apparent sur le comportement de la longueur de corrélation qui, au lieu de croître exponentiellement, ne croît plus que linéairement, le coefficient de β variant de 4 à 2 lorsque n passe de 2 à l'infini.

Appendice A. Réseaux

Dans cet appendice, nous rappelons au lecteur certaines caractéristiques des réseaux réguliers en dimension deux ou trois. Ces réseaux sont caractérisés par un groupe de translations

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \sum n_i \mathbf{e}_i$$

n_i étant des entiers et \mathbf{e}_i un ensemble de générateurs ($i = 1, \dots, d$). En plus de l'invariance par translation, il peut aussi y avoir des symétries ponctuelles, rotations ou réflexions. En fait les réseaux ne peuvent être invariants que sous l'effet de rotations appartenant à un groupe cyclique d'ordre $n = 2, 3, 4$ ou 6 . Les autres valeurs de n sont exclues à cause de l'incompatibilité avec la symétrie de translation. L'existence d'une invariance par rotation entraîne des contraintes sur les générateurs, conduisant à une classification des types de réseau. On voit sur les figures 6 et 7 les 5 types en dimension

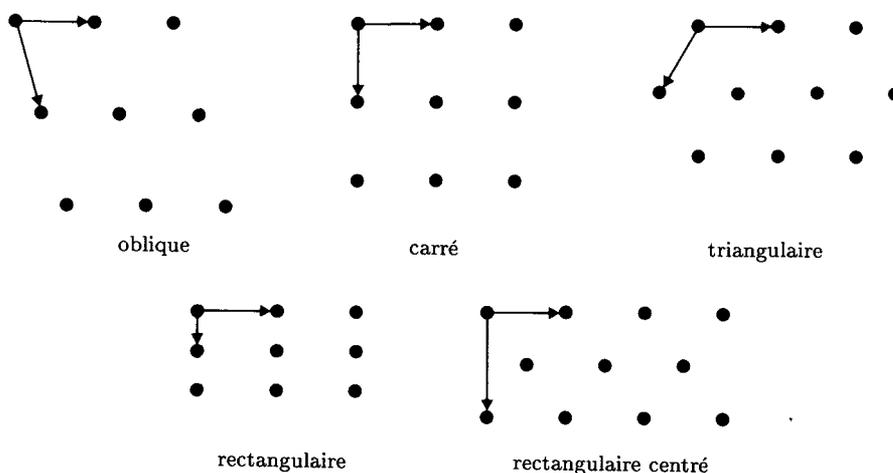


Figure 6 : Principaux réseaux en deux dimensions.

réseau	définition
oblique	$a \neq b, \varphi \neq 90^\circ$
carré	$a = b, \varphi = 90^\circ$
triangulaire	$a = b, \varphi = 120^\circ$
rectangulaire	$a \neq b, \varphi = 90^\circ$
rectangulaire centré	$a \neq b, \varphi = 90^\circ$

Table II : Principaux réseaux en deux dimensions. Les longueurs de certains vecteurs usuels de translation sont appelées a et b , l'angle qu'ils forment est noté φ .

deux et les 14 autres en dimension trois; leurs caractéristiques sont données dans les tables II et III.

Des réseaux plus complexes sont obtenus par translation d'un groupe de sites. Parmi toutes ces possibilités, citons l'exemple du réseau en nid d'abeille à deux dimensions (figure 8) et du réseau du diamant (figure 9).

Nous nous intéressons particulièrement aux réseaux qui présentent la symétrie de rotation la plus grande. C'est le cas des réseaux triangulaire et carré en deux dimensions et des réseaux cubique simple, cubique centré et cubique à faces centrées en trois dimensions. Plus généralement, en dimension plus grande, on distingue trois grands types de réseaux: le réseau hypercubique, dont les sites sont à des valeurs entières des coordon-

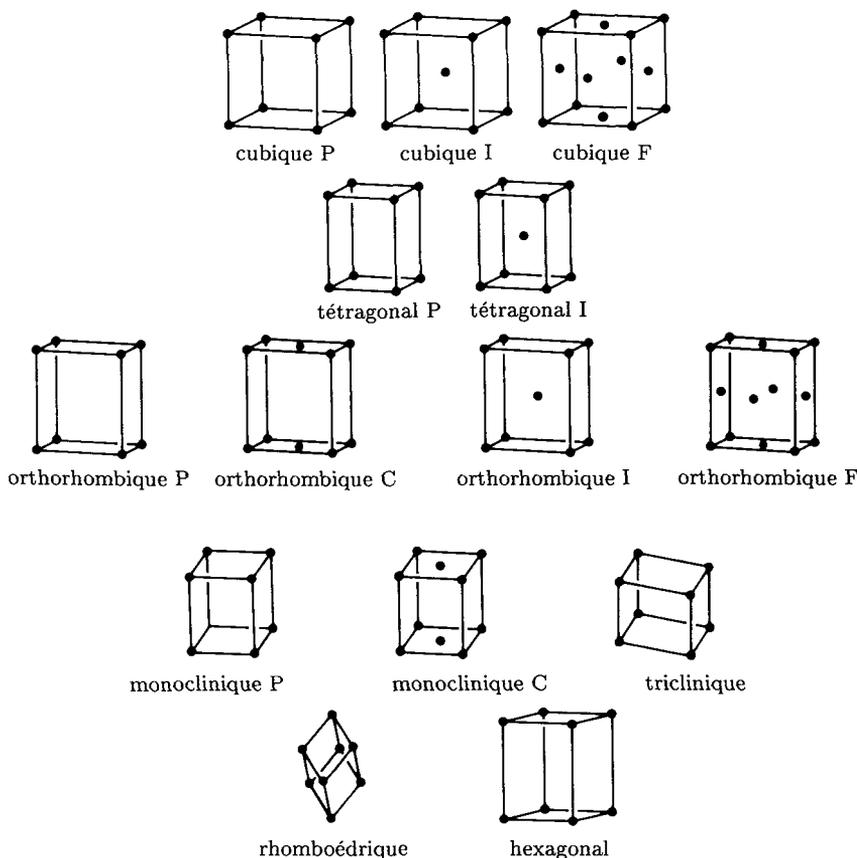


Figure 7 : Réseau en trois dimensions.

nées pour un repère orthonormé; le réseau hypercubique centré composé de deux réseaux hypercubiques déplacés l'un par rapport à l'autre d'un vecteur $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$, et le réseau cubique à faces centrées généralisé, qui est l'intersection d'un réseau hypercubique de dimension $(d+1)$ par l'hyperplan $x_1 + \dots + x_{d+1} = 0$.

Notes

Notre présentation du mouvement brownien est très schématique. Un développement plus complet se trouve dans l'article de E.W. Montroll et B.J. West publié dans *Studies in Statistical Mechanics VII, Fluctuation Phenomena*, E.W. Montroll et J.L. Lebowitz eds, North Holland, Amsterdam (1979). L'intérêt de cet ouvrage est complété par la citation de nom-

réseau	définition
triclinique	$a \neq b \neq c \alpha \neq \beta \neq \gamma$
monoclinique $\begin{cases} P \\ C \end{cases}$	$a \neq b \neq c \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$
orthorhombique $\begin{cases} P \\ C \\ I \\ F \end{cases}$	$a \neq b \neq c \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
tétragonal $\begin{cases} P \\ I \end{cases}$	$a = b \neq c \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
cubique $\begin{cases} P \text{ (simple)} \\ I \text{ (centré)} \\ F \text{ (à faces centrées)} \end{cases}$	$a = b = c \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
rhomboédrique	$a = b = c \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$
hexagonal	$a = b \neq c \alpha = \beta = 90^\circ \gamma = 120^\circ$

Table III : Principaux réseaux en dimension trois. Les longueurs de certains vecteurs usuels de translation sont appelées a , b et c et leurs angles respectifs α , β , γ .

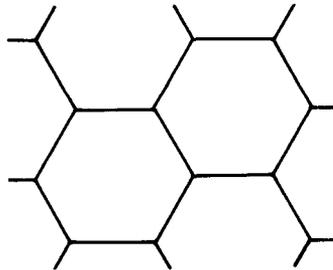


Figure 8 : Réseau en nid d'abeille.

breuses références. Parmi les nombreuses références mathématiques, citons l'ouvrage classique en deux volumes par W. Feller *An introduction to probability theory and its applications*, deuxième édition, John Wiley and Sons, New York (1971) et *Principles of Random Walk* par F. Spitzer, Springer Verlag, Heidelberg (1976).

La théorie des champs quantiques euclidiens et son interprétation statistique font l'objet d'un cours classique de K. Symanzik publié dans *Rendiconti della Scuola Internazionale di Fisica "Enrico Fermi"*, XLV Corso, Teorica quantistica locale, R. Jost ed., Academic Press, New York

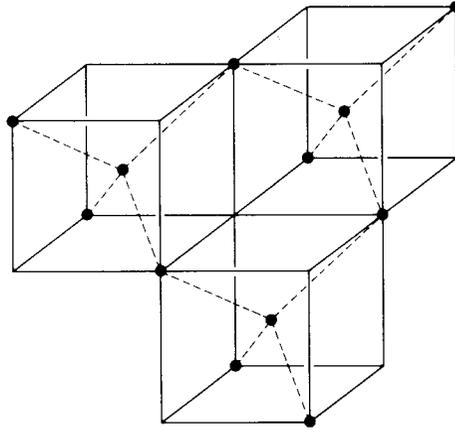


Figure 9 : Réseau du diamant.

(1969). L'observation que le modèle à symétrie $O(n)$ à la limite $n \rightarrow 0$ décrit des chaînes sans interactions est due à P.G. de Gennes, *Phys. Lett.* **38A**, 339 (1972). Pour un traitement complet de la physique des polymères, voir J. des Cloizeaux et G. Jannink, *Les polymères en solution : leur modélisation et leur structure*, Les Editions de Physique, Paris (1987). Le paragraphe 2, sur la théorie des champs en interaction traitée comme une somme pondérée sur les chemins, est inspiré de J. Fröhlich, *Nucl. Phys.* **B200**[FS4], 281 (1982) qui discute la trivialité des théories $\lambda\phi^4$ en dimension supérieure ou égale à quatre. Un travail similaire est du à M. Aizenman, *Comm. Math. Phys.* **86**, 1 (1982). Pour les inégalités ferromagnétiques, nous conseillons R.B. Griffiths, *J. Math. Phys.* **8**, 478 (1967).

CHAPITRE II

INTEGRALES DE GRASSMANN

ET MODELE D'ISING BIDIMENSIONNEL

Jusqu'ici, nous avons considéré des modèles issus de la physique statistique classique mettant en jeu des variables commutantes ou c -nombres. Cependant, tant pour les applications à la physique des particules que pour exposer l'origine de la solution d'Onsager du modèle d'Ising bidimensionnel, il nous faut aussi envisager le cas des modèles fermioniques impliquant des variables anticommutantes. Ces dernières trouvent leur origine dans les travaux des géomètres du siècle dernier (Grassmann), et ont servi au développement du calcul extérieur. Leur utilisation dans le contexte de la physique statistique ou quantique est cependant assez récent (Berezin). Nous présentons la solution d'Onsager au paragraphe 2 et discutons la limite continue au paragraphe 3.

1. Intégrales de Grassmann

1.1 Variables anticommutantes

Considérons un nombre fini N de symboles η_i qui satisfont aux règles d'anticommutation

$$\eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0 \quad (1)$$

avec en particulier $\eta_i^2 = 0$. De façon générale $(\sum f^i \eta_i)^2 = 0$, quels que soient les coefficients f^i . L'algèbre de Grassmann engendrée par ces symboles est celle des expressions de la forme

$$f(\eta) = f^o + \sum_i f^i \eta_i + \sum_{i < j} f^{ij} \eta_i \eta_j + \sum_{i < j < k} f^{ijk} \eta_i \eta_j \eta_k + \dots \quad (2a)$$

$$= \sum_{0 \leq k \leq N} \frac{1}{k!} \sum_{\{i\}} f^{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1} \eta_{i_2} \dots \eta_{i_k} \quad (2b)$$

Les tenseurs antisymétriques ont k indices, k pouvant aller de 1 à N . Comme il y a $\binom{N}{k} = N! / k!(N-k)!$ tenseurs linéairement indépendants de ce type,

on trouve en sommant sur k de 0 à N qu'il y a 2^N coefficients f indépendants. Ces quantités forment alors naturellement un espace vectoriel à 2^N dimensions. Cependant, la règle d'anticommutation (1) permet d'enrichir cette structure en définissant le produit fg

$$f(\eta)g(\eta) = f^o g^o + \sum_i (f^o g^i + f^i g^o) \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} (f^{ij} g^o + f^i g^j - f^j g^i + f^o g^{ij}) \eta_i \eta_j + \dots \quad (3)$$

En général fg n'est pas égal à $\pm gf$, mais les éléments qui contiennent un nombre pair de variables η commutent avec tous les autres.

On peut faire le parallèle avec le cas où on substituerait aux variables anticommutantes η_i des variables commutantes X_i , i allant de 1 à N . Dans ce cas les coefficients seraient des tenseurs symétriques, de rang arbitrairement grand. Alors aux fonctions (2) correspondraient des séries (en général infinies). Alors que, dans le cas antisymétrique, le nombre des coefficients linéairement indépendants d'ordre k est donné par le coefficient $\binom{N}{k}$ du terme en A^k dans le développement de $(1+A)^N$, dans le cas symétrique ce nombre est donné par le coefficient de A^k dans le développement de $(1-A)^{-N}$ c'est-à-dire $\binom{N+k-1}{k} = (N+k-1)!/k!(N-1)!$.

Dans le cas antisymétrique, le monôme élémentaire est $\eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \dots$ où les entiers n_1, n_2, \dots, n_N valent tous 0 ou 1. Il est donc déterminé par l'ensemble des nombres d'occupation de N états fermioniques et on écrira un élément générique de l'algèbre

$$f = \sum_{n_i=0,1} f_{n_1, n_2, \dots, n_N} \eta_1^{n_1} \eta_2^{n_2} \dots \eta_N^{n_N} \quad (2c)$$

Dans l'analogie commutatif, les nombres d'occupation entiers n_i ne sont pas bornés. La description d'un système de bosons utilise donc naturellement des variables commutantes, celle des fermions des variables anticommutantes.

Dans la description donnée par (2b), un choix possible pour la correspondance "trou-particule" est $f \rightarrow *f$ est tel que

$$*f_{\mu_1 \dots \mu_k} = \frac{1}{(N-k)!} \sum_{\mu_{k+1}, \dots, \mu_N} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1} \dots \mu_N} f_{\mu_{k+1} \dots \mu_N} \quad (4a)$$

où ε est le symbole totalement antisymétrique de Levi Civita, avec la convention $\varepsilon_{12 \dots N} = 1$. Montrer que

(i) dans la description (2c) $*f_{n_1 \dots n_N} = \pm f_{n_1+1, \dots, n_N+1}$ où les nombres d'occupation sont entendus modulo 2. Discuter le signe correspondant.

(ii)

$$** f_{\mu_1 \dots \mu_k} = (-1)^{k(N-k)} f_{\mu_1 \dots \mu_k} \quad (4b)$$

(iii) montrer que le coefficient de $\eta_1 \dots \eta_N$ dans $*f(\eta)f(\eta)$ est

$$\sum_k \left(\frac{1}{k!} \sum_{\mu_1 \dots \mu_k} f_{\mu_1 \dots \mu_k}^2 \right) \quad (4c)$$

Dans le cas commutatif construisons un espace de Hilbert tel que deux monômes distincts soient orthogonaux. Une base de vecteurs orthonormés est donnée par les monômes

$$X_{\{n\}} \equiv \frac{X_1^{n_1}}{(n_1!)^{1/2}} \frac{X_2^{n_2}}{(n_2!)^{1/2}} \dots \frac{X_N^{n_N}}{(n_N!)^{1/2}} \rightarrow |\{n\}\rangle \quad (5)$$

Les séries finies sont complétées par les séries infinies convergeant au sens de la norme. En introduisant les variables complexes conjuguées $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots$, il est possible, en suivant Fock et Bargmann, de traduire la structure d'espace de Hilbert (infini) des états en définissant les intégrales

$$\delta_{\{n\}, \{m\}} = \langle \{n\} | \{m\} \rangle = \int \prod_{j=1}^N \left(\frac{d^2 X_j}{2\pi} e^{-X_j \bar{X}_j} \right) \bar{X}_{\{n\}} X_{\{m\}} \quad (6)$$

La mesure $d^2 X$ signifie $d \operatorname{Re} X d \operatorname{Im} X$. A chaque état est ainsi associé une fonction analytique (entière) des variables X_i

$$B = \sum_{\{n\}} b_{\{n\}} X_{\{n\}} \quad (7a)$$

avec pour norme

$$\langle B | B \rangle = \sum_{\{n\}} |b_{\{n\}}|^2 = \int \prod_{j=1}^N \left(\frac{d^2 X_j}{2\pi} e^{-X_j \bar{X}_j} \right) \overline{B(X)} B(X) \quad (7b)$$

et on a une formule analogue pour les produits scalaires. Cette construction se complète par la définition des créateurs et annihilateurs a_i^\dagger, a_i , satisfaisant aux règles de commutation de Bose

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (8a)$$

Dans la représentation (7), à ces opérateurs correspond la multiplication ou la dérivation par rapport à la variable de même indice

$$a_i^\dagger \rightarrow X_i \quad a_i \rightarrow \frac{\partial}{\partial X_i} \quad (8b)$$

Ces opérateurs sont adjoints l'un de l'autre, comme on le vérifie en utilisant l'expression (7b) de la norme.

Il est remarquable, comme l'a montré Berezin, que cette construction a son pendant exact dans le cas fermionique. Nous avons déjà défini somme et produit des éléments de l'algèbre de Grassmann. Etendons ces définitions à celle de la dérivation – à gauche par exemple – par rapport à la variable $\partial/\partial\eta_i$, soit $\frac{\partial}{\partial\eta_i}$, agissant de la manière suivante. Pour chaque monôme qui contient η_i , on amène cette variable à gauche – au prix d'un signe éventuel – puis on la supprime. S'il ne la contient pas, la dérivée est nulle. L'opération est alors étendue par linéarité. On définirait de manière analogue une dérivation à droite. Il est facile de vérifier que

$$\frac{\partial}{\partial\eta_i} \frac{\partial}{\partial\eta_j} + \frac{\partial}{\partial\eta_j} \frac{\partial}{\partial\eta_i} = 0 \quad (9a)$$

$$\frac{\partial}{\partial\eta_i} \eta_j + \eta_j \frac{\partial}{\partial\eta_i} = \delta_{ij} \quad (9b)$$

La première relation est équivalente à la condition que toute combinaison linéaire à coefficients scalaires ait un carré nul. Elle montre en outre que les dérivées $\partial/\partial\eta_i$ engendrent à leur tour une algèbre de Grassmann isomorphe à celle des η_i , pour laquelle (9b) indique que ces dernières jouent le rôle de dérivation (à droite). Cette même relation permet, en parallèle avec (8b), de représenter les créateurs et annihilateurs fermioniques selon

$$a_i^\dagger \rightarrow \eta_i \quad a_i \rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta_i} \\ \{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad (10)$$

La notation $\{A, B\}$ désigne l'anticommutateur $AB + BA$. On peut en outre définir sur l'algèbre des fonctions $f(\eta)$, considérée comme espace vectoriel, un produit scalaire, tel que

$$\langle g, f \rangle = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} \bar{g}^{i_1 \dots i_k} f^{i_1 \dots i_k} \quad (11)$$

Ici la barre sur les coefficients indique la conjugaison si l'on a affaire à des coefficients complexes. Si on introduit une seconde famille de variables anticommutantes $\bar{\eta}_i$ (anticommutant entre elles et avec les η_i) on définira naturellement une correspondance (antilinéaire)

$$f \rightarrow \bar{f} \quad \sum_k \sum_{\{i\}} f^{i_1 \dots i_k} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k} \rightarrow \sum_k \sum_{\{i\}} \bar{f}^{i_1 \dots i_k} \bar{\eta}_{i_k} \dots \bar{\eta}_{i_1} \quad (12)$$

Remarquons le renversement dans l'ordre des indices. Cette application s'étend à l'espace de dimension 2^{2N} engendré par les produits de η_i et de $\bar{\eta}_i$

Revenons aux opérateurs de création de annihilation, et considérons les $2N$ combinaisons

$$\Gamma_j = a_j + a_j^\dagger \quad \Gamma_{N+j} = i(a_j - a_j^\dagger) \quad 1 \leq j \leq N \quad (13)$$

(représentables par des matrices $2^N \times 2^N$), satisfaisant aux relations

$$\{\Gamma_s, \Gamma_{s'}\} = 2\delta_{s,s'} \quad 1 \leq s, s' \leq 2N \quad (14)$$

ce sont les générateurs d'une algèbre de Clifford (d'opérateurs) associée à l'algèbre de Grassmann. Il est facile de s'assurer que, par combinaisons linéaires et produits (au nombre de 2^{2N} indépendants), on obtient ainsi l'ensemble de tous les opérateurs sur l'algèbre de Grassmann. Le cas $N = 1$ correspond aux quaternions ou matrices de Pauli, le cas $N = 2$ aux matrices de Dirac.

- (i) Ecrire les opérateurs a, a^\dagger, Γ dans les bases des polynômes en η , respectivement dans les cas $N = 1$ et $N = 2$.
- (ii) Etudier l'opération de dualité définie par les équations.
- (iii) Décrire le groupe linéaire canonique agissant sur les opérateurs de création et d'annihilation dans les cas bosonique et fermionique respectivement (groupe symplectique ou orthogonal).

1.2 Intégrales

Poursuivant le parallèle avec le cas des variables commutantes et la construction de Fock–Bargmann, on introduit une intégrale, opération linéaire sur les fonctions qu'on identifie dans le cas présent avec la dérivation (à gauche)

$$\int d\eta f(\eta) = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \int d\eta_1 d\eta_2 f(\eta_1, \eta_2) = \frac{\partial}{\partial \eta_1} \frac{\partial}{\partial \eta_2} f(\eta_1, \eta_2), \quad \dots \quad (15)$$

Ceci permet, comme on va le voir, de calculer le produit scalaire défini par (11) comme une intégrale. En effet, considérons

$$\langle g, f \rangle = \int d\eta_N d\bar{\eta}_N \dots d\eta_1 d\bar{\eta}_1 \exp\left(-\sum_1^N \eta_i \bar{\eta}_i\right) \bar{g}(\bar{\eta}) f(\eta) \quad (16)$$

et montrons que le résultat s'identifie avec (11). D'après (15)

$$\langle g, f \rangle = \sum \frac{\bar{g}^{j_1 \dots j_q}}{q!} \frac{f^{i_1 \dots i_k}}{k!} \frac{\partial}{\partial \eta_N} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} (1 + \bar{\eta}_1 \eta_1) \dots (1 + \bar{\eta}_N \eta_N) \bar{\eta}_{j_q} \dots \bar{\eta}_{j_1} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k}$$

Les contributions non nulles proviennent des termes tels que $k = q$ et que $j_1 \dots j_k$ soit une permutation des indices $i_1 \dots i_k$. En vertu de l'antisymétrie des coefficients, il ne reste donc que

$$\langle g, f \rangle = \sum_k \frac{1}{k!} \sum_{\{i\}} \bar{g}^{i_1 \dots i_k} f^{i_1 \dots i_k} \frac{\partial}{\partial \eta_N} \dots \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}_1} (1 + \bar{\eta}_1 \eta_1) \dots (1 + \bar{\eta}_N \eta_N) \bar{\eta}_{i_n} \dots \bar{\eta}_{i_1} \eta_{i_1} \dots \eta_{i_k}$$

où les indices $i_1 \dots i_k$ sont tous distincts, ce qui permet de récrire le dernier facteur $\bar{\eta}_{i_1} \eta_{i_1} \dots \bar{\eta}_{i_k} \eta_{i_k}$, en groupant les paires $\bar{\eta} \eta$ commutantes par ordre d'indices croissants. Dans le facteur $\prod_1^N (1 + \bar{\eta}_s \eta_s)$ il suffit alors de retenir le produit des paires dont les indices n'apparaissent pas dans le facteur précédent pour obtenir une fois et une seule le terme $\bar{\eta}_1 \eta_1 \dots \bar{\eta}_N \eta_N$. Par dérivation, ce dernier donne 1, et ceci achève de montrer l'identification de (16) avec le produit scalaire (11).

La notation intégrale du produit scalaire permet, avec les précautions de signe, de compléter la construction fermionique en parallèle étroit avec le cas bosonique, en ce qui concerne la représentation des opérateurs. De plus, dans le cas N fini, on n'a plus à se soucier de finesses analytiques ayant trait à des questions de domaine, de continuité etc. On doit seulement se préoccuper des questions de signe.

A un opérateur linéaire A , on fait correspondre un noyau \mathcal{A} et on convient de noter $f(\bar{\xi})$ ou $f(\bar{\eta})$... les éléments de l'algèbre de Grassmann sur lesquels agissent les opérateurs A . En d'autres termes on permute les rôles des variables η et $\bar{\eta}$. On écrit alors

$$(Af)(\bar{\xi}) = \int d\bar{\eta}_N d\eta_N \dots d\bar{\eta}_1 d\eta_1 \exp \left(- \sum_1^N \bar{\eta}_i \eta_i \right) \mathcal{A}(\bar{\xi}, \eta) f(\bar{\eta}) \quad (17)$$

Pour faire bref, nous écrirons $d\bar{\eta}d\eta$ pour $d\bar{\eta}_N d\eta_N \dots d\bar{\eta}_1 d\eta_1$ et $\bar{\eta}\eta$ pour $\bar{\eta}_1 \eta_1 + \dots + \bar{\eta}_N \eta_N$. En particulier, on vérifie que l'opérateur identité admet une représentation du type (17) avec le noyau $e^{\bar{\xi}\eta}$, dit noyau reproducteur

$$f(\bar{\xi}) = \int d\bar{\eta}d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} e^{\bar{\xi}\eta} f(\bar{\eta}) \quad (18)$$

Vérifier la relation (18) et trouver le coefficient numérique (π^{-N}) pour l'identité correspondante dans le cas bosonique. Pour établir cette relation on reprendra le raisonnement fait pour le produit scalaire et conduisant à l'expression du produit scalaire (16) en faisant jouer à $e^{\bar{\xi}\eta}$ le rôle de $\bar{g}(\eta)$.

L'équation (18) nous permet de représenter tout opérateur par un noyau correspondant $\mathcal{A}(\bar{\xi}, \eta) = A e^{\bar{\xi}\eta}$, où le membre de droite s'interprète comme l'action de l'opérateur A sur le noyau de l'opération identité, considéré comme une fonction de $\bar{\xi}$. Nous avons donc par exemple (en se souvenant que $\eta \leftrightarrow \bar{\eta}$ sont échangés)

$$a_i \rightarrow e^{\bar{\xi}\eta} \eta_i \quad a_i^\dagger \rightarrow \bar{\xi}_i e^{\bar{\xi}\eta} \quad (19)$$

Plus généralement, en supprimant les indices

$$\begin{aligned} aA &\rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \mathcal{A}(\bar{\xi}, \eta) & Aa &\rightarrow \mathcal{A}(\bar{\xi}, \eta) \eta \\ a^\dagger A &\rightarrow \bar{\xi} \mathcal{A}(\bar{\xi}, \eta) & Aa^\dagger &\rightarrow \mathcal{A}(\bar{\xi}, \eta) \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \eta}} \end{aligned} \quad (20)$$

où $\overleftarrow{\frac{\partial}{\partial \eta}}$ opère à gauche et $\frac{\partial}{\partial \eta}$ à droite. Soit : : la notation du produit normal de Wick, consistant à ordonner (en tenant compte des signes) les opérateurs d'annihilation à droite des créateurs. Par exemple : $a^\dagger a := a^\dagger a$, $aa^\dagger := -a^\dagger a$, etc. Pour tout monôme, nous avons alors la correspondance

$$: a_{\alpha_1}^\dagger \dots a_{\alpha_s}^\dagger a_{\beta_1} \dots a_{\beta_t} : \rightarrow \bar{\xi}_{\alpha_1} \dots \bar{\xi}_{\alpha_s} e^{\bar{\xi}\eta} \eta_{\beta_1} \dots \eta_{\beta_t} \quad (21)$$

Vérifier les formules (20) et (21).

Pour obtenir le noyau correspondant à un produit normal, il suffit donc, au facteur $e^{\bar{\xi}\eta}$ près, de substituer $\bar{\xi}$ et a^\dagger, η pour a . Le produit scalaire donnant à l'algèbre de Grassmann la structure d'un espace de Hilbert, à la conjugaison hermitique des opérateurs correspond la conjugaison des noyaux selon la règle

$$A \rightarrow A^\dagger \quad \mathcal{A}(\bar{\eta}, \eta) \rightarrow \overline{\mathcal{A}(\bar{\eta}, \eta)} \quad (22)$$

où la barre sur le noyau \mathcal{A} , généralisant celle sur les fonctions, implique la conjugaison complexe des coefficients scalaires et substitue au monôme $\bar{\eta}_{\alpha_1} \dots \bar{\eta}_{\alpha_s} \eta_{\beta_1} \dots \eta_{\beta_t}$ le monôme $\bar{\eta}_{\beta_t} \dots \bar{\eta}_{\beta_1} \eta_{\alpha_s} \dots \eta_{\alpha_1}$ (ce qui implique l'échange $\bar{\eta} \leftrightarrow \eta$ ainsi que le renversement de l'ordre des indices). Le noyau

correspondant à l'opérateur identité est bien entendu égal à son conjugué d'après (22); les paires a_i, a_i^\dagger sont hermitiques conjuguées et leurs noyaux sont conjugués l'un de l'autre.

Le noyau du produit de deux opérateurs A et B est obtenu par convolution selon

$$\begin{aligned} A &\rightarrow \mathcal{A} & B &\rightarrow \mathcal{B} & AB &\rightarrow \mathcal{C} \\ \mathcal{C}(\bar{\xi}, \xi) &= \int d\bar{\eta} d\eta \mathcal{A}(\bar{\xi}, \eta) e^{-\bar{\eta}\eta} \mathcal{B}(\bar{\eta}, \xi) \end{aligned} \quad (23)$$

et la trace d'un opérateur s'obtient comme une intégrale de la forme

$$\text{Tr } A = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} \mathcal{A}(-\bar{\eta}, \eta) \quad (24)$$

On prêtera attention au changement de signe de l'argument final, caractéristique des fermions. Puisque remplacer $\eta, \bar{\eta}$ par $-\eta, -\bar{\eta}$, ne change pas l'intégrale, on pourrait aussi bien utiliser $\mathcal{A}(\bar{\eta}, -\eta)$. Pour l'opération identité en utilisant (18) et (24), il vient

$$\text{Tr } I = \int d\bar{\eta} d\eta e^{-2\bar{\eta}\eta} = 2^N \quad (25)$$

qui est bien la dimension de l'algèbre de Grassmann sur laquelle agissent les opérateurs.

Examinons quelques propriétés spécifiques de ces intégrales anticommutantes. Considérons un changement de variables préservant l'anticommutation $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\bar{\xi})$, où nous nous limiterons aux transformations linéaires à coefficients commutants

$$\bar{\eta}_i = \sum_{j=1}^N J_i^j \bar{\xi}_j \quad \det J = \det J_i^j = \frac{D(\bar{\eta})}{D(\bar{\xi})} \quad (26a)$$

En posant

$$f(\bar{\eta}) = F(\bar{\xi}) \quad (26b)$$

on vérifie que

$$\int d\bar{\xi} F(\bar{\xi}) = \det J \int d\bar{\eta} f(\bar{\eta}) \quad (26c)$$

qui résulte de l'identification de l'intégrale avec une dérivée. Ce résultat est l'opposé de ce qu'on trouverait dans le cas commutatif, où l'on aurait $|\det J|^{-1}$ au lieu de $\det J$ dans le membre de droite. On peut comprendre que la relation (26c) résulte, dans le cas présent, de l'identification de la dérivation avec l'intégration. Cette identification entraîne aussi que dans le cas anticommutatif, l'intégrale d'une dérivée est nulle

$$\int d\bar{\eta} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} f(\bar{\eta}) = 0 \quad (27)$$

alors que dans le cas commutatif une telle intégrale est donnée par des termes de bord, avec des généralisations conduisant aux formules de Stokes.

Envisageons le cas particulier important des intégrales gaussiennes. L'analogue anticommutatif des formes quadratiques est celui des formes antisymétriques. Pour l'instant, nous renonçons à la convention des barres sur les variables. On a alors une forme $\sum_{ij} \eta_i Q^{ij} \eta_j$, $Q^{ij} + Q^{ji} = 0$. Le développement de l'exponentielle $\exp \frac{1}{2} \sum_{ij} \eta_i Q^{ij} \eta_j$ se fait sur des monômes pairs. L'intégrale gaussienne s'annule donc si N , nombre des indices, est impair. Supposons donc $N = 2n$ et calculons

$$\begin{aligned} \int d\eta_{2n} \dots d\eta_1 \exp \frac{1}{2} \sum_{ij} \eta_i Q^{ij} \eta_j &= \int d\eta_{2n} \dots d\eta_1 \prod_{i < j} (1 + Q^{ij} \eta_i \eta_j) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} Q^{\sigma_{2n-1} \sigma_{2n}} \dots Q^{\sigma_1 \sigma_2} \equiv \text{Pf}(Q) \end{aligned} \quad (28)$$

où σ désigne les permutations, et Pf est le symbole du Pfaffien, fonction homogène de degré n de la matrice Q . On peut encore sommer sur les appariements distincts des indices (au nombre de $2^{-n}(n!)^{-1}$), les produits d'éléments de matrice, avec le signe de la permutation correspondante. La formule du changement de variable donne

$$\text{Pf}({}^T J Q J) = \det(J) \text{Pf}(Q) \quad (29)$$

Un cas particulier est celui où les $2n$ indices η_i , $1 \leq i \leq N = 2n$ se scindent en deux groupes égaux, les variables correspondantes étant notées $\xi_a, \bar{\xi}_a$, de telle sorte que la matrice Q n'ait d'éléments non nuls qu'entre les composantes ξ_a et les $\bar{\xi}_a$. En d'autres termes $\{\eta_1 \dots \eta_{2N}\} \equiv \{\bar{\xi}_1 \dots \bar{\xi}_n \xi_1 \dots \xi_n\}$ et $\frac{1}{2} \eta Q \eta = -\bar{\xi} K \xi$, ce qui veut dire que la matrice Q prend la forme

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -K \\ K^T & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

où K est une matrice $n \times n$. L'intégrale se met alors sous la forme

$$(-)^{n(n+1)/2} \text{Pf}(Q) = \int d\bar{\xi}_n d\xi_n \cdots d\bar{\xi}_1 d\xi_1 e^{-\bar{\xi} K \xi} = \det K \quad (31)$$

En effet, il suffit de faire le changement de variables $\xi' = K\xi$, $\bar{\xi}' = \bar{\xi}$ et d'observer que $\int d\bar{\eta} d\eta e^{-\bar{\eta}\eta} = 1$. Une application de (31) est une formule pour le Pfaffien d'une matrice antisymétrique paire arbitraire. Pour le voir, élevons les deux membres de (28) au carré

$$\text{Pf}(Q)^2 = \int d\eta_{2n} \cdots d\eta_1 d\xi_{2n} \cdots d\xi_1 \exp \frac{1}{2}(\eta Q \eta + \xi Q \xi)$$

et posons $\xi_j = (\bar{\rho}_j - \rho_j)/i\sqrt{2}$, $\eta_j = (\bar{\rho}_j + \rho_j)/\sqrt{2}$, for $1 \leq j \leq 2n$. Le Jacobien vaut 1, et l'on trouve en vertu de (31)

$$\text{Pf}(Q)^2 = \int d\bar{\rho}_{2n} \cdots d\rho_1 \exp -\bar{\rho} Q \rho = \det Q \quad (32)$$

Bien entendu, en dimension impaire, le déterminant d'une matrice antisymétrique s'annule.

Les valeurs moyennes avec un poids gaussien satisfont encore dans le cas fermionique à un théorème de Wick. Il résulte d'une propriété d'invariance par translation de la mesure $d\eta$, pourvu que le vecteur de translation ξ ait des composantes anticommutes

$$\int d\eta f(\eta) = \int d\eta f(\eta + \xi) \quad (33)$$

En particulier, pour Q non singulier (en dimension paire), $\text{Pf}(Q) \neq 0$, de sorte que, si l'on pose

$$\langle O \rangle = \frac{\int d\eta O(\eta) \exp \frac{1}{2} \eta Q \eta}{\int d\eta \exp \frac{1}{2} \eta Q \eta} \quad (34)$$

on déduit de l'égalité précédente

$$\langle \exp \xi \eta \rangle = \exp -\frac{1}{2} \xi Q^{-1} \xi \quad (35)$$

L'identité (35) est l'analogie de la fonction génératrice (I.74) et représente une expression compacte du théorème de Wick. Si l'on appelle $(Q^{-1})_{ij}$ la composante ij de Q^{-1} , en développant les deux membres et en identifiant les coefficients (antisymétriques) des produits de ξ_i , il vient ainsi

$$\begin{aligned}
\langle \eta_1 \eta_2 \rangle &= (Q^{-1})_{12} \\
\langle \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 \rangle &= (Q^{-1})_{12}(Q^{-1})_{34} - (Q^{-1})_{13}(Q^{-1})_{24} + (Q^{-1})_{14}(Q^{-1})_{23} \\
\langle \eta_1 \dots \eta_{2p} \rangle &= \text{Pf}(Q^{-1})_{[1\dots 2p]}
\end{aligned} \tag{36}$$

où la notation implique qu'on restreint Q^{-1} au sous-espace $[1 \dots 2p]$. Le terme général (avec $2p \leq 2n$) est formé en considérant la somme des produits de contractions distinctes, affectées du signe de la permutation correspondante. Le lecteur n'aura aucune peine à établir la forme que prennent ces relations dans le cas d'une matrice Q de la forme (30).

2. Modèle d'Ising bidimensionnel

Nous allons appliquer les méthodes d'intégrales Grassmanniennes à la solution du modèle d'Ising bidimensionnel (Onsager 1944). Le modèle simule le comportement d'un ferromagnétique au passage de sa transition de Curie à la phase paramagnétique. Une autre interprétation est celle d'une transition entre phases liquide et gazeuse avec sites occupés ou inoccupés, ou encore celle de la séparation des phases d'un mélange binaire ou d'un alliage. Nous allons faire usage de l'interprétation magnétique. Le point de départ de cette étude est le calcul de la fonction de partition en l'absence de champ magnétique sur un réseau régulier de grande taille (cependant finie) comportant V sites. Les paires de sites voisins sont notées (ij) . A chaque site on attribue une "variable de spin" σ_i qui peut prendre les valeurs ± 1 . La constante de Boltzmann ainsi que d'autres facteurs donnant l'échelle des énergies sont absorbés dans le facteur β , qui s'interprète comme l'inverse d'une "température" et est ici un nombre sans dimension. La fonction de partition s'écrit

$$Z_V(\beta) = \frac{1}{2^V} \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp \beta \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j \tag{37}$$

Il est surprenant qu'une expression d'apparence aussi simple soit si difficile à calculer, comme l'expérience l'a montré! A la limite thermodynamique d'un volume infini, on définit l'énergie libre

$$F(\beta) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln Z_V(\beta) \tag{38}$$

en omettant un facteur $-\beta$. Dans la suite nous sous-entendrons généralement le passage à la limite du volume infini. Dans ce chapitre, nous nous restreignons à un réseau à deux dimensions, de sorte que les volumes sont

à remplacer par des aires. Nous utilisons un réseau carré, où chaque site a quatre voisins. On peut appliquer à ce réseau la notion de dualité en échangeant les rôles joués par les sites et par les plaquettes (c'est-à-dire les faces élémentaires). On arrive ainsi à une importante transformation par dualité pour le modèle d'Ising. Une généralisation de ces idées sera discutée au chapitre VI dans le cadre de la théorie de champs de jauge.

2.1 Dualité

Nous avons vu au chapitre I qu'il existe un développement de $Z_V(\beta)$ en fonction de la variable

$$t = \tanh \beta \quad (39)$$

après extraction d'un facteur $(\cosh \beta)^{2V}$. L'exposant est le nombre de liens appartenant à V ; ce nombre ne diffère de $2V$ que par un terme négligeable devant V à la limite thermodynamique (c'est exactement $2V$ pour des conditions aux limites périodiques). Le développement de Z prend la forme

$$Z_V(\beta) = (\cosh \beta)^{2V} \sum_{\partial\{n_i\}=\emptyset} t^{\sum n_i} \quad (40)$$

Les entiers $n_i = 0, 1$ attachés aux liens valent 0 ou 1, et le bord $\partial\{n_i\}$ d'une configuration de tels entiers est l'ensemble des sites où la somme des n_i relatifs aux liens incidents sur le site est impaire. Si ce bord est nul, il s'ensuit que chaque site appartient à un nombre pair de liens (0, 2, 4) de la configuration (ceux pour lesquels $n_i = 1$).

A toute configuration $\{n_i\}$, on peut aussi faire correspondre une paire de configurations de variables binaires $\tau_\kappa = \pm 1$, attachés aux sites du réseau dual. Celui-ci a pour noeuds les centres des plaquettes du premier et ses liens correspondent biunivoquement aux liens du premier, la relation étant l'intersection. Nous raisonnons déjà ici implicitement dans la limite où V tend vers l'infini. Sur un réseau fini il y a des effets de bord que nous négligeons. Les deux configurations sont définies en demandant qu'à la traversée d'un lien "occupé", c'est-à-dire tel que $n_i = 1$, les valeurs des τ attachés aux plaquettes contiguës soient de signe contraire (et bien entendu de même signe pour $n_i = 0$). Un renversement de tous les τ donne une deuxième configuration ayant les mêmes propriétés. La condition $\partial\{n_i\} = \emptyset$ assure la cohérence du processus, comme on peut s'en assurer en tournant autour d'un point du réseau d'origine. La duplication des configurations est sans importance à la limite thermodynamique dans le calcul de l'énergie libre.

$$\sum n_i = \sum_{(ab)} \frac{1}{2}(1 - \tau_a \tau_b) \quad (41)$$

Au membre de gauche, la somme porte sur les liens du réseau d'origine, au membre de droite sur les paires de plaquettes voisines du réseau dual, isomorphe au réseau initial à la limite V tend vers l'infini. On définit de nouvelles variables $\tilde{\beta}$ et $\tilde{t} = \tanh \tilde{\beta}$ telles que

$$t = \tanh \beta = e^{-2\tilde{\beta}} = \frac{1 - \tilde{t}}{1 + \tilde{t}} \quad \tilde{t} = \tanh \tilde{\beta} \quad (42)$$

$\tilde{\beta}$ varie de zéro à l'infini et \tilde{t} de zéro à un. Dans la transformation par dualité, les basses et hautes températures s'échangent, et $\tilde{t} = t$, de sorte que (40) se réécrit

$$Z_V(\beta) = (\cosh \beta)^{2V} (2e^{-2\tilde{\beta}})^V \frac{1}{2^{V+1}} \sum_{\tau} \exp \left(\tilde{\beta} \sum_{(ab)} \tau_a \tau_b \right) \quad (43)$$

Au préfacteur

$$\left(2 \cosh^2 \beta e^{-2\tilde{\beta}} \right)^V = (\sinh 2\beta)^V = \left(\sinh 2\tilde{\beta} \right)^{-V}$$

près, (et à des facteurs non thermodynamiques près qui peuvent dépendre des conditions aux limites) on constate qu'on a reconstitué la fonction de partition initiale évaluée en $\tilde{\beta}$ au lieu de β . D'où la formule de dualité de Kramers et Wannier

$$F(\beta) = \ln \sinh 2\beta + F(\tilde{\beta}) \quad (44)$$

La relation

$$\sinh 2\beta \sinh 2\tilde{\beta} = 1 \quad (45)$$

montre que la dualité est involutive.

Le point fixe de la transformation (42), c'est-à-dire celui pour lequel $\beta = \tilde{\beta} = \beta_c$, est tel que

$$\begin{aligned} t_c = \sqrt{2} - 1 \quad \sinh 2\beta_c = 1 \quad \cosh 2\beta_c = \sqrt{2} \\ \beta_c = \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} + 1) = 0.440686794 \dots \end{aligned} \quad (46)$$

La solution va confirmer que β_c est un point critique qui sépare une phase désordonnée de haute température ($\beta < \beta_c$) d'une phase ordonnée de basse température ($\beta > \beta_c$). Cette dernière est caractérisée par une aimantation spontanée M , définie en examinant la limite des corrélations à grande distance, et ceci même en l'absence d'un champ extérieur,

$$\lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle = M^2 \quad (47)$$

On peut aussi l'obtenir comme valeur moyenne d'un spin en présence d'un champ extérieur infinitésimal.

(i) Considérons un réseau carré fini doublement périodique comportant V sites, L liens et P plaquettes. Calculer les facteurs non thermodynamiques exacts dans les relations qui établissent la dualité précédente. Pour cela utiliser la relation d'Euler : $V - L + P = 0$. Discuter le cas des conditions aux limites libres.

(ii) Montrer que (a) un réseau triangulaire et un réseau hexagonal (ou en nid d'abeille) ayant deux fois plus de sites sont géométriquement duaux l'un de l'autre (b) une méthode de décimation permet de passer d'un modèle d'Ising sur un réseau hexagonal à un modèle sur un réseau triangulaire. Trouver la température critique dans les deux cas

$$\begin{array}{ll} \text{triangulaire} & e^{2\beta c} = \sqrt{3} \\ \text{hexagonal} & e^{2\beta c} = 2 + \sqrt{3} \end{array} \quad (48)$$

Comme le nombre de voisins d'un site est 3, 4 et 6 respectivement pour des réseaux hexagonal, carré et triangulaire, on s'attend, à densité égale, à ce que les températures critiques correspondantes croissent dans le même ordre. Vérifier ce point.

2.2 Matrice de transfert

Pour évaluer la fonction de partition, nous passerons, comme dans le cas unidimensionnel, par l'intermédiaire d'une matrice de transfert T agissant sur des états correspondant aux configurations des spins le long d'une ligne. Pour un rectangle de côté L dans la direction x et M dans la direction y , qui joue le rôle de variable temporelle, donc tel que $V = LM$, la fonction de partition sera donnée par

$$Z_{LM}(\beta) = \left(\frac{1}{2} \sinh 2\beta\right)^{LM/2} \text{Tr} T^M \quad (49)$$

en supposant des conditions aux limites périodiques dans la direction y , comme l'implique la trace qui apparaît au membre de droite. Le préfacteur est choisi pour simplifier l'expression de T . Les états sont décrits par des ensembles de valeurs $\sigma_x = \pm 1$, $x = 0, 1, \dots, L-1$, que nous considérons comme les valeurs propres d'un ensemble de matrices de Pauli $\sigma_x^{(1)}$, avec

$$\sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

$$\sigma^{(1)}\sigma^{(2)} = i\sigma^{(3)}, \quad \sigma^{(2)}\sigma^{(3)} = i\sigma^{(1)}, \quad \sigma^{(3)}\sigma^{(1)} = i\sigma^{(2)}$$

Le choix de $\sigma^{(1)}$ plutôt que $\sigma^{(3)}$, qui paraîtrait plus naturel, est justifié par le désir de simplifier les expressions ultérieures. On peut factoriser T en une contribution θ des interactions entre sites d'une même ligne, et $\tilde{\theta}$ des liens joignant deux lignes successives

$$T = \theta\tilde{\theta} \quad (51)$$

L'expression de θ est

$$\theta(\beta) = \exp \beta \sum_x \sigma_x^{(1)} \sigma_{x+1}^{(1)} \quad (52)$$

où x varie de 0 à $L-2$ pour des conditions aux limites libres et de 0 à $L-1$ pour des conditions aux limites périodiques telles que $\sigma_L^{(k)} = \sigma_0^{(k)}$. Quant à $\tilde{\theta}$ il se factorise en un produit d'opérateurs relatifs à chaque site le long d'une ligne. Soit V une matrice qui diagonalise $\sigma^{(1)}$, c'est-à-dire telle que

$$V^{-1}\sigma^{(1)}V = -\sigma^{(3)} \quad V^{-1}\sigma^{(2)}V = \sigma^{(2)} \quad V^{-1}\sigma^{(3)}V = \sigma^{(1)} \quad (53)$$

Si l'on tient compte du facteur qui figure dans (49) et de celui qui figure dans la normalisation de Z , on trouve pour la contribution du site x à $\tilde{\theta}_x$

$$\begin{aligned} V^{-1}\tilde{\theta}_x V &= \frac{1}{2(\sinh \beta \cosh \beta)^{1/2}} \begin{pmatrix} e^\beta & e^{-\beta} \\ e^{-\beta} & e^\beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^\beta}{2(\sinh \beta \cosh \beta)^{1/2}} \left[1 + \tanh \beta \tilde{\sigma}_x^{(1)} \right] \end{aligned}$$

Si on remarque que $e^\beta (4 \sinh \beta \cosh \beta)^{-1/2} \cosh \tilde{\beta}$, on parvient à l'expression

$$\tilde{\theta}(\tilde{\beta}) = e^{\tilde{\beta}} \sum_x \sigma_x^{(3)} \quad (54)$$

On constate donc, dans la construction de la matrice de transfert, qu'un parallélisme entre β et $\tilde{\beta}$ s'est naturellement introduit. Les opérateurs $\sigma_x^{(1)}\sigma_{x+1}^{(1)}$ et $\sigma_x^{(3)}$ qui apparaissent dans θ et $\tilde{\theta}$ sont tous deux hermitiques et de carré égal à 1 puisque $\sigma_x^{(k)}$ et $\sigma_{x+1}^{(k')}$ commutent. Il subsiste cependant une dernière différence qui va être éliminée dans la représentation fermionique.

Montrer que, bien que $T^\dagger = \tilde{\theta}\theta$ diffère de T , la fonction de partition est réelle (et positive) si β est réel.

2.3 Représentation fermionique

En chaque site, les opérateurs $\frac{1}{2} \left(\sigma_x^{(1)} \pm i\sigma_x^{(2)} \right)$ forment une paire d'opérateurs de création et d'annihilation fermioniques, mais ils commutent de site à site. Il existe cependant une transformation (dite de Jordan–Wigner) qui en fait de véritables créateurs et annihilateurs fermioniques, pourvu d'ordonner les sites. Dans le cas présent, un ordre naturel correspond à celui le long de l'axe x . Utilisant des notations dues à Perk, nous introduisons les sites du réseau dual unidimensionnel d'abscisses demi-entières. A chaque paire α de sites adjacents, l'un du réseau initial, l'autre du réseau dual, nous associons un élément Γ_α d'une algèbre de Clifford (l'algèbre des opérateurs de création et d'annihilation fermioniques). Ces opérateurs vérifient donc

$$\{\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta\} = 2\delta_{\alpha\beta} \quad (55)$$

Précisément, partant d'une origine fixe appelée $x = 0$, nous posons

$$\begin{aligned} \Gamma_{-\frac{1}{2},0} &= \sigma_0^{(1)} & \Gamma_{x-\frac{1}{2},x} &= \left(\prod_0^{x-1} \sigma_{x'}^{(3)} \right) \sigma_x^{(1)} & x \geq 1 \\ \Gamma_{0,\frac{1}{2}} &= \sigma_0^{(2)} & \Gamma_{x,x+\frac{1}{2}} &= \left(\prod_0^{x-1} \sigma_{x'}^{(3)} \right) \sigma_x^{(2)} & x \geq 1 \end{aligned} \quad (56)$$

Il en résulte que Γ_α est hermitique. Dans ces expressions on pourrait remplacer l'origine par un point tendant vers $-\infty$ en introduisant un produit infini mal défini. Le rôle du facteur $\prod_0^{x-1} \sigma_{x'}^{(3)} = \exp \frac{1}{2} i\pi \sum_0^{x-1} (\sigma_{x'}^{(3)} - 1)$ est d'inverser le signe de tous les états correspondant à la valeur propre $\sigma^{(3)} = -1$ jusqu'au point $x - 1$. On vérifie sans peine que ceci a pour résultat de faire anticommuter les γ en des sites différents et de satisfaire ainsi aux relations (55). Si l'on impose des conditions aux limites périodiques $\sigma_0^{(k)} \equiv \sigma_L^{(k)}$, les définitions précédentes ont encore un sens jusqu'à $x = L - 1$, sous réserve d'introduire une légère complication dans la matrice de transfert (voir ci-dessous). Nous obtenons ainsi des expressions symétriques

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(3)} &= i^{-1} \Gamma_{x-\frac{1}{2},x} \Gamma_{x,x+\frac{1}{2}} \\ \sigma_x^{(1)} \sigma_{x+1}^{(1)} &= i^{-1} \Gamma_{x,x+\frac{1}{2}} \Gamma_{x+\frac{1}{2},x+1} \end{aligned} \quad (57)$$

La deuxième de ces relations ne serait pas valable pour des conditions aux limites périodiques dans le sous-espace $\prod_0^{L-1} \sigma_x^{(3)} = 1$. Elle est valable pour le sous espace orthogonal où $\prod_0^{L-1} \sigma_x^{(3)} = -1$. Pour le lien particulier $\sigma_{L-1}^{(1)} \sigma_L^{(1)} \equiv \sigma_{L-1}^{(1)} \sigma_0^{(1)}$ nous devons écrire, avec nos conventions

$$\begin{aligned} \sigma_{L-1}^{(1)} \sigma_0^{(1)} &= i^{-1} \gamma \Gamma_{L-1, L-\frac{1}{2}} \Gamma_{-\frac{1}{2}, 0} \\ \gamma &= -i^{-L} \prod_0^{L-1} \Gamma_{x-\frac{1}{2}, x} \Gamma_{x, x+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (58)$$

Nous laissons au lecteur le soin de modifier les expressions ultérieures dans le cas des conditions aux limites périodiques. Nous nous bornons dans la suite à une discussion de la limite thermodynamique, à l'exception des expressions (81) et (82).

Les deux facteurs de la matrice de transfert prennent la forme

$$\begin{aligned} \theta(\beta) &= \exp -i\beta \sum_x \Gamma_{x, x+\frac{1}{2}} \Gamma_{x+\frac{1}{2}, x+1} \\ \tilde{\theta}(\tilde{\beta}) &= \exp -i\tilde{\beta} \sum_x \Gamma_{x-\frac{1}{2}, x} \Gamma_{x, x+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (59)$$

Pour passer de $\theta(\beta)$ à $\tilde{\theta}(\tilde{\beta})$, il suffit de changer β en $\tilde{\beta}$ (dualité) et d'effectuer une translation d'un demi pas du réseau (dualité géométrique unidimensionnelle). Ceci montre que le problème du calcul de Z est en passe d'être résolu, puisque θ et $\tilde{\theta}$ sont des exponentielles de formes quadratiques dans les opérateurs fermioniques et que ces dernières forment un groupe (le groupe de recouvrement spinoriel d'un groupe orthogonal, propriété familière dans la discussion du groupe des rotations ou des transformations de Lorentz).

A ce point, on a le choix de poursuivre dans un langage opératoire, ou d'adopter une représentation intégrale. Nous choisissons cette deuxième méthode. Pour cela, nous décomposons Γ en créateurs et annihilateurs, ce qui a malheureusement le désavantage de détruire la dualité explicite

$$\Gamma_{x-\frac{1}{2}, x} = a_x + a_x^\dagger \quad \Gamma_{x, x+\frac{1}{2}} = i(a_x - a_x^\dagger) \quad (60)$$

On peut alors écrire

$$\tilde{\theta}(\tilde{\beta}) = \exp \tilde{\beta} \sum_x (a_x^\dagger a_x - a_x a_x^\dagger) = \prod_x \left(e^{-\tilde{\beta}} + 2 \sinh \tilde{\beta} a_x^\dagger a_x \right) \quad (61)$$

et il lui correspond un noyau intégral (nous utilisons le même symbole)

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\tilde{\beta}; \bar{\xi}, \xi) &= \prod_x \left(e^{-\tilde{\beta}} + 2 \sinh \tilde{\beta} \bar{\xi}_x \xi_x \right) e^{\bar{\xi}_x \xi_x} = \prod_x \left(e^{-\tilde{\beta}} + e^{\tilde{\beta}} \bar{\xi}_x \xi_x \right) \\ &= \exp \left\{ -L\tilde{\beta} + \sum_x t^{-1} \bar{\xi}_x \xi_x \right\} \end{aligned} \quad (62)$$

Rappelons que $t^{-1} = e^{2\bar{\beta}}$.

Pour calculer le noyau de $\theta(\beta)$, introduisons l'opérateur unitaire U qui translate la coordonnée x d'une demi unité

$$\begin{aligned} U^{-1}\Gamma_{x,x+\frac{1}{2}}U &= \Gamma_{x+\frac{1}{2},x+1} & U^{-1}\Gamma_{x-\frac{1}{2},x}U &= \Gamma_{x,x+\frac{1}{2}} \\ U^{-1}a_x^\dagger U &= b_x^\dagger = \frac{1}{2}i \left(a_{x+1}^\dagger - a_x^\dagger + a_{x+1} + a_x \right) \\ U^{-1}a_x U &= b_x = \frac{1}{2}i \left(-a_{x+1}^\dagger - a_x^\dagger - a_{x+1} + a_x \right) \end{aligned} \quad (63)$$

Ceci suppose implicitement un passage à la limite $L \rightarrow \infty$. Introduisant les transformées de Fourier

$$\xi_x = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp}{2\pi} e^{ipx} \xi_p \quad \bar{\xi}_x = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp}{2\pi} e^{-ipx} \bar{\xi}_p \quad (64)$$

on vérifie que le noyau de U est

$$\begin{aligned} U(\bar{\xi}, \xi) &= 2^{-L/2} \exp \sum_{x \geq x'} 2i \bar{\xi}_x \xi_{x'} - \bar{\xi}_x \bar{\xi}_{x'} + \xi_x \xi_{x'} \\ &= 2^{-L/2} \exp \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp}{2\pi} \left[\frac{2i}{1 - e^{-ip}} \bar{\xi}_p \xi_p \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + e^{-ip}}{2(1 - e^{-ip})} (\bar{\xi}_{-p} \bar{\xi}_p + \xi_{-p} \xi_p) \right] \end{aligned} \quad (65a)$$

Le noyau de U^{-1} s'en déduit par conjugaison

$$\begin{aligned} U^{-1}(\bar{\xi}, \xi) &= 2^{-L/2} \exp \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp}{2\pi} \left[\frac{-2i}{1 - e^{ip}} \bar{\xi}_p \xi_p \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + e^{ip}}{2(1 - e^{ip})} (\bar{\xi}_p \bar{\xi}_{-p} + \xi_p \xi_{-p}) \right] \end{aligned} \quad (65b)$$

Le noyau de $\theta(\beta) = U^{-1}\tilde{\theta}(\beta)U$ et il s'agit d'appliquer deux fois la loi du produit (23), dans chaque cas à des noyaux gaussiens, ce qui conduit à

$$\theta(\beta; \bar{\xi}, \xi) = (\cosh \beta)^L \exp \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{(1 - t^2) \bar{\xi}_p \xi_p + it \sin p (\bar{\xi}_{-p} \bar{\xi}_p + \xi_{-p} \xi_p)}{1 + t^2 + 2t \cos p} \quad (66)$$

Pour obtenir la fonction de partition, il reste à faire le produit de convolution d'un nombre M de telles expressions et à en prendre la trace en utilisant la formule (24). En négligeant encore un terme de bord, et en appelant y la variable temporelle, il vient

$$Z = \left(\frac{1}{2} \sinh 2\beta\right)^{LM} \int \prod_{x,y} d\bar{\eta}_{xy} d\eta_{xy} d\bar{\rho}_{xy} d\rho_{xy} \exp S \quad (67a)$$

L'intégrand est l'exponentielle d'une forme quadratique

$$S = \sum_y \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \left[-\bar{\eta}_{p,y} \eta_{p,y+1} - \bar{\rho}_{p,y} \rho_{p,y} + t^{-1} \bar{\rho}_{p,y} \eta_{p,y} + \frac{(1-t^2) \bar{\eta}_{p,y} \rho_{p,y} + it \sin p (\bar{\eta}_{-p,y} \bar{\eta}_{p,y} + \rho_{-p,y} \rho_{p,y})}{1+t^2+2t \cos p} \right] \quad (67b)$$

Selon les définitions (64), la variable p est conjuguée de x . Cette forme, apparemment non locale à cause du dénominateur, se simplifie considérablement si nous posons

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{py} &= \bar{\xi}_{py}^V & \bar{\rho}_{py} &= -\bar{\xi}_{py}^H - \bar{\xi}_{py}^V + \xi_{-py}^H \\ \eta_{py} &= -t \xi_{-py}^V & \rho_{py} &= -\bar{\xi}_{py}^V + (1 + te^{ip}) \xi_{py}^H \end{aligned} \quad (68a)$$

ou, de manière équivalente, dans l'espace de configuration

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{xy} &= \bar{\xi}_{xy}^V & \bar{\rho}_{xy} &= -\bar{\xi}_{xy}^H - \bar{\xi}_{xy}^V + \xi_{xy}^H \\ \eta_{xy} &= -t \xi_{xy}^V & \rho_{xy} &= -\bar{\xi}_{xy}^V + \xi_{xy}^H + t \xi_{x+1,y}^H \end{aligned} \quad (68b)$$

Le Jacobien de cette transformation (par lequel il faut diviser) est t par site. Nous obtenons ainsi après multiplication par t^{-LM} l'exponentielle d'une action locale dans les nouvelles variables

$$\begin{aligned} Z &= (\cosh \beta)^{2LM} \int \mathcal{D}(\xi, \bar{\xi}) \exp S \\ S &= \sum_{xy} \left\{ t (\bar{\xi}_{x,y}^V \xi_{x,y+1}^V + \bar{\xi}_{x,y}^H \xi_{x+1,y}^H) \right. \\ &\quad \left. + \bar{\xi}_{xy}^H \xi_{xy}^H + \bar{\xi}_{xy}^V \xi_{xy}^V + \bar{\xi}_{xy}^V \xi_{xy}^H + \bar{\xi}_{xy}^H \xi_{xy}^V + \xi_{xy}^V \xi_{xy}^H \right\} \end{aligned} \quad (69)$$

expression établie par S. Samuel. La forme de l'action est suggestive; les termes proportionnels à t correspondent à la propagation d'un site à son voisin, et s'identifient à un terme cinétique, tandis que les six termes suivants établissent les connections entre liens incidents en un site. L'expression intégrale a perdu la symétrie du dualité, explicite dans la version opératoire. On observe qu'il y a quatre variables fermioniques par site, $(\xi^V, \bar{\xi}^V)$, $(\xi^H, \bar{\xi}^H)$, ceci tenant au fait que nous nous sommes abstenus d'intégrer sur les variables intermédiaires dans le produit θ et $\bar{\theta}$. Nous sommes maintenant prêts à calculer l'énergie libre par site.

2.4 Energie libre

D'après l'équation (69), la fonction de partition prend la forme d'un Pfaffien, c'est-à-dire la racine carrée du déterminant d'une matrice antisymétrique. L'invariance par translation, nous permet d'utiliser une transformation de Fourier à deux dimensions. Posons $\mathbf{x} \equiv (x, y)$, $\mathbf{p} \equiv (p_x, p_y)$ et désignons par ξ le vecteur $(\bar{\xi}^V \xi^V \bar{\xi}^H \xi^H)$. On a

$$\xi_{\mathbf{x}} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \xi_{\mathbf{p}}$$

$$\xi_{\mathbf{p}} \equiv \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{-\mathbf{p}}^V \\ \xi_{\mathbf{p}}^V \\ \bar{\xi}_{-\mathbf{p}}^H \\ \xi_{\mathbf{p}}^H \end{pmatrix} \quad (70)$$

L'action S est alors diagonale par blocs quatre par quatre

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \xi_{-\mathbf{p}}^T K_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} \quad (71a)$$

$$K_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + te^{ip_y} & 1 & 1 \\ -(1 + te^{-ip_y}) & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 + te^{ip_x} \\ -1 & -1 & -(1 + te^{-ip_x}) & 0 \end{pmatrix} \quad (71b)$$

Il vient alors

$$\ln Z = 2LM \ln(\cosh \beta) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln K \quad (72a)$$

$$\text{Tr} \ln K = LM \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln \det K_{\mathbf{p}} \quad (72b)$$

$$\begin{aligned} \det K_{\mathbf{p}} &= (1 + t^2) - 2t(1 - t^2)(\cos p_x + \cos p_y) \\ &= (\cosh \beta)^{-4} [\cosh^2 2\beta - \sinh 2\beta(\cos p_x + \cos p_y)] \end{aligned} \quad (72c)$$

Nous arrivons donc au célèbre résultat d'Onsager pour l'énergie libre par site

$$F(\beta) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \ln [\cosh^2 2\beta - \sinh 2\beta(\cos p_x + \cos p_y)] \quad (73)$$

qui vérifie bien la relation de dualité (44). Il existe bien d'autres façons d'établir cette expression, dont certaines beaucoup plus rapides et peut-être plus illuminantes que celle-ci. Toutefois la méthode que nous avons choisie se prête bien à notre objectif qui est d'obtenir la théorie continue dans la région critique.

La quantité entre crochets dans l'expression (73), est la partie essentielle du propagateur $K_{\mathbf{p}}^{-1}$ des variables fermioniques ξ . Comme dans la zone de Brillouin $|p_x|, |p_y| \leq \pi$, $(\cos p_x + \cos p_y)$ atteint son maximum 2 à l'origine, le carré de la masse dans ce propagateur est proportionnel à $\cosh^2 2\beta - 2 \sinh 2\beta$ quantité toujours positive dans le domaine β réel non négatif, sauf pour l'unique valeur β_c , où $\cosh 2\beta_c = \sqrt{2}$, $\sinh 2\beta_c = 1$ comme prévu. Pour β_c négatif, correspondant au régime antiferromagnétique non discuté ici, il faudrait considérer le bord de la zone de Brillouin où $\cos p_x + \cos p_y = -1$ et remplacer β_c par $-\beta_c$. Ici nous nous limitons au système ferromagnétique. L'unique singularité de F est une singularité logarithmique dans la dérivée seconde. Posons

$$\begin{aligned} C &= \cosh 2\beta & \tilde{C} &= \cosh 2\tilde{\beta} = C/S \\ S &= \sinh 2\beta & \tilde{S} &= \sinh 2\tilde{\beta} = 1/S \end{aligned} \quad (74)$$

on en déduit que l'énergie interne, ou la valeur moyenne $\langle \sigma \sigma' \rangle$, du produit de deux spins voisins, est continue à $\beta = \beta_c$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\beta} F(\beta) = \langle \sigma \sigma' \rangle = \frac{\tilde{C}}{2} \left[1 + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{S - \tilde{S}}{C\tilde{C} - \cos p_x - \cos p_y} \right] \quad (75)$$

Son comportement au voisinage de $\beta = \beta_c$ est de la forme

$$\langle \sigma \sigma' \rangle = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} (\beta - \beta_c) \ln \frac{1}{|\beta - \beta_c|} + \text{partie régulière} \quad (76)$$

Montrer qu'on peut encore écrire

$$\frac{1}{2} \frac{dF}{d\beta}(\beta) = \langle \sigma \sigma' \rangle = \frac{\tilde{C}}{2} [1 + (S - \tilde{S}) \phi(\beta)] \quad (77a)$$

$$\begin{aligned} \phi(\beta) &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} [(\cosh 2(\beta + \tilde{\beta}) - \cos \theta) (\cosh 2(\beta - \tilde{\beta}) - \cos \theta)]^{-1/2} \\ &= \frac{k}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} = \frac{k}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) \end{aligned} \quad (77b)$$

où $F(a, b; c; x)$ est la fonction hypergéométrique et $k = 2/C\tilde{C} = 2S/C^2$. On reconnaît l'intégrale elliptique de première espèce.

La chaleur spécifique (dérivée seconde de F) a une divergence logarithmique à $\beta = \beta_c$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 F(\beta)}{d\beta^2} &= \sum_{(x,x')} \{ \langle \sigma \sigma' \sigma_x \sigma_{x'} \rangle - \langle \sigma \sigma' \rangle \langle \sigma_x \sigma_{x'} \rangle \} \\ &\simeq \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \ln \frac{1}{(\beta - \beta_c)} + \text{partie régulière} \end{aligned} \quad (78)$$

Ceci montre qu'au point critique la portée des corrélations entre paires de spins voisins diverge. Nous appellerons "énergie" l'observable $\sigma \sigma'$, produit des spins en deux sites voisins. Nous rencontrons ici pour la première fois une transition de phase du deuxième ordre où les longueurs de corrélation deviennent infinies. A une échelle convenable, la théorie discrète peut être remplacée par un modèle continu en oubliant les détails du réseau. Comme il apparaîtra bientôt, au voisinage du point critique le modèle d'Ising bidimensionnel s'identifie à celui d'un champ libre fermionique. Ce qui est propre à la mécanique statistique c'est le choix de certaines observables qui découlent de la formulation originale et de l'interprétation du modèle.

(1) Diagonaliser $K_{\mathbf{p}} = -K_{\mathbf{p}}^{\dagger} = -K_{-\mathbf{p}}^T$. Les valeurs propres sont de la forme $\pm i\lambda$, $\pm i\lambda'$, avec $\pm\lambda$ et $\pm\lambda'$ donnés par

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 [2 + (1 + t^2) + t(\cos p_x + \cos p_y)] + (1 + t^2)^2 - 2t(1 - t^2)(\cos p_x + \cos p_y) = 0 \quad (79a)$$

Soit λ la valeur propre qui s'annule au point critique pour $\mathbf{p} = 0$ et λ' celle qui reste différente de zéro pour tout β positif. On trouve

$$\begin{aligned} \pm i\lambda &= \pm i \sqrt{2 + (1 + t^2) + t(\cos p_x + \cos p_y) - \sqrt{(4 + t(\cos p_x + \cos p_y))^2 + 4t^2 - 8}} \\ \pm i\lambda' &= \pm i \sqrt{2 + (1 + t^2) + t(\cos p_x + \cos p_y) + \sqrt{(4 + t(\cos p_x + \cos p_y))^2 + 4t^2 - 8}} \end{aligned} \quad (79b)$$

Les valeurs propres sont telles que

$$K_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}^{(\pm)} = \pm i\lambda n_{\mathbf{p}}^{(\pm)} \quad K_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}}'^{(\pm)} = \pm i\lambda' n_{\mathbf{p}}'^{(\pm)}$$

On peut choisir $n_{-\mathbf{p}}^{(-)} = n_{\mathbf{p}}^{(+)*}$, et ajuster la phase relative entre n et n' de sorte que

$$U_{\mathbf{p}} = \left(n_{\mathbf{p}}^{(+)}, n_{\mathbf{p}}^{(-)}, n_{\mathbf{p}}'^{(+)}, n_{\mathbf{p}}'^{(-)} \right)$$

soit une matrice unitaire et unimodulaire telle que

$$U_{\mathbf{p}}^{\dagger} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} U_{-\mathbf{p}}^T$$

et

$$K_{\mathbf{p}} = U_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 & i\lambda_{\mathbf{p}} & 0 & 0 \\ -i\lambda_{\mathbf{p}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\lambda'_{\mathbf{p}} \\ 0 & 0 & -i\lambda'_{\mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix} U_{-\mathbf{p}}^T$$

On fait maintenant dans l'action (71) un changement de variable en posant

$$\xi'_{\mathbf{p}} = U_{-\mathbf{p}}^T \xi_{\mathbf{p}}$$

et on obtient en définitive la forme canonique

$$\xi_{-\mathbf{p}} K_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} = i \xi'_{-\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda' \\ 0 & 0 & -\lambda' & 0 \end{pmatrix} \xi'_{\mathbf{p}} \quad (80)$$

Les deux dernières composantes de ξ' sont découplées des deux premières et correspondent à des modes massifs pour toute valeur de β positive. On peut tout simplement les ignorer si l'on s'intéresse seulement à la région critique.

(2) Trouver la fonction de partition sur un réseau fini $L \times M$, avec des conditions aux limites périodiques sur les spins, sous la forme

$$Z = (\cosh \beta)^{2LM} \frac{1}{2} \left(\int_{-,-} + \int_{-,+} + \int_{+,-} + \int_{+,+} \right) \mathcal{D}(\xi, \bar{\xi}) \exp S \quad (81)$$

Ici S est l'action donnée par (69). Les indices x et y varient dans les domaines $(0, L-1)$ et $(0, M-1)$ respectivement. Les signes se réfèrent aux conditions aux limites $\xi_{L,y}^H = \pm \xi_{0,y}^H$ et $\xi_{x,M}^V = \pm \xi_{x,0}^V$. En évaluant l'intégrale il vient

$$Z = (\cosh \beta)^{2LM} \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, \frac{1}{2}} \eta_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \times \prod_{q=0}^{M-1} \prod_{p=0}^{L-1} \left\{ (1+t^2)^2 - 2t(1-t^2) \left[\cos \frac{2\pi(p+\varepsilon_1)}{L} + \cos \frac{2\pi(q+\varepsilon_2)}{M} \right] \right\}^{1/2} \quad (82)$$

où $\eta_{\frac{1}{2},0} = \eta_{0,\frac{1}{2}} = \eta_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = 1$, $\eta_{0,0} = \varepsilon(T - T_c)$. Le terme contenant $\eta_{0,0}$ disparaît au point critique. Généraliser cette expression dans le cas où les couplages dans les directions verticale et horizontale sont différents.

2.5 Aimantation spontanée

Pour $\beta > \beta_c$, si l'on considère deux spins éloignés l'un de l'autre σ_0 et $\sigma_{\mathbf{x}}$, la fonction de corrélation $G(\mathbf{x}) = \langle \sigma_0 \sigma_{\mathbf{x}} \rangle$ ne tend pas vers zéro quand \mathbf{x}

tend vers l'infini, mais vers une constante positive, le carré de l'aimantation spontanée que l'on appelle \mathcal{M} . Tout se passe comme si la valeur moyenne du spin était égale à \mathcal{M} , alors qu'on se serait plutôt attendu à ce qu'elle soit nulle en l'absence de perturbation susceptible de briser la symétrie, telle qu'un petit champ magnétique ou des conditions aux limites bien particulières. En réalité cela signifie que la symétrie pour $\beta > \beta_c$, résulte en fait de la superposition de deux états purs, correspondant chacun à une aimantation spontanée bien définie $\pm\mathcal{M}$. On peut calculer \mathcal{M} indirectement en trouvant le comportement asymptotique de $G(x)$ qui est le même pour chacun des deux états purs, donc le même pour un mélange quelconque de ceux-ci. On a

$$\mathcal{M}^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x) \quad (83)$$

On dit que la symétrie est spontanément brisée lorsque $\mathcal{M} \neq 0$. A priori il n'est pas évident que \mathcal{M} ne dépende pas de la direction dans laquelle x tend vers l'infini. C'est pourtant ce qu'on présuppose, par simplicité, en faisant tendre x vers l'infini le long d'un des deux axes principaux, par exemple le premier. Alors on a $x \equiv (x, 0)$ et on peut remplacer $\sigma_0 \sigma_x$ par le produit $(\sigma_0 \sigma_1)(\sigma_1 \sigma_2) \cdots (\sigma_{x-1} \sigma_x)$ puisqu'en tout site $\sigma_i^2 = 1$. Rappelons qu'à la limite des hautes température (voir I.116) chaque lien du réseau contribue par un terme $(1+t\sigma\sigma')$ au facteur de Boltzmann. Lorsqu'on calcule le numérateur de la valeur moyenne $\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle$ on doit donc modifier chacun des liens $(01)(12)\dots(x-1, x)$ selon $(1+t\sigma_i \sigma_{i+1}) \rightarrow \sigma_i \sigma_{i+1} (1+t\sigma_i \sigma_{i+1}) = t(1+t^{-1}\sigma_i \sigma_{i+1})$. On en conclut que, mis à part le facteur $t^{|x|}$, la valeur moyenne cherchée prend la forme du rapport entre une fonction de partition "frustrée" Z' et la fonction de partition initiale Z

$$G(x) = t^{|x|} \frac{Z'}{Z} \quad (84)$$

La quantité Z' est une fonction de partition d'un modèle inhomogène, où, sur les liens d'une ligne allant de 0 à x , on substitue t^{-1} à t . L'expression de Z' est encore donnée par (69) avec la même substitution dans l'action, conduisant à un noyau $K' = K + Q$

$$G(x) = t^{|x|} [\det (1 + K^{-1}Q)]^{1/2} \quad (85a)$$

avec la matrice antisymétrique Q donnée par

$$\frac{1}{2} \xi Q \xi = \frac{1-t^2}{t} \sum_{x'=0}^{x-1} \bar{\xi}_{x',0}^H \xi_{x'+1,0}^H \quad (85b)$$

Les colonnes de $K^{-1}Q$ d'indices x, y s'annulent sauf celles telles que $y = 0$ et $x = 0, 1, \dots, L-1$, et telles que l'indice interne corresponde à $\bar{\xi}^H, \xi^H$. On ne conserve alors que les lignes correspondantes dans le calcul du déterminant. On est donc ramené à une matrice de taille $(2x) \times (2x)$ qui fait intervenir l'inverse de K . Sa restriction au sous espace ci-dessus, notée $(K^{-1})^H_{x_1, x_2}$, s'écrit

$$(K^{-1})^H_{x_1, x_2} = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{e^{ip_x(x_1-x_2)} \begin{bmatrix} a_{\mathbf{p}} & b_{\mathbf{p}} \\ c_{\mathbf{p}} & d_{\mathbf{p}} \end{bmatrix}}{(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2)(\cos p_x + \cos p_y)} \quad (86a)$$

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{p}} &= -d_{\mathbf{p}} = -2it \sin p_y \\ b_{\mathbf{p}} &= -c_{\mathbf{p}}^* = 2(1+t \cos p_y) - (1+te^{ip_x})(1+t^2+2t \cos p_y) \end{aligned} \quad (86b)$$

Si $\chi(u)$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble 1 à x , c'est à dire $\chi(u) = 1$ si $u = 1, 2, \dots, x$ et sinon zéro, on a

$$\begin{aligned} [K^{-1H}Q]_{x_1 x_2} &= \frac{1-t^2}{t} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \\ &\quad \frac{e^{ip_x(x_1-x_2)}}{(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2)(\cos p_x + \cos p_y)} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} -b_{\mathbf{p}} e^{-ip_x} \chi(x_2+1) & a_{\mathbf{p}} e^{ip_x} \chi(x_2) \\ -d_{\mathbf{p}} e^{-ip_x} \chi(x_2+1) & c_{\mathbf{p}} e^{ip_x} \chi(x_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (87)$$

Comme $a_{\mathbf{p}}$ et $d_{\mathbf{p}}$ sont impairs en p_y , ils ne contribuent pas à l'intégrale. Tenant compte du fait que $c_{\mathbf{p}} = -b_{\mathbf{p}}^*$, on trouve que $\det(1+K^{-1}Q)$ est le carré d'un déterminant $x \times x$, de la forme

$$G(x)^2 = t^{2|x|} \det(1+K^{-1}Q) = (\det A)^2 \quad (88a)$$

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & a_{-(x-1)} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & a_{-(x-2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{x-1} & a_{x-2} & a_{x-3} & \dots & a_0 \end{vmatrix} \quad (88b)$$

$$a_k = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{-ikp_x} \frac{2t(1+t^2) - t^2(1-t^2)e^{-ip_x} - (1-t^2)e^{ip_x}}{(1+t^2)^2 - 2t(1-t^2)(\cos p_x + \cos p_y)} \quad (88c)$$

Remarquons qu'on obtient ainsi, sous forme fermée, la valeur de la fonction de corrélation entre spins pour une séparation quelconque le long des axes principaux. En particulier dans le cas $x = 1$, la matrice A se réduit à l'élément a_0 et l'expression précédente redonne le résultat (75). Toutefois, dans le cas général où $x > 1$, l'équation (88) n'est pas très maniable. Nous nous bornerons à l'évaluer à la limite $x \rightarrow \infty$. On peut tout d'abord dans (88c) effectuer l'intégrale sur p_y par la méthode des résidus avec pour résultat

$$a_k = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dp}{2\pi} e^{-ikp} \left[\frac{(t - \tilde{t}e^{ip})(t\tilde{t} - e^{ip})}{(te^{ip} - \tilde{t})(t\tilde{t}e^{ip} - 1)} \right]^{1/2} \quad (88d)$$

La quantité entre crochets dans l'intégrale est de module unité. Pour en prendre la racine carrée, on choisit la phase par continuité en supposant qu'elle vaille zéro pour $p = 0$ quand $t > t_c$ (c'est-à-dire dans la phase de basse température). On note l'aspect très symétrique entre t et \tilde{t} . Un déterminant tel que celui de A donné par (88b) est dit déterminant de Toeplitz. Son évaluation est fondée sur un lemme dû à Szegö qui est le suivant. Soit $f(z)$ une fonction analytique définie sur le cercle unité, que nous développons en série de Laurent (ou de Fourier)

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_q z^q \quad |z| = 1 \quad (89a)$$

On impose de plus que lorsqu'on a fait un tour sur le cercle unité la phase de f reprenne sa valeur initiale, de sorte que son logarithme $h(z) = \ln f(z)$ soit bien défini

$$h(z) = \ln f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} h_q z^q \quad |z| = 1 \quad (89b)$$

Le lemme de Szegö dit que dans la limite où x tend vers l'infini

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x h_0} \det \begin{vmatrix} a_0 & a_{-1} & \dots & a_{(x-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{x-1} & a_{x-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} = \exp \sum_1^{\infty} q h_q h_{-q} \quad (89c)$$

Nous donnons des indications sur la preuve ci-dessous. Dans le cas présent avec $z = e^{ip}$, la fonction $f(z)$, définie d'après (88d), est

$$f(z) = \left(\frac{t - \tilde{t}z}{tz - \tilde{t}} \frac{\tilde{t}\tilde{t} - z}{\tilde{t}\tilde{t}z - 1} \right)^{1/2} \quad (90)$$

Elle possède deux points de branchement à l'intérieur du cercle unité $z_1 = t\tilde{t}$ et le second z_2 égal à t/\tilde{t} ou son inverse, et deux points de branchement à l'extérieur du cercle unité, qui en sont les inverses. Plaçons nous d'abord à basse température où $t > t_c > \tilde{t}$. La variation de la phase de f est nulle lorsque z décrit le cercle unité, ce qui entraîne que $h = \ln f$ est bien défini. Alors

$$h_0 = 0, \quad h_q = -h_{-q} = \frac{1}{2q} \left((t\tilde{t})^{|q|} - \left(\frac{\tilde{t}}{t} \right)^{|q|} \right) \quad q \neq 0 \quad (91)$$

Par application de (89c), il vient

$$\mathcal{M}^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \langle \sigma_0 \sigma_x \rangle = \left[1 - \frac{\tilde{t}^2 (1 - t^2)^2}{t^2 (1 - \tilde{t}^2)^2} \right]^{1/4} = \left[1 - (\sinh 2\beta)^{-4} \right]^{1/4} \quad (92a)$$

D'où l'aimantation spontanée, obtenue par Onsager et Yang,

$$\mathcal{M} = \left[1 - (\sinh 2\beta)^{-4} \right]^{1/8} \quad (92b)$$

Cette fonction part de 1 pour $T = 0 \beta \rightarrow \infty$, puis décroît de façon monotone jusque $T_c = \sinh 2\beta_c = 1$, où elle s'annule en

$$\mathcal{M} \sim (\beta - \beta_c)^{1/8} \quad (92c)$$

Ce résultat est surprenant de simplicité, considérant la complexité des étapes intermédiaires. On ne connaît pas de démonstration plus simple. On observe un comportement en loi de puissance au voisinage du point critique, où l'aimantation s'annule comme $(\beta - \beta_c)^{1/8}$ ou encore $(1 - T/T_c)^{1/8}$ (puisque $T = \beta^{-1}$). Nous verrons plus loin que l'approximation du champ moyen, ignorant les fluctuations, aurait conduit à une loi en $(1 - T/T_c)^{1/2}$. Dans le cas présent la pente de la courbe au voisinage du point critique est beaucoup plus raide. L'usage veut qu'on caractérise le comportement de l'aimantation spontanée près de T_c par une loi en $(1 - T/T_c)^\beta$, et donc ici

$$\beta = \frac{1}{8} \quad (92d)$$

On remarque que la même notation β est utilisée pour désigner l'inverse de la température et l'exposant critique de l'aimantation. Ces conventions sont imposées par l'usage et ne devraient pas prêter à confusion. Le fait que l'exposant β soit rationnel est à relier à des considérations qui seront développées au chapitre IX. Au-dessous de T_c , la présence d'une aimantation spontanée indique l'existence de deux phases pures, caractérisées par une aimantation $\pm \mathcal{M}$. Ces phases peuvent coexister, et l'excès d'énergie libre donnera lieu à l'apparition d'une tension de "surface" (à deux dimensions c'est bien évidemment une énergie libre par unité de longueur).

Lemme de Szegő

On trouvera une démonstration rigoureuse dans les articles originaux de Szegő et Kac. Contentons nous ici d'une méthode plus heuristique, qui a l'intérêt d'introduire des moyennes sur le groupe unitaire. A désignant la matrice de Toeplitz des coefficients de Fourier de f , de taille $x \times x$, on a

$$\det A = \det [a_{k_1 - k_2}]$$

$$= \int \prod_{k=0}^{x-1} \frac{d\varphi_k}{2\pi} f(e^{i\varphi_k}) \times \det \begin{vmatrix} 1 & e^{i\varphi_0} & \dots & e^{i(x-1)\varphi_0} \\ e^{-i\varphi_1} & 1 & \dots & e^{i(x-2)\varphi_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i(x-1)\varphi_{x-1}} & e^{-i(x-2)\varphi_{x-1}} & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Le déterminant qui figure dans l'intégrale est, à un facteur près, un déterminant de Vandermonde, soit

$$\exp \left(-i \sum_{k=0}^{x-1} k\varphi_k \right) \prod_{0 \leq k_1 < k_2 \leq x-1} (e^{i\varphi_{k_1}} - e^{i\varphi_{k_2}})$$

Comme la mesure est invariante par permutation des indices, on peut remplacer cette expression par sa moyenne sur les permutations. Sous l'effet de ces dernières, le déterminant de Vandermonde est multiplié par la signature des permutations. On reconnaît alors que la combinaison des préfacteurs exponentiels reconstruit le déterminant complexe conjugué. De la sorte

$$\det A = \frac{1}{x!} \int \prod_{k=0}^{x-1} \frac{d\varphi_k f(e^{i\varphi_k})}{2\pi} \prod_{0 \leq k_1 < k_2 \leq x-1} |e^{i\varphi_{k_1}} - e^{i\varphi_{k_2}}|^2$$

Si on substitue 1 à f , l'intégrale vaut évidemment $x!$ de sorte que $\det A$ est une moyenne. Si on introduit une matrice unitaire U dont les valeurs propres sont les $e^{i\varphi_k}$, on aura

$$F(U) = \sum a_k U^k$$

et $\det F(U) = \prod_{k=0}^{x-1} f(e^{i\varphi_k})$. Enfin

$$\frac{1}{x!} \prod_{k=0}^{x-1} \frac{d\varphi_k}{2\pi} \prod_{0 \leq k_1 < k_2 \leq x-1} |e^{i\varphi_{k_1}} - e^{i\varphi_{k_2}}|^2$$

est la mesure invariante sur les classes du groupe unitaire. En conclusion nous obtenons

$$\det A = \langle \det F(U) \rangle = \langle \exp \operatorname{Tr} H(U) \rangle$$

où, par analogie avec $f = \exp h$, nous avons défini $F = \exp H$ et le développement de H en puissances de U fait intervenir les mêmes coefficients que ceux de h , comme il apparaît lorsqu'on met U sous forme diagonale. Il est alors possible de développer la valeur moyenne de l'exponentielle en termes des cumulants de H

$$\det A = \exp \left\{ \langle \operatorname{Tr} H \rangle + \frac{1}{2} \left[\langle (\operatorname{Tr} H)^2 \rangle - \langle \operatorname{Tr} H \rangle^2 \right] + \frac{1}{6} \left[\langle (\operatorname{Tr} H)^3 \rangle - 3 \langle (\operatorname{Tr} H)^2 \rangle \langle \operatorname{Tr} H \rangle + 2 \langle \operatorname{Tr} H \rangle^3 \right] + \dots \right\}$$

Les valeurs moyennes des traces sont facilement évaluées, et conduisent à

$$\det A = \exp x h_0 + \sum_{p=1}^{\infty} \operatorname{Min}(p, x) h_p h_{-p} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{q, r=1 \\ q+r \geq x}}^{\infty} \operatorname{Min}(q, r, q+r-x, x) (h_q h_r h_{-q-r} + h_{-q} h_{-r} h_{q+r}) + \dots$$

Si h_k tend vers zéro rapidement, on vérifie que le terme générique tend vers zéro lorsque $x \rightarrow \infty$, de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x h_0} \det A = \exp \sum_{p=1}^{\infty} p h_p h_{-p}$$

2.6 Fonction de corrélation

Nous revenons aux formules (88) donnant la fonction de corrélation entre deux spins d'une même ligne, mais cette fois-ci nous nous plaçons dans la phase de haute température où $t < t_c < \tilde{t}$, en suivant la discussion de McCoy et Wu. Dans ce cas, la phase de la fonction f varie de 2π le long du cercle unité et l'évaluation asymptotique du déterminant devient plus difficile. Cependant la méthode mathématique, ainsi que l'intérêt du résultat, justifie de s'y employer. Nous commençons par faire apparaître une fonction $f(z) = zg(z)$, telle que $\ln g(z)$ soit bien défini pour $|z| = 1$, de sorte que

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-i(k-1)\varphi} g(e^{i\varphi}) = g_{k-1}$$

$$g^2(z) = \frac{\tilde{t} - tz^{-1}}{\tilde{t} - tz} \times \frac{1 - t\tilde{t}z^{-1}}{1 - t\tilde{t}z} \quad (93)$$

Considérons la matrice $(x+1) \times (x+1)$

$$B = \begin{vmatrix} g_0 & g_{-1} & \cdots & g_{-x} \\ g_1 & g_0 & \cdots & g_{-(x-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_x & g_{x-1} & \cdots & g_0 \end{vmatrix} \quad (94)$$

Le déterminant à calculer est le mineur de l'élément dans la première colonne et la dernière ligne, qui peut s'écrire

$$\det A = \det B (B^{-1})_{0x} \quad (95)$$

Le lemme de Szegő, permet d'évaluer asymptotiquement $\det B$, à des termes exponentiellement petits près,

$$\det B \underset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} \left\{ (1-t^2)^2 (1-t^2\tilde{t}^2) (1-t^2\tilde{t}^{-2}) \right\}^{1/4} \quad (96)$$

Pour calculer B^{-1} , nous introduisons le problème linéaire

$$\mathbf{u}B = \mathbf{v} \quad (97)$$

Si on choisit \mathbf{v} tel que $v_k = \delta_{k,0}$, la composante u_x donne la quantité cherchée, $(B^{-1})_{0,x}$. Pour un argument \mathbf{v} de module unité, définissons les deux polynômes

$$u(z) = \sum_0^x u_k z^k \quad v(z) = \sum_0^x v_k z^k \quad (98)$$

L'équation (97) se traduit sous la forme

$$u(z)g(z^{-1}) - v(z) = z^x \varphi(z) + \psi(z^{-1}) \quad (99a)$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{q=0}^x \sum_{k=1}^{\infty} u_q g_{q-k-x} z^k \\ \psi(z) &= \sum_{q=0}^x \sum_{k=1}^{\infty} u_q g_{q+k} z^k \end{aligned} \quad (99b)$$

La méthode de résolution est alors fondée sur la factorisation de Wiener-Hopf. On doit supposer que les g_k décroissent suffisamment vite. Les deux termes du membre de droite de (99a) sont des fonctions analytiques respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du cercle unité, tandis que u et v se prolongent en fonctions analytiques dans tout le plan complexe (ce sont des polynômes). Factorisons maintenant $g(z^{-1})$ comme le produit de deux fonctions analytiques définies l'une à l'intérieur l'autre à l'extérieur du cercle unité, sous la forme

$$\begin{aligned} g(z^{-1}) &= \frac{1}{P(z)Q(z^{-1})} \\ P(z) &= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{t}{\bar{t}}z\right) (1 - t\bar{t}z)}} \quad Q(z) = \sqrt{\left(1 - \frac{t}{\bar{t}}z\right) (1 - t\bar{t}z)} \end{aligned} \quad (100)$$

Bien évidemment $P(z)Q(z) = 1$. Il en résulte que $P(z)^{-1}$ est aussi analytique à l'intérieur du cercle unité. Donc

$$\frac{u(z)}{P(z)} = Q(z^{-1})v(z) + Q(z^{-1}) [z^x \varphi(z) + \psi(z^{-1})] \quad (101)$$

valable lorsque $|z| = 1$. On peut séparer toute série de Fourier en deux parties, l'une $g(z)_+$ contenant les puissances non négatives, se prolongeant à l'intérieur du disque unité, l'autre $g(z)_-$ contenant les puissances négatives, se prolongeant à l'extérieur et tendant vers zéro à l'infini. De la sorte

$$\frac{u(z)}{P(z)} - [Q(z^{-1})v(z) + Q(z^{-1})z^x\varphi(z)]_+ = \quad (102)$$

$$Q(z^{-1})\psi(z^{-1}) + [Q(z^{-1})v(z) + Q(z^{-1})z^x\varphi(z)]_-$$

L'égalité a lieu sur le cercle unité. Le membre de gauche est analytique à l'intérieur du disque unité, tandis que le membre de droite se prolonge à l'extérieur et tend vers zéro à l'infini. On obtient ainsi une fonction analytique dans tout le plan complexe, bornée, donc nulle. En conclusion

$$u(z) = P(z) [Q(z^{-1})v(z) + Q(z^{-1})z^x\psi(z)]_+ \quad (103)$$

$$\psi(z^{-1}) = -\frac{1}{Q(z^{-1})} [Q(z^{-1})v(z) + Q(z^{-1})z^x\varphi(x)]_-$$

On peut répéter l'argument pour $z^x u(z^{-1})$, analytique à l'intérieur du disque unité, et on trouve

$$z^x u(z^{-1}) = Q(z) [P(z^{-1})z^x v(z^{-1}) + P(z^{-1})z^x \psi(z)]_+ \quad (104)$$

$$\varphi(z^{-1}) = -\frac{1}{P(z^{-1})} [P(z^{-1})z^x v(z^{-1}) + P(z^{-1})z^x \psi(x)]_-$$

Dans le cas qui nous intéresse, $v(z) = 1$. En négligeant dans (103) la contribution de $[Q(z^{-1})z^x\varphi(z)]_-$ pour x tendant vers l'infini, et en remarquant que $[Q(z^{-1})v(z)]_- = [Q(z^{-1})]_- = Q(z^{-1}) - 1$, il vient $\psi(z) \simeq 1/Q(z) - 1$ et en reportant dans (104), pour x grand

$$z^x u(z^{-1}) \simeq Q(z) \left[\frac{P(z^{-1})z^x}{Q(z)} \right]_+$$

La quantité cherchée u_x , est la valeur de cette expression à $z = 0$. Finalement en se référant aux équations (95) et (96)

$$\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \left[(1-t^2)^2 (1-t^2\tilde{t}^2) (1-t^2\tilde{t}^{-2}) \right]^{1/4} \times$$

$$\oint \frac{dz}{2i\pi} z^{x-1} \left[\left(1 - \frac{t}{\tilde{t}}z\right) \left(1 - \frac{t}{\tilde{t}}z^{-1}\right) (1-t\tilde{t}z) (1-t\tilde{t}z^{-1}) \right]^{-1/2} \quad (105)$$

Les corrections pour $x \rightarrow \infty$ sont exponentiellement petites. Néanmoins l'évaluation de (105) reste difficile. Nous nous contenterons d'une expression asymptotique obtenue par déformation du contour d'intégration

$$\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle \underset{x \rightarrow \infty}{\simeq} \left(\frac{1-t^2\tilde{t}^2}{1-t^2\tilde{t}^{-2}} \right)^{1/4} \frac{1}{(1-\tilde{t}^2)^{1/2}} \frac{1}{(\pi|x|)^{1/2}} \left(\frac{t}{\tilde{t}} \right)^x [1 + O(1/x)] \quad (106)$$

Rappelons que ici 0 et x sont des points sur le même axe cristallographique. On ne s'attend pas, loin du point critique, à trouver une loi isotrope. Toutefois, près de T_c , ce doit être le cas. L'expression (106) est le résultat principal de ce paragraphe obtenu avec quelque peine. Il est à rapprocher du comportement à grande distance du propagateur d'un boson scalaire massif à deux dimensions

$$\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \simeq \left(\frac{2}{\pi m |\mathbf{x}|} \right)^{1/2} e^{-m|\mathbf{x}|} \left(1 + O\left(\frac{1}{m|\mathbf{x}|} \right) \right) \quad (107)$$

Dans les deux cas nous trouvons une décroissance exponentielle avec un préfacteur en $|\mathbf{x}|^{-1/2}$. Rappelons que jusqu'ici nous n'avons que la corrélation entre spins le long de l'axe x (ou y). La longueur de corrélation (ou masse inverse) est donnée par la relation

$$\begin{aligned} \exp -1/\xi = t/\tilde{t} &= \exp[-2(\tilde{\beta} - \beta)] \\ \xi &= 1/2(\tilde{\beta} - \beta) \end{aligned} \quad (108)$$

La longueur de corrélation diverge linéairement au point critique

$$\xi \sim \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right)^{-1} \quad (109)$$

Si on écrit $\xi \sim [(T/T_c) - 1]^{-\nu}$, ceci signifie que dans le cas présent

$$\nu = 1 \quad (110)$$

Une façon équivalente de décrire le résultat (106) dans la phase de haute température est de dire que la fonction de corrélation décrit des excitations bosoniques de masse $m_B = 2(\tilde{\beta} - \beta)$. Comparons ceci à l'expression fermionique, où le propagateur contenait un dénominateur en

$$\left[2 \sinh(\tilde{\beta} - \beta) \right]^2 + 2(1 - \cos p_x) + 2(1 - \cos p_y)$$

la normalisation étant telle que, aux grandes longueurs d'onde, il se comporte comme $m_F^2 + p_x^2 + p_y^2$. Alors

$$m_F^2 = \left[2 \sinh(\tilde{\beta} - \beta) \right]^2$$

Donc m_F peut s'identifier avec $2 \sinh(\tilde{\beta} - \beta)$, et au voisinage critique $m_F \sim m_B$. Enfin l'expression $\exp(-1/\xi) = t/\tilde{t} = t(1+t)(1-t)$ est à rapprocher

de l'expression analogue à une dimension $\exp(-1/\xi_1) = t = \exp -2\tilde{\beta}$, $\xi_1 = 1/2\tilde{\beta}$, qui diverge comme $\frac{1}{2} \exp 2\beta$ lorsque $\beta \rightarrow \infty$ soit $T \rightarrow 0$.

La forme $\exp(-1/\xi) = t(1+t)/(1-t) = t + 2t^2 + 2t^3 + \dots$ suggère une approximation pour la fonction de corrélation. On se souvient que dans le développement de haute température

$$\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle = \frac{\sum_{\partial\{n\}=\{0,x\}} t^{\sum n_i}}{\sum_{\partial\{n\}=\emptyset} t^{\sum n_i}}$$

avec $n_i = 0$ ou 1 . Si on considère un modèle anisotrope, avec un facteur t_x pour les liens horizontaux et un facteur t_y pour les liens verticaux, et qu'on passe à la limite dite S.O.S. (Solid-on-Solid), où $t_x/t_y \rightarrow 0$, le dénominateur tend vers 1, et les termes dominants du numérateur ont t_x^x en facteur, les configurations de ce type correspondant à une courbe en marche d'escalier du type indiqué sur la figure 1. Montrer que dans cette approximation

$$\langle \sigma_0 \sigma_x \rangle_{\text{SOS}} = \left(t_x \frac{1+t_y}{1-t_y} \right)^x$$

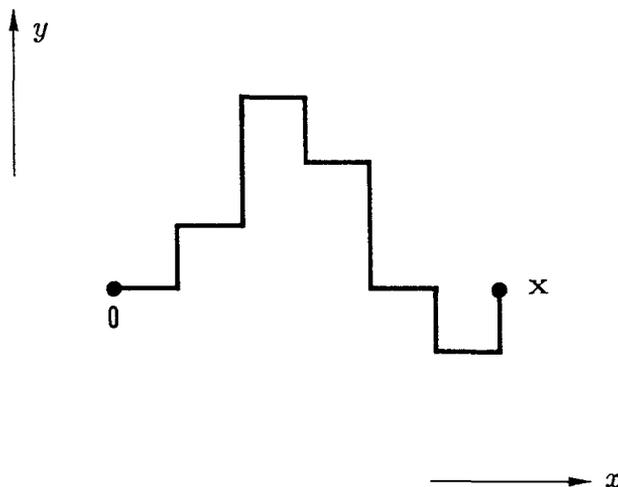


Figure 1 : Une courbe typique joignant les points d'abscisses 0 et x dans le modèle S.O.S. ("Solid-on-Solid").

Le problème consiste à comprendre pourquoi ce résultat subsiste dans le cas isotrope (pour $t_x = t_y = t < t_c$), indépendamment de la limite S.O.S., lorsqu'on calcule la quantité $\exp(-1/\xi)$.

Comparons les comportements (106) et (107) au voisinage de $T = T_c$, (ou $t = t_c = \sqrt{2} - 1$) On constate avec l'aide de (102), selon laquelle la masse s'annule linéairement avec $T - T_c$, que si l'on admet que la fonction

de corrélation devient isotrope, elle se comporte dans ce voisinage comme l'expression (107), à un préfacteur près qui est en fait proportionnel à $m^{1/4}$. Alors

$$\langle \sigma_0 \sigma_{\mathbf{x}} \rangle \simeq \text{cst } m^{1/4} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{k^2 + m^2} \quad m \equiv m_B \sim T - T_c \quad (111)$$

En conséquence la susceptibilité χ qui est l'intégrale de $\langle \sigma_0 \sigma_{\mathbf{x}} \rangle$ sur \mathbf{x} se comporte comme

$$\chi = \sum_{\mathbf{x}} \langle \sigma_0 \sigma_{\mathbf{x}} \rangle \sim m^{-7/4} \sim (T - T_c)^{-7/4} \quad (112)$$

Près du point critique χ diverge en loi de puissance $(T - T_c)^{-\gamma}$. Dans le cas présent

$$\gamma = \frac{7}{4} \quad (113)$$

Pour compléter ce paragraphe contentons nous d'indications très schématiques sur le comportement des corrélations au point critique. Des expressions plus générales seront discutées au paragraphe 3 de ce chapitre. En approchant de la limite $T \rightarrow T_c + 0$, plaçons nous à une distance grande devant la maille du réseau mais petite en terme de la longueur de corrélation, de sorte que $\exp(-|x|/\xi)$ puisse être remplacé par l'unité. On peut alors faire tendre T vers T_c . Ceci entraîne que x se comporte comme $1/(1 - t/\tilde{t})$ et, en revenant à l'équation (106), on trouve

$$\langle \sigma_0 \sigma_{\mathbf{x}} \rangle \sim \frac{1}{|\mathbf{x}|^{1/4}} \quad (114)$$

En supposant de nouveau que ce résultat s'applique dans toutes les directions près du point critique, la loi de puissance pour cette corrélation s'écrit en général $1/|\mathbf{x}|^{d-2+\eta}$. L'exposant critique η est alors

$$\eta = \frac{1}{4} \quad (115)$$

On peut retrouver ce résultat directement pour $T = T_c$, où l'on observe que la fonction $g(z)$ définie en (93) tend vers

$$g^2(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - z} \times \frac{1 - t_c^2 z^{-1}}{1 - t_c^2 z}$$

La série de Fourier de g a des coefficients dont le comportement asymptotique est dominé par la discontinuité de la phase de g sur le cercle unité due au

premier facteur. Négligeons alors le second facteur en le remplaçant par l'unité. On peut montrer que ceci revient à calculer exactement la corrélation diagonale $\langle \sigma_{00} \sigma_{xx} \rangle$. Dans ces conditions on obtient un g approché, qui s'écrit sur le cercle unité $g(e^{ip}) = -ie^{ip/2}$. Les coefficients de Fourier correspondants sont

$$a_k = -i \int_0^{2\pi} \frac{dp}{2\pi} \exp[-i(k-1)p - ip/2] = \frac{2}{\pi(1-2k)}$$

On peut appliquer au calcul du déterminant des a_k le résultat de Cauchy, qui dit que

$$\det \frac{1}{(a_i + b_j)} = \prod_{i < j} \frac{(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}$$

Ainsi

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{xx} \rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x \prod_{0 < k < q \leq x-1} [4(k-q)(q-k)] \frac{1}{\prod_{k,q=0}^{x-1} (1-2(k-q))}$$

En groupant dans le dénominateur les termes deux à deux, il vient

$$\langle \sigma_{00} \sigma_{xx} \rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x \prod_{k=1}^{x-1} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)^{k-x}$$

En outre comme

$$\frac{\sin \pi a}{\pi a} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{k^2}\right)$$

on a, en faisant $a = 1/2$

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{00} \sigma_{xx} \rangle &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right)^x \prod_{k=1}^{x-1} \left(\frac{1}{1-4k^2}\right)^{k-x} \\ &= \exp \left\{ \sum_{k=1}^{x-1} k \ln \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) + x \sum_{k=x}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) \right\} \\ &\simeq \exp - \sum_1^{x-1} \frac{1}{4k} + \text{cst} \approx \frac{\text{cst}}{x^{1/4}} \end{aligned}$$

qui est le résultat attendu.

De nombreuses quantités peuvent être calculées pour le modèle d'Ising bidimensionnel, l'analyse mathématique devenant cependant de plus en plus élaborée. Un point important est qu'au voisinage du point critique les fonctions de corrélation deviennent isotropes à l'échelle de la longueur de corrélation, de sorte qu'on peut alors négliger la structure discrète du réseau, comme l'ont montré B. McCoy et T.T. Wu et leurs collaborateurs. Sato, Jimbo et Miwa d'autre part, ont développé des méthodes d'une grande puissance pour relier le calcul des fonctions de corrélation au problème de Riemann-Hilbert. Nous retiendrons en particulier l'existence au voisinage du point critique d'une théorie continue universelle, dans le cas présent une théorie fermionique libre, avec des exposants caractéristiques de lois d'échelle, qui dans ce cas particulier ont pu être calculés exactement pour la plupart. Nous reviendrons sur la théorie continue dans le dernier paragraphe de ce chapitre.

2.7 Tension superficielle

A basse température deux phases – d'aimantation opposée – peuvent coexister. Si l'on met au contact thermique deux échantillons, chacun d'eux correspondant à une phase pure, nous nous attendons à une énergie libre d'interface proportionnelle à l'aire de contact à trois dimensions, à la longueur du contact à deux dimensions. Pour une définition précise dans le cadre de notre modèle nous procédons par exemple comme suit. La figure 2 montre un ruban de largeur L sur le bord duquel (situation I) on impose des conditions aux limites uniformes – par exemple tous les spins $+$, ou (situation II) des conditions aux limites partiellement $+$ ou $-$ de manière à favoriser dans le volume une des phases ou l'autre. Le premier cas correspondra, à la limite ($L \rightarrow \infty$), à une phase pure homogène, le second à un mélange inhomogène.

A la limite où L tend vers l'infini, et conservant en cela les conventions de signe de la thermodynamique, nous posons pour la tension superficielle σ

$$-\beta\Sigma(\varphi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\cos \varphi}{L} \ln \frac{Z_{II}}{Z_I} \quad (116a)$$

Nous identifions φ à l'angle de la facette avec l'axe cristallographique Ox . La tension dépend de l'angle φ et nous notons que $L/\cos \varphi$ représente la longueur de l'interface que l'on suppose plate. Il revient au même de considérer la situation III où les conditions au bord sont uniformément $+$, mais où l'on a joint deux sites x et y du réseau dual par une ligne arbitraire du réseau dual. Les points x et y sont choisis de telle sorte qu'ils séparent les régions de la frontière où s'opposaient initialement les conditions $\sigma \rightarrow -\sigma$. Le long de la ligne qui les joint, les constantes de couplages β des liens qu'ils intersectent sont changées en $-\beta$, ce qu'on a figuré en trait gras sur

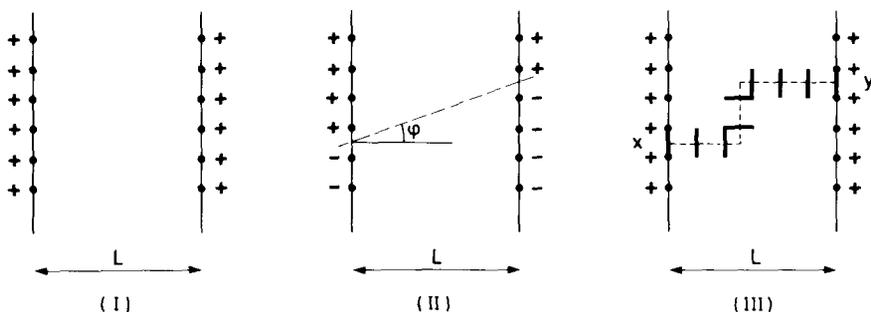


Figure 2: Différentes conditions aux limites sur une bande de largeur L .

la figure 2. En effet, ceci revient à changer le signe des variables (muettes) σ en dessous de la ligne de frustration dans le calcul de Z_{III} . La ligne qui joint x à y est arbitraire à extrémités fixées. Dans ces conditions on a aussi bien

$$-\beta\Sigma(\varphi) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\cos \varphi}{L} \ln \frac{Z_{III}}{Z_I} \quad (116b)$$

Ceci suggère finalement une définition plus générale de la tension Σ dans le cas bidimensionnel. A la limite du volume infini on considère deux points x et y du réseau dual, tels que $y - x$ fasse un angle φ avec l'axe Ox . On les joint par une ligne arbitraire tracée sur le réseau dual, le long de laquelle on change les signes des couplages relatifs aux liens incidents, $\beta \rightarrow -\beta$. On décrit cette opération en introduisant deux opérateurs de désordre aux points x et y , appelés $\tilde{\sigma}_x$ et $\tilde{\sigma}_y$, (insistons sur le fait qu'à l'exception de ses extrémités fixes, la position de la ligne de frustration est arbitraire). Si Z_{xy} désigne la fonction de partition frustrée à la limite thermodynamique, on a

$$\langle \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y \rangle = \frac{Z_{xy}}{Z} \quad (117)$$

On pose

$$-\beta\Sigma(\varphi) = \lim_{|x-y| \rightarrow \infty} \frac{\ln \langle \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y \rangle}{|x-y|} \quad (118a)$$

L'expression précédente identifie $\beta\Sigma(\varphi)$ à l'inverse de la longueur de corrélation correspondante pour les opérateurs de désordre (dans la phase ordonnée $T < T_c$). Le nom d'opérateurs de désordre donné aux observables $\tilde{\varphi}$ est dû à Kadanoff et Ceva. Asymptotiquement

$$\langle \tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y \rangle \sim \exp -\beta\Sigma(\varphi) |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (118b)$$

En dehors de la région critique $\Sigma(\varphi)$ dépend en général de l'angle φ que fait la direction $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ avec les axes du réseau (ici supposé carré) et possède les symétries de celui-ci

$$\Sigma(\varphi) = \Sigma(-\varphi) = \Sigma(\pi - \varphi) = \Sigma\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right) \quad (119)$$

Cette dernière égalité n'est pas évidente à première vue avec la géométrie de bandes que nous avons d'abord considérée.

Puisque la ligne de frustration joignant \mathbf{x} à \mathbf{y} est arbitraire on peut la choisir de manière à minimiser le nombre de liens frustrés. On peut en effet modifier un spin σ en $-\sigma$ dans le calcul de toute fonction de partition, ce qui revient à frustrer quatre liens partant du site en question, ou encore à introduire un petit contour élémentaire frustré le long d'une plaquette du réseau dual. En observant que le produit de deux frustrations est équivalent à l'identité, on se convainc aisément que l'effet d'une frustration le long d'un contour fermé est équivalent à l'identité et donc que deux lignes de frustration distinctes ayant les mêmes extrémités sont équivalentes. On vérifie aisément que cette construction se généralise dans le cas d'un nombre pair d'opérateurs de frustration (et de lignes de frustration correspondantes).

A température $T \rightarrow 0$, ou $\beta \rightarrow \infty$, le "coût" énergétique d'un lien frustré est -2β ($e^{-2\beta}$ dans la fonction de partition), de sorte que, à la limite $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \rightarrow \infty$, $\Sigma(\varphi)$ tend vers 2 fois le nombre minimum de liens frustrés divisé par la distance $|x - y|$. Par unité de longueur on frustre au minimum un nombre $|\sin \varphi|$ de liens verticaux et $|\cos \varphi|$ de liens horizontaux. D'où

$$\lim_{T \rightarrow 0} \Sigma(\varphi) = 2(|\cos \varphi| + |\sin \varphi|) \quad (120)$$

En coordonnées polaires $\Sigma(\varphi)$ représente l'équation de quatre cercles passant par l'origine et centrés aux points $(\pm 1, \pm 1)$. La tension de surface est l'enveloppe extérieure de ces quatre cercles avec quatre points de rebroussement situés sur les axes (figure 3).

On relie aisément la fonction de corrélation des variables de désordre $\tilde{\sigma}$ à la valeur β , à celles de spins σ , variables d'ordre du modèle dual à $\tilde{\beta}$, en généralisant les expressions de dualité du premier paragraphe. En effet,

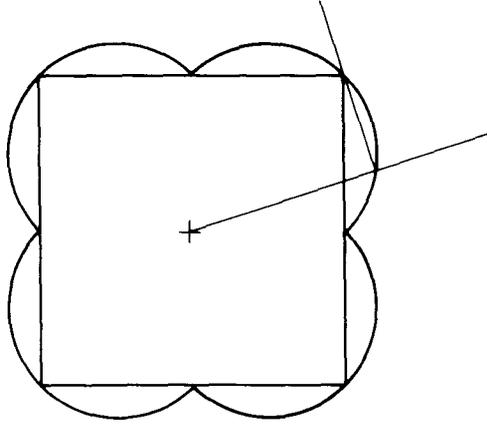


Figure 3 : Tension superficielle $\Sigma(\varphi)$ à température nulle. La tension superficielle est l'enveloppe extérieure de ces cercles; elle présente quatre points de rebroussement situés sur les axes vertical et horizontal.

il suffit de comparer les développements de basse et haute température de $\langle \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}' \rangle$ et $\langle \sigma\sigma' \rangle$ respectivement, pour se convaincre que

$$\langle \tilde{\sigma}_{\mathbf{x}'}\tilde{\sigma}_{\mathbf{y}'} \rangle_{\beta} = \langle \sigma_{\mathbf{x}}\sigma_{\mathbf{y}} \rangle_{\tilde{\beta}} \quad (121)$$

les deux quantités étant prises pour les mêmes distances $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x}' - \mathbf{y}'$. En étudiant le comportement à grande distance, on en déduit que la tension superficielle est liée à la longueur de corrélation à haute température par

$$\beta\Sigma(\varphi) = \frac{1}{\xi_{\tilde{\beta}}(\varphi)} \quad (122)$$

où ξ désigne la longueur de corrélation pour les spins. En particulier la tension superficielle s'annule à β_c avec le même exposant critique ν que celui qui caractérise la divergence de ξ . Jusqu'ici nous n'avons calculé ξ que le long des axes principaux, mais la méthode s'étend à des directions quelconques (Cheng et Wu, 1967). En raison des symétries, il suffit de donner l'expression pour φ compris entre 0 et $\pi/4$

$$\begin{aligned} \beta\Sigma(\varphi) &= \rho(\varphi) \cos \varphi + \rho(\pi/2 - \varphi) \sin \varphi \\ \cos 2\varphi \cosh \rho(\varphi) &= 2 \cosh^2 \left(\beta - \tilde{\beta} \right) \cos^2 \varphi \\ &\quad - \left(\cosh^4 \left(\beta - \tilde{\beta} \right) \sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (123)$$

En particulier si $\varphi = 0$ ou $\pi/2$ nous retrouvons $\xi_{\tilde{\beta}}^{-1} = 2(\tilde{\beta} - \beta)$, et à $\varphi = \pi/4$,

$$\cosh \frac{\beta \Sigma}{\sqrt{2}} = \cosh \frac{1}{\sqrt{2} \xi_{\tilde{\beta}}} = \cosh^2 (\beta - \tilde{\beta})$$

Lorsque $\beta \rightarrow \infty$, $\rho(\varphi) \sim \rho(\pi/2 - \varphi) \sim 2\beta$ et nous retrouvons le résultat annoncé en (120). Il est remarquable que pour β fini, $\rho(\pi/2)$ s'annule, de sorte que les points de rebroussement de $\Sigma(\varphi)$ disparaissent, et que la courbe devienne différentiable. Enfin au voisinage de β_c , $\rho(\varphi) \sim 2(\beta - \tilde{\beta}) \cos \varphi$, et la tension de surface (comme la longueur de corrélation dans la phase de haute température) devient isotrope

$$\beta \rightarrow \beta_c \quad \beta \Sigma(\varphi) = 1/\xi_{\tilde{\beta}} \sim 2(\beta - \tilde{\beta}) \quad (124)$$

Il en va de même pour la fonction de corrélation toute entière. Cette question de l'approche à l'isotropie au voisinage de la transition est illustrée par l'étude de la forme d'équilibre des cristaux, ici bidimensionnels. Remarquons au passage que les formes d'équilibre des cristaux sont rarement observées dans la nature. On parvient à les produire au laboratoire pour certains types de matériaux, le plus souvent à très basse température.

Cette forme d'équilibre résulte d'une compétition entre l'énergie libre de volume et la tension de surface. En deux dimensions et à température fixée, on veut donc minimiser $\int \Sigma(\varphi) ds$, la surface totale étant fixée. Si on choisit une origine arbitraire, l'élément d'aire est $\frac{1}{2} |\mathbf{x} \wedge ds| = \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} ds$, \mathbf{n} représentant la normale à la courbe d'interface (figure 4).

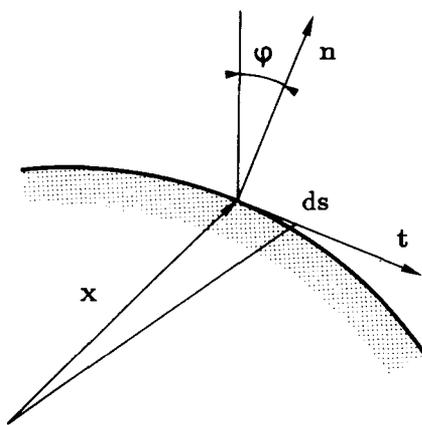


Figure 4 : Notations utilisées pour minimiser la tension superficielle.

Si $\Sigma(\varphi)$ était indépendante de la direction φ , la forme d'équilibre serait un cercle, mais ce n'est en général pas le cas. Il s'agit donc, en introduisant un multiplicateur de Lagrange, de minimiser

$$\int \Sigma(\mathbf{n}) ds - \lambda \int \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} ds \quad (125)$$

c'est à dire l'intégrale de la quantité $\Sigma - \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$. Ceci suggère la construction suivante (Wulff 1901). On porte à partir de l'origine dans la direction \mathbf{n} , la tension de surface $\Sigma_\beta(\mathbf{n})$, et on trace à partir de ce point la droite perpendiculaire $\Sigma - \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}$ (figure 5), en absorbant le multiplicateur de Lagrange λ par une homothétie sur les coordonnées. La forme d'équilibre du cristal est l'enveloppe de ces droites. En un point où la courbe $\Sigma_\beta(\mathbf{n})$ est régulière, si φ désigne l'angle de \mathbf{n} avec la direction Oy , $\mathbf{n} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$, et si \mathbf{t} désigne un vecteur unitaire orthogonal, tangent à l'enveloppe $\mathbf{t} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, on trouve en minimisant (125) que

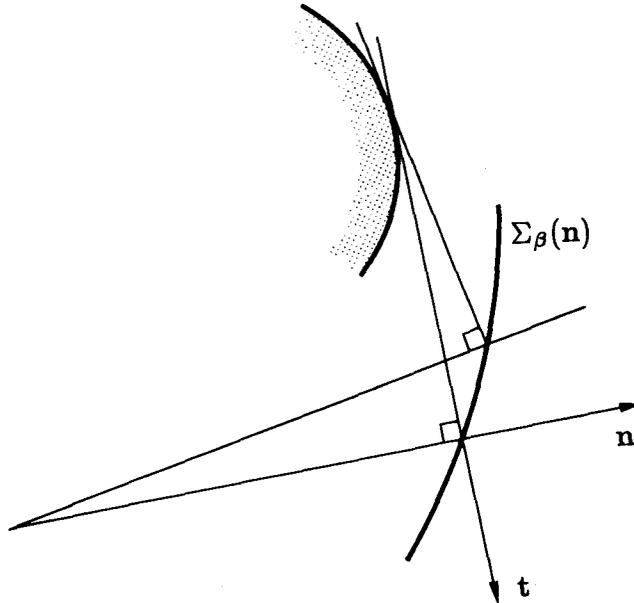


Figure 5 : La construction de Wulff.

$$\mathbf{x} = -\mathbf{t} \frac{d\Sigma}{d\varphi} + \mathbf{n}\Sigma \quad (126)$$

Lorsque Σ est stationnaire, \mathbf{x} est le long de \mathbf{n} . Si Σ est constante, la forme est un cercle bien évidemment. En revanche lorsque $d\Sigma/d\varphi$ est discontinu, $\Delta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}) = \Delta|d\Sigma/d\varphi|$, la position du point saute sur la droite perpendiculaire à \mathbf{n} , et on obtient une face plane de normale \mathbf{n} , dont la longueur est

proportionnelle à la discontinuité. Ainsi les points de rebroussement de $\Sigma(\varphi)$ conduisent à des faces planes. C'est ce qui se passe à $T = 0$, où l'enveloppe est formée des quatre points de coordonnées $(\pm 2, \pm 2)$ et de quatre faces planes, qui correspondent aux quatre points de rebroussement de $\Sigma(\varphi)$. La disparition d'un rebroussement correspond à la disparition de la face plane correspondante – on dit que la face devient rugueuse. Dans le cas du modèle d'Ising bidimensionnel, à toute température positive plus petite que T_c la surface du cristal est rugueuse (à l'échelle microscopique), tandis qu'à l'échelle macroscopique la courbe d'équilibre est régulière et ne révèle pas la direction des axes cristallographiques. Sur la figure 6, les courbes d'équilibre, empruntées à un travail de Avron, van Beijeren, Schulman et Zia, montrent comment le cristal s'arrondit, pour tendre vers une forme circulaire à $T \rightarrow T_c$.

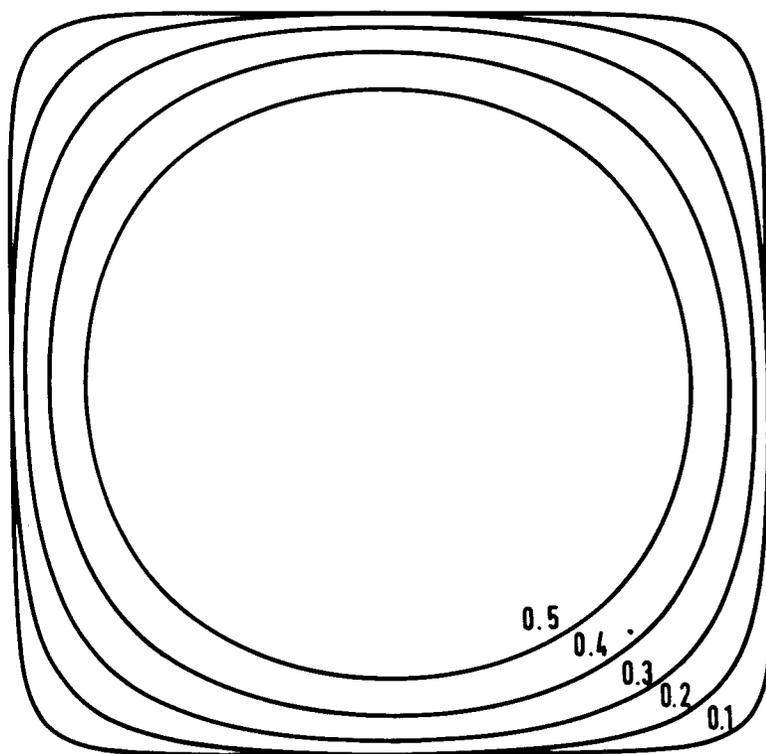


Figure 6 : Courbes d'équilibre successives pour des valeurs croissantes de T/T_c .

Etudier comment varie la courbure de la forme d'équilibre lorsque $T \rightarrow 0$ au voisinage des "coins".

3. Théorie critique continue

3.1 Action effective

Revenons à l'intégrale de chemin de Grassmann avec l'action (69) et cherchons à la simplifier au voisinage de la température critique. Nous avons vu que sur les quatre modes, deux restent massifs à T_c , la longueur de corrélation correspondante restant de l'ordre de la maille du réseau. Cherchons à les découpler des autres modes mous qui eux contribuent au comportement critique. Pour cela effectuons une transformation linéaire sur les variables ξ

$$\begin{aligned}\bar{\xi}^H &= \frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1, \pm 3} e^{is\pi/4} \psi_s & \bar{\xi}^V &= -\frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1, \pm 3} e^{2is\pi/4} \psi_s \\ \xi^H &= -\frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1, \pm 3} e^{3is\pi/4} \psi_s & \xi^V &= \frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1, \pm 3} e^{4is\pi/4} \psi_s\end{aligned}\quad (127)$$

On constate qu'au voisinage de $t \rightarrow t_c = \sqrt{2} - 1$, les modes ψ_s tels que $s = \pm 3$ restent massifs et donc ne contribuent pas aux singularités critiques. On peut donc définir une action effective en deux étapes. D'abord on néglige les modes $\psi_{\pm 3}$. Les composantes restantes forment un spineur à deux composantes

$$\begin{aligned}S \rightarrow S' &= \sum_{\mathbf{x}} t_c \frac{1}{2} \psi(\mathbf{x}) \sigma_2 \psi(\mathbf{x}) - \frac{1}{4} t \psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}_1) (1 + \sigma_2) \psi(\mathbf{x}) \\ &\quad - \frac{1}{4} t \psi(\mathbf{x} + \mathbf{u}_2) (i\sigma_3 + \sigma_2) \psi(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (128)$$

avec \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 vecteurs unités le long des axes x et y (avec pour unité de longueur le pas du réseau). Ensuite on passe à la limite continue où les sommes sont remplacées par des intégrales, ψ par un spineur continu différentiable et $\psi(\mathbf{x} + \mathbf{u})$ est développé à l'ordre 1 en $\psi(\mathbf{x}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) + \dots$. Cette deuxième étape consiste à remplacer $S' \rightarrow S_{\text{eff}}$. On se rappelle que les variables ψ sont anticommutantes. Utilisons la notation complexe

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \partial \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Le laplacien étant $4\partial\bar{\partial}$, on aboutit à l'expression

$$S' \rightarrow S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} t \int d^2 z \left\{ \psi_+ \bar{\partial} \psi_+ + \psi_- \partial \psi_- + \left(\frac{t - t_c}{t} \right) (i\psi_+ \psi_- - i\psi_- \psi_+) \right\}\quad (129)$$

Le champ (ψ_+, ψ_-) est un champ de fermions libres “réel” (ou de Majorana) à deux dimensions. Au point critique $t = t_c$, ψ_+ et ψ_- sont découplés, tandis qu’au voisinage de ce point le terme de “masse”, proportionnel à $t - t_c$, les couple. Finalement on change d’échelle pour le champ en incorporant le facteur \sqrt{t} dans ψ . Il est commode de poser

$$\sqrt{\pi t}\psi_+ = \psi \quad \sqrt{\pi t}\psi_- = \bar{\psi} \quad \frac{t - t_c}{t} = -\frac{m}{2} \quad (130)$$

où ψ et $\bar{\psi}$ représentent maintenant des champs à une composante et m correspond à notre définition précédente de m_F quant $t \rightarrow t_c$. Donc

$$S_{\text{eff}} = \int \frac{d^2 z}{2\pi} \{ (\psi \bar{\partial} \psi + \bar{\psi} \partial \bar{\psi}) + im \bar{\psi} \psi \} \quad (131)$$

L’équation du mouvement correspondante, c’est-à-dire l’analogie en deux dimensions de l’équation (euclidienne) de Dirac, est donnée par

$$\bar{\partial} \psi - \frac{1}{2} im \bar{\psi} = 0 \quad \partial \bar{\psi} + \frac{1}{2} im \psi = 0 \quad (132a)$$

et par suite chaque composante obéit à

$$(-4\bar{\partial}\bar{\partial} + m^2) \psi \equiv (-\Delta + m^2) \psi = 0 \quad (132b)$$

Le propagateur de $\psi, \bar{\psi}$ est l’inverse de l’opérateur matriciel

$$\frac{1}{\pi} \begin{pmatrix} \bar{\partial} & -\frac{im}{2} \\ \frac{im}{2} & \partial \end{pmatrix},$$

c’est-à-dire

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \langle \psi_1 \psi_2 \rangle & \langle \psi_1 \bar{\psi}_2 \rangle \\ \langle \bar{\psi}_1 \psi_2 \rangle & \langle \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \rangle \end{pmatrix} &= \pi \begin{pmatrix} \partial_1 & \frac{1}{2} im \\ -\frac{1}{2} im & \bar{\partial}_1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\partial \bar{\partial} - \frac{1}{4} m^2} \right)_{12} \\ &= - \begin{pmatrix} \partial_1 & \frac{1}{2} im \\ -\frac{1}{2} im & \bar{\partial}_1 \end{pmatrix} \int \frac{d^2 p}{\pi} \frac{e^{ip \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}}{p^2 + m^2} \end{aligned} \quad (133)$$

Au point critique, $m = 0$, et l’on a, pour le noyau de l’opérateur de Laplace avec une échelle de longueur arbitraire

$$-4\partial_1 \bar{\partial}_1 \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \right) = \delta^{(2)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad (134)$$

Donc le propagateur $\langle \psi_1 \psi_2 \rangle$ ($\langle \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \rangle$) devient une fonction de $z_{12} \equiv z_1 - z_2$ (\bar{z}_{12}) seul

$$\langle \psi_1 \psi_2 \rangle = \frac{1}{z_{12}} \quad \langle \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2 \rangle = \frac{1}{\bar{z}_{12}} \quad (135)$$

comme si le champ $\psi(\bar{\psi})$ était seulement fonction de $z(\bar{z})$.

Obtenir l'expression complète du propagateur pour $m \neq 0$, et discuter son comportement à courte distance.

On peut déduire du théorème de Wick des fonctions de corrélation plus générales comportant plusieurs champs ψ et $\bar{\psi}$. Par exemple on peut faire appel à la définition du Pfaffien d'une matrice antisymétrique défini en (28), pour écrire

$$\langle \psi(z_1) \dots \psi(z_{2n}) \rangle = \text{Pf} \frac{1}{(z_i - z_j)} \quad (136)$$

Notons une relation remarquable, propre au cas bidimensionnel de masse nulle. Il apparaît que les carrés de fonctions de corrélation fermioniques peuvent être identifiés aux fonctions de corrélation d'opérateurs construits en termes d'un champ libre bosonique de masse nulle. On a l'identité

$$\langle \psi(z_1) \dots \psi(z_{2n}) \rangle^2 = \left(\text{Pf} \frac{1}{z_i - z_j} \right)^2 = \text{Hf} \left(\frac{1}{(z_i - z_j)^2} \right) \quad (137)$$

où le Haffnien (ainsi nommé par Caianiello par analogie avec le Pfaffien) d'une matrice A_{ij} symétrique et de dimension paire est défini comme l'analogie bosonique du Pfaffien

$$\text{Hf}_{1 \leq i, j \leq 2n} A_{ij} = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\text{Permutations}} A_{p_1 p_2} \dots A_{p_{2n-1} p_{2n}} \quad (138)$$

C'est la somme sur toutes les appariements distinctes des $2n$ indices. Il exprime le contenu du théorème de Wick pour des bosons libres: si A_{12} représente la contraction élémentaire (ou valeur moyenne) de deux champs de ce type, alors l'équation (138) donne la valeur moyenne d'un produit de $2n$ champs.

Pour en revenir à l'équation (137), on peut la démontrer par récurrence en partant du cas évident où $n = 1$. Le premier exemple non trivial, pour $n = 2$ s'écrit

$$\left(\frac{1}{z_{12}z_{34}} - \frac{1}{z_{13}z_{24}} + \frac{1}{z_{14}z_{23}} \right)^2 = \frac{1}{z_{12}^2 z_{34}^2} + \frac{1}{z_{13}^2 z_{24}^2} + \frac{1}{z_{14}^2 z_{23}^2} \quad (139)$$

qui montre que les termes croisés obtenus en élevant au carré le membre de gauche se compensent.

En voici une preuve directe. Le Pfaffien de $1/(z_i - z_j)$ est impair dans l'échange de deux variables quelconques. Considérons le comme une fonction de $z \equiv z_1$, les autres variables étant fixes et distinctes. Il en résulte que son développement de Laurent en z autour de toute autre z_i aura un pôle simple et pas de terme constant. Après élévation au carré, on observe que ceci entraîne la compensation des termes croisés (qui feraient apparaître des termes d'ordre $(z - z_i)^{-1}$). On pourrait en donner une autre démonstration en étudiant la limite d'un déterminant de Cauchy.

3.2 Fonctions de corrélation

Si l'on étudie le modèle au voisinage du point critique, on rencontre l'opérateur "thermique" ou "densité d'énergie", plus simplement appelé opérateur d'énergie, couplé à la quantité m qui mesure la distance au point critique T_c . Dans la version discrète on a vu que c'était le produit de deux spins voisins. Il prend ici la forme

$$\varepsilon(z, \bar{z}) = i\bar{\psi}\psi \quad (140)$$

Sa valeur moyenne dans le vide, s'annule ainsi que toutes ses fonctions de corrélation d'ordre impair. Celles qui sont paires se déduisent du théorème de Wick, comme par exemple

$$\langle \varepsilon_1 \varepsilon_2 \rangle = -\langle \bar{\psi}_1 \psi_1 \bar{\psi}_2 \psi_2 \rangle = \frac{1}{z_1 - z_2} \cdot \frac{1}{\bar{z}_1 - \bar{z}_2} \quad (141)$$

Cela signifie que ε est de dimension 1 en prenant comme unité l'inverse d'une longueur. Plus généralement on a

$$\langle \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{2p} \rangle = (-1)^p \langle \bar{\psi}_1 \psi_1 \cdots \bar{\psi}_p \psi_p \rangle = \text{Pf} \frac{1}{z_i - z_j} \text{Pf} \frac{1}{\bar{z}_i - \bar{z}_j} \quad (142)$$

En utilisant l'identité (137) on peut obtenir une interprétation intéressante de l'expression (142) en l'élevant au carré

$$\langle \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{2n} \rangle^2 = \text{Hf} \frac{1}{(z_i - z_j)^2} \text{Hf} \frac{1}{(\bar{z}_i - \bar{z}_j)^2} \quad (143)$$

Ceci nous incite à comparer le modèle obtenu par duplication du modèle d'Ising avec une théorie bosonique de masse nulle. Par analogie avec l'action fermionique effective (131), on peut considérer une action bosonique, qui s'écrit, en omettant le terme de masse

$$S_{\text{bosonique}} = \int \frac{d^2z}{8\pi} \varphi(-\Delta\varphi) = \int \frac{d^2z}{2\pi} \bar{\partial}\varphi\partial\varphi \quad (144)$$

En utilisant une unité de longueur arbitraire, le propagateur correspondant est

$$\langle\varphi_1\varphi_2\rangle = \ln \left[\frac{1}{(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} \right] \quad (145)$$

Celui-ci croît indéfiniment à grande distance et par conséquent ne peut pas décrire une observable convenable. Mais on peut utiliser φ comme une quantité intermédiaire qui permet de construire des observables par dérivation ou exponentiation. De (145) il résulte que

$$\begin{aligned} \langle\partial\varphi_1\partial\varphi_2\rangle &= -\frac{1}{(z_1 - z_2)^2} & \langle\bar{\partial}\varphi_1\bar{\partial}\varphi_2\rangle &= -\frac{1}{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2} \\ \langle\partial\varphi_1\bar{\partial}\varphi_2\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (146)$$

d'où

$$\langle\varepsilon_1\varepsilon_2\rangle^2 = \langle(\partial\varphi\bar{\partial}\varphi)_1(\partial\varphi\bar{\partial}\varphi)_2\rangle = \frac{1}{(z_1 - z_2)^2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^2} \quad (147a)$$

et plus généralement

$$\langle\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_{2p}\rangle^2 = \langle(\partial\varphi\bar{\partial}\varphi)_1 \cdots (\partial\varphi\bar{\partial}\varphi)_{2p}\rangle = \text{Hf} \frac{1}{(z_i - z_j)^2} \text{Hf} \frac{1}{(\bar{z}_i - \bar{z}_j)^2} \quad (147b)$$

L'interprétation est donc qu'en considérant le produit de deux théories fermioniques de Majorana, l'opérateur $\varepsilon\varepsilon'$ (où le prime distingue la deuxième copie) peut être identifié avec $\partial\varphi\bar{\partial}\varphi$, ou encore $\psi\psi'$ avec $\partial\varphi$, et $\bar{\psi}'\bar{\psi}$ avec $\bar{\partial}\varphi$, qui sont fonctions seulement de z et \bar{z} respectivement. On obtient ainsi une "bosonisation" d'une paire de modèles de Majorana, cette paire pouvant être considérée comme la description d'un champ fermionique complexe. Les quantités

$$\begin{aligned} J &= \psi\psi' = \partial\varphi & \bar{\partial}J &= 0 \\ \bar{J} &= \bar{\psi}'\bar{\psi} = \bar{\partial}\varphi & \partial\bar{J} &= 0 \end{aligned} \quad (148)$$

sont ici des courants conservés (puisque $\bar{\partial}\partial\varphi = 0$) associés à l'invariance par un groupe de rotation abélien dans l'espace "isotopique" (ψ, ψ') par l'intermédiaire du théorème de Noether.

Nous indiquons aussi ci-dessous les expressions analogues pour les corrélations entre opérateurs de spin, en renvoyant à la littérature pour une discussion complète. Il est commode d'utiliser la normalisation suivante de la fonction à deux points

$$\langle \sigma_1 \sigma_2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{|z_{12}|^{1/4}} \quad (149)$$

Les fonctions de corrélation élevées au carré s'écrivent alors

$$\langle \sigma_1 \dots \sigma_{2n} \rangle^2 = \sum_{\epsilon_i = \pm 1, \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{2n} = 0} \prod_{1 \leq i < j \leq 2n} |z_{ij}|^{\epsilon_i \epsilon_j / 2} \quad (150)$$

En termes de champ bosonique φ on a

$$\langle : e^{i\alpha\varphi_1} :: e^{-i\alpha\varphi_2} : \rangle = \frac{1}{(z_1 - z_2)^{\alpha^2} (\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\alpha^2}} \quad (151)$$

où le symbole $::$ implique l'omission des auto-contractions et où les valeurs moyennes de ces exponentielles s'annulent toutes les fois que la "charge" totale, c'est-à-dire la somme des coefficients des φ , est non nulle. Si l'on prend $\alpha = \frac{1}{2}$, on trouve l'identification

$$\langle \sigma_1 \dots \sigma_{2n} \rangle^2 = \left\langle : e^{i\varphi_1/2} + e^{-i\varphi_1/2} : \dots : e^{i\varphi_{2n}/2} + e^{-i\varphi_{2n}/2} : \right\rangle \quad (152)$$

ou encore sous forme opératorielle

$$\sigma\sigma' = : e^{i\varphi/2} + e^{-i\varphi/2} : \quad (153)$$

Partant de la formulation initiale du modèle d'Ising et de la transformation de Jordan-Wigner, démontrer les formules (150)-(153) pour les fonctions de corrélation du spin.

La formulation continue que l'on vient de donner sera développée au chapitre IX où l'on donnera une discussion générale des phénomènes critiques en deux dimensions.

Appendice A. Différences quadratiques et équations de Painlevé

Le couronnement des travaux sur le modèle d'Ising bidimensionnel est un ensemble d'équations quadratiques aux différences finies, obtenues par McCoy, Perk et Wu, qui déterminent les fonctions de corrélation sur réseau pour une distance et une température quelconques. Ces relations se réduisent près du point critique, à des équations de Painlevé pour les fonctions à deux points et se généralisent aux corrélations d'ordre plus élevé. Une discussion analogue est due à Sato, Jimbo et Miwa, dans un cadre plus mathématique. Pour rendre justice au sujet, il convient de mentionner brièvement ces aspects, même si leurs développements (dans le cadre des modèles intégrables) ne sont pas exposés ici. Nous nous limiterons au cas de la fonction de corrélation spin-spin, bien que la méthode s'étende aux fonctions à plus de points. Comme nous le verrons, la dualité joue un rôle crucial dans la démonstration.

Revenons à la matrice de transfert agissant sur une rangée de taille L (avec L tend vers l'infini). Considérons les fonctions de corrélation de deux spins situés en (x_0, y_0) et (x_1, y_1) . Supposant par exemple que $y_1 \geq y_0$

$$\langle \sigma_{x_1 y_1} \sigma_{x_0 y_0} \rangle = \lim_{M, L \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr} \left(T^{M-y_1} \sigma_{x_1}^{(1)} T^{y_1-y_0} \sigma_{x_0}^{(1)} T^{y_0} \right)}{\text{Tr} T^M} \quad (154)$$

Rappelons que d'après les définitions (56)

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} &= \sigma_{x-1/2}^{(1)} \Gamma_{x-1/2, x} \\ \sigma_{x-1/2}^{(1)} &= \prod_0^{x-1} \frac{1}{i} \Gamma_{k-1/2, k} \Gamma_{k, k+1/2} = \prod_0^{x-1} \sigma_k^{(3)} \end{aligned} \quad (155)$$

où $\sigma_{x-1/2}^{(1)}$ commute avec $\Gamma_{x-1/2, x}$ et peut aussi être exprimé sous la forme de l'exponentielle d'une forme quadratique en Γ , puisque $\exp \frac{1}{2} \pi \Gamma_1 \Gamma_2 = \Gamma_1 \Gamma_2$. Posons

$$\begin{aligned} A &= T^{y_1-y_0} & B &= T^{M-(y_1-y_0)} \\ \tilde{A} &= \sigma_{x_1-1/2}^{(1)} T^{y_1-y_0} \sigma_{x_0-1/2}^{(1)} & AB &= T^M \end{aligned} \quad (156)$$

Il vient

$$\langle \sigma_{x_1 y_1} \sigma_{x_0 y_0} \rangle = \lim_{L, M \rightarrow \infty} \frac{\text{Tr} \left(\Gamma_{x_1-1/2, x_1} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} B \right)}{\text{Tr} AB} \quad (157)$$

où A, \tilde{A}, B sont tous des exponentielles de formes quadratiques dans l'algèbre de Clifford (ou fermionique). Utilisons maintenant une variante opératorielle du théorème de Wick. Si U et V sont des exponentielles de formes quadratiques dans les variables Γ et si O_1 et O_2 sont des monômes en Γ

$$\frac{\text{Tr } O_1 U O_2 V}{\text{Tr } UV} = \text{Somme sur les produits de contractions}$$

où par contraction on veut dire $\text{Tr } \Gamma_1 \Gamma_2 UV / \text{Tr } UV$, si Γ_1 et Γ_2 appartiennent à O_1 , $\text{Tr } \Gamma_1 \Gamma_2 VU / \text{Tr } UV$, si Γ_1 et Γ_2 appartiennent à O_2 et $\text{Tr } \Gamma_1 U \Gamma_2 V / \text{Tr } UV$ si Γ_1 appartient à O_1 et Γ_2 à O_2 (ou vice-versa). Les termes du membre de droite sont affectés du signe de la permutation des Γ correspondante. Cette propriété est clairement une conséquence de la représentation en intégrales de chemin. Nous laissons au lecteur le soin de la prouver directement. En appliquant ceci avec $U = \tilde{A}$ et $V = B$ on obtient

$$\begin{aligned} \text{Tr } \tilde{A} B \times \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1-1/2, x_1} \Gamma_{x_1, x_1+1/2} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} \Gamma_{x_0, x_0+1/2} B \right) &= \\ &= \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1-1/2, x_1} \Gamma_{x_1, x_1+1/2} \tilde{A} B \right) \text{Tr} \left(\tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} \Gamma_{x_0, x_0+1/2} B \right) \\ &\quad - \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1-1/2, x_1} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} B \right) \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1, x_1+1/2} \tilde{A} \Gamma_{x_0, x_0+1/2} B \right) \\ &\quad + \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1-1/2, x_1} \tilde{A} \Gamma_{x_0, x_0+1/2} B \right) \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1, x_1+1/2} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} B \right) \end{aligned} \quad (158)$$

Divisons les deux membres par $(\text{Tr } AB)^2$ pour remplacer toutes ces quantités par des valeurs moyennes et donnons une interprétation des six termes en utilisant l'algèbre des Γ , les fonctions de corrélation des spins $\sigma_x^{(1)}$, appelées \mathcal{C} , et les fonctions de corrélation des opérateurs de désordre $\sigma_{x+1/2}^{(1)}$, (ou encore des spins à la température duale), appelées $\tilde{\mathcal{C}}$.

Il vient, à la limite thermodynamique ($L, M \rightarrow \infty$)

$$\frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr } \tilde{A} B = \frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr } \sigma_{x_1-1/2}^{(1)} A \sigma_{x_0-1/2}^{(1)} B = \tilde{\mathcal{C}}(x_1 - x_0, y_1 - y_0).$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1-1/2, x_1} \Gamma_{x_1, x_1+1/2} \tilde{A} B \right) &= \frac{i}{\text{Tr } AB} \text{Tr} \left(\sigma_{x_1+1/2}^{(1)} A \sigma_{x_0-1/2}^{(1)} B \right) \\ &= i \tilde{\mathcal{C}}(x_1 - x_0 + 1, y_1 - y_0) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr} \left(\tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} \Gamma_{x_0, x_0+1/2} B \right) = i \tilde{\mathcal{C}}(x_1 - x_0 - 1, y_1 - y_0)$$

$$\frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1-1/2, x_1} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} B \right) = \mathcal{C}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

Avec les notations (74), on calcule en utilisant l'équation du mouvement, c'est-à-dire la commutation avec la matrice de transfert T ,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1 - x_0, y_1 - y_0 + 1) &= \frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr} \left(T^{-1} \sigma_{x_1}^{(1)} T A \sigma_{x_0}^{(1)} B \right) \\ &= \tilde{\mathcal{C}} \mathcal{C}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) - i \tilde{S} \frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1, x_1+1/2} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} B \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x_1 - x_0, y_1 - y_0) &= \langle \sigma_{x_1, y_1+1} \sigma_{x_0, y_0+1} \rangle \\ &= \tilde{\mathcal{C}}^2 \frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr} \left(T_{x_1-1/2, x_1} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} B \right) \\ &\quad - i \tilde{\mathcal{C}} \tilde{S} \frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1, x_1+1/2} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} B \right) \\ &\quad - i \tilde{\mathcal{C}} \tilde{S} \frac{1}{\text{Tr } AB} \text{Tr} \left(T_{x_1-1/2, x_1} \tilde{A} \Gamma_{x_0, x_0+1/2} B \right) \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}(x_1 - x_0, y_1 - y_0)^2 - \mathcal{C}(x_1 - x_0, y_1 - y_0 - 1) \mathcal{C}(x_1 - x_0, y_1 - y_0 + 1) = \\ &= -\tilde{S}^2 \frac{1}{(\text{Tr } AB)^2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_{x_1-1/2, x_1} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} B \right) \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1, x_1+1/2} \tilde{A} \Gamma_{x_0, x_0+1/2} B \right) \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1-1/2, x_1} \tilde{A} \Gamma_{x_0, x_0+1/2} B \right) \text{Tr} \left(\Gamma_{x_1, x_1+1/2} \tilde{A} \Gamma_{x_0-1/2, x_0} B \right) \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on obtient une interprétation des derniers termes dans (158). En rassemblant ces résultats on obtient la première équation quadratique aux différences finies

$$\begin{aligned} &S \left[\mathcal{C}^2(x, y) - \mathcal{C}(x, y+1) \mathcal{C}(x, y-1) \right] \\ &\quad + \tilde{S} \left[\tilde{\mathcal{C}}^2(x, y) - \tilde{\mathcal{C}}(x+1, y) \tilde{\mathcal{C}}(x-1, y) \right] = 0 \end{aligned} \quad (159a)$$

La seconde équation est obtenue en échangeant les rôles des coordonnées x et y , c'est-à-dire en effectuant une symétrie discrète sur le réseau (ou encore en échangeant β et $\tilde{\beta}$)

$$\begin{aligned} &S \left[\mathcal{C}^2(x, y) - \mathcal{C}(x+1, y) \mathcal{C}(x-1, y) \right] \\ &\quad + \tilde{S} \left[\tilde{\mathcal{C}}^2(x, y) - \tilde{\mathcal{C}}(x, y+1) \tilde{\mathcal{C}}(x, y-1) \right] = 0 \end{aligned} \quad (159b)$$

En appliquant de nouveau le théorème de Wick à une autre combinaison d'opérateurs, on obtient par la même méthode une troisième relation (symétrique en x et y)

$$\begin{aligned} &S \left[\mathcal{C}(x+1, y+1) \mathcal{C}(x, y) - \mathcal{C}(x+1, y) \mathcal{C}(x, y+1) \right] = \\ &\quad \tilde{S} \left[\tilde{\mathcal{C}}(x+1, y+1) \tilde{\mathcal{C}}(x, y) - \tilde{\mathcal{C}}(x+1, y) \tilde{\mathcal{C}}(x, y+1) \right] \end{aligned} \quad (159c)$$

Ces relations présentent une symétrie (ou antisymétrie) par dualité. Si on leur adjoint des conditions aux limites convenables, elles déterminent complètement la fonction à deux points. La méthode se généralise pour les corrélations d'ordre plus élevé. Supposons maintenant qu'une limite continue a un sens au voisinage de T_c et étudions ce que deviennent ces expressions dans l'approximation continue. Pour cela faisons d'abord entrer un facteur $S^{1/2} \equiv \sinh 2\beta^{1/2}$ dans la définition de \mathcal{C}

$$S^{1/2}\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad (160)$$

développons tous les termes des équations (159) à l'ordre deux en fonction du pas du réseau et utilisons les coordonnées complexes $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$. Le système prend alors la forme

$$(c\partial\bar{\partial}c - \partial c\bar{\partial}c) + (\tilde{c}\partial\bar{\partial}\tilde{c} - \partial\tilde{c}\bar{\partial}\tilde{c}) = 0 \quad (161a)$$

$$c\partial^2c - (\partial c)^2 = \tilde{c}\partial^2\tilde{c} - (\partial\tilde{c})^2 \quad (161b)$$

$$c\bar{\partial}^2c - (\bar{\partial}c)^2 = \tilde{c}\bar{\partial}^2\tilde{c} - (\bar{\partial}\tilde{c})^2 \quad (161c)$$

Supposons que \mathcal{C} (et $\tilde{\mathcal{C}}$) soient isotropes, c'est-à-dire uniquement fonctions de la distance $|z|$. Les deux équations (161b) et (161c) se réduisent ainsi à une seule. Pour un temps posons

$$z\bar{z} = e^{2t} \quad \mathcal{C} = e^f \quad \tilde{\mathcal{C}} = e^{\tilde{f}} \quad (162)$$

Il vient alors

$$e^{2f} f'' + e^{2\tilde{f}} \tilde{f}'' = 0 \quad (163a)$$

$$e^{2f} (f'' - 2f') = e^{2\tilde{f}} (\tilde{f}'' - 2\tilde{f}') \quad (163b)$$

où les primes indiquent la dérivation par rapport à t . Ces équations doivent satisfaire une condition de compatibilité. Pour l'obtenir, on récrit le système sous la forme

$$e^{2f} f' = e^{2\tilde{f}} (\tilde{f}' - \tilde{f}'') \quad (164a)$$

$$e^{2\tilde{f}} \tilde{f}' = e^{2f} (f' - f'') \quad (164b)$$

et on prend la dérivée par rapport à t de la deuxième équation

$$e^{2\tilde{f}} (\tilde{f}'' + 2\tilde{f}'^2) = e^{2f} (f'' - f''' + 2f'^2 - 2f'f'')$$

On utilise (163a) pour remplacer $e^{2\tilde{f}} \tilde{f}''$ par $-e^{2f} f''$ et (164b) pour remplacer $2e^{2\tilde{f}} \tilde{f}'^2$ par $2\tilde{f}' e^{2f} (f' - f'')$. On obtient alors

$$\begin{aligned} f''' - 2f'^2 - 2f'' + 2f' f'' + 2\tilde{f}'(f' - f'') &= 0 \\ \tilde{f}''' - 2\tilde{f}'^2 - 2\tilde{f}'' + 2\tilde{f}' \tilde{f}'' + 2f'(\tilde{f}' - \tilde{f}'') &= 0 \end{aligned}$$

où la deuxième égalité est déduite de la première par dualité. En ajoutant les deux équations on trouve

$$\frac{d}{dt} [f'' + f'^2 + \tilde{f}'' + \tilde{f}'^2 - 2f' \tilde{f}'] - 2 [f'' + f'^2 + \tilde{f}'' + \tilde{f}'^2 - 2f' \tilde{f}'] = 0$$

d'où après intégration

$$f'' + f'^2 + \tilde{f}'' + \tilde{f}'^2 - 2f' \tilde{f}' = \text{cst } e^{2t} = \text{cst } z\bar{z} \quad (165)$$

Si l'on revient à la fonction initiale, on voit que ceci est équivalent à

$$\frac{1}{\mathcal{C}\bar{\mathcal{C}}} [\tilde{\mathcal{C}}\partial\bar{\partial}\mathcal{C} - \mathcal{C}\partial\bar{\partial}\tilde{\mathcal{C}} - \partial\mathcal{C}\bar{\partial}\tilde{\mathcal{C}} - \bar{\partial}\mathcal{C}\partial\tilde{\mathcal{C}}] = \text{cst} = \frac{1}{4}m^2 \quad (166)$$

On identifie la constante du membre de droite à $m^2/4$ en supposant qu'aux grandes distances pour $T > T_c$

$$\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \text{cst} \quad \mathcal{C} \rightarrow \frac{\text{cst}}{|z|^a} \exp -m|z| \quad (167)$$

On a maintenant ce qu'on peut appeler le système de Painlevé

$$\mathcal{C}\partial\bar{\partial}\mathcal{C} + \tilde{\mathcal{C}}\partial\bar{\partial}\tilde{\mathcal{C}} - \partial\mathcal{C}\bar{\partial}\mathcal{C} - \partial\tilde{\mathcal{C}}\bar{\partial}\tilde{\mathcal{C}} = 0 \quad (168a)$$

$$\tilde{\mathcal{C}}\partial\bar{\partial}\mathcal{C} + \mathcal{C}\partial\bar{\partial}\tilde{\mathcal{C}} - \partial\mathcal{C}\bar{\partial}\tilde{\mathcal{C}} - \bar{\partial}\mathcal{C}\partial\tilde{\mathcal{C}} = \frac{1}{4}m^2\mathcal{C}\tilde{\mathcal{C}} \quad (168b)$$

La deuxième équation fournit l'échelle des longueurs. Changeons de variable en posant

$$u = \frac{1}{2}mz \quad (169)$$

et interprétons maintenant les opérations de dérivation comme effectuées par rapport à u et \bar{u} , ce qui revient à remplacer $m^2/4$ par 1 dans (168b). En additionnant et en soustrayant les deux équations de (168), on obtient le système suivant

$$C + \tilde{C} = e^L \quad C - \tilde{C} = e^M \quad u = \frac{m}{2}z \quad (170a)$$

$$4\partial\bar{\partial}(L - M) = e^{2(L-M)} - e^{-2(L-M)} \quad (170b)$$

$$4\partial\bar{\partial}(L + M) = 2 - e^{2(L-M)} - e^{-2(L-M)} \quad (170c)$$

Rappelons que C et \tilde{C} , et donc L et M , ne dépendent que de $|z|$. L'équation (170b) détermine $(L - M)$, tandis que (170c) fournit $L + M$, pourvu qu'on se donne des conditions aux limites. Le système (170) détermine donc C et \tilde{C} . L'équation de Painlevé proprement dite est (170b), où $L - M$ ne dépend que de $|z|$. Si l'on tient compte de ce fait, l'équation (170b) devient une équation différentielle non linéaire du second ordre avec cette particularité que ses solutions n'ont que des pôles pour seules singularités mobiles (c'est-à-dire dépendant des conditions aux limites). Plus précisément si

$$\eta = e^{-(L-M)} = \frac{\tilde{C} - C}{\tilde{C} + C} \quad r = |u| = \frac{1}{2}m|z| \quad (171a)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{d^2\eta}{dr^2} - \left(\frac{1}{\eta} \frac{d\eta}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{d\eta}{dr} = \eta^2 - \frac{1}{\eta^2} \quad (171b)$$

Cette équation est invariante lorsqu'on change $\eta \rightarrow 1/\eta$. On peut se contenter de la solution pour T légèrement supérieur à T_c , puisque le résultat pour C et \tilde{C} fournit alors également C en dessous de T_c . Les conditions (167) impliquent que η tende vers 1 aux grandes valeurs de r , à des termes exponentiellement petits près. Si l'on néglige $(\eta'/\eta)^2$ devant η''/η , il vient

$$\eta = 1 + \text{Cst} \frac{e^{-2r}}{r^{1/2}} + \dots$$

de sorte que l'exposant a dans l'estimation (167) vaut $a = 1/2$, résultat en accord avec l'équation (107). Nous laissons le lecteur se convaincre que le comportement asymptotique dominant est

$$|z| \rightarrow \infty \left\{ \begin{array}{l} \eta = 1 - \frac{2}{\pi} K_0(2r) + \dots = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi m |z|}} e^{-m|z|} + \dots \\ \tilde{C} \rightarrow \text{cst} \\ C/\tilde{C} \sim \frac{1}{\pi} K_0(2r) \sim \sqrt{\frac{1}{2m |z|}} e^{-m|z|} \end{array} \right. \quad (172)$$

tandis qu'au voisinage de l'origine, C et \tilde{C} possèdent le préfacteur attendu en $|z|^{-1/4}$

$$|z| \rightarrow 0 \begin{cases} C \sim \frac{1}{(m|z|)^{1/4}} [1 + \frac{1}{2}m|z| \ln \frac{1}{2}m|z| + \dots] \\ \tilde{C} \sim \frac{1}{(m|z|)^{1/4}} [1 - \frac{1}{2}m|z| \ln \frac{1}{2}m|z| + \dots] \end{cases} \quad (173)$$

Notes

Les variables de Grassmann sont introduites et discutées dans l'ouvrage de F.A. Berezin *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York (1966). Elles sont maintenant utilisées dans des contextes divers, y compris pour le traitement des systèmes désordonnés. Des exemples en seront donnés au chapitre X.

Le modèle d'Ising fut introduit par Lenz, *Z. Physik* **21**, 613 (1920) et étudié par E. Ising, *Z. Physik* **31**, 253 (1925). Nous mentionnons ici certains des travaux fondamentaux se rapportant à la solution bi-dimensionnelle, ainsi que ceux qui sont reliés à la présentation que nous avons choisie. Une preuve de l'existence d'une phase ordonnée à basse température, non discutée ici, est due à R. Peierls, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **32**, 477 (1936). Les méthodes utilisant la matrice de transfert et la dualité apparaissent dans H.A. Kramers et G.H. Wannier, *Phys. Rev.* **60**, 252, 263 (1941). L'énergie libre a été obtenue grâce à l'introduction de l'algèbre de Clifford, par L. Onsager, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944). La démonstration a été simplifiée par B. Kaufman, *Phys. Rev.* **76**, 1232 (1949). Onsager a aussi donné l'expression de l'aimantation spontanée dans *Nuovo Cimento* **6**, Supplement, 261 (1949). Une démonstration complète a été fournie par C.N. Yang, *Phys. Rev.* **85**, 808 (1952). M. Kac et J.C. Ward ont développé une technique combinatoire dans *Phys. Rev.* **88**, 1332 (1952). On trouve d'autres articles de revue et des méthodes différentes dans G.F. Newell et E.W. Montroll, *Rev. Mod. Phys.* **25**, 353 (1953), E.W. Montroll, R.B. Potts, J.C. Ward, *J. Math. Phys.* **4**, 308 (1963), T.D. Shultz, D.C. Mattis, E.H. Lieb, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 856 (1964), H.S. Green et C.A. Hurst *Order disorder phenomena*, Interscience, London (1964). Les effets de taille finie sont discutés par A.E. Ferdinand et M.E. Fisher, *Phys. Rev.* **185**, 832 (1969).

Le lemme sur les déterminants de Töplitz est exposé par G. Szegö dans *Communications du séminaire mathématique de l'université de Lund*, tome supplémentaire dédié à M. Riesz, 228 (1952) et à M. Kac, *Duke Math. J.* **21**, 501 (1954).

On trouve un exposé général comportant de nombreuses références et une présentation des premières contributions des auteurs dans B.M. McCoy

et T.T. Wu, *The Two-Dimensional Ising Model*, Harvard University Press, Cambridge, Mass. (1973).

Le concept des variables d'ordre et de désordre est développé dans L.P. Kadanoff, H. Ceva, *Phys. Rev.* **B3**, 3918 (1971).

La construction de la forme d'équilibre des cristaux à partir de la tension superficielle est due à G. Wulff, *Z. Kristallogr. Mineral.* **34**, 449 (1901). Voir aussi C. Herring, *Phys. Rev.* **82**, 87 (1951). Le calcul pour le modèle d'Ising bidimensionnel est fondé sur le travail de H. Cheng et T.T. Wu, *Phys. Rev.* **164**, 719 (1967), P.G. Watson, volume 3 de la série des Domb et Green, D.B. Abraham et P. Reed, *J. Phys.* **A10**, **L121** (1977) et C. Rottman et M. Wortis, *Phys. Rev.* **B24**, 6274 (1981). Les courbes proviennent de J.E. Avron, H. van Beijeren, L.S. Schulman et R.K.P. Zia, *J. Phys.* **A15**, L81 (1982). Voir aussi R.K.P. Zia et J. Avron, *Phys. Rev.* **B25**, 2041 (1982).

La représentation du modèle d'Ising en termes d'intégrales de Grassmann est inspirée du travail de S. Samuel, *J. Math. Phys.* **21**, 2806, 2815, 2820 (1980), et de l'un des auteurs dans *Nucl. Phys.* **B210[FS6]**, 448 (1982).

Le calcul des fonctions de corrélation à la limite continue est du à T.T. Wu, B.M. McCoy, C.A. Tracy, E. Barouch, *Phys. Rev.* **B13**, 316 (1976). Pour une relation avec la théorie des champs continue, voir A. Luther, I. Peschel, *Phys. Rev.* **B12**, 3908 (1975), ainsi que le travail de l'un des auteurs avec M. Bander, *Phys. Rev.* **D15**, 463 (1977), et avec J.-B. Zuber, *Phys. Rev.* **D15**, 2875 (1977), et celui de M. Bander et J.L. Richardson, *Phys. Rev.* **B17**, 1464 (1978).

Les équations quadratiques aux différences finies sont discutées par B.M. McCoy et T.T. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 675 (1980), J.H.H. Perk, *Phys. Lett.* **79A**, 1,3 (1980), B.M. McCoy, J.H.H. Perk, et T.T. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 757 (1981).

Le travail de M. Sato, T. Miwa et M. Jimbo se trouve dans une série de publications, *Proc. Jap. Acad.* **53A**, 147, 153, 183 (1977) et *Publications R.I.M.S.*, Kyoto University, **14**, 223 (1978), **15**, 201, 577, 871 (1979).

Pour la classification des équations de Painlevé, voir E. Ince *Ordinary Differential Equations*, Dover, New York (1945).

CHAPITRE III

BRISURE SPONTANEE DE SYMETRIE

CHAMP MOYEN

Dans de nombreux modèles de mécanique statistique le paramètre d'ordre se transforme selon une représentation d'un groupe de symétries fini, discret ou continu. Plus la température est élevée, plus les fluctuations sont importantes. Ainsi, on s'attend en général à trouver à basse température des phases pures qui possèdent un groupe de symétries plus restreint, la valeur d'un paramètre d'ordre y étant en effet non nulle. C'est cette situation que l'on définit comme une brisure spontanée de symétrie. Un exemple typique est le modèle de Heisenberg classique qui décrit les interactions à courte distance d'un champ φ à n composantes ayant pour groupe de symétrie le groupe orthogonal $O(n)$. Pour $n = 1, 2, 3$, ce modèle peut s'appliquer à une transition de Curie ferro-paramagnétique. En physique des particules, le modèle σ de Gell-Mann et Lévy fait intervenir une brisure spontanée de l'invariance chirale, caractéristique des champs de spineurs de masse nulle, qui s'accompagne de modes d'excitation mous de Goldstone associés aux mésons π , et qui fait apparaître une masse non nulle pour les fermions. En première approximation on étudiera l'action classique proprement dite, ou une action effective tenant compte de certaines fluctuations. Dans certaines plages de paramètres on cherchera les extrema en fonction des configurations du champ. Les autres fluctuations seront ensuite traitées perturbativement. Cette méthode du champ moyen apparaît dans les contextes physiques les plus variés, depuis la formule de Clausius-Mossotti donnant la constante diélectrique d'un milieu polarisable, le champ moléculaire de Weiss dans la théorie du magnétisme, la méthode de Landau en physique statistique, la notion de milieu effectif dans l'étude des milieux désordonnés, la méthode de Hartree-Fock en physique atomique ou dans le problème à N corps, jusqu'à l'analyse semi-classique des systèmes quantiques. La méthode mathématique commune consiste, à un stade ou à un autre, à appliquer l'approximation du col à une intégrale fonctionnelle, en étudiant la validité de l'approximation à l'aide des corrections correspondant aux fluctuations au voisinage du ou des cols. Quand à l'idée physique, elle consiste en un sens très général à substituer à la dynamique ou à la statistique d'un système à un grand nombre de variables équivalentes couplées, celle de l'interaction de l'une d'entre elles avec un champ effectif, produit par les variables restantes, et déterminé de manière auto-cohérente. Les exemples qui suivent montrent

comment ces idées sont mises en oeuvre en pratique.

1. Approximation de champ moyen

1.1 Constante diélectrique d'un milieu polarisable

Pour illustrer par un premier exemple ce type de considérations, rappelons la dérivation de la constante diélectrique ε d'un milieu polarisable. L'introduction d'une charge test dans un tel milieu induit une densité de charge $\rho_{\text{ind}}(\mathbf{x})$, d'intégrale totale nulle (le milieu étant globalement neutre). On peut donc l'exprimer comme la divergence d'une densité de moment dipolaire

$$\rho_{\text{ind}}(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

En multipliant les deux membres par \mathbf{x} , en prenant l'intégrale sur tout l'espace, et en intégrant le membre de droite par parties, ce qui suppose que $\rho_{\text{ind}}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ sont suffisamment localisées, on obtient le moment dipolaire total induit

$$\mathbf{P}_{\text{tot}} = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{x} \rho_{\text{ind}}(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x} \mathbf{P}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

Une translation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ ne modifie pas ce résultat, car la charge totale induite est nulle. Ainsi, la loi de Gauss $\text{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$, qui donne le champ électrique produit par la densité totale de charge $\rho = \rho_{\text{ext}} + \rho_{\text{ind}}$, peut être écrite sous la forme

$$\text{div} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) \equiv \text{div} \mathbf{D} = \frac{\rho_{\text{ext}}}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

La valeur de la constante diélectrique du vide ε_0 fixe la relation entre les unités et vaut $10^7/4\pi c^2$ dans le système MKS. Lorsque le milieu est isotrope et le champ électrique suffisamment faible, la polarisation est proportionnelle au champ, et l'induction électrique s'écrit

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (4)$$

où ε est la constante diélectrique du milieu. D'un point de vue microscopique, la polarisation \mathbf{P} est la résultante des dipôles individuels \mathbf{p} associés aux molécules du milieu, et en moyenne égale à $n\mathbf{p}$ où n est le nombre de porteurs de dipôles par unité de volume. Dans la limite des champs faibles, chaque dipôle individuel \mathbf{p} est lui-même proportionnel à un champ électrique local \mathbf{E}_{loc} agissant sur la molécule, selon $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{loc}}$, la constante de proportionnalité α étant la polarisabilité de la molécule isolée. Il s'agit maintenant

d'évaluer \mathbf{E}_{loc} qui peut être considéré comme la superposition de trois contributions : le champ électrique \mathbf{E} produit par les sources extérieures; le champ \mathbf{E}_1 produit par les dipôles lointains du matériau, situés à l'extérieur d'un volume sphérique (conformément à l'isotropie du milieu), grand à l'échelle microscopique et petit à l'échelle macroscopique; enfin le champ \mathbf{E}_2 produit par les molécules proches, situées à l'intérieur de ce volume. Dans un milieu possédant un haut degré de symétrie (un milieu désordonné, un liquide, même un milieu ordonné à symétrie cubique), ce champ \mathbf{E}_2 est nul. Calculer le champ \mathbf{E}_1 à l'intérieur de la cavité est un exercice élémentaire classique : c'est le champ créé par une distribution superficielle $\sigma = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$, où \mathbf{n} est la normale extérieure. Choisissons l'axe z le long de \mathbf{P} , notons R le rayon de la sphère; le potentiel le long de l'axe z s'écrit

$$\phi(z) = -P \frac{R^2 2\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\cos\theta \frac{\cos\theta}{\sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz\cos\theta}} = -z \frac{P}{3\epsilon_0}$$

Au centre le champ $\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi$ vaut

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$$

Le champ local s'obtient en ajoutant $\mathbf{E} + \mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{P}/3\epsilon_0$. Le moment dipolaire induit d'une molécule s'écrit donc

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{loc}} = \alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

En multipliant les deux membres par la densité n , on obtient

$$\mathbf{P} = n\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

Portant ce résultat dans la définition (4) on obtient

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{1}{3} \frac{n\alpha}{\epsilon_0} \quad (5)$$

dite relation de Clausius-Mossotti (ou de Lorentz-Lorentz en optique en remplaçant ϵ par le carré de l'indice de réfraction) qui relie la constante diélectrique phénoménologique ϵ à la polarisabilité microscopique α . Le caractère autocohérent provient du fait que le calcul de \mathbf{E}_{loc} permettant d'obtenir la polarisation locale, se fait en tenant compte de la polarisation des autres molécules.

L'approximation de champ moyen (5) ne prend pas en compte les fluctuations et les corrélations. Voyons comment celles-ci se manifestent dans le cadre de la théorie classique de Kirkwood–Yvon. Considérons, d'un point de vue microscopique, un milieu homogène, non polarisé, de densité moléculaire moyenne n . Désignons par \mathbf{x}_i les positions des différentes molécules, et par \mathbf{E} , comme précédemment, le champ extérieur. Le moment dipolaire \mathbf{p}_i induit sur la molécule i est donné par

$$\mathbf{p}_i = \alpha \left[\mathbf{E} - \sum_{j, j \neq i} K_{ij} \mathbf{p}_j \right]$$

où K_{ij} désigne la matrice

$$K_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla_i \otimes \nabla_j \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}$$

et représente le champ créé en \mathbf{x}_i par les autres dipôles. En notant $\langle \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p}_i \rangle$ la moyenne statistique, indépendante de i , du moment dipolaire, on peut écrire

$$\mathbf{p}_i = \alpha \left[\mathbf{E} - \sum_{j, j \neq i} \langle K_{ij} \rangle \langle \mathbf{p}_j \rangle - \sum_{j, j \neq i} (K_{ij} \mathbf{p}_j - \langle K_{ij} \rangle \langle \mathbf{p}_j \rangle) \right]$$

Un calcul analogue à celui effectué ci-dessus donne

$$\mathbf{p}_0 = \alpha \left[\mathbf{E} - \sum_{j, j \neq i} \langle K_{ij} \rangle \langle \mathbf{p} \rangle \right] = \alpha \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \right] = \frac{\alpha}{3} (\epsilon + 2) \mathbf{E}$$

Si on néglige les fluctuations de \mathbf{p}_i , l'identification de \mathbf{p}_0 et de \mathbf{P} permet de retrouver le résultat (5) de la théorie de champ moyen. Pour obtenir la première correction à ce résultat, il suffit d'itérer la relation

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_0 - \alpha \sum_{j, j \neq i} [K_{ij} \mathbf{p}_j - \langle K_{ij} \rangle \langle \mathbf{p}_j \rangle]$$

en considérant formellement α comme petit. En se limitant à une seule itération, et en moyennant, on obtient

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{p}_0 + \alpha^2 \sum_{\substack{j, k \\ j \neq i, k \neq j}} [\langle K_{ij} K_{jk} \rangle - \langle K_{ij} \rangle \langle K_{jk} \rangle] \mathbf{p}_0 + \dots$$

Comme $\mathbf{p}_0 = \frac{1}{3} \alpha (\epsilon + 2) \mathbf{E}$, il est évident que \mathbf{p} est dirigé selon $\hat{\mathbf{E}}$, vecteur unitaire pointant dans la direction du champ extérieur. En multipliant les deux membres par n/ϵ_0 , on trouve aisément

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3\varepsilon_0} [1 + S] \quad (6a)$$

$$S = \alpha^2 \sum_{\substack{j,k \\ j \neq i, k \neq j}} \hat{\mathbf{E}} \left[\langle K_{ij} K_{jk} \rangle - \langle K_{ij} \rangle \langle K_{jk} \rangle \right] \hat{\mathbf{E}} + \mathcal{O}(\alpha^3)$$

On peut décomposer la somme ci-dessus en deux termes, l'un ne faisant intervenir que les termes avec $j \neq i \neq k$ et l'autre correspondant à $k = i$. En faisant tendre simultanément vers l'infini le nombre total de molécules N et le volume total V , on peut définir les fonctions de distribution moléculaires par les relations du type

$$n_2(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \sum'_{i,j} \langle \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_i) \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_j) \rangle = n^2 g_2(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)$$

...

dans laquelle l'apostrophe traduit l'omission des termes $i = j$. On obtient alors, par exemple

$$\begin{aligned} \sum_{j, j \neq i} \langle f(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \rangle &= \frac{V}{N} \frac{1}{V} \int d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \sum'_{i,j} \langle \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_i) \delta(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_j) \rangle \\ &= \frac{1}{n} \int d^3 \mathbf{x} n_2(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = n \int d^3 \mathbf{x} g_2(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

A l'aide de ces expressions nous obtenons le terme correctif S . En effectuant les sommations et les intégrales angulaires, il vient

$$\begin{aligned} S &= \frac{\alpha^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2} \left\{ 8\pi n \int_0^\infty dx \frac{g_2(x)}{x^4} \right. \\ &\quad \left. + n^2 \int d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 \frac{g_3(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - g_2(\mathbf{x}_1)g_2(\mathbf{x}_2)}{x_1^3 x_2^3} [3\hat{\mathbf{x}}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}}_2 - 1] \right\} + \mathcal{O}(\alpha^3) \end{aligned} \quad (6b)$$

relation montrant que, à l'ordre le plus bas, la correction dépend quadratiquement de la densité ou de la pression. Au voisinage d'une transition continue, l'importance des corrélations à longue distance rend incorrecte l'approche perturbative ci-dessus, et provoque le phénomène d'opalescence critique.

1.2 Modèle de spin classique - Symétrie discrète

Raisonnons sur un modèle d'Ising. Nous utiliserons un réseau hypercubique à d dimensions. Le nombre de voisins (nombre de coordination)

$q = 2d$ d'un spin donné croît linéairement avec d . Le facteur de Boltzmann associé à une configuration donnée, dans un champ extérieur h , s'écrit

$$p(\sigma) = Z^{-1} \exp \left(\beta \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i \right) \quad (7)$$

En toute rigueur le champ extérieur est proportionnel à h/β , mais nous garderons la terminologie ci-dessus. Pour $h = 0$, les facteurs associés aux configurations $\{\sigma_i\}$ et $\{-\sigma_i\}$ sont identiques : le groupe à deux éléments $Z/2Z = +1, -1$, noté plus simplement Z_2 , est donc le groupe d'invariance du modèle. Nous avons vu au chapitre II que, au moins dans le cas à deux dimensions, le modèle d'Ising conduit à une phase ordonnée à basse température, dont les états purs sont caractérisés par l'existence d'une aimantation spontanée brisant la symétrie Z_2 . Poursuivons l'étude en dimension plus élevée en utilisant la notion de champ moyen. Compte tenu de l'expression (7), il est tentant de considérer la variable aléatoire

$$H_i = \beta \sum_{j(i)} \sigma_j \quad (8)$$

comme un champ dû aux voisins agissant sur σ_i dans le même esprit que celui qui nous faisait calculer le champ électrique local comme dû aux autres dipôles dans un milieu diélectrique. Dans le cas présent, néanmoins, les interactions sont à courte portée. Lorsque d augmente, le nombre de voisins intervenant dans (8) croît également. On peut donc penser que, lorsque le nombre de coordination est grand, il est possible de négliger les fluctuations de H_i , et en s'inspirant du théorème central limite, de remplacer H_i par sa valeur moyenne. Si, à la limite $h \rightarrow 0$, la valeur moyenne de H_i ne s'annule pas, il y aura brisure spontanée de symétrie. Ce champ moyen doit être calculé de manière autocohérente. Nous allons présenter plusieurs méthodes pour obtenir ce champ moyen illustrant divers aspects de cette approximation.

Dans le calcul de la fonction de partition Z , normalisant dans (7) le facteur de Boltzmann, on peut inverser le signe de n'importe quel ensemble de variables σ , puisqu'il y a sommation. Cette quantité est en particulier invariante si, avant de sommer, on change le signe d'un spin unique σ_i . D'après la définition de H_i , on obtient l'identité

$$1 = \langle \exp(-2\sigma_i(H_i + h)) \rangle \quad (9a)$$

ou, de manière équivalente

$$\langle \cosh 2(H_i + h) \rangle = 1 + \langle \sigma_i \sinh 2(H_i + h) \rangle \quad (9b)$$

L'approximation consiste à remplacer la variable aléatoire H_i par sa moyenne H , invariante par translation, et à identifier $\langle \sigma_i \rangle$ à l'aimantation M . Il vient alors

$$M = \frac{\cosh 2(H + h) - 1}{\sinh 2(H + h)} = \tanh(H + h) \quad (10a)$$

expression qui, rapprochée de (8) impose

$$H = 2\beta dM \quad (10b)$$

La seconde relation exprime que le champ local est créé par les dipôles magnétiques voisins, et la première que l'aimantation répond au champ total, somme du champ extérieur h et du champ moyen H . Il est remarquable qu'à la limite d'un champ extérieur nul, $h = 0$, ces équations peuvent admettre une solution commune non triviale. Pour $h = 0$, la symétrie Z_2 du problème entraîne qu'à toute paire (H, M) correspond la paire $(-H, -M)$. On peut donc se contenter d'examiner le cas $H > 0$, solution de

$$\frac{H}{2d\beta} = \tanh H \quad (10c)$$

Dans le cas général, il convient de remplacer $2d$ par le nombre de coordination du réseau, qui est supposé grand. Si $2d\beta > 1$, c'est-à-dire à température suffisamment basse, les équations (10c) admettent une solution M non nulle qui part de zéro pour $\beta = \beta_c = (2d)^{-1}$ et croît avec β , tendant vers la limite 1 lorsque β tend vers l'infini. La résolution graphique de (10c) est représentée sur la figure 1. A haute température, $\beta < \beta_c$, où le champ local et l'aimantation spontanée s'annulent, on s'attend à une phase désordonnée symétrique. Remarquons que plus le désordre augmente, plus le degré de symétrie est élevé. De la même façon l'existence d'un réseau cristallin après solidification traduit une perte de symétrie (de translation ou de rotation) par rapport au système en phase liquide ou gazeuse.

Au voisinage du point de transition, le comportement de M fait apparaître une racine carrée, caractéristique de l'approximation considérée

$$M \sim H \sim \sqrt{3}(\beta/\beta_c - 1)^{1/2} \quad (11)$$

L'exposant critique, noté β conformément à la convention introduite au chapitre précédent, et qu'on distinguera évidemment du coefficient intervenant dans le poids statistique vaut donc 1/2 dans l'approximation considérée; on se souvient qu'il vaut 1/8 pour le modèle bidimensionnel.

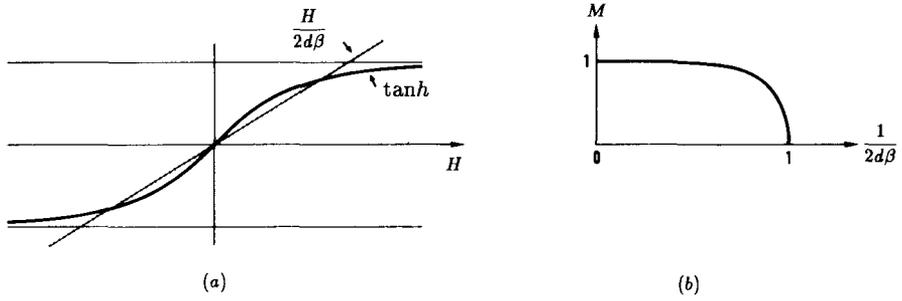


Figure 1: (a) Résolution graphique de l'équation de champ moyen. (b) Aimantation spontanée.

En présence d'un champ extérieur $h \neq 0$ non nul, les équations (10a) et (10b) admettent tantôt une, tantôt plusieurs solutions qu'il faut distinguer par des considérations énergétiques, la solution favorisée étant celle où l'aimantation est dans la direction (du signe) du champ extérieur. La situation intéressante est celle du voisinage du point critique. A $\beta = \beta_c$, en développant la tangente hyperbolique on obtient $h \sim (M + h)^3/3$, d'où

$$\beta = \beta_c \quad M \sim (3h)^{1/3} \quad (12a)$$

soit encore

$$\beta = \beta_c \quad h \sim M^3, \quad \delta_{\text{champ moyen}} = 3 \quad (12b)$$

En approchant du point critique dans la phase de haute température, la croissance de l'aimantation est linéaire avec le champ; le coefficient de proportionnalité, la susceptibilité, diverge lorsque $\beta \rightarrow \beta_c - 0$

$$\beta \rightarrow \beta_c - 0 \quad M \sim \chi h \quad \chi \sim \frac{1}{1 - \beta/\beta_c} \quad (13a)$$

soit

$$\chi \sim (1 - \beta/\beta_c)^{-\gamma} \quad \gamma_{\text{champ moyen}} = 1 \quad (13b)$$

L'exposant critique γ vaut $7/4$ pour le modèle bidimensionnel.

Il existe une façon de retrouver ces résultats qui fait appel au principe de minimisation de l'énergie libre $-\ln Z/\beta\Omega$, où Ω est le volume total. Ce principe exprime que la fonction exponentielle est convexe

$$\langle \exp A \rangle \geq \exp \langle A \rangle \quad (14)$$

Appliquons cette inégalité en prenant pour les facteurs de Boltzmann une expression factorisée, la seule pour laquelle on sache faire un calcul explicite exact. Hélas on en est souvent réduit à chercher ses clefs dans la zone éclairée par le réverbère! Pour N sites, écrivons la fonction de partition

$$Z = \frac{1}{2^N} \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp \left(\beta \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j + h \sum_i \sigma_i \right) = Z_H \left\{ Z_H^{-1} \frac{1}{2^N} \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp \left((H + h) \sum_i \sigma_i + A \right) \right\} \quad (15a)$$

avec

$$Z_H = \frac{1}{2^N} \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp \left[(H + h) \sum_i \sigma_i \right] = [\cosh(H + h)]^N \quad (15b)$$

et

$$A = \beta \sum_{(ij)} \sigma_i \sigma_j - H \sum_i \sigma_i \quad (15c)$$

En d'autres termes nous avons ajouté et soustrait $H \sum_i \sigma_i$ et présenté la fonction de partition comme le produit de Z_H , aisé à calculer, par une valeur moyenne sur une mesure factorisée. Celle-ci ne peut être obtenue exactement, mais en appliquant l'inégalité (14), il vient

$$F = \frac{1}{N} \ln Z \geq \text{Sup}_H \left\{ \ln \cosh(h + H) + \frac{1}{N} \langle A \rangle_H \right\} \quad (16)$$

où nous avons mis à profit le caractère a priori arbitraire de H pour majorer le second membre, et où bien entendu $\langle \dots \rangle_H$ représente la moyenne calculée avec la mesure factorisée. En passant à la limite thermodynamique, N tend vers l'infini, on a

$$M = \langle \sigma_i \rangle_H = \tanh(H + h) \quad (17)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle A \rangle_H = \beta d \tanh^2(H + h) - H \tanh(H + h)$$

de sorte que l'énergie libre est supérieure ou égale au maximum d'une fonction d'essai $\mathcal{F}(H, h; \beta)$ telle que

$$F \geq \text{Sup}_H \mathcal{F}(H, h; \beta)$$

$$\mathcal{F}(H, h; \beta) = \ln \cosh(h + H) + \beta d \tanh^2(H + h) - H \tanh(H + h) \quad (18)$$

En identifiant $\tanh(H + h)$ et l'aimantation M , l'interprétation de la relation (18) est évidente : le terme $\beta d \tanh^2(H + h) + h \tanh(H + h) = \beta d M^2 + h M$ constitue la contribution énergétique, et la partie restante

$$\begin{aligned} & \ln \cosh(H+h) - (H+h) \tanh(H+h) = \\ & = -\ln 2 - \left[\frac{1}{2}(1+M) \ln \frac{1}{2}(1+M) + \frac{1}{2}(1-M) \ln \frac{1}{2}(1-M) \right] \end{aligned}$$

la contribution entropique (le terme en $-\ln 2$ provient de notre normalisation de Z). On peut donc écrire encore

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(H, h; \beta) &= -V(M, \beta) + hM & (19) \\ V(M, \beta) &= -\beta d M^2 + \frac{1}{2}(1+M) \ln \frac{1}{2}(1+M) + \frac{1}{2}(1-M) \ln \frac{1}{2}(1-M) + \ln 2 \end{aligned}$$

et il s'agit de minimiser $V(M, \beta) - hM$. Qu'on utilise (18) ou sa transformée de Legendre (19), l'équation de l'extremum est encore

$$H = 2\beta d \tanh(H+h) \quad (20)$$

c'est-à-dire l'équation de champ moyen (8) que nous avons déjà obtenue, mais comme nous avons maintenant un principe variationnel, nous pouvons distinguer les différentes solutions. Or le tracé de $V(M, \beta)$ représenté sur la figure 2 fait apparaître que, en l'absence de champ extérieur, il y a un minimum à $M = 0$ pour $\beta < \beta_c = 1/2d$ résultant de la prédominance de l'entropie sur l'énergie, tandis qu'à basse température ($\beta > \beta_c$), deux minima symétriques apparaissent de part et d'autre de l'origine. Un champ $h = 0$, même infiniment petit, suffit à briser la symétrie de cette courbe, et permet de distinguer l'un d'entre eux comme étant le minimum absolu : M est alors de même signe que h . A $\beta = \beta_c$ la courbe $V(M)$ a un minimum très plat à l'origine. Le développement de $V(M)$ au voisinage de l'origine est

$$V(M, \beta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta}{\beta_c} \right) M^2 + \frac{1}{12} M^4 + \dots \quad (21)$$

et l'allure indiquée résulte de l'annulation (linéaire) du coefficient du terme quadratique au passage de la température critique tandis que le terme quartique a un coefficient positif. Pour $h = 0$ la valeur de V au minimum est donc 0 lorsque $\beta < \beta_c$, et différente de zéro lorsque $\beta > \beta_c$. Pour β tend vers $\beta_c + 0$ cette valeur est

$$\beta > \beta_c \quad V_{\min} = -\frac{3}{4} \left(\frac{\beta}{\beta_c} - 1 \right)^2 \quad \beta < \beta_c \quad V_{\min} = 0 \quad (22)$$

c'est-à-dire que la chaleur spécifique c , dérivée seconde de V_{\min} par rapport à β est discontinue au passage de β_c , passant de la valeur zéro à une valeur

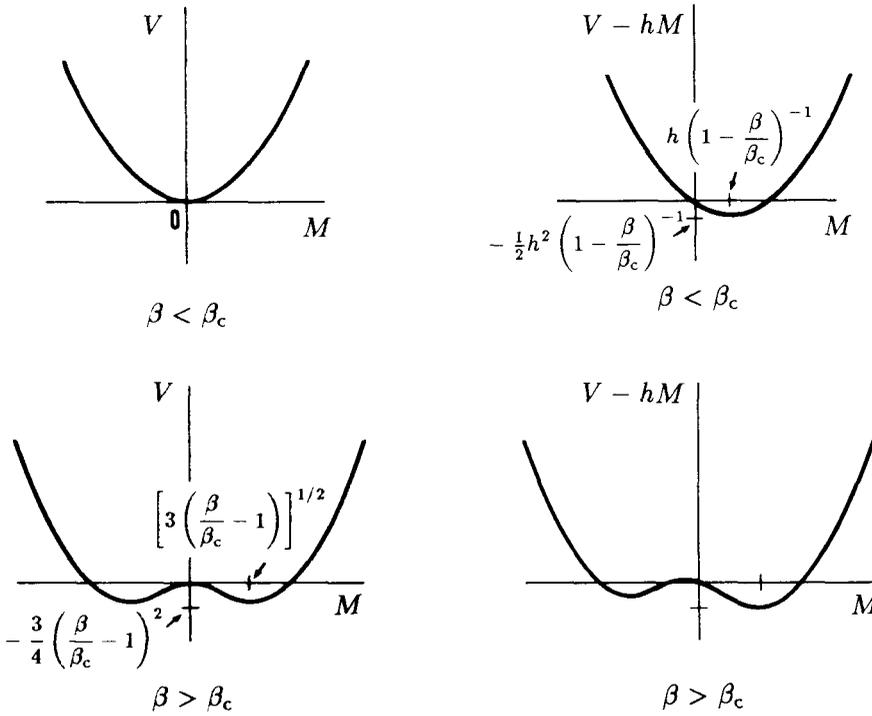


Figure 2 : Minimisation de l'énergie libre (a) en l'absence de champ extérieur (b) en présence de champ extérieur.

finie. Si l'on veut attribuer un exposant critique α à ce comportement au voisinage de β_c on peut convenir que $\alpha = 0$. On se souvient que α vaut aussi zéro dans le cas bidimensionnel, mais au lieu d'une discontinuité nous trouvons alors une singularité logarithmique.

Le raisonnement employé ci-dessus dans le cas d'un système d'Ising à symétrie Z_2 est généralisable à des modèles présentant d'autres groupes de symétrie. En général le groupe aura des sous groupes non triviaux, et la nature des phases ordonnées dépendra du type possible de symétrie résiduelle, dictée par la covariance du paramètre d'ordre. Ajoutons simplement que progresser dans la discussion correspondante requiert généralement une certaine intuition physique.

1.3 Groupe continu d'invariance

Une brisure spontanée de symétrie dans le cas d'un groupe continu d'invariance donne lieu à un phénomène particulièrement intéressant dans la phase de basse température: l'existence de modes "mous" (Goldstone 1961). Etudions le cas simple d'un modèle à symétrie $O(n)$, en prenant

comme variable dynamique un champ vectoriel φ à n composantes, de longueur fixée à l'unité par convention, $\varphi^2 = 1$. On pourrait concevoir bien d'autres exemples incluant des champs tensoriels de divers types. On aura l'occasion de discuter plus loin des modèles mettant en jeu des transformations unitaires.

Nous avons déjà rencontré le modèle à symétrie $O(n)$ au chapitre I. Rappelons l'intégrale introduite en (I.125) ($H \equiv |\mathbf{H}|$)

$$\begin{aligned} \exp n u_n(H) &= \int \frac{d^n \varphi}{S_n} 2\delta(\varphi^2 - 1) \exp n \mathbf{H} \cdot \varphi \\ &= \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \left(\frac{2}{nH}\right)^{n/2-1} I_{n/2-1}(nH) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4} n^2 H^2\right)^k \frac{1}{k!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n)}{\Gamma(\frac{1}{2}n + k)} \end{aligned} \quad (23)$$

qui généralise l'expression $N^{-1} \ln Z_H$ apparaissant dans les équations (15) et qui se réduit pour $n = 1$ à $u_1(H) = \ln \cosh H$. En général lorsque H est petit on a le développement

$$u_n(H) = \frac{1}{2} H^2 - \frac{n}{4(n+2)} H^4 + \dots \quad (24)$$

Si on écrit la fonction de partition sous la forme

$$Z = \int \prod_i \left\{ \frac{d^n \varphi_i}{S_n} 2\delta(\varphi_i^2 - 1) \right\} \exp n \left\{ \beta \sum_{(i,j)} \varphi_i \cdot \varphi_j + \sum_i \mathbf{h} \cdot \varphi_i \right\} \quad (25)$$

qui constitue une généralisation directe du modèle d'Ising (correspondant à $n = 1$), l'approximation de champ moyen conduit à

$$\begin{aligned} F &\geq \sup_{\mathbf{H}} n \mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{h}; \beta) \\ \mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{h}; \beta) &= u(\mathbf{H} + \mathbf{h}) + \beta d [\nabla u(\mathbf{H} + \mathbf{h})]^2 - \mathbf{H} \cdot \nabla u(\mathbf{H} + \mathbf{h}) \end{aligned} \quad (26)$$

L'opérateur gradient ∇ ci-dessus s'applique à l'argument de la fonction u , et non à une dépendance spatiale. Le champ extérieur \mathbf{h} et le champ moyen \mathbf{H} sont tous les deux supposés uniformes, comme le suggère l'invariance par translation de l'action dans l'équation (25). Qualitativement on obtient semble-t-il les mêmes résultats que précédemment. Posant

$$\mathbf{M} = \nabla u(\mathbf{H} + \mathbf{h}) = \langle \varphi \rangle \quad (27)$$

on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{h}; \beta) &= -V(\mathbf{M}) + \mathbf{h} \cdot \mathbf{M} \\ V(\mathbf{M}) &= \frac{1}{2}(1 - 2d\beta)\mathbf{M}^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{n+2} (\mathbf{M}^2)^2 + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

Il y a une transition à $\beta_c = 1/2d$ comme pour $n = 1$, et l'apparition d'une aimantation spontanée pour $\beta > \beta_c$. Les exposants critiques sont les mêmes que ceux trouvés dans le cas d'une symétrie discrète. En particulier la chaleur spécifique est discontinue à la transition, dans cette approximation.

Cependant il faut noter une différence essentielle. Dans la phase ordonnée de basse température il reste un sous groupe d'invariance $O(n-1)$ correspondant aux rotations qui laissent le paramètre d'ordre invariant. De plus la dégénérescence des états purs est continue puisqu'elle correspond aux transformations de $O(n)$ modulo $O(n-1)$, dont l'ensemble forme la sphère de l'espace à n dimensions. Etudions la réponse du système à un champ extérieur, lorsque celui-ci possède une faible dépendance spatiale, de la forme $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1 \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i$. La valeur moyenne \mathbf{h}_0 , supposée faible, détermine la direction de l'aimantation spontanée si nous supposons $\beta > \beta_c$. Le tenseur de susceptibilité, défini comme le coefficient de proportionnalité à \mathbf{h}_1 de l'aimantation supplémentaire induite par cet accroissement très faible du champ, est très différent selon que \mathbf{h}_1 est parallèle à \mathbf{h}_0 , ou prend l'une des $(n-1)$ directions transversales. Dans ce dernier cas, le "coût" en énergie libre tend vers zéro lorsque $\mathbf{k} \rightarrow 0$ (longueur d'onde infinie) comme \mathbf{k}^2 , la force de rappel s'annulant à cette limite, puisqu'elle correspond à faire tourner en bloc l'aimantation vers un état dégénéré avec le précédent. C'est le phénomène de Goldstone correspondant à l'existence de $n-1$ modes mous dans la phase ordonnée. La contribution à l'entropie de ces derniers devra être étudiée à un stade ultérieur : elle peut conduire à un mécanisme déstabilisant. Dans le modèle σ proprement dit le groupe qui intervient est $O(4)$, groupe isomorphe à $SU(2) \times SU(2)/Z_2$ (produit direct de deux groupes unitaires unimodulaires à deux dimensions, à un changement de signe global des éléments près) et les trois modes mous indépendants correspondent aux trois mésons π . Pour être explicite, reprenons la minoration de $\ln Z$ en présence du champ extérieur de la forme indiquée ci-dessus, soit

$$\frac{\ln Z}{n} \geq - \inf_{\{\mathbf{M}_i\}} \left[\sum_i V(\mathbf{M}_i) - \frac{\beta}{2} \sum_i \mathbf{M}_i \cdot \sum_{j(i)} (\mathbf{M}_j - \mathbf{M}_i) - \sum_i \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{M}_i \right] \quad (29)$$

Le carré de l'aimantation spontanée \mathbf{M}_s , au voisinage de la transition et en champ \mathbf{h} nul, est donné par $((n+2)/n)(\beta/\beta_c - 1)$. Ainsi

$$V(\mathbf{M}) = \frac{1}{4} \frac{n}{n+2} \left[(\mathbf{M}^2 - \mathbf{M}_s^2)^2 - (\mathbf{M}_s^2)^2 \right] + \dots \quad (30)$$

$$\mathbf{M}_s^2 = \frac{n+2}{n} (\beta/\beta_c - 1)$$

Le champ infinitésimal \mathbf{h}_0 distingue une direction d'aimantation spontanée \mathbf{M}_s , et pour \mathbf{h}_1 infinitésimal nous permet d'écrire

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{M}_s + \delta\mathbf{M}_i \quad (31)$$

avec la condition de minimisation écrite au premier ordre en $\delta\mathbf{M}_i$ et \mathbf{h}_1 ,

$$\frac{2n}{n+2} \mathbf{M}_s (\mathbf{M}_s \cdot \delta\mathbf{M}_i) - \beta \sum_{j(i)} (\delta\mathbf{M}_j - \delta\mathbf{M}_i) = \mathbf{h}_1 \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i \quad (32)$$

Cherchant une solution sous forme d'une onde plane

$$\delta\mathbf{M}_i = \text{Re} \mathbf{A} \exp i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i \quad (33)$$

il vient

$$\frac{2n}{n+2} \mathbf{M}_s (\mathbf{M}_s \cdot \mathbf{A}) + 2\beta \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos ak_\mu) \mathbf{A} = \mathbf{h}_1 \quad (34a)$$

c'est-à-dire pour ak_μ petit (a maille du réseau), à la limite des grandes longueurs d'onde

$$\frac{2n}{n+2} \mathbf{M}_s (\mathbf{M}_s \cdot \mathbf{A}) + \beta a^2 \mathbf{k}^2 \mathbf{A} = \mathbf{h}_1 \quad (34b)$$

Séparons \mathbf{h}_1 et \mathbf{A} en composantes longitudinale et transverses par rapport à \mathbf{M}_s

$$\mathbf{A}^\perp = \frac{\mathbf{h}_1^\perp}{\beta a^2 \mathbf{k}^2} \quad \mathbf{A}^\parallel = \frac{\mathbf{h}_1^\parallel}{\beta a^2 \left(\mathbf{k}^2 + \frac{2n}{n+2} \frac{\mathbf{M}_s^2}{\beta a^2} \right)} \quad (35)$$

expressions dans lesquelles on peut sans inconvénient remplacer β par β_c . A la limite $\mathbf{k} = 0$, on observe une divergence infrarouge : l'amplitude de la réponse transversale diverge, signal typique d'une masse nulle. Celle de la réponse longitudinale reste finie, avec une masse proportionnelle à la polarisation spontanée. Le nombre de modes mous est égal à celui des composantes transverses, $n - 1$; on les appelle aussi "ondes de spin".

La conclusion de cette analyse est la suivante. Dans la phase de basse température où se manifeste une brisure spontanée d'une symétrie correspondant à un groupe continu d'invariance, il existe des modes d'excitation de masse nulle. Leur dynamique effective doit être étudiée en détail. Les divergences infrarouges sont de plus en plus accentuées, au fur et à mesure que la dimensionalité décroît. Nous verrons que les modes de Goldstone sont à l'origine de l'absence de phase ordonnée en deux dimensions.

Bien que très schématique, l'approximation de champ moyen dévoile de nombreux comportements intéressants, sans faire appel à des méthodes mathématiques complexes. Nous en étudierons quelques corrections à la fin de ce chapitre. Auparavant nous allons présenter une autre façon d'aborder le problème, particulièrement utile dans le cas de variables discrètes.

1.4 L'approximation de Bethe

L'approximation de Bethe donne une vision légèrement différente de la théorie du champ moyen auto-cohérent. Nous n'exposerons ici que la version la plus rudimentaire appliquée au modèle d'Ising. Sa qualité principale n'est pas de permettre un calcul plus correct des exposants critiques, mais d'obtenir la position des singularités avec davantage de précision.

L'idée est de décomposer le système en un ensemble de petits sous-systèmes indépendants soumis à un champ effectif. La condition d'autocoherence consiste à imposer l'égalité de l'aimantation, calculée de plusieurs façons différentes. Dans le cas le plus simple, supposons que ces sous-systèmes ne contiennent que deux sites voisins. Si N est le nombre de sites, il y a Nd telles paires. Soit H_2 le champ effectif agissant sur eux; H_2 rend compte de l'action du champ extérieur h et de l'effet des autres interactions. Notant $\tau = \tanh \beta = e^{-2\beta}$, la fonction de partition à deux sites est proportionnelle à

$$z_2 = 1 + 2\tau\rho_2 + \rho_2^2 \quad \rho_2 = e^{-2H_2} \quad (36a)$$

tandis que la fonction de partition d'un spin unique soumis à un autre champ effectif H_1 est

$$z_1 = 1 + \rho_1 \quad \rho_1 = e^{-2H_1} \quad (36b)$$

L'approximation revient à écrire

$$Z = \left[\frac{1}{2} \exp(\beta d + h) \right]^N \frac{z_2^{Nd}}{z_1^{N(2d-1)}} \equiv z_B^N \quad (37)$$

L'expression (37) tient compte du fait que dans le produit $(z_2)^{Nd}$ chaque lien est bien compté une fois mais chaque site est compté $2Nd$ fois au lieu de N fois, d'où la présence de $z_1^{N(2d-1)}$ au dénominateur. Pour déterminer H_2 et H_1 nous imposons l'égalité de l'aimantation dans le système entier et

ses sous systèmes. Tenant compte du fait qu'il y a deux sites pour z_2 et un seul pour z_1 , ceci conduit aux deux équations

$$\begin{aligned} M &= \frac{\partial}{\partial h} \ln z_B(h, \beta) \\ &= 1 - \rho_2 \frac{\partial}{\partial \rho_2} \ln z_2(\rho_2, \tau) = 1 - 2\rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} \ln z_1(\rho_1) \end{aligned} \quad (38a)$$

La dernière équation fournit

$$z_2 = (1 + \rho_2 \tau) z_1 \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\tau + \rho_2}{1 + \tau \rho_2} \quad (38b)$$

et, en supposant que ρ_1 et ρ_2 sont des fonctions de h et τ ,

$$\rho_2 = e^{-2h} \left(\frac{\tau + \rho_2}{1 + \tau \rho_2} \right)^{2d-1} \quad (38c)$$

Ainsi

$$z_B = \frac{1}{2} e^{h+d\beta} (1 + \rho_2 \tau)^{2d-1} (1 + 2\rho_2 \tau + \rho_2^2)^{1-d} \quad (39)$$

L'équation (38c) détermine ρ_2 implicitement en fonction de h et $\tau = e^{-2\beta}$. Dans cette résolution apparaît la singularité critique. Pour le voir il est commode de remplacer la variable ρ_2 par l'expression

$$p = \frac{\rho_2 + \tau}{1 + \rho_2 \tau} \quad (40)$$

L'équation (38c) prend alors la forme

$$\tau = e^{-2\beta} = \frac{p^{1-d} e^h - p^{d-1} e^{-h}}{p^{-d} e^h - p^d e^{-h}} \quad (41)$$

invariante dans le changement $h \leftrightarrow -h, p \leftrightarrow p^{-1}$. En l'absence de champ extérieur, la branche $p(\beta) \sim e^{-2\beta}$ cessera d'être uniforme lorsqu'on atteindra une valeur critique β_c vérifiant

$$e^{-2\beta_c} = 1 - d^{-1}, \quad 2d\beta_c = 1 + \frac{1}{2d} + \frac{1}{3d^2} + \frac{1}{4d^3} + \dots \quad (42)$$

L'approximation prévoit une transition pour tout $d > 1$ avec $\beta_c(d) \rightarrow \infty$ lorsque $d \rightarrow 1$! Au mieux cependant nous savons qu'elle ne peut avoir de validité que lorsque le nombre de coordination $d \rightarrow \infty$. En fait la correction en $1/2d$ à $2d\beta_c$ est exacte. Dans la table suivante, on compare les prédictions obtenues par $\tanh \beta_c$, à l'approximation de Bethe, avec les valeurs exactes

dimension	Approximation de Bethe	Valeur exacte
1	1	1
2	$1/3 = 0.33333\dots$	$\sqrt{2} - 1 = 0.41421\dots$
3	$1/5 = 0.2$	0.218096(3)
4	$1/7 = 0.14286\dots$	
$d \rightarrow \infty$	$1/(2d - 1)$	$1/(2d - 1)$

Table I : Valeurs de $\tanh \beta_c$ pour le modèle d'Ising sur un réseau cubique en dimension d .

(en dimension 3 la valeur n'est connue qu'approximativement, à quelques 10^{-6} près).

L'approximation, pour grossière qu'elle soit, donne une idée très satisfaisante de l'emplacement de β_c pour des valeurs de d même modérées. Le résultat peut être amélioré en utilisant des sous-systèmes plus grands. Dans le cas d'un autre réseau, on peut l'appliquer en substituant à $2d$ le nombre de coordination q .

Lorsque $\beta < \beta_c$, $h = 0$, la solution appropriée de (38) est $p = \rho_2 = 1$ de sorte que

$$\beta < \beta_c \quad z_B = \frac{1}{2} e^{d\beta} (1 + e^{-2\beta})^d 2^{1-d} = (\cosh \beta)^d \quad (43)$$

ce qui n'est guère surprenant. Lorsque $\beta > \beta_c$ il apparaît une aimantation spontanée donnée par

$$M = \frac{1 - p^2}{1 - 2\tau p + p^2} \quad (44)$$

et lorsque $\beta \rightarrow \beta_c + 0$

$$M^2 \sim \frac{2d}{2d-1} 3 \left(\frac{\beta}{\beta_c} - 1 \right) \quad (45)$$

en accord avec la valeur obtenue en (11) dans l'approximation du champ moyen pour $d \rightarrow \infty$. En ce qui concerne l'énergie libre, le logarithme de z_B , on établit sans peine que, en posant $p = e^{-u}$, on a pour $\beta > \beta_c$

$$z_B = \left[\cosh \beta (1 - e^{-2\beta}) \frac{\sinh du}{\sinh u} \right]^d (\cosh du)^{1-d}$$

$$e^{-2\beta} = \frac{\sinh(d-1)u}{\sinh du}, \quad u^2 = \frac{12}{2d-1} (\beta - \beta_c) + \dots \quad (46)$$

de sorte que, au voisinage de la température critique,

$$\beta > \beta_c \quad z_B / (\cosh \beta)^d = 1 + O((\beta - \beta_c)^2) \quad (47)$$

L'approximation de Bethe reproduit une transition du second ordre – énergie libre et énergie interne continues – avec une discontinuité de la chaleur spécifique, comme on l'a vu par la méthode du champ moyen.

Calculer la discontinuité de la chaleur spécifique. La comparer à la valeur prédite par l'approximation du champ moyen

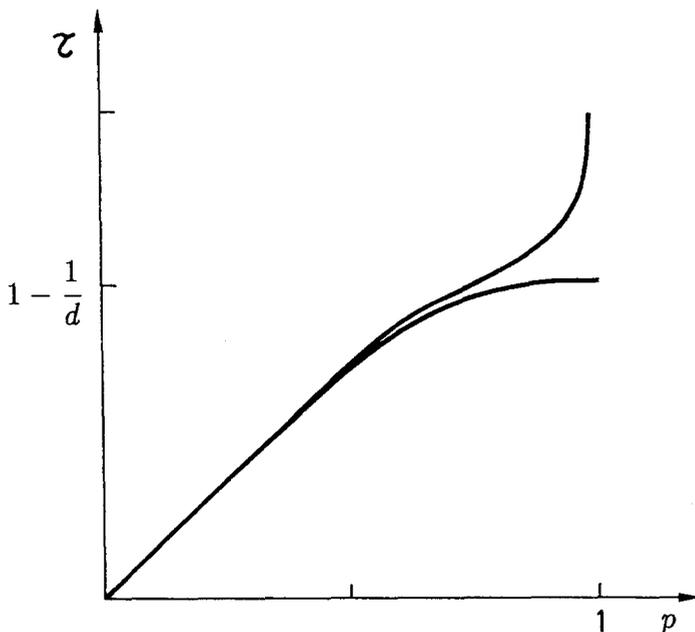


Figure 3: Approximation de Bethe. Représentation de τ en fonction de p pour h égal ou différent de zéro. On a supposé la dimension d égale à 3.

Insistons encore sur un point. En présence d'un champ extérieur non nul, par exemple $h > 0$, l'inversion de (41) dans le domaine $0 < \tau < 1$ est unique. Il n'y a pas de singularité dans les quantités thermodynamiques. La brisure de symétrie induite par h dans le cas discret donne une portée finie aux corrélations. Sur la figure 3 nous représentons l'allure de la courbe $\tau(p)$ suivant la présence ou l'absence de champ extérieur, dans le cas $d = 3$.

On peut se demander ce qu'il advient de la singularité critique pour $h = 0$. Pour $\beta < \beta_c$ et $h = 0$, il y a bifurcation et l'on trouve deux singularités complexes conjuguées sur l'axe h imaginaire pur. En cherchant les points où la solution $p(\beta, h)$ de (41) devient multivaluée en h , on voit

que pour $\beta < \beta_c$ réel ils correspondent à h imaginaire pur (et p une phase) à partir des points $\pm ih_c$. Lorsque $\tau = e^{-2\beta} \rightarrow \tau_c$, on trouve

$$h_c \sim a \left(\frac{\tau}{\tau_c} - 1 \right)^{3/2} \quad a = \frac{2}{3} \left(\frac{\tau_c}{1 - \tau_c} \right) \left(\frac{2}{1 - \tau_c^2} \right)^{1/2} \quad (48)$$

En l'un des points $\pm ih_c$, la partie singulière de l'énergie libre a un point de branchement d'ordre $3/2$, avec une partie singulière du type

$$f_{\text{sing.}} \sim \text{cst}(h \mp ih_c)^{3/2} \quad (49)$$

Ce phénomène n'est en fait pas artificiel, ou dû à l'approximation, mais correspond à une singularité découverte par Lee et Yang que nous discuterons plus loin.

1.5 Exposants critiques

Il est temps de tirer la leçon de ces premières approximations. Nous sommes intéressés par le voisinage du ou des points critiques où vont se développer des corrélations à grande portée, correspondant à la divergence de la susceptibilité. A l'échelle de ces corrélations la structure discontinue du réseau pourra être oubliée comme nous l'avons vérifié au chapitre précédent dans le cas du modèle d'Ising pour $d = 2$. Les idées du champ moyen nous amènent à minimiser une énergie libre d'essai $V(\mathbf{M}) - \mathbf{h} \cdot \mathbf{M}$, fonction d'une aimantation moyenne qui joue le rôle de paramètre d'ordre, d'un champ extérieur \mathbf{h} couplé linéairement à cette aimantation, et d'autres paramètres comme la température. Dans un modèle à symétrie $O(n)$ par exemple, on a vu qu'il s'agissait d'une expression de la forme

$$V(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}(1 - 2d\beta)\mathbf{M}^2 + \frac{1}{4} \frac{n}{n+2} (\mathbf{M}^2)^2 + \dots$$

Ce qui est important c'est que $V(\mathbf{M})$ conserve l'invariance $O(n)$ bien que \mathbf{M} n'ait plus de raison d'être un vecteur de longueur unité comme l'étaient les variables dans la fonction de partition. Nous reconnaissons la partie potentielle d'un lagrangien dont les variables dynamiques seraient \mathbf{M} , en auto interaction. En théorie des champs, dans la limite dite classique, si on néglige les contributions du terme cinétique associées à une éventuelle inhomogénéité spatiale de $\mathbf{M}(\mathbf{x})$, l'étude de l'état fondamental se ramène, comme ici, à la minimisation du potentiel. Le terme quadratique a un coefficient qui s'identifie à une masse au carré. La nouveauté est qu'ici ce coefficient peut changer de signe, en s'annulant au point critique. Aussi le noterons-nous θ . De même nous poserons $g = n/(n+2)$ en préparant l'éventualité d'une

situation plus générale. Enfin nous négligeons provisoirement les termes de degré plus élevé et nous écrivons

$$V(\mathbf{M}) = \frac{1}{2}\theta\mathbf{M}^2 + \frac{1}{4}g(\mathbf{M}^2)^2 \quad (50)$$

Résumons alors les étapes qui dans les différentes versions du champ moyen conduisent toutes aux mêmes prédictions sur le comportement au voisinage de $\theta = 0$, caractérisé par les exposants critiques, dont la nomenclature est devenue canonique. La minimisation de $V(\mathbf{M}) - \mathbf{h} \cdot \mathbf{M}$ fournit la condition

$$\nabla_{\mathbf{M}}V(\mathbf{M}) \equiv \mathbf{M}(\theta + g\mathbf{M}^2) = \mathbf{h} \quad (51)$$

(i) En l'absence de champ extérieur la solution de cette équation est

$$\begin{array}{lll} \theta > 0 & \mathbf{M} = 0 & V_{\min} = 0 \\ \theta < 0 & \mathbf{M}_s^2 = -\theta/g & V_{\min} = -\frac{1}{4}\theta^2/g \end{array} \quad (52)$$

La distinction $\theta > 0$, $\theta < 0$, correspond à haute et basse température. La chaleur spécifique, proportionnelle à $\partial^2 V_{\min}/\partial\theta^2$, est discontinue. Comme on pose généralement

$$C(\theta) \underset{\theta \rightarrow \pm 0}{\sim} C_{\pm} |\theta|^{\alpha_{\pm}} \quad (53a)$$

on conviendra que dans le cas où il y a discontinuité,

$$\alpha = \alpha_{\pm} = 0 \quad (53b)$$

(ii) Pour $\theta < 0$ nous trouvons une aimantation spontanée $\mathbf{M}_s^2 = -\theta/g$. Ainsi

$$\theta < 0 \quad |\mathbf{M}_s| \sim (-\theta)^{\beta} \quad \beta = \frac{1}{2} \quad (54)$$

(iii) Dans la phase de haute température, en présence d'un champ très petit, $\mathbf{M}(\mathbf{h})$ varie linéairement avec \mathbf{h} , $\mathbf{M}(\mathbf{h}) \sim \mathbf{h}/\theta$. Sa dérivée, la susceptibilité χ , diverge pour $\theta \rightarrow 0$ selon

$$\theta > 0 \quad \chi \sim \chi_+ \theta^{-\gamma_+} \quad \gamma_+ = 1 \quad (55)$$

Dans la phase de basse température, on a vu qu'il faut distinguer réponse longitudinale ou transverse selon l'orientation de \mathbf{h} par rapport à la direction de l'aimantation spontanée. En posant, sous forme tensorielle,

$$d\mathbf{h}_a = (\chi^{-1})_{ab} d\mathbf{M}_b = [(\theta + 3g\mathbf{M}^2)\delta_{ab} + 2g(\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b - \mathbf{M}^2\delta_{ab})] d\mathbf{M}_b$$

on voit que pour $\theta > 0$ on retrouve le résultat (55) mais que pour $\theta < 0$ et $\mathbf{M}^2 = -\theta/g$, on a

$$(\chi^{-1})_{ab} \sim -2\theta \frac{\mathbf{M}_{sa}\mathbf{M}_{sb}}{\mathbf{M}_s^2}$$

Donc perpendiculairement à l'aimantation spontanée χ^{-1} est strictement nul. C'est le phénomène de Goldstone. Tandis que parallèlement

$$\begin{aligned} \chi^{\parallel} &\sim \frac{1}{2} \frac{1}{(-\theta)} \\ \theta < 0 \quad \chi^{\parallel} &\sim \chi_{-}(-\theta)^{-\gamma_{-}}, \quad \gamma_{-} = 1 \\ \chi_{+}/\chi_{-} &= 2 \end{aligned} \quad (56)$$

(iv) Au point de transition $\theta = 0$, le champ extérieur est proportionnel au cube de l'aimantation. Autrement dit le système réagit à une sollicitation extérieure de manière plus brutale que lorsque $\theta > 0$. Ceci traduit le passage à un état ordonné. On note

$$|\mathbf{M}| \sim |\mathbf{h}|^{1/\delta} \quad \delta = 3 \quad (57)$$

(v) En présence d'un champ extérieur spatialement variable, la fonction S à minimiser doit tenir compte du terme cinétique. Pour simplifier, supposons $n = 1$ (les formules qui suivent restent néanmoins valables dans le cas $n > 1$ pour la composante longitudinale). Elle s'écrit

$$S = \sum_i \left\{ -\frac{1}{2} M_i \sum_{j(i)} (M_j - M_i) + V(M_i) - h_i M_i \right\} \quad (58)$$

D'où

$$-\sum_{j(i)} (M_j - M_i) + (\theta + gM_i^2)M_i = h_i \quad (59)$$

Ceci conduit pour $\theta > 0$ à

$$M_i = \sum_j \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}}{\theta + \sum_{\mu} 2(1 - \cos k_{\mu})} h_j + O(gh^3) \quad (60)$$

A grande distance $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \rightarrow \infty$, et pour h tendant vers 0, il vient

$$\begin{aligned} \langle M_i M_j \rangle &= \frac{\delta M_i}{\delta h_j} \Big|_{h=0} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}}{\theta + \sum_{\mu} 2(1 - \cos k_{\mu})} \\ &\underset{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\theta^{(d-2)/2}}{2(2\pi\theta^{1/2} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)^{(d-1)/2}} \exp\left(-\theta^{1/2} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|\right) \end{aligned} \quad (61)$$

Le coefficient de la décroissance exponentielle, écrite sous la forme $\exp[-|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|/\xi]$, définit la longueur de corrélation ξ , qui présente donc au point critique la divergence

$$\theta \rightarrow +0 \quad \xi \sim \theta^{-\nu} \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (62)$$

Pour θ petit mais négatif, M_i oscille autour de l'aimantation spontanée M_s , au lieu d'osciller autour de zéro

$$M_i = M_s + \sum_j \left. \frac{\delta M_i}{\delta h_j} \right|_{h=0} h_j + \dots$$

$$\theta < 0, \quad \left. \frac{\delta M_i}{\delta h_j} \right|_{h=0} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}}{-2\theta + \sum_\mu 2(1 - \cos k_\mu)} \quad (63)$$

Pour $\theta \rightarrow -0$ la longueur de corrélation se comporte comme $(-2\theta)^{-1/2}$ et l'exposant ν de la divergence demeure 1/2 comme au-dessus de la température critique.

Pour un modèle à symétrie $O(n)$ ceci reste vrai pour le mode longitudinal. Nous avons vu que les modes transverses ont au-dessous de la température critique une longueur de corrélation infinie.

(vi) A $\theta = 0$ la formule (61) se réduit à

$$\left. \frac{\delta M_i}{\delta h_j} \right|_{h=0} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}}{\sum_\mu 2(1 - \cos k_\mu)} \quad (64)$$

$$\underset{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(d/2 - 1)}{4\pi^{d/2} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^{d-2}}$$

Cette expression généralise en dimension d le potentiel Coulombien. Bien entendu la discussion qui précède suppose d suffisamment grand. En comparant (61) et (64), on voit que la puissance à laquelle intervient $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ au dénominateur n'est pas le même (sauf si $d = 3$). Si l'on pose, pour définir l'exposant η

$$\theta = 0 \quad \left. \frac{\delta M_i}{\delta h_j} \right|_{h=0} = \langle M_i M_j \rangle \underset{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\text{cst}}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^{d-2+\eta}} \quad (65a)$$

la valeur de η prédite par le champ moyen est

$$\eta = 0 \quad (65b)$$

(vii) Revenons à une situation homogène, en présence d'un champ extérieur uniforme, et pour simplifier posons encore $n = 1$. Dans ce cas

la solution de l'équation de minimisation (51) devient ambiguë lorsque sa dérivée par rapport à M s'annule aussi, c'est-à-dire lorsque

$$\begin{aligned}\theta M + gM^3 &= h \\ \theta + 3gM^2 &= 0\end{aligned}\quad (66)$$

Pour trouver une solution en M , on doit écrire que le discriminant s'annule

$$4\theta^3 + 27gh^2 = 0 \quad (67)$$

Les solutions réelles avec $\theta < 0$ sont à rejeter car elles ignorent l'existence de la brisure spontanée de symétrie ($g > 0$). Pour $\theta > 0$ nous trouvons deux singularités complexes conjuguées imaginaires pures dans le plan h , aux points $h = \pm ih_c$

$$h_c = \left(\frac{4}{27g} \right)^{1/2} \theta^{3/2} \quad (68)$$

C'est la singularité de Lee et Yang déjà rencontrée au paragraphe précédent. Si on pose, pour θ positif

$$h_c \sim \theta^\Delta \quad (69a)$$

l'exposant prédit par la théorie de champ moyen est

$$\Delta = \frac{3}{2} \quad (69b)$$

Finalement, au voisinage du point

$$h_0 = \pm ih_c \quad M_0 = \pm iM_c \quad M_c = \frac{3}{2} \frac{h_c}{\theta} = \frac{3}{2} \theta^{1/2}$$

la singularité de l'énergie libre est comme précédemment en

$$V(M) - V(M_0) - h(M - M_0) \approx \left[\frac{4}{27gM_0} (h - h_0) \right]^{3/2} - M_0(h - h_0) \quad (70)$$

La partie singulière est de la forme

$$(h - h_0)^{1+\sigma} \quad (71a)$$

l'exposant σ ci-dessus défini valant à l'approximation du champ moyen

$$\sigma = \frac{1}{2} \quad (71b)$$

	Modèle d'Ising $d = 2$	Champ moyen $d \rightarrow \infty$	Modèle sphérique ($n \rightarrow \infty$) $4 > d > 2$
Chaleur spécifique $C \sim C_{\pm} \theta ^{-\alpha_{\pm}}$	$\alpha = 0^{(*)}$	$\alpha = 0^{(**)}$	$\alpha = \left(\frac{d-4}{d-2}\right)$
Aimantation spontanée $\theta < 0 \quad M_{sp} \sim (-\theta)^{\beta}$	$\beta = \frac{1}{8}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\beta = \frac{1}{2}$
Susceptibilité $\chi \sim \theta ^{-\gamma_{\pm}}$	$\gamma = \frac{7}{4}$	$\gamma = 1$	$\gamma = \frac{2}{d-2}$
Aimantation à $\theta = 0$ $M \sim h^{1/\delta}$	$\delta = 15$	$\delta = 3$	$\delta = \frac{d+2}{d-2}$
Longueur de corrélation $\xi \sim \theta ^{-\nu_{\pm}}$	$\nu = 1$	$\nu = \frac{1}{2}$	$\nu = \frac{1}{d-2}$
Corrélation critique $\langle M(\mathbf{x})M(\mathbf{y}) \rangle \sim \frac{cst}{ \mathbf{x}-\mathbf{y} ^{d-2+\nu}}$	$\eta = \frac{1}{4}$	$\eta = 0$	$\eta = 0$
Singularité de Lee-Yang $h = \pm ih_c, \theta > 0$ $h_c \sim \theta^{\Delta}, M \sim (h \mp ih_c)^{\sigma}$	$\Delta = \frac{15}{8}$ $\sigma = -\frac{1}{6}$	$\Delta = \frac{3}{2}$ $\sigma = \frac{1}{2}$	

Table II : Exposants critiques.

(*) divergence logarithmique (**) discontinuité.

Pour poursuivre il faut entreprendre une étude systématique des corrections sous l'effet des fluctuations que nous avons négligées dans cette description de champ moyen. Brièvement on s'attend à ce que ces fluctuations ne modifient pas la nature de la transition et en particulier les exposants critiques, du moins lorsque la dimension est assez grande. La dimension à partir de laquelle des déviations apparaissent est appelée dimension critique supérieure. Elle correspond à la limite de validité du traitement perturbatif des fluctuations. Les indications fournies au chapitre I suggèrent, et nous le vérifierons, que cette dimension critique supérieure est 4 pour les modèles de spin que nous étudions, en ce qui concerne la transition à $\theta = 0$. Nous verrons aussi qu'elle vaut 6 pour la singularité complexe de Lee et Yang. D'autres méthodes d'analyse plus puissantes connues sous le nom de "groupe de renormalisation" seront nécessaires en dimension inférieure à la dimension critique. Elles feront l'objet du chapitre V. Avant d'entreprendre l'étude de ces corrections d'une manière systématique, nous allons examiner plus avant le rôle de précurseur de la brisure de symétrie que joue la singularité de Lee et Yang. Nous discuterons d'autre part un autre modèle soluble, le modèle sphérique, correspondant à la limite d'un modèle $O(n)$ à

n grand, qui donne quelques indications concernant la notion de dimension critique supérieure. Enfin la table II répertorie les résultats déjà obtenus en ce qui concerne les exposants critiques du champ moyen et confronte ceux-ci aux résultats obtenus pour le modèle d'Ising bi-dimensionnel. Dès à présent y figurent ceux du modèle sphérique pour $2 < d < 4$. Le désaccord par rapport aux prédictions de l'approximation de champ moyen sera discuté plus loin.

2. Singularités de Lee et Yang

En 1952, dans deux articles classiques, Lee et Yang étudièrent le cas d'un gaz sur réseau (ou un modèle d'Ising en champ extérieur), pour un système arbitrairement grand mais fini. De leur point de vue la dimensionalité, ou le nombre de coordination, ne joue pas un rôle prépondérant. Ils cherchent les zéros de la fonction de partition en permettant au champ extérieur de décrire tout le plan complexe. Pour un champ extérieur réel, comme la fonction de partition est donnée par une somme de termes réels positifs, elle ne s'annule certainement pas, mais ces considérations n'excluent pas une annulation pour des valeurs complexes des paramètres. Pour un gaz sur réseau, les cas $\sigma = +1$ et $\sigma = -1$ de l'interprétation magnétique, que nous adopterons dans la suite, correspondent respectivement à l'occupation ou la non-occupation d'un des sites. Le champ h est conjugué à la densité. Le point fondamental de la discussion est que, à un facteur multiplicatif non nul près, la fonction de partition correspondant à un système de taille finie s'écrit pour β réel sous la forme d'une expression polynomiale dans la variable $\exp(-2h)$ appelée activité.

2.1 Le théorème de Lee et Yang

Lee et Yang ont montré que les zéros de la fonction de partition appartiennent au cercle unité du plan complexe de la variable $\exp(-2h)$, ou encore à l'axe imaginaire pour la variable h . Si le système a un volume fini, ou s'il est défini sur un graphe fini arbitraire, la fonction de partition est un polynôme en $\exp(-2h)$ dont le degré croît avec le volume. Le nombre de zéros est donc fini. Pour un système infini, l'ensemble des zéros devient dense sur un sous-ensemble du cercle unité. Lorsque β est suffisamment faible, correspondant à la phase de haute température, l'ensemble des singularités n'atteint pas le voisinage de $\exp(-2h) = 1$ (le point $h = 0$), et donc l'énergie libre est localement une fonction analytique. Lorsque β augmente il peut arriver que ce voisinage disparaisse; on ne peut plus passer analytiquement de $\text{Re } h > 0$ à $\text{Re } h < 0$, ce qui témoigne de l'existence d'une transition pour $h = 0$. Le long d'un chemin le long de l'axe réel, tel que h change de signe, la transition est du premier ordre et la discontinuité dans l'aimantation vaut deux fois l'aimantation spontanée. En revanche l'énergie libre en champ nul a une dérivée continue en β pour $\beta = \beta_c$, caractéristique d'une transition du

second ordre. Cette étude est menée dans le plan de la variable $\exp(-2h)$ où s'applique le théorème de Lee et Yang, mais on peut bien entendu généraliser cette méthode à n'importe quel paramètre, pourvu que la fonction de partition du système fini s'exprime en fonction de ce dernier sous une forme polynomiale. C'est ce qui a été fait, par exemple, dans le plan de la variable $\exp(-2\beta)$ dans le cas du modèle d'Ising : on obtient ainsi des renseignements sur la forme analytique de l'énergie libre. Un autre prolongement concerne les modèles avec groupe continu d'invariance. Si ce sujet n'a pas été très développé jusqu'à présent, c'est parce que bien souvent les ensembles de singularités obtenus sont singuliers, et dépendent du réseau choisi. On peut cependant obtenir ainsi des résultats dignes d'intérêt, comme on le montrera plus loin.

Revenons maintenant au modèle d'Ising étudié en fonction de la variable $\exp(-2h)$. Soit N le nombre de sites. Le réseau fini peut être considéré comme un graphe arbitraire dont les sites sont les sommets et dont les liens entre voisins sont les arêtes du graphe joignant des paires de sommets adjacents. Soit L le nombre total de liens (c'est-à-dire de paires de voisins). Nous introduisons en chaque site un champ extérieur h_i qui peut varier de point à point et, en posant

$$\rho_i = e^{-2h_i} \quad \tau = e^{-2\beta} \quad (72)$$

nous pouvons écrire la fonction de partition sous la forme

$$Z_N = \frac{1}{2^N} \exp\left(\beta L + \sum_i h_i\right) P(\tau, \rho_i) \quad (73)$$

où P est un polynôme en τ et ρ_i , du type

$$P = \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp\left[\beta \sum_{(ij)} (\sigma_i \sigma_j - 1) + \sum_i h_i (\sigma_i - 1)\right] \quad (74)$$

La sommation $\sum_{(ij)}$ est étendue à tous les couples de voisins. Le polynôme P est de degré au plus 1 en chacun des ρ_i pris séparément, et de degré total N . De plus pour τ et ρ_i réels positifs P ne peut évidemment s'annuler. Nous nous placerons dans le domaine ferromagnétique $\beta > 0$ où τ est compris entre zéro et un. A titre d'exemple écrivons les polynômes correspondant aux réseaux les plus simples

$$\begin{array}{c} 1 \bullet \text{---} \bullet 2 \\ P_{12} = 1 + \tau(\rho_1 + \rho_2) + \rho_1 \rho_2 \end{array} \quad (75a)$$

$$\begin{array}{c} 1 \bullet \text{---} \bullet 2 \text{---} \bullet 3 \\ P_{123} = (1 + \rho_1 \tau)(1 + \rho_3 \tau) + \rho_2 (\tau + \rho_1)(\tau + \rho_2) \end{array} \quad (75b)$$

A une fonction régulière près, l'énergie libre est proportionnelle au logarithme du polynôme P . Ses seules singularités proviennent donc des zéros

complexes de P . Dans la limite $N \rightarrow \infty$, l'énergie libre par site demeure analytique dans toute région dépourvue de points d'accumulation de zéros.

Il est possible d'engendrer ces polynômes récursivement par le procédé suivant. Si l'ensemble de sites considérés est formé de deux sous-ensembles disjoints, le polynôme résultant est factorisé: $P = P_1 P_2$ où P_1 et P_2 se réfèrent aux deux sous-ensembles. A partir d'une telle situation nous pouvons en concevoir une nouvelle, notée (12) en identifiant les sites a et b appartenant respectivement au premier et au second sous-ensemble. Pour obtenir le polynôme $P_{(12)}$ correspondant, écrivons

$$P_1 = A_+ + \rho_a A_- \qquad P_2 = B_+ + \rho_b B_- \qquad (76)$$

où $A_+(B_+)$ correspond aux contributions telles que $\sigma_a = +1$ ($\sigma_b = +1$) et $A_-(B_-)$ celles pour lesquelles $\sigma_a = -1$ ($\sigma_b = -1$). Dans le cas où b et a sont identifiés, avec $\rho_{ab} = \rho_a = \rho_b$, on obtient la contraction (figure 4)

$$P_1 P_2 \equiv A_+ B_+ + \rho_a A_- B_+ + \rho_b A_+ B_- + \rho_a \rho_b A_- B_- \rightarrow P_{12} \equiv A_+ B_+ + \rho_{ab} A_- B_- \qquad (77)$$

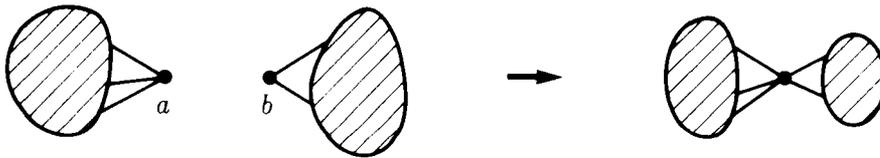


Figure 4 : Le procédé de contraction.

Vérifier la validité du processus de contraction sur les exemples (75).

Construire le polynôme P pour un graphe cyclique.

La procédure de contraction s'étend au cas où les sites a et b et leurs spins associés font partie du même ensemble connexe de sorte que

$$P \equiv A_{++} + A_{-+} \rho_a + A_{+-} \rho_b + A_{--} \rho_a \rho_b \rightarrow P_{ab} \equiv A_{++} + \rho_{ab} A_{--} \qquad (78)$$

Bien entendu ceci suppose que, après contraction, le nouveau graphe est admissible, c'est-à-dire que deux sites ne sont pas reliés entre eux par plusieurs arêtes.

La procédure décrite ci-dessus permet donc de construire pas à pas le polynôme relatif à un réseau fini arbitraire à partir du polynôme relatif à un réseau élémentaire réduit à deux sites. Dans ce dernier cas, le polynôme $P = 1 + \tau(\rho_1 + \rho_2) + \rho_1\rho_2$ s'annule lorsque

$$\rho_1 = -\frac{1 + \tau\rho_2}{\tau + \rho_2} \quad (79)$$

On peut considérer (79) comme une application du plan complexe de la variable ρ_2 sur le plan complexe de ρ_1 . Cette application homographique laisse (pour τ réel) le cercle unité invariant et pour $0 < \tau < 1$, échange l'intérieur avec l'extérieur du cercle unité. Il s'ensuit que si $|\rho_1| < 1$ et $|\rho_2| < 1$, ou bien si $|\rho_1| > 1$ et $|\rho_2| > 1$, le polynôme ne peut s'annuler. Nous allons montrer récursivement que cette propriété se généralise en vérifiant que le procédé de contraction la respecte. Soit $P(\rho_i)$ le polynôme relatif à un réseau tel que $P(\rho_i) \neq 0$ pour $|\rho_i| < 1$ quel que soit l'indice i . Explicitant sa dépendance en ρ_a et ρ_b , le nouveau polynôme contracté P_{ab} est donné par (78) et dépend des variables $\{\rho_i\} - \{\rho_a, \rho_b\}$ et de ρ_{ab} . Montrons que P_{ab} est différent de zéro lorsque ses variables sont à l'intérieur du cercle unité. Les variables ρ_i distinctes de ρ_a et ρ_b sont muettes. Nous les fixons à l'intérieur du cercle et nous voulons montrer que $|A_{+++}| > |A_{--}|$. Or si P ne s'annule pas pour ρ_a et ρ_b variant indépendamment à l'intérieur du cercle c'est a fortiori vrai lorsque $\rho_a = \rho_b = \rho$. Donc le polynôme $A_{+++} + \rho(A_{+-} + A_{-+}) + \rho^2 A_{--}$ n'a pas de racine de module inférieur à l'unité. Le produit de ses racines est donc plus grand ou égal à un : $|A_{+++}| \geq |A_{--}|$. Le polynôme contracté P_{ab} ne peut donc s'annuler pour $\rho_{ab} < 1$. Si le champ est uniforme tous les ρ_i sont égaux et $P(\tau, \rho)$ ne peut s'annuler pour $\rho < 1$. Changer le signe de h , change ρ en $1/\rho$. Comme $Z(h) = Z(-h)$, on a

$$P(\tau, \rho) = \rho^N P(\tau, \rho^{-1}) \quad (80)$$

On en déduit le théorème de Lee et Yang selon lequel $P(\tau, \rho)$ ne peut s'annuler en dehors du cercle unité; tous ses zéros y sont donc situés. Par produit et contraction on a ainsi montré que la fonction de partition d'un réseau fini n'a de zéros que pour $|\rho| = 1$ ou h imaginaire pur.

Dans les cas extrêmes ce théorème est aisé à vérifier. A température infinie, $\tau = 1$, et $P(1, \rho) = (1 + \rho)^N$. A température nulle, $\tau = 0$, $P(0, \rho) = 1 + \rho^N$. En diminuant la température on passe donc d'un zéro de multiplicité N en -1 à une distribution uniforme à température nulle $\rho_k = e^{i\pi(2k+1)/N}$. Tant que N est fini aucun zéro n'est sur l'axe réel ($\rho = 1, h = 0$).

Ce résultat, remarquable de simplicité, ne permet pas toutefois de trouver le point de transition pour un système infini; il s'accorde cependant avec le scénario décrit au début de ce paragraphe. Prouver l'existence d'une transition (la disparition de la zone d'analyticité au voisinage de 1) exige

l'emploi de méthodes plus complexes. Ce résultat a été généralisé à la théorie φ^4 scalaire, à des modèles à groupe continu d'invariance comme $O(2)$ ou modèle du "rotateur". Nous avons vu qu'il resurgit de façon naturelle dans la limite du champ moyen ou encore dans l'approximation de Bethe.

2.2 Cas unidimensionnel

Dans le cadre de l'approximation de champ moyen ($d \rightarrow \infty$), on a vu que h_c tend vers 0 en $(\tau - \tau_c)^{3/2}$ et que l'énergie libre a une singularité en $(h - h_c)^{3/2}$. A l'autre extrême, nous pouvons considérer la fonction de partition du modèle unidimensionnel en présence d'un champ. Avec les notations précédentes et pour des conditions périodiques, elle s'écrit (voir I.2.5)

$$Z_N = \left(\frac{1}{2}e^{\beta+h}\right)^N \text{Tr} T^N \quad T = \begin{pmatrix} 1 & \tau\rho^{1/2} \\ \tau\rho^{1/2} & \rho \end{pmatrix} \quad (81)$$

soit

$$\text{Tr} T^N = \lambda_+^N + \lambda_-^N \quad (82)$$

où λ_{\pm} sont les valeurs propres de T , solutions de

$$(1 - \lambda)(\rho - \lambda) - \rho\tau^2 = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 + \rho) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(1 - \rho)^2 + \rho\tau^2} \quad (83)$$

Examinons la limite $N \rightarrow \infty$, où pour $\rho > 0$ (h réel) et $0 < \tau < 1$, seule contribue la plus grande valeur propre, correspondant au signe positif devant le radical

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N = \beta + h - \ln 2 + \ln \left\{ \frac{1}{2}(1 + \rho) + \sqrt{\frac{1}{4}(1 - \rho)^2 + \rho\tau^2} \right\} \quad (84)$$

Les singularités correspondent à l'annulation du radical soit

$$1 + 2\rho(2\tau^2 - 1) + \rho^2 = 0$$

$$\rho_c^{(\pm)} = e^{\pm i2h_c} \quad (85)$$

$$\cos 2h_c = 1 - 2\tau^2 = 1 - 2e^{-4\beta}$$

La paire de singularités de Lee et Yang est donc sur le cercle unité de la variable complexe ρ comme prévu. Si τ décroît de 1 à 0, chacune d'elles part de -1 ($\cos 2h_c = -1$) pour atteindre 1 où la température nulle, qui correspond donc à la température critique du modèle unidimensionnel. Lorsque $\tau \rightarrow 0$, h_c se comporte comme τ , à comparer avec $h_c \sim (\tau - \tau_c)^{3/2}$ pour $d \rightarrow \infty$. La partie singulière de l'énergie libre est proportionnelle à

$(h \mp ih_c)^{1/2}$; ainsi l'exposant σ défini en (71a) est donc égal à $-1/2$ dans le cas $d = 1$. En fait la dimension critique supérieure est six pour la singularité de Lee et Yang et σ varie de $-1/2$ ($d = 1$) à $+1/2$ pour $d = 6$ puis reste constant au-delà. On peut montrer que $\sigma = -1/6$ en dimension $d = 2$ (voir chapitre IX), ce qui accrédite l'idée d'une dépendance assez régulière de σ avec d .

2.3 Propriétés générales

Il convient de souligner le fait que la singularité Lee et Yang ne dépend pas de la température pour $T > T_c$, ou en d'autres termes que l'exposant σ ne dépend pas de la température. Le calcul unidimensionnel ci-dessus et l'approximation du champ moyen donnent des résultats conformes à cette affirmation. Etudions donc ce point pour β infiniment petit et pour h proche de $i\pi/2$ (soit $\rho = e^{-2h}$, proche de -1). Lorsque h est complexe, remarquons qu'il ne s'agit plus d'un modèle statistique ordinaire admettant une interprétation probabiliste, mais que nous avons désormais affaire à une théorie des champs. Le long de l'axe h imaginaire, la théorie effective peut être décrite en termes d'un champ scalaire φ auto-couplé. Pour décrire la brisure de symétrie à l'ordre dominant c'est-à-dire pour de petites fluctuations, on considère un terme d'interaction imaginaire $i\varphi^3$. Ce dernier provient d'une translation du champ φ destinée à éliminer le terme linéaire induit par le couplage au champ extérieur. Cette remarque permet de retrouver, de façon heuristique, la valeur de la dimension critique supérieure pour laquelle comme on le verra plus loin, la constante de couplage est sans dimension. D'après ce qu'on a vu au chapitre I, la dimension d'un champ scalaire est $(d - 2)/2$. Pour que $\int d^d\mathbf{x}\varphi^3(\mathbf{x})$ soit sans dimension, il faut que $\frac{3}{2}(d - 2) = d$, soit $d = 6$.

Pour un nombre fini de sites N , les zéros de Lee et Yang correspondent à des points singuliers de l'énergie libre totale; ce n'est plus nécessairement le cas à la limite du volume infini, comme on peut le voir, à nouveau dans l'exemple unidimensionnel. Seules les extrémités de l'ensemble d'accumulation des zéros restent à coup sûr des singularités, d'où le nom de "singularité de bout". Ce phénomène se présente couramment lorsqu'une fonction possède un point de branchement, mais admet néanmoins un prolongement analytique autour du point singulier, lorsqu'on lui substitue une approximation qui peut privilégier une coupure issue de la singularité. Nous sommes dans un cas analogue en considérant la limite de volume infini d'un modèle discret fini sur un réseau de nombre de coordination q , pour lequel l'énergie libre par site s'écrit

$$F = \frac{1}{2}q\beta + h - \ln 2 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln P_N(\tau, \rho). \quad (86)$$

Comme P_N est un polynôme de degré N en ρ (N étant le nombre de sites),

positif sur l'axe réel, ayant tous ses zéros sur le cercle unité, normalisé à l'unité pour $\rho = 0$, on a

$$P_N(\rho, \tau) = \prod_{\alpha=1}^N \left(1 - \frac{\rho}{\rho_\alpha(\tau)} \right) \quad (87)$$

Pour N grand ces zéros s'accablent sur le cercle unité avec une densité $N\mu(\varphi)$ qui satisfait à $\mu(\varphi) = \mu(-\varphi) \geq 0$ et à la condition de normalisation

$$\int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \mu(\varphi) = 1 \quad (88a)$$

La parité de μ traduit le fait que les racines se présentent par paires complexes conjuguées, et reflète la symétrie initiale $h \leftrightarrow -h$. Alors

$$F = \frac{1}{2}q\beta + h - \ln 2 + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \mu(\varphi) \ln(1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi) \quad (88b)$$

expression dans laquelle les contributions des racines conjuguées ont été regroupées. La représentation (88b) de F est valable dans tout l'intervalle $0 < \tau < 1$. En-dessous du point critique, le support de $\mu(\varphi)$ est le cercle tout entier. L'équation (88b) définit alors en général deux fonctions analytiques différentes, l'une correspondant à $|\rho| < 1$, l'autre à $|\rho| > 1$. On constate que F est continue en h à $h = 0$ ($\rho = e^{-2h} = 1$), mais sa dérivée par rapport à h , l'aimantation M

$$\begin{aligned} M(\rho) &= 1 + 2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \mu(\varphi) \frac{\rho}{e^{i\varphi} - \rho} = -1 + 2 \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \mu(\varphi) \frac{1}{1 - \rho e^{-i\varphi}} \\ &= \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \mu(\varphi) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos \varphi + \rho^2} \end{aligned} \quad (89)$$

devient discontinue pour $\tau < \tau_c$ lorsque le support de μ couvre le cercle entier. On a

$$\tau < \tau_c \quad M_{\pm} = \lim_{h \rightarrow \pm 0} M = \pm 2\pi\mu(0) \quad (90)$$

Ainsi, $\mu(0) = M_{sp}/2\pi$. D'après (88) l'énergie libre et l'aimantation peuvent être développées à l'aide des moments trigonométriques de la distribution $\mu(\varphi)$. En posant

$$\mu_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \mu(\varphi) \cos n\varphi \quad \mu_0 = 1 \quad (91)$$

on a

$$F = \frac{1}{2}q\beta + h - \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{\rho^n}{n}$$

$$M = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \rho^n \quad (92)$$

Cette expression correspond à un développement en champ fort (ρ faible) effectué à partir d'une situation totalement ordonnée (h tend vers l'infini, $\rho = 0$). Inversement, la connaissance d'un tel développement permet en théorie de retrouver la dépendance en τ de la distribution $\mu(\varphi)$ à partir de ses moments. Malheureusement, on ne peut espérer obtenir qu'un nombre fini de termes dans la série (92). Il est donc nécessaire de disposer d'autres éléments, par exemple d'une expression paramétrique du comportement singulier de μ au voisinage de l'extrémité de son support.

Dans le cas $d = 1$, montrer qu'on peut en effet écrire une représentation de la forme précédente pour l'énergie libre

$$F = \beta + h - \ln 2 + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} d\varphi \frac{\theta(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{2\pi} \left[\frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi_0 - \cos \varphi} \right]^{1/2} \ln [1 + \rho^2 - 2\rho \cos \varphi] \quad (93)$$

$$\cos \varphi_0 = 1 - 2\tau^2 = 1 - 2e^{-4\beta} \quad (94)$$

Pour $\tau \rightarrow 0$ la distribution $\mu(\varphi)$ tend à devenir uniforme, tandis que pour $\tau \rightarrow 1$ elle se concentre en $\varphi = \pm\pi$. Pour τ arbitraire la singularité en bout est en $(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)^{-1/2}$. Calculer ses moments trigonométriques μ_n .

2.4 Racines dans le plan des températures

Il n'existe pas de théorème général précisant la localisation des racines dans le plan complexe des températures, mais on peut essayer de l'étudier, par exemple, de façon numérique. Supposons désormais le champ extérieur nul ($\rho = 1$). Fisher a fait remarquer que, pour un modèle d'Ising sur un réseau bidimensionnel carré, les racines appartiennent à deux cercles dans le plan complexe de la variable τ : le premier a pour équation

$$\bar{\tau} = (1 - \tau)(1 + \tau)^{-1}$$

et le deuxième peut être obtenu par inversion par rapport au cercle unité, c'est-à-dire en changeant τ en τ^{-1} dans l'équation précédente. En fait,

cela n'est vrai qu'à la limite thermodynamique. Pour un système fini, avec des conditions aux limites données, il est possible que certaines racines ne possèdent pas la propriété ci-dessus.

Le lieu des racines est invariant par dualité. Il coupe donc l'axe réel au point de transition. Ce qui est significatif dans ce cas bidimensionnel, c'est que

- (i) les racines complexes près du point critique s'accumulent le long d'arcs,
- (ii) ces arcs coupent l'axe réel à angle droit.

Retrouver ces résultats à partir des expressions données au chapitre II.

En dimension plus élevée, il semble également que les racines se regroupent sur des arcs dans le plan complexe des températures, du moins au voisinage de la température critique (réelle). Faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'un résultat exact. Il a des conséquences intéressantes sur la nature de la singularité de l'énergie libre. La fonction de partition devant être réelle, deux arcs contenant les racines doivent se couper à T_c , l'un dans le demi-plan supérieur et l'autre, son symétrique, dans le demi-plan inférieur. Soit $\pi - \varphi$ l'angle entre l'axe réel positif du plan des températures T et la ligne d'accumulation des racines dans le demi-plan supérieur, et soit

$$f_{\text{sing}}^{(\pm)} \sim A_{\pm} \left(\frac{T - T_c}{T_c} \right)^{2-\alpha}$$

la partie singulière de l'énergie libre au-dessus (signe +) et au-dessous (signe -) du point critique le long de l'axe réel. Les deux fonctions f_{sing}^{\pm} ont des prolongements analytiques jusqu'aux arcs portant les racines, sur lesquels par ailleurs leurs parties réelles doivent être égales. Les lignes de racines jouent le rôle de lignes de Stokes, le long desquelles des comportements asymptotiques doivent s'accorder (en module pour la fonction de partition). Cela n'est possible que si l'angle φ , le rapport A_-/A_+ des amplitudes critiques, et l'exposant α satisfont à la relation

$$\tan [(2 - \alpha)\varphi] = \frac{\cos \pi\alpha - A_-/A_+}{\sin \pi\alpha} \quad (95)$$

Si on fait tendre $\alpha \rightarrow 0$ et $\varphi \rightarrow \pi/2$, cette relation impose $A_- = A_+$, ce qui est bien le cas en dimension deux. L'approximation de champ moyen (d grand) donne $\varphi = \pi/4$ ($\alpha = 0$ et $A_+/A_- = 0$). Pour $d = 3$, comme $\alpha \sim 0.11$, et $\varphi = 57$ degrés (valeur observée), on doit avoir A_+/A_- de l'ordre de 0.5. Une mesure plus précise de l'angle φ pourrait néanmoins modifier sensiblement la valeur de ce rapport.

3. La limite $n \rightarrow \infty$

Nous allons étudier dans ce paragraphe la limite $n \rightarrow \infty$ des modèles de spins à symétrie $O(n)$. La solution s'identifie à celle du modèle sphérique de Berlin et Kac résolu au début des années cinquante; cependant les corrections en $1/n$ n'ont pas d'équivalent. La résolution de ce modèle, outre son intérêt pratique, montre en utilisant les hypothèses les plus simples possibles que la théorie du champ moyen est en défaut en dessous de la dimension critique supérieure $d = 4$ (nous avons discuté au chapitre I l'origine de ce phénomène). Sous sa forme originelle le modèle sphérique fait intervenir des variables scalaires φ_i attachées à chacun des sites, suppose des interactions entre proches voisins seulement, et impose la contrainte $\sum_i \varphi_i^2 = \text{cst}$. L'équivalence entre ces deux modèles se révèle dans l'emploi de la méthode du col, que nous allons exposer ci-dessous.

3.1 La méthode du col

Dans la limite où le nombre n de composantes par site tend vers l'infini, la présence d'un nombre infini de degrés de liberté par site suggère l'emploi de la méthode du col. La justification habituelle consiste à montrer que les corrections, calculées perturbativement à l'aide de diagrammes de Feynman, sont d'ordre $1/n$. Plus de rigueur nécessiterait d'obtenir des majorations. Nous écrivons la fonction de partition pour N sites

$$\begin{aligned} Z &= Z_0 \int \prod_j d^n \varphi_j \delta(\varphi_j^2 - 1) \exp n\beta \left\{ \sum_{(ij)} \varphi_i \cdot \varphi_j \right\} \\ &= Z_0 \int \prod_j d^n \varphi_j \frac{nd\alpha_j}{2\pi} \exp n \left\{ \sum_j (i\alpha_j + \lambda_j)(1 - \varphi_j^2) + \beta \sum_{(ij)} \varphi_i \cdot \varphi_j \right\} \\ Z_0 &= \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} \right)^{Nd} \end{aligned} \tag{96}$$

Le facteur de normalisation Z_0 est tel que $Z \rightarrow 1$ lorsque $\beta \rightarrow 0$. Dans la seconde expression (96), nous avons donné une représentation intégrale de la contrainte $\varphi_j^2 = 1$ en lui associant un paramètre conjugué α_j , où λ_j est pour j une constante arbitraire choisie positive et suffisamment grande pour assurer la convergence d'intégrales ultérieures. La solution doit être indépendante de ce choix. L'introduction des multiplicateurs $i\alpha_j + \lambda_j$ permet d'effectuer une intégration exacte sur les variables de spin φ_j qui apparaissent quadratiquement dans l'action. En appelant Δ le laplacien discret du réseau et Q la forme quadratique intervenant dans l'action, on a

$$Q_{jk} = -\beta\Delta_{jk} + 2(\lambda_j + i\alpha_j - \beta d)\delta_{jk} \tag{97a}$$

ce qui donne après intégration sur φ

$$Z = Z_0 \left(\frac{2\pi}{n} \right)^{\frac{1}{2}(n-2)N} \int \prod_j d\alpha_j \exp \frac{1}{2}n \left\{ \sum_j 2(i\alpha_j + \lambda_j) - \text{Tr} \ln Q \right\} \quad (97b)$$

Aucune approximation n'est encore intervenue à ce stade. Lorsque $n \rightarrow \infty$, le préfacteur n dans l'exponentielle tend vers l'infini, alors que le terme entre crochets, l'action effective, ne dépend pas de n . Ce fait justifie l'application de la méthode du col qui (malheureusement) revient à intervertir les limites $N \rightarrow \infty$ (volume infini) et $n \rightarrow \infty$ (nombre infini de composantes du champ). L'équation variationnelle par rapport à $2(\lambda_k + i\alpha_k)$, où k est un indice d'espace, donne

$$1 = \langle k | Q^{-1} | k \rangle \quad (98)$$

Nous cherchons une solution invariante par translation, c'est-à-dire telle que $\lambda_k + i\alpha_k$ soit indépendant de k , ce qui identifie la solution que nous allons obtenir avec celle d'un modèle scalaire (en omettant le préfacteur n) où on imposerait une condition $\sum_k \varphi_k^2 = \text{cst}$, qui n'est autre que le modèle sphérique. Posons

$$2(\lambda + i\alpha - d\beta) = \beta\xi^{-2} \quad (99)$$

En prenant la moyenne de l'équation (98) sur tous les sites, il vient

$$1 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{Tr} Q^{-1} = \frac{1}{\beta} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\xi^{-2} + 2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu)} \quad (100)$$

et, à l'ordre le plus bas,

$$Z = Z_0 \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{2\pi}{\beta n} \right)^{(n-2)/2} \right]^N \times \exp \frac{nN}{2} \left\{ \beta(2d + \xi^{-2}) - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left[\xi^{-2} + 2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos p_\mu) \right] \right\} \quad (101)$$

Dans ces deux expressions la variable p décrit une zone de Brillouin, c'est-à-dire que chacune de ses composantes varie de $-\pi$ to $+\pi$. La quantité ξ , qui joue le rôle de longueur de corrélation, est à déterminer par l'équation de cohérence (100) qui constitue une condition de stationarité de la quantité $\lim_{N \rightarrow \infty} N^{-1} \ln Z$ par rapport à ξ^{-2} .

Considérons l'équation (100) et faisons varier ξ de zéro à l'infini. Nous voyons que β croît à partir de zéro ($\xi^2 \sim \beta$ pour $\xi \sim 0$) jusqu'à une valeur limite $\beta_c(\xi = \infty)$ donnée par

$$\beta_c = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha d} I_0(\alpha)^d \quad (102)$$

Cette valeur est reliée à la probabilité de retour à l'origine dans un mouvement brownien (notée $\Pi(0, 1)$) au chapitre I)

$$2d\beta_c = G(0, 1) = \frac{1}{1 - \Pi(0, 1)} \quad (103)$$

Le comportement de $2d\beta_c$ en fonction de la dimension d a donc déjà été discuté. En particulier pour d grand

$$2d\beta_c = 1 + \frac{1}{2d} + 3 \left(\frac{1}{2d}\right)^2 + 12 \left(\frac{1}{2d}\right)^3 + \dots \quad (104)$$

Le terme dominant est en accord avec la prédiction de l'approximation de champ moyen. Ce qui est nouveau, c'est l'apparition d'une dimension critique inférieure, égale à deux, en deçà de laquelle il n'y a plus de transition. Plus précisément, si $d \rightarrow 2$, $\beta_c \rightarrow \infty$ (température nulle) avec

$$2d\beta_c \underset{d \rightarrow 2}{\sim} \frac{2}{\pi(d-2)} \quad (105)$$

A deux dimensions seule existe la phase symétrique de haute température. Le calcul ci-dessus est effectué dans une phase où ξ^{-2} est supposé positif, c'est-à-dire pour $0 \leq \beta \leq \beta_c$. Ceci est en accord avec un théorème dû à Mermin et Wagner (qui sera détaillé au chapitre suivant), selon lequel en deux dimensions, en présence d'un groupe continu d'invariance, et pour des interactions à courte portée, il ne peut exister de phase ordonnée caractérisée par une valeur non nulle du paramètre d'ordre (dans le cas d'un groupe d'invariance commutatif, des transitions peuvent en fait se produire, mais le système n'acquiert pas d'aimantation macroscopique).

Estimons la divergence de la longueur de corrélation lorsque β tend vers β_c par valeurs inférieures. D'après (100) et (102)

$$\xi^2(\beta_c - \beta) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu) \left[\xi^{-2} + 2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu) \right]} \quad (106)$$

Si $d > 4$, le membre de droite tend vers une limite finie lorsque $\xi^{-1} \rightarrow 0$, et $\beta \rightarrow \beta_c$. La région sensible de l'intégrale est la partie infrarouge, où \mathbf{p} tend vers zéro. Le dénominateur s'y comporte comme $\mathbf{p}^2(\xi^{-2} + \mathbf{p}^2)$. Pour $d > 4$, on obtient une intégrale convergente

$$d > 4 \quad \xi \sim (\beta_c - \beta)^{1/2} \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (107)$$

en accord avec le résultat du champ moyen. La dimension $d = 4$ est la dimension critique supérieure comme nous nous y attendions (cette propriété reste vraie lorsque n est fini). En effet pour $d = 4$ on constate l'apparition d'un logarithme supplémentaire, $\xi^2(\beta_c - \beta) \sim \ln \xi$

$$d = 4 \quad \xi \sim (\beta_c - \beta)^{-1/2} \left[\ln \left(\frac{1}{\beta_c - \beta} \right) \right]^{1/2} \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (108)$$

Pour $4 > d > 2$, le comportement de ξ est

$$4 > d > 2 \quad \xi \sim (\beta_c - \beta)^{-1/(d-2)} \quad \nu = 1/(d-2) \quad (109)$$

Enfin si $d = 2$, ξ diverge exponentiellement lorsque β tend vers l'infini

$$d = 2 \quad \xi \underset{\beta \rightarrow \infty}{\sim} \exp 2\pi\beta \quad (110)$$

Cela revient en quelque sorte à poser $\nu = \infty$, comportement qu'on peut qualifier de "liberté asymptotique". Si on considère que $\beta^{-1} \sim T$ est proportionnel à une constante de couplage, l'équation (110) montre que β^{-1} varie logarithmiquement en fonction de la longueur caractéristique.

Pour $d > 2$, lorsque $\beta > \beta_c$ la longueur de corrélation est infinie et en apparence tous les modes sont de masse nulle, ce qui tient au fait que l'unique mode massif, le mode longitudinal, a un poids relatif $1/n$ négligeable à la limite $n \rightarrow \infty$, mais dont il faudra tenir compte dans le calcul des corrections. Une étude plus poussée est nécessaire pour trouver la valeur de l'aimantation spontanée, car la solution invariante par translation n'est plus désormais un point de stationarité isolé. Dans ce but nous utiliserons plus loin une méthode légèrement différente.

La valeur de ν en fonction de la dimension d est portées sur la figure 5. En particulier, $\nu = 1$ pour $d = 3$. Remarquons que, dans le cas du modèle sphérique, il est licite, compte tenu de la structure des représentations intégrales, d'effectuer une extrapolation en d . Notons aussi que le passage par la dimension critique supérieure se manifeste par l'apparition de logarithmes. Ces deux idées seront généralisées plus loin.

En ce qui concerne la chaleur spécifique C nous retrouvons comme dans le cas du champ moyen une discontinuité pour $d > 4$ et on convient alors

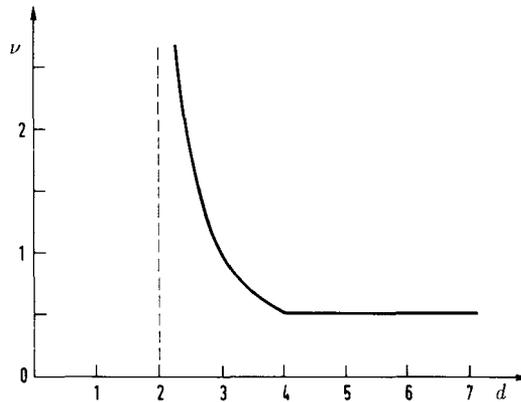


Figure 5 : L'exposant ν prédit par le modèle sphérique en fonction de la dimension d .

que $\alpha = 0$. Lorsque $2 < d < 4$ la partie singulière de l'énergie libre est proportionnelle à ξ^{-d} , d'où une singularité en

$$4 > d > 2 \quad C_{\text{sing}} \sim (\beta_c - \beta)^{-(d-4)/(d-2)} \quad \alpha = \frac{d-4}{d-2} \quad (111)$$

L'indice α est négatif, ce qui correspond à un point de rebroussement dans la courbe représentative de C . En particulier pour $d = 3$, $\alpha = -1$. Pour $d = 4$, on a une singularité logarithmique

$$d = 4 \quad C_{\text{sing}} \sim \frac{1}{\ln[1/(\beta_c - \beta)]} \quad (112)$$

3.2 Factorisation

L'étude de la phase de basse température est plus délicate. Nous profiterons de cette occasion pour illustrer la méthode de factorisation des produits invariants d'observables à la limite où n tend vers l'infini, méthode déjà rencontrée au chapitre I. Pour calculer l'aimantation spontanée, nous considérons le comportement de la fonction de corrélation à deux points lorsque la distance entre ces points tend vers l'infini. A cet effet nous allons démontrer une identité de Ward, qui fait partie des équations du mouvement. Il s'agit d'une relation entre les fonctions de corrélation qui provient de la structure de la fonction de partition. Cette dernière est une intégrale effectuée à l'aide d'une mesure invariante par le groupe $O(n)$. On note γ, δ, \dots les indices du champ qui varient de 1 à n . On repère d'autre part

les sites par i, j ou par leurs coordonnées \mathbf{x} . Reprenons, sous une forme un peu plus générale, la démonstration d'une propriété donnée précédemment. La fonction à deux points s'écrit

$$\langle \varphi_{\mathbf{0}}^{\gamma} \varphi_{\mathbf{x}}^{\delta} \rangle = Z^{-1} \int \prod_k d^n \varphi_k \delta(\varphi_k^2 - 1) \varphi_{\mathbf{0}}^{\gamma} \varphi_{\mathbf{x}}^{\delta} \exp \left\{ n\beta \sum_{(ij)} \varphi_i \cdot \varphi_j \right\} \quad (113)$$

Utilisons l'invariance par rotation de la mesure en effectuant un changement infinitésimal de la variable φ_i (i fixé)

$$\varphi_i \rightarrow \varphi_i + \varepsilon (A\varphi)_i \quad (114)$$

où A est une matrice antisymétrique arbitraire et ε un paramètre infinitésimal. L'intégrale étant inchangée, le coefficient du premier ordre en ε est nul

$$0 = \delta_{i,0} \langle (A\varphi)_{\mathbf{0}}^{\gamma} \varphi_{\mathbf{x}}^{\delta} \rangle + \delta_{i,\mathbf{x}} \langle \varphi_{\mathbf{0}}^{\gamma} (A\varphi)_{\mathbf{x}}^{\delta} \rangle + n\beta \sum_{j(i)} \langle \varphi_{\mathbf{0}}^{\gamma} \varphi_{\mathbf{x}}^{\delta} (\varphi_j \cdot (A\varphi)_i) \rangle \quad (115)$$

Comme la matrice A est arbitraire, nous pouvons, en identifiant le coefficient de $\frac{1}{2}(A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha})$ et en prenant la trace sur les indices, obtenir une équation invariante par rotation

$$(1 - n^{-1})(\delta_{i,\mathbf{x}} - \delta_{i,0}) \langle \varphi_{\mathbf{0}} \cdot \varphi_{\mathbf{x}} \rangle = \beta \sum_{j(i)} \langle [(\varphi_{\mathbf{0}} \cdot \varphi_j) (\varphi_{\mathbf{x}} \cdot \varphi_i) - (\varphi_{\mathbf{0}} \cdot \varphi_i) (\varphi_{\mathbf{x}} \cdot \varphi_j)] \rangle \quad (116)$$

La sommation sur $j(i)$ est étendue aux proches voisins du site i . Dans (116) nous avons supposé un volume infini. Telle quelle, cette équation est une identité (dite identité de Ward). Pour l'utiliser lorsque $n \rightarrow \infty$, supposons que nous ayons calculé toutes les intégrales par la méthode du col. Les points cols sont dégénérés, conformément à l'invariance $O(n)$; mais les produits scalaires sont invariants par rotation et prennent donc la même valeur en tous ces points. La valeur moyenne des produits invariants d'observables se factorise. En conséquence

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (\varphi_a \cdot \varphi_b) (\varphi_c \cdot \varphi_d) \rangle \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_a \cdot \varphi_b \rangle \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi_c \cdot \varphi_d \rangle \quad (117)$$

L'équation (116) se ramène alors, à des corrections d'ordre n^{-1} près, à une équation quadratique pour la fonction à deux points

$$\langle \delta_{i,x} - \delta_{i,0} \rangle \langle \varphi_0 \cdot \varphi_x \rangle = \beta \sum_{j(i)} \{ \langle \varphi_0 \cdot \varphi_j \rangle \langle \varphi_x \cdot \varphi_i \rangle - \langle \varphi_0 \cdot \varphi_i \rangle \langle \varphi_x \cdot \varphi_j \rangle \} \quad (118)$$

En transformée de Fourier

$$\langle \varphi_x \cdot \varphi_y \rangle = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})} G(\mathbf{q}) \quad (119)$$

l'équation (118) se traduit par

$$G(\mathbf{q}) - G(\mathbf{k}) = 2\beta \sum_1^d (\cos q_\mu - \cos k_\mu) G(\mathbf{q}) G(\mathbf{k}) \quad (120)$$

Lorsque $\beta < \beta_c$, $\langle \varphi_0 \cdot \varphi_x \rangle \rightarrow 0$ pour $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, de sorte que $G(\mathbf{q})$ est régulière à $\mathbf{q} = 0$. Nous en déduisons que

$$G^{-1}(\mathbf{q}) = \beta \left\{ \xi^{-2} + 2 \sum_1^d (1 - \cos q_\mu) \right\} \quad (121)$$

où ξ^{-2} est une constante à déterminer par la condition $\langle \varphi_0^2 \rangle = 1$, ce qui conduit à l'équation du col (100). Pour $\beta > \beta_c$ il apparaît une aimantation spontanée, ce qui se traduit par une singularité de la forme $M^2 (2\pi)^d \delta(\mathbf{q})$ dans $G(\mathbf{q})$. Bien évidemment la distribution δ est supposée périodique sur le tore $q_\mu = q'_\mu + 2\pi n_\mu$, n_μ entier. La soustraction de la constante M^2 à $\langle \varphi_0 \cdot \varphi_x \rangle$ ne modifie pas l'équation (118) de sorte que

$$\beta > \beta_c, \quad d > 2 \quad \langle \varphi_0 \cdot \varphi_x \rangle = M^2 + \frac{1}{\beta} \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{2 \sum_1^d (1 - \cos q_\mu)} \quad (122)$$

et β_c reste défini par (102). La condition $\langle \varphi_0^2 \rangle = 1$ conduit alors à la relation

$$1 - M^2 = \frac{\beta_c}{\beta} \quad (123)$$

Nous retrouvons donc en toute dimension $d > 2$ la singularité en racine carrée de l'aimantation spontanée. L'exposant β est inchangé, $\beta = 1/2$, égal à sa valeur en champ moyen. Pour $\beta = \beta_c$ le comportement à grande distance des corrélations est celui du propagateur libre

$$\beta = \beta_c \quad \langle \varphi_0 \cdot \varphi_x \rangle = \frac{1}{\beta_c} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{2 \sum_1^d (1 - \cos q_\mu)} \quad (124)$$

$$\underset{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(d/2)}{\beta_c 2\pi^{d/2} (d-2)} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2}}$$

l'indice η est donc nul en toute dimension $d > 2$. Dans la phase symétrique, $\beta < \beta_c$, la susceptibilité est isotrope dans l'espace des variables internes et s'écrit

$$\chi = \sum_{\mathbf{x}} \langle \varphi_0 \cdot \varphi_{\mathbf{x}} \rangle = G(\mathbf{q} = 0) = \xi^2 / \beta \quad (125)$$

Elle diverge comme $(\beta_c - \beta)^{2\nu}$ et donc

$$\gamma = 2\nu = 2/(d - 2) \quad (126)$$

Le résultat analogue en dimension deux est que χ diverge comme $\exp 4\pi\beta$ pour $\beta \rightarrow \infty$.

A la limite n grand, les fonctions de corrélation à plus de deux points s'obtiennent simplement à l'aide de la propriété de factorisation. Pour un nombre impair de points elles s'annulent (en l'absence d'un champ extérieur) tandis que, par exemple, la fonction à quatre points est donnée par une somme d'expressions factorisées

$$\langle \varphi_{\mathbf{x}_1}^{\alpha_1} \varphi_{\mathbf{x}_2}^{\alpha_2} \varphi_{\mathbf{x}_3}^{\alpha_3} \varphi_{\mathbf{x}_4}^{\alpha_4} \rangle = \frac{1}{n^2} \sum_{\text{paires}} \delta^{\alpha_1 \alpha_2} \delta^{\alpha_3 \alpha_4} \langle \varphi_{\mathbf{x}_1} \cdot \varphi_{\mathbf{x}_2} \rangle \langle \varphi_{\mathbf{x}_3} \cdot \varphi_{\mathbf{x}_4} \rangle \quad (127)$$

où la somme comporte trois termes.

3.3 Solution en champ extérieur

En présence d'un terme de couplage à un champ extérieur $n \sum_i \mathbf{h}_i \cdot \varphi_i$ la méthode du col conduit à déterminer une fonction ξ_i^{-2} telle que

$$Z = Z_0 \left[\frac{1}{\beta} \left(\frac{2\pi}{n\beta} \right)^{\frac{1}{2}(n-2)} \right]^N \exp \frac{n}{2} \left\{ \beta \sum_i (\xi_i^{-2} + 2d) + \frac{1}{\beta} \sum_{i,j} \mathbf{h}_i \cdot \mathbf{h}_j \left(\frac{1}{\xi_i^{-2} - \Delta} \right)_{ij} - \text{Tr} \ln(\xi^{-2} - \Delta) \right\} \quad (128a)$$

Elle doit satisfaire en outre à la condition de stationarité

$$\beta = \left(\frac{1}{\xi^{-2} - \Delta} \right)_{ii} + \frac{1}{\beta} \sum_{j,k} \mathbf{h}_j \cdot \mathbf{h}_k \left(\frac{1}{\xi^{-2} - \Delta} \right)_{ji} \left(\frac{1}{\xi^{-2} - \Delta} \right)_{ik} \quad (128b)$$

En particulier si \mathbf{h} est uniforme, ξ est indépendant du site. En faisant la somme sur i dans (128b) on trouve

$$\beta = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\xi^{-2} + 2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu)} + \frac{1}{\beta} \xi^4 \mathbf{h}^2 \quad (129a)$$

tandis que, en appelant F_0 une constante indépendante de β , l'énergie libre par site s'écrit

$$F = F_0 + \frac{n}{2} \left\{ -\ln \beta + \beta(\xi^{-2} + 2d) + \frac{\xi^2}{\beta} \mathbf{h}^2 - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left[\xi^{-2} + 2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu) \right] \right\} \quad (129b)$$

Quel que soit β réel positif, l'équation (129a) admet toujours une solution avec ξ fini. On peut récrire cette condition

$$\beta^2 - \beta \xi^2 a(\xi^2) - \mathbf{h}^2 \xi^4 = 0$$

$$a(\xi^2) = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 + \xi^2 2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu)} \quad (129c)$$

$a(\xi^2)$ est positif et varie de 1 pour ξ^2 à zéro pour ξ^2 tend vers l'infini (lorsque $d > 2$, $\xi^2 a(\xi^2)$ tend vers une limite finie pour ξ^2 tend vers l'infini). Dans ces conditions β varie comme ξ^2 pour ξ petit et comme $|\mathbf{h}| \xi^2$ pour ξ tendant vers l'infini. La présence d'un champ extérieur, si petit soit-il, mais fini, a donc supprimé la transition comme nous nous y attendions. L'aimantation par site est alors égale à

$$\mathbf{M} = \frac{1}{nN} \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} \ln Z = \frac{\xi^2}{\beta} \mathbf{h} \quad (130)$$

A l'ancienne valeur critique $\beta = \beta_c$, l'équation (133) donne la relation entre ξ et \mathbf{h} sous la forme

$$\xi^6 \mathbf{h}^2 = \beta_c \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu) \left[\xi^{-2} + 2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu) \right]} \quad (131)$$

Si $\mathbf{h} \rightarrow 0$, ξ diverge. Plus précisément pour $d > 4$ le membre de droite a une limite finie, de sorte que

$$d > 4 \quad \beta = \beta_c \quad M \sim h^{1/3} \quad \delta = 3 \quad (132)$$

comme dans le cas du champ moyen. Si $d = 4$ on a une divergence logarithmique supplémentaire, $\xi^6 h^2 \sim \text{cst} \ln \xi$ et donc

$$d = 4 \quad \beta = \beta_c \quad M \sim \left(h \ln \frac{1}{h} \right)^{1/3} \quad \delta = 3 \quad (133)$$

Enfin pour $d < 4$, on trouve

$$d < 4 \quad \beta = \beta_c \quad M \sim h^{(d-2)/(d+2)} \quad \delta = \frac{d+2}{d-2} \quad (134)$$

La limite n tend vers l'infini du modèle de Heisenberg classique, ou modèle sphérique, permet donc d'étudier facilement, entre les deux dimensions critiques $d = 2$ et $d = 4$, les écarts à la théorie du champ moyen dûs aux fluctuations. Lorsqu'on approche de la dimension critique supérieure, l'apparition de fonctions logarithmiques annonce l'émergence de phénomènes nouveaux, tout naturellement reliés à des propriétés analogues dans le cas du mouvement brownien. En dimension deux, la longueur de corrélation diverge exponentiellement lorsqu'on s'approche de la température nulle - domaine pour lequel on peut par ailleurs construire une théorie de champ continue cohérente (le modèle σ non linéaire). La recherche des corrections d'ordre supérieur (en $1/n$) est plus complexe; elle fait intervenir des méthodes de calcul du type de celles qui seront exposées au chapitre V.

(i) Exprimer l'énergie libre en fonction de $\theta = \beta_c - \beta$, et de h^2 au voisinage du point critique. On posera $m^2 = \xi^{-2}$. Alors d'après (129b)

$$F = F_0 + \frac{n}{2} \left\{ \ln \frac{1}{\beta} + 2d\beta - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left[2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu) \right] + f \right\} \quad (135a)$$

$$f = -\theta m^2 + \frac{h^2}{\beta m^2} - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \left\{ \ln \left[\frac{m^2 + 2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu)}{2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu)} \right] - \frac{m^2}{2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu)} \right\}$$

avec, pour m^2 petit

$$f \underset{m^2 \rightarrow 0}{\sim} -\theta m^2 + \frac{h^2}{\beta m^2} + \begin{cases} Km^4 & d > 4 \\ Km^4 \ln \frac{1}{m} & d = 4 \\ Km^d & 2 < d < 4 \end{cases} \quad (135b)$$

Ici K est une constante positive (dépendant de d). L'équation (129a) exprime la stationnarité de F par rapport à m^2 , pour h et θ fixés. Retrouver le comportement critique pour h , θ et m^2 petits.

(ii) On peut appliquer la même technique de passage à la limite $n \rightarrow \infty$ pour étudier le comportement de la singularité de Lee et Yang dans un champ extérieur complexe. Posons $h = hu$ où u est un vecteur unitaire réel. La singularité se produit lorsque la solution $\xi(\beta, h)$ de (129a) devient multivaluée, c'est-à-dire si, de plus

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left[1 + \xi^2 2 \sum_1^d (1 - \cos p_\mu)\right]^2} + \frac{2h^2 \xi^2}{\beta} = 0 \quad (136)$$

Nous trouvons une paire de singularités sur l'axe imaginaire pur à $h = \pm ih_c$. Lorsque β tend vers β_c par valeurs inférieure, la partie singulière de l'énergie libre est en $(h \mp ih_c)^{3/2}$ pour $d > 2$, de sorte que à l'ordre le plus bas, l'exposant critique $\sigma = 1/2$ (comme en champ moyen). Montrer que

$$\begin{aligned} d > 4 & \quad h_c \sim (\beta_c - \beta)^{3/2} \\ d = 4 & \quad h_c \sim \frac{(\beta_c - \beta)^{3/2}}{\ln [1/(\beta_c - \beta)]} \\ d < 4 & \quad h_c \sim (\beta_c - \beta)^{\frac{1}{2}(d+2)/(d-2)} \end{aligned} \quad (137)$$

Ces résultats semblent contredire le fait que pour la singularité de Lee et Yang, la dimension critique supérieure est $d = 6$. Mais la prise en compte des corrections en $1/n$ invalide les expressions ci-dessus. Au voisinage de $d = 6$, σ s'écarte de $1/2$. En fait, la singularité de Lee et Yang n'est pas sensible au nombre de composantes à partir du moment où l'une d'elles est privilégiée par la présence du champ extérieur. La méthode $n \rightarrow \infty$ n'est donc pas adaptée pour étudier dans ce cas le rôle des fluctuations.

4. Corrections au champ moyen

L'approximation du champ moyen révèle l'existence de points critiques où se modifient les propriétés qualitatives et quantitatives du système étudié. Jusqu'ici nous avons rencontré des transitions continues, c'est-à-dire telles que l'énergie libre, sa dérivée l'énergie interne (et donc l'entropie), sont des fonctions continues à la transition. Les propriétés de symétrie sont elles discontinues avec l'apparition d'une aimantation spontanée dans les phases pures de l'existence d'un champ interne non nul. L'étude du modèle d'Ising en dimension deux et du modèle sphérique révèlent que les prédictions du champ moyen sont à reconsidérer en basse dimension en raison des fluctuations. Le modèle sphérique confirme que la dimension quatre joue un rôle crucial pour ces systèmes. Les exposants critiques commencent

à dévier des valeurs classiques par des corrections logarithmiques. Par ailleurs cette dimension est celle qui correspond à la renormalisabilité ultraviolette perturbative de la théorie des champs continue ayant même type de paramètre d'ordre et même groupe de symétrie (pour un modèle vectoriel à symétrie $O(n)$ ceci signifie un terme d'auto-couplage dans le lagrangien du type $\varphi^2 \cdot \varphi^2$). Les deux phénomènes sont intimement liés comme nous allons amplement en discuter par la suite.

On est donc amené à se poser la question des corrections au champ moyen et de façon analogue des corrections en $1/n$ dans la limite n grand. Cherchons un petit paramètre susceptible de permettre un développement systématique. L'idée la plus naïve est d'utiliser comme petit paramètre l'inverse du nombre de coordination c'est-à-dire dans le cas d'un réseau régulier l'inverse de la dimension – bien qu'a priori d ne prenne que des valeurs entières. Si l'on procède ainsi on sera amené à prendre en compte des corrélations entre proches, seconds, ... voisins. On pourrait dans le même esprit (mais avec une technique différente) étudier les corrections à l'approximation de Bethe. Bien entendu ceci signifie qu'on renonce à discuter des fluctuations collectives mettant en jeu l'ensemble des variables dont nous soupçonnons qu'elles sont responsables en basse dimension des écarts entre les exposants critiques réels et les valeurs prévues par l'approximation de champ moyen. Cependant une telle méthode permettra d'atteindre l'un des buts poursuivis. Elle va améliorer la recherche de la position du point critique et va donner des valeurs quantitativement plus précises des différentes quantités thermodynamiques hors de la zone critique. Ces indications ont leur intérêt par exemple lorsqu'on les confronte avec les données des simulations numériques. En revanche le comportement critique continuera, en ce qui concerne les corrélations à grande distance, à correspondre à celui d'un champ libre (le modèle Gaussien). La prise en compte de l'effet des fluctuations de grande longueur d'onde d'une manière non perturbative fait appel à d'autres techniques, reposant sur des resommations de séries perturbatives, sous des formes de plus en plus élaborées qui font l'objet du chapitre V.

Le programme consistant à obtenir ces développements en $1/d$ peut lui même être abordé par plusieurs biais. Nous choisissons ici d'illustrer l'un d'entre eux, quitte à y revenir dans la discussion des développements dits de couplage fort ou de haute température (chapitre VII). Pour simplifier les calculs nous choisissons de nous limiter au modèle d'Ising et procédons à l'étude des fluctuations autour d'un point stationnaire de l'intégrale fonctionnelle, obtenu au préalable par l'approximation du champ moyen.

4.1 Transformée de Laplace

Si J_{ij} désigne une forme symétrique définie positive, on peut écrire la formule de transformation de Laplace suivante

$$\exp\left(\frac{1}{2}\beta\sum_{i,j}\sigma_iJ_{ij}\sigma_j\right) = (\det\beta J)^{-1/2}\int\prod_i\frac{dH_i}{(2\pi)^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2\beta}\sum_{i,j}H_i(J^{-1})_{ij}H_j + \sum_iH_i\sigma_i\right\} \quad (138)$$

Une difficulté semble surgir lorsqu'on cherche à appliquer cette représentation au facteur de Boltzmann correspondant au modèle d'Ising. Dans ce cas J_{ij} vaut zéro ou un suivant que les sites sont voisins ou ne le sont pas et son spectre est symétrique autour de zéro de sorte que la formule (138) n'a donc pas de sens dans ce cas puisque l'intégrale Gaussienne n'est pas convergente, et la racine carrée du déterminant n'est pas définie. Cependant, ce n'est pas une difficulté insurmontable: une idée naturelle consiste à ajouter à l'interaction le terme $-\beta\lambda/2\sum_i(\sigma_i^2-1)$, c'est-à-dire zéro pour $\sigma_i = \pm 1$, qui transforme l'opérateur J en $J-\lambda$. Pour $\lambda > 2d$ on obtient alors un opérateur défini négatif. Malheureusement l'introduction d'un paramètre λ arbitraire, qui s'élimine dans un calcul exact, fausserait les approximations successives que nous avons l'intention de faire. On considèrera la représentation (138) plutôt comme une expression formelle évaluée sur un contour approprié, qui va conduire aux développements algébriques souhaités au voisinage d'un col, en laissant au lecteur le soin d'établir ce résultat sur des bases mathématiques plus solides. En sommant pour les "spins" $\sigma_i = \pm 1$, et en divisant par 2^N (c'est une convention), on obtient la fonction de partition pour le modèle d'Ising en champ extérieur h_i sous la forme

$$Z(\beta, h) = (\det\beta J)^{-1/2}\int\prod_i\frac{dH_i}{(2\pi)^{1/2}} \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta\sum_{i,j}H_i(J^{-1})_{ij}H_j + \sum_i\ln\cosh(H_i+h_i)\right\} \quad (139)$$

qui s'interprète comme une assemblée de spins indépendants, interagissants avec des champs H_i aléatoires, distribués selon une mesure gaussienne en $dH e^{-(1/2\beta)(HJ^{-1}H)}$. On notera que dans ce poids de probabilité le facteur de température apparaît sous la forme β^{-1} et non β . L'introduction de variable H_i continues nous permet d'appliquer la méthode du col qui conduit immédiatement aux équations du champ moyen

$$H_i = \beta\sum_jJ_{ij}\tanh(H_j+h_j) \quad (140)$$

L'étude des corrections sera alors faite en développant l'action dans l'équation (139) au voisinage d'une solution \bar{H}_i et en traitant perturbativement les termes successifs en $(H_i - \bar{H}_i)$. Les contributions à $\ln Z$ peuvent être classées comme dans la théorie des champs selon le nombre de boucles des diagrammes de Feynman connexes, comme on l'établira au chapitre V. Supposons le champ extérieur h_i uniforme, soit h , et retenons la solution \bar{H} de l'équation (140) uniforme et réelle

$$\bar{H} = 2\beta d \tanh(\bar{H} + h) \quad (141)$$

A l'ordre zéro (dit ordre des diagrammes en arbres) l'énergie libre est celle donnée par le champ moyen

$$F_0 = \ln \cosh(\bar{H} + h) - \beta d [\tanh(\bar{H} + h)]^2 \quad (142)$$

où \bar{H} est fonction de β et h par l'intermédiaire de (141), de sorte que l'aimantation s'écrit, à cet ordre

$$M_0 = \frac{d}{dh} F_0(\bar{H}(h, \beta), h, \beta) = \tanh(\bar{H} + h) \quad (143)$$

Substituons maintenant dans l'équation (138) $H_i \rightarrow H_i + \bar{H}$ et développons l'action au second ordre en H_i . En posant $Z_0 = e^{NF_0}$, il vient

$$\begin{aligned} \frac{Z}{Z_0} &= (\det \beta J)^{-1/2} \int \prod_i \frac{dH_i}{(2\pi)^{1/2}} \exp -\frac{1}{2} H \left[(\beta J)^{-1} - \frac{1}{\cosh^2(\bar{H} + h)} \right] H \\ &= \left\{ \det \left[1 - \frac{1}{\cosh^2(\bar{H} + h)} \beta J \right] \right\}^{-1/2} \end{aligned} \quad (144)$$

Nous constatons la disparition de la quantité singulière $(\det \beta J)^{-1/2}$. La première correction à l'énergie libre s'écrit donc

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln \left[1 - \frac{2\beta}{\cosh^2(\bar{H} + h)} \sum_1^d \cos q_\mu \right] \\ &= \frac{\beta^2 d}{2 \cosh^4(\bar{H} + h)} + O \left(\frac{\beta^4 d^2}{\cosh^6(\bar{H} + h)} \right) \end{aligned} \quad (145)$$

Le paramètre de développement, défini topologiquement sur les diagrammes perturbatifs par le nombre de boucles, joue un rôle analogue à celui de \hbar dans l'approximation semi classique en mécanique quantique.

Nous pouvons aussi réorganiser ces corrections en puissances inverses de d . Ces expressions deviennent de plus en plus complexes quand on tient compte des termes de degré plus élevé en $(H_i - \bar{H})$ dans le développement de l'action au voisinage du col. Contentons-nous ici de la correction d'ordre le plus bas (145). En écrivant désormais H pour $\bar{H} + h$, le terme dominant (142) devient

$$\begin{aligned} F_0 &= V_0(H) + h \tanh H \\ V_0(H) &= \ln \cosh H - H \tanh H + \beta d \tanh^2 H \end{aligned} \quad (146)$$

Les variables H et h sont reliées par la condition de col

$$\frac{\partial}{\partial H}(V_0(H) + h \tanh H) = 0 \quad (147a)$$

et à cet ordre l'aimantation est donnée par

$$M_0 = \frac{\partial}{\partial h}(V_0(H) + h \tanh H) \quad (147b)$$

La correction du premier ordre

$$V_1(H) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln \left[1 - \frac{2\beta}{\cosh^2 H} \sum_1^d \cos q_\mu \right] \quad (148)$$

permet d'écrire l'énergie libre sous la forme

$$\begin{aligned} F &= V_0 + V_1 + h \tanh H \\ dF &= \left(\tanh H + \frac{dV_1}{dH} \frac{dH}{dh} \right) dh \end{aligned} \quad (149)$$

où nous avons tenu compte de la condition de stationnarité à l'ordre le plus bas (147a) qui donne la relation entre H et h . Jusqu'à l'ordre un inclus, l'aimantation M est donc égale à

$$M = \tanh H + \frac{dV_1}{dH} \frac{dH}{dh} \quad (150)$$

Il est naturel à ce stade de procéder à une transformation de Legendre, et de prendre M comme variable à la place de H . En développant $H(M)$ au premier ordre inclus, il vient

$$\begin{aligned}
 H &= \operatorname{arctanh} M + H_1 + \dots \\
 \tanh H &= M - \left. \frac{dV_1}{dH} \frac{dH}{dh} \right|_{H=\operatorname{arctanh} M} + \dots
 \end{aligned}
 \tag{151}$$

Définissons le potentiel effectif V par la relation

$$V(M) = -F + hM \tag{152}$$

de sorte que

$$dV = h dM \tag{153}$$

Alors, jusqu'au premier ordre inclus, il vient

$$\begin{aligned}
 V &= -V_0(H) - V_1(H) + h \frac{dV_1}{d \tanh H} \frac{d \tanh H}{dh} + \dots \\
 &= -[V_0(H) + V_1(H)]|_{H=\operatorname{arctanh} M} \\
 &\quad + \left(\frac{dV_0}{d \tanh H} \frac{dV_1}{d \tanh H} + h \frac{dV_1}{d \tanh H} \right) \frac{d \tanh H}{dh}
 \end{aligned}$$

En vertu de l'équation de col $dV_0/d \tanh H = -h$, les deux derniers termes s'éliminent et on a simplement

$$V(M) = -[V_0(H) + V_1(H)]|_{H=\operatorname{arctanh} M} \tag{154}$$

L'équation (153) exprime qu'en l'absence de champ extérieur h , le potentiel effectif $V(M)$ est extremum. Le calcul à l'ordre zéro suggère en fait que $V(M)$ est minimum, et si les corrections ont un sens, c'est-à-dire restent petites, cette propriété doit être préservée aux ordres supérieurs. C'est la raison pour laquelle on a ajouté un signe moins dans la définition (152). Le point de transition β_c est alors défini de la manière suivante. Pour $\beta < \beta_c$, le minimum du potentiel est situé en $M = 0$. Pour $\beta > \beta_c$, $V(M)$ admet deux nouveaux minima en $\pm M_{sp}$.

On peut écrire $V(M)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
V_0(M) &= 2\beta d \frac{M^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{\pm} (1 \pm M) \ln(1 \pm M) = (2\beta d - 1) \frac{M^2}{2} - \frac{M^4}{12} + \dots \\
V_1(M) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln \left[1 - 2\beta(1 - M^2) \sum_1^d (1 - \cos q_\mu) \right] \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \ln \left[1 - 2\beta \sum_1^d (1 - \cos q_\mu) \right] \\
&\quad - M^2 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\beta \sum_1^d (1 - \cos q_\mu)}{1 - 2\beta \sum_1^d (1 - \cos q_\mu)} \\
&\quad + M^4 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[\frac{\beta \sum_1^d (1 - \cos q_\mu)}{1 - 2\beta \sum_1^d (1 - \cos q_\mu)} \right]^2 + \dots
\end{aligned} \tag{155}$$

Le développement en puissances de M^2 fait apparaître des coefficients singuliers à la position initiale du point critique $2\beta_c^{(0)}d = 1$, comme on s'y attend dans une méthode perturbative. L'origine reste un extremum de $V(M)$, cependant d'autres minima peuvent se développer lorsque le coefficient du terme en M^2 s'annule, c'est-à-dire pour une nouvelle valeur de β_c donnée, à cet ordre par

$$2\beta_c d = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{1 - 2d\beta_c \frac{1}{d} \sum_1^d (1 - \cos q_\mu)} = G(0, 2d\beta_c) \tag{156}$$

où G est la fonction de Green pour le mouvement brownien. On note la parenté de ce résultat avec celui du modèle sphérique où l'on avait (eqs (102) et (103)) $2d\beta_c = G(0, 1)$. Pour obtenir l'ordre dominant on substitue à $G(0, 2\beta_c d)$ sa valeur à l'ordre zéro $G(0, 1)$ qu'on peut développer en puissances de d^{-1} (eq.(I.44)) : $G(0, 1) = 1 + 1/2d + \dots$, soit

$$2d\beta_c = 1 + \frac{1}{2d} + \dots \tag{157}$$

L'effet prédominant des fluctuations en grande dimension est donc de diminuer la température critique (β_c augmente) sans pour autant modifier les exposants critiques.

En poursuivant le développement perturbatif au-delà des corrections quadratiques, montrer qu'on peut obtenir pour un modèle à symétrie $O(n)$ une expression de la position du point critique comme une série en d^{-1} (Fisher et Gaunt, Abe)

$$\frac{1}{2d\beta_c} = 1 - \frac{1}{2d} - \frac{1}{(2d)^2} \left(2 - \frac{2}{n+2} \right) - \frac{1}{(2d)^3} \left(7 - \frac{8}{n+2} \right) + \dots \quad (158)$$

A la limite $n \rightarrow \infty$ on retrouve le résultat (102)–(104), à savoir l'expression $1/2d\beta_c = 1 - \Pi(0)$, où $\Pi(0)$ est la probabilité de retour à l'origine pour le mouvement brownien, qui vaut 0 pour $d \rightarrow 2$. On s'attend donc en général à ce que la série devienne singulière à $d = 2$, mais ceci reste un problème ouvert. En particulier elle ne devrait pas avoir d'accident à $d = 4$. On remarque aussi que la valeur $n = -2$ semble jouer un rôle particulier. Cette valeur, pour peu qu'on définisse convenablement le prolongement continu en n , correspond à un modèle de champ fermionique complexe libre.

Calculons maintenant la susceptibilité dans la phase de haute température

$$\beta < \beta_c \quad \chi^{-1} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial M^2} \right|_{M=0} \quad (159)$$

L'expression antérieure donnait la position β_c du zéro de χ^{-1} . En soustrayant terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned} [2d(\beta_c - \beta)\chi]^{-1} = \\ 1 - \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\frac{1}{d} \sum_1^d (1 - \cos q_\mu)}{\left[1 - \frac{1}{d} \sum_1^d (1 - \cos q_\mu) \right] \left[1 - 2\beta \sum_1^d (1 - \cos q_\mu) \right]} + \dots \end{aligned} \quad (160)$$

Dans le second membre nous avons remplacé β_c par sa valeur à l'ordre dominant dans le dénominateur de l'intégrale du terme de correction. Lorsque $\beta \rightarrow \beta_c$ il est de même légitime de substituer dans le second facteur de cette intégrale le coefficient $\beta \rightarrow \beta_c \sim 1/2d$. Pour $d > 4$ l'intégrale reste convergente dans cette limite. La correction s'annule linéairement comme le terme principal à $\beta = \beta_c$ et l'exposant γ de la singularité n'est pas modifié: $\gamma = 1$. En revanche l'effet des fluctuations est catastrophique dans ce développement perturbatif en dimension quatre ou inférieure. L'intégrale de correction a une divergence infrarouge qui sera caractéristique aussi des corrections d'ordre supérieur et l'approximation du champ moyen perd son sens (critère de Landau–Ginzburg). Il faudra faire appel à une méthode de resommation plus puissante pour exhiber la nature des déviations des exposants critiques de la valeur prédite par champ moyen. Cette méthode doit pouvoir tenir compte de l'influence des fluctuations de grande longueur d'onde.

On pourrait cependant poursuivre le développement, et calculer les corrections en $1/d$ pour des grandeurs variées, lorsque $d > 4$. De même on peut aussi généraliser les raisonnements précédents à d'autres modèles.

Nous aurons également à revenir sur l'approximation du champ moyen dans le cas où on ne dispose plus d'un paramètre d'ordre local. Le cas typique est celui des théories de jauge.

Effet d'un champ extérieur inhomogène. Cette fois-ci, soit F l'énergie libre totale. Jusqu'à l'ordre d'une boucle, on a

$$F = V_0 + V_1 + \sum_i h_i \tanh H_i$$

$$V_0 = \sum_i \ln \cosh H_i - H_i \tanh H_i + \frac{1}{2} \beta \sum_{i,j} (\tanh H_i) J_{ij} (\tanh H_j) \quad (161)$$

$$V_1 = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln [\delta_{ij} - \beta J_{ij} (1 - \tanh^2 H_j)]$$

et la relation entre H et h est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial H_i} \left\{ V_0 + \sum_i h_i \tanh H_i \right\} = 0 \quad (162)$$

Posant

$$M_i = \frac{d}{dh_i} F(H_i(h), h_i) \quad (163)$$

on forme la transformée de Legendre Γ , telle que

$$\Gamma(M) + F(h) = \sum_i h_i M_i \quad (164)$$

qui permet de généraliser la notion de potentiel effectif (ce dernier est la densité de Γ si M est homogène). A l'ordre un, il vient

$$\begin{aligned} \Gamma(M) &= - (V_0 + V_1)|_{M_i = \tanh H_i} \\ &= -\frac{1}{2} \beta \sum_{ij} M_i J_{ij} M_j + \frac{1}{2} \sum_{i,\pm} (1 \pm M_i) \ln(1 \pm M_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln [\delta_{ij} - \beta J_{ij} (1 - M_j^2)] \end{aligned} \quad (165)$$

h_i étant alors donné par

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial M_i} = h_i \quad (166)$$

Montrer comment se généralise cette transformation à tous les ordres.

Avant de présenter l'étude générale des séries de perturbation, nous consacrerons le chapitre suivant à des considérations générales sur les lois d'échelle et des modèles simples de renormalisation.

Notes

L'approximation de champ moyen est presque aussi ancienne que la mécanique statistique. Une référence classique est W.L. Bragg, E.J. Williams, *Proc. Roy. Soc.* **A145**, 699 (1934). Les corrections de la formule de Clausius Mossotti pour les systèmes denses, obtenues par J. De Boer, F. Van der Maesen et C.A. Ten Seldam, *Physica* **19**, 265 (1953) et G. Stell et G.S. Rushbrooke, *Chem. Phys. Lett.* **24**, 531 (1974) utilisent le formalisme développé par J.G. Kirkwood, *J. Chem. Phys.* **4**, 592 (1936) et J. Yvon, *Actualités scientifiques et industrielles*, **543**, Hermann, Paris (1937). Le cas des milieux polaires a été étudié par L. Onsager, *J. Am. Chem. Soc.* **58**, 1496 (1936).

Pour une vue générale sur les phénomènes critiques, et sur leur contexte physique, on peut se reporter à H.E. Stanley *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (1971). La méthode de Landau est largement discutée dans L.D. Landau et E.M. Lifshitz *Statistical Physics*, 3ème édition revue par E.M. Lifshitz et L.P. Pitaevskii, Pergamon Press, Oxford (1980), dont il existe une version française. L'approximation de Bethe est présentée dans H. Bethe, *Proc. Roy. Soc.* **A-216**, 45 (1935). Voir aussi G.S. Rushbrooke et H.I. Scoins, *Proc. Roy. Soc.* **A-230**, 74 (1953). L'étude des modes mous qui apparaissent dans le cas de brisure spontanée d'une symétrie continue est due à J. Goldstone, *Nuovo Cimento*, **19**, 154 (1961). Les analogies entre le mécanisme de la supraconductivité et celui de la création de termes de masse dans le cadre d'une symétrie brisée en présence de champs de jauge, sujet qui n'a pas été abordé ici, sont présentées par Y. Nambu et G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961) et **124**, 246 (1961). L'article influent de M. Gell-Mann et M. Lévy, *Nuovo Cimento* **16**, 705 (1960), introduit le modèle σ . Divers aspects des brisures de symétrie, sont étudiés entre autres dans l'ouvrage de S. Coleman rassemblant ses cours d'Erice, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge (1985).

L'examen des racines complexes des fonctions de partition, est dû à C.N. Yang et T.D. Lee, *Phys. Rev.* **87**, 404,410 (1952). La présentation que nous en donnons est inspirée de celle de D. Ruelle, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 303 (1971), *Comm. Math. Phys.* **31**, 265 (1973). Pour de plus amples développements, voir J.D. Bessis, J.-M. Drouffe, P. Moussa, *J. Phys.* **A9**, 2105 (1976) et D.A. Kurtze, M.E. Fisher, *Phys. Rev.* **B20**, 2785 (1979). La recherche des racines dans le plan complexe des températures est discutée dans le cours donné à Boulder par M.E. Fisher, *Lectures in Theoretical Physics*, **VII-C**, edited by W.E. Brittin, University of Colorado Press, Boulder (1964). Voir également C. Itzykson, R.B. Pearson, J.-B. Zuber, *Nucl. Phys.* **B220 (FS8)** 415 (1983), et les travaux numériques de E. Marinari, *Nucl. Phys.* **B235 [FS11]**, 123 (1984), et de G. Bhanot, R. Salvador, S. Black, P. Carter et R. Toral, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 803 (1987).

Le modèle sphérique a été résolu par T.H. Berlin et M. Kac, *Phys.*

Rev. **86**, 821 (1952). Le lien avec le développement à n grand est du à H.E. Stanley, *Phys. Rev.* **176**, 718 (1968). Le livre de S. Coleman cité précédemment présente l'extension de ces méthodes, due à G. 't Hooft à des modèles de champs à valeur matricielle, qui seront discutés au chapitre X.

Les développements à d grand mentionnés au dernier paragraphe sont empruntés à M.E. Fisher et D.S. Gaunt, *Phys. Rev.* **133A**, 224 (1964) et R. Abe, *Prog. Theor. Phys.* **47**, 62 (1972).

Nous n'avons pas traité le problème des défauts dans les milieux ordonnés, qui constituent à juste titre une partie intégrante de la physique des transitions de phase. Pour combler cette lacune on se reportera au livre de M. Kléman, *Points, Lines and Walls in Liquid Crystals, Magnetic Systems and Various Ordered Media*, John Wiley and Sons, New York (1983), qui donne de nombreuses références aux travaux originaux. Pour les aspects topologiques des défauts, on pourra consulter l'article de revue de N.D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979) et celui de L. Michel, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 617 (1980).

CHAPITRE IV

LOIS D'ECHELLE – MODELE XY

De l'opalescence critique à la transition de Curie des ferromagnétiques, en passant par la transition vers la superfluidité de l'hélium, le comportement des polymères en solution, la conductivité des milieux aléatoires..., la physique des milieux condensés offre une très grande variété de phénomènes critiques qui se rangent en grandes classes d'universalité, caractérisées par des comportements spécifiques à grande distance, par des exposants et des rapports d'amplitudes universels... De son côté, la physique des particules suggère d'étudier des systèmes possédant des lois d'invariance locales, faisant surgir de nouvelles questions comme le confinement des quarks. Dans ce chapitre, nous allons donner une première vue assez fruste de la méthode et des idées de la renormalisation. Nous l'illustrerons, dans la première partie, par des approximations simples exposées en termes de modèles de spins classiques, et nous considérerons dans la seconde l'exemple du modèle XY en quelque détail.

1. Lois d'échelle. Transformations de renormalisation dans l'espace de configuration

1.1 Homogénéité et invariance d'échelle

La discussion des chapitres précédents suggère que, dans une région voisine d'un point de transition continue, les systèmes critiques ont des propriétés universelles. Le détail des interactions microscopiques n'influe plus sur le comportement des corrélations à grande distance. Celles-ci sont caractérisées par une analyse dimensionnelle spécifique, dictée par quelques propriétés essentielles du système, telles la dimension, la nature du paramètre d'ordre et le type de symétrie associé.

Comme de nombreux auteurs, nous utiliserons le langage du magnétisme pour les modèles de spin déjà présentés. L'approximation du champ moyen a fourni une première idée d'un comportement critique simple : les fluctuations ne modifient pas les comportements à grande échelle en dimension plus grande que la dimension critique supérieure. Cette dimension est égale à quatre pour les systèmes de spins, et le problème posé est donc

une étude en dimension quatre et inférieure. Si T_c désigne la température critique, nous utiliserons comme paramètre de contrôle la variable réduite

$$\theta = \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right) \quad (1)$$

Dans le langage de la théorie des champs, le carré de la masse "nue" est proportionnel à θ . Le domaine $\theta > 0$ correspond à une phase désordonnée symétrique. Pour $\theta < 0$, la symétrie est spontanément brisée. En nous plaçant dans ce cas, toute condition uniforme aux limites, ou tout champ extérieur infinitésimal uniforme, permettent d'isoler une phase pure, correspondant à une direction privilégiée de l'aimantation spontanée, parmi les directions équivalentes selon le groupe de symétrie. Une transition continue est caractérisée par une aimantation spontanée qui s'annule à $\theta = 0$. Dans une telle phase, seul subsiste un sous groupe réduit de symétrie qui est le groupe d'isotropie (ou petit groupe) de cette direction privilégiée. La taille du domaine voisin de $\theta = 0$, dans lequel on pourra négliger la maille a , (ou plus généralement la portée finie des interactions) devant la longueur de corrélation ξ , dépend des paramètres microscopiques et peut être une source de difficultés dans une étude concrète. Notre hypothèse est donc $\xi \gg a$. Une façon d'apprécier la longueur de corrélation est de considérer une configuration typique du système au voisinage de $\theta = 0$, et de prendre pour ξ la taille moyenne des amas où le spin prend une valeur donnée (dans le cas d'un groupe discret). Au point critique, ξ est infini, et cette échelle de longueur disparaît. De même dans ce voisinage, nous supposons que les corrélations deviennent isotropes.

Considérons pour simplifier un champ scalaire et supposons les longueurs initialement mesurées en terme d'un étalon microscopique, symbolisé par la maille a . Au point critique une fonction de corrélation isotrope

$$G(\mathbf{x}) = \langle \varphi(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{0}) \rangle \quad (2)$$

reflètera l'oubli de l'étalon microscopique s'il existe un dictionnaire permettant d'exprimer les observations à l'échelle de dix microns en termes de celles effectuées à l'échelle de un micron par exemple. *A priori*, si $r = |\mathbf{x}|$,

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \gamma \left(\frac{r_2}{r_1}, \frac{r_1}{a} \right)$$

où à l'évidence l'expression considérée est sans dimension. La théorie va s'attacher à justifier l'existence de la limite critique $a \rightarrow 0$ à r_1, r_2 fixes. Il s'ensuit qu'au point critique on a sensiblement, pour r_1 et r_2 grand devant la maille

$$\frac{G(r_2)}{G(r_1)} = \gamma \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \quad r_1 \gg a, \quad r_2 \gg a \quad (3)$$

Ceci constitue bien pour la fonction de corrélation la loi de correspondance cherchée. En outre, la propriété de groupe

$$\frac{G(r_3)}{G(r_1)} = \frac{G(r_3)}{G(r_2)} \times \frac{G(r_2)}{G(r_1)}$$

requiert que $\gamma(\rho)$ soit une fonction homogène, égale à l'unité pour $\rho = 1$. En d'autres termes, avec la définition traditionnelle de l'indice η (qui vaut zéro dans le cas du champ moyen)

$$G(r_2) = G(r_1) \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^{d-2+\eta} \quad \text{à } \theta = 0 \quad (4)$$

L'indice η mesure donc la déviation au modèle gaussien et $\eta \neq 0$ correspond à une théorie des champs invariante d'échelle non triviale. Plaçons-nous maintenant dans la phase désordonnée $\theta > 0$, mais si près du point critique que $\xi \gg a$. On peut distinguer trois régions de longueurs grandes devant la maille r ,

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i) & a \ll r \ll \xi \\ (ii) & a \ll r \sim \xi \\ (iii) & a \ll \xi \ll r \end{array} \right.$$

Dans la première région on s'attend à ce que les considérations précédentes s'appliquent, tout se passant en effet comme si la longueur de corrélation était infinie. Cette région est équivalente à la région ultraviolette d'une théorie des champs renormalisable, comme nous le verrons au chapitre suivant. La deuxième région est une zone délicate de transition où l'on commence à s'écarter d'un comportement homogène. Enfin, au fur et à mesure que l'on s'engage dans la troisième région, les fonctions de corrélation se mettent à décroître exponentiellement, divergeant de plus en plus du régime invariant d'échelle. On exprime ceci en disant que la température, caractérisée par la variable θ , est un paramètre essentiel pour le comportement à grande distance (infrarouge). Ce comportement est instable lorsqu'on modifie θ à partir de la valeur $\theta = 0$. Une façon équivalente revient à dire que plus la distance croît, plus on devient sensible à un écart à la température critique.

Ces considérations sont résumées, dans la région critique, par l'expression

$$G(r, \theta) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}} g \left(\frac{r}{\xi(\theta)} \right) \quad (5)$$

Lorsque son argument est petit la fonction g a une limite régulière, sauf dans quelques cas exceptionnels où apparaissent des termes logarithmiques. En revanche, cette fonction décroît exponentiellement à l'infini.

Pour poursuivre, il nous faut étudier le comportement de la longueur de corrélation lorsque θ tend vers zéro. L'approximation du champ moyen suggère une divergence en loi de puissance

$$\xi(\theta) \sim \xi_+ \theta^{-\nu} \quad \text{lorsque } \theta \rightarrow 0 \quad (6)$$

qui introduit un second exposant critique ν . La constante ξ_+ est évidemment fonction du détail microscopique des interactions. L'hypothèse (6) permet alors de relier l'échelle des longueurs (ou des masses) à celle des températures (en langage de théorie des champs, relier la masse physique à la masse nue) La théorie de Landau nous a donné $\nu = \frac{1}{2}$, tandis que pour le modèle d'Ising bidimensionnel $\nu = 1$.

Ces idées conduisent naturellement à une série de lois d'échelle pour les diverses quantités physiques, partant de "l'hypothèse d'homogénéité", à savoir que ξ est la seule échelle de longueur pertinente. Considérons l'énergie libre par unité de volume. Nous nous attendons à ce que les fluctuations contribuent à sa partie singulière dans le rapport du volume unité au volume $\xi(\theta)^d$, puisque dans nos normalisations l'énergie libre totale est sans dimension

$$F_{\text{sing}}(\theta) \sim \frac{1}{\xi(\theta)^d} \sim \theta^{\nu d} \quad (7)$$

C'est "l'hypothèse d'hyper-homogénéité". On désigne par α l'indice de divergence de la chaleur spécifique C proportionnelle à la dérivée seconde de F , d'où

$$\begin{aligned} C(\theta) &\sim \theta^{-\alpha} \\ \alpha &= 2 - \nu d \end{aligned} \quad (8)$$

Une valeur positive de α implique une divergence de la chaleur spécifique, tandis qu'une valeur négative (quand on a rétabli les facteurs appropriés à la thermodynamique) correspond à un point de rebroussement dans la courbe représentative en fonction de la température.

Pour justifier l'argument conduisant à l'équation (7) on peut encore raisonner comme suit (Pippard et Ginsberg). Supposons que l'énergie libre par unité de volume, ou du moins sa partie singulière, se comporte en $\theta^{2-\alpha}$. Si, à une température supérieure à la température critique ($\theta > 0$), se produit une fluctuation correspondant à un état ordonné sur une distance ξ , l'accroissement d'énergie libre correspondante sera $\Delta F \sim \theta^{2-\alpha} \xi^d$ et la probabilité $e^{-\Delta F}$ d'une telle fluctuation deviendra négligeable lorsque $\Delta F \simeq 1$, ce qui fournit l'estimation $\xi \sim \theta^{-(2-\alpha)/d}$. Identifiant l'exposant à ν on retrouve la relation (7).

Pour le modèle d'Ising bidimensionnel, la singularité logarithmique de la chaleur spécifique s'interprète comme $\alpha = 0$. Par ailleurs $\nu = 1$, en accord

avec (7). De même, pour une dimension d comprise entre 2 et 4, le modèle sphérique vérifie cette relation puisqu'on a trouvé

$$\alpha = \frac{d-4}{d-2}, \quad \nu = \frac{1}{d-2} \quad (9)$$

En revanche, dans le cas de l'approximation du champ moyen, la relation (7) n'est pas vérifiée si l'on regarde les choses superficiellement, puisque la discontinuité de la chaleur spécifique s'interprète comme une valeur $\alpha = 0$ et l'exposant $\nu = 1/2$ est incompatible avec $\alpha = 2 - \nu d$. Il faut plutôt considérer que les raisonnements qui conduisent à l'approximation de Landau (où les fluctuations sont négligées) sont incompatibles avec ceux que nous exposons ci-dessus. On peut cependant réanalyser la situation en disant que la prise en compte des fluctuations, négligeables en dimension élevée, devient impérative à partir de la dimension d_c , telle que $\alpha_c = 2 - \nu_c d_c$, c'est-à-dire $d_c = 4$. En d'autres termes, nous retrouvons le critère de Landau-Ginzburg fournissant la dimension critique supérieure.

La susceptibilité (dérivée seconde de l'énergie libre par rapport à un champ extérieur, à la limite d'un champ nul) est proportionnelle à l'intégrale spatiale de la fonction de corrélation à deux points. En se reportant à l'expression (5), on en déduit que

$$\chi(\theta) = \int_{|\mathbf{x}| < \xi(\theta)} d^d \mathbf{x} \frac{1}{|\mathbf{x}|^{d-2+\eta}} \sim \xi(\theta)^{2-\eta} \quad (10)$$

Si γ désigne l'exposant critique correspondant, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \chi(\theta) &\sim \theta^{-\gamma} \\ \gamma &= \nu(2 - \eta) \end{aligned} \quad (11)$$

En présence d'un champ extérieur H , la transition disparaît. L'aimantation $M(H, \theta)$, pour $\theta > 0$, s'annule linéairement avec H (coefficient $\chi(\theta)$). Pour $\theta < 0$, à la limite $H \rightarrow +0$, M tend vers l'aimantation spontanée, que nous noterons $M(\theta)$. Cette dernière s'annule lorsque T tend vers T_c par valeurs inférieures comme

$$M(\theta) \sim (-\theta)^\beta \quad \text{lorsque } \theta \rightarrow -0 \quad (12)$$

Cette relation définit l'exposant β . A la température critique, le comportement de M avec H est singulier, et on pose

$$M(H, \theta = 0) \sim H^{1/\delta} \quad \text{lorsque } H \rightarrow 0 \quad (13)$$

Les relations (12) et (13) impliquent que les échelles H , M^δ et $(-\theta)^{\beta\delta}$ sont reliées. Ceci nous conduit à l'équation d'état, exprimant $HM^{-\delta}$ comme fonction régulière de $\theta M^{-1/\beta}$

$$H = M^\delta f_H(\theta M^{-1/\beta}) \quad (14)$$

Le premier zéro négatif de f_H fournit l'aimantation spontanée, lorsque $H \rightarrow 0$. La valeur pour un argument nul donne le coefficient de proportionnalité dans la relation (13). Enfin, pour $\theta > 0$, l'aimantation M doit être linéaire en H lorsque tous deux tendent vers zéro, $M = \chi(\theta)H$. Ceci implique que lorsque son argument tend vers $+\infty$ la fonction f_H se comporte en $f_H(z) \sim z^{\beta(\delta-1)}$, et donne la relation $H \sim M\theta^{\beta(\delta-1)}$. En comparant avec (11), il vient

$$\gamma = \beta(\delta - 1) \quad (15)$$

On voit que le fil conducteur est de trouver des relations régulières entre quantités singulières. Supposant en outre que la singularité de la chaleur spécifique est la même au-dessus et au-dessous de la température critique, nous pouvons réinterpréter l'équation d'état (14) comme une relation pour la partie singulière de l'énergie libre, exprimée en fonction de H et θ . Pour $\theta > 0$, on écrit

$$F_{\text{sing}}(\theta, H) \sim \theta^{2-\alpha} f_F(H\theta^{-\beta\delta}) \quad (16)$$

Calculant la susceptibilité, dérivée seconde par rapport à H , il vient en

$$\gamma = 2\beta\delta + \alpha - 2 \quad (17)$$

Les deux relations (15) et (17) permettent d'obtenir β et δ .

En résumé, le calcul de deux indices critiques, η pour le comportement de la fonction de Green au point critique et ν donnant la divergence de la longueur de corrélation lorsque la température s'approche de la température critique, fournit (moyennant les hypothèses d'homogénéité) les quatre autres exposants dont nous rappelons l'expression

$\alpha = 2 - \nu d$ $\beta = \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta)$ $\gamma = \nu(2 - \eta)$ $\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta}$

(18)

Le groupe de renormalisation va nous permettre de justifier les hypothèses faites, et fournir un outil pour le calcul des exposants critiques. Ces derniers peuvent aussi s'obtenir à partir des développements perturbatifs de haute et basse température. Il semble qu'un accord se dégage entre ces méthodes si différentes, auxquelles il faut encore ajouter d'autres techniques numériques, fondées par exemple sur l'étude de rubans de taille finie, ou encore

la renormalisation dans l'espace réel, utilisant partiellement l'intégration probabiliste sur ordinateur. Enfin, et c'est le plus important, des résultats expérimentaux de plus en plus nombreux sont en accord quantitatif impressionnant avec les prédictions théoriques.

Ajoutons une remarque concernant la singularité de Lee et Yang. Dans le domaine réel, lorsque H est différent de zéro, l'aimantation est une fonction régulière de la température. En revanche, pour $\theta > 0$, son prolongement analytique dans le plan complexe H est singulier sur l'axe imaginaire pur à partir de $\pm iH_c$. L'équation (16) permet d'estimer la variation de H_c dans la région critique avec la température

$$H_c \sim \theta^{\beta\delta} = \theta^{\beta+\gamma} \quad (19)$$

En dimension élevée, $\beta = \frac{1}{2}$, $\delta = 3$, $\gamma = 1$, et on retrouve $H_c \sim \theta^{3/2}$. Mais la nature de la singularité en question n'est pas dictée par le comportement au voisinage du point critique ordinaire. Il faut faire intervenir une autre longueur caractéristique, qui devient infinie à la transition de Lee et Yang. La relation (19) exprime seulement une condition de compatibilité entre les deux singularités.

1.2 Relations de récurrence

On se propose d'étudier le comportement des systèmes au voisinage du point critique sous l'effet des changements d'échelle (ou dilatations). Ce point est l'objet essentiel des différentes méthodes de renormalisation. Celles-ci, dans le cadre de la théorie des champs, conduisent aux équations de Callan et Symanzik.

Nous venons d'établir des relations entre exposants critiques mettant en jeu directement les observables, en faisant seulement l'hypothèse d'homogénéité. Une seconde étape va consister à raffiner la méthode en s'intéressant à l'action (appelée encore suivant le contexte Hamiltonien...) du système et en étudiant sa loi de variation par changement d'échelle, quand on aura donné un sens plus précis à ce vocable. Il ne s'agit évidemment pas d'analyse dimensionnelle au sens conventionnel, quoique cette dernière intervienne aussi. Pour étudier une transformation d'échelle, nous procéderons d'abord dans l'espace de configuration, ou espace réel, par opposition aux méthodes de la théorie continue qui utilisent l'espace des moments. Le point de départ est la maille élémentaire, ou la portée finie des forces. Pour se référer à une échelle progressivement plus grande, afin d'effacer les détails microscopiques, il existe divers procédés (décimation, variables de blocs...). Aucun ne donne la panacée universelle.

Exposons d'abord, dans le cadre du modèle d'Ising, le principe de la méthode des variables de bloc, due à Kadanoff. L'idée consiste à considérer de nouvelles mailles, de taille λa , λ entier (ce sont les blocs) et à leur associer une nouvelle variable dichotomique σ_b choisie de telle sorte qu'elle reflète

la même tendance à l'orientation que l'ensemble des variables originelles attachées aux sites internes du bloc. Par exemple, on prendra le signe de la majorité des σ_i

$$\sigma_b = \text{Signe} \sum_{i \in b} \sigma_i \quad (20)$$

avec une convention pour le cas $\sum_{i \in b} \sigma_i = 0$ s'il peut se produire. Lorsque la longueur de corrélation est grande devant la maille, on peut s'attendre à ce que les fluctuations des σ_i à l'intérieur d'un bloc jouent un rôle négligeable tant que λa est inférieur à ξ . Ecrivant le poids statistique des configurations e^S , et partant de

$$S_a = \beta \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j + H \sum_i \sigma_i \quad (21)$$

avec H petit et β voisin du point critique, on cherche à définir une nouvelle action, relative aux variables de blocs, $S_{blocs} = S_{\lambda a}$ en faisant une somme contrainte

$$e^{S_{\lambda a}} = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \left[\prod_b \delta \left(\sigma_b - \text{Signe} \sum_{i \in b} \sigma_i \right) \right] e^{S_a} \quad (22)$$

Bien évidemment, la transformation est telle que la fonction de partition demeure inchangée

$$Z = \sum_{\{\sigma_b = \pm 1\}} e^{S_{\lambda a}} = \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{S_a} \quad (23)$$

A la différence des méthodes de décimation (où l'on somme sur une fraction des variables, en conservant fixes les autres), les nouvelles variables σ_b ne sont pas identifiables à certaines des variables initiales bien qu'elles soient de même nature. Dans une méthode de décimation les corrélations sont invariantes au changement d'unité de longueur $a \rightarrow \lambda a$ près. Il n'en est pas ainsi ici *a priori*.

En général, l'opération impliquée par la relation (22) conduit à une forme compliquée pour $S_{\lambda a}$, la sommation contrainte étant pratiquement aussi difficile à effectuer que celle de la fonction de partition originale. Cependant, $S_{\lambda a}$ continue à posséder la symétrie (globale) du système initial. Si le paramètre λ pouvait varier continuellement, on s'attendrait à ce qu'au voisinage de $\lambda = 1$, $S_{\lambda a}$ ait une forme voisine de celle de S_a . Sur le réseau, il ne peut en être ainsi et la transformation $S_a \rightarrow S_{\lambda a}$ est difficile à étudier sans hypothèse ou approximation supplémentaire. Le plus simple est évidemment de supposer, en simplifiant les choses à l'extrême et en utilisant le concept d'universalité, que $S_{\lambda a}$ n'implique, à une constante près, que des interactions entre paires de proches voisins et un terme linéaire brisant la symétrie

$$S_{\lambda a} \cong \beta_{\lambda} \sum_{(b,b')} \sigma_b \sigma_{b'} + H_{\lambda} \sum_b \sigma_b + S_0 \quad (24)$$

De ce fait, on néglige purement et simplement les interactions entre seconds, troisièmes... voisins ainsi que des termes impairs de brisure de symétrie mettant en jeu plusieurs variables. On justifiera plus tard le fait de négliger ces contributions supplémentaires qui deviendront inessentiels après de nombreuses itérations de la transformation de renormalisation. Néanmoins, leur inclusion est nécessaire dans un raisonnement général et, dans ces conditions, l'action initiale doit elle-même être considérée comme fonction d'un nombre infini de paramètres. Pour l'instant tenons-nous en à l'approximation (24) et simplifions encore en étudiant le cas où le champ H est nul, auquel cas H_{λ} est nul aussi. Alors, au terme constant S_0 près, le passage aux variables de blocs conduit à un nouveau modèle d'Ising, avec interaction entre proches voisins dans une nouvelle échelle de longueur. La transformation se réduit donc à

$$\begin{cases} \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_{\lambda} = \mathbf{x}/\lambda \\ \theta \rightarrow \theta_{\lambda} = \varphi(\lambda, \theta) \end{cases} \quad (25)$$

Ces relations expriment que les quantités physiques du modèle initial, relatives aux distances \mathbf{x} et à la température réduite θ , sont reliées à celles du modèle transformé, relatives aux distances \mathbf{x}_{λ} et à θ_{λ} . Sauf accident, la quantité additive S_0 et la loi de transformation $\theta_{\lambda} = \varphi(\lambda, \theta)$ sont des fonctions régulières de paramètres initiaux. Ce point est capital. La transformation de renormalisation (ici $\theta \rightarrow \theta_{\lambda}$) ne met pas en jeu de fonction singulière.

La relation (23), qui exprime la conservation de la fonction de partition, permet d'obtenir, pour l'énergie libre par site

$$\lambda^d F(\theta) = F(\theta_{\lambda}) + F_0(\theta) \quad (26)$$

où $F_0(\theta)$ est une fonction de θ qui elle-même peut dépendre de λ . Le fait que ce soit la même fonction F qui apparaisse au second membre tient à ce que le passage aux variables de blocs a produit un modèle analogue au modèle initial, aux paramètres près. La relation (26) est nécessairement approchée si on se limite à un nombre fini de paramètres; elle est, en revanche, exacte mais difficilement utilisable dans l'espace de dimension infinie des paramètres décrivant toutes les interactions.

Qualitativement, on s'attend à ce que l'itération de la transformation de renormalisation associée à un changement d'échelle produise les résultats suivants. Lorsque la température est différente de la température critique, l'accroissement de la taille des blocs doit progressivement les amener jusqu'à la longueur de corrélation initiale. Exprimée en unité de blocs, la nouvelle longueur de corrélation décroît, de sorte que l'écart à la température critique

doit croître; $\beta < \beta_c$ entraîne que, lorsque λ tend vers l'infini, β_λ doit tendre vers zéro, point fixe attractif de haute température. De même, lorsque $\beta > \beta_c$ la transformation de renormalisation fait tendre la température effective vers zéro. Il faut se rappeler que, dans la phase ordonnée, ξ caractérise la portée des corrélations des fluctuations autour de la valeur moyenne d'aimantation spontanée. Autrement dit, la renormalisation amplifie les déviations à la température critique, qui est donc un point fixe infrarouge, non trivial et instable (fig. 1).

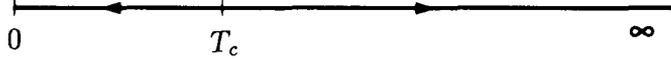


Figure 1 : Instabilité du point critique par rapport à la variable température.

Cette propriété permet d'identifier le point critique avec une grande sensibilité. Si cette valeur est connue et si on peut considérer λ comme un paramètre continu, on aura, suffisamment près du point critique et pour λ tendant vers 1,

$$\theta_\lambda = \lambda^{y_\theta} \theta \quad (27)$$

avec $y_\theta > 0$. La longueur de corrélation devient alors

$$\xi(\theta_\lambda) = \xi(\theta)/\lambda$$

L'itération de la transformation (27) permet de faire croître λ jusqu'à ce que $\xi(\theta_\lambda)$ et θ_λ soient d'ordre 1, de sorte que $\lambda \sim \theta^{-1/y_\theta}$. Alors

$$\xi \sim |\theta|^{-1/y_\theta} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{y_\theta} \quad (28a)$$

Si λ peut être considéré comme une variable continue, l'exposant est donc donné par

$$y_\theta = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{\theta_\lambda} \left. \frac{\partial}{\partial \lambda} \theta_\lambda \right|_{\lambda=1} \quad (28b)$$

L'hypothèse, selon laquelle la transformation est régulière, même au voisinage du point critique, entraîne l'égalité des valeurs de ν obtenues au-dessus et au-dessous de β_c . Les équations (28) n'ont, bien entendu, de sens que lorsque l'on peut effectuer des opérations de renormalisation dépendant continuellement du paramètre de dilatation λ . Sur un réseau, λ ne prend que des valeurs discrètes. En écrivant, près du point critique, $\theta_\lambda = \mu\theta + o(\theta)$, on obtient pour y_θ la valeur approchée $\ln \mu / \ln \lambda$, où μ est la dérivée de la transformation au point critique.

Dans la relation (26), puisque $F_0(\theta)$ est une fonction régulière de θ (même si λ croît aussi vite que θ^{-1/y_θ}), la partie singulière de l'énergie libre sera solution de l'équation homogène

$$\lambda^d F_{\text{sing}}(\theta) = F_{\text{sing}}(\theta_\lambda) \quad (29)$$

ce qui, compte tenu de la relation (27) au voisinage du point critique, entraîne que F_{sing} se comporte comme une puissance de θ , introduisant l'exposant α . Substituant $\lambda \sim \theta^{-1/y_\theta}$, on obtient

$$F_{\text{sing}}(\theta) = f_\pm |\theta|^{2-\alpha} \quad (30)$$

soit encore, comme précédemment

$$2 - \alpha = \nu d \quad (31)$$

On peut généraliser le raisonnement en présence d'un champ extérieur H . Les transformations de renormalisation entraînent que $\beta_\lambda(\beta, H)$, $H_\lambda(\beta, H)$ sont des fonctions de β et H , cette dernière s'annulant H en raison de ses propriétés de symétrie. Le point critique est alors caractérisé par l'annulation simultanée de θ et H . Plus généralement, nous désignons par θ et H les variables correspondant aux couplages pairs et impairs qui diagonalisent la transformation dans un voisinage du point fixe, et nous écrivons

$$\begin{aligned} \theta_\lambda &= \lambda^{y_\theta} \theta \\ H_\lambda &= \lambda^{y_H} H \\ \lambda^d F_{\text{sing}}(\theta, H) &= F_{\text{sing}}(\theta_\lambda, H_\lambda) \end{aligned} \quad (32)$$

Compte tenu des hypothèses et des définitions précédentes

$$F_{\text{sing}}(\theta, H) = |\theta|^{\nu d} F_{\text{sing}}(\pm 1, H/|\theta|^{\nu y_H}) \quad (33)$$

Par dérivation par rapport à H , on trouve l'aimantation et la susceptibilité

$$\begin{aligned} M &\sim (-\theta)^{\nu(d-y_H)} & \beta &= \nu(d-y_H) \\ \chi &\sim \theta^{-\nu(2-y_H-d)} & \gamma &= \nu(2y_H-d) \end{aligned} \quad (34)$$

Dans la discussion précédente, $y_\theta = 1/\nu$ and $y_H = \frac{1}{2}(d + \gamma/\nu)$ sont les deux exposants fondamentaux permettant d'engendrer tous les autres. Par élimination entre les équations (31) et (34), on obtient la relation

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (35)$$

Utilisant l'expression (33), on peut de manière équivalente obtenir l'aimantation en fonction du champ et de la température, sous la forme

$$H = M^{\nu y_H / \beta} f(\theta M^{-1/\beta}) \quad (36)$$

où l'on reconnaît l'expression (14), avec

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\nu y_H}{\beta} = \frac{y_H}{d - y_H} \\ 2 - \alpha &= \nu d = \beta(1 + \delta) \end{aligned} \quad (37)$$

On peut également considérer l'effet des transformations d'échelle sur les fonctions de corrélation en tenant compte de l'invariance de la fonction de partition. En nous limitant au domaine $\theta \geq 0$, on a par exemple

$$\begin{aligned} Z^{-1} \delta^2 Z &= \sum_{\text{blocs}} \delta H_\lambda(\mathbf{x}'_1) \delta H_\lambda(\mathbf{x}'_2) G(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2, \theta_\lambda, H_\lambda) \\ &= \sum_{\text{sites}} \delta H(\mathbf{x}_1) \delta H(\mathbf{x}_2) G(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \theta, H) \end{aligned} \quad (38)$$

$$G(\mathbf{x}, \theta, H) = \lambda^{2(y_H - d)} G(\mathbf{x}/\lambda, \theta_\lambda, H_\lambda) \quad (39)$$

Le préfacteur, qui provient de la condition (38), exprime à la fois le changement d'unité de longueur et celui d'échelle des champs magnétiques. Il s'interprète, dans le cadre de la théorie des champs, comme une renormalisation de fonction d'onde, et correspond, de ce fait, à une transformation non triviale sur le champ continu représentant la variable de spin

En itérant la transformation (39), on peut faire décroître \mathbf{x} et croître θ et H , de sorte qu'on s'éloigne de la région critique. En admettant que dans cette dernière les corrélations sont isotropes, on peut encore écrire

$$G(\mathbf{x}, \theta, H) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^{2(d - y_H)}} g(\theta |\mathbf{x}|^{1/\nu}, H |\mathbf{x}|^{y_H}) \quad (40)$$

En l'absence de champ nous retrouvons l'interprétation de $\xi \sim \theta^{-\nu}$ comme longueur de corrélation. A la température critique $\theta = 0$, on a, en revanche, $\xi \sim H^{-1/y_H}$. Au point critique $\theta = H = 0$, la fonction de corrélation est une fonction homogène de $|\mathbf{x}|$, et l'exposant η est donné par la relation

$$d - 2 + \eta = 2(d - y_H) \quad (41)$$

ou de manière équivalente

$$\nu(2 - \eta) = \nu(2y_H - d) = \gamma \quad (42)$$

En résumé, la méthode de renormalisation dans l'espace réel fait apparaître deux exposants fondamentaux $y_\theta = 1/\nu$ et y_H , caractérisant l'instabilité dans les directions des interactions paires (θ) et impaires (H) permettant d'exprimer les autres exposants sous la forme

$$\begin{array}{l}
 \alpha = 2 - \nu d \\
 \beta = \nu(d - y_H) \\
 \gamma = \nu(2y_H - d) \\
 \delta = \frac{y_H}{d - y_H} \\
 \eta = 2 + d - 2y_H
 \end{array}
 \tag{43}$$

Wegner a donné une discussion plus générale du comportement de l'ensemble des couplages, dénotés génériquement $\{K_i\}$, sous l'effet d'une transformation d'échelle λ arbitrairement voisine de l'unité. En désignant par $K_i = 0$ le point critique étudié, envisageons la transformation linéarisée au voisinage de ce point. Elle prend la forme

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} K_i(\lambda) \Big|_{\lambda=1} = y_{ij} K_j
 \tag{44}$$

Les combinaisons linéaires correspondant à des valeurs propres de la matrice y_{ij} sont associées à des combinaisons d'interactions, dites *champs de Wegner*, dont les coefficients dans l'action ont un comportement simple sous l'effet de la renormalisation. Ils sont classés en trois catégories

- (i) *essentiels*, lorsque la valeur propre correspondante est positive,
- (ii) *inessentiels*, si elle est négative,
- (iii) *marginiaux*, si elle est nulle.

En appliquant le même vocable aux couplages correspondants, on voit que le premier cas s'applique à la déviation à la température critique et au champ magnétique, dans la discussion précédente. Les couplages inessentiels tendent vers zéro sous l'effet de la renormalisation et pourront être négligés dans le domaine critique, où ils engendrent seulement des corrections aux termes dominants. Le cas des opérateurs et couplages marginaux est intéressant. Ils nécessitent une étude plus approfondie dépassant le cadre de l'approximation linéaire.

Cette approche globale permet de mieux justifier les hypothèses de la théorie de l'invariance d'échelle, pourvu qu'on sache décrire l'effet de la renormalisation dans l'espace élargi de l'ensemble des couplages (figure 2). La variété critique sera celle correspondant (au moins localement) à l'annulation des couplages essentiels. A l'intérieur de cette variété, dont la codimension est donc égale au nombre des valeurs propres positives de la matrice y_{ij} , les transformations de renormalisation sont contractantes. Si, en revanche, on part d'un point hors de cette variété, les trajectoires finiront par s'en éloigner.

Généralisant la relation (39) aux corrélations à un nombre n de spins, montrer qu'au voisinage du point critique,

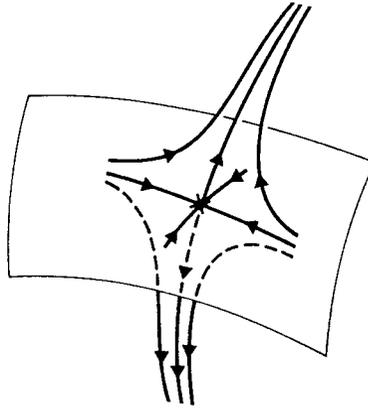


Figure 2 : Trajectoires du groupe de renormalisation, au voisinage du point critique.

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n; \theta, H) &= Z(\lambda)^{n/2} G(\mathbf{x}_1/\lambda, \dots, \mathbf{x}_n/\lambda; \theta_\lambda, H_\lambda) \\ Z(\lambda)^{1/2} &= \lambda^{-(d-y_H)} = \lambda^{-(d-2+\eta)/2} \end{aligned} \quad (45)$$

Ici, $Z(\lambda)$ est le facteur de renormalisation de fonction d'onde, et doit être distingué de la fonction de partition. Voilà encore un exemple de notation ayant acquis deux significations traditionnelles différentes dans deux domaines théoriques distincts. Dans le cas du champ libre, nous avons montré au chapitre I que le passage à la limite continue permet d'attribuer au champ la dimension $(d-2)/2$ en terme de nombre d'onde (inverse de longueur). L'interprétation de la relation (45) consiste à dire que si l'on associe les fonctions de corrélations ainsi décrites à des champs $\varphi(\mathbf{x})$ dans le domaine continu, leur dimension effective correspondante est

$$d_\varphi = d - y_H = \frac{d-2}{2} + \frac{\eta}{2} \quad (46)$$

On dira donc que $\eta/2$ est la *dimension anormale du champ* φ , déviation à la dimension canonique $(d-2)/2$. La relation (45), quant à elle, exprime que

$$\sum_i H_i \sigma_i \rightarrow \int H(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d^d \mathbf{x}$$

est sans dimension, ou encore que la dimension de $H(\mathbf{x})$ est y_H .

1.3 Exemples et approximations

Nous réservant de revenir plus tard sur les méthodes numériques, nous allons nous contenter d'exposer ici quelques approximations encore assez

grossières, qui illustrent la recherche de transformations de renormalisation. Nous commencerons par un cas élémentaire où la méthode de décimation, c'est-à-dire d'intégration sur une partie des variables, est possible et conduit au résultat exact.

1.3.1 Décimation unidimensionnelle

Pour varier quelque peu, nous examinons ici le modèle de Potts qui généralise le modèle d'Ising. Les variables dynamiques peuvent prendre en chaque site q valeurs distinctes. Le cas $q = 2$ est celui du modèle d'Ising. L'interaction entre proches voisins prend deux valeurs, selon que les variables correspondantes sont égales (cas favorisé) ou inégales. Dans le cas d'une dimension et pour un réseau de taille L nous écrivons la fonction de partition

$$Z_L = \frac{1}{q^L} \sum_{\{\sigma\}} \exp \left(\beta \sum_{n=1}^L (2\delta_{\sigma_n, \sigma_{n+1}} - 1) \right) \quad (47)$$

Nous avons convenu que le poids statistique d'une configuration correspondant à deux spins voisins égaux est e^β , et $e^{-\beta}$ dans le cas contraire. Le facteur q^{-L} assure que Z vaut 1 pour $\beta = 0$. La symétrie globale du système est le groupe des permutations de q objets π_q , ou l'un de ses sous-groupes transitifs, par exemple le groupe cyclique Z_q (pour $q = 2$, $\pi_2 = Z_2$).

Chaque facteur $\exp \beta(2\delta_{\sigma\sigma'} - 1)$ se développe selon

$$e^{\beta(2\delta_{\sigma\sigma'} - 1)} = \left(\frac{e^\beta + (q-1)e^{-\beta}}{q} \right) \times 1 + \left(\frac{e^\beta - e^{-\beta}}{q} \right) \times (q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \quad (48)$$

Les coefficients 1 et $(q\delta_{\sigma\sigma'} - 1)$ (qui généralisent 1 et $\sigma\sigma'$ dans le cas $q = 2$ du modèle d'Ising) sont orthonormaux, dans le sens que

$$\frac{1}{q} \sum_{\mu} [a_1 + b_1(q\delta_{\sigma\mu} - 1)][a_2 + b_2(q\delta_{\mu\sigma'} - 1)] = a_1 a_2 + b_1 b_2 (q\delta_{\sigma\sigma'} - 1) \quad (49)$$

La fonction de partition est alors la trace de la matrice (48), élevée à la puissance L , et l'énergie libre s'écrit

$$F = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln Z_L}{L} = \ln \frac{e^\beta + (q-1)e^{-\beta}}{q} \quad (50)$$

Bien évidemment, il n'y a pas de transition. Pour $q = 2$ ceci se réduit au résultat connu $F = \ln \cosh \beta$.

Dans la méthode de décimation, nous considérons des blocs de taille λa , $\lambda = 2, 3, \dots$, où a est la maille du réseau. Gardant fixes les variables attachées

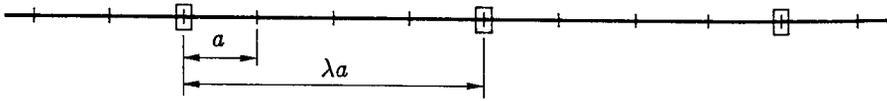


Figure 3 : Le réseau unidimensionnel et la décimation.

aux sites dont la coordonnée est un multiple de λa , nous sommes sur les variables intermédiaires. En posant

$$t = \frac{1 - e^{-2\beta}}{1 + (q-1)e^{-2\beta}} \quad (51)$$

qui généralise la notation $t = \tanh \beta$ du cas $q = 2$, nous obtenons sans peine, à l'aide de l'identité (49)

$$t_\lambda \equiv t(\beta_\lambda) = t(\beta)^\lambda \quad (52)$$

Ceci constitue l'équation de renormalisation *exacte* de ce cas très simple, où la décimation conserve les propriétés d'interaction entre proches voisins. Plus précisément, l'équation (52) s'accompagne de la transformation

$$\frac{Z_L(\beta)}{\left(\frac{e^\beta + (q-1)e^{-\beta}}{q}\right)^L} = \frac{Z_{L/\lambda}(\beta_\lambda)}{\left(\frac{e^{\beta_\lambda} + (q-1)e^{-\beta_\lambda}}{q}\right)^{L/\lambda}} \quad (53)$$

Les points fixes de la transformation (52) sont $t = 0$ ($\beta = 0$), point fixe attractif de la haute température, et $t = 1$ ($\beta = \infty$), point fixe répulsif de basse température qui joue dans ce cas le rôle de point critique. Si dans (52) et (53) on imagine que λ varie continuellement à partir de $\lambda = 1$ (ce qui est ici légitime étant donné la structure de ces équations qui se prolongent naturellement en λ), on obtient le comportement de la longueur de corrélation à basse température. Comme au voisinage de $t = 1$, $1 - t$ joue le rôle de la variable θ de la discussion générale, avec

$$1 - t_\lambda \sim \lambda(1 - t) \quad (54)$$

on en déduit que

$$\xi \sim \frac{1}{1-t} \sim \frac{1}{q} e^{2\beta} \quad (55)$$

qui est le résultat attendu.

A plus d'une dimension, la décimation engendre des interactions entre seconds, troisièmes..., voisins. Des troncatures, mal contrôlées en général,

sont nécessaires. En outre, ce type de transformation souffre de difficultés dues à l'absence de renormalisation de la variable de spin.

Il est donc intéressant de développer d'autres types d'approximations, en partie contrôlables, pour lesquelles il est possible de faire des calculs relativement simples. L'une d'elles est l'approximation proposée par Migdal et interprétée par Kadanoff que nous allons exposer.

1.3.2 Déplacement des liens

On considère la fonction de partition

$$Z = \sum_{\{\sigma\}} e^{S(\sigma)} \quad (56)$$

Si $\Delta(\sigma)$ est une fonctionnelle des spins dont la valeur moyenne, dans l'ensemble précédent, est nulle

$$\langle \Delta(\sigma) \rangle = Z^{-1} \sum_{\{\sigma\}} \Delta(\sigma) e^{S(\sigma)} = 0 \quad (57)$$

on a, en utilisant l'inégalité de convexité,

$$Z_{\Delta} = \sum_{\{\sigma\}} e^{S(\sigma) + \Delta(\sigma)} = Z \langle e^{\Delta(\sigma)} \rangle \geq Z e^{\langle \Delta(\sigma) \rangle} = Z \quad (58)$$

L'approximation consiste à remplacer l'action $S(\sigma)$ par l'action modifiée $S(\sigma) + \Delta(\sigma)$, afin d'obtenir ainsi des relations de récurrence. Continuons à prendre l'exemple du modèle de Potts, mais cette fois-ci en dimension quelconque. Le réseau est supposé carré, cubique ou hypercubique. La transformation faisant jouer des rôles inéquivalents aux différentes directions 1, 2, ..., d , nous autorisons d'emblée des couplages distincts β_1, \dots, β_d , pour les interactions entre voisins dont le lien est parallèle à la direction correspondante. L'action s'écrit alors

$$S(\sigma) = \sum_{\mathbf{x}, \mu} \beta_{\mu} (2\delta_{\sigma_{\mathbf{x}}, \sigma_{\mathbf{x}+\hat{\mu}}} - 1) \quad (59)$$

Cherchons une perturbation Δ , suffisamment simple, satisfaisant à la condition (57), et telle que la nouvelle action $S + \Delta$ s'interprète comme celle d'un modèle analogue sur un réseau de maille plus grande. L'approximation consistera ensuite à substituer au membre de droite de l'inégalité (58) le membre de gauche. Deux paires de variables attachées à des sites voisins, telles que les liens correspondants soient parallèles à la même direction, sont telles que

$$\langle (2\delta_{\sigma_{\mathbf{x}}, \sigma_{\mathbf{x}+\hat{\mu}}} - 1) - (2\delta_{\sigma_{\mathbf{y}}, \sigma_{\mathbf{y}+\hat{\mu}}} - 1) \rangle = 0 \quad (60)$$

Ceci découle de l'invariance par translation, à la limite thermodynamique. Cette relation permet donc de construire une quantité Δ qui déplace les interactions entre liens du même type.

Supposons que nous voulions passer d'une maille initiale de taille a , à une nouvelle maille de taille λa , où λ est un entier. Nous allons définir une succession de quantités Δ qui permet d'obtenir le résultat désiré. Dans un premier temps, nous déplaçons, parallèlement à la direction μ les interactions correspondant à des liens parallèles aux directions distinctes de μ entre variables internes aux blocs de taille λa , pour les amener sur les faces des blocs (figure 4). A ce stade, les interactions sur les faces sont multipliées par un facteur λ , tandis que les variables internes n'interagissant plus que le long de l'axe μ , il est possible d'effectuer la sommation correspondante en utilisant la même technique que dans la décimation unidimensionnelle. Le résultat s'écrit alors

$$\begin{cases} t(\beta'_\mu) = t(\beta_\mu)^\lambda \\ \beta'_\nu = \lambda \beta_\nu \end{cases} \quad \nu \neq \mu \quad (61)$$

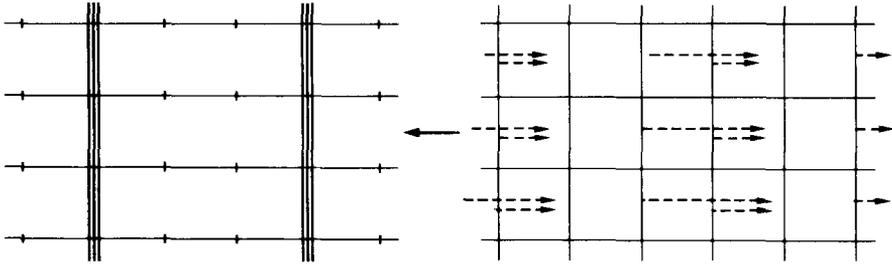


Figure 4 : La première étape du déplacement des liens.

On peut répéter l'opération pour les différentes directions $\mu = 1, 2, \dots, d$. A l'issue du processus sur le réseau de maille λa , les couplages β_μ sont remplacés par des couplages $\beta_\mu(\lambda)$ qui sont donnés par les relations de récurrence de Migdal-Kadanoff

$$t(\lambda^{\mu-d} \beta_\mu(\lambda)) = [t(\lambda^{\mu-1} \beta_\mu)]^\lambda \quad 1 \leq \mu \leq d \quad (62)$$

L'asymétrie évidente du processus justifie le choix de couplages distincts selon les directions. La transformation, toutefois, ne mélange pas les différents couplages. Il est clair qu'on pourrait imaginer bien des variantes, destinées en particulier à rétablir un traitement équivalent des directions. Rappelons, en outre, que de toute manière nous avons substitué à l'inégalité (58) une égalité de sorte que (62) ne peut prétendre définir un flot de renormalisation exact (sauf, bien évidemment, à une dimension).

Ecrire dans la même approximation le facteur multiplicatif de la fonction de partition accompagnant le changement d'échelle et de couplages.

Soit $\{\beta_\mu^*\}$ un point fixe non trivial de la transformation. La relation relative à la première variable s'écrit

$$t(\lambda^{1-d}\beta_1^*) = [t(\beta_1^*)]^\lambda \quad (63)$$

Alors, il résulte de (62) que

$$\beta_\mu^* = \lambda^{-(\mu-1)}\beta_1^* \quad (64)$$

L'ensemble de ces valeurs critiques vient à coïncidence lorsque l'on prolonge analytiquement en λ jusqu'à $\lambda = 1$.

À deux dimensions, rappelons la propriété de dualité, valable aussi bien pour le modèle de Potts que pour le modèle d'Ising. Dans le cas anisotrope, la transformation de dualité s'écrit

$$(\beta_1, \beta_2) \leftrightarrow (\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2) \quad (65)$$

$$e^{-2\tilde{\beta}_1} = t(\beta_2)$$

$$e^{-2\tilde{\beta}_2} = t(\beta_1) \quad (66)$$

La ligne critique invariante correspond à $\exp(-2\beta_1) = t(\beta_2)$, c'est-à-dire

$$(q-1)e^{-2\beta_1}e^{-2\beta_2} + e^{-2\beta_1} + e^{-2\beta_2} - 1 = 0 \quad (67)$$

Ainsi à deux dimensions la courbe d'auto-dualité contient le point fixe de Migdal-Kadanoff quel que soit λ . Les expressions (66) et (67) généralisent celles obtenues au chapitre II pour le modèle d'Ising dans le cas $q = 2$. Nous présentons une étude générale de la dualité au chapitre VI. En particulier, le point critique isotrope $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ est tel que

$$e^{-2\beta} = t(\beta) = \frac{\sqrt{q}-1}{q-1} \quad (68)$$

Etablir ces résultats et vérifier que le point fixe donné par les équations (63)-(64) est bien situé sur la courbe (67).

Revenons aux transformations de Migdal-Kadanoff en dimension 2, et introduisons pour la commodité, au lieu de β_1 et β_2 , les variables

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-2\beta_1} \\ y_2 &= t(\beta_2) = \frac{1 - e^{-2\beta_2}}{1 + (q-1)e^{-2\beta_2}} \end{aligned} \quad (69)$$

La transformation s'écrit alors plus simplement

$$y_\mu(\lambda) = F_\lambda(y_\mu) \quad (\mu = 1, 2)$$

$$F_\lambda(y) = \left\{ \frac{[1 + (q-1)y]^\lambda - [1-y]^\lambda}{[1 + (q-1)y]^\lambda + (q-1)[1-y]^\lambda} \right\}^\lambda \quad (70)$$

Pour λ entier $F_\lambda(y)$ est une transformation rationnelle avec, en particulier, $F_1(y) = y$, comme il se doit. Pour le modèle d'Ising ($q = 2$) et pour $\lambda = 2$

$$F_2(y) = \left(\frac{2y}{1+y^2} \right)^2 \quad (71)$$

La figure 5 donne une représentation de $F_2(y)$ et indique l'instabilité typique du point critique ainsi obtenu. Il résulte de (70) que pour toute valeur de λ le point fixe instable est de la forme

$$y_1 = y_2 = y^* = F_\lambda(y^*) \quad (72)$$

Ce point dépend de λ , mais il est nécessairement situé sur la courbe d'auto-dualité $y_1 = y_2$, comme on l'a vu ci-dessus. Bien que sur le réseau la transformation n'ait de sens que pour λ entier, les formules ci-dessus se prolongent naturellement en λ . Dans le cas où $\lambda \rightarrow 1$, nous retrouvons le point critique isotrope

$$y_1 = y_2 = \frac{1 - y_1}{1 + (q-1)y_1} = \frac{\sqrt{q} - 1}{q - 1} \quad (73)$$

Mais les exposants critiques sont assez irréalistes et dépendent même de λ . En effet, au voisinage du point critique, en vertu des relations (27) et (28), on peut linéariser la transformation sous la forme

$$(y_\lambda - y^*) \simeq F'_\lambda(y^*)(y - y^*) \quad (74)$$

avec

$$1 < F'_\lambda(y^*) = \lambda^{1/\nu}$$

$$\nu = \frac{\ln \lambda}{\ln F'_\lambda(y^*)} \quad (75)$$

Comparons, par exemple, cette valeur avec le résultat exact du modèle d'Ising bidimensionnel, $\nu = 1$. Pour $q = 2$, $\lambda = 2$, on trouve

$$y^* = 0.2956 \quad F'_2(y^*) = 1.6786 \quad \nu = 1.3383 \quad (76)$$

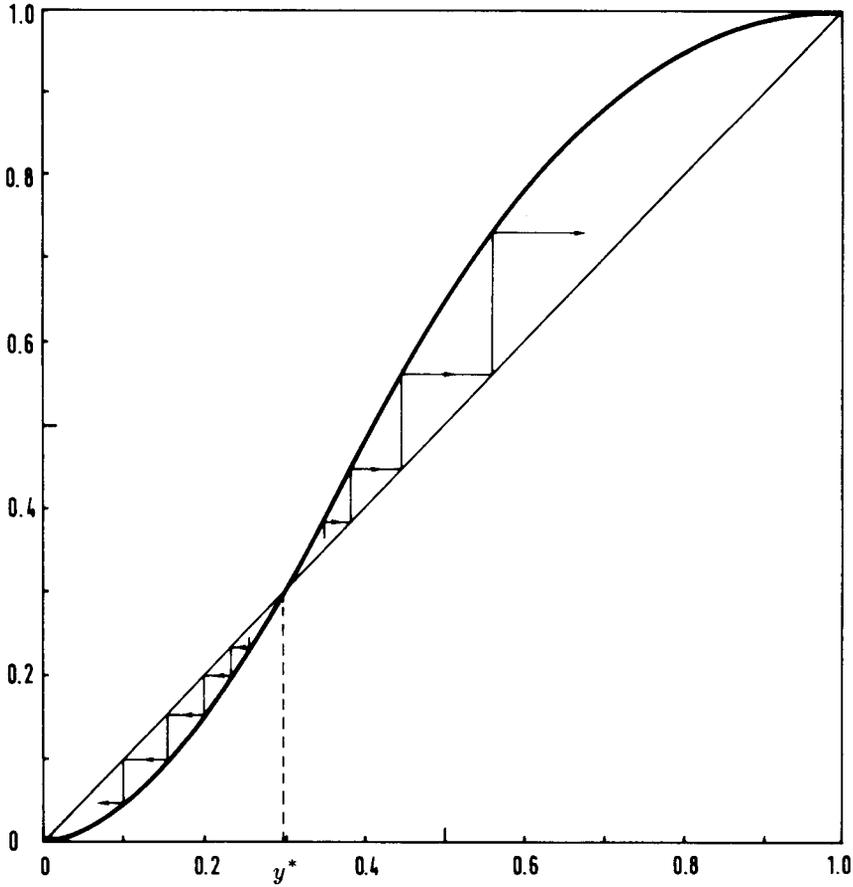


Figure 5 : La transformation $y \rightarrow F_2(y) = [2y/(1+y^2)]^2$ et son point fixe instable $y^* \simeq 0.2956$, $F_2'(y^*) \simeq 1.6786$.

ce qui n'est pas très bon. Ce résultat ne s'améliore pas sensiblement si on passe à la limite $\lambda \rightarrow 1$. Considérant toujours le cas $q = 2$, y^* tend alors vers la valeur familière

$$y^* = \sqrt{2} - 1 = 0.4142 \quad (77)$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \nu^{-1} &= \left. \frac{d}{d\beta} (\beta + \sinh \beta \cosh \beta \ln \tanh \beta) \right|_{\beta^*} = 2 + \cosh 2\beta^* \ln \tanh \beta^* \\ &= 2 + \sqrt{2} \ln (\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \nu = 1.327 \end{aligned} \quad (78)$$

A ces défauts s'ajoute le fait que comme dans toute méthode de décimation, les variables de bloc sont parmi les spins originaux, et donc que $G(\mathbf{x}, \beta) = G(\mathbf{x}/\lambda, \beta_\lambda)$ pour les corrélations. Ceci implique

$$d - y_H = \beta/\nu = 0 \quad (79)$$

Malgré ces faiblesses, l'approximation de Migdal-Kadanoff est intéressante en raison de son caractère variationnel qui permet d'espérer des améliorations systématiques, comme certains l'ont tenté. En outre, elle est exacte à la dimension critique inférieure ($d = 1$ pour le modèle de Potts), et l'idée générale s'applique à des systèmes plus complexes comme les modèles invariants de jauge.

1.3.3 Règle majoritaire

Illustrons la règle majoritaire sur un cas étudié par Niemeijer et van Leeuwen, celui du modèle d'Ising à deux dimensions sur un réseau triangulaire, où chaque site a six voisins. En suivant les méthodes du chapitre II on trouve que l'énergie libre par site (normalisée à zéro à température nulle) est donnée par

$$F(\beta) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2\theta}{(2\pi)^2} \ln[(\cosh 2\beta)^3 + (\sinh 2\beta)^3 - \sinh 2\beta(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos(\theta_1 + \theta_2))] \quad (80)$$

Le point critique est

$$\beta_c = \frac{1}{4} \ln 3 = 0.2747 \quad (81)$$

et les exposants critiques sont les mêmes que ceux correspondant à un réseau carré.

Etablir ces résultats.

Le réseau triangulaire n'est pas égal à son dual. La transformation de dualité du modèle d'Ising sur un tel réseau conduit à un modèle sur un réseau hexagonal où chaque site a trois voisins avec un couplage β' tel que

$$e^{-2\beta'} = \tanh \beta \quad (82)$$

En complétant cette transformation par une opération de décimation dite *transformation étoile-triangle*, on va retrouver un modèle d'Ising entre proches voisins sur un réseau triangulaire. Sur le réseau hexagonal dual, marquons un site sur deux comme l'indique la figure 6. Chaque site marqué du réseau hexagonal possède trois voisins non marqués. Comme il y a deux fois plus de sites duaux que de sites initiaux, il y a donc autant

de sites originels que de sites marqués, et ces derniers engendrent un réseau triangulaire isomorphe au réseau initial. Sur le réseau hexagonal, l'interaction entre proches voisins, d'intensité β' , couple sites marqués et non marqués. Sommons sur les valeurs des spins situés sur ces derniers. Chaque tel spin s est couplé à trois spins s_1, s_2, s_3 du réseau marqué, et l'on trouve

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{s=\pm 1} \exp[\beta' s(s_1 + s_2 + s_3)] = A \exp[\beta''(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1)] \\ A^4 = \cosh 3\beta' (\cosh \beta')^3 \\ e^{4\beta''} = \frac{\cosh 3\beta'}{\cosh \beta'} = 2 \cosh 2\beta' - 1 = 2 \frac{\cosh 2\beta}{\sinh 2\beta} - 1 \end{cases} \quad (83)$$

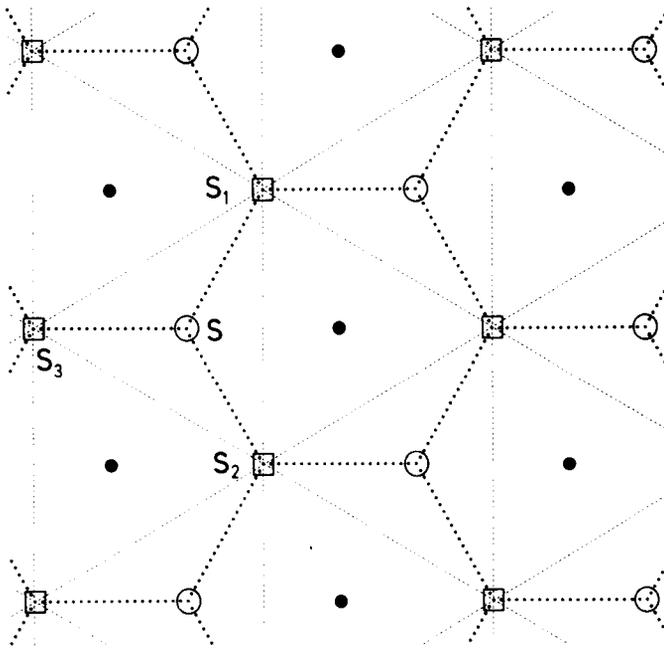


Figure 6 : La transformation étoile-triangle. Les sites originels sont repérés par des points noirs. Les sites du réseau hexagonal dual sont divisés en deux sous-ensembles, respectivement représentés par des carrés et des cercles.

Cette dernière relation peut se mettre sous la forme plus symétrique

$$(e^{4\beta''} - 1)(e^{4\beta} - 1) = 4 \quad (84)$$

Comme chaque paire, telle $s_1 s_2$, n'interagit qu'avec un spin non marqué, la transformation produit bien un modèle isomorphe de couplage β'' , et il est naturel de s'attendre à ce que le point critique (s'il existe et s'il est unique, ce qui est le cas) soit le point invariant de la transformation, $e^{4\beta_c} = 3$, comme on l'a indiqué en (81).

(i) Compléter la transformation (84) en écrivant la relation correspondante pour l'énergie libre. Vérifier que la formule (80) est en accord avec cette relation.

(ii) Existe-t-il une généralisation de la transformation étoile-triangle pour le modèle de Potts ?

Après ces préparatifs, nous entreprenons d'appliquer une transformation de renormalisation, suivant la règle majoritaire. Nous formons les blocs les plus simples, constitués de trois sites (un nombre impair évite les ambiguïtés) comme l'indique la figure 7. Bien entendu, on pourrait considérer des blocs de taille plus grande. Dans le cas des triplets, comme il y a trois fois moins de blocs que de sites, le facteur d'échelle est $\lambda = \sqrt{3}$. A chaque bloc, nous assignons la nouvelle variable dichotomique

$$\mu = \text{Signe}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (85)$$

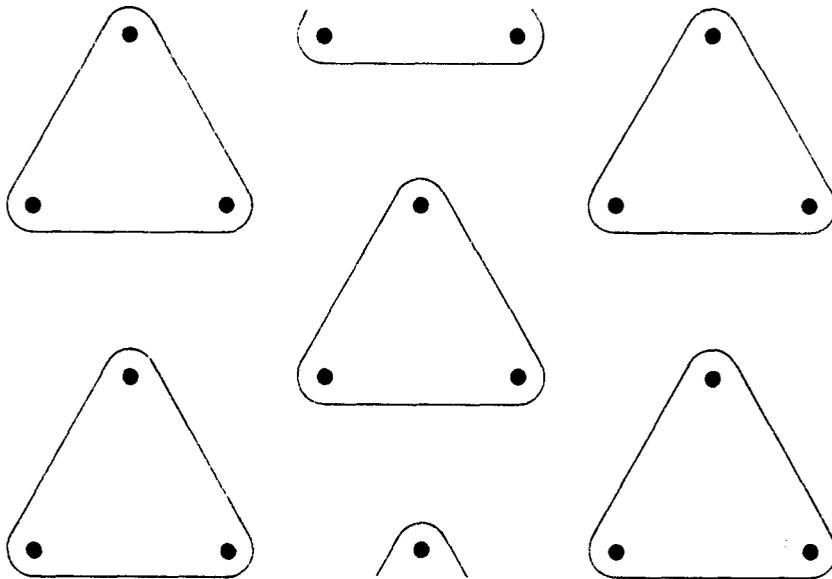


Figure 7 : Les blocs de trois sites.

La transformation cherchée est alors définie par la relation d'invariance de la fonction de partition

$$Z = \sum_{\{\mu_a = \pm 1\}} e^{S'(\mu)} = \sum_{\{\mu_a = \pm 1\}} \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} \left(\prod_a \delta_{\mu_a, \text{Signe}(\sigma_1^a + \sigma_2^a + \sigma_3^a)} \right) e^{S(\sigma)} \quad (86)$$

L'invariance résulte évidemment de l'identité $1 = \sum_{\mu} \delta_{\mu, \text{Signe}(\Sigma\sigma)}$. Pour un bloc à μ fixé, il existe quatre configurations possibles des trois spins $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$,

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \mu \\ \sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3 = \mu \\ \sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_3 = \mu \\ -\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \mu \end{cases} \quad (87)$$

L'action initiale se divise naturellement en deux parties S_0 et S_1 . La première S_0 regroupe les termes couplant les variables internes aux blocs, qu'il est facile de traiter exactement. La seconde partie S_1 couple les spins σ appartenant à des blocs différents. On la traitera comme une perturbation. On pose

$$Z_0 = \sum_{\sigma} \prod_a \delta_{\mu_a, \text{Signe}(\sigma_1^a + \sigma_2^a + \sigma_3^a)} e^{S_0(\sigma)} = z^{N/3} \quad (88)$$

$$z = e^{3\beta} + 3e^{-\beta}$$

et

$$\langle A(\sigma) \rangle = Z_0^{-1} \sum_{\sigma} \prod_a \delta_{\mu_a, \text{Signe}(\sigma_1^a + \sigma_2^a + \sigma_3^a)} e^{S_0(\sigma)} A(\sigma) \quad (89)$$

De la sorte, on peut écrire

$$e^{S'(\mu)} = Z_0 \langle \exp S_1 \rangle \quad (90)$$

La difficulté réside dans le calcul de cette dernière valeur moyenne. Nous nous bornons à ne retenir dans le développement en cumulants

$$\ln \langle \exp S_1 \rangle = \langle S_1 \rangle + \frac{1}{2} \left(\langle S_1^2 \rangle - \langle S_1 \rangle^2 \right) + \dots \quad (91)$$

que le premier terme. Dans cette approximation, les variables de bloc n'ont de couplages qu'entre premiers voisins, comme dans le modèle initial. Pour la paire (a, b) , on trouve le terme

$$\beta \langle (\sigma_1^a + \sigma_2^a) \sigma_3^b \rangle = \beta (\langle \sigma_1^a \rangle + \langle \sigma_2^a \rangle) \langle \sigma_3^b \rangle$$

Comme

$$\langle \sigma_i^a \rangle = \mu_a \frac{e^{3\beta} + e^{-\beta}}{e^{3\beta} + 3e^{-\beta}}$$

on obtient une interaction renormalisée entre paires de voisins avec pour nouvelle valeur du couplage

$$\beta_\lambda = 2\beta \left(\frac{e^{3\beta} + e^{-\beta}}{e^{3\beta} + 3e^{-\beta}} \right)^2 \quad (\lambda = \sqrt{3}) \quad (92)$$

Si l'on a la prudence (!) de ne pas calculer les termes d'ordre supérieur dans la relation (91), termes qui engendrent des interactions à plus longue portée, la méthode se limite à la transformation de renormalisation du couplage (92), dont le point fixe non trivial est donné par

$$\beta^* = \frac{1}{4} \ln(1 + 2\sqrt{2}) = 0.3356 \quad (93)$$

à comparer à la valeur exacte (81). Au voisinage du point fixe, le développement

$$(\beta_\lambda - \beta^*) = (\beta - \beta^*)[1 + 2\beta^*(8 - 5\sqrt{2})] + \dots$$

fournit l'exposant critique

$$(\sqrt{3})^{1/\nu} = 1 + 2\beta^*(8 - 5\sqrt{2}) = 1.6235 \quad \Rightarrow \quad \nu = 1.1335 \quad (94)$$

Cette valeur est déjà assez proche du résultat exact $\nu = 1$. On peut espérer que l'approximation s'améliore en gardant d'autres termes dans le développement (91). Il faut alors, bien entendu, partir d'une action contenant des interactions avec des couplages plus nombreux. Il est difficile, sans étude numérique approfondie, de savoir où effectuer une troncature appropriée.

Poursuivons néanmoins dans ce cadre très simple en examinant l'effet d'un champ extérieur H . Nous rajoutons à l'action initiale le terme $H \sum_i s_i$ et nous divisons S en S_0 et S_1 , comme précédemment. Par cellule, la fonction de partition a la forme

$$\begin{aligned} z_H e^{H \lambda^{(0)} \mu} &= \sum_{\{\sigma_i = \pm 1\}} e^{\beta(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) + H(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} \delta_{\mu, \text{Signe}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} \\ &\Rightarrow \begin{cases} z_H^2 = (e^{3H+3\beta} + 3e^{H-\beta}) (e^{-3H+3\beta} + 3e^{-H-\beta}) \\ e^{2H \lambda^{(0)}} = (e^{3H+3\beta} + 3e^{H-\beta}) / (e^{-3H+3\beta} + 3e^{-H-\beta}) \end{cases} \end{aligned} \quad (95a)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \sigma \rangle &= \alpha_1 \mu + \alpha_2 \\ \alpha_1 \pm \alpha_2 &= \frac{e^{\pm 3H+3\beta} + e^{\pm H-\beta}}{e^{\pm 3H+3\beta} + 3e^{\pm H-\beta}} \end{aligned} \quad (95b)$$

Les relations (88) et (90) sont remplacées par

$$e^{S'(\mu)} \cong (z_H)^{N/3} \exp \left\{ \sum_a H_\lambda^{(0)} \mu_a + 2\beta \sum_{(ab)} (\alpha_1 \mu_a + \alpha_2)(\alpha_1 \mu_b + \alpha_2) \right\} \quad (96)$$

Nous pouvons alors identifier les nouveaux couplages

$$\begin{cases} \beta_\lambda = 2\beta\alpha_1^2 \\ H_\lambda = H_\lambda^{(0)} + H_\lambda^{(1)} \end{cases} \quad (97)$$

avec $H_\lambda^{(0)}$ donné par l'équation (95), et

$$H_\lambda^{(1)} = 12\beta\alpha_1\alpha_2 \quad (98)$$

Le point critique correspond à $\beta = \beta^*$, donné par (93), et $H = 0$. Au voisinage de ce point, la transformation linéarisée est diagonale

$$\begin{cases} \beta_\lambda - \beta^* = \lambda^{1/\nu}(\beta - \beta^*) + \dots \\ H_\lambda = \lambda^{y_H} H + \dots \end{cases} \quad (99)$$

$$\begin{cases} \lambda^{1/\nu} = 1 + 2\beta^*(8 - 5\sqrt{2}) = 1.6235 \\ \lambda^{y_H} = \frac{3}{\sqrt{2}} + 3\beta^*(8 - 5\sqrt{2}) = 2.123 + 0.9353 = 3.0566 \end{cases} \quad (100)$$

Nous avons distingué dans λ^{y_H} un terme d'ordre 0 et un terme d'ordre 1 qui conduisent, sachant que $\lambda = \sqrt{3}$, aux valeurs

$$\begin{cases} y_H^{(0)} = 1.369 \\ y_H^{(1)} = 2.034 \end{cases} \quad (101)$$

D'après la relation (34), on s'attendrait dans le cas présent où $\nu = 1$, $\gamma = \frac{7}{4}$, à la valeur $y_H = \frac{15}{8} = 1.875$. On voit donc que dès le premier ordre le résultat (101) n'est pas trop mauvais. Niemeijer et van Leeuwen, Braathen et Hemmer ont poussé le calcul au second ordre en incluant des interactions entre seconds et troisièmes voisins. L'espace des couplages pairs entre spins est alors à trois dimensions et on identifie $\lambda^{1/\nu}$ à la plus grande valeur propre de l'approximation linéaire au voisinage du point fixe. L'amélioration est spectaculaire, comme en témoigne le tableau ci-dessous

ordre	$y_\theta = 1/\nu$	y_H	β^*
0		1.369	
1	0.822	2.034	0.3356
2	1.053	1.847	0.2514
<i>exact</i>	1.000	1.875	0.2747

(102)

La discussion précédente n'est qu'une introduction sommaire à un ensemble très vaste de travaux qu'il ne peut être question de répertorier ici.

1.3.4 Amplitudes critiques

Jusqu'ici nous nous sommes bornés au calcul des exposants critiques. Il est intéressant de calculer l'amplitude des termes singuliers. Nous allons nous limiter ici à l'exemple d'une relation de récurrence à coefficient de dilatation λ fixe, du type décrit par l'équation (26), que nous récrivons sous la forme

$$F(\theta) = f(\theta) + \lambda^{-d} F(\theta_\lambda) \quad (103)$$

Le point fixe étant identifié, θ mesure l'écart à ce point fixe, θ_λ est son transformé. Nous supposons que $f(\theta)$ est une fonction régulière indépendante de λ . Nous raisonnons sur le cas θ positif avec, pour simplifier, $F(\theta) \rightarrow 0$ pour $\theta \rightarrow \infty$, comme $f(\theta)$. Nous savons que si au voisinage de l'origine la transformation linéarisée est de la forme

$$\theta_\lambda = \mu_\lambda \theta + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (104)$$

la singularité de la chaleur spécifique en $\theta^{-\alpha}$ est donnée par la relation $\mu_\lambda^{2-\alpha} = \lambda^d$. Le facteur μ_λ est plus grand que 1, ce qui exprime le caractère instable du point fixe. Désignons par n et $n+1$ les entiers qui encadrent $2-\alpha$, $n < 2-\alpha < n+1$, les inégalités étant supposées strictes pour le moment. Par itération, en désignant par θ_{λ^p} le p -ième itéré de la transformation, on obtient

$$F(\theta) = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda^{-dk} f(\theta_{\lambda^k}) + \lambda^{-dp} F(\theta_{\lambda^p}) \quad (105)$$

Lorsque $p \rightarrow \infty$, θ_{λ^p} tend vers le point fixe stable de haute température. La série converge donc et

$$F(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-dk} f(\theta_{\lambda^k}) \quad (106)$$

Une relation de renormalisation exacte, du type (103), permettrait en fait de calculer entièrement l'énergie libre, et ce que nous venons de dire de la phase de haute température se transposerait à la phase de basse température (en changeant éventuellement la normalisation de F pour avoir convergence). Bien que ces hypothèses soient évidemment très fortes, poursuivons dans ce cadre. Il est difficile d'estimer la somme (106) sans méthode numérique. Aussi nous substituons à la transformation $\theta \rightarrow \theta_\lambda$ son approximation linéarisée. Mieux, nous faisons le changement de variable $\tilde{\theta}(\theta)$, tel que le point fixe reste $\tilde{\theta} = 0$, et que $\tilde{\theta}_\lambda \equiv \tilde{\theta}(\theta_\lambda) = \mu_\lambda \tilde{\theta}$. L'existence d'un tel changement global de variable est une question délicate, mais nous ignorons ces finesses mathématiques ici. Pour simplifier, notons encore θ cette nouvelle variable et, supposant que la nouvelle fonction f est aussi régulière, il vient à la place de (106)

$$F(\theta) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{-dp} f(\mu_\lambda^p \theta) \quad (107)$$

En particulier pour $\theta = 0$, $F(0) = f(0)/(1 - \lambda^{-d})$. Comme f est régulière à l'origine, elle possède une série convergente $f(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \theta^k$. L'idée naïve consiste à substituer ce développement dans (107) et à intervertir les deux sommations. Mais ceci est incorrect pour $k > n = [2 - \alpha]$ ($\mu_\lambda^k > \lambda^d$), et la somme sur p ne converge pas pour tous les termes de la série de Taylor de f . Nous introduisons néanmoins la fonction régulière

$$\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{\theta^k}{1 - \mu_\lambda^k / \lambda^d} \quad (108)$$

Par hypothèse, aucun dénominateur ne s'annule, puisqu'on a exclu le cas $(2 - \alpha)$ entier. En outre, si la série f est convergente dans un cercle de rayon R (dans le plan de la variable complexe θ), la série de φ converge dans un cercle de rayon $\mu_\lambda R > R$. Revenant alors à (107), nous décomposons f en un terme de soustraction $\sum_0^n f_k \theta^k$ et un reste $f_1(\theta)$, de telle sorte que pour la partie soustraite la sommation sur p soit convergente. Nous obtenons

$$F(\theta) = \sum_{k=0}^n f_k \frac{\theta^k}{1 - \mu_\lambda^k / \lambda^d} + \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^{-dp} f_1(\mu_\lambda^p \theta) \quad (109)$$

Chaque terme de la dernière somme est d'ordre θ^{n+1} bien qu'elle ait un comportement en $\theta^{2-\alpha}$. Pour mettre ce dernier en évidence, nous ajoutons et soustrayons à (109) un terme absolument convergent portant sur les puissances négatives de p : $\sum_{-\infty}^{-1} \lambda^{-dp} f_1(\mu_\lambda^p \theta)$. En substituant à $f_1(\theta)$ sa série de Taylor $f_1(\theta) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \theta^k$, il vient

$$\sum_{p=-\infty}^{-1} \lambda^{-dp} \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \mu_\lambda^{kp} \theta^k = - \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k \frac{\theta^k}{1 - \mu_\lambda^k / \lambda^d}$$

la convergence provenant du fait que $\mu_\lambda^k > \lambda^d$ pour $k \geq n + 1$. Dans ces conditions, on a

$$F(\theta) = \varphi(\theta) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda^{-dp} f_1(\mu_\lambda^p \theta) \quad (110)$$

Le terme $\varphi(\theta)$, est régulier, et la dernière somme représente la partie singulière de F , qui satisfait à l'équation homogène

$$F_{\text{sing}}(\theta) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda^{-dp} f_1(\mu_\lambda^p \theta) = \lambda^{-d} F_{\text{sing}}(\mu_\lambda \theta) \quad (111)$$

et doit se comporter en $\theta^{2-\alpha}$, l'exposant α étant tel que $\mu_\lambda^{2-\alpha} = \lambda^d$. On écrira donc

$$F_{\text{sing}}(\theta) = \theta^{2-\alpha} A(\theta) \\ A(\theta) = A(\mu_\lambda \theta) = \theta^{\alpha-2} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda^{-dp} f_1(\mu_\lambda^p \theta) \quad (112)$$

Tant qu'on raisonne sur une transformation de renormalisation à λ fixe, on doit s'attendre à ce que l'amplitude A dépende de θ et, en fait, soit une fonction périodique bornée de $\ln \theta$, de période $\ln \mu_\lambda$. Evidemment, si on avait un groupe de transformations dépendant continuellement de λ , asymptotiquement ces oscillations seraient absentes. Ainsi

$$A(\theta) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} A_s \exp\left(2i\pi s \frac{\ln \theta}{\ln \mu_\lambda}\right) \quad (113)$$

avec

$$A_s = \frac{1}{\ln \mu_\lambda} \int_1^{\mu_\lambda} \frac{d\theta}{\theta^{3-\alpha+2i\pi s/\ln \mu_\lambda}} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \lambda^{-dp} f_1(\mu_\lambda^p \theta) \\ = \frac{1}{\ln \mu_\lambda} \int_0^\infty d\theta \theta^{\alpha-3-2i\pi s/\ln \mu_\lambda} f_1(\theta) \quad (114)$$

Dans la dernière expression, on s'est servi de la relation $\mu_\lambda^{2-\alpha} = \lambda^d$ pour écrire chaque terme de la somme comme une intégrale sur un intervalle $[\mu_\lambda^p, \mu_\lambda^{p+1}]$. Enfin, on peut intégrer (114) suffisamment de fois par parties, pour remplacer f_1 par une dérivée $(n+1)$ -ème de f . En général, (113) et (114) ne sont que des relations approchées, et on constate sur des exemples numériques que l'amplitude des oscillations est relativement très faible, auquel cas on peut remplacer $A(\theta)$ par A_0 . On a, bien sur, des expressions similaires dans la région de basse température.

Lorsque $(2-\alpha)$ est un entier, la singularité ne disparaît pas, mais donne lieu à un terme logarithmique. Par continuité en $\varepsilon = n - 2 + \alpha$, en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, l'un des termes de φ devient singulier, et l'on a

$$\begin{aligned} F(\theta) &= F_{\text{reg}}(\theta) - \frac{f_n \theta^n}{\varepsilon \ln \mu_\lambda} + \frac{\theta^n (1 - \varepsilon \ln \theta)}{\ln \mu_\lambda} \int_0^\infty \frac{d\theta' f_1(\theta')}{\theta'^{1+n-\alpha}} \\ &\simeq F_{\text{reg}}(\theta) - \frac{f_n \theta^n}{\varepsilon \ln \mu_\lambda} + \frac{\theta^n (1 - \varepsilon \ln \theta)}{\ln \mu_\lambda} f_n \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta'}{\theta'^{1-\varepsilon}} \\ &\simeq F_{\text{reg}}(\theta) - \frac{f_n}{\ln \mu_\lambda} \theta^n \ln |\theta| \end{aligned} \quad (115)$$

Le même raisonnement s'applique pour θ négatif. De la sorte, alors que pour $2-\alpha$ différent d'un entier, les amplitudes A_+ et A_- au-dessus et au-dessous du point critique semblent distinctes, il n'en est pas de même dans le cas $(2-\alpha)$ entier : la singularité logarithmique a la même amplitude des deux cotés du point de transition. C'est ce que nous avons observé pour le modèle d'Ising bidimensionnel.

On considère un réseau *hiérarchique* obtenu par le procédé récursif suivant. On part d'un graphe élémentaire H_2 possédant deux sites joints par un lien; H_n se déduit de H_{n-1} en substituant à chaque lien quatre nouveaux liens, selon le schéma représenté figure 8a.

(i) Montrer qu'il existe une limite thermodynamique $n \rightarrow \infty$ au modèle de Potts à q -états sur le réseau H_n , correspondant à la fonction de partition

$$Z_n = \sum_{\sigma_i=1}^q \exp 2\beta \sum_{ij} \delta_{\sigma_i \sigma_j} \quad (116)$$

(ii) Montrer, par un procédé de décimation, qu'il existe une relation de récurrence liant Z_n à Z_{n-1} , qui généralise la relation (71) de Migdal-Kadanoff. En prenant $x = e^{2\beta}$ au lieu de $y = e^{-2\beta}$, comme variable, vérifier que

$$\begin{aligned} Z_n(x) &= (2x + q - 2)^{2 \cdot 4^{n-2}} Z_{n-1}(x') \\ x' = T(x) &= \left(\frac{x^2 + q - 1}{2x + q - 2} \right)^2 \end{aligned} \quad (117)$$

(iii) Déterminer les exposants et les amplitudes critiques.

(iv) Pour décrire le comportement de la fonction de partition, on peut, par exemple, représenter l'ensemble de ses zéros dans le plan complexe de la variable x , à la limite $n \rightarrow \infty$. On obtient alors des ensembles de Julia, remarquables par la structure qu'ils possèdent, comme on peut le voir sur la figure 9. La linéarisation de la fonction de renormalisation au voisinage des points fixes, qui a été décrite ci-dessus, donne pour l'amplitude de la partie singulière de l'énergie libre des valeurs très imprécises. On trouvera des compléments à ce sujet dans les références.

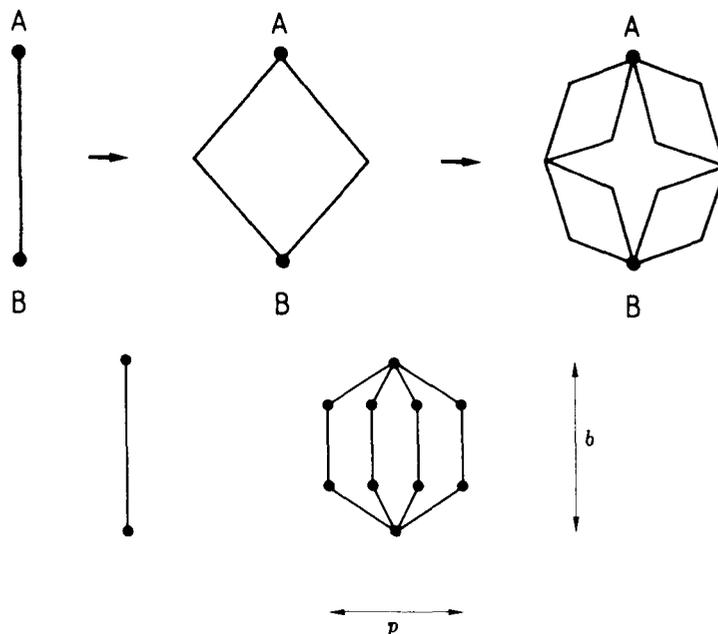


Figure 8: (a) Construction récursive d'un réseau hiérarchique. (b) Généralisation au cas de p séries de b liens. On peut définir une "dimension" en comparant l'augmentation de "distance" $L' = bL$ entre les points A et B à l'augmentation du "volume", c'est-à-dire le nombre de noeuds $N' = pbN$. Si N se comporte comme L^d , alors $d = \ln(pb)/\ln b$. La figure (a) correspond au cas $d = 2$.

2. Le modèle XY

Les transformations de renormalisation dans l'espace réel sont tout à fait appropriées au cas du modèle XY bidimensionnel, c'est-à-dire – l'appellation est traditionnelle – le modèle de spins à deux composantes $S_x^2 + S_y^2 = 1$, interagissant entre proches voisins, à symétrie $O(2)$. Ce modèle décrit aussi, après diverses transformations, un gaz coulombien classique, un ensemble de surfaces fluctuantes (modèle gaussien discret) ou encore un film superfluide. A cette richesse d'interprétations s'ajoute l'existence d'une transition remarquable (Kosterlitz et Thouless) pour laquelle l'énergie libre et toutes ses dérivées sont continues, et pour laquelle il n'y a pas d'"aimantation" spontanée macroscopique (Mermin et Wagner). Les arguments de groupe de renormalisation s'y avèrent exacts quant à la nature de la singularité, comme le montre un modèle soluble apparenté.

Les variables de spin peuvent être repérées par des angles modulo 2π , de sorte qu'on écrira la fonction de partition sous la forme

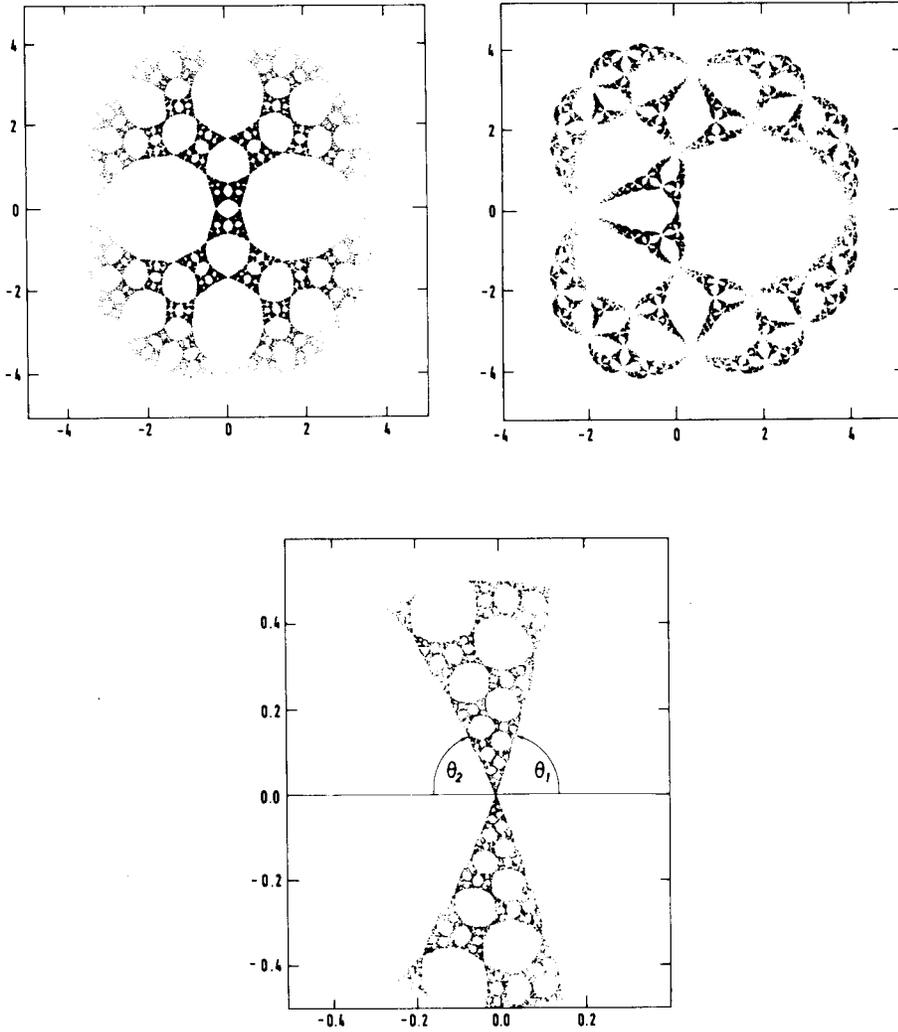


Figure 9 : (a) Ensemble de Julia où s'accumulent les zéros de la fonction de partition à la limite $n \rightarrow \infty$, dans le cas du modèle d'Ising $q = 2$. Les points représentés sont les antécédents par T^{-1} de l'unique zéro de Z_1 . (b) Même ensemble pour $q = 3$. (c) Agrandissement de l'ensemble de Julia pour $q = 2$, près du point fixe ferromagnétique x_c . On voit apparaître deux angles limites θ_1 et θ_2 (égaux ici) pour l'inclinaison des droites limitant le support des zéros.

$$Z = \int \prod_i \frac{d\theta_i}{2\pi} \exp \left(\beta \sum_{(ij)} \cos(\theta_i - \theta_j) \right) \quad (118)$$

L'interaction est ferromagnétique, c'est-à-dire qu'elle favorise l'égalité des θ_i , modulo 2π , pour β grand. La symétrie globale de rotation se traduit par l'invariance selon $\theta_i \rightarrow \theta_i + \alpha$. Nous allons étudier ce modèle sur un réseau bidimensionnel.

2.1 Comportement à haute température

Nous avons considéré précédemment le même modèle à une dimension, et montré que, dans ce cas, il y a à toute température une phase désordonnée. On s'attend à ce qu'il en soit de même à deux dimensions pour une température assez grande. C'est ce que confirme le développement de couplage fort (β petit). Pour effectuer commodément celui-ci, il est indiqué de suivre la méthode générale discutée au chapitre VII et de développer chaque facteur du poids statistique $\exp \beta \cos \theta$ sur une base de caractères irréductibles du groupe des rotations $O(2)$, c'est-à-dire, en termes plus simples, d'en écrire la décomposition de Fourier

$$\begin{aligned} e^{\beta \cos \theta} &= I_0(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\beta) (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\ &= I_0(\beta) \left(1 + \sum_{n \neq 0} t_n(\beta) e^{in\theta} \right) \end{aligned} \quad (119a)$$

Les coefficients s'expriment en termes des fonctions de Bessel modifiées

$$t_n(\beta) = t_{-n}(\beta) = \frac{I_n(\beta)}{I_0(\beta)} \quad (119b)$$

Leur comportement aux bornes du domaine de variation de β est de la forme

$$t_n(\beta) \sim \begin{cases} \frac{\beta^n}{2^n n!} & \beta \rightarrow 0 \\ e^{-n^2/2\beta} & \beta \rightarrow \infty \end{cases} \quad (119c)$$

Les $t_n(\beta)$ qui généralisent la quantité $\tanh \beta$ du modèle d'Ising, sont tous compris entre 0 et 1, dans le domaine $0 \leq \beta < \infty$. Pour un réseau de N sites et $2N$ liens, on a donc

$$\frac{Z}{I_0^{2N}(\beta)} = \int \prod_i \frac{d\theta_i}{2\pi} \prod_{(ij)} \left(1 + \sum_{n_{ij} \neq 0} t_{n_{ij}}(\beta) e^{in_{ij}(\theta_i - \theta_j)} \right) \quad (120)$$

L'intérêt du développement (119) est alors apparent pour β petit, puisque les t_n décroissent très rapidement, et qu'en développant le produit qui figure dans l'intégrand du second membre de (120), les intégrations se font explicitement. D'où l'expression

$$\frac{Z}{I_0^{2N}(\beta)} = \sum_{\substack{\{n_{ij}\} \\ (\partial n)_i = 0}} \prod_{(ij)} t_{n_{ij}}(\beta) \quad (121)$$

La notation est la suivante: n_{ij} est un entier relatif, $t_0 \equiv 1$, $n_{ji} \equiv -n_{ij}$ et $(\partial n)_i \equiv \sum_j n_{ij} = 0$, condition de divergence nulle. A haute température, seuls un nombre fini de liens (ij) portent des valeurs n_{ij} distinctes de zéro.

Le calcul des fonctions de corrélation procède de manière analogue. On peut écrire

$$\langle \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \rangle = \text{Re} \left\langle e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \right\rangle \quad (122)$$

et plus généralement

$$\left\langle e^{im(\theta_1 - \theta_2)} \right\rangle = \frac{\sum_{\substack{\{n_{ij}\} \\ (\partial n)_i = m(\delta_{i1} - \delta_{i2})}} \prod_{(ij)} t_{n_{ij}}(\beta)}{\sum_{\substack{\{n_{ij}\} \\ (\partial n)_i = 0}} \prod_{(ij)} t_{n_{ij}}(\beta)} \quad (123)$$

En d'autres termes, le point 1 agit comme une source et le point 2 comme un puits d'intensité m pour le "champ" n_{ij} . Il est aisé d'écrire des expressions analogues pour les corrélations à plus de deux points.

Dans le cas $m = 1$, le terme dominant de haute température dans (123) correspond à $N_{12} t_1(\beta)^{d_{12}}$, où d_{12} est la distance minimale sur le réseau entre les points 1 and 2, et N_{12} le nombre de chemins continus allant de 1 à 2 ayant cette longueur minimale. Ainsi les corrélations décroissent exponentiellement à haute température, à l'ordre le plus bas. On peut montrer que la série de haute température a un rayon de convergence non nul, ce qui rend le résultat précédent vrai à tout ordre. La question se pose alors de savoir si cette situation persiste à basse température. Nous avons déjà fait allusion au fait que les systèmes à symétrie continue ne peuvent avoir de valeur moyenne non nulle du paramètre d'ordre, en l'absence de champ, en dimension deux et inférieure, à la différence du cas à symétrie discrète (appendice A). Ce phénomène correspond à une situation où l'entropie l'emporte sur l'énergie.

2.2 Développement de basse température. Tourbillons

A température suffisamment basse, il devient naturel de substituer à $\cos(\theta_i - \theta_j)$ son développement au voisinage de $\theta_i - \theta_j = 0$, puisque le facteur énergétique favorise l'alignement des spins. Ceci néglige le caractère périodique des angles, mais l'existence d'un ordre, au moins à courte distance, justifie en partie ce traitement. Nous reviendrons plus loin sur ce point. On remplace alors le modèle par une approximation dite *d'ondes de spin*. La fonction de partition est celle d'un modèle gaussien

$$Z_{\text{sp}} = \int \prod_i \frac{d\theta_i}{(2\pi)^{1/2}} \exp -\frac{1}{2}\beta \sum_{(ij)} (\theta_i - \theta_j)^2 \quad (124)$$

expression dans laquelle nous avons omis un facteur inessentiel. L'inverse du propagateur est le noyau de la forme quadratique, c'est-à-dire

$$G^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} [4 - 2(\cos q_1 + \cos q_2)] \quad (125)$$

L'invariance par rotation des spins est remplacée par l'invariance par translation des angles associée à un mode d'action nulle. Le facteur infini correspondant ne joue pas de rôle dans la limite thermodynamique. On pourrait, par exemple, omettre d'intégrer sur l'une des variables θ . C'est ainsi que l'énergie libre par site correspondant à (124) est bien définie

$$F = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_{\text{sp}} = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \ln \{ \beta [4 - 2(\cos q_1 + \cos q_2)] \} \quad (126)$$

En revanche, les modes d'action très faibles ont une entropie suffisamment grande pour désordonner les spins à grande distance. Ceci est précisément le contenu du théorème de Hohenberg, Mermin et Wagner, et Coleman. Pour le voir, étudions la fonction de corrélation

$$\begin{aligned} G_{\text{sp}}^{(p)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= \langle \exp[ip(\theta_{\mathbf{x}_1} - \theta_{\mathbf{x}_2})] \rangle \\ &= Z_{\text{sp}}^{-1} \int \prod \frac{d\theta_{\mathbf{x}}}{2\pi} \exp \left(-\frac{1}{2}\beta \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'} \theta_{\mathbf{x}} G_{\mathbf{x}, \mathbf{x}'}^{-1} \theta_{\mathbf{x}'} + ip(\theta_{\mathbf{x}_1} - \theta_{\mathbf{x}_2}) \right) \end{aligned} \quad (127)$$

L'intégration conduit au résultat

$$G_{\text{sp}}^{(p)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \exp \left(\frac{-p^2}{2\pi\beta} \Gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \right) \quad (128)$$

Nous avons utilisé la notation $\Gamma(\mathbf{x})$ pour la fonction de Green soustraite

$$\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 \mathbf{q}}{2\pi} \frac{1 - e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{4 - 2(\cos q_1 + \cos q_2)} \quad (129)$$

Si la fonction Green libre $G(\mathbf{x})$ était bien définie, $\Gamma(\mathbf{x})$ s'exprimerait comme $2\pi(G(\mathbf{0}) - G(\mathbf{x}))$. Mais nous avons déjà longuement commenté au chapitre I la divergence infrarouge de $G(\mathbf{x})$ qui nécessite l'emploi de Γ . Notons que Γ apparaît dans une exponentielle, correspondant au fait que nous calculons des valeurs moyennes d'exponentielles.

La fonction $\Gamma(\mathbf{x})$ est bien définie pour tout \mathbf{x} sur un réseau carré bidimensionnel (de maille unité). Elle s'annule à l'origine, vaut $\pi/2$ pour $|\mathbf{x}| = 1$, et possède un comportement isotrope à grande distance. Si γ désigne la constante d'Euler, on a

$$\Gamma(\mathbf{x}) \underset{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty}{\sim} \ln(2\sqrt{2}e^\gamma |\mathbf{x}|) + \mathcal{O}(1/|\mathbf{x}|) \quad (130)$$

Le développement asymptotique (130) est d'ailleurs une excellente approximation, puisque pour $|\mathbf{x}| = 1$, il donne $\Gamma(\mathbf{x}) \simeq 1.6169$ tandis que le résultat exact est $\frac{1}{2}\pi \simeq 1.5708$.

Etablir la formule (130). Il suffit de faire l'évaluation de Γ pour $\mathbf{x} = (2p, 0)$. Alors

$$\begin{aligned} \Gamma(2p, 0) &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq_1}{2\pi} (1 - \cos 2pq_1) \int_{-\pi}^{\pi} dq_2 \frac{1}{4 - 2(\cos q_1 + \cos q_2)} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dq_1 \frac{1 - \cos 2pq_1}{\sqrt{(1 - \cos q_1)(3 - \cos q_1)}} \end{aligned}$$

Posant $q_1 = 2q$, il vient

$$\begin{aligned} \Gamma(2p, 0) &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dq \frac{\sin^2 2pq}{\sin q \sqrt{1 + \sin^2 q}} = \Gamma_0 + \Gamma_1 \\ \left\{ \begin{array}{l} \Gamma_0 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dq \frac{\sin^2 2pq}{\sin q} \\ \Gamma_1 = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dq \frac{\sin^2 2pq}{\sin q} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 q}} - 1 \right) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Or

$$\sin 2pq / \sin q = 2 \sum_{s=1}^p \cos(2s-1)q$$

D'où

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} dq \sin 2pq \sum_{s=1}^p \cos(2s-1)q = 2 \sum_{s=0}^{2p-1} \frac{1}{2s+1} = 2 \sum_{n=1}^{4p-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{2p-1} \frac{1}{n} \\ &\sim 2 \ln(4p-1)e^\gamma - \ln(2p-1)e^\gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p}\right) \sim \ln 2p + 2 \ln 2 + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

Pour estimer Γ_1 , on peut passer à la limite $p \rightarrow \infty$, c'est-à-dire remplacer $\sin^2 2pq$ par sa moyenne $\frac{1}{2}$, de sorte que

$$\Gamma_1 \sim \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{dq}{\sin q} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 q}} - 1 \right)$$

Utilisant le développement

$$(1 + \sin^2 q)^{-1/2} - 1 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin^{2s} q}{s!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - s)}$$

il vient

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\sim \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s! \Gamma(\frac{1}{2} - s)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dq \sin^{2s-1} q = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\pi}{2s \Gamma(\frac{1}{2} + s) \Gamma(\frac{1}{2} - s)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s} = -\frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

Au total

$$\Gamma(2p, 0) = \Gamma_0 + \Gamma_1 = \ln 2p + \ln 2\sqrt{2}e^\gamma + \mathcal{O}(1/p)$$

qui correspond bien à l'équation (130).

En termes de la maille du réseau, on peut définir

$$r_0^{-1} = 2\sqrt{2}e^\gamma \quad (131)$$

de sorte qu'on a, à une excellente approximation, $\Gamma(\mathbf{x})$ isotrope, et pour $|\mathbf{x}|$ assez grand

$$G_{\text{sp}}^{(p)}(\mathbf{x}) \underset{|\mathbf{x}| \gg 1}{\sim} \exp[-(p^2/2\pi\beta) \ln(|\mathbf{x}|/r_0)] = (r_0/|\mathbf{x}|)^{p^2/2\pi\beta} \quad (132)$$

La fonction de corrélation correspond au cas $p = 1$. On voit que pour une température suffisamment basse, l'approximation des ondes de spins

prédit une décroissance en loi de puissance. Bien que les corrélations à grande distance ne tendent pas vers une limite, qui serait le carré d'une aimantation spontanée inexistante, ce comportement est qualitativement différent du comportement de haute température, suggérant une transition à une température intermédiaire. On note que l'exposant de la décroissance de $G(\mathbf{x})$ tend vers zéro comme $1/2\pi\beta$. Un comportement isotrope en loi de puissance, c'est-à-dire invariant d'échelle, est caractéristique d'une théorie critique. Ainsi avons-nous une plage de températures critiques. La théorie des champs continue sous-jacente est celle du champ scalaire libre de masse nulle, avec les soustractions impliquées par les formules (129) et (130) qui s'introduisent automatiquement dans le calcul des corrélations invariantes. Le résultat (132) est en accord avec l'existence prépondérante de fluctuations de grande longueur d'onde, détruisant l'ordre à grande distance.

Les fluctuations des angles croissent logarithmiquement à grande distance. Dans ces conditions, l'approximation qui néglige leur caractère périodique devient suspecte. Les effets topologiques liés à cette périodicité jouent un rôle essentiel, comme l'ont montré Berezinskii, Kosterlitz et Thouless. Ces effets se combinent aux fluctuations déjà considérées pour accroître encore le désordre à partir d'une certaine température critique, au-delà de laquelle les corrélations se mettent à décroître exponentiellement.

Négligeant la structure discrète du réseau, en nous plaçant à une échelle suffisamment grande par rapport à la maille, examinons la variation de l'angle que fait le spin avec une direction fixe lorsqu'on décrit une courbe fermée simple. Nous supposons que les fluctuations sont cependant encore suffisamment faibles. Dans un état où les spins sont quasiment alignés, cette variation est nulle. Mais on peut imaginer des configurations telles que cet angle varie d'un multiple entier n de 2π . Cet entier est un invariant topologique, en ce sens qu'en modifiant continuellement la courbe ou la configuration, il demeure inchangé. Le cas le plus simple correspond à $n = \pm 1$ et décrit un *tourbillon (vortex)* d'intensité $n = \pm 1$. Pour un champ continu astreint à être de longueur d'unité, une telle configuration doit posséder au moins un point singulier. Il n'en est pas de même sur un réseau où le concept perd son sens à l'échelle microscopique.

Supposons désormais qu'au bord de l'échantillon les spins soient tous alignés, de sorte que la vorticité totale (c'est-à-dire la somme des n_i attachés aux points singuliers) soit nulle.

Sur la figure 10 nous donnons un exemple de tourbillons d'intensité ± 1 . Identifiant le plan (x, y) avec celui de la variable complexe $z = x + iy$, nous avons choisi $S_x + iS_y = e^{i\theta} = \exp(i\text{Arg}[i(z - z_0)/(z + z_0)])$. Les lignes tracées sont les trajectoires tangentes au champ de vecteur $\mathbf{S}(x, y)$, pour $z_0 = 1$, d'équation $y^2 = Ae^{-(x+1)} - (x-1)^2$, $0 < A < \infty$. Le choix particulier de $\theta(x, y)$, harmonique sauf aux points $\pm z_0$ qui portent la singularité de $\nabla \times \mathbf{S}$ n'est pas fait au hasard. Il correspond à un extremum de l'action classique associée à (124).

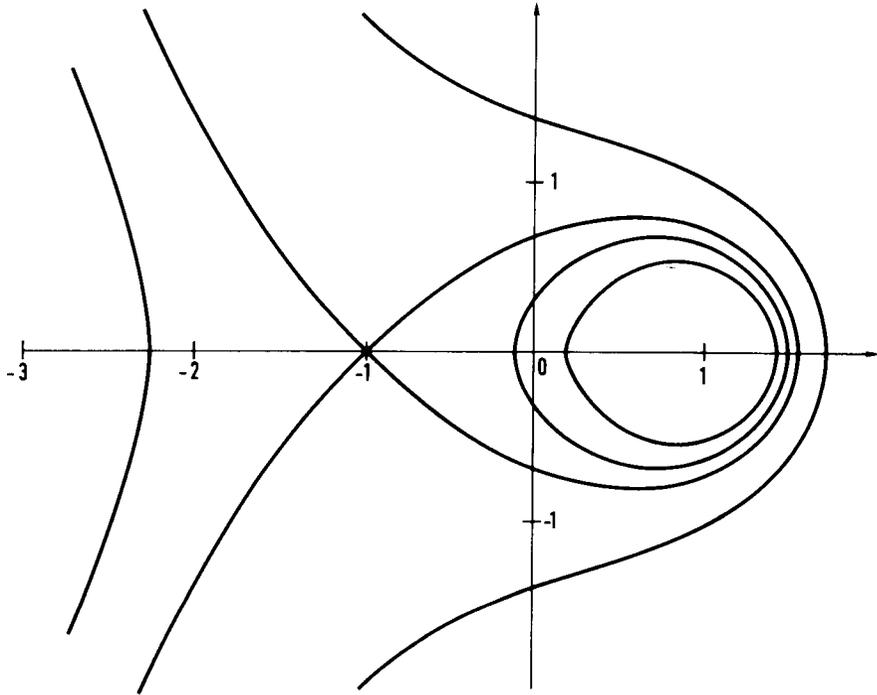


Figure 10: Une paire de tourbillons d'intensité ± 1 .

$$S_{\text{class}} = \frac{1}{2}\beta \int d^2\mathbf{x} (\nabla\theta)^2 \quad (133)$$

Les extrema sont tels que $\Delta\theta = 0$. Comme nous imposons que θ tende vers une constante à l'infini, le théorème de la moyenne implique que, si la fonction θ n'est pas constante partout, elle a des singularités. En admettant qu'il s'agit uniquement de singularités isolées z_i^\pm telles que θ s'accroisse de $\pm 2\pi$ lors d'un trajet en sens direct autour du point singulier, on a

$$e^{i\theta} = e^{i\theta_\infty} \prod_{i=1}^n \frac{(z - z_i^+)/|z - z_i^+|}{(z - z_i^-)/|z - z_i^-|} \quad (134)$$

Les z_i^\pm sont les centres des tourbillons d'intensité ± 1 . On peut d'ailleurs faire coïncider des z_i^+ entre eux (ou des z_i^-) pour obtenir des intensités plus grandes en module. L'angle θ est multivalué, mais $e^{i\theta}$ (ou le spin) est bien défini partout sauf aux points singuliers.

L'action classique (133) est infinie pour les configurations singulières du type (134), mais dans le cadre des approximations envisagées, il est judicieux d'exclure du domaine d'intégration un petit domaine autour de chaque point singulier, par exemple un cercle de rayon r_0 , supposé petit à l'échelle des distances entre tourbillons. Soit D le domaine restant; nous voulons évaluer l'action classique restreinte à D pour une solution du type (134). Il est commode de poser pour cela

$$F = \rho e^{i\theta} = e^{i\theta_\infty} \prod_{i=1}^n \frac{z - z_i^+}{z - z_i^-} = e^{i\theta_\infty} \prod_{j=1}^{2n} (z - z_j)^{q_j} \quad (135)$$

Dans D , où θ et $\ln \rho$ sont harmoniques, les équations de Cauchy-Riemann entraînent que $(\nabla\theta)^2 = (\nabla \ln \rho)^2 = \nabla(\ln \rho \nabla \ln \rho)$. Si on désigne par C_j le cercle de rayon r_0 autour de z_j , on a alors, pour r_0 assez petit

$$\begin{aligned} S(\{q_j, z_j\}) &= \frac{1}{2}\beta \int_D d^2\mathbf{x} (\nabla\theta)^2 = -\frac{1}{2}\beta \sum_j \oint_{C_j} ds \ln \rho \mathbf{n} \cdot \nabla \ln \rho \\ &= -2\pi\beta \sum_{(ij)} q_i q_j \ln |z_i - z_j| + \sum_i q_i^2 \pi\beta \ln 1/r_0 \end{aligned} \quad (136)$$

Dans cette formule, les distances sont mesurées en mailles du réseau. Mais l'expression (136) est indépendante de cette unité, en raison de la relation $\sum q_j = 0$ qui traduit l'invariance d'échelle de l'action.

Considérons le cas d'une paire de tourbillons à la distance r_{12} l'un de l'autre. D'après (136) elle a le poids statistique $\exp(-2\pi\beta \ln r_{12}/r_0)$. Si on considère une boîte de dimension L , la contribution de cette paire à l'énergie libre est, pour des raisons dimensionnelles, de la forme

$$\begin{aligned} \exp F &\sim \int_{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| > r_0} d^2\mathbf{x}_1 d^2\mathbf{x}_2 \exp\left(-2\pi\beta \ln \frac{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}{r_0}\right) \\ &\sim L^4 \exp(-2\pi\beta \ln L/r_0) \\ F &\sim (4 - 2\pi\beta) \ln L \end{aligned} \quad (137)$$

Si $2\pi\beta > 4$, cette contribution est négligeable lorsque $L \rightarrow \infty$, tandis que pour $2\pi\beta < 4$, il y a instabilité: la création de tourbillons largement séparés est favorable, entraînant un accroissement du désordre. Une première estimation de la température critique est donc

$$2\pi\beta_c = 4 \quad (138)$$

Plus généralement, ayant fait choix d'une échelle de longueur a , nous pouvons récrire l'action, au voisinage d'une configuration stationnaire en posant $\theta = \theta_{\text{conf}} + \theta_{\text{fluct}}$, sous la forme

$$S = S(q_i, \mathbf{x}_i) + \frac{1}{2}\beta \int d^2\mathbf{x} (\nabla\theta_{\text{fluc}})^2 \quad \text{avec } \theta = \theta_{\text{conf}} + \theta_{\text{fluc}}$$

Alors

$$Z = Z_{\text{sp}} \sum_n \frac{1}{n!^2} \exp\left(-2\pi\beta n \ln \frac{a}{r_0}\right) \times \int \prod_j d^2\mathbf{x}_j \exp\left\{2\pi\beta \sum_{(ij)} q_i q_j \ln \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{a}\right\} \quad (139)$$

Le terme (régularisé) $\pi\beta \ln a/r_0$ joue le rôle de potentiel chimique pour les $2n$ tourbillons d'intensité $q_j = \pm 1$, situés aux points \mathbf{x}_j . La division par $n!$ pour chaque espèce tient compte de leur indiscernabilité, et la contribution des fluctuations s'est factorisée. Au facteur Z_{sp} près, la fonction de partition s'identifie à celle d'un gaz de particules chargées classiques en interaction coulombienne bidimensionnelle, globalement neutre, lorsqu'on a effectué l'intégration sur la contribution cinétique, ce dernier terme pouvant être absorbé dans un potentiel chimique redéfini. Les charges associées à cette description sont $\sqrt{2\pi}q_j$. On peut traduire en ces termes les considérations heuristiques précédentes : dans une phase de basse température, les charges sont liées, et le milieu est diélectrique; au-dessus de la température critique on assiste à la libération des charges et il se forme un plasma.

2.3 L'action de Villain

On peut obtenir de façon équivalente un modèle coulombien, en partant d'une forme modifiée de l'action, due à Villain. En repartant du développement (119)-(120) du facteur $\exp\beta \cos\theta$, nous remplaçons les coefficients par leur forme asymptotique pour β grand, à savoir $\exp(-n^2/2\beta)$. Le résultat est de substituer au poids $\exp\beta \cos\theta$ la fonction périodique de Jacobi, solution de l'équation de la chaleur sur un cercle

$$z(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{2\beta} + in\theta\right) = \sqrt{2\pi\beta} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta(\theta - 2\pi p)^2\right) \quad (140)$$

Prouver l'équivalence de deux formes ci-dessus en utilisant la formule de Poisson

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tilde{f}(k) \quad \Rightarrow \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(2\pi p) \quad (141)$$

La seconde forme donnée en (140) est utile pour β grand; c'est une suite de gaussiennes centrées sur les valeurs $2\pi p$ (ce qui assure le respect de la périodicité en θ), de largeur $1/\sqrt{\beta}$. La fonction de partition du modèle ainsi modifiée s'écrit

$$Z_V = \int \prod_i \frac{d\theta_i}{2\pi} \prod_{(ij)} z(\theta_i - \theta_j) \quad (142)$$

Effectuons une transformation de dualité; après intégration sur les angles θ , on trouve

$$Z_V = \sum_{\substack{\{n_{ij}\} \\ (\partial n)_i = 0}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta} \sum_{(ij)} n_{ij}^2\right) \quad (143)$$

Les n_{ij} sont des entiers relatifs, associés aux liens, tels que $n_{ij} \equiv -n_{ji}$, et la condition $(\partial n)_i = 0$ signifie, comme précédemment, $\sum_j n_{ij} = 0$. Sur un réseau régulier bidimensionnel infini, il n'y a pas d'obstruction à résoudre ces relations de la manière suivante. Introduisons sur chaque plaquette (carré élémentaire), ou en son centre qui est un noeud du réseau dual isomorphe au réseau initial, une variable entière m_a , et associons au lien orienté de i vers j la différence $n_{ij} = m_a - m_b$ des valeurs relatives aux plaquettes à sa droite et à sa gauche (figure 11).

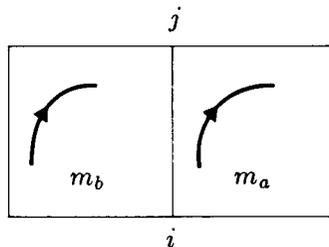


Figure 11 : Variables duales pour le modèle de Villain bidimensionnel.

On voit alors que le modèle de Villain s'est transformé par dualité en modèle gaussien discret

$$Z_V = \sum_{\{m_a\}} \exp \left(-\frac{1}{2\beta} \sum_{(ab)} (m_a - m_b)^2 \right) \quad (144)$$

La résolution des équations $(\partial n)_i = 0$ sous la forme $n_{ij} = m_a - m_b$ s'accompagne d'un arbitraire, selon $m_a \rightarrow m_a + m$. Le groupe additif des entiers est infini. Cette ambiguïté doit donc être levée, en omettant par exemple de sommer sur l'une des variables m_a . La dualité se manifeste ainsi de trois façons : au groupe $O(2)$ s'est substitué son dual, le groupe additif des entiers, le réseau est remplacé par le réseau dual isomorphe, enfin la variable β divise l'action au lieu de la multiplier.

Les configurations peuvent être illustrées en considérant les surfaces plongées dans l'espace à trois dimensions joignant les plaquettes, à la hauteur m_a au-dessus du plan du réseau. Le modèle gaussien discret réalise donc un modèle de surface fluctuante (au-dessus de la base constituée par le réseau) de la même famille qu'un modèle dit *S.O.S* (Solid-on-Solid) où $(m_a - m_b)^2$ serait remplacé par $|m_a - m_b|$. L'action représente alors l'accroissement de surface par rapport à une surface plane. Pour β petit, la tendance est l'égalisation des variables m_a . Le coût d'une "marche" est proportionnel à $e^{-2/\beta}$. Lorsque β croît pour atteindre la valeur β_c , la surface, lisse aux fluctuations microscopiques près, change de structure : il y a délocalisation des ordonnées relatives de deux points distants. On parle d'une transition à une surface "rugueuse" (*transition rugueuse*). Ce modèle permet, par exemple, de décrire la croissance spontanée de marches sur une interface cristalline à l'équilibre avec une solution.

Pour β suffisamment grand, le modèle gaussien discret est très voisin du modèle gaussien continu, décrivant les ondes de spins. Mettons ceci en évidence en substituant à la somme sur des variables entières une intégration sur des variables continues φ . La représentation

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = \int d\varphi f(\varphi) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(\varphi - m) = \int d\varphi f(\varphi) \sum_{q=-\infty}^{+\infty} e^{2i\pi q\varphi} \quad (145)$$

nous fournit l'expression

$$Z_V = \sum_{\{q_a\}} \int \prod_a d\varphi_a \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta} \sum_{(ab)} (\varphi_a - \varphi_b)^2 + 2i\pi \sum_a q_a \varphi_a \right\} \quad (146)$$

Les variables $\{\varphi_a\}$ décrivent les fluctuations gaussiennes continues et les variables discrètes $\{q_a\}$ l'intensité des tourbillons. On a donc réalisé explicitement la factorisation décrite au paragraphe précédent. Pour accorder

les notations, on pourrait d'ailleurs changer l'échelle des champs, en posant $\varphi = \beta\theta_{\text{fluc}}$. L'invariance par translation des variables φ est assurée par la condition de neutralité $\sum_a q_a = 0$, les autres configurations ayant un poids nul à la limite thermodynamique.

Cette expression permet encore de comprendre la relation entre le modèle XY et une autre version dite *sine-Gordon* – jeu de mots douteux pour décrire une modification non-linéaire de l'équation de Klein-Gordon du champ libre –. En effet, pour β très grand, lorsque les tourbillons jouent un rôle quasiment négligeable, ne retenons des variables entières q_a que le fait qu'elles introduisent une modulation périodique des champs φ_a . L'action prend alors la forme

$$\frac{1}{2\beta} \sum_{(ab)} (\varphi_a - \varphi_b)^2 - \sum_a 2 \cos 2\pi\varphi_a + \dots$$

associée à ce modèle de sine-Gordon. Sous ce nouveau déguisement, on peut étudier très complètement le modèle XY dans une version discrète ou continue.

Finalement, nous obtenons à nouveau le gaz de Coulomb des tourbillons, sans approximation, en intégrant dans (146) sur les variables φ , et en tenant compte de la neutralité pour écrire

$$Z_V = Z_{\text{sp}} \sum_{\{q_a\}} \exp \left\{ 2\pi\beta \sum_{(ab)} q_a \Gamma(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) q_b \right\} \quad (147)$$

A une très bonne approximation, ceci est équivalent à

$$Z_V = Z_{\text{sp}} \sum_{\{q_a\}} \exp \left\{ 2\pi\beta \sum_{(ab)} q_a \ln \frac{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|}{a} q_b - \pi\beta \sum_a q_a^2 \ln \frac{a}{r_0} \right\} \quad (148)$$

Le modèle de Villain justifie donc la méthode semi-classique du paragraphe précédent.

Lorsque le potentiel chimique effectif $\pi\beta \ln a/r_0$ est grand (ou l'activité $y = \exp -\pi\beta \ln a/r_0$ est petite), la première configuration non triviale est une paire de tourbillons d'intensité ± 1 aux points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 . La fonction de corrélation correspondante (négative puisque les intensités sont opposées) est donc, pour $|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1| \gg a$, $y \rightarrow 0$

$$\langle q(\mathbf{x}_1)q(\mathbf{x}_2) \rangle = -y^2 \exp -2\pi\beta \ln(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|/a) \simeq -y^2 (a/|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)^{2\pi\beta} \quad (149)$$

En revanche, comme $\sum q(\mathbf{x}) = 0$, on a, dans les mêmes conditions,

$$\sum_{\mathbf{x}_1} \langle q(\mathbf{x}_1)q(\mathbf{x}_2) \rangle = 0$$

$$\langle q^2(\mathbf{0}) \rangle \simeq y^2 \sum_{\mathbf{x} \neq 0} (a/|\mathbf{x}|)^{2\pi\beta} \quad (150)$$

Pour $\beta \rightarrow \infty$, il y a donc peu de tourbillons, et leurs corrélations décroissent rapidement avec la distance les séparant. Dans le langage des charges, on dira que celles-ci forment un diélectrique de systèmes liés neutres. On est donc conduit à envisager un développement en puissances de y , considéré comme un paramètre indépendant de β .

Nous allons maintenant étudier l'effet des tourbillons sur les corrélations entre spins déjà calculées dans l'approximation des ondes de spin, équations (128)–(132).

2.4 Corrélations

Nous calculons donc, dans le cadre du modèle de Villain

$$\langle e^{ip(\theta_1 - \theta_2)} \rangle = Z'_V / Z_V \quad (151)$$

où Z'_V , après intégration sur les angles θ , est donné par une somme analogue à (143), à savoir

$$Z'_V = \sum_{\substack{\{n_{ij}\} \\ (\partial n)_i = p(\delta_{i,1} - \delta_{i,2})}} \exp\left(-\frac{1}{2\beta} n_{ij}^2\right) \quad (152)$$

Pour pouvoir compléter le passage au réseau dual, il faut résoudre la condition $(\partial n)_i = p(\delta_{i,1} - \delta_{i,2})$. Pour cela relier les points 1 et 2 par une ligne arbitraire C tracée sur le réseau et orientée, par exemple de 2 à 1. Sur les liens du réseau dual, définissons la fonction antisymétrique η_{ab} , nulle si le lien ab ne coupe pas C , et égale à +1 si les orientations de C et de ab concordent au point de croisement, -1 dans le cas opposé (figure 12). Dans ces conditions, on peut introduire des variables m_a entières sur les sites du réseau dual telles que, généralisant la construction de Z_V , on puisse écrire

$$n_{ij} = m_a - m_b + p\eta_{ab} \quad (153)$$

Comme précédemment (en sommant sur tous les m_a sauf un)

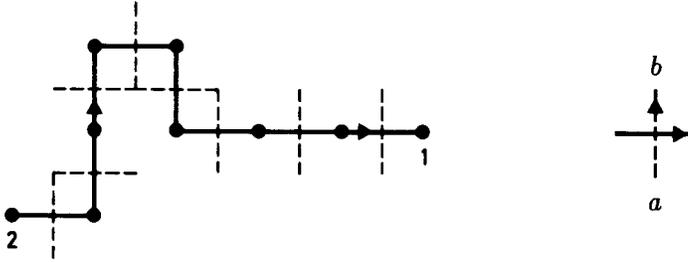


Figure 12 : Représentation de l'arc C joignant \mathbf{x}_2 to \mathbf{x}_1 , utilisé pour le calcul des corrélations. Sur les liens du réseau dual, $\eta_{ab} = \pm 1$ selon la convention d'orientation de l'arc.

$$\begin{aligned}
 Z'_V &= \sum_{\{m_a\}} \exp -\frac{1}{2\beta} \sum_{(ab)} (m_a - m_b + p\eta_{ab})^2 \\
 &= \sum_{\{q_a\}} \int \prod_a d\varphi_a \exp \left\{ -\frac{1}{2\beta} \sum_{(ab)} (\varphi_a - \varphi_b + p\eta_{ab})^2 + 2i\pi \sum_a q_a \varphi_a \right\}
 \end{aligned} \tag{154}$$

L'intégration sur les variables φ est immédiate. Posons

$$\begin{aligned}
 \eta_a &= \sum_b \eta_{ab} \\
 q'_a &= -\frac{p}{2i\pi\beta} \eta_a
 \end{aligned} \tag{155}$$

et observons que $\sum_a q'_a = 0$, en raison de l'antisymétrie de η_{ab} . Dans ces conditions

$$\begin{aligned}
 Z'_V &= Z_{\text{sp}} \exp \left\{ -\frac{p^2}{2\beta} \sum_{(ab)} \eta_{ab}^2 \right\} \\
 &\times \sum_{\{q_a\}} \exp \left\{ 2\pi\beta \sum_{(ab)} (q_a + q'_a) \Gamma(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) (q_b + q'_b) \right\}
 \end{aligned} \tag{156}$$

En tenant compte des définitions (155) et de la neutralité, on peut écrire

$$\left\langle e^{ip(\theta_1 - \theta_2)} \right\rangle = G_{\text{sp}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) G_{\text{Coulomb}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \tag{157}$$

avec

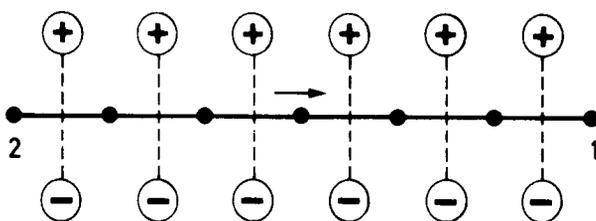


Figure 13 : Le potentiel de double couche η_a .

$$\begin{cases} G_{\text{sp}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \exp \left(-\frac{p^2}{2\beta} \sum_{(ab)} \eta_{ab}^2 - \frac{p^2}{2\pi\beta} \sum_{ab} \eta_a \Gamma(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) \eta_b \right) \\ G_{\text{Coulomb}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \left\langle \exp i p \sum_a q_a \sum_b \Gamma(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) \eta_b \right\rangle_{\text{Coulomb}} \end{cases} \quad (158)$$

où la dernière valeur moyenne s'effectue avec les poids correspondant à (148). Nous avons anticipé en appelant G_{sp} le premier facteur. Justifions ce qualitatif. L'exposant du second membre peut s'écrire $-(p^2/2\beta)\gamma(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)$, avec

$$\gamma(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) = \sum_{(ab)} \eta_{ab}^2 - \sum_{a,b} \eta_a G(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) \eta_b \quad (159)$$

forme dans laquelle nous sommes revenus, par abus de langage, à la notation

$$G(\mathbf{x}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 \mathbf{q}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}}{4 - 2 \sum_{\mu=1}^2 \cos q_{\mu}}$$

La condition de neutralité assure automatiquement l'élimination de la divergence infrarouge. La fonction η_a représente une version discrétisée d'un potentiel de double couche sur la courbe C . Ceci est apparent sur sa définition que nous reproduisons sur la figure 13, dans le cas particulier où les points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 sont le long d'un axe principal du réseau. Pour simplifier, nous évaluerons G_{sp} dans cette configuration laissant au lecteur le soin de reprendre le cas général. Posant $r = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, on a

$$\gamma(r) = r - \sum_{x, x'=1}^{r-1} \{2G(x - x', 0) - G(x - x', 1) - G(x - x', -1)\}$$

Or,

$$4G(x, y) - [G(x + 1, y) + G(x - 1, y) + G(x, y + 1) + G(x, y - 1)] = \delta_{x,0}\delta_{y,0}$$

ce qui permet de récrire

$$\begin{aligned} \gamma(r) &= r - \sum_{x,x'=0}^{r-1} \{ \delta_{x,x'} - 2G(x - x', 0) + G(x - x' + 1, 0) + G(x - x' - 1, 0) \} \\ &= \sum_{x=0}^{r-1} \{ G(r - 1 - x, 0) - G(r - x, 0) + G(-x, 0) - G(-x - 1, 0) \} \\ &= 2 \{ G(0) - G(r) \} = \Gamma(r)/\pi \end{aligned}$$

Pour G_{sp} , il vient, comme prévu

$$G_{sp}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \exp \left[-\frac{p^2}{2\pi\beta} \Gamma(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|) \right] \quad (160)$$

Reste à évaluer $G_{Coulomb}$. Nous nous contentons d'un développement en cumulants, et puisqu'au premier ordre $\langle q_a \rangle = 0$, on trouve

$$G_{Coulomb}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \simeq \exp \left(-\frac{1}{2} p^2 \sum_{a,b} \langle q(\mathbf{x}_a) q(\mathbf{x}_b) \rangle \sum_{a'} \Gamma(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_{a'}) \eta_{a'} \sum_{b'} \Gamma(\mathbf{x}_b - \mathbf{x}_{b'}) \eta_{b'} \right) \quad (161)$$

La corrélation $\langle q(\mathbf{x}_a) q(\mathbf{x}_b) \rangle$ a déjà été évaluée (équations (149)–(150)). Nous allons estimer les sommes sur a' et b' en supposant la distance de \mathbf{x}_a à la ligne C grande à l'échelle de la maille du réseau. Ceci nous conduit à réintroduire des notions de variables complexes et de fonctions analytiques. Prenant la courbe C le long de l'axe des x , on a approximativement

$$\begin{aligned} \sigma_a &= \sum_{a'} \Gamma(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_{a'}) \eta_{a'} \simeq \int_{x_2}^{x_1} dx \frac{\partial}{\partial y} \ln |z_a - z|_{z=x} \\ &= - \int_{x_2}^{x_1} dx \frac{\partial}{\partial x} \text{Im} \ln(z_a - x) = -\text{Im} \ln \left(\frac{z_a - z_1}{z_a - z_2} \right) \end{aligned} \quad (162)$$

où z_i , $i = 1, 2$, sont les affixes des points 1 et 2. Appelons alors z_R le centre du segment ab . Les paires étant fortement liées (c'est-à-dire $\langle q_a q_b \rangle$ décroissant rapidement avec la distance relative des points ab), nous pouvons développer $\sigma_{a,b}$ selon

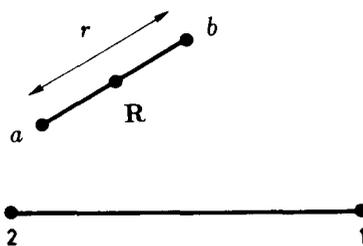


Figure 14 : Notations utilisées dans le calcul de la contribution d'une paire de tourbillons à la fonction de corrélation du spin.

$$\sigma(\mathbf{R}) \pm \frac{1}{2}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) \cdot \nabla \sigma(\mathbf{R})$$

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} G_{\text{Coulomb}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) &\simeq \exp -\frac{1}{2}p^2 \sum_{a,b} \langle q(\mathbf{x}_a)q(\mathbf{x}_b) \rangle \sigma(\mathbf{x}_a)\sigma(\mathbf{x}_b) \\ &\simeq \exp \left(\frac{1}{8}p^2 \sum_{\mathbf{r}} \langle q(\mathbf{0})q(\mathbf{r}) \rangle \sum_{\mathbf{R}} [\mathbf{r} \cdot \nabla \sigma(\mathbf{R})]^2 \right) \end{aligned} \quad (163)$$

Remarquons que si (x, y) désignent les coordonnées de \mathbf{R} ,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X} = \frac{Y - y_1}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}_1|^2} - \frac{Y - y_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}_2|^2}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial Y} = -\frac{X - x_1}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}_1|^2} + \frac{X - x_2}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}_2|^2} \quad (164)$$

De plus, tenons compte du fait que $\langle q(\mathbf{0})q(\mathbf{r}) \rangle$ est pratiquement fonction de $r = |\mathbf{r}|$ seulement, pour faire une moyenne sur les directions de \mathbf{r}

$$\sum_{\mathbf{R}} [\mathbf{r} \cdot \nabla \sigma(\mathbf{R})]^2 \rightarrow \frac{1}{2}r^2 \sum_{\mathbf{R}} [\nabla \sigma(\mathbf{R})]^2$$

Or, d'après (164)

$$[\nabla \sigma(R)]^2 = [\nabla \Gamma(R - x_1) - \nabla \Gamma(R - x_2)]^2$$

de sorte que si l'on se souvient que $\Delta \Gamma(R) = 2\pi \delta_{R,0}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}r^2 \sum_{\mathbf{R}} [\nabla \sigma(\mathbf{R})]^2 &= -\frac{1}{2}r^2 \sum_{\mathbf{R}} [\Gamma(\mathbf{R} - \mathbf{x}_1) - \Gamma(\mathbf{R} - \mathbf{x}_2)] \Delta [\Gamma(\mathbf{R} - \mathbf{x}_1) - \Gamma(\mathbf{R} - \mathbf{x}_2)] \\ &= 2\pi r^2 \Gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

Finalement,

$$G_{\text{Coulomb}}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \simeq \exp \left(\frac{1}{4} \pi p^2 \Gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \sum_{|\mathbf{r}| > a} \mathbf{r}^2 \langle q(\mathbf{0})q(\mathbf{r}) \rangle \right) \quad (165)$$

Ce résultat est tout à fait semblable à celui produit par les ondes de spins (équation (160)) au coefficient près de l'exposant. On peut donc écrire, en faisant le produit de (160) et (165)

$$\begin{aligned} \langle e^{ip(\theta_1 - \theta_2)} \rangle &\simeq \exp \left\langle -\frac{p^2}{2\pi\beta_{\text{eff}}} \Gamma(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \right\rangle \\ \frac{1}{\beta_{\text{eff}}} &= \frac{1}{\beta} - \frac{1}{2} \pi^2 \sum_{|\mathbf{r}| > a} \mathbf{r}^2 \langle q(\mathbf{0})q(\mathbf{r}) \rangle \end{aligned} \quad (166)$$

L'effet des tourbillons est d'accroître la température effective β^{-1} , puisqu'il résulte de (149)–(150) que

$$\frac{1}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{1}{\beta} + \pi^3 y^2 \int_a^\infty \frac{dr}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^{2\pi\beta-3} \quad y = \exp \left(-\pi\beta \ln \frac{a}{r_0} \right) \quad (167)$$

où nous avons fait réapparaître le facteur de coupure a . Puisque l'on a $1/\beta_{\text{eff}} > 1/\beta$, la décroissance des corrélations en $r^{-p^2/2\pi\beta_{\text{eff}}}$ est plus rapide que si l'on ne retenait que l'effet des ondes de spins. L'intégrale (167) présente une divergence infrarouge pour $2\pi\beta = 4$, qui témoigne de l'échec du développement perturbatif lorsque les tourbillons sont très éloignés l'un de l'autre. On retrouve l'estimation précédente de la température critique. Nous pouvons maintenant établir des équations de groupe de renormalisation caractérisant le comportement critique.

Etablir des expressions analogues à (166) pour les fonctions de corrélations à plus de deux points.

2.5 Flot de renormalisation

Nous venons de calculer au premier ordre non nul l'effet des tourbillons sur la fonction de corrélation des spins et trouvé un accroissement correspondant de la température effective. Or y et β apparaissent comme des

paramètres sans dimension, dans un problème où l'échelle de distance microscopique est donnée par la maille du réseau a . Les valeurs initiales peuvent être considérées comme définies à cette échelle. La question se pose alors de trouver les valeurs y_λ et β_λ définies à l'échelle plus grande λa , telles que, en termes de ces valeurs et supposant toujours y_λ assez petit, l'expression des corrections à la décroissance des corrélations, exhibée par la formule (167), retienne la même forme. Pour cela nous séparons l'intégrale en r de a à l'infini en deux parties, l'une de a à λa , l'autre de λa à l'infini. En posant $x = r/a$

$$\begin{aligned} \int_1^\infty dx x^{3-2\pi\beta} &= \int_1^\lambda dx x^{3-2\pi\beta} + \int_\lambda^\infty dx x^{3-2\pi\beta} \\ &= \frac{\lambda^{4-2\pi\beta} - 1}{4 - 2\pi\beta} + \lambda^{4-2\pi\beta} \int_1^\infty dx x^{3-2\pi\beta} \\ &\underset{\lambda \rightarrow 1}{\sim} \ln \lambda + [1 + (4 - 2\pi\beta) \ln \lambda] \int_1^\infty dx x^{3-2\pi\beta} \end{aligned}$$

Reportant cette expression pour $\lambda - 1$ petit dans (167), on obtient

$$\frac{1}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{1}{\beta} + \pi^3 y^2 \ln \lambda + \pi^3 y^2 [1 + (4 - 2\pi\beta) \ln \lambda] \int_1^\infty dx x^{3-2\pi\beta}$$

Or, pour $\lambda \rightarrow 1$, $\ln \lambda \sim \lambda - 1$ est petit, et au premier ordre nous trouvons une forme identique à (167)

$$\frac{1}{\beta_{\text{eff}}} = \frac{1}{\beta_\lambda} + \pi^3 y_\lambda^2 \int_1^\infty dx x^{3-2\pi\beta_\lambda} \quad (168a)$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_\lambda} &= \frac{1}{\beta} + \pi^3 y^2 \ln \lambda & (\lambda \rightarrow 1) & (168b) \\ y_\lambda &= y + (2 - \pi\beta)y \ln \lambda \end{aligned}$$

Sous une forme différentielle, ces équations deviennent

$$\begin{cases} \lambda \frac{d}{d\lambda} \beta_\lambda^{-1} = \pi^3 y_\lambda^2 \\ \lambda \frac{d}{d\lambda} y_\lambda = (2 - \pi\beta_\lambda) y_\lambda \end{cases} \quad (169)$$

Les résultats sont conformes à ce que donne une analyse plus élaborée, bien qu'il puisse paraître *a priori* suspect que le raisonnement précédent permette de décrire l'évolution de deux paramètres à partir d'une seule condition. Les équations du système (169) sont celles analysées par Kosterlitz donnant

le flot de renormalisation des constantes de couplages nues sous l'effet d'un changement d'échelle. Les conditions initiales $\lambda = 1$ sont $\beta_1 = \beta$ et $y_1 = y = \exp(-\pi\beta \ln a/r_0)$, et le domaine de validité de (169) correspond à y_λ petit; au-delà il faudrait introduire un plus grand nombre de termes dans la série en y . Il est commode d'utiliser des variables réduites

$$\begin{aligned}\Theta_\lambda &= 2 - \pi\beta_\lambda \\ Y_\lambda &= 2\pi y_\lambda\end{aligned}\quad (170)$$

en termes desquelles l'évolution s'écrit

$$\begin{cases} \lambda \frac{d}{d\lambda} \Theta_\lambda = Y_\lambda^2 \left(1 - \frac{1}{2} \Theta_\lambda\right)^2 \simeq Y_\lambda^2 \\ \lambda \frac{d}{d\lambda} Y_\lambda^2 = 2\Theta_\lambda Y_\lambda^2 \end{cases} \quad (171a)$$

Au voisinage du point fixe non trivial $\Theta = 0, Y = 0$, les courbes intégrales sont des hyperboles

$$\Theta_\lambda^2 - Y_\lambda^2 = \text{Cste} \quad (171b)$$

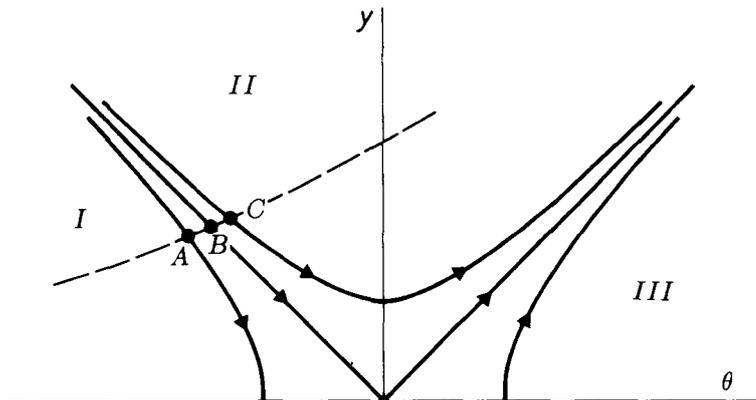


Figure 15 : Le flot de renormalisation de Kosterlitz et Thouless.

D'après la seconde équation (171a), l'axe $Y = 0$ est attractif pour $\Theta < 0$ et répulsif pour $\Theta > 0$, ce qui donne le flot représenté sur la figure 15. On y distingue trois régions. Dans la région I l'effet de la renormalisation est d'attirer le point représentatif vers une théorie critique caractérisée par $Y_\infty = 0, \Theta_\infty \simeq -\sqrt{\Theta^2 - Y^2} < 0$, point fixe invariant d'échelle de basse température, avec décroissance des corrélations en loi de puissance, selon $|x|^{-1/2\pi\beta_\infty}$. Dans les régions II et III qui échappent rapidement au

contrôle de l'approximation, Y_λ finit par grandir comme Θ , et on tend vraisemblablement vers un point fixe de haute température avec libération des tourbillons (c'est la phase "plasma" du gaz coulombien, ou la phase lisse dans le langage des surfaces), correspondant à la décroissance exponentielle des corrélations. La ligne séparatrice est $Y = -\Theta$, le long de laquelle on est entraîné vers le point limite $Y = 0$, $\Theta = 0$. La courbe en pointillé correspond à la relation de départ, $\lambda = 1$, $y = \exp(-\pi\beta \ln a/r_0)$, soit

$$Y = 2\pi e^{(\Theta-2)\ln a/r_0} \simeq 2\pi e^{-2\ln a/r_0} (1 + \Theta \ln \frac{a}{r_0} + \dots) \quad (172)$$

où on se souvient que $\ln a/r_0 = \ln 2\sqrt{2}e^\gamma \simeq 1.6$, valeur non universelle qui pourrait être améliorée par un traitement plus détaillé, et qui change de version à version du modèle. Elle permet cependant d'estimer la température critique du modèle de Villain. L'intersection de (172) avec la droite $Y = -\Theta$ donne approximativement

$$Y_c = -\Theta_c = \pi\beta_c - 2 \simeq \left(\ln \frac{a}{r_0} + \frac{e^{2\ln a/r_0}}{2\pi} \right)^{-1} \quad (173)$$

On peut d'ailleurs obtenir la dépendance en λ des trajectoires au voisinage de l'origine. Dans la région I, on pose $\Theta_\lambda^2 = Y_\lambda^2 + \Theta_\infty^2$, $\Theta_1 = \Theta$, $Y_1 = Y$, donc $\Theta_\infty^2 = \Theta^2 - Y^2$, et en résolvant (171), où le second membre de la première équation est approximativement Y_λ^2 , il vient ($\Theta_\infty < 0$)

$$(I) \quad \begin{cases} \Theta_\lambda = \Theta_\infty \frac{1 + (\lambda/\lambda_i)^{2\Theta_\infty}}{1 - (\lambda/\lambda_i)^{2\Theta_\infty}} \\ Y_\lambda = \sqrt{\Theta_\lambda^2 - \Theta_\infty^2} \\ \lambda_i^{-2\Theta_\infty} = \frac{\Theta - \Theta_\infty}{\Theta + \Theta_\infty} > 0 \end{cases} \quad (174)$$

Comme $\Theta_\infty < 0$, on voit qu'il y a effectivement perte de mémoire des conditions initiales suivant une loi de puissance en λ , caractéristique de théories invariantes d'échelle.

Dans la région II en revanche, $Y_\lambda^2 - \Theta_\lambda^2 = Y_0^2 = Y^2 - \Theta^2$, avec $Y_0 > 0$ ordonnée de l'hyperbole à l'aplomb de $\Theta = 0$. On introduit la variable ψ variant de ψ_i à $\frac{1}{2}\pi$, telle que

$$(II) \quad \begin{cases} \Theta_\lambda = Y_0 \tan \psi \\ Y_\lambda = \frac{Y_0}{\cos \psi} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \exp \frac{\psi - \psi_i}{Y_0} \\ \tan \psi_i = \frac{\Theta}{\sqrt{Y^2 - \Theta^2}} \end{cases} \quad (175)$$

Alors Θ_λ varie de manière monotone croissante de 0 à l'infini, tandis que Y_λ reste positif, tend vers l'infini pour $\lambda \rightarrow \infty$, et a un minimum si $\psi_i < 0$. Les

grandes valeurs positives correspondent à une région où l'approximation n'a pas de sens. Cependant, en partant d'un point C sur la courbe des valeurs initiales (très proche du point critique) avec $\Theta < 0$, $\psi_i < 0$, on peut limiter le flot de renormalisation à une zone où Y_λ reste petit, et l'approximation peut encore être considérée comme raisonnable. Cela est justifié jusqu'au minimum de la courbe Y_λ environ, soit Y_0 correspondant à $\psi = 0$, et

$$\lambda \simeq e^{-\psi_i/Y_0} \quad (176)$$

Nous identifions λ , à un facteur près, à ξ/a où ξ est la longueur de corrélation dans la phase désordonnée au voisinage du point extrême de la ligne critique. Quand on s'approche de ce point, Y_0 tend vers zéro comme

$$Y_0^2 \sim (\Theta - \Theta_c) \simeq (\beta_c - \beta) \quad (177)$$

tandis que $\sin \psi_i = \Theta/Y$ est proche de -1 , c'est-à-dire $\psi_i \sim -\frac{1}{2}\pi$. En conséquence,

$$\xi/a \simeq A \exp \frac{B}{\sqrt{\beta_c - \beta}} \quad (178)$$

où A et B sont des constantes positives. Le point important est la croissance très rapide, plus vite que toute puissance, de la longueur de corrélation avec l'approche au point critique. En ce sens, l'exposant ν est infini, et on s'attend à ce que la partie singulière de l'énergie libre pour $\beta_c > \beta$ se comporte en

$$F_{\text{sing}} \simeq \xi^{-2} \simeq \text{Cste} \exp \frac{-2B}{\sqrt{\beta_c - \beta}} \quad \beta \rightarrow \beta_c - 0 \quad (179)$$

ce qui implique que toutes ses dérivées soient continues en β_c . La transition du modèle XY est donc d'ordre infini.

Le point critique correspond au point B de la figure 15. La température est un peu plus faible que celle donnée par l'estimation $2\pi\beta_c = 4$. Néanmoins, l'effet des tourbillons est de faire décroître un peu plus rapidement les corrélations que ne l'indiquerait l'approximation des ondes de spins. Les deux effets en sens opposé se combinent pour donner une décroissance en $r^{-1/2\pi\beta_{\text{eff}}} = r^{-1/4}$ à des logarithmes près. Analysons, en suivant Kosterlitz, l'effet d'une modification faible du facteur de coupure $a \rightarrow a + \varepsilon a$ sur la contribution des tourbillons. D'après (168b), on a pour $r = |\mathbf{x}|$,

$$G_{\text{Coulomb}}(\mathbf{x}, a) \sim G_{\text{Coulomb}}(\mathbf{x}, a + \varepsilon a) \exp -\frac{\pi^2}{2} y^2 \varepsilon \ln \frac{r}{a} \quad (180)$$

La dépendance en a apparaît aussi dans y et β . L'équation (180) signifie que nous ne suivons le calcul perturbatif que dans la mesure où il nous permet d'estimer l'effet de changement d'échelle. Pour le reste, nous calculons les

termes de corrélation pour la valeur $a + \varepsilon a$. Cette procédure peut être répétée, à condition de prendre les valeurs β_λ et y_λ dépendant de a jusqu'à $\lambda a \sim r$. En ce point, la contribution des tourbillons devient proche de 1, et la séparation entre tourbillons est de l'ordre de la maille du réseau renormalisé. Avec, comme ci-dessus, $Y_\lambda = 2\pi y_\lambda$, la fonction de corrélation totale s'écrit, pourvu que l'activité reste faible,

$$G(\mathbf{x}) \simeq \text{Cste} \left(\frac{a}{|\mathbf{x}|} \right)^{1/2\pi\beta} \exp -\frac{1}{8} \int_1^{r/a} \frac{d\lambda}{\lambda} Y_\lambda^2 \ln \frac{r}{\lambda a} \quad (181)$$

Le premier facteur est la contribution des ondes de spin. D'après (171) on a, pour Y_λ et Θ_λ faibles, $Y_\lambda^2 d\lambda/\lambda = d\Theta_\lambda$. En ce qui concerne la théorie critique, pour laquelle les conditions initiales satisfont (quelle que soit l'échelle λ), la relation $\Theta_1 + Y_1 = 0$, on obtient

$$\Theta^{-1} - \Theta_\lambda^{-1} = \ln \lambda \quad (182)$$

Θ et Θ_λ étant tous deux négatifs. Dans ce cas, l'exposant dans (181) devient

$$-\frac{1}{8} \int_1^{r/a} d\Theta_\lambda \ln \frac{|\mathbf{x}|}{\lambda a} \underset{r/a \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Theta}{8} \ln \frac{|\mathbf{x}|}{a} + \frac{1}{8} \ln \ln \frac{|\mathbf{x}|}{a} + \text{Cste} \quad (183)$$

On remarque que le fait de changer la borne supérieure d'un facteur fini ne modifie pas le comportement dominant. A l'ordre le plus bas en Θ (qui correspond aux équations du flot de renormalisation), il faut faire l'approximation

$$(a/|\mathbf{x}|)^{1/2\pi\beta} = (a/|\mathbf{x}|)^{1/4(1-\Theta/2)} \simeq (a/|\mathbf{x}|)^{1/4+\Theta/8+\dots}$$

En combinant ce développement avec (183), on trouve dans les conditions critiques

$$G(\mathbf{x}) \sim \text{Cste} \left(\frac{a}{|\mathbf{x}|} \right)^{1/4} (\ln |\mathbf{x}|)^{1/8} \quad (184)$$

Ceci s'exprime encore, puisque $d = 2$, par la valeur de l'exposant

$$\eta = \frac{1}{4} \quad (185)$$

Ce résultat est surprenant puisqu'identique à celui du modèle d'Ising à la correction logarithmique près, laquelle provient du fait que le modèle non universel initial est représenté dans le plan (Y, Θ) par une courbe qui ne traverse pas l'origine. Le terme logarithmique est le souvenir d'un opérateur marginal associé à l'activité des tourbillons.

Si on se sert de ξ^{-1} au lieu de $\beta - \beta_c$ comme paramètre d'approche au point critique (puisque ν est infini), on s'attend (cf. équation (42)) à ce que dans la phase désordonnée la susceptibilité se comporte en

$$\chi \sim \xi^{2-\eta} \sim \exp \frac{b}{\sqrt{\beta_c - \beta}} \quad \beta \rightarrow \beta_c - 0 \quad (186)$$

c'est-à-dire qu'elle diverge plus rapidement que toute puissance inverse de $\beta_c - \beta$. Enfin, l'exposant δ correspondant à la réponse à un champ extérieur est donné, lui aussi, par les relations d'échelle (qu'on peut vérifier par un calcul direct)

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} = 15 \quad (187)$$

résultat à nouveau identique à celui du modèle d'Ising.

Les idées du groupe de renormalisation ont donc conduit Kosterlitz et Thouless à donner une image très précise de la transition du modèle XY. Il se trouve qu'il existe un modèle exactement soluble (de la famille des modèles à six "vertex" résolus par Lieb), appartenant à la même classe d'universalité qui confirme point par point l'analyse précédente, ce qu'a montré van Beijeren.

Appendice A. Systèmes bidimensionnels à symétrie continue

A.1 Inégalité sur l'aimantation

Etablissons le résultat de Hohenberg, Mermin et Wagner, concernant l'annulation du paramètre d'ordre pour les systèmes à symétrie continue en dimension inférieure ou égale à deux. Pour simplifier la discussion, nous nous limitons à des interactions entre proches voisins (ferromagnétiques) et au cas du modèle vectoriel à symétrie $O(n)$ avec longueur fixée des vecteurs. La démonstration qui suit admet d'évidentes généralisations (interactions ferromagnétiques de courte portée, contrainte moins forte que $S^2 = 1$, etc.). L'inégalité à établir concerne l'aimantation en présence d'un champ extérieur uniforme. Elle combine l'inégalité de Schwarz et l'invariance par rotation de la mesure sur les spins.

Nous allons nous limiter à un réseau à N sites grand, mais fini, avec conditions aux limites périodiques. De ce fait, l'analyse de Fourier se fait avec des moments discrets. A la fin, un passage à la limite $N \rightarrow \infty$ est sous-entendu. Nous écrivons l'action

$$S = \beta \left(\sum_{(x,y)} \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y + \sum_x \mathbf{H} \cdot \mathbf{S}_x \right) \quad (A.1)$$

\mathbf{S}_x est un vecteur à n -composantes de longueur unité; le poids statistique est $Z^{-1} \prod_x d^n \mathbf{S}_x \delta(\mathbf{S}_x^2 - 1) e^S$. Prenons la direction de \mathbf{H} comme n ième-axe de coordonnées dans l'espace du spin, et posons $H = |\mathbf{H}|$. L'aimantation

$$M(H) = \langle S_x^n \rangle = \frac{1}{N} \left\langle \sum_x S_x^n \right\rangle \quad (A.2)$$

est positive, comme on le voit par exemple en utilisant le développement de haute température, qui est convergent sur un réseau fini. Soient A_i and B_i des observables (c'est-à-dire des fonctions des variables S). Avec le poids statistique précédent, on a l'inégalité de Schwarz

$$\left| \left\langle \sum_i A_i^* B_i \right\rangle \right|^2 \leq \left\langle \sum_i A_i^* A_i \right\rangle \left\langle \sum_i B_i^* B_i \right\rangle \quad (A.3)$$

L'indice prend ici un nombre fini de valeurs. Pour utiliser l'invariance par rotation de la mesure $d^n \mathbf{S} \delta(\mathbf{S}^2 - 1)$, observons que les générateurs des rotations $L_{\alpha\beta} = S^\alpha \partial / \partial S^\beta - S^\beta \partial / \partial S^\alpha$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$) satisfont à la relation d'intégration par parties

$$\begin{aligned} \int d^n \mathbf{S} \delta(\mathbf{S}^2 - 1) L_{\alpha\beta} f(\mathbf{S}) &= 0 \\ \int d^n \mathbf{S} \delta(\mathbf{S}^2 - 1) [g(\mathbf{S}) L_{\alpha\beta} f(\mathbf{S}) + f(\mathbf{S}) L_{\alpha\beta} g(\mathbf{S})] &= 0 \end{aligned} \quad (A.4)$$

La seconde relation est conséquence de la première si on remarque que L est un opérateur différentiel du premier ordre. Pour obtenir la première relation, il suffit d'observer qu'en raison de l'invariance de la mesure par rotation, on a

$$0 = \frac{d}{d\theta} \int d^n \mathbf{S} \delta(\mathbf{S}^2 - 1) f(S^1, \dots, S^\alpha \cos \theta + S^\beta \sin \theta, \dots, S^\beta \cos \theta - S^\alpha \sin \theta, \dots, S^n)$$

Pour $i = 1, 2, \dots, n - 1$ nous écrivons $L_{x,i} = S_x^n \partial / \partial S_x^i - S_x^i \partial / \partial S_x^n$ le générateur des rotations dans le plan (n, i) , et pour simplifier nous noterons $L_x \equiv \{L_{x,i}\}$, i variant désormais de 1 à $n - 1$.

Appliquons l'inégalité (A.3) à

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\perp} \\ \mathbf{B}(\mathbf{k}) = - \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{L}_{\mathbf{x}}(S) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Ici $\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\perp}$ désigne l'ensemble des composantes du spin perpendiculaires au champ, et $\mathbf{L}_{\mathbf{x}}(S)$ l'action de $\mathbf{L}_{\mathbf{x}}$ sur S . En utilisant les identités (A.4), on a, quelle que soit la fonctionnelle C

$$\langle C\mathbf{B}(\mathbf{k}) \rangle = \left\langle \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{L}_{\mathbf{x}}(C) \right\rangle \quad (\text{A.6})$$

De la sorte, on peut évaluer les différents termes de (A.3)

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{k})^* \mathbf{B}(\mathbf{k}) \rangle = \sum_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{L}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\perp} \rangle = (n-1) \sum_{\mathbf{x}} \langle \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^n \rangle = (n-1)NM(H)$$

$$\langle \mathbf{A}(\mathbf{k})^* \mathbf{A}(\mathbf{k}) \rangle = \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \langle \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\perp} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\perp} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{B}(\mathbf{k})^* \mathbf{B}(\mathbf{k}) \rangle &= - \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \langle \mathbf{L}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{L}_{\mathbf{y}}(S) \rangle \\ &= \beta \left\{ N(n-1)HM(H) + \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} 2(1 - \cos \mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \right. \\ &\quad \left. \langle (n-1)S_{\mathbf{x}}^n S_{\mathbf{y}}^n + \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\perp} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\perp} \rangle \right\} \end{aligned}$$

d'où l'inégalité

$$\begin{aligned} (n-1)^2 M^2(H) \leq \beta &\left(\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \langle \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\perp} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\perp} \rangle \right) \left((n-1)HM(H) + \right. \\ &\left. \frac{1}{N} \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} 2(1 - \cos \mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})) \langle (n-1)S_{\mathbf{x}}^n S_{\mathbf{y}}^n + \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\perp} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\perp} \rangle \right) \end{aligned}$$

Par construction, chacun des facteurs du membre de droite est positif. Comme $(1 - \cos \mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))$ est positif, on majore le second terme en majorant la valeur moyenne qu'on écrit

$$\langle (n-2)S_{\mathbf{x}}^n S_{\mathbf{y}}^n + \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}} \rangle \leq (n-2) + 1 = n-1$$

De plus

$$\frac{1}{N} \sum_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} 2(1 - \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})) = 2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos k_{\mu})$$

Il vient donc

$$\frac{\beta^{-1}(n-1)M^2(H)}{2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos k_{\mu}) + HM(H)} \leq \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \langle \mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\perp} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}}^{\perp} \rangle$$

Passons maintenant à la limite du volume infini, et intégrons sur \mathbf{k} dans la zone de Brillouin

$$\beta^{-1}(n-1)M^2(H) \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos k_{\mu}) + HM(H)} \leq \langle (\mathbf{S}_{\mathbf{x}}^{\perp})^2 \rangle \leq 1 \quad (\text{A.7})$$

Le résultat est établi pour toute dimension entière. On voit que les approximations sont sauvages. Néanmoins, on a conservé suffisamment de marge pour exclure l'existence d'une aimantation spontanée $M = \lim_{H \rightarrow 0} M(H)$ en dimension un (ce qui n'est pas surprenant) et en dimension deux, ce qui constitue à proprement parler le théorème annoncé. En effet, au delà de deux dimensions, l'intégrale qui n'est autre que le propagateur libre avec une masse carrée $HM(H) \leq H$ reste finie lorsque $H \rightarrow 0$. En revanche, lorsque d est 1 ou 2, elle diverge, forçant M à tendre vers zéro. Plus précisément, si $d = 1$, l'intégrale vaut $\frac{1}{2}[HM(H) + H^2 M^2(H)/4]^{-\frac{1}{2}}$, et donc

$$0 \leq M(H) \leq \left(\frac{2\beta}{n-1} \right)^{2/3} H^{1/3} \left(1 + \frac{H^2}{4} \right)^{1/3} \quad (d=1) \quad (\text{A.8})$$

qui implique que M tend vers zéro avec H quel que soit β . Bien sûr, nous savons que M est en fait linéaire avec H , pour H suffisamment petit, avec un coefficient (la susceptibilité) qui diverge lorsque $\beta \rightarrow \infty$; mais (A.8) suffit pour interdire l'existence d'une phase avec paramètre d'ordre non nul. Le cas intéressant est cependant $d = 2$. Dans ce cas, nous savons que l'intégrale diverge logarithmiquement lorsque $H \rightarrow 0$, de sorte que pour H suffisamment petit

$$0 \leq M(H) \leq \sqrt{\frac{4\pi\beta}{n-1}} \frac{1}{\sqrt{C\text{ste} - \ln H}} \quad (d=2) \quad (\text{A.9})$$

ce qui implique à nouveau l'absence d'aimantation spontanée à toute température. Comme dans le cas précédent, l'intérêt de ce type d'inégalité est qu'elle est valable uniformément en H et β .

A.2 Inégalité sur les corrélations

McBryan et Spencer ont exploité les idées développées dans l'étude du modèle XY à deux dimensions pour en déduire une décroissance polynômiale des corrélations en l'absence de champ extérieur. La preuve se généralise aisément à plus de deux composantes, mais donne une borne très faible, puisque dans ce cas les corrélations décroissent en fait exponentiellement. Néanmoins, ceci suffit à établir l'absence d'aimantation spontanée.

Raisonnons sur la fonction à deux points, dans le cas à deux composantes

$$0 \leq \langle \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y \rangle = Z^{-1} \operatorname{Re} \int \prod_y d\theta_y \exp \left\{ \beta \sum_{(x', x'')} \cos(\theta_{x'} - \theta_{x''}) + i(\theta_x - \theta_y) \right\} \quad (A.10)$$

Comme précédemment, le volume est grand mais fini et on utilise des conditions aux limites périodiques. Notons par abus de langage $G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ la solution de $-\Delta G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$, pourvu que nous sous-entendons toujours des soustractions. Formellement,

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2 \sum_{\mu=1}^2 (1 - \cos k_{\mu})}$$

dans la limite du volume infini. L'idée est d'observer qu'à N fini, l'intégrand est analytique dans chaque variable θ , et de période 2π ; on peut donc déplacer le contour en changeant $\theta_{x'} \rightarrow \theta_{x'} + i\psi_{x'}$, où $\psi_{x'}$ peut être choisie selon

$$\psi_{x'} = \beta^{-1} [G(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) - G(\mathbf{x}' - \mathbf{y})] \quad (A.11)$$

D'une part, $\psi_{x'}$ est bien défini, d'autre part il est évidemment uniformément borné en \mathbf{x}' par $Cste/\beta$. Cela étant, en majorant les phases par l'unité, il vient, après substitution de θ en $\theta + i\psi$,

$$0 \leq \langle \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y \rangle \leq Z^{-1} \times e^{-(\psi_x - \psi_y)} \int \prod_y d\theta_y e^{\beta \sum_{(x', x'')} \cos(\theta_{x'} - \theta_{x''}) \cosh(\psi_{x'} - \psi_{x''})}$$

soit

$$0 \leq \langle \mathbf{S}_x \cdot \mathbf{S}_y \rangle \leq e^{-(\psi_x - \psi_y)} \left\langle e^{\beta \sum_{(x', x'')} \cos(\theta_{x'} - \theta_{x''}) (\cosh(\psi_{x'} - \psi_{x''}) - 1)} \right\rangle$$

Pour β suffisamment grand la borne uniforme sur ψ implique que

$$\beta \sum_{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')} (\cosh(\psi_{\mathbf{x}'} - \psi_{\mathbf{x}''}) - 1) \leq \frac{1}{2}\beta[1 + \mathcal{O}(\beta^{-2})] \sum_{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')} (\psi_{\mathbf{x}'} - \psi_{\mathbf{x}''})^2$$

En outre,

$$\sum_{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')} (\psi_{\mathbf{x}'} - \psi_{\mathbf{x}''})^2 = - \sum_{\mathbf{x}'} \psi_{\mathbf{x}'} \sum_{\mathbf{x}''(\mathbf{x}')} (\psi_{\mathbf{x}''} - \psi_{\mathbf{x}'}) = \beta^{-1}(\psi_{\mathbf{x}} - \psi_{\mathbf{y}})$$

Finalement, le cosinus qui figure dans l'exponentielle peut être majoré par 1, de sorte que pour $\beta > \beta(\varepsilon)$,

$$0 \leq \langle \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}} \rangle \leq \exp\left(-\frac{1}{2}(1 - \varepsilon)(\psi_{\mathbf{x}} - \psi_{\mathbf{y}})\right)$$

Soit encore

$$0 \leq \langle \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}} \rangle \leq \exp\left(-\frac{1}{2}(1 - \varepsilon)[G(\mathbf{0}) - G(\mathbf{x} - \mathbf{y})]/\beta\right) \quad (\text{A.12})$$

La quantité $G(\mathbf{0}) - G(\mathbf{x})$ n'est autre que $\Gamma(\mathbf{x})/2\pi$ qui se comporte pour $|\mathbf{x}|$ grand comme $\ln(|\mathbf{x}|/r_0)/2\pi$, et reste toujours positive. Pour $|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ grand et $\beta \geq \beta(\varepsilon)$, on aboutit à la borne suivante très réaliste dans le cas du modèle XY

$$0 \leq \langle \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}} \rangle \leq \left(\frac{r_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}\right)^{(1-\varepsilon)/2\pi\beta} \quad \beta > \beta(\varepsilon) \quad (\text{A.13})$$

A nouveau on exclut de ce fait la possibilité d'une aimantation spontanée, puisque $\lim_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \rightarrow \infty} \langle \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{y}} \rangle = \langle \mathbf{S}_{\mathbf{x}} \rangle^2 = 0$, du moins pour β assez grand. L'aimantation spontanée est de toute façon non décroissante avec β , donc toujours nulle. En raisonnant sur des paires de composantes dans le cas $n \geq 3$ on aboutit de la même façon à une décroissante au moins polynômiale.

En définitive, on voit que d'une manière ou d'une autre ces preuves reposent sur l'impossibilité de définir un champ libre de masse nulle à deux dimensions en raison de la divergence infrarouge de ses fluctuations, idée qui a été développée par S. Coleman. Cela n'empêche pas d'utiliser un tel champ, dans un volume fini arbitraire, et même d'utiliser certaines quantités associées, dérivées ou exponentielles, dans un volume infini. Ce point sera discuté au chapitre IX (volume 2).

Appendice B. Renormalisation phénoménologique

Dans des systèmes de basse dimensionalité (en pratique $d = 2$ ou 3), il est possible de développer une méthode de renormalisation dans l'espace réel, fondée sur une hypothèse de quasi-invariance d'échelle pour des systèmes de taille grande mais finie. Nous reviendrons sur ce sujet en plus grand détail au chapitre IX (volume 2), dévolu à l'étude de l'invariance conforme en deux dimensions. Considérons les valeurs propres de la matrice de transfert d'un système dont la section transverse a une taille proportionnelle à L^{d-1} . En étudiant la matrice de transfert tout se passe comme si l'une des dimensions du système était infinie. Le logarithme de la plus grande valeur propre est égal à L^{d-1} fois l'énergie libre par unité de volume. En outre, le rapport des deux premières valeurs propres, supposées non dégénérées, définit une longueur de corrélation selon

$$\exp(-1/\xi_L) = \lambda_L^{(1)}/\lambda_L^{(2)} \quad (B.1)$$

Si $L \rightarrow \infty$, ξ_L tend vers la longueur caractéristique du système infini, soit ξ_∞ , au moins pour $\beta < \beta_c$. Lorsque L , ξ_L et ξ_∞ sont grands devant la maille du réseau, il semble légitime de supposer qu'on a une relation du type

$$\xi_L = \xi_\infty f(L/\xi_\infty) \quad (B.2)$$

où la fonction $f(x)$ tend vers l'unité pour $x \rightarrow \infty$. En revanche, lorsque ξ_∞ tend vers l'infini au voisinage d'un point critique, ξ_L reste borné. De la sorte $f(x) \sim Ax$ pour x tendant vers zéro. Prenons l'exemple d'un système d'Ising où ξ_L et ξ_∞ sont des fonctions de deux paramètres essentiels, $\theta \sim (T - T_c)/T_c$ et H . Alors

$$\frac{\xi_{L'}(\theta', H')}{\xi_L(\theta, H)} = \frac{\xi_\infty(\theta', H') f(L'/\xi_\infty(\theta', H'))}{\xi_\infty(\theta, H) f(L/\xi_\infty(\theta, H))} \quad (B.3)$$

Choisissons alors θ' et H' (L , L' , θ , H étant fixés) de telle sorte que

$$\frac{L'}{\xi_\infty(\theta', H')} = \frac{L}{\xi_\infty(\theta, H)} \quad (B.4)$$

La fonction inconnue f s'élimine, et l'on trouve

$$\frac{\xi_{L'}(\theta', H')}{\xi_L(\theta, H)} = \frac{\xi_\infty(\theta', H')}{\xi_\infty(\theta, H)} = \frac{L'}{L} \quad (B.5)$$

Ceci établit une relation entre θ' , H' et θ , H , dépendant des grandeurs finies L et L' . Supposant la fonction $\xi_L(\theta, H)$ connue, on a ainsi une transformation de renormalisation. Dans un tel système, ξ_∞ ne diverge que pour $H \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$. Il s'ensuit que la relation entre (θ', L') et (θ, L) définie par

$$\frac{\xi_{L'}(\theta', 0)}{\xi_L(\theta, 0)} = \frac{L'}{L} = \frac{\xi_\infty(\theta', 0)}{\xi_\infty(\theta, 0)} \quad (B.6)$$

doit avoir zéro pour point fixe, avec un comportement asymptotique en

$$\theta' = \left(\frac{L}{L'}\right)^{1/\nu} \theta \quad (B.7)$$

quand L et L' tendent simultanément vers l'infini, leur rapport étant fixé. Le point fixe $\theta = 0$ correspond à une croissance linéaire de la longueur de corrélation ξ_L avec L . De même, on peut avoir accès à l'exposant magnétique en étudiant le comportement à $\theta = 0$, où $\xi_\infty(0, H)$ diverge en $|H|^{-1/y_H}$ avec $y_H = \frac{1}{2}(d + \frac{2}{\nu})$. La transformation (B.5) qui doit avoir $H = 0$ comme point fixe, engendre un comportement en

$$H' = \left(\frac{L}{L'}\right)^{y_H} H \quad (B.8)$$

La méthode a ses vertus et ses difficultés. On évite la prolifération de nouvelles interactions par la transformation de renormalisation. En revanche, on n'obtient qu'une seule relation pour déterminer plusieurs inconnues (ici θ' et H'). Cependant, dans le cas présent, on sait d'avance que le point critique est sur l'axe $H = 0$, ce qui permet de déterminer θ_c ($= 0$) et d'étudier alors séparément le comportement en H à $\theta = \theta_c$ fixé.

Une autre limitation est qu'il faut être capable de déterminer $\xi_L(\theta, H)$. Cela a jusqu'à présent limité les applications pratiques à des systèmes à deux (ou peut-être trois) dimensions.

A titre de vérification, considérons des rubans bidimensionnels de largeur L , avec conditions aux limites périodiques, et examinons dans ce cas la longueur de corrélation $\xi_L(\beta)$ du modèle d'Ising. A l'aide des expressions du chapitre II, montrer que

$$\begin{aligned} \xi_L^{-1}(\beta) &= \frac{1}{2}[(\gamma_1 + \gamma_3 + \dots + \gamma_{2L-1}) - (\gamma_0 + \gamma_2 + \dots + \gamma_{2L-2})] \\ \cosh \gamma_r &= \frac{\cosh^2 2\beta}{\sinh 2\beta} - \cos \frac{r\pi}{L} \end{aligned} \quad (B.9)$$

Définissons alors $\beta_c(L, L')$ et $\nu(L, L')$ par

$$\begin{aligned} \frac{\xi_L(\beta_c)}{\xi_{L'}(\beta_c)} &= \frac{L'}{L} \equiv u \\ \nu^{-1} &= \frac{\ln\left(\frac{d\xi_L(\beta_c)}{d\beta} / \frac{d\xi_{L'}(\beta_c)}{d\beta}\right)}{\ln(L/L')} - 1 \end{aligned} \quad (B.10)$$

Il vient

$$\beta_c(L, L') = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) - \frac{\pi^3}{192} \frac{u(u+1)}{L^3} + \dots \quad (B.11)$$

$$\nu(L, L') = 1 - \frac{\pi^2 \ln 2}{24L^2} \frac{(u^2 - 1)}{\ln u} + \dots \quad (B.12)$$

ce qui montre une convergence rapide vers les résultats exacts pour des rubans de taille modeste. Le choix optimal de u est une valeur aussi voisine que possible de 1, soit $L = L' \pm 1$.

La technique exposée ci-dessus s'applique avec succès à une grande variété de problèmes bidimensionnels : percolation, localisation, modèle XY, ... La relation (B.2), ou sa généralisation à d'autres observables, demande cependant une justification, qu'on peut en fait fournir dans le cadre d'une étude plus fine du groupe de renormalisation, du moins en dimension inférieure à quatre. En revanche, cette relation cesse d'être valable en dimension supérieure ou égale à quatre (plus généralement à partir de la dimension critique supérieure) comme on peut s'y attendre en remarquant qu'en grande dimension l'approximation du champ moyen prévoit une transition, même pour un système de taille finie.

A titre d'illustration, considérons la limite $n \rightarrow \infty$ d'un modèle à symétrie $O(n)$, examiné au chapitre III. Dans la phase de haute température, nous avons vu que dans un système infini, la longueur de corrélation $\xi_\infty(\beta)$ satisfait à la condition

$$\beta = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\xi_\infty^{-1} + 2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos q_\mu)} \quad (B.13)$$

Dans un ruban de taille L , les composantes transverses du moment prennent des valeurs discrètes multiples de $2\pi/L$. En utilisant la relation de Poisson, on peut écrire une relation analogue à (B.13) pour la longueur de corrélation $\xi_L(\beta)$ du réseau fini

$$\begin{aligned} \beta &= \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\xi_L^{-2} + 2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos q_\mu)} \sum_{\mathbf{m}_\perp} (2\pi)^{d-1} \delta^{(d-1)}(\mathbf{q}_\perp - \frac{2\pi}{L} \mathbf{m}_\perp) \\ &= \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\xi_L^{-2} + 2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos q_\mu)} \sum_{\mathbf{n}_\perp} e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{n}_\perp L} \end{aligned} \quad (B.14)$$

où les vecteurs \mathbf{m}_\perp et \mathbf{n}_\perp , à $(d-1)$ -dimension, sont à coordonnées entières. En isolant dans (B.14) le terme $\mathbf{n}_\perp = \mathbf{0}$ et en soustrayant (B.13), il vient

$$(\xi_\infty^{-2} - \xi_L^{-2}) \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \left(\sum'_{\mathbf{n}_\perp} \frac{e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{n}_\perp L}}{\xi_L^{-2} + 2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos q_\mu)} + \frac{1}{\left[\xi_\infty^{-2} + 2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos q_\mu) \right] \left[\xi_L^{-2} + 2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos q_\mu) \right]} \right) = 0 \quad (B.15)$$

Dans la limite $\beta \rightarrow \beta_c$ et $L \rightarrow \infty$, ξ_∞ tend vers l'infini et ξ_L devient très grand. Dans ces conditions, il est légitime de remplacer $2 \sum_{\mu=1}^d (1 - \cos q_\mu)$ par \mathbf{q}^2 , pourvu que les intégrales soient dominées par les moments \mathbf{q} petits. C'est bien le cas pour $d < 4$ (et supérieur à 2). Pour l'un des termes cette approximation donne

$$\int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \sum'_{\mathbf{n}_\perp} \frac{e^{i\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{n}_\perp L}}{\xi_L^{-2} + \mathbf{q}^2} = L^{2-d} \int_0^\infty dt e^{-t(L/\xi_L)^2} u(t) \quad (B.16)$$

où nous avons posé

$$u(t) = \sum'_{\mathbf{n}_\perp} \frac{e^{-\mathbf{n}_\perp^2/4t}}{(4\pi t)^{d/2}} \sim \begin{cases} \frac{2(d-1)}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-1/4t} & t \rightarrow 0 \\ \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} & t \rightarrow \infty \end{cases} \quad (B.17)$$

qui montre la convergence de l'intégrale (B.16). En faisant une approximation similaire dans l'autre terme intervenant dans (B.15), nous trouvons donc, dans la région critique et pour L grand,

$$\left[\left(\frac{L}{\xi_\infty} \right)^2 - \left(\frac{L}{\xi_L} \right)^2 \right] \left(\frac{\xi_L}{L} \right)^{4-d} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \times \int_0^1 dt \left[t \left(\frac{\xi_L}{\xi_\infty} \right)^2 + (1-t) \right]^{d/2-2} + \int_0^\infty dt e^{-t(L/\xi_L)^2} u(t) = 0 \quad (B.18)$$

Cette relation, de la forme $\varphi(L/\xi_L, L/\xi_\infty) = 0$, peut se résoudre sous la forme $\xi_L/\xi_\infty = f(L/\xi_\infty)$, la fonction f ayant toutes les propriétés voulues. En particulier, au point critique $\xi_L(\beta_c)$ croît linéairement avec L selon

$$\xi_L(\beta_c) = sL \quad (B.19)$$

avec s donné implicitement par l'équation

$$s^{2-d} \left\{ \frac{-\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \right\} = \int_0^\infty dt e^{-t/s^2} u(t) \quad (B.20)$$

A trois dimensions, on trouve ainsi la valeur numérique

$$\sum'_{n_1, n_2} \frac{s}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \exp\left(-\frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}{s}\right) = 1 \Rightarrow s \simeq 0.539 \quad (d=3) \quad (B.21)$$

Quand la dimension d s'approche de 4, le membre de gauche dans (B.20) a un pôle, et le coefficient s augmente. Comme l'intégrale est divergente pour t grand, on peut remplacer $u(t)$ par son approximation asymptotique à t grand. Posant $d = 4 - \varepsilon$, il vient

$$\xi_L(\beta_c) = \left(\frac{1}{4\pi^2\varepsilon}\right)^{1/3} L \quad (d=4-\varepsilon) \quad (B.22)$$

En dimension supérieure à quatre, la relation (B.2) n'est plus valable. L'invariance d'échelle approchée est brisée, et le facteur de coupure ultraviolet joue un rôle déterminant. Dans (B.15), il n'est plus possible de substituer \mathbf{q}^2 au dénominateur $2\sum_1^d(1 - \cos q_\mu)$, ce qui introduirait des divergences ultraviolettes. Pour $d = 4$ par exemple, on trouve

$$\left(\frac{L}{\xi_L}\right)^2 \ln \xi_L^2 - \left(\frac{L}{\xi_\infty}\right)^2 \ln \xi_\infty^2 = (4\pi)^2 \int_0^\infty dt e^{-t(L/\xi_L)^2} u(t) \quad (d=4) \quad (B.23)$$

A la température critique, la croissance de $\xi_L(\beta_c)$ avec L fait intervenir désormais un facteur logarithmique

$$\xi_L(\beta_c) = L \left(\frac{\ln L}{4\pi^2}\right)^{1/3} \quad (d=4) \quad (B.24)$$

Enfin, pour $d > 4$, il n'y a plus de divergence infrarouge dans la première intégrale de (B.15) lorsque $\xi_\infty^{-1} \rightarrow 0$ et $\xi_L^{-1} \rightarrow 0$. On peut donc négliger ces quantités dans l'intégrand. En faisant apparaître la valeur à l'origine de la fonction de Green, soit

$$g = \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left[2\left(1 - \sum_{\mu=1}^d \cos q_\mu\right)\right]^2} \quad (d > 4) \quad (B.25)$$

il vient

$$\left(\frac{L}{\xi_\infty}\right)^2 = \left(\frac{L}{\xi_L}\right)^2 - \frac{1}{2g} \left(\frac{\xi_L}{L}\right)^{4-d} \quad (d > 4) \quad (B.26)$$

expression qui est de la forme

$$\frac{\xi_L}{\xi_\infty} = f\left(\frac{L}{\xi_\infty} L^{(d-4)/3}\right) \quad (d > 4) \quad (B.27)$$

En particulier, en $\beta = \beta_c$, $\xi_L(\beta_c)$ croît avec L plus vite que linéairement

$$\xi_L(\beta_c) = L(2gL^{d-4})^{1/3} \quad (d > 4) \quad (B.28)$$

Finalement, lorsque $d \rightarrow \infty$, $\xi_L(\beta_c)$ diverge, comme le suggère l'approximation du champ moyen.

(1) Montrer que, dans le cadre du modèle sphérique, on obtient dans la phase à symétrie brisée le comportement suivant

$$\xi_L(\beta) = 2(\beta - \beta_c)L^{d-1} \quad \beta > \beta_c \quad (B.29)$$

(2) Pour un système à symétrie discrète, on s'attend inversement à ce que ξ_L croisse exponentiellement avec L pour $\beta > \beta_c$. Pour quelles raisons ?

(3) Le rapport $s = \xi_L(\beta_c)/L$ a-t-il une valeur universelle? Estimer ce rapport pour les modèles bidimensionnels.

Comme on le verra plus loin, lorsqu'une théorie critique bidimensionnelle satisfait à l'invariance conforme, on peut trouver la forme de la fonction de corrélation associée à des géométries diverses, par exemple des rubans, avec des conditions aux limites périodiques. On utilise alors une représentation conforme du plan complexe $z = x + iy$ sur le ruban $w = w_1 + iw_2$, $-\frac{1}{2}L < w_1 < \frac{1}{2}L$, de la forme

$$z = \exp -2i\pi w/L \quad z_a - z_b = -2i \sin\left(\pi \frac{w_a - w_b}{L}\right) \exp\left(-i\pi \frac{w_a + w_b}{L}\right)$$

Cette représentation est unique, à une transformation globale du plan près, $z \rightarrow \alpha z + \beta$, qui modifierait la fonction de corrélation par un simple facteur multiplicatif

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_a) \varphi(\mathbf{x}_b) \rangle = \frac{\text{Cste}}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|^\eta} = \frac{\text{Cste}}{|z_a - z_b|^\eta}$$

Si l'on choisit, sur le ruban, $w_a = it$ (t réel positif) et $w_b = 0$, on obtient

$$\langle \varphi(t) \varphi(0) \rangle_{\text{ruban}} \sim \frac{\text{Cste}}{|\exp(2\pi t/L) - 1|^\eta} \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} e^{-2\pi \nu t/L} \quad (B.30)$$

Ainsi, en dimension deux, $\xi_L(\beta_c) = L/2\pi\eta$ croît effectivement avec L de façon linéaire et le coefficient universel vaut $s = 1/2\pi\eta$.

Notes

Les notions d'invariance d'échelle ont été développées par B. Widom, *J. Chem. Phys.* **43**, 3892, 3898 (1965); A.Z. Patashinskii et V.L. Pokrovskii, *Zh. Eksper. Teor. Fiz.* **50**, 439 (1966); L.P. Kadanoff, *Physics* **2**, 263 (1966), *Rev. Mod. Phys.* **39**, 395 (1967); M.E. Fisher, *Rept. Prog. Phys.* **30**, 615 (1967); K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **D2**, 1473, 1478 (1970), *Phys. Rev.* **B4**, 3174, 3184 (1971); F.J. Wegner, *Phys. Rev.* **B5**, 4529 (1972) et *Lecture Notes in Physics* **37**, 171 (1973) Springer Verlag, Berlin.

On trouve une revue générale des phénomènes critiques avant l'explosion du sujet sous l'effet du groupe de renormalisation dans H.E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (1971). D'autres références seront mentionnées à la fin du chapitre suivant.

Le modèle à q états est dû à R.B. Potts, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **48**, 106 (1952). Les aspects algébriques de ce modèle ont été étudiés par H.N.V. Temperley et E.H. Lieb, *Proc. Roy. Soc. London* **A322**, 251 (1971).

Pour les méthodes de renormalisation dans l'espace réel, voir L. Kadanoff et A. Houghton, *Phys. Rev.* **B11**, 377 (1975); Th. Niemejer et J.M.J. Van Leeuwen dans Domb et Green vol. VI (1976); A.A. Migdal, *Z. Eksper. Teor. Fiz.* **69**, 810, 1457 (1975); L.P. Kadanoff, *Ann. Phys.* **100**, 359 (1976). La combinaison entre la renormalisation dans l'espace réel et les méthodes de Monte-Carlo fait l'objet de l'ouvrage *Real-space Renormalization*, T.W. Burkhardt et J.M.J. Van Leeuwen eds, Topics in Current Physics **30**, Springer Verlag, Berlin (1982). Les ensemble de Julia, engendrés par les zéros des fonctions de partition sur les réseaux hiérarchiques sont extraits d'un travail en collaboration avec B. Derrida, L. de Sèze et J.-M. Luck. On en trouvera un exposé plus complet dans *Critical Phenomena*, 1983 Brasov school, V. Ceausescu et al eds, Birkhäuser, Boston (1985). La méthode de renormalisation phénoménologique présentée dans l'appendice B a son origine dans le travail de M.E. Fisher et M.N. Barber, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1516 (1972). Elle a été appliquée par de nombreux auteurs, à la suite de M.P. Nightingale, *Physica* **83A**, 561 (1976). Pour un traitement dans le cadre de la théorie des champs, voir E. Brézin, *J. Physique* **43**, 15 (1982).

L'absence d'aimantation spontanée, pour les systèmes bidimensionnels à groupe continu d'invariance, a été démontrée par P.C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158**, 383 (1967); N.D. Mermin et H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 1133 (1966); N.D. Mermin, *Journ. Math. Phys.* **8**, 1061 (1967). Les propriétés pathologiques des champs scalaires bidimensionnels de masse nulle sont étudiées par S. Coleman, *Comm. Math. Phys.* **31**, 259 (1973) et *Phys. Rev.* **D11**, 2088 (1975). Une partie de l'appendice A s'appuie sur le travail de O. McBryan et T. Spencer, *Comm. Math. Phys.* **53**, 299 (1977).

Le rôle des tourbillons dans le modèle XY a été suggéré par V.L. Be-

rezinskii, *Soviet Physics JETP*, **32**, 493 (1971) et la nature de la transition étudiée par J.M. Kosterlitz, *J. Phys.* **C7**, 1046 (1974). Notre discussion, à quelques modifications mineures près, reprend le travail de J.V. José, L.P. Kadanoff, S. Kirkpatrick et D.R. Nelson, *Phys. Rev.* **B16**, 1217 (1977). La description en termes d'ondes de spin et de gaz de Coulomb est due à J. Villain, *J. Physique* **36**, 581 (1975). Pour une analyse systématique, dans le cadre du modèle sine-Gordon, voir D.J. Amit, Y.Y. Goldschmidt et G. Grinstein, *J. Phys.* **A13**, 585 (1980) qui donnent des références à des travaux antérieurs.

Le modèle XY est susceptible de nombreuses vérifications expérimentales. Il est de la même classe d'universalité que le modèle "Solid-on-Solid" de W.K. Burton, N. Cabrera et F.C. Franck, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **A243**, 299 (1951), qui décrit la transition d'une interface lisse à une surface rugueuse. Comme on l'a vu dans le texte, il est également relié à la transition plasma-diélectrique du gaz de Coulomb classique; voir S.T. Chui et J.D. Weeks, *Phys. Rev.* **B14**, 4978 (1976); J.D. Weeks dans *Ordering in Strongly Fluctuating Condensed Matter Systems*, T. Riste ed., Plenum Press, New York (1980). On peut encore mentionner la théorie des films supraconducteurs, discutée par exemple par B.I. Halperin et D.R. Nelson, *J. Low Temp. Phys.* **36**, 599 (1979), ou encore la discontinuité universelle de la densité superfluide de He⁴, D.R. Nelson et J.M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1201 (1977). Cette liste n'est pas limitative.

CHAPITRE V

GROUPE DE RENORMALISATION

La théorie des champs continue trouve son origine dans la physique des particules. Le domaine privilégié de ses applications aux phénomènes critiques est celui de l'étude du flot de renormalisation caractérisé par un ensemble d'équations pour les fonctions de Green dues à Callan et Symanzik, dont les coefficients sont réguliers et peuvent être obtenus par la méthode perturbative. Fisher et Wilson ont eu l'idée de combiner ces techniques avec un développement en puissances de l'écart à la dimension critique, c'est-à-dire quatre pour le modèle φ^4 . On peut tenter de généraliser la procédure aux dimensions physiquement intéressantes, trois et même deux. Nous consacrons ce chapitre à une présentation générale du sujet et à quelques applications. Un appendice présente une brève introduction aux phénomènes multicritiques.

1. Lagrangien et analyse dimensionnelle

1.1 Présentation

Notre objet est l'étude des propriétés critiques universelles. A l'égard de ces dernières un modèle discret sur réseau apparait comme une étape régulatrice intermédiaire permettant de donner un sens précis aux intégrales fonctionnelles de la théorie des champs. Comme le suggère l'approximation du champ moyen on est tenté de passer d'emblée à un modèle continu, à la fois dans le sens où le réseau est remplacé par un espace euclidien continu à d -dimensions, et où même dans le cas d'un système à symétrie discrète, les variables dynamiques sont remplacées par des champs continus. Ne subsiste de la formulation originale qu'un facteur de coupure Λ grand devant tous les moments mis en jeu dans les seules expressions qui divergeraient en son absence.

Le poids statistique (positif) d'une configuration est l'exponentielle d'une action, elle même intégrale d'une densité ou *lagrangien local*. La notion de portée finie des interactions est remplacée par celle de *localité*, qui signifie en pratique l'introduction d'un nombre aussi limité que possible de termes dérivatifs. Ce lagrangien peut être considéré comme un développement

limité destiné à étudier l'effet des fluctuations autour du champ moyen, ou bien postulé a priori à partir de moyennes sur des domaines grands à l'échelle microscopique mais encore petits en comparaison des longueurs de corrélation, quand ces dernières tendent à devenir infinies.

Nous rejoignons ici la théorie des champs proprement dite, lorsqu'on s'intéresse à ses propriétés globales, grâce à son analogie avec la mécanique statistique dans le domaine euclidien. Dans un premier temps nous nous limiterons à un modèle scalaire à symétrie Z_2 ($n = 1$), analogue au modèle d'Ising. Appelant φ le champ fluctuant, le lagrangien invariant dans la substitution $\varphi \rightarrow -\varphi$, se développera selon

$$\mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}g_0\varphi^4 + \dots \quad (1)$$

Un facteur multiplicatif a été absorbé dans la définition de φ , afin de normaliser à $\frac{1}{2}$ le coefficient du terme dérivatif, dit cinétique. On notera l'invariance euclidienne des différents termes, lorsque φ se comporte comme un champ scalaire. Les termes ne figurant pas explicitement contiennent des puissances plus élevées de φ ou ses dérivées. Il nous faudra justifier le fait que ces termes jouent un rôle négligeable dans le domaine critique.

Par construction les coefficients m_0^2 et g_0 sont des fonctions régulières de la température. En ajustant ces paramètres il sera possible de rendre la longueur de corrélation infinie. La dépendance de cette dernière dans la variable m_0^2 fournira une échelle linéaire de température au voisinage du point critique, permettant de définir l'indice ν .

Dans le modèle décrit par le lagrangien (1), la fonction de partition Z s'exprime comme une intégrale fonctionnelle

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(- \int d^d\mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi) \right) \quad (2)$$

analogue aux expressions correspondantes dans le cas discret. Une construction mathématique précise permet de donner un sens autre que symbolique à cette expression en dimension entière inférieure ou égale à trois. La raison essentielle en est qu'un nombre fini de soustractions suffit à rendre la théorie finie comme nous le verrons plus bas, en éliminant les singularités de courte distance. Cependant comme nous présupposons l'existence d'une structure microscopique caractérisée par exemple par la maille du réseau, et que la théorie continue est destinée à rendre compte des phénomènes à des distances beaucoup plus grandes, on peut passer outre d'un point de vue physique à ces difficultés mathématiques par l'artifice suivant. On introduira dans les intégrations sur les moments un facteur de coupure $\Lambda \sim a^{-1}$. A la théorie de la renormalisation d'organiser alors ces expressions potentiellement divergentes en un nombre fini de facteurs reliant théorie macroscopique et paramètres microscopiques. L'exploitation de cette relation conduira au groupe de renormalisation et permettra en dernière analyse le calcul des

propriétés critiques. De ce point de vue il faut considérer qu'en sus des paramètres m_0^2 et g_0 qui figurent explicitement dans le lagrangien, le modèle dépend de la procédure de régularisation et de son paramètre de coupure Λ .

Si on néglige l'effet des fluctuations, le lagrangien (1), décrit une transition du second ordre en fonction du paramètre m_0^2 . Dans la phase symétrique de haute température ($m_0^2 > 0$), le champ fluctue autour d'une valeur nulle. Pour $m_0^2 < 0$ (et bien entendu $g_0 > 0$) se développe une valeur non nulle de φ dans l'état fondamental, ou aimantation spontanée, correspondant à la minimisation de $\frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 + g_0\varphi^4/4!$, soit $M^2 \equiv \langle \varphi \rangle^2 = -6m_0^2/g_0$. Il est clair qu'il s'agit de la description de champ moyen longuement étudiée ci-dessus.

L'effet des fluctuations est de modifier les propriétés critiques en dimension inférieure ou égale à quatre. Ceci a conduit Wilson et Fisher à proposer pour ces dernières un développement dans un paramètre $\varepsilon = 4 - d$ supposé petit. Cette idée présuppose des propriétés de continuité (et même de différentiabilité) des exposants critiques en fonction de ε qui n'ont de sens que dans le cadre d'un prolongement dimensionnel précis dont un exemple est fourni par le modèle sphérique (cf. chapitre III).

Nous allons largement faire appel à la méthode des perturbations dans la constante de couplage g_0 dans le but de justifier les propriétés de renormalisabilité, bien que nous ne puissions pas supposer au départ que ce paramètre soit petit. Ainsi que nous le verrons, ceci n'est pas le cas en dimension quatre. Quoi qu'il en soit, le seul modèle totalement compris est celui des fluctuations gaussiennes qui donne une première approximation de l'effet des déviations au champ moyen. Par exemple dans la phase de haute température, négligeant g_0 , avec m_0^2 proportionnel à l'écart θ à la température critique, la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points a la forme

$$G_0(\mathbf{p}, \theta) = \int d^d \mathbf{x} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \langle \varphi(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{0}) \rangle = \frac{1}{\mathbf{p}^2 + \theta} = \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{1 + \mathbf{p}^2/\theta} \right) \quad (3)$$

qu'on peut écrire

$$G_0(\mathbf{p}, \theta) = \theta^{-\gamma} g(p\theta^{-\nu}) \quad (4)$$

avec

$$\gamma = 1 \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (5)$$

les exposants du champ moyen. En effet la susceptibilité est proportionnelle à la fonction de corrélation à moment nul. Quant à la fonction réduite g , régulière à l'origine, son argument est de la forme $p\xi$, ξ longueur de corrélation proportionnelle à $\theta^{-\nu}$. L'étude de la fonction de corrélation (ou fonction de Green) à deux points permet donc d'atteindre deux des

exposants critiques, et les propriétés d'homogénéité qui seront justifiées dans le cadre du modèle continu, permettent alors d'obtenir tous les autres. Il nous faut donc maintenant envisager l'effet des termes anharmoniques pour $g_0 > 0$.

1.2 Fonctions génératrices et analyse dimensionnelle

Nous écrivons les probabilités relatives sans dimension $\exp(-S)$, où S est l'action, donc aussi sans dimension, comme l'énergie divisée par kT dans le langage thermodynamique. Il est convenu de repérer les dimensions en unité de moment (de nombre d'onde pour être plus précis, mais l'usage de la mécanique quantique avec $\hbar = 1$ a prévalu). Dans ce système les longueurs ont pour dimensions -1 , de sorte que la dimension du lagrangien est

$$[\mathcal{L}] = d \quad (6)$$

En examinant le terme cinétique on en tire la dimension du champ

$$[\varphi] = \frac{1}{2}(d - 2) \quad (7)$$

En particulier φ est sans dimension pour $d = 2$, comme les angles du modèle XY , tandis qu'il est de dimension 1 pour $d = 4$.

De la sorte,

$$[m_0] = 1 \quad [g_0] = 4 - d \quad (8)$$

Plus généralement, la constante de couplage g_{n_1, n_2} à un terme additionnel $\partial^{n_2} \varphi^{n_1}$ aura une dimension

$$[g_{n_1, n_2}] = -\delta_{n_1, n_2} = d - \frac{1}{2}n_1(d - 2) - n_2 \quad (9)$$

Le nombre δ_{n_1, n_2} est appelé *degré canonique* de l'opérateur correspondant (ce symbole ne doit naturellement pas être confondu avec celui de Kronecker!). L'usage (par référence à la théorie quantique des champs) est d'appeler opérateur une quantité locale construite à partir de champs et de dérivées de champs, bien que dans le contexte de la physique statistique, il soit plus naturel d'utiliser l'expression observable locale. Le degré dans (9) est égal à 2 si n_2 est nul, quel que soit n_1 , en dimension deux. On constate qu'en dimension quatre (et au voisinage de cette dimension) les termes explicités dans le lagrangien (1) sont les seuls à avoir une dimension (un degré) positive ou nulle (négatif ou nul). Si l'on tient compte de l'invariance par rotation et de la symétrie $\varphi \rightarrow -\varphi$, il viendrait s'y ajouter φ^6 en dimension 3. Ce terme est cependant dominé par le terme en φ^4 pour φ petit, sauf si par accident le coefficient g_0 de ce dernier vient à s'annuler. L'inclusion d'un tel terme permet d'étudier le passage d'une transition du second ordre à une transition du premier ordre. Ce phénomène appelé *tricritique* est étudié dans l'appendice A.

Le paramètre dimensionné microscopique étant le facteur de coupure $\Lambda \sim 1/a$, les opérateurs de degré positif, qui ont un coefficient en $\Lambda^{-\delta}$, semblent a priori négligeables pour $\Lambda \rightarrow \infty$. Cette vue mérite d'être un peu corrigée en raison de divergences ultraviolettes possibles. Par exemple, ils ne peuvent être négligés dans la détermination de la température critique non universelle. On se convaincra tout de même qu'il ne modifient pas les comportements universels dominants, du moins au voisinage de $d = 4$. Au prix éventuellement d'une redéfinition des paramètres "nus" m_0^2 et g_0 , on peut donc se limiter au lagrangien en φ^4 dans l'étude des phénomènes à grande distance. On verra que la renormalisation agit comme un filtre, contractant les coefficients des termes inessentiels (c'est-à-dire de degré positif à l'ordre zéro) et ne laissant demeurer qu'une théorie caractérisée par un nombre minimum de paramètres essentiels.

Cette discussion visant à justifier l'emploi de lagrangiens renormalisables pour la description des phénomènes critiques, est aussi tout à fait naturelle en physique des particules. Nous ignorons (provisoirement) les interactions à des énergies très élevées, ou des distances très petites. La possibilité de construire des modèles effectifs pour rendre compte des observations à une échelle donnée repose en définitive sur un quasi découplage entre cette échelle et celle d'énergies beaucoup plus considérables. Ces dernières ne contribuent alors qu'à fournir quelques paramètres dont la théorie effective de "basse" énergie ne saurait rendre compte, par exemple la valeur de la constante de structure fine en électrodynamique.

Les fonctions de corrélations (ou fonction de Green, encore appelées fonctions de Schwinger dans ce contexte) s'obtiennent en couplant φ à une source extérieure $h(\mathbf{x})$ (encore appelé champ extérieur). Ceci revient à ajouter au lagrangien un terme

$$\mathcal{L}_{\text{source}} = -h(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x}) \quad (10)$$

La dimension de $h(\mathbf{x})$ est

$$[h] = \frac{1}{2}(d + 2) \quad (11)$$

En présence de h , nous notons $Z(h)$ la fonction de partition ou fonction génératrice des corrélations

$$\begin{aligned} Z(h) &= \int \mathcal{D}\varphi \exp \left(- \int d^d \mathbf{x} \mathcal{L}(\varphi) + \int d^d \mathbf{x} h\varphi \right) \\ &= Z(0) \left\langle \exp \left(\int d^d \mathbf{x} h\varphi \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (12)$$

Dans ces conditions les fonctions de corrélations à n champs (ou n points) seront définies par

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \rangle_h = Z(h)^{-1} \frac{\delta^n}{\delta h(\mathbf{x}_1) \dots \delta h(\mathbf{x}_n)} Z(h) \quad (13)$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, et dans la phase symétrique, ne subsistent que des corrélations à un nombre pair de points, invariantes par translation, que nous écrirons alors, en omettant l'indice h et pour n pair

$$\begin{aligned} \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \rangle &= Z(h)^{-1} \frac{\delta^n}{\delta h(\mathbf{x}_1) \dots \delta h(\mathbf{x}_n)} Z(h) \Big|_{h=0} \\ &= \int \prod_1^n \left(\frac{d^d \mathbf{p}_k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{x}_k} \right) (2\pi)^d \delta(\sum \mathbf{p}_k) G_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \end{aligned} \quad (14)$$

On notera qu'inversement,

$$Z(h)/Z(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^d \mathbf{x}_1 \dots d^d \mathbf{x}_n h(\mathbf{x}_1) \dots h(\mathbf{x}_n) \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \rangle \quad (15)$$

La dimension canonique de G_n définie sur l'ensemble $\sum \mathbf{p} = 0$, après extraction de la distribution $\delta(\sum \mathbf{p})$, se déduit de celle de h

$$[G_n] = d - n[h] = d - \frac{1}{2}n(d+2) \quad (16)$$

En particulier en toute dimension $[G_2] = -2$ comme le montrait l'exemple libre (3).

L'énergie libre $\ln Z(h)$ (par commodité notre définition diffère par un facteur $-1/\beta$ de la définition usuelle en thermodynamique) sert de fonction génératrice aux corrélations connexes. A la limite $h = 0$,

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \rangle_c = \frac{\delta^n}{\delta h(\mathbf{x}_1) \dots \delta h(\mathbf{x}_n)} \ln Z(h) \Big|_{h=0} \quad (17)$$

Ces fonctions connexes ont évidemment même dimension que les fonctions de corrélations générales, dimension donnée par la relation (16) en transformée de Fourier. La relation entre ces deux types de corrélations est celle des cumulants en mécanique statistique, permettant d'exponentier le développement (15). Nous supposons ces points familiers au lecteur, de même que le fait que dans le développement perturbatif, étudié plus loin, seuls apparaissent les diagrammes connexes dans l'expression des fonctions connexes, d'où l'origine de cette terminologie. Enfin dans un domaine fini (mais grand) ces quantités sont extensives, c'est-à-dire proportionnelles au volume.

Une transformation de Legendre fait passer de l'énergie libre $\ln Z(h)$, exprimée en fonction du champ extérieur h , à $\Gamma(\varphi)$, fonctionnelle génératrice des fonctions de Green une particule-irréductibles, ou fonctions de

vertex. Conformément à l'usage nous notons φ l'aimantation spatialement variable, argument de Γ , pour souligner l'analogie avec la variable muette d'intégration dans l'expression (2). En théorie perturbative les contributions des diagrammes correspondant aux fonctions de vertex sont amputés des facteurs associés aux lignes externes, et ces diagrammes ne peuvent être disconnectés en coupant une seule ligne externe. C'est à ce fait que se réfère la propriété d'irréductibilité à une particule. La fonction génératrice $\Gamma(\varphi)$ est définie par

$$\Gamma(\varphi) = \text{Sup}_h \left\{ \int d^d \mathbf{x} h(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) - \ln Z(h) \right\} \quad (18)$$

En pratique on se contentera de vérifier la condition d'extremum, qui montre la réciprocité de la transformation

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi) + \ln Z(h) &= \int d^d \mathbf{x} h(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \\ \frac{\delta \ln Z(h)}{\delta h(\mathbf{x})} &= \varphi(\mathbf{x}) = \langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle_h \end{aligned} \quad (19)$$

- (1) Examiner la transformation de Legendre dans le cas d'une intégrale gaussienne.
- (2) Etablir les conditions de réciprocité de la transformation de Legendre

$$\frac{\delta \Gamma(\varphi)}{\delta \varphi(\mathbf{x})} = h(\mathbf{x})$$

L'existence d'une limite non nulle pour $\delta \ln Z(h)/\delta h$ pour h de signe donné tendant uniformément vers zéro, est le signal d'une brisure spontanée de la symétrie Z_2 . La valeur non nulle correspondante est l'aimantation spontanée uniforme, présente dans la phase de basse température.

Pour h uniforme l'énergie libre est l'intégrale d'une densité constante. Il en va de même pour $\Gamma(\varphi)$ lorsque φ est uniforme. Nous écrivons dans ce cas

$$\Gamma(\varphi) = \int d^d \mathbf{x} V(\varphi) \quad (20)$$

Le potentiel effectif $V(\varphi)$, qui tient compte des fluctuations, généralise le terme correspondant du lagrangien (1), c'est-à-dire $\frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + g_0 \varphi^4/4!$

Revenant au cas général, on obtient les fonctions de vertex en développant $\Gamma(\varphi)$ suivant les puissances de φ , comme on développait $\ln Z(h)$ en puissances de h pour avoir les fonctions connexes

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varphi) &= \sum \frac{1}{n!} \int d^d \mathbf{x}_1 \dots d^d \mathbf{x}_n \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \Gamma_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \\
\Gamma_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) &= \frac{\delta^n \Gamma(\varphi)}{\delta \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \delta \varphi(\mathbf{x}_n)} \Big|_{\varphi=0} \\
&= \int \prod_1^n \left(\frac{d^d \mathbf{p}_k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{x}_k} \right) (2\pi)^d \delta(\sum \mathbf{p}_k) \Gamma_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)
\end{aligned} \tag{21}$$

Selon l'usage, nous notons abusivement les fonctions et leurs transformées de Fourier par le même symbole. Dans le développement de $\Gamma(\varphi)$ autour de $\varphi = 0$, décrit par (21), n'interviennent évidemment que les termes avec n pair par symétrie. Ceci n'est plus le cas si on étudie son développement au voisinage d'une autre valeur, par exemple l'aimantation spontanée dans la phase ordonnée.

La dimension de l'argument φ de Γ est celle du champ, variable d'intégration, soit $\frac{1}{2}(d-2)$. Par ailleurs $\Gamma(\varphi)$ est bien entendu sans dimension de sorte que

$$\begin{aligned}
[\Gamma_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)] &= \frac{1}{2}n(d+2) \\
[\Gamma_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)] &= d - \frac{1}{2}n(d-2) = [G_n(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)] + 2n
\end{aligned} \tag{22}$$

La relation entre dimensions des fonctions de vertex et des fonctions de Green correspond à l'amputation des facteurs correspondant aux lignes externes, comme on s'en convainc en explicitant la relation (19). En particulier $[\Gamma_2(\mathbf{p})] = 2$, $[\Gamma_4(\mathbf{p})] = 4 - d$. Plus généralement on peut rapprocher les relations (9) et (22), ce qui montre bien que les fonctions de vertex généralisent les coefficients de couplage dans le lagrangien.

Rien ne s'oppose en principe à l'introduction d'autres termes de source, analogues à (10), se couplant à d'autres combinaisons que le champ φ lui-même. En particulier comme le paramètre de contrôle est m_0^2 , on est naturellement amené à considérer un terme de source couplé à $\frac{1}{2}\varphi^2$. On notera les fonctions de Green correspondantes avec insertion de φ^2

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{y}_1) \dots \frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{y}_r) \rangle &= \int (2\pi)^d \delta \left(\sum \mathbf{p}_k + \sum \mathbf{q}_l \right) \\
G_{n,r}(\mathbf{p}_k, \mathbf{q}_l) &\prod_1^n \left(\frac{d^d \mathbf{p}_k}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{x}_k} \right) \prod_1^r \left(\frac{d^d \mathbf{q}_l}{(2\pi)^d} e^{-i\mathbf{q}_l \cdot \mathbf{y}_l} \right) \\
[G_{n,r}(\mathbf{p}, \mathbf{q})] &= [G_n] - 2r = d - \frac{1}{2}n(d+2) - 2r
\end{aligned} \tag{23}$$

La dimension vaut aussi pour les fonctions connexes. En particulier la chaleur spécifique est reliée à la fonction connexe $G_{0,2}$ à moment nul, dont la dimension est $d - 4$. Les fonctions de vertex avec insertion de φ^2

correspondent à une transformation de Legendre par rapport à la source du champ φ seulement. En transformée de Fourier $\Gamma_{n,r}(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a pour dimension

$$[\Gamma_{n,r}] = [\Gamma_n] - 2r = d - \frac{1}{2}n(d-2) - 2r \quad (24)$$

Dans toutes ces expressions la dimension est dite canonique pour la distinguer de celles dites anormales (ou encore dynamiques) associées aux propriétés d'homogénéité critiques. La renormalisation va éliminer le paramètre dimensionné de coupure Λ fourni par la régularisation, en l'absorbant dans des quantités définies à grande échelle.

Les indications qui précèdent sont relatives au modèle lagrangien le plus simple, la théorie scalaire φ^4 . La généralisation au cas où le champ prend ses valeurs dans un espace vectoriel ou matriciel, ou encore dans une algèbre de Grassmann, ne présente aucune difficulté de principe. Des difficultés peuvent cependant apparaître lorsque l'on essaie de définir proprement la mesure d'intégration de l'intégrale fonctionnelle et ceci peut être la source d'anomalies dans la réalisation de diverses symétries, qu'on aura l'occasion de rencontrer plus loin.

2. Méthode perturbative

2.1 Série diagrammatique

Pour $d > 4$ le modèle gaussien du champ libre donne une description exacte du comportement critique. Malgré les difficultés qui ne manqueront pas de surgir, il est naturel, pour d voisin de quatre, de développer perturbativement fonctions de partition et corrélations en puissances des termes anharmoniques du lagrangien, c'est-à-dire de g_0 . L'analyse de ce développement va permettre d'en extraire certaines propriétés générales. Définissons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2} \{(\partial\varphi)^2 + m_0^2\varphi^2\} & S_0 &= \int d^d\mathbf{x} \mathcal{L}_0(\varphi) \\ \mathcal{L}_I &= \frac{1}{4!}g_0\varphi^4 & S_I &= \int d^d\mathbf{x} \mathcal{L}_I(\varphi) \end{aligned} \quad (25)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} Z(h) &= \int \mathcal{D}\varphi \exp - \left\{ S_0 + S_I - \int d^d\mathbf{x} h\varphi \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int \mathcal{D}\varphi \left(\int d^d\mathbf{x} \mathcal{L}_I(\varphi) \right)^n \exp - \left\{ S_0 - \int d^d\mathbf{x} h\varphi \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\int d^d\mathbf{x} \mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{\delta h}\right) \right)^n \int \mathcal{D}\varphi \exp - \left\{ S_0 - \int d^d\mathbf{x} h\varphi \right\} \end{aligned}$$

La dernière expression est une intégrale fonctionnelle gaussienne qui s'exprime en terme du propagateur libre G_0 explicité en (3) avec θ remplacé par m_0^2 . De fait

$$\int \mathcal{D}\varphi \exp - \left\{ S_0 - \int d^d \mathbf{x} h \varphi \right\} = Z_0 \exp \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{y} h(\mathbf{x}) G_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) h(\mathbf{y})$$

$$Z_0 = \det^{1/2} G_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (26)$$

Le facteur de normalisation Z_0 requiert pour une définition précise une régularisation à courte distance ainsi qu'un facteur de coupure infrarouge, $\ln Z_0$ étant proportionnel au volume. Z_0 n'est pas égal à $Z(h = 0)$ bien entendu. Moyennant (26) il vient alors

$$Z(h) = Z_0 \exp \left(- \int d^d \mathbf{x} \mathcal{L}_I \left(\frac{\delta}{\delta h} \right) \right) \exp \frac{1}{2} \int d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{y} h(\mathbf{x}) G_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) h(\mathbf{y}) \quad (27)$$

En développant les deux exponentielles, et en effectuant les opérations de différentiation indiquées, nous obtenons la série perturbative formelle (avant régularisation). En particulier l'expression (27) contient implicitement les règles du théorème de Wick, qui correspondent au calcul de

$$\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_{2n}) \rangle_0 = \frac{\delta^{2n}}{\delta h(\mathbf{x}_1) \dots \delta h(\mathbf{x}_{2n})} \frac{1}{2^n n!}$$

$$\left(\int d^d \mathbf{x} d^d \mathbf{y} h(\mathbf{x}) G_0(\mathbf{x} - \mathbf{y}) h(\mathbf{y}) \right)^n \Big|_{h=0} \quad (28)$$

$$= \sum_{\substack{\text{termes} \\ \text{distincts}}} G_0(\mathbf{x}_{a_1} - \mathbf{x}_{a_2}) \dots G_0(\mathbf{x}_{a_{2n-1}} - \mathbf{x}_{a_{2n}})$$

où la dernière somme porte sur $(2n)!/2^n n!$ produits distincts, tenant compte de l'invariance de G_0 par parité: $G_0(\mathbf{x}) = G_0(-\mathbf{x})$.

Il est commode d'exprimer les règles perturbatives directement en transformée de Fourier pour les fonctions de vertex. Ces dernières, comme nous l'avons déjà mentionné, sont amputées des facteurs relatifs aux lignes externes correspondant aux arguments φ de la fonctionnelle de $\Gamma(\varphi)$. A chaque terme de (27) correspond un diagramme représentatif combinant des vertex (associés à chaque monôme de \mathcal{L}_I) et des lignes (associées à chaque facteur G_0 dans (28)). On constate que seuls interviennent les diagrammes irréductibles (et connexes a fortiori) dans le calcul des Γ_n .

Dans le cas de l'interaction en φ^4 , à chacun des vertex sont associés des facteurs $-g_0$ et $(2\pi)^d \delta(\Sigma_p)$ où Σ_p est la somme des impulsions internes ou

externes incidentes à ce vertex. On note qu'une ligne joignant un vertex à lui-même (ou "tadpole") ne contribue pas à Σ_p . L'un des facteurs de conservation des impulsions est cependant omis (cf. (21)). A chaque ligne interne est associée une impulsion d -dimensionnelle notée \mathbf{p} , un facteur de propagation $G_0(\mathbf{p}) = (\mathbf{p}^2 + m_0^2)^{-1}$ et une intégration d -dimensionnelle avec la mesure $d^d\mathbf{p}/(2\pi)^d$.

Ces règles de Feynman sont complétées par un facteur combinatoire qui résulte dans certains cas de la compensation incomplète des factorielles introduites dans la définition de l'interaction $\varphi^4/4!$ et dans le développement de l'exponentielle lorsqu'on applique le théorème de Wick. Ce facteur, dit de symétrie, qui vient diviser la contribution détaillée ci-dessus est l'ordre du groupe de symétrie du diagramme. Ce groupe correspond aux permutations des lignes et vertex internes (c'est-à-dire sans attaches aux lignes externes) qui laissent le diagramme invariant. On notera que les *tadpoles* donnent un facteur $\frac{1}{2}$. L'usage est de conseiller de revenir à la définition (27) chaque fois qu'on éprouve une hésitation sur les règles de Feynman.

Des exemples de facteurs de symétrie sont donnés dans l'exercice suivant. On notera également que, selon la convention (19) les fonctions de vertex ont un facteur supplémentaire -1 .

Une théorie à "zéro-dimension". La fonction de partition est une intégrale sur une seule variable φ

$$z(g) = \int \frac{d\varphi}{(2\pi)^{1/2}} \exp - \left\{ \frac{\varphi^2}{2} + g \frac{\varphi^4}{4!} \right\} \quad (29)$$

et correspond à la fonction génératrice des diagrammes vide-vides. Elle permet de vérifier les facteurs de symétrie. En effet les intégrales de Feynman correspondantes sont alors égales à l'unité. Le coefficient z_n de $(-g)^n$ donne directement la somme des diagrammes d'ordre n (ici sans lignes externes) affectés de leur coefficient de symétrie

$$z(g) = \sum_{n=0}^{\infty} (-g)^n z_n$$

$$z_n = \frac{1}{4!^n} \int \frac{d\varphi}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\varphi^{4n}}{n!} e^{-\frac{1}{2}\varphi^2} = \frac{4^n \Gamma(2n + \frac{1}{2})}{4!^n n! \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{(4n-1)!!}{4!^n n!} \quad (30)$$

Ce résultat peut être vérifié en utilisant les facteurs de symétrie des diagrammes dessinés sur la figure 1. Ainsi

$$\begin{aligned} n=1 & \quad \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \\ n=2 & \quad \frac{5 \cdot 7}{2^7 3} = \frac{1}{8^2 2!} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2 \cdot 4!} \\ n=3 & \quad \frac{5 \cdot 7 \cdot 11}{2^{10} 3} = \frac{1}{8^3 3!} + \frac{1}{2^4 8} + \frac{1}{8 \cdot 2 \cdot 4!} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^4 3} + \frac{1}{2^2 3!} + \frac{1}{2^4 3} \end{aligned}$$

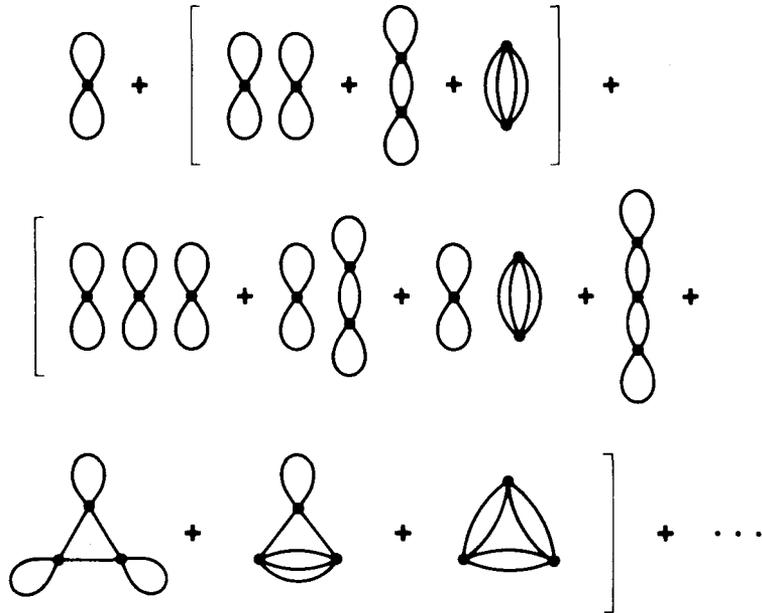


Figure 1: Diagrammes vide-vidé contribuant à $Z(h = 0)$ jusqu'à l'ordre g^3 .

et ainsi de suite. Dans ces expressions, les termes successifs correspondent aux diagrammes de la figure 1.

On observera que z_n croît comme n^n . La série (30) est divergente mais asymptotique pour $g \rightarrow 0$. Le point $g = 0$ est une singularité essentielle de $z(g)$ qui a une coupure sur le demi axe réel négatif, traduisant une instabilité pour $g < 0$. Ces caractéristiques, évidentes dans le cas de l'intégrale simple (29) se généralisent aux intégrales fonctionnelles, où on s'attend pour les mêmes raisons à ce que la série des perturbations ne soit qu'une série asymptotique divergente. L'alternance des signes pour $g > 0$ permet cependant l'application de méthodes de resommations à la Borel.

Etudier le développement perturbatif des intégrales analogues à (29) en présence d'une source extérieure.

Résumons les classes de diagrammes à utiliser pour le calcul des différentes quantités.

(i) **Fonctions de corrélation générales.** Conserver les facteurs associés aux lignes externes pour tous les diagrammes, avec omission des parties disconnectées non rattachées aux lignes externes (diagrammes vide-vidé éliminés par la division par $Z(h = 0)$). Fonction génératrice

$$\frac{Z(h)}{Z(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{k=1}^n d^d \mathbf{x}_k \prod_{k=1}^n h(\mathbf{x}_k) G_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (31a)$$

(ii) **Fonctions connexes** obéissant aux mêmes règles en termes des diagrammes connexes, engendrées par

$$F(h) = \ln \frac{Z(h)}{Z(0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{k=1}^n d^d \mathbf{x}_k \prod_{k=1}^n h(\mathbf{x}_k) G_n^c(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (31b)$$

(iii) **Fonctions de vertex.** Pas de facteurs pour les lignes externes des diagrammes connexes irréductibles. Les premiers diagrammes des fonctions de vertex à 2 et à 4 points sont représentés sur la figure 2, et leur contribution sera calculée dans la section suivante. La fonction génératrice est donnée par la transformée de Legendre $F(h)$

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi) &= \text{Sup}_h \left\{ \int d^d \mathbf{x} h \varphi - F(h) \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \prod_{k=1}^n d^d \mathbf{x}_k \prod_{k=1}^n \varphi(\mathbf{x}_k) \Gamma_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \end{aligned} \quad (31c)$$

En dehors des facteurs combinatoires et du problème de l'énumération des diagrammes, tâche relativement aisée aux ordres les plus bas, la partie essentielle des règles perturbatives concerne l'intégration sur les facteurs de propagation. Le calcul des intégrales (de Feynman) correspondantes est en général difficile et utilise selon les circonstances tout un arsenal d'artifices développés pendant plusieurs décennies. Sauf cas exceptionnels ces intégrales ne s'expriment pas en termes de fonctions spéciales simples.

2.2 Classement topologique

Une fonction de Green à n points, en transformée de Fourier, dépend de n vecteurs à d -dimensions de somme nulle en raison de l'invariance par translation. Si le facteur de coupure est introduit de manière à respecter l'invariance par rotation, ce que nous supposons par la suite, la fonction s'exprime en terme des $n(n-1)/2$ invariants $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$, $i \leq j \leq n-1$. En dimension entière, pour $n-1 \geq d+1$ il existe nécessairement d'autres relations linéaires entre les vecteurs \mathbf{p}_i qui s'expriment en disant que la matrice $\{\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j\}$, $1 \leq i, j \leq n-1$, est au plus de rang d .

Considérons un diagramme connexe d'ordre v c'est-à-dire à v vertex pour une fonction à n points. Dans la théorie perturbative autour du fondamental caractérisé par $\langle \varphi \rangle = 0$, n est nécessairement pair. Soit l le nombre

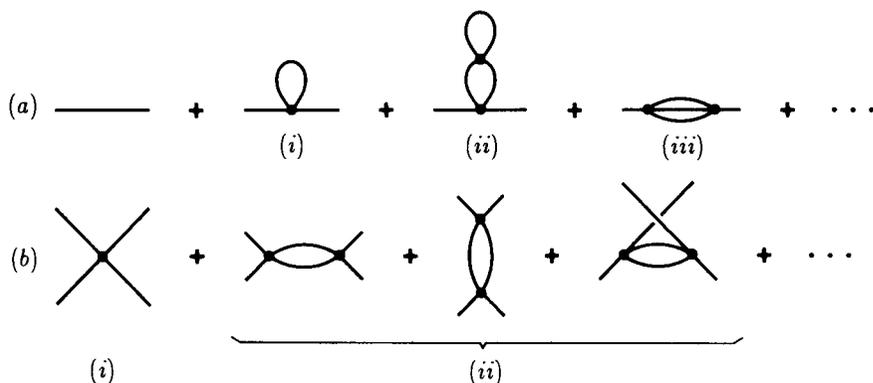


Figure 2: Premiers diagrammes pour les fonctions de vertex. a) Fonction à 2 points jusqu'à l'ordre de deux boucles. b) Fonction à 4 points jusqu'à l'ordre d'une boucle.

de lignes internes. Observons que certaines d'entre elles correspondent à une auto-contraction (ou tadpole) avec un facteur associé

$$\int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{p}^2 + m_0^2}$$

qui ne doit sa convergence qu'à la présence du facteur de coupure, totalement indépendant du reste du diagramme. Il existe d'ailleurs une prescription dite ordre de Wick, qui revient à éliminer ce type de termes, mais nous n'en ferons pas usage. Pour une interaction en φ^4 la somme des lignes émergentes de l'ensemble des vertex est $4v$. Ce faisant nous comptons les lignes internes deux fois, d'où

$$4v = n + 2l \tag{32a}$$

Le nombre de variables d'intégration (vectorielles) est l , avec $v - 1$ règles de conservation aux vertex. Reste un nombre B , dit nombre de boucles, invariant topologique comptant le nombre de variables d'intégration indépendantes

$$B = l - v + 1 = v - \frac{1}{2}n + 1 \tag{32b}$$

Les diagrammes sans boucles sont appelés diagrammes en arbre. A titre d'exemple, les diagrammes d'ordre le plus bas pour les fonctions de vertex ont été classés sur la figure 2 selon le nombre de boucles, et leur contribution est donnée par

$$\begin{aligned}
\Gamma_2(\mathbf{p}) &= \mathbf{p}^2 + m_0^2 + \frac{1}{2}g_0 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m_0^2} + \dots \\
\Gamma_4(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) &= g_0 \\
&\quad - \frac{1}{2}g_0^2 \sum_{i=2}^4 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_i - \mathbf{q})^2 + m_0^2][\mathbf{q}^2 + m_0^2]} + \dots
\end{aligned} \tag{33}$$

Le nombre de boucles B s'interprète comme la puissance de \hbar dans un développement semi-classique. En effet si on note que $(\hbar)^{B-1} = \hbar^l \hbar^{-v}$, chaque vertex est affecté d'une puissance $1/\hbar$ et chaque propagateur (inverse de la forme quadratique du lagrangien) d'un facteur \hbar . Tout se passe comme si l'action avait été divisée par \hbar . Ceci revient à interpréter la série perturbative de $Z(\hbar)$ comme le développement semi-classique de l'intégrale fonctionnelle autour du col correspondant à $\varphi = 0$.

Calculons la fonctionnelle génératrice $\Gamma(\varphi)$ jusqu'à l'ordre d'une boucle inclus. Commençons par l'évaluation de $Z(\hbar)$ qui, au facteur Z_0 près, est obtenu en déterminant le col de $\exp\{-S + \int d^d \mathbf{x} \hbar \varphi\}$, c'est-à-dire

$$(-\Delta + m_0^2)\varphi_c + \frac{1}{3!}g_0\varphi_c^3 = h \tag{34}$$

La solution retenue est telle que φ_c tende vers zéro avec h

$$\varphi_c[h] = \frac{1}{-\Delta + m_0^2}h - \frac{1}{3!}g_0 \left(\frac{1}{-\Delta + m_0^2}h \right)^3 + \dots \tag{35}$$

D'où, en développant l'action jusqu'aux termes quadratiques au voisinage de φ_c , et en effectuant l'intégrale gaussienne correspondante,

$$\begin{aligned}
\frac{Z(h)}{Z(0)} &= \exp \left\{ -S(\varphi_c[h]) + \int d^d \mathbf{x} \hbar \varphi_c[h] \right\} \\
&\quad \times \det^{-1/2} \left[\frac{\delta^2 S(\varphi_c[h])}{\delta \varphi(\mathbf{x}) \delta \varphi(\mathbf{y})} \right] \det^{1/2} \left[\frac{\delta^2 S_0}{\delta \varphi(\mathbf{x}) \delta \varphi(\mathbf{y})} \right]
\end{aligned} \tag{36}$$

Par transformation de Legendre

$$\Gamma(\varphi) = S(\varphi) - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(G_\varphi G_0^{-1}) + \dots \tag{37}$$

où $G_\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est l'inverse du noyau $\delta^2 S / \delta \varphi(\mathbf{x}) \delta \varphi(\mathbf{y})$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
G_\varphi &= [-\Delta + m_0^2 + \frac{1}{2}g_0\varphi^2]^{-1} \\
G_\varphi G_0^{-1} &= 1 - G_0 \frac{1}{2}g_0\varphi^2 + G_0 \frac{1}{2}g_0\varphi^2 G_0 \frac{1}{2}g_0\varphi^2 + \dots \\
&= [1 + G_0 \frac{1}{2}g_0\varphi^2]^{-1}
\end{aligned} \tag{38}$$

si bien qu'on peut encore écrire

$$\begin{aligned}
\Gamma(\varphi) &= S(\varphi) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left(1 + \frac{1}{2} G_0 g_0 \varphi^2 \right) \\
&= S(\varphi) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} g_0^p}{2p} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} G_0 \varphi^2 \right)^p \\
&= S(\varphi) + \frac{1}{2} g_0 \frac{1}{2!} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \varphi(\mathbf{p}) \varphi(-\mathbf{p}) \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m_0^2} \\
&\quad - \frac{1}{2} g_0^2 \frac{1}{4!} \int \prod_{k=1}^3 \frac{d^d \mathbf{p}_k}{(2\pi)^d} \varphi(\mathbf{p}_1) \varphi(\mathbf{p}_2) \varphi(\mathbf{p}_3) \varphi(\mathbf{p}_4 = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \times \\
&\quad \sum_{i=2}^4 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_i - \mathbf{q})^2 + m_0^2][\mathbf{q}^2 + m_0^2]} + \dots
\end{aligned} \tag{39}$$

Lorsque $\varphi(\mathbf{x})$ tend vers une constante φ , $\Gamma(\varphi)$ tend vers l'intégrale du potentiel effectif $V(\varphi)$

$$\Gamma(\varphi) = \int d^d \mathbf{x} V(\varphi) \tag{40}$$

En incluant la correction à l'ordre d'une boucle nous trouvons donc

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m_0^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} g_0 \varphi^4 + \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{p}}{(2\pi)^d} \ln \left[1 + \frac{1}{\mathbf{p}^2 + m_0^2} \frac{1}{2} g_0 \varphi^2 \right] + \dots \tag{41}$$

La méthode du col complétée par les contributions des fluctuations autour de $\varphi_c[h]$, est donc identique à la théorie des perturbations. Les termes à deux, trois, ... boucles s'obtiennent à l'aide de diagrammes irréductibles utilisant le propagateur G_φ donné par (38). A des complications techniques près, la méthode se généralise, par exemple au cas de cols dégénérés, de champs possédant des degrés de liberté internes...

Outre les fonctions de Green considérées jusqu'ici, on sera amené à introduire des corrélations mixtes incluant l'insertion "d'opérateurs locaux", combinaisons de puissances du champ et de ses dérivées évaluées au même point. Par exemple, comme on l'a indiqué ci-dessus, nous étudierons les insertions de $\frac{1}{2} \varphi^2$,

$$\begin{aligned}
\left\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \frac{1}{2} \varphi^2(\mathbf{y}) \right\rangle &= \int \prod_{k=1}^n \frac{d^d \mathbf{p}_k}{(2\pi)^d} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} (2\pi)^d \\
&\quad \delta(\sum \mathbf{p}_k + \mathbf{q}) e^{-i(\sum \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{x}_k + \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})} G_{n,1}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \mathbf{q})
\end{aligned} \tag{42}$$

Formellement

$$\left\langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \frac{1}{2} \varphi^2(\mathbf{y}) \right\rangle = \lim_{\mathbf{z} \rightarrow 0} \frac{1}{2} \langle \varphi(\mathbf{x}_1) \dots \varphi(\mathbf{x}_n) \varphi(\mathbf{y} + \mathbf{z}) \varphi(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \rangle \quad (43)$$

ce qui se traduit en transformée de Fourier par

$$G_{n,1}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} G_{n+2}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \frac{1}{2} \mathbf{q} + \mathbf{k}, \frac{1}{2} \mathbf{q} - \mathbf{k}) \quad (44)$$

On note que l'insertion $\frac{1}{2} \varphi^2$ à moment nul est équivalente à la dérivation par rapport à m_0^2 . L'insertion de plusieurs termes en $\frac{1}{2} \varphi^2$ ou d'autres combinaisons d'opérateurs locaux conduit à des expressions analogues. Les développements perturbatifs correspondants en découlent sans difficulté.

2.3 Prolongement dimensionnel

Diverses méthodes ont été développées pour l'évaluation des intégrales de Feynman et l'étude de leurs propriétés analytiques. Il ne saurait être question ici que de donner quelques exemples à titre d'illustration. C'est l'occasion aussi de présenter le prolongement dimensionnel.

L'introduction des diagrammes connexes irréductibles est un premier pas pour réduire la complexité, puisqu'alors les contributions des diagrammes plus généraux se déduisent par des opérations algébriques. Notons qu'il reste encore des diagrammes articulés aux vertex (qui peuvent être disconnectés par omission d'un vertex – cf. chapitre VII –) dont les expressions se factorisent.

Comme nous sommes intéressés par le prolongement dimensionnel et que celui-ci n'a évidemment de sens que pour les scalaires, il est important de faire apparaître les combinaisons invariantes dans les intégrands. Une première identité

$$\frac{1}{(\mathbf{q}^2 + m_0^2)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{n-1} e^{-\alpha(\mathbf{q}^2 + m_0^2)} \quad (45)$$

permet de substituer aux dénominateurs fractionnaires des exponentielles. Ces exponentielles sont gaussiennes dans les moments et les intégrations correspondantes peuvent être effectuées dans n'importe quelle dimension. La méthode introduit des variables conjuguées α , dont la dimension est l'inverse d'une masse carrée. Dans un contexte relativiste, ces variables sont interprétées comme des carrés de temps propres.

A titre d'exemple, considérons la première correction, une constante, à la fonction à deux points, qui traduit le déplacement de la température critique sous l'effet des fluctuations. D'après (33) (diagramme i de la figure 2a)

$$\begin{aligned}\Gamma_2^a &= \frac{1}{2}g_0 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m_0^2} = \frac{1}{2}g_0 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(\mathbf{q}^2 + m_0^2)} \\ &= \frac{g_0}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{-d/2} e^{-\alpha m_0^2}\end{aligned}\quad (46)$$

La représentation gaussienne nous a permis de faire l'intégrale sur le moment interne en dimension arbitraire d . L'invariance par rotation fournit l'aire de la sphère unité

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad (47)$$

et l'intégrale radiale est responsable de la puissance $\alpha^{-d/2}$. On note que la dimension de $d\alpha\alpha^{-d/2}$ est la même que $d^d \mathbf{q}(\mathbf{q}^2 + m_0^2)^{-2}$. L'intégrale sur le paramètre α fait apparaître deux zones potentiellement dangereuses de divergence. La région infrarouge, $\alpha \rightarrow \infty$, si nous voulons faire tendre la masse vers zéro, produira des divergences pour $d \leq 2$, et la région ultraviolette, $\alpha \rightarrow 0$, insensible à la masse donnera des singularités lorsque $d \geq 2$. Si initialement $m_0^2 = 0$, l'intégrale n'est donc jamais définie. Cependant si on conserve $m_0^2 > 0$, l'intégrale a un sens pour $d < 2$, et se prolonge en une fonction méromorphe de d , avec pôles simples en $d = 2, 4, \dots$

$$\Gamma_2^a = \frac{g_0 m_0^{d-2}}{2(4\pi)^{d/2}} \Gamma(1 - d/2) \quad (48)$$

Puisque la dimension de g_0 est $4 - d$, $g_0 m_0^{d-2} = (g_0 m_0^{d-4}) m_0^2$ a bien la dimension 2 caractéristique de la fonction irréductible à deux points. En dimension entière paire l'expression (48) est dépourvue de sens en raison des singularités ultraviolettes. C'est ici qu'il faut faire appel à une régularisation ultraviolette, souvenir minimal du réseau. Pour ce faire, il suffit de supposer que, dans l'intégrale sur α , une région de l'ordre de grandeur $(0, \Lambda^{-2})$ ne contribue pas à l'intégrale. Pour cela introduisons dans cette intégrale une fonction $\chi_\Lambda(\alpha)$ qui vaut 1 pour $\alpha \geq \Lambda^{-2}$, et s'annule avec un nombre suffisant de ses dérivées à $\alpha = 0$. L'arbitraire d'une telle fonction reflète l'arbitraire sur la régularisation qui ne doit pas affecter les propriétés critiques universelles à des distances grandes par rapport à $a \sim \Lambda^{-1}$. Un choix particulier brutal pour la fonction $\chi_\Lambda(\alpha)$, est celui d'une fonction saut de Heaviside $\theta(\alpha - \Lambda^{-2})$. Alors

$$\Gamma_2^a \rightarrow \frac{g_0}{2(4\pi)^{d/2}} \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} d\alpha \alpha^{-d/2} e^{-m_0^2 \alpha} = \frac{g_0 m_0^{d-2}}{2(4\pi)^{d/2}} \times$$

$$\left\{ \frac{2}{d-2} \left(\frac{\Lambda}{m_0} \right)^{d-2} e^{-m_0^2/\Lambda^2} - \frac{4}{(d-2)(d-4)} \left(\frac{\Lambda}{m_0} \right)^{d-4} e^{-m_0^2/\Lambda^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{(d-2)(d-4)} \int_{m_0^2/\Lambda^2}^{\infty} dx x^{2-d/2} e^{-x} \right\}$$
(49)

Les termes explicités se prêtent alors à une évaluation au voisinage de $d = 4$ dans la limite $\Lambda/m_0 \gg 1$, où nous obtenons en développant $\exp(-m_0^2/\Lambda^2)$,

$$\Gamma_2^a \underset{d \rightarrow 4}{\sim} \frac{g_0 m_0^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{1}{(d-2)}$$

$$\times \left\{ (\Lambda/m_0)^{d-2} - (\Lambda/m_0)^{d-4} + 2 \frac{1 - (\Lambda/m_0)^{d-4}}{d-4} + \gamma + \dots \right\}$$
(50)

et pour $d = 4$

$$\Gamma_2^a = \frac{g_0 m_0^2}{2(4\pi)^2} \left\{ \frac{\Lambda^2}{m_0^2} + \gamma - 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right\} \quad (d = 4) \quad (51)$$

Grâce au facteur de coupure Λ^2 , le pôle à $d = 2$ s'est traduit par un terme quadratiquement divergent ultraviolet et celui à $d = 4$ par un terme logarithmiquement divergent.

Les divers phénomènes observés dans ce cas simple jusqu'à la caricature, vont se généraliser à des intégrales plus complexes comme celles, encore relativement aisées de la fonction, à deux points à l'ordre de deux boucles. Les deux diagrammes irréductibles *ii* et *iii* de la figure 2a donnent les contributions

$$\Gamma_2^b = -\frac{1}{4} g_0^2 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m_0^2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m_0^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{4} g_0^2 \frac{m_0^{2d-6}}{(4\pi)^d} \Gamma(1-d/2) \Gamma(2-d/2)$$
(52)

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^c(\mathbf{p}) &= -\frac{1}{6}g_0^2 \int \frac{d^d \mathbf{q} d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^{2d}} \frac{1}{[\mathbf{q}^2 + m_0^2][\mathbf{k}^2 + m_0^2][(\mathbf{q} - \mathbf{p} + \mathbf{k})^2 + m_0^2]} \\
&= -\frac{1}{6}g_0^2 \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 e^{-m_0^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \\
&\quad \int \frac{d^d \mathbf{q} d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^{2d}} e^{-(\alpha_1 \mathbf{q}^2 + \alpha_2 \mathbf{k}^2 + \alpha_3 (\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{p})^2)} \\
&= -\frac{g_0^2}{6(4\pi)^d} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3}{(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2)^{\frac{d}{2}}} \\
&\quad \exp - \left\{ m_0^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \mathbf{p}^2}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1} \right\}
\end{aligned} \tag{53}$$

Pour $d < 3$, on peut utiliser les propriétés d'homogénéité en α_i en insérant dans l'intégrand un facteur

$$1 = \int_0^\infty d\lambda \delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \lambda)$$

changer α_i en $\lambda \alpha_i$, et intégrer sur λ , (c'est là que la condition $d < 3$ assure la convergence ultraviolette à λ petit). Ceci conduit à

$$\begin{aligned}
\Gamma_2^c(\mathbf{p}) &= -\frac{g_0^2}{6(4\pi)^d} \int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)}{(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2)^{d/2}} \\
&\quad \times \int_0^\infty d\lambda \lambda^{2-d} \exp -\lambda \left\{ m_0^2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \mathbf{p}^2}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1} \right\} \\
&= -\frac{g_0^2}{6(4\pi)^d} \Gamma(3-d) \int_0^1 \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1)}{(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2)^{d/2}} \\
&\quad \times \left\{ m_0^2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \mathbf{p}^2}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1} \right\}^{d-3}
\end{aligned} \tag{54}$$

Analyser la condition de convergence ultraviolette, $d < 3$, de $\Gamma_2^c(\mathbf{p})$ à l'aide d'arguments dimensionnels.

Pour $d \geq 3$, la présence de $m_0^2 > 0$ protège des divergences infrarouges, tandis qu'apparaissent des divergences ultraviolettes à α petit. A $d = 3$, il y a divergence logarithmique dans la valeur à moment nul, et $\Gamma_2^c(\mathbf{p}) - \Gamma_2^c(\mathbf{0})$ est fini. En revanche à quatre dimensions la valeur à moment nul est quadratiquement divergente comme l'était Γ_2^a et $d\Gamma_2^c(\mathbf{0})/d\mathbf{p}^2$ est encore logarithmiquement divergent. C'est ce qui conduira à la renormalisation de fonction d'onde, qui dans la théorie φ^4 n'apparaît ainsi qu'à l'ordre de deux boucles.

En introduisant un facteur de coupure Λ dans les intégrales sur $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ calculons ces termes à $d = 4$

$$\Gamma_2^c(\mathbf{p}) = -\frac{1}{6(4\pi)^4} g_0^2 \{A + B\mathbf{p}^2 + C(\mathbf{p}^2)\} \quad (55)$$

où $C(\mathbf{p}^2)$ s'annule, avec sa dérivée, à l'origine. Evaluons les parties singulières des constantes A et B . Nous définissons

$$\eta = \frac{m_0^2}{\Lambda^2} \quad (56)$$

Alors

$$\frac{A}{m_0^2} = \eta^{-1} \int_1^\infty d\alpha_1 \int_1^\infty d\alpha_2 \int_1^\infty d\alpha_3 \frac{e^{-\eta(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}}{(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_1)^2} \quad (57)$$

Profitant de la symétrie de l'intégrale dans les permutations des variables $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ il nous suffit de la calculer dans le secteur $\alpha_3 > \alpha_2 > \alpha_1 > 1$. Choisissons comme variables les rapports successifs $\alpha_3/\alpha_2 = z, \alpha_2/\alpha_1 = y, \alpha_1 = x,$

$$\frac{A}{m_0^2} = 6\eta^{-1} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \int_1^\infty \frac{dy}{y} \int_1^\infty dz \frac{e^{-\eta x(1+y+yz)}}{(1+z+yz)^2} = 6 \int_\eta^\infty \frac{du}{u^2} e^{-u} \psi(u)$$

où nous avons pris dans la dernière expressions $u = \eta x$, comme variable d'intégration, et

$$\psi(u) = \int_1^\infty \frac{dy}{y} \int_1^\infty dz \frac{e^{-uy(1+z)}}{(1+z+yz)^2}$$

Le comportement singulier de A lorsque $\eta \rightarrow 0$ provient de la région d'intégration u petit où

$$\psi(u) = \psi_0 + \psi_1 u \ln u + \psi_2 u + \mathcal{O}(u^2 \ln^2 u)$$

De fait on a la table

$$\begin{aligned} \int_\eta^\infty \frac{du}{u^2} e^{-u} &= \frac{1}{\eta} + \ln \eta + \text{fini} \\ \int_\eta^\infty \frac{du}{u} \ln u e^{-u} &= -\frac{1}{2} \ln^2 \eta + \text{fini} \\ \int_\eta^\infty \frac{du}{u} e^{-u} &= -\ln \eta + \text{fini} \end{aligned} \quad (58)$$

Il s'ensuit que

$$\frac{A}{m_0^2} = 6\eta^{-1}\psi_0 - 3\psi_1 \ln^2 \eta + 6(\psi_0 - \psi_2) \ln \eta + \text{fini}$$

avec

$$\psi_0 = \int_1^\infty \frac{dy}{y} \int_1^\infty dz \frac{1}{(1+z+yz)^2} = \int_1^\infty dy \frac{1}{y(1+y)(2+y)} = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

Pour évaluer ψ_1 et ψ_2 , notons que

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(u)}{du} &= \psi_1 \ln u + (\psi_1 + \psi_2) + \mathcal{O}(u \ln^2 u) \\ &= - \int_1^\infty dy \int_1^\infty dz \frac{1+z}{[1+z(1+y)]^2} e^{-uy(1+z)} \end{aligned}$$

On peut séparer la dernière intégrale en deux termes φ_1 et φ_2 , correspondant à la décomposition

$$\frac{1+z}{[1+z+yz]^2} = \frac{y}{(1+y)[1+z+yz]^2} + \frac{1}{(1+y)[1+z+yz]}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(u) &= - \int_1^\infty dy \frac{y}{1+y} \int_1^\infty dz \frac{e^{-uy(1+z)}}{(1+z+zy)^2} \\ &\xrightarrow{u \rightarrow 0} - \int_1^\infty dy \frac{y}{1+y} \int_1^\infty \frac{dz}{(1+z+zy)^2} = 2 \ln \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(u) &= - \int_1^\infty \frac{dy}{1+y} \int_1^\infty \frac{dz}{1+z+zy} e^{-uy(1+z)} \\ &= - \int_1^\infty \frac{dy}{(1+y)^2} e^{-uy + \frac{uy}{1+y}} \int_{uy(2+y)/(1+y)}^\infty \frac{e^{-v} dv}{v} \end{aligned}$$

En se souvenant que la constante d'Euler γ est donnée par

$$\gamma = -\Gamma'(1) = - \int_0^\infty dt \ln t e^{-t} \quad (59)$$

on peut encore écrire

$$\begin{aligned} \varphi_2(u) &= \int_1^\infty \frac{dy}{(1+y)^2} \exp\left(-uy + \frac{uy}{1+y}\right) \\ &\quad \left\{ \exp\left(-\frac{uy(2+y)}{1+y}\right) \ln \frac{uy(2+y)}{1+y} + \gamma \right\} + \mathcal{O}(u \ln^2 u) \\ &= (\ln u + \gamma) \int_1^\infty \frac{dy}{(1+y)^2} + \int_1^\infty \frac{dy}{(1+y)^2} \ln \frac{y(2+y)}{1+y} + \mathcal{O}(u \ln^2 u) \end{aligned}$$

soit en définitive

$$\varphi_2(u) = \frac{1}{2}(\ln u + \gamma - 1 + 3 \ln 3 - \ln 2) + \mathcal{O}(u \ln^2 u)$$

En rassemblant ces résultats

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{du} &= \psi_1 \ln u + \psi_1 + \psi_2 + \mathcal{O}(u \ln^2 u) \\ &= \varphi_1(u) + \varphi_2(u) = \frac{1}{2} \ln u + \frac{1}{2}(\gamma - \ln 3 + 3 \ln 2) + \mathcal{O}(u \ln^2 u) \end{aligned}$$

d'où

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \quad \psi_2 = \frac{1}{2}(\gamma - 1 - \ln 3 + 3 \ln 2)$$

et

$$\frac{A}{m_0^2} = (3 \ln \frac{4}{3}) \frac{\Lambda^2}{m_0^2} - \frac{3}{2} \ln^2 \frac{\Lambda^2}{m_0^2} + 3[\ln 2 - 1 + \gamma] \ln \frac{\Lambda^2}{m_0^2} + \text{fini} \quad (60)$$

Passons maintenant au coefficient B dans (55). On a

$$\begin{aligned} B &= - \int_{\Lambda^{-2}}^{\infty} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1)^3} e^{-m_0^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)} \\ &= -6 \int_{\eta}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-x} \int_1^{\infty} dy e^{-xy} \int_1^{\infty} dz \frac{ze^{-xyz}}{(1+z+yz)^3} \\ &= -6 \int_{\eta}^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-x} \tilde{\psi}(x) = 6\tilde{\psi}(0) \ln \eta + \text{fini} \end{aligned} \quad (61)$$

où $\tilde{\psi}(0)$ est fini

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(0) &= \int_1^{\infty} dy \int_1^{\infty} dz \frac{z}{(1+z+yz)^3} = \int_1^{\infty} dz \int_1^{\infty} \frac{zdy}{(1+z+yz)^3} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dz}{(1+2z)^2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

et

$$B = -\frac{1}{2} \ln \frac{\Lambda^2}{m_0^2} + \text{fini} \quad (62)$$

Ceci complète le calcul des termes singuliers en dimension 4 dans $\Gamma_2^c(\mathbf{p}^2)$.

(1) Montrer que lorsque $d = 3$, on peut encore écrire

$$\Gamma_2^c(\mathbf{p}^2) = -\frac{g_0^2}{6(4\pi)^3} \{ \bar{A} + \bar{B}\mathbf{p}^2 + \bar{C}(\mathbf{p}^2) \} \quad (63)$$

$$\bar{A} = 2\pi \ln \frac{\Lambda^2}{m_0^2} + \text{fini} \quad \bar{B} = -\frac{2\pi}{27} m_0^{-2} \quad \bar{C} = \mathcal{O}(\mathbf{p}^4)$$

Bien entendu seul \bar{A} est divergent logarithmiquement, et g_0 ayant la dimension d'une masse, le crochet est sans dimension.

(2) Si $m_0^2 = 0$, $\Gamma_2^c(\mathbf{p})$ est convergente pour $2 < d < 3$. Montrer que son prolongement analytique s'écrit alors

$$\Gamma_2^c(\mathbf{p}^2, m_0^2 = 0) = -\frac{1}{6(4\pi)^d} g_0^2 (\mathbf{p}^2)^{d-3} \frac{\Gamma(3-d)\Gamma^3(d/2-1)}{\Gamma(3(d/2-1))} \quad (64)$$

qui se comporte comme

$$\Gamma_2^c(\mathbf{p}^2, m_0^2 = 0) \underset{d \rightarrow 4}{\sim} -\frac{1}{6(4\pi)^d} g_0^2 \mathbf{p}^2 \frac{(\mathbf{p}^2)^{d-4}}{2(d-4)} \quad (65)$$

lorsque $d \rightarrow 4$. Si nous appelons $G(\mathbf{p}^2)$ le coefficient de $-g_0^2 \mathbf{p}^2 / 6(4\pi)^d$ alors la quantité $G(\mathbf{p}^2) - G(\mathbf{P}^2)$ a une limite lorsque $d \rightarrow 4$

$$\lim_{d \rightarrow 4} G(\mathbf{p}^2) - G(\mathbf{P}^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{P}^2}$$

résultat qui est à rapprocher de l'expression (62) pour le coefficient B . Dans la théorie régularisée à 4 dimensions nous avons en effet

$$\Gamma_2^c(\mathbf{p}^2, m_0^2, \Lambda^2) = -\frac{1}{6(4\pi)^4} \{ A(\mathbf{0}, m_0^2, \Lambda^2) + \mathbf{p}^2 G(\mathbf{p}^2, m_0^2, \Lambda^2) \}$$

avec

$$G(\mathbf{p}^2, m_0^2, \Lambda^2) = \frac{1}{2} \ln \frac{m_0^2}{\Lambda^2} + g\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m_0^2}\right)$$

pour Λ^2 grand, avec g fini et sans dimension comme G . Si nous formons, pour $m_0^2 \ll \mathbf{p}^2$, $\mathbf{P}^2 \ll \Lambda^2$,

$$G(\mathbf{p}^2, m_0^2, \Lambda^2) - G(\mathbf{P}^2, m_0^2, \Lambda^2) = g(\mathbf{p}^2/m_0^2) - g(\mathbf{P}^2/m_0^2)$$

le résultat précédent montre que nous pouvons passer à la limite $m_0^2 \rightarrow 0$, ce qui compte tenu du coefficient, implique que pour $\mathbf{p}^2 \gg m_0^2$

$$g(\mathbf{p}^2/m_0^2) \rightarrow \frac{1}{2} \ln(\mathbf{p}^2/m_0^2)$$

Dans ce domaine, $m_0^2 \ll \mathbf{p}^2 \ll \Lambda^2$,

$$G(\mathbf{p}^2, m_0^2, \Lambda^2) \sim \frac{1}{2} \ln \frac{m_0^2}{\Lambda^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\mathbf{p}^2}{m_0^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{\mathbf{p}^2}{\Lambda^2}$$

Calculons la fonction à quatre points jusqu'à l'ordre d'une boucle. On a successivement (figure 2b)

$$\Gamma_4^a = g_0 \quad (66)$$

$$\Gamma_4^b(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4) = -\frac{1}{2} g_0^2 \sum_{i=2}^4 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\mathbf{q}^2 + m_0^2][(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_i - \mathbf{q})^2 + m_0^2]} \quad (67)$$

Afin d'alléger les notations, posons $\mathbf{p}^2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_i)^2$ et désignons par $F(\mathbf{p}^2)$ l'intégrale, coefficient de $-g_0^2/2$. On peut encore écrire

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}^2) &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^{d/2}} \exp - \left\{ m_0^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mathbf{p}^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right\} \\ &= \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 \frac{d\alpha}{[m_0^2 + \mathbf{p}^2 \alpha(1 - \alpha)]^{2-d/2}} \end{aligned} \quad (68)$$

Dans le cas $m_0^2 = 0$,

$$F(\mathbf{p}^2, m_0^2 = 0) = (\mathbf{p}^2)^{d/2-2} \frac{\Gamma(2 - d/2)\Gamma^2(d/2 - 1)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(d - 2)} \quad (69)$$

On note une divergence infrarouge à $d = 2$. Au voisinage de $d = 4$, on voit que la quantité $F(\mathbf{p}^2, m_0^2 = 0) - F(\mu^2, m_0^2 = 0)$ a une limite égale à

$$\lim_{d \rightarrow 4} F(\mathbf{p}^2, m_0^2 = 0) - F(\mu^2, m_0^2 = 0) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mathbf{p}^2}{\mu^2} \quad (70)$$

On peut d'ailleurs calculer la même divergence logarithmique pour $d = 4$ dans la théorie régularisée où

$$F(\mathbf{p}^2, m_0^2, \Lambda^2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{\Lambda^{-2}}^\infty \frac{d\alpha_1 d\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} \exp - \left\{ m_0^2(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \alpha_2 \mathbf{p}^2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right\} \quad (71)$$

Pour $\Lambda^2 \rightarrow \infty$,

$$F(\mathbf{p}^2 = 0, m_0^2, \Lambda^2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \ln \frac{\Lambda^2}{m_0^2} - \ln 2 - 1 - \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{m_0^2}{\Lambda^2} \ln \frac{\Lambda^2}{m_0^2}\right) \right\} \quad (72)$$

Dans ces conditions, tenant compte du fait que F est sans dimensions

$$F(\mathbf{p}^2, m_0^2, \Lambda^2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2} + f\left(\frac{m_0^2}{\mathbf{p}^2}\right)$$

Comme la combinaison $F(\mathbf{p}^2, m_0^2, \Lambda^2) - F(\mu^2, m_0^2, \Lambda^2)$ a une limite lorsque $m_0^2 \rightarrow 0$, cette dernière est égale à

$$\lim_{m_0^2 \rightarrow 0} F(\mathbf{p}^2, m_0^2, \Lambda^2) - F(\mu^2, m_0^2, \Lambda^2) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mathbf{p}^2}{\mu^2}$$

en accord avec (70). Nous voyons ainsi la relation entre comportement ultraviolet et théorie de masse nulle.

Plutôt que de multiplier les exemples résumons la méthode d'évaluation décrite ci-dessus. Elle repose sur une représentation paramétrique du propagateur, une intégrale gaussienne sur les moments de dimension d et une étude, dans chaque secteur ordonné des paramètres, du comportement ultraviolet à $\alpha \rightarrow 0$. Les α grands sont contrôlés par les masses internes du type m_0^2 . Nous aurons l'occasion de revenir sur ces évaluations.

2.4 Facteurs associés à un groupe d'invariance

A titre d'intermède donnons quelques indications et exemples, dans le cas d'un modèle à symétrie interne $O(n)$ décrit par des variables dynamiques vectorielles $\Phi = \{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ avec une interaction $(\Phi^2)^2$. Les fonctions de corrélations dépendent alors, en plus des moments, des indices i_1, \dots, i_n attachés aux champs externes avec une symétrie dans la permutation simultanée de ces indices et des moments. En outre, les contributions des diagrammes sont affectées de polynômes en n de degré au plus égal au nombre de boucles, résultant des contractions et sommations sur les indices internes. C'est ainsi que la fonction à deux points (dans la phase symétrique) est diagonale dans l'espace des indices internes avec (diagrammes de la figure 2a)

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,ij}(\mathbf{p}^2) = & \delta_{ij} \left\{ \mathbf{p}^2 + m_0^2 + \right. \\ & + g_0 \frac{n+2}{6} \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m_0^2} \\ & - g_0^2 \frac{(n+2)^2}{36} \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m_0^2} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + m_0^2)^2} \\ & - g_0^2 \frac{n+2}{18} \int \frac{d^d \mathbf{q} d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^{2d}} \frac{1}{[\mathbf{q}^2 + m_0^2][\mathbf{k}^2 + m_0^2][(\mathbf{q} + \mathbf{k} - \mathbf{p})^2 + m_0^2]} \\ & \left. + \dots \right\} \end{aligned} \tag{73}$$

Les coefficients ont été obtenus en suivant les contractions des indices externes avec ceux des lignes internes selon les règles de Feynman. On peut obtenir des règles de somme sur ces coefficients en examinant le modèle en dimension nulle. Par exemple, pour la fonction à deux points on écrira

$$\langle \Phi_i \Phi_j \rangle = \frac{\delta_{ij}}{\Gamma} = \frac{\int d^n \Phi \Phi_i \Phi_j \exp - \left\{ \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{1}{4!} g_0 (\Phi^2)^2 \right\}}{\int d^n \Phi \exp - \left\{ \frac{1}{2} \Phi^2 + \frac{1}{4!} g_0 (\Phi^2)^2 \right\}} \quad (74)$$

D'où

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{2} n \frac{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(-\frac{g_0}{6}\right)^p \Gamma(n/2 + 2p)}{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(-\frac{g_0}{6}\right)^p \Gamma(n/2 + 2p + 1)} \\ &= 1 + g_0 \frac{n+2}{6} - g_0^2 \frac{(n+2)(n+4)}{36} + \dots \end{aligned} \quad (75)$$

qui est bien en accord avec (73) lorsqu'on remplace les intégrales par l'unité.

En utilisant la représentation

$$\Gamma = 1 + \frac{g_0}{3} \frac{\int_0^{\infty} dx x^{n/2+1} \exp - \left(x + \frac{g_0}{6} x^2\right)}{\int_0^{\infty} dx x^{n/2} \exp - \left(x + \frac{g_0}{6} x^2\right)}$$

montrer qu'on a aussi le développement en fraction continue

$$\Gamma = 1 + \frac{(n+2)u}{1 + \frac{(n+4)u}{1 + \frac{(n+6)u}{1 + \dots}}} \quad (76)$$

ce qui fait qu'en posant $u = g_0/6$

$$\begin{aligned} \Gamma &= 1 + (n+2)u - (n+2)(n+4)u^2 + (n+2)(n+4)(2n+10)u^3 \\ &\quad - (n+2)(n+4)[(2n+10)^2 + (n+6)(n+8)]u^4 + \dots \end{aligned} \quad (77)$$

On observe que pour $n = -2$, $\Gamma = 1$ et que pour $n = -2p$ c'est une fraction rationnelle en g_0

De même pour la fonction à quatre points (figure 2b)

$$\begin{aligned} \Gamma_{4, i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) &= \frac{1}{3} g_0 (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}) \\ &\quad - \frac{1}{9} g_0^2 \sum_{3 \text{ termes}} \left((2 + \frac{1}{2}n) \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3} \right) \times \\ &\quad \times \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\mathbf{q}^2 + m_0^2][(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})^2 + m_0^2]} + \dots \end{aligned} \quad (78)$$

En particulier lorsque les moments externes sont nuls, la fonction à quatre points est proportionnelle à la combinaison $\sum \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4}$, soit

$$\Gamma_{4, i_1 i_2 i_3 i_4}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}) \times \left\{ \frac{g_0}{3} - g_0^2 \frac{n+8}{18} \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + m_0^2)^2} + \dots \right\} \quad (79)$$

Montrer que dans le modèle à zéro dimension avec Γ défini par (74) et $u = \frac{1}{6}g_0$, on a

$$\Gamma_{4, i_1 i_2 i_3 i_4} = (\delta_{i_1 i_2} \delta_{i_3 i_4} + \delta_{i_1 i_3} \delta_{i_2 i_4} + \delta_{i_1 i_4} \delta_{i_2 i_3}) \left\{ \Gamma^2 - \Gamma^3 \frac{\Gamma - 1}{(n+2)u} \right\} \quad (80)$$

Le dernier crochet se développe selon

$$\Gamma^2 - \Gamma^3 \frac{\Gamma - 1}{(n+2)u} = \frac{g_0}{3} - g_0^2 \frac{n+8}{18} + g_0^3 \frac{3n^2 + 46n + 140}{108} + \dots \quad (81)$$

Il existe bien entendu une très grande variété de modèles avec indices internes et divers types de symétrie. Par exemple, nous aurons par la suite l'occasion de rencontrer des systèmes où les variables dynamiques sont des matrices.

2.5 Comptage de puissances

Nous voulons généraliser les observations faites ci-dessus qui portaient sur quelques cas particuliers, concernant le comportement ultraviolet des intégrales perturbatives, en supposant toujours $m_0^2 \neq 0$. Revenant à la représentation en termes de moments, nous supposerons ces derniers dilatés par le même facteur. Considérons un diagramme d'ordre v (nombre de vertex) pour une fonction de vertex à n points. On se rappelle que si l désigne le nombre de lignes internes, le nombre de variables d'intégration est $B = l - v + 1 = 1 + v - \frac{1}{2}n$.

Dans le cas de l'interaction en φ^4 , à chaque vertex est associé un facteur g_0 de dimension $4 - d$. Dans des cas généraux d'interaction locale ceci pourrait être généralisé à un polynôme dans les moments des lignes incidentes au vertex. Il pourrait en être aussi le cas du propagateur affecté aux lignes internes si nous étudions des champs autres que scalaires. Rappelons enfin que la dimension de Γ_n est

$$[\Gamma_n] = d_n = d - \frac{1}{2}n(d-2) \quad (82)$$

L'intégrand comporte l dénominateurs quadratiques et B éléments de volume à d -dimensions. Une condition nécessaire (mais non suffisante) de convergence ultraviolette est donc que le degré

$$\omega = Bd - 2l = d - \frac{1}{2}n(d - 2) - v(4 - d) = d_n - v(4 - d) \quad (83)$$

soit négatif. En outre il n'y a intégrale que si $B \geq 1$, soit $v \geq \frac{1}{2}n$. L'interprétation de la formule (83) est évidente: le degré ω de l'intégrale est tel que son produit par g_0^v ait la dimension de Γ_n . Si ω est négatif le diagramme est dit *superficiellement convergent*: il en est toujours ainsi lorsque $d < 4$ à un ordre suffisamment élevé de la théorie des perturbations. Puisqu'il y a alors, en variant n et v , un nombre fini d'intégrales superficiellement divergentes on dit que la théorie est *super-renormalisable*.

En dimension 4, le degré ω est indépendant de v , et positif ou nul pour $n \leq 4$. La théorie est alors dite *renormalisable*. Enfin en dimension plus grande que quatre la théorie n'est pas renormalisable, et les divergences ultraviolettes deviennent de plus en plus sévères avec l'ordre de la perturbation. Corrélativement, nous l'avons déjà vu, le comportement à grande distance devient trivial.

On appelle fonctions primitivement divergentes, les fonctions de vertex dont le degré superficiel de divergence au premier ordre non trivial de la théorie des perturbations est positif ou nul, soit $d \geq n$. Pour $d = 4$ il s'agit des fonctions à 2 et 4 points et, pour $d = 2$ ou 3, de la fonction à deux points.

Classer les diagrammes divergents en 2 et 3 dimensions.

	$\omega = 0$	$\omega = 1$
$d = 2$		
$d = 3$		

Dans le cas d'un modèle scalaire, un degré superficiel de divergence non négatif entraîne la divergence de l'intégrale. Mais la réciproque est évidemment fausse. Par exemple les fonctions à plus de quatre points seraient convergentes pour $d = 4$. Il n'en est rien. La raison en est que

certaines sous-intégrales peuvent diverger. Une étude approfondie de la question, qui est l'un des aspects techniques essentiels de la discussion perturbative, conduit au résultat suivant.

- (i) Il se produit une divergence *si et seulement si* un sous diagramme irréductible a un degré positif ou nul. Pour $d < 4$ il s'agit d'insertions de fonctions irréductibles à deux points (dits *d'énergie propre*). Pour $d = 4$ il s'agit de sous diagrammes irréductibles à deux et quatre points.
- (ii) Si le degré d'un diagramme ainsi que celui de tous ses sous diagrammes irréductibles est négatif, l'intégrale converge comme on s'y attend.

Pour maîtriser ces divergences ultraviolettes on a vu qu'une étape intermédiaire consiste à introduire un facteur de coupure Λ , présent de toute façon dans la version sur réseau par exemple. Les divergences se manifestent alors par l'apparition de puissances (positives) de Λ et de $\ln \Lambda$ dans le calcul des intégrales. Il va falloir définir un processus de soustraction pour obtenir des résultats finis dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$.

Nous aurons encore à considérer des fonctions de vertex avec insertions d'opérateurs composites, en particulier $\frac{1}{2}\varphi^2$, que nous allons discuter ici. On se souvient que si l'on note $\Gamma_{n,r}$ la fonction à r insertions

$$[\Gamma_{n,r}] = d_n - 2r \equiv d - \frac{1}{2}n(d-2) - 2r \quad (84)$$

Le degré superficiel de divergence d'une contribution perturbative à l'ordre v est donc

$$\omega = d_n - 2r - v(4-d) \quad (85)$$

On constate une amélioration (une diminution) du degré superficiel de divergence avec le nombre d'insertions. A quatre dimensions $\Gamma_{2,1}$ est logarithmiquement divergent à tous les ordres. Par exemple à l'ordre d'une boucle (figure 3)

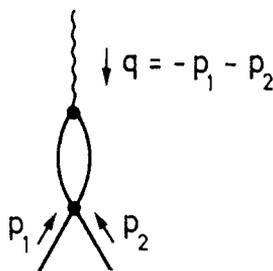


Figure 3 : Premier diagramme contribuant à $\Gamma_{2,1}$.

$$\Gamma_{2,1}^0(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2}g_0 \int \frac{d^4\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\mathbf{k}^2 + m_0^2][(\mathbf{q} + \mathbf{k})^2 + m_0^2]} \quad (86)$$

La contribution $\Gamma_{2,1}^a$ est bien logarithmiquement divergente. On note que $\Gamma_{2,1}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}, \mathbf{0})$ est la dérivée de la fonction à deux points par rapport m_0^2 , c'est-à-dire $\partial\Gamma_{2,1}^a/\partial m_0^2$.

La fonction $\Gamma_{0,2}$ interviendra dans le calcul de la chaleur spécifique. A l'ordre v son degré superficiel de divergence est

$$\omega = -(1+v)(4-d) \quad (87)$$

C'est-à-dire qu'elle est convergente ultraviolette à tous les ordres pour $d < 4$ et divergente ultraviolette à tous les ordres (y compris zéro) en dimension 4. Enfin $\Gamma_{0,1}$ est une constante divergente qui n'intervient pas comme contribution aux sous diagrammes dans les fonctions de corrélation, puisqu'elle n'a pas de lignes externes du champ φ .

Cette discussion s'étend bien évidemment aux insertions d'opérateurs composites plus complexes.

2.6 Renormalisation perturbative

En dimension $d < 4$ les divergences ultraviolettes n'affectent que la fonction à deux points, qui apparaît aussi comme sous diagramme dans le calcul perturbatif des autres fonctions de corrélation. Cependant au point de départ, c'est-à-dire en dimension quatre, des divergences apparaissent aussi dans la fonction à quatre points qui gouverne la constante de couplage. Nous allons donc procéder à la renormalisation selon le schéma quadridimensionnel. Même si certaines soustractions semblent alors superflues en dimension inférieure, elles auront d'une part la vertu d'autoriser un prolongement dimensionnel continu et nous verrons par ailleurs qu'elles jouent un rôle efficace pour contrôler le comportement infrarouge pour $d < 4$.

La méthode de renormalisation peut être présentée abstraitement en prescrivant les soustractions au niveau des intégrands des intégrales perturbatives, évitant ainsi tout à la fois l'exigence d'une régularisation et l'apparition de termes infinis. C'est la technique développée par Bogoliubov, Hepp, Parasiuk et Zimmerman. Il est cependant plus instructif pour ce qui suit de considérer d'abord une théorie régularisée. Il s'agit alors de réexprimer le développement perturbatif (considéré comme une série dans le paramètre topologique nombre de boucles) en termes de quantités renormalisées ou "physiques", ici la masse, ou plutôt l'inverse de la longueur de corrélation, et la valeur de la fonction à quatre points, dans une configuration fixée de moments, ou constante de couplage renormalisée. Soient m et g ces quantités renormalisées qui se substituent aux valeurs "nues" m_0 et g_0 , qui apparaissaient initialement dans le lagrangien. Si en outre on change de manière appropriée l'échelle des champs (processus aussi appelé "renormalisation de fonction d'onde") par un facteur $Z_1^{1/2}$: $\varphi = Z_1^{1/2}\varphi_R$, on obtiendra des expressions finies, indépendantes de Λ , où toutes les divergences sont

contenues dans la relation entre m , g et Z_1 d'une part et m_0 , g_0 , Λ , d'autre part.

Les fonctions de Green renormalisées, corrélations des champs φ_R sont fonctions des moments, de m et de g . Elles définissent ces dernières quantités à l'aide de conventions de normalisation. Dans une théorie massive, ces conventions consistent naturellement à donner la valeur de certaines fonctions de vertex et éventuellement de leur dérivées à moment nul. Ceci est en accord avec un point sur lequel nous n'avons pas encore insisté, à savoir que les termes potentiellement divergents des fonctions avant renormalisation sont au plus polynômiaux dans les moments, comme l'indique le comptage de puissance. Ceci entraîne l'importante conséquence que les contre-termes dans le lagrangien, si on désire l'exprimer en fonction de m , g , et φ_R , sont de nature locale. La localité est un ingrédient crucial dans une théorie des champs, car elle permet de contrôler les quantités renormalisées à l'aide d'un nombre fini de paramètres.

Il faudra changer ces conventions si on désire étudier directement la théorie critique de masse nulle, comme on le fera par la suite, en imposant des conditions à moment non nul. Aux trois divergences primitives des fonctions à deux et quatre points, nous faisons donc correspondre dans la théorie massive les trois conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_2^R(\mathbf{0}) = m^2 \\ \frac{d\Gamma_2^R(\mathbf{0})}{d\mathbf{p}^2} = 1 \\ \Gamma_4^R(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = m^{4-d}g \end{array} \right. \quad (88)$$

Nous avons choisi la normalisation de Γ_4^R de telle sorte que g soit sans dimension à la différence de g_0 . En dimension quatre, ces trois conditions répondent aux trois divergences primitives à savoir les divergences quadratique et logarithmique de Γ_2 , la divergence logarithmique de Γ_4 . La relation entre fonctions de corrélations "nues" régularisées et fonctions renormalisées s'écrit, pour $\Lambda \rightarrow \infty$,

$$\left\{ \begin{array}{l} G_n(\mathbf{p}, m_0, g_0, \Lambda) = Z_1^{n/2} G_n^R(\mathbf{p}, m, g) \\ \Gamma_n(\mathbf{p}, m_0, g_0, \Lambda) = Z_1^{-n/2} \Gamma_n^R(\mathbf{p}, m, g) \end{array} \right. \quad (89)$$

La première relation vaut aussi pour les fonctions connexes. On appelle Z_1 le facteur de renormalisation de fonction d'onde, dépendant bien sûr de Λ . Les quantités m_0^2 , g_0 et Z_1 se calculent à leur tour perturbativement, compte tenu de (88) et (89), en fonction de m^2 , g et Λ sous forme de séries perturbatives. Les conventions de normalisation sont telles qu'à l'ordre des arbres ($B = 0$) il y ait identification entre corrélations nues et renormalisées

$$\begin{cases} m_0^2 = m_0^{2(0)} + m_0^{2(1)} + m_0^{2(2)} + \dots \\ g_0 = g_0^{(0)} + g_0^{(1)} + g_0^{(2)} + \dots \\ Z_1 = Z_1^{(0)} + Z_1^{(1)} + Z_1^{(2)} + \dots \end{cases} \quad (90)$$

avec

$$\begin{cases} m_0^{2(0)} = m^2 \\ g_0^{(0)} = m^{4-d}g \\ Z_1^{(0)} = 1 \end{cases} \quad (91)$$

De la sorte, les premiers termes des développements de Γ_2^R et Γ_4^R sont

$$\begin{aligned} \Gamma_2^R &= \mathbf{p}^2 + m^2 \\ \Gamma_4^R &= m^{4-d}g \end{aligned} \quad (92)$$

Il s'ensuit qu'aux ordres suivants les conditions de normalisation se transforment en conditions homogènes. On peut traduire ces opérations en exprimant le lagrangien en termes du champ renormalisé, de m , g et Λ sous la forme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} Z_1 [(\partial\varphi_R)^2 + m_0^2 \varphi_R^2] + \frac{1}{4!} g_0 Z_1^2 \varphi_R^4 \\ &= \frac{1}{2} [(\partial\varphi_R)^2 + m^2 \varphi_R^2] + \frac{1}{4!} m^{4-d} g \varphi_R^4 + \\ &\quad \sum_{k=1}^{\infty} \left[Z_1^{(k)} \frac{1}{2} (\partial\varphi_R)^2 + (Z_1 m_0^2)^{(k)} \frac{1}{2} \varphi_R^2 + \frac{1}{4!} (g_0 Z_1^2)^{(k)} \varphi_R^4 \right] \end{aligned} \quad (93)$$

Cette expression contient des contre-termes d'ordre $B = 1, 2, \dots$, dont l'effet est à prendre en compte ordre par ordre. Par exemple, à l'ordre d'une boucle, il faudra inclure l'effet des contre-termes d'ordre 1, tandis que les vertex et propagateurs seront calculés à l'ordre zéro. On conçoit qu'aux ordres plus élevés cette méthode des contre-termes résolve un problème combinatoire complexe impliquant des soustractions internes aux diagrammes.

A titre d'exemple calculons les différentes quantités à l'ordre un

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{R(1)}(\mathbf{p}^2) &= \frac{1}{2} m^{4-d} g \int_{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} + (Z_1 m_0^2)^{(1)} + Z_1^{(1)} \mathbf{p}^2 \\ \Gamma_4^{R(1)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) &= \\ &= -\frac{1}{2} m^{8-2d} g^2 \sum_{i=2}^4 \int_{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\mathbf{q}^2 + m^2][(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_i)^2 + m^2]} + (g_0 Z_1^2)^{(1)} \end{aligned} \quad (94)$$

$$\Gamma_2^{\text{R}(1)}(\mathbf{0}) = 0, \quad \frac{d}{d\mathbf{p}^2} \Gamma_0^{\text{R}(1)}(\mathbf{0}) = 0, \quad \Gamma_4^{\text{R}(1)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$$

Il s'ensuit d'abord que

$$\begin{aligned} Z_1^{(1)} &= 0 \\ (Z_1 m_0^2)^{(1)} = m_0^{2(1)} &= -\frac{1}{2} m^{4-d} g \int_{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (95)$$

puis en se référant à (71) et (72),

$$\begin{aligned} (g_0 Z_1^2)^{(1)} = g_0^{(1)} &= \frac{3}{2} m^{8-2d} g^2 \int_{\Lambda} \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + m^2)^2} \\ &= \begin{cases} \frac{3}{2} m^{4-d} g^2 \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \Gamma(2 - d/2) & d < 4 \\ \frac{3}{2} g^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln 2 - \gamma - 1 \right) & d = 4 \end{cases} \end{aligned} \quad (96)$$

Enfin

$$\begin{aligned} \Gamma_2^{\text{R}(1)}(\mathbf{p}) &= 0 \\ \Gamma_4^{\text{R}(1)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) &= -\frac{1}{2} m^{8-2d} g^2 \sum_{i=2}^4 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{(\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_i)^2 + m^2} - \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} \right\} \end{aligned} \quad (97)$$

Bien entendu, en dimension inférieure à quatre $g_0^{(1)}$ reste fini. Les intégrales soustraites définissant les fonctions renormalisées convergent, et s'expriment en fonction de m et g . A l'ordre d'une boucle il n'y a pas de renormalisation de fonction d'onde dans la théorie φ^4 . Comme on l'a vu cette dernière se manifeste à l'ordre de deux boucles.

Le même programme se poursuit aux ordres suivants. Les contre-terms définis aux ordres inférieurs compensent les divergences internes des diagrammes (elles mêmes d'ordre inférieur) et les conditions de normalisation définissent les nouveaux contre-terms qui suppriment les divergences globales. On a donc ainsi un processus récursif qui détermine à la fois les contre-terms du lagrangien nu et les fonctions renormalisées, c'est-à-dire correctement soustraites. Alors que dans une théorie super-renormalisable ce processus est fini, conduisant à des coefficients des contre-terms qui sont des polynômes, il se poursuit indéfiniment pour une théorie renormalisable.

L'analyse du processus à tous les ordres est une tâche délicate. Le résultat principal en est que les termes successifs du développement des corrélations sont des intégrales soustraites convergentes dont la structure est indépendante du processus de régularisation, puisqu'il existe un algorithme, reposant uniquement sur les conditions de normalisation, permettant de construire leurs intégrands. L'avantage de la régularisation, si elle a été menée de façon cohérente est de fournir des expressions pour g_0 , m_0 et Z_1 en fonction de g , m et Λ . Bien entendu le facteur de coupure n'apparaît nulle part dans la théorie renormalisée qui dépend donc d'un paramètre dimensionné de moins que la théorie nue régularisée. La démonstration de ces propriétés est l'objet propre de la théorie de la renormalisation et nécessite un appareil mathématique important dont l'étude sort du cadre de ce livre.

Il est bon de noter ici les incidences de la régularisation, puis de la renormalisation sur les symétries d'un modèle. Il est clair par exemple que si une théorie nue possède une invariance de dilatation au niveau classique cette dernière est brisée par la régularisation. Nous allons voir comment ceci se manifeste dans la théorie renormalisée en étudiant les équations qui gouvernent les changements d'échelle. En revanche la symétrie globale $\varphi \rightarrow -\varphi$ dans le cas scalaire, ou plus généralement la symétrie $O(n)$ du modèle à n composantes ne sont brisées ni par la régularisation ni par la renormalisation. Il existera alors une phase symétrique, et la brisure de symétrie spontanée sera une question de dynamique. Comme on l'a déjà indiqué, il existe cependant divers autres aspects de cette question, en particulier l'existence de certaines *anomalies* aux lois d'invariance qui peuvent apparaître quand on définit de façon plus précise les intégrales fonctionnelles.

L'introduction d'opérateurs composites dans les fonctions de corrélation entraîne l'apparition de nouvelles divergences. Examinons les insertions de $\frac{1}{2}\varphi^2$. A quatre dimensions $\Gamma_{2,1}$ et $\Gamma_{0,2}$ sont logarithmiquement divergentes. La fonction $\Gamma_{2,1}$ est sans dimension et nous la normalisons en utilisant sa valeur à l'ordre zéro

$$\Gamma_{2,1}^R(\mathbf{p} = \mathbf{0}) = 1 \quad (98)$$

où \mathbf{p} symbolise l'ensemble des moments. La relation entre fonction nue et renormalisée fait intervenir une nouvelle constante divergente que nous notons Z_2 avec

$$\Gamma_{2,1}(\mathbf{p}, g_0, m_0, \Lambda) = Z_1^{-1} Z_2 \Gamma_{2,1}^R(\mathbf{p}, g, m) \quad (99)$$

Ecrire la relation correspondante pour les corrélations. La fonction $G_{2,1}$ connexe est telle que

$$G_{2,1} = G_2 \Gamma_{2,1} G_2 = Z_1 G_2^R Z_1^{-1} Z_2 \Gamma_{2,1}^R Z_1 G_2^R = Z_1 Z_2 G_{2,1}^R$$

Lorsque le moment associé à l'opérateur $\frac{1}{2}\varphi^2$ est nul, on a

$$G_{2,1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1, \mathbf{q} = \mathbf{0}) = -\frac{\partial}{\partial m_0^2} G_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1)$$

tandis que

$$\Gamma_{2,1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1, \mathbf{q} = \mathbf{0}) = \frac{\partial}{\partial m_0^2} \Gamma_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1)$$

La relation (99), qui exprime la renormalisation multiplicative d'une insertion de $\frac{1}{2}\varphi^2$, peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{1}{2}Z_2(\varphi^2)^R \quad (100)$$

On notera que $(\varphi^2)^R(\mathbf{x})$ n'est pas $(\varphi^R(\mathbf{x}))^2$ en raison des divergences supplémentaires de courte distance qui apparaissent lorsque les arguments de deux champs coïncident. La différence est un facteur divergent Z_1/Z_2 . Le même facteur Z_2 renormalise une seule insertion de $\frac{1}{2}\varphi^2$ dans les autres fonctions de corrélation.

Comme précédemment, Z_2 admet un développement en nombre de boucles de la forme

$$Z_2 = 1 + Z_2^{(1)} + Z_2^{(2)} + \dots \quad (101)$$

Puisque $Z_1^{(1)} = 0$, on a en vertu de (98) et (99) (cf. figure 3)

$$1 + Z_2^{(1)} + \Gamma_{2,1}^{R(1)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{2}m^{4-d}g \int_{\Lambda} \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\mathbf{k}^2 + m^2][(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 + m^2]} \quad (102)$$

$$\begin{aligned} Z_2^{(1)} &= -\frac{1}{2}m^{4-d}g \int_{\Lambda} \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{[\mathbf{k}^2 + m^2]^2} \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}g(4\pi)^{-d/2}\Gamma(2-d/2) & d < 4 \\ -\frac{1}{2}g(4\pi)^{-2}(\ln \Lambda^2/m^2 - \ln 2 - 1 - \gamma) & d = 4 \end{cases} \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,1}^{R(1)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}) &= -\frac{1}{2}m^{4-d}g \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ &\quad \left\{ \frac{1}{(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2 + m^2} - \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \right\} \end{aligned} \quad (104)$$

La divergence de $\Gamma_{0,2}$, qui contient deux insertions de $\frac{1}{2}\varphi^2$, mais n'intervient pas comme sous divergence dans les diagrammes, n'est pas renormalisée entièrement par Z_2 . Elle se manifeste d'ailleurs même pour le champ libre. Pour en tenir compte on effectuera une soustraction supplémentaire

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,2}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) &= Z_2^2 \{ \Gamma_{0,2}^{\text{R}}(\mathbf{p}, -\mathbf{p}) + A \} \\ \Gamma_{0,2}^{\text{R}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) &= 0\end{aligned}\tag{105}$$

La quantité $\Gamma_{0,1} = \langle \frac{1}{2}\varphi^2(\mathbf{0}) \rangle$ diverge quadratiquement à quatre dimensions. Cette constante qui interviendrait dans le calcul de l'énergie interne, ne va pas jouer de rôle dans la suite. Nous serons amenés à étudier plus en détail l'insertion d'opérateurs de degré plus élevé.

3. Groupe de renormalisation

3.1 Flot de renormalisation

La discussion menée jusqu'ici peut paraître hors de propos pour diverses raisons. Tout d'abord nous sommes initialement intéressés par la théorie nue. En particulier ce sont les coefficients du lagrangien original qui possèdent une dépendance régulière dans la température. En second lieu il n'y a aucune raison de supposer que la constante g_0 de déviation au modèle gaussien soit petite. Pour d inférieur à quatre, sa dimension $4 - d$ en terme de l'échelle initiale $1/a$ en fait même a priori une grande quantité. Un développement perturbatif paraît mal adapté à moins que nous ne parvenions à en extraire des informations indépendantes sur les séries resommées. Enfin, alors que nous avons insisté jusqu'ici sur les singularités de courte distance, nous sommes intéressés par le domaine où la longueur de corrélation, ou l'inverse de la masse renormalisée, devient infinie, c'est-à-dire le domaine infrarouge. Pour $d < 4$ les divergences infrarouges à $m = 0$ deviennent de plus en plus sévères lorsque l'ordre des perturbations augmente. Nous avons vu par exemple qu'à l'ordre d'une boucle, si p désigne l'échelle des moments, la fonction à quatre points se comporte comme une fonction homogène en $p^{-(4-d)}$. Il en résulte qu'à un ordre assez élevé son itération dans une fonction, par ailleurs convergente dans le domaine ultraviolet, produit des divergences infrarouges lorsque $n(4 - d) > d$ (figure 4).

Pour éviter des divergences infrarouges incontrôlées, il faudra donc, lorsque $d < 4$, conserver une masse m différente de zéro. Dans ce cas la théorie critique apparaîtra comme une situation où $p/m \gg 1$ et $p/\Lambda \ll 1$. Du point de vue de la théorie renormalisée où l'échelle Λ a été absorbée dans la redéfinition de T_c par l'emploi de la longueur de corrélation m^{-1} , et d'un changement d'échelle des champs (de l'aimantation), la seconde condition $p/\Lambda \ll 1$ est automatiquement satisfaite, et la première indique qu'il y aura une relation entre comportement critique et analyse de la théorie de courte distance à l'échelle $1/m$. On note au passage que pour se ramener à l'échelle θ des déviations de la température à T_c , il sera nécessaire de connaître de façon directe ou indirecte la relation entre m et m_0 . Ces indications suggèrent la façon dont vont être levées les objections soulevées ci-dessus. Choix d'un

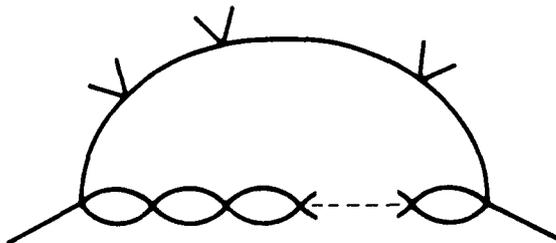


Figure 4 : Chaîne de bulles conduisant à des divergences infrarouges à masse nulle.

paramètre de développement g renormalisé sans dimension dont on a de bonnes raisons de penser qu'il reste fini quel que soit $g_0 \geq 0$. Maintien à $d < 4$ dans la région symétrique (de haute température) d'une masse finie et discussion du comportement ultraviolet. Pour $d = 4$ l'obstacle des divergences infrarouges n'est pas là. On pourra donc directement étudier la théorie critique, qui comme nous le verrons est attachée à la limite $g \rightarrow 0$. En ce sens on peut parler de théorie asymptotiquement libre infrarouge à quatre dimensions. On pourra alors procéder à un développement double en g et $\varepsilon = 4 - d$.

Pour présenter les applications de la renormalisation aux phénomènes critiques nous avons donc le choix d'une étude à $d < 4$ fixé (2 ou 3), ou bien celui du développement en ε . Nous choisirons d'exposer d'abord le premier point de vue.

Supposons donc $d < 4$, $m > 0$; nous allons voir que la théorie critique correspond à la limite où g_0 tend vers l'infini. L'hypothèse essentielle que nous allons faire est que les corrélations renormalisées selon le schéma qui prévalait à $d = 4$, renormalisation de masse, de constante de couplage et de fonction d'onde, restent finies lorsque $g_0 \rightarrow \infty$. Cette hypothèse paraît justifiée pour d voisin de quatre. De même qu'en mécanique quantique l'amplitude de diffusion tend vers le terme de Born à grande énergie, la super-renormalisabilité de la théorie φ^4 suggère que, à moments tendant vers l'infini, les fonctions de Green tendent vers les premiers termes de leur développement perturbatif. En particulier la fonction de vertex à quatre points tend vers $g_0 \rightarrow \infty$. L'hypothèse revient à dire que lorsque le comportement ultraviolet devient divergent le comportement à moment fini reste fini.

Pour étudier cette question, nous allons considérer l'effet d'un changement d'échelle sur les fonctions de corrélation. Puisque m est fini nous pouvons effectuer ce changement d'échelle en variant la masse à g_0 et Λ fixées. Appliquons l'opérateur $m \frac{\partial}{\partial m} \Big|_{g_0, \Lambda}$ à une fonction nue

$$m \frac{\partial}{\partial m} \Gamma_n(\mathbf{p}; m_0, g_0, \Lambda) \Big|_{g_0, \Lambda} = \left(m \frac{\partial}{\partial m} m_0^2 \Big|_{g_0, \Lambda} \right) \Gamma_{n,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q} = \mathbf{0}; m_0, g_0, \Lambda) \quad (106)$$

Les fonctions de corrélation nues et renormalisées sont reliées par

$$\begin{aligned} \Gamma_n(\mathbf{p}; m_0, g_0, \Lambda) &= Z_1^{-n/2} \Gamma_n^R(\mathbf{p}; m, g) \\ \Gamma_{n,1}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; m_0, g_0, \Lambda) &= Z_1^{-n/2} Z_2 \Gamma_{n,1}^R(\mathbf{p}, \mathbf{q}; m, g) \end{aligned}$$

Définissons les quantités sans dimension

$$\begin{aligned} \beta &= m \frac{\partial g}{\partial m} \Big|_{g_0, \Lambda} \\ \gamma_1 &= Z_1^{-1} m \frac{\partial Z_1}{\partial m} \Big|_{g_0, \Lambda} \\ \gamma_2 &= Z_2^{-1} m \frac{\partial Z_2}{\partial m} \Big|_{g_0, \Lambda} \end{aligned} \quad (107)$$

Il vient en reportant dans la relation (106)

$$\left\{ m \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} n \gamma_1 \right\} \Gamma_n^R(\mathbf{p}; m, g) = Z_2 \left(m \frac{\partial m_0^2}{\partial m} \Big|_{g_0, \Lambda} \right) \Gamma_{n,1}^R(\mathbf{p}, \mathbf{0}; m, g)$$

On observe que β et γ_1 (et γ_2 qui n'intervient pas encore), a priori fonction de g et m/Λ , sont indépendants de n et de l'ensemble des moments p . En particulier si nous choisissons $n = 2$ et $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\Gamma_2^R(\mathbf{p} = \mathbf{0}; m, g) = m^2$. Par conséquent puisque $\Gamma_{2,1}^R(\mathbf{p} = \mathbf{0}, \mathbf{q} = \mathbf{0}; m, g) = 1$

$$(2 - \gamma_1) m^2 = Z_2 m \frac{\partial m_0^2}{\partial m} \Big|_{g_0, \Lambda} \quad (108)$$

Puisque toute référence à la théorie nue a disparu de la formule ci-dessus, les coefficients β et γ_1 ne peuvent que dépendre de g ou être infinis. Cette dernière possibilité peut être exclue en les exprimant à l'aide de fonctions de vertex renormalisées en des points particuliers. Nous obtenons ainsi la relation

$$\left\{ m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} n \gamma_1(g) \right\} \Gamma_n^R(\mathbf{p}; m, g) = (2 - \gamma_1(g)) m^2 \Gamma_{n,1}^R(\mathbf{p}, \mathbf{0}; m, g) \quad (109)$$

Une forme équivalente de ces équations fut d'abord établie dans le contexte de l'électrodynamique quantique, à partir d'une discussion sur l'arbitraire des conditions de normalisation; puis le sujet fut ressuscité par Callan et Symanzik dans l'analyse des anomalies à l'invariance d'échelle. Il s'ensuit que les coefficients β , γ_1 et γ_2 , qui dépendent partiellement des conditions de normalisation, possèdent des séries perturbatives en g finies. Les équations (109) ne mettent en jeu que des quantités renormalisées et restent valable à $d = 4$.

La dérivation de ces équations exploite la renormalisation multiplicative des champs et le fait que toute référence au facteur de coupure dimensionné Λ disparaît de la théorie renormalisée exprimée en fonction de m et g . La renormalisation multiplicative est responsable de l'apparition du facteur $\gamma_1(g)$, relié à la dimension anormale de φ , de même que $\gamma_2(g)$ l'est à la dimension anormale de $\frac{1}{2}\varphi^2$.

Le phénomène intéressant est l'apparition d'un facteur $\beta(g)$. Il s'ensuit qu'une transformation d'échelle doit s'accompagner d'un flot de constante de couplage (et ceci se généralise évidemment au cas multidimensionnel de plusieurs constantes de couplage). Ce flot possède des points critiques (où $\beta(g_c) = 0$) qui vont jouer un rôle déterminant d'attracteur ou de répulseur. Que ceci soit le cas, n'est pas complètement inattendu pour $d < 4$, si on considère que le couplage initial dimensionné devait réagir à un changement d'échelle. Le fait peut être plus surprenant est qu'il en soit encore ainsi à $d = 4$, où g_0 comme g , est sans dimension. Mais il traduit alors le fait que, sous-jacente à la théorie renormalisée, la théorie régularisée possède une échelle Λ dont $\beta(g)$ est alors la trace à la limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Enfin il est bon d'observer que, pour $m \neq 0$, la présence d'un second membre à (109) entraîne que cette équation n'est que la première d'une hiérarchie qui met en jeu de plus en plus d'insertions de $\frac{1}{2}\varphi^2$. Ces équations prennent la forme

$$\left\{ m \frac{\partial}{\partial m} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} n \gamma_1(g) + s \gamma_2(g) \right\} \Gamma_{n,s}^R(\{\mathbf{p}\}, \{\mathbf{q}\}; m, g) = (2 - \gamma_1(g)) m^2 \Gamma_{n,s+1}^R(\{\mathbf{p}\}, \{\mathbf{q}, \mathbf{0}\}; m, g) \quad (110)$$

Dériver l'équation (110).

L'utilité de ce système d'équations couplées en paraît du coup affaiblie, sauf si on peut trouver des régions dans l'espace des moments où les fonctions des seconds membres sont négligeables. Considérons par exemple la relation (109). Bien que la configuration des moments dans la fonction du second membre soit "exceptionnelle", puisque l'un d'entre eux s'annule, un théorème dû à Weinberg affirme que dans la région ultraviolette, où tous les \mathbf{p} sont simultanément grands, $\Gamma_{n,1}^R(\mathbf{p}, \mathbf{0})$ est d'ordre $p^{-2} \Gamma_n^R(\mathbf{p})$, à des puissances de $\ln p$ près, terme à terme perturbativement. Pourvu que ces

logarithmes ne se resomment pas pour compenser ce facteur p^{-2} , on pourra alors effectivement négliger ce second membre dans la région en question. Il y aura d'ailleurs la possibilité de vérifier la cohérence de cette procédure en effectuant le même raisonnement sur l'équation suivante de la hiérarchie. Enfin au voisinage de quatre dimensions on pourra en appeler au fait que les déviations aux dimensions canoniques sont par hypothèse d'ordre $(4-d)$ ou plus élevées.

(1) Traduire la relation (108) en une équation reliant Z_2 aux autres constantes de la renormalisation

$$Z_2 = Z_1 \frac{\partial}{\partial m_0^2} \left(\frac{m^2}{Z_1} \right)_{g_0, \Lambda} \quad (111)$$

(2) A la limite $\Lambda \rightarrow \infty$, g_0/m^{4-d} est fonction de g seulement (si g et m sont finis), en sorte qu'on peut obtenir $\beta(g)$ pour $d < 4$ par la relation (cf.(107))

$$\left\{ 4 - d + \beta(g) \frac{d}{dg} \right\} \frac{g_0}{m^{4-d}} = 0 \quad (112)$$

Comme pour $g \rightarrow 0$, g_0/m^{4-d} tend vers g , il s'ensuit que

$$\beta(g) \underset{g \rightarrow 0}{\sim} -(4-d)g + \mathcal{O}(g^2) \quad (113)$$

Calculons à titre d'illustration les coefficients β , γ_1 , γ_2 à l'ordre d'une boucle. Pour cela nous récapitulons les expressions de g_0 , Z_1 , Z_2 et m_0^2 à cet ordre dans un tableau où figurent les expressions pour $d < 4$ et $d = 4$. De plus nous insérons les facteurs relatifs au cas du modèle à symétrie $O(n)$

$$d < 4 \left\{ \begin{array}{l} g_0 = m^{4-d} \left\{ g + \frac{n+8}{6} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} g^2 + \dots \right\} \\ Z_1 = 1 + \dots \\ m_0^2 = m^2 \left\{ 1 - \frac{n+2}{6} \frac{\Gamma(1-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} g + \dots \right\} \\ Z_2 = 1 - \frac{n+2}{6} \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} g + \dots \end{array} \right. \quad (114a)$$

$$d = 4 \left\{ \begin{array}{l} g_0 = g + \frac{n + 8 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln 2 - 1 - \gamma}{6 (4\pi)^2} g^2 + \dots \\ Z_1 = 1 + \dots \\ m_0^2 = m^2 \left\{ 1 - \frac{n + 2 \frac{\Lambda^2}{m^2} - 1 - \ln \frac{\Lambda^2}{m^2}}{6 (4\pi)^2} g + \dots \right\} \\ Z_2 = 1 - \frac{n + 2 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln 2 - 1 - \gamma}{6 (4\pi)^2} g + \dots \end{array} \right. \quad (114b)$$

Par inversion de séries

$$d < 4 \left\{ \begin{array}{l} g = \frac{g_0}{m^{4-d}} - \frac{n + 8 \Gamma(2-d/2)}{6 (4\pi)^{d/2}} \left(\frac{g_0}{m^{4-d}} \right)^2 + \dots \\ m \frac{\partial g}{\partial m} \Big|_{g_0, \Lambda} = - (4-d) \frac{g_0}{m^{4-d}} \\ \quad + \frac{n + 8 (4-d) \Gamma(2-d/2)}{3 (4\pi)^2} \left(\frac{g_0}{m^{4-d}} \right)^2 + \dots \\ \beta(g) = - (4-d)g + \frac{n + 8 \Gamma(3-d/2)}{3 (4\pi)^{d/2}} g^2 + \dots \end{array} \right. \quad (115a)$$

$$d = 4 \left\{ \begin{array}{l} g = g_0 - \frac{n + 8 \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} - \ln 2 - 1 - \gamma}{6 (4\pi)^2} g_0^2 + \dots \\ m \frac{\partial g}{\partial m} \Big|_{g_0, \Lambda} = \frac{n + 8}{3} \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} + \dots \\ \beta(g) = \frac{n + 8}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} + \dots \end{array} \right. \quad (115b)$$

Observons que la limite $d \rightarrow 4$ est régulière, terme à terme, conduisant à une fonction $\beta(g)$ finie perturbativement comme on s'y attend en dimension quatre en raison de la renormalisabilité de la théorie. Enfin bien évidemment l'expression de $\beta(g)$ dans (115) est en accord avec la limite (113).

Pour $d \leq 4$ on trouve alors

$$\gamma_1(g) = \mathcal{O}(g^2) \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(g) &= \left(\frac{n+2}{3} \right) \frac{\Gamma(3-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} g + \dots \\ &= \left(\frac{n+2}{3} \right) \frac{g}{(4\pi)^2} \quad (d=4) \end{aligned} \quad (117)$$

Calculer $\beta(g)$ en utilisant (113) et vérifier (116) et (117).

A Λ grand et g_0 fixé, la variation de g dans la formule (107) qui conduit au flot $\beta(g) \frac{\partial}{\partial g}$ provient du dernier paramètre libre, la température ou, ce qui est équivalent, la longueur de corrélation. Quand cette dernière croît, m décroît et le signe de la variation de g est opposé à celui de $\beta(g)$. Pour g très petit, c'est-à-dire, en général encore assez loin de la température critique, nous venons de voir que $\beta(g)$ est négatif, essentiellement pour des raisons dimensionnelles, lorsque $d < 4$. Les raisonnements que nous faisons sont en réalité dans la phase symétrique ($T > T_c$). La conclusion est que lorsque T décroît vers T_c , m décroît et g croît. Si g est borné il s'ensuit que cette croissance doit être contenue et $\beta(g)$ doit s'annuler pour une valeur positive g_c comme le suggère la formule à l'ordre d'une boucle. Par ailleurs puisque les coefficients des termes de degré ≥ 2 ont une limite finie lorsque $d \rightarrow 4$, (avec certains non nuls) il s'ensuit que si le développement perturbatif est asymptotique à une fonction bien définie, g_c sera d'ordre $(4-d)$ pour $d \rightarrow 4$. Le comportement hypothétique de $\beta(g)$ est représenté sur la figure 5. Il va sans dire, que nous considérons la branche stable $g > 0$, bien qu'au niveau perturbatif, mais à ce niveau seulement, le point $g = 0$ ne semble pas un point singulier.

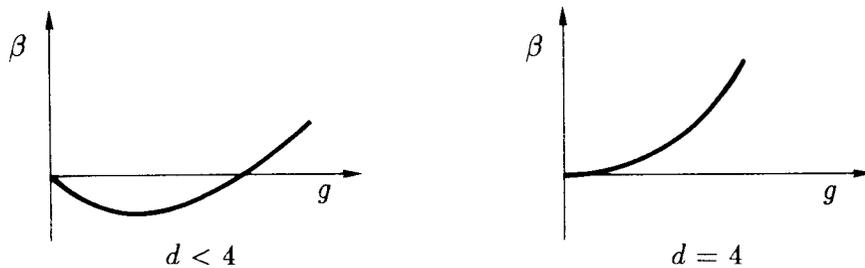


Figure 5 : Comportement de la fonction $\beta(g)$.

Si on se limite aux termes explicités dans (115) on trouve

$$\frac{g_c}{(4\pi)^{d/2}} = \left(\frac{3}{n+8} \right) \frac{4-d}{\Gamma(3-d/2)} + \dots \quad (118)$$

qui tend pour $d \rightarrow 4$ vers $(4-d)3/(n+8)$, tandis qu'à 3 dimensions, où ce calcul apparaît pour l'instant totalement irréaliste

$$\frac{g_c}{16\pi} = \frac{3}{n+8} + \dots \quad (119)$$

Covariance du flot dans l'espace des constantes de couplage.

La notion de point fixe est indépendante du choix de la paramétrisation de l'espace des constantes de couplage. Dans le cas du modèle φ^4 il n'y a qu'une

seule constante de couplage, et si l'on pose $g' = g'(g)$, où la transformation est inversible, on a

$$\beta(g) \frac{\partial}{\partial g} = \beta'(g') \frac{\partial}{\partial g'} \quad (120a)$$

donc

$$\beta'(g') = \beta(g) \frac{dg'}{dg} \quad (120b)$$

Si la transformation est monotone – condition nécessaire pour qu'elle soit inversible – il y a correspondance biunivoque entre les zéros de β et β' et le signe des fonctions correspondantes. Soit $g_c \leftrightarrow g'_c$ un point fixe où β et β' s'annulent. On a alors

$$\omega' = \frac{d\beta'(g'_c)}{dg'} = \frac{dg}{dg'} \frac{d}{dg} \left(\beta(g) \frac{dg'}{dg} \right)_{g_c} = \frac{d\beta(g_c)}{dg} = \omega \quad (121)$$

Dans le cas particulier d'un point fixe dégénéré à l'origine,

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \beta_3 g^3 + \beta_5 g^5 + \mathcal{O}(g^7) \\ g' &= g + a g^3 + \dots \end{aligned} \quad (122a)$$

on observe que

$$\beta'(g') = \beta_3 g'^3 + \beta_5 g'^5 + \mathcal{O}(g'^7) \quad (122b)$$

et les deux premiers coefficients sont des invariants pour la reparamétrisation ci-dessus. Généraliser à un espace de constantes de couplages multidimensionnel.

Tandis que la constante de couplage renormalisée g varie avec m selon (107), les quantités Z_1 , Z_2 et $g_0/m^{4-d}g$ varient elles-aussi. Comme $Z_1 - 1$, $Z_2 - 1$ et $(g_0/m^{4-d}g) - 1$ tendent vers zéro avec g , on peut écrire

$$\begin{aligned} Z_1 &= \exp \int_0^g dg' \frac{\gamma_1(g')}{\beta(g')} \\ Z_2 &= \exp \int_0^g dg' \frac{\gamma_2(g')}{\beta(g')} \\ \frac{g_0}{m^{4-d}} &= g \exp - \int_0^g dg' \left(\frac{4-d}{\beta(g')} + \frac{1}{g'} \right) \end{aligned} \quad (123)$$

En considérant cette dernière relation à g_0 fixé et $m \rightarrow 0$, on voit que g doit croître jusqu'au premier zéro de $\beta(g)$, où g_0/m^{4-d} diverge. Nous pouvons réinterpréter ceci à m fixé en disant que lorsque g croît de 0 à g_c , g_0 parcourt l'intervalle $0 \rightarrow \infty$.

Supposons que g_c soit un zéro simple de $\beta(g)$, et qu'en ce point la pente soit non nulle

$$\omega = \beta'(g_c) \quad (124)$$

Au voisinage de ce point on a donc

$$\frac{g_0}{m^{4-d}} \cong A \left(1 - \frac{g}{g_c}\right)^{-(4-d)/\omega} \quad (125a)$$

$$A = g_c \exp - \int_0^{g_c} dg' \left(\frac{4-d}{\beta(g')} + \frac{1}{g'} - \frac{4-d}{\omega(g' - g_c)} \right)$$

ou ce qui est équivalent

$$g = g_c \left[1 - \left(\frac{Am^{4-d}}{g_0} \right)^{\omega/(4-d)} \right] \quad (125b)$$

On observe que cette relation fait intervenir des puissances fractionnaires de g_0 , en d'autres termes c'est une expression non perturbative. Comme g_c est d'ordre $(4-d)$ ces expressions perdent leur sens lorsque $d \rightarrow 4$, où l'intervalle de variation de la constante renormalisée se réduit à zéro. La théorie renormalisée φ^4 à quatre dimensions obtenue à partir d'une théorie régularisée devient libre! Réflexion faite, ceci est tout à fait compatible avec le fait que quatre est la dimension critique supérieure. Pour conserver un sens au résultat, il faut par exemple supposer que le facteur de coupure est grand mais pas infini, ce qui laisse à la constante g un intervalle de variation petit (d'ordre Λ^{-1}) mais pas strictement nul. D'autres méthodes, tant théoriques que numériques, semblent confirmer la trivialité du modèle φ^4 en dimension quatre.

Montrer que si la pente ω est nulle au point critique, mais que $\beta''(g_c) \neq 0$, c'est-à-dire $\beta(g) \sim -\frac{1}{2}\omega'(g - g_c)^2$, alors

$$g_c - g \sim \frac{2(4-d)}{\omega' \ln(g_0/(A'm^{4-d}))} \quad (126)$$

avec A' une constante. Quelle est l'expression correspondante pour un zéro d'ordre plus élevé? On note que g approche de g_c de plus en plus lentement.

Au point critique $\gamma_1(g)$ et $\gamma_2(g)$ n'ont pas de raison d'être singuliers. Supposons une situation générique $\omega \neq 0$, et $g \rightarrow g_c$ quand $g_0/m^{4-d} \rightarrow \infty$. Nous obtenons les comportements suivants (C_i, \bar{C}_i étant des constantes)

$$Z_1 \sim C_1 m^{\gamma_1(g_c)} \left[1 + \bar{C}_1 \left(m g_0^{1/(d-4)} \right)^\omega + \dots \right]$$

$$Z_2 \sim C_2 m^{\gamma_2(g_c)} \left[1 + \bar{C}_2 \left(m g_0^{1/(d-4)} \right)^\omega + \dots \right] \quad (127)$$

La théorie critique est ainsi caractérisée par des lois d'échelle en puissances de la longueur de corrélation, dont nous allons maintenant relier les exposants aux définitions classiques.

3.2 Exposants critiques

La discussion qui précède est relative à la phase symétrique de haute température où

$$m_0^2 \sim a + b\theta \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_c} > 0 \quad (128)$$

Par définition de ν et γ

$$\begin{aligned} m &= \xi^{-1} \sim \theta^\nu \\ \chi &= G_2(\mathbf{p} = \mathbf{0}) = \frac{Z_1}{m^2} \sim \theta^{-\gamma} \end{aligned} \quad (129)$$

La relation (108) nous fournit en outre l'expression

$$Z_2 = \left. \frac{\partial m^2}{\partial m_0^2} \right|_{g_0, \Lambda} \left(1 - \frac{1}{2}\gamma_1(g)\right)$$

Sauf accident $(1 - \frac{1}{2}\gamma_1(g_c))$ est non nul.

Analyser la signification de $\gamma(g_c) = 2$.

Au voisinage de $m \rightarrow 0$, le membre de gauche ci-dessus se comporte comme $m^{\gamma_2(g_c)}$ et le membre de droite comme $dm^2/d\theta$, c'est-à-dire respectivement comme $\theta^{\nu\gamma_2(g_c)}$ et $\theta^{2\nu-1}$; de sorte que $\gamma_2(g_c)$ est relié à l'exposant ν

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2 - \gamma_2(g_c)}} \quad (130)$$

Revenant à (127), on a de même $m^{\gamma_2(g_c)-2}$ proportionnel à $\theta^{-\gamma}$, et donc

$$\boxed{\frac{\gamma}{\nu} = 2 - \gamma_1(g_c)} \quad (131)$$

Si on rapproche ceci de la relation d'homogénéité (IV.11) que nous allons retrouver plus loin, on voit que (131) est équivalent à

$$\boxed{\eta = \gamma_1(g_c)} \quad (132)$$

qui exprime que l'exposant η est relié à la dimension anormale du champ φ . Quand nous aurons montré que la théorie critique satisfait aux relations d'homogénéité, les deux quantités $\gamma_1(g_c)$ et $\gamma_2(g_c)$ fourniront tous les exposants critiques. Pour ce faire il nous faudra examiner plus en détail le comportement des fonctions de corrélation. On observe sur l'équation (127) que l'exposant ω caractérise les déviations au comportement critique.

En revanche le coefficient des termes en $m^\omega \sim \theta^{\omega\nu}$ dépend des paramètres microscopiques.

Sans plus attendre appliquons les résultats obtenus à l'ordre d'une boucle (ordre $4 - d$ en g_c) au calcul des exposants $\eta \nu$. Il vient ainsi

$$\beta(g) = -(4-d)g(1-g/g_c) \quad \text{avec } g_c = \frac{4-d}{n+8} \frac{3(4\pi)^{d/2}}{\Gamma(3-d/2)} \quad (133)$$

Soit

$$\boxed{\omega = 4 - d + \dots} \quad (134b)$$

A l'ordre d'une boucle, $\gamma_1(g)$ s'annule, donc

$$\boxed{\eta = 0 + \dots} \quad (134c)$$

Enfin

$$\gamma_2(g_c) = \frac{g_c}{(4\pi)^{d/2}} \frac{n+2}{3} \Gamma(3-d/2) = (4-d) \frac{n+2}{n+8} + \dots$$

$$\boxed{\begin{aligned} \nu &= \frac{1}{2 - (4-d)(n+2)/(n+8) + \dots} \\ \gamma &= \frac{2 + \dots}{2 - (4-d)(n+2)/(n+8) + \dots} \end{aligned}} \quad (134d)$$

A la limite $n \rightarrow \infty$ ces résultats à l'ordre d'une boucle deviennent

$$\eta = 0 \quad \frac{1}{2}\gamma = \nu = 1/(d-2) \quad (135)$$

c'est-à-dire les résultats exacts du modèle sphérique (pour $d < 4$). Pourquoi ? (cf. chapitre III section 3).

Le groupe de renormalisation conduit à des prédictions non triviales dès l'ordre d'une boucle. Les déviations aux exposants du champ moyen sont d'ordre $\varepsilon = 4 - d$. Au voisinage de quatre dimensions la procédure est cohérente. En effet g_c est d'ordre ε ce qui justifie la procédure perturbative renormalisée pour calculer les divers coefficients $\beta(g)$, $\gamma_1(g)$, $\gamma_2(g)$,... des équations du groupe de renormalisation. Pour attribuer à ces dernières un fondement intrinsèque, il faut cependant leur supposer un domaine de validité indépendant de la méthode perturbative. Des efforts sont actuellement en cours pour justifier ce point rigoureusement.

Il est remarquable que si on estime les exposants pour $d = 3$ à l'aide des expressions à l'ordre d'une boucle on trouve des résultats déjà très voisins

(avec des erreurs de quelques pour cent seulement) des valeurs généralement retenues. Pour le modèle d'Ising ($n = 1$) on trouve ainsi

$$\nu = \frac{1}{2}\gamma = 0.6 \quad \eta = 0 \quad (d = 3, n = 1) \quad (136)$$

3.3 Du point fixe gaussien au point critique

En obtenant les expressions (123) nous nous sommes fondés implicitement sur un comportement trivial $g \rightarrow 0$. Plus généralement nous nous attendons à ce qu'en dimension inférieure à quatre le comportement à courte distance du modèle φ^4 (massif pour éviter des accumulations de singularités infrarouge) correspondant à une théorie des champs super-renormalisable, soit trivial, dicté par celui du champ libre, ou des premières corrections perturbatives non nulles. S'il en est ainsi les fonctions nues tendent vers leurs expressions à l'ordre des arbres (amplitudes de Born). Ceci se traduit par

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-2} \mathbf{p}^{-2} \Gamma_2^R(\lambda \mathbf{p}; m, g) &= Z_1 \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Gamma_4^R(\{\lambda \mathbf{p}\}; m, g) &= m^{4-d} \frac{g_0}{m^{4-d}} Z_1^2 \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Gamma_{2,1}^R(\{\lambda \mathbf{p}\}, \lambda \mathbf{q}; m, g) &= Z_1 Z_2^{-1} \end{aligned} \quad (137)$$

Une restriction technique, destinée à assurer que dans l'espace de configuration tous les points tendent à coïncider, est qu'il faut réclamer dans les deux dernières limites qu'aucune somme partielle de moments ne s'annule.

Les relations (137) expriment que les fluctuations ne modifient pas le comportement perturbatif dominant. Ceci se vérifie ordre par ordre dans la théorie renormalisée, étant entendu que $d < 4$.

Effectuer cette vérification à l'ordre d'une boucle. Par exemple pour un modèle scalaire,

$$\begin{aligned} \Gamma_2^R &= m^2 + \mathbf{p}^2 + \dots \\ \Gamma_4^R &= m^{4-d} g - \frac{1}{2} g^2 m^{4-d} \sum_{i=2}^4 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \\ &\quad \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} \left(\frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_i - \mathbf{q})^2 + m^2} - \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} \right) + \dots \\ \Gamma_{2,1}^R &= 1 - \frac{1}{2} m^{4-d} g \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} \left(\frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{q})^2 + m^2} - \frac{1}{\mathbf{q}^2 + m^2} \right) + \dots \end{aligned}$$

d'où en appliquant (137)

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 1 + \dots \\
\frac{g_0}{m^{4-d}} &= g + \frac{3}{2}g^2 \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + 1)^2} + \dots = g + \frac{3}{2}g^2 \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} + \dots \\
Z_2 &= 1 - g \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{q}^2 + 1)^2} + \dots = 1 - \frac{1}{2}g \frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} + \dots
\end{aligned}$$

expressions qui s'identifient à celles obtenues en (114), comme on s'y attend.

Le comportement ultraviolet trivial est confirmé en étudiant la variation de g en fonction de l'échelle $m \ll \Lambda$ à g_0 et Λ fixé. Puisque $dg/\beta(g) = d \ln m$, on a

$$\frac{m_2}{m_1} = \exp \int_{g_1}^{g_2} \frac{dg'}{\beta(g')}$$

Comme β est négatif, on en déduit que dans la région $\Lambda \gg m_2 \gg m_1$, la constante de couplage effective $g_2 \equiv g(m_2)$ tend vers zéro exponentiellement vite

$$\frac{g_2}{g_1} \sim \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{4-d} \quad \frac{m_2}{m_1} \gg 1 \quad (138)$$

La situation apparaît paradoxalement très différente à quatre dimensions où $\beta(g)$ positif est d'ordre g^2 pour g petit ($\beta(g) \sim 3g^2/(4\pi)^2 + \dots$ pour $n = 1$). En apparence, pour $g > 0$, l'origine est un point fixe ultraviolet répulsif. Lorsque m augmente, g fait de même et on entre ainsi dans un domaine non perturbatif inconnu. Evidemment il pourrait se faire que $\beta(g)$ passe par un maximum et décroisse à nouveau vers un point fixe ultraviolet non trivial. Ce scénario semble démenti par des simulations numériques et nous supposons qu'il n'en est rien. Cependant la plage $g > 0$ à $d = 4$ correspond à la plage $g > g_c$ pour $d < 4$. Or nous venons de voir que en dimension inférieure à quatre, à Λ et m fixé, la constante nue g_0 décrit tout l'intervalle "sensé" de 0 à l'infini lorsque la constante de couplage renormalisée g varie dans l'intervalle $[0, g_c]$. Il s'ensuit qu'alors la région $g > g_c$ est inaccessible sans un prolongement analytique qui révèle des pathologies pour les fonctions de corrélation, par exemple l'apparition de parties imaginaires, inacceptables physiquement, et signalant des instabilités. Par continuité en $d \rightarrow 4$, on est tenté de faire la même analyse dans tout le domaine $0 < g$, en dimension 4.

Formellement cependant les termes de la série perturbative renormalisée sont bien définis pour $d = 4$. La question est alors de savoir s'il s'agit de séries asymptotiques à des fonctions de corrélations "sensées". Au point où nous en sommes, la justification du fait qu'il n'en est rien est partiellement fondée sur un argument circulaire puisqu'elle repose sur l'évaluation

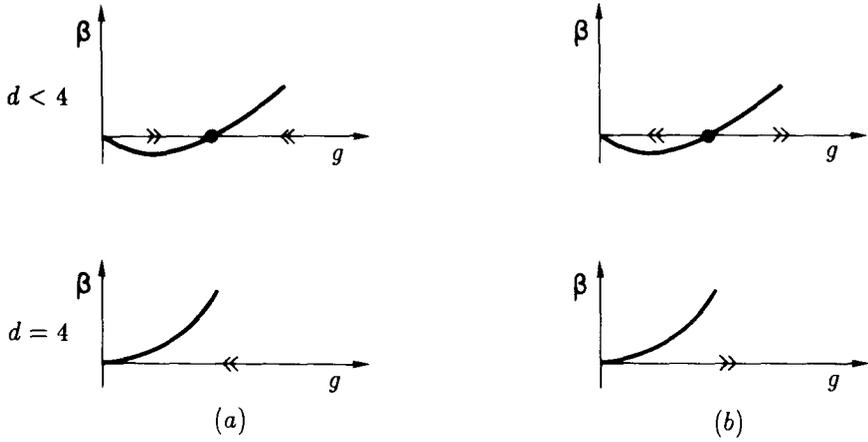


Figure 6 : Comportements infrarouge (a) et ultraviolet (b) pour $d < 4$ et $d = 4$.

de fonctions régulières telles $\beta(g), \gamma_1(g), \dots$. Il semble paradoxal de calculer de telles quantités dans le cadre d'un modèle mal défini. Cependant, une fois fait le choix d'un prolongement dimensionnel, il est parfaitement concevable de considérer ces quantités comme les limites régulières de fonctions bien définies à $d < 4$.

Tandis que lorsque $m \rightarrow \infty$ (après avoir d'abord considéré la limite $\Lambda \rightarrow \infty$) la théorie devient triviale, il n'est pas ainsi lorsqu'on fait décroître m , cas où g tend vers le point fixe infrarouge attractif non trivial. Etudions alors les expressions des solutions des équations du groupe de renormalisation.

3.4 Fonctions de corrélation au point critique

Choisissons une dimension fixe inférieure à quatre. L'analyse dimensionnelle qui donne

$$\Gamma_n^R(\lambda \mathbf{p}; \lambda m, g) = \lambda^{d - \frac{1}{2}n(d-2)} \Gamma_n^R(\mathbf{p}; m, g) \tag{139a}$$

permet de transformer les dérivées en m à \mathbf{p} fixé, en dérivées sur l'échelle de \mathbf{p} à m fixé. Posant pour simplifier

$$d_n^\Gamma = d - \frac{1}{2}n(d-2) \tag{139b}$$

nous écrivons l'équation (109) sous la forme

$$\left\{ -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + (d_n^\Gamma - \frac{1}{2}n\gamma_1(g)) \right\} \Gamma_n^R(\lambda \mathbf{p}; m, g) = (2 - \gamma_1(g)) m^2 \Gamma_{n,1}^R(\lambda \mathbf{p}, \mathbf{0}; m, g) \quad (140)$$

Nous retrouvons pour $\frac{1}{2}\gamma_1(g)$ l'interprétation de dimension anormale du champ φ

$$d_n^\Gamma - \frac{1}{2}n\gamma_1(g) = d - n \left(\frac{1}{2}(d-2) + \frac{1}{2}\gamma_1(g) \right) \quad (141)$$

Les fonctions de Green connexes renormalisées (nous omettons l'indice c pour simplifier les notations) satisfont à une équation analogue, avec

$$d_n^G = d - \frac{1}{2}n(d+2) \quad (142)$$

Soit

$$\left\{ -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + (d_n^G + \frac{1}{2}n\gamma_1(g)) \right\} G_n^R(\lambda \mathbf{p}; m, g) = (\gamma_1(g) - 2) m^2 G_{n,1}^R(\lambda \mathbf{p}, \mathbf{0}; m, g) \quad (143)$$

Etablir la relation (143).

Introduisons une constante de couplage dépendant de l'échelle λ , soit $\bar{g}(\lambda, g)$, solution de l'équation du premier ordre

$$\lambda \frac{d\bar{g}(\lambda, g)}{d\lambda} = \beta[\bar{g}(\lambda, g)] \quad \bar{g}(1, g) = g \quad (144)$$

donc telle que

$$\ln \lambda = \int_g^{\bar{g}(\lambda, g)} \frac{dg'}{\beta(g')} \quad (145)$$

Conformément aux équations (123),

$$Z_1(g) = \exp \int_0^g dg' \frac{\gamma_1(g')}{\beta(g')} \quad (146)$$

et pour alléger les notations nous posons

$$\tilde{G}_n^R(\mathbf{p}; m, g) = (2 - \gamma_1(g)) m^2 G_{n,1}^R(\mathbf{p}, \mathbf{0}; m, g) \quad (147)$$

Dans ces conditions écrivons une solution de (143) sous la forme

$$\begin{aligned}
& \lambda_2^{-d_n^G} Z_1^{n/2}(g) G_n^R(\lambda_2 \mathbf{p}; m, g) \\
& - \lambda_1^{-d_n^G} Z_1^{n/2}(\bar{g}[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, g]) G_n^R(\lambda_1 \mathbf{p}; m, \bar{g}[\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, g]) = \\
& = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{\lambda} \lambda^{-d_n^G} Z_1^{n/2}(\bar{g}[\frac{\lambda_2}{\lambda}, g]) \tilde{G}_n^R(\lambda \mathbf{p}; m, \bar{g}[\frac{\lambda_2}{\lambda}, g])
\end{aligned} \tag{148}$$

En utilisant la variable $\bar{g}(\lambda, g)$ introduite ci-dessus, ramener l'équation aux dérivées partielles à une équation différentielle du premier ordre et obtenir (148).

Pour clarifier l'interprétation de cette équation, imaginons le membre de droite de (148) négligeable. Faisant alors $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$, nous obtenons

$$G_n^R(\lambda \mathbf{p}; m, g) \simeq \lambda^{d_n^G} \left(\frac{Z_1(\bar{g}[\lambda, g])}{Z_1(g)} \right)^{n/2} G_n^R(\mathbf{p}; m, \bar{g}[\lambda, g]) \tag{149}$$

Ceci exprime que si on pouvait négliger le membre de droite, un changement d'échelle des moments serait équivalent à la multiplication par un facteur dépendant du paramètre de dilatation accompagné d'une variation correspondante du couplage. En particulier, aux points fixes de cette transformation, les fonctions de Green seraient homogènes. Il est évident que la structure de (149) est plus que réminiscente de la relation entre corrélations nues et renormalisées.

Revenons à l'équation (148), et faisons y tendre λ_1 vers zéro. Dans ces conditions $\bar{g}(\lambda_2/\lambda_1, g)$ tend vers zéro (c'est le comportement ultraviolet trivial) et $Z_1(\bar{g}(\lambda_2/\lambda_1), g)$ tend vers 1. La fonction de Green est finie à moment nul, puisque la masse est non nulle. Enfin pour $n \geq 1$,

$$\lambda_1^{-d_n^G} = \lambda_1^{\frac{1}{2}n(d+2)-d}$$

tend vers zéro avec λ_1 (c'est la raison pour faire le raisonnement sur les fonctions de corrélation, plutôt que sur les fonctions de vertex qui nécessiteraient pour $n = 2, 4$ des soustractions dans l'intégrale). Dans ces conditions.

$$G_n^R(\lambda \mathbf{p}; m, g) = \lambda^{d_n^G} \int_0^\lambda \frac{d\mu}{\mu} \mu^{-d_n^G} \left(\frac{Z_1(\bar{g}[\frac{\lambda}{\mu}, g])}{Z_1(g)} \right)^{n/2} \tilde{G}_n^R(\mu \mathbf{p}; m, \bar{g}[\frac{\lambda}{\mu}, g]) \tag{150}$$

Etudions la limite critique $m_0^2 \rightarrow m_{0c}^2$, ou encore $m^2 \rightarrow 0$ à g_0 fixe c'est-à-dire encore à moments fixés $g \rightarrow g_c$. Notons encore qu'il est équivalent de faire tendre m vers zéro ou les moments vers l'infini puisque $G_n(\lambda \mathbf{p}; m, g) = m^{d_n^G} G_n(\lambda \mathbf{p}/m, 1, g)$. Il nous faut contrôler le comportement de \tilde{G} défini par (147) dans la région des grands moments. A une renormalisation finie près, le développement perturbatif de ces fonctions est analogue à celui des fonctions de corrélation, à ceci près que chaque propagateur est successivement élevé au carré. Ceci a pour conséquence que, ordre par ordre, le comportement à grand moment est amélioré (de deux puissances de l'impulsion à des logarithmes près). Nous supposons que cette propriété subsiste indépendamment de l'argument perturbatif, et plus précisément que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{G}_n^R(\lambda \mathbf{p}) / G_n^R(\lambda \mathbf{p}) = 0 \quad (151)$$

En vertu de (112) on a

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{4-d} \bar{g}[\lambda, g] = g_0 / m^{4-d} \quad (152)$$

En utilisant les hypothèses (151) et (512), on vérifie que pour g fixé et $0 \leq g \leq g_c$, la limite $\lambda \rightarrow \infty$ de l'intégrale dans (150) reproduit le développement perturbatif, comme on s'y attend, puisque le comportement ultraviolet du modèle est trivial.

Il n'est pas de même pour $g = g_c$. Dans cette limite

$$\bar{g}[x, g_c] = g_c$$

$$\lim_{g \rightarrow g_c} \frac{Z_1(\bar{g}[x, g])}{Z_1(g)} = \lim_{g \rightarrow g_c} \exp \int_g^{\bar{g}} dg' \frac{\gamma_1(g')}{\beta(g')} = \exp \gamma_1(g_c) \ln x \quad (153)$$

Il s'ensuit qu'alors

$$G_n^R(\lambda \mathbf{p}; m, g_c) = \lambda^{d_n^G + \frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)} \int_0^\lambda \frac{d\mu}{\mu^{1+d_n^G + \frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)}} \tilde{G}_n^R(\mu \mathbf{p}; m, g_c) \quad (154)$$

Lorsque $\lambda \rightarrow \infty$, l'hypothèse (151) implique que l'intégrale converge à la limite supérieure, de sorte que le comportement des fonctions de corrélation au point g_c , dans la région $|\mathbf{p}| \gg m$, est une pure loi de puissance

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_n^R(\lambda \mathbf{p}; m, g_c) = \lambda^{d_n^G + \frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)} \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu^{1+d_n^G + \frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)}} \tilde{G}_n^R(\mu \mathbf{p}; m, g_c) \quad (155)$$

Ce comportement ultraviolet discontinu est une conséquence du fait que g_c est un point fixe ultraviolet répulsif. Le comportement homogène (155) est évidemment celui de la limite de masse nulle.

L'hypothèse précise de régularité sous-jacente est que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-d_n^G - \frac{1}{2}n\gamma_1(g_c)} \tilde{G}_n^R(\lambda \mathbf{p}, m, g_c) = 0$$

Elle implique que le comportement asymptotique des fonctions de corrélation se déduit des composantes de basse fréquence de la théorie, traduisant par là même un aspect de l'universalité, c'est-à-dire l'indifférence aux détails de la théorie nue à courte distance.

Déduire l'expression (155) directement de l'équation différentielle (143) en utilisant la simplification $\beta(g_c) = 0$.

Nous pouvons maintenant traduire ces résultats sur les fonctions de corrélation nues exprimées en termes de la masse normalisée m et non de m_0

$$G_n(\mathbf{p}; \frac{m}{\lambda}, g_0)_\Lambda = \int_0^\lambda \frac{d\mu}{\mu^{1+d_n^G}} (Z_1(\bar{g}[\mu^{-1}, g]))^{n/2} \tilde{G}_n^R(\mu \mathbf{p}; m, \bar{g}[\mu^{-1}, g]) \quad (156)$$

où g correspond aux valeurs $g = g(m, g_0, \Lambda)$, g_λ aux valeurs $(m/\lambda, g_0, \Lambda)$, et on a tenu compte de la relation $\bar{g}(\lambda/\mu, g_\lambda) = \bar{g}(1/\mu, g)$.

Dans la limite où $m/\lambda \rightarrow 0$, c'est-à-dire $\lambda \rightarrow \infty$, la région qui pose a priori des problèmes dans l'intégrale est celle des μ grands. Or si on utilisait un raisonnement perturbatif on se heurterait d'emblée aux difficultés signalées au tout début de cette section. En effet, il est facile de voir qu'alors \bar{g} et Z_1 s'exprimeraient comme des polynômes en μ^{4-d} , et à un ordre fini, dépendant de l'ordre de décroissance polynômiale de \tilde{G}_n^R , on se heurterait à des divergences à la limite $\mu \rightarrow \infty$. Il n'en est heureusement rien quand on fait appel à la puissance du groupe de renormalisation qui resomme ces comportements. En effet $\bar{g}(\mu^{-1}, g)$ tend alors vers g_c et on obtient des expressions finies pour la théorie de masse nulle

$$G_n(\lambda \mathbf{p}; 0, g_0)_\Lambda = \lambda^{d_n^G} \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu^{1+d_n^G}} \left(Z_1(\bar{g}[\frac{\lambda}{\mu}, g]) \right)^{n/2} \tilde{G}_n^R(\mu \mathbf{p}; m, \bar{g}[\frac{\lambda}{\mu}, g]) \quad (157)$$

Cette expression permet alors d'illustrer la différence de comportement à courte et à grande distance. Si λ devient très grand (mais on suppose toujours $|\lambda \mathbf{p}| \ll \Lambda$) nous retrouvons le développement perturbatif en g_0 avec des singularités aux mêmes ordres qu'apparaissent les divergences infrarouges perturbatives. En revanche lorsque $\lambda \rightarrow 0$, $\bar{g}(\lambda/\mu, g)$ tend vers g_c pour toute valeur finie de μ , et on tire alors de (157)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} G_n(\lambda \mathbf{p}; 0, g_0)_\Lambda = \lambda^{d_n^G + \frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)} \left(Z_1(g) \exp \int_g^{g_c} dg' \frac{\gamma_1(g') - \gamma_1(g_c)}{\beta(g')} \right)^{n/2} \\ \times \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu^{1+d_n^G + \frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)}} \tilde{G}_n^R(\mu \mathbf{p}; m, g_c) \quad (158)$$

A un facteur de (re-) normalisation près, nous voyons qu'il y a identité entre le comportement infrarouge de la théorie nue à masse nulle (à T_c), et le comportement ultraviolet de la théorie massive renormalisée à $g = g_c$.

En choisissant $n = 2$ dans (158), avec $d_2^G = -2$, on trouve pour la fonction de corrélation à deux points au point critique, un comportement à petit moment du type

$$G_2(\mathbf{p}) \sim \frac{1}{p^{2-\gamma_1(g_c)}} \quad (159)$$

ou dans l'espace de configuration, un comportement homogène à grande distance en $1/|\mathbf{x}|^{d-2+\gamma_1(g_c)}$. En d'autres termes comme annoncé dans le paragraphe précédent – équation (132) – l'indice η n'est autre que $\gamma_1(g_c)$.

(1) Corrections au comportement homogène dominant. Montrer en développant l'équation (157) au-delà du terme dominant, que les corrections d'ordre $g_\lambda - g_c$ pour $\lambda \rightarrow 0$, s'écrivent (cf. (133))

$$G_n(\lambda \mathbf{p}; 0, g_0)_\Lambda \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \text{Cst} \lambda^{d_n^G + \frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)} (1 + \mathcal{O}(\lambda^\omega)) \quad (160)$$

où $\omega = \beta'(g_c)$ est la pente invariante de la fonction β au point critique. Nous reviendrons sur les corrections aux lois d'échelle induits par les termes inessentiels du lagrangien.

(2) Comportement non analytique de la théorie critique en fonction de la constante de couplage nue.

Vis-à-vis de la théorie critique, la masse introduite dans la théorie renormalisée en dimension inférieure à quatre joue un rôle de régulateur des divergences perturbatives infrarouge et de facteur d'échelle découplé du facteur $\Lambda \gg m$. En utilisant l'homogénéité de \tilde{G}_n^R récrivons (158) sous la forme

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} G_n(\lambda \mathbf{p}; 0, g_0)_\Lambda = \lambda^{d_n^G + \frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)} m^{-\frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)} \times \\ \left\{ \left(\frac{g_c}{g} \right)^{\frac{\gamma_1(g_c)}{4-d}} e^{\gamma_1(g_c) \int_0^g dg' \left(\frac{1}{\beta(g')} + \frac{1}{(4-d)g'} \right)} e^{\int_0^{g_c} dg' \left(\frac{\gamma_1(g') - \gamma_1(g_c)}{\beta(g')} - \frac{\gamma_1(g_c)}{(4-d)g'} \right)} \right\}^{n/2} \\ \times \int_0^\infty \frac{d\mu}{\mu^{1+d_n^G + \frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)}} \tilde{G}_n^R(\mu \mathbf{p}; m = 1, g_c) \quad (161)$$

Toute la dépendance en g , fonction de g_0 , est contenue dans le crochet dont le dernier facteur est une constante et le second une fonction régulière lorsque $g \rightarrow 0$. Reste

$$\left[\left(\frac{g_c}{g} \right)^{\gamma_1(g_c)/(4-d)} m^{-\gamma_1(g_c)} \right]^{n/2} \sim \left(\frac{g_c}{g_0} \right)^{\frac{1}{2} n \gamma_1(g_c)/(4-d)}$$

qui exhibe un comportement non analytique en g_0 , qui va évidemment de pair avec les singularités infrarouges de la théorie perturbative de masse nulle.

3.5 Développement au voisinage du point critique

Les lois d'échelle au point critique nécessitent l'introduction d'une échelle, arbitraire mais indispensable pour rétablir l'analyse dimensionnelle usuelle. Dans ce qui précède la quantité qui jouait ce rôle était la longueur de corrélation en un point voisin de T_c . Cependant la procédure employée est malcommode si nous voulons pouvoir explorer le voisinage de T_c et en particulier, la région ordonnée à $\theta < 0$. On voudrait pouvoir simplifier la procédure en partant directement de la théorie de masse nulle à $T = T_c$, ce qui n'est pas possible pour $d < 4$ en raison des divergences infrarouges, mais le redevient dans un double développement en g et $\varepsilon = 4 - d$. C'est d'ailleurs l'idée originelle de Wilson et Fisher, idée qui a joué un rôle de catalyseur dans ce domaine. Nous allons alors montrer que la théorie de masse nulle est bien définie dans ce double développement. Cette dernière nécessite l'introduction d'un facteur d'échelle que nous appelons μ , et nous adoptons la normalisation

$$\begin{aligned} \Gamma_2^R(\mathbf{p}^2; g, \mu) \Big|_{\mathbf{p}^2=0} &= 0 \\ \frac{\partial \Gamma_2^R}{\partial \mathbf{p}^2}(\mathbf{p}^2; g, \mu) \Big|_{\mathbf{p}^2=\mu^2} &= 1 \\ \Gamma_4^R(\mathbf{p}_s; g, \mu) &= \mu^{4-d} g \end{aligned} \quad (162)$$

qui se substitue à celle donnée par (88). Le point \mathbf{p}_s est choisi par exemple comme le point symétrique où

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \frac{1}{3} \mu^2 (4\delta_{ij} - 1) \quad (163)$$

Le choix de normaliser la fonction à quatre points (définition de g) ainsi que la dérivée de la fonction à deux points, pour des valeurs de moments non nuls a pour objet d'éviter d'introduire des divergences infrarouges dans ces définitions. On verra plus loin que la théorie de masse nulle étant bien contrôlée, l'introduction de la masse pourra se faire (semi-) perturbativement, de sorte que nous serons en mesure d'explorer le domaine θ petit, quel que soit son signe. En définitive la méthode repose sur le fait que

dans le double développement envisagé ce sont les fonctions $\beta(g, \varepsilon)$, $\gamma_i(g, \varepsilon)$, des équations du groupe de renormalisation, déterminées par la théorie de masse nulle, qui contrôlent le comportement critique.

Dans le cadre présent, les équations du groupe de renormalisation expriment l'invariance du contenu physique de la théorie par rapport au choix du paramètre arbitraire μ de normalisation. Nous retrouvons ainsi l'argument original de Gell-Mann et Low. Ceci résulte bien évidemment du fait que la théorie nue régularisée ne comporte aucune référence à μ . En différentiant la relation $\Gamma_n(\mathbf{p}; g_0, m_0^c)|_\Lambda = Z_1^{-\frac{1}{2}n} \Gamma_n^R(\mathbf{p}; g, \mu)$ par rapport à μ , on obtient l'équation homogène

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} n \gamma_1(g) \right\} \Gamma_n^R(\mathbf{p}; g, \mu) = 0 \quad (164)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \mu \left. \frac{\partial g}{\partial \mu} \right|_{g_0, \Lambda} \\ \gamma_1(g) &= Z_1^{-1} \mu \left. \frac{\partial Z_1}{\partial \mu} \right|_{g_0, \Lambda} \end{aligned} \quad (165)$$

Bien que ces quantités diffèrent de celles introduites en (107) sauf à l'ordre le plus bas, nous n'en conservons pas moins la même notation. L'analyse de l'équation (164) conduit cependant aux mêmes conclusions que précédemment : existence d'un point critique stable infrarouge d'ordre $g_c \sim \varepsilon$, et valeur de l'indice critique $\eta = \gamma_1(g_c)$. On généralise (164) aux fonctions avec insertions de $\frac{1}{2}\varphi^2$ à moment \mathbf{q} , renormalisées selon

$$\begin{aligned} \Gamma_{n,s}(\mathbf{p}, \mathbf{q}; g_0, \Lambda) &= Z_1^{-n/2} Z_2^s [\Gamma_{n,s}^R(\mathbf{p}, \mathbf{q}; g, \mu) + A \delta_{n,0} \delta_{s,2}] \\ \Gamma_{2,1}^R(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q} = -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2; g, \mu) \Big|_{\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_2^2 = -3\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \mu^2} &= 1 \\ \Gamma_{0,2}^R(\mathbf{q}; g, \mu) \Big|_{\mathbf{q}^2 = \frac{4}{3}\mu^2} &= 0 \end{aligned} \quad (166)$$

et conduisant aux équations

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} n \gamma_1(g) + s \gamma_2(g) \right\} \Gamma_{n,s}^R = \delta_{n,0} \delta_{s,2} B(g) \quad (167)$$

avec

$$\gamma_2(g) = Z_2^{-1} \mu \left. \frac{\partial Z_2}{\partial \mu} \right|_{g_0, \Lambda} \quad (168)$$

et

$$B(g) = \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + 2\gamma_1(g) \right\} A \quad (169)$$

dont la dimension est $d - 4$. Excepté pour le couple $n = 0, s = 2$ (correspondant à la chaleur spécifique) l'analyse dimensionnelle ordinaire

$$\Gamma_{n,s}^R(\lambda \mathbf{p}, \lambda \mathbf{q}; g, \lambda \mu) = \lambda^{d - \frac{1}{2}n(d-2) - 2s} \Gamma_{n,s}^R(\mathbf{p}, \mathbf{q}; g, \mu) \quad (170)$$

et l'équation (168) à $g = g_c$ où $\beta(g_c) = 0$, conduisent au comportement de moments faibles

$$\Gamma_{n,s}^R(\lambda \mathbf{p}, \lambda \mathbf{q}; g, \mu) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \lambda^{d - \frac{1}{2}n(d-2+\eta) - s/\nu} \quad (171)$$

avec, en conformité avec les résultats précédents,

$$\begin{aligned} \gamma_1(g_c) &= \eta \\ \gamma_2(g_c) &= 2 - \nu^{-1} \end{aligned} \quad (172)$$

Si $n = 0, s = 2$, l'existence d'un terme inhomogène, entraîne l'apparition d'une constante supplémentaire (qui peut être dominante)

$$\Gamma_{0,2}^R(\lambda \mathbf{q}; g, \mu) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} a_1 + a_2 \lambda^{d-2/\nu} \quad (173)$$

Ayant ainsi construit la théorie de masse nulle, symétrique, à partir de quatre dimensions dans un développement en $\varepsilon = 4 - d$, on pourra étudier le voisinage de T_c en resommant une série en $m_0^2 - m_{0c}^2$ proportionnel à l'écart θ , couplé à l'opérateur $\frac{1}{2}\varphi^2$. En effet pour les quantités nues

$$\Gamma_n(\mathbf{p}, m_0^2 - m_{0c}^2) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(m_0^2 - m_{0c}^2)^s}{s!} \Gamma_{n,s}(\mathbf{p}, \mathbf{q} = \mathbf{0}; m_{0c}^2)$$

Compte tenu de la relation

$$(m_0^2 - m_{0c}^2) \frac{1}{2} \varphi^2 = \theta \frac{Z_1}{Z_2} \left(\frac{1}{2} \varphi^2 \right)_R \quad (174)$$

qu'on peut interpréter comme $Z_2(m_0^2 - m_{0c}^2) = \theta$, les quantités renormalisées satisfont à

$$\Gamma_n^R(\mathbf{p}; \theta) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\theta^s}{s!} \Gamma_{n,s}^R(\mathbf{p}, \mathbf{q} = \mathbf{0}, \theta = 0) \quad (175)$$

En raison des divergences infrarouges, cette série ne prendra un sens avant resommation, qu'en utilisant une quantité $\theta(\mathbf{x})$, constante à distance finie et décroissant à l'infini, auquel cas elle s'écrira

$$\Gamma_n^R(\mathbf{p}; \theta(\mathbf{x})) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \int \prod_{k=1}^s \left(\frac{d^d \mathbf{q}_k}{(2\pi)^d} \tilde{\theta}(\mathbf{q}_k) \right) \Gamma_{n,s}^R(\mathbf{p}, \{\mathbf{q}_k\}; \theta = 0) \quad (176)$$

On tire alors de (167)

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} n \gamma_1(g) + \gamma_2(g) \int \frac{d^d \mathbf{q}}{(2\pi)^d} \bar{\theta}(\mathbf{q}) \frac{\delta}{\delta \bar{\theta}(\mathbf{q})} \right\} \Gamma_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{p}; \theta(\mathbf{x}), g, \mu) = 0$$

En effectuant la resommation correspondant à l'apparition d'un propagateur massif, on aboutit à la limite de θ uniforme

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} n \gamma_1(g) + \gamma_2(g) \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \Gamma_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{p}; \theta, g, \mu) = 0 \quad (177)$$

Cette équation est à comparer à l'ensemble des relations (110) dont elle diffère par des renormalisations finies. L'intérêt est d'avoir abouti à une relation homogène, et de mettre en évidence le fait que les coefficients β , γ_1 , γ_2 sont ceux de la théorie de masse nulle, obtenue à l'aide d'un développement double en g et ε .

On tire alors de (177) l'ensemble des relations d'échelle. Plaçons nous d'abord à $\theta > 0$, dans la phase symétrique où seules sont non nulles les fonctions de Green d'argument pair en n . Posant

$$\begin{aligned} \mu(\lambda) &= \lambda \mu \\ \lambda \frac{dg(\lambda)}{d\lambda} &= \beta(g(\lambda)) & g(1) &= g \\ \lambda \frac{d \ln \theta(\lambda)}{d\lambda} &= \gamma_2(g(\lambda)) & \theta(1) &= \theta \end{aligned} \quad (178)$$

on résoud l'équation homogène (177) sous la forme

$$\Gamma_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{p}; \theta, g, \mu) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} n \int_1^\lambda \frac{d\lambda'}{\lambda'} \gamma_1(g(\lambda')) \right\} \Gamma_n^{\mathbf{R}}(\mathbf{p}; \theta(\lambda), g(\lambda), \lambda \mu) \quad (179)$$

Choisissons alors $\lambda = \lambda_0$ de telle sorte que $\theta(\lambda_0)$ ait une valeur fixe de la forme

$$\theta(\lambda_0) = \lambda_0^2 \mu^2 \quad (180)$$

ce qui implique que la valeur λ_0 satisfait à

$$\ln(\theta/\mu^2) = \int_g^{g(\lambda_0)} dg' (2 - \gamma_2(g')) / \beta(g')$$

Pour ce choix, la relation (179) prend la forme

$$\Gamma_n^R(\mathbf{p}; \theta, g, \mu) = Z_1^{n/2}(m/\mu, g(\lambda_0)) \Gamma_n^R(\mathbf{p}; m, g(\lambda_0)) \quad (181)$$

où nous avons posé

$$m = \mu \exp \int_g^{g(\lambda_0)} \frac{dg'}{\beta(g')} \quad (182a)$$

$$Z_1(m/\mu, g(\lambda_0)) = \exp - \int_g^{g(\lambda_0)} dg' \gamma_1(g')/\beta(g') \quad (182b)$$

Nous utilisons des notations m, Z_1, \dots qui diffèrent des précédentes par des renormalisations finies. Choisissons maintenant l'échelle de normalisation μ telle que

$$\theta^{1/2}, |\mathbf{p}| \ll \mu \ll \Lambda \quad (183)$$

c'est-à-dire dans le domaine ultraviolet, où μ apparaît comme un nouveau facteur de coupure arbitraire. Cependant, à la différence du cas de la théorie nue, où l'on devait négliger des termes d'ordre $1/\Lambda$, non universels dans les équations de groupe de renormalisation, la présente formulation est devenue minimale et exacte. Lorsque $\theta(\lambda_0)$ est fixé et que μ tend vers l'infini, λ_0 tend vers zéro et $g(\lambda_0)$ tend vers le point attractif infrarouge g_c . Compte tenu de (172) et (182)

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\mu^2} &\rightarrow \left(\frac{m}{\mu}\right)^{1/\nu} \\ Z_1 &\rightarrow \left(\frac{m}{\mu}\right)^{-\eta} \simeq \left(\frac{\theta}{\mu^2}\right)^{-\eta\nu} \end{aligned} \quad (184)$$

Pour les fonctions de vertex, à \mathbf{p}/m fini, on peut alors remplacer dans le second membre de (181) $g(\lambda_0)$ par g_c , et tenant compte des dimensions

$$d_n^\Gamma = d - \frac{1}{2}n(d-2)$$

on trouve alors,

$$\Gamma_n^R(\mathbf{p}; \theta, g, \mu) = \mu^{d - \frac{1}{2}n(d-2)} \left(\frac{\theta}{\mu^2}\right)^{\nu[d - \frac{1}{2}n(d-2+\eta)]} f_n \left(\frac{\mathbf{p}}{\mu} \left(\frac{\mu^2}{\theta}\right)^\nu\right) \quad (185)$$

qui est la forme invariante d'échelle dans le domaine critique. Sur l'expression (185) nous lisons comme l'indique (184) que la longueur de corrélation ξ diverge comme $\theta^{-\nu}$. A moment nul pour $\theta > 0$, Γ_n^R a une limite finie qui

se comporte comme $\theta^{\nu(d-\frac{1}{2}n(d-2+\eta))}$. En particulier, la susceptibilité inverse correspond au cas $n = 2$, l'exposant γ correspondant satisfait bien à

$$\boxed{\gamma = \nu(2 - \eta)} \quad (186)$$

Par construction les Γ_n^R ont une limite finie à $\theta = 0$, ceci implique que le préfacteur en puissance fractionnaire de θ doit être compensé par le comportement de la fonction f lorsque ses arguments tendent vers l'infini, c'est-à-dire pour $\theta^\nu \ll |\mathbf{p}| \ll \mu$; donc

$$\theta^\nu \ll \lambda |\mathbf{p}| \ll \mu \quad \Gamma_n^R(\lambda \mathbf{p}; \theta, g, \mu) \sim \lambda^{d-\frac{1}{2}n(d-2+\eta)} \quad (187)$$

qui est la relation entre le comportement ultraviolet de la théorie massive et celui, homogène, de la théorie de masse nulle.

Pour les fonctions avec insertions de $\frac{1}{2}\varphi^2$ on trouve de même (sauf pour $n = 0, s = 1, 2$)

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2}n\gamma_1(g) + \gamma_2(g)(s + \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) \right\} \Gamma_{n,s}^R(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \theta, g, \mu) = 0 \quad (188)$$

ce qui conduit à

$$\Gamma_{n,s}^R(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \theta, g, \mu) = \mu^{d-\frac{1}{2}n(d-2)-2s} \left(\frac{\theta}{\mu^2} \right)^{-s+\nu[d-\frac{1}{2}n(d-2+\eta)]} \times f_{n,s} \left(\frac{\mathbf{p}}{\mu} \left(\frac{\mu^2}{\theta} \right)^\nu, \frac{\mathbf{q}}{\mu} \left(\frac{\mu^2}{\theta} \right)^\nu \right) \quad (189)$$

dans la région $\theta \ll \mu^2, |\mathbf{p}|, |\mathbf{q}| \ll \mu$. Le préfacteur s'interprète aussi bien comme

$$m^{-2s} \left(\frac{m}{\mu} \right)^{s\gamma_2(g_c)} \sim \mu^{-2s} \left(\frac{\mu^2}{\theta} \right)^s$$

Pour les insertions à moment nul, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, on trouve un facteur $1/\theta$ de divergence supplémentaire par insertion, ce qui est attendu puisque cette insertion est alors équivalente à une dérivation par rapport à θ . Lorsque $\theta \rightarrow 0$, le même mécanisme de compensation des puissances de θ redonne le comportement homogène (171).

Pour la fonction de corrélation $\Gamma_{0,2}$ il faut inclure un terme additionnel au membre de droite de (188), qu'on peut écrire $\mu^{d-4}b(g)$, ce qui conduit à

$$\Gamma_{0,2}^{\text{R}}(\mathbf{q}; \theta, g, \mu) \sim \mu^{d-4} \left\{ \left(\frac{\theta}{\mu^2} \right)^{-(2-\nu d)} f_{0,2} \left(\frac{\mathbf{q}}{\mu} \left(\frac{\mu^2}{\theta} \right)^\nu \right) - \frac{\nu}{2-\nu d} b(g_c) \right\} \quad (190)$$

pour $\theta \ll \mu^2$, $|\mathbf{q}| \ll \mu$. Lorsque $\mathbf{q} \rightarrow 0$, nous obtenons la singularité de la chaleur spécifique en $\theta^{-\alpha}$ avec

$$\boxed{\alpha = 2 - \nu d} \quad (191)$$

La présence d'une constante additive dans (190) représentant le comportement de la partie régulière, assure la cohérence du résultat lorsque α est négatif. En normalisant l'énergie libre à zéro $\theta = 0$ en l'absence de champ, et en observant que $\Gamma_{0,2}^{\text{R}}(\theta) = d^2 \Gamma^{\text{R}}(\theta) / d\theta^2$, nous obtenons sa valeur dans la région critique à $\theta > 0$ sous la forme

$$\Gamma^{\text{R}}(\theta) \sim \mu^d \left[f_{0,2}(0) \frac{1}{(2-\alpha)(1-\alpha)} \left(\frac{\theta}{\mu^2} \right)^{2-\alpha} - \frac{\nu}{2\alpha} b(g_c) \left(\frac{\theta}{\mu^2} \right)^2 + C \frac{\theta}{\mu^2} \right] \quad (192)$$

où la constante C est reliée à $\Gamma_{0,1}^{\text{R}}$.

3.6 Lois d'échelle pour $T < T_c$

Si nous donnons au champ φ argument de la fonctionnelle $\Gamma(\varphi)$ une valeur uniforme M , cette dernière devient proportionnelle au volume, le coefficient de proportionnalité étant le potentiel effectif $V(M)$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}) &\rightarrow M \\ \Gamma^{\text{R}}(\varphi) &\rightarrow \int d^d \mathbf{x} V(M) \\ V(M, \theta, g, \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \Gamma_n^{\text{R}}(\mathbf{p} = \mathbf{0}; \theta, g, \mu) \end{aligned} \quad (193)$$

Le champ extérieur uniforme correspondant, sera noté H , et est égal à la dérivée de V

$$H = \frac{\partial V}{\partial M} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \Gamma_{n+1}^{\text{R}}(\mathbf{p} = \mathbf{0}; \theta, g, \mu) \quad (194)$$

La généralisation au cas d'un champ à plusieurs composantes n'offre pas de difficulté. Bornons nous pour l'instant au cas scalaire. Etablissons maintenant la forme de l'équation d'état dans la région invariante d'échelle. Nous ne supposons pas bien entendu, que θ ait un signe donné. Le nom équation d'état fait référence à une réinterprétation du modèle dans la région de

symétrie brisée en termes de la coexistence liquide–vapeur au voisinage du point critique. Tout d’abord l’analyse dimensionnelle implique que

$$[V] = d \quad [M] = \frac{1}{2}(d-2) \quad [H] = \frac{1}{2}(d+2) = 3 - \frac{1}{2}(4-d) \quad (195)$$

En répétant les étapes qui conduisent au flot de renormalisation nous avons successivement

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} \gamma_1(g) \left[1 + M \frac{\partial}{\partial M} \right] + \gamma_2(g) \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} H(M, \theta, g, \mu) = 0 \quad (196)$$

soit avec les notations (178) et compte tenu des dimensions (195)

$$\begin{aligned} H(M, \theta, g, \mu) &= \mu^{\frac{1}{2}(d+2)} H\left(\frac{M}{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}}, \frac{\theta}{\mu^2}, g, 1\right) \\ &= (\lambda \mu)^{\frac{1}{2}(d+2)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{\gamma_1(g')}{\beta(g')}\right\} H\left(\frac{M(\lambda)}{(\lambda \mu)^{\frac{1}{2}(d-2)}}, \frac{\theta(\lambda)}{\lambda^2 \mu^2}, g(\lambda), 1\right) \end{aligned} \quad (197)$$

De manière à éliminer $M(\lambda)$ choisissons λ de telle sorte que ce dernier, donné par

$$\ln \frac{M(\lambda)}{M} = -\frac{1}{2} \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{\gamma_1(g')}{\beta(g')} \quad (198)$$

satisfasse à la condition

$$\frac{M(\lambda)}{(\lambda \mu)^{\frac{1}{2}(d-2)}} = 1 \quad (199)$$

ce qui détermine implicitement λ , par l’intermédiaire de la relation

$$\ln \frac{M}{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}} = \frac{1}{2} \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{d-2 + \gamma_1(g')}{\beta(g')} \quad (200)$$

Dans le domaine critique $M/\mu^{\frac{1}{2}(d-2)} \ll 1$, et la condition (200) est satisfaite pourvu que $g(\lambda) \rightarrow g_c$ et que λ tende vers zéro comme

$$\lambda \sim \left(\frac{M}{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}}\right)^{2/(d-2+\eta)} = \left(\frac{M}{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}}\right)^{\nu/\beta} \quad (201)$$

où l’exposant β est défini par

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}\nu(d-2+\eta)} \quad (202)$$

En reportant dans (197) la relation (199), en tenant compte du fait que $g(\lambda) \rightarrow g_c$ et que d'après (201)

$$\frac{\theta(\lambda)}{\lambda^2 \mu^2} \sim \frac{\theta}{\mu^2} \lambda^{\gamma_2(g_c)-2} = \frac{\theta}{\mu^2} \lambda^{-1/\nu} = \frac{\theta}{\mu^2} \left(\frac{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}}{M} \right)^{2/(\nu(d-2+\eta))} \quad (203)$$

il vient

$$H(M, \theta, g, \mu) \sim \mu^{\frac{1}{2}(d+2)} \left(\frac{M}{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}} \right)^{(d+2-\eta)/(d-2+\eta)} f \left[\frac{\theta}{\mu^2} \left(\frac{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}}{M} \right)^{2/(\nu(d-2+\eta))} \right] \quad (204)$$

Soit, en choisissant $\mu = 1$,

$$\frac{H}{M^\delta} = f\left(\frac{\theta}{M^{1/\beta}}\right) \quad (205)$$

où

$$\boxed{\delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta}} \quad (206)$$

Nous retrouvons les relations entre exposants, discutées au chapitre précédent.

A θ positif H est analytique et impair en M (ou vice versa), ceci impose le comportement de $f(x)$ à x grand dans (205)

$$f(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{p=0}^{\infty} f_p x^{\beta\delta - \beta(2p+1)} = \sum_{p=0}^{\infty} f_p x^{\gamma - 2p\beta} \quad (207)$$

où l'on a remarqué que $\beta(\delta - 1) = \nu(2 - \eta) = \gamma$. A θ petit mais M fini, H reste analytique en θ pourvu que M soit non nul, ce qui entraîne que $f(x)$ soit régulière autour de l'origine.

L'équation d'état (205) contient en particulier l'aimantation spontanée. Il suffit pour cela de faire tendre H vers zéro. Dans ces conditions l'équation $f(x) = 0$ doit avoir une solution pour x négatif, $x = -x_0$, correspondant bien sûr à des valeurs négatives de θ , $-x_0 = \theta/M^{1/\beta}$; d'où l'aimantation spontanée

$$M_{\text{sp}} = \mu^{\frac{1}{2}(d-2)} \left(-x_0 \frac{\theta}{\mu^2} \right)^\beta \quad (208)$$

et on retrouve l'interprétation habituelle de l'exposant β .

Dans le cas d'un champ à plusieurs composantes, les corrélations au-dessous de T_c diffèrent selon la nature transverse ou longitudinale. Commençons par le cas scalaire où seule une symétrie discrète est brisée, et de ce fait le théorème de Goldstone ne joue pas.

A aimantation M donnée, les corrélations

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{\text{R}}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n; \theta, M, g, \mu) &= \\ &= \int \prod_1^n (e^{i\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{x}_k} d^d \mathbf{x}_k) \frac{\delta^n}{\delta\varphi(\mathbf{x}_1) \dots \delta\varphi(\mathbf{x}_n)} \Gamma^{\text{R}}(\varphi; \theta, g, \mu) \Big|_{\varphi(\mathbf{x})=M} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \Gamma_{n+k}^{\text{R}}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}; g, \theta, \mu) \end{aligned} \quad (209)$$

satisfont à

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} \gamma_1(g) \left[n + M \frac{\partial}{\partial M} \right] + \gamma_2(g) \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \Gamma_n^{\text{R}}(\mathbf{p}; \theta, M, g, \mu) = 0 \quad (210)$$

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{\text{R}}(\mathbf{p}; \theta, M, g, \mu) &= (\lambda \mu)^{d - \frac{1}{2}n(d-2)} \left[\exp -\frac{1}{2}n \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{\gamma_1(g')}{\beta(g')} \right] \\ &\times \Gamma_n^{\text{R}}\left(\frac{\mathbf{p}}{\lambda \mu}; \frac{\theta(\lambda)}{\lambda^2 \mu^2}, \frac{M(\lambda)}{(\lambda \mu)^{\frac{1}{2}(d-2)}}, g(\lambda), 1 \right) \end{aligned} \quad (211)$$

En choisissant encore λ par la condition (199) et en considérant le domaine critique $M \ll \mu^2$ ce qui force $\lambda \rightarrow 0$ et $g(\lambda) \rightarrow g_c$, on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{\text{R}}(\mathbf{p}; \theta, M, g, \mu) &\sim \mu^{d - \frac{1}{2}n(d-2)} \left(\frac{M}{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}} \right)^{[2d/(d-2+\eta)]-n} \\ &\times f_n \left(\frac{\mathbf{p}}{\mu} \left(\frac{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}}{M} \right)^{\nu/\beta}, \frac{\theta}{\mu^2} \left(\frac{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}}{M} \right)^{1/\beta} \right) \end{aligned} \quad (212)$$

$$|\mathbf{p}| \ll \mu, \quad \theta \ll \mu^2, \quad M \ll \mu^{\frac{1}{2}(d-2)}$$

On note que Γ_n^R est régulier en M pour $\theta > 0$ et en θ pour $M \neq 0$.

Les fonctions de vertex pour $M \neq 0$ sont les transformées de Legendre des fonctions de Green connexes, qui dans le cas présent comprennent la soustraction de la fonction à un point, c'est-à-dire M . A $\theta < 0$, lorsque le champ extérieur tend vers zéro, $M \rightarrow M_{sp}$. En faisant $\mu = 1$, on trouve donc dans le domaine critique

$$\Gamma_n^R(\mathbf{p}; \theta, M_{sp}) \sim (-\theta)^{\nu[d - \frac{1}{2}n(d-2+\eta)]} f_n((-\theta)^{-\nu} \mathbf{p}) \quad (213)$$

La structure est la même que pour $\theta > 0$ (cf. (185)) mais ici n n'est pas contraint à être pair. En particulier pour $\theta < 0$ la longueur de corrélation diverge comme

$$\xi \sim (-\theta)^{-\nu'} \quad \text{avec } \nu' = \nu \quad (214)$$

l'exposant ν' étant égal à la même valeur qu'au dessus de la température critique. De même en faisant $n = 2$ et $\mathbf{p} \rightarrow 0$, la susceptibilité diverge comme

$$\chi \sim (-\theta)^{-\gamma'} \quad \text{avec } \gamma' = \gamma = \nu(2 - \eta) \quad (215)$$

avec le même exposant qu'au dessus de T_c . En généralisant ces résultats aux dérivées par rapport à θ , on trouve encore que la divergence de la chaleur spécifique

$$\Gamma_{0,2}^R(\mathbf{q} = \mathbf{0}; \theta, M_{sp}) \sim (-\theta)^{-\alpha'} \quad \text{avec } \alpha' = \alpha = 2 - \nu d \quad (216)$$

est encore caractérisée par le même exposant au-dessous et au-dessus de T_c .

Dans le cas d'un modèle à plusieurs composantes, il faut distinguer celles qui sont transverses ou longitudinales, relativement au champ extérieur ou à l'aimantation. Lorsqu'il y a symétrie selon un groupe, $O(n)$ par exemple, les fonctionnelles $F(\mathbf{H})$ ou $\Gamma(\mathbf{M})$ restent invariantes.

En présence d'un champ uniforme, notons $H = |\mathbf{H}|$ et $M = |\mathbf{M}|$ les grandeurs du champ et de l'aimantation. Le potentiel effectif n'est fonction que de H et donc \mathbf{M} est parallèle au champ appliqué

$$H_a = \frac{M_a}{M} \frac{dV}{dM} \quad H = \frac{dV}{dM} \quad (217)$$

La susceptibilité et son inverse sont matricielles

$$\begin{aligned} \chi_{ab}^{-1} &= \frac{\partial H_a}{\partial M_b} = \frac{M_a M_b}{M^2} \chi_l^{-1} + \left(\delta_{ab} - \frac{M_a M_b}{M^2} \right) \chi_t^{-1} \\ \chi_l^{-1} &= \frac{d^2 V}{dM^2} \\ \chi_t^{-1} &= \frac{1}{M} \frac{dV}{dM} = \frac{H}{M} \end{aligned} \quad (218)$$

Au-dessous du point critique ($\theta < 0$) lorsque $H \rightarrow 0$, $M \rightarrow M_{sp}$ et χ_t^{-1} s'annule. C'est la manifestation du théorème de Goldstone : la susceptibilité transverse est infinie dans la phase ordonnée d'un système à symétrie continue. Nous savons que ceci correspond à l'existence de modes mous, de coût énergétique quasi nul, lorsqu'ils représentent sur de larges parties de l'échantillon l'effet d'une pure transformation du groupe de symétrie interne.

4. Corrections aux lois d'échelle

La discussion des corrélations ne se limite pas aux lois d'échelle des comportements dominants. En physique des particules, après prolongement analytique dans la région de Minkowski les fonctions de Green décrivent les états liés, les amplitudes de diffusion... et tous les processus d'interaction des particules correspondantes. Nous ne voulons pas entreprendre cette discussion ici. En revanche, pour les besoins de la mécanique statistique, il est intéressant de connaître les premières corrections aux lois d'échelle. Ces dernières proviennent tant des opérateurs marginaux, déviation au point critique, que des contributions des termes inessentiels. Examinons ces points tour à tour.

4.1 Déviation au point critique

Revenant aux équations du flot de renormalisation, par exemple (210), on voit dans le cadre du modèle φ^4 où l'on néglige les opérateurs inessentiels, que les fonctions de corrélation sont homogènes à $g = g_c$, quelque soit le paramètre auxiliaire de normalisation μ . Posons nous la question de l'effet d'une légère déviation de g à g_c . Cet effet peut se décomposer en deux facteurs. Le premier peut être absorbé dans un changement de normalisation des corrélations à g_c , le second représentant l'essentiel de l'effet étudié.

Pour aboutir à cette décomposition définissons

$$\begin{aligned} M(g) &= M \exp \frac{1}{2} \int_{g_c}^g dg' \frac{\gamma_1(g') - \gamma_1(g_c)}{\beta(g')} \\ \theta(g) &= \theta \exp - \int_{g_c}^g dg' \frac{\gamma_2(g') - \gamma_2(g_c)}{\beta(g')} \end{aligned} \quad (219)$$

Ecrivons alors

$$\begin{aligned} \Gamma_n(\mathbf{p}; M, \theta, g, \mu) &= \Gamma_n(\mathbf{p}; M(g), \theta(g), g_c, \mu) \\ &\times \exp \left\{ \frac{1}{2} n \int_{g_c}^g dg' \frac{\gamma_1(g') - \gamma_1(g_c)}{\beta(g')} \right\} D_n(\mathbf{p}; M(g), \theta(g), g, \mu) \end{aligned} \quad (220)$$

avec

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{1}{2} \gamma_1(g_c)(n + M \frac{\partial}{\partial M}) + \gamma_2(g_c) \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \Gamma_n(\mathbf{p}; M, \theta, g_c, \mu) = 0 \quad (221)$$

$$\begin{cases} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \frac{1}{2} \gamma_1(g_c) M \frac{\partial}{\partial M} + \gamma_2(g_c) \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} D_n(\mathbf{p}; M, \theta, g, \mu) = 0 \\ D_n(\mathbf{p}; M, \theta, g_c, \mu) = 1 \end{cases} \quad (222)$$

La transformation (220) a été choisie de telle sorte que la seule référence à g apparaisse dans l'équation pour D_n sous la forme $\beta(g)\partial/\partial g$. En outre n n'apparaît pas explicitement dans cette équation. La fonction D_n est normalisée à l'unité pour $g = g_c$; elle est bien évidemment sans dimension

$$D_n \equiv D_n \left(\frac{\mathbf{p}}{\mu}; \frac{M}{\mu^{\frac{1}{2}(d-2)}}, \frac{\theta}{\mu^2}, g, 1 \right) \quad (223)$$

et la solution de l'équation (222) s'écrit

$$\begin{aligned} D_n(\mathbf{p}; M, \theta, g, \mu) &= D_n(\mathbf{p}; M \lambda^{-\frac{1}{2}\gamma_1(g_c)}, \theta \lambda^{\gamma_2(g_c)}, g(\lambda), \lambda \mu) \\ &= D_n \left(\frac{\mathbf{p}}{\lambda}; M \lambda^{-\frac{1}{2}\gamma_1(g_c) - \frac{1}{2}(d-2)}, \theta \lambda^{\gamma_2(g_c) - 2}, g(\lambda), \mu \right) \end{aligned} \quad (224)$$

où

$$\ln \lambda = \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')} \quad (225)$$

Choisissons alors le facteur λ tel que

$$1 = |\theta| \lambda^{\gamma_2(g_c) - 2} = |\theta| \lambda^{-1/\nu} \quad (226)$$

Les relations précédentes s'écrivent

$$\begin{aligned} D_n(\mathbf{p}; \theta, M, g, \mu = 1) &= D_n \left(\frac{\mathbf{p}}{|\theta|^\nu}; \frac{M}{|\theta|^\beta}, g(|\theta|^\nu), 1 \right) \\ \nu \ln |\theta| &= \int_g^{g(|\theta|^\nu)} \frac{dg'}{\beta(g')} \end{aligned} \quad (227)$$

Au voisinage de g_c nous supposons la fonction $\beta(g)$ linéaire

$$\beta(g) \simeq \omega(g - g_c) + \mathcal{O}((g - g_c)^2) \quad (228)$$

Pour des valeurs de g voisines de g_c et θ suffisamment petit, $g(|\theta|^\nu)$ est aussi voisin de g_c . On tire en effet de (227) à l'approximation linéaire de β

$$|\theta|^{\nu\omega} = \frac{g_c - g(|\theta|^\nu)}{g_c - g} + \dots \quad (229)$$

et nous obtenons donc les corrections essentielles D_n sous la forme

$$D_n(\mathbf{p}; \theta, M, g, 1) \simeq 1 + (g - g_c) |\theta|^{\nu\omega} d_n \left(\frac{\mathbf{p}}{|\theta|^\nu}, \frac{M}{|\theta|^\beta} \right) \quad (230)$$

L'exposant

$$\boxed{\omega = \beta'(g_c) > 0} \quad (231)$$

caractérise donc les déviations à $g = g_c$ indépendamment de la fonction de Green considérée. Comme l'indique l'équation (220) cet effet s'accompagne d'un changement de normalisation des fonctions de corrélation à g_c .

On a choisi en (226) d'exprimer les déviations au point critique en fonction de la quantité physique température, mais on peut tout aussi bien utiliser les moments, ou l'aimantation. Les corrections correspondantes sont

$$\begin{aligned} &\text{pour } |\theta| \text{ en } |\theta|^{\omega\nu} \\ &\text{pour } |\mathbf{p}| \text{ en } |\mathbf{p}|^\omega \\ &\text{pour } M \text{ en } M^{\omega\nu/\beta} \end{aligned} \quad (232)$$

Calcul de l'exposant ω à l'ordre $\varepsilon = 4 - d$. A cet ordre $\beta = \varepsilon(-1 + g/g_c)$ où g_c est d'ordre ε , donc $\beta'(g_c) = \varepsilon$

$$\omega = \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (233)$$

Lorsque $d \rightarrow 4$, il y a donc confluence des corrections avec le terme dominant.

4.2 Corrections logarithmiques en dimension quatre

En dimension marginale quatre le point fixe stable infrarouge g_c se confond avec le point fixe ultraviolet à l'origine, et la théorie invariante d'échelle est le modèle gaussien, à des corrections logarithmiques près. Ces dernières jouent alors un rôle important pour caractériser le comportement critique. L'équation d'état (197) s'écrit alors

$$H(M, \theta, g, \mu) = (\lambda\mu)^3 \left[\exp -\frac{1}{2} \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{\gamma_1(g')}{\beta(g')} \right] H \left(1, \frac{\theta(\lambda)}{\lambda^2 \mu^2}, g(\lambda), 1 \right) \quad (234)$$

avec

$$\lambda = \frac{M}{\mu} \exp -\frac{1}{2} \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{\gamma_1(g')}{\beta(g')} \quad (235)$$

et bien entendu $g(\lambda)$ et $\theta(\lambda)$ définis par

$$\begin{aligned} \ln \lambda &= \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')} \\ \ln \frac{\theta(\lambda)}{\theta} &= \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{\gamma_2(g')}{\beta(g')} \end{aligned} \quad (236)$$

Dans le domaine critique $M \ll \mu^2$, λ tend vers zéro. On a vu que la fonction $\beta(g)$ est alors donnée par (cf. (115))

$$\beta(g) = \frac{n+8}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} + \dots \quad (237)$$

de sorte que

$$\frac{g(\lambda)}{(4\pi)^2} \sim \frac{3}{n+8} \frac{1}{(-\ln \lambda)} \quad (238)$$

expression typique de la liberté asymptotique infrarouge. Dans l'exponentielle de (235) $\gamma_1(g')$ est d'ordre g'^2 et l'intégrale est finie, c'est dire que M est d'ordre λ . Enfin, puisque

$$\gamma_2(g) = \frac{n+2}{8} \frac{g}{(4\pi)^2} + \dots \quad (239)$$

$$\frac{\theta(\lambda)}{\theta} \sim \text{Cst} (-\ln \lambda)^{-(n+2)/(n+8)} \sim \text{Cst} \left(\ln \frac{\mu}{M} \right)^{-(n+2)/(n+8)} \quad (240)$$

En reportant dans (234)

$$\begin{aligned} H(M, \theta, g, \mu = 1) &\simeq M^3 \times \\ &\times H \left(1, \text{Cst} \frac{\theta}{M^2} (-\ln M)^{-(n+2)/(n+8)}, \frac{3}{n+8} \frac{(4\pi)^2}{(-\ln M)}, 1 \right) \end{aligned} \quad (241)$$

Comme $g(\lambda)$ tend vers zéro, la dépendance du membre de droite dans cette variable peut être calculée perturbativement. A l'ordre dominant

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{1}{2} \theta M^2 + \frac{g}{4!} M^4 + \dots \\ H &= \theta M + \frac{1}{6} g M^3 + \dots \end{aligned}$$

Ainsi d'après (241), avec A une constante,

$$\begin{aligned}
 H(M, \theta, g, \mu = 1) \simeq M^3 \left\{ A \frac{\theta}{M^2} (-\ln M)^{-(n+2)/(n+8)} - \frac{(4\pi)^2}{2(n+8) \ln M} \right\} \\
 \times \left\{ 1 + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\ln M} \right) \right\}
 \end{aligned}
 \tag{242}$$

où les corrections proviennent du terme d'ordre relatif $g(\lambda)$.

A la température critique nous tirons donc de cette relation

$$\boxed{H \simeq \frac{M^3}{-\ln M}}
 \tag{243}$$

L'exposant δ à donc sa valeur de champ moyen $\delta = 3$, mais il y a une correction logarithmique. Tout se passe comme si dans l'expression de champ moyen $\frac{1}{6}gM^3$ on remplaçait g par sa valeur courante $g(\lambda) \simeq g(M) \sim -1/\ln M$.

Pour $T < T_c$, l'aimantation spontanée s'obtient en annulant H

$$\boxed{M \simeq \sqrt{-\theta} (-\ln -\theta)^{3/(n+8)}}
 \tag{244}$$

avec des corrections logarithmiques, dépendant de n , à l'exposant $\beta = \frac{1}{2}$ du champ moyen.

En champ nul, pour $|\theta| \neq 0$ la susceptibilité (longitudinale lorsque $n \geq 2$ et $\theta < 0$) déduite de (242), s'écrit

$$\boxed{\chi = |\theta|^{-1} (-\ln |\theta|)^{(n+2)/(n+8)}}
 \tag{245}$$

avec γ tendant vers -1, aux corrections logarithmiques près.

Pour étudier la chaleur spécifique nous écrivons pour la fonction $\Gamma_{0,2}^R$ de dimension nulle

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_2(g) \left[2 + \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \right\} \Gamma_{0,2}^R = b(g)
 \tag{246}$$

où $b(g)$ tend vers une constante finie b_0 à $g = 0$. En intégrant

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{0,2}^R(\mathbf{q}; \theta, g, \mu) = & \left[\exp 2 \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{\gamma_2(g')}{\beta(g')} \right] \Gamma_{0,2}^R(\mathbf{q}; \theta(\lambda), g(\lambda), \lambda \mu) \\
 & - \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')} b(g') \exp 2 \int_g^{g'} dg'' \frac{\gamma_2(g'')}{\beta(g'')}
 \end{aligned}
 \tag{247}$$

Plaçons nous à moment nul, et utilisons le fait que $\Gamma_{0,2}^R$ est sans dimension. Il vient

$$\Gamma_{0,2}^R(0; \theta, g, \mu = 1) = \left[\exp 2 \int_g^{g(\lambda)} dg' \frac{\gamma_2(g')}{\beta(g')} \right] \Gamma_{0,2}^R \left(\mathbf{0}; \frac{\theta(\lambda)}{\lambda^2}, g(\lambda), 1 \right) - \int_g^{g(\lambda)} \frac{dg'}{\beta(g')} b(g') \exp 2 \int_g^{g'} dg'' \frac{\gamma_2(g'')}{\beta(g'')} \quad (248)$$

Fixons $\lambda \rightarrow 0$ par la condition $|\theta(\lambda)| = \lambda^2$, soit

$$\lambda^2 \simeq |\theta| \left(\frac{g(\lambda)}{g} \right)^{(n+2)/(n+8)} \quad (249)$$

Comme

$$g(\lambda) \simeq \frac{\text{Cst}}{\ln \lambda} \quad (250)$$

la contribution dominante dans (248) est fournie par le terme inhomogène, et

$$\Gamma_{0,2}^R \simeq \frac{\text{Cst}}{(-\ln |\theta|)^{(n-4)/(n+8)}} + \text{Cst} \quad (251)$$

avec une correction relative au comportement singulier en $1/\ln 1/|\theta|$.

Encore une fois nous constatons l'accord de ces résultats avec ceux obtenus au chapitre III pour la limite $n \rightarrow \infty$. On notera un changement de comportement de la chaleur spécifique pour $n = 4$ avec une véritable divergence logarithmique pour $n < 4$. Par exemple pour $n = 1$, la chaleur spécifique diverge comme $(-\ln |\theta|)^{1/3}$.

Revenons encore sur le paradoxe que représente la théorie φ^4 à quatre dimensions, où la théorie renormalisée est libre puisque l'intervalle $[0, g_c]$ s'est réduit à zéro. Pour donner un sens aux résultats précédents nous avons déjà remarqué qu'il faudrait en fait conserver un facteur de coupure Λ très grand de sorte que l'intervalle en question au lieu d'être strictement nul soit d'ordre $1/\ln \Lambda$.

4.3 Opérateurs inessentiels

Discutons maintenant l'effet de termes locaux de degré plus élevés dans le champ et/ou ses dérivées, dont la présence dans le lagrangien sera la conséquence inévitable d'une régularisation. Au voisinage de quatre dimensions ces termes ont des coefficients proportionnels à une puissance négative de Λ , ce qui a suggéré de les négliger dans une première approche. Observons

tout d'abord qu'il n'est pas question ici d'aborder en détail la situation en dimension plus basse ou un de ces opérateurs deviendrait marginal ou essentiel (par exemple φ^6 dont la constante de couplage devient sans dimension à $d = 3$). On aurait alors à discuter un diagramme de phase plus riche. Par exemple dans le cas mentionné ci-dessus le diagramme devient tridimensionnel avec passage possible le long d'une ligne d'une transition du second au premier ordre (phénomène dit tricritique, cf. appendice A).

Nous voulons estimer perturbativement l'effet de ces opérateurs inessentiels en tenant compte des effets de renormalisation, à la fois ceux qu'ils induisent sur les quantités déjà discutées (déplacement du point critique par exemple) et de ceux qui modifient éventuellement leur comptage de puissance canonique. Examinons un opérateur en $\partial^{n_2}\varphi^{n_1}$ symboliquement. Sa dimension canonique est $n_1(d - 2/2) + n_2$ et le coefficient correspondant du lagrangien sera

$$\begin{aligned} g(\mathcal{O}_i) &\sim \Lambda^{-\delta_i} \\ \delta_i &= \frac{1}{2}n_1(d - 2) + n_2 - d \end{aligned} \quad (252)$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} \delta_{\varphi^6} &= 2d - 6 \\ \delta_{\varphi^2(\partial\varphi)^2} &= d - 2 \end{aligned} \quad (253)$$

Malgré l'estimation naïve qui voudrait que les opérateurs tels que $\delta_i > 0$ soient négligeables, on se rend cependant compte que leur insertion dans les fonctions de Green entraîne l'apparition de divergences supplémentaires et corrélativement il nous faut analyser avec quelque précaution leur effet. Ainsi notons nous que l'opérateur φ^4 correspond à $\delta = 4 - d$ et nous avons vu le rôle essentiel qu'il joue au voisinage de quatre dimensions. Puisque les $g(\mathcal{O}_i)$ sont a priori petits, nous estimons l'effet des insertions perturbativement. Nous raisonnerons au premier ordre.

En ce qui concerne les opérateurs tels que δ soit négatif, nous avons déjà étudié en détail le cas de φ^2 ($\delta = -2$) qui engendrait en dimension quatre des divergences logarithmiques.

Envisageons l'insertion d'opérateurs de dimension canonique supérieure pour $d = 4$. Il faudra ensuite prolonger les estimations par un développement en ε . L'insertion au premier ordre de φ^4 correspond à une déviation de la constante de couplage. Les fonctions de vertex Γ_{2,φ^4} et Γ_{4,φ^4} sont respectivement quadratiquement et logarithmiquement divergentes. La divergence logarithmique de la fonction à quatre points est justiciable d'une renormalisation multiplicative mais celle de la fonction à deux points exige de nouvelles soustractions. On a

$$\Gamma_{2,\varphi^4}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q})_\Lambda = a_1(\Lambda) + a_2(\Lambda)(\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2) + a_3(\Lambda)\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \text{fini} \quad (254)$$

où a_1 est quadratique et a_2 et a_3 logarithmiques en Λ . Puisque Γ_{2,φ^2} a une divergence logarithmique, elle aussi indépendante des moments, on peut former une combinaison de φ^4 et de φ^2 qui élimine la partie singulière de la quantité a_1 . En combinant encore avec les opérateurs $\varphi(\Delta\varphi)$ et $(\partial\varphi)^2$, on éliminera aussi les parties divergentes de a_2 et a_3 . On arrive ainsi à l'idée qu'il faut former des combinaisons linéaires d'opérateurs de même dimension ou de dimension inférieure pour obtenir des quantités renormalisées finies. Il faut en outre évidemment préciser les conditions de normalisation. Dans l'exemple des opérateurs de dimension quatre (à $d = 4$) si nous notons les trois insertions

$$\mathcal{O}_1 = \varphi^4, \quad \mathcal{O}_2 = \varphi(\Delta\varphi), \quad \mathcal{O}_3 = (\partial\varphi)^2$$

on écrira les fonctions renormalisées

$$\Gamma_{n,\mathcal{O}_i}^R = Z_1^{\frac{1}{2}n} \left[\sum_j z_{ij} \Gamma_{n,\mathcal{O}_j} + z_i \Gamma_{n,\frac{1}{2}\varphi^2} \right] \quad (255)$$

où figurent douze nouvelles constantes z_{ij} et z_i ($i, j = 1, 2, 3$). Il faut donc douze conditions, par exemple

$$\begin{aligned} \Gamma_{4,\varphi^4}^R(\mathbf{0}) &= 4! & \Gamma_{2,\varphi^4}^R(\mathbf{p}) &= \mathcal{O}(\mathbf{p}^4) \\ \Gamma_{4,\varphi(\Delta\varphi)}^R(\mathbf{0}) &= 0 & \Gamma_{2,\varphi(\Delta\varphi)}^R(\mathbf{p}) &= \mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4) \\ \Gamma_{4,(\partial\varphi)^2}^R(\mathbf{0}) &= 0 & \Gamma_{2,(\partial\varphi)^2}^R(\mathbf{p}) &= 2\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathcal{O}(\mathbf{p}^4) \end{aligned} \quad (256)$$

où chaque fonction $\Gamma_{2,\mathcal{O}_i}^R$ satisfait à trois conditions au voisinage de $\mathbf{p} = \mathbf{0}$.

L'exemple des opérateurs de dimension quatre se généralise à celui d'opérateurs de dimension plus élevée. L'insertion d'un opérateur renormalisé est une combinaison linéaire d'opérateurs de même dimension ou de dimension inférieure dans la théorie nue. Les restrictions à ce raisonnement proviennent des symétries ou des relations découlant des équations du mouvement. En ce qui concerne les premières, il est clair que si la régularisation préserve une symétrie, les combinaisons autorisés ne mettent en jeu que des quantités qui ont le même comportement. Pour les secondes on se souvient que les fonctions de Green obéissent à des relations qui sont conséquences de la structure du lagrangien.

Au premier ordre l'introduction dans l'action de termes locaux supplémentaires, nécessite l'évaluation des insertions correspondantes à moment nul dans les fonctions de corrélations. Nous venons de voir que l'opérateur \mathcal{O}_i renormalisé est couplé à tous les \mathcal{O}_j nus de degré inférieur ou égal et en particulier à $\frac{1}{2}\varphi^2$ de degré -2 . En conséquence son insertion entraîne, comme on peut s'y attendre, un déplacement de la température critique. Pour compenser cet effet, il est commode de soustraire à \mathcal{O}_i un terme proportionnel à $\frac{1}{2}\varphi^2$, définissant ainsi

$$\hat{O}_i = O_i - \frac{1}{2}a_i\varphi^2 \quad (257)$$

avec a_i choisi de telle sorte que le développement de l'opérateur renormalisé ne contienne plus de contribution de $\frac{1}{2}\varphi^2$.

L'avantage de cette procédure est, en outre, de supprimer les divergences infrarouges supplémentaires qui correspondraient au déplacement perturbatif de la température critique. De plus il est commode, et nous le sous entendons, d'inclure dans O_i (et \hat{O}_i) le facteur dimensionnel $\Lambda^{-\delta_i}$ qui assure que le couplage correspondant est sans dimension. Cette modification affecte aussi g_0 (couplé à φ^4) en dimension $d < 4$.

Dans ces conditions nous pouvons écrire pour les insertions à moment nul de la théorie critique

$$\Gamma_{n,\hat{O}_i}^R(\mathbf{p}; g, \mu) = Z_1^{n/2}(g_0, \Lambda/\mu) \sum_j (\Lambda/\mu)^{\delta_j} z_{ij}(g_0, \Lambda/\mu) \Gamma_{n,\hat{O}_j}(\mathbf{p}; g_0, \Lambda) \quad (258)$$

où la somme sur j porte sur les opérateurs de degré inférieur ou égal à δ_i , à l'exclusion de $\frac{1}{2}\varphi^2$. Les quantités z_{ij} ne contiennent que des divergences logarithmiques à quatre dimensions.

Au prix d'une redéfinition éventuelle de ses coefficients, nous pouvons écrire une équation de flot de renormalisation pour les fonctions de vertex nues, en exprimant à l'aide de relations du type (258) que ces dernières sont indépendantes du facteur de coupure Λ , avec pour résultat à Λ grand

$$\left\{ \left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} - \frac{1}{2}n\gamma_1(g_0) \right] \delta_{ij} - \gamma_{ij}(g_0) \right\} \Gamma_{n,\hat{O}_i}(\mathbf{p}; g_0, \Lambda) = 0 \quad (259)$$

$$\gamma_{ij}(g_0) = \{z^{-1}\}_{ik} \left[\delta_k + \Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \right] z_{kj}$$

A moment petit, l'intégration de cette équation va engendrer des puissances supplémentaires de \mathbf{p}/Λ , par comparaison aux fonctions sans insertions.

Si η_a désignent les valeurs propres de la matrice γ_{ij} (qui a une structure triangulaire par blocs) on trouve ainsi

$$\Gamma_{n,\hat{O}_i}(\lambda\mathbf{p}; g_0, \Lambda) \underset{\lambda \rightarrow 0}{\sim} \lambda^{d - \frac{1}{2}n(d-2+\eta)} \sum_a C_{ia} \lambda^{\eta_a} \quad (260)$$

D'après la relation (252) les valeurs propres η_a sont de la forme

$$\eta_a = \delta_a + \mathcal{O}(4-d) \quad (261)$$

La structure triangulaire par blocs de z_{ij} a pour conséquence qu'en augmentant le degré δ_i de l'opérateur étudié, on retrouve les valeurs η_a déjà

obtenues, auxquelles viennent s'ajouter de nouvelles valeurs propres proches du degré de l'opérateur inséré. Comme $\frac{1}{2}\varphi^2$ a été éliminé, les plus faibles des valeurs propres η_a , qui sont dominantes dans l'estimation (260), correspondent aux opérateurs φ^4 et $(\partial\varphi)^2$ insérés à moment nul (dans ces conditions les opérateurs $\varphi(-\Delta\varphi)$ et $(\partial\varphi)^2$ sont équivalents). Ces opérateurs sont marginaux à quatre dimensions. Ils ont pour effet de déplacer la constante de couplage et de renormaliser le champ. La valeur propre correspondante n'est autre que l'exposant ω (voir (231)) et la correction correspondante est en $(|p|/\Lambda)^\omega$.

En résumé l'effet des termes de degré plus élevé dans le lagrangien est d'apporter des corrections aux lois d'échelle de degré de plus en plus élevé. La contribution sous dominante la plus importante correspond à l'exposant ω , directement calculable dans le cadre de la théorie φ^4 . Ceci justifie a posteriori la troncature du lagrangien utilisé.

5. Résultats numériques

Il n'est pas question de présenter ici le détail des évaluations perturbatives des quantités critiques. A cette fin, le lecteur pourra se reporter aux références citées à la fin de ce chapitre. Nous nous bornerons à reproduire quelques résultats de séries. Leur traitement numérique pose une question essentielle sur le plan pratique. Dans cette direction, des progrès importants ont été accomplis, lorsqu'on a réalisé qu'il s'agissait de séries asymptotiques divergentes et que leur comportement à un ordre élevé pouvait être analysé par des méthodes de col. L'idée initiale est due à Dyson dans le contexte de l'électrodynamique. Lipatov et d'autres ont contribué à éclaircir le comportement aux grands ordres. Cette information permet de tirer le meilleur parti de séries assez courtes. La stabilité des estimations ainsi obtenues est amplement discutée dans les travaux cités.

Comme nous l'avons vu deux méthodes sont utilisées. Nous exposerons d'abord quelques résultats du développement en ε de Wilson et Fisher. Nous les comparerons ensuite au calcul en dimension fixe

5.1 Développement en ε

En poursuivant les calculs esquissés dans la section 3, Wilson, Brézin, Le Guillou et Zinn-Justin, Nickel et d'autres obtiennent les séries suivantes

$$\eta = \gamma_1(g_c) = \frac{n+2}{2(n+8)^2} \varepsilon^2 + \frac{n+2}{8(n+8)^4} [24(3n+14) - (n+8)^2] \varepsilon^3 + \frac{n+2}{2(n+8)^6} \left[-\frac{5}{16} n^4 - \frac{115}{8} n^3 + \frac{281}{4} n^2 + 1120n + 2884 - 24(n+8)(5n+22)\zeta(3) \right] \varepsilon^4 + \mathcal{O}(\varepsilon^5) \quad (262)$$

$$2 - \nu^{-1} = \gamma_2(g_c) = \frac{n+2}{n+8}\varepsilon + \frac{n+2}{2(n+8)^3}(13n+44)\varepsilon^2 + \frac{n+2}{(n+8)^4} \left[36 \frac{(3n+14)(n+3)}{n+8} - \frac{3n^2 + 388n + 848}{8} - 12(5n+22)\zeta(3) \right] \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (263)$$

avec

$$\zeta(3) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^3} = 1.20206\dots \quad (264)$$

La relation $\gamma = \nu(2 - \eta)$ fournit alors

$$\gamma = 1 + \frac{n+2}{2(n+8)}\varepsilon + \frac{(n+2)(n^2 + 22n + 52)}{4(n+8)^3}\varepsilon^2 + \frac{n+2}{(n+8)^5} \left[\frac{n^4}{8} + \frac{11n^3}{3} + 83n^2 + 312n + 388 - 6(n+8)(5n+22)\zeta(3) \right] \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (265)$$

L'exposant ω des corrections au comportement invariant d'échelle dominant, défini par l'équation (231) est donné par

$$\omega = \beta'(g_c) = \varepsilon - \frac{3(3n+14)}{(n+8)^2}\varepsilon^2 + \frac{1}{(n+8)^3} \left[\frac{33n^2}{4} + \frac{461n}{2} + 740 + 24(5n+22)\zeta(3) - 18 \frac{(3n+14)^2}{n+8} \right] \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (266)$$

Si on exprime les corrections en termes de l'écart θ à la température critique, l'exposant correspondant est $\omega\nu$ (cf. (232)), avec

$$\omega\nu = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{n^2 - 8n - 68}{4(n+8)^2}\varepsilon^2 + \frac{1}{8(n+8)^3} \left[(n+2)(n+3)(n+20) - 72 \frac{(3n+14)^2}{n+8} + 15n^2 + 802n + 2792 + 96(5n+22)\zeta(3) \right] \varepsilon^3 + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (267)$$

La façon la plus naïve d'interpréter ces expressions à dimension donnée, trois en pratique, est d'insérer la valeur correspondante de ε et d'évaluer les contributions successives de la série (on inclut une puissance supplémentaire pour l'exposant η). Sur la table qui suit on fait apparaître ces approximations successives pour le modèle d'Ising $n = 1$. Alors qu'à l'ordre 2 les

résultats se comparent très bien à ceux des séries de haute température, on constate une détérioration à l'ordre suivant. La quatrième colonne donne des estimations utilisant la méthode de Padé-Borel, fondée sur l'estimation des grands ordres. Enfin les deux colonnes suivantes présentent les données des séries de haute température, et les résultats du groupe de renormalisation en dimension 3 directement.

	$\mathcal{O}(\varepsilon^k)$	Padé-Borel	Séries haute temp.	$d = 3$ gr. renorm.
η	0.019 0.037 0.029	(a)0.04 (b)0.0333 ± 0.0001	0.041 ± 0.01	0.031 ± 0.001
γ	1.167 1.244 1.195	(a)1.242 (b)1.235 ± 0.004	(c)1.250 ± 0.003 (d)1.245 ± 0.003	1.241 ± 0.002
ν	0.589 0.634 0.606	(a)0.632 (b)0.628 ± 0.02	(c)0.638 ± 0.002	0.630 ± 0.0015

Table I: Exposants critiques du modèle d'Ising en dimension 3. (a) J. Zinn-Justin et J.-C. Le Guillou, *Phys. Rev.* **B21** 3976 (1980). (b) G. Parisi, *J. Stat. Phys.* **23**, 49 (1980). (c) C. Domb, *Phase Transitions and Critical Phenomena*, vol. 3, C. Domb et M.S. Green eds (Academic Press, London). (d) J. Zinn-Justin, *J. Physique* **40** 969 (1979). (*) Inclusion du 4^e ordre en ε pour ν , dû à D.I. Kazakov, D.V. Tarasov et A.A. Vladimirov.

5.2 Equation d'état

De même on peut obtenir l'équation d'état dans un développement en ε . Pour cela calculons le potentiel effectif $V(\mathbf{M})$ obtenu comme fonction génératrice des diagrammes irréductibles (cf eq.(193)). Jusqu'à l'ordre d'une boucle

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{M}) = & \frac{1}{2}\theta\mathbf{M}^2 + \frac{g(\mathbf{M}^2)^2}{4!} \\
 & + \frac{1}{2} \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \text{Tr} \ln[(\mathbf{p}^2 + \theta)\delta_{ij} + \frac{1}{6}g(\mathbf{M}^2)\delta_{ij} + 2M_iM_j] \quad (268) \\
 & - \text{soustractions}
 \end{aligned}$$

La trace porte sur les indices internes. Les soustractions contiennent un polynôme $P_2(\theta)$ du second degré en θ , indépendant de \mathbf{M} (correspondant

aux divergences de $\Gamma_{0,0}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,2}$) et celles dues à la renormalisation des fonctions $\Gamma_{2,0}$, $\Gamma_{4,0}$ et $\Gamma_{2,1}$ dans la théorie de masse nulle ($\theta = 0$). En particulier, les fonctions $\Gamma_{4,0}$ et $\Gamma_{2,1}$ sont normalisées au point symétrique $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = -\mathbf{p}_i^2/3$, et nous prenons pour échelle de masse $\mu^2 = 4\mathbf{p}_i^2/3$. Dans ces conditions

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{M}) = & \frac{1}{2}\theta\mathbf{M}^2 + g\frac{(\mathbf{M}^2)^2}{4!} \\
& + \frac{1}{2} \int \frac{d^d\mathbf{p}}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\delta_{ij} + \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left(\theta + \frac{1}{6}g\mathbf{M}^2 \right) \delta_{ij} + \frac{g}{3\mathbf{p}^2} M_i M_j \right] \right. \\
& - \frac{1}{\mathbf{p}^2} \left(\theta + \frac{1}{6}g\mathbf{M}^2 \right) \delta_{ij} - \frac{g}{\mathbf{p}^2} M_i M_j \\
& \left. + \frac{1}{2\mathbf{p}^2(\mathbf{p} + \mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)^2} \left[\left(\theta + \frac{1}{6}g\mathbf{M}^2 \right) \delta_{ij} + \frac{2}{3}g \left(\theta + \frac{1}{3}g\mathbf{M}^2 \right) M_i M_j \right] \right\} \\
& + P_2(\theta)
\end{aligned} \tag{269}$$

On traite indépendamment les parties transverses et longitudinales en \mathbf{M} . En tenant compte de la soustraction quartique qui évite les divergences infrarouges, on trouve, à la limite $d \rightarrow 4$

$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{2}\theta\mathbf{M}^2 + g\frac{(\mathbf{M}^2)^2}{4!} + \\
& \frac{1}{8(4\pi)^2} \left\{ \left(\theta + \frac{1}{2}g\mathbf{M}^2 \right)^2 [2\ln(\theta + \frac{1}{2}g\mathbf{M}^2) + 1] \right. \\
& \left. + (n-1) \left(\theta + \frac{1}{6}g\mathbf{M}^2 \right) [2\ln(\theta + \frac{1}{6}g\mathbf{M}^2) + 1] \right\} + P_2(\theta)
\end{aligned} \tag{270}$$

Pour déterminer la forme de l'équation d'état on substitue à g sa valeur au point critique, cf. (118),

$$g_c = (4\pi)^2 \frac{3}{n+8} \varepsilon + \dots \tag{271}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}
H = \frac{\partial V}{\partial M} = & M \left\{ \theta + \frac{1}{6}y + \frac{3\varepsilon}{2(n+8)} \left[\left(\theta + \frac{1}{2}y \right) \ln(\theta + \frac{1}{2}y) \right. \right. \\
& \left. \left. + 1 + \frac{1}{3}(n-1) \left(\theta + \frac{1}{6}y \right) (\ln(\theta + \frac{1}{6}y) + 1) \right] + \dots \right\}
\end{aligned} \tag{272}$$

où $y = g_c\mathbf{M}^2$. On peut identifier cette expression au développement de

$$H = M^\delta f \left(\frac{\theta}{M^{1/\beta}} \right) \tag{273}$$

A l'ordre ε ,

$$\begin{aligned}\eta &= 0 + \dots \\ \nu &= \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon n + 2}{4n + 8} + \dots \\ \beta &= \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta) = \frac{1}{2} - \frac{3\varepsilon}{2(n + 8)} \\ \delta &= \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} = 3 + \varepsilon + \dots\end{aligned}\tag{274}$$

Insérons ces valeurs dans (273) et comparons à (272). En changeant l'échelle de M et θ de sorte que $f(0) = 1$ et $f(-1) = 0$, ce qui fixe l'aimantation au point critique ($M = H^{1/\delta}$) et l'aimantation spontanée $M = (-\theta)^\beta$, il vient

$$\begin{aligned}H &= M^\delta \left(1 + x + \frac{\varepsilon}{2(n + 8)} [(n - 1)(x + 1) \ln(x + 1) \right. \\ &\quad \left. + 3(x + 3) \ln(x + 3) + 6x \ln 2 - 9(x + 1) \ln 3] + \dots \right)\end{aligned}\tag{275}$$

avec

$$x = \frac{\theta}{M^{1/\beta}}$$

qui donne la fonction $f(x)$ définie en (273) à l'ordre ε . On trouvera dans les références des indications sur les calculs aux ordres plus élevés.

5.3 Rapports d'amplitudes

Il est possible de trouver, outre les exposants critiques, d'autres quantités universelles décrivant le comportement à T_c qui sont indépendantes de l'échelle arbitraire des écarts à T_c et de celle de l'aimantation ou du champ extérieur. Il en est ainsi du rapport des amplitudes de la partie singulière de la chaleur spécifique au-dessus (A_+) et au-dessous (A_-) de la température critique que nous écrivons respectivement $A_\pm(\pm\theta)^{-\alpha}$. Ce rapport est aussi celui des parties singulières de l'énergie libre en l'absence de champ. Ces quantités sont contenues dans l'expression de la fonction $f(x)$ qui intervient dans l'équation d'état (273).

Tenant compte de $2 - \alpha = \beta(1 + \delta)$ on aurait pu aussi bien écrire le potentiel effectif

$$V(M, \theta) = \theta^{2-\alpha} \varphi(x) \quad x = \frac{\theta}{M^{1/\beta}}\tag{276}$$

pourvu de demander qu'en présence d'un champ l'énergie libre soit une fonction régulière de θ à l'origine, c'est-à-dire que $x^{2-\alpha} \varphi(x)$ soit analytique à l'origine. Comme

$$\varphi'(x) = -x^{\alpha-3} f(x)\tag{277}$$

ceci suffit à déterminer φ , et, en convenant du choix d'une détermination de la phase $e^{i\pi}$ pour x négatif, détermine aussi le rapport A_+/A_- comme celui des limites de V lorsque $M \rightarrow 0$ pour $\theta > 0$, pour $M \rightarrow M_{sp} = (-\theta)^\beta$ pour θ négatif. Soit

$$\frac{A_+}{A_-} = \frac{\varphi(+\infty)}{e^{i\pi(2-\alpha)}\varphi(-1)} \quad (278)$$

En intégrant (277) pour $0 < \alpha < 1$, il vient

$$\varphi(x) = \frac{\beta}{\alpha - 2} \left\{ \int_0^x dy y^{\alpha-2} [f'(y) - f'(0)] + f'(0) \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha - 1} - x^{\alpha-2} f(x) \right\} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (279)$$

On aurait pu aussi bien revenir à l'expression (269) et y substituer g_c ainsi que les échelles adoptées pour M et θ . On trouve ainsi pour A_+/A_- l'expression

$$\frac{A_+}{A_-} = \frac{\int_0^\infty dx x^{\alpha-2} [f'(x) - f'(0)]}{\int_{-1}^0 dx (-x)^{\alpha-2} [f'(0) - f'(x)] + f'(0)/(1-\alpha)} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (280)$$

Il existe des relations analogues dans d'autres intervalles de variation de α .

A l'aide de (275) nous pouvons calculer le rapport A_+/A_- à l'ordre dominant, puisque α tend vers zéro comme $\alpha = \frac{1}{2}\varepsilon(4-n)/(n+8)$, de sorte que

$$\frac{A_+}{A_-} = \frac{1}{4}n + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad (281)$$

Un résultat plus complet à l'ordre ε^2 est

$$\frac{A_+}{A_-} = \frac{1}{4}n2^\alpha \left[1 + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2(n+8)^2} [3n^2 + 26n + 100 + \zeta(2)(4-n)(n-1) - 6\zeta(3)(5n+22) + \frac{9}{2}(4-n)I] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right] \quad (282)$$

avec

$$I = \int_0^1 dx \frac{\ln x(1-x)}{1-x(1-x)} = -2.349\dots$$

Dans le cas du champ moyen, la chaleur spécifique est discontinue au passage de T_c et le rapport A_+/A_- peut être pris égal à zéro. A la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire en quatre dimensions, le rapport A_+/A_- , qui est alors celui de la singularité en $(\ln|\theta|)^{(4-n)/(n+8)}$, est égal à la valeur finie $\frac{1}{4}n$. A trois dimensions, en prenant $\nu = 0.63$ et donc $\alpha = 0.11$ pour $n = 1$, la valeur prédite par (282) est

$$d = 3 \quad n = 1 \quad \frac{A_+}{A_-} = 0.54 \quad (283)$$

Dans le cas du modèle d'Ising, la susceptibilité χ et la longueur de corrélation sont finies au-dessous de T_c puisqu'il n'y a pas de modes de masse nulle dans la phase ordonnée. On peut donc définir un rapport χ_+/χ_- pour la susceptibilité, écrite comme

$$\chi(\theta) = \chi_{\pm} |\theta|^{-\gamma} \quad (284)$$

De l'équation d'état on tire alors

$$\frac{\chi_+}{\chi_-} = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(-1) \frac{x^\gamma}{\beta \delta f(x) - x f'(x)} \quad (285)$$

qui n'a de sens que si pour x grand ($x = \theta/M^{1/\beta}$) $f(x)$ se comporte comme $f(x)/x^\gamma$ que multiplie une série en puissance de $x^{-2\beta} = M^2/\theta^{2\beta}$.

En reportant dans (285) les résultats obtenus à l'ordre ε pour $n = 1$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \beta \delta &= \frac{3}{2} + \dots \\ \gamma &= 1 + \frac{1}{6}\varepsilon + \dots \end{aligned} \quad (286)$$

et l'expression (275) pour $f(x)$, on trouve

$$\frac{\chi_+}{\chi_-} = 2 + \varepsilon \left(1 + \frac{1}{3} \ln 2\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (287)$$

qu'on peut encore écrire

$$\frac{\chi_+}{\chi_-} = 2^{\gamma-1} \frac{\gamma}{\beta} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (288)$$

La valeur lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire 2, est celle donnée par le champ moyen.

5.4 Résultats tridimensionnels

Le traitement de la théorie critique en dimension fixe, inférieure à quatre, conduit en définitive à des résultats plus précis, bien qu'on ne dispose alors d'aucun paramètre petit. Le principe des calculs a déjà été exposé. Nous nous bornerons à citer ici les résultats obtenus par Baker, Nickel, Green et Meiron pour $d = 3$ et $n = 1$. Ces auteurs utilisent une constante de couplage normalisée de telle sorte que les deux premiers termes de développement de la nouvelle fonction β aient pour coefficients -1 et $+1$. Rappelons que $\beta(g) \frac{d}{dg}$ est invariant dans les changements de variable. D'après l'équation (115) ceci donne

$$\bar{g} = \frac{3g}{16\pi} \quad \bar{\beta}(\bar{g}) = \frac{3}{16\pi} \beta(g)$$

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
\bar{g}_c	1.421 ± 0.004	1.416 ± 0.0015	1.406 ± 0.005	1.392 ± 0.009
ω	0.794 ± 0.006	0.788 ± 0.003	0.78 ± 0.01	0.78 ± 0.02
$\eta + \nu^{-1} - 2$	-0.274 ± 0.01	-0.382 ± 0.005	-0.474 ± 0.008	-0.550 ± 0.012
ν	0.588 ± 0.001	0.630 ± 0.002	0.669 ± 0.003	0.705 ± 0.005
γ	1.161 ± 0.003	1.241 ± 0.004	1.316 ± 0.009	1.39 ± 0.01
α	0.236 ± 0.004	0.110 ± 0.008	-0.007 ± 0.009	-0.115 ± 0.015
β	0.302 ± 0.004	0.324 ± 0.006	0.346 ± 0.009	0.362 ± 0.012
$\frac{1}{2}(3\nu + \gamma)$	1.462 ± 0.004	1.566 ± 0.006	1.662 ± 0.009	1.753 ± 0.012
η	0.026 ± 0.014	0.031 ± 0.011	0.032 ± 0.015	0.031 ± 0.022
δ	4.85 ± 0.08	4.82 ± 0.06	4.81 ± 0.08	4.82 ± 0.12

Table II: Exposants critiques des modèles à symétrie $O(n)$ en dimension trois d'après Baker, Nickel, Green et Meiron, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1351 (1976), *Phys. Rev.* **B17**, 1365 (1978).

Les séries obtenues sont les suivantes

$$\begin{aligned} \bar{\beta}(\bar{g}) = & -\bar{g} + \bar{g}^2 - 0.4224965707\bar{g}^3 + 0.3510695978\bar{g}^4 \\ & - 0.3765268283\bar{g}^5 + 0.49554751\bar{g}^6 - 0.749689\bar{g}^7 + \dots \end{aligned} \quad (289)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1(\bar{g}) = & 0.0109739369\bar{g}^2 + 0.0009142223\bar{g}^3 + \\ & 0.0017962229\bar{g}^4 - 0.00065370\bar{g}^5 + 0.0013878\bar{g}^6 + \dots \end{aligned} \quad (290)$$

$$\begin{aligned} \gamma_2(\bar{g}) = & \frac{1}{3}\bar{g} - 0.0631001372\bar{g}^2 + 0.0452244754\bar{g}^3 \\ & - 0.0377233460\bar{g}^4 + 0.04374666\bar{g}^5 - 0.0589754\bar{g}^6 + \dots \end{aligned} \quad (291)$$

qui prolongent considérablement les maigres expressions (115), (116) et (117). Ce n'est pas le lieu de développer ici les méthodes de traitement de cette information pour déterminer à la valeur correspondant au zéro g_c de $\beta(g)$ les valeurs de $\gamma_1(g_c)$ et $\gamma_2(g_c)$, et engendrer ainsi les exposants critiques en suivant la section (3.2). Un ingrédient essentiel de cette analyse est l'étude du comportement asymptotique de ces séries. Les résultats sont rassemblés dans la table II.

Appendice A. Points multicritiques

Nous avons présenté une étude détaillée de la renormalisation appliquée au point critique du modèle en φ^4 . Dans ce modèle les opérateurs inessentiels n'affectent pas le comportement d'échelle, donnant ainsi un fondement à la propriété d'universalité. Ceci est valable au voisinage de la dimension marginale supérieure pour deux paramètres effectifs de contrôle (comme le champ externe et la température). Il peut arriver que tel ne soit pas le cas, comme en témoigne la singularité tricritique, qui apparaît par exemple dans les mélanges $\text{He}^3 - \text{He}^4$ ou dans les antiferromagnétiques en présence d'un fort champ magnétique externe (méta-aimants). Dans ce cas on a affaire à un diagramme de phase tridimensionnel. Nous donnons en complément une brève introduction à ce sujet, présentons quelques exemples de calculs et citons dans les notes des travaux qui donnent à la fois une image physique plus complète ainsi que les détails supplémentaires sur la renormalisation.

Par souci de simplicité, nous nous plaçons dans une situation symétrique avec un champ à une seule composante φ (c'est-à-dire que nous excluons explicitement tout terme de brisure de symétrie). Dans la discussion d'une singularité tricritique, nous conservons des termes jusqu'à l'ordre φ^6 dans un lagrangien à la Landau. Négligeant les fluctuations, l'énergie libre d'essai par unité de volume s'exprime comme un terme de potentiel

$$V(\varphi) = \frac{1}{2}t\varphi^2 + \frac{1}{4}s\varphi^4 + \frac{1}{6}g\varphi^6 \quad (\text{A.1})$$

On exige que g soit positif, ce qui assure que $V(\varphi)$ est borné inférieurement. Les diverses situations possibles peuvent être représentées dans le plan $s-t$, selon les valeurs des minima de $V(\varphi)$ qui obéissent à l'équation

$$\varphi \{t + s\varphi^2 + g\varphi^4\} = 0 \quad (\text{A.2})$$

L'origine est toujours un extremum, mais il existe d'autres possibilités si $s^2 - 4tg > 0$ (courbe en pointillés sur la figure 7, qui sera la limite d'une zone de métastabilité).

Si t est négatif, le minimum absolu correspond à la valeur

$$\varphi_+^2 = \frac{-s + \sqrt{s^2 - 4tg}}{2g}$$

auquel cas

$$V(\varphi_+) - V(0) = \frac{1}{3}\varphi_+^2 \left[t + s\frac{1}{4}\varphi_+^2 \right] = \frac{1}{12}\varphi_+^2 [3t - g\varphi_+^4]$$

est négatif, ce qui est le signal d'une symétrie brisée, d'aimantation spontanée φ_+ .

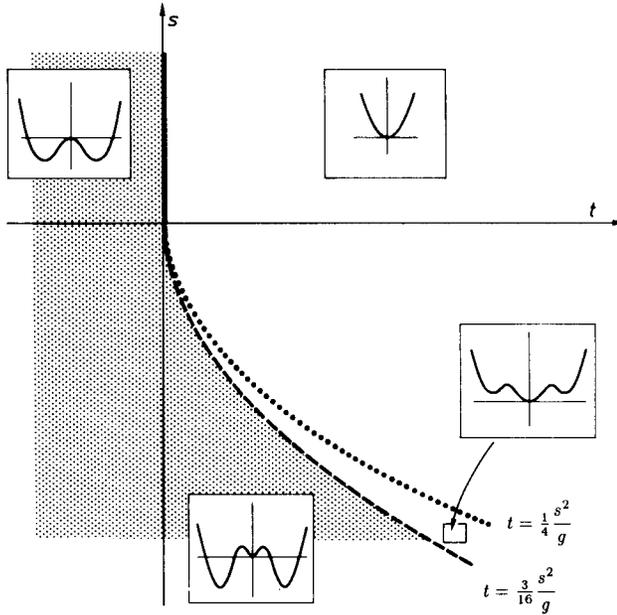


Figure 7 : Diagramme de phase d'un point tricritique. Trait continu : transition du second ordre; trait pointillé : limite d'une région de métastabilité. Au point tricritique, les deux lignes de transition fusionnent de façon continue. On montre dans chaque région un comportement typique du potentiel. La région à gauche des lignes de transition est ordonnée.

Si s et t sont tous deux positifs, la seule racine réelle de (A.2) est $\varphi = 0$ et, lorsque l'on traverse l'axe des s positifs, on est en présence d'une transition typique du second ordre en champ moyen, contrôlée par le paramètre t , tandis que le terme en $g\varphi^6$ est inessentiel. Si au contraire t est positif, mais s négatif et $4tg < s^2$, on trouve deux extrema supplémentaires φ_{\pm} . Le signe de $V(\varphi_{\pm}) - V(0)$ est celui de

$$8gt + s \left(-s \pm \sqrt{s^2 - 4gt} \right) = \pm s \sqrt{s^2 - 4gt} - (s^2 - 8gt)$$

$V(\varphi_-) - V(0)$ est manifestement positif, mais $V(\varphi_+) - V(0)$ est négatif : φ_+ ne représente donc une aimantation spontanée que jusqu'à la courbe $s\sqrt{s^2 - 4gt} = s^2 - 8gt$, soit l'arc de parabole

$$s^2 = \frac{16}{3}gt \quad (\text{A.3})$$

dont la branche $s < 0$ décrit une ligne de transition du premier ordre.

Ainsi, comme on le voit sur la figure 7, une ligne de transitions du second ordre fusionne de façon continue au point tricritique ($s = t = 0$) avec une ligne de transitions du premier ordre. La discontinuité de l'aimantation

le long de la ligne du premier ordre s'annule linéairement comme $\varphi_+ = \frac{3}{4}(-s)/g$, si l'on utilise s (plutôt que t) comme paramètre le long de la courbe. Des exposants de champ moyen peuvent être définis sans difficulté au voisinage du point tricritique.

Un tel mécanisme se généralise aux points multicritiques d'ordre k dans un espace de phase multidimensionnel ($(k-1)$ dimensions en l'absence d'un champ brisant la symétrie). On ne dispose pas aussi aisément d'exemples physiques, mais cette généralisation est intéressante si l'on a en vu la discussion des phénomènes critiques en dimension deux, que l'on trouvera au chapitre IX (volume 2). Au point multicritique, le potentiel effectif se réduit à

$$V_{\text{crit}} = g \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} \quad (\text{A.4})$$

où, pour des raisons de commodité, la constante de couplage a été redéfinie par un facteur $[(2k-1)!]^{-1}$. La dimension critique supérieure, telle que g soit sans dimension, est, d'après le critère habituel

$$d_c = \frac{2k}{k-1} \quad (\text{A.5})$$

Ainsi $d_c = 4$ pour $k = 2$, $d_c = 3$ pour $k = 3$, les deux cas physiquement important, tandis que d_c tend vers 2 lorsque k croît indéfiniment.

Etudions schématiquement la renormalisation de la théorie correspondante de masse nulle à l'aide d'un développement ε , où $d = d_c - \varepsilon$. Nous avons à l'esprit l'étude des singularités logarithmiques pour $d = k = 3$ (ceci est laissé au lecteur à titre d'exercice), ou bien l'approche à la dimension deux dans un développement en ε lorsque $k \rightarrow \infty$, la logique étant que des résultats exacts sont connus dans ce cas. Nous verrons que la comparaison est malheureusement peu convaincante, bien qu'elle semble offrir un terrain d'essai intéressant au concept de prolongement dimensionnel.

Le lagrangien nu dépendant du facteur de coupure est écrit en termes du champ renormalisé φ

$$\varphi^0 = Z^{1/2} \varphi \quad (\text{A.6})$$

et de la constante de couplage renormalisée g (la constante nue est notée g_0), comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 + \frac{g}{(2k)!} \mu^{\varepsilon(k-1)} \varphi^{2k} + (Z-1)^{\frac{1}{2}} \partial\varphi^2 \\ & + \frac{g}{(2k)!} \mu^{\varepsilon(k-1)} (Z^k Z_g - 1) \varphi^{2k} \\ & + [\text{contre-termes pour } \varphi^2, \dots, \varphi^{2k-2}] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Les contre-termes supplémentaires ont pour rôle de compenser les parties divergentes dans les fonctions irréductibles $\Gamma^{(2)}$, ..., $\Gamma^{(2k-2)}$, qui sont normalisées à zéro à moment nul dans l'espace des transformées de Fourier. La fonction logarithmiquement divergente (à $\varepsilon = 0$) $\Gamma^{(2k)}$ est normalisée à un point symétrique caractérisé par une échelle μ , ce qui définit $Z^k Z_g$. De façon plus précise, les conditions de normalisation s'écrivent

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(0) &= \dots = \Gamma^{(2k-2)}(0) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial p^2} \Gamma^{(2)}(p, -p) \Big|_{p^2 = \mu^2} &= 1 \\ \Gamma^{(2k)}(p_1, \dots, p_{2k})_{S_\mu} &= g \mu^{\varepsilon(k-1)} \end{aligned} \quad (A.8)$$

Le point symétrique S_μ pour $2k$ moments obéissant à $\sum_1^{2k} p_j = 0$ est choisi de façon telle que $p_j^2 = \mu^2(2k-1)/k^2$, et si $i \neq j$ $p_i \cdot p_j = -\mu^2/k^2$, avec pour conséquence que le carré de la somme de k moments quelconques, mais distincts, a pour valeur μ^2 . Le facteur $\mu^{\varepsilon(k-1)}$ assure que la constante de couplage normalisée g est sans dimension. Les fonctions nues

$$\Gamma_0^{(2\ell)} = Z^{-\ell} \Gamma^{(2\ell)} \quad (A.9)$$

sont bien sûr indépendantes de μ .

Les fonctions irréductibles $\Gamma^{(2)}$ et $\Gamma^{(2k)}$ sont les seules qui soient nécessaires pour obtenir les facteurs de renormalisation Z et Z_g . A l'ordre le plus bas, ainsi que le lecteur le vérifiera, les seules singularités logarithmiques (pour $\varepsilon = 0$) sont dues aux diagrammes de la figure 8 (on notera que la régularisation dimensionnelle supprime les insertions de "tadpoles"). De façon explicite

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p, -p) &= Z p^2 - \\ &- \frac{g^2}{(2k-1)!} \mu^{2\varepsilon(k-1)} \int \prod_1^{2k-2} \frac{d^d q_j}{(2\pi)^d} \frac{1}{\prod_j q_j^2 (p - \sum_j q_j)^2} \end{aligned} \quad (A.10)$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2k)}(\{p\}) &= g \mu^{\varepsilon(k-1)} Z_g Z^k - \\ &- \frac{g^2}{k!} \mu^{2\varepsilon(k-1)} \sum \int \prod_1^{k-1} \frac{d^d q_j}{(2\pi)^d} \frac{1}{\prod_j q_j^2 (\sum \tilde{p} - \sum q_j)^2} \end{aligned} \quad (A.11)$$

Dans le membre de droite de l'équation (A.11), les sommes portent sur les $(2k)!/2(k!)^2$ manières de diviser les $2k$ moments externes en deux groupes de k moments de telle sorte que $\{p\} = \{\tilde{p}\} \cup \{\tilde{\tilde{p}}\}$.

$$\begin{aligned}
 \Gamma^{(2)} &= \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \dots \\
 &\qquad\qquad\qquad 2k - 1 \text{ lignes} \\
 \\
 \Gamma^{(2k)} &= \text{---} \cdot \text{---} + \sum \text{---} \circ \text{---} + \dots \\
 &\qquad\qquad\qquad 2k \text{ lignes} \qquad\qquad k \text{ lignes} \quad k \text{ lignes} \quad k \text{ lignes}
 \end{aligned}$$

Figure 8 : Diagrammes contribuant au comportement dominant des facteurs de renormalisation Z et Z_g .

Nous utilisons la régularisation dimensionnelle sous la forme

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[q^2]^\alpha} \frac{1}{[(p-q)^2]^\beta} &= \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}d - \alpha)\Gamma(\frac{1}{2}d - \beta)}{\Gamma(d - \alpha - \beta)} \\
 &\times \frac{\Gamma(\alpha + \beta - \frac{1}{2}d)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{1}{(p^2)^{\alpha + \beta - d/2}}
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

et par récurrence

$$\begin{aligned}
 \int \prod_1^{m-1} \frac{d^d q_j}{(2\pi)^d} \frac{1}{\prod_j [q_j^2]^{\alpha_j} [(p - \sum q_j)]^{\alpha_m}} &= \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)d}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}d - \alpha_1) \cdots \Gamma(\frac{1}{2}d - \alpha_m)}{\Gamma(m\frac{d}{2} - \alpha_1 - \cdots - \alpha_m)} \\
 &\times \frac{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_m - \frac{1}{2}(m-1)d)}{\Gamma(\alpha_1) \cdots \Gamma(\alpha_m)} \frac{1}{(p^2)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m - \frac{1}{2}(m-1)d}}
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

Nous avons besoin du cas $m = 2k - 1$, dans l'équation (A.10) et du cas $m = k$ dans l'équation (A.11), avec tous les α égaux à l'unité. En égalant à l'unité la dérivée $\partial\Gamma^{(2)}/\partial p^2$ à $p^2 = \mu^2$, nous obtenons à la limite où $\varepsilon \rightarrow 0$

$$Z = 1 - \frac{g^2}{(4\pi)^{2k}} \frac{1}{(2k-1)!} \frac{\Gamma(1/(k-1))^{2k-1}}{\Gamma((2k-1)/(k-1))} \frac{1}{(k-1)\varepsilon} + O(g^3) \tag{A.14}$$

De façon analogue, de la renormalisation (A.8) de la fonction à $2k$ points, il s'ensuit que

$$Z_g = 1 + \frac{g}{(4\pi)^k} \frac{(2k)! \Gamma(1/(k-1))^k}{(k!)^3 \Gamma(k/(k-1))} \frac{1}{(k-1)\varepsilon} + O(g^2) \quad (A.15)$$

Les fonctions de corrélations nues exprimées en termes du facteur de coupure et de la constante de couplage $g_0 = g\mu^{\varepsilon(k-1)}Z_g$ sont indépendantes de μ . En traduisant les équations

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \Gamma_0^{(2k)} = 0 \quad (A.16)$$

en termes des fonctions renormalisées selon l'équation (A.9) et définissant

$$\begin{aligned} \beta(g) &= \mu \left. \frac{\partial}{\partial \mu} g \right|_{g_0, \Lambda} \\ \gamma(g) &= \mu \left. \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z \right|_{g_0, \Lambda} \end{aligned} \quad (A.17)$$

on trouve les équations de Callan-Symanzik sous la forme

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \ell \gamma(g) \right] \Gamma^{(2\ell)} = 0 \quad (A.18)$$

avec

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -\varepsilon(k-1)g + \frac{g^2}{(4\pi)^{2k}} \frac{(2k)! \Gamma(1/(k-1))^k}{(k!)^3 \Gamma(k/(k-1))} + O(g^3) \\ \gamma(g) &= 2 \frac{g^2}{(4\pi)^{2k}} \frac{1}{(2k-1)!} \frac{\Gamma(1/(k-1))^{2k-1}}{\Gamma((2k-1)/(k-1))} + O(g^3) \end{aligned} \quad (A.19)$$

La fonction β possède un point fixe infrarouge stable g_c d'ordre ε . En intégrant les équations du flot de renormalisation, on obtient

$$\Gamma^{(2\ell)} \left(\{p\}, g_2, \mu \exp \int_{g_1}^{g_2} \frac{du}{\beta(u)} \right) = \exp \left\{ \ell \int_{g_1}^{g_2} \frac{\gamma(u) du}{\beta(u)} \right\} \Gamma^{(2\ell)} (\{p\}, g_1, \mu) \quad (A.20)$$

En combinant avec un changement d'échelle de p et de μ , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2\ell)} \left(\{\lambda p\}, g_2, \lambda \mu \exp \int_{g_1}^{g_2} \frac{du}{\beta(u)} \right) &= \\ &= \lambda^{d-\ell(d-2)} \exp \left\{ \ell \int_{g_1}^{g_2} \frac{\gamma(u) du}{\beta(u)} \right\} \Gamma^{(2\ell)} (\{p\}, g_1, \mu) \end{aligned} \quad (A.21)$$

Choisissons maintenant g_1 comme fonction de g_2 et de λ en imposant la condition

$$\lambda \exp \int_{g_2}^{g_1} \frac{du}{\beta(u)} = 1 \quad (A.22)$$

et prenons la limite $\lambda \rightarrow 0$, ce qui entraîne g_1 vers le point fixe g_c . Nous obtenons ainsi les lois d'échelle

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \Gamma^{(2\ell)}(\{\lambda p\}, g_2, \mu) = \lambda^{d-\ell[d-2+\gamma(g_c)]} \Gamma(\{p\}, g_c, \mu) \quad (A.23)$$

La dimension anormale du champ φ est par conséquent $\frac{1}{2}\gamma(g_c)$, et l'exposant $\eta^{[k]}$ qui, comme dans la théorie en φ^4 , donne la déviation par rapport au comportement en $r^{-(d-2)}$ de la fonction de corrélation à deux points (l'index $[k]$ rappelle l'ordre du point multicritique) est donné par

$$\eta^{[k]} = \gamma(g_c) \quad (A.24)$$

A l'ordre le plus bas en ε

$$\frac{g_c}{(4\pi)^k} = \varepsilon(k-1) \frac{(k!)^3}{(2k)!} \frac{\Gamma(k/(k-1))}{\Gamma(1/(k-1))^k} + \dots \quad (A.25)$$

et

$$\eta^{[k]} = 2 \left[\frac{g_c}{(4\pi)^k} \right]^2 \frac{1}{(2k-1)!} \frac{\Gamma(1/(k-1))^{2k-1}}{\Gamma((2k-1)/(k-1))} + \dots \quad (A.26)$$

s'écrit

$$\eta^{[k]} = 4 [\varepsilon(k-1)]^2 \left[\frac{k!^2}{(2k)!} \right]^3 + \dots \quad (A.27)$$

Ce résultat est en accord à l'ordre ε^2 avec celui fourni par l'équation (262) dans le cas $k = 2$ lorsque le nombre n de composantes du champ est égal à 1. Dans les deux cas $\eta^{[2]} = \frac{1}{54}\varepsilon^2 + \dots$. Il est bien sûr possible de calculer d'autres exposants, comme les dimensions anormales des champs φ^2 , φ^3 , etc.

Comme on le montrera au chapitre IX (volume 2), lorsque $d = 2$, la dimension anormale du champ φ pour le modèle tricritique ($k = 3$) est vraisemblablement $3/40$, ce qui conduit à $\eta^{[3]} = 3/20$. Si nous estimons le même exposant en utilisant seulement le terme dominant donné en (A.27), prenant $\varepsilon = 1$, $k = 3$, nous trouvons $\eta_{\text{app}}^{[3]} = \frac{1}{500}$. Ce désaccord d'un facteur

75 est très violent, et augmente exponentiellement avec l'ordre du point multicritique. On conjecture qu'en dimension 2

$$d = 2 \quad \eta^{[k]} = \frac{3}{(k+1)(k+2)} \quad (A.28)$$

et l'estimation de l'équation (A.27) obtenue en choisissant $(k-1)\varepsilon = 2$ s'écrit

$$d = 2 \quad \eta_{\text{app}}^{[k]} = 16 \left[\frac{k!^2}{(2k)!} \right]^3 \quad (A.29)$$

La raison de ce désaccord peut être comprise en remarquant que le véritable paramètre de développement n'est pas le nombre (petit) ε , mais $\varepsilon(k-1)$, qui prend la valeur finie deux (la dimension de la constante de couplage nue) quand on essaie d'atteindre la dimension deux en partant de la dimension critique supérieure. Ainsi le développement ε est-il inadapté à cette situation, à moins que l'on n'essaie une resommation fondée sur le calcul de plusieurs autres termes dans le développement.

Notes

L'application des méthodes du groupe renormalisation au calcul des exposants critiques est due à K.G. Wilson. Un certain nombre de travaux relatifs à ces méthodes ont déjà été cités au chapitre précédent. Parmi les premières contributions à ce sujet on peut relever : C. Di Castro et G. Jona Lasinio, *Phys. Lett.* **29A**, 322 (1969); K.G. Wilson et M.E. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 240 (1972); K.G. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 548 (1972). Plutôt que de donner une liste exhaustive d'articles, ce qui exigerait un volume entier, nous renvoyons le lecteur aux revues originales suivantes : K.G. Wilson and J. Kogut, *Physics Report* **12C**, 75 (1974); M.E. Fisher, *Rev. Mod. Phys.* **46**, 597 (1974); K.G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975); E. Brezin, J.C. Le Guillou et J. Zinn-Justin dans le volume VI de la série Domb et Green (1976); S.K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin, New York (1976); la contribution de G. Parisi à l'Ecole de Cargèse de 1973 est parue dans *J. Stat. Phys.*, **23**, 49 (1980). Le livre D.J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group and Critical Phenomena*, 2ème édition, World Scientific, Singapore (1984) reflète aussi partiellement l'influence du groupe de nos amis de Saclay, E. Brézin, J.-C. Le Guillou et J. Zinn-Justin, qui ont été, avec leurs collaborateurs, parmi les plus actifs dans l'application des méthodes de théorie des champs aux phénomènes critiques. L'essentiel de notre présentation repose sur leur travail immense ainsi que sur la contribution de G. Parisi. Deux livres

en préparation par cet auteur et par J. Zinn-Justin devraient donner un exposé exhaustif et définitif de ce domaine.

Les calculs à trois dimensions cités dans le texte sont dûs à G.A. Baker, B.G. Nickel, M.S. Green et D.I. Meiron, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1351 (1976); G.A. Baker, B.G. Nickel and D.I. Meiron, *Phys. Rev.* **B17**, 1365 (1978); J. Zinn-Justin et J.C. Le Guillou, *Phys. Rev.* **B21**, 3976 (1980). Nous n'avons pas cherché à incorporer les développements les plus récents dans ce domaine.

Un modèle discret possédant une singularité tricritique est dû à J. Blume, V.J. Emery, R.B. Griffiths, *Phys. Rev.* **A4**, 1071 (1971). Pour la théorie générale de l'invariance d'échelle, on se reportera à E.K. Riedel et F.J. Wegner, *Phys. Rev.* **B7**, 248 (1973), R.B. Griffiths, *Phys. Rev.* **B7**, 545 (1973), E. Abrahams, M.J. Stephen et J.P. Straley, *Phys. Rev.* **B12**, 256 (1975) et M. Wohrer, Thèse, Saclay (1976). Les calculs dans l'appendice A sont dûs à E. Brézin et M. Bauer.

Une partie des travaux traitant des aspects continus en mécanique statistique reposent sur des investigations plus anciennes en théorie quantique des champs. Le groupe de renormalisation apparaît dans les articles de E.C.G. Stueckelberg et A. Peterman, *Helv. Phys. Acta* **26**, 499 (1953); M. Gell-Mann et F.E. Low, *Phys. Rev.* **95**, 1300 (1954). Une discussion approfondie se trouve dans N.N. Bogoliubov et D.V. Chirkov, *Introduction à la Théorie Quantique des Champs*, Dunod, Paris (1960). L'approche moderne, où l'accent est mis sur la brisure d'invariance d'échelle, est dû à K. Symanzik, *Comm. Math. Phys.* **18**, 227 (1970) et C.G. Callan, *Phys. Rev.* **D2**, 1541 (1970).

Ce court résumé de quelques références essentielles ne reflète que de façon très incomplète le nombre important de contributions à ce sujet et l'impact des idées du groupe de renormalisation dans de nombreux domaines de la physique.

CHAPITRE VI

CHAMPS DE JAUGE SUR RESEAU

Jusqu'ici, la théorie des champs n'est apparue que comme un outil pour l'étude des phénomènes critiques. Inversement, les techniques de mécanique statistique peuvent se révéler utiles en théorie des champs. Wilson a proposé en 1973 un modèle discret sur réseau analogue au modèle continu de Yang et Mills. Son but principal était d'expliquer le confinement des quarks en chromodynamique quantique. Cette construction conduit à une interprétation géométrique des degrés de liberté du champ de jauge en termes d'éléments du groupe de jauge associés à chaque lien du réseau. Les développements de couplage fort prédisent une énergie potentielle linéairement croissante entre sources statiques. Des diagrammes de phase complexes sont observés quand les champs de jauge sont couplés aux champs de matière et de nouveaux phénomènes apparaissent, tels l'absence de paramètres d'ordre locaux et leur substitution par des quantités liées à des courbes. La discrétisation des fermions pose également d'intéressants problèmes topologiques. Ce chapitre est consacré au développement de ces idées.

1. Généralités

1.1 Présentation

Les modèles statistiques discutés jusqu'ici avaient un support physique très concret. Les réseaux représentent la structure cristalline des solides. Leur rôle, important dans les phénomènes à courte distance, s'estompe dans la région critique; il apparaissent alors comme un régulateur naturel pour la théorie des champs qui va décrire le voisinage du point critique. Le point de vue inverse peut également être adopté. Désirant étudier une théorie des champs continue d'un point de vue global, on la régularise par l'introduction artificielle d'un réseau. Le système va ensuite être étudié à toute "température" afin de tirer des informations sur sa région critique, qui est supposée être décrite par la théorie continue initiale.

En physique des particules, une catégorie particulièrement importante de modèles est construite à partir d'interactions minimales conservant des symétries internes locales (Yang et Mills, 1956). Une de leurs propriétés

marquantes est d'être asymptotiquement libre dans le régime ultraviolet en dimension quatre, du moins pour les groupes de symétrie continus non abéliens. A courte distance, les champs – décrivant “quarks” et “gluons”, représentant les constituants supposés fondamentaux de la matière –, voient donc leurs interactions s'amenuiser indéfiniment, ce qui permet un traitement perturbatif. On a pu ainsi comparer, dans ce régime, les prédictions théoriques à l'expérience. Il s'avère que le modèle de la chromodynamique quantique, fondé sur une symétrie $SU(3)$ dite de “couleur” – d'où ce qualificatif chromodynamique –, permet d'expliquer de manière remarquable les résultats expérimentaux. Il s'agit aussi bien de diffusion leptonique fortement inélastique sur des cibles nucléaires que de production de jets hadroniques dans des collisions de très haute énergie, ou encore de la spectroscopie des états liés impliquant des quarks lourds. Rappelons encore que les champs de Yang et Mills interviennent dans le modèle unifié électro-faible de Glashow, Salam et Weinberg, formant avec la chromodynamique ce qu'il est convenu désormais d'appeler le modèle standard.

Le comportement à grande distance de la chromodynamique reste inaccessible à une approche perturbative. Le confinement permanent des quarks qui ne peuvent être isolés expérimentalement en tant que particules élémentaires, est hors de portée de ces méthodes. Le calcul du spectre de masse hadronique – états liés de quarks et de gluons – est également un problème typique de couplage fort qui ne peut être abordé par la théorie des champs perturbative (sauf dans un cadre phénoménologique). La discrétisation de l'espace-temps par introduction d'un réseau a permis de répondre en partie à ces questions. Les systèmes de jauge sur réseaux vont pouvoir être étudiés par les techniques statistiques; les séries de haute température fournissent le développement de couplage fort recherché. La méthode du champ moyen ainsi que les simulations numériques fondées sur des techniques du type Monte-Carlo donnent également des résultats intéressants. Il reste à affiner l'étude de la région critique pour les besoins de la physique des interactions fortes. La théorie des champs de jauge trouve aussi des applications à l'étude des systèmes désordonnés ou amorphes. Enfin, on notera la parenté entre champs de jauge et relativité générale dont la discrétisation fort ingénieuse est due à Regge (1960).

Le concept central est celui d'invariance de jauge. On considère des transformations $g(\mathbf{x})$, appartenant à un groupe G , et dépendant du point \mathbf{x} de l'espace. Les champs (de matière) “chargés” $\varphi(\mathbf{x})$ se transforment selon une représentation linéaire finie de la transformation $g(\mathbf{x})$ au même point $\varphi(\mathbf{x}) \rightarrow g(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$. (Cette notation abrégée décrit l'action d'un élément du groupe sur le champ). Dans un modèle continu, les termes dérivatifs du lagrangien, responsables de la propagation, introduisent des termes en $\partial g(\mathbf{x})$. Si on veut préserver l'invariance locale, ces termes doivent être compensés par introduction d'un champ de jauge $A_\mu(\mathbf{x})$, à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe G . Pour le modèle discrétisé, les termes dérivatifs sont remplacés par des différences finies, et l'action comporte des termes

bilocaux, tels que l'interaction entre proches voisins

$$S_{\text{mat}} = \beta_m \sum_{(i,j)} \varphi_i \cdot \varphi_j \quad (1)$$

Dans la notation abrégée utilisée ici, les champs $\varphi_i = \{\varphi_i^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, d_r\}$ se transforment sous l'action d'une représentation linéaire r du groupe de symétrie G : $\varphi_i^\alpha \rightarrow (g\varphi_i)^\alpha = \mathcal{D}_{\alpha\beta}^r(g)\varphi_i^\beta$. Le produit noté $\varphi_i \cdot \varphi_j$ est la forme quadratique ou sesquilinéaire préservée par le groupe. Les modèles considérés jusqu'ici étaient généralement invariants sous $SO(n)$; ce chapitre s'intéressera davantage au groupe $SU(n)$, qui préserve la forme sesquilinéaire $\sum_\alpha \varphi_i^{\alpha*} \varphi_j^\alpha$, sans négliger cependant les groupes plus simples ($Z_2, Z_n, U(1)$).

L'action (1) n'est que globalement invariante. Pour la rendre localement invariante, on introduit des champs de jauge associés à une paire ordonnée de voisins $U_{ij} \in G$ (Wilson 1974). Le passage du continu au discret est réalisé en utilisant des éléments du groupe plutôt que de l'algèbre de Lie qui rendent l'invariance locale simple et explicite. De plus, nous avons ainsi la possibilité d'utiliser des groupes discrets qui perdent alors toute interprétation directe dans la limite continue. L'action ainsi modifiée

$$S_{\text{mat}} = \beta_m \sum_{(i,j)} \varphi_i U_{ij} \varphi_j = \beta_m \sum_{(i,j)} \varphi_i^{\alpha*} \mathcal{D}_{\alpha\beta}^r(U_{ij}) \varphi_j^\beta \quad (2)$$

est invariante si ces champs se transforment suivant la loi

$$U_{ij} \rightarrow g_i U_{ij} g_j^{-1} \quad (3)$$

On impose également la contrainte

$$U_{ij} \equiv U_{ji}^{-1} \quad (4)$$

On notera que le champ U_{ij} n'est pas associé à un site, mais à un lien *orienté* ij du réseau. Il est loisible d'ajouter à l'action un terme S_J ne dépendant que des champs nouvellement introduits. Recherchons quelle doit être la forme d'un tel terme, qui est bien entendu localement invariant. Le produit des champs le long d'une courbe fermée $C = i_1 i_2 \cdots i_n i_1$ tracée sur le réseau,

$$U_C = U_{i_1 i_2} U_{i_2 i_3} \cdots U_{i_n i_1} \quad (5)$$

se transforme selon

$$U_C \rightarrow g_{i_1} U_C g_{i_1}^{-1} \quad (6)$$

c'est-à-dire reste dans la même classe de conjugaison du groupe. Rappelons qu'il existe une relation d'équivalence partageant le groupe G en telles classes : deux éléments h et h' sont équivalents (c'est-à-dire conjugués) s'il

existe $g \in G$ tel que $gh = h'g$. Une fonction $\chi(U_C)$ ne dépendant que de la classe à laquelle appartient U_C sera invariante de jauge et peut donc entrer dans la construction de l'action S_J . Observons que $\chi(U_C)$ est alors indépendant de l'origine choisie sur la courbe fermée C . En outre χ doit être une fonction réelle (l'action devant l'être), si bien que le sens de parcours de C est également indifférent.

Parmi les choix possibles, la courbe C la plus simple (la plus courte) est le bord de la *plaquette*, carré élémentaire du réseau hypercubique utilisé. Le simple aller-retour ne conduit en effet qu'à un terme sans intérêt à cause de la contrainte (4). Par ailleurs, la théorie des groupes établit que toute fonction de classe peut être décomposée sur la base des caractères χ_r , traces de la matrice correspondante dans les représentations irréductibles r : $\chi(U_C) = \sum_r c_r \chi_r(U_C)$. Le choix "naturel" de la représentation fondamentale pour les groupes de matrices $SU(n)$ et $SO(n)$ conduit ainsi à l'action de Wilson

$$S_J = \beta_J \sum_p \frac{1}{n} \text{Re Tr } U_p \quad (7)$$

avec $U_p = U_{ij}U_{jk}U_{kl}U_{li}$ pour la plaquette $p \equiv ijkl$. Ici, n est la dimension de la représentation fondamentale de G , dans laquelle est prise la trace.

Actions géométriques

Un autre choix "naturel" de χ résulte des considérations suivantes. Lorsque β_J est grand, U_p fluctue au voisinage de l'unité. Dans cette limite (qui, on le verra, redonne la théorie continue), les termes les plus importants seront quadratiques dans les fluctuations du champ. Le choix géométrique naturel est d'utiliser la distance géodésique de U_p à l'unité, dans la métrique naturelle induite sur G , pour mesurer ces fluctuations. Ainsi, lorsque $G = U(1)$, $U_p = \exp(i\theta_p)$, et on est tenté de prendre comme action $\beta_J \sum_p \theta_p^2$. Ce choix est néanmoins multivalué, ce qui peut être corrigé en généralisant une idée due à Villain dans le cas abélien. Pour un groupe de Lie quelconque, on considère le facteur de Boltzmann dit *noyau de la chaleur* comme la réponse, après un temps $t \approx 1/\beta_J$, à un échauffement local au voisinage de l'identité sur la variété du groupe. Cette variété est un cercle pour le groupe $U(1)$, une 3-sphère pour $SU(2)$, ... Le facteur de Boltzmann sera alors la solution de l'équation de la chaleur

$$\Delta_g f(g, t) = \frac{\partial f(g, t)}{\partial t}, \quad \text{avec } f(g, 0) = \delta(g, 1) \quad (8)$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami. Le temps est identifié à l'inverse de β_J , $t = 1/\beta_J$. On obtient ainsi l'action de Villain généralisée,

$$\exp S_J = \prod_p \exp S_J(p),$$

$$\exp S_J(p) = \sum_r d_r \chi_r(U_p) \exp\left(-\frac{C_r^{(2)}}{n\beta_J}\right) \quad (9)$$

où $C_r^{(2)}$ est l'invariant quadratique de Casimir pour la représentation r , c'est-à-dire la valeur propre correspondante de $-\Delta_g$. La somme porte sur l'ensemble des caractères des représentations irréductibles inéquivalentes de dimension d_r (analyse harmonique sur le groupe). Par exemple, pour le groupe $SU(2)$, si U est la matrice générique 2×2 conjuguée de la matrice diagonale $(e^{i\theta/2}, e^{-i\theta/2})$, la contribution d'une plaquette est la fonction

$$\exp S_J(p) = \sum_{2j=0}^{\infty} (2j+1) \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \exp -\frac{j(j+1)}{2\beta_J} \quad (10)$$

Notons que toute autre action est équivalente à celle-ci dans la limite β_J grand. L'utilisation de ces poids de Boltzmann permet d'éviter des singularités artificielles dans des limites telles $n \rightarrow \infty$ que l'on observe notamment avec l'action de Wilson.

1.2 Limite continue

Avant de procéder à une étude approfondie des systèmes de jauge à toute constante de couplage β_J , nous allons dès maintenant considérer sa limite continue (région critique) formelle. Nous supposons pour le moment que les fluctuations sont petites et sans effet qualitatif essentiel. Le raisonnement ne s'applique qu'au cas d'un groupe de jauge continu. La méthode utilisée est semblable à celle des chapitres précédents : on développe l'action en termes locaux ne dépendant que des champs et de leurs dérivées en un point donné. Le lagrangien local régularisé est ensuite étudié par les équations du groupe de renormalisation. Cette procédure nécessite cependant quelques aménagements pour tenir compte des aspects spécifiques du champ de jauge U_{ij} .

Caractérisons tout d'abord les configurations $\{U_{ij}^0\}$ maximisant l'action et autour desquelles le développement perturbatif sera effectué. Nous avons à résoudre

$$U_p^0 = U_{ij}^0 U_{jk}^0 U_{kl}^0 U_{li}^0 = 1 \quad (11)$$

pour toutes les plaquettes, puisque l'identité maximise simultanément la valeur de tous les caractères. Cette configuration est équivalente à une autre $U_{ij}^{0'} = g_i^{-1} U_{ij}^0 g_j$, où la transformation de jauge est choisie de façon à ce que $U_{ij}^{0'} = 1$ sur un arbre maximal du réseau, c'est-à-dire sur un ensemble maximal de liens ne formant aucune boucle. La figure 1 montre un tel ensemble et définit la *jauge axiale*, où tous les champs, dans une direction donnée (baptisée *temps*), sont choisis égaux à 1. On se convaincra aisément que les g_i sont définis ainsi de proche en proche; de même, la condition (11)

entraîne que U_{ij}^0 est partout l'unité. Il en résulte que les seules configurations maximisant l'action sont les configurations de pure jauge

$$U_{ij}^0 = g_i g_j^{-1} \quad (12)$$

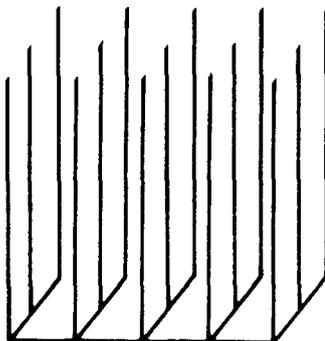


Figure 1 : Arbre maximal définissant la jauge axiale sur un réseau cubique.

Une généralisation hâtive de la propriété précédente pourrait laisser croire qu'une configuration quelconque de plaquettes $\{U_p\}$ suffit à définir complètement, à une transformation de jauge près, la configuration de liens $\{U_{ij}\}$. Montrer que tel est le cas si le groupe est abélien et si les variables U_p associées aux six plaquettes bordant tout cube tridimensionnel vérifient la condition

$$\prod_{p \in \partial c} U_p = 1 \quad (13)$$

En dimension deux, cette contrainte disparaît et le résultat s'étend, en outre, aux groupes non abéliens. Les variables $\{U_p\}$ sont alors indépendantes et n'interagissent pas dans l'action : on en déduit que le modèle de jauge pur bidimensionnel est trivial.

Autour de la solution classique (12), les champs seront paramétrisés par un champ local $A_\mu(\mathbf{x})$, à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe G , suivant

$$U_{ij} = g_i \exp(iaA_\mu(\mathbf{x}))g_j^{-1} \quad (14)$$

avec $\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i + a\hat{\mu}$, $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_i + \mathbf{x}_j)$, a désignant la maille du réseau. A l'ordre dominant en a , nous ne distinguons pas cette paramétrisation de l'exponentielle ordonnée $P \exp\{i \int_{t=0}^1 dx^\mu(t) A_\mu(\mathbf{x}(t))\}$, avec $\mathbf{x}(t) = (1-t)\mathbf{x}_i + t\mathbf{x}_j$. Les

produits intervenant dans le terme de plaquette U_p , généralement non commutatifs, sont calculés à l'aide de la formule de Baker–Campbell–Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$$

Rappelons ici la formule générale

$$\exp C = \exp A \exp B,$$

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \frac{1}{12}[B, [B, A]] - \frac{1}{48}[A, [B, [A, B]]] + \dots$$

qui s'obtient par l'algorithme suivant. Développer

$$C = \ln \left[\left(1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots \right) \left(1 + B + \frac{B^2}{2!} + \dots \right) \right]$$

en somme de monômes homogènes. Substituer à un tel monôme de degré p , soit $z_1 z_2 \dots z_p$, l'élément $(1/p)[z_1, [z_2, [\dots [z_{p-1}, z_p] \dots]]]$ de l'algèbre de Lie engendrée par A et B .

Après un court calcul exprimant les champs en fonction de leurs valeurs prises au centre de la plaquette, on arrive à l'expression

$$U_p = g_i \exp[ia^2 F_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^4)] g_j^{-1} \quad (15)$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \quad (16)$$

Enfin, l'exponentielle (15) est développée en puissances de a et, dans l'action, la somme sur les plaquettes est remplacée par une intégrale (à des corrections près d'ordre a , qui peuvent être calculées par la formule d'Euler MacLaurin). A une constante additive près, absorbée dans la normalisation de la fonction de partition, le résultat s'écrit

$$S_J = \frac{\beta_J g_0^2 a^{4-d}}{2n} \int d^d \mathbf{x} \left(-\frac{1}{2g_0^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^2) + \mathcal{O}(a^2) \right) \quad (17)$$

Cette formule coïncide avec le lagrangien continu postulé par Yang et Mills lorsque le terme multiplicatif devant l'intégrale est rendu égal à l'unité par un choix approprié de g_0 . La température inverse β_J du modèle de jauge doit donc être reliée à la constante de couplage nue g_0 de la théorie continue par la relation

$$\beta_J = \frac{2n}{g_0^2} a^{d-4} \quad (18)$$

L'analyse dimensionnelle naïve montre alors que $[A_\mu/g_0] = \frac{1}{2}(d-2)$, $[g_0^2] = 4-d$. A quatre dimensions, la théorie est donc formellement

renormalisable, à condition que l'on puisse montrer que l'invariance locale est préservée par renormalisation. Quant aux termes d'ordre supérieur en a non explicités dans la formule (17), ils font intervenir un nombre de dérivées plus grand et leur dimension canonique est supérieure à quatre. On s'attend donc à ce que leur effet se borne à une renormalisation finie sans pour autant changer qualitativement le comportement critique.

Pour obtenir la limite continue, on choisit une longueur physique ξ , calculée à l'aide d'une des fonctions de corrélation, que l'on maintient fixe, tout en faisant tendre la maille du réseau vers 0 et en ajustant la constante de couplage g_0 . En unités de la maille du réseau, ξ/a diverge alors, ce qui revient à dire que l'on approche d'un point critique $g_0 \rightarrow g_{0c}$. Ce processus obéit à l'équation du groupe de renormalisation

$$a \frac{d\xi}{da} \equiv \left(a \frac{\partial}{\partial a} - \beta(g_0) \frac{\partial}{\partial g_0} \right) \xi = 0 \quad (19)$$

avec

$$\beta(g_0) = -a \left. \frac{\partial g_0}{\partial a} \right|_{\xi} \quad (20)$$

La notation $\beta(g_0)$ de la fonction de Callan-Symanzik est traditionnelle et ne doit pas être confondue avec les constantes β_J, β_m apparaissant comme coefficients de l'action. Cette équation s'intègre sous la forme

$$\xi = a \exp \int^{g_0} \frac{dg}{\beta(g)} \quad (21)$$

g_{0c} doit donc être un zéro de la fonction $\beta(g)$, avec une pente négative (s'il s'agit d'un zéro simple). La relation (21) indique la façon dont g_0 tend vers g_{0c} lorsque a tend vers zéro. Dans le chapitre V, nous avons montré que la pente de $\beta(g)$ était universelle en g_{0c} (avec les modifications nécessaires lorsqu'il s'agit de zéros multiples). Bien que le calcul direct de $\beta(g)$, puisse être effectué avec la régularisation du réseau, il est préférable d'utiliser cette remarque et de se servir des résultats du calcul plus aisé, effectué à l'aide de la régularisation dimensionnelle. Ainsi, le couplage nul est un point critique correspondant à un zéro triple de $\beta(g)$, et les deux coefficients universels du développement

$$\beta(g) = -b_0 g^3 - b_1 g^5 + \mathcal{O}(g^7) \quad (22a)$$

sont donnés, pour le groupe $SU(n)$, par

$$b_0 = \frac{11}{3} \frac{n}{(4\pi)^2}, \quad b_1 = \frac{34}{3} \frac{n^2}{(4\pi)^4} \quad (22b)$$

Si le principe du calcul, qui suit la discussion du chapitre V, est simple, de nombreux détails techniques compliquent sa réalisation pratique pour les

champs de jauge. Ceci est dû au conflit résultant du désir de maintenir l'invariance locale et de la nécessité d'introduire un terme la brisant pour éviter l'intégration sur les degrés de liberté de jauge non dynamiques. La théorie élaborée permettant de surmonter cette difficulté est présentée en détail dans les livres traitant de la quantification des champs de jauge continus. Nous n'en donnerons ici que les lignes principales. Le calcul utilise une base t_a de l'algèbre de Lie de G , avec

$$i[t_a, t_b] = f_{abc} t_c, \quad f_{acd} f_{bcd} = C_f^{(2)} \delta_{ab}, \quad \text{Tr } t_a t_b = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (23)$$

et on pose $A_\mu = g \mathcal{A}_\mu^a t_a$. Un terme $(\partial_\mu \mathcal{A}_\mu^a)^2 / 2\alpha$ doit être ajouté à l'action afin de briser l'invariance de jauge et de rendre ainsi inversible la partie quadratique du lagrangien. Ce terme est compensé par l'introduction de champs anti-commutants Φ_a (fantômes de Faddeev-Popov), qui donneraient, par intégration, un Jacobien restaurant l'invariance de jauge. Ecrivant l'action sous la forme

$$S = - \int d^d \mathbf{x} \mathcal{L} \quad (24a)$$

on arrive ainsi au lagrangien en termes de quantités renormalisées

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} Z_3 (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu \mathcal{A}_\mu^a)^2 + Z_1 g f_{abc} \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c \\ & + \frac{1}{4} g^2 \frac{Z_1^2}{Z_3} f_{abc} f_{ade} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c \mathcal{A}_\mu^d \mathcal{A}_\nu^e + Z_3^\Phi \partial_\mu \Phi_a^* \partial_\mu \Phi_a + Z_1^\Phi g f_{abc} \partial_\mu \Phi_a^* \mathcal{A}_\mu^b \Phi_c \end{aligned} \quad (24b)$$

Le fait que le terme quartique en \mathcal{A} prenne la forme indiquée résulte des identités de Ward-Slavnov qui expriment l'invariance de jauge et qui entraînent la relation $Z_1/Z_3 = Z_1^\Phi/Z_3^\Phi$. La partie longitudinale du propagateur est non renormalisée. Le calcul va s'effectuer à $d = 4 - \varepsilon$ dimensions. Il est utile de définir une nouvelle constante de couplage sans dimension $u = g\mu^{-\varepsilon/2}$. μ définit alors l'échelle de masse. Les termes de soustractions ($Z_i - 1$) sont des fonctions de u , α et ε , déterminées ordre par ordre en u de façon à ce que la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ des quantités physiques soit finie. Dans le schéma de soustraction minimale choisi, seuls les termes divergents en puissance inverse de ε , sont introduits, sans renormalisation finie supplémentaire. La figure 2 explicite les règles de Feynman pour ce lagrangien non soustrait. Une ligne continue représente un propagateur du champ de jauge, alors que celui du fantôme est associé à une ligne tiretée. Nous choisirons la jauge de Feynman ($\alpha = 0$) plus pratique pour faire les calculs.

Les soustractions peuvent être déterminées par le calcul des fonctions de Green à 2 et 3 points. La figure 3 indique les diagrammes à calculer à l'ordre d'une boucle. Nous renvoyons le lecteur à la section V.2.3. qui décrit les techniques d'intégration nécessaires pour cette méthode de prolongement

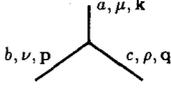
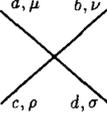
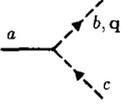
$\frac{a, \mu}{\quad} \quad \frac{b, \nu}{\quad}$	$\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{ab}}{p^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$
$\frac{a}{\dashrightarrow} \dashrightarrow \frac{b}{\quad}$	$\frac{1}{(2\pi)^4} \frac{\delta_{ab}}{p^2}$
	$(2\pi)^4 i g f_{abc} [\delta_{\nu\rho}(q-p)_\mu + \delta_{\rho\mu}(k-q)_\nu + \delta_{\mu\nu}(p-k)_\rho]$
	$-(2\pi)^4 g^2 f_{ace} f_{bde} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) - (2 \text{ perm.})$
	$(2\pi)^4 i g f_{abc} q_\alpha$

Figure 2 : Règles de Feynman pour le lagrangien continu de Yang-Mills.

dimensionnel. Ainsi, les diagrammes de la figure 3a conduisent à l'expression suivante *non soustraite* du propagateur du champ de jauge

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\alpha;\nu\beta}^{(1)}(p) = & \frac{1}{2} g^2 \pi^{d/2} C_f^{(2)} \delta_{ab} \Gamma(2 - \frac{1}{2}d) [(4d-8)B(\frac{1}{2}d, \frac{1}{2}d) + \\ & + (6-d)B(\frac{1}{2}d-1, \frac{1}{2}d-1)] (p^2)^{d/2-2} (p^2 \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \end{aligned} \quad (25)$$

avec

$$B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$$

Utilisant la variable sans dimension u et développant ce résultat en ε , on détermine alors la forme du contre-terme nécessaire pour obtenir un résultat fini quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$(Z_3 - 1)^{(1)} = \frac{10}{3} \frac{u^2}{16\pi^2} C_f^{(2)} \frac{1}{\varepsilon} \quad (26)$$

Les trois autres fonctions de Green se calculent de manière similaire. Pour les fonctions à trois points, le choix d'une impulsion externe nulle simplifie les calculs. Les résultats sont respectivement

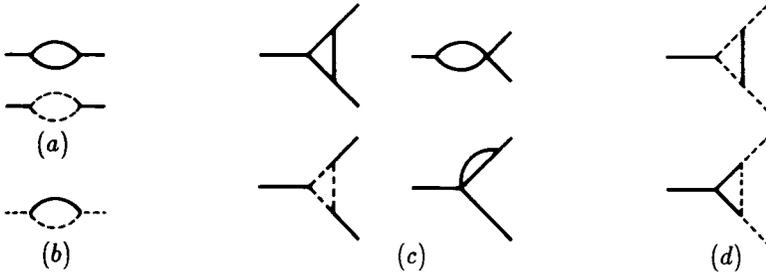


Figure 3 : Diagrammes à l'ordre d'une boucle pour les fonctions de Green à 2 et 3 points. (a) Propagateur du champ de jauge. (b) Propagateur du fantôme. (c) Vertex de jauge. (d) Vertex jauge-fantômes.

$$\begin{cases} (Z_3^\Phi - 1)^{(1)} = \frac{u^2}{16\pi^2} C_f^{(2)} \frac{1}{\varepsilon} \\ (Z_1 - 1)^{(1)} = \frac{4}{3} \frac{u^2}{16\pi^2} C_f^{(2)} \frac{1}{\varepsilon} \\ (Z_1^\Phi - 1)^{(1)} = -\frac{u^2}{16\pi^2} C_f^{(2)} \frac{1}{\varepsilon} \end{cases} \quad (27)$$

La fonction $\beta(u)$ recherchée est définie par la relation

$$\beta(u) = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial \mu} \right|_{g_0, \alpha_0} \quad (28)$$

et les constantes non renormalisées g_0 et α_0 sont reliées aux quantités renormalisées correspondantes par

$$g_0 = \frac{Z_1(u, \alpha)}{Z_3^{3/2}(u, \alpha)} g, \quad \alpha_0 = Z_3(u, \alpha) \alpha \quad (29)$$

En conséquence,

$$\beta(u) = \frac{-\frac{1}{2}\varepsilon u}{1 + u \frac{d}{du} [\ln Z_1 Z_3^{-3/2}]} = -\frac{1}{2}\varepsilon u - \frac{11}{3} u^3 \frac{C_f^{(2)}}{16\pi^2} + \dots \quad (30)$$

et on retrouve ainsi la valeur annoncée en (22) pour la constante b_0 (puisque, pour $SU(n)$, l'invariant quadratique de Casimir vaut $C_f^{(2)} = n$).

Les calculs à l'ordre suivant (2 boucles) se déroulent de manière analogue. les diagrammes sont cependant beaucoup plus nombreux et doivent tenir compte des soustractions déjà faites à l'ordre précédent. Noter l'utilisation de l'identité de Slavnov, exprimant l'invariance de jauge ordre par ordre de la théorie. Celle-ci s'écrit $Z_1/Z_3 = Z_1^\Phi/Z_3^\Phi$ et permet de déterminer Z_1 à partir des autres soustractions.

D'après l'équation (22), la théorie de jauge pure est asymptotiquement libre en régime ultraviolet ($g_{0c} = 0$), et la région physique est donc celle

des grands β_J ($g_0 \rightarrow 0$). Nous définirons l'échelle de masse (ou de longueur) standard pour la régularisation sur réseau (indice L) par

$$\xi_L^{-1} = \Lambda_L \equiv \frac{1}{a} (b_0 g_0^2)^{-b_1/2b_0^2} \exp\left(\frac{-1}{2b_0 g_0^2}\right) \quad (31)$$

obtenue en intégrant (21) dans le voisinage $g_0 \sim 0$ avec les deux premiers termes du développement de la fonction β . D'après cette relation, toute grandeur physique a une limite finie dans cette échelle. En d'autres termes, toute longueur ξ sera étudié par sa limite $\xi\Lambda_L$, finie lorsque β_J tend vers l'infini.

Il est important, dans les applications quantiques des calculs sur réseau, de relier Λ_L aux quantités analogues correspondant à d'autres schémas de régularisation. Envisageons par exemple une autre régularisation caractérisée par un régulateur m (masse) que l'on fera tendre vers l'infini. Dans les deux schémas, les longueurs de corrélation $\xi_i\Lambda_L$ et $\xi_i\Lambda_m$ exprimées dans l'échelle convenable auront des limites finies; comme ces deux modèles décrivent la même physique, le rapport de ces limites est indépendant de la quantité ξ_i considérée. La connaissance de ce rapport Λ_L/Λ_m n'est pas un problème académique, car on désire comparer des prédictions perturbatives – faites dans une régularisation adaptée, telle la régularisation dimensionnelle – à des quantités non perturbatives (masse des particules par exemple), calculées sur le réseau.

Ce rapport serait connu si nous avions calculé la fonction β perturbativement pour la régularisation du réseau. Cependant, nous avons préféré ne pas effectuer ces calculs, très complexes à l'ordre de deux boucles. Il existe une méthode ingénieuse permettant d'obtenir ce rapport en se limitant à la détermination de quelques diagrammes à une seule boucle. Développons autour d'une configuration $\{U_0\}$, satisfaisant aux équations du mouvement classique (choix de jauge dit *d'arrière plan*). L'action s'écrit $S_J = S_0 + S_2 + \dots$, S_2 étant quadratique dans les fluctuations autour de $S_0 = S_J(U_0) = (-1/2g_0^2) \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu}^0)^2$. Les termes suivants ne seront pas utilisés. La fonction de partition vaut

$$Z_L(a) = e^{-S_0} \int dU e^{-S_2} (1 + \mathcal{O}(g_0^2(a))) \quad (32)$$

Comparant à la formule analogue de l'autre régularisation, on obtient

$$-\ln \frac{Z_L(a)}{Z(m)} = \left[\frac{1}{2g_0^2(a)} - \frac{1}{2g_0^2(m)} + f(ma) \right] \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu}^0)^2 \quad (33)$$

La fonction $f(ma)$, résultat du calcul d'intégrales du type (32), correspond à une renormalisation finie. Sa forme est fixée par les divergences (logarithmiques) des diagrammes à une boucle

$$f(ma) = \frac{11n}{48\pi^2} [\ln ma + C] \quad (34)$$

Par ailleurs, Λ_L est lié à a par la formule (31), et Λ_m à m par un relation analogue; (33) se réécrit alors

$$\ln \frac{Z_L(a)}{Z(m)} = \frac{11n}{48\pi^2} \left(\ln \frac{\Lambda_L}{\Lambda_m} - C \right) \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu}^0)^2$$

Les deux régularisations devant conduire aux mêmes résultats physiques, ceci conduit à la relation

$$\Lambda_L = \Lambda_m e^C \quad (35)$$

Le calcul complet, qui consiste à extraire la valeur de la constante C de la fonction de Green à deux champs $F_{\mu\nu}^0$ dans les deux régularisations, s'avère assez long. De nouveau, un choix de jauge doit être fait et des fantômes de Faddeev-Popov introduits. Nous n'indiquerons ici que le résultat final, comparant l'action de Wilson à la régularisation dimensionnelle minimale (indice MS) pour le groupe de jauge $SU(n)$

$$\ln \frac{\Lambda_{MS}}{\Lambda_L} = \frac{1}{2}(\ln 4\pi - \gamma) - 0.0224780n \quad (36)$$

La constante numérique est une estimation des intégrales du réseau qui ne s'effectuent pas en termes de fonctions connues. Les formules pour d'autres actions sur réseau pourront être trouvées dans les références données en fin de chapitre.

1.3 Paramètre d'ordre et théorème d'Elitzur

L'étude d'un système statistique est généralement facilitée par l'existence d'un ou plusieurs paramètres d'ordre dont le comportement, radicalement différent dans chacune des phases, en permet une caractérisation simple ainsi qu'une interprétation naturelle. Ainsi, les systèmes de spins utilisent l'aimantation spontanée, identiquement nulle à haute température et non nulle sous la température de Curie. L'existence d'une aimantation spontanée indique une brisure spontanée de la symétrie globale du système. On pourrait penser à généraliser cette notion en recherchant un mécanisme analogue dans le cas de l'invariance de jauge, par exemple en étudiant la valeur moyenne du champ $\langle U_{ij} \rangle$. Nous allons voir qu'il n'en est rien. Très généralement, Elitzur a prouvé que toute quantité *locale* (ne faisant intervenir qu'un nombre fini de champs) non invariante de jauge (telle $\langle U_{ij} \rangle$) avait une valeur moyenne identiquement nulle à toute température, et ne pouvait donc être un paramètre d'ordre. En d'autres termes, les observables *locales* ne peuvent pas montrer de brisure spontanée dans une théorie à symétrie *locale*.

Avant de procéder à la démonstration de ce théorème, revenons à la signification exacte d'une aimantation non nulle. En effet, il peut paraître paradoxal que, dans un modèle d'Ising par exemple, en champ extérieur strictement nul, il existe une telle aimantation, puisque les configurations $\{\sigma_i\}$ et $\{-\sigma_i\}$ ont exactement le même poids de Boltzmann. En fait, si on envisage un processus dynamique, le renversement des spins se fait progressivement et la surface séparant les spins d'orientation opposée possède une énergie libre proportionnelle à son aire. Comme cette surface doit à un moment s'étendre indéfiniment, le processus ne pourra spontanément avoir lieu. Une autre manière de voir les choses est de se placer dans un champ extérieur infinitésimal h . Les deux configurations fondamentales $\{\sigma_i = +1\}$ et $\{\sigma_i = -1\}$ sont alors séparées par une barrière énergétique $2Nh$, où N est le nombre de sites. L'une d'entre elles est éliminée dans la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$. Très généralement, étant donné une quantité $f(\varphi)$, sa moyenne doit être calculée *en présence de sources extérieures* J et la limite thermodynamique $N \rightarrow \infty$ est prise *avant* la limite $J \rightarrow 0$; les deux limites ne commutent pas.

Appelons génériquement φ le champ de jauge prenant ses valeurs dans une variété compacte de groupe, on calculera

$$\langle f(\varphi) \rangle = \lim_{J \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \langle f(\varphi) \rangle_{N,J} \quad (37)$$

avec

$$\langle f(\varphi) \rangle_{N,J} = Z_{N,J}^{-1} \int \exp(S(\varphi) + J \cdot \varphi) f(\varphi) d\mu(\varphi) \quad (38)$$

Dans la preuve du théorème d'Elitzur en présence d'une symétrie locale, considérons une quantité $f(\varphi)$, non invariante sous l'action d'un groupe de transformations $\varphi \rightarrow {}^g\varphi$ laissant invariant l'action (en l'absence de sources extérieures) et la mesure. Par "non invariante", nous entendons une quantité sans aucune composante invariante, c'est-à-dire telle que

$$\int f({}^g\varphi) dg = 0 \quad (39)$$

Le groupe de transformations considéré ici est local et l'intégrale se fait indépendamment sur chaque $g(\mathbf{x})$. Il est donc possible de ne considérer que le sous-groupe des transformations qui n'agit que sur la seule partie finie $\{\varphi'\}$ des champs dont dépend la fonction $f(\varphi)$ (supposée locale), tout en laissant invariant l'ensemble complémentaire $\{\varphi''\} : \varphi'' = {}^g\varphi''$. Si on effectue alors le changement de variables $\varphi \rightarrow {}^g\varphi$ dans l'intégrale (38), en tenant compte de l'invariance de l'action et de la mesure, on obtient, après intégration sur g ,

$$\langle f(\varphi) \rangle_{N,J} = Z_{N,J}^{-1} \int \exp(S(\varphi) + J' \cdot {}^g\varphi' + J'' \cdot \varphi'') f({}^g\varphi) d\mu(\varphi) dg \quad (40)$$

Le point crucial est que, lorsque la source J est bornée par une quantité faible ε , l'inégalité suivante est satisfaite

$$|\exp(J' \cdot \varphi') - 1| \leq \eta(\varepsilon) \quad (41)$$

avec $\eta(\varepsilon)$ s'annulant uniformément avec ε , quels que soient φ' et N . Cette inégalité est évidente pour les systèmes de jauge, puisque le sous-système $\{\varphi'\}$ est fini et indépendant de N et que son domaine de définition est compact. Elle n'est pas vraie pour les systèmes de spins où la partition $\{\varphi\} = \{\varphi'\} \cup \{\varphi''\}$ n'est pas envisageable, la symétrie étant globale; $J \cdot \varphi$ est alors une quantité extensive proportionnelle à N . Séparant l'intégrale (40) en deux termes $\exp J' \cdot \varphi' = 1 + (\exp J' \cdot \varphi' - 1)$, on constate que le premier s'annule identiquement par intégration sur g , d'après (39). Le second est borné à l'aide de (41), si bien que

$$\left| \langle f(\varphi) \rangle_{N,J} \right| \leq 2\eta(\varepsilon) \text{ Sup} f$$

Il ne reste plus qu'à prendre les limites dans le bon ordre pour obtenir

$$\langle f(\varphi) \rangle \equiv 0 \quad (42)$$

qui est la conclusion du théorème. Pour définir un paramètre d'ordre, on est donc obligé de considérer une quantité non locale, comme l'a observé Wilson. L'interprétation physique sous-jacente au modèle conduit à introduire une telle quantité (*boucle de Wilson*). Considérons une boucle fermée C et

$$W(C) = \langle \text{Tr} U_C \rangle \quad (43)$$

où la trace est prise ici dans la représentation fondamentale (bien que d'autres choix puissent aussi se révéler intéressants). Avec les conditions suivantes

- β_J petit (couplage fort),
- modèle de pure jauge *sans champs de matière couplés*,
- groupe de jauge compact possédant un centre non trivial,

nous prouverons dans la section 3 que $-\ln W(C)$ tend vers l'infini comme l'aire minimale $\mathcal{A}(C)$ enclose par la courbe C , lorsque celle-ci grandit indéfiniment (loi des aires). La démonstration repose sur la convergence de la série de couplage fort, dont le terme d'ordre le plus bas est représenté par le diagramme pavant de plaquettes cette surface minimale.

Dans la région de couplage faible, cette assertion peut se révéler fausse. Nous le verrons pour les groupes discrets du type Z_2 où des arguments de dualité s'appliquent. Nous donnons ici un argument perturbatif heuristique, valable dans certains cas pour les groupes continus (mais qui s'effondre dans le cas des théories non abéliennes en dimension quatre qui sont asymptotiquement libres et pour lesquelles le comportement de couplage fort

doit d'étendre jusqu'aux couplages infiniment faibles). La paramétrisation (3) des champs permet d'écrire

$$W(C) = \left\langle \text{P exp } i \oint_C A_\mu dx^\mu \right\rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} \oint \oint_C \Delta(x-y) dx dy + \dots \right) \quad (44)$$

en se limitant au terme d'ordre le plus bas. Le propagateur $\Delta(x-y)$ du champ de jauge A_μ favorise les faibles séparations, si bien que l'argument de l'exponentielle (44) est proportionnel au périmètre de la courbe C .

En résumé, la *tension de corde* définie par

$$K = \lim_{C \text{ grand}} \left(-\frac{\ln W(C)}{A(C)} \right) \quad (45)$$

permet de distinguer une phase *confinée* ($K \neq 0$) d'une phase non confinée ($K \equiv 0$). Ce paramètre d'ordre est concluant en dimension suffisamment grande $d \geq 5$, où les deux phases sont observées. Cet argument suggère que la phase confinée est hors de portée de la théorie perturbative continue (malgré toutes les tentatives ingénieuses employées). C'est une justification très forte pour l'utilisation des théories de jauge sur réseau.

Quelle est la signification physique de la quantité K ? De manière heuristique, envisageons le processus suivant. Une paire quark-antiquark est produite à un certain instant; les deux particules sont écartées à la distance R . Leur énergie potentielle est $V(R)$. Elle restent ainsi à la distance R pendant le temps T , avant de s'annihiler. L'amplitude de probabilité d'un tel processus est $\exp(-V(R)T)$ (l'espace étant euclidien, la phase usuelle $\exp(iEt)$ est remplacée par $\exp(-Et)$). Or cette amplitude est précisément la valeur moyenne de la boucle de Wilson d'aire $R \times T$ sous-tendue par la trajectoire de la paire. A grande distance et couplage fort, le potentiel est asymptotiquement linéaire $V(R) = KR$ et empêche donc toute séparation des particules qui restent confinées en un état lié. Dans la phase non confinée où la loi en périmètre s'applique, $V(R)$ est borné et il devient possible de séparer les particules en ne leur fournissant qu'une énergie finie. On voit également les limites de l'interprétation de ce paramètre d'ordre aux modèles de pure jauge sans champs dynamiques de matière. Dans le cas contraire, en cas de séparation trop importante, une paire supplémentaire est créée et restaure ainsi la loi en périmètre de la boucle de Wilson à tout couplage.

Calculer K pour les réseaux bidimensionnels.

1.4 Dualité

Le modèle d'Ising bi-dimensionnel nous a permis de rencontrer un cas particulier de dualité. Les relations qui s'ensuivent ont déterminé la position du point critique et ont été essentielles pour la solution exacte de ce modèle

à deux dimensions. La dualité s'exprime en fait dans un cadre beaucoup plus large, auquel appartiennent les théories de jauge *abéliennes*. Considérons, en toute généralité, un modèle sur un *complexe* abstrait de dimension d . La notion de complexe généralise et formalise les notions de voisinage et de bord. Ainsi, un réseau est un complexe dont les *cellules*, classées en dimension croissante, sont les sites, les liens, les plaquettes, les cubes, ... Très généralement, un complexe est un ensemble de cellules $c_k^{(i)}$ qui vérifie les conditions suivantes :

- (1) A chaque cellule $c_k^{(i)}$ est associée une *dimension* entière positive ou nulle k , bornée supérieurement par la *dimension* d du complexe.
- (2) A chaque cellule $c_k^{(i)}$ est associée une cellule dite *d'orientation opposée* et notée $-c_k^{(i)}$. Cette application est involutive : $-(-c_k^{(i)}) = c_k^{(i)}$.
- (3) A chaque paire de cellules dont la dimension diffère d'une unité est associé un entier appelé *nombre d'incidence* et noté $(c_k^{(i)} : c_{k-1}^{(j)})$. S'il est non nul, on dira que $c_{k-1}^{(j)}$ est une *face* de $c_k^{(i)}$. En outre, le nombre d'incidence change de signe lorsqu'on change l'orientation d'une cellule

$$(c_k^{(i)} : -c_{k-1}^{(j)}) = (-c_k^{(i)} : c_{k-1}^{(j)}) = -(c_k^{(i)} : c_{k-1}^{(j)}).$$

- (4) Quelles que soient les cellules c_k et c_{k-2} , on requiert

$$\sum_i (c_k : c_{k-1}^{(i)}) (c_{k-1}^{(i)} : c_{k-2}) = 0$$

Cette relation est à la base des concepts d'homologie et de cohomologie.

Vérifier que tout réseau est un complexe. Nous reviendrons sur de telles constructions dans le chapitre XI (volume 2) en étudiant la géométrie aléatoire.

Une *k-chaîne* à valeurs dans un groupe *abélien* G (noté *additivement*, contrairement à nos habitudes, dans ce paragraphe) est une fonction impaire des cellules de dimension k dans G

$$c_k^{(i)} \rightarrow \varphi_i \in G \quad -c_k^{(i)} \rightarrow -\varphi_i$$

Ces fonctions forment un groupe, et il est pratique de représenter une *k-chaîne* par la notation $\sum_i \varphi_i c_k^{(i)}$. Nous appellerons *chaîne nulle* notée 0 la chaîne qui envoie toutes les cellules sur l'élément neutre (zéro) de G . Enfin, nous définirons les opérateurs de bord Δ et de cobord ∇ (à ne pas confondre avec laplacien et gradient) par les applications des *k-chaînes* dans l'espace des $(k-1)$ - et $(k+1)$ -chaînes

$$\Delta \sum_i \varphi_i c_k^{(i)} = \sum_{i,j} \varphi_i (c_k^{(i)} : c_{k-1}^{(j)}) c_{k-1}^{(j)} \quad (46)$$

$$\nabla \sum_i \varphi_i c_k^{(i)} = \sum_{i,j} \varphi_i (c_{k+1}^{(j)} : c_k^{(i)}) c_{k+1}^{(j)} \tag{47}$$

Nous allons maintenant considérer les coefficients φ_i d'une $(k - 1)$ -chaîne comme les champs d'un modèle statistique. Le système a donc pour configurations des $(k - 1)$ -chaînes. L'action étudiée est écrite

$$S \left(\sum_i \varphi_i c_{k-1}^{(i)} \right) = \sum_i \chi \left(\sum_j \varphi_j (c_k^{(i)} : c_{k-1}^{(j)}) \right) + \sum_i V(\varphi_i) \tag{48}$$

où les fonctions réelles χ et V sur le groupe G représentent respectivement le terme d'interaction et un terme potentiel pour les champs.

Si on choisit $k = 1$ et $G = Z_2 = \{0, 1\}$, groupe *additif* des entiers modulo 2, on reconnaîtra une écriture peu conventionnelle du modèle d'Ising dans un champ extérieur constant. L'interaction est la somme sur tous les liens ij de $\chi(\sigma_i + \sigma_j)$ avec $\chi(0) = \beta, \chi(1) = -\beta$. De même, le modèle de jauge correspond au cas $k = 2$.

L'exponentielle de l'action peut être développée en termes des caractères du groupe, base des fonctions sur un groupe abélien. La fonction de partition prend alors la forme

$$Z = \|G\|^{-n_{k-1}} \sum_{(k-1)\text{-chains}} \left\{ \prod_i \sum_r \beta(r) \chi_r \left(\sum_j \varphi_j (c_k^{(i)} : c_{k-1}^{(j)}) \right) \right\} \left\{ \prod_i \sum_r \gamma(r) \chi_r(\varphi_i) \right\} \tag{49}$$

où les coefficients de Fourier valent

$$\begin{cases} \beta(r) = \|G\|^{-1} \sum_{\varphi \in G} \chi_r(\varphi) \exp \chi(\varphi) \\ \gamma(r) = \|G\|^{-1} \sum_{\varphi \in G} \chi_r(\varphi) \exp V(\varphi) \end{cases} \tag{50}$$

Dans ces formules, n_{k-1} est le nombre de $(k - 1)$ -cellules et $\|G\|$ le nombre d'éléments du groupe. Lors du développement des produits entre accolades dans (49), chaque terme est obtenu en assignant une représentation r à une cellule; c'est donc une chaîne à valeurs dans le groupe dual G^* , ensemble des représentations irréductibles de G , qui a une structure de groupe abélien relativement au produit des représentations de G . C'est cette structure qui

disparaît lors de l'extension aux théories non abéliennes, empêchant ainsi une généralisation simple de la notion de dualité. Ainsi, les termes de la première accolade (49) sont des k -chaînes $g = \sum r_i c_k^{(i)}$ à valeurs dans G^* , et ceux de la seconde des $(k-1)$ -chaînes $h = \sum -s_j c_{k-1}^{(j)}$. Regroupant les termes dépendant d'un même champ φ_j , nous trouvons

$$\left[\prod_i \chi_{r_i} \left(\varphi_j (c_k^{(i)} : c_{k-1}^{(j)}) \right) \right] \chi_{-s_j}(\varphi_j) = \chi_{-s_j + \sum_i r_i (c_k^{(i)} : c_{k-1}^{(j)})}(\varphi_j)$$

La sommation sur φ_j (provenant de la sommation sur les $(k-1)$ -chaînes dans l'équation (41)) peut être effectuée; le résultat est nul tant que l'indice du caractère n'est pas 0 (celui de la représentation triviale). Il vaut $\|G\|$ dans ce dernier cas. Cet indice n'est autre que la composante suivant $c_{k-1}^{(j)}$ de la $(k-1)$ -chaîne à valeurs dans G^* , $-h + \Delta g$. La fonction de partition (49) prend donc la forme

$$Z = \sum_{\substack{k\text{-chaînes} \\ \text{on } G^*}} \exp \left\{ \sum_i \ln \beta(r_i) + \sum_i \ln \gamma \left(\sum_j r_j (c_k^{(j)} : c_{k-1}^{(i)}) \right) \right\} \quad (51)$$

On remarque une analogie de l'argument de l'exponentielle avec l'action initiale (48). Cependant, les champs r_i sont maintenant associés aux cellules de dimension k et interagissent selon les faces communes des cellules qui les portent (interaction de bord), alors que, dans (48), les champs φ_i sont associés aux cellules de dimension $k-1$ et interagissent le long des cellules qu'ils bordent (interaction de cobord). Cette différence disparaît si on interprète (51) sur le *complexe dual*.

Pour définir ce nouveau complexe, nous avons juste à modifier les dimensions k des cellules en $d-k$, en laissant les nombres d'incidence inchangés. Désignant par c_{d-k}^* la cellule duale de c_k obtenue par cette substitution, on aura $(c_k : c_{k-1}) = (c_{d-k+1}^* : c_{d-k}^*)$, et on vérifie que les propriétés caractérisant un complexe restent valables pour ce complexe dual.

Interprétation géométrique. Pour un réseau hypercubique, les sites duaux sont identifiés aux centres des hypercubes du réseau direct; un lien joignant deux sites duaux voisins sera dual de la face séparant les deux hypercubes correspondants, etc. Aux problèmes de bord près, le réseau dual est donc aussi un réseau hypercubique, décalé vis-à-vis du réseau initial. Vérifier que réseaux bidimensionnels triangulaire et hexagonal, tridimensionnels cubique à faces centrées et cubique centré sont respectivement duaux l'un de l'autre.

Dans cette interprétation, la fonction de partition (51) dérive de l'action duale

$$S^* \left(\sum_i r_i c_{d-k}^{(i)*} \right) = \sum_i \ln \gamma \left(\sum_j r_j (c_{d-k+1}^{(i)*} : c_{d-k}^{(j)*}) \right) + \sum_i \ln \beta(r_i) \quad (52)$$

$$+ n_{d-k}^* \ln \|G^*\|$$

Mis à part un terme additif constant, on retrouve une action du même type que l'action initiale (48).

Etudions plus en détail le cas particulier correspondant à l'absence de champ extérieur ($V \equiv 0$); $\gamma(r)$ est alors une fonction δ sur le groupe dual, obligeant son argument r à être 0, représentation triviale de G . La chaîne h étant donc nulle, la chaîne $g = \sum r_i c_{d-k}^{(i)*}$, (interprétée sur le complexe dual) a un cobord nul $\nabla g = 0$. Les opérateurs $\nabla \nabla$ et $\Delta \Delta$ étant identiquement nuls, les cobords des $(d-k-1)$ -chaînes sont tous solutions de cette équation. Cependant, il peut exister d'autres solutions. Ainsi, tout cercle tracé sur un tore ne borde pas nécessairement une surface sur ce tore. Ici s'introduit la notion de groupe d'homologie (de cohomologie) d'ordre k , quotient de l'image par Δ (∇) des $(k+1)$ - ($(k-1)$ -) chaînes. Dire que le groupe de cohomologie d'ordre $(d-k)$ est trivial signifie que $g = \nabla g'$ est la solution générale de $\nabla g = 0$.

Montrer qu'il en est ainsi pour un hypercube et ses faces. En vérifiant que les groupes de (co)homologie non stables par subdivision des cellules, en déduire que les réseaux euclidiens à bords libres ont des groupes de (co)homologie triviaux.

Remarquons que la chaîne g' n'est elle-même définie qu'au cobord d'une $(d-k-2)$ -chaîne. On déduit finalement de ces considérations l'expression de l'action duale en l'absence de champ extérieur.

$$S^* \left(\sum_i r_i c_{d-k-1}^{(i)*} \right) = \sum_i \ln \beta \left(\sum_j r_j (c_{d-k}^{(i)*} : c_{d-k-1}^{(j)*}) \right) \quad (53)$$

$$+ n_{k-1} \ln \|G\| - \ln x_{k+1}$$

où x_{k+1} est le nombre de $(k+1)$ -chaînes de bord nul (ou, de façon équivalente, le nombre de $(d-k-1)$ -chaînes duales de cobord nul). Ce nombre est défini récursivement par

$$x_k = \|G\|^{n_{k+1}} / x_{k+1}, \quad x_d = \|G\| \quad (54)$$

L'action duale (53) est de nouveau similaire à l'action initiale.

Vérifier que le cas $k=1$, $d=2$, $G=Z_2$, redonne la dualité déjà étudiée du modèle d'Ising bidimensionnel.

Le cas $k = d$ en l'absence de champ extérieur est ainsi dual d'un modèle de variables indépendantes dans un champ extérieur qui ne contient aucun effect collectif. On retrouve ainsi la trivialité des modèles unidimensionnels de spins ou bidimensionnels de jauge.

Le modèle quadridimensionnel de jauge Z_2 est son propre dual. Il correspond en effet au cas $d = 4$, $k = 2$ sans champ extérieur. Son énergie libre par site satisfait donc à la relation

$$F(\beta) = F(\beta^* = -\frac{1}{2} \ln \tanh \beta) + 3 \ln \sinh 2\beta \quad (55)$$

La dualité relie les régions de haute et basse température, et la formule (55) est d'ailleurs analogue à celle correspondant au modèle d'Ising bidimensionnel. S'il y a une, et une seule, transition, celle-ci se produira au point fixe de la transformation $\beta \rightarrow \beta^*$, soit

$$\beta_c = \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2}) \quad (56)$$

C'est effectivement ce que l'on observe dans les simulations numériques de ce système, la transition étant dans ce cas du premier ordre.

Enfin, considérons le système tridimensionnel de jauge Z_2 avec champ de matière, d'action ($U_{ij} = \pm 1$, $\sigma_i = \pm 1$)

$$S = \beta \sum_{\mathbf{p}} U_{ij} U_{jk} U_{kl} U_{li} + \gamma \sum_{(i,j)} \sigma_i U_{ij} \sigma_j \quad (57)$$

A configuration de champ de matière fixée, choisissons la jauge dite *unitaire* $U'_{ij} = \sigma_i U_{ij} \sigma_j$. Celle-ci permet d'éliminer les champs de matière et d'identifier le modèle (57) au cas $k = 2$ de l'action générale (48). A trois dimensions, l'action duale s'écrit

$$S^* = -\frac{1}{2} \ln \tanh \gamma \sum_{\mathbf{p}} U_{ij}^* U_{jk}^* U_{kl}^* U_{li}^* - \frac{1}{2} \ln \tanh \beta \sum_{(i,j)} \sigma_i^* U_{ij}^* \sigma_j^* \quad (58)$$

et le système est de nouveau auto-dual. Il faut remarquer l'interversion des couplages de jauge et de matière, ainsi que des régions de haute et basse température. Dans les variables adaptées $\tilde{\beta} = \ln \sinh 2\beta$ et $\tilde{\gamma} = \ln \sinh 2\gamma$, le diagramme de phase est symétrique par rapport à la ligne $\tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$. En l'absence de champs de matière, $\gamma = 0$, le modèle de jauge pur tridimensionnel est dual du modèle d'Ising. En particulier, il présente une transition du *second ordre* que les résultats numériques du modèle d'Ising permettent de situer à $\beta_c \approx 0.7613$.

(1) On peut retrouver cette équivalence entre les deux modèles par un raisonnement moins général, du type de celui utilisé dans le chapitre II. On peut partir des diagrammes de haute température du modèle de jauge, qui sont

des surfaces fermées faites de p plaquettes et dont la contribution est $\tanh^p \beta$. Ces surfaces peuvent être caractérisées par leur intérieur, qui est un ensemble de cubes. Une configuration obtenue en assignant une variable $\sigma_i = -1$ aux centres des cubes intérieurs, et $+1$ aux centres des cubes extérieurs caractérise donc un diagramme haute température. Une plaquette séparant les cubes proches voisins i et j fait partie ou non de la surface selon la valeur de $\sigma_i \sigma_j$. On peut ainsi ramener, comme au chapitre II, la somme des contributions des diagrammes de haute température à la fonction de partition d'un modèle d'Ising.

(2) Cas des groupes Z_n . Montrer que le modèle dépend généralement de $\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$ paramètres et que le diagramme des phases admet une symétrie. En particulier, en déduire la position critique $\beta_c = \frac{2}{3} \ln(1 + \sqrt{3})$ des modèles auto-duaux à groupe de symétrie Z_3 . Trois phases apparaissent dans les systèmes lorsque $n \geq 5$, et la dualité ne fournit plus qu'une relation entre la position des deux transitions.

(3) Dans le cas du groupe $U(1)$, le groupe dual G^* est l'ensemble additif des entiers. La propriété de dualité correspondante a été exploitée au chapitre IV pour traiter le modèle XY .

(4) Etudier la quantité duale de la boucle de Wilson, et, plus généralement, des autres observables dans une théorie de jauge abélienne. La modification à apporter au développement diagrammatiques issu de la formule (51) consiste à changer les représentations r_i des plaquettes d'une surface arbitraire s'appuyant sur la boucle C en $r_i \otimes f$ (f représentation fondamentale utilisée pour définir l'opérateur de Wilson). Vérifier qu'après dualité, l'observable apparaît comme le quotient d'une fonction de partition où certaines constantes de couplage ont été modifiées, par la fonction de partition usuelle. Ainsi, à trois dimensions, pour le modèle de jauge Z_2 , le couplage de tous les liens traversant la surface minimale est inversé; les diagrammes du modèle d'Ising de haute température dont la contribution change doivent alors enlacer la courbe C . On en déduit le comportement en loi de périmètre du paramètre de Wilson à basse température.

't Hooft a introduit une observable invariante de jauge intéressante pour un groupe arbitraire à centre non trivial (y compris les cas non abéliens). Nous la décrivons ici en dimension quatre, laissant au lecteur le soin de généraliser. Considérons une courbe simple fermée C^* bordant une surface Σ^* du réseau dual. Multiplions les variables de plaquettes duales de celles de Σ^* par le même élément du centre du groupe de jauge. Cela définit une fonction de partition *frustrée*, et l'observable de 't Hooft est le rapport de celle-ci par la fonction de partition usuelle non frustrée. En général, cette observable a un comportement dual de la boucle de Wilson, en loi de périmètre à couplage fort et en loi d'aire à couplage faible. Dans des cas tels que les modèles Z_n cités plus haut, les deux observables ont une loi de périmètre dans la phase de masse nulle intermédiaire. Les boucles de Wilson et de 't Hooft ont des propriétés topologiques relatives non triviales, analogues aux variables d'ordre et de désordre.

2. Structure du diagramme de phase

2.1 La solution de champ moyen

Telle qu'elle a été décrite au chapitre III et en dépit de difficultés *a priori* telles la violation apparente du théorème d'Elitzur, la méthode du champ moyen va permettre une première exploration du diagramme de phase d'un système de jauge pur. Nous utiliserons une action d'essai

$$S_H = \frac{H}{n} \sum_{(ij)} \text{Re Tr } U_{ij} \quad (59)$$

On introduit la fonction de partition par lien correspondante

$$z(H) = \exp u(H) = \int \exp \left(\frac{H}{n} \text{Re Tr } U \right) dU \quad (60)$$

et chaque champ prend une valeur moyenne non nulle. En notation matricielle, la valeur moyenne est proportionnelle à la matrice unité

$$\langle U \rangle_H = z(H)^{-1} \int U \exp \left(\frac{H}{n} \text{Re Tr } U \right) dU = u'(H) \quad (61)$$

Un telle action d'essai ne satisfait évidemment pas au théorème d'Elitzur. Cela ne doit pas nous étonner, puisque l'action (59) n'est pas invariante de jauge. Il sera remédié par la suite à cet état de choses; l'étude correspondante est néanmoins intéressante, car nous verrons que les résultats obtenus pour les quantités invariantes resteront valables. Le calcul se déroule comme au chapitre III. L'application de l'inégalité (III.14) conduit à

$$\frac{\ln Z}{Nd} \geq \text{Sup}_H \left\{ u(H) - H u'(H) + \frac{1}{2} \beta_J (d-1) u'(H)^4 \right\} \quad (62)$$

Le membre de droite représente l'*approximation du champ moyen* pour le système. La fonction $u(H)$, liée à une intégrale (60) sur un espace compact d'une fonction convexe (exponentielle) est elle-même convexe, minimale en $H = 0$ au voisinage duquel elle se comporte en H^2 . La maximisation du membre de droite de l'équation (62) conduit à la solution $H = 0$, unique pour $\beta_J = 0$ et au voisinage de ce point. Contrairement aux systèmes de spins, ce maximum demeure à toute température un maximum local. En effet, $u'(H)^4$ est d'un ordre supérieur H^4 , et ne peut modifier la courbure à l'origine. Il n'en est pas moins vrai que ce maximum deviendra secondaire pour β_J suffisamment grand. La figure 4 montre le comportement de la fonction à maximiser pour différentes valeurs de $\beta^* = 2\beta_J(d-1)$. Pour une valeur critique $\beta^* = \beta_c^*$, le maximum absolu change brutalement de position. Nous sommes donc en présence d'une transition du premier ordre, avec discontinuité des observables physiques. La figure 5 montre

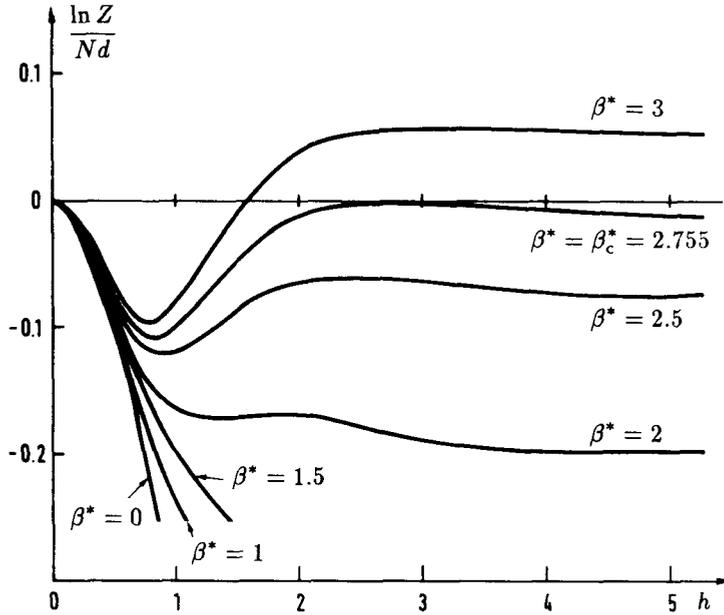


Figure 4: Energies libres d'essai à maximiser en H pour différentes valeurs de $\beta^* = 2\beta_J(d-1)$ dans le cas d'un groupe de jauge Z_2 .

la forme caractéristique de l'énergie libre. La partie en pointillé de la courbe indique la position (non physique) du minimum. Les régions tiretées correspondent à des maxima secondaires, observables sous forme de phases métastables. Au point critique T , aucune longueur physique ne devient infinie. Les quantités physiques restent analytiques en ce point, mais sont multivaluées et changent brutalement de détermination. Il n'y a donc pas de limite continue en ce point. Les extrémités A (à l'infini) et B des régions métastables correspondent à des singularités des observables dans la variable β_J . Cette transition est déconfinante. La boucle de Wilson de périmètre P a une valeur moyenne

$$W(C) = \left\langle \text{Tr} \prod_C U_{ij} \right\rangle = n[u'(H)]^P \quad (63)$$

Dans la région de basse température ($H \neq 0$), elle aura donc une décroissance en loi de périmètre, montrant le caractère déconfiné de cette phase. La loi en aire de la région confinée ne peut être obtenu au niveau de cette approximation (qui prédit $W(C) = 0$ dans la région de haute température).

L'image simple que nous a donné cette approximation se trouve re-

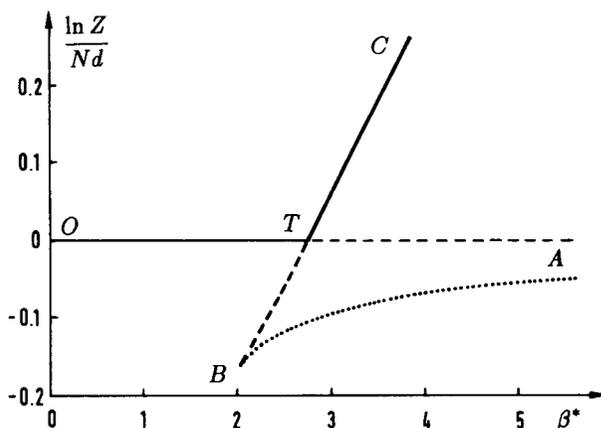


Figure 5 : L'énergie libre dans l'approximation du champ moyen pour un groupe de jauge Z_2 .

marquablement confirmé par les expériences de simulation numérique. Examinons tout d'abord le cas du groupe Z_2 . En dimension supérieure ou égale à 4, la transition observée est effectivement du premier ordre. Il y a un accord raisonnable entre la position de la transition prédite par le champ moyen $\beta_c = 0.459$ et la position exacte $\beta_c = 0.4407$, connu à $d = 4$ par la dualité. La dimension 3 doit être considérée comme critique, la théorie du champ moyen cessant d'être valable. Si l'ordre de la transition est incorrecte – elle doit être du second ordre, puisque le modèle est dual du modèle d'Ising –, on observe encore une concordance entre la position de la transition $\beta_c = 0.7613$ et la position obtenue par l'approximation du champ moyen $\beta_c = 0.689$.

La dimension critique pour les groupes de jauge non abéliens est attendue à $d = 4$, où la théorie est asymptotiquement libre. En dimension supérieure, la validité du champ moyen est confirmée par les expériences numériques. Ainsi, pour $SU(2)$, la transition du premier ordre à $d = 5$, prévue pour $\beta_c = 2.12$, a été observée à $\beta_c = 1.64$. A $d = 4$, aucune transition n'a été mise en évidence dans les simulations numériques; il existe cependant une région où les quantités physiques subissent un changement rapide. Si on attribue ce phénomène à un souvenir lointain de la transition prédite par la méthode du champ moyen, on observe encore une concordance entre les positions prédites et observées (pour $SU(2)$ par exemple, 2.826 et 2.2). Tout cela semble indiquer que notre approximation est un bon point de départ pour décrire le système et nous encourage à envisager de calculer systématiquement les corrections.

(1) Refaire les calculs dans la jauge axiale. Le résultat est alors

$$\frac{\ln Z}{N(d-1)} \geq \text{Sup}_H \left\{ u(H) - Hu'(H) + \frac{1}{2}\beta_J(d-2)u'(H)^4 + \beta_J u'(H)^2 \right\} \quad (64)$$

Le dernier terme de cette formule est maintenant susceptible de changer le signe de la courbure à $H = 0$. En grande dimension, il est encore trop faible pour intervenir avant l'apparition de la transition du premier ordre. Son effet sera simplement de ramener l'extrémité A de la phase métastable de couplage fort à distance finie

$$\beta_A = [2u''(0)]^{-1} \quad (65)$$

Quand la dimension décroît, la queue d'aronde $TABT$ se rétrécit pour disparaître à une dimension critique

$$d_c = 2 - \frac{1}{6} \frac{u'''(0)}{u''(0)^3} \quad (66)$$

Ce choix de jauge semble donc intéressant, d'autant plus que, dès que la jauge est fixée, il n'y a plus d'inconvénient à choisir une action d'essai de type (59), non invariante de jauge. Nous verrons que, pour les groupes continus, le calcul des corrections impose en outre le choix d'une jauge. Cependant, d'autres problèmes apparaissent. Ainsi, une boucle de Wilson de dimensions $R \times T$ utilisant la dimension temporelle le long de laquelle les champs de jauge ont été fixés à l'unité, décroît en R $W(C) = n[u'(H)]^{2R}$ et non en périmètre ($R + T$). Ceci viole des bornes de décroissance exponentielle à R fixé lorsque $T \rightarrow \infty$.

Si cette difficulté est levée lorsqu'on introduit les corrections pour un groupe continu, il n'en est pas de même pour les groupes discrets. En fait, le champ moyen est une approximation de gaz dilué, chaque champ de jauge fluctuant dans le champ moyen sans interagir avec ses voisins; la méthode apparaît ainsi comme une sommation partielle de la série de basse température. Dans le choix de jauge axial, le retournement d'un champ temporel est remplacé par le retournement d'une infinité de champs spatiaux (figure 6). L'énergie nécessaire pour cela est néanmoins finie. L'approximation ne tient pas compte de cette possibilité, même lorsque des corrections (en nombre fini) lui seront ajoutées. En particulier, le comportement de basse température est incorrect. Un moyen de remédier à ce défaut consiste à ajouter la contribution d'un gaz dilué de ces défauts, et on vérifie alors que l'on restaure ainsi le comportement correct à basse température et la loi de décroissance des boucles de Wilson temporelles. Cependant, le calcul des corrections s'en trouve fortement compliqué, et l'on préfère, pour les groupes discrets, utiliser la méthode décrite plus loin qui évite de fixer la jauge.

(2) Pour un groupe $SU(n)$, étudier par la méthode du champ moyen l'action généralisée

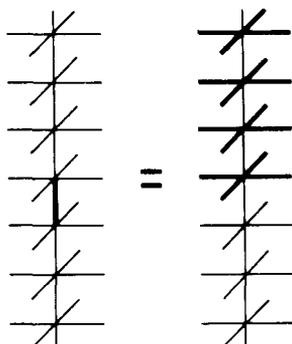


Figure 6: L'équivalent du retournement d'un champ temporel en jauge axiale.

$$S = \sum_p \left(\beta_J \frac{1}{n} \text{Re Tr } U_p + \beta_A \frac{1}{n^2 - 1} |\text{Tr } U_p|^2 \right) \quad (67)$$

Cette extension est intéressante, car elle permet de mieux cerner le rôle du centre de groupe. Le terme supplémentaire est en effet invariant par les transformations du centre $Z_n: U_{ij} \rightarrow \exp(2ik\pi/n)U_{ij}$ et représente l'action fondamentale pour le groupe $SU(n)/Z_n$. Le diagramme de phase permet d'interpoler entre différentes limites

$\beta_A = 0$, action de Wilson $SU(n)$.

$\beta_J = 0$, action de Wilson $SU(n)/Z_n$.

$\beta_A = \infty$, action correspondant au groupe de jauge Z_n . En effet, cette limite restreint les configurations à celles où U_p appartient au centre; c'est-à-dire qu'à une transformation de jauge près, U_{ij} appartient au centre Z_n .

$\beta_J = \infty$ enfin force toutes les variables de plaquette à prendre la valeur unité et fournit donc un modèle trivial, avec seulement des configurations de jauge pure et sans transition.

L'utilisation du champ moyen nécessite quelques précautions pour tenir compte correctement des éléments centraux. Nous poserons donc $U_{ij} = V_{ij}\varepsilon_{ij}$, et traiterons les deux champs V_{ij} et ε_{ij} indépendamment par des champs moyens H et h . Le résultat permet de dessiner un diagramme de phase (figure 7) où apparaissent trois régions.

- couplage fort pour β_J, β_A faibles ($H = 0, h = 0$),
- phase de couplage faible $SU(n)/Z_n$ ($H = 0, h \neq 0$) pour β_A grand, β_J faible; les champs fluctuant autour des valeurs du centre,
- phase de couplage fort ($H \neq 0, h \neq 0$).

Toutes les lignes de transition sont du premier ordre. Les simulations numériques confirment ce diagramme. Néanmoins, à $d = 4$, une portion de

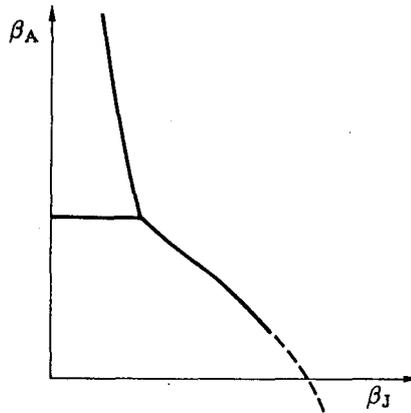


Figure 7 : Le diagramme de phase prédit par l'approximation du champ moyen pour les théories étendues (action (67)).

la ligne (en pointillé sur la figure) disparaît; les phases *a* et *c* deviennent continûment reliées, alors que la phase de couplage faible $SU(n)/Z_n$ reste isolée. Le point d'arrêt est proche de l'axe $\beta_A = 0$, et la zone de raccordement où les propriétés du système $SU(n)$ ($n = 2$ ou 3) varient rapidement, peut s'expliquer par la proximité de ce point singulier. Il est à noter que le modèle $SU(n)/Z_n$, qui n'a pas de paramètre d'ordre du type boucle de Wilson (puisque de centre trivial), possède néanmoins une transition du premier ordre à $d = 4$.

2.2 Corrections au champ moyen

Nous allons maintenant étudier, suivant le canevas indiqué dans le chapitre III, les fluctuations autour de la solution de champ moyen. Cette étude s'appuie sur la transformation de Laplace de la mesure sur les champs. Cependant, l'action du modèle de jauge étant quartique, il n'est plus possible d'utiliser directement l'identité (III.142), qui exploite le fait que la transformée d'une gaussienne est connue explicitement. Le calcul peut s'effectuer néanmoins en utilisant une méthode du col double que nous allons maintenant exposer. La représentation exponentielle de la distribution δ

$$\delta(U_{\alpha\beta} - V_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp H_{\beta\alpha}^*(U_{\alpha\beta} - V_{\alpha\beta}) dH_{\beta\alpha} \quad (68)$$

est insérée dans la définition de la fonction de partition, pour chaque élément de matrice $(U_{ij})_{\alpha\beta}$ des champs de jauge. Ces quantités V_{ij} et H_{ij} sont des matrices $n \times n$ complexes, sur lesquelles nous intégrerons en utilisant une

mesure

$$[dV] = \prod_{(ij)\alpha\beta} d(V_{ij})_{\alpha\beta} \quad \text{and} \quad [dH] = \prod_{(ij)\alpha\beta} d(H_{ij})_{\alpha\beta}$$

à ne pas confondre avec la mesure dU sur le groupe, sous-variété de l'espace des matrices. Nous n'introduisons qu'une seule paire de ces matrices pour chaque lien (ij) , en posant $V_{ji} \equiv V_{ij}^\dagger$, $H_{ji} \equiv H_{ij}^\dagger$. La fonction de partition s'écrit alors

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int \exp \left\{ S(V_{ij}) + \sum_{(ij)} \text{Re Tr } J_{ji}^\dagger U_{ij} \right\} \\ &\quad \prod_{ij} \delta^{(n^2)}(U_{ij} - V_{ij}) [dV] \prod_{ij} dU_{ij} \\ &= \int \exp \left\{ S(V_{ij}) + \sum_{ij} \left(\text{Re Tr } (J_{ji} + H_{ji})^\dagger U_{ij} - \text{Re Tr } H_{ji}^\dagger V_{ij} \right) \right\} \\ &\quad [dH][dV] \prod_{ij} dU_{ij} \end{aligned} \quad (69)$$

En généralisant la fonction (60) à un champ extérieur matriciel

$$u(H) = \int \exp \left(\frac{1}{n} \text{Re Tr } H^\dagger U \right) dU \quad (70)$$

on obtient par intégration sur les champs de jauge

$$Z(J) = \int \exp \left\{ S(V_{ij}) + \sum_{ij} u(H_{ij} + J_{ij}) - \text{Re Tr } H_{ij}^\dagger V_{ji} \right\} [dV][dH] \quad (71)$$

Cette intégrale va maintenant être traitée par la méthode du col. Pour les systèmes de spins, l'intégrale en V était gaussienne et pouvait être effectuée exactement, ce qui n'est plus le cas. A l'ordre le plus bas, nous trouvons

$$\ln Z = \sum_{ij} \left[u(\mathcal{H}_{ij} + J_{ij}) - \text{Re Tr } \mathcal{H}_{ij}^\dagger \mathcal{V}_{ij} \right] + S(\mathcal{V}_{ij}) \quad (72)$$

expression stationnaire pour $H = \mathcal{H}$, $V = \mathcal{V}$

$$\mathcal{V}_{ij} = \frac{\partial u(\mathcal{H}_{ij} + J_{ij})}{\partial H_{ij}^\dagger} \quad (73)$$

$$\mathcal{H}_{ij} = \frac{\partial S(\mathcal{V}_{ij})}{\partial V_{ji}} \quad (74)$$

Ces équations coïncident avec (62) lorsque la solution est cherchée sous forme diagonale

$$\mathcal{H}_{ij} = \frac{H}{n} I \quad (75)$$

Mais nous pouvons maintenant calculer systématiquement les corrections à cette approximation, et, tout d'abord, résoudre les paradoxes du paragraphe précédent concernant l'invariance de jauge. En effet, si $\{\mathcal{V}_{ij}, \mathcal{H}_{ij}\}$ est une solution des équations du col (73-74), il en est de même pour $\{g_i \mathcal{V}_{ij} g_j^{-1}, g_i \mathcal{H}_{ij} g_j^{-1}\}$. Dans le calcul de l'intégrale (71), il convient alors de séparer les degrés de liberté correspondant à cette invariance de jauge des autres degrés de liberté "transversaux". Les premiers donnent un facteur multiplicatif (élevé à la puissance du nombre de sites), puisque l'intégrand est indépendant de ces transformations, et ce n'est que sur les seconds que la méthode du col pourra être appliquée. Il faut noter la loi de transformation des sources $J_{ij} \rightarrow g_i J_{ij} g_j^{-1}$, qui induit les transformations analogues sur les observables. Ainsi, à partir de la solution (75), toute une série d'autres cols peuvent être construits par transformation de jauge. Par exemple, la valeur de $\langle U_{ij} \rangle = u'(H)$ pour le col (75) devient $g_i \langle U_{ij} \rangle g_j^{-1}$, et l'intégration sur ces degrés de liberté donne alors

$$\langle U_{ij} \rangle = \int g_i u'(H) g_j^{-1} \prod dg_i \equiv 0 \quad (76)$$

Le théorème d'Elitzur est donc vérifié. Nous constatons également que les quantités invariantes de jauge ne sont pas modifiées par rapport aux résultats du paragraphe précédent. De plus, nous sommes maintenant en mesure de calculer les corrections.

Que se passe-t-il si le groupe est discret? Les divers cols engendrés par transformation de jauge sont maintenant séparés et la méthode du col n'a pas de modes nuls. Il se pose alors le problème de savoir si l'intégrale est obtenue par la *somme* ou la *moyenne* des contributions des divers cols. La réponse est qu'il faut les sommer. Ce mécanisme peut être compris sur l'exemple d'une intégrale simple $\int \exp f(x) dx$, où $f(x)$ est une fonction analytique ayant plusieurs maxima (voir figure 8a). Pour estimer cette intégrale, il convient d'introduire la variable $y = -f(x)$. L'intégrale devient alors $\oint_C e^{-y} f'(x)^{-1} dy$ le long d'un contour C du plan complexe y dessiné sur la figure 8b et entourant les singularités de la fonction multivaluée $x(y)$. Le contour est ensuite déformé (figure 8c) en deux contours indépendants et la contribution de chacun est évaluée par développement en série de Taylor au voisinage du col qu'il entoure. Il en résulte la prescription de sommation, moyennant les

propriétés d'analyticité de la fonction nécessaires pour déformer le contour. Si les deux maxima sont à des hauteurs différentes, le plus haut dominera exponentiellement l'autre. Le rôle du minimum est de limiter la convergence du développement de $1/f'(x(y))$ de sorte que les développements obtenus par cette méthode sont généralement seulement asymptotiques.

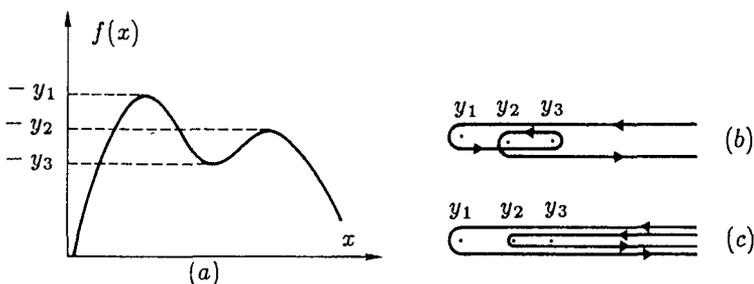


Figure 8 : Contours utilisés (b) et leur déformation (c) dans la méthode du col appliquée à une fonction à plusieurs extrema (a).

Dans l'application aux systèmes de jauge, on utilise des intégrales multiples. Les propriétés d'analyticité nécessaires pour déformer le contour deviennent très difficiles à établir. Néanmoins, nous supposons que la convention de sommation s'applique.

Revenons en particulier à la validité de cette technique pour l'étude de la dimension critique. Près de l'extrémité de la zone métastable de couplage fort, le col unique se sépare en une multitude de cols équivalents (2^N pour Z_2). Dans ce cas, chaque col est séparé du suivant par un minimum très proche, et on s'attend à une mauvaise convergence de la méthode dans cette région. Noter le facteur additif $N \ln 2$ introduit dans l'énergie libre par la multiplicité des cols. Il résulte de la prescription de sommation et est nécessaire pour obtenir une entropie correcte.

2.3 Groupes discrets : développement en $1/d$

Le champ moyen est censé donner de bons résultats en grande dimension, et nous avons montré que les corrections pouvaient s'ordonner en un développement en $1/d$ pour les modèles de spins. En est-il de même pour les modèles de jauge?

Nous montrerons en toute généralité dans le chapitre VII (volume 2) que les séries diagrammatiques peuvent se réordonner en corrections à l'approximation du champ moyen et définissons la classe des diagrammes à considérer. Nous renvoyons le lecteur à ce chapitre pour les détails techniques et ne donnerons ici qu'un aperçu rapide de la méthode. L'examen

de la formule (71) montre que chaque terme du développement de $\exp S(V_{ij})$ correspond à un ensemble fini de plaquettes. Le terme $\text{Re Tr } H_{ij}^\dagger V_{ji}$ couple les champs V bordant les plaquettes et situés sur le même lien du réseau à $u(H_{ij})$; si k plaquettes se rencontrent selon le lien ij , on aura une contribution $\partial^k u(H_{ij})/\partial H_{ij}^k$. Remarquons enfin que les diagrammes non *irréductibles*, c'est-à-dire qui peuvent être disjoints par suppression d'un lien, doivent être omis. En effet, le champ H_{ij} a été choisi de façon à engendrer automatiquement leurs contributions par la formule (74).

Dessignons alors ces diagrammes en représentant chaque plaquette par quatre segments joignant son centre (point noir) au milieu des liens adjacents (ronds blancs) (figure 9). La condition d'irréductibilité fait que cette figure, faite de "croix", ne doit former que des boucles, sans possibilité de développements arborescents. C'est le cas de l'exemple de la figure 9 montrant l'aspect général de ces diagrammes.

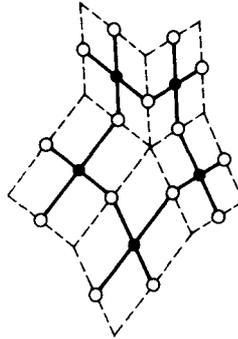


Figure 9 : Un diagramme contribuant aux corrections de l'approximation du champ moyen.

Considérons alors la construction d'une telle boucle, formée de segments de longueur $a/2$. Pour la refermer, il doit être possible d'associer ces segments en paires parallèles de directions opposées. Une boucle de n plaquettes ($2n$ segments) ne pourra donc utiliser que n directions différentes au plus. Le choix de ces directions introduit un facteur $d^n(1 + \mathcal{O}(1/d))$ dans la contribution du diagramme. A chaque plaquette est en outre associé un facteur β_J , d'ordre $1/d$ (seule la combinaison $2\beta_J(d-1)$ intervenait dans l'approximation du champ moyen et doit être maintenu fixe dans la limite $d \rightarrow \infty$). La boucle sera donc au plus d'ordre $1 + \mathcal{O}(1/d)$, c'est-à-dire sous-dominante vis-à-vis du terme principal (62), d'ordre d . Toute boucle supplémentaire ajoutée pour construire un diagramme plus complexe donne des facteurs $1/d$ supplémentaires, car elle devra avoir en commun avec la boucle initiale au moins un lien, dont l'orientation ne pourra plus être librement choisie.

Nous avons ainsi caractérisé les diagrammes contribuant à la correction

d'ordre $1/d$, tous du type de la figure 9. Remarquons qu'ils sont en nombre infini; ce n'était pas le cas pour les systèmes de spins, où la boucle de n liens était d'ordre $\beta^n d^{n/2}$, se comportant en $(1/d)^{n/2}$ en fonction de sa taille n (à βd fixé). Pour le système de jauge, il est néanmoins possible de sommer exactement ces contributions. Au diagramme à n plaquettes de la figure 9 correspond le facteur

$$\frac{d![2\beta_J u'(H)u''(H)]^n}{2n(d-n)!} \quad (77)$$

Démontrer ce résultat.

Pour d grand, on somme ces termes pour $n \geq 3$. Il faut aussi ajouter le terme à 2 plaquettes pour obtenir la correction complète

$$\begin{aligned} \frac{\ln Z}{Nd} = & \text{(valeur champ moyen)} \\ & + \left[-\frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}xy + \frac{1}{16}y^2 \right] \frac{1}{d} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{d^2}\right) \end{aligned} \quad (78)$$

avec

$$x = 2\beta_J(d-1)u'^2(H)u''(H), \quad y = 2\beta_J(d-1)u''^2(H) \quad (79)$$

Il ne faut pas oublier d'ajouter, dès que H est non nul, un terme supplémentaire $d^{-1} \ln \|G\|$ tenant compte de la multiplicité du col, telle qu'elle a été discutée ci-dessus.

Calculer la correction suivante.

La figure 10 montre le résultat obtenu pour le groupe Z_2 avec les deux premières corrections. On constate que la région métastable de basse température rétrécit lorsque la dimension décroît, pour disparaître à $d_c \simeq 2.9$, très près de la valeur $d_c = 3$ supposée être la dimension critique inférieure. Il est bien entendu hors de question de prétendre que la transition du second ordre de la dimension critique pourra être analysée par cette méthode. Notons également que l'extrémité de la phase métastable de haute température reste à l'infini. Nous verrons que sa position se comporte en $d^{3/4}$, et ne peut donc être calculée dans un développement en $1/d$. Cette difficulté avait été prévue dans la discussion en fin du paragraphe précédent.

2.4 Groupes continus : calcul des corrections

Nous avons déjà mentionné la nécessité de fixer la jauge dans les modèles continus. C'est la jauge axiale qui conduira aux calculs les plus simples. Nous allons traiter en détail le cas de l'action de Wilson pour le groupe $SU(n)$ ou $U(n)$ à d dimensions. Suivant la même méthode, nous écrirons la fonction de partition à jauge fixée

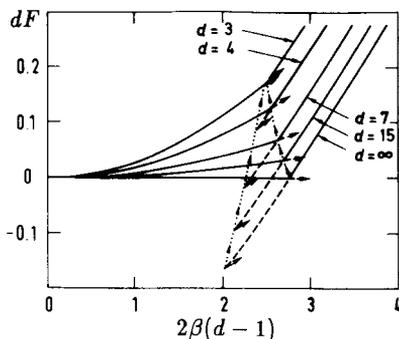


Figure 10: Energie libre du modèle de jauge Z_2 calculée avec deux corrections en $1/d$.

$$Z = \int \prod_{\substack{\text{liens} \\ \text{spatiaux}}} dU_l \exp \left\{ \frac{\beta_J}{n} \text{Re} \left[\sum_{\substack{\text{plaquettes} \\ \text{spatiales}}} \text{Tr} U_p + \sum_{\substack{\text{plaquettes} \\ \text{temporelles}}} \text{Tr} U_l U_l^\dagger \right] \right\} \quad (80)$$

dans laquelle nous insérons

$$\begin{aligned} 1 &= \prod_{\substack{\text{liens} \\ \text{spatiaux}}} \int d^{2n^2} V_l \delta^{(2n^2)}(V_l - U_l) \\ &= \prod_l \int dV_l dH_l (2i\pi)^{-2n^2} \exp \left\{ \frac{1}{n} \text{Re} \text{Tr}(U - V) \right\} \end{aligned} \quad (81)$$

Nous pourrions alors intégrer sur les variables U . Compte tenu de la condition de jauge axiale, les formules (72)–(74) sont légèrement modifiées. A l'ordre le plus bas, le résultat est

$$\frac{\ln Z}{N} = (d-1) \left[u(\mathcal{H}) - \mathcal{H}\mathcal{V} + \frac{1}{2}\beta_J(d-2)\mathcal{V}^4 + \beta_J\mathcal{V}^2 \right] \quad (82)$$

avec les relations au col

$$\begin{cases} \mathcal{V} = u'(\mathcal{H}) \\ \mathcal{H} = \beta_J \mathcal{V} [2 + 2(d-2)\mathcal{V}^2] \end{cases} \quad (83)$$

L'action doit maintenant être développée jusqu'aux termes quadratiques autour du col. Pour simplifier le calcul des dérivées secondes nécessaires à la première correction, nous introduisons les projecteurs sur les représentations triviale et adjointe de $SU(n)$

$$\begin{cases} P_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{(0)} = \frac{1}{n} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \\ P_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{(1)} = \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{n} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \end{cases} \quad (84)$$

On écrira alors les différentes dérivées nécessaires

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial^2 u(H)}{\partial H_{\beta\alpha} \partial H_{\delta\gamma}} \right|_{H=\mathcal{H}1} = \left. \frac{\partial^2 u(H)}{\partial H_{\beta\alpha}^* \partial H_{\delta\gamma}^*} \right|_{H=\mathcal{H}1} = AP_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{(0)} + BP_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{(1)} \\ \left. \frac{\partial^2 u(H)}{\partial H_{\beta\alpha} \partial H_{\delta\gamma}^*} \right|_{H=\mathcal{H}1} = A'P_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{(0)} + B'P_{\alpha\beta;\gamma\delta}^{(1)} \end{cases} \quad (85)$$

Quand à l'action, il est commode de séparer les propagateurs (dérivées secondes) suivant les parties anti-hermitiennes et hermitiennes de V . Après transformation de Fourier, on trouve les matrices $(d-1) \times (d-1)$ suivantes

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}(k) &= \left[2 \cos k_d + 2\mathcal{V}^2 \sum_{\rho \neq \mu, d} \cos k_\rho \right] \delta_{\mu\nu} + \\ &\quad + 4\mathcal{V}^2 (1 - \delta_{\mu\nu}) \exp\left(\frac{1}{2}i(k_\mu - k_\nu)\right) \sin \frac{1}{2}k_\mu \sin \frac{1}{2}k_\nu \\ \bar{\Delta}_{\mu\nu}(k) &= \left[2 \cos k_d + 2\mathcal{V}^2 \sum_{\rho \neq \mu, d} \cos k_\rho \right] \delta_{\mu\nu} + \\ &\quad + 4\mathcal{V}^2 (1 - \delta_{\mu\nu}) \exp\left(\frac{1}{2}i(k_\mu - k_\nu)\right) \cos \frac{1}{2}k_\mu \cos \frac{1}{2}k_\nu \end{aligned} \quad (86)$$

Le résultat de l'intégration à cet ordre prend la forme

$$\begin{aligned} Z &= Z_{\text{champ moyen}} \\ &\times \left[\det^{-\frac{1}{2}}(1 - 2\beta_J n(A' - A)\Delta) \det^{-\frac{1}{2}(n^2-1)}(1 - 2\beta_J n(B' - B)\Delta) \right]^N \\ &\times \left[\det^{-\frac{1}{2}}(1 - 2\beta_J n(A' + A)\bar{\Delta}) \det^{-\frac{1}{2}(n^2-1)}(1 - 2\beta_J n(B' + B)\bar{\Delta}) \right]^N \end{aligned} \quad (87)$$

Etablir cette formule.

Si nous n'avions pas fixé la jauge, le propagateur $\Delta_{\mu\nu}$ aurait eu une forme peu différente; $\cos k_d$ aurait été multiplié par \mathcal{V}^2 , dans (86) et, bien entendu, la valeur d aurait été permise pour μ et ν . Cette matrice aurait eu une valeur propre nulle (correspondant au vecteur propre $\sin \frac{1}{2}k_\mu \exp \frac{1}{2}ik_\mu$ qui reflète l'existence de transformations locales de jauge. Remarquons aussi

que le spectre de masse se lit directement sur la formule (87), par recherche des valeurs propres nulles des opérateurs figurant dans les déterminants.

Il est instructif d'examiner la limite de couplage faible (H grand). De l'invariance de $u(H)$ par transformation unitaire, on déduit

$$\begin{cases} B' - B = \frac{u'(\mathcal{H})}{2n\mathcal{H}} = \frac{\mathcal{V}}{2n\mathcal{H}} \\ A' - A = \begin{cases} B' - B & \text{pour } U(n) \\ \mathcal{O}(1/H^2) & \text{pour } SU(n) \end{cases} \end{cases} \quad (88)$$

Les formes asymptotiques de $u(H)$ pour H grand

$$u(H) = \begin{cases} H + \left(\ln \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k!}{(2\pi)^{\frac{1}{2}n}} + \frac{1}{2}n^2 \ln n \right) - \frac{1}{2}n^2 \ln H \\ \quad + \frac{n^2}{8H} + \frac{n^4}{16H^2} + \dots \quad \text{pour } U(n) \\ H + \left(\ln \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k!}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}} + \frac{1}{2}(n^2 - 2) \ln n \right) - \frac{1}{2}(n^2 - 1) \ln H \\ \quad - \frac{n^2 - 1}{8H} - \frac{(2n^2 - 5)(n^2 - 1)}{48H^2} + \dots \quad \text{pour } SU(n) \end{cases} \quad (89)$$

permettent d'obtenir

$$\mathcal{H} \sim 2\beta_J(d-1), \quad \mathcal{V} \sim 1 - \frac{A_0}{4\beta_J(d-1)} \quad (90)$$

A_0 étant le coefficient de $-\ln H$ dans les développements (89); de même,

$$\begin{cases} B \sim -B' \sim -\frac{1}{4nH} \\ A \sim -A' \sim \begin{cases} -\frac{1}{4nH} & \text{pour } U(n) \\ \mathcal{O}(1/H^2) & \text{pour } SU(n) \end{cases} \end{cases} \quad (91)$$

et, à cet ordre,

$$\frac{\ln Z}{N} = \frac{\ln Z_{\text{champ moyen}}}{N} - \frac{1}{2} \left[\frac{n^2}{n^2 - 1} \right] \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{\beta_J \mathcal{V}}{\mathcal{H}} \Delta \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta_J}\right) \quad (92)$$

Entre les crochets la valeur n^2 se rapporte au groupe $U(n)$, tandis que $n^2 - 1$ se rapporte au groupe $SU(n)$. Il reste un seul opérateur à étudier. A moment

fixé cette matrice $(d-1) \times (d-1)$ n'a que deux valeurs propres distinctes; la première,

$$\lambda_1 = 4\beta_J(\mathcal{V}/\mathcal{H}) \sin^2 \frac{1}{2} k_d$$

s'annule à $k_d = 0$, ce qui correspond à la propagation des degrés de liberté de jauge non fixés par la jauge axiale (transformations de jauge ne dépendant pas du temps). La seconde

$$\lambda_2 = 4\beta_J(\mathcal{V}/\mathcal{H}) \sin^2 \frac{1}{2} k_d + \mathcal{V}^2 \sum_{\mu=1}^{d-1} \sin^2 \frac{1}{2} k_\mu$$

est dégénérée $d-2$ fois et ne s'annule que pour $\mathbf{k} = 0$. Les autres canaux hermitiens, utilisant $\bar{\Delta}$ n'ont pas d'excitations de masse nulle. Il est d'ailleurs normal que, dans cette limite β_J grand, ce soient les canaux antihermitiens qui contribuent le plus aux fluctuations, puisqu'ils engendrent le champ de jauge de la limite continue.

Dans la limite où β_J devient grand, l'énergie interne par plaquette se comporte comme

$$E = \frac{2}{d(d-1)} \frac{\partial}{\partial \beta_J} \frac{\ln Z}{N} = \frac{1}{d} [(d-2)\mathcal{V}^4 + 2\mathcal{V}^2] \sim 1 - \frac{A_0}{d\beta_J} + \dots \quad (93)$$

qui est le résultat attendu. Ne pas utiliser de condition fixant la jauge aurait conduit ici à un résultat incorrect $1 - A_0/\beta_J(d-1)$ qui aurait dû ensuite être corrigé à tous les ordres. L'argument est d'ailleurs général: à tous les ordres en $1/\beta_J$, seul un nombre fini de termes dans le calcul des corrections au champ moyen va contribuer lorsque la jauge est fixée. Ce n'était pas le cas, comme on l'a vu, pour les groupes discrets où il était important de ne pas fixer la jauge afin d'éviter des défauts d'ordre infini.

Reprendre ces considérations dans le cadre particulier du groupe $SU(2)$.

Ce groupe a en effet des représentations réelles (équivalentes à leurs représentations conjuguées). En posant $H = h_0 - ih.\sigma$ dans la base des matrices de Pauli, on voit que $\text{Im}h$ ne joue plus de rôle. L'intégration correspondante fournit une fonction δ pour $\text{Im}V$ qui se découple également à tous les ordres.

Venons-en à la détermination du diagramme de phase, compte tenu des corrections. De nouveau, l'énergie libre de la solution de couplage fort ($\mathcal{H} = \mathcal{V} = 0$) est comparée à celle de couplage faible (dont l'approximation (93) est souvent suffisante). La position des transitions du premier ordre se compare très bien aux résultats des simulations numériques (voir table I). Le résultat le plus frappant concerne les groupes $SU(2)$ et $SU(3)$, où les arcs de couplage faible et fort ne se coupent plus, mais restent longtemps parallèles et très proches l'un de l'autre. Sans pouvoir affirmer que le champ moyen prédit l'absence de transition observée dans les simulations numériques, ce résultat est particulièrement encourageant pour confirmer la validité de cette méthode.

d	groupe	champ moyen	Monte-Carlo	
4	$U(1)$	1.03	1.01	
	$U(2)$	3.45	3.30 ± 0.05	
	$U(3)$	7.30	6.88 ± 0.05	
	$U(4)$	12.5	12.14 ± 0.7	
	$U(5)$	19.5	18.8 ± 1.1	
	$U(6)$	28.0	27.0 ± 2.6	
	$U(\infty)$	$0.38 \times 2n^2$	$0.375 \times 2n^2^*$	
	$SU(2)$	†	†	
	$SU(3)$	†	†	
	$SU(4)$	11.6	10.2	
	$SU(5)$	18.0	16.4 ± 0.2	
	$SU(6)$	26.5	24.0 ± 1.0	
	5	$SU(2)$	1.77	1.64

Table I: Comparaison entre les prédictions du champ moyen corrigé et les résultats provenant de simulations numériques pour la position de la transition. Les symboles correspondent à * : extrapolation, † : transition non observée.

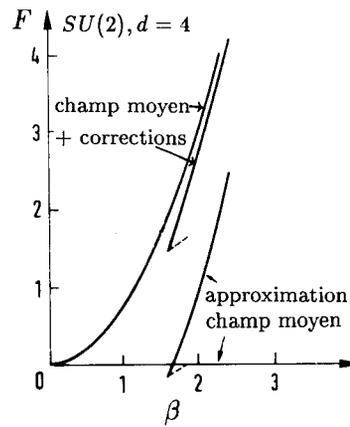


Figure 11 : Les corrections au champ moyen pour le groupe de jauge $SU(2)$ à quatre dimensions, d'après H. Flyvbjerg, B. Lautrup et J.-B. Zuber, *Phys. Lett.* **110B**, 179 (1982).

3. Développement de couplage fort

3.1 Convergence

Dans la région de couplage fort, la constante β_J tend vers zéro, et il est naturel de développer le poids de Boltzmann en puissances de β_J

$$\exp S = \prod_p \exp \beta_J \chi(U_p) = \prod_p (1 + \beta_J \chi(U_p) + \frac{1}{2} \beta_J^2 \chi^2(U_p) + \dots) \quad (94)$$

chacun des termes obtenus en développant le produit sur les plaquettes est intégré sur les champs de jauge. Il est commode de représenter ces termes par l'ensemble des plaquettes intervenant dans leur expression, ce que nous appellerons *diagramme* ou *graphe*. Sous cette forme, une même plaquette peut intervenir plusieurs fois, suivant la puissance de $\chi(U_p)$ choisie dans le membre de droite de (94). Nous montrerons dans le paragraphe suivant comment resommer ces contributions de plaquettes au même lieu, en exploitant la structure du groupe de jauge pour effectuer les intégrations nécessaires.

Notons qu'un lien donné ne peut border une seule plaquette du diagramme. En effet, l'intégration sur le champ de jauge correspondant annule la contribution du diagramme. Les liens du diagramme bordent donc au moins deux plaquettes; si on se limite à deux plaquettes exactement par lien, les diagrammes prennent alors la topologie d'une surface fermée simple faite de plaquettes. Un diagramme plus complexe a des lignes singulières le long desquelles se confondent les bords de plusieurs surfaces ouvertes simples.

Les techniques pour obtenir en pratique ces séries seront décrites en détail dans le chapitre VII (volume 2). Nous nous bornerons ici aux aspects particuliers des théories de jauge et à l'analyse des résultats obtenus. Nous allons tout d'abord examiner la convergence des séries obtenues. L'idée est de trouver une borne supérieure au terme d'ordre n de la série pour la valeur moyenne $\langle X \rangle$ d'une observable X arbitraire, mais locale. La localité signifie qu'un nombre fini (non nul) de liens \mathcal{L} intervient dans sa définition. Tel est le cas de l'énergie interne $E = \langle \chi(U_p) \rangle$, dérivée première de l'énergie libre (ce qui permettra d'étendre le théorème de convergence à cette quantité).

L'action par plaquette $\chi(U_p)$ doit être supposée bornée (ce qui est le cas pour les groupes discrets ou les groupes de Lie compacts qui nous intéressent). En ajoutant une constante à l'action, nous pouvons, sans restreindre la généralité du raisonnement, la supposer positive. Dans ces conditions, il existe dans la région de couplage fort, un encadrement

$$0 \leq \Omega(U_p) \equiv \exp \beta_J \chi(U_p) - 1 \leq C_1 \beta_J \quad (95)$$

Le réseau Λ choisi est fini, mais arbitrairement grand, et nous ne prendrons la limite thermodynamique qu'à la fin du raisonnement, lorsque nous aurons obtenu un rayon de convergence indépendant de la taille de Λ . Alors,

$$\langle X \rangle = Z_\Lambda^{-1} \int \prod_l dU_l \prod_{p \subset \Lambda} [1 + \Omega(U_p)] X \quad (96)$$

avec

$$Z_\Lambda = \int \prod_l dU_l \prod_{p \subset \Lambda} [1 + \Omega(U_p)] \quad (97)$$

Développons le produit dans l'intégrand (96). Interprétons les termes obtenus en associant à chaque terme un diagramme \mathcal{D} qui peut être divisé en deux parties. L'une, \mathcal{D}_1 , formée des éléments appartenant à une partie connexe de \mathcal{D} contenant au moins un lien de \mathcal{L} et l'autre son complément $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_1$. L'intégrale (96) se factorise en deux parties correspondantes. Lorsque \mathcal{D}_1 est fixé, tous les diagrammes \mathcal{D} correspondants sont obtenus en ajoutant un diagramme de la fonction de partition du réseau $\Lambda \setminus \overline{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{L}}$, obtenu en ôtant de Λ toutes les plaquettes $\overline{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{L}}$, ayant au moins soit un lien dans \mathcal{L} , soit un lien bordant une plaquette de \mathcal{D}_1 . Alors

$$\langle X \rangle = \sum_{\mathcal{D}_1} \left\{ \int \prod_{l \subset \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{L}} dU_l \prod_{p \in \mathcal{D}_1} \Omega(U_p) X \right\} Z_{\Lambda \setminus \overline{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{L}}} Z_\Lambda^{-1} \quad (98)$$

Nous allons maintenant borner les différents termes. Tout d'abord, Ω étant positif et Λ contenant plus de plaquettes que $\Lambda \setminus \overline{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{L}}$, le quotient $Z_{\Lambda \setminus \overline{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{L}}} Z_\Lambda^{-1}$ est inférieur à 1. L'observable X étant locale et ne dépendant que d'un nombre fini de champs d'un groupe soit compact, soit fini, est bornée en valeur absolue par une constante C_2 . Enfin, l'intégrand (98) ainsi réduit peut être majoré à l'aide de l'encadrement (95), et on arrive ainsi à

$$|\langle X \rangle| \leq \sum_k n(k) C_2 (C_1 \beta_1)^k \quad (99)$$

où k est le nombre de plaquettes de \mathcal{D}_1 et $n(k)$ le nombre de diagrammes \mathcal{D}_1 ayant k plaquettes. Il reste maintenant à évaluer $n(k)$. Nous allons définir pour cela un processus de construction plaquette par plaquette. A chaque étape, nous avons un diagramme inachevé comportant un ensemble de liens non saturés sur lesquels de nouvelles plaquettes doivent se fixer. Au départ, l'ensemble des liens non saturés est \mathcal{L} . Les liens de Λ ont été ordonnés, et nous décidons d'ajouter la plaquette sur le lien non saturé d'ordre le plus bas. Il y a donc au plus $2(d-1)$ façons de le faire. Puis il faut décider si les quatre liens bordant la plaquette ajoutée sont saturés ou non, soit au plus $2^4 = 16$ possibilités. Le processus s'arrête à l'ordre k , en éliminant l'ensemble des diagrammes obtenus pour lesquels il reste des liens non saturés. On en déduit ainsi une borne généreuse

$$n(k) \leq [32(d-1)]^k \quad (100)$$

On en déduit que le membre de droite de l'inégalité (99) converge dès que $\beta_J < [32C_1(d-1)]^{-1}$, c'est-à-dire que la série de couplage fort pour $\langle X \rangle$ a un rayon de convergence non nul.

Cette borne est très grossière, quoique suffisante pour le moment. Améliorer cette borne.

Ce théorème de convergence a deux conséquences importantes. Tout d'abord, les fonctions de corrélation ont un comportement exponentiel. Soit $X^{(\mathbf{x})}$ l'observable X après translation d'une quantité \mathbf{x} sur le réseau. La fonction de corrélation se trouve alors bornée par

$$\left| \langle X X^{(\mathbf{x})} \rangle_c \right| = \left| \langle X X^{(\mathbf{x})} \rangle - \langle X \rangle \langle X^{(\mathbf{x})} \rangle \right| \leq \text{Cst} e^{-m|\mathbf{x}|} \quad (101)$$

avec

$$am \geq -4 \ln \beta_J + \text{Cst}$$

En effet, seuls les diagrammes joignant les liens supports de X et $X^{(\mathbf{x})}$ interviennent dans le développement de cette quantité. Les diagrammes auront un nombre minimal de plaquettes égal à $4|\mathbf{x}|/a$; il s'agit en effet de diagrammes où un tube joint les deux ensembles éloignés de liens X et $X^{(\mathbf{x})}$. La sommation dans le second membre de (99) commence à cet ordre. D'où le résultat.

La seconde conséquence est la preuve de la décroissance exponentielle de la boucle de Wilson en fonction de l'aire minimale $\mathcal{A}(C)$ embrassée par la courbe. Sous des hypothèses que nous préciserons dans le paragraphe suivant, le diagramme minimal est formé de plaquettes couvrant la surface minimale sous-tendant la courbe, et comporte donc $\mathcal{A}(C)$ plaquettes. La borne (99) fournit une estimation de la tension de corde (45)

$$K \geq -\ln \beta_J + \text{Cst} \quad (102)$$

3.2 Développement en caractères

Notre but est de simplifier les intégrations sur les champs de jauge. Nous obtiendrons l'analogie du développement en $\tanh \beta$ (et non β) du modèle d'Ising. Rappelons d'abord quelques résultats classiques de la théorie des groupes compacts. Les éléments de matrice des représentations irréductibles (de dimension d_r) forment une base des fonctions sur le groupe et satisfont aux relations d'orthogonalité et de complétude (la mesure du groupe étant normalisée à l'unité)

$$\int dU \mathcal{D}_{\alpha\beta}^r(U) \mathcal{D}_{\gamma\delta}^{s*}(U) = \frac{\delta_{rs} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}}{d_r} \quad (103)$$

$$\sum_{r,\alpha,\beta} d_r \mathcal{D}_{\alpha\beta}^r(U) \mathcal{D}_{\alpha\beta}^{*s}(V) = \delta(U, V) \quad (104)$$

La fonction δ du membre de droite de (104) est définie sur la variété du groupe. Les caractères $\chi_r(U) = \sum_{\alpha} \mathcal{D}_{\alpha\alpha}^r(U)$, traces des représentations irréductibles, forment une base orthonormale des fonctions de classe sur le groupe, traduite par les relations

$$\int dU \chi_r(U) \chi_s^*(U) = \delta_{rs} \quad (105)$$

$$\sum_r d_r \chi_r(UV^{-1}) = \delta(U, V) \quad (106)$$

En particulier, notons la conséquence suivante qui nous sera très utile

$$d_r \int dU \chi_r(U) \chi_s(U^{-1}V) = \delta_{rs} \chi_r(V) \quad (107)$$

La décomposition en composantes de Fourier de l'exponentielle de l'action va permettre d'utiliser ces formules. Nous écrirons donc

$$\exp \beta_J \chi(U_p) = \sum_r \tilde{\beta}_r \chi_r(U_p) \quad (108)$$

avec

$$\tilde{\beta}_r = \int dU \chi_r^*(U) \exp \beta_J \chi(U) \quad (109)$$

Posant

$$\tilde{\beta}_r = \tilde{\beta}_0 d_r \beta_r \quad \text{for } r \neq 0 \quad (110)$$

la fonction de partition s'écrit sous la forme

$$Z = \tilde{\beta}_0^{n_p} \int \prod_p \left[1 + \sum_{r \neq 0} d_r \beta_r \chi_r(U_p) \right] \prod_{ij} dU_{ij} \quad (111)$$

et, comme d'habitude, nous interpréterons chaque terme du développement du produit intervenant dans l'intégrand comme un diagramme. Chacun d'entre eux est un ensemble de plaquettes portant chacune une représentation r non triviale. A la différence du développement (94), deux plaquettes ne peuvent occuper la même position sur le réseau. Remarquons aussi que, si χ était réel, il n'en est généralement pas de même pour χ_r . Il convient donc de choisir une orientation standard pour chaque plaquette. Le renversement de cette orientation remplace U_p par U_p^{-1} , c'est-à-dire r par \bar{r} , ($\mathcal{D}_r(U^{-1}) = \mathcal{D}_r^\dagger(U) \sim \mathcal{D}_{\bar{r}}(U)$), représentation conjuguée généralement non équivalente à

r . Néanmoins, χ étant réel, on a $\beta_r = \beta_{\bar{r}}$ et le choix de l'orientation n'influe donc pas, comme on pouvait s'en douter, sur les résultats.

(1) Etablir la forme explicite des facteurs β_r pour les groupes $SU(2)$ et $SO(3)$. Les matrices U peuvent être paramétrisées sous la forme

$$U = \cos \frac{1}{2}\theta + i\sigma \cdot \hat{n} \sin \frac{1}{2}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 4\pi \quad (112)$$

en termes de matrices de Pauli. La mesure de Haar correspondante, normalisée à l'unité, s'écrit

$$dU = \sin^2 \frac{1}{2}\theta \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d^2 \hat{n}}{4\pi} \quad (113)$$

Les représentations irréductibles sont classées par j , entier ou demi-entier positif ou nul, et les caractères s'écrivent

$$\chi_j(U) = \frac{\sin(j + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} \quad (114)$$

Les coefficients $\tilde{\beta}_j$ nécessaires pour le développement diagrammatique s'obtiennent par application de (109) et, en termes de fonctions de Bessel modifiées, on a

$$\exp(\frac{1}{2}\beta_J \text{Tr } U) = \exp \beta_J \cos \frac{1}{2}\theta = \sum_j 2(2j+1) \frac{I_{2j+1}(\beta_J)}{\beta_J} \chi_j(U) \quad (115)$$

Le groupe $SO(3)$ conduit à des résultats analogues, en éliminant les représentations de spin j demi-entier. La table II donne les résultats pour les principaux groupes de jauge utilisés avec l'action de Wilson. Enfin, l'action géométrique du noyau de la chaleur (9) donne directement la représentation désirée. Pour le groupe $SU(2)$ par exemple, la valeur propre de l'opérateur de Casimir quadratique $C_j^{(2)} = j(j+1)$ conduit à la formule (10) déjà mentionnée.

(2) Etablir la forme asymptotique des coefficients β_r pour l'action de Wilson lorsque β_J est, soit faible, soit grand.

Dans le développement de l'exponentielle apparaissant dans la formule (109), la relation d'orthogonalité (105) donne un résultat nul tant que la représentation r ne pourra être construite par une puissance de la somme du caractère χ de la représentation fondamentale f de sa conjuguée. Le coefficient β_r s'annule donc comme une puissance entière de β_J (ainsi, pour $SU(2)$, au moins $2j$ spins $\frac{1}{2}$ sont nécessaires pour construire un spin j , et donc $\beta_j \sim \beta_J^{2j}$). De plus, β_r croît uniformément de 0 à 1 lorsque β_J varie de 0 à l'infini. Dans le cas d'un groupe continu, une étude par la méthode du col autour de $U = I$ permet de calculer son expression asymptotique

$$\tilde{\beta}_r \sim \text{Cst } d_r \frac{\exp(\beta_J \chi(1))}{\beta_J^{X/2}} (1 + \mathcal{O}(\beta_J^{-1})) \quad (116)$$

groupe	$\tilde{\beta}_0$	r et $\chi_r(U)$	d_r	$\tilde{\beta}_r$
Z_2	$\cosh \beta_J$	$\sim Z_2 \quad U$	1	$\sinh \beta_J$
$U(1)$	$I_0(\beta_J)$	$n \quad e^{in\varphi}$	1	$I_n(\beta_J)$
$SU(2)$	$2I_1(\beta_J)/\beta_J$	$j \frac{1}{2} \text{entier} \quad \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}$	$2j + 1$	$I_{2j}(\beta_J) - I_{2j+2}(\beta_J)$
$SO(3)$	$e^{\beta_J/3} (I_0(\frac{2}{3}\beta_J) - I_1(\frac{2}{3}\beta_J))$	$j \text{ entier} \quad \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta}$	$2j + 1$	$e^{\beta_J/3} (I_j(\frac{2}{3}\beta_J) - I_{j+1}(\frac{2}{3}\beta_J))$
$U(n)$	$\det I_{i-j}(\beta_J/n)$ $(1 \leq i, j \leq n)$	$l_1 \geq \dots \geq l_n \quad U = \text{Diag}(e^{i\alpha_j})$ $\chi = \frac{\det(\exp i(l_j+n-j)\alpha_i)}{\det(\exp i(n-j)\alpha_i)}$	$\prod_{i < j} \frac{l_i - l_j + j - i}{j - i}$	$\det I_{l_j - j + i}(\beta_J/n)$
$SU(n)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \det I_{i-j+k}(\frac{\beta_J}{n})$	comme $U(n)$ avec $l_n \equiv 0$	comme $U(n)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \det I_{l_j - j + i + k}(\frac{\beta_J}{n})$
$U(\infty)$ ou $SU(\infty)$	$\exp\left(\frac{\beta_J}{2n}\right)^2$ dans la limite $n \rightarrow \infty$ à $\beta_J n^2$ fixé			

Table II : Coefficients du développement en caractères de l'action de Wilson.

où X est la dimension de l'algèbre de Lie (nombre de générateurs infinitésimaux indépendants du groupe). La quantité $\tilde{\beta}_r$ décroît donc suivant une loi de puissance pour les groupes de Lie, si on soustrait à l'action une constante correspondant à la valeur du caractère de l'identité. On trouve en revanche un comportement exponentiel pour les groupes discrets.

Analysons le développement diagrammatique obtenu du point de vue topologique. Un sous-ensemble connexe de plaquettes est homéomorphe à une surface simple si tout lien qu'il contient borde au plus deux plaquettes du diagramme; le bord de cette surface simple est un ensemble de courbes fermées formé des liens bordant une seule plaquette de la surface. On peut ainsi découper tout diagramme en surfaces simples maximales. L'ensemble de leurs bords est formé d'arcs simples dont chacun

- ou bien borde une seule surface (bord libre),
- ou bien est une ligne singulière de branchement le long de laquelle n ($n \geq 3$) plaquettes se rejoignent.

La classification générale des surfaces simples se fait suivant les critères suivants

- (a) *Orientabilité*. Deux plaquettes voisines sont *orientées de manière cohérente* si les orientations qu'elles induisent sur le lien commun qui les sépare sont opposées. Une surface est *orientable* si toutes ses plaquettes peuvent être orientées simultanément de manière cohérente.
- (b) Le nombre b de trous, c'est-à-dire de contours simples fermés constituant le bord.
- (c) Son *genre* $g = 2 - (n_2 - n_1 + n_0 + b) \geq 0$, n_2 étant le nombre de plaquettes, n_1 celui de liens et n_0 celui de sites appartenant à la surface. On démontre que toute surface orientable de genre g (toujours pair dans ce cas) est homéomorphe à une sphère munie de $\frac{1}{2}g$ poignées (conservant l'orientabilité) et dans laquelle on a foré b trous. Le tore correspond à $g = 2$, $b = 0$, le disque à $g = 0$, $b = 1$. Si la surface est non orientable, elle est homéomorphe à une sphère percée de $b + g$ trous, $g (\geq 1)$ d'entre eux étant refermés à l'aide d'un ruban de Möbius (qui correspond au cas $b = 1$, $g = 1$). Le plan projectif correspond à $g = 1$, $b = 0$ et la bouteille de Klein à $g = 2$, $b = 0$. Dans les chapitres ultérieurs, où nous aurons exclusivement affaire à des surfaces orientables, nous appellerons genre et noterons encore g la moitié de la quantité (paire) ci-dessus.

Après ces préliminaires, procédons à l'intégration sur les champs de jauge. La relation (103) implique l'absence de bords libres pour les diagrammes de la fonction de partition; pour une observable quelconque, les bords libres du diagramme doivent coïncider avec les liens utilisés pour la définition de cette quantité. La relation (107) permet l'intégration sur les liens internes des surfaces simples constituant le diagramme. On en déduit en particulier que toutes les plaquettes doivent porter la même représentation lorsqu'elles sont orientées de manière cohérente, . Cela exclut les

surfaces non orientables portant des représentations non réelles (dans le sens qu'elles ne sont pas équivalentes à leur représentation conjuguée). Le résultat de l'intégration est

$$\beta_r^{n_2} d_r^{2-g-b} \prod_{\text{bords}} \chi_r(U_{\text{bord}}) \quad (117)$$

Vérifier ce résultat.

Il ne reste plus, en fin de compte, qu'à intégrer le long des lignes singulières de branchement pour obtenir la contribution finale du diagramme. C'est là que réside généralement l'opération la plus délicate, qui nécessite en particulier une bonne connaissance des coefficients de couplage de Clebsch-Gordan des représentations du groupe.

Montrer que, s'il n'y a qu'une ligne singulière fermée, le long de laquelle sont incidentes p surfaces simples auxquelles sont attachées les représentations r_1, r_2, \dots, r_p , l'intégration conduit à un facteur N_{r_1, \dots, r_p} entier, comptant le nombre de fois où la représentation identité est contenue dans le produit $r_1 \otimes r_2 \otimes \dots \otimes r_p$.

Examinons plus en détail la topologie des diagrammes contribuant à la boucle de Wilson. Si l'on pense immédiatement à la topologie du disque, bordé par la boucle, qui conduit, comme on l'a vu, à une loi de décroissance exponentielle en fonction de l'aire, il faut également songer à la possibilité de diagrammes toriques, tel celui de la figure 12. Ces derniers induisent une décroissance en loi de périmètre, à moins que leur contribution ne soit nulle. Physiquement, ils décrivent un processus où les charges sont écrantées et peuvent ainsi être séparées, sans confinement. Les comportements correspondant aux deux types de diagrammes sont $\beta_j^{L^2}$ et $\beta_j^{16(L-1)}$ respectivement, ce qui situe le passage d'un régime de loi d'aire à un régime de loi de périmètre pour une taille de l'ordre de $L \simeq 15$. Cette taille est supérieure, en l'état actuel, à celle utilisée dans les simulations numériques qui peuvent donc conclure hâtivement à une loi d'aire. Fort heureusement, il est possible d'exclure ce genre de diagramme lorsque le groupe a un centre non réduit à l'unité. Le dernier exercice montre que la contribution est nulle si $r \otimes \bar{r}$ ne contient pas la représentation utilisée dans la définition de la boucle de Wilson. Or chaque représentation induit une représentation du centre, sous-groupe invariant, et $r \otimes \bar{r}$ correspond toujours à la représentation unité du centre. Si celui-ci n'est pas trivial et si la boucle de Wilson étudiée induit un caractère non trivial sur le centre, elle ne pourra donc conduire à des contributions non nulles de ce type. Ainsi, pour $SU(2)$, on ne peut écranter un spin $\frac{1}{2}$ par des combinaisons $j \otimes j$, de spin toujours entier; mais le spin 1, correspondant à la représentation fondamentale du groupe $SO(3)$, pourra l'être et l'opérateur boucle de Wilson ne peut alors être utilisé pour distinguer les phases du système.

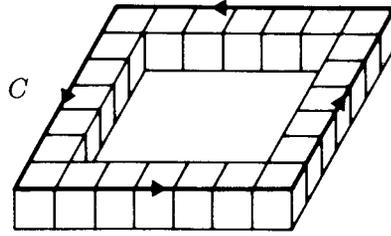


Figure 12 : Un diagramme pouvant donner une loi de périmètre pour la boucle de Wilson.

3.3 Energie libre

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire divers développements. Après énumération des graphes par les techniques exposées dans le chapitre VII (volume 2), toutes ces considérations permettent de calculer un développement de l'énergie libre par site pour tout réseau hypercubique de dimension d et pour tout groupe. Introduisant un certain nombre de coefficients correspondant aux diverses topologies possibles, à savoir

- Sphère

$$S_n = \sum_r \beta_r^n d_r^2$$

- Tore

$$T_n = \sum_r \beta_r^n$$

- p disques partageant la même courbe fermée pour frontière

$$\Theta_{n_1 \dots n_p} = \sum_{r_1 \dots r_p} \beta_{r_1}^{n_1} \dots \beta_{r_p}^{n_p} d_{r_1} \dots d_{r_p}$$

- Cylindre fermé à ses extrémités par des disques dupliqués

$$\zeta_{n_1 \dots n_5} = \sum_{r_1 \dots r_5} \beta_{r_1}^{n_1} \dots \beta_{r_5}^{n_5} d_{r_1} d_{r_2} d_{r_4} d_{r_5} N_{r_1 r_2 r_3} N_{r_3 r_4 r_5}$$

- quatre arcs singuliers ayant tous les mêmes extrémités et limitant ainsi six disques

$$\Phi_{n_{12} n_{13} n_{14} n_{23} n_{24} n_{34}} = \sum \prod_{i < j} d_{r_{ij}} \beta_{r_{ij}}^{n_{ij}} \int dU_i \prod_{i < j} \chi_{r_{ij}}(U_i U_j^{-1})$$

on obtient l'énergie libre à l'ordre 16 sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{2 \ln Z}{d(d-1)} &= \ln \tilde{\beta}_0 + (d-2) \left[\frac{1}{3} S_6 + (2d-5) S_{10} + \frac{10}{3} (d-3) S_{12} + \right. \\
&\quad + (20d^2 - 106d + 143) S_{14} + (84d^2 - 504d + 757) S_{16} + \\
&\quad + \frac{1}{4} (d-3) T_{16} - (2d - \frac{29}{6}) S_6^2 - (44d^2 - 226d + 294) S_6 S_{10} + \\
&\quad + (2d-5) \Theta_{551} + \frac{2}{3} (d-3) (2d-5) (\Theta_{555} + \Theta_{5551}) + \\
&\quad + \frac{8}{3} (d-3) (3\Theta_{842} + 3\Theta_{10,4,2} + 2\Theta_{933} + \frac{3}{2} \Theta_{664} + \Phi_{444}^{111}) \\
&\quad \left. + (20d^2 - 108d + 149) (2\Theta_{951} + \zeta_{51415}) + o(\beta_J^{16}) \right]
\end{aligned} \tag{118}$$

L'application à un cas spécifique n'est alors plus qu'une question d'algèbre. Nul besoin de dire qu'à ce niveau de complexité, un programme d'algèbre formelle sur ordinateur est très utile. La série peut ensuite être analysée par les différentes méthodes générales exposées au chapitre VII (volume 2).

Rappelons que les théories de jauge pure possèdent une transition du premier ordre au dessus d'une certaine dimension. L'énergie libre, telle que nous l'a montré l'analyse du champ moyen, n'est pas singulière en ce point. Dans le cadre de cette approximation, les deux arcs de couplages faible et fort correspondent à la même fonction analytique dont ils constituent des déterminations sur des feuilletts différents. Il est théoriquement possible de prolonger analytiquement la fonction, de calculer ses deux déterminations et d'en déduire, par exemple, le point de transition. Dans la pratique, les séries actuelles sont beaucoup trop courtes pour cela.

Considérons plus en détail le modèle de groupe Z_2 en dimension quatre. L'analyse directe de la série en β_J montre une singularité située vers $\tanh \beta_J = 0.48 - 0.49$, plus loin que la position de la transition $\tanh \beta_c = \sqrt{2} - 1$, connue par dualité. Cette singularité décrit l'extrémité de la phase métastable de couplage fort. Mais il est possible, comme le suggère l'analyse de champ moyen, que la constante de couplage soit, elle, une fonction uniforme, sans singularité, de l'énergie interne E par plaquette. Si on inverse la série $E(\beta_J)$ en $\beta_J(E)$, cette attente semble confirmée : aucune singularité n'apparaît et on obtient la courbe de la figure 13, où il est possible de trouver la position de la transition qui coïncide avec la valeur prédite par dualité, aux incertitudes près.

Le cas des groupes non abéliens est plus difficile à analyser. Les simulations numériques révèlent l'absence de transition, avec cependant un pic important de la chaleur spécifique (figure 14). Les séries ont bien du mal à reproduire une telle structure et leurs différentes extrapolations commencent à donner des résultats discordants dans cette région. On peut améliorer les choses, par exemple en imposant la position d'une singularité complexe calculée pour reproduire le pic observé de la chaleur spécifique, mais tous ces essais sont assez limités. La meilleure technique à l'heure actuelle est de raccorder les séries dans cette région aux prédictions de la théorie

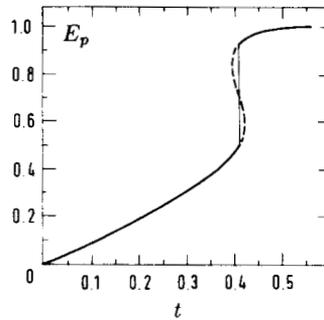


Figure 13 : L'énergie E par plaquette en fonction de $t = \tanh \beta_J$ pour le groupe de jauge Z_2 .

continue utilisant le groupe de renormalisation et la liberté asymptotique. Un exemple en sera donné pour la tension de corde.

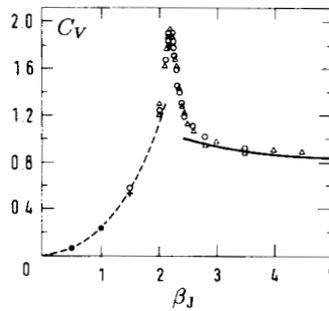


Figure 14 : La chaleur spécifique du modèle de jauge $SU(2)$ quadri-dimensionnel d'après B. Lautrup et M. Nauenberg, *Phys. Rev. Lett.* **45** (1980) 1755.

Les contributions des diagrammes peuvent être resumées en grande dimension de façon très différente de ce qui a été fait pour le champ moyen. Un simple examen de la formule (118) révèle que le polynôme en d voit son degré augmenter d'une unité tous les quatre termes. Ceci suggère de fixer $\beta_J^4 d$ et de resommer les termes prépondérants à grande dimension, obtenant aussi un développement en $d^{-1/4}$. Imaginons alors le processus de réduction suivant. Une tranche du réseau comprise entre deux hyperplans voisins $k < x_\mu < k + 1$ et contenant au moins une plaquette du diagramme est supprimée. Le diagramme n'ayant pas de bords libres, comme on l'a vu, quatre plaquettes au moins vont disparaître dans ce processus. De plus, certaines plaquettes seront dupliquées lors du recollage des deux demi-espaces et devront être remplacées par une seule. Dans tous les cas, le

nombre de plaquettes diminue d'au moins quatre, alors que la *dimensionnalité* du diagramme – c'est-à-dire le nombre de dimensions différentes qu'il utilise, et donc la puissance du polynôme en d entrant dans sa contribution – diminue d'au plus une unité. Il est clair que, dans la limite cherchée, les termes prépondérants voient exactement quatre plaquettes disparaître à chaque étape, jusqu'à l'obtention d'un simple cube. Cela caractérise les diagrammes dominants qui présentent la topologie de la surface d'un arbre fait de cubes tridimensionnels accolés.

Chaque cube ayant six faces, il a au plus six voisins dans cet arbre. Dans la construction inverse du processus qui vient d'être décrit, un cube peut être ajouté de $2d - 5$ ($\approx 2d$) façons sur une des faces. Certaines sont interdites par des effets de volume exclu, mais leur nombre est négligeable vis-à-vis de $2d$. La valeur moyenne d'une plaquette à laquelle est attachée la représentation r , $p_r = \langle \chi_r(U_p) \rangle / d_r$, satisfait donc à l'équation de récurrence

$$p_r = \beta_r + 2dp_r^5 \quad (119)$$

Cette équation est paramétrisée par

$$\begin{cases} f_r \equiv \frac{p_r}{\beta_r} = (1 - u_r)^{-1} \\ x_r \equiv 2d\beta_r^4 = u_r(1 - u_r)^4 \end{cases} \quad (120)$$

et il est maintenant facile d'obtenir l'énergie libre (par intégration de l'énergie interne p_r d'une plaquette)

$$\tilde{F} \equiv \frac{\ln Z}{N} - \frac{d(d-1)}{2} \ln \tilde{\beta}_0 = \frac{d^{3/2}}{12\sqrt{2}} \sum_{r \neq 0} d_r^2 x_r^{1/2} \frac{u_r(1-3u_r)}{(1-u_r)^2} (1 + \mathcal{O}(d^{-1/4})) \quad (121)$$

Avec l'action de Wilson, seule la représentation fondamentale et sa conjuguée contribuent à (121), et l'énergie libre soustraite \tilde{F} prend alors une forme universelle, représentée sur la figure 15. Elle présente un point de rebroussement pour $u = 1/5$, soit $2d\beta_J^4 = 4^4/5^5$. Comme le réarrangement de la série n'est possible que dans un domaine de convergence, seul l'arc OA et acceptable. Il représente la totalité de la phase de couplage fort, y compris la région métastable. L'extrémité A a un comportement singulier $(\beta_A - \beta_J)^{-1/2}$ tel un point critique du second ordre avec un exposant $\nu = \frac{1}{4}$ (voir chapitre XI, volume 2). La branche de couplage faible est absente dans l'échelle utilisée ici. En effet, d'après l'analyse du champ moyen, cette phase se trouve confondue avec l'axe vertical dans la limite où la dimension d tend vers l'infini.

Calculer la correction en $d^{-1/4}$ à cette approximation.

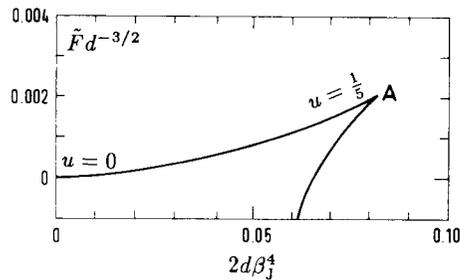


Figure 15 : La fonction de partition soustraite obtenue par sommation de la série de haute température en fonction $2d\beta_j^4$.

3.4 La tension de corde et la transition rugueuse

Dans les théories non abéliennes où il n'y a pas de transition à quatre dimensions, on aimerait pouvoir extrapoler les séries de couplage fort pour la tension de corde jusque dans la région de couplage faible, afin de faire le lien avec le comportement d'échelle et la limite continue. Ce programme rencontre deux sortes de difficultés. La première a été évoquée dans le paragraphe précédent et a trait au prolongement analytique délicat des séries dans la région intermédiaire. Un second problème surgit avec cette observable qui n'est pas locale; il s'agit d'une transition d'un type particulier, liée aux interfaces, baptisée *transition rugueuse*. Ce nom provient de la théorie de la croissance cristalline où apparaît un phénomène similaire.

Pour le mettre en évidence, considérons un modèle d'Ising tridimensionnel, avec des conditions aux limites telles qu'il existe à basse température une interface entre deux régions d'aimantation opposée: les spins en bord d'échantillon pointent en haut au dessus d'un plan donné, en bas au dessous de ce plan. La tension superficielle est liée à la différence d'énergie libre entre cette configuration et le système usuel, sans interface (cf. chapitre II); Si A est l'aire de l'interface minimale et ΔF la différence d'énergie libre,

$$\Delta F = -KA \quad (122)$$

où K est la tension de corde du modèle de jauge Z_2 dans sa phase de couplage fort (par dualité).

L'interface est un plan cristallographique à température nulle. Lorsque T augmente, elle se met à fluctuer et devient de plus en plus chaotique, jusqu'à une température T_R , en général plus petite que T_C ; où les propriétés changent radicalement. En fait, au delà de ce point, les fluctuations sont si importantes qu'on ne peut plus parler de surface localisée. Pour préciser quantitativement ce phénomène, désignons par h_i l'altitude d'un point de la surface de séparation au dessus de sa position d'équilibre au point \mathbf{r}_i et introduisons la quantité

$$p(h, \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \langle \delta(h_i - h_j - h) \rangle \quad (123)$$

exprimant la probabilité pour que deux points à distance $r_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ diffèrent d'une hauteur h . L'épaisseur Δh de l'interface peut être mesurée par le second membre de cette distribution dans la limite de grande distance

$$\sum h^2 p(h, r_{ij}) = \langle (h_i - h_j)^2 \rangle \rightarrow (\Delta h)^2 \text{ lorsque } r_{ij} \rightarrow \infty \quad (124)$$

La transition rugueuse correspond à une divergence de cette quantité à une température T_R . Une façon équivalente de voir les choses est d'introduire l'énergie libre fL nécessaire à la création d'une marche unité de longueur L sur l'interface; f s'annule alors pour $T \geq T_R$, de telle sorte que les déformations de grande amplitude ne nécessitent plus d'apport d'énergie. Il faut noter que la tension de surface K n'a aucune raison de s'annuler à T_R , mais peut être singulière en ce point.

Cette description qualitative du phénomène s'appuie sur des analyses diverses provenant soit des modèles exacts, soit de simulations numériques, soit d'expériences réelles de croissance des cristaux. Pour la préciser, nous nous tournons vers le modèle approché dit *Solid-on-Solid* (*S.O.S*), qui ne considère qu'une classe de déformations possibles de l'interface, excluant les surplombs et les inclusions locales d'une phase dans l'autre (de manière imagée, la surface est une mer avec vagues non déferlantes et sans embruns). En trois dimensions, l'action correspondante $\beta\mathcal{H} = \beta \sum_{(i,j)} |h_i - h_j|$, peut être remplacée par $\beta\mathcal{H} = \beta \sum_{(i,j)} (h_i - h_j)^2$, modèle appartenant à la même classe d'universalité. On reconnaît le modèle gaussien discret, dual du modèle *XY* bidimensionnel étudié en détail au chapitre IV; sa transition est la transition rugueuse cherchée. La tension de surface, énergie libre de ce système, va donc avoir une singularité essentielle de la forme

$$K = A(\beta) + B(\beta) \exp\left(-\frac{C}{\sqrt{T_R - T}}\right) \quad (T < T_R) \quad (125)$$

L'énergie libre f de création d'une marche s'identifie à l'inverse de la longueur de corrélation, et par conséquent,

$$f \sim \xi_{XY}^{-1} \sim \exp\left(-\frac{C}{2\sqrt{T_R - T}}\right) \quad (126)$$

L'échelle qui intervient dans ce phénomène est ξ_{XY} pour $T < T_R$ (c'est-à-dire dans la région de haute température du modèle *XY*). Pour $T > T_R$, ξ_{XY}^{-1} est nul et l'échelle est la taille L du réseau. Introduisons $\lambda = \ln(\xi_{XY}/a)$ pour $T < T_R$, $\lambda = \ln(L/a)$ pour $T > T_R$. A grande distance, la probabilité $p(h, r)$ introduite en (123) sera

$$p(h, L) \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{h^2}{4\lambda}\right) \quad (127)$$

L'épaisseur de l'interface est donc

$$\Delta h = \sqrt{2\lambda} \quad (128)$$

alors que la probabilité pour un point de l'interface d'être à sa position théorique d'équilibre est

$$p(0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \sim \frac{1}{\Delta h} \sim \begin{cases} (T_R - T)^{1/4} & \text{pour } T < T_R \\ \frac{1}{\sqrt{\ln L}} & \text{pour } T > T_R \end{cases} \quad (129)$$

De tels comportements sont probablement universels et doivent donc être valables pour l'interface du modèle d'Ising initial. On pense que la transition rugueuse n'affecte pas l'énergie libre et les observables locales ou les fonctions de corrélation.

Par dualité, cette étude se transpose au modèle de jauge Z_2 tridimensionnel. La discussion précédente peut s'étendre à toute dimension. Cependant, il n'y a pas, dans le cadre théorique actuel, de preuve rigoureuse de l'existence de cette transition. La boucle de Wilson n'ayant qu'une singularité extrêmement faible (125), on doit rechercher d'autres quantités ayant un comportement plus violent pour mettre en évidence ce type de transition. Soit par exemple

$$\eta^2 = \frac{\sum_{\mathbf{x}_\perp} E(\mathbf{x}) \mathbf{x}_\perp^2}{\sum_{\mathbf{x}_\perp} E(\mathbf{x})} \quad (130)$$

avec

$$E(\mathbf{x}) = \frac{\langle W(C) \chi(U_p) \rangle - \langle W(C) \rangle \langle \chi(U_p) \rangle}{\langle W(C) \rangle} \quad (131)$$

$E(\mathbf{x})$ mesure, à l'aide d'une plaquette test p parallèle au plan de la boucle de Wilson et distante de \mathbf{x}_\perp de la surface minimale, la densité d'énergie chromo-électrique au point \mathbf{x} . De la sorte, η^2 apparaît comme une généralisation de l'expression (124), et on s'attend à une divergence en loi de puissance. Les analyses des séries correspondantes confirment cette hypothèse et révèlent, de façon remarquable, une position de la transition rugueuse, exprimée en termes de couplage de jauge β_f relatif au caractère fondamental, pratiquement indépendante du groupe considéré (compte tenu des erreurs sur cette position), ce qui confirme sa nature géométrique

$$\begin{cases} d = 3 & \beta_{fR} \simeq 0.46 \\ d = 4 & \beta_{fR} \simeq 0.40 \\ d = 5 & \beta_{fR} \simeq 0.37 \end{cases} \quad (132)$$

La position de la transition rugueuse relativement à la transition de déconfinement n'est pas nécessairement fixée. Un argument heuristique dit que la transition de phase sera du premier ordre si la transition rugueuse se produit à température plus basse. En effet, si elle était du second ordre, le potentiel interquark serait en $1/R$ au point critique, alors que l'on s'attend à des corrections exponentielles à la loi d'aire au delà du point de transition rugueuse.

On peut se demander quelle est la théorie critique au point T_R . A trois dimensions, nous avons vu qu'elle appartient à la classe d'universalité du modèle XY bidimensionnel. A d dimensions, le même raisonnement conduit à $(d-2)$ modèles XY bidimensionnels découplés. La quantité η y aurait donc un exposant critique $-\frac{1}{4}$, alors que l'énergie libre de marche s'annule avec une singularité essentielle. Cette annulation a un rôle physique important; la surface est désormais libre de se mouvoir dans des directions orthogonales à son plan minimal, c'est-à-dire qu'elle se comporte comme une surface continue. La symétrie de translation et de rotation est ainsi restaurée. Cela a été vérifié à la fois dans les calculs de couplage fort du potentiel, ainsi que dans des simulations numériques mesurant ce potentiel.

L'analyse des séries de couplage fort pour la tension de corde est, bien entendu, compliquée par la présence de la transition rugueuse. Elle se traduit souvent par une estimation inexacte de la valeur du couplage pour laquelle la somme de la série s'annule. La figure 16 montre la comparaison de ces estimations avec les résultats numériques. Dans la région intermédiaire, il est possible d'effectuer une comparaison avec les prédictions utilisant le groupe de renormalisation et la liberté asymptotique. En effet, la tension de corde est une quantité dimensionnée. Exprimée dans les unités physiques, ce paramètre $\sigma = Ka^2$ peut être interprété dans le modèle des cordes relativistes, et est relié à la pente de Regge $\sigma = (2\pi\alpha')^{-1}$, connue expérimentalement ($\alpha' \simeq 0.90\text{GeV}^{-2}$ et $\sqrt{\sigma} \simeq 420\text{MeV}$). La formule de Regge relie linéairement le spin au carré de la masse des particules et résonances. La formule (31) entraîne alors que, dans le régime de couplage faible, on doit avoir

$$K \sim \sigma \Lambda_L^{-2} (b_0 g_0^2)^{-b_1/b_0^2} \exp(-1/b_0 g_0^2) \quad (133)$$

courbe représentée sensiblement par une droite dans les échelles logarithmiques de la figure 16. Le raccord de cette courbe avec les extrapolations des séries haute température dans le domaine central permet une détermination du paramètre Λ_L concordante avec celles obtenues par d'autres méthodes.

La tension de corde ne donne que le coefficient de la croissance asymptotique linéaire du potentiel statique quark-antiquark. De nombreux travaux ont cherché à déterminer la forme de ce potentiel qui permet de décrire les masses des états mésoniques comportant des quarks lourds et observés expérimentalement. Nous ne pouvons traiter ici cet aspect important de la chromodynamique quantique, directement relié à la phénoménologie des particules. Nous ne décrirons pas davantage la possibilité d'une transition

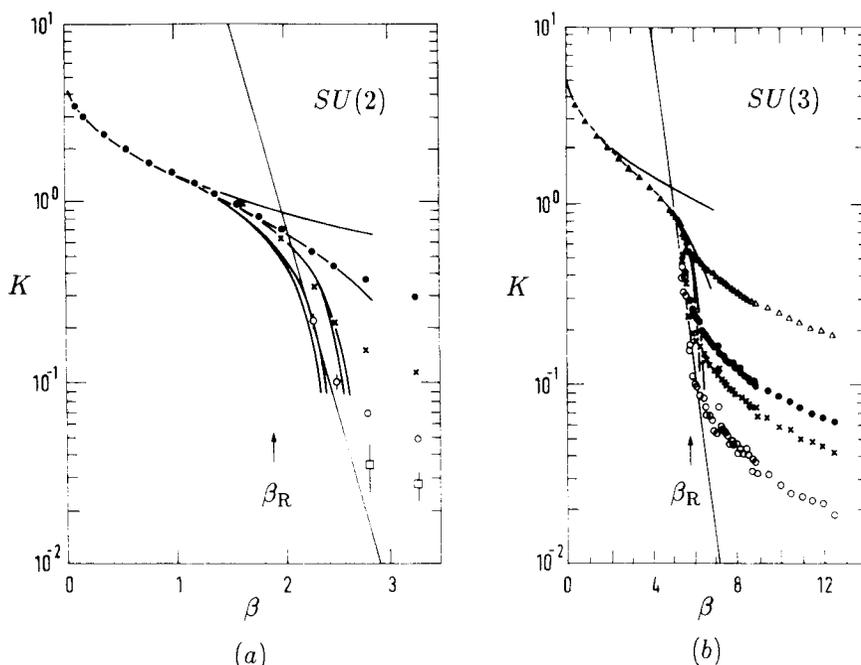


Figure 16 : Tension de corde pour les modèles de jauge $SU(2)$ (a) et $SU(3)$ (b). Les données numériques proviennent de M. Creutz, *Phys. Rev. D***21** 2308 (1980) et M. Creutz et K.J.M. Moriarty, *Phys. Rev. D***26** 2166 (1982).

déconfinante à *température finie* qui joue un rôle important en astrophysique et dans les collisions d'ions lourds. Nous nous limiterons à une courte description du spectre d'excitations en théorie de jauge pure, sans champs de matière.

3.5 Le spectre de masse

Il semble que le spectre de masse de la théorie de jauge pure soit le domaine d'application idéal pour les séries de couplage fort. Elles ne seront pas affectées par des effets du type transition rugueuse et on s'attend à pouvoir raccorder les régions de couplage fort aux prédictions de la liberté asymptotique. Les états physiques n'ont pas de composantes fermioniques et sont recherchés expérimentalement sous le nom de *boules de glu*.

L'obtention des séries est cependant un peu plus délicate. Nous savons que les fonctions de corrélations sont dominées par une exponentielle. A grande distance, on s'attend donc à un comportement

$$G(\mathbf{r}) = \langle \mathcal{O}_1(0) \mathcal{O}_2(\mathbf{r}) \rangle_c \sim A_1(\mathbf{r}) e^{-m_1(\hat{\mathbf{r}})r} + A_2(\mathbf{r}) e^{-m_2(\hat{\mathbf{r}})r} + \dots \quad (134)$$

avec différentes masses $m_1 \leq m_2 \leq \dots$ dépendant de la direction d'observation $\hat{\mathbf{r}}$. L'idée est donc de choisir deux plaquettes distantes, de calculer la fonction de corrélation correspondante par les diagrammes les connectant et d'en déduire $m_1(\hat{\mathbf{r}}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \ln G(\mathbf{r})/r$. Le problème qui apparaît alors est lié à la dégénérescence des masses, qui empêche l'exponentiation de la série obtenue.

Pour mettre en évidence ce phénomène, calculons la première correction à la longueur de corrélation du modèle d'Ising dans la direction parallèle à un axe principal.

Si les deux spins sont distants de n , le premier diagramme est la ligne droite les joignant; le second présente deux décrochements aux positions i et j ($0 \leq i < j \leq n$). On a donc

$$\langle \sigma_0 \sigma_n \rangle = (\tanh \beta)^n + (d-1)(\tanh \beta)^{n+2} n(n+1) + \dots \quad (135)$$

Le logarithme de cette série donne bien, à l'ordre 0, un terme linéaire en n

$$\xi = -\frac{1}{\ln \tanh \beta} (1 + \mathcal{O}(\tanh \beta)) \quad (136)$$

mais, à l'ordre suivant, le terme est quadratique en n et la longueur de corrélation semble donc avoir une correction infinie. La résolution de ce paradoxe tient au fait que la représentation utilisée ne diagonalise pas la matrice de transfert; il se produit des accidents de ce type dès que deux valeurs propres sont égales. Fort heureusement, nous connaissons la façon de diagonaliser, en passant en transformée de Fourier et en considérant

$$G(\mathbf{p}_\perp, x_0) = \sum_{\mathbf{x}_\perp} \langle \sigma_0 \sigma_{x_0, \mathbf{x}_\perp} \rangle e^{-i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp} \sim e^{-x_0/\xi} + \dots \quad (137)$$

La première correction est alors un simple décalage d'une unité dans les directions perpendiculaires

$$G(\mathbf{p}, x_0) = (\tanh \beta)^n + (\tanh \beta)^{n+1} 2d(n+1) \sum_{\mu} \cos p_\mu + \dots \quad (138)$$

série qui, maintenant, s'exponentie très bien. Les corrections suivantes peuvent également être calculées sans trop de peine.

La leçon de cet exercice est qu'il faut d'emblée diagonaliser la matrice de transfert, autant que faire se peut. Ceci est vrai pour l'invariance par translation – il faut passer en transformée de Fourier –, mais aussi pour

les autres invariances, à savoir l'invariance de rotation discrète du réseau et la C -parité, reliée à la conjugaison de charge. Nous considérons donc les quantités

$$G_{\mu\nu,\rho\sigma}^{\pm}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{x}} \langle \text{Tr} \frac{1}{2} (U_{\mu\nu}(0) \pm U_{\mu\nu}^{\dagger}(0)) \text{Tr} \frac{1}{2} (U_{\rho\sigma}(\mathbf{x}) \pm U_{\rho\sigma}^{\dagger}(\mathbf{x})) \rangle_c e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (139)$$

où $U_{\mu\nu}(\mathbf{x})$ représente la variable U_p attachée à la plaquette de centre \mathbf{x} et de directions μ, ν . Au lieu de calculer G , évaluons comme d'habitude son inverse. A l'ordre le plus bas, le premier diagramme contribuant à cette quantité est un tube qui peut être tronçonné en déplacements élémentaires d'une plaquette effectuant une marche au hasard (figure 17). Appelant $M_{\mu\nu,\rho\sigma}(\mathbf{k})$ la matrice décrivant le déplacement élémentaire de la plaquette et qui obéit aux relations de symétrie

$$M_{\mu\nu,\rho\sigma} = M_{\rho\sigma,\mu\nu} = C M_{\nu\mu,\rho\sigma} \quad (C = \pm 1) \quad (140)$$

on trouve

$$\begin{cases} M_{\mu\nu,\mu\nu} = 2 \sum_{\rho \neq \mu,\nu} \cos k_{\rho} \\ M_{\mu\nu,\mu\rho} = \begin{cases} 4 \cos \frac{1}{2} k_{\nu} \cos \frac{1}{2} k_{\rho} & \text{quand } C = +1 \\ 4 \sin \frac{1}{2} k_{\nu} \sin \frac{1}{2} k_{\rho} & \text{quand } C = -1 \end{cases} \end{cases} \quad (141)$$

pour ses composantes non nulles. Le propagateur G est relié à cette matrice par

$$[G^{-1}(\mathbf{k})]_{\mu\nu,\rho\sigma} = (1 - \beta_r^4 M_{\mu\nu,\rho\sigma}(\mathbf{k})) \quad (142)$$

les corrections consistent à "décorer" le tube du propagateur par des déformations diverses.

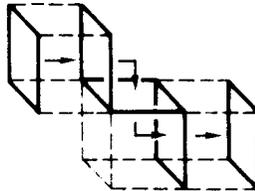


Figure 17: Marche au hasard d'une plaquette.

Enfin, il faut tenir compte des invariances par rotations discrètes. En quatre dimensions et pour une propagation le long de la quatrième direction, nous devons décomposer le propagateur suivant les représentations du groupe discret de symétrie du cube (rotations laissant invariante la quatrième dimension). Les quantités à considérer sont

- Le singlet $\text{Re Tr}(U_{12} + U_{23} + U_{31})$
- Le doublet $\{\text{Re Tr}(U_{13} - U_{23}); \text{Re Tr}(U_{13} + U_{23} - 2U_{12})\}$
- Le triplet $\{\text{Im Tr } U_{12}; \text{Im Tr } U_{23}; \text{Im Tr } U_{31}\}$ qui n'existe que pour les groupes dont la représentation fondamentale n'est pas réelle.

Vérifier cette décomposition

Les détails des calculs pouvant être trouvés dans les références, nous mentionnerons seulement un résultat pour l'état singlet 0^{++} du groupe de jauge de couleur $SU(3)$. Les séries ont été calculées jusqu'à l'ordre 8. Les extrapolations sont stables lorsqu'on exprime la masse de ce scalaire en fonction de l'énergie de plaquette avant d'estimer la série. On trouve

$$\frac{m_S}{\Lambda_L} \approx 340 \pm 40 \quad (143)$$

Cette valeur est en accord avec les simulations numériques et donnerait pour la masse de la boule de glu approximativement 800 MeV. Bien entendu, ce résultat ne doit pas être pris à la lettre, car de nombreux effets ont été négligés, tel l'effet des quarks. Il semble également exister un état 2^{++} de masse voisine, de même que des états excités de masse plus élevée. Du point de vue expérimental, l'existence de tels états n'a pas encore été prouvée. Par ailleurs, un gros effort numérique est fait actuellement pour déterminer le spectre hadronique en présence de quarks (chapitre VIII, volume 2). Il reste cependant des difficultés techniques lorsque ces quarks présentent une faible masse.

4. Fermions sur réseaux

4.1 Le problème du doublement

Les théories de jauge ont été introduites pour l'étude de la chromodynamique quantique, et on ne peut donc éviter de considérer des champs fermioniques. Si nous avons déjà mentionné la méthode pour rendre une action localement invariante (passage de la formule (1) à la formule (2)), encore faut-il pouvoir disposer de cette dernière. Or, de sérieux problèmes apparaissent avec les fermions.

L'idée la plus simple pour discrétiser l'action continue de champs fermioniques $\bar{\psi}$ et ψ de spin $\frac{1}{2}$

$$S_{\text{cont}} = \int d^d x \left(\frac{1}{2} i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \right) \quad (144)$$

est de remplacer les dérivées par des différences finies entre proches voisins $\partial_\mu f \rightarrow (f_{i+a\hat{\mu}} - f_i)/a$ entre proches voisins. On arrive ainsi à la formule suivante, que nous qualifierons d'*action fermionique naïve*

$$S_{\text{nf}} = \frac{1}{2} i a^{d-2} \sum_{(ij)} \bar{\psi}_i \gamma_{ij} \psi_j - m a^d \sum_i \bar{\psi}_i \psi_i \quad (145)$$

avec

$$\gamma_{ij} = \gamma_\mu (x_i - x_j)^\mu$$

Pour alléger les notations, nous n'avons pas indiqué explicitement tous les indices des champs grassmanniens $\bar{\psi}_i, \psi_i$. Outre l'indice spatial i explicitement indiqué, il y a des indices spinoriels (sur lesquels agissent les matrices de Dirac γ), de couleur (indices de la symétrie interne qui sera rendue localement invariante, et sur lesquels agiront les champs de jauge), et éventuellement de saveur (autres symétries internes dont nous ne nous préoccupons peu ici; la masse m en dépend). Indiquons également les conventions employées ici pour les matrices de Dirac euclidiennes. Elles satisfont à la relation d'anticommutation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu} \quad (146)$$

On utilisera une représentation matricielle fidèle de dimension minimale $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$. C'est alors une base de l'algèbre des matrices $2^{\lfloor d/2 \rfloor} \times 2^{\lfloor d/2 \rfloor}$. En dimension paire, la matrice

$$\hat{\gamma}_5 = i^{d/2} \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_d, \quad \hat{\gamma}_5^2 = 1 \quad (147)$$

est linéairement indépendante des précédentes avec lesquelles elle anticommute. Ajoutée aux d précédentes et multipliée par i , elle complètera la base de matrices de Dirac pour la dimension impaire $d + 1$. En dimension paire, les γ_μ peuvent être choisis antihermitiques, et $\hat{\gamma}_5$ est alors hermitique. La notation $\hat{\gamma}_5$ provient de la physique quadri-dimensionnelle.

L'action quadratique (145) conduit à des champs libres; le propagateur correspondant est diagonalisé en ce qui concerne ses indices spatiaux en transformée de Fourier

$$\Delta(\mathbf{p}) = \left(\frac{1}{a} \gamma_\mu \sin p_\mu a + m \right)^{-1} \quad (148)$$

La position des pôles détermine la masse des particules. Dans la limite $a \rightarrow 0$, ces pôles se situent aux points \mathbf{p} de composantes 0 ou π/a (rappelons que les composantes de l'impulsion sont définies modulo $2\pi/a$)

et sont donc au nombre de 2^d , remplaçant le pôle unique que nous voulions. Cette multiplication des espèces est le reflet d'une symétrie discrète que nous allons préciser. En dimension paire, introduisons les d opérateurs $T_\mu = \gamma_\mu \hat{\gamma}_5 (-1)^{x_\mu/a}$, $\mu = 1, \dots, d$. Ils engendrent un groupe fini d'ordre 2^{d+1} , et l'action (145) est invariante sous l'action de ce groupe ($\psi \rightarrow T_\mu \psi$, $\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} T_\mu^\dagger$). Chacune des transformations \mathcal{T} décale l'impulsion d'une des quantités $\bar{\mathbf{p}}$ précédemment introduites, et agit sur les indices spinoriels par une matrice $\mathcal{S}(\bar{\mathbf{p}})$. Au voisinage de chacun des pôles, le propagateur (148) se récrit

$$\Delta(\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} + \mathbf{k}) = \mathcal{S}(\bar{\mathbf{p}}) \frac{m - \gamma_\mu k_\mu}{\mathbf{k}^2 + m^2} \mathcal{S}(\bar{\mathbf{p}})^{-1} + \mathcal{O}(a) \quad (149)$$

Les transformations \mathcal{S} ne font que de modifier la représentation des matrices de Dirac. Cette formule met clairement en évidence l'identité des 2^d particules de Dirac de masse m . Lorsqu'on reste au niveau des champs libres, on peut introduire un projecteur sur l'un de ces états dans l'action (145) et ainsi éliminer les doublons indésirables. Ce n'est plus possible lorsque les champs sont en interaction; il y a production de paires de ces particules indésirables qui contribueront en particulier aux états intermédiaires.

Etudier la dégénérescence en dimension impaire.

Plusieurs échappatoires à ce problème ont été imaginées. Elles ont chacune leurs inconvénients. Nous montrerons d'ailleurs, dans la section suivante, qu'il n'est pas possible de définir une action fermionique sur réseau ayant toutes les propriétés désirées. Une première possibilité est de délocaliser le terme de masse sur des sites voisins d'une quantité proportionnelle à un paramètre r . Formellement, la limite continue sera alors inchangée. On obtient ainsi l'action de Wilson

$$S_{\text{Wf}} = \frac{1}{2} \sum_{(ij)} \bar{\psi}_i (i\gamma_{ij} a^{d-2} + r a^{d-1}) \psi_j - \left(m + \frac{dr}{a} \right) \sum_i \bar{\psi}_i \psi_i \quad (150)$$

Cette action conduit à un propagateur

$$\Delta(\mathbf{p}) = \left(\frac{1}{a} \gamma_\mu \sin p_\mu a + m + \frac{r}{a} \sum_\mu (1 - \cos p_\mu a) \right)^{-1} \quad (151)$$

Au voisinage de l'impulsion $\bar{\mathbf{p}}$ (avec k composantes égales à π/a , et $d - k$ nulles), les particules ont maintenant une masse d'ordre $m + 2kr/a$ dans la limite $a \rightarrow 0$. Un seul état autour de $\mathbf{p} = 0$ subsiste donc dans la limite continue, les autres se découplant et ne se propageant plus (masse infinie).

Le désavantage de cette formulation est une brisure explicite de l'invariance chirale apparaissant dans la limite de masse nulle

$$\psi \rightarrow e^{\lambda \hat{\gamma}_5} \psi \quad , \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{\lambda \hat{\gamma}_5} \quad (152)$$

C'est une symétrie (non compacte) de l'action continue et de l'action discrète naïve. Or, en physique de particules, elle joue un rôle très important en théorie des interactions faibles. En effet, les deux états de chiralité opposée ± 1 , obtenus par action des projecteurs $\frac{1}{2}(1 \pm \hat{\gamma}_5)$, sont découplés dans la limite de masse nulle, et le restent, même en présence d'interactions. Il est alors possible d'écrire une action pour des particules de chiralité donnée, sans introduire pour cela un partenaire de chiralité opposée (fermions de Weyl). Cette propriété est utilisée de façon cruciale dans le modèle standard de Glashow–Weinberg–Salam pour les interactions électro-faibles. On aimerait donc pouvoir construire un modèle régularisé sur réseau, invariant chirale et sans ce doublement intempestif de particules.

4.2 Le théorème de Nielsen–Ninomiya

Un théorème dû à Nielsen et Ninomiya établit que cette construction est impossible si certaines hypothèses générales sont respectées. La preuve originelle concernait la formulation hamiltonienne de la théorie, mais nous en donnerons une version adaptée à la formulation lagrangienne en dimension d paire. Considérons donc un système fermionique *discret* sur réseau *régulier*, l'action étant *locale*, *hermitique* et *invariante par translation*. Le contenu mathématique exact de ces hypothèses sera précisé tout au long de notre démonstration. La conclusion est qu'il y a autant d'états de chiralité $+1$ que de chiralité -1 dans un tel système.

Si tel n'est pas le cas, il est possible d'écrire une action pour des fermions de chiralité $+1$. Le terme quadratique le plus général prend la forme

$$\sum_{i,j,\mu} \bar{\psi}_i \gamma_\mu \frac{1}{2}(1 + \hat{\gamma}_5) i \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \psi_j \quad (153)$$

L'invariance par translation apparaît dans le fait que \mathcal{F}_μ ne dépend que de la différence $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$, et l'hermiticité dans la relation $\mathcal{F}_\mu^*(\mathbf{x}) = \mathcal{F}_\mu(-\mathbf{x})$ (supposant une symétrie $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ du réseau). Montrons que cette action contient en fait des partenaires de chiralité opposée. La transformée de Fourier

$$\tilde{F}_\mu(\mathbf{k}) = \sum_i \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x}_i) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}_i} \quad (154)$$

est analytique (localité), périodique (avec la période du réseau réciproque) et réelle. En fait, nous n'avons pas besoin de l'analyticité et il nous suffira que $\tilde{F}_\mu(\mathbf{k})$ soit régulière, c'est-à-dire que $|\mathbf{x}|^d \mathcal{F}_\mu(\mathbf{x})$ s'annule suffisamment vite à grande distance. Le théorème s'applique ainsi à une très grande classe de modèles, utilisant des interactions allant au-delà des proches voisins.

L'action quadratique (153) est diagonale dans la représentation d'impulsion, et chaque état physique est associé à un zéro simple isolé de $\tilde{F}_\mu(\mathbf{k})$ (on les appelle "points critiques" du champ vectoriel $\tilde{F}_\mu(\mathbf{k})$). Près d'un tel point $\bar{\mathbf{k}}$, si \tilde{F}_μ est différentiable une fois, nous avons

$$\tilde{F}_\mu(\mathbf{k}) = \mathcal{M}_{\mu\nu}(\mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}})_\nu + \mathcal{O}((\mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}})^2) \quad (155)$$

Nous nous plaçons dans la situation générique où $\partial/\partial k_\nu \tilde{F}_\mu(\mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{k}=\bar{\mathbf{k}}}$ est non singulier. La matrice \mathcal{M} d'éléments $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ peut se décomposer en un produit $\mathcal{M} = \mathcal{O}\mathcal{S}$ d'une matrice orthogonale par une matrice symétrique définie positive. La matrice orthogonale \mathcal{O} peut être réabsorbée dans une redéfinition des champs fermioniques. En effet, il existe toujours une matrice \mathcal{R} telle que

$$\gamma_\mu(1 + \hat{\gamma}_5)\mathcal{O}_{\mu\nu} = \mathcal{R}^{-1}\gamma_\nu(1 + \varepsilon\hat{\gamma}_5)\mathcal{R} \quad (156)$$

Le signe $\varepsilon = \det\mathcal{O} = \det\mathcal{M} = \pm 1$ est appelé *indice* du champ vectoriel $\tilde{F}_\mu(\mathbf{k})$ au point critique $\bar{\mathbf{k}}$. Pour prouver cette relation, nous plongeons l'espace de dimension d paire dans un espace de dimension $d + 1$. La matrice $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ sera étendue à un élément $\tilde{\mathcal{O}}_{\mu\nu} \in SO(d + 1)$ qui agira sur la coordonnée supplémentaire par multiplication par ε . Comme $SO(d + 1)$ admet une représentation spinorielle, il existe une matrice \mathcal{R} dans l'algèbre de Clifford telle que

$$\mathcal{R}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_d \\ \hat{\gamma}_5 \end{pmatrix} \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \gamma_\mu \mathcal{O}_{\mu\nu} \\ \varepsilon \hat{\gamma}_5 \end{pmatrix}$$

ce qui justifie (156).

Prouver l'équation (156) de manière détaillée pour $d = 2$.

Quant à la matrice définie positive \mathcal{S} , elle transforme l'espace des impulsions au voisinage de $\bar{\mathbf{k}}$ par une homothétie de chaque composante de $\mathbf{k} - \bar{\mathbf{k}}$ dans un repère adapté. Cela n'affecte pas en particulier l'orientation de l'espace. En conséquence, le point critique (155) est associé à un état physique de chiralité ε .

Le champ vectoriel réel $\tilde{F}_\mu(\mathbf{k})$ est défini sur une variété compacte, ici le tore T^d . En effet, le réseau étant régulier, la fonction $\tilde{F}_\mu(\mathbf{k})$ est périodique. Un théorème dû à Poincaré et Hopf établit que la somme des indices ε d'un champ vectoriel réel sur une variété compacte est égale à la caractéristique d'Euler de cette variété, ici 0 pour le tore T^d . Ce théorème généralise la simple constatation unidimensionnelle suivante: une fonction périodique à une variable s'annule autant de fois avec une pente positive qu'avec une

pente négative. L'utilisation de cet exemple suggère les extensions de la démonstration à des cas dégénérés où plusieurs points critiques coïncident. La conclusion est donc qu'il y a autant d'états physiques de chiralité +1 que de chiralité -1.

Une conséquence du théorème de Nielsen–Ninomiya est que l'on doit violer une de ses hypothèses pour construire une action invariante chirale sur réseau. Ainsi, on peut utiliser un réseau aléatoire (voir chapitre XI, volume 2). On peut aussi choisir

$$\tilde{F}_\mu(\mathbf{k}) = k_\mu$$

pour $-\pi/a < k_\mu < \pi/a$. Cette fonction est discontinue au bord de la première zone de Brillouin $|k_\mu| < \pi/a$, et l'action est non locale. En particulier, toute paire de sites interagit avec la même intensité, quelle que soit la distance. Ceci introduit des difficultés sérieuses dans les développements ultérieurs, comme par exemple l'introduction de champs de jauge.

La discussion précédente concernait les fermions libres. Elle est également reliée aux anomalies trouvées dans les théories continues de fermions chiraux interagissant avec les champs de jauge, et qui doivent être compensées dans des modèles réalistes d'interactions électro-faibles.

4.3 Fermions de Kogut–Susskind

Le nombre d'espèces de fermions de l'action naïve peut être réduit par une autre technique qui conserve certains aspects discrets de l'invariance chirale (Kogut, Susskind). Malheureusement, elle ne permet cependant pas encore la discrétisation des fermions de Weyl. On utilise des champs grassmanniens à une seule composante (sans indice spinoriel) et on met à profit les pôles multiples du propagateur pour reconstruire le spineur physique à plusieurs composantes. En d'autres mots, on distribue les différentes composantes d'un fermion sur les sites de 2^d "super-réseaux" de maille double pour les interpréter comme l'unique composante d'un champ grassmannien. Une des versions de ce modèle s'écrit

$$S_{\text{KS}} = -\frac{1}{2}a^{d-1} \sum_{i,\mu} (-)^{x_{i,1}+\dots+x_{i,\mu-1}} (\bar{\chi}_i \chi_{i+\hat{\mu}} + \bar{\chi}_{i+\hat{\mu}} \chi_i) + ima^d \sum_i \bar{\chi}_i \chi_i \quad (157)$$

où les champs grassmanniens $\bar{\chi}$, χ n'ont qu'une composante. La technique de reconstruction des spineurs physiques $\bar{\psi}$, ψ à $2^{\lfloor d/2 \rfloor}$ composantes est suggérée par l'exercice suivant.

Diagonaliser la partie quadratique de l'action fermionique (145) relativement aux indices spinoriels et montrer que les états peuvent être découplés. Définissons pour cela des matrices unitaires A_i dépendant du site i et telles que le changement de champs

$$\psi_i = A_i \chi_i, \quad \bar{\psi}_i = \bar{\chi}_i A_i^\dagger \quad (158)$$

diagonalise simultanément les matrices de Dirac

$$A_i^\dagger \gamma_\mu A_{i+\mu} = \Delta_{i\mu} \quad (159)$$

Une solution possible est

$$\begin{cases} A_i = \gamma_1^{x_{i,1}} \dots \gamma_d^{x_{i,d}} \\ \Delta_{i,\mu} = -(-)^{x_{i,1} + \dots + x_{i,\mu-1}} \end{cases} \quad (160)$$

La transformation (158) met l'action sous la forme (157), à cela près que les $\bar{\chi}$, χ ont ici autant de composantes que $\bar{\psi}$, ψ . Cependant, ils sont découplés et le demeurent après introduction des champs de jauge. On peut donc ne garder qu'une seule composante. Ceci justifie donc l'étude de l'action (157).

Les fermions physiques sont reconstruits comme suit. Caractérisons chaque site x_i par sa position y dans un réseau de maille double et son emplacement η dans l'amas des 2^d sites originels groupés pour constituer le super réseau. Ainsi,

$$x_{i,\mu} = 2y_\mu + \eta_\mu, \quad \text{avec } \eta_\mu = 0 \text{ or } 1.$$

Regroupons maintenant le champ χ en un champ à 2^d composantes (indexées par η) du réseau double

$$\begin{cases} \chi_i \equiv (-)^{y_1 + \dots + y_d} \chi_\eta(y) \\ \bar{\chi}_i \equiv (-)^{y_1 + \dots + y_d} \bar{\chi}_\eta(y) \end{cases} \quad (161)$$

Après quelques calculs, on peut alors mettre l'action (157) sous la forme

$$S = a^d \sum_{y,\mu,\eta,\eta'} \bar{\chi}_\eta(y) \Gamma_{\eta,\eta'}^\mu \Delta_\mu \chi_{\eta'}(y) + a \bar{\chi}_\eta(y) \tilde{\Gamma}_{\eta,\eta'}^\mu \delta_\mu \chi_{\eta'}(y) \quad (162)$$

Nous avons utilisé deux opérateurs de différence finie symétrique Δ_μ et δ_μ qui tendent respectivement vers les dérivées première et seconde dans la limite de maille a nulle

$$\begin{cases} \Delta_\mu f(y) \equiv \frac{1}{4a} [f(y + \hat{\mu}) - f(y - \hat{\mu})] \xrightarrow{a \rightarrow 0} \partial_\mu f(y) \\ \delta_\mu f(y) \equiv \frac{1}{4a^2} [f(y + \hat{\mu}) - 2f(y) + f(y - \hat{\mu})] \xrightarrow{a \rightarrow 0} \partial_\mu^2 f(y) \end{cases} \quad (163)$$

Les matrices Γ et $\tilde{\Gamma}$ introduites en (162) valent

$$\begin{cases} \Gamma_{\eta,\eta'}^\mu \equiv 2^{-[\frac{1}{2}d]} \text{Tr}(\Gamma_\eta^\dagger \gamma_\mu \Gamma_{\eta'}) \\ \tilde{\Gamma}_{\eta,\eta'}^\mu \equiv 2^{-[\frac{1}{2}d]} \text{Tr}(\Gamma_\eta^\dagger \gamma_\mu \Gamma_{\eta'}) (\delta_{\eta',\eta-\hat{\mu}} - \delta_{\eta',\eta+\hat{\mu}}) \\ \Gamma_\eta \equiv \gamma_1^{\eta_1} \cdots \gamma_d^{\eta_d} \end{cases} \quad (164)$$

en utilisant une représentation arbitraire des matrices de Dirac. Finalement, la formule (162) peut être réécrite en utilisant des fermions physiques usuels, avec un indice spinoriel α et un indice supplémentaire de saveur λ , prenant chacun $2^{[\frac{1}{2}d]}$ valeurs différentes

$$\begin{cases} \psi_y^{\alpha\lambda} \equiv 2^{-3[\frac{1}{2}d]/2} \sum_\eta (\Gamma_\eta)_{\alpha\lambda} \chi_\eta(y) \\ \bar{\psi}_y^{\alpha\lambda} \equiv 2^{-3[\frac{1}{2}d]/2} \sum_\eta (\Gamma_\eta)_{\alpha\lambda}^* \bar{\chi}_\eta(y) \end{cases} \quad (165)$$

Ces notations permettent d'écrire la forme suivante de l'action

$$\begin{aligned} S_{\text{KS}} = & (2a)^d \sum_{y,\mu} \left[\bar{\psi}_y (\gamma_\mu \otimes 1) \Delta_\mu \psi_y + a \bar{\psi}_y (\hat{\gamma}_5^\dagger \otimes \gamma_\mu^\dagger \hat{\gamma}_5^\dagger) \delta_\mu \psi_y \right] \\ & + (2a)^d i m \sum_y \bar{\psi}_y \psi_y \end{aligned} \quad (166)$$

On peut interpréter ce résultat comme décrivant un système de $2^{[\frac{1}{2}d]}$ espèces de fermions. Les différentes saveurs sont couplées sur le réseau par le second terme de la première sommation, qui est inessentiel dans la limite continue $a \rightarrow 0$.

En dépit de leurs défauts, ces diverses discrétisations fermioniques ont été utilisées avec succès dans les simulations numériques de la chromodynamique quantique.

Notes

La proposition d'étudier les propriétés des théories de jauge sur réseau est due à K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **D10** 2445 (1974). Le cas abélien avait été auparavant suggéré par F.J. Wegner, *J. Math. Phys.* **12** 2259 (1971), comme exemple d'un modèle avec propriétés de dualité et sans paramètre d'ordre local. Quelques travaux initiaux, dont le travail de R. Balian et des auteurs, ont été rassemblés dans le livre de C. Rebbi, *Lattice Gauge Theories and Monte-Carlo Simulations* (World Scientific, Singapore 1983). Il existe de nombreuses revues, telles celle de J.B. Kogut, *Rev. Mod. Phys.* **51** 659 (1979), J.-M. Drouffe et J.-B. Zuber, *Phys. Reports* **102** 1 (1983), sur les aspects théoriques, M. Creutz, L. Jacobs et C. Rebbi, *Phys. Reports* **95** 201 (1983), sur les simulations numériques. On y trouvera une abondante bibliographie. Le livre de M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices* (Cambridge University Press, Cambridge 1983) est une excellente introduction au sujet. Pour une étude plus rigoureuse, voir E. Seiler *Gauge Theories as a Problem of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Lecture Notes in Physics **159**, Springer Verlag, Berlin (1982).

Nous n'avons pas discuté le formalisme hamiltonien introduit par J. Kogut et L. Susskind, *Phys. Rev.* **D11** 395 (1975). Signalons également le programme de construction d'une action améliorée proposé par K. Symanzik, dans *Mathematical Problems in Theoretical Physics*, R. Schrader et al eds, Lecture Notes in Physics, **153**, Springer Verlag, Berlin (1982).

La quantification des champs de Yang et Mills dans le continu est présentée dans les livres de J.C. Taylor *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge University Press, (1976), et L.D. Faddeev et A.A. Slavnov, *Gauge Fields — Introduction to Quantum Theory*, Benjamin Cummings (1980). La liberté asymptotique a été découverte par D.J. Gross et F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30** 1343 (1973), et H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30** 1346 (1973). La détermination du paramètre Λ_L est discutée dans A. Hasenfratz et P. Hasenfratz, *Phys. Lett.* **93B** 165 (1980) et R. Dashen et D.J. Gross, *Phys. Rev.* **D23** 2340 (1981). Voir aussi H. Kawai, R. Nakayama et K. Seo, *Nucl. Phys.* **B189** 40 (1981); P. Weisz, *Phys. Lett.* **100B** 331 (1981); A. Hasenfratz et P. Hasenfratz, *Nucl. Phys.* **B193** 210 (1981); A. Gonzalez-Arroyo et C.P. Korthals Altes, *Nucl. Phys.* **B205** [FS5] 46 (1982). Une revue sur la dualité est due à R. Savit, *Rev. Mod. Phys.* **52** 453 (1980). L'absence de paramètre d'ordre local est démontrée par S. Elitzur *Phys. Rev.* **D12** 3978 (1975). Les observables duales non locales ont été introduites par G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B138**, 1 (1978).

La méthode du col est étudiée dans le livre de R.B. Dingle, *Asymptotic Expansions — Their Derivation and Interpretation*, Academic Press, New York (1973). Les corrections au champ moyen sont analysées dans E. Brézin

et J.-M. Drouffe, *Nucl. Phys.* **B200** [FS4] 93 (1982) et H. Flyvbjerg, B. Lautrup et J.-B. Zuber, *Phys. Lett.* **110B** 279 (1982).

La classification des surfaces est exposée dans le livre de P.S. Aleksandrov, *Combinatorial topology*, Graylock 1956.

De nombreuses séries de couplage fort peuvent être trouvées dans la littérature. Celle de l'énergie libre provient du travail d'un des auteurs *Nucl. Phys.* **B170** [FS1] 91 (1980). Pour la tension de corde, voir G. Münster, *Nucl. Phys.* **B180** [FS2] 23 (1981); G. Münster et P. Weisz, *Nucl. Phys.* **B180** [FS2] 13 (1981); J.-M. Drouffe et J.-B. Zuber, *Nucl. Phys.* **B180** [FS2] 253, 264 (1981). Les séries pour la masse de la boucle de glu se trouvent dans N. Kimura et A. Ukawa, *Nucl. Phys.* **B205** [FS5] 637 (1982); K. Seo, *Nucl. Phys.* **B209** 200 (1982); G. Münster, *Phys. Lett.* **121B** 53 (1983). La resommation des séries de couplage fort en grande dimension, avec une discussion d'un modèle sur réseau de surfaces aléatoires, est étudiée dans J.-M. Drouffe, G. Parisi et N. Sourlas, *Nucl. Phys.* **B161** 397 (1979).

La discrétisation de l'action fermionique est discutée par T. Banks, J. Kogut et L. Susskind, *Phys. Rev.* **D13** 1043 (1976), et l'interprétation en termes de fermions avec saveur suit l'article de H. Kluberg-Stern, A. Morel, O. Napoly et B. Petersson, *Nucl. Phys.* **B220** [FS8] 447 (1983). La preuve du théorème sur la symétrie de chiralité est due à H.B. Nielsen et M. Ninomiya, *Nucl. Phys.* **B185** 20 (1981). Nous avons calqué notre présentation sur le travail de L.H. Karsten, *Phys. Lett.* **104B** 315 (1981). Le théorème de Poincaré-Hopf est classique en géométrie différentielle; voir par exemple J.W. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint* (The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965). L'ouvrage de S.B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino et E. Witten, *Current Algebra and Anomalies*, World Scientific, Singapore (1985) contient une revue des anomalies dans le contexte de la théorie des champs.

INDEX

Cet index ne concerne que le présent volume. Un index général est placé à la fin du volume 2.

- Abe 154
- Action de Villain 200, 324
- Aimantation spontanée 59, 69
- Algèbre de Clifford 51, 62
- Algèbre de Lie 322
- Amplitude de Born 276
- Amplitudes critiques 186
- Amputation 234
- Analyse dimensionnelle 232
- Anomalies 263
- Approximation de Bethe 119
- Approximation de champ moyen 106
- Approximation de Migdal-Kadanoff 175
- Approximation des ondes de spin 194
- Baker, Nickel, Green, Meiron 310
- Berezinskii 197
- Berezin 47
- Berlin-Kac 137
- Bosonisation 94
- Boucle de 't Hooft 342
- Boucle de Wilson 335
- Boules de glu 374
- Brisure spontanée de symétrie 110
- Brézin, Le Guillou, Zinn-Justin 304
- Caianiello 92
- Caractères des groupes 324
- Cauchy 82
- Cercles de Fisher 136
- Champ de Majorana 90
- Champ libre 21
- Champ moyen 105, 342
- Champs de Higgs 341
- Champs de jauge 321
- Champs euclidiens 21
- Cheng-Wu 86
- Chromodynamique quantique 322
- Classement topologique 241
- Coleman 194
- Complexe dual 339
- Complexe topologique 336
- Comptage de puissance 256
- Confinement 336
- Construction de Wulff 88
- Convergence superficielle 257
- Correction du premier ordre 152
- Corrections aux lois d'échelle 295
- Couplage minimum 322
- Critère de Landau-Ginzburg 155, 163
- Cumulants 75, 234
- Degré canonique 232
- Diagrammes articulés 245
- Diagrammes de Feynman 151
- Diagrammes en arbre 151, 242
- Diagrammes primitivement divergents 257
- Diagrammes vide-vide 239
- Dimension anormale 172, 237, 268
- Dimension canonique 23, 237
- Dimension critique inférieure 140

- Dimension critique supérieure 140
 Dimension dynamique 237
 Dualité de Kramers et Wannier 59
 Dualité 58, 336
 Dyson 304
 Décimation 173
 Déterminant de Toeplitz 72
 Déterminant de Vandermonde 74
 Développement de couplage fort 357
 Développement de haute température 32
 Développement en ε 231, 284, 304
 Développement en caractères 361
 Ensemble de Julia 190
 Equation d'état 163
 Equation de Callan-Symanzik 229, 267, 278, 303
 Equation de diffusion 3
 Equation de Dirac 91
 Equations de mouvement 142
 Equations de Painlevé 96
 Espace de Fock-Bargmann 49
 Exposants critiques 6, 123, 274
 Facteurs associés à un groupe d'invariance 254
 Fantômes de Faddeev-Popov 329
 Fermions de Wilson 380
 Fermions de Kogut-Susskind 383
 Fisher 229, 231, 284
 Fisher-Gaunt 154
 Flot de renormalisation 209, 265
 Fonction de Green 7
 Fonction de partition frustrée 70, 83
 Fonctions de corrélations connexes 234
 Fonctions de Green 233
 Fonctions de Green renormalisées 260
 Fonctions de Green une particule irréductibles 234
 Fonctions de Schwinger 233
 Fonctions de vertex 234
 Fonctions génératrices 232
 Formule de Baker-Campbell-Hausdorff 327
 Formule de Poisson 201
 Frustration 342
 Gaz de Coulomb 192, 200
 Graphe tadpole 238
 Groupe de renormalisation 265
 Groupe dual 338
 Groupes d'homologie et de cohomologie 340
 Haffnien 92
 Hohenberg 194, 215
 Hypothèse d'échelle 162
 Hypothèse d'hyper-homogénéité 162
 Identité de Ward 142
 Identités de Ward-Slavnov 329
 Intégrale de chemins 11
 Intégrales de Feynman 241
 Intégrales de Grassmann 47
 Intégrales gaussiennes 21
 Invariance d'échelle 87, 171
 Invariance de jauge 322
 Jauge axiale 325
 Kadanoff 165
 Kadanoff-Ceva 85
 Lagrangien 229
 Laplacien discret 3
 Lemme de Szegő 72
 Liberté asymptotique 321
 Limite thermodynamique 22
 Lipatov 304
 Loi de l'aire 336
 Loi en périmètre 336
 Lois d'échelle 159
 Longueur de corrélation 38
 Marche au hasard 1
 Marche avec retour exclu 30
 Matrice de transfert 36, 60, 133
 Matrices de Dirac 378
 McBryan-Spencer 218
 McCoy-Wu 75
 Mermin-Wagner 215
 Modes de Goldstone 105, 115, 117
 Modèle $O(n)$ 116

- Modèle XY 190
 Modèle σ non linéaire 25, 105
 Modèle d'Ising 32, 57
 Modèle de Heisenberg classique 25, 105
 Modèle de Potts 173
 Modèle gaussien 32
 Modèle gaussien discret 202
 Modèle hiérarchique 189
 Modèle S.O.S. 80, 202, 372
 Modèle sine-Gordon 203
 Modèle sphérique 137
 Modèle à n -composantes 24, 254
 Méthode des variables de bloc 165
 Nickel 304
 Nombre de boucles 242
 Noyau de la chaleur 324
 Onsager 47, 57, 66, 73
 Opérateur de Casimir 325
 Opérateur de Laplace–Beltrami 324
 Opérateurs de désordre 85
 Opérateurs essentiels 171
 Opérateurs inessentiels 171, 300
 Opérateurs marginaux 171, 214, 300
 Ordre de Wick 242
 Paramètres nus 233
 Pfaffien 55
 Phénomène de Goldstone 125
 Pippard–Ginsberg 162
 Plaquette 58, 324
 Point critique 39, 268
 Point fixe infrarouge 168
 Points multicritiques 311
 Potentiel effectif 152, 235, 244
 Problème du doublement 378
 Processus Markovien 5
 Propriétés d'intersection 16
 Rapports d'amplitude 308
 Relation de Clausius–Mossotti 107
 Renormalisation dans l'espace réel 159, 165
 Renormalisation de fonction d'onde 259
 Renormalisation perturbative 259
 Renormalisation phénoménologique 220
 Règle majoritaire 180
 Règles de Feynman 238, 329
 Régularisation dimensionnelle 245
 Réseaux 42
 Schéma de renormalisation de Bogoliubov, Parasiuk, Hepp, Zimmermann 259
 Schéma de soustraction minimale 329
 Singularité de Lee–Yang 123, 127, 129
 Somme sur les chemins 9, 26
 Super-renormalisabilité 257
 Séries de couplage fort 32
 Tension de corde 336, 370
 Tension superficielle 83
 Théorie de Kirkwood–Yvon 107
 Théorie perturbative 237
 Théorème d'Elitzur 333
 Théorème de Goldstone 293
 Théorème de Mermin–Wagner 140, 192
 Théorème de Nielsen–Ninomiya 380
 Théorème de Noether 94
 Théorème de Weinberg 268
 Théorème de Wick 23, 55, 92, 96, 238
 Tourbillons 194, 197
 Transformation de dualité 177, 201
 Transformation de Jordan–Wigner 61
 Transformation de Legendre 152, 156, 234
 Transformation étoile–triangle 180
 Transformée de Laplace 149
 Transition de Curie 57
 Transition de Kosterlitz–Thouless 192, 197
 Transition de phase du deuxième ordre 68
 Transition déconfinante 344

Transition rugueuse 89, 202, 371
Universalité 32
Variables anticommutantes 47

Wilson 229, 231, 284, 304, 321
Yang 73
Yang, Mills 321, 327