

**TRAITÉ D'ÉLECTRICITÉ**

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE  
PUBLIÉ SOUS LA DIRECTION DE JACQUES NEIRYNCK

VOLUME VI

**THÉORIE ET TRAITEMENT  
DES SIGNAUX**

par Frédéric de Coulon



PRESSES POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITAIRES ROMANDES



## INTRODUCTION

### Généralités

Elaboration, détection, interprétation de signaux porteurs d'informations sont les principaux objectifs du *traitement des signaux*. Cette discipline s'appuie essentiellement sur l'électronique et l'informatique. Elle trouve son champ d'application dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission et l'exploitation d'informations. Ce vaste champ s'étend des télécommunications à l'instrumentation scientifique, de l'automatisation industrielle au génie biomédical, en passant par le traitement d'images, la reconnaissance de formes, la robotique, l'intelligence artificielle ...

L'outil d'analyse et de synthèse de systèmes de traitement est la *théorie du signal*. C'est un ensemble de concepts et de modèles mathématiques inspirés de l'analyse fonctionnelle, de l'algèbre linéaire et du calcul des probabilités.

Son point de départ est le développement orthogonal des fonctions, dont le cas particulier le plus intéressant est le modèle de Fourier. Il conduit aux concepts féconds de dualité temps-fréquence et de spectre fréquentiel qui s'appliquent aussi bien à l'étude des signaux déterministes que des signaux aléatoires, continus ou échantillonnés, moyennant l'introduction de la notion de corrélation et de modèles statistiques appropriés. Les concepts de signal analytique et d'enveloppe complexe généralisent celui de phaseur, introduit en électrotechnique. Ils facilitent la représentation des signaux à bande étroite et favorisent le développement d'une théorie de la modulation.

Le modèle utilisé en traitement des signaux est celui des schéma-fonctionnels : assemblages symboliques de blocs fonctionnels réalisant une tâche élémentaire. Les modèles de ces blocs fonctionnels sont établis en comparant leurs signaux d'entrée et de sortie. Il en résulte un riche inventaire de propriétés et de relations qui, combinées, permettent de décrire ou de prédire le fonctionnement de systèmes complexes. La recherche et l'évaluation des performances de procédures efficaces de conversion, de détection, de mesure, etc., de signaux s'en trouve facilitée.

Le but de cet ouvrage est d'apporter à l'ingénieur, ou à tout autre scientifique concerné, les bases théoriques fondamentales nécessaires à la compréhension ou à l'utilisation de cette discipline.

### Place du volume VI dans le *Traité d'Electricité*

La théorie du signal fait aujourd'hui partie du bagage culturel de tout ingénieur électricien de niveau universitaire. Elle intervient dans l'élaboration du cahier des charges et dans l'évaluation des performances de nombreuses installations techniques. Elle est en cela complémentaire de l'électromagnétisme (vol. III) et de la théorie des circuits (vol. IV).

Le traitement des signaux est étroitement associé à l'électronique analogique ou numérique (vol. VIII et XIV), aux mesures (vol. XVII), aux télécommunications (vol. XVIII), à l'électroacoustique (vol. XXI), etc. Il apporte à ces domaines ses méthodes et ses modèles de schéma-fonctionnels. La position du volume VI est donc centrale au sein des disciplines intéressant l'ingénieur électricien : à la frontière entre les études théoriques et les applications pratiques.

L'aspect plus particulier du traitement numérique des signaux fait l'objet, vu son importance actuelle, d'un ouvrage spécifique (vol. XX).

### Organisation de l'ouvrage

Ce livre est composé de deux parties. L'ensemble des chapitres 1 à 7, complété par les chapitres annexes 14 et 15, forme la base d'une introduction générale à la *théorie du signal*. Les chapitres 8 à 13 sont, eux, consacrés à la modélisation des principales opérations fondamentales de *traitement des signaux*.

L'ouvrage débute par une introduction générale sur la nature des signaux et l'évolution des procédés de traitement, suivie d'une classification des signaux. Les représentations mathématiques des signaux déterministes et, en particulier, leur représentation spectrale, sont introduites aux chapitres 3 et 4. Les modèles de signaux aléatoires sont représentés au chapitre 5 et complétés au chapitre 6 par l'étude du bruit de fond. Les concepts de signal analytique et d'enveloppe complexe sont développés au chapitre 7.

Le chapitre 8 présente un essai d'étude systématique des principaux opérateurs fonctionnels rencontrés en traitement des signaux. Les chapitres 9 et 10 sont consacrés à l'étude des conditions d'échantillonnage et de représentation numérique.

Une théorie de la modulation faisant appel au modèle de l'enveloppe complexe est esquissée au chapitre 11. Les principes de l'analyse spectrale expérimentale sont décrits au chapitre 12. Enfin, thème central en traitement des signaux, les méthodes de détection et d'estimation sont abordées au chapitre 13.

L'ouvrage est complété par deux annexes, dont l'une (chap. 14) est consacrée à un rappel de théorie des probabilités et l'autre (chap. 15) contient un ensemble de tables de références.

### Objectifs pédagogiques

La matière réunie dans cet ouvrage convient à un enseignement d'environ 80 à 100 heures, réparti de préférence sur une année. Moyennant une certaine sélection des sujets abordés, cette matière peut être traitée dans un temps plus réduit, si l'on se borne à un objectif de formation de base et non d'approfondissement.

De nombreux exemples et exercices sont proposés pour faciliter une étude individuelle.

La relation entre les concepts abstraits de la théorie du signal et les potentialités pratiques du traitement des signaux ne peut toutefois être perçue que moyennant des travaux pratiques additionnels : laboratoires ou projets.

## Conventions

Le *Traité d'Electricité* est composé de volumes (vol.) repérés par un chiffre romain (vol. V). Chaque volume est partagé en chapitres (chap.) repérés par un nombre arabe (chap. 2). Chaque chapitre est divisé en sections (sect.) repérées par deux nombres arabes séparés par un point (sect. 2.3). Chaque section est divisée en paragraphes (§) repérés par trois nombres arabes séparés par deux points (§ 2.3.11). Les références internes stipulent le volume, le chapitre, la section ou le paragraphe du *Traité* auquel on renvoie. Dans le cas de la référence à une partie du même volume, on omet le numéro de celui-ci.

Les références bibliographiques sont numérotées continûment par volume et repérées par un seul nombre arabe entre crochets [33].

Un terme apparaît en *italique maigre* la première fois qu'il est défini dans le texte. Un passage important est mis en évidence lorsqu'il est composé en *italique gras*.

Un paragraphe délicat ou compliqué est marqué par le signe ■ précédant son repère numérique; dans les exercices, ce même signe peut également annoncer des calculs longs et fastidieux. Un paragraphe qui n'est pas indispensable à la compréhension de ce qui suit est marqué par le signe □ précédant son repère numérique.

Les équations hors texte sont numérotées continûment par chapitre et repérées par deux nombres arabes placés entre parenthèses et séparés par un point (3.14); une équation est mise en évidence par son numéro imprimé en caractère gras. Les figures et tableaux sont numérotés continûment par chapitre et repérés par deux nombres arabes précédés de Fig. (Fig. 4.12) ou Tableau (Tableau 4.13).



# TABLE DES MATIÈRES

	INTRODUCTION . . . . .	v
CHAPITRE 1	<b>SIGNAL ET INFORMATION</b>	
	1.1 Théorie du signal et de l'information . . . . .	1
	1.2 Traitement des signaux . . . . .	9
	1.3 Notations particulières . . . . .	15
	1.4 Exercices . . . . .	25
CHAPITRE 2	<b>CLASSIFICATION ET MODÈLES DES SIGNAUX</b>	
	2.1 Signaux physiquement réalisables et modèles théoriques . . . . .	27
	2.2 Signaux déterministes ou aléatoires . . . . .	28
	2.3 Signaux à énergie ou puissance moyenne finie . . . . .	33
	2.4 Variables continues et discrètes . . . . .	35
	2.5 Autres classes importantes . . . . .	37
	2.6 Exercices . . . . .	40
CHAPITRE 3	<b>REPRÉSENTATION VECTORIELLE DES SIGNAUX</b>	
	3.1 Espace de signaux . . . . .	41
	3.2 Approximation au sens des moindres carrés . . . . .	49
	3.3 Développement en série de fonctions orthogonales . . . . .	52
	3.4 Principaux ensembles de fonctions orthogonales . . . . .	57
	3.5 Exercices . . . . .	66
CHAPITRE 4	<b>SIGNAUX DÉTERMINISTES</b>	
	4.1 Rappel sur la transformation intégrale de Fourier . . . . .	69
	4.2 Signaux à énergie finie . . . . .	73
	4.3 Signaux à puissance finie . . . . .	89
	4.4 Cas particulier des signaux périodiques . . . . .	94
	4.5 Représentations spectrales bilatérales et unilatérales . . . . .	105
	4.6 Exercices . . . . .	107
CHAPITRE 5	<b>SIGNAUX ALÉATOIRES</b>	
	5.1 Modèle statistique: processus aléatoire . . . . .	111
	5.2 Fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance . . . . .	125
	5.3 Densité spectrale de puissance . . . . .	133

5.4	Fonctions d'intercorrélation et densités spectrales mutuelles . . . . .	144
5.5	Somme de signaux aléatoires . . . . .	147
5.6	Produit de signaux aléatoires . . . . .	151
5.7	Processus gaussiens . . . . .	153
5.8	Processus de Poisson . . . . .	159
5.9	Processus de Markov . . . . .	162
5.10	Signaux pseudo-aléatoires . . . . .	163
5.11	Exercices . . . . .	166
<b>CHAPITRE 6 BRUIT DE FOND</b>		
6.1	Sources de bruit . . . . .	171
6.2	Bruit thermique . . . . .	173
6.3	Bruit de grenaille . . . . .	179
6.4	Bruit additionnel de basse fréquence (en $1/f$ ) . . . . .	183
6.5	Autres sources de bruit . . . . .	184
6.6	Facteur de bruit d'un système linéaire . . . . .	185
6.7	Générateurs de bruit . . . . .	190
6.8	Exercices . . . . .	191
<b>CHAPITRE 7 SIGNAL ANALYTIQUE ET ENVELOPPE COMPLEXE</b>		
7.1	Transformée de Hilbert d'un signal . . . . .	193
7.2	Principales propriétés . . . . .	196
7.3	Enveloppe réelle et phase d'un signal . . . . .	200
7.4	Enveloppe complexe et représentation des signaux à spectre passe-bande . . . . .	208
7.5	Largeur de bande et durée des signaux . . . . .	218
7.6	Exercices . . . . .	225
<b>CHAPITRE 8 OPÉRATEURS FONCTIONNELS</b>		
8.1	Modélisation des systèmes de traitement . . . . .	227
8.2	Opérateurs linéaires invariants . . . . .	230
8.3	Opérateurs paramétriques . . . . .	249
8.4	Opérateurs non linéaires invariants . . . . .	255
8.5	Exercices . . . . .	268
<b>CHAPITRE 9 ÉCHANTILLONNAGE DES SIGNAUX</b>		
9.1	Introduction . . . . .	273
9.2	Modèles de signaux échantillonnés . . . . .	275
9.3	Théorèmes d'échantillonnage et conséquences . . . . .	281
9.4	Reconstitution par interpolation ou extrapolation . . . . .	292
9.5	Exercices . . . . .	301
<b>CHAPITRE 10 NUMÉRISATION DES SIGNAUX</b>		
10.1	Conversion analogique-numérique et numérique-analogique . . . . .	307
10.2	Cadences limites de conversion A/N . . . . .	310

10.3	Quantification . . . . .	314
10.4	Codage binaire . . . . .	324
10.5	Acquisition de données. . . . .	327
10.6	Exercices . . . . .	332
<b>CHAPITRE 11</b>	<b>MODULATION ET CHANGEMENT DE FRÉQUENCE</b>	
11.1	Principes généraux. . . . .	333
11.2	Modulations linéaires . . . . .	336
11.3	Modulations angulaires. . . . .	349
11.4	Modulations d'impulsions . . . . .	362
11.5	Changement et multiplication de fréquence . . . . .	365
11.6	Exercices . . . . .	367
<b>CHAPITRE 12</b>	<b>ANALYSE SPECTRALE EXPÉRIMENTALE</b>	
12.1	Principes généraux. . . . .	371
12.2	Analyseurs de spectre multicanaux . . . . .	387
12.3	Analyseurs de spectre à balayage . . . . .	392
12.4	Exemples d'application. . . . .	397
12.5	Exercices . . . . .	408
<b>CHAPITRE 13</b>	<b>DÉTECTION ET ESTIMATION</b>	
13.1	Estimation de paramètres . . . . .	409
13.2	Comparaison de signaux . . . . .	430
13.3	Éléments de théorie de la décision . . . . .	441
13.4	Détection de signaux de formes connues . . . . .	453
13.5	Exercices . . . . .	460
<b>CHAPITRE 14</b>	<b>RÉSUMÉ DE THÉORIE DES PROBABILITÉS</b>	
14.1	Définitions fondamentales. . . . .	465
14.2	Variables aléatoires . . . . .	466
14.3	Moyennes statistiques et moments . . . . .	474
14.4	Principales distributions . . . . .	478
<b>CHAPITRE 15</b>	<b>FORMULAIRE ET TABLES DE RÉFÉRENCES</b>	
15.1	Formulaire. . . . .	487
15.2	Principales identités trigonométriques . . . . .	492
15.3	Propriétés principales de la transformation de Fourier et relations associées . . . . .	493
15.4	Table illustrée de transformées de Fourier . . . . .	497
15.5	Description temporelle, spectrale et statistique de signaux typiques . . . . .	500
15.6	Représentation et tabulation des fonctions $\text{sinc}(\alpha)$ et $\text{sinc}^2(\alpha)$ . . . . .	501
15.7	Fonctions de Bessel de première espèce . . . . .	502
15.8	Loi normale (Gauss). . . . .	504
15.9	Fonction de Marcum . . . . .	508

SOLUTIONS DES EXERCICES . . . . .	511
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	525
INDEX ANALYTIQUE . . . . .	533
GLOSSAIRE . . . . .	543

## SIGNAL ET INFORMATION

### 1.1 THÉORIE DU SIGNAL ET DE L'INFORMATION

#### 1.1.1 Place de la théorie et du traitement des signaux dans le domaine de l'électricité et de la science en général

Les applications de l'électricité sont généralement regroupées en deux domaines principaux, d'ailleurs largement interdépendants :

- les techniques de l'énergie;
- les techniques de l'information.

La théorie et le traitement des signaux est une discipline appartenant au deuxième domaine, auquel elle apporte à la fois des bases théoriques fondamentales et des techniques particulières.

Son influence déborde toutefois aussi sur les techniques de l'énergie, dans la mesure où l'on y rencontre de nombreux phénomènes (fluctuations de charge d'un réseau électrique, vibrations d'une machine tournante, variations transitoires du courant d'excitation d'un moteur électrique, perturbations électromagnétiques, etc.) qui peuvent être étudiés avec les mêmes outils théoriques ou expérimentaux que ceux utilisés pour les signaux informationnels.

En fait, la théorie et le traitement des signaux intéresse tous les secteurs techniques et scientifiques dans lesquels l'information est perçue par l'intermédiaire d'observations expérimentales de grandeurs mesurables.

Ces deux termes-clefs : *perception* et *traitement*, indiquent pourquoi cette discipline s'est avant tout développée en relation avec les applications de l'électricité et plus particulièrement celles de la métrologie, responsable de la perception, des télécommunications et de l'informatique, chargés du traitement.

La métrologie (vol. XVII) fournit les capteurs qui traduisent pratiquement n'importe quel phénomène physique en une grandeur électrique facilement amplifiée, filtrée, conditionnée, codée, etc., par des dispositifs électroniques appropriés (vol. VIII). Les circuits de télécommunications (vol. XVIII) acheminent le signal électrique ainsi créé vers son destinataire. L'informatique (vol. XIV), grâce à son énorme puissance de calcul, permet d'effectuer des tâches complexes de manipulations et d'interprétation de l'information véhiculée par le signal (traitement numérique : vol. XX).

L'universalité de la théorie et du traitement des signaux est attestée par la diversité des secteurs d'application : industriels, scientifiques, biomédicaux, militaires, spatiaux, etc.

### 1.1.2 Aperçu historique [1]

Le mot *signal* vient de signe — signum en latin — qui dénote un objet, une marque, un élément de langage, un symbole convenu pour servir de vecteur à une information. L'usage des signes remonte à la préhistoire.

Ce n'est qu'au XIXe siècle qu'apparaît l'exploitation des signaux électriques avec l'invention du télégraphe électrique (Morse, Cooke, Wheatstone, 1830-1840). Cette invention est rapidement suivie par celle du téléphone (Bell, 1876), puis par la réalisation des premières liaisons radio (Popov, Marconi, 1895-1896). L'émergence de l'électronique, au début du XXe siècle (Fleming, Lee de Forest, 1904-1907) permet enfin la détection et l'amplification de faibles signaux. Ce sont là les véritables prémices du traitement des signaux.

Les auteurs des premières contributions à l'étude mathématique des fluctuations du courant électrique se sont efforcés d'adapter à ce cas la méthode d'analyse développée par Fourier (1822) dans le cadre de ses travaux sur la propagation de la chaleur. Les premiers travaux importants généralisant cette méthode aux phénomènes et signaux aléatoires ont été publiés à l'aube des années 1930 par Wiener et Khintchine [2, 3, 4].

L'optimisation des moyens de télécommunications et de radar (pendant la deuxième guerre mondiale) fut à la base du développement de la théorie du signal et de l'information que nous connaissons aujourd'hui. Dans les années 1920 déjà, Nyquist et Hartley s'étaient attachés à quantifier la quantité d'information transmise sur une voie télégraphique et avaient observé que la cadence maximum de transmission est proportionnelle à la largeur de bande fréquentielle disponible. Il faut toutefois attendre jusqu'en 1948-1949 pour que paraissent les travaux fondamentaux de Shannon [5, 6] sur la théorie mathématique de la communication et de Wiener [7, 8] sur la cybernétique (communication et réglage) et le traitement optimal des signaux ou des données affectés par du bruit. L'élément novateur est ici la prise en compte de l'aspect statistique des phénomènes étudiés.

D'autres chercheurs ont contribué au développement initial de cette théorie. Citons particulièrement : Küpfmüller [9], Gabor [10], Woodward [11], Kolmogorov [12], Kotelnikov [13], Rice [14], Goldman [15], Lawson et Uhlenbeck [16], Ville [17], Blanc-Lapierre et Fortet [18], Brillouin [19].

Les années cinquante ont constitué une période de maturation, suivie rapidement par la publication de nombreux ouvrages à vocation essentiellement didactique [20 à 42]. Simultanément, l'invention du transistor, en 1948, suivie environ dix ans plus tard par la mise au point de la technologie des circuits intégrés, allait permettre la réalisation de systèmes de traitement complexes et la diversification des champs d'application.

Aujourd'hui, le traitement des signaux est une discipline autonome, qui intéresse de multiples domaines (§ 1.2.1) s'étendant jusqu'à la reconnaissance des formes, la robotique et l'intelligence artificielle. Elle est complémentaire de l'électronique et de l'informatique, qui lui fournissent ses moyens.

Une bonne introduction aux concepts modernes d'analyse et de traitement des signaux a été publiée par Lynn [43]. Il prend largement en compte la tendance actuelle qui privilégie les méthodes numériques [44-48]. L'évolution technologique, qui permet la réalisation de processeurs spécialisés et de coût modéré, assure à ce domaine un avenir prometteur.

### 1.1.3 Définition du signal

Un *signal* est la représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à son destinataire.

Bien que les signaux soient considérés ici comme des grandeurs électriques (généralement courants ou tensions), la théorie présentée dans les chapitres suivants reste valable — sous réserve d'adaptation adéquate des unités — pour tout type de signal, quelle que soit sa nature physique.

### 1.1.4 Définition du bruit

On appelle *bruit* (en anglais : *noise*) tout phénomène perturbateur (interférence, bruit de fond, etc.) gênant la perception ou l'interprétation d'un signal, ceci par analogie avec les nuisances acoustiques du même nom.

### 1.1.5 Définition du rapport signal sur bruit

Le *rapport signal sur bruit* est une mesure du degré de contamination du signal par du bruit. Il s'exprime sous la forme du rapport  $\xi$  des puissances respectives du signal  $P_s$  et du bruit  $P_n$

$$\xi = P_s/P_n \quad (1.1)$$

Il est souvent indiqué selon une échelle logarithmique mesurée en *décibels*

$$\xi_{dB} = 10 \log_{10} \xi \quad \text{dB} \quad (1.2)$$

### 1.1.6 Dichotomie signal-bruit

La dichotomie apparente entre signal et bruit est artificielle et dépend des critères propres de l'utilisateur. Certains phénomènes électromagnétiques d'origine galactique captés par des antennes sont considérés comme du bruit par les ingénieurs des télécommunications et comme un signal du plus haut intérêt par les radioastronomes!

Ce qui différencie le signal du bruit est donc avant tout l'intérêt de l'observateur. Un signal perturbé reste un signal et les mêmes modèles s'appliquent à la description du signal utile et à celle des perturbations. La théorie du signal englobe donc celle du bruit.

### 1.1.7 Théorie du signal : définitions et objectifs

La description mathématique des signaux est l'objectif fondamental de la *théorie du signal* [49, 50].

Complémentaire de la théorie des circuits (vol. IV) et de celle de la propagation des ondes électromagnétiques (vol. III), la théorie du signal fournit les moyens de mise en évidence, sous une forme mathématique commode, des principales caractéristiques d'un signal : la distribution spectrale de son énergie ou la distribution statistique de son amplitude, par exemple. Elle offre également les moyens d'analyser la nature des altérations ou modifications subies par les signaux lors de leur passage au travers de blocs fonctionnels (chap. 8), dispositifs généralement électriques ou électroniques. Par là-même, elle fournit les renseignements essentiels nécessaires à la conception (cahier

des charges) ou à l'utilisation (mode d'emploi) de ces dispositifs. C'est ainsi que l'on peut établir les règles à respecter pour passer d'un signal analogique à un signal numérique (chap. 9 et 10). Elle permet aussi de déterminer et de tenir compte des limites de fonctionnement imposées par la présence de perturbations aléatoires telles que le bruit de fond (chap. 6).

Son outil de base est le développement en série de fonctions orthogonales (sect. 3.3) dont le cas particulier le plus intéressant est celui de Fourier (§ 3.4.7). Sa forme la plus générale (chap. IV.7.3) est connue sous le nom de *transformée de Fourier* [22], dont les principales propriétés sont rappelées au chapitre 4. Avec les notations usuelles en traitement des signaux (§ 4.1.3), la transformée de Fourier d'un signal temporel  $x(t)$  est une fonction de la fréquence  $f$  définie par la relation intégrale

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \quad (1.3)$$

Elle introduit le principe fécond de dualité entre l'espace temps et l'espace fréquence. Ceci conduit à la notion de *spectre* : répartition d'une grandeur caractéristique d'un signal (amplitude, énergie, puissance) en fonction de la fréquence. La technique de l'analyse spectrale (chap. 12) en est l'application pratique directe.

Applicable également à l'étude des signaux aléatoires (chap. 5), grâce au développement de modèles statistiques appropriés, ce concept d'une extrême richesse permet d'aborder à un niveau d'abstraction élevé l'étude de procédures complexes de traitement des signaux.

L'introduction des modèles de signal analytiques et d'enveloppe complexe (chap. 7) facilite la représentation des signaux à bande étroite et favorise le développement

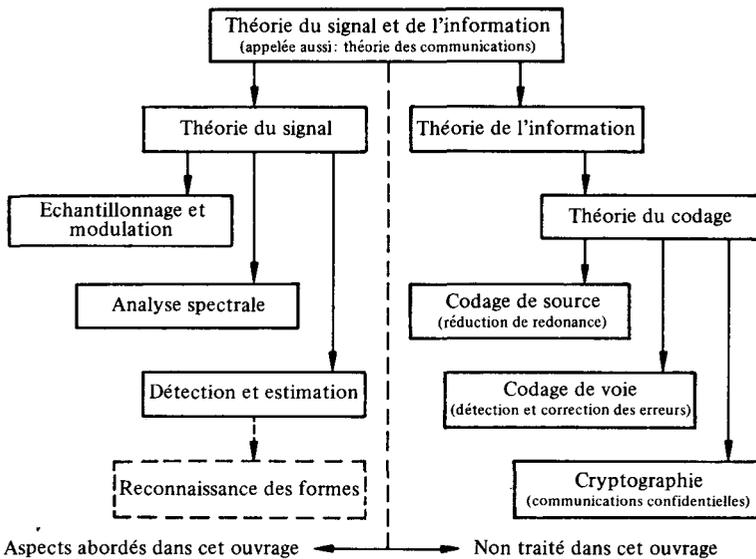


Fig. 1.1

d'une théorie de la modulation (chap. 11). La théorie de la détection (chap. 13) s'appuie, elle, sur les apports de la théorie statistique de la décision et de l'estimation. Elle trouve un prolongement naturel en reconnaissance des formes (fig. 1.1).

### 1.1.8 Théorie de l'information et du codage. Définitions

L'information est associée au processus de communication : transfert d'un message de sa source à sa destination.

La *théorie de l'information* (ou de la *communication* [5]) est une théorie stochastique des messages, c'est-à-dire qu'elle prend en considération leurs propriétés statistiques. Elle fournit un ensemble de concepts permettant d'évaluer les performances de systèmes de transfert d'informations, en particulier lorsque le signal porteur d'un message est contaminé par du bruit.

Elle conduit tout naturellement à l'étude des méthodes de *codage* de l'information : ensemble de règles spécifiant le mode de représentation du message. Les techniques de codage ont trois objectifs, apparemment contradictoires. Le premier est d'augmenter la compacité des signaux, vecteurs d'information, par élimination de toute redondance inutile (codage de source). Le second est d'accroître la sécurité d'une transmission en présence de bruit par incorporation d'une redondance, adéquatement structurée, permettant la détection, voire la correction, des principales erreurs (codage de voie). Le troisième, enfin, est d'assurer le secret de la communication (cryptographie).

Ces notions sont étroitement liées à la théorie du signal, mais sortent du cadre de ce livre. On en trouvera une présentation détaillée dans de nombreux ouvrages : par exemple [51-54].

### 1.1.9 Importance des modèles et méthodes statistiques

Par nature, l'information a un caractère aléatoire : seul ce qui est imprévisible est porteur de messages. Les signaux vecteurs d'information sont donc naturellement aussi de type aléatoire. Mis à part certaines formes d'interférences d'origine industrielle (influence du réseau de distribution d'énergie électrique, etc.), les bruits doivent aussi être considérés comme des phénomènes aléatoires.

Il n'est donc pas étonnant que la théorie du signal et les méthodes de traitement des signaux fassent largement appel à des concepts statistiques (calcul des probabilités, processus aléatoires, etc.).

### 1.1.10 Modèles et mesures de signaux : fonctions et fonctionnelles

En analyse, une fonction est définie comme une règle de correspondance (application) entre deux ensembles de nombres réels ou complexes.

Le modèle mathématique d'un signal est une fonction de une, parfois deux, voire trois variables :  $s(t)$ ,  $i(x, y)$ ,  $i(x, y, t)$ . La figure 1.2 en donne des illustrations.

Le premier cas est le plus courant : la variable  $t$  est usuellement le temps (mais elle peut aussi représenter une autre grandeur : une distance, par exemple). La fonction représente l'évolution d'une grandeur électrique ou traduite sous cette forme par un capteur approprié (microphone : signal acoustique, caméra de télévision : signal vidéo, accéléromètre : signal de vibrations, etc.).

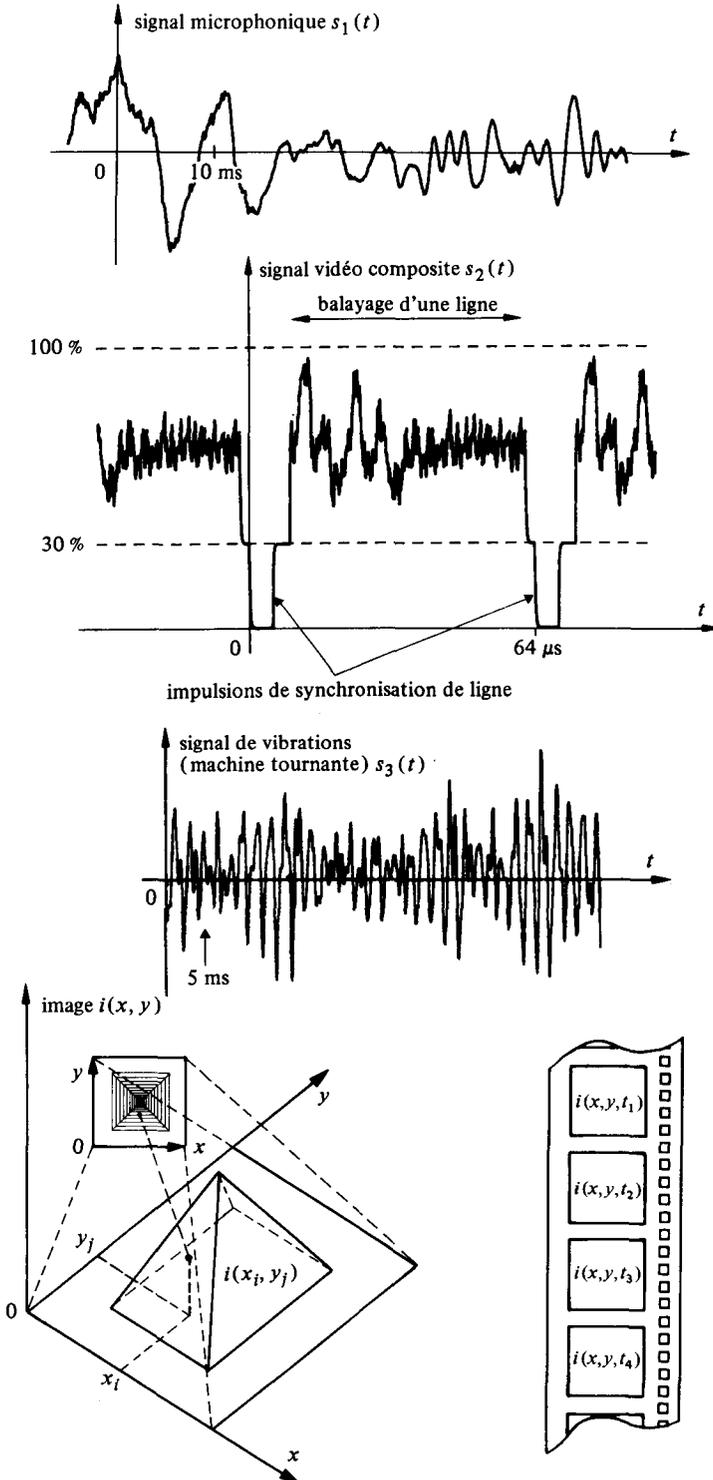


Fig. 1.2

Le deuxième cas est celui des signaux bidimensionnels. Ce sont généralement des fonctions de coordonnées spatiales  $x$  et  $y$  que l'on nomme plus couramment : images.

Le dernier cas, enfin, correspond par exemple à une succession d'images de télévision ou de cinéma où le temps réapparaît comme troisième variable.

Les signaux d'entrée et de sortie d'un système (fig. 1.3) sont souvent notés, par convention,  $x(t)$  et  $y(t)$ , respectivement. Par exemple,  $y(t) = x^2(t)$  désigne la sortie d'un dispositif non linéaire quadrateur dont la caractéristique est définie par  $y = x^2$ .

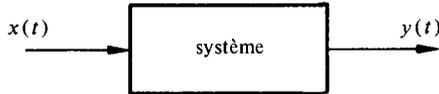


Fig. 1.3

On appelle fonctionnelle une règle de correspondance entre un ensemble de fonctions et un ensemble de nombres réels ou complexes. En d'autres termes, une fonctionnelle est une fonction de fonctions. Les signaux résultant d'un traitement ou certains de leurs paramètres sont souvent exprimés par des relations fonctionnelles. Par exemple :

- valeur intégrale pondérée [fonction de pondération  $g(t)$  : voir figure 1.4]

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g(t) dt \quad (1.4)$$

- valeur intégrale quadratique pondérée

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) g(t) dt \quad (1.5)$$

- produit de convolution (fig. 1.5)

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (1.6)$$

- produit scalaire (évalué sur l'intervalle  $T$ )

$$\langle x, y^* \rangle = \int_T x(t) y^*(t) dt \quad (1.7)$$

- valeur échantillonnée

$$x(t_0) = \langle x, \delta_{t_0} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt \quad (1.8)$$

La transformée de Fourier (1.3) est un autre exemple de fonctionnelle. Dans le cas des signaux bidimensionnels (images), cette transformée prend la forme

$$I(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} i(x, y) \exp[-j 2\pi(ux + vy)] dx dy \quad (1.9)$$

où  $u$  et  $v$  représentent des *fréquences spatiales*, mesurées en  $m^{-1}$  si les variables de position  $x$  et  $y$  sont mesurées en mètres.

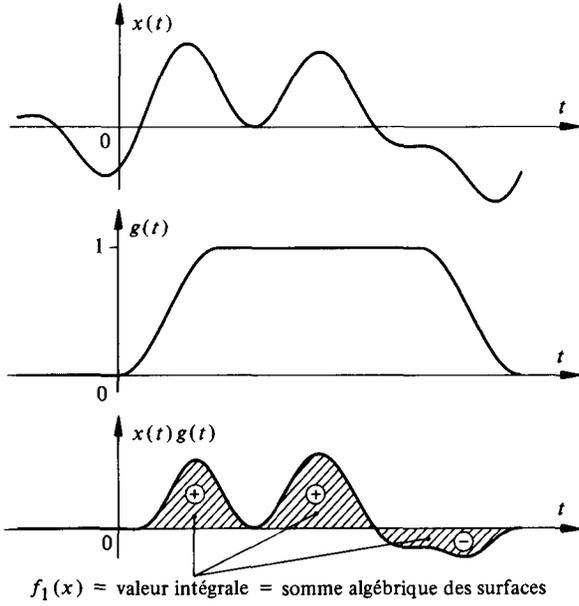


Fig. 1.4

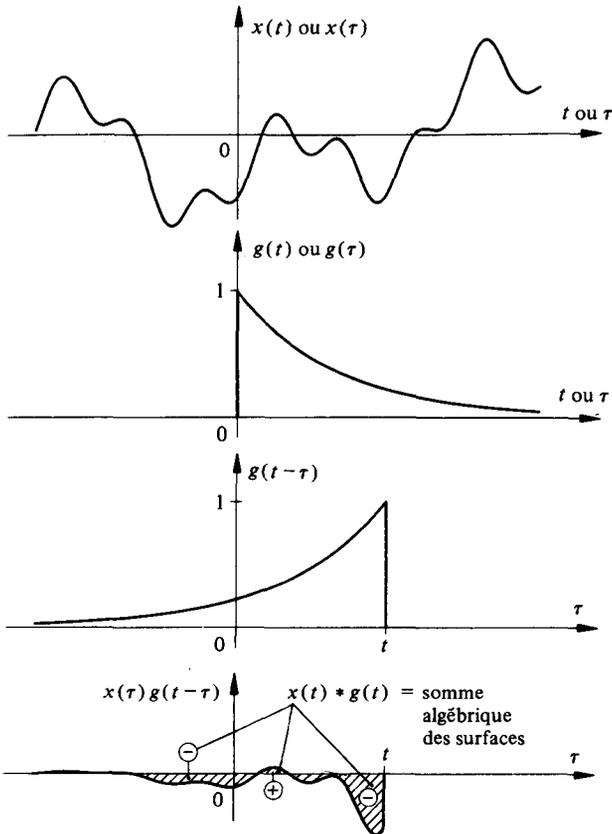


Fig. 1.5

## 1.2 TRAITEMENT DES SIGNAUX

### 1.2.1 Définition

La description mathématique — ou modélisation — des signaux est le rôle de la théorie du signal, ainsi qu'on l'a relevé au paragraphe 1.1.7.

Le *traitement des signaux* est la discipline technique qui, s'appuyant sur les enseignements de la théorie du signal et de l'information, les ressources de l'électronique, de l'informatique et de la physique appliquée, a pour objet l'élaboration ou l'interprétation des signaux porteurs d'information. Elle trouve son champ d'application dans tous les domaines concernés par la perception, la transmission ou l'exploitation de ces informations (fig. 1.6).

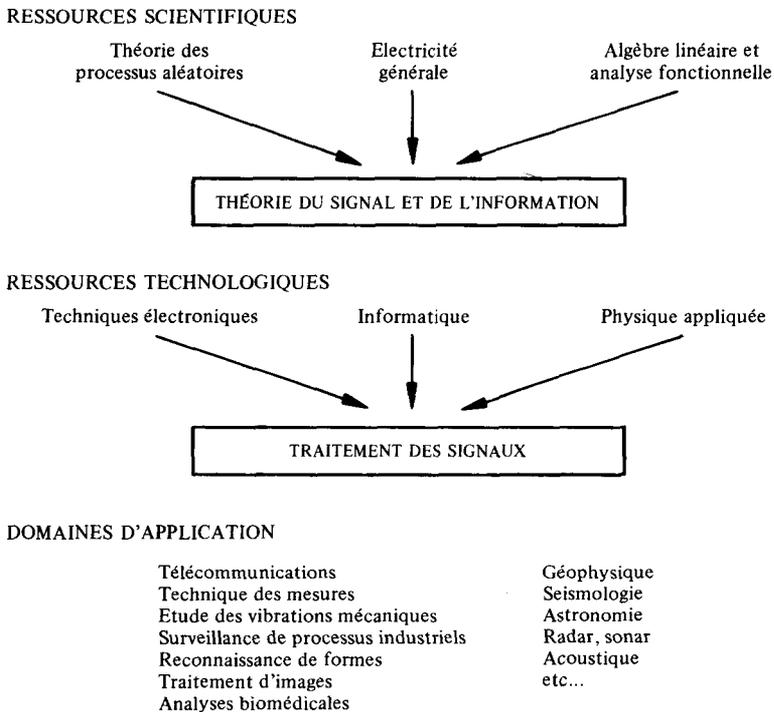


Fig. 1.6

Certains auteurs donnent parfois un sens plus restrictif au traitement du signal en limitant son champ d'activité aux méthodes permettant d'extraire un signal du bruit qui lui est superposé.

### 1.2.2 Description

Les relations de l'homme avec son milieu naturel ou avec les systèmes techniques qu'il construit se caractérisent par un intense échange d'informations.

L'observation (mesure) de phénomènes physiques ou le dialogue (communication) entre hommes, entre l'homme et la machine, ou entre les machines elles-mêmes, se font à l'aide de signaux (fonctions du temps) ou d'impressions visuelles (images)

dont la nature est complexe et peut être masquée par des perturbations indésirables (bruit de fond, parasites, interférences).

L'extraction des informations utiles incorporées à ces signaux (par analyse, filtrage, régénération, mesure, détection, identification) et la présentation des résultats sous une forme appropriée à l'homme ou à la machine constitue l'une des tâches essentielles dévolues au traitement des signaux (fig. 1.7). A cela, on peut ajouter l'élaboration des signaux permettant l'étude du comportement des systèmes physiques ou servant de support pour la transmission ou le stockage d'informations (synthèse, modulation et changement de fréquence, codage pour lutter contre le bruit ou réduire la redondance).

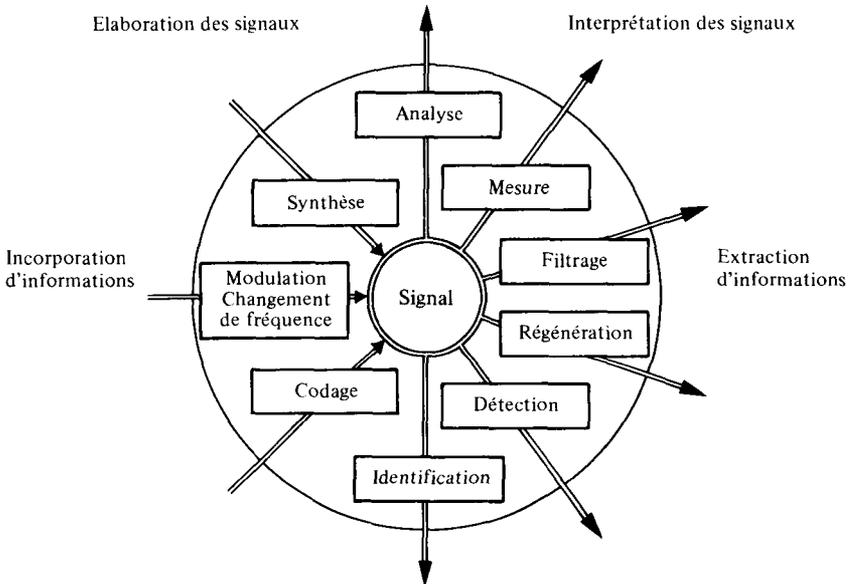


Fig. 1.7 Principales fonctions du traitement des signaux.

Par l'*analyse*, on cherche à isoler les composantes essentielles d'un signal de forme complexe, afin d'en mieux comprendre la nature et les origines. *Mesurer* un signal, en particulier aléatoire, c'est essayer d'estimer la valeur d'une grandeur caractéristique qui lui est associée avec un certain degré de confiance. Le *filtrage* est une fonction bien connue qui consiste à éliminer d'un signal certaines composantes indésirables. La *régénération* est une opération par laquelle on tente de redonner sa forme initiale à un signal ayant subi diverses distorsions. Par une procédure de *détection*, on tente d'extraire un signal utile du bruit de fond qui lui est superposé. L'*identification* est un procédé souvent complémentaire qui permet d'effectuer un classement du signal observé. Les techniques de corrélation dont il sera fait mention plus loin sont souvent utilisées à cet effet.

La *synthèse*, opération inverse de l'analyse, consiste à créer un signal de forme appropriée en procédant, par exemple, à une combinaison de signaux élémentaires. Le *codage*, outre sa fonction de traduction en langage numérique, est utilisé soit pour lutter contre le bruit de fond, soit pour tenter de réaliser des économies de largeur de bande

ou de mémoire d'ordinateur grâce à une diminution de la redondance du signal (§ 1.1.8). La *modulation* et le *changement de fréquence* sont essentiellement des moyens permettant d'adapter un signal aux caractéristiques fréquentielles d'une voie de transmission, d'un filtre d'analyse ou d'un support d'enregistrement.

### 1.2.3 Commentaire

La notion d'information utile mentionnée plus haut est étroitement liée au contexte. Pour une communication téléphonique, elle est essentiellement associée à l'intelligibilité des messages parlés échangés. Dans le cas d'une observation en radio-astronomie, elle est représentée par la fréquence et l'amplitude de l'émission périodique d'un rayonnement électromagnétique. En géophysique, ce sont plutôt les paramètres statistiques du signal perçu qui sont interprétables. En technique radar Doppler, l'information utile est, d'une part, la durée entre l'émission d'une impulsion sinusoïdale et la réception de son écho renvoyé par une cible et, d'autre part, l'écart de fréquence mesuré entre l'onde émise et l'onde reçue. On estime de cette manière la distance de l'émetteur à la cible et la vitesse radiale de celle-ci.

### 1.2.4 Langage du traitement des signaux

Au plus haut niveau, le langage du traitement des signaux est celui des schéma-blocs, également familier du spécialiste du réglage automatique et de la théorie des systèmes en général à laquelle le traitement des signaux est apparenté.

Un schéma-bloc est un assemblage symbolique, représenté sous forme graphique, de blocs fonctionnels, en principe indépendants, réalisant une fonction donnée. L'exemple de la figure 1.8 illustre le principe d'un analyseur de spectre à balayage (décrit à la section 12.3).

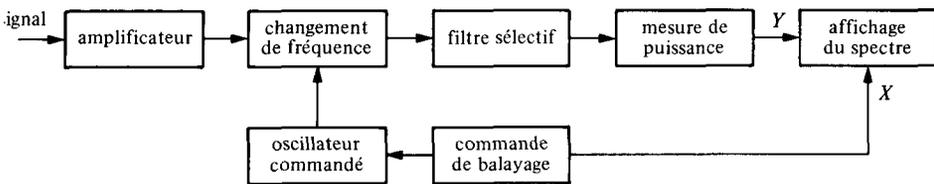


Fig. 1.8

Le comportement théorique de chaque bloc peut être décrit par une ou un ensemble de relations mathématiques. Les opérateurs fonctionnels développés au chapitre 8 servent de modèles aux blocs qui produisent un signal de sortie dépendant d'une ou plusieurs excitations d'entrée.

### 1.2.5 Exemple et définitions : apport de la théorie des systèmes linéaires

On sait (chap. IV.2) que le signal de sortie  $y(t)$  d'un système linéaire causal invariant dans le temps est donné par le *produit de convolution* (1.6) du signal d'entrée  $x(t)$  et d'une fonction  $g(t)$  appelée *réponse impulsionnelle* du système :

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (1.10)$$

C'est l'opération de traitement la plus fondamentale et probablement la plus familière. Elle indique, selon la figure 1.5, que la valeur du signal de sortie à l'instant  $t$  est obtenue par la sommation (intégrale = sommation continue) pondérée des valeurs passées [pour un système causal,  $g(t) = 0$  pour  $t < 0$ ] du signal d'excitation  $x(t)$ . La fonction de pondération est précisément la réponse impulsionnelle  $g(t)$  — souvent aussi notée  $h(t)$  — du système.

L'exemple le plus simple est celui où la fonction  $g(t) = 1/T$  pour  $0 < t < T$  et est nulle ailleurs. Le signal  $y(t)$  exprimé par (1.10) correspond alors à  $\bar{x}(t, T)$ , la *moyenne glissante* — ou *courante*, en anglais : *running average* — du signal d'entrée  $x(t)$ , calculée sur un intervalle de durée  $T$  (fig. 1.9)

$$y(t) = \bar{x}(t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (1.11)$$

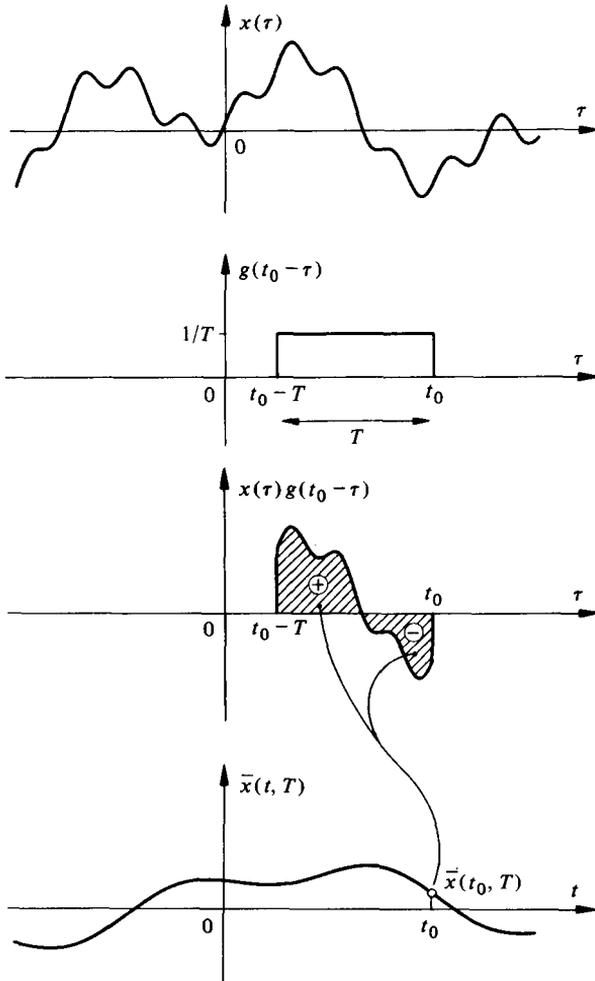


Fig. 1.9

Un autre exemple simple est celui du filtrage passe-bas effectué par un circuit intégrateur  $RC$  du 1er ordre dont la réponse impulsionnelle vaut  $g(t) = (RC)^{-1} \exp[-t/(RC)]$  pour  $t \geq 0$  et zéro pour  $t < 0$  :

$$y(t) = \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t x(\tau) \exp[-(t-\tau)/(RC)] d\tau \quad (1.12)$$

C'est une moyenne pondérée des valeurs passées et présente du signal  $x(t)$  dans laquelle le circuit introduit un *oubli progressif* (une illustration en est donnée à la figure 1.5).

À la convolution (1.10) correspond dans le domaine fréquentiel une simple multiplication de la transformée de Fourier (1.3) du signal d'entrée  $x(t)$  et de celle de la réponse impulsionnelle  $g(t)$  qui n'est autre que la *fonction de réponse fréquentielle* (ou *isomorphe*, cf. § IV.2.1.12, souvent aussi dénommée *fonction de transfert* dans la littérature internationale) du système :

$$Y(f) = X(f) \cdot G(f) \quad (1.13)$$

De cette propriété, on déduit facilement que l'*opération de convolution est commutative, associative et distributive* :

$$x(t) * g(t) = g(t) * x(t) \quad (1.14)$$

$$[x_1(t) + x_2(t)] * g(t) = [x_1(t) * g(t)] + [x_2(t) * g(t)] \quad (1.15)$$

$$[x(t) * g_1(t)] * g_2(t) = x(t) * [g_1(t) * g_2(t)] \quad (1.16)$$

Ces relations restent applicables, moyennant adaptation d'écriture, au cas des signaux et systèmes bidimensionnels (*traitement d'images*, chap. XX.8). Ainsi la relation

$$i_2(x, y) = i_1(x, y) ** g(x, y) \quad (1.17)$$

où le double astérisque dénote une convolution à deux dimensions, correspond à la transformation d'une image  $i_1(x, y)$  par un système linéaire bidimensionnel de réponse impulsionnelle  $g(x, y)$ . En optique, cette relation exprime l'image que l'on obtient d'un objet en l'observant au travers d'un instrument (par exemple : lentille, objectif) dont le comportement est décrit par la fonction  $g(x, y)$  appelée *profil instrumental* (réponse de l'instrument à un objet ponctuel ou point lumineux).

Dans le domaine des fréquences spatiales, la relation duale de (1.17) liant les transformées de Fourier bidimensionnelles, du type (1.9), respectives est

$$I_2(u, v) = I_1(u, v) \cdot G(u, v) \quad (1.18)$$

où  $G(u, v)$  est la *fonction de réponse fréquentielle bidimensionnelle* du système correspondant.

### 1.2.6 Influence de la technologie

Lors de la conception d'un système complexe, chaque bloc du schéma d'ensemble devient un *module* qui est réalisé, selon les besoins, suivant une option matérielle

ou logicielle :

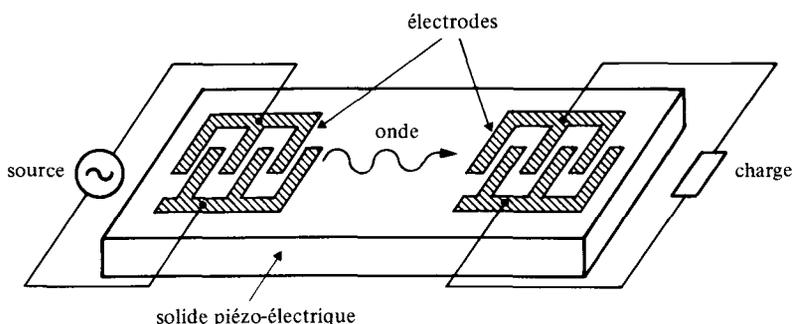
- électronique analogique;
- électronique numérique câblée (logique spécialisée);
- électronique numérique programmée (processeur universel ou à architecture spéciale);
- autre technologie.

L'évolution de la technologie (microélectronique, microacoustique ou optique) favorise l'apparition de ce que l'on conviendra d'appeler des processeurs spécialisés — analogiques ou numériques — capables de traiter rapidement et économiquement une quantité croissante d'informations. Cette tendance actuelle, attisée par des besoins nouveaux, conduit à un élargissement constant des domaines d'application des méthodes de traitement des signaux.

Si le traitement analogique des signaux a beaucoup bénéficié du développement des circuits électroniques intégrés, c'est surtout dans le domaine du traitement numérique que l'évolution la plus spectaculaire a été enregistrée. Simultanément, des algorithmes de calcul puissants (tels que la transformation de Fourier rapide) ont vu le jour, qui tendent peu à peu à donner au traitement numérique une prédominance indiscutable, sauf dans le domaine des très hautes fréquences.

En plus des circuits électroniques conventionnels, présentés dans le volume VIII et des calculatrices et systèmes programmables décrits dans le volume XIV, la physique appliquée met à disposition du traitement des signaux d'autres outils, moins universels, mais plus performants pour certains types d'applications.

C'est le cas des circuits à transfert de charges ou à capacités commutées, constitués par un assemblage intégré de condensateurs et d'interrupteurs électroniques, et celui des dispositifs à onde de surface (en anglais : surface acoustic wave devices ou SAW), qui exploitent la vitesse limitée de propagation d'ondes élastiques à la surface de certains matériaux piézo-électriques. Le principe de ce dernier type de dispositifs est illustré par la figure 1.10. Ils sont utilisés principalement dans les installations radar et de télévision.



**Fig. 1.10** Principe du transducteur interdigital (IDT) : les électrodes déposées sur un substrat piézo-électrique transforment le signal en une onde élastique qui parvient avec des retards définis à un réseau d'électrodes de dimensions variables réalisant une sommation pondérée (convolution).

Les systèmes de traitement optiques offrent l'avantage d'un mode de calcul parallèle analogique qui conduit à des vitesses d'exécution incomparables, mais à une précision et à une souplesse d'emploi limitées. L'opération fondamentale utilisée

(fig. 1.11) est la transformée de Fourier bidimensionnelle naturellement réalisée par une lentille optique travaillant en lumière cohérente (laser). Ces techniques se prêtent donc plus particulièrement au traitement d'une information représentée sous forme d'une image ou d'un hologramme. L'informatique reste toutefois l'outil privilégié du traitement d'images.

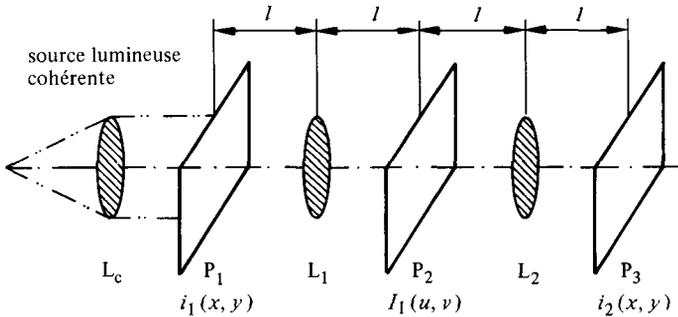


Fig. 1.11 Principe du traitement optique: si une image de transmittance variable  $i_1(x, y)$  est placée dans le plan focal frontal  $P_1$  de la lentille  $L_1$  et illuminée en lumière cohérente, la distribution de lumière dans le plan focal  $P_2$  est proportionnelle à la transformée de Fourier  $I_1(u, v)$  de l'image. En plaçant en  $P_2$  un filtre optique de fonction de transfert  $G(u, v)$ , on obtient en  $P_3$  la convolution  $i_2(x, y)$  de l'image originale et de la réponse impulsionnelle  $g(x, y)$  du filtre.

L'optique intégrée est une conquête récente de l'optoélectronique qui offre également des possibilités de réalisations intéressantes de dispositifs de traitement des signaux applicables surtout aux télécommunications et à la métrologie.

### 1.3 NOTATIONS PARTICULIÈRES

#### 1.3.1 Préambule

Afin d'alléger les formules mathématiques décrivant certains signaux, fonctions ou opérateurs fréquemment rencontrés en théorie du signal, il est avantageux de les dénoter d'une manière simple et concise.

Certaines de ces notations mentionnées ci-après sont usuelles en mathématiques. Les autres sont moins conventionnelles [11, 23] et font l'objet de notations variables selon les auteurs.

#### 1.3.2 Définitions : fonction signe

La *fonction signe* — parfois appelée *signum* — est définie de la manière suivante (fig. 1.12)

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(t) &= \begin{cases} -1 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \\ &= \frac{t}{|t|} \quad \text{pour } t \neq 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

La valeur à l'origine est en principe arbitraire, située entre  $\pm 1$ . Par souci de symétrie, on admettra, sauf cas particulier, que cette valeur est nulle par convention.

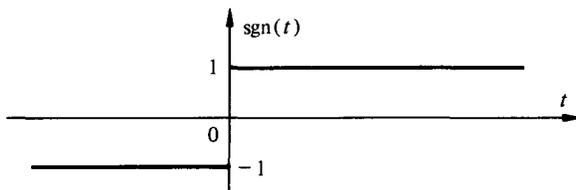


Fig. 1.12

### 1.3.3 Définition : saut unité

La *fonction saut* (ou *échelon*) *unité* peut se définir à partir de la fonction signe (fig. 1.13)

$$\epsilon(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

La valeur à l'origine est ici arbitrairement comprise entre 0 et 1. On la fixe par convention à  $\frac{1}{2}$ . Pour certaines applications, il est préférable de lui assigner la valeur 1.

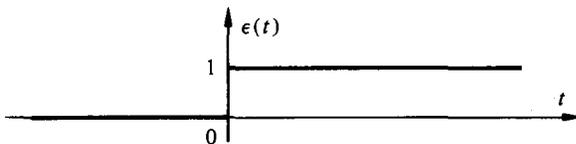


Fig. 1.13

### 1.3.4 Définition : fonction rampe

La *fonction rampe* peut se définir à partir de la fonction saut unité (fig. 1.14)

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \epsilon(\tau) d\tau = t \cdot \epsilon(t) \quad (1.21)$$

Inversément, le saut unité peut aussi être défini par

$$\epsilon(t) = dr(t)/dt \text{ pour } t \neq 0 \quad (1.22)$$

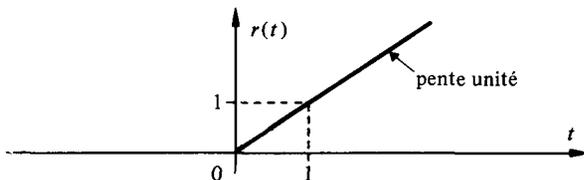


Fig. 1.14

Certains auteurs [55] définissent une fonction rampe de croissance bornée à partir de l'intégrale de la fonction rectangulaire introduite au paragraphe suivant.

### 1.3.5 Définition : fonction rectangulaire

La *fonction rectangulaire normalisée* (intégrale unité), parfois aussi appelée en mathématique *fonction porte*, est notée et définie de la manière suivante (fig. 1.15)

$$\text{rect}(t') = \epsilon(t' + 1/2) - \epsilon(t' - 1/2) = \begin{cases} 1 & |t'| < 1/2 \\ 0 & |t'| > 1/2 \end{cases} \quad (1.23)$$

où le signe prime indique une *variable adimensionnelle*. La valeur conventionnelle assignée aux abscisses  $t' = \pm 1/2$  est  $1/2$ .

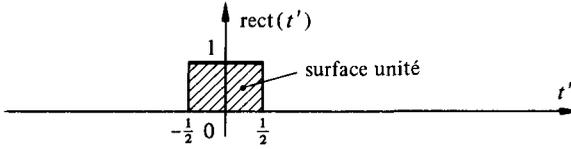


Fig. 1.15

En introduisant le changement de variable  $t' = t/T$ , on obtient d'une manière plus générale (fig. 1.16) pour une impulsion rectangulaire de durée  $T$ , d'amplitude  $A$ , centrée en  $t = \tau$  :

$$x(t) = A \text{rect}[(t - \tau)/T] \quad (1.24)$$

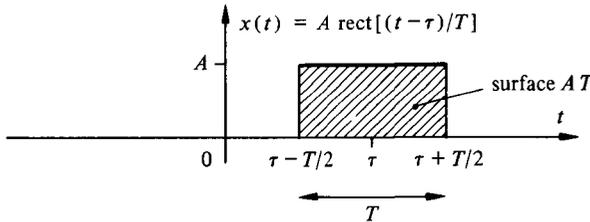


Fig. 1.16

### 1.3.6 Application

Outre sa capacité de représenter simplement des signaux de forme rectangulaire, la fonction rectangulaire intervient fréquemment comme facteur multiplicatif pour localiser un segment de durée  $T$  d'un signal quelconque (fig. 1.17). Par exemple

$$x(t, T) = x(t) \cdot \text{rect}(t/T) \quad (1.25)$$

En partant des relations fonctionnelles (1.4) et (1.5), avec  $g_1(t) = T^{-1} \text{rect}(t/T)$  ou  $g_2(t) = \text{rect}(t/T)$ , on obtient respectivement la *valeur moyenne*  $\bar{x}(T)$ , la *valeur quadratique* (alias énergie normalisée, voir § 2.3.2)  $W_x(T)$  ou la *valeur quadratique moyenne* (alias puissance normalisée)  $P_x(T)$  du signal  $x(t)$  évaluées sur l'intervalle  $T$  :

$$\bar{x}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) g_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1.26)$$

$$W_x(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) g_2(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.27)$$

$$P_x(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) g_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (1.28)$$

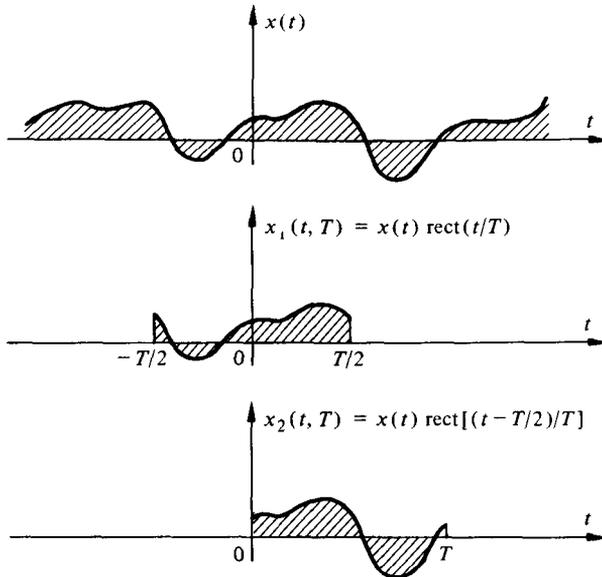


Fig. 1.17

De même, en partant de la relation fonctionnelle (1.6) avec  $g_3(\tau) = T^{-1} \text{rect}[(\tau - T/2)/T]$ , on obtient l'expression de la moyenne glissante, définie par la relation (1.11) et illustrée par la figure 1.9

$$\bar{x}(t, T) = x(t) * g_3(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (1.29)$$

La valeur moyenne  $\bar{x}$  du signal, mesurée sur tout l'axe réel, est la limite de (1.26)

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (1.30)$$

La racine carrée de (1.28) est par définition la *valeur efficace* du signal sur l'intervalle  $T$

$$x_{\text{eff}}(T) = \sqrt{P_x(T)} \quad (1.31)$$

### 1.3.7 Définition : fonction triangulaire

La *fonction triangulaire normalisée* (intégrale unité et variable  $t'$  adimensionnelle) est notée et définie de la manière suivante (fig. 1.18)

$$\text{tri}(t') = \begin{cases} 1 - |t'| & |t'| \leq 1 \\ 0 & |t'| > 1 \end{cases} \quad (1.32)$$

Cette fonction correspond aussi à la convolution

$$\text{tri}(t') = \text{rect}(t') * \text{rect}(t') \quad (1.33)$$

Elle est notée  $\Lambda(t')$  par certains auteurs [23, 56].

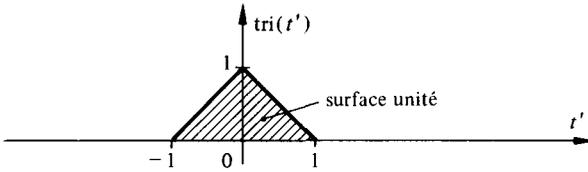


Fig. 1.18

D'une manière générale, en introduisant le changement de variable  $t' = t/T$ , une impulsion de forme triangulaire, d'amplitude maximum  $A$  et de base  $2T$ , centrée en  $t = \tau$ , sera notée (fig. 1.19)

$$x(t) = A \operatorname{tri}[(t-\tau)/T] \quad (1.34)$$

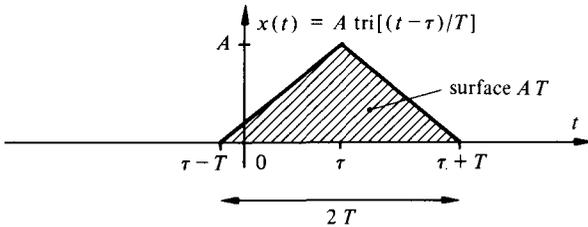


Fig. 1.19

### 1.3.8 Définition : impulsion (ou distribution) de Dirac

L'impulsion de Dirac  $\delta(t)$ , aussi appelée *impulsion unité* ou *distribution delta*, peut être formellement définie (§ IV.7.1.21) par le produit scalaire (1.8)

$$x(0) = \langle x, \delta \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t) dt \quad (1.35)$$

En d'autres termes, l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  est un *opérateur d'échantillonnage* qui restitue la valeur  $x(0)$  d'une fonction  $x(t)$  continue à l'origine. **Sa dimension est par conséquent l'inverse de celle de la variable d'intégration.** D'une manière plus générale, pour toute fonction  $x(t)$  continue en  $t = t_0$ , on a

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt \quad (1.36)$$

En particulier, en posant  $x(t) = 1$ , on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (1.37)$$

avec

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = \epsilon(t) \quad (1.38)$$

la valeur de l'intégrale pour  $t = 0$  étant en général conventionnellement fixée à  $\frac{1}{2}$ . Ceci permet d'admettre également l'équivalence

$$\delta(t) = d\epsilon(t)/dt \quad (1.39)$$

En tenant compte de (1.23), la dérivée de l'impulsion rectangulaire peut ainsi s'écrire

$$\frac{d}{dt} \text{rect}(t) = \delta(t + 1/2) - \delta(t - 1/2) \quad (1.40)$$

### 1.3.9 Interprétation

L'expression (1.36) correspond à la limite, prise pour  $T \rightarrow 0$ , de la valeur moyenne locale  $\bar{x}(t_0, T)$  de  $x(t)$ , mesurée sur un intervalle  $T$  centré en  $t = t_0$

$$x(t_0) = \lim_{T \rightarrow 0} \bar{x}(t_0, T) \quad (1.41)$$

avec (fig. 1.20)

$$\bar{x}(t_0, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)g(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} x(t) dt \quad (1.42)$$

où

$$g(t) = T^{-1} \text{rect}[(t - t_0)/T] \quad (1.43)$$

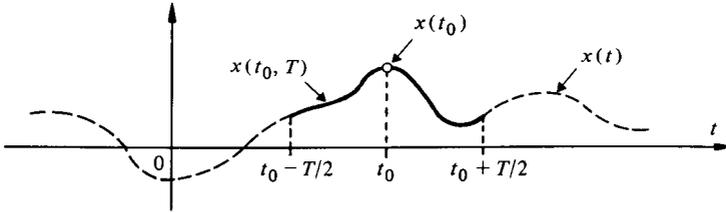


Fig. 1.20

Ainsi, l'impulsion de Dirac peut être interprétée comme la limite d'une impulsion rectangulaire, de surface unité, dont la durée tend vers zéro :

$$\delta(t) = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{1}{T} \text{rect}(t/T) \quad (1.44)$$

En procédant de manière similaire, on peut constater que l'impulsion de Dirac correspond à la limite prise par un grand nombre de fonctions de surface unité, telles que  $T^{-1} \text{tri}(t/T)$  par exemple. D'autres cas sont mentionnés aux paragraphes 1.3.15 et 1.3.16.

### 1.3.10 Produit d'une fonction continue par une impulsion de Dirac

Soit  $x(t)$  une fonction continue en  $t = 0$  ou  $t = t_0$ . Les équations (1.35), (1.36) et (1.37) entraînent les équivalences

$$x(t) \delta(t) = x(0) \delta(t) \quad (1.45)$$

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0) \quad (1.46)$$

La représentation graphique conventionnelle d'une impulsion de Dirac  $c \cdot \delta(t - t_0)$  est une flèche verticale placée en  $t = t_0$  de longueur proportionnelle au poids  $c$  (fig. 1.21).

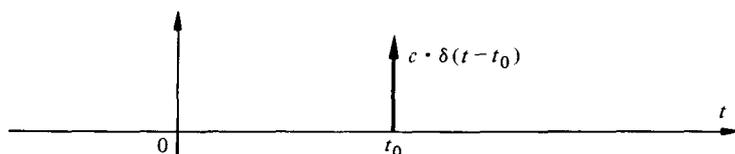


Fig. 1.21

### 1.3.11 Autres propriétés

On déduit de ce qui précède les propriétés importantes suivantes :

- identité

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (1.47)$$

- translation

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \quad (1.48)$$

$$x(t - t_1) * \delta(t - t_2) = x(t - t_1 - t_2) \quad (1.49)$$

$$\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2) \quad (1.50)$$

- changement de variable

$$\delta(at) = |a|^{-1} \delta(t) \quad (1.51)$$

avec en particulier, si  $\omega = 2\pi f$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(f) \quad (1.52)$$

### 1.3.12 Réponse impulsionnelle et réponse indicielle. Définitions

La *réponse impulsionnelle*  $g(t)$  d'un système linéaire, déjà mentionnée au paragraphe 1.2.5, est la réponse à une excitation théorique en forme d'impulsion de Dirac. Certains auteurs utilisent d'ailleurs l'appellation imagée de *réponse percussionnelle*. En effet, si l'on remplace  $x(t)$  par  $\delta(t)$  dans l'équation (1.10), on obtient par (1.47) l'identité :  $y(t) = g(t)$ .

De la propriété (1.46), on déduit par ailleurs que l'équation générale de convolution (1.10) est une application du principe de superposition : la réponse à une excitation quelconque est la somme (intégrale) des réponses partielles à une suite continue d'impulsions de Dirac – décalées dans le temps – dont les poids forment l'image du signal d'excitation.

La *réponse indicielle*  $\gamma(t)$  d'un système linéaire est la réponse à une excitation en forme de saut unité (1.20). Compte tenu de la relation (1.39), les réponses indicielles et impulsionnelles sont liées par

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau \quad (1.53)$$

### 1.3.13 Définition : suite périodique d'impulsions de Dirac

Une suite d'impulsions de Dirac se répétant sur l'axe du temps avec une période  $T$  (fig. 1.22) sera notée par concision  $\delta_T(t)$  avec

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (1.54)$$

Cette suite est parfois appelée *fonction d'échantillonnage* ou *peigne de Dirac* (en anglais : *comb*).

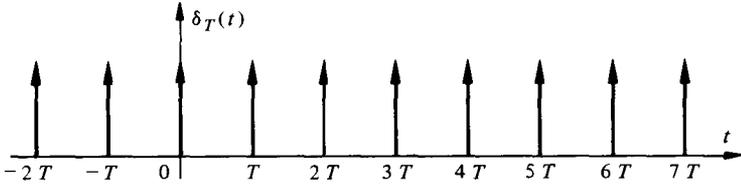


Fig. 1.22

Par (1.46), on a en particulier

$$x(t)\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \quad (1.55)$$

Cette expression permet de représenter (chap. 9) l'opération de prélèvement périodique d'une suite d'échantillons du signal  $x(t)$  à une cadence d'échantillonnage  $f_e = 1/T$ .

### 1.3.14 Définition : opérateur de répétition

L'*opérateur de répétition*  $\text{rep}_T \{x(t)\}$  est une notation commode à utiliser pour la représentation de signaux périodiques

$$\text{rep}_T \{x(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT) \quad (1.56)$$

Par (1.48), on a l'équivalence

$$\text{rep}_T \{x(t)\} = x(t) * \delta_T(t) \quad (1.57)$$

Une illustration en est donnée sur la figure 1.23.

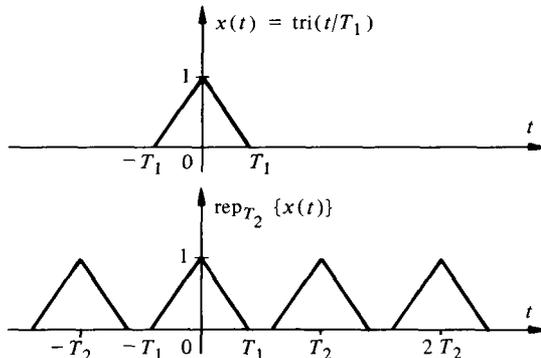


Fig. 1.23

### 1.3.15 Définition : fonction sinus cardinal

La fonction obtenue en effectuant le rapport d'une fonction sinusoidale et de son argument joue un rôle très important en théorie du signal. Elle porte le nom de *sinus cardinal*. Sa forme normalisée (intégrale unité et variable adimensionnelle  $\alpha$ ), est notée et définie de la manière suivante :

$$\text{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} \quad (1.58)$$

Elle vaut un à l'origine, est paire et ses zéros sont les valeurs entières de  $\alpha$  différentes de zéro (fig. 1.24). Une tabulation de cette fonction et de son carré est reproduite en annexe au chapitre 15.

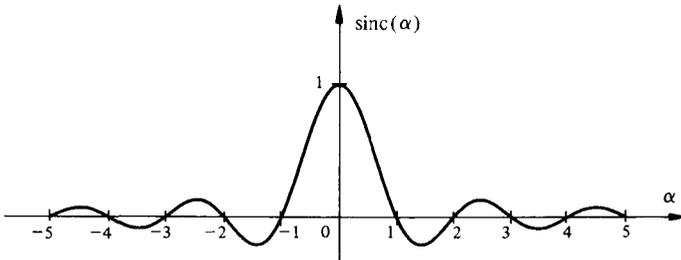


Fig. 1.24

Compte tenu du développement en série de la fonction sinus, on obtient pour le sinus cardinal

$$\text{sinc}(\alpha) = 1 - (\pi\alpha)^2/3! + (\pi\alpha)^4/5! - (\pi\alpha)^6/7! + \dots \quad (1.59)$$

Les fonctions  $\text{rect}(t)$  et  $\text{sinc}(f)$  forment une paire fondamentale de transformées de Fourier (§ 4.2.4). Il en est de même (§ 4.2.6) des fonctions  $\text{tri}(t)$  et  $\text{sinc}^2(f)$ .

La normalisation (1.58) entraîne les propriétés suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(\alpha) d\alpha = 1 \quad (1.60)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(\alpha) d\alpha = 1 \quad (1.61)$$

et, en posant  $\alpha = Tf$ , ce qui revient à localiser les zéros de la fonction aux multiples entiers non nuls de  $f = 1/T$  :

$$\int_{-\infty}^{\infty} T \text{sinc}(Tf) df = 1 \quad (1.62)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} T \text{sinc}^2(Tf) df = 1 \quad (1.63)$$

d'où, par analogie avec (1.44)

$$\lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}(Tf) = \lim_{T \rightarrow \infty} T \text{sinc}^2(Tf) = \delta(f) \quad (1.64)$$

L'intégrale du sinus cardinal (fig. 1.25) est simplement liée au *sinus intégral*  $\text{Si}(u)$  défini par

$$\text{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin x}{x} dx = \pi \int_0^{u' = u/\pi} \text{sinc}(\alpha) d\alpha \tag{1.65}$$

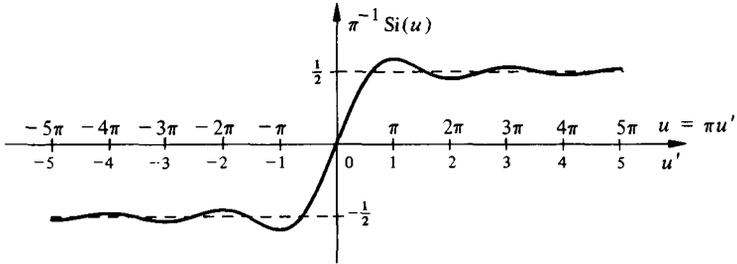


Fig. 1.25

**1.3.16 Définition : impulsion gaussienne**

La loi de Gauss apparaît souvent en relation avec des problèmes statistiques. Mais ce n'est pas son seul intérêt en théorie du signal.

On appellera *impulsion gaussienne* (fig. 1.26) la fonction normalisée (intégrale unité et variable adimensionnelle  $t'$ )

$$\text{ig}(t') = \exp(-\pi t'^2) \tag{1.66}$$

En posant  $t' = t/T$ , où  $T$  est une mesure de l'étalement de l'impulsion sur l'axe  $t$  liée à la notion d'*écart-type*  $\sigma_t$  utilisée en statistique par la relation  $T = \sqrt{2\pi} \sigma_t$ , on obtient du fait de la normalisation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{ig}(t') dt' = T^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \text{ig}(t/T) dt = 1 \tag{1.67}$$

d'où aussi

$$\lim_{T \rightarrow 0} T^{-1} \cdot \text{ig}(t/T) = \delta(t) \tag{1.68}$$

L'une des propriétés remarquables de l'impulsion gaussienne est que  $\text{ig}(t)$  et  $\text{ig}(f)$  forment une paire de transformées de Fourier ([22] et exercice 4.6.9).

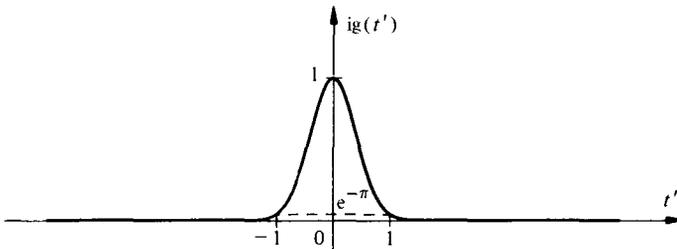


Fig. 1.26

## 1.4 EXERCICES

**1.4.1** Calculer l'intégrale pour  $-\infty < t < \infty$  des fonctions  $x_1(t) = A \text{rect}(t/\Delta)$  et  $y_1(t) = A \text{tri}(t/\Delta)$  et les valeurs moyennes  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  des signaux  $x_2(t) = \text{rep}_T \{x_1(t)\}$  et  $y_2(t) = \text{rep}_T \{y_1(t)\}$ .

**1.4.2** Donner l'expression du signal  $x(t) = A \text{rect}[(t - t_0 - T/2)/T]$  à l'aide de fonctions signes seulement. Justifier graphiquement la solution trouvée.

**1.4.3** Calculer et esquisser graphiquement pour les cas  $t_0 < t_1$  et  $t_0 > t_1$  le produit de convolution  $z_i(t) = x_i(t) * y_i(t)$  pour les cas suivants :

- $x_1(t) = A [\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)]$  et  $y_1(t) = B\delta(t) + \frac{1}{2} B [\delta(t + t_1) + \delta(t - t_1)]$ ;
- $x_2(t) = \cos(\pi t/T) \text{rect}(t/T)$  et  $y_2(t) = A\delta_T(t)$ .

**1.4.4** Vérifier la relation (1.33) analytiquement et graphiquement.

**1.4.5** Déterminer le signal obtenu en calculant la moyenne glissante  $\bar{x}(t, T_1)$  si  $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$  et évaluer le résultat pour  $T_1 = T_0/2$  et  $T_1 = kT_0$  avec  $k$  entier et  $T_0 = 1/f_0$ .

**1.4.6** Calculer et esquisser graphiquement le produit de convolution des signaux

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \delta(t - iT) \quad \text{et} \quad y(t) = \sum_{j=0}^2 b_j \delta(t - jT)$$

où  $a_i = \exp(-i)$  et  $b_0 = b_2 = -b_1 = 1$ .

**1.4.7** Calculer la valeur moyenne (1.26), la valeur quadratique (1.27), la valeur quadratique moyenne (1.28) et la valeur efficace (1.31) du signal  $x(t) = A \text{tri}(t/T)$  sur l'intervalle  $T_1 = [-T, T]$ .



## CLASSIFICATION ET MODÈLES DES SIGNAUX

### 2.1 SIGNAUX PHYSIQUEMENT RÉALISABLES ET MODÈLES THÉORIQUES

#### 2.1.1 Contraintes expérimentales

Un signal expérimental est l'image d'un processus physique et, pour cette raison, doit être *physiquement réalisable*. Il est ainsi soumis à toute une série de contraintes :

- son énergie ne peut être que bornée;
- son amplitude est nécessairement bornée;
- cette amplitude est une fonction continue, car l'inertie du système générateur interdit toute discontinuité;
- le spectre du signal est lui aussi nécessairement borné et doit tendre vers zéro lorsque la fréquence tend vers l'infini.

#### 2.1.2 Modèles théoriques

Sur le plan théorique (§ 1.1.10), le modèle d'un signal est une fonction, réelle ou complexe, ou une fonctionnelle dépendant par exemple de la variable temps  $t$ . Il est avantageux d'attribuer chaque modèle à une classe spécifique regroupant les signaux jouissant de propriétés communes. Par ailleurs, il est souvent judicieux de simplifier la représentation utilisée en choisissant des modèles commodes, mais qui ne seront pas nécessairement limités par les contraintes énoncées précédemment.

C'est ainsi que l'on fait un large usage de modèles de signaux à énergie théorique infinie, à amplitude non bornée ou subissant des discontinuités, représentables par des distributions (sect. IV.7.1).

La qualité du modèle dépend finalement de la qualité de l'approximation faite et de la commodité d'emploi.

#### 2.1.3 Exemples

Un signal sinusoïdal est représenté par une fonction définie sur tout l'axe réel : son énergie théorique est donc infinie.

Le modèle usuel de signaux perturbateurs appelés bruit de fond (chap. 6) admet la possibilité, bien qu'avec une probabilité tendant vers zéro, d'amplitudes infinies.

Les changements d'états de signaux logiques binaires sont généralement représentés par de simples discontinuités.

Une excitation de type percussionnel est symbolisée par la distribution de Dirac  $\delta(t)$ .

### 2.1.4 Modes de classification

Différents modes de classification des modèles de signaux peuvent être envisagés. Parmi les principaux, on peut citer :

- classification phénoménologique (sect. 2.2) : on met ainsi en évidence le type d'évolution du signal, son caractère prédéterminé ou son comportement aléatoire;
- classification énergétique (sect. 2.3) : on sépare les modèles de signaux satisfaisant à une condition d'énergie finie d'autres plus idéalisés, à puissance moyenne finie et énergie infinie;
- classification morphologique (sect. 2.4) : celle-ci permet de distinguer les signaux selon le caractère continu ou discret de l'amplitude et de la variable libre;
- classification spectrale : on met en évidence le domaine des fréquences dans lequel s'inscrit le spectre du signal;
- classification dimensionnelle : on considère les signaux unidimensionnels  $x(t)$ , les signaux bidimensionnels — ou image —  $i(x, y)$ , voire les signaux tridimensionnels  $i(x, y, t)$  représentant par exemple l'évolution d'une image en fonction du temps.

## 2.2 SIGNAUX DÉTERMINISTES OU ALÉATOIRES

### 2.2.1 Définitions

La première classification (tableau 2.1) est obtenue en considérant la nature profonde de l'évolution du signal en fonction du temps. Elle fait apparaître deux types fondamentaux de signaux :

- les *signaux déterministes* (ou certains, ou encore non aléatoires [57]) dont l'évolution en fonction du temps peut être parfaitement prédite par un modèle mathématique approprié;

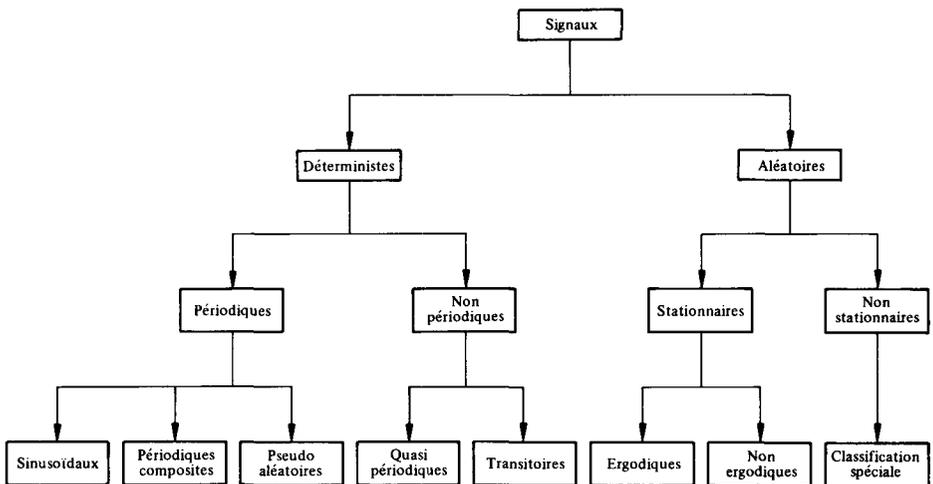


Tableau 2.1

- les *signaux aléatoires*, dont le comportement temporel est imprévisible et pour la description desquels il faut se contenter d'observations statistiques.

### 2.2.2 Commentaire

Il est commode, en théorie, de considérer des signaux déterministes. Ils se prêtent au calcul puisque décrits par une formule mathématique précise. Ils sont toutefois peu représentatifs de signaux observables. On les rencontre essentiellement en laboratoire, comme signaux de test, ou en relation avec la production d'énergie par machines tournantes.

Un signal de forme déterminée dont la position sur l'axe du temps est inconnue (par exemple : sinusoïde de phase initiale inconnue) est déjà un signal aléatoire !

### 2.2.3 Sous-classes de signaux déterministes. Définitions

Parmi les signaux déterministes, on distingue :

- les *signaux périodiques*, satisfaisant à la relation

$$x(t) = x(t + kT) \quad k \text{ entier} \quad (2.1)$$

qui obéissent à une loi de répétition cyclique régulière, de période  $T$ ;

- les *signaux non périodiques*, qui ne jouissent pas de cette propriété.

Les *signaux sinusoïdaux* (fig. 2.2), d'équation générale

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin \left( \frac{2\pi}{T} t + \alpha \right) \\ &= A \sin \left[ \frac{2\pi}{T} (t + \tau) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

forment le groupe le plus familier de signaux périodiques.

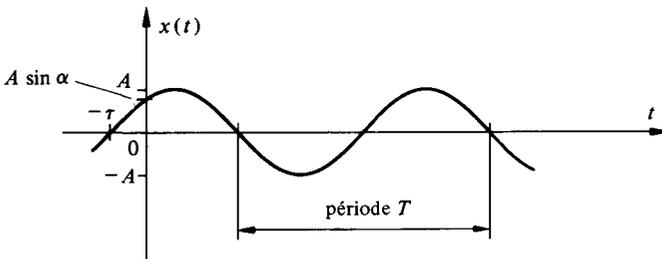


Fig. 2.2

Les *signaux pseudo-aléatoires* (fig. 2.3) forment une catégorie particulière de signaux périodiques dont le comportement rappelle celui d'un signal aléatoire (sect. 5.10).

Parmi les signaux non périodiques, il faut distinguer les *signaux quasi-périodiques* (fig. 2.4), qui résultent d'une somme de sinusoïdes de périodes incommensurables, des *signaux transitoires* dont l'existence est éphémère (fig. 2.5).

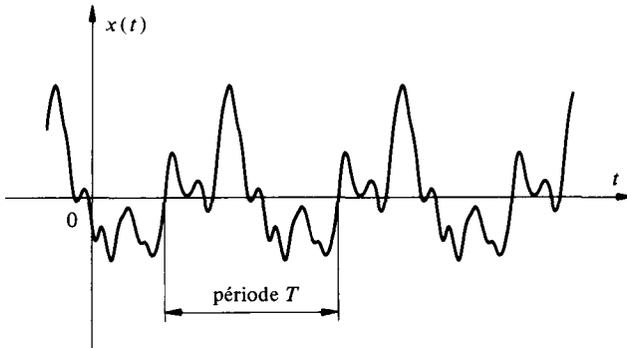


Fig. 2.3 Signal pseudo-aléatoire.

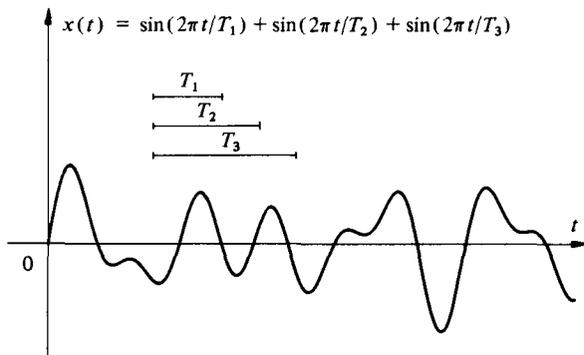


Fig. 2.4 Signal quasi-périodique.

### 2.2.4 Notation complexe des signaux sinusoïdaux et concept de fréquence négative

Il est souvent avantageux de représenter une fonction sinusoïdale par la partie imaginaire — ou réelle pour une notation en cosinus — d'une exponentielle complexe (sect. I.8.3) :

$$A \sin \left( \frac{2\pi}{T} t + \alpha \right) = \text{Im} \left\{ A \exp \left[ j \left( \frac{2\pi}{T} t + \alpha \right) \right] \right\} \quad (2.3)$$

Une généralisation de ce procédé, applicable à des signaux de forme quelconque, est introduite au chapitre 7.

Une autre représentation est possible en considérant le signal sinusoïdal (ou cosinusoïdal) comme la résultante de deux phaseurs (§ I.8.3.3) conjugués d'amplitude  $A/2$  tournant dans des directions opposées avec une pulsation (vitesse angulaire) de  $\pm \omega = \pm 2\pi/T$  (fig. 2.6). C'est une application directe de la formule d'Euler :

$$jA \sin(\omega t) = \frac{A}{2} \exp(j\omega t) - \frac{A}{2} \exp(-j\omega t) \quad (2.4)$$

Pour tenir compte du sens de rotation, on parle de fréquence positive ( $+\omega = +2\pi f$ ) et négative ( $-\omega = -2\pi f$ ). Ce concept de fréquence négative n'a pas de signification physique. Il est utilisé pour la représentation de fonctions de la fréquence (spectre, fonction de réponse fréquentielle) où  $-\infty < f < \infty$ .

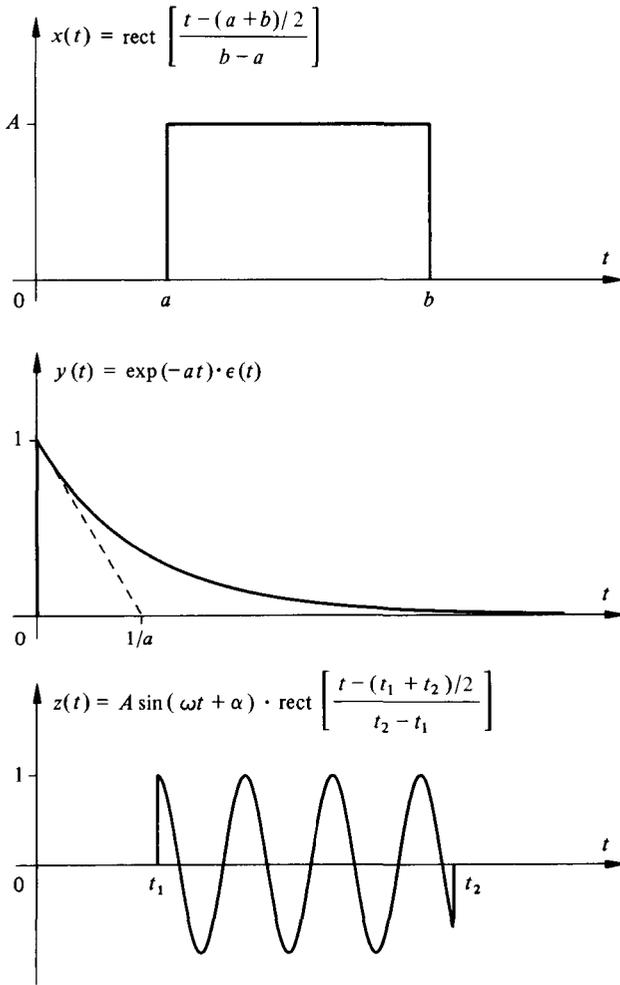


Fig. 2.5 Signaux transitoires :  $x(t)$  = impulsion rectangulaire;  $y(t)$  = impulsion exponentielle décroissante;  $z(t)$  = impulsion sinusoïdale.

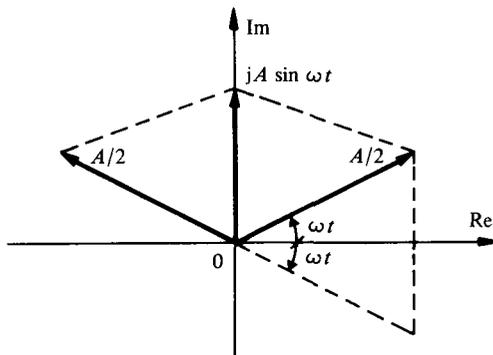


Fig. 2.6

### 2.2.5 Sous-classes de signaux aléatoires. Définitions

Les signaux aléatoires peuvent, quant à eux, être classés en deux grandes catégories :

- les *signaux aléatoires stationnaires*, dont les caractéristiques statistiques sont invariantes dans le temps (fig. 2.7);
- les *signaux aléatoires non stationnaires*, qui ne jouissent pas de cette propriété (fig. 2.8).

Si les valeurs moyennes statistiques, ou moments, d'un signal stationnaire s'identifient aux valeurs moyennes temporelles, on dit qu'il est *ergodique* (sect. 5.1).

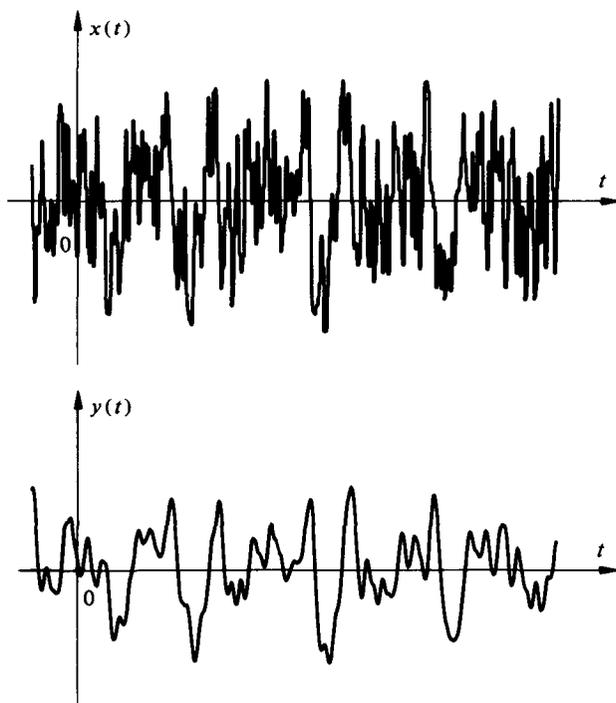


Fig. 2.7 Signal aléatoire stationnaire :  $x(t)$  = signal à large bande (bruit blanc);  $y(t)$  = signal filtré passe-bas.



Fig. 2.8 Signal aléatoire non stationnaire.

### 2.2.6 Commentaire

Un signal aléatoire à comportement transitoire est non stationnaire.

Le concept de stationnarité est, comme le caractère permanent associé aux signaux périodiques, une abstraction commode. Il est précieux dans la mesure où l'on peut souvent considérer, en pratique, qu'un signal est stationnaire *pendant la durée d'observation*.

## 2.3 SIGNAUX À ÉNERGIE OU PUISSANCE MOYENNE FINIE

### 2.3.1 Classification énergétique

Une distinction fondamentale peut être faite entre deux grandes catégories de signaux :

- les signaux à énergie finie;
- les signaux à puissance moyenne finie non nulle.

La première catégorie comprend tous les signaux de type transitoire, qu'ils soient déterministes ou aléatoires. La deuxième catégorie englobe presque tous les signaux périodiques, quasi-périodiques et les signaux aléatoires permanents.

Certains signaux théoriques n'appartiennent à aucune de ces deux catégories : c'est le cas par exemple de  $x(t) = \exp(at)$  pour  $-\infty < t < \infty$ .

L'abstraction mathématique commode qu'est l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  n'est pas classable non plus dans ce contexte, pas plus que la suite périodique d'impulsions de Dirac  $\delta_T(t)$ .

### 2.3.2 Énergie et puissance moyenne d'un signal. Définitions

En électrotechnique (§ I.5.3.5), la puissance instantanée fournie à un bipôle est définie comme le produit des valeurs instantanées de la tension  $u(t)$  à ses bornes et du courant  $i(t)$  qui le traverse :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \qquad W = V \cdot A \qquad (2.5)$$

Dans le cas d'une résistance linéaire  $R$ , respectivement d'une conductance linéaire  $G$ , on a :

$$p(t) = Ri^2(t) = \frac{1}{R}u^2(t) = Gu^2(t) \qquad W \qquad (2.6)$$

L'énergie dissipée sur un intervalle  $[t_1, t_2]$ , avec  $t_2 > t_1$ , est l'intégrale de cette puissance instantanée. Elle se mesure en joules.

$$W(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = R \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = G \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \qquad J \qquad (2.7)$$

En divisant cette énergie par la durée de l'intervalle, on obtient une puissance moyenne, mesurée en watts :

$$P(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{R}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i^2(t) dt = \frac{G}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u^2(t) dt \qquad (2.8)$$

Par analogie, on appelle respectivement *énergie (normalisée)* et *puissance moyenne (normalisée)* d'un signal *réel*  $x(t)$ , calculées sur un intervalle  $[t_1, t_2]$ , les valeurs quadratique (1.27) et valeur quadratique moyenne (1.28) suivantes :

$$W_x(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \quad (2.9)$$

$$P_x(t_1, t_2) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt \quad (2.10)$$

La racine carrée de (2.10) est la valeur efficace (1.31). C'est la même définition que celle introduite pour les grandeurs périodiques (§ 1.8.2.11), mais étendue à des signaux de forme quelconque.

La puissance moyenne normalisée possède donc une dimension égale au carré de celle de  $x(t)$ . En multipliant encore par l'unité de temps, on obtient la dimension de l'énergie normalisée. Si  $x(t)$  est une tension ou un courant électrique, (2.9) et (2.10) correspondent à l'énergie et la puissance dissipées par une résistance de 1 Ohm.

L'*énergie totale* et la *puissance moyenne totale* d'un signal sont obtenues en considérant un intervalle s'étendant à tout l'axe réel. Les relations (2.9) et (2.10) sont alors modifiées comme suit :

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \quad (2.11)$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (2.12)$$

La puissance moyenne totale est définie comme une valeur principale de Cauchy. Pour les signaux périodiques, la puissance moyenne totale (2.12) est égale à la puissance moyenne sur une période.

Si le signal est représenté par une fonction complexe de la variable réelle  $t$ , on remplace dans (2.11) et (2.12)  $x^2(t)$  par  $|x(t)|^2$ .

### 2.3.3 Définition : signaux à énergie finie

Les *signaux à énergie finie* sont ceux pour lesquels l'intégrale (2.11) est bornée. Ces signaux, dits aussi de *carré intégrable* (ou *sommables*), satisfont donc à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (2.13)$$

Leur puissance moyenne est nulle.

### 2.3.4 Définition : signaux à puissance moyenne finie

Les *signaux à puissance moyenne finie* (non nulle) sont ceux qui satisfont à la condition

$$0 < \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (2.14)$$

2.3.5 Commentaires

La fonction  $x^2(t)$  correspond à une distribution de l'énergie du signal en fonction du temps. La puissance moyenne  $P_x(T)$  est, en d'autres termes, la distribution moyenne de l'énergie sur l'intervalle  $T$  choisi.

L'examen des conditions (2.13) et (2.14) montre clairement qu'un signal à puissance moyenne finie non nulle possède une énergie infinie et qu'un signal à énergie finie possède une puissance moyenne nulle. Bien évidemment, seul ce dernier est physiquement réalisable.

2.4 VARIABLES CONTINUES ET DISCRÈTES

2.4.1 Classification morphologique. Définitions

Un signal peut se présenter sous différentes formes selon que son amplitude est une variable continue ou discrète et que la variable libre  $t$  (considérée ici comme le temps) est elle-même continue ou discrète (fig. 2.9). On distingue donc ainsi quatre types de signaux :

- le signal à amplitude et temps continus appelé couramment *signal analogique*;
- le signal à amplitude discrète et temps continu appelé *signal quantifié*;
- le signal à amplitude continue et temps discret appelé *signal échantillonné*;
- le signal à amplitude et temps discrets appelé *signal numérique* (ou improprement *digital*), car il est représentable par une suite de nombres ou série temporelle.

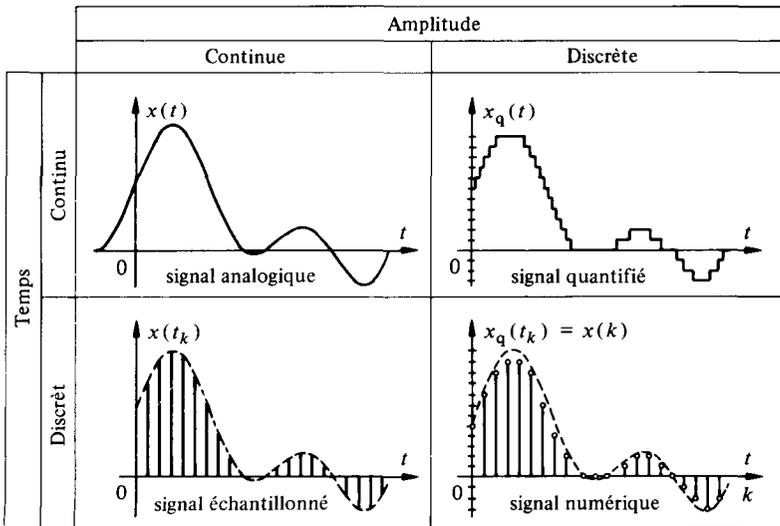


Fig. 2.9

### 2.4.2 Modèles de signaux analogiques, échantillonnés et numériques

Le *modèle analogique* d'un signal est une fonction du temps  $t$ , où la variable  $t$  est continue. Il est noté  $x(t), y(t)$ , etc.

Le *modèle échantillonné* d'un signal est une suite de valeurs assignées à des instants discrets  $t_k = k \cdot \Delta t$ , où  $k$  est une variable discrète (nombre entier) et  $\Delta t$  représente le pas d'échantillonnage. Il est noté  $x(t_k), y(t_k)$ , etc.

Le *modèle numérique* d'un signal correspond au modèle échantillonné dont chaque valeur est représentée par un nombre quantifié. Sous sa forme standardisée, il est simplement noté  $x(k), y(k)$ , etc., après normalisation du pas  $\Delta t$ , respectivement de la fréquence d'échantillonnage  $f_e(\Delta t = f_e^{-1} = 1)$ . Pour un signal de durée finie (§ 2.5.2), l'indice  $k$  est un nombre entier généralement compté entre 0 et  $N - 1$ , où  $N$  est le nombre total d'échantillons.

### 2.4.3 Correspondances et différences

Comme indiqué au paragraphe 2.3.2, à tout signal analogique transitoire  $x(t)$  est associé une certaine énergie normalisée  $W_{x_a} = \int x^2(t) dt$ , mesurée par exemple en  $V^2 \cdot s$ . Pour un signal échantillonné, une correspondance peut être établie à l'aide de la relation discrète  $W_{x_e} = \sum x^2(t_k) \cdot \Delta t$ . Afin de minimiser l'erreur entre les calculs des énergies sous forme intégrale et discrète, chaque échantillon  $x(t_k)$  doit être considéré comme situé au milieu de l'intervalle  $\Delta t$  correspondant. En posant  $\Delta t = 1$ , l'énergie d'un signal numérique standardisé est représentée par  $W_{x_n} = \sum x^2(k)$ .

Au saut unité analogique  $\epsilon(t)$  correspond la séquence unité numérique  $\epsilon(k)$ , constituée d'une suite d'échantillons qui sont nuls pour  $k < 0$  et de valeur unité pour  $k \geq 0$ . A l'impulsion de Dirac  $\delta(t)$  correspond l'impulsion unité numérique  $\delta(k)$  qui vaut 1 pour  $k = 0$  et est nulle pour  $k \neq 0$ . Cette impulsion unité peut aussi être définie par la différence  $\delta(k) = \epsilon(k) - \epsilon(k - 1)$ . Le signal numérique  $\text{rect}[(k - L)/K] = \epsilon(k) - \epsilon(k - K)$ , où  $L = K/2$  si  $K$  est pair et  $L = (K - 1)/2$  si  $K$  est impair, est constitué d'une suite de  $K$  échantillons de valeur unité compris entre les positions  $k = 0$  et  $k = K - 1$ . Les autres échantillons sont nuls.

A l'exponentielle complexe analogique  $\exp(j2\pi nt/T)$ , de fréquence discrète  $n/T$ , correspond l'exponentielle complexe numérique  $\exp(j2\pi nk/N)$ , de fréquence discrète  $n/N$ .  $N$  est ici le nombre d'échantillons constituant une période fondamentale ( $n = 1$ ). Le nombre entier  $n$  est l'indice harmonique. Le modèle analogique permet de considérer une infinité d'harmoniques, de fréquences discrètes  $f_n = n/T$  réparties sur tout l'axe des fréquences, de  $-\infty$  à  $+\infty$ , pour  $-\infty < n < +\infty$ . Au contraire, le nombre d'harmoniques distinctes représentables par le modèle numérique est limité à  $N - 1$ , car  $\exp(j2\pi nk/N) = \exp(j2\pi [N + 1]k/N)$ : l'exponentielle complexe numérique est modulo- $N$ . L'intervalle principal des fréquences  $f_n = n/N$  va donc de 0 à 1, avec une répétition périodique de période unité. On observe, de plus, une antisymétrie par rapport à la fréquence  $1/2$  puisque  $\exp(j2\pi [N/2 + 1]k/N) = -\exp(j2\pi k/N)$ . En traitement numérique des signaux (réels), il est suffisant de considérer l'intervalle de fréquence  $[0, 1/2]$ .

### 2.4.4 Classification des systèmes de traitement

Les systèmes de traitement de signaux sont également classés selon la nature des signaux sur lesquels ils opèrent. On parle ainsi des

- *systèmes analogiques* : amplificateurs, filtres classiques, multiplicateurs, modulateurs de signaux, etc;
- *systèmes échantillonnés* : circuits à transfert de charges, filtres à capacités commutées, etc;
- *systèmes numériques* (ou improprement *digitaux*) : filtres numériques, corrélateurs, transformateurs de Fourier et autres processeurs spécialisés.

On rencontre aussi des structures hybrides, par exemple : convertisseur analogique-numérique.

On observera toutefois que dans les systèmes échantillonnés, le signal effectivement utilisé correspond généralement à un cas intermédiaire entre le signal analogique et le signal échantillonné : il est produit par une procédure d'échantillonnage (chap. 9) qui maintient l'amplitude au niveau de la dernière valeur prélevée entre deux échantillons.

## 2.5 AUTRES CLASSES IMPORTANTES

### 2.5.1 Classification spectrale. Définitions

L'analyse spectrale d'un signal conduit à une classification basée sur la distribution  $\Phi_x(f)$  de son énergie ou de sa puissance en fonction de la fréquence (spectre).

La *largeur de bande*  $B$  d'un signal est le domaine principal des fréquences (positives ou négatives) occupé par son spectre. Elle est définie par la relation

$$B = f_2 - f_1 \quad (2.15)$$

avec  $0 \leq f_1 < f_2$ , où  $f_1$  et  $f_2$  sont des fréquences caractéristiques dénotant respectivement les limites inférieure et supérieure prises en compte. On parle ainsi couramment de

- signaux de basses fréquences (fig. 2.10) ;
- signaux de hautes fréquences (fig. 2.11) ;
- signaux à bande étroite (fig. 2.12) ;
- signaux à large bande (fig. 2.13).

Ces dénominations sont imprécises et dépendent du contexte (voir aussi § 8.2.23).

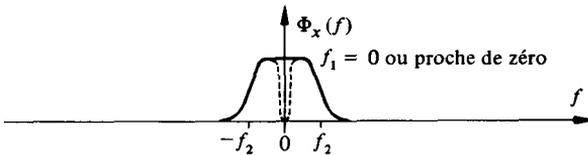


Fig. 2.10

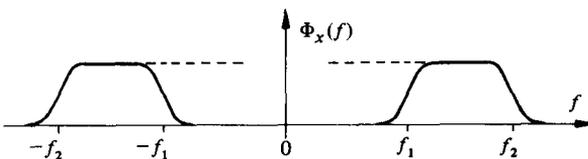


Fig. 2.11

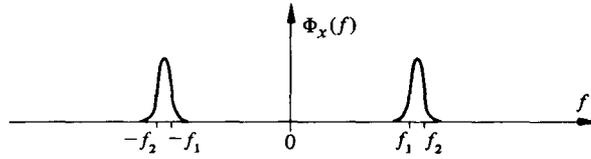


Fig. 2.12

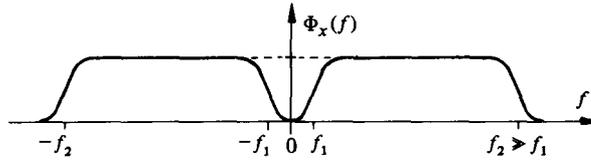


Fig. 2.13

Un signal dont le spectre est nul en dehors d'une bande de fréquence spécifiée  $B$

$$\Phi_x(f) = 0 \quad \forall |f| \notin B \quad (2.16)$$

est appelé *signal à bande limitée* ou *de spectre à support borné*.

### 2.5.2 Signaux de durée finie. Définition

Les signaux dont l'amplitude s'annule en dehors d'un intervalle de temps  $T$  prescrit

$$x(t) = 0 \quad t \notin T \quad (2.17)$$

sont appelés *signaux de durée limitée* ou *à support borné*.

### 2.5.3 Signaux bornés en amplitude

C'est le cas de tous les signaux physiquement réalisables pour lesquels l'amplitude ne peut pas dépasser certaine valeur limite, souvent imposée par des dispositifs électroniques de traitement.

On a dans ce cas :

$$|x(t)| \leq K \quad \text{pour } -\infty < t < \infty \quad (2.18)$$

### 2.5.4 Signaux pairs et impairs

Un signal est pair si

$$x(t) = x(-t) \quad (2.19)$$

Un signal est impair si

$$x(t) = -x(-t) \quad (2.20)$$

### 2.5.5 Application

Tout signal réel peut être décomposé en une partie paire et une partie impaire (fig. 2.14)

$$x(t) = x_p(t) + x_i(t) \quad (2.21)$$

avec

$$x_p(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] \quad (2.22)$$

$$x_i(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)] \quad (2.23)$$

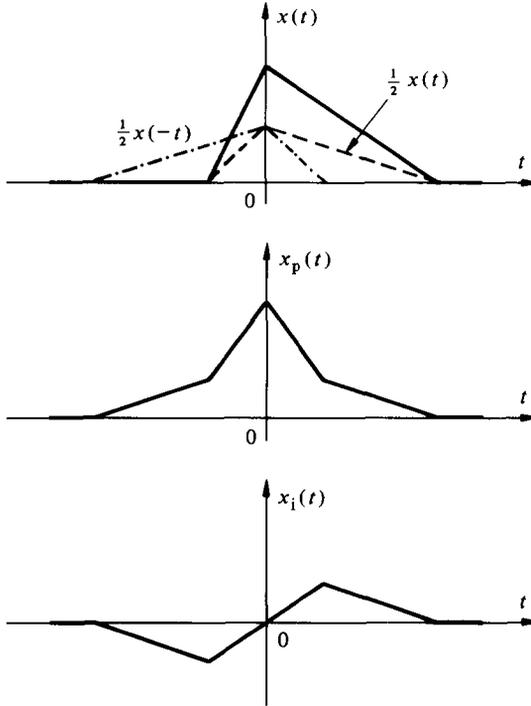


Fig. 2.14

### 2.5.6 Signaux causals

Un signal est dit causal s'il est nul pour toute valeur négative du temps

$$x(t) \equiv 0 \quad t < 0 \quad (2.24)$$

En tenant compte de (2.21), on voit qu'un signal réel causal est tel que (fig. 2.15)

$$x_i(t) = x_p(t) \cdot \text{sgn}(t) \quad (2.25)$$

### 2.5.7 Commentaire

Expérimentalement, tous les signaux sont causals, c'est-à-dire commencent en un instant  $t = 0$ . C'est par commodité théorique que l'on définit généralement les signaux sur la totalité de l'axe des temps.

Le principe de causalité a déjà été traité dans le volume IV, où il est associé au caractère physiquement réalisable d'un système linéaire : la réponse impulsionnelle d'un tel système est une fonction causale.

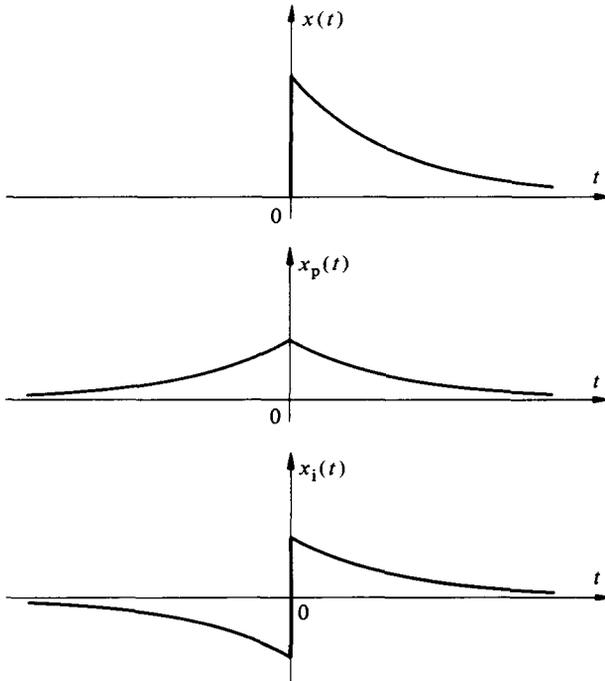


Fig. 2.15

## 2.6 EXERCICES

2.6.1 Les signaux suivants sont-ils à énergie finie, à puissance moyenne finie, ou ni l'un, ni l'autre? Calculer dans chaque cas l'énergie totale et la puissance moyenne totale ( $a > 0$ ).

$$A \operatorname{rect}(t/T); A \sin \omega t; A \sin \omega t \cdot \epsilon(t); \epsilon(t); t \cdot \epsilon(t); A \exp(-at) \cdot \epsilon(t); A \exp(-at); A \operatorname{tri}(t/T).$$

2.6.2 Etablir l'équation de la puissance moyenne du signal  $A \sin(2\pi t/T_0)$  en fonction de l'intervalle de mesure  $T$  et démontrer que la puissance moyenne totale obtenue par la formule (2.12) est identique à celle calculée sur une période  $T_0$ . Pour quelle autre valeur de l'intervalle de mesure obtient-on le même résultat ?

2.6.3 Déterminer les parties paire et impaire du signal  $x(t) = A \sin(\omega t - \alpha)$ .

2.6.4 Démontrer que la valeur moyenne de la partie impaire d'un signal réel est toujours nulle.

## REPRÉSENTATION VECTORIELLE DES SIGNAUX

### 3.1 ESPACE DE SIGNAUX

#### 3.1.1 Représentation discrète des signaux

Le principe d'une représentation discrète d'un signal  $x(t)$  est basé sur le développement de celui-ci en une combinaison linéaire de fonctions connues  $\psi_k(t); k = 1, 2, \dots, n$  :

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k(t) \quad (3.1)$$

Les  $n$  coefficients  $\alpha_k$  constituent une *représentation discrète* du signal qui dépend de l'ensemble des fonctions  $\psi_k(t)$  choisies. Ceci constitue le fondement de l'analyse des signaux.

L'intérêt d'un tel mode de description est triple :

- un choix adéquat des fonctions  $\psi_k(t)$  peut favoriser la mise en évidence de propriétés particulières du signal et faciliter l'étude des transformations qu'il subit au cours de sa propagation dans un système physique donné, en particulier lorsque celui-ci est linéaire;
- à la représentation discrète est tout naturellement associée l'image d'un vecteur dans un espace de dimension  $n$  (éventuellement infinie), ce qui permet d'interpréter géométriquement des notions assez difficiles à visualiser autrement telles que celles de distance, de produit scalaire, d'orthogonalisation, d'intercorrélacion de deux signaux, etc;
- la représentation discrète est le seul moyen d'aborder le traitement d'un signal par voie numérique (vol. XX).

#### 3.1.2 Notion d'espace vectoriel de fonctions. Définitions

On sait qu'un *espace vectoriel* est un ensemble d'éléments satisfaisant aux propriétés suivantes : la somme de deux éléments et le produit d'un élément par un scalaire (réel ou complexe) sont également des éléments de l'ensemble. Un espace vectoriel linéaire de dimension  $n$  est généré par une *base* formée de  $n$  vecteurs linéairement indépendants : tout vecteur  $x$  de l'espace correspond ainsi à une unique combinaison linéaire des vecteurs de la base. Il existe une infinité de bases possibles.

Un espace vectoriel est *normé* si à tout vecteur  $x$  est associée une *norme*, notée  $\|x\|$ , nombre réel, positif, nul si  $x$  est l'origine, qui est une généralisation de la notion

de longueur. L'espace est dit *métrique* si à tout couple d'éléments  $(x, y)$  est associé un nombre  $d(x, y)$ , réel, positif, nul si  $x = y$ , que l'on appelle la *distance* de ces éléments. La métrique usuelle est :  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

Une suite infinie  $\{x_n\}$  d'éléments d'un espace métrique *converge* vers un élément  $x$  de cet espace si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

Les diverses métriques possibles correspondent donc à divers modes de convergence. Un espace dans lequel toute suite converge est dit *complet*.

Ces concepts abstraits, introduits en algèbre linéaire [58], peuvent être étendus au cas de fonctions appartenant à une famille donnée. Tout membre de cette famille, assimilable à un vecteur, peut être exprimé comme une combinaison linéaire de fonctions particulières de la famille qui forment une base de l'espace vectoriel (*espace fonctionnel*) envisagé. Cette base peut comporter une infinité d'éléments : l'espace est alors de dimension infinie.

### 3.1.3 Représentation d'un signal par un vecteur. Définitions

Un signal est représenté usuellement par une fonction appartenant à une famille de fonctions ayant une propriété commune (p. ex. : énergie finie, puissance moyenne finie, etc.). Il est donc possible de se représenter abstraitement un signal  $x(t)$  comme un *vecteur* dans un espace métrique adéquat auquel on donne le nom d'*espace de signaux* [49].

Soit un ensemble  $\{\psi_k(t)\}$  de  $n$  fonctions linéairement indépendantes formant une base de l'espace des signaux : tout membre de celui-ci correspond à une combinaison linéaire unique, du type (3.1), des fonctions  $\psi_k(t)$ .

La séquence ordonnée des coefficients  $\{\alpha_k\}$  forme un  $n$ -uplet qui définit dans l'espace de dimension  $n$  un point (fig. 3.1) de coordonnées  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  par rapport à la base  $\{\psi_k(t)\}$ .

Il existe ainsi une correspondance biunivoque entre des vecteurs de l'espace arbitraire des signaux et l'espace des  $n$ -uplets, souvent dénoté par  $\mathbb{R}^n$  (coefficients réels) ou  $\mathbb{C}^n$  (coefficients complexes).

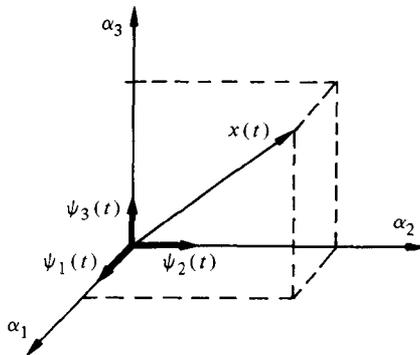


Fig. 3.1 Représentation vectorielle d'un signal (ici pour  $n = 3$ ).

On dit que le  $n$ -uple  $a = \{\alpha_k\}$  est une *représentation* (dans  $\mathbb{R}^n$  ou  $\mathbb{C}^n$ ) de  $x(t)$  par rapport à la base  $\{\psi_k(t)\}$ .

A chaque base correspond une représentation vectorielle  $a$  particulière de  $x(t)$ . On dispose ainsi de différents modes d'analyse d'un signal. Du choix d'une base dépend la simplicité, l'efficacité et l'utilité d'une telle analyse.

### 3.1.4 Distance de deux signaux. Définitions

La *distance*  $d(x, y)$  de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  est une mesure de leur dissemblance. Elle est nulle si les signaux sont identiques.

Cette notion joue un rôle important en théorie du signal où elle est utilisée pour comparer des signaux. En détection de signaux, en reconnaissance de formes, on calcule les distances d'un signal ou d'une forme à identifier avec un ensemble de candidats possibles. Le candidat préféré est généralement celui qui correspond à la plus petite distance (principe du maximum de vraisemblance [20, 59]).

Un *filtre* est un dispositif qui tente de minimiser une certaine distance  $d(x, y)$  entre un signal incident  $x(t)$ , entaché de composantes ou de perturbations indésirables et un signal de sortie  $y(t)$  ayant des propriétés désirées.

Pour des vecteurs  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  la distance euclidienne classique est

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

La *distance euclidienne de deux signaux*  $x(t)$  et  $y(t)$ , définie sur un intervalle de temps  $T$ , est par analogie

$$d_1(x, y) = \left( K \int_T |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (3.3)$$

On l'appelle aussi *distance en moyenne quadratique*. Le coefficient  $K$  est soit égal à 1, soit égal à  $1/T$ . La définition (3.3) est la plus familière et la plus utile des mesures de distance. Toutefois d'autres définitions sont parfois utilisées, soit parce qu'elles sont mieux adaptées à un contexte donné, soit tout simplement parce qu'elles impliquent une plus grande facilité de calcul. Mentionnons à titre d'exemples :

$$d_2(x, y) = K \int_T |x(t) - y(t)| dt \quad (3.4)$$

$$d_3(x, y) = K \int_T |\operatorname{sgn} \{x(t) - a\} - \operatorname{sgn} \{y(t) - b\}| dt \quad (3.5)$$

$$d_4(x, y) = \sup \{ |x(t) - y(t)| ; t \in T \} \quad (3.6)$$

Dans l'expression (3.5),  $a$  et  $b$  sont des constantes, souvent choisies égales à la valeur moyenne du signal correspondant dans l'intervalle de définition. La notation  $\sup \{z(t); t \in T\}$  de la relation (3.6) désigne la valeur maximum de  $z(t)$  dans l'intervalle de définition  $T$ .

Pour protéger des signaux transportant des séquences d'information binaire

(mots) contre l'effet de perturbations présentes sur la voie de transmission, on a développé des codes détecteurs ou correcteurs d'erreurs. Dans l'étude de tels codes, on utilise la *distance de Hamming* [59]

$$d_5(x, y) = \sum_{i=1}^n [c_i \oplus c'_i] \quad (3.7)$$

pour comparer un mot reçu  $C' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_n)$  à un candidat possible  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ . Les  $c_i$  et  $c'_i$  dénotent ici des symboles binaires 0 ou 1 et le signe  $\oplus$  l'addition modulo-2 (fonction Ou-exclusif; § V.1.6.1). Cette distance particulière est égale au nombre de symboles par lesquels les deux mots diffèrent.

Pour illustrer le concept de distance entre deux signaux et montrer l'influence de la forme de ceux-ci, il est bon de considérer quelques exemples.

### 3.1.5 Exemple

Soit le problème suivant : on désire comparer deux signaux  $x(t) = A \cos \omega_0 t$  et  $y(t) = x(t - \tau) = A \cos \omega_0 (t - \tau)$  afin de déterminer leur distance en fonction du paramètre de retard  $\tau$  (ou du déphasage  $\theta = \omega_0 \tau$ ). Une telle situation peut se présenter, par exemple, dans des problèmes de synchronisation (sect. 13.2).

Effectuons la comparaison sur une période  $T = 2\pi/\omega_0$  pour  $-T/2 \leq \tau \leq T/2$  en considérant simultanément les distances (3.3), (3.4), (3.5) et (3.6) avec ici  $a = b = 0$  et  $K = 1/T$ .

On a :

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= A |\cos(2\pi t/T) - \cos[2\pi(t - \tau)/T]| \\ &= 2A |\sin(\pi\tau/T)| \cdot |\sin[\pi(2t - \tau)/T]| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= 2A |\sin(\pi\tau/T)| \cdot \left\{ T^{-1} \int_0^T \sin^2[\pi(2t - \tau)/T] dt \right\}^{1/2} \\ &= \sqrt{2} A |\sin(\pi\tau/T)| \end{aligned}$$

$$d_2(x, y) = 2A |\sin(\pi\tau/T)| \cdot \frac{1}{T} \int_0^T |\sin[\pi(2t - \tau)/T]| dt = \frac{4}{\pi} A |\sin(\pi\tau/T)|$$

$$d_3(x, y) = 4T^{-1} \int_0^{|\tau|} dt = 4|\tau|/T \quad -T/2 \leq \tau \leq T/2$$

$$\begin{aligned} d_4(x, y) &= 2A |\sin(\pi\tau/T)| \cdot \sup \{ |\sin[\pi(2t - \tau)/T]|; t \in T \} \\ &= 2A |\sin(\pi\tau/T)| \end{aligned}$$

Le fait de choisir le coefficient  $K = 1/T$  dans les expressions (3.3), (3.4) et (3.5) homogénéise les différentes mesures de distance utilisées en ce sens qu'elles ont ici toutes la même dimension que les signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ . On peut dès lors valablement les comparer. C'est ce qui est fait graphiquement sur la figure 3.2.

### 3.1.6 Exemple

Considérons les quatre signaux impulsionnels, de durée finie  $T$ , représentés sur la figure 3.3. Les distances  $d_1(x_i, x_j)$  et  $d_2(x_i, x_j)$ , calculées ici avec  $K = 1/T$ , donnent

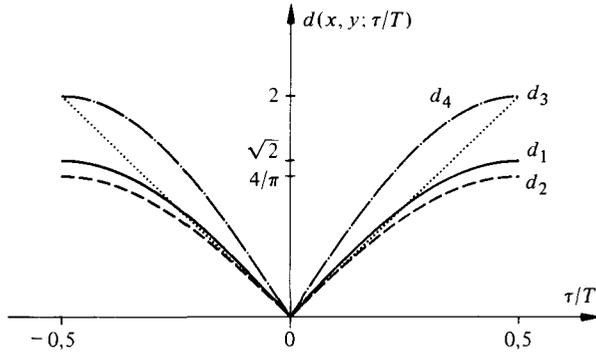


Fig. 3.2

respectivement :

$$\begin{aligned}
 d_1(x_1, x_2) &= d_1(x_1, x_3) = d_1(x_1, x_4) = d_1(x_2, x_4) = d_1(x_3, x_4) = \sqrt{2} \\
 d_1(x_2, x_3) &= 2 \\
 d_2(x_1, x_2) &= d_2(x_1, x_3) = d_2(x_1, x_4) = d_2(x_2, x_4) = d_2(x_3, x_4) = 1 \\
 d_2(x_2, x_3) &= 2
 \end{aligned}$$

Bien entendu, on a pour tout  $i$  :

$$d_1(x_i, x_i) = d_2(x_i, x_i) = 0$$

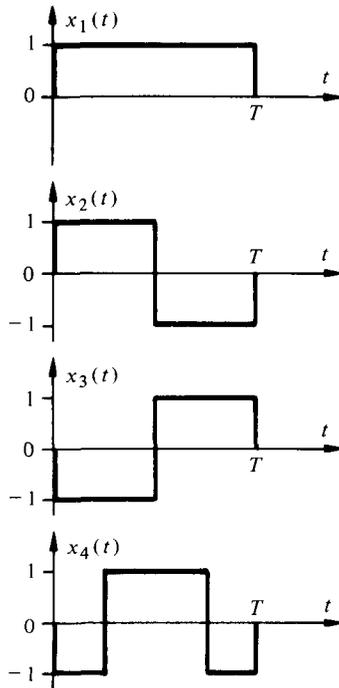


Fig. 3.3

### 3.1.7 Exemple

Soit à déterminer les distances  $d_1(x, y)$  et  $d_2(x, y)$  entre les deux signaux  $x(t) = \exp(-at) \cdot \epsilon(t)$  et  $y(t) = x(t - \tau)$  où  $\epsilon(t)$  dénote la fonction échelon-unité (§ 1.3.3) et  $a > 0$ . L'intervalle de définition est ici infini. On utilisera les mesures de distance (3.3) et (3.4) en posant  $K = 1$ . Les mesures ainsi obtenues ne sont pas homogènes et ne peuvent donc pas être comparées quantitativement.

Pour  $\tau > 0$ , on a :

$$|x(t) - y(t)| = \begin{cases} \exp(-at) \cdot \epsilon(t) & -\infty \leq t \leq \tau \\ \exp(-at) \cdot [\exp(a\tau) - 1] & \tau \leq t \leq \infty \end{cases}$$

Pour  $\tau < 0$ , on a :

$$|x(t) - y(t)| = \begin{cases} \exp(-at) \cdot \epsilon(t - \tau) \cdot \exp(a\tau) & -\infty < t < 0 \\ \exp(-at) \cdot [1 - \exp(a\tau)] & 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Ainsi

$$d_1(x, y) = \left\{ \frac{1}{a} [1 - \exp(-a|\tau|)] \right\}^{1/2}$$

et

$$d_2(x, y) = \frac{2}{a} [1 - \exp(-a|\tau|)]$$

### 3.1.8 Espace $L^2$ des signaux à énergie finie

L'ensemble de tous les signaux (fonctions réelles ou complexes du temps définies sur un intervalle  $[t_1, t_2]$ ) de carré intégrable (§ 2.3.3) forment un espace fonctionnel, dénoté  $L^2(t_1, t_2)$ , dont la norme est

$$\|x\| = \left[ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

Le carré de la norme correspond donc à l'énergie du signal  $x(t)$ .

La distance de deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  appartenant à  $L^2(t_1, t_2)$  est la distance euclidienne (3.3), avec ici  $K = 1$  :

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left[ \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - y(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.9)$$

Dans  $L^2$ , un signal  $y(t)$  converge vers  $x(t)$  *en moyenne quadratique* lorsque leur distance  $d(x, y)$  tend vers zéro. L'exposant 2 apparaissant dans la notation symbolique de l'espace fonctionnel considéré n'est pas une indication de sa dimension, mais du critère de convergence utilisé.

L'origine de cet espace est le signal qui est nul presque partout, c'est-à-dire exception faite d'un éventuel nombre limité de discontinuités finies (points isolés).

### 3.1.9 Produit scalaire de signaux. Définitions

Le *produit scalaire de deux vecteurs*  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  à coordonnées réelles ou complexes est défini par la relation

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \quad (3.10)$$

Il est lié à la norme par l'identité

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \quad (3.11)$$

Par analogie, on définit le *produit scalaire de deux signaux* — fonctions réelles ou complexes du temps —  $x(t)$  et  $y(t)$  appartenant à  $L^2(t_1, t_2)$  par

$$\langle x, y^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt \quad (3.12)$$

qui est lié à la norme (3.8) par l'identité

$$\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 \quad (3.13)$$

On démontre que l'espace  $L^2(t_1, t_2)$  doté d'un produit scalaire induisant une norme est complet. On donne en mathématique à ce type d'espace le nom d'*espace de Hilbert*.

Le produit scalaire possède la *symétrie hermitienne*

$$\langle x, y^* \rangle = \langle y, x^* \rangle^* \quad (3.14)$$

#### 3.1.10 Commentaire

La notation fonctionnelle  $\langle x, y^* \rangle$  utilisée dans cet ouvrage, où l'astérisque indique le conjugué complexe, est cohérente avec celle introduite au volume IV en relation avec le concept de distribution (§ IV.7.1.13). Dans la plupart des ouvrages de référence, le produit scalaire est plus simplement dénoté par  $\langle x, y \rangle$  ou  $(x, y)$ . La notation  $\langle x, y \rangle$  sera ici réservée au cas de signaux réels.

#### 3.1.11 Définition : fonctions orthogonales

En géométrie euclidienne, deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. Par analogie,  $x(t)$  et  $y(t)$  sont des *fonctions orthogonales* sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$  si leur produit scalaire

$$\langle x, y^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt = 0 \quad (3.15)$$

La spécification de l'intervalle  $[t_1, t_2]$  est importante. Deux fonctions orthogonales sur  $[t_1, t_2]$  ne le sont pas nécessairement sur tout autre intervalle  $[t_3, t_4]$ .

#### 3.1.12 Exemple

Les quatre signaux de la figure 3.3 sont orthogonaux deux à deux sur l'intervalle  $[0, T]$ , sauf pour la paire  $x_2(t), x_3(t)$  dont le produit scalaire vaut  $\langle x_2, x_3^* \rangle = -T$ .

### 3.1.13 Relation entre produit scalaire et distance euclidienne

La notion de produit scalaire est, comme celle de distance, importante en théorie du signal. Ces concepts sont d'ailleurs liés. En effet, dans  $L^2(t_1, t_2)$  on a par (3.9), (3.12), (3.13) et (3.14) :

$$\begin{aligned} d^2(x, y) &= \int_{t_1}^{t_2} [x(t) - y(t)][x^*(t) - y^*(t)] dt \\ &= \langle x, x^* \rangle + \langle y, y^* \rangle - \langle x, y^* \rangle - \langle x, y^* \rangle^* \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y^* \rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

Pour deux fonctions orthogonales, on obtient en tenant compte de (3.15) la formulation générale du théorème de Pythagore :

$$d^2(x, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (3.17)$$

Le produit scalaire est également directement lié à la notion de corrélation (§ 4.2.10) qui est aussi utilisée comme moyen de comparaison de deux signaux (sect. 13.2).

### 3.1.14 Définition : inégalité de Schwarz

Considérons les fonctions  $x(t)$  et  $ky(t)$  appartenant à  $L^2(t_1, t_2)$ , où  $k$  est une constante réelle ou complexe arbitraire. Par définition, la distance  $d(x, ky)$  est positive ou nulle. Par un développement semblable à (3.16), on a :

$$\begin{aligned} d^2(x, ky) &= \langle x, x^* \rangle + |k|^2 \langle y, y^* \rangle - k^* \langle x, y^* \rangle - k \langle x, y^* \rangle^* \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cette relation est en particulier satisfaite pour  $k = \langle x, y^* \rangle / \langle y, y^* \rangle$ , ce qui donne en remplaçant dans (3.18) :

$$\langle x, x^* \rangle - \frac{|\langle x, y^* \rangle|^2}{\langle y, y^* \rangle} \geq 0 \quad (3.19)$$

d'où l'on tire l'inégalité de Schwarz :

$$|\langle x, y^* \rangle|^2 \leq \langle x, x^* \rangle \cdot \langle y, y^* \rangle \quad (3.20)$$

En tenant compte de (3.8), (3.12) et (3.13), cette inégalité peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt \quad (3.21)$$

L'égalité n'est atteinte que pour  $d(x, ky) = 0$ , c'est-à-dire lorsque

$$x(t) = ky(t) \quad (3.22)$$

L'inégalité de Schwarz est souvent invoquée pour résoudre certains problèmes d'optimisation ou déterminer des bornes (voir chap. 4, 7 ou 13).

### 3.2 APPROXIMATION AU SENS DES MOINDRES CARRÉS

#### 3.2.1 Approximation optimale d'un signal dans $L^2$ . Définitions

Considérons un signal  $x(t)$  appartenant à l'espace  $L^2$  de dimension  $n$  et un ensemble  $\{\psi_k(t)\}$  de  $m < n$  fonctions, linéairement indépendantes dans  $L^2$ , formant une base d'un sous-espace  $E_m$  de  $L^2$ .

On peut définir dans  $E_m$  une approximation d'ordre  $m$ ,  $\tilde{x}(t)$ , du signal  $x(t)$  par la combinaison linéaire

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k(t) \quad (3.23)$$

La différence

$$e(t) = x(t) - \tilde{x}(t) \quad (3.24)$$

est un signal d'erreur d'approximation dont la norme est, par (3.9) égale à la distance  $d(x, \tilde{x})$  :

$$\|e\| = d(x, \tilde{x}) \quad (3.25)$$

Le carré de la norme  $\|e\|$  est appelé *erreur quadratique moyenne*. L'approximation  $\tilde{x}(t)$  de  $x(t)$  est *optimale au sens des moindres carrés* si les coefficients  $\alpha_k$  sont choisis de manière à rendre la distance  $d(x, \tilde{x})$  minimale.

Si  $x(t) \in E_m$ ,  $d(x, \tilde{x}) = 0$  et  $\tilde{x}(t) \equiv x(t)$ .

#### 3.2.2 Théorème de la projection

La distance  $d(x, \tilde{x})$  entre une fonction  $x(t)$  et son approximation (3.23) est minimum si l'erreur d'approximation  $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$  est orthogonale aux fonctions  $\psi_k(t)$ , c'est-à-dire si

$$\langle e, \psi_k^* \rangle = 0 \quad \forall k \quad (3.26)$$

Ce théorème est la généralisation du fait, constaté en géométrie euclidienne, que la plus courte distance d'un point à un plan est la longueur de la perpendiculaire abaissée du point au plan.

#### 3.2.3 Démonstration

Soit  $\tilde{x}(t) = \sum \alpha_k \psi_k(t)$  une approximation d'ordre  $m$  de  $x(t)$  telle que l'erreur  $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$  satisfasse la condition d'orthogonalité (3.26). Considérons une autre approximation arbitraire de même ordre  $\hat{x}(t) = \sum \beta_k \psi_k(t)$  de  $x(t)$ . On peut écrire en tenant compte de (3.16) :

$$\begin{aligned} d^2(x, \hat{x}) &= d^2(x - \tilde{x}, \hat{x} - \tilde{x}) \\ &= \|x - \tilde{x}\|^2 + \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x - \tilde{x}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

Or  $\langle x - \tilde{x}, \hat{x} - \tilde{x} \rangle = 0$  puisque  $\hat{x}(t) - \tilde{x}(t) = \sum (\beta_k - \alpha_k) \psi_k(t)$  et que  $\langle x - \tilde{x}, \psi_k^* \rangle = 0$  pour tout  $k$ . La relation (3.27) se réduit donc à  $d^2(x, \hat{x}) = \|x - \tilde{x}\|^2 + \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2$  qui est clairement minimale si  $\hat{x}(t) = \tilde{x}(t)$ .

### 3.2.4 Erreur quadratique moyenne optimale

Si la condition (3.26) est satisfaite

$$\langle x, \tilde{x}^* \rangle = \langle \tilde{x}, \tilde{x}^* \rangle = \|\tilde{x}\|^2 \quad (3.28)$$

car  $\langle x, \tilde{x}^* \rangle = \langle \tilde{x} + e, \tilde{x}^* \rangle$  et  $\langle e, \tilde{x}^* \rangle = 0$ .

L'erreur quadratique moyenne optimale est donc exprimée, en tenant compte de (3.16), (3.25) et (3.28) par

$$\|e\|^2 = d^2(x, \tilde{x}) = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 \quad (3.29)$$

ou, en d'autres termes, par (3.8), (3.13) et (3.23)

$$\begin{aligned} \|e\|^2 &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - \tilde{x}(t)|^2 dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \alpha_k \alpha_l^* \langle \psi_k, \psi_l^* \rangle \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.2.5 Détermination des coefficients $\alpha_k$

Si la condition (3.26) est satisfaite, on obtient par analogie avec (3.28)

$$\langle x, \psi_l^* \rangle = \langle \tilde{x}, \psi_l^* \rangle \quad (3.31)$$

Le remplacement de  $\tilde{x}(t)$  par le développement (3.23) conduit à un ensemble de  $m$  équations

$$\sum_{k=1}^m \langle \psi_k, \psi_l^* \rangle \alpha_k = \langle x, \psi_l^* \rangle \quad ; \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (3.32)$$

dont la solution est l'ensemble de coefficients optimums  $\{\alpha_k\}$ .

En notation matricielle, le système d'équation (3.32) s'écrit simplement

$$\Lambda \cdot a = \Gamma \quad (3.33)$$

où  $\Lambda$  est la matrice  $m \times m$  des produits scalaires des fonctions de base

$$\lambda_{kl} = \langle \psi_k, \psi_l^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \psi_k(t) \psi_l^*(t) dt \quad (3.34)$$

et  $\Gamma$  est le vecteur colonne des produits scalaires (projections) du signal avec les différentes fonctions de base

$$\gamma_l = \langle x, \psi_l^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \psi_l^*(t) dt \quad (3.35)$$

Le vecteur  $a$  des coefficients  $\alpha_k$  satisfaisant (3.26) est ainsi donné par la relation matricielle

$$a = \Lambda^{-1} \cdot \Gamma \quad (3.36)$$

On peut observer par (3.34) que la matrice  $\Lambda$  est diagonale si les fonctions de base sont orthogonales.

### 3.2.6 Exemple

Considérons l'approximation d'une impulsion rectangulaire  $x(t) = \text{rect}(t - \frac{1}{2})$  par une combinaison linéaire de  $m = 3$  fonctions exponentielles décroissantes  $\psi_k(t) = \exp[-kt]$ , avec  $k = 1$  à  $3$ , définies sur l'intervalle  $[0, \infty]$ .

On a ici (le premier résultat montre, en particulier, que ces fonctions ne sont pas orthogonales) :

$$\lambda_{kl} = \langle \psi_k, \psi_l^* \rangle = \int_0^{\infty} \exp[-(k+l)t] dt = \frac{1}{k+l} \quad k, l = 1, 2, 3$$

et

$$\begin{aligned} \gamma_l &= \langle x, \psi_l^* \rangle = \int_0^{\infty} x(t) \exp(-lt) dt = \int_0^1 \exp(-lt) dt \\ &= \frac{1}{l} [1 - \exp(-l)] \end{aligned}$$

On en tire les matrices

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

et

$$\Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 72 & -240 & 180 \\ -240 & 900 & -720 \\ 180 & -720 & 600 \end{bmatrix}$$

et

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0,63212 \\ 0,43233 \\ 0,31674 \end{bmatrix}$$

D'où la solution

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \Lambda^{-1} \cdot \Gamma = \begin{bmatrix} -1,234 \\ 9,338 \\ -7,454 \end{bmatrix}$$

Ainsi, la meilleure approximation de  $x(t) = \text{rect}(t - \frac{1}{2})$  sur l'intervalle  $0 < t < \infty$  à l'aide d'une combinaison linéaire de fonctions  $\psi_k(t) = \exp[-kt]$  est (fig. 3.4)

$$\tilde{x}(t) = -1,234 \cdot \exp(-t) + 9,338 \cdot \exp(-2t) - 7,454 \cdot \exp(-3t)$$

La valeur quadratique moyenne de l'erreur d'approximation vaut dans ce cas, par (3.30)

$$\|e\|^2 = 1 - 0,896 = 0,104$$

### 3.2.7 Qualité de l'approximation

L'erreur quadratique moyenne  $\|e\|^2$  est une mesure absolue de l'imperfection de l'approximation d'ordre  $m$  obtenue. Il est en général préférable d'exprimer la qualité

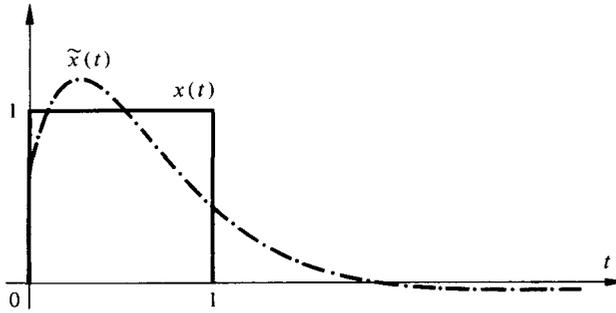


Fig. 3.4

de cette approximation en *valeur relative*. Celle-ci est obtenue en faisant le rapport

$$\xi = \frac{\|x\|^2}{\|e\|^2} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2} = \frac{1}{1 - \|\tilde{x}\|^2/\|x\|^2} \quad (3.37)$$

où

$$\|x\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad (3.38)$$

est l'énergie du signal et

$$\|\tilde{x}\|^2 = \sum_k \sum_l \alpha_k \alpha_l^* \langle \psi_k, \psi_l^* \rangle \quad (3.39)$$

est l'énergie de l'approximation.

Le rapport (3.37) est une sorte de *rapport signal-sur-bruit* (d'approximation) dont on verra d'autres exemples par la suite. Il est commode de le chiffrer en décibel en utilisant la relation (1.2)

$$\xi_{dB} = 10 \log_{10} \xi \quad \text{dB} \quad (3.40)$$

### 3.2.8 Exemple

La qualité de l'approximation d'un signal rectangulaire réalisée dans l'exemple 3.2.6 à l'aide d'une combinaison linéaire de trois fonctions exponentielles définies sur l'intervalle  $[0, \infty]$  est caractérisée par les valeurs

$$\xi = 1/0,104 = 9,62 \text{ ou } \xi_{dB} = 10 \log 9,62 = 9,8 \text{ dB}$$

## 3.3 DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FONCTIONS ORTHOGONALES

### 3.3.1 Conditions d'indépendance des coefficients

Le système d'équation (3.32) se simplifie considérablement si les fonctions  $\psi_k(t)$  forment une base orthogonale sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$ , c'est-à-dire si leurs produits scalaires (3.12) satisfont à la condition (3.15) :

$$\lambda_{kl} = \langle \psi_k, \psi_l^* \rangle = 0 \quad \forall k \neq l \quad (3.41)$$

On obtient alors un *développement en série de fonctions orthogonales*

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k(t) \quad (3.42)$$

dont les coefficients sont *indépendants* et déterminés par l'équation générale (avec  $\lambda_{kk} = \lambda_k$ )

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k} \langle x, \psi_k^* \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \psi_k^*(t) dt \quad (3.43)$$

où

$$\lambda_k = \langle \psi_k, \psi_k^* \rangle = \|\psi_k\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |\psi_k(t)|^2 dt \quad (3.44)$$

est un *scalaire réel*.

### 3.3.2 Définition : fonctions orthonormales

Les fonctions  $\psi_k(t)$  sont dites *orthonormales* si

$$\lambda_k = 1 \quad \forall k \quad (3.45)$$

La normalisation peut toujours être obtenue, lorsque  $\lambda_k \neq 1$ , en introduisant l'ensemble des fonctions pondérées

$$\Upsilon_k(t) = \frac{\psi_k(t)}{\|\psi_k\|} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \psi_k(t) \quad (3.46)$$

### 3.3.3 Erreur d'approximation

Une approximation d'ordre  $m$  d'un signal  $x(t)$  par un développement en série de fonctions orthogonales (3.42) entraîne une erreur dont la valeur quadratique moyenne se réduit, en introduisant (3.41) dans (3.30), à

$$\|e\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=1}^m |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k \quad (3.47)$$

Puisque  $\|e\| > 0$ , il en résulte l'inégalité

$$\sum_{k=1}^m |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \|x\|^2 \quad \forall m \quad (3.48)$$

### 3.3.4 Identité de Parseval

Comme  $\lambda_k = \|\psi_k\|^2$  est toujours positif, on déduit de la relation (3.48) qu'il suffit de faire croître  $m$ , au besoin jusqu'à l'infini, pour que l'erreur quadratique moyenne — respectivement la distance  $d(x, \tilde{x})$  — s'annule. L'approximation  $\tilde{x}(t)$  converge donc vers  $x(t)$  en moyenne quadratique. A la limite, la relation (3.48) conduit à l'iden-

tité de Parseval (déjà rencontrée sous d'autres formes dans le volume IV) :

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k \quad (3.49)$$

### 3.3.5 Définition : ensemble complet de fonctions orthogonales

L'ensemble des fonctions orthogonales  $\{\psi_k(t), k = 1, 2, \dots, m\}$  est un *ensemble complet* (ou *total*) s'il est possible d'approximer n'importe quelle fonction  $x(t) \in L^2$  avec une erreur quadratique moyenne qui tende vers zéro lorsque  $m$  tend vers l'infini.

### 3.3.6 Interprétation énergétique

Chaque composante  $\alpha_k \psi_k(t)$  du développement en série de fonctions orthogonales complet de  $x(t) \in L^2(t_1, t_2)$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t) \quad (3.50)$$

possède une énergie

$$\int_{t_1}^{t_2} |\alpha_k \psi_k|^2 dt = |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k \quad (3.51)$$

Le membre de gauche de l'équation (3.49) représente l'*énergie totale* du signal  $x(t)$ . Il ressort donc de l'identité de Parseval que le développement (3.50) *analyse* le signal  $x(t)$  d'une manière telle que l'énergie totale du signal soit égale à la somme des énergies des composantes.

### 3.3.7 Représentation de signaux périodiques

Tout signal périodique, de période  $T$ , à puissance moyenne finie, peut être considéré (§ 1.3.14) comme la répétition  $\text{rep}_T \{x(t, T)\}$  d'un signal  $x(t, T)$  à énergie finie sur  $T$ .

Tout ensemble de fonctions orthogonales dans l'intervalle  $[t_1, t_1 + T]$  possédant, en plus, une structure périodique de période  $T$ , est orthogonal sur tout l'intervalle  $[-\infty, \infty]$  et convient à la représentation d'un signal périodique de même période possédant une puissance moyenne finie.

Les relations (3.42), (3.43) et (3.44) s'appliquent sans autre en posant simplement  $t_2 = t_1 + T$ .

L'erreur quadratique moyenne d'approximation se déduit de (3.47) en posant à nouveau  $t_2 = t_1 + T$  et en divisant chaque terme par  $T$  : elle mesure alors la puissance moyenne et non l'énergie (dans ce cas infinie) de l'erreur :

$$P_e = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |x(t)|^2 dt - \sum_{k=1}^m |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k / T \quad (3.52)$$

L'identité de Parseval, atteinte lorsque la puissance de l'erreur est nulle (ensemble complet) prend ici la forme suivante qui exprime de deux manières équivalentes la *puissance moyenne* du signal périodique :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k. \tag{3.53}$$

**3.3.8 Analyseur et synthétiseur de signaux. Principe général**

Les relations fondamentales servant à l'analyse — ou à la synthèse — d'un signal au moyen d'un développement en série de fonctions orthogonales sont regroupées dans le tableau 3.5.

Tableau 3.5

---

Développement complet :

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t) \in L^2(t_1, t_2)$$

avec

$$\lambda_{kl} = \langle \psi_k, \psi_l^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} \psi_k(t) \psi_l^*(t) dt = 0 \quad \forall k \neq l$$

et

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \psi_k^*(t) dt$$

où

$$\lambda_k = \langle \psi_k, \psi_k^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} |\psi_k(t)|^2 dt$$

Approximation :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \psi_k(t)$$


---

La structure générale d'un analyseur de signaux s'en déduit immédiatement (fig. 3.6).

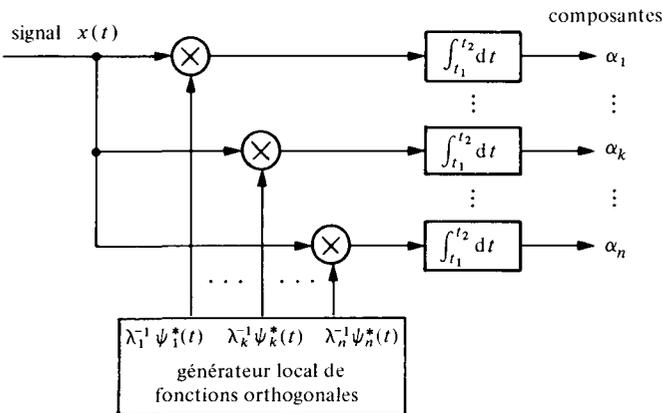


Fig. 3.6 Structure de principe d'un analyseur de signaux.

Inversément, on obtient la structure de principe d'un synthétiseur de signaux (fig. 3.7).

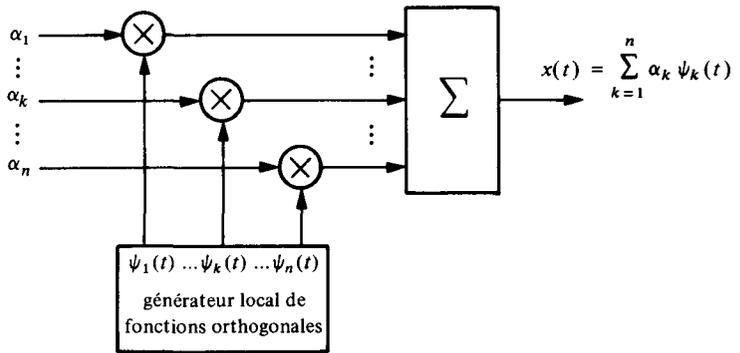


Fig. 3.7 Structure de principe d'un synthétiseur de signaux.

### □ 3.3.9 Procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

La procédure itérative suivante permet de construire une base orthonormale  $\{\psi_k(t), k = 1, 2, \dots, n\}$  à partir d'un ensemble de  $n$  fonctions linéairement indépendantes  $\{v_k(t), k = 1, 2, \dots, n\}$  appartenant à l'espace considéré :

$$\psi_k(t) = \frac{w_k(t)}{\|w_k(t)\|} \quad (3.54)$$

avec

$$w_1(t) = v_1(t) \quad (3.55)$$

et le terme général

$$w_k(t) = v_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, \psi_i^* \rangle \psi_i(t) \quad (3.56)$$

Par l'équation (3.56), la fonction (vecteur)  $w_k(t)$  est la différence entre la fonction (vecteur)  $v_k(t)$  et sa projection sur le sous-espace de dimension  $k-1$  engendré par l'ensemble des fonctions orthogonales déjà déterminées  $\{\psi_i(t), i = 1, 2, \dots, k-1\}$ . Elle est donc perpendiculaire à toutes les fonctions de cet ensemble.

Si les fonctions  $v_k(t)$  ne sont pas linéairement indépendantes, la procédure d'orthogonalisation décrite reste applicable, mais conduit à  $m < n$  fonctions orthogonales non nulles :  $m$  représente alors la *dimension* de l'espace des signaux défini par  $\{v_k(t)\}$ .

### □ 3.3.10 Exemple

Soit l'ensemble de fonctions linéairement indépendantes appartenant à  $L^2(0, \infty)$

$$v_k(t) = \exp(-kt); \quad k = 1, 2, \dots$$

En appliquant la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on obtient pour l'intervalle  $0 \leq t < \infty$  :

$$w_1(t) = v_1(t) = \exp(-t)$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{2} \exp(-t)$$

$$w_2(t) = \exp(-2t) - (2/3) \exp(-t)$$

$$\psi_2(t) = 6 \exp(-2t) - 4 \exp(-t)$$

$$w_3(t) = \exp(-3t) - (6/5) \exp(-2t) + (3/10) \exp(-t)$$

$$\psi_3(t) = \sqrt{6} [10 \exp(-3t) - 12 \exp(-2t) + 3 \exp(-t)]$$

etc.

On vérifie aisément (exercice 3.59) que les fonctions  $w_k(t)$  et  $\psi_k(t)$  sont respectivement orthogonales et orthonormales sur  $[0, \infty]$ . Les fonctions  $v_k(t)$  et  $\psi_k(t)$ , pour  $k$  allant de 1 à 3, sont représentées sur la figure 3.8.

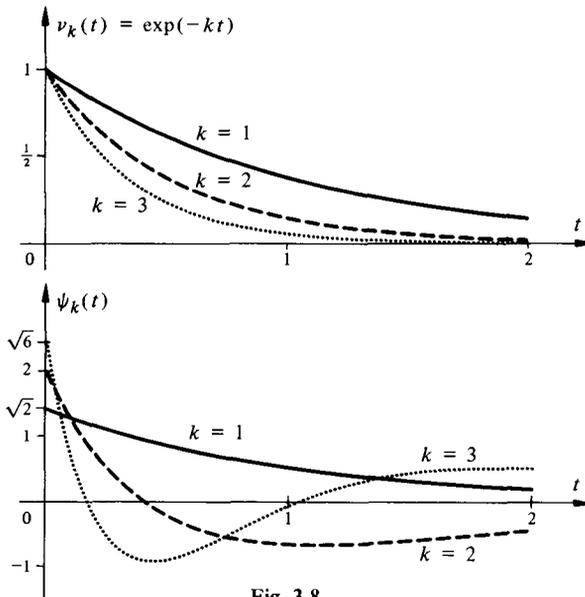


Fig. 3.8

### 3.4 PRINCIPAUX ENSEMBLES DE FONCTIONS ORTHOGONALES

#### 3.4.1 Impulsions rectangulaires décalées

Un exemple trivial de développement en série de fonctions orthogonales, valable sur l'intervalle  $-\infty < t < \infty$ , est obtenu en choisissant comme fonctions de base  $\psi_k(t)$  des impulsions rectangulaires de durée  $\Delta\tau$ , centrées en  $t = k \cdot \Delta\tau$  avec ici  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$  :

$$\psi_k(t) = \text{rect} \left( \frac{t - k \cdot \Delta\tau}{\Delta\tau} \right) \quad (3.57)$$

qui satisfait la condition d'orthogonalité (3.41). Par (3.44) on obtient  $\lambda_k = \Delta\tau$  et par (3.43) les coefficients du développement

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{\Delta\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \operatorname{rect} \left( \frac{t - k \cdot \Delta\tau}{\Delta\tau} \right) dt \\ &= \frac{1}{\Delta\tau} \int_{(k-1/2)\Delta\tau}^{(k+1/2)\Delta\tau} x(t) dt\end{aligned}\quad (3.58)$$

Les coefficients  $\alpha_k$  correspondent ainsi à la *valeur moyenne du signal* calculée sur un intervalle  $\Delta\tau$  centré en  $t = k \cdot \Delta\tau$ . En première approximation, pour  $\Delta\tau$  suffisamment petit,  $\alpha_k$  est la valeur échantillonnée du signal à l'instant  $t = k \cdot \Delta\tau$  :

$$\alpha_k \cong x(k \cdot \Delta\tau) \quad (3.59)$$

Un modèle approximatif du signal  $x(t)$  est alors obtenu en combinant les équations (3.42) et (3.59) :

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta\tau) \operatorname{rect} \left( \frac{t - k \cdot \Delta\tau}{\Delta\tau} \right) \quad (3.60)$$

Cette approximation (fig. 3.9) correspond en quelque sorte à une modulation d'impulsions en amplitude (sect. 11.4).

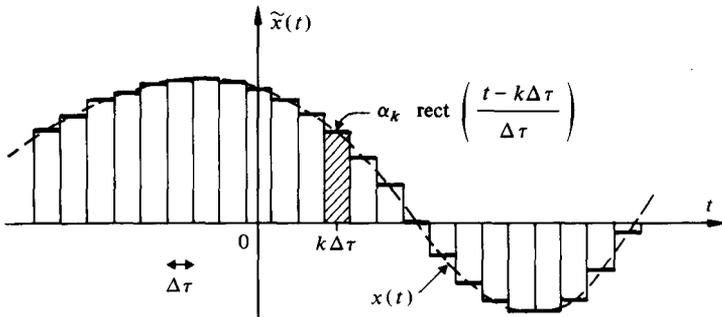


Fig. 3.9

L'ensemble des fonctions orthogonales  $\{\psi_k(t)\}$  définies par (3.57) n'est manifestement pas complet. Toutefois, la qualité de l'approximation (3.60) est d'autant meilleure que  $\Delta\tau$  est petit. A la limite, pour  $\Delta\tau \rightarrow 0$ , l'impulsion rectangulaire pondérée par  $1/\Delta\tau$  devient une impulsion de Dirac (§ 1.3.9) et on obtient la description exacte (avec  $k \cdot \Delta\tau \rightarrow \tau$ )

$$\begin{aligned}x(t) &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \tilde{x}(t) \\ &= \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k \cdot \Delta\tau) \frac{1}{\Delta\tau} \operatorname{rect} \left( \frac{t - k \cdot \Delta\tau}{\Delta\tau} \right) \Delta\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau\end{aligned}\quad (3.61)$$

On reconnaît ici l'intégrale de convolution (1.47) qui est fondamentale en théorie du signal et en théorie des systèmes linéaires en cela qu'elle permet de se représenter un signal  $x(t)$  comme une somme pondérée infinie d'impulsions de Dirac.

### 3.4.2 Fonctions de Rademacher. Définitions

Un ensemble incomplet très simple de fonctions orthogonales de type rectangulaire est constitué par les *fonctions de Rademacher* (fig. 3.10). Ce sont des fonctions binaires, à structure périodique, ne prenant que les valeurs  $+1$  ou  $-1$ .

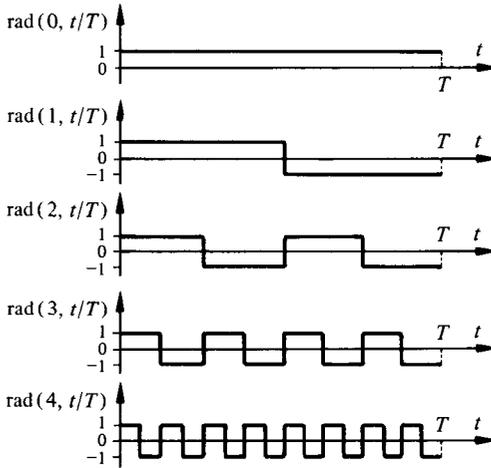


Fig. 3.10 Fonctions de Rademacher.

Une définition simple des fonctions de Rademacher, d'indice  $i$  et de période  $T$ , est donnée par

$$\text{rad}(0, t/T) = 1$$

et

$$\text{rad}(i, t/T) = \text{sgn} \{ \sin(2^i \pi t/T) \}; \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.62)$$

Le caractère incomplet de l'ensemble ainsi formé est illustré par l'exercice 3.5.12.

La fonction de Rademacher est le modèle du signal rectangulaire périodique appelé *onde carrée* par les électroniciens. Hormis la fonction d'indice zéro qui est une simple constante, toutes les autres fonctions de Rademacher correspondent à des signaux aisément générés, à partir de celui d'indice le plus élevé, à l'aide d'un système logique comprenant une cascade de diviseurs de fréquence par deux (sect. V.4.1.).

### 3.4.3 Fonctions de Walsh avec classement séquentiel. Définitions

Un ensemble complet de fonctions orthogonales binaires incluant les fonctions de Rademacher est constitué par les *fonctions de Walsh*. Ces fonctions ne prennent que les valeurs  $+1$  ou  $-1$  en changeant de signe  $k$  fois dans l'intervalle ouvert  $0 < t < T$ . Elles sont généralement considérées comme périodiques, de période  $T$ . Elles peuvent

être définies de la manière suivante [60]

$$\psi_k(t) = \text{wal}(k, t/T) = \prod_{i=0}^{r-1} \text{sgn} \left\{ \cos^{k_i} \left( 2^i \pi t/T \right) \right\} \quad (3.63)$$

où  $k_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  coefficient (égal à zéro ou un) de l'expression de  $k$  en base deux :

$$k = \sum_{i=0}^{r-1} k_i \cdot 2^i \quad (k_i = 0, 1) \quad (3.64)$$

et  $r$  est la plus petite puissance de deux supérieure à  $k$ .

Les fonctions de Rademacher et de Walsh sont liées par la relation

$$\text{rad}(i, t/T) = \text{wal}(2^i - 1, t/T) \quad (3.65)$$

Les fonctions de Walsh définies par (3.63) sont classées dans l'ordre séquentiel si elles sont ordonnées selon les valeurs croissantes de l'indice  $k$ . Le concept de *séquence* a été introduit [61] par analogie avec celui de fréquence d'une fonction sinusoidale pour caractériser le nombre moyen de paires de changement de signe (cycles) par unité de temps. Ainsi, les fonctions  $\text{wal}(1, t/T)$  et  $\text{wal}(2, t/T)$  sont de même séquence  $s = 1/T$ , de même que les fonctions  $\sin(2\pi t/T)$  et  $\cos(2\pi t/T)$  sont de même fréquence  $f = 1/T$ . D'une manière générale, la séquence d'une fonction de Walsh d'indice  $k$  est donnée par

$$s_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ (k+1)/2 & k \text{ impair} \\ k/2 & k \text{ pair} \end{cases} \quad (3.66)$$

Une autre notation, parfois utilisée, met en évidence les symétries paires et impaires des fonctions de Walsh en définissant — par analogie toujours avec le sinus et le cosinus — des fonctions  $\text{sal}$  et  $\text{cal}$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} \text{sal}(s_k, t/T) &= \text{wal}(k, t/T) & k \text{ impair} \\ \text{cal}(s_k, t/T) &= \text{wal}(k, t/T) & k \text{ pair} \end{aligned} \quad (3.67)$$

Les huit premières fonctions de Walsh classées dans l'ordre séquentiel sont représentées sur la figure 3.11. On vérifie aisément leur propriété d'orthogonalité sur l'intervalle  $[0, T]$ , avec  $\lambda_k = T$ . Un exemple d'approximation d'une fonction continue par une somme pondérée de fonctions de Walsh est donné sur la figure 3.12.

#### 3.4.4 Procédure usuelle de génération

La génération de signaux ayant la forme de fonctions de Walsh peut se réaliser à partir d'ondes carrées (fonctions de Rademacher) en utilisant la propriété suivante

$$\text{wal}(k \oplus l, t/T) = \text{wal}(k, t/T) \cdot \text{wal}(l, t/T) \quad (3.68)$$

$\oplus$  dénote l'addition modulo-2 des indices  $k$  et  $l$  représentés en base 2 (par ex.  $3 \oplus 5 = 6$  puisque  $3 \leftrightarrow 011$ ,  $5 \leftrightarrow 101$  et  $6 \leftrightarrow 110 = 011 \oplus 101$ ). De plus, en faisant correspondre aux amplitudes  $+1$  et  $-1$  les états logiques 0 et 1 respectivement, la multiplication de fonctions de Walsh devient une addition modulo-2 qui est aisément réalisée à l'aide d'un opérateur logique Ou-exclusif (§ V.1.6.1).

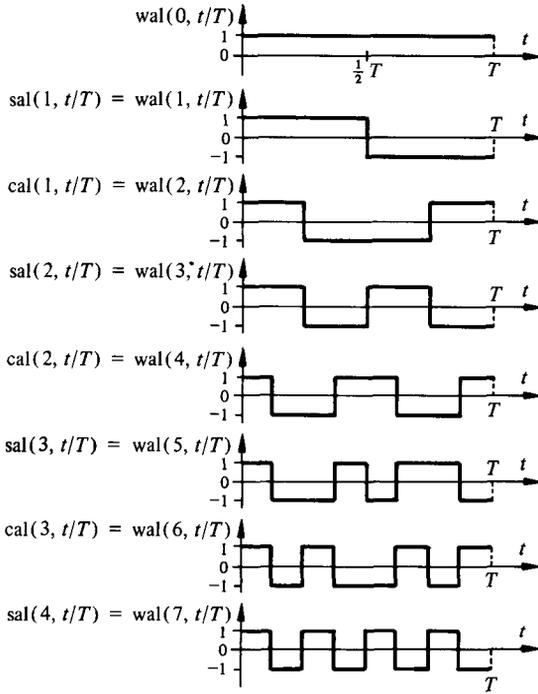


Fig. 3.11 Fonctions de Walsh.

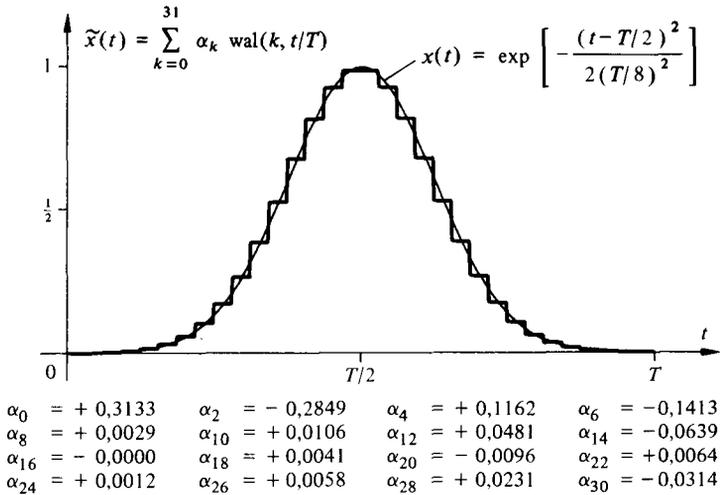


Fig. 3.12 Exemple d'approximation par fonctions de Walsh ( $\alpha_k = 0$  pour  $k$  impair).

L'ensemble des fonctions orthogonales (ou orthonormales pour  $T=1$ ) de Walsh présente un intérêt pratique considérable [62] en traitement des signaux et des images ainsi qu'en reconnaissance des formes. Ceci est dû, d'une part à leur simplicité de génération et de manipulation logique et, d'autre part, à la facilité avec laquelle les coefficients  $\alpha_k$  correspondants peuvent être calculés.

### 3.4.5 Fonctions de Walsh avec classement naturel. Définitions

Une méthode rapide d'établissement des fonctions de Walsh est obtenue en tenant compte de leur parenté avec les *matrices de Hadamard*  $H_N$ . Ce sont des matrices carrées, d'ordre  $N \times N$ , dont les éléments valent  $+1$  ou  $-1$  et dont les lignes (respectivement les colonnes) sont mutuellement orthogonales. Elles présentent un intérêt particulier en traitement numérique des signaux et des images (vol. XX).

Chaque ligne d'une matrice de Hadamard d'ordre  $N = 2^n$  contient  $k$  changements de signe et correspond à la version discrète (échantillonnage de  $2^n$  valeurs régulièrement réparties entre 0 et  $T$ ) de la fonction de Walsh  $wal(k, t/T)$ .

La formule de récurrence suivante permet d'établir rapidement la matrice de Hadamard  $H_{2N}$  avec  $N = 2^n$  :

$$H_{2N} = H_2 \otimes H_N = \begin{bmatrix} H_N & H_N \\ H_N & -H_N \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

où

$$H_1 = [1] \quad (3.70)$$

et  $\otimes$  dénote le *produit de Kronecker* (ou produit tensoriel de matrices). Les matrices  $H_4$  et  $H_8$  sont représentées sur la figure 3.13 avec l'indication de quelques fonctions de Walsh correspondantes.

$$H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftrightarrow wal(7, t/T) \\ \leftrightarrow wal(2, t/T) \end{matrix}$$

Fig. 3.13

On appelle *ordre naturel* le classement des fonctions de Walsh dans l'ordre des lignes correspondantes de la matrice  $H_N$ . Il est possible de passer du classement naturel au classement séquentiel en exprimant l'indice  $k$  comme la version décimale, selon le code de Gray (§ 10.4.3), de la lecture inversée — c'est-à-dire commençant par le bit de poids le plus faible — de l'expression binaire de l'indice de ligne du classement naturel (par exemple : indice de ligne  $i = 6 \leftrightarrow 110$  en binaire; en lecture inversée :  $011 \leftrightarrow k = 2$  selon le code de Gray).

### 3.4.6 Fonctions sinusoïdales

L'ensemble des fonctions harmoniques

$$\psi_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(2\pi kt/T) \quad (3.71)$$

est orthonormal sur l'intervalle  $[0, T]$ . Il est toutefois incomplet : aucune fonction à symétrie paire dans l'intervalle  $[0, T]$  n'est exactement représentable par une combinaison linéaire des  $\psi_k(t)$ . L'ensemble est complété par l'adjonction de fonctions harmoniques cosinusoïdales, ce qui conduit au classique développement en série de Fourier.

### 3.4.7 Série de Fourier

De tous les développements orthogonaux d'un signal sur un intervalle de durée  $T$ , celui qui a la plus grande importance théorique est celui de Fourier, déjà rencontré au volume IV où il est présenté comme un cas particulier de la transformation intégrale de Fourier applicable aux signaux périodiques (sect. IV.7.4). Mais l'utilité de la série de Fourier n'est nullement limitée à ce cas.

Tout signal  $x(t) \in L^2(t_1, t_1 + T)$  peut être exprimé par une combinaison linéaire des fonctions exponentielles complexes (en remplaçant ici l'indice  $k$  par  $n$  positif, nul ou négatif)

$$\psi_n(t) = \exp(j2\pi n t/T) \quad (3.72)$$

qui forment un ensemble complet de fonctions orthogonales sur l'intervalle  $(t_1, t_1 + T)$  avec, par (3.44)

$$\lambda_n = T \quad \forall n \quad (3.73)$$

En dénotant conventionnellement le  $n$ -ième coefficient du développement en série de Fourier complexe d'un signal  $x(t)$  par la majuscule correspondante  $X_n$  (en lieu et place de  $\alpha_k$ ), on obtient l'équivalence dans l'intervalle  $[t_1, t_1 + T]$ :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j2\pi n t/T) \quad (3.74)$$

avec, d'après (3.43) et (3.73) :

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1 + T} x(t) \exp(-j2\pi n t/T) dt \quad (3.75)$$

Ces coefficients présentent l'intérêt d'être naturellement classés dans l'ordre harmonique des fréquences  $f_n = n/T$  et conduisent à la notion classique de spectre fréquentiel (bilatéral) d'un signal. Si la fonction  $x(t)$  est réelle, les coefficients  $X_n$  et  $X_{-n}$  sont des conjugués complexes.

La limite du produit  $X_n \cdot T$  obtenue en faisant croître indéfiniment l'intervalle  $T$  est la transformée de Fourier  $X(f)$  du signal (§ 4.1.6).

Remarquons que lorsque le signal est *périodique de période*  $T$ , c'est-à-dire si  $x(t) = x(t + mT)$  avec  $m$  entier, l'équivalence (3.74) s'étend aussi à tout l'axe réel :  $-\infty < t < \infty$ . L'identité de Parseval (3.53) permet alors d'exprimer la puissance moyenne du signal de deux manières équivalentes :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1 + T} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (3.76)$$

### □ 3.4.8 Développement d'une fonction de la fréquence

Par analogie avec le développement d'une fonction du temps  $x(t)$  sur un intervalle  $[t_1, t_1 + T]$ , le développement en série de Fourier d'une fonction de la fréquence  $Z(f)$  sur un intervalle *fréquentiel*  $[f_1, f_1 + F]$  donne :

$$Z(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k \exp(j 2 \pi k f / F) \tag{3.77}$$

avec les coefficients :

$$z_k = \frac{1}{F} \int_{f_1}^{f_1 + F} Z(f) \exp(-j 2 \pi k f / F) df \tag{3.78}$$

qui sont en général complexes, sauf si  $Z(f)$  est une fonction paire.

□ 3.4.9 Représentation échantillonnée d'un signal de spectre à support borné de type passe-bas

Considérons un signal  $x(t)$  dont la transformée de Fourier  $X(f)$  est nulle pour  $|f| > f_2$ . Pour un spectre de type passe-bas et compte tenu de la définition (2.15), la largeur de bande  $B$  et la fréquence limite  $f_2$  sont égales :  $B = f_2 - f_1 = f_2$  car ici  $f_1 = 0$ .

Le signal et sa transformée sont liés par la relation

$$x(t) = \int_{-B}^B X(f) \exp(j 2 \pi f t) df \tag{3.79}$$

En développant en série de Fourier la fonction  $Z(f) = \exp(j 2 \pi f t)$  sur l'intervalle fréquentiel  $[-B, B]$ , il vient :

$$Z(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k(t) \exp(j 2 \pi k f / 2B) \tag{3.80}$$

avec, [en tenant compte de la notation (1.58)] :

$$\begin{aligned} z_k(t) &= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \exp(j 2 \pi [t - k / 2B] f) df \\ &= \frac{\sin[\pi(2Bt - k)]}{\pi(2Bt - k)} = \text{sinc}(2Bt - k) \end{aligned} \tag{3.81}$$

Ces fonctions sont représentées sur la figure 3.14.

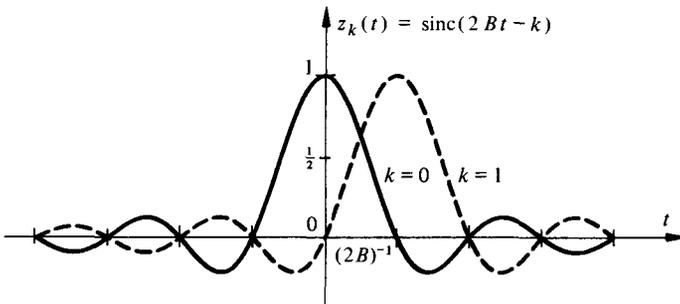


Fig. 3.14

En substituant (3.80) et (3.81) dans (3.79) et en intervertissant l'ordre de sommation et d'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-B}^B X(f) \exp(j 2 \pi k f / 2 B) df \right] z_k(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k/2B) \operatorname{sinc}(2Bt - k) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Les fonctions  $z_k(t) = \operatorname{sinc}(2Bt - k)$  sont orthogonales (voir exercice 4.7.19) et engendrent un espace fonctionnel complet (celui des signaux de spectre à support borné). Par contre, l'ensemble de ces fonctions n'est pas complet dans  $L^2$  puisque les signaux ayant une largeur de bande supérieure à  $B$  n'appartiennent pas au sous-espace engendré.

Les coefficients du développement (3.82) ont la propriété remarquable d'être simplement les *valeurs échantillonnées du signal* prélevées périodiquement tous les  $\Delta t = (2B)^{-1}$  secondes. Ce résultat sera interprété au chapitre 9. On y montre en fait que si la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  d'un signal analogique de spectre à support borné satisfait à la condition  $f_e = \Delta t^{-1} \leq 2B$ , le signal analogique peut être parfaitement reconstruit à partir de la connaissance des seuls échantillons. Ce résultat porte le nom de *théorème d'échantillonnage*.

### 3.4.10 Série de Fourier d'un signal échantillonné

Par analogie avec le développement en série de Fourier (3.74) d'un signal analogique  $x(t)$ , dont les coefficients sont définis par (3.75), on obtient pour un signal échantillonné – ou numérique –  $x(k)$  de  $N$  échantillons, prélevés sur l'intervalle  $T = N \cdot \Delta t$ , après avoir normalisé le pas d'échantillonnage  $\Delta t = 1$  :

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} X_n \exp(j2\pi nk/N) \quad (3.83)$$

avec

$$X_n = (1/N) \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-j2\pi nk/N) \quad (3.84)$$

Comme indiqué au paragraphe 3.4.7, cette représentation est à la fois celle du signal échantillonné  $x(k)$  de  $N$  échantillons, mais aussi celle du *signal échantillonné périodique*  $x(k + mN)$  avec  $m$  entier.

Pour les raisons mentionnées au paragraphe 2.4.3, les coefficients  $X_n$  obtenus dans ce cas forment eux-mêmes sur l'axe des fréquences une *séquence périodique* de période unité (fréquence d'échantillonnage  $f_e = \Delta t^{-1}$  normalisée). La période principale contient  $N$  coefficients associés aux fréquences  $f_n = n/N$  avec  $n$  allant de 0 à  $N - 1$ .

Ainsi, cette double représentation discrète (signal échantillonné et développement en série de Fourier) entraîne une double périodicité: celle du signal dans le domaine temporel et celle du spectre fréquentiel constitué par les coefficients (3.84).

La formule (3.84) porte le nom de *transformée de Fourier discrète normalisée*. En la multipliant par le facteur  $N$ , on obtient la *transformée de Fourier discrète  $X(n)$*  utilisée pour l'évaluation numérique de la transformée de Fourier  $X(f)$  continue (cf. section 4.1) associée à un signal analogique  $x(t)$ .

### 3.4.11 Autres fonctions orthogonales

D'autres fonctions orthogonales, qu'il serait trop long de décrire en détail ici, sont citées dans la littérature pertinente [21, 49, 63].

Mentionnons en particulier (l'intervalle de définition étant indiqué entre parenthèses carrées) les :

- polynômes de Legendre  $[-1, +1]$
- fonctions de Legendre  $[0, \infty]$
- polynômes de Laguerre  $[0, \infty]$
- fonctions de Laguerre  $[0, \infty]$
- polynômes de Tchebycheff  $[-1, +1]$
- fonctions de Tchebycheff  $[0, \infty]$
- polynômes de Hermite  $[-\infty, \infty]$
- fonctions de Hermite  $[-\infty, \infty]$
- fonctions de Haar  $[0, 1]$
- fonctions obliques - en anglais *slant* -  $[0, 1]$

Les fonctions de Haar et les fonctions obliques (en forme de marches d'escalier) sont, comme les fonctions de Walsh, à structure rectangulaire. Elles ont trouvé des applications particulières notamment pour le codage de signaux ou d'images.

## 3.5 EXERCICES

**3.5.1** Calculer les distances  $d_1(x_k, x_l)$ , définies par (3.3) avec  $K=1$ , séparant les signaux  $x_k(t) = A \sin(2\pi kt/T) \cdot \text{rect}[(t - T/2)/T]$  et  $x_l(t) = A \cos(2\pi lt/T) \cdot \text{rect}[(t - T/2)/T]$  où  $k$  et  $l$  sont des entiers positifs. Interpréter le résultat en l'introduisant dans la relation (3.16).

**3.5.2** Comparer les distances  $d_1(x_i, x_j)$  et  $d_2(x_i, x_j)$  définies respectivement par (3.3) et (3.4) en posant ici  $K = 1/T$ , pour les trois signaux représentés sur la figure 3.15.

**3.5.3** Déterminer l'évolution du produit scalaire des signaux  $x(t) = \cos(2\pi t/T - \theta_1)$  et  $y(t) = \sin(2\pi t/T - \theta_2)$  en fonction du paramètre  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$  et pour le domaine de définition  $t_1 \leq t \leq t_1 + T$ . Pour quelles valeurs de  $\Delta\theta$  ces deux fonctions sont-elles orthogonales ?

**3.5.4** Déterminer la meilleure approximation en moyenne quadratique de  $x(t) = \text{rect}[(t - 0,5)/0,5]$  par la somme  $\tilde{x}(t) = \sum_{k=1}^3 \alpha_k \exp(-kt)$ , définie sur l'intervalle  $0 \leq t < \infty$ .

Calculer la valeur quadratique moyenne de l'erreur résultante.

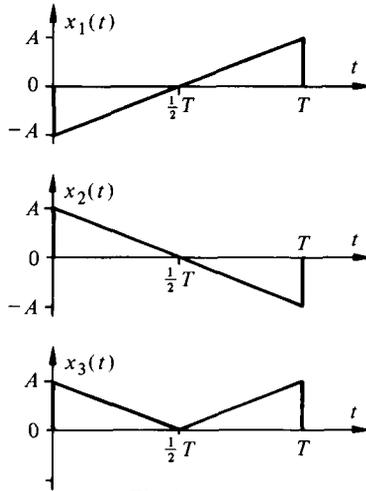


Fig. 3.15

**3.5.5** Déterminer la meilleure approximation en moyenne quadratique de  $x(t) = \sin \pi t \cdot \text{rect}(t/2)$  réalisable à l'aide de l'ensemble de fonctions  $\{\psi_k(t) = \text{rect}(t - k/2); k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots\}$  et calculer la valeur quadratique moyenne de l'erreur résiduelle.

**3.5.6** Démontrer que l'ensemble des fonctions  $\{\psi_k(t) = (2/T)^{1/2} \cdot \cos(2\pi kt/T) \cdot \text{rect}(t/T); k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  est un ensemble orthonormal incomplet sur l'intervalle  $[-T/2, T/2]$ .

**3.5.7** Soit  $x(t)$  et  $y(t)$  deux signaux appartenant à  $L^2$  et  $\{\psi_k(t); k = 1, 2, \dots, \infty\}$  un ensemble complet de fonctions orthonormales. Démontrer la relation générale de Parseval

$$\langle x, y^* \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \psi_k^* \rangle \langle \psi_k, y^* \rangle \quad (3.83)$$

- **3.5.8** Démontrer que les fonctions  $w_k(t)$  obtenues par la relation (3.56) sont orthogonales.
- **3.5.9** Vérifier que les fonctions  $w_k(t)$  et  $\psi_k(t)$  de l'exemple 3.3.10 sont respectivement orthogonales et orthonormales.
- **3.5.10** Compléter l'exemple 3.3.10 en déterminant les fonctions orthonormales  $\psi_4(t)$  et  $\psi_5(t)$ .
- **3.5.11** Démontrer que les quatre fonctions  $v_k(t); k = 1$  à 4 de la figure 3.16 ne forment pas un ensemble de fonctions linéairement indépendantes. Par application de la procédure d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à cet ensemble, montrer qu'il définit un espace à deux dimensions. Exprimer les fonctions  $v_k(t)$  en fonction de leurs composantes orthonormales.

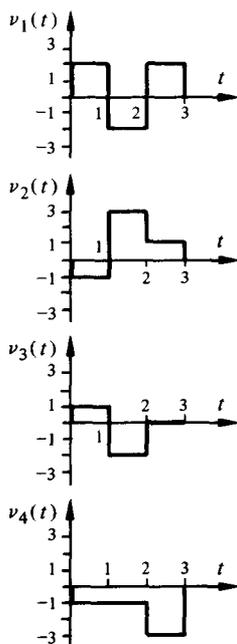


Fig. 3.16

**3.5.12** Développer en série le signal  $x(t) = \text{tri}[(t - 0,5)/0,5]$  à l'aide de fonctions orthogonales a) de Rademacher, b) de Walsh. Déterminer le nombre minimum  $m$  de coefficients nécessaires dans chaque cas pour que la qualité de l'approximation  $\tilde{x}(t)$  obtenue — voir relation (3.40) — soit meilleure que 20 dB. Comparer graphiquement  $x(t)$  et  $\tilde{x}(t)$ .

**3.5.13** Développer en série de Fourier le signal  $x(t) = (At/T) \text{rect}[(t - T/2)/T]$  sur l'intervalle  $[0, T]$ .

## SIGNAUX DÉTERMINISTES

## 4.1 RAPPEL SUR LA TRANSFORMATION INTÉGRALE DE FOURIER

## 4.1.1 Introduction

L'analyse harmonique est l'instrument majeur de la théorie du signal (§ 1.1.7). La transformation de Fourier, généralisée par l'emploi des distributions, permet d'obtenir une représentation spectrale des signaux déterministes. Celle-ci exprime la répartition fréquentielle de l'amplitude, de la phase, de l'énergie ou de la puissance des signaux considérés. Comme on le montre plus loin, la transformation intégrale de Fourier peut être envisagée comme une généralisation de la notion de développement en série orthogonale de Fourier (§ 3.4.7).

La transformation de Fourier fait l'objet d'une représentation détaillée dans le volume IV du Traité. On se contente de résumer ici certaines définitions, notations et propriétés dont l'importance est primordiale en théorie du signal. Pour une étude plus approfondie, on se reportera à [22] ou [23].

Une table illustrée des principales paires de transformées est reportée en annexe (sect. 15.4).

## 4.1.2 Définition

Soit  $x(t)$  un signal déterministe, sa transformée de Fourier est une fonction, généralement complexe, de la variable réelle  $f$  définie par :

$$\begin{aligned} X(f) &= F \{x(t)\} = \langle x, \exp(-j 2\pi ft) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j 2\pi ft) dt \end{aligned} \quad (4.1)$$

La transformation inverse est donnée par

$$\begin{aligned} x(t) &= F^{-1} \{X(f)\} = \langle X, \exp(j 2\pi ft) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j 2\pi ft) df \end{aligned} \quad (4.2)$$

## 4.1.3 Notations utilisées

Il est généralement jugé préférable, en traitement des signaux, d'exprimer la transformée de Fourier d'un signal et les notations spectrales qui en découlent en fonction de la variable  $f$  (fréquence) plutôt qu'en fonction de la pulsation  $\omega = 2\pi f$  comme c'est l'usage en théorie des circuits (vol. IV) où une certaine parenté avec la transformation de Laplace est recherchée.

Outre la remarquable symétrie d'écriture des transformations directe et inverse que cette notation met en évidence, le recours à la variable  $f$  s'impose naturellement en pratique, car les résultats expérimentaux (mesures spectrales) sont toujours exprimés en fonction de la variable mesurable  $f$ .

En notation abrégée, on dénotera par les opérateurs  $F\{ \}$  et  $F^{-1}\{ \}$  les transformations de Fourier directe et inverse, respectivement. La correspondance réciproque est indiquée par une flèche double

$$x(t) \leftrightarrow X(f) \quad (4.3)$$

#### 4.1.4 Dualité temps-fréquence

La symétrie des transformations directe (4.1) et inverse (4.2) montre l'existence d'une dualité entre l'espace temps (variable  $t$ ) et l'espace fréquence (variable  $f$ ). Cette dualité joue un rôle fondamental dans la plupart des méthodes de traitement des signaux. Ce point sera largement illustré dans ce chapitre et les suivants.

#### 4.1.5 Existence d'une transformée de Fourier

En vertu du théorème de Plancherel [58], toutes les fonctions de carré intégrable — donc tous les signaux à énergie finie — possèdent une transformée de Fourier (convergence en moyenne quadratique) qui est également une fonction de carré intégrable.

Toutefois, le fait d'être à énergie finie est une condition suffisante, mais pas nécessaire. Si tous les modèles de signaux physiquement réalisables ont une transformée de Fourier, il en va de même pour la plupart des signaux idéalisés : signaux à puissance moyenne finie, impulsion de Dirac, suite périodique d'impulsions de Dirac, etc.

#### 4.1.6 Justification heuristique de la transformation de Fourier

Le développement en série de fonctions orthogonales (sect. 3.3) d'un signal compris dans un intervalle fini  $[t_1, t_2]$  est un moyen d'analyse précieux. Le développement en série de Fourier (§ 3.4.7), en particulier, permet d'obtenir une représentation fréquentielle discrète du signal où chaque composante  $X_n$  est localisée à une fréquence  $f_n = nf_1 = n/(t_2 - t_1)$ .

Comme on le sait, cette description s'identifie avec celle d'un signal constitué par la répétition périodique, de période  $T = t_2 - t_1$ , du signal initial.

Afin d'obtenir une représentation fréquentielle d'un signal déterministe non périodique observé sur l'intervalle  $-\infty < t < +\infty$ , on peut imaginer de recourir tout d'abord à une description valable pour un intervalle  $T$  fini. On cherche ensuite la forme limite prise par cette relation lorsque l'on fait tendre  $T$  vers l'infini.

Considérons un signal  $x(t)$  quelconque (fig. 4.1). Appelons  $x(t, T)$  la partie de ce signal comprise dans l'intervalle  $|t| < T/2$

$$x(t, T) = x(t) \cdot \text{rect}(t/T) \quad (4.4)$$

Un développement en série de Fourier de  $x(t, T)$  est possible et donne :

$$x(t, T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j 2 \pi n f_1 t) \quad (4.5)$$

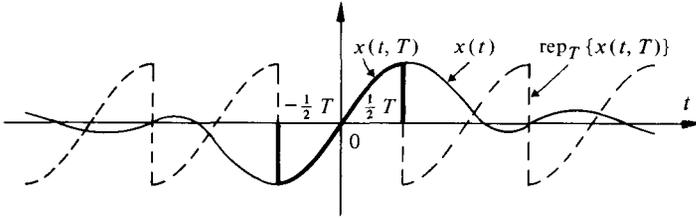


Fig. 4.1

avec

$$X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, T) \exp(-j 2 \pi n f_1 t) dt \tag{4.6}$$

A l'extérieur de l'intervalle  $|t| < T/2$ , ce développement n'est plus celui de  $x(t)$ , mais au contraire celui d'un signal formé par la répétition périodique de  $x(t, T)$ . Toutefois, si l'on fait tendre  $T$  vers l'infini,  $x(t, T)$  et  $x(t)$  deviennent identiques pour tout  $t$  et l'intervalle de définition devient l'axe réel entier :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x(t, T) = x(t) \tag{4.7}$$

La représentation fréquentielle de  $x(t, T)$  est un *spectre de raies*. La distance entre raies adjacentes est égale à  $f_1 = 1/T$ . Par conséquent, lorsque  $T$  augmente, la densité des raies du spectre augmente. Cette *densité spectrale de raies* peut être exprimée par la relation :

$$\frac{X_n}{f_1} = X_n \cdot T = \int_{-T/2}^{T/2} x(t, T) \exp(-j 2 \pi n f_1 t) dt \tag{4.8}$$

Lors du passage à la limite pour  $T \rightarrow \infty$ , la distance entre raies devient infinitésimale et le nombre de composantes dans un intervalle de fréquence donné devient infini :  $f_1 = 1/T \rightarrow df$ ,  $n f_1 = n/T \rightarrow f$  (variable continue),  $\Sigma \rightarrow \int$ .

On obtient alors :

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} x(t, T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j 2 \pi n f_1 t) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t, T) \exp(-j 2 \pi n f_1 t) dt \right\} \exp(j 2 \pi n f_1 t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} df \underbrace{\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j 2 \pi f t) dt \right\}}_{X(f)} \exp(j 2 \pi f t) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Ce résultat est conforme aux relations (4.1) et (4.2). La transformée  $X(f)$  apparaît ainsi comme la forme limite de la densité spectrale de raies introduite précédemment.

#### 4.1.7 Interprétation

L'analogie entre le développement en série de Fourier et l'intégrale de Fourier permet de conclure que la fonction  $X(f)$  analyse  $x(t)$  sous forme d'une infinité de composantes sinusoïdales complexes d'amplitude  $|X(f)|df$ . Si  $X(f)$  est bornée, ces amplitudes sont infinitésimales. La fonction  $X(f)$  fournit ainsi des informations sur la *distribution fréquentielle* (amplitude, phase, énergie ou puissance) du signal  $x(t)$ .

#### 4.1.8 Transformée de Fourier d'un signal réel. Définitions

La transformée de Fourier d'un signal réel  $x(t)$  est en général une fonction complexe de la variable  $f$ . Si  $x_p(t)$  et  $x_i(t)$  sont respectivement les parties paires et impaires du signal (§ 2.5.5), leurs transformées de Fourier étant notées  $X_p(f)$  et  $X_i(f)$ , on peut écrire (4.1) sous les formes équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin(2\pi ft) dt \\ &= X_p(f) + X_i(f) \\ &= \operatorname{Re} \{X(f)\} + j \operatorname{Im} \{X(f)\} \\ &= |X(f)| \exp[j\vartheta_x(f)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

Le module  $|X(f)|$  est appelé *spectre d'amplitude* et l'argument  $\vartheta_x(f) = \arg X(f)$  *spectre de phase* du signal.

Le spectre d'amplitude est une fonction paire, le spectre de phase une fonction impaire.

La transformée d'un signal réel pair est une fonction réelle paire. Celle d'un signal réel impair est une fonction imaginaire impaire.

La partie réelle de  $X(f)$  s'identifie avec la transformée de la partie paire du signal. La transformée de la partie impaire du signal est égale à la partie imaginaire de  $X(f)$  multipliée par  $j$ .

#### 4.1.9 Propriétés et définition

L'importance de la transformation de Fourier en théorie du signal est largement due à certaines de ses propriétés remarquables. Celles-ci sont présentées en détail dans le volume IV et résumées, en annexe, sous forme de tableaux à la section 15.3.

Les principales sont rappelées ci-après sans démonstrations. Celles-ci sont laissées comme exercices. Leur emploi est largement illustré par la suite.

$$x^*(t) \leftrightarrow X^*(-f) \quad (4.11)$$

$$ax(t) + by(t) \leftrightarrow aX(f) + bY(f) \quad (4.12)$$

$$d^n x/dt^n \leftrightarrow (j2\pi f)^n X(f) \quad (4.13)$$

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) \cdot Y(f) \quad (4.14)$$

$$x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f) \tag{4.15}$$

$$x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) \cdot \exp(-j 2\pi f t_0) \tag{4.16}$$

$$x(t) \cdot \exp(j 2\pi f_0 t) \leftrightarrow X(f - f_0) \tag{4.17}$$

$$x(at) \leftrightarrow |a|^{-1} X(f/a) \tag{4.18}$$

La propriété (4.12) indique que la transformation de Fourier est une *opération linéaire*. Les propriétés (4.14) et (4.15) sont essentielles. Elles montrent qu'à *tout produit dans le domaine temporel correspond un produit de convolution dans le domaine fréquentiel et réciproquement*. La propriété (4.16) est connue sous le nom de *théorème du retard*.

#### 4.1.10 Convolution complexe

La formule (4.15) fait correspondre à un produit de signaux un produit de convolution de leurs transformées de Fourier. Celles-ci sont en général des fonctions complexes de la variable réelle  $f$ . En décomposant les signaux (§ 2.5.5) en leurs parties paires et impaires, on a

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) \cdot y(t) = [x_p(t) + x_i(t)] \cdot [y_p(t) + y_i(t)] \\ &= x_p(t)y_p(t) + x_i(t)y_i(t) + x_p(t)y_i(t) + x_i(t)y_p(t) \end{aligned} \tag{4.19}$$

et

$$\begin{aligned} Z(f) &= X(f) * Y(f) \\ &= \underbrace{X_p(f) * Y_p(f) + X_i(f) * Y_i(f)}_{Z_p(f) = \text{Re} \{Z(f)\}} + \underbrace{X_p(f) * Y_i(f) + X_i(f) * Y_p(f)}_{Z_i(f) = j \text{Im} \{Z(f)\}} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Le calcul se simplifie grandement lorsque les signaux considérés sont eux-mêmes pairs ou impairs.

### 4.2 SIGNAUX À ÉNERGIE FINIE

#### 4.2.1 Spectre d'amplitude et spectre de phase

Les signaux à énergie finie ont été définis au paragraphe 2.3.3. Ils satisfont à la condition

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \tag{4.21}$$

où  $W_x$  dénote l'énergie totale normalisée. La condition (4.21) implique que ces signaux ont un comportement transitoire.

Tout signal de cette classe possède une transformée de Fourier

$$X(f) = F \{x(t)\} = |X(f)| \exp [j \vartheta_x(f)] \tag{4.22}$$

où  $|X(f)|$  est le spectre d'amplitude et  $\vartheta_x(f)$  est le spectre de phase du signal. Si celui-ci est mesuré en volts,  $|X(f)|$  est en V/Hz et  $\vartheta_x(f)$  en radian.

#### 4.2.2 Exemple : signal à décroissance exponentielle

Soit  $x(t) = \exp(-at) \epsilon(t)$ ; sa transformée de Fourier vaut

$$X(f) = \int_0^{\infty} \exp[-(a + j2\pi f)t] dt = \frac{1}{a + j2\pi f}$$

$$|X(f)| = 1 / \sqrt{a^2 + (2\pi f)^2}$$

$$\vartheta_x(f) = -\arctan(2\pi f/a)$$

Ce signal est représenté sur la figure 4.2, ses spectres d'amplitude et de phase sur la figure 4.3.

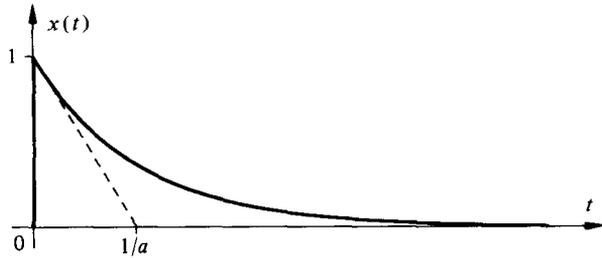


Fig. 4.2

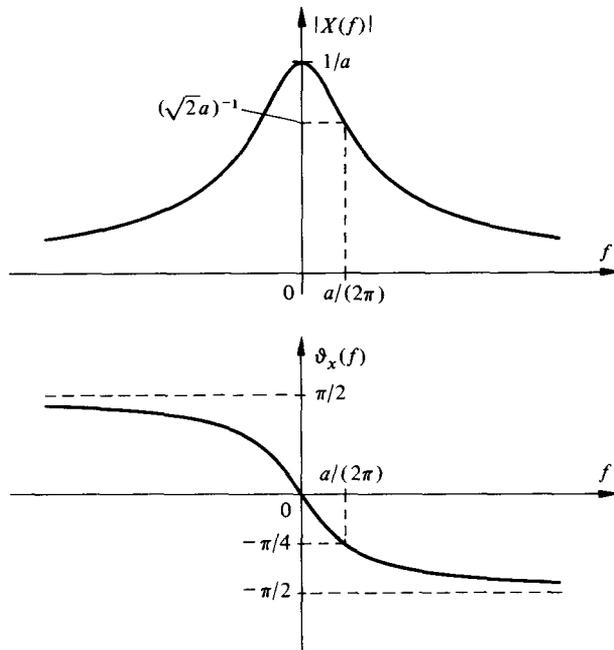


Fig. 4.3

#### 4.2.3 Exemple

Soit (fig. 4.4) le produit  $z(t) = x(t) \cdot y(t)$  où  $x(t)$  est le signal exponentiel de l'exemple 4.2.2 et  $y(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}[\exp(j2\pi f_0 t) + \exp(-j2\pi f_0 t)]$ .

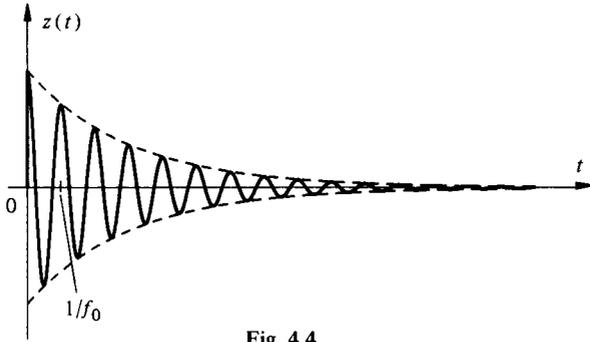


Fig. 4.4

Par (4.17) on obtient

$$Z(f) = \frac{1}{2} X(f - f_0) + \frac{1}{2} X(f + f_0)$$

où  $X(f)$  est donnée par le résultat de l'exemple précédent.

Les spectres d'amplitude et de phase de  $z(t)$  sont esquissés sur la figure 4.5 pour  $f_0 \gg a$ . Ce résultat peut également s'obtenir directement en exploitant la propriété (4.15) comme montré plus loin au paragraphe 4.4.5.

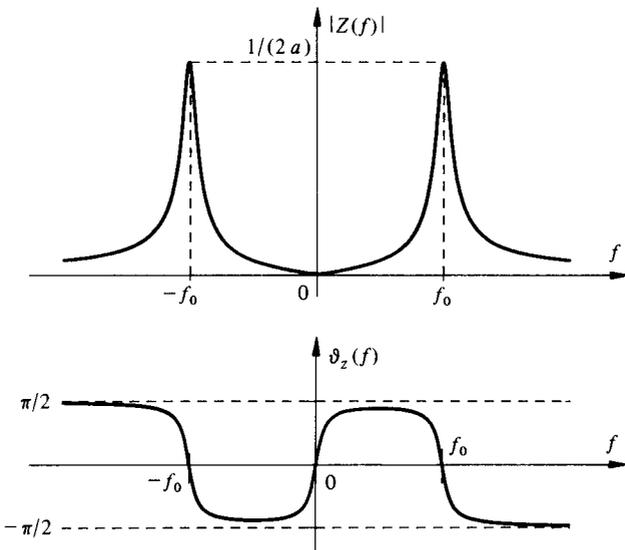


Fig. 4.5

#### 4.2.4 Exemple : impulsion rectangulaire

La paire de transformées suivante joue un rôle capital en théorie du signal

$$\text{rect}(t) \leftrightarrow \text{sinc}(f) \tag{4.23}$$

ou, par symétrie

$$\text{sinc}(t) \leftrightarrow \text{rect}(f) \tag{4.24}$$

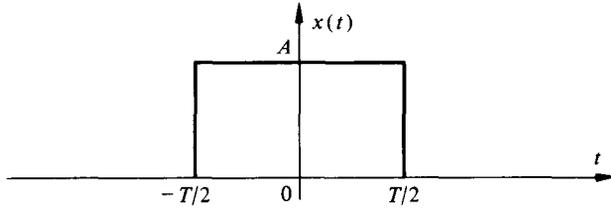


Fig. 4.6

Grâce à la propriété (4.18), on généralise facilement ce résultat à un signal pair rectangulaire d'amplitude  $A$  et de durée  $T$  (fig. 4.6)

$$x(t) = A \operatorname{rect}(t/T) \quad (4.25)$$

a pour transformée de Fourier (fig. 4.7)

$$X(f) = AT \operatorname{sinc}(Tf) \quad (4.26)$$

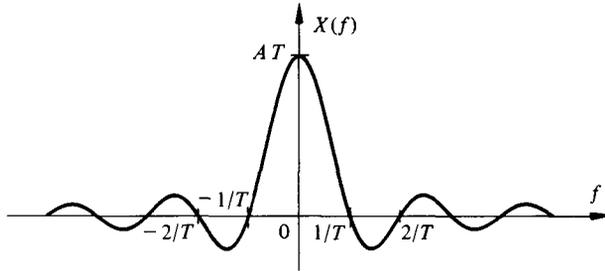


Fig. 4.7

On vérifie ce résultat en utilisant la définition de la fonction sinc introduite au paragraphe 1.3.15 :

$$\begin{aligned} F \{A \operatorname{rect}(t/T)\} &= A \int_{-T/2}^{T/2} \exp(-j2\pi ft) dt \\ &= \frac{A}{2j\pi f} \left[ \exp(j\pi Tf) - \exp(-j\pi Tf) \right] \\ &= \frac{A}{\pi f} \sin(\pi Tf) \\ &= AT \operatorname{sinc}(Tf) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Les spectres d'amplitude et de phase du signal (4.25) sont représentés sur la figure 4.8. Le spectre de phase, qui vaut alternativement 0 et  $\pm \pi$ , est dessiné de façon à obtenir une fonction impaire (§ 4.1.8).

#### 4.2.5 Exemple : impulsion rectangulaire décalée

Considérons un signal rectangulaire d'amplitude  $A$  et de durée  $T$  dont l'axe de symétrie passe par une valeur  $t_0 \neq 0$  (fig. 4.9) :

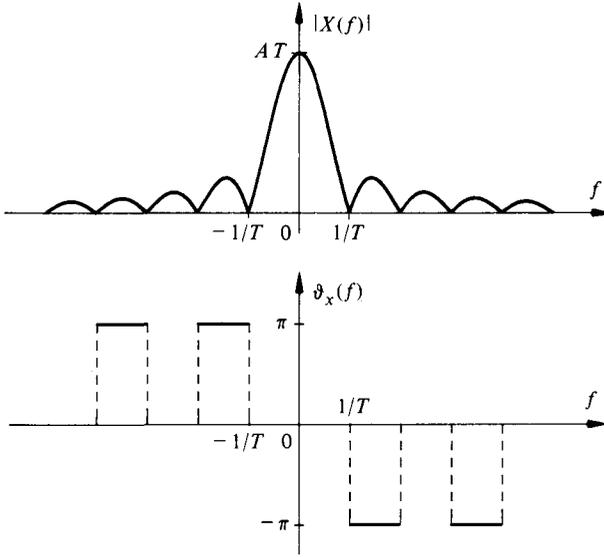


Fig. 4.8

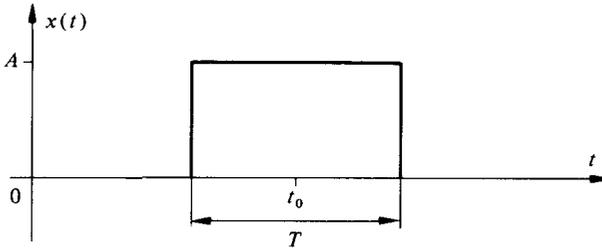


Fig. 4.9

$$x(t) = A \text{ rect}[(t - t_0)/T] \tag{4.28}$$

Sa transformée de Fourier est obtenue en tenant compte de la propriété (4.16) et du résultat (4.27) :

$$X(f) = AT \text{ sinc}(Tf) \exp(-j 2\pi f t_0) \tag{4.29}$$

Les spectres d'amplitude et de phase (fig. 4.10) sont alors donnés par :

$$|X(f)| = AT |\text{sinc}(Tf)| \tag{4.30}$$

$$\vartheta_x(f) = \begin{cases} -2\pi t_0 f & \text{pour } \text{sinc}(Tf) > 0 \\ -2\pi t_0 f \pm \pi & \text{pour } \text{sinc}(Tf) < 0 \end{cases} \tag{4.31}$$

On vérifie ainsi que le spectre d'amplitude d'un signal est invariant à toute translation. Celle-ci ne modifie que le spectre de phase en lui ajoutant un terme variant linéairement avec la fréquence. La figure 4.10 présente trois exemples de décalage  $t_0$  différents. Le choix des sauts de phase de  $\pm \pi$  est fait de manière à garantir le caractère impair de  $\vartheta_x(f)$ , qui est de plus considérée comme valeur principale ( $-\pi < \vartheta_x < \pi$ ).

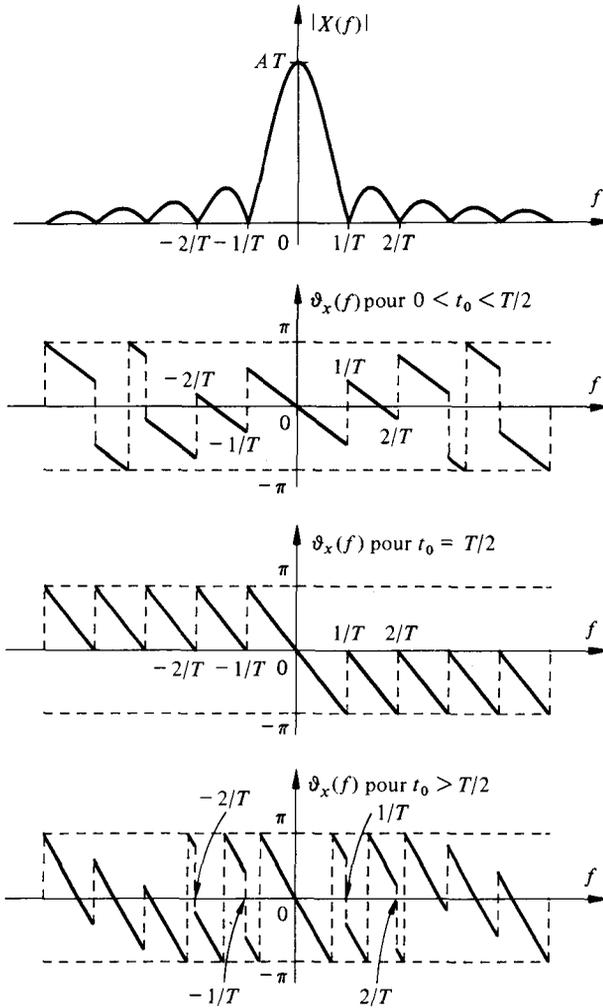


Fig. 4.10

#### 4.2.6 Exemple : impulsion triangulaire

L'impulsion triangulaire est égale à la convolution de deux impulsions rectangulaires (1.33)

$$\text{tri}(t) = \text{rect}(t) * \text{rect}(t) \quad (4.32)$$

On en déduit, grâce à la propriété (4.14) que

$$\text{tri}(t) \leftrightarrow \text{sinc}^2(f) \quad (4.33)$$

ou, d'une manière plus générale, grâce à la propriété (4.18), que tout signal pair triangulaire d'amplitude  $A$  et de support  $2T$  (fig. 4.11)

$$x(t) = A \text{tri}(t/T) \quad (4.34)$$

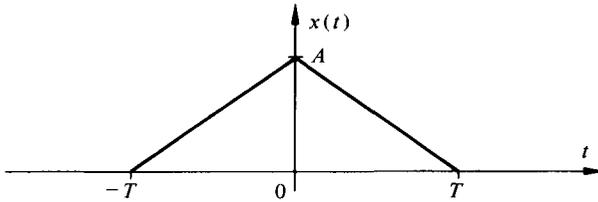


Fig. 4.11

a pour transformée de Fourier (fig. 4.12)

$$X(f) = AT \operatorname{sinc}^2(Tf) \tag{4.35}$$

L'expression (4.35) représente également, dans ce cas, le spectre d'amplitude de  $x(t)$ . Son spectre de phase est nul.

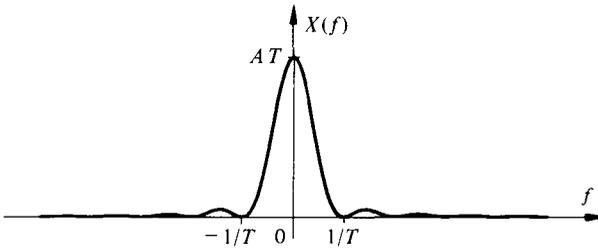


Fig. 4.12

4.2.7 Exemple

Considérons encore le cas d'un signal de forme trapézoïdale, afin de mettre en évidence l'emploi efficace que l'on peut faire des propriétés de la transformée de Fourier.

Soit le signal  $x(t)$  et sa dérivée représentée sur la figure 4.13 :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A}{b-a} \left\{ \operatorname{rect} \left[ \frac{t + (b+a)/2}{b-a} \right] - \operatorname{rect} \left[ \frac{t - (b+a)/2}{b-a} \right] \right\}$$

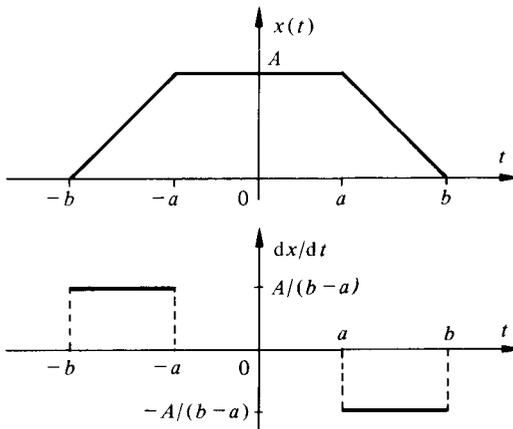


Fig. 4.13

Par (4.13), (4.16) et (4.29), on a

$$\begin{aligned} F[dx/dt] &= j2\pi f \cdot X(f) \\ &= 2A j \operatorname{sinc}[(b-a)f] \cdot \sin[\pi(b+a)f] \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$X(f) = A(b+a) \operatorname{sinc}[(b-a)f] \operatorname{sinc}[(b+a)f]$$

#### 4.2.8 Définition : fonction d'intercorrélation

Le produit scalaire (§ 3.1.9)

$$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) = \langle x^*, y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau)dt \quad (4.36)$$

où  $y_\tau$  dénote la fonction décalée  $y(t+\tau)$ , est appelé *fonction d'intercorrélation* des signaux à énergie finie réels ou complexes  $x(t)$  et  $y(t)$ . En vertu de (3.15), ces signaux sont *orthogonaux* — ou *non corrélés* — pour chaque valeur de  $\tau$  où la fonction d'intercorrélation s'annule.

En vertu de la propriété hermitienne (3.14), on vérifie aisément que

$$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) = \overset{\circ}{\varphi}_{yx}^*(-\tau) \quad (4.37)$$

#### 4.2.9 Définition : fonction d'autocorrélation

En posant dans (4.36)  $y(t+\tau) = x(t+\tau)$ , on obtient la *fonction d'autocorrélation* du signal à énergie finie  $x(t)$

$$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = \langle x^*, x_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)x(t+\tau)dt \quad (4.38)$$

avec, par (4.37) la symétrie hermitienne :  $\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = \overset{\circ}{\varphi}_x^*(-\tau)$ . Cette symétrie entraîne que *la partie réelle de la fonction d'autocorrélation est une fonction paire et que la partie imaginaire est une fonction impaire*.

*La valeur à l'origine ( $\tau = 0$ ) de la fonction d'autocorrélation est égale à l'énergie du signal*

$$\overset{\circ}{\varphi}_x(0) = \langle x^*, x \rangle = \|x\|^2 = W_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (4.39)$$

#### 4.2.10 Interprétation

Le produit scalaire de deux vecteurs est proportionnel à la projection de l'un sur l'autre. Il est maximum, en valeur absolue, lorsque les deux vecteurs ont la même orientation et nul lorsqu'ils sont orthogonaux. Il peut donc être considéré comme une mesure de la similitude d'orientation des vecteurs.

Par analogie, le produit scalaire de deux signaux est une mesure de leur similitude de forme et de position. La fonction d'intercorrélation traduit l'évolution de cette similitude en fonction du paramètre de translation relative  $\tau$ .

Dans l'espace des signaux, cette translation correspond à une rotation du vecteur représentatif. Il existe donc une liaison entre la distance euclidienne entre deux signaux et leur intercorrélacion. Par (3.14), (3.16), (4.36) et (4.39) :

$$d^2(x, y_\tau) = \overset{\circ}{\varphi}_x(0) + \overset{\circ}{\varphi}_y(0) - 2 \operatorname{Re} \{ \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) \} \quad (4.40)$$

En posant  $y(t + \tau) = x(t + \tau)$

$$d^2(x, x_\tau) = 2[\overset{\circ}{\varphi}_x(0) - \operatorname{Re} \{ \overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) \}] \quad (4.41)$$

#### 4.2.11 Notation spéciale et autres terminologies

La notation  $\overset{\circ}{\varphi}$  est utilisée dans cet ouvrage pour distinguer la fonction de corrélation de signaux dont l'un, au moins, est à énergie finie de celle de signaux à puissance moyenne finie, notée simplement  $\varphi$ .

Le terme d'autocorrélacion est utilisé dans tous les ouvrages de référence. Par contre, le terme d'intercorrélacion est parfois remplacé, dans la littérature française, par *corrélacion croisée* ou *corrélacion mutuelle* (en anglais : *crosscorrelation*; en allemand : *kreuzkorrelation*).

Certains auteurs intervertissent les indices dans la définition (4.36).

#### 4.2.12 Notation pour signaux réels

Les fonctions d'inter- et d'autocorrélacion sont surtout rencontrées avec des signaux réels. C'est pourquoi les notations simplifiées suivantes seront souvent utilisées dans le reste de cet ouvrage lorsque le caractère réel des signaux considérés aura été dûment signalé :

$$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) = \langle x, y_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t + \tau) dt \quad (4.42)$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = \langle x, x_\tau \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t + \tau) dt \quad (4.43)$$

Par changement de variable, on peut aussi écrire de manière équivalente

$$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)y(t) dt \quad (4.44)$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)x(t) dt \quad (4.45)$$

**Les fonctions d'intercorrélacion et d'autocorrélacion de signaux réels sont aussi réelles.**

Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont mesurés en volts,  $\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau)$  et  $\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau)$  sont en  $V^2 \cdot s$ .

#### 4.2.13 Propriété

De (4.37), on déduit que pour des signaux réels

$$\overset{\circ}{\varphi}_{yx}(\tau) = \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(-\tau) \quad (4.46)$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = \overset{\circ}{\varphi}_x(-\tau) \quad (4.47)$$

Ainsi, **la fonction d'autocorrélacion d'un signal réel est une fonction réelle paire.**

#### 4.2.14 Propriété

En introduisant (4.36) et (4.38) dans l'inégalité de Schwarz (3.20), on obtient

$$|\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau)|^2 \leq \overset{\circ}{\varphi}_x(0) \overset{\circ}{\varphi}_y(0) \quad (4.48)$$

et en particulier pour l'autocorrélation

$$|\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau)| \leq \overset{\circ}{\varphi}_x(0) \quad (4.49)$$

La fonction d'autocorrélation est donc bornée, en valeur absolue, par l'énergie du signal.

#### 4.2.15 Relation entre convolution et corrélation

L'introduction du changement de variable d'intégration  $t' = -t$  dans l'expression de l'intercorrélation de deux signaux (4.36) permet de l'écrire sous la forme du produit de convolution de  $x^*(-t)$  et de  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)y(t+\tau) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(-t')y(\tau-t') dt' \\ &= x^*(-\tau) * y(\tau) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Pour l'autocorrélation, on obtient de manière analogue

$$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = x^*(-\tau) * x(\tau) \quad (4.51)$$

Dans le cas de signaux réels, on obtient respectivement :  $\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau)$  et  $\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = x(-\tau) * x(\tau)$ .

#### 4.2.16 Illustration

La parenté d'écriture entre la convolution et la corrélation ne doit pas tromper. Les résultats du calcul sont très différents lorsque les signaux sont de forme asymétrique. L'examen de la formule (4.50) montre que l'identité entre convolution et corrélation n'est réalisée que lorsque l'un des deux signaux au moins est pair. La figure 4.14 illustre graphiquement la procédure de calcul de la convolution et de la corrélation des signaux réels  $x(t) = \exp(-at) \epsilon(t)$  et  $y(t) = \exp(-2at) \epsilon(t)$ . On vérifiera, à titre d'exercice, que les résultats sont

$$\begin{aligned} x(\tau) * y(\tau) &= (1/a)[\exp(-a\tau) - \exp(-2a\tau)] \epsilon(\tau) \\ \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) &= (3a)^{-1} \exp(a\tau) \epsilon(-\tau) + (3a)^{-1} \exp(-2a\tau) \epsilon(\tau) \end{aligned}$$

#### 4.2.17 Définition : densité spectrale d'énergie

Soit  $\overset{\circ}{\Phi}_x(f)$  la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation d'un signal, réel ou complexe, à énergie finie  $x(t)$  :

$$\overset{\circ}{\Phi}_x(f) = F\{\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (4.52)$$

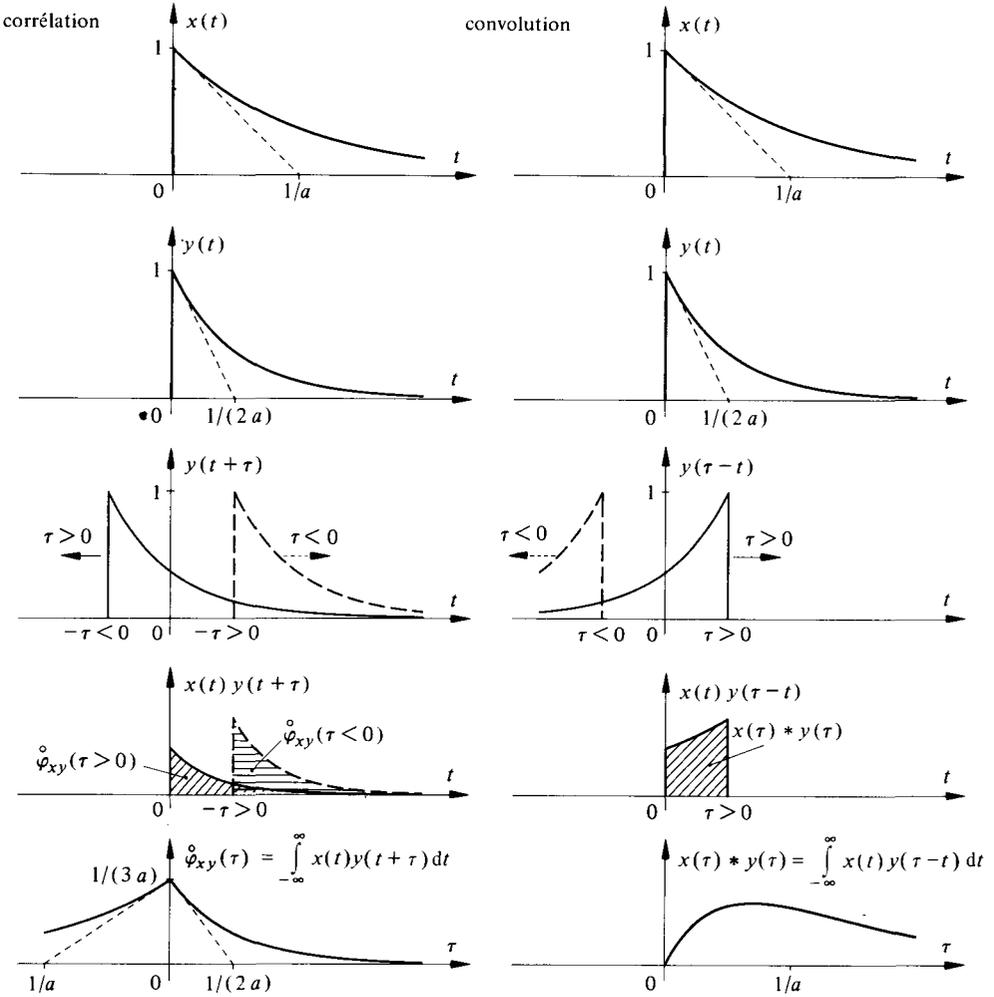


Fig. 4.14

De (4.51), on tire également

$$\overset{\circ}{\Phi}_x(f) = F \{x^*(-\tau) * x(\tau)\} \tag{4.53}$$

Or, en vertu des propriétés (4.11) et (4.18)

$$F \{x^*(-\tau)\} = X^*(f) \tag{4.54}$$

Le résultat suivant se déduit alors de la propriété (4.14) :

$$\overset{\circ}{\Phi}_x(f) = X^*(f) X(f) = |X(f)|^2 \tag{4.55}$$

En posant  $\tau = 0$  dans l'expression de la transformée de Fourier inverse de  $\overset{\circ}{\Phi}_x(f)$

$$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{\Phi}_x(f) \exp(j 2\pi f \tau) df \tag{4.56}$$

et, en tenant compte du résultat (4.39), on obtient la forme particulière de l'identité de Parseval (§ 3.3.4)

$$W_x = \hat{\varphi}_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}_x(f) df \quad (4.57)$$

L'énergie totale  $W_x$  du signal peut donc se calculer soit en intégrant sa distribution temporelle  $|x(t)|^2$ , soit en intégrant sa distribution fréquentielle  $\hat{\Phi}_x(f)$ . Pour cette raison,  $\hat{\Phi}_x(f)$  est appelée la *densité spectrale d'énergie* — ou parfois plus simplement le *spectre d'énergie* — du signal  $x(t)$ .

#### 4.2.18 Propriété de la densité spectrale d'énergie

De la relation (4.55), on déduit que la densité spectrale d'énergie  $\hat{\Phi}_x(f)$  est

- indépendante du spectre de phase du signal, donc insensible, en vertu du théorème du retard (4.16), à toute translation du signal sur l'axe du temps;
- une fonction réelle *non négative* :

$$\hat{\Phi}_x(f) \geq 0 \quad (4.58)$$

La part de l'énergie du signal  $x(t)$  distribuée entre les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  est donnée par

$$\Delta W_x = \int_{-f_2}^{-f_1} \hat{\Phi}_x(f) df + \int_{f_1}^{f_2} \hat{\Phi}_x(f) df = 2 \int_{f_1}^{f_2} \hat{\Phi}_x(f) df \quad (4.59)$$

Dans le cas d'un signal  $x(t)$  *réel*, la fonction d'autocorrélation est, par (4.47), une fonction réelle paire. Sa transformée de Fourier est, par conséquent, aussi une fonction réelle paire

$$\hat{\Phi}_x(f) = \hat{\Phi}_x(-f) \quad (4.60)$$

Si le signal est mesuré en volts, la densité spectrale d'énergie est en  $V^2 \cdot s^2 = V^2 \cdot s/Hz$ .

#### 4.2.19 Exemple

Soit  $x(t) = \exp(-at) \cdot \epsilon(t)$ , sa fonction d'autocorrélation, calculée par (4.43) et (4.47), vaut

$$\hat{\varphi}_x(\tau) = \frac{1}{2a} \exp(-a|\tau|) \quad (4.61)$$

et la densité spectrale d'énergie du signal est

$$\hat{\Phi}_x(f) = F \left| \hat{\varphi}_x(\tau) \right| = \frac{1}{a^2 + (2\pi f)^2} \quad (4.62)$$

On vérifie qu'elle est bien égale au carré du spectre d'amplitude de  $x(t)$  calculé à l'exemple 4.2.2.

Ces trois fonctions sont représentées sur la figure 4.15.

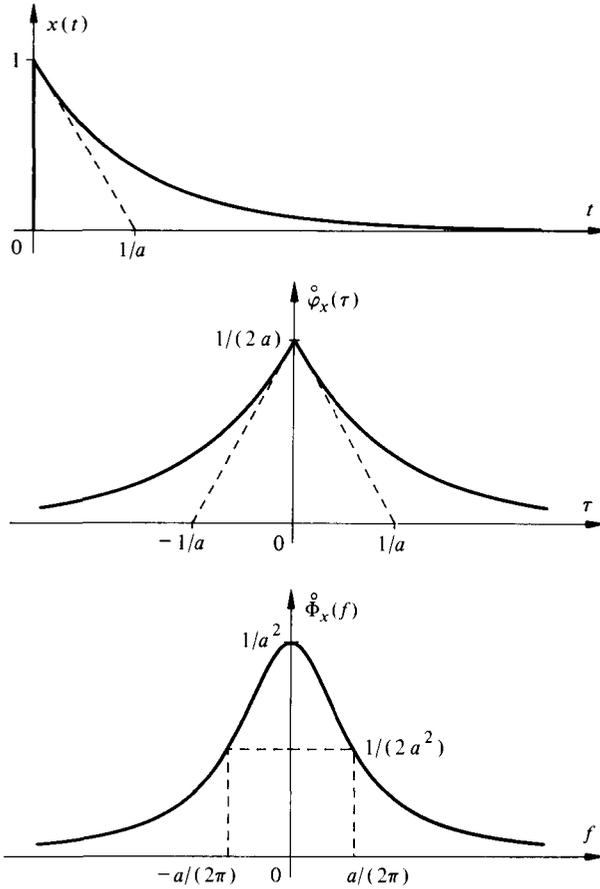


Fig. 4.15

**4.2.20 Exemple**

La fonction d'autocorrélation et la densité spectrale d'énergie du signal  $x(t) = A \text{ rect}(t/T)$  valent respectivement (fig. 4.16) :

$$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = A^2 T \text{ tri}(\tau/T) \tag{4.63}$$

$$\overset{\circ}{\Phi}_x(f) = (AT)^2 \text{ sinc}^2(Tf) \tag{4.64}$$

Le résultat (4.63) est analogue, par (4.51), à (1.33). Il peut ici facilement s'obtenir par voie graphique en suivant la procédure illustrée sur la figure 4.14. On vérifie aisément que  $\overset{\circ}{\varphi}_x(0)$  correspond bien à l'énergie du signal.

**4.2.21 Définition : densité interspectrale d'énergie**

La transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélacion de deux signaux à énergie finie est appelée *densité interspectrale d'énergie*. Cette terminologie n'est pas unique : on rencontre dans la littérature française les termes : *densité spectrale mutuelle*,

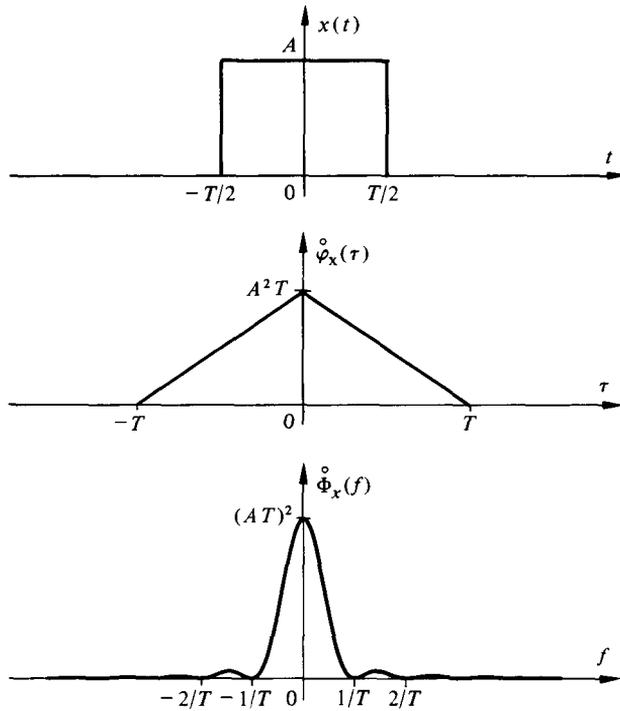


Fig. 4.16

*croisée* ou *d'interaction*. Pour des signaux réels ou complexes, on a par (4.14), (4.50) et (4.54)

$$\hat{\Phi}_{xy}(f) = F \{ \hat{\varphi}_{xy}(\tau) \} = X^*(f) Y(f) \quad (4.65)$$

La densité interspectrale d'énergie est en général une fonction complexe et non symétrique.

De (4.37) et (4.54), on tire

$$\hat{\Phi}_{xy}(f) = \hat{\Phi}_{yx}^*(f) \quad (4.66)$$

#### 4.2.22 Théorème du produit

En posant  $\tau = 0$  dans l'expression de la fonction d'intercorrélation (4.36), on obtient la forme suivante de la relation générale de Parseval (3.83) qui est connue sous le nom de théorème du produit

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{xy}(0) &= F^{-1} \{ \hat{\Phi}_{xy}(f) \} \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) y(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) Y(f) df \end{aligned} \quad (4.67)$$

Elle exprime la **conservation du produit scalaire** entre l'espace temps et l'espace fréquence.

## 4.2.23 Exemple

Les signaux réels

$$x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$$

$$y(t) = B \operatorname{rect}[(t + T/4)/(T/2)] - B \operatorname{rect}[(t - T/4)/(T/2)]$$

sont représentés sur la figure 4.17 avec leurs fonctions d'intercorrrelation  $\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau)$  et  $\overset{\circ}{\varphi}_{yx}(\tau)$ . Celles-ci peuvent facilement être déterminées par voie graphique en suivant la procédure illustrée à la figure 4.14. La densité interspectrale d'énergie vaut ici

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\Phi}_{xy}(f) &= jABT^2 \operatorname{sinc}(Tf) \operatorname{sinc}(Tf/2) \sin(\pi Tf/2) \\ &= jAB(T^2/2)[\operatorname{sinc}^2(Tf/2) \sin(\pi fT)] \end{aligned}$$

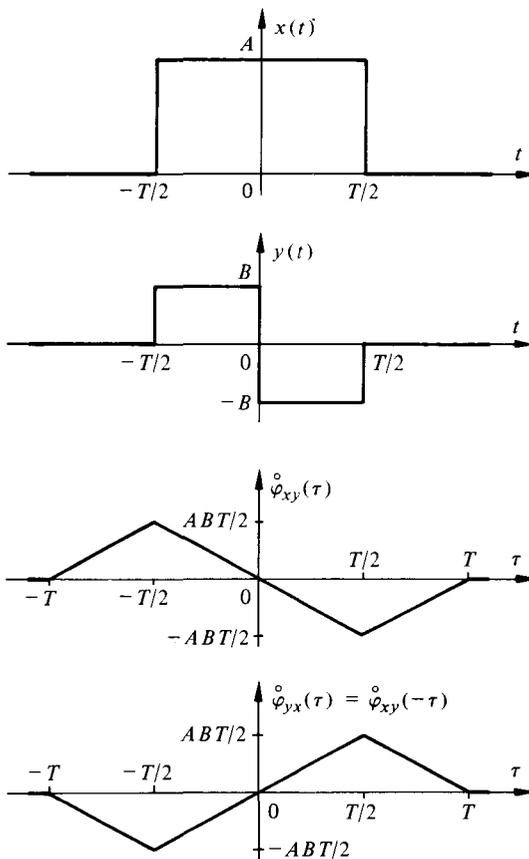


Fig. 4.17

Le lecteur pourra vérifier ce résultat à titre d'exercice soit en utilisant le résultat (4.65), soit en calculant directement la transformée de Fourier de  $\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau)$ . Il observera que la formule (4.67) donne ici un résultat nul, indiquant que les signaux sont orthogonaux.

#### 4.2.24 Condition suffisante d'orthogonalité de deux signaux

De (4.67), il découle que deux signaux dont les spectres ont des supports disjoints sont orthogonaux. La condition n'est toutefois pas nécessaire, comme on peut le constater dans l'exemple précédent.

#### □ 4.2.25 Dérivée de la fonction de corrélation

Les formules (4.50) et (4.65) établissent la correspondance

$$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) * y(\tau) \leftrightarrow \overset{\circ}{\Phi}_{xy}(f) = X^*(f) Y(f) \quad (4.68)$$

En utilisant la propriété (4.13) de la transformation de Fourier, on obtient pour la dérivée de la fonction d'intercorrélation

$$\overset{\circ}{\varphi}'_{xy}(\tau) = d\overset{\circ}{\varphi}_{xy}/d\tau \leftrightarrow j2\pi f X^*(f) Y(f) \quad (4.69)$$

En associant le facteur  $(j2\pi f)$  soit à  $X^*(f)$ , soit à  $Y(f)$ , on trouve par transformation inverse

$$\overset{\circ}{\varphi}'_{xy}(\tau) = -x^{*'}(-\tau) * y(\tau) = x^*(-\tau) * y'(\tau) \quad (4.70)$$

ou en d'autres termes

$$\overset{\circ}{\varphi}'_{xy}(\tau) = -\overset{\circ}{\varphi}_{x'y}(\tau) = \overset{\circ}{\varphi}_{xy'}(\tau) \quad (4.71)$$

D'une manière générale, la  $(j+k)$  ième dérivée de la fonction d'intercorrélation peut être déterminée à partir de celle de la  $j$ -ième dérivée de  $x(t)$  et de la  $k$ -ième dérivée de  $y(t)$  par l'équivalence

$$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}^{(j+k)}(\tau) = (-1)^j \overset{\circ}{\varphi}_{x^{(j)}y^{(k)}}(\tau) \quad (4.72)$$

#### □ 4.2.26 Exemple

Considérons les signaux réels  $x(t)$  et  $y(t)$  représentés sur la figure 4.17 avec leurs fonctions d'intercorrélation. En dérivant  $y(t)$ , on obtient (§ 1.3.8)

$$y'(t) = B\delta(t + T/2) - 2B\delta(t) + B\delta(t - T/2)$$

La dérivée de la fonction d'intercorrélation  $\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau)$  peut alors être évaluée très simplement par (4.70) en exploitant la propriété de convolution de l'impulsion de

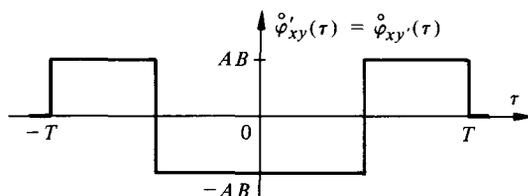


Fig. 4.18

Dirac (1.48)

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi}'_{xy}(\tau) &= \overset{\circ}{\varphi}_{xy'}(\tau) = x(-\tau) * y'(\tau) \\ &= AB \operatorname{rect}[(\tau + T/2)/T] - 2AB \operatorname{rect}(\tau/T) + AB \operatorname{rect}[(\tau - T/2)/T] \\ &= AB \{ \operatorname{rect}[(\tau + 3T/4)/(T/2)] - \operatorname{rect}(\tau/T) + \operatorname{rect}[(\tau - 3T/4)/(T/2)] \} \end{aligned}$$

Cette fonction est représentée sur la figure 4.18. On vérifie aisément que son intégrale reproduit la fonction  $\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau)$  de la figure 4.17.

### 4.3 SIGNAUX À PUISSANCE FINIE

#### 4.3.1 Modèles de signaux physiquement irréalisables

Les signaux à puissance moyenne finie non nulle ont été définis au paragraphe 2.3.4, ils satisfont à la condition

$$0 < P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \quad (4.73)$$

où  $P_x$  dénote la puissance totale normalisée.

Ces signaux, comme on l'a déjà relevé au chapitre 2, possèdent une énergie infinie et sont de ce fait physiquement irréalisables. Ils constituent toutefois une abstraction commode permettant de modéliser des catégories importantes de signaux ayant un comportement quasi permanent. C'est le cas de la constante (en électrotechnique : régime continu), du saut unité, de la fonction signe et de l'ensemble des signaux périodiques, ou quasi-périodiques usuels. Cette abstraction est également utilisée dans la modélisation des signaux aléatoires (chap. 5).

#### 4.3.2 Extension de la transformation de Fourier

Les signaux à puissance finie ne satisfont pas les critères de convergence usuels de la transformée de Fourier. Cette méthode d'analyse ne peut être envisagée rigoureusement dans ce cas qu'en élargissant le champ d'application de la transformation de Fourier aux fonctions appelées distributions (voir chap. IV.7 et [22]).

Le résultat essentiel de la théorie des distributions pour l'analyse des signaux est la correspondance

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1 \quad (4.74)$$

qui se déduit de la propriété fondamentale (1.35) de l'impulsion de Dirac.

En raison de la symétrie des transformations directe et inverse, on a également

$$1 \longleftrightarrow \delta(f) \quad (4.75)$$

Par application directe des propriétés (4.16) et (4.17), on a également

$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow \exp(-j 2\pi f t_0) \quad (4.76)$$

et

$$\exp(j 2\pi f_0 t) \longleftrightarrow \delta(f - f_0) \quad (4.77)$$

### 4.3.3 Application : signal constant et valeur moyenne

La transformée de Fourier d'un signal de valeur constante  $x(t) = C$  est une impulsion de Dirac de poids  $C$  (fig. 4.19)

$$x(t) = C \leftrightarrow X(f) = C\delta(f) \quad (4.78)$$

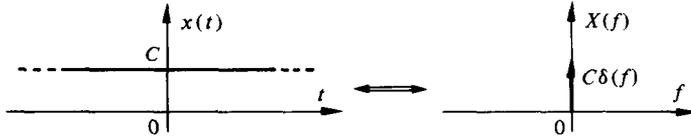


Fig. 4.19

On peut étendre, par analogie, ce résultat à la valeur moyenne d'un signal

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (4.79)$$

$$\bar{x} \leftrightarrow \bar{x} \delta(f) \quad (4.80)$$

### 4.3.4 Transformée de Fourier des signaux à valeur moyenne non nulle

Tout signal à puissance moyenne finie peut être représenté par la somme de sa valeur moyenne et d'un terme à valeur moyenne nulle

$$x(t) = \bar{x} + x_0(t) \quad (4.81)$$

avec

$$\bar{x}_0(t) = \overline{x(t) - \bar{x}} = 0 \quad (4.82)$$

En dérivant  $x(t)$ , on obtient

$$x'(t) = dx/dt = x'_0(t) \quad (4.83)$$

quelle que soit la constante  $\bar{x}$ .

En d'autres termes, on peut toujours écrire

$$x(t) = \int_{-\infty}^t x'_0(t) dt + \bar{x} \quad (4.84)$$

où  $\bar{x}$  joue le rôle de constante d'intégration.

Par (4.13), on a

$$F \{x'_0(t)\} = j 2\pi f X_0(f) \quad \forall \bar{x} \quad (4.85)$$

et donc

$$F \left\{ x_0(t) = \int_{-\infty}^t x'_0(t) dt \right\} = \frac{1}{j 2\pi f} F \{x'_0(t)\} \quad (4.86)$$

En tenant compte de (4.80), (4.84) et (4.86), la transformée de Fourier d'un signal à puissance moyenne finie  $x(t)$  peut s'écrire

$$X(f) = \frac{1}{j 2\pi f} F \{x'_0(t)\} + \bar{x} \delta(f) \quad (4.87)$$

#### 4.3.5 Exemple : signal saut unité

Soit  $x(t) = \epsilon(t) : \bar{x} = 1/2, x_0(t) = 1/2 \operatorname{sgn}(t)$  et  $x'_0(t) = \delta(t)$ . De (4.87), on déduit la correspondance

$$\epsilon(t) \leftrightarrow \frac{1}{j 2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f) \quad (4.88)$$

On peut en déduire, par (4.14), que la transformée de Fourier de l'intégrale  $z(t) = y(t) * \epsilon(t) = \int_{-\infty}^t y(t) dt$  vaut :  $Z(f) = (j 2\pi f)^{-1} Y(f) + \frac{1}{2} Y(0)\delta(f)$ .

#### 4.3.6 Exemple : signal signe

Soit  $x(t) = \operatorname{sgn}(t) : \bar{x} = 0$  et  $x'_0(t) = 2 \delta(t)$  d'où

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j \pi f} \quad (4.89)$$

#### 4.3.7 Définition : corrélation de signaux à puissance moyenne finie

Le produit scalaire (4.36) définissant l'intercorrélation de signaux à énergie finie n'est pas applicable dans le cas de signaux à puissance moyenne finie non nulle pour lesquels l'intégrale n'est pas définie. On lui substitue alors la valeur moyenne limite

$$\begin{aligned} \varphi_{xy}(\tau) &= \langle x^*, y_\tau \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t+\tau) dt \end{aligned} \quad (4.90)$$

qui définit la *fonction d'intercorrélation de signaux à puissance moyenne finie*. C'est aussi une mesure de la similitude de forme et de position de ces signaux.

Par analogie, la *fonction d'autocorrélation de signaux à puissance moyenne finie* est définie par la limite

$$\begin{aligned} \varphi_x(\tau) &= \langle x^*, x_\tau \rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t+\tau) dt \end{aligned} \quad (4.91)$$

Lorsque les signaux sont réels, les fonctions d'inter- et d'autocorrélation sont aussi réelles. Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont mesurés en volts,  $\varphi_{xy}(\tau)$  et  $\varphi_x(\tau)$  sont en  $V^2$ .

#### 4.3.8 Propriétés

Les fonctions d'inter- et d'autocorrélation  $\varphi_x(\tau)$  et  $\varphi_{xy}(\tau)$  jouissent des mêmes propriétés que les fonctions  $\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau)$  et  $\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau)$  :

$$\varphi_{yx}(\tau) = \varphi_{xy}^*(-\tau) \quad (4.92)$$

$$\varphi_x(\tau) = \varphi_x^*(-\tau) \quad (4.93)$$

$$|\varphi_{xy}(\tau)|^2 \leq \varphi_x(0) \varphi_y(0) \quad (4.94)$$

$$|\varphi_x(\tau)| \leq \varphi_x(0) = P_x \quad (4.95)$$

$$\varphi'_{xy}(\tau) = -\varphi_{x'y}(\tau) = \varphi_{xy'}(\tau) \quad (4.96)$$

La valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation correspond à la puissance normalisée du signal. Si les signaux sont réels :  $\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}(-\tau)$  et  $\varphi_x(\tau) = \varphi_x(-\tau)$ .  
**La fonction d'autocorrélation d'un signal réel est toujours une fonction réelle paire.**

Des relations analogues à (4.50) et (4.51) lient les fonctions de corrélation  $\varphi_{xy}(\tau)$  et  $\varphi_x(\tau)$  au produit de convolution de signaux à puissance moyenne finie, qui doit lui-même être défini comme une limite (repérée par la notation  $\bar{*}$ )

$$x(\tau) \bar{*} y(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(\tau - t) dt \quad (4.97)$$

On a alors les équivalences

$$\varphi_{xy}(\tau) = x^*(-\tau) \bar{*} y(\tau) \quad (4.98)$$

$$\varphi_x(\tau) = x^*(-\tau) \bar{*} x(\tau) \quad (4.99)$$

Les signaux  $x(t)$  et  $y(t + \tau)$  sont **orthogonaux** pour chaque valeur de  $\tau$  où la fonction d'intercorrélation s'annule.

#### 4.3.9 Définition : densité spectrale de puissance

La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation (4.91) est appelée la **densité spectrale de puissance** du signal à puissance moyenne finie  $x(t)$  :

$$\Phi_x(f) = F \{ \varphi_x(\tau) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(\tau) \exp(-j 2 \pi f \tau) d\tau \quad (4.100)$$

La relation inverse est

$$\varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) \exp(j 2 \pi f \tau) df \quad (4.101)$$

Pour  $\tau = 0$ , on obtient la forme particulière de l'identité de Parseval

$$P_x = \varphi_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df \quad (4.102)$$

La fonction  $\Phi_x(f)$  représente donc bien la distribution fréquentielle de la puissance totale du signal, d'où son nom. C'est par conséquent une **fonction non négative** :

$$\Phi_x(f) \geq 0 \quad (4.103)$$

Si  $x(t)$  est en volts,  $\varphi_x(\tau)$  est en  $V^2$  et  $\Phi_x(f)$  en  $V^2/\text{Hz}$ .

Dans le cas d'un signal  $x(t)$  **réel**,  $\varphi_x(\tau)$  est une fonction réelle paire et la densité spectrale de puissance est aussi une **fonction réelle paire** :  $\Phi_x(f) = \Phi_x(-f)$ .

#### 4.3.10 Observation importante

Au contraire de la densité spectrale d'énergie  $\hat{\Phi}_x(f)$ , la densité spectrale de puissance  $\Phi_x(f)$  **n'est pas égale au carré du module de la transformée de Fourier** du signal.

Une autre relation peut toutefois être établie par un passage à la limite.

Soit  $x(t)$  un signal à puissance moyenne finie et  $x(t, T) = x(t) \cdot \text{rect}(t/T)$  un signal à énergie finie dont la transformée de Fourier est  $X(f, T)$

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x(t, T) \tag{4.104}$$

Par (4.55), la densité spectrale d'énergie de  $x(t, T)$  s'écrit

$$\dot{\Phi}_x(f, T) = |X(f, T)|^2 \tag{4.105}$$

Lorsque  $T \rightarrow \infty$ , l'énergie du signal devient infinie, la puissance restant, elle, finie

$$\begin{aligned} P_x &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t, T)|^2 dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X(f, T)|^2 df \end{aligned} \tag{4.106}$$

La dernière égalité découle de (4.57).

En comparant (4.102) et (4.106), on voit que l'on peut aussi définir la densité spectrale de puissance par la limite, pour autant que celle-ci existe :

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \tag{4.107}$$

### 4.3.11 Exemples

Les fonctions d'autocorrélation (4.91) du signal  $\text{sgn}(t)$  et du signal saut unité  $\epsilon(t)$  sont respectivement égales à 1 et  $\frac{1}{2}$ . Par (4.100) et (4.78), les densités spectrales de puissance correspondantes sont respectivement égales à  $\delta(f)$  et  $\frac{1}{2} \delta(f)$ . Ces résultats ne peuvent pas se déduire de (4.88) ou (4.89).

Pour le signal saut unité  $x(t) = \epsilon(t)$ , on a par (4.29)

$$x(t, T) = \text{rect}[(t - T/4)/(T/2)] \leftrightarrow X(f, T) = (T/2) \text{sinc}(fT/2) \cdot \exp(-j \pi f T/2)$$

d'où

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 = \frac{1}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2} \text{sinc}^2(fT/2) = \frac{1}{2} \delta(f)$$

Par contre, dans le cas du signal  $x(t) = \text{sgn}(t)$ , on a

$$x(t, T) = \text{rect}\left(\frac{t + T/4}{T/2}\right) - \text{rect}\left(\frac{t - T/4}{T/2}\right) \leftrightarrow X(f) = j T \text{sinc}(fT/2) \cdot \sin(\pi f T/2)$$

et la limite (4.107) n'est pas définie.

### 4.3.12 Définition : densité interspectrale de puissance

La transformée de Fourier de la fonction d'intercorrélacion  $\varphi_{xy}(\tau)$  est appelée *densité interspectrale de puissance*, ou encore *densité spectrale de puissance mutuelle*

$$\Phi_{xy}(f) = F \{ \varphi_{xy}(\tau) \} \tag{4.108}$$

C'est en général une fonction complexe et non symétrique.

#### 4.4 CAS PARTICULIER DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

##### 4.4.1 Transformée de Fourier d'un signal périodique

La transformée de Fourier d'un signal périodique est obtenue directement à partir de son développement en série de Fourier (3.74) et en tenant compte de la relation (4.77).

En effet, si  $x(t) = x(t + mT)$  avec  $m$  entier, on sait que :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j 2 \pi n t / T) \quad (4.109)$$

d'où, avec  $f_n = n/T$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta \left( f - \frac{n}{T} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta (f - f_n) \quad (4.110)$$

Ainsi, la transformée de Fourier d'un signal périodique de période  $T$  apparaît comme une combinaison linéaire de masses ponctuelles localisées aux fréquences discrètes  $f_n = n/T$ . C'est le modèle mathématique d'un *spectre de raies* (fig. 4.20).

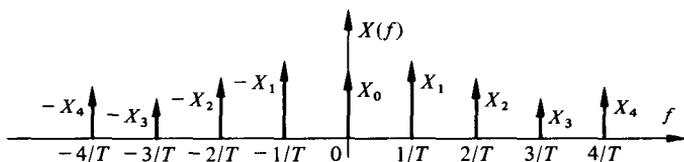


Fig. 4.20

##### 4.4.2 Spectre d'amplitude et spectre de phase d'un signal périodique

Le coefficient  $X_n$  est le poids complexe de la raie à la fréquence  $f_n$ . L'ensemble des modules de ces coefficients  $\{|X_n|\}$  renseigne sur les amplitudes des composantes de même que l'ensemble des arguments  $\{\arg X_n\}$  renseigne sur les déphasages de chaque composante.

Par convention et pour garder une parenté d'écriture avec celle utilisée pour les signaux à énergie finie, nous dénoterons le spectre d'amplitude et le spectre de phase d'un signal périodique par  $|X(f)|$  et  $\vartheta_x(f)$  respectivement, avec les correspondances

$$|X(f)| \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n| \delta \left( f - \frac{n}{T} \right) \quad (4.111)$$

$$\vartheta_x(f) \triangleq \arg X_n \Big|_{f=n/T} \quad (4.112)$$

Pour tout signal *réel*, les coefficients  $X_n$  et  $X_{-n}$  sont des conjugués complexes :

$$|X_n| = |X_{-n}| \quad (4.113)$$

$$\arg X_n = -\arg X_{-n} \quad (4.114)$$

**4.4.3 Exemple : signal sinusoïdal**

Soit

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \alpha) \\ = \frac{1}{2}A \exp[-j(2\pi f_0 t - \alpha)] + \frac{1}{2}A \exp[j(2\pi f_0 t - \alpha)]$$

Par (4.77), il vient

$$X(f) = \frac{1}{2}A \exp(j\alpha) \delta(f + f_0) + \frac{1}{2}A \exp(-j\alpha) \delta(f - f_0) \tag{4.115}$$

d'où

$$X_{-1} = \frac{1}{2}A \exp(j\alpha); \quad X_1 = \frac{1}{2}A \exp(-j\alpha) \\ |X_{-1}| = |X_1| = \frac{1}{2}A \tag{4.116}$$

$$\arg X_1 = -\arg X_{-1} = -\alpha$$

En posant  $\alpha = 0$  et  $\alpha = \pi/2$ , on a les paires de transformées suivantes (fig. 4.21)

$$x_1(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2}A [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \tag{4.117}$$

$$x_2(t) = A \sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow j \frac{1}{2}A [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)] \tag{4.118}$$

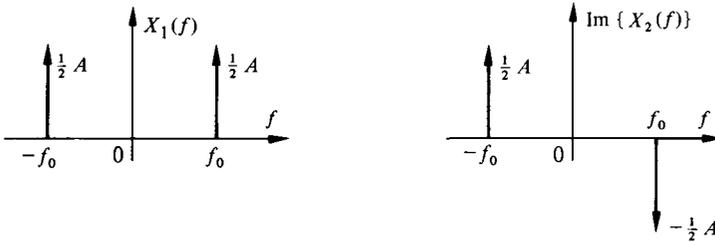


Fig. 4.21

**4.4.4 Produit d'une fonction périodique par un signal à énergie finie**

Le signal  $z(t) = x(t) \cdot y(t)$ , où  $x(t)$  est un signal à énergie finie et  $y(t) = y(t + mT)$  est une fonction périodique, est aussi à énergie finie.

Par (4.15), (4.110) et (1.48), la transformée de Fourier du produit vaut

$$Z(f) = X(f) * Y(f) \\ = X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n \delta(f - n/T) \\ = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y_n X(f - n/T) \tag{4.119}$$

Le résultat est une combinaison linéaire de versions du spectre de  $x(t)$ , décalée par pas régulier de  $1/T$  sur l'axe des fréquences.

**4.4.5 Exemple**

Reprenons le cas de l'exemple 4.2.3 où l'on a un produit  $z(t) = x(t) \cdot y(t)$  avec  $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ .

De (4.117) et (4.119), on tire immédiatement

$$Z(f) = \frac{1}{2} X(f + f_0) + \frac{1}{2} X(f - f_0)$$

#### 4.4.6 Produit d'une fonction périodique par un signal à puissance moyenne finie

Le résultat est un signal à puissance moyenne finie dont la transformée de Fourier peut aussi s'obtenir par convolution des transformées de chaque terme du produit.

#### 4.4.7 Exemple

Le lecteur vérifiera, à titre d'exercice, les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} \epsilon(t) \cos(2\pi f_0 t) &\leftrightarrow \frac{1}{4} [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \\ &\quad + \frac{1}{j4\pi(f + f_0)} + \frac{1}{j4\pi(f - f_0)} \end{aligned}$$

$$\text{sgn}(t) \sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi(f + f_0)} - \frac{1}{2\pi(f - f_0)}$$

$$\begin{aligned} \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) &\leftrightarrow \frac{1}{4} [\delta(f - f_1 - f_2) + \delta(f - f_1 + f_2) + \delta(f + f_1 - f_2) \\ &\quad + \delta(f + f_1 + f_2)] \end{aligned}$$

#### 4.4.8 Suite périodique d'impulsions de Dirac

La distribution périodique

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (4.120)$$

ne représente pas un signal à puissance moyenne finie, mais est souvent utilisée pour la modélisation de signaux périodiques ou de procédures d'échantillonnage.

Cette distribution peut être développée en série de Fourier

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta_n \exp(j2\pi nt/T) \quad (4.121)$$

avec, par (3.75) et (1.35) :

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) \exp(-j2\pi nt/T) dt \\ &= \frac{1}{T} \end{aligned} \quad (4.122)$$

La transformée de Fourier de cette distribution se déduit alors de (4.121), (4.122) et (4.77)

$$F\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f) \quad (4.123)$$

C'est aussi une suite périodique d'impulsions de Dirac, de poids  $1/T$  et de période  $1/T$  sur l'axe des fréquences. La suite  $\delta_T(t)$  et sa transformée sont représentées sur la figure 4.22.

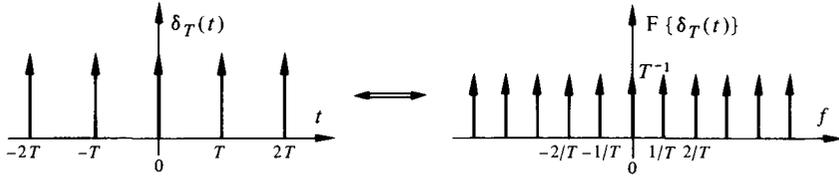


Fig. 4.22

**4.4.9 Définition : enveloppe spectrale**

Un signal périodique peut être considéré comme la répétition cyclique d'un signal élémentaire  $x(t, T)$  représentant sa *période principale*. Par la propriété de convolution de l'impulsion de Dirac, on peut écrire

$$x(t) = x(t + mT) = \text{rep}_T \{x(t, T)\} = x(t, T) * \delta_T(t) \tag{4.124}$$

Par conséquent, en vertu de (4.14) et (4.123)

$$\begin{aligned} X(f) &= \frac{X(f, T)}{T} \cdot \delta_{1/T}(f) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X\left(\frac{n}{T}, T\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned} \tag{4.125}$$

La fonction continue  $(1/T)X(f, T)$  est l'*enveloppe spectrale* des poids des raies  $\delta_{1/T}(f)$  du spectre de  $x(t)$ . Hormis un facteur multiplicatif  $1/T$ , cette enveloppe ne dépend que de la forme de la période principale du signal.

En comparant (4.110) et (4.125), on tire l'équivalence

$$X_n = (1/T)X(n/T, T) \tag{4.126}$$

Les coefficients du développement en série de Fourier d'un signal périodique  $x(t)$  peuvent donc se calculer en divisant la transformée de la période principale par  $T$  et en évaluant le résultat aux valeurs discrètes de fréquence  $f_n = n/T$ .

L'ensemble des valeurs  $X(n/T, T) = T \cdot X_n$  constitue une représentation discrète de la transformée de Fourier du signal  $x(t, T)$  analogue à celle introduite au paragraphe 9.3.11.

**4.4.10 Exemple : suite périodique d'impulsions rectangulaires**

Le signal périodique suivant joue un rôle important en théorie et en pratique

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{rep}_T \{A \text{ rect}(t/\Delta)\} \\ &= A \text{ rect}(t/\Delta) * \delta_T(t) \end{aligned} \tag{4.127}$$

Par (4.26) et (4.125), sa transformée de Fourier vaut

$$\begin{aligned} X(f) &= A \frac{\Delta}{T} \operatorname{sinc}(\Delta f) \cdot \delta_{1/T}(f) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A \frac{\Delta}{T} \operatorname{sinc}(n\Delta/T) \delta(f - n/T) \end{aligned} \quad (4.128)$$

La fonction continue  $(A \Delta/T) \operatorname{sinc}(\Delta f)$  est l'enveloppe spectrale de ce signal (fig. 4.23).

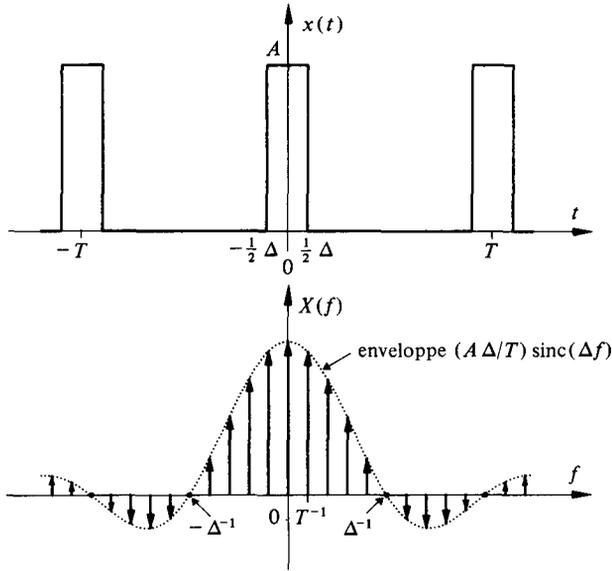


Fig. 4.23

#### 4.4.11 Exemple

Considérons le signal en dents de scie  $x(t)$  représenté sur la figure 4.24 et sa période principale  $x(t, T)$ . La dérivée

$$x'(t, T) = \frac{A}{T} \operatorname{rect}(t/T) - A \delta(t) + \frac{A}{2} [\delta(t + T/2) - \delta(t - T/2)]$$

a pour transformée

$$F \{x'(t)\} = A [\operatorname{sinc}(Tf) - 1 + j \sin(\pi Tf)]$$

Par (4.13) et (4.125), on obtient

$$\frac{1}{T} X(f, T) = \frac{A}{j 2\pi f T} |\operatorname{sinc}(Tf) - 1 + j \sin(\pi Tf)|$$

d'où

$$X(f) = \sum_n X_n \delta(f - n/T)$$

avec

$$X_n = \frac{1}{T} X(n/T, T) = \begin{cases} A/2 & \text{pour } n = 0 \\ j \frac{A}{2\pi n} = \frac{A}{2\pi |n|} \exp \left[ j \frac{\pi}{2} \cdot \text{sgn}(n) \right] & \text{pour } n \neq 0 \end{cases}$$

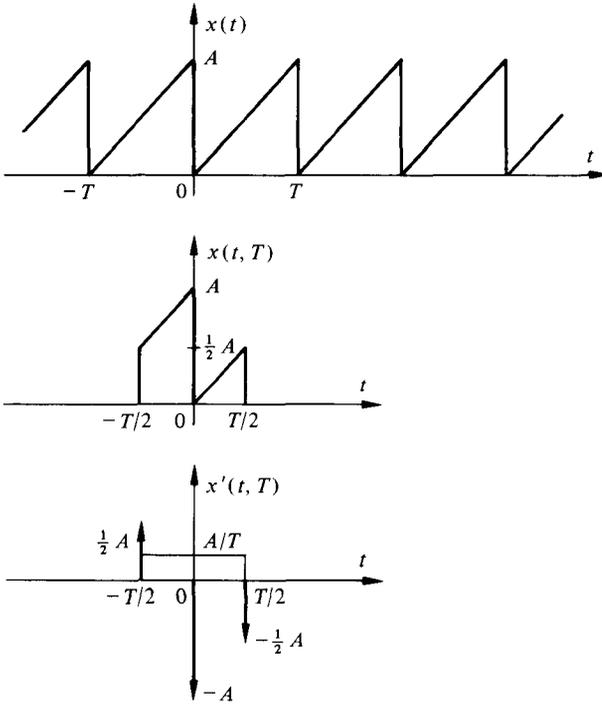


Fig. 4.24

#### 4.4.12 Fonction de corrélation de signaux périodiques

Dans le cas de signaux périodiques de même période  $T$ , les limites (4.90) et (4.91) sont identiques aux valeurs moyennes calculées sur une période unique

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)y(t + \tau) dt \tag{4.129}$$

et

$$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t + \tau) dt \tag{4.130}$$

En développant en série de Fourier  $y(t + \tau)$  et  $x(t + \tau)$ , on peut mettre les expressions (4.129) et (4.130) sous la forme

$$\varphi_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* Y_n \exp(j2\pi n\tau/T) \tag{4.131}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_x(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \exp(j 2\pi n\tau/T) \\ &= X_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |X_n|^2 \cos(2\pi n\tau/T)\end{aligned}\quad (4.132)$$

La deuxième égalité ne s'applique qu'au cas d'un signal *réel*. La démonstration est laissée comme exercice. Pour  $\tau = 0$ , on retrouve l'identité de Parseval (3.76).

Les relations (4.131) et (4.132) montrent que **les fonctions d'inter- et d'auto-corrélation de signaux périodiques, de période  $T$ , sont également des fonctions périodiques de même période.**

En introduisant la période principale  $x(t, T)$  dans (4.129), on peut encore écrire, en tenant compte de (4.50) et (4.124) :

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t, T) y(t + \tau) dt = \frac{1}{T} x^*(-\tau, T) * y(\tau) \\ &= \frac{1}{T} [x^*(-\tau, T) * y(\tau, T)] * \delta_T(\tau)\end{aligned}\quad (4.133)$$

La convolution entre parenthèses carrées est la fonction d'intercorrélation des périodes principales des deux signaux définie par

$$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau, T) = x^*(-\tau, T) * y(\tau, T) \quad (4.134)$$

La fonction d'intercorrélation des signaux périodiques peut donc aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\varphi_{xy}(\tau) &= T^{-1} \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau, T) * \delta_T(\tau) \\ &= \text{rep}_T \{T^{-1} \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau, T)\}\end{aligned}\quad (4.135)$$

Et pour l'autocorrélation, on a simplement

$$\begin{aligned}\varphi_x(\tau) &= T^{-1} \overset{\circ}{\varphi}_x(\tau, T) * \delta_T(\tau) \\ &= \text{rep}_T \{T^{-1} \overset{\circ}{\varphi}_x(\tau, T)\}\end{aligned}\quad (4.136)$$

où  $\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau, T)$  est la fonction d'autocorrélation de  $x(t, T)$ .

Au contraire de  $x(t, T)$  ou  $y(t, T)$ , le support des fonctions notées  $\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau, T)$  et  $\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau, T)$  **n'est pas limité à la période principale** de  $\varphi_{xy}(\tau)$  ou  $\varphi_x(\tau)$ . En règle générale, ce support est l'intervalle  $[-T, T]$ .

#### 4.4.13 Exemple

Considérons la suite périodique d'impulsions rectangulaires

$$x(t) = \text{rep}_T \{A \text{ rect}(t/\Delta)\}$$

Par (4.63)

$$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau, T) = A^2 \Delta \text{ tri}(\tau/\Delta)$$

et

$$\varphi_x(\tau) = A^2 \Delta T^{-1} \text{rep}_T \{\text{tri}(\tau/\Delta)\}$$

Cette fonction d'autocorrélation est représentée sur la figure 4.25 avec  $x(t)$ , d'une part pour  $\Delta_1 < T/2$  et d'autre part pour  $T/2 < \Delta_2 < T$ .

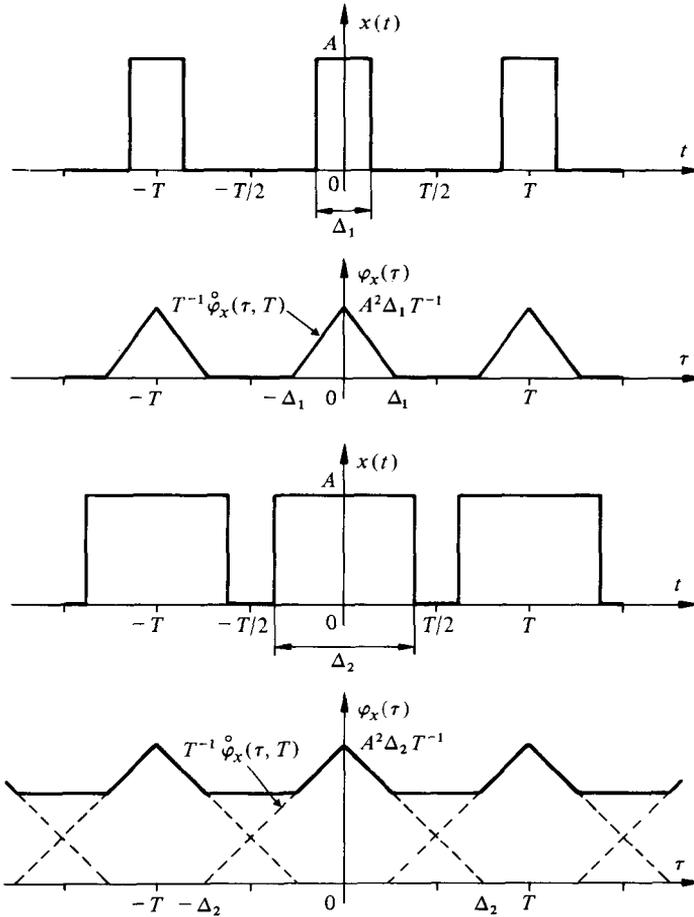


Fig. 4.25

**4.4.14 Fonction d'autocorrélation d'une suite périodique d'impulsions de Dirac**

Par (4.51), la fonction d'autocorrélation d'une impulsion de Dirac est analogue à sa convolution (1.47) : c'est encore une impulsion de Dirac

$$\overset{\circ}{\varphi}_\delta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\delta(t + \tau) dt = \delta(\tau) \tag{4.137}$$

Dans le cas d'une suite périodique d'impulsions de Dirac, on a par (4.130)

$$\varphi_{\delta_T}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\delta_T(t + \tau) dt = \frac{1}{T} \delta_T(\tau) \tag{4.138}$$

Ce résultat est consistant avec la formule (4.136).

#### 4.4.15 Densité spectrale de puissance d'un signal périodique

Rappelons que la densité spectrale de puissance est par définition la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du signal.

En transformant respectivement (4.132) et (4.136), on obtient les formes équivalentes

$$\begin{aligned}\Phi_x(f) &= F\{\varphi_x(\tau)\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T^2} \hat{\Phi}_x(f, T) \cdot \delta_{1/T}(f)\end{aligned}\quad (4.139)$$

où

$$\hat{\Phi}_x(f, T) = F\{\hat{\varphi}_x(\tau, T)\} = |X(f, T)|^2 \quad (4.140)$$

La fonction continue  $(1/T^2) \hat{\Phi}_x(f, T)$  est l'enveloppe spectrale des raies  $\delta_{1/T}(f)$  du spectre et

$$|X_n|^2 = (1/T)^2 \hat{\Phi}_x(n/T, T) = (1/T)^2 |X(n/T, T)|^2 \quad (4.141)$$

résultat cohérent avec (4.126).

La puissance totale du signal est obtenue par l'identité de Parseval

$$P_x = \varphi_x(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X_n|^2 \quad (4.142)$$

#### 4.4.16 Exemple : signal sinusoidal

Soit  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t - \alpha)$ ; de (4.116), (4.132), (4.139) et (4.142), on tire (fig. 4.26)

$$\varphi_x(\tau) = (A^2/2) \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (4.143)$$

$$\Phi_x(f) = (A^2/4)[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \quad (4.144)$$

$$P_x = \varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df = A^2/2 \quad (4.145)$$

#### 4.4.17 Exemple

La densité spectrale de puissance de la suite périodique d'impulsions rectangulaires  $x(t) = \text{rep}_T \{A \text{rect}(t/\Delta)\}$  vaut, en tirant parti du résultat des exemples 4.4.10 ou 4.4.13 :

$$\begin{aligned}\Phi_x(f) &= (A\Delta/T)^2 \text{sinc}^2(\Delta f) \cdot \delta_{1/T}(f) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A\Delta/T)^2 \text{sinc}^2(\Delta n/T) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\end{aligned}$$

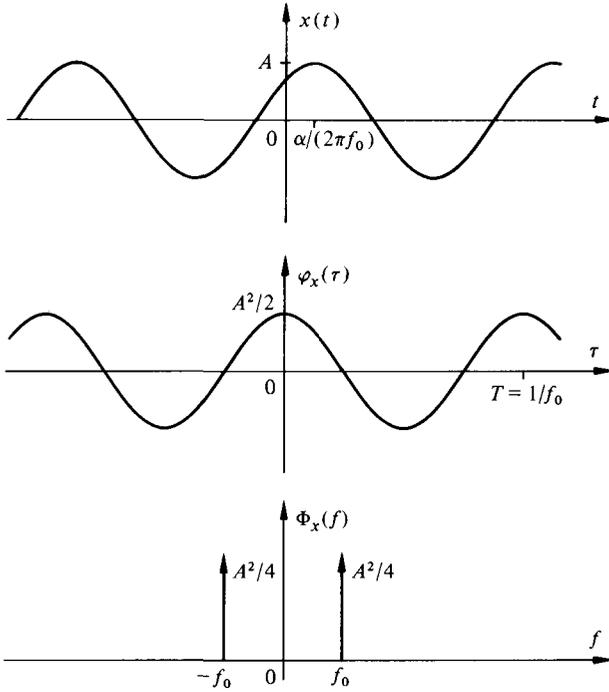


Fig. 4.26

**4.4.18 Densité interspectrale de puissance de signaux périodiques**

Par analogie avec (4.139) et (4.140), on a pour deux signaux périodiques de même période  $T$  :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{xy}(f) &= F\{\varphi_{xy}(\tau)\} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* Y_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\
 &= \frac{1}{T^2} \hat{\Phi}_{xy}(f, T) \cdot \delta_{1/T}(f)
 \end{aligned}
 \tag{4.146}$$

où

$$\hat{\Phi}_{xy}(f, T) = F\{\hat{\varphi}_{xy}(\tau, T)\} = X^*(f, T) \cdot Y(f, T)
 \tag{4.147}$$

et

$$X_n^* = T^{-1} X^*(n/T, T)
 \tag{4.148}$$

$$Y_n = T^{-1} Y(n/T, T)
 \tag{4.149}$$

**4.4.19 Application**

Soit à déterminer la fonction d'intercorrélation et la densité interspectrale de puissance des signaux  $x(t) = B \sin(2\pi t/T)$  et  $y(t) = \text{rep}_T \{A \text{ rect}(t/\Delta)\}$ .

Par (4.118), (4.128), (4.131) et (4.146) :

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{AB\Delta}{T} \operatorname{sinc}(\Delta/T) \cdot \sin(2\pi\tau/T)$$

et

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{jAB\Delta}{2T} \operatorname{sinc}(\Delta/T) \left[ \delta\left(f + \frac{1}{T}\right) - \delta\left(f - \frac{1}{T}\right) \right]$$

On peut facilement vérifier que la fonction d'intercorrélation de n'importe quel signal périodique, de période  $T$ , avec un signal sinusoïdal pur de même période, est toujours une fonction sinusoïdale.

#### 4.4.20 Signaux quasi-périodiques

Un signal quasi-périodique est une combinaison linéaire de sinusoïdes de fréquences incommensurables :

$$x(t) = \sum_k A_k \sin(2\pi f_k t + \alpha_k) \quad (4.150)$$

où  $f_{k+1} = \lambda f_k$  avec  $\lambda$  irrationnel.

Les propriétés d'un tel signal sont donc à la fois parentes et différentes de celles des signaux périodiques.

La fonction d'autocorrélation d'un signal quasi-périodique vaut

$$\varphi_x(\tau) = \sum_k (A_k^2/2) \cos(2\pi f_k \tau) \quad (4.151)$$

En effet, en appliquant la définition (4.91), seule valable ici, on a

$$\begin{aligned} \varphi_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_k \sum_{\ell} A_k A_{\ell} \sin(2\pi f_k t + \alpha_k) \sin[2\pi f_{\ell}(t + \tau) + \alpha_{\ell}] dt \\ &= \sum_k \sum_{\ell} A_k A_{\ell} I_{k\ell} \end{aligned} \quad (4.152)$$

avec

$$\begin{aligned} I_{k\ell} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi f_k t + \alpha_k) \sin[2\pi f_{\ell}(t + \tau) + \alpha_{\ell}] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos[2\pi(f_k - f_{\ell})t - 2\pi f_{\ell}\tau + \alpha_k - \alpha_{\ell}] dt \\ &\quad - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos[2\pi(f_k + f_{\ell})t + 2\pi f_{\ell}\tau + \alpha_k + \alpha_{\ell}] dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq \ell \\ \frac{1}{2} \cos(2\pi f_k \tau) & \text{pour } k = \ell \end{cases} \end{aligned} \quad (4.153)$$

La densité spectrale de puissance se déduit de (4.151) et (4.144)

$$\Phi_x(f) = \sum_k (A_k^2/4) \left[ \delta(f + f_k) + \delta(f - f_k) \right] \quad (4.154)$$

et la puissance totale vaut

$$P_x = \varphi_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df = \sum_k A_k^2/2 \quad (4.155)$$

## 4.5 REPRÉSENTATIONS SPECTRALES BILATÉRALES ET UNILATÉRALES

### 4.5.1 Représentations bilatérales

On a déjà signalé, au chapitre 2, que la représentation complexe de signaux sinusoïdaux

$$\cos(2\pi ft) = \frac{1}{2} \exp(j2\pi ft) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi ft) \quad (4.156)$$

fait apparaître deux termes d'amplitude  $\frac{1}{2}$  dont la variable fréquence  $f$  est affectée pour l'un, du signe  $+$  et pour l'autre, du signe  $-$ . Ce mode de représentation distribue donc, dans le domaine fréquentiel, les contributions du signal symétriquement de part et d'autre de l'origine sur l'axe  $f$ . De là découle la terminologie usuelle qui parle de fréquences positives et fréquences négatives.

Toutes les représentations spectrales évoquées jusqu'ici sont de type bilatéral :  $X_n$ ,  $X(f)$ ,  $\hat{\Phi}_x(f)$ ,  $\hat{\Phi}_{xy}(f)$ ,  $\Phi_x(f)$ ,  $\Phi_{xy}(f)$ . C'est pourquoi, pour calculer l'énergie ou respectivement la puissance d'un signal réel comprise dans une bande de fréquence  $[f_1, f_2]$ , il faut écrire

$$W_x(f_1, f_2) = \int_{-f_2}^{-f_1} \hat{\Phi}_x(f) df + \int_{f_1}^{f_2} \hat{\Phi}_x(f) df = 2 \int_{f_1}^{f_2} \hat{\Phi}_x(f) df \quad (4.157)$$

$$P_x(f_1, f_2) = 2 \int_{f_1}^{f_2} \Phi_x(f) df \quad (4.158)$$

La représentation spectrale bilatérale a donc un côté un peu abstrait. Elle découle naturellement de la dualité temps-fréquence établie par la transformation de Fourier. Elle a l'avantage de mettre facilement en évidence certaines propriétés de traitement des signaux comme la modulation d'amplitude ou l'échantillonnage.

### 4.5.2 Représentations unilatérales

Il est parfois jugé utile d'employer une représentation spectrale unilatérale, n'impliquant que la partie positive de l'axe des fréquences. Ceci est possible, bien que délicat, en tirant parti de la symétrie conjuguée des spectres complexes de signaux *réels* :

$$X_n = X_n^* ; X(f) = X^*(-f) ; \Phi_{xy}(f) = \Phi_{xy}^*(-f) \quad (4.159)$$

qui entraîne que les modules sont des fonctions réelles paires

$$|X_n| = |X_{-n}|; |X(-f)| = |X(f)|; |\Phi_{xy}(f)| = |\Phi_{xy}(-f)| \quad (4.160)$$

et les arguments des fonctions impaires.

De plus, les densités spectrales d'énergie ou de puissance de signaux *réels* sont des fonctions réelles paires

$$\dot{\Phi}_x(f) = \dot{\Phi}_x(-f); \Phi_x(f) = \Phi_x(-f) \quad (4.161)$$

Une représentation spectrale unilatérale est obtenue en multipliant la représentation bilatérale par la fonction  $1 + \text{sgn}(f) = 2 \epsilon(f)$ , de manière à en doubler la contribution pour  $f > 0$ , à maintenir inchangée sa valeur à l'origine et à annuler la partie située aux fréquences négatives

$$\Phi_x^+(f) = 2 \epsilon(f) \Phi_x(f) = \begin{cases} 0 & f < 0 \\ \Phi_x(0) & f = 0 \\ 2 \Phi_x(f) & f > 0 \end{cases} \quad (4.162)$$

Il est déconseillé de recourir systématiquement à cet artifice, puisqu'il ne s'applique qu'aux spectres de signaux réels. Il peut entraîner une fausse évaluation de la contribution du spectre à l'origine. Par ailleurs, la notion très pratique d'enveloppe spectrale définie au paragraphe 4.4.9 n'est plus utilisable.

Une autre approche est présentée au chapitre 7. Elle consiste à associer au signal réel un signal complexe (appelé : signal analytique), tel que sa transformée de Fourier soit nulle aux fréquences négatives.

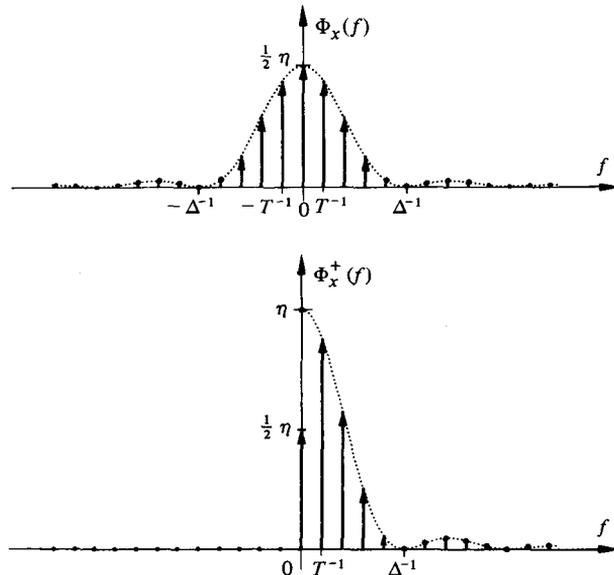


Fig. 4.27

### 4.5.3 Série de Fourier unilatérale

Le développement en série de Fourier complexe (4.109) est identique à une somme de termes réels

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp(j 2\pi f_n t) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi f_n t + \vartheta_n) \end{aligned} \quad (4.163)$$

avec  $f_n = n/T$  et les correspondances

$$A_0 = X_0; A_n = 2|X_n|; \vartheta_n = \arg X_n \quad (4.164)$$

### 4.5.4 Exemple

Les représentations bilatérales  $\Phi_x(f)$  et unilatérales  $\Phi_x^+(f)$  de la densité spectrale de puissance d'une suite périodique d'impulsions rectangulaires (§ 4.4.10) sont reportées sur la figure 4.27 pour comparaison.

## 4.6 EXERCICES

**4.6.1** Démontrer que la transformée de Fourier d'un signal réel pair [impair] est une fonction réelle paire [imaginaire impaire].

**4.6.2** Démontrer que la transformée de Fourier d'un signal complexe est une fonction réelle paire [imaginaire impaire] si la partie réelle du signal est paire [impaire] et la partie imaginaire est impaire [paire].

**4.6.3** Retrouver les résultats (4.23) et (4.33) en utilisant la propriété (4.13).

**4.6.4** Démontrer que  $\text{sinc}(t) * \text{sinc}(t) = \text{sinc}(t)$ .

**4.6.5** Démontrer que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^3(f) df &= 3/4 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^4(f) df &= 2/3 \end{aligned}$$

**4.6.6** Evaluer l'intégrale

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3\tau}{\tau} \cdot \frac{\sin(t-\tau)}{t-\tau} d\tau$$

**4.6.7** Déterminer la transformée de Fourier des signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  représentés sur la figure 4.28.

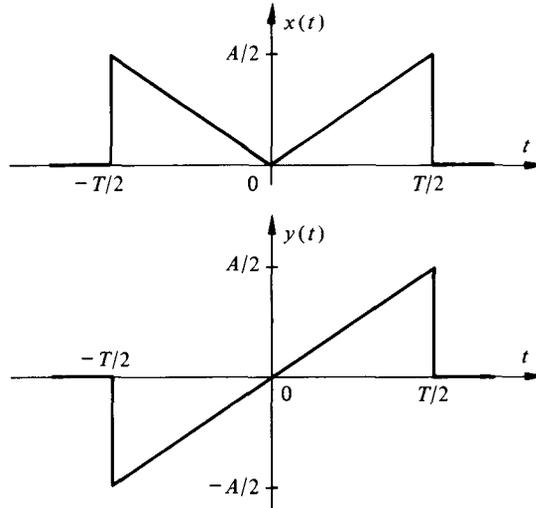


Fig. 4.28

4.6.8 Démontrer que  $dX/df \leftrightarrow (-j2\pi t) x(t)$ .

4.6.9 Utiliser le résultat précédent et la propriété (4.13) pour démontrer l'équivalence  $\text{ig}(t) = \exp(-\pi t^2) \leftrightarrow \text{ig}(f)$ .

4.6.10 Démontrer que le produit de convolution et la fonction d'intercorrélation de  $x(t) = \text{ig}(t/T_1)$  et  $y(t) = \text{ig}(t/T_2)$  est encore une fonction gaussienne du type  $K \cdot \text{ig}(t/T)$  où  $T = [T_1^2 + T_2^2]^{1/2}$ .

4.6.11 Soit le signal représenté sur la figure 4.29. Déterminer :

- l'expression analytique de son spectre d'amplitude
- le graphe de sa fonction d'autocorrélation
- l'expression analytique de sa densité spectrale d'énergie.

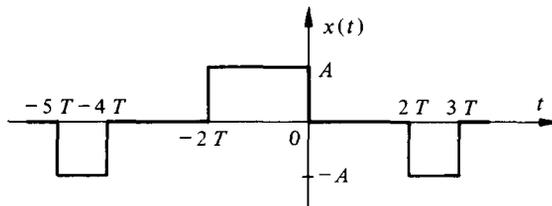


Fig. 4.29

4.6.12 Calculer la transformée de Fourier du signal  $x(t) = A \sin[2\pi(t - T/2)/T] \cdot \text{tri}[(t - T/2)/T]$  et esquisser les graphes du spectre d'amplitude, du spectre de phase et de la densité spectrale d'énergie.

4.6.13 Déterminer l'expression de l'intercorrélation des signaux  $x(t) = A \text{rect}(t/T)$  et  $y(t) = B \text{tri}(2t/T)$ .

4.6.14 Déterminer la transformée de Fourier du signal représenté sur la figure 4.30.

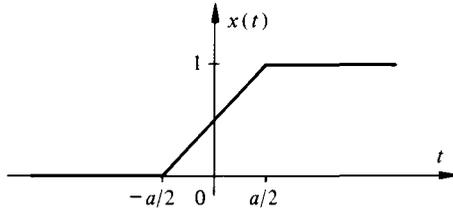


Fig. 4.30

4.6.15 Déterminer et représenter graphiquement la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance du signal  $x(t) = A \operatorname{rep}_T \{ \operatorname{rect} [(t + T/4)/\Delta] - \operatorname{rect} [(t - T/4)/\Delta] \}$  pour  $\Delta < T/4$  et  $T/4 < \Delta < T/2$ .

4.6.16 Déterminer et représenter graphiquement la densité spectrale de puissance du signal  $x(t) = m(t) p(t)$  où  $m(t) = \operatorname{rep}_T \{ \operatorname{rect} (t/\Delta) \}$  et  $p(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  pour  $\Delta/T = 0,2$  et  $f_0 = k/T \gg 1/\Delta$  avec  $k$  entier.

4.6.17 Démontrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\Delta/T) \operatorname{sinc}^2(n\Delta/T) = 1$$

4.6.18 Soit  $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$  et  $y(t) = (A/2) \cos(2f_0 t + \pi/4)$ . Déterminer :

- la fonction d'intercorrélation de  $x(t)$  et  $y(t)$ ;
- la fonction d'autocorrélation de  $z(t) = x(t) + y(t)$ ;
- la densité spectrale de puissance de  $z(t)$ ;
- la puissance totale de  $z(t)$ .

4.6.19 Démontrer que les fonctions  $z_k(t) = \operatorname{sinc}(t - k)$  forment un ensemble orthogonal pour  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$



## SIGNAUX ALÉATOIRES

## 5.1 MODÈLE STATISTIQUE : PROCESSUS ALÉATOIRE

## 5.1.1 Introduction

Par définition (§ 2.2.1) un signal est aléatoire s'il dépend d'une certaine manière des lois du hasard. De tels signaux, dont la valeur instantanée est imprévisible, ne possèdent évidemment pas de représentations temporelles analytiques. Ils peuvent toutefois être caractérisés par leurs propriétés statistiques et fréquentielles. Les notions de base de théorie des probabilités utilisées pour la description statistique des signaux aléatoires sont résumées au chapitre 14.

Les signaux aléatoires forment une classe particulièrement importante de signaux. Ceci découle du fait que seuls les signaux ayant un certain caractère aléatoire peuvent transmettre de l'information (axiome de base de la théorie de l'information). Une autre raison est le grand nombre de situations dans lesquelles on cherche à se prémunir contre les effets de perturbations aléatoires ou à identifier et mesurer un phénomène se manifestant par un signal ténu noyé dans un bruit de fond important (détection de signaux).

Un signal aléatoire observé doit être considéré comme *une réalisation particulière* d'un *ensemble* de signaux similaires qui sont tous susceptibles d'être produits par le même phénomène (ou processus) aléatoire.

## 5.1.2 Définition : processus aléatoire

Mathématiquement [24, 64, 79], un *processus aléatoire* (on dit aussi *stochastique*) peut être défini comme une famille de fonctions réelles ou complexes à deux variables notée  $\{\mathbf{x}(t, \xi)\}$  ou, plus simplement,  $\mathbf{x}(t)$ . En théorie du signal, la variable  $t$  représente usuellement le temps.

La variable  $\xi$  dénote la nature aléatoire du processus :  $\xi$  est un élément de l'espace des épreuves (ensemble des résultats possibles d'une expérience statistique) et dépend des lois du hasard (fig. 5.1).

La description statistique d'un processus aléatoire est généralement obtenue à partir des lois de probabilité marginales et conjointes (chap. 14) des variables aléatoires qui représentent le comportement du processus en des instants prescrits. Selon que ces variables sont continues ou discrètes, on parle de *processus aléatoire continu* ou *discret*.

Lorsque l'échelle du temps est elle-même discrétisée (cas de l'échantillonnage par exemple), on parle de *suite aléatoire*. Lorsque le hasard intervient de façon discontinue à des instants aléatoires, on dit que l'on a un *processus ponctuel*.

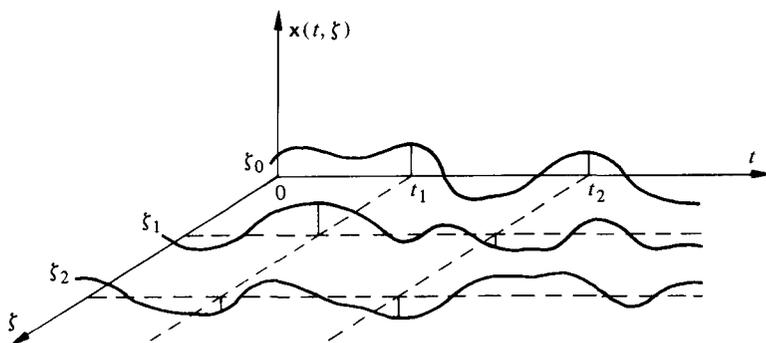


Fig. 5.1

Trois modèles particuliers de processus aléatoires doivent être spécialement mentionnés :

- les processus gaussiens (modèle de processus continu tel que le bruit thermique par ex.)
- les processus de Poisson (modèle de processus ponctuel tel que le bruit d'effet grenaille par ex.)
- les processus de Markov (modèle d'une large classe de signaux informationnels par ex.).

### 5.1.3 Signal aléatoire. Définition

Pour chaque  $\xi_i$ , le processus  $\mathbf{x}(t, \xi)$  se réduit à un membre donné de l'ensemble des fonctions possibles que l'on conviendra d'appeler *signal aléatoire* et que l'on écrira  $x_i(t)$  ou simplement  $x(t)$ .

Un tel signal est, par commodité, considéré comme un signal à puissance moyenne finie.

L'observation de ce signal permet de déterminer, par analyse ou mesure, certaines moyennes temporelles significatives telles que valeur moyenne (composante continue), valeur quadratique moyenne (puissance), etc. Une moyenne calculée le long de l'axe  $t$  est exprimée par une relation du type :

$$\overline{f[x(t)]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f[x(t)] dt \quad (5.1)$$

### 5.1.4 Variable aléatoire

A chaque instant  $t_i$ , le processus  $\mathbf{x}(t, \xi)$  se réduit à une simple variable aléatoire  $\mathbf{x}(t_i)$ , notée parfois plus simplement  $\mathbf{x}_i$ , dont le comportement statistique est décrit par sa fonction de répartition  $F(\mathbf{x}; t_i)$  ou par sa densité de probabilité  $p(\mathbf{x}; t_i)$ . La connaissance de ces lois de probabilité permet de déterminer les principaux moments (moyennes statistiques = espérances mathématiques, c'est-à-dire : valeurs espérées théoriquement) de la variable.

Une moyenne calculée le long de l'axe  $\xi$  (moyenne évaluée sur *l'ensemble* des états possibles) est exprimée par une relation du type :

$$E[f(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x) dx \quad (5.2)$$

### 5.1.5 Notations

On désigne dans ce livre le processus ou la variable aléatoire par une lettre en caractère Univers gras (exemple  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ ). Les états pris par cette variable sont notés de manière usuelle (exemple :  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

Dans certains ouvrages, il est d'usage de dénoter le processus ou la variable aléatoire par une lettre majuscule, sans autre différence de typographie.

### 5.1.6 Exemple

L'écoulement turbulent d'un fluide est une illustration de processus aléatoire continu. Si l'on crée simultanément, dans des conditions expérimentales semblables, plusieurs écoulements turbulents, on dispose d'un ensemble d'observations différentes, mais dont chacune représente une réalisation particulière du processus. La mesure, sur chaque écoulement, d'un paramètre significatif (par ex. vitesse locale instantanée) fournit un ensemble de signaux aléatoires.

Si l'on enregistre toutes les valeurs prises par ces signaux à un instant donné  $t_i$ , on dispose d'un échantillonnage des états possibles de la variable aléatoire considérée (vitesse d'écoulement au temps  $t_i$ ).

A condition que le nombre d'observations simultanées soit suffisant — idéalement : tende vers l'infini — on peut en déduire certaines caractéristiques du processus au temps  $t_i$  (histogramme, valeur moyenne et variance expérimentales, etc.).

L'observation simultanée d'un tel ensemble est pratiquement irréalisable. Aussi doit-on généralement se contenter d'un signal unique correspondant à une réalisation particulière du processus. L'analyse de ce signal typique fournit des informations qui, sous certaines hypothèses (§ 5.1.14), peuvent être considérées comme caractéristiques du processus global lui-même.

En électricité, un exemple classique de processus aléatoire continu est le bruit de fond généré dans les circuits électroniques par l'agitation thermique des électrons dans les matériaux conducteurs (sect. 6.2). Combiné à d'autres phénomènes aléatoires, ce processus est responsable, par exemple, du bruit perçu dans les installations d'amplification acoustique (souffle).

### 5.1.7 Exemple

Une illustration de processus aléatoire ponctuel est l'émission de particules ionisantes par un corps radio-actif, telle qu'elle peut être révélée par un compteur de Geiger-Müller. Le nombre de particules émises par unité de temps est une variable aléatoire discrète.

De nombreux phénomènes électroniques (émission thermo-électrique ou photo-électrique, charges traversant une jonction de semiconducteurs) sont des processus

aléatoires ponctuels. Ils sont la cause du bruit de grenaille étudié à la section 6.3. Les appels atteignant un central téléphonique, les pannes affectant une installation technique, sont aussi des exemples de processus ponctuels.

### 5.1.8 Vecteur aléatoire. Définition

Si l'on considère  $k$  instants  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , on peut définir  $k$  variables aléatoires  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  formant un *vecteur aléatoire* à  $k$  composantes  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k)$ , caractérisé par une loi de probabilité conjointe  $p(x_1, x_2, \dots, x_k)$  à  $k$  dimensions. La connaissance de cette loi en fonction des  $k$  paramètres  $t_1, t_2, \dots, t_k$  constitue une *statistique d'ordre  $k$*  du processus.

Pratiquement, on peut généralement se contenter de la statistique d'ordre 1 et de celle d'ordre 2 qui permettent de caractériser suffisamment le comportement du processus et de préciser son évolution dans le temps.

### 5.1.9 Statistique d'ordre 1. Définitions

Soit  $\mathbf{x}_i$ , une variable aléatoire réelle correspondant à l'instant  $t_i$ . Sa *fonction de répartition* exprime la probabilité d'avoir  $\mathbf{x}_i$  inférieure ou égale à un niveau  $x$  donné. Elle dépend en général de  $t_i$  :

$$F(x; t_i) = \text{Prob}(\mathbf{x}_i \leq x) \quad (5.3)$$

La *densité de probabilité* est simplement la dérivée de la fonction de répartition par rapport à  $x$  :

$$p(x; t_i) = dF(x; t_i)/dx \quad (5.4)$$

La *valeur moyenne statistique* de la variable aléatoire  $\mathbf{x}_i$  est le moment du 1er degré :

$$\mu_x(t_i) = E[\mathbf{x}_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i p(x; t_i) dx_i \quad (5.5)$$

Les moments de degré supérieur sont définis de la même façon :

$$m_{x^n}(t_i) = E[\mathbf{x}_i^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x_i^n p(x; t_i) dx_i \quad (5.6)$$

Le moment centré du 2ème degré ou *variance*, est obtenu en considérant l'écart  $\mathbf{x}_i - \mu_x(t_i)$  entre la variable aléatoire et sa valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t_i) &= E\{[\mathbf{x}_i - \mu_x(t_i)]^2\} = E[\mathbf{x}_i^2] - \mu_x^2(t_i) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_i - \mu_x(t_i)]^2 p(x; t_i) dx_i \end{aligned} \quad (5.7)$$

C'est une mesure de la dispersion de cet écart; sa racine carrée est l'*écart-type* de la variable.

### 5.1.10 Statistique d'ordre 2. Définitions

Considérons le couple de variables aléatoires réelles  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$  et  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t_2)$ . La *fonction de répartition conjointe* représente la probabilité que  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  soient respectivement inférieures ou égales aux niveaux  $x_1$  et  $x_2$  :

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \text{Prob}(\mathbf{x}_1 \leq x_1, \mathbf{x}_2 \leq x_2) \quad (5.8)$$

La dérivée de (5.8) par rapport à  $x_1$  et  $x_2$  est la *densité de probabilité conjointe* du couple de variables  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (5.9)$$

Les moments de ce couple sont, par définition, les moyennes statistiques des fonctions  $\mathbf{x}_1^n \cdot \mathbf{x}_2^m$  où  $n$  et  $m$  sont des entiers positifs ou nuls.

Le moment correspondant à  $n$  et  $m$  égaux à l'unité est appelé *fonction d'autocorrélation statistique* du processus  $\mathbf{x}(t)$  et dénoté par la lettre  $R$  :

$$R_x(t_1, t_2) = E[\mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}(t_2)] = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (5.10)$$

Si, au lieu de considérer les variables aléatoires  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$ , on considère plutôt les écarts entre ces variables et leurs valeurs moyennes respectives, on obtient la *fonction d'autocovariance*, dénotée par la lettre  $C$  :

$$\begin{aligned} C_x(t_1, t_2) &= E\{[\mathbf{x}(t_1) - \mu_x(t_1)][\mathbf{x}(t_2) - \mu_x(t_2)]\} \\ &= R_x(t_1, t_2) - \mu_x(t_1) \cdot \mu_x(t_2) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Lorsque  $t_2 = t_1$ , (5.11) s'identifie avec la variance (5.7).

### 5.1.11 Stationnarité. Définitions

Un processus aléatoire est dit *stationnaire au sens strict* si toutes ses propriétés statistiques sont invariantes dans le temps.

Il est dit *stationnaire du deuxième ordre* si seules ses statistiques d'ordre 1 et d'ordre 2 sont invariantes dans le temps. Dans ce cas, on a d'une part

$$p(x; t_i) = p(x) \quad \forall t_i \quad (5.12)$$

d'où  $\mu_x(t_i) = \mu_x$  et  $\sigma_x^2(t_i) = \sigma_x^2$  sont des caractéristiques invariantes dans le temps, donc des constantes pour un processus donné.

Par ailleurs, la densité de probabilité conjointe ne dépend plus que de l'écart temporel

$$\tau = t_2 - t_1 \quad (5.13)$$

d'où

$$p(x_1, x_2; t_1, t_2) = p(x_1, x_2; \tau) \quad (5.14)$$

et l'autocorrélation et l'autocovariance ne sont fonction que du seul écart temporel  $\tau$

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) \quad (5.15)$$

$$C_x(t_1, t_2) = C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2 \quad (5.16)$$

Un processus aléatoire est dit *stationnaire au sens large* lorsque seules sa valeur moyenne (5.5) et sa fonction d'autocorrélation (5.10) sont invariantes dans le temps. L'invariance de la fonction d'autocorrélation entraîne celle de la variance. Un processus stationnaire du deuxième ordre est évidemment aussi stationnaire au sens large. La réciproque n'est pas nécessairement vraie.

### 5.1.12 Commentaire

Un phénomène physique aléatoire n'est jamais rigoureusement stationnaire. Il possède une phase transitoire d'établissement au moment de sa création. Il est également souvent influencé à certaines époques de son histoire par l'évolution du système auquel il est associé.

Le concept de processus stationnaire n'est donc qu'un modèle simplifié. Il est toutefois commode d'emploi et se révèle très largement utilisable en pratique lorsque l'on peut se contenter d'observations (mesures) de durées raisonnablement limitées pendant lesquelles le phénomène présente un caractère permanent.

### 5.1.13 Ergodisme. Définition

Un processus aléatoire est dit *ergodique* si l'on peut identifier les valeurs moyennes statistiques du type (5.2) aux valeurs moyennes temporelles du type (5.1).

Comme pour la stationnarité, on peut définir différents niveaux d'ergodisme.

### 5.1.14 Conséquences

Soit

$$\overline{x^n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t) dt \quad (5.17)$$

la valeur moyenne temporelle de degré  $n$  d'un signal aléatoire stationnaire et

$$E[x^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \quad (5.18)$$

sa valeur moyenne statistique — ou moment — de même degré  $n$ . L'hypothèse d'ergodisme entraîne les identités indiquées dans le tableau 5.2.

*L'écart-type  $\sigma_x$  représente ainsi pour les signaux aléatoires l'équivalent de la valeur efficace introduite pour les signaux sinusoïdaux (§ 1.8.2.11).*

Sur certains instruments de laboratoire permettant de mesurer cette grandeur, on l'appelle la *vraie valeur efficace* (en anglais : *true RMS value*).

### 5.1.15 Commentaires

Ainsi, lorsqu'il paraît justifié d'émettre cette *hypothèse d'ergodisme*, on est en droit d'estimer les propriétés statistiques d'un processus  $\mathbf{x}(t, \xi)$  par l'analyse temporelle d'un signal  $x(t)$  unique (un seul membre de l'ensemble des fonctions possibles). Cette procédure d'observation est évidemment beaucoup plus facile à réaliser pratiquement.

Tableau 5.2

Nom	Formulation statistique	Formulation temporelle	Interprétation
Valeur moyenne	$\mu_x = E[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$	$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt$	composante continue
Valeur moyenne au carré	$\mu_x^2$	$\bar{x}^2$	puissance de la composante continue
Valeur quadratique moyenne	$E[\mathbf{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$	$P_x = \overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt$	puissance totale
Ecart quadratique moyen (variance)	$\sigma_x^2 = E[(\mathbf{x} - \mu_x)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx$	$\overline{(x - \bar{x})^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \bar{x}]^2 dt$	puissance des fluctuations
Ecart-type	$\sigma_x$	$\sqrt{\overline{(x - \bar{x})^2}} = \sqrt{P_x - \bar{x}^2}$	valeur efficace des fluctuations
Autocorrélation	$R_x(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)]$ $= \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2$	$\varphi_x(\tau) = x(-\tau) \overline{x} x(\tau)$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt$	
Autocovariance	$C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2$	$\varphi_x(\tau) - \bar{x}^2$	
Relations particulières	$R_x(0) = E[\mathbf{x}^2] = \sigma_x^2 + \mu_x^2$ $C_x(0) = \sigma_x^2$	$P_x = \varphi_x(0)$ $\varphi_x(0) - \bar{x}^2$	

La stationnarité n'entraîne pas nécessairement l'ergodisme. Considérons, par exemple, un processus  $\mathbf{x}(t, \xi)$  dont chaque réalisation est de la forme  $x(t) = x_0(t) + \bar{x}$ . Le terme  $x_0(t)$  représente un signal aléatoire associé à un processus stationnaire et ergodique à valeur moyenne nulle et  $\bar{x}$  est une variable aléatoire [donc en général différente pour chaque  $x(t)$ ] à valeur moyenne également nulle. Dans ce cas,  $\mu_x = 0$  et le processus  $\mathbf{x}(t, \xi)$  est clairement stationnaire mais non ergodique, puisque  $\mu_x \neq \bar{x}$ .

Bien que la propriété d'ergodisme n'implique pas strictement celle de stationnarité [69], la définition du paragraphe 1.5.13 entraîne que les processus ergodiques considérés sont *simultanément stationnaires*.

L'hypothèse d'ergodisme est souvent difficile à vérifier. Elle est généralement acceptée sur la base de considérations théoriques. On admet, en pratique, que la plupart des signaux aléatoires usuels sont la manifestation de processus ergodiques. Pour un examen plus détaillé des conditions d'ergodisme, on peut consulter [24, 50, 57 ou 65].

### 5.1.16 Exemple : signal sinusoïdal à phase aléatoire

Considérons un processus dont chaque réalisation est un signal sinusoïdal d'amplitude  $A$  et de pulsation  $\omega$  constantes, mais de phase initiale  $a$  aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . Un signal aléatoire typique est ainsi décrit par l'expression

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (5.19)$$

La variable aléatoire  $\mathbf{x}_0$ , observable en un instant particulier  $t_0$ , ne dépend statistiquement que de la variable  $a' = \omega t_0 + a$  qui est également à distribution uniforme

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = A \sin a' \quad (5.20)$$

Inversément

$$a' = \text{Arcsin}(\mathbf{x}_0/A) \quad (5.21)$$

La fonction de répartition  $F(x)$  de la variable aléatoire  $\mathbf{x}_0$  est facilement obtenue en considérant le dessin de la figure 5.3.

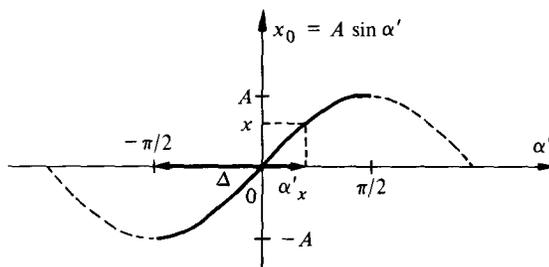


Fig. 5.3

Dans la demi-période principale  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\mathbf{x}_0$  est inférieure à une valeur  $x$  donnée sur un intervalle  $\Delta = \alpha'_x + \pi/2$ . Du fait de la distribution uniforme de  $a'$ , la probabilité d'avoir  $\mathbf{x}_0$  inférieure ou égale à  $x$  est simplement le rapport de l'intervalle

$\Delta$  à la demi-période :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \text{Prob} ( \mathbf{x}_0 \leq x ) = \frac{\Delta}{\pi} = \frac{1}{\pi} \left[ \text{Arcsin} \left( \frac{x}{A} \right) + \frac{\pi}{2} \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \text{Arcsin} \left( \frac{x}{A} \right) + \frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{5.22}$$

La densité de probabilité est déterminée par dérivation (loi en chaînette)

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}} \quad , \quad |x| \leq A
 \tag{5.23}$$

Ces lois statistiques (fig. 5.4) sont indépendantes de l'instant  $t_0$  considéré : le processus est donc en tout cas stationnaire du 1er ordre.

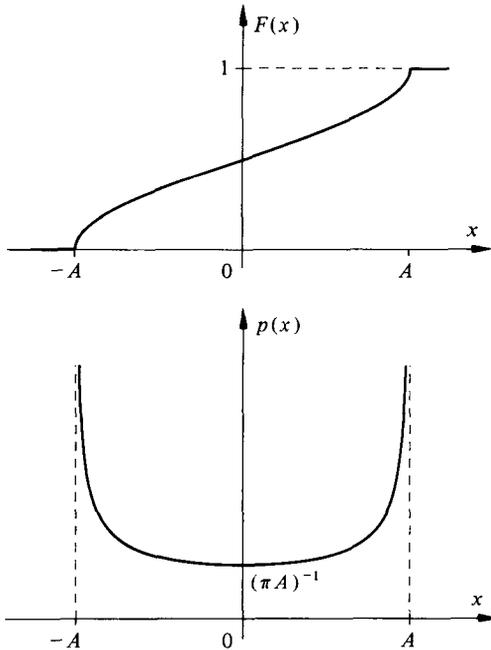


Fig. 5.4

La valeur moyenne statistique

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = 0
 \tag{5.24}$$

puisque  $p(x)$  est une fonction paire.

On obtient également, pour la valeur moyenne temporelle

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \sin(\omega t + \alpha) dt = 0
 \tag{5.25}$$

donc  $\mu_x \equiv \bar{x}$ .

La valeur quadratique moyenne statistique (ici identique à la variance puisque  $\mu_x = 0$ ) vaut

$$E[\mathbf{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx = \frac{1}{\pi - A} \int_{-A}^A \frac{x^2}{\sqrt{A^2 - x^2}} dx = \frac{A^2}{2} \quad (5.26)$$

et est aussi égale à la valeur quadratique moyenne temporelle — ou puissance totale — du signal

$$P_x = \overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{A^2}{2} \quad (5.27)$$

La fonction d'autocorrélation statistique est ici identique à la fonction d'autocovariance puisque  $\mu_x = 0$ .

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= E[\mathbf{x}(t_1) \mathbf{x}(t_2)] \\ &= A^2 E[\sin(\omega t_1 + a) \sin(\omega t_2 + a)] \\ &= \frac{1}{2} A^2 E[\cos\{\omega(t_2 - t_1)\} - \cos\{\omega(t_1 + t_2) + 2a\}] \end{aligned} \quad (5.28)$$

Le premier terme de la parenthèse carrée n'est pas aléatoire, mais une constante pour un écart temporel  $\tau = t_2 - t_1$  donné. Le deuxième terme de cette parenthèse est une fonction du même type que  $x(t)$  et, par conséquent, sa valeur moyenne est nulle. La fonction d'autocorrélation statistique du signal sinusoïdal à phase aléatoire est ainsi

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \quad (5.29)$$

et ne dépend que de l'écart  $\tau = t_2 - t_1$ . Le processus est donc aussi stationnaire au sens large.

La fonction d'autocorrélation temporelle s'obtient également facilement et s'identifie avec (5.29)

$$\begin{aligned} \varphi_x(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega t + \alpha) \sin[\omega(t + \tau) + \alpha] dt \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega\tau) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Le processus est donc ergodique. On vérifie également que la valeur à l'origine de la fonction d'autocorrélation est bien égale aux résultats (5.26) et (5.27).

On observe finalement que la fonction d'autocorrélation d'un signal sinusoïdal à phase aléatoire est la même que celle établie pour un signal sinusoïdal déterministe [relation (4.143)].

### 5.1.17 Exemple

Considérons un processus dont chaque réalisation est un signal binaire aléatoire  $y(t)$ . Les deux niveaux d'amplitude  $y_1 = -2$  volts et  $y_2 = 5$  volts apparaissent avec

les probabilités respectives  $\text{Prob}(y_1) = 1/3$  et  $\text{Prob}(y_2) = 2/3$ . On suppose ce processus stationnaire et ergodique au sens large.

Sa fonction de répartition est

$$F(y) = \sum_{i=1}^2 \text{Prob}(y_i) \cdot \epsilon(y - y_i) \tag{5.31}$$

et sa densité de probabilité (fig. 5.5)

$$p(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \sum_i \text{Prob}(y_i) \cdot \delta(y - y_i) \tag{5.32}$$

où  $\epsilon(y)$  et  $\delta(y)$  dénotent le saut unité et l'impulsion de Dirac.

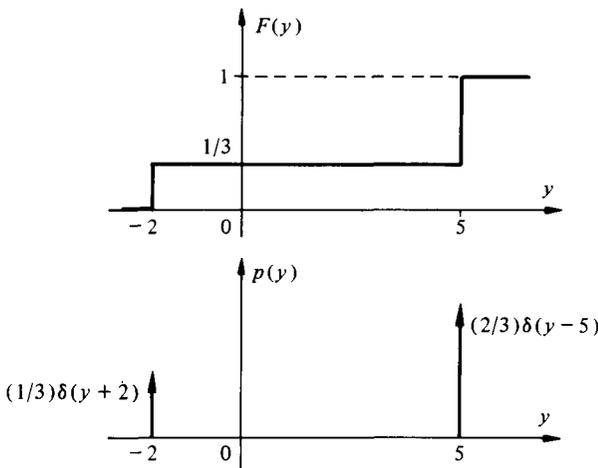


Fig. 5.5

La composante continue et la puissance totale d'un tel signal ne peuvent pas être évaluées théoriquement en calculant une moyenne temporelle.

Par contre, puisque le processus  $\mathbf{y}(t, \xi)$  est ergodique, la composante continue est égale à la valeur moyenne statistique et la puissance totale à la valeur quadratique moyenne statistique :

$$\begin{aligned} \bar{y} &\equiv \mu_y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p(y) dy = \sum_i y_i \text{Prob}(y_i) \\ &= -2 \cdot 1/3 + 5 \cdot 2/3 = 8/3 = 2,67 \text{ V} \\ P_y &\equiv E[\mathbf{y}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 p(y) dy = \sum_i y_i^2 \text{Prob}(y_i) \\ &= 4 \cdot 1/3 + 25 \cdot 2/3 = 54/3 = 18 \text{ V}^2 \end{aligned}$$

**5.1.18 Processus aléatoires indépendants. Définition**

Deux processus aléatoires stationnaires  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$  sont *indépendants* si leur densité de probabilité conjointe est égale au produit de leurs densités de probabilité marginale :

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y) \quad (5.33)$$

Cette relation est analogue à (14.36).

### 5.1.19 Commentaire

L'indépendance, au sens statistique, signifie que l'observation de l'un des processus ne nous apprend rien sur la nature de l'autre.

En traitement des signaux, il est fréquent d'avoir à considérer des combinaisons de processus indépendants. C'est, par exemple, généralement le cas lorsqu'un bruit de fond ou des parasites viennent contaminer un signal en cours de transmission ou d'amplification. Il en va de même dans les systèmes de modulation où le signal porteur d'information est incorporé à un signal auxiliaire.

Dans toutes les situations où l'indépendance est réalisée, l'introduction de la condition (5.33) permet de simplifier les relations mathématiques et d'obtenir des résultats très généraux.

### 5.1.20 Transformation d'un vecteur aléatoire

Lorsque la forme d'un signal est modifiée par un opérateur de traitement, ses caractéristiques statistiques changent. On examine ici les incidences d'une transformation d'une variable ou d'un vecteur aléatoire.

Soit un vecteur aléatoire (§ 5.1.8) à  $k$  composantes (variables aléatoires)  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$  subissant une transformation définie par

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 &= f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) \\ \mathbf{y}_2 &= f_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_k &= f_k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k) \end{aligned} \quad (5.34)$$

La densité de probabilité conjointe des variables aléatoires  $\mathbf{y}_j$  se déduit de celle des  $\mathbf{x}_i$  en établissant une **condition d'équivalence en probabilité** qui fait intervenir le jacobien  $J$  — ou déterminant fonctionnel — de la transformation [58]

$$p_y(y_1, y_2, \dots, y_k) = |J| \cdot p_x(x_1, x_2, \dots, x_k) \Big|_{x_i = g_i(y_1, y_2, \dots, y_k)} \quad (5.35)$$

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_k)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_k)} = \begin{vmatrix} \partial x_1 / \partial y_1 & \dots & \partial x_1 / \partial y_k \\ \vdots & & \vdots \\ \partial x_k / \partial y_1 & \dots & \partial x_k / \partial y_k \end{vmatrix} \quad (5.36)$$

La valeur absolue du jacobien intervient ici pour satisfaire la condition  $p_y(y_1, y_2, \dots, y_k) \geq 0$ .

### 5.1.21 Exemple : relation linéaire instantanée

Considérons la simple relation linéaire instantanée (amnésique : c'est-à-dire ne tenant compte que de la valeur courante) d'une seule variable

$$\mathbf{y} = a\mathbf{x} + b \quad (5.37)$$

Le jacobien se réduit ici au seul terme

$$J = dx/dy = 1/a \quad (5.38)$$

d'où

$$p_y(y) = \frac{1}{|a|} p_x\left(x = \frac{y-b}{a}\right) \quad (5.39)$$

La densité de probabilité de  $\mathbf{y}$  a ainsi la même morphologie que celle de  $\mathbf{x}$ , à un décalage  $b$  et un facteur d'échelle  $a$  près.

### 5.1.22 Exemple : transformation quadratique

L'élevation au carré est une opération qui intervient dans tous les calculs de puissance ou d'énergie. On la retrouve en analyse spectrale, en détection de signaux, etc.

Soit la transformation non linéaire

$$\mathbf{y} = a\mathbf{x}^2 \quad a > 0 \quad (5.40)$$

Cette transformation n'est pas biunivoque puisque deux valeurs de  $\mathbf{x}$  correspondent à la même valeur de  $\mathbf{y}$ . La condition d'équivalence en probabilité conduit à écrire

$$p_y(y) = \left| \frac{dx_-}{dy} \right| \cdot p_x\left(x_- = -\sqrt{y/a}\right) + \left| \frac{dx_+}{dy} \right| \cdot p_x\left(x_+ = \sqrt{y/a}\right) \quad (5.41)$$

avec ici

$$x_- = -\sqrt{y/a} \quad \text{et} \quad dx_-/dy = \frac{-1}{2\sqrt{ay}} \quad (5.42)$$

$$x_+ = \sqrt{y/a} \quad \text{et} \quad dx_+/dy = \frac{1}{2\sqrt{ay}}$$

$$p_y(y) = \frac{1}{2\sqrt{ay}} \left[ p_x\left(x_- = -\sqrt{y/a}\right) + p_x\left(x_+ = \sqrt{y/a}\right) \right] ; \quad y \geq 0 \quad (5.43)$$

Cas particulier : si  $p_x(x)$  est une fonction paire,  $p_x(x) = p_x(-x)$  et

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{ay}} p_x\left(\sqrt{y/a}\right) \quad (5.44)$$

Par exemple (fig. 5.6), dans le cas de la transformation quadratique définie par (5.40), si  $p_x(x) = 1/A$  pour  $|x| \leq A/2$  (distribution uniforme centrée) :  $p_y(y) = 1/(A\sqrt{ay})$  avec  $0 \leq y \leq aA^2/4$ .

D'une manière générale, les transformations non linéaires induisent une modification de la densité de probabilité.

### 5.1.23 Exemple : transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires

Cet exemple trouve de nombreuses applications, en particulier pour la détermination de la statistique de signaux représentés sous forme complexe : phaseur aléatoire, signal analytique (chap. 7).

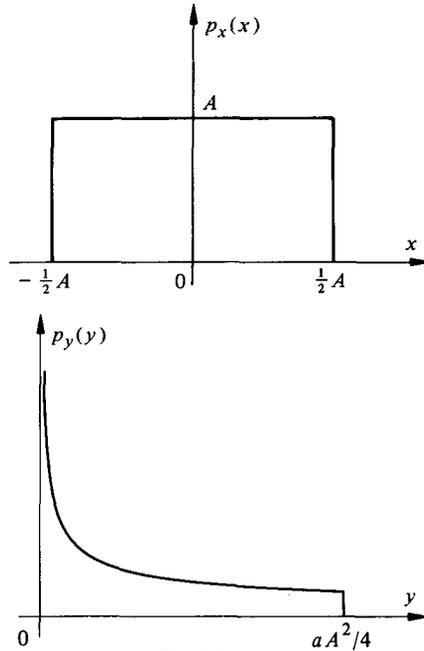


Fig. 5.6

La transformation est définie par la paire de relations

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (5.45)$$

$$\phi = \arctan y/x$$

avec

$$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \phi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r \quad (5.46)$$

d'où, par (5.35)

$$p_{r\phi}(r, \phi) = r \cdot p_{xy}(x = r \cos \phi, y = r \sin \phi) \quad (5.47)$$

Considérons, par exemple, le cas de deux variables indépendantes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  avec densités de probabilité marginale gaussiennes et valeurs moyennes nulles (chap. 14) :

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right] \quad (5.48)$$

$$p_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y} \exp \left[ -\frac{y^2}{2\sigma_y^2} \right]$$

D'après (5.33), la densité de probabilité conjointe est donnée, dans ce cas, par le produit des densités marginales

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right) \right] \quad (5.49)$$

La densité de probabilité conjointe des coordonnées polaires est alors donnée, avec  $r \geq 0$  et  $0 \leq \phi < 2\pi$ , par :

$$p_{r\phi}(r, \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{r^2 \cos^2 \phi}{\sigma_x^2} + \frac{r^2 \sin^2 \phi}{\sigma_y^2} \right) \right] \quad (5.50)$$

Cette densité caractérise une distribution de Rayleigh généralisée.

Dans le cas particulier où  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ , on obtient une distribution de Rayleigh

$$p_{r\phi}(r, \phi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left[ -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right] ; r \geq 0, 0 \leq \phi < 2\pi \quad (5.51)$$

d'où l'on tire les densités de probabilité marginales :

$$p_r(r) = \int_0^{2\pi} p_{r\phi}(r, \phi) d\phi = \frac{r}{\sigma^2} \exp \left[ -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right] ; r \geq 0 \quad (5.52)$$

$$p_\phi(\phi) = \int_0^\infty p_{r\phi}(r, \phi) dr = \frac{1}{2\pi} ; 0 \leq \phi < 2\pi \quad (5.53)$$

d'où l'on déduit que

$$p_{r\phi}(r, \phi) = p_r(r) \cdot p_\phi(\phi) \quad (5.54)$$

ce qui montre que les variables aléatoires  $r$  et  $\phi$  sont également des variables statistiquement indépendantes.

La loi de Rayleigh (5.52) est représentée graphiquement sur la figure 14.15.

## 5.2 FONCTIONS D'AUTOCORRÉLATION ET D'AUTOCOVARIANCE

### 5.2.1 Fonction d'autocorrélation

La *fonction d'autocorrélation statistique* d'un processus aléatoire stationnaire et réel  $\mathbf{x}(t)$  a été définie aux paragraphes 5.1.10 et 5.1.11 comme l'espérance mathématique du produit de  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}(t + \tau)$

$$R_x(\tau) = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t + \tau)] = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \quad (5.55)$$

où  $x_1$  et  $x_2$  dénotent les valeurs que peut prendre le processus aux instants  $t$  et  $t + \tau$ , respectivement. L'adaptation de cette définition dans le cas d'un processus représenté par une fonction complexe est indiquée au paragraphe 5.2.5.

Dans le cas d'un processus discret, la densité de probabilité conjointe peut s'écrire sous la forme

$$p(x_1, x_2; \tau) = \sum_i \sum_j \delta(x_1 - x_{1i}, x_2 - x_{2j}) \text{Prob}(x_{1i}, x_{2j}; \tau) \quad (5.56)$$

et la double intégration devient une double sommation sur les indices  $i$  et  $j$  qui repèrent

les divers états discrets

$$R_x(\tau) = \sum_i \sum_j x_{1i} x_{2j} \text{Prob}(x_{1i}, x_{2j}; \tau) \quad (5.57)$$

La *fonction d'autocorrélation temporelle* d'un signal aléatoire stationnaire et réel  $x(t)$  est donnée par la valeur moyenne temporelle du produit de  $x(t)$  par  $x(t + \tau)$

$$\varphi_x(\tau) = \overline{x(t)x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt \quad (5.58)$$

Par analogie avec (4.99), cette expression peut s'exprimer sous la forme d'un produit de convolution (signaux à puissance moyenne finie : notation  $\bar{*}$ ) :

$$\varphi_x(\tau) = x(-\tau) \bar{*} x(\tau) \quad (5.59)$$

Sous l'hypothèse d'ergodisme (§ 5.1.13), on a l'identité

$$R_x(\tau) \equiv \varphi_x(\tau) \quad (5.60)$$

Les deux notations peuvent alors être utilisées indifféremment.

### 5.2.2 Commentaires

Les formules (5.55) ou (5.57) permettent en principe de calculer la fonction d'autocorrélation d'un processus stationnaire dont la statistique du deuxième ordre est connue analytiquement.

La formule (5.58) est identique à la relation (4.91) établie pour les signaux déterministes à puissance moyenne finie. Mais le signal aléatoire n'étant pas, sauf cas particulier, connu sous forme analytique, cette formule est impropre au calcul. Elle indique par contre comment obtenir expérimentalement (et idéalement en raison de la limite) la fonction d'autocorrélation.

L'expérience réalisable est une mesure pendant une durée finie  $T$  de la fonction

$$\tilde{\varphi}_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (5.61)$$

avec

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_x(\tau) \quad (5.62)$$

### 5.2.3 Fonction d'autocovariance. Définition

La *fonction d'autocovariance*, définie par (5.11) et (5.16), est égale à la fonction d'autocorrélation du processus centré  $\mathbf{x}(t) - \mu_x$  :

$$C_x(\tau) = E \{ [\mathbf{x}(t) - \mu_x] [\mathbf{x}(t + \tau) - \mu_x] \} = R_x(\tau) - \mu_x^2 \quad (5.63)$$

*Autocorrélation et autocovariance s'identifient donc pour tout processus à valeur moyenne nulle.*

On appelle *fonction d'autocovariance normalisée* (ou *coefficient de corrélation*) le rapport

$$\rho_x(\tau) = C_x(\tau)/\sigma_x^2 \quad (5.64)$$

#### 5.2.4 Propriétés

On vérifie facilement que les fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance de processus réels sont paires

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \quad (5.65)$$

$$C_x(\tau) = C_x(-\tau) \quad (5.66)$$

• Pour  $\tau = 0$ , la fonction d'autocovariance s'identifie avec la variance  $\sigma_x^2$  du processus.

On a ainsi

$$C_x(0) = \sigma_x^2 \quad (5.67)$$

$$R_x(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad (5.68)$$

$$\rho_x(0) = 1 \quad (5.69)$$

La valeur à l'origine de la fonction d'autocovariance d'un processus stationnaire et ergodique correspond donc à la puissance des fluctuations et celle de la fonction d'autocorrélation à la puissance totale (tableau 5.2).

D'autre part,

$$|R_x(\tau)| \leq R_x(0) \quad (5.70)$$

car la valeur quadratique moyenne de la somme ou différence suivante est nécessairement positive ou nulle

$$E \{ [\mathbf{x}(t) \pm \mathbf{x}(t + \tau)]^2 \} = 2[R_x(0) \pm R_x(\tau)] \geq 0 \quad (5.71)$$

d'où

$$-R_x(0) \leq R_x(\tau) \leq R_x(0) \quad (5.72)$$

Ce résultat est analogue à ceux établis aux paragraphes 4.2.14 et 4.3.8 dans le cas des signaux déterministes.

Par un raisonnement identique appliqué au processus centré, on obtient

$$|C_x(\tau)| \leq C_x(0) \quad (5.73)$$

et par (5.64) et (5.67)

$$|\rho_x(\tau)| \leq 1 \quad (5.74)$$

Puisque le carré de la valeur moyenne est toujours positif, les inégalités (5.72) peuvent être remplacées par les conditions plus sévères

$$\mu_x^2 - \sigma_x^2 \leq R_x(\tau) \leq \mu_x^2 + \sigma_x^2 \quad (5.75)$$

La formule (5.55) montre que la fonction d'autocorrélation — et donc aussi celle de covariance — dépend de la densité de probabilité conjointe de  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}(t + \tau)$ .

Pour un processus aléatoire *sans composantes périodiques*, l'interdépendance entre  $\mathbf{x}(t)$

et  $\mathbf{x}(t + \tau)$  diminue lorsque  $|\tau|$  croît indéfiniment. A la limite, ces variables deviennent statistiquement indépendantes. En introduisant la condition (5.33), on obtient à la limite

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} R_x(\tau) = \mu_x^2 \quad (5.76)$$

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} C_x(\tau) = 0 \quad (5.77)$$

Un exemple typique de fonction d'autocorrélation d'un tel processus est représenté sur la figure 5.7.

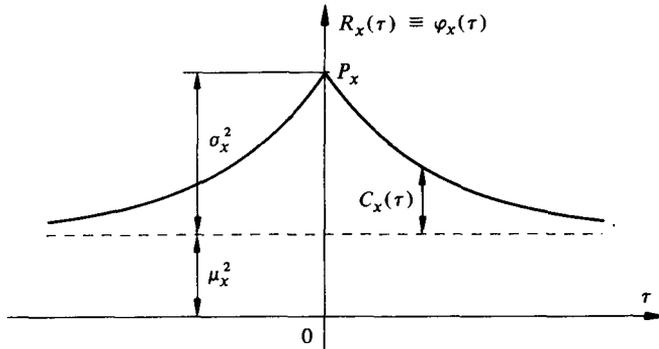


Fig. 5.7

Comme contre-exemple évident, on peut citer celui du signal sinusoïdal à phase aléatoire (§ 5.1.16) dont la fonction d'autocorrélation (5.29) est périodique.

### 5.2.5 Notation en cas de représentation du processus sous forme complexe

Si le processus  $\mathbf{x}(t)$  est représenté sous forme complexe, les fonctions d'autocorrélation statistique et temporelle sont respectivement définies par

$$R_x(\tau) = E[\mathbf{x}^*(t) \mathbf{x}(t + \tau)] \quad (5.78)$$

$$\varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt \quad (5.79)$$

et les relations (5.65) et (5.66) sont remplacées par (symétrie hermitienne)

$$R_x(-\tau) = R_x^*(\tau); C_x(-\tau) = C_x^*(\tau) \quad (5.80)$$

### 5.2.6 Interprétation

Les fonctions d'autocorrélation statistique ou d'autocovariance d'un processus aléatoire peuvent être interprétées d'une manière analogue à celle présentée au paragraphe 4.2.10 dans le contexte des signaux déterministes.

Les expressions (5.55), (5.63) et (5.78) constituent des formes particulières de produits scalaires associés à des variables aléatoires.

La valeur quadratique moyenne statistique de la différence  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t + \tau)$  correspond au carré d'une mesure de distance entre ces deux variables. En supposant  $\mu_x = 0$  pour simplifier et avec la notation  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t + \tau)$ , on a :

$$\begin{aligned} E\{[\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t + \tau)]^2\} &= d^2(\mathbf{x}, \mathbf{x}_\tau) = \iint (x_1 - x_2)^2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \\ &= 2[\sigma_x^2 - C_x(\tau)] \\ &= 2\sigma_x^2[1 - \rho_x(\tau)] \end{aligned} \tag{5.81}$$

Cette distance ne s'annule que pour  $\rho_x = 1$ . Les variables  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}(t + \tau)$  sont *non corrélées* pour les valeurs de  $\tau$  où  $C_x(\tau) = 0$  et *orthogonales* lorsque  $R_x(\tau) = 0$ .

**5.2.7 Exemple**

Considérons un processus aléatoire  $\mathbf{x}(t)$  dont les valeurs  $x$  changent après chaque intervalle de  $T$  secondes tout en restant constantes dans l'intervalle.

Deux réalisations possibles  $x_i(t)$  et  $x_j(t)$  de ce processus sont représentées sur la figure 5.8.

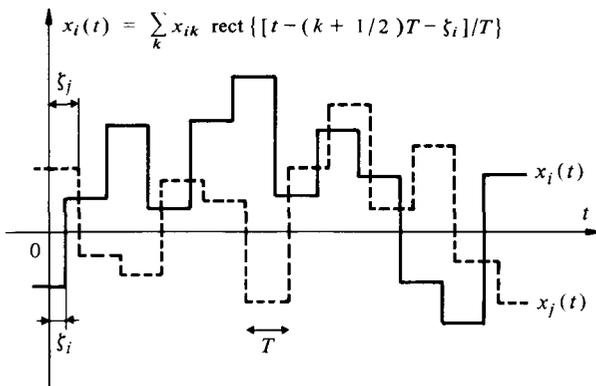


Fig. 5.8

La position  $\xi$  de la première transition après l'origine n'est pas identique pour chaque réalisation du processus, mais uniformément distribuée sur un intervalle  $T$  :  $p(\xi) = 1/T$  pour  $0 \leq \xi < T$ . La densité de probabilité  $p(x)$  est ainsi indépendante du temps et le processus  $\mathbf{x}(t)$  est stationnaire.

Supposons de plus que les valeurs  $x_k$  prises dans les différents intervalles soient *indépendantes* l'une de l'autre et possèdent une densité de probabilité  $p(x)$  arbitraire.

Pour  $|\tau| > T$ , les variables  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t + \tau)$  sont donc indépendantes et, par conséquent, selon (5.55) et (5.33) :

$$R_x(|\tau| > T) = E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t + \tau)] = E[\mathbf{x}_1] E[\mathbf{x}_2] = \mu_x^2 \tag{5.82}$$

De (5.63), on déduit que

$$C_x(|\tau| > T) = 0 \tag{5.83}$$

Pour  $|\tau| \leq T$ , on doit considérer deux situations qui s'excluent mutuellement : les états pris par les variables  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t + \tau)$  sont soit différents, soit iden-

tiques. Ainsi

$$R_x(|\tau| \leq T) = \begin{cases} E[\mathbf{x}^2] = \sigma_x^2 + \mu_x^2 & \text{si } \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \\ E[\mathbf{x}_1] E[\mathbf{x}_2] = \mu_x^2 & \text{si } \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2 \end{cases} \quad (5.84)$$

Autrement dit :

$$R_x(|\tau| \leq T) = (\sigma_x^2 + \mu_x^2) \text{Prob}(x_1 = x_2) + \mu_x^2 \text{Prob}(x_1 \neq x_2) \quad (5.85)$$

Les deux probabilités peuvent être évaluées en tenant compte de la distribution uniforme des instants de transition sur un intervalle  $T$ . Soit  $\xi$  la position aléatoire relative de ces transitions

$$p(\xi) = 1/T \quad 0 \leq \xi < T \quad (5.86)$$

L'évènement  $x_1 \neq x_2$  se réalise si une transition se produit dans l'intervalle  $|\tau|$ , c'est-à-dire si  $\xi < |\tau|$ . On obtient ainsi pour  $|\tau| \leq T$

$$\text{Prob}(x_1 \neq x_2) = \text{Prob}(\xi < |\tau|) = F_\xi(|\tau|) = \int_{-\infty}^{|\tau|} p(\xi) d\xi = \frac{|\tau|}{T} \quad (5.87)$$

D'autre part

$$\text{Prob}(x_1 = x_2) + \text{Prob}(x_1 \neq x_2) = 1 \quad (5.88)$$

d'où

$$\text{Prob}(x_1 = x_2) = 1 - |\tau|/T \quad (5.89)$$

La formule (5.85) devient

$$R_x(|\tau| \leq T) = (1 - |\tau|/T)(\sigma_x^2 + \mu_x^2) + (|\tau|/T)\mu_x^2 = (1 - |\tau|/T)\sigma_x^2 + \mu_x^2 \quad (5.90)$$

et

$$C_x(|\tau| \leq T) = (1 - |\tau|/T)\sigma_x^2 \quad (5.91)$$

Ces divers résultats peuvent être combinés pour tout  $\tau$  de la manière suivante en utilisant la notation (1.34)

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \text{tri}(\tau/T) + \mu_x^2 \quad (5.92)$$

$$C_x(\tau) = \sigma_x^2 \text{tri}(\tau/T) \quad (5.93)$$

et, par (5.64)

$$\rho_x(\tau) = \text{tri}(\tau/T) \quad (5.94)$$

Le résultat est ici indépendant de la densité  $p(x)$  du processus.

Les fonctions d'autocorrélation et d'autocovariance de ce processus sont représentées sur la figure 5.9.

D'autres exemples de détermination théorique de  $R_x(\tau)$  sont donnés aux sections 5.3 et 5.8 ou proposés à titre d'exercices.

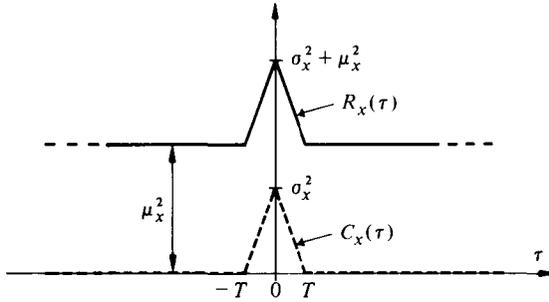


Fig. 5.9

□ 5.2.8 Définition : matrices de corrélation et de covariance

Dans le cas d'une suite (ou vecteur) aléatoire dont les composantes sont des variables aléatoires associées à un même processus, l'ensemble des valeurs d'autocorrélation ou de covariance (normalisées ou non) peut être rassemblé dans une matrice à laquelle il est convenu de donner le nom de *matrice de corrélation ou de covariance*. Un vecteur à  $k$  composantes  $\mathbf{x}_1$  à  $\mathbf{x}_k$  engendre une matrice ( $k \times k$ ) à  $k^2$  éléments

$$R_x(t_i, t_j) = E[\mathbf{x}(t_i) \mathbf{x}^T(t_j)] \tag{5.95}$$

ou

$$C_x(t_i, t_j) = E\{[\mathbf{x}(t_i) - \mu_x(t_i)][\mathbf{x}(t_j) - \mu_x(t_j)]^T\} \tag{5.96}$$

Si le vecteur résulte de l'échantillonnage régulier (chap. 9) d'un processus stationnaire, les valeurs de corrélation ou de covariance ne dépendent plus que de la différence  $\tau_{ij} = (i - j)\Delta\tau$ , où  $\Delta\tau$  est le pas d'échantillonnage et  $\mu_x(t_i) = \mu_x \forall i$  :

$$R_x = \begin{bmatrix} R_x(0) & R_x(\Delta\tau) & \dots & R_x([k-1]\Delta\tau) \\ R_x(\Delta\tau) & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & R_x(\Delta\tau) & \vdots \\ R_x([k-1]\Delta\tau) & \dots & R_x(\Delta\tau) & R_x(0) \end{bmatrix} \tag{5.97}$$

Une telle matrice est symétrique et chaque diagonale est composée d'éléments identiques (matrice de Toeplitz).

Compte tenu de (5.64), la matrice de covariance peut s'écrire sous la forme

$$C_x = \sigma_x^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & \dots & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \rho_1 & \vdots \\ \rho_{k-1} & \dots & \rho_1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{5.98}$$

où  $\rho_{|i-j|} = \rho(|i-j|\Delta\tau)$ .

Rappelons que les matrices (5.97) et (5.98) s'identifient si le processus est à valeur moyenne nulle ( $\mu_x = 0$ ).

Un cas particulier intéressant intervient lorsque les échantillons sont non corrélés : ceci entraîne l'annulation des coefficients de corrélation  $\rho_i$  et la matrice de covariance se réduit à une matrice diagonale d'éléments  $\sigma_x^2$ .

### □ 5.2.9 Définition : développement de Karhunen-Loève

Le principe de la représentation d'un signal sur un intervalle de temps  $T$  par une combinaison linéaire de fonctions orthogonales, présenté au chapitre 3, peut être étendu au cas d'un processus aléatoire  $\mathbf{x}(t)$ .

Le développement (3.50)

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t) \quad , \quad t \in T \quad (5.99)$$

où les fonctions  $\psi_k(t)$  sont choisies orthonormales pour simplifier, est ici à coefficients (3.43) aléatoires

$$\alpha_k = \int_T \mathbf{x}(t) \psi_k^*(t) dt \quad (5.100)$$

puisque le résultat dépend de la réalisation  $\mathbf{x}(t)$  du processus considéré sur l'intervalle  $T$ .

Les propriétés statistiques des coefficients  $\alpha_k$  dépendent du choix des fonctions orthogonales  $\psi_k(t)$ . On peut, par exemple, envisager un développement en série de Fourier (3.74). On peut montrer toutefois [24] que les coefficients obtenus sont corrélés.

Une représentation plus favorable (convergeant plus rapidement) est obtenue si les coefficients sont non corrélés (linéairement indépendants). Comme indiqué au paragraphe 5.2.6, la non corrélation implique l'annulation de la covariance.

Considérons, pour simplifier, un processus à valeur moyenne nulle, de telle sorte que covariance et corrélation s'identifient, de même que non corrélation et orthogonalité. Le problème revient donc à déterminer les fonctions  $\psi_k(t)$  qui garantissent l'orthogonalité des coefficients  $\alpha_k$  (éventuellement complexes)

$$E[\alpha_k \alpha_l^*] = \begin{cases} \sigma_k^2 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases} \quad (5.101)$$

En introduisant (5.100) dans (5.101), en invertissant les opérations d'intégration et d'espérance mathématique et en tenant compte de l'orthonormalité des fonctions  $\psi_k(t)$ , l'orthogonalité des coefficients  $\alpha_k$  définie par (5.101) est réalisée, pour un processus stationnaire, à la condition que

$$\int_T R_x(t-\tau) \psi_k(\tau) d\tau = \sigma_k^2 \psi_k(t) \quad (5.102)$$

Le développement obtenu avec des fonctions  $\psi_k(t)$  satisfaisant la condition (5.102) est appelé *développement de Karhunen-Loève*. Son intérêt est principalement théorique (convergence optimale). La résolution de l'équation intégrale (5.102) est délicate [25], [26]. Elle peut être aussi abordée sous forme numérique (§ XX.4.7.11).

5.3 DENSITÉ SPECTRALE DE PUISSANCE

5.3.1 Définitions : périodogramme et densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire

Considérons un membre  $x_i(t)$  d'un ensemble de signaux aléatoires constitué par des réalisations différentes d'un même processus aléatoire stationnaire ( $i = 1, 2, \dots$ ). La transformée de Fourier de  $x_i(t)$  n'existe pas, en général, car la condition de convergence

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x_i(t)| dt < \infty \tag{5.103}$$

n'est pas satisfaite.

Toutefois, si nous considérons (fig. 5.10) une fonction aperiodique  $x_i(t, T)$  constituée par un segment de  $x_i(t)$  défini dans l'intervalle  $-T/2 < t < T/2$  et identiquement nulle pour toute autre valeur de  $t$ , nous pouvons écrire comme au paragraphe 4.1.6 :

$$x_i(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_i(t, T) \tag{5.104}$$

avec

$$x_i(t, T) = x_i(t) \cdot \text{rect}(t/T) \tag{5.105}$$

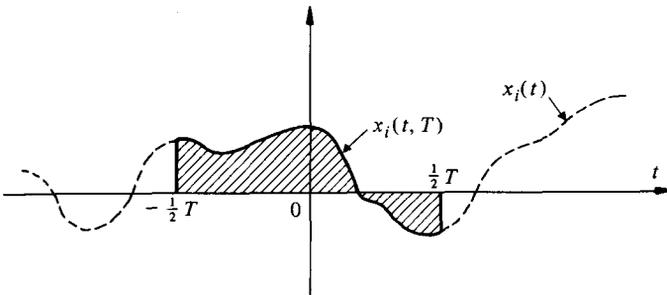


Fig. 5.10

La fonction  $x_i(t, T)$  possède, en général, une transformée de Fourier

$$\begin{aligned} X_i(f, T) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_i(t, T) \exp(-j 2\pi f t) dt \\ &= \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t) \exp(-j 2\pi f t) dt \end{aligned} \tag{5.106}$$

La puissance moyenne du signal contenue dans l'intervalle  $T$  est donnée par :

$$P_{x_i}(T) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |X_i(f, T)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{x_i}(f, T) df \tag{5.107}$$

La densité spectrale de puissance de  $x_i(t, T)$

$$\Phi_{x_i}(f, T) = T^{-1} |X_i(f, T)|^2 \quad (5.108)$$

est parfois appelée un *périodogramme* (terminologie historiquement associée à la recherche de périodicités cachées). Ce périodogramme est une *grandeur aléatoire*, puisqu'en principe différent pour chaque membre de l'ensemble des signaux  $\{x_i(t)\}$  constituant le processus.

Afin de caractériser les propriétés spectrales de l'ensemble mesurées sur l'intervalle  $T$ , il faut introduire la notion de moyenne statistique des densités spectrales :

$$\Phi_x(f, T) = E[\Phi_{x_i}(f, T)] \quad (5.109)$$

Ainsi, à chaque signal  $x_i(t, T)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , correspond un périodogramme  $\Phi_{x_i}(f, T)$ . A l'ensemble des  $x_i(t, T)$  correspond donc, *pour chaque fréquence  $f$* , un ensemble de valeurs de périodogramme  $\Phi_{x_i}(f, T)$  *distribuées aléatoirement autour d'une valeur moyenne théorique  $\Phi_x(f, T)$* .

Finalement, la *densité spectrale de puissance* (on dit aussi *spectre de puissance*) d'un processus aléatoire  $x(t)$  peut être définie comme la limite pour  $T \rightarrow \infty$  de la moyenne statistique  $\Phi_x(f, T)$  :

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \{\Phi_x(f, T) = E[\Phi_{x_i}(f, T)]\} = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{|X_i(f, T)|^2}{T} \right] \quad (5.110)$$

### 5.3.2 Commentaires

Si, par exemple,  $x(t)$  est une tension, la dimension du périodogramme et de la densité spectrale de puissance (5.110) est en  $V^2/Hz$ . L'expression (5.110) ne diffère de (4.107), établie dans le cas des signaux déterministes, que par l'introduction du concept supplémentaire d'espérance mathématique.

La mesure expérimentale de  $\Phi_x(f)$  ne peut évidemment pas être réalisée. Il s'agit donc d'une notion purement théorique. Seul le périodogramme  $\Phi_{x_i}(f, T)$  peut être déterminé expérimentalement. Son caractère aléatoire explique que la mesure  $\Phi_{x_i}(f, T)$  effectuée sur des réalisations différentes d'un processus aléatoire conduisent à des résultats qui sont légèrement différents. Si le signal observé est stationnaire et ergodique, il est possible d'obtenir une bonne estimation de la densité  $\Phi_x(f, T)$  en effectuant une moyenne de plusieurs périodogrammes mesurés sur des tronçons différents d'un seul signal.

Certains aspects de l'analyse spectrale expérimentale d'un signal aléatoire sont abordés au chapitre 12. Les problèmes plus spécifiques relatifs à l'approche numérique sont présentés dans le volume XX du Traité.

### 5.3.3 Théorème de Wiener-Khintchine

La densité spectrale de puissance d'un processus aléatoire stationnaire (au sens large) est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation statistique.

$$\Phi_x(f) = F\{R_x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau \quad (5.111)$$

### 5.3.4 Démonstration

Le périodogramme (5.108) d'un signal aléatoire réel peut s'exprimer, en tenant compte de (5.105), sous la forme :

$$\begin{aligned}\Phi_{x_i}(f, T) &= \frac{1}{T} X_i^*(f, T) X_i(f, T) \\ &= \frac{1}{T} \iint_{-\infty}^{\infty} x_i(t) x_i(t') \text{rect}(t/T) \text{rect}(t'/T) \exp[-j 2\pi f(t' - t)] dt dt'\end{aligned}\quad (5.112)$$

Puisque le processus est stationnaire, seule la différence de temps  $\tau = t' - t$  est significative. En remplaçant  $t'$  par  $t + \tau$ ,  $dt'$  par  $d\tau$  et en intervertissant les opérations d'intégration et d'espérance mathématique, (5.109) devient

$$\begin{aligned}E[\Phi_{x_i}(f, T)] &= \frac{1}{T} \iint_{-\infty}^{\infty} E[x_i(t) x_i(t + \tau)] \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t + \tau}{T}\right) \exp(-j 2\pi f\tau) dt d\tau\end{aligned}\quad (5.113)$$

Or, par définition

$$E[x_i(t) x_i(t + \tau)] = E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t + \tau)] = R_x(\tau) \quad (5.114)$$

et l'on reconnaît dans l'expression suivante la fonction d'autocorrélation d'une impulsion rectangulaire déjà rencontrée au paragraphe 4.2.20

$$\frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \text{rect}\left(\frac{t + \tau}{T}\right) dt = \text{tri}\left(\frac{\tau}{T}\right) \quad (5.115)$$

Ainsi,

$$\Phi_x(f, T) = E[\Phi_{x_i}(f, T)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \text{tri}(\tau/T) \exp(-j 2\pi f\tau) d\tau \quad (5.116)$$

et, par (5.110)

$$\Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E[\Phi_{x_i}(f, T)] = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \exp(-j 2\pi f\tau) d\tau \quad (5.117)$$

### 5.3.5 Commentaires

Grâce au théorème de Wiener-Khintchine, la théorie du signal peut proposer une définition unique de la densité spectrale (d'énergie ou de puissance selon les cas) d'un signal, qu'il soit déterministe ou aléatoire, ou encore une combinaison des deux : c'est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Ceci explique l'importance de ce dernier concept. Le tableau 5.11 résume les relations fondamentales de l'analyse spectrale.

Tableau 5.11

Signal à énergie finie

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) & \xleftrightarrow{\text{TF}} & X(f) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \varphi_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x(t+\tau)dt & \xleftrightarrow{\text{TF}} & \Phi_x(f) = |X(f)|^2
 \end{array}$$

Signal à puissance moyenne finie

- signal déterministe

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) & \xleftrightarrow{\text{TF?}} & X(f) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt & \xleftrightarrow{\text{TF}} & \Phi_x(f) \stackrel{?}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \\
 & & X(f, T) = F\{x(t, T) = x(t) \text{rect}(t/T)\}
 \end{array}$$

- cas particulier du signal périodique de période  $T$

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) = x(t+mT) & \xleftrightarrow{\text{TF}} & X(f) = \sum_n X_n \delta(f-n/T) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \varphi_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt & & X_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi nt/T) dt \\
 = \sum_n |X_n|^2 \exp(j2\pi n\tau/T) & \xleftrightarrow{\text{TF}} & \Phi_x(f) = \sum_n |X_n|^2 \delta(f-n/T)
 \end{array}$$

- signal aléatoire (stationnaire et ergodique)

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) & & \\
 \downarrow & & \\
 \varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt & & \\
 \equiv R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] & \xleftrightarrow{\text{TF}} & \Phi_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{1}{T} |X(f, T)|^2 \right] \\
 & & X(f, T) = F\{x(t, T) = x(t) \text{rect}(t/T)\}
 \end{array}$$

Si, pour un signal aléatoire,  $\Phi_x(f)$  est connue, la fonction d'autocorrélation peut s'en déduire par transformation de Fourier inverse

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) \exp(j2\pi f\tau) df \tag{5.118}$$

En particulier, un résultat similaire à (4.102) établi dans le contexte des signaux déterministes à puissance moyenne finie est obtenu pour  $\tau = 0$ . Avec (5.68) et, en plus, la condition d'ergodisme (5.60), on a les équivalences

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = R_x(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df \tag{5.119}$$

La fonction  $\Phi_x(f)$  représente bien la distribution fréquentielle de la puissance totale  $P_x = \sigma_x^2 + \mu_x^2$  d'un signal aléatoire. C'est donc toujours une fonction réelle non négative

$$\Phi_x(f) \geq 0 \quad (5.120)$$

En raison de la symétrie hermitienne (5.80) de la fonction d'autocorrélation, cette propriété reste valable que le signal soit réel ou complexe.

Dans le cas d'un signal *réel*,  $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$  et  $\Phi_x(f)$  est aussi une fonction paire

$$\Phi_x(f) = \Phi_x(-f) \quad (5.121)$$

On peut donc aussi introduire une représentation spectrale unilatérale, comme au paragraphe 4.5.2, en posant :

$$\Phi_x^+(f) = 2 \epsilon(f) \Phi_x(f) \quad (5.122)$$

Par (5.63), on peut écrire la fonction d'autocorrélation comme la somme de la fonction d'autocovariance et d'une constante  $\mu_x^2$

$$R_x(\tau) = C_x(\tau) + \mu_x^2 \quad (5.123)$$

Par (5.111), il vient

$$\Phi_x(f) = F \{C_x(\tau)\} + \mu_x^2 \delta(f) \quad (5.124)$$

La fonction d'autocovariance correspondant à la fonction d'autocorrélation d'un processus centré  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}(t) - \mu_x$ , c'est-à-dire à valeur moyenne nulle, sa transformée de Fourier ne contient aucune impulsion de Dirac à l'origine (sauf cas exceptionnel, comme l'exemple du paragraphe 5.1.15, qui exclut l'ergodisme [50]). Le terme  $F \{C_x(\tau)\}$ , que l'on peut noter  $\Phi_{x0}(f)$ , correspond à la densité spectrale de puissance des fluctuations aléatoires du processus *par rapport* à la valeur moyenne  $\mu_x$ . La présence dans le spectre de puissance d'une impulsion à l'origine  $\mu_x^2 \delta(f)$  traduit l'existence d'une valeur moyenne — ou composante continue — non nulle.

On peut montrer [25] que si, lorsque  $T \rightarrow \infty$ , la valeur moyenne statistique  $\Phi_x(f, T)$  du périodogramme tend à la limite vers la densité spectrale de puissance, comme indiqué par (5.110), la variance du périodogramme, elle, ne tend pas nécessairement vers zéro. Ainsi, lors de l'observation d'un signal aléatoire, même ergodique, le périodogramme mesuré n'est pas nécessairement un bon estimateur spectral, même si l'on fait croître la durée d'observation  $T$  (§ 12.1.8). Il est donc préférable d'effectuer plusieurs mesures — dans toute la mesure du possible indépendantes — et de calculer la moyenne des périodogrammes ainsi obtenus. Cette technique est appliquée dans les systèmes d'analyse spectrale par voie numérique (§ 12.2.3). Une autre approche, utilisée dans les analyseurs analogiques, mais également exploitable par voie numérique, consiste à lisser le périodogramme mesuré grâce à un filtre approprié (§ 12.1.11). Ces diverses techniques doivent être toutefois appliquées de manière judicieuse si l'on veut éviter une mesure systématiquement biaisée.

L'effet de la durée d'observation limitée  $T$  se déduit directement de (5.111) qui exprime la transformée de Fourier du produit  $R_x(\tau) \cdot \text{tri}(\tau/T)$ . La valeur moyenne statistique  $\Phi_x(f, T)$  du périodogramme correspond donc à la *convolution* (ce qui est équivalent à un filtrage) de la densité spectrale théorique  $\Phi_x(f)$  avec une fonction  $T \text{sinc}^2(Tf)$ . La résolution spectrale dépend ainsi directement de la durée d'observation (§ 12.1.5).

### 5.3.6 Exemple

Le signal sinusoïdal à phase aléatoire  $x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \alpha)$  décrit au paragraphe 5.1.16 possède la fonction d'autocorrélation (5.29)

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (5.125)$$

Par (5.111) et (4.117), sa densité spectrale de puissance vaut

$$\Phi_x(f) = (A^2/4)[\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] \quad (5.126)$$

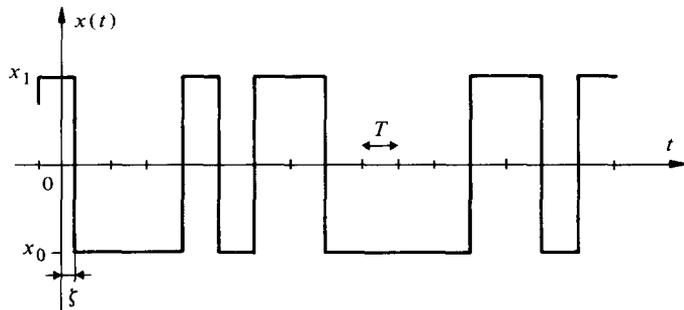
et

$$P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df = \frac{A^2}{2} \quad (5.127)$$

La densité spectrale à observation limitée  $\Phi_x(f, T)$  est, elle, égale à  $\Phi_x(f) * T \operatorname{sinc}^2(Tf) = \frac{1}{4} A^2 T \{\operatorname{sinc}^2[T(f+f_0)] + \operatorname{sinc}^2[T(f-f_0)]\}$ .

### 5.3.7 Exemple : signal binaire cadencé en mode NRZ

Ce type de signal (fig. 5.12) joue un rôle fondamental, en particulier en télécommunications, puisqu'il traduit sous sa forme la plus simple (mode NRZ = non retour à zéro) une information codée en binaire telle que celle fournie par un système informatique. Les symboles binaires 0 et 1 sont générés à la cadence  $1/T$  bit/s et correspondent respectivement aux niveaux  $x_0$  et  $x_1$  du signal.



information binaire ... 1 0 0 0 1 0 1 1 0 0 0 0 1 1 0 1 1

Fig. 5.12

Ce signal est stationnaire si l'origine du temps est inconnue, c'est-à-dire si la variable  $\xi$  est uniformément distribuée sur une période d'horloge  $T$ .

Si l'on suppose que les symboles successifs sont statistiquement indépendants les uns des autres, le signal  $x(t)$  de la figure 5.12 devient un cas particulier de celui examiné au paragraphe 5.2.7. Sa densité de probabilité est alors simplement, d'après (5.32)

$$p(x) = \operatorname{Prob}(x_0) \delta(x - x_0) + \operatorname{Prob}(x_1) \delta(x - x_1) \quad (5.128)$$

avec la condition :  $\operatorname{Prob}(x_0) + \operatorname{Prob}(x_1) = 1$ .

On en tire :

$$\mu_x = E[\mathbf{x}] = x_0 \operatorname{Prob}(x_0) + x_1 \operatorname{Prob}(x_1) \quad (5.129)$$

$$P_x = E[\mathbf{x}^2] = \sigma_x^2 + \mu_x^2 = x_0^2 \operatorname{Prob}(x_0) + x_1^2 \operatorname{Prob}(x_1) \quad (5.130)$$

La fonction d'autocorrélation, donnée par (5.92) et représentée sur la figure 5.9, est de type triangulaire et ne dépend que de la période d'horloge  $T$ , du carré de la valeur moyenne  $\mu_x$  et de la variance  $\sigma_x^2$

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \text{tri}(\tau/T) + \mu_x^2 \quad (5.131)$$

La densité spectrale de puissance d'un tel signal, représentée sur la figure 5.13, vaut, par (5.111) et (4.35)

$$\Phi_x(f) = \sigma_x^2 T \text{sinc}^2(fT) + \mu_x^2 \delta(f) \quad (5.132)$$

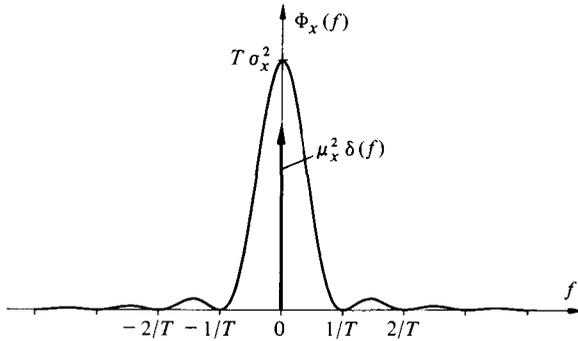


Fig. 5.13

Un cas particulier intéressant intervient lorsque les symboles binaires 0 et 1 sont *équiprobables*. On a alors  $\text{Prob}(x_0) = \text{Prob}(x_1) = 1/2$ , d'où :

$$\mu_x = 1/2 (x_0 + x_1) \quad (5.133)$$

$$\mu_x^2 = 1/4 (x_0 + x_1)^2 \quad (5.134)$$

$$\sigma_x^2 = 1/4 (x_0 - x_1)^2 \quad (5.135)$$

$$P_x = 1/2 (x_0^2 + x_1^2) \quad (5.136)$$

Si, de plus, le signal est antipolaire, c'est-à-dire si  $x_1 = -x_0 = A$  :  $\mu_x = 0$ ; il n'y a donc plus de composante continue et  $\sigma_x^2 = A^2 = P_x$ .

Si, au contraire, le signal est unipolaire :  $x_0 = 0$  et  $x_1 = A$ . On obtient alors une composante continue de valeur  $\mu_x = A/2$  et une variance  $\sigma_x^2 = A^2/4$ ; la puissance totale valant dans ce cas  $P_x = A^2/2$ .

L'examen de la figure 5.13 indique que l'essentiel (91 %) de la puissance du signal binaire cadencé est contenue dans la bande de fréquence  $0 < |f| < 1/T$ .

### 5.3.8 Exemple : signal binaire cadencé en mode biphase

On peut chercher à modifier le spectre d'un signal transportant une information binaire en jouant sur le mode de représentation des symboles 0 et 1. Un exemple en est le mode dit biphase qui correspond à nouveau à un signal binaire. Les symboles 0 et 1 sont ici représentés par le signe de la transition toujours présente au milieu de la période d'horloge correspondante : négative par exemple pour le symbole 1 et positive pour le symbole 0. Considérons, pour simplifier, le cas d'un signal antipolaire  $y_1 = -y_0 = A$  (fig. 5.14).

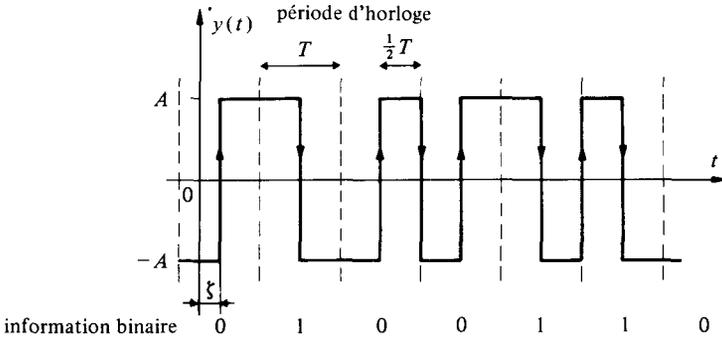


Fig. 5.14

Supposons que les symboles 0 et 1 soient à nouveau indépendants et, de plus, équiprobables. Comme précédemment, le signal est issu d'un processus stationnaire si la variable  $\xi$  est uniformément distribuée sur une période d'horloge  $T$ .

La fonction d'autocorrélation de ce signal peut être évaluée en partant de la relation (5.57) où les indices 1 et 2 désignent les variables séparées par l'intervalle  $\tau$  et les indices  $i$  et  $j$  les deux états possibles

$$R_y(\tau) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 y_{1i} y_{2j} \text{Prob}(y_{1i}, y_{2j}; \tau) \quad (5.137)$$

avec

$$y_{1i} y_{2j} = \begin{cases} A^2 & \text{si } i = j \\ -A^2 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.138)$$

Autrement dit

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= A^2 [\text{Prob}(y_{1i} = y_{2j}; \tau) - \text{Prob}(y_{1i} \neq y_{2j}; \tau)] \\ &= A^2 [1 - 2 \text{Prob}(y_{1i} \neq y_{2j}; \tau)] \end{aligned} \quad (5.139)$$

Pour  $|\tau| > T$ , les deux probabilités sont évidemment égales, en raison de l'indépendance et de l'équiprobabilité des symboles 0 et 1. Donc

$$R_x(|\tau| > T) = 0 \quad (5.140)$$

Pour  $|\tau| \leq T$ , la probabilité que les variables  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  prennent des valeurs différentes est égale à celle d'avoir une transition unique dans l'intervalle  $\tau$ .

Une distinction doit être faite entre les domaines  $|\tau| \leq T/2$  et  $T/2 \leq |\tau| \leq T$ .

Pour  $|\tau| \leq T/2$ , la probabilité d'avoir une transition unique est nulle si  $\mathbf{y}_1$  se trouve située sur la deuxième moitié de la période d'horloge d'un symbole et si le symbole suivant est différent. La première situation se réalise avec une probabilité égale à  $\frac{1}{2}$  en raison de la distribution uniforme de  $\xi$  sur une période d'horloge. La probabilité d'un changement de symbole est aussi égale à  $\frac{1}{2}$  puisqu'on a supposé ici les symboles équiprobables. La probabilité conjointe de ces deux événements indépendants est ainsi égale à  $\frac{1}{4}$ . La situation contraire se produit donc avec une probabilité égale à  $\frac{1}{4}$ . Dans ce cas, la probabilité d'avoir une transition est proportionnelle à  $|\tau|$  et varie de zéro à un pour

$|\tau|$  variant de zéro à  $T/2$ . Ainsi

$$\text{Prob}(y_{1i} \neq y_{2j}; |\tau| \leq T/2) = \frac{3}{4} |\tau| / (\frac{1}{2} T) = (3/2) |\tau| / T \quad (5.141)$$

et, en remplaçant dans (5.139)

$$R_y(|\tau| \leq T/2) = A^2(1 - 3|\tau|/T) \quad (5.142)$$

Pour  $T/2 \leq |\tau| \leq T$ , on peut avoir zéro, une ou même deux transitions. Ainsi la probabilité d'avoir une transition unique est égale à 1 moins les probabilités de n'en avoir aucune ou deux. Le premier cas ne peut se produire à nouveau que si  $\mathbf{y}_1$  est située sur la deuxième moitié de la période d'horloge d'un symbole et si le symbole suivant est différent. Sa probabilité vaut  $\frac{1}{4}$  pour  $|\tau| = T/2$  et elle décroît linéairement avec  $|\tau|$  pour s'annuler lorsque  $|\tau| = T$ :

$$\text{Prob}(\text{zéro transition dans } T/2 \leq |\tau| \leq T) = \frac{1}{4}(T - |\tau|) / \frac{1}{2} T = \frac{1}{2}(1 - |\tau|/T) \quad (5.143)$$

Deux transitions dans  $T/2 \leq |\tau| \leq T$  ne peuvent se produire qu'en cas de répétition d'un même symbole. La probabilité correspondante est nulle pour  $|\tau| = T/2$  et croît linéairement avec  $|\tau|$  pour atteindre la valeur  $\frac{1}{2}$  pour  $|\tau| = T$ :

$$\text{Prob}(2 \text{ transitions dans } T/2 \leq |\tau| \leq T) = |\tau|/T - \frac{1}{2} \quad (5.144)$$

Ainsi :

$$\text{Prob}(y_{1i} \neq y_{2j}; T/2 \leq |\tau| \leq T) = 1 - \frac{1}{2} |\tau|/T \quad (5.145)$$

et par (5.139)

$$R_y(T/2 \leq |\tau| \leq T) = A^2[|\tau|/T - 1] \quad (5.146)$$

Les résultats (5.140), (5.142) et (5.146) sont représentés sur la figure 5.15. Ils peuvent être combinés en utilisant la notation (1.34) dans la formule globale

$$R_y(\tau) = A^2[2 \text{ tri}(2\tau/T) - \text{tri}(\tau/T)] \quad (5.147)$$

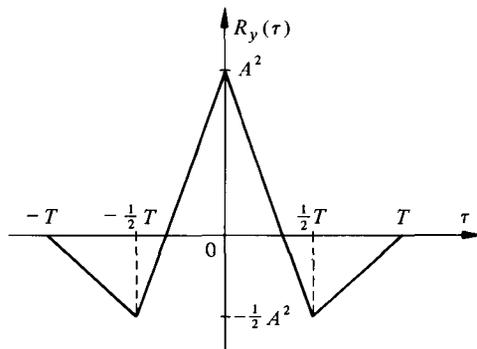


Fig. 5.15

La densité spectrale de puissance se déduit facilement de (5.147) en utilisant le résultat (4.35) :

$$\Phi_y(f) = A^2 T[\text{sinc}^2(fT/2) - \text{sinc}^2(fT)] \quad (5.148)$$

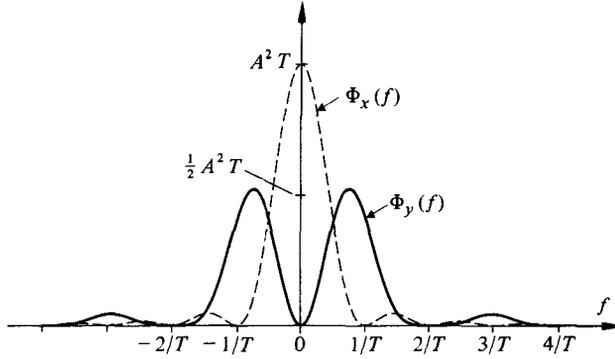


Fig. 5.16

Cette densité spectrale est comparée sur la figure 5.16 à la densité  $\Phi_x(f) = A^2 T \operatorname{sinc}^2(fT)$  obtenue selon (5.132) dans le cas du mode NRZ antipolaire.

### 5.3.9 Formule générale pour signal numérique

Une expression générale du spectre d'un signal  $x(t)$  transportant une information codée en binaire peut être établie [66] sous l'hypothèse d'indépendance statistique des symboles. Si  $s_0(t) = F^{-1}[S_0(f)]$  et  $s_1(t) = F^{-1}[S_1(f)]$  sont des signaux à énergie finie, de durée  $T$  égale à la période d'horloge, correspondant respectivement aux symboles logiques 0 et 1 et si  $p_0$  et  $p_1$  dénotent les probabilités d'apparition de ces symboles :

$$\begin{aligned} \Phi_x(f) = & \frac{1}{T} (p_0 |S_0(f)|^2 + p_1 |S_1(f)|^2) - \frac{1}{T} |p_0 S_0(f) + p_1 S_1(f)|^2 \\ & + \frac{1}{T^2} |p_0 S_0(f) + p_1 S_1(f)|^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n/T) \end{aligned} \quad (5.149)$$

Dans le cas particulier où les symboles sont équiprobables et les signaux associés antipolaires [ $s_1(t) = -s_0(t) = s(t)$ ], la formule (5.149) se résume à

$$\Phi_x(f) = T^{-1} |S(f)|^2 \quad (5.150)$$

### 5.3.10 Définition : bruit blanc

Un processus aléatoire  $x(t)$  dont la densité spectrale de puissance est constante pour toute valeur de  $f$  est appelé *bruit blanc*, par analogie avec la lumière blanche qui est composée de radiations de toutes les longueurs d'ondes :

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{2} \eta \quad \text{pour } |f| < \infty \quad (5.151)$$

Un tel modèle est bien sûr théorique, car ce processus ne peut exister. Sa puissance moyenne est en effet infinie. Ce concept est toutefois fort utile dans un grand nombre de cas où le spectre réel peut être, en première approximation, remplacé par un spectre constant (chap. 6).

Par (4.74), la fonction d'autocorrélation du bruit blanc (fig. 5.17) est une impulsion de Dirac de poids  $\frac{1}{2} \eta$  :

$$R_x(\tau) = F^{-1} \{ \frac{1}{2} \eta \} = \frac{1}{2} \eta \delta(\tau) \quad (5.152)$$

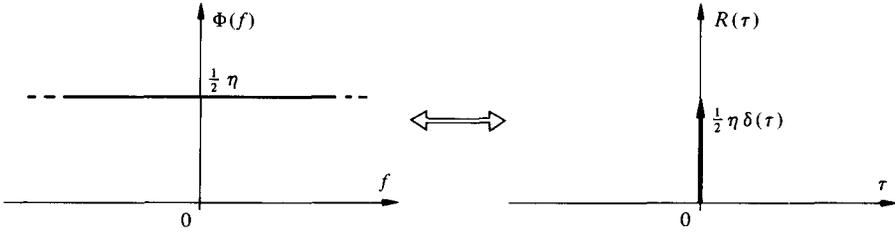


Fig. 5.17

Ce résultat signifie que pour un bruit blanc, les variables aléatoires  $\mathbf{x}(t_1)$  et  $\mathbf{x}(t_2)$  sont totalement **non corrélées**, quelque soit  $\tau = t_2 - t_1 \neq 0$ . Si le processus est gaussien (sect. 5.7), cette non corrélation entraîne l'indépendance statistique.

On appelle également **bruit blanc à bande limitée** un processus aléatoire dont le spectre est constant dans une bande finie de fréquences et nul partout ailleurs :

$$\Phi(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} \eta & \text{pour } f_1 < |f| < f_2 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases} \quad (5.153)$$

On peut considérer qu'un tel processus correspond au signal de sortie d'un filtre idéal de largeur de bande  $B = f_2 - f_1$  excité par un bruit blanc idéal de densité spectrale  $\eta/2$ .

La valeur moyenne de ce processus est nulle et sa puissance totale est finie :

$$P = \sigma^2 = R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(f) df = \eta B \quad (5.154)$$

Le spectre est de type **passé-bas** si  $f_1 = 0$  et  $f_2 = B$  :

$$\Phi_1(f) = \frac{1}{2} \eta \text{rect}[f/(2B)] \quad (5.155)$$

d'où, par (4.26)

$$R_1(\tau) = F^{-1} \{ \Phi_1(f) \} = \eta B \text{sinc}(2B\tau) \quad (5.156)$$

Les variables  $\mathbf{x}(t_1)$  et  $\mathbf{x}(t_2)$  sont ici non corrélées à condition d'être séparées par un pas  $\tau$  égal à un multiple de  $1/(2B)$ .

Le spectre est de type **passé-bande** si  $f_1 = f_0 - B/2$  et  $f_2 = f_0 + B/2$  :

$$\Phi_2(f) = \frac{1}{2} \eta \text{rect}[(f + f_0)/B] + \frac{1}{2} \eta \text{rect}[(f - f_0)/B] \quad (5.157)$$

d'où

$$R_2(\tau) = \eta B \text{sinc}(B\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (5.158)$$

Les densités spectrales et les fonctions d'autocorrélation de ces deux types de bruit blanc à bande limitée sont représentées sur la figure 5.18.

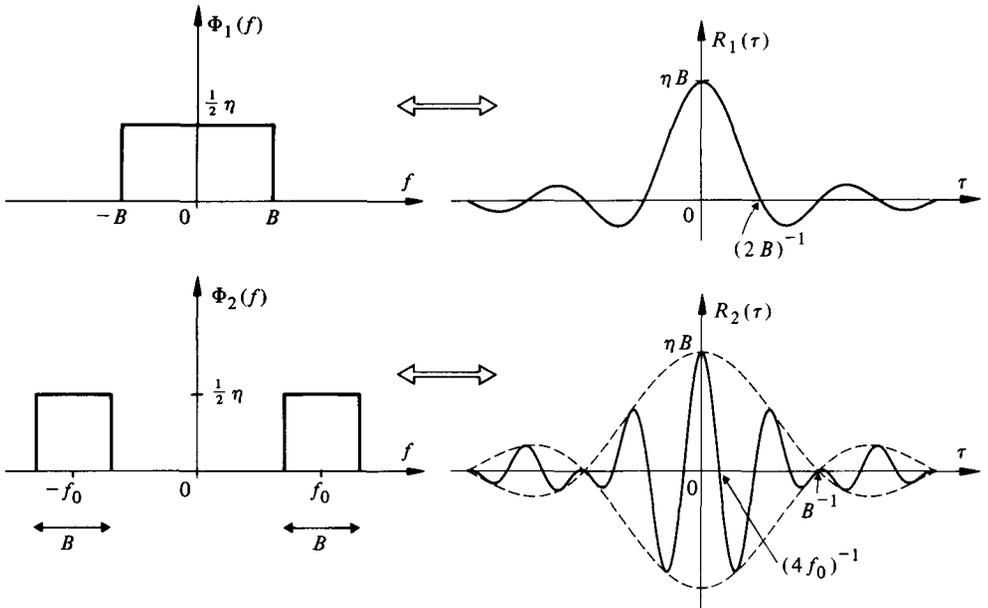


Fig. 5.18

### 5.4 FONCTIONS D'INTERCORRÉLATION ET DENSITÉS SPECTRALES MUTUELLES

#### 5.4.1 Fonctions d'intercorrélation. Définition

Considérons deux processus aléatoires stationnaires différents  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$ . Introduisons la notation simplifiée  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t + \tau)$ ,  $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t + \tau)$ ,  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}(t)$ .

La distribution conjointe des deux variables aléatoires  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  ne dépend que de la différence de temps  $\tau$  :  $p(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; t_1, t_2) = p(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_2; \tau)$ .

Les *fonctions d'intercorrélation statistique* (en anglais : *crosscorrelation functions*) de  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$  sont alors définies de la manière suivante dans le cas général où ces processus sont représentés par des grandeurs **complexes** :

$$R_{xy}(\tau) = E[\mathbf{x}^*(t) \mathbf{y}(t + \tau)] = E[\mathbf{x}_1^* \mathbf{y}_2] \tag{5.159}$$

$$R_{yx}(\tau) = E[\mathbf{y}^*(t) \mathbf{x}(t + \tau)] = E[\mathbf{y}_1^* \mathbf{x}_2] \tag{5.160}$$

Ce sont aussi des fonctions complexes.

Dans le cas usuel de processus **réels**, ces fonctions sont aussi réelles et égales à

$$R_{xy}(\tau) = E[\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_2] = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 p(x_1, y_2; \tau) dx_1 dy_2 \tag{5.161}$$

$$R_{yx}(\tau) = E[\mathbf{y}_1 \mathbf{x}_2] = \iint_{-\infty}^{\infty} y_1 x_2 p(y_1, x_2; \tau) dy_1 dx_2 \tag{5.162}$$

Pour des processus ergodiques, les définitions (5.161) et (5.162) sont identiques aux

fonctions d'intercorrélation temporelles

$$R_{xy}(\tau) \equiv \varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau) dt = x(-\tau) \overline{*} y(\tau) \quad (5.163)$$

et

$$R_{yx}(\tau) \equiv \varphi_{yx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t)x(t+\tau) dt = y(-\tau) \overline{*} x(\tau) \quad (5.164)$$

avec la relation

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \quad (5.165)$$

Dans le cas de processus complexes, la symétrie hermitienne donne  $R_{xy}(\tau) = R_{yx}^*(-\tau)$ .

#### 5.4.2 Densités spectrales mutuelles. Définition

Les transformées de Fourier des fonctions d'intercorrélation sont en général complexes [ $R_{xy}(\tau)$  et  $R_{yx}(\tau)$  ne sont pas, en principe, des fonctions paires en  $\tau$ ]:

$$\Phi_{xy}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (5.166)$$

$$\Phi_{yx}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \quad (5.167)$$

avec  $\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}^*(f)$ .

Ces transformées sont appelées *densités spectrales mutuelles*, ou encore *densités interspectrales de puissance*.

Par analogie avec (5.110), la densité spectrale mutuelle correspond aussi à la limite

$$\Phi_{xy}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{|X^*(f, T) Y(f, T)|}{T} \right] \quad (5.168)$$

#### 5.4.3 Fonctions d'intercovariance. Définitions

Les *fonctions d'intercovariance* sont les fonctions d'intercorrélation des processus centrés  $\mathbf{x}(t) - \mu_x$  et  $\mathbf{y}(t) - \mu_y$  :

$$C_{xy}(\tau) = E[(\mathbf{x}_1 - \mu_x)(\mathbf{y}_2 - \mu_y)] = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y \quad (5.169)$$

$$C_{yx}(\tau) = E[(\mathbf{y}_1 - \mu_y)(\mathbf{x}_2 - \mu_x)] = R_{yx}(\tau) - \mu_x \mu_y \quad (5.170)$$

La *fonction d'intercovariance normalisée* (ou *coefficient d'intercorrélation*) est définie par

$$\rho_{xy}(\tau) = C_{xy}(\tau) / (\sigma_x \sigma_y) \quad (5.171)$$

Le coefficient d'intercorrélation mesure le degré de dépendance linéaire entre les variables  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{y}_2$ .

#### 5.4.4 Propriétés

Par une démarche analogue à celle présentée au paragraphe 5.2.4, on démontre que

$$|R_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{R_x(0) R_y(0)} \quad (5.172)$$

$$|C_{xy}(\tau)| \leq \sqrt{C_x(0) C_y(0)} = \sigma_x \sigma_y \quad (5.173)$$

et

$$|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1 \quad (5.174)$$

Aux valeurs de  $\tau = t_2 - t_1$  pour lesquelles  $C_{xy}(\tau) = 0$ , les variables aléatoires  $\mathbf{x}(t_1)$  et  $\mathbf{y}(t_2)$  sont dites *non corrélées*. Elles sont *orthogonales* pour les valeurs de  $\tau$  où  $R_{xy}(\tau) = 0$ . Orthogonalité et non corrélation s'identifient si l'un au moins des processus est à valeur moyenne nulle.

Si  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$  sont des processus statistiquement *indépendants*, on a pour tout  $\tau$  :

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}(\tau) = \rho_{xy}(\tau) = 0 \quad (5.175)$$

et

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = \mu_x \mu_y \quad (5.176)$$

Par contre, *l'annulation de l'intercovariance n'est pas une condition suffisante d'indépendance* (sauf, en particulier, si les processus sont gaussiens [sect. 5.7]).

On peut également établir l'inégalité suivante [65] pour des processus centrés :

$$|\Phi_{xy}(f)|^2 \leq \Phi_x(f) \Phi_y(f) \quad (5.177)$$

#### 5.4.5 Définition : fonction de cohérence

On appelle *fonction de cohérence* le rapport normalisé

$$\Gamma_{xy}(f) = \frac{|\Phi_{xy}(f)|^2}{\Phi_x(f) \Phi_y(f)} \quad (5.178)$$

De (5.177), il découle que

$$0 \leq \Gamma_{xy}(f) \leq 1 \quad (5.179)$$

La fonction de cohérence joue, dans le domaine fréquentiel, un rôle analogue à celui du coefficient de corrélation dans le domaine temporel : les processus  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$  sont dits incohérents, c'est-à-dire non corrélés à la fréquence  $f_*$  si  $\Gamma_{xy}(f_*) = 0$ . Si  $\Gamma_{xy}(f) = 1$  pour tout  $f$ , les processus sont parfaitement cohérents.

La fonction de cohérence peut être utilisée [65, 67] pour contrôler la linéarité d'un système liant  $\mathbf{y}(t)$  à  $\mathbf{x}(t)$ . Elle est une mesure de la part de la puissance du signal de sortie, à la fréquence  $f$ , due au signal d'entrée. Dans le cas d'une linéarité parfaite,  $\Gamma_{xy}(f) = 1$  si aucun bruit perturbateur annexe n'intervient dans la mesure (voir exercice 8.5.8).

Une fonction de cohérence inférieure à 1 indique par contre : soit la présence d'un bruit annexe, soit une relation non linéaire entre  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{y}(t)$ , soit enfin que  $\mathbf{y}(t)$  ne dépend pas uniquement de la seule excitation  $\mathbf{x}(t)$ .

**5.4.6 Matrices d'intercorrélation et d'intercovariance**

Dans le cas de vecteurs aléatoires, on peut regrouper, comme au paragraphe 5.2.8, les valeurs d'intercorrélation ou d'intercovariance dans une matrice.

**5.5 SOMME DE SIGNAUX ALÉATOIRES**

**5.5.1 Densité de probabilité d'une somme de variables aléatoires**

Soit trois variables aléatoires  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  liées par la relation

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \tag{5.180}$$

Supposons connue la densité de probabilité conjointe des variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  :  $p_{xy}(x, y)$ . La densité de probabilité marginale relative à  $\mathbf{z}$  peut être obtenue en déterminant la densité conjointe du couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  par la méthode décrite au paragraphe 5.1.20 et en intégrant par rapport à  $x$  :

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{xy}(x, z - x) dx \tag{5.181}$$

Dans le cas particulier où les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont *statistiquement indépendantes* :  $p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y)$  et la densité de probabilité de la somme est égale à la *convolution* de leurs densités respectives

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) p_y(z - x) dx = p_x(z) * p_y(z) \tag{5.182}$$

La fonction caractéristique (14.64) d'une variable est la transformée de Fourier inverse de sa densité de probabilité

$$\Pi_x(v) = F^{-1} \{ p_x(x) \} \tag{5.183}$$

Par la propriété (4.15), on a ainsi pour des variables indépendantes

$$\Pi_z(v) = \Pi_x(v) \cdot \Pi_y(v) \tag{5.184}$$

Les formules (5.182) et (5.184) peuvent être généralisées pour  $n$  variables aléatoires indépendantes. Si

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k \tag{5.185}$$

$$p_z(z) = p_1(z) * p_2(z) * \dots * p_n(z) \tag{5.186}$$

et

$$\Pi_z(v) = \Pi_1(v) \cdot \Pi_2(v) \dots \Pi_n(v) \tag{5.187}$$

**5.5.2 Exemple**

Soit deux signaux aléatoires indépendants  $x(t)$  et  $y(t)$  à distribution uniforme entre zéro et un :  $p_x(x) = \text{rect}(x - \frac{1}{2})$  et  $p_y(y) = \text{rect}(y - \frac{1}{2})$ . La densité de probabilité de leur somme (fig. 5.19) est du type triangulaire :  $p_z(z = x + y) = \text{tri}(z - 1)$ .

Ce résultat peut être obtenu en évaluant la convolution (5.182) ou en passant par la transformation indirecte  $p_z(z) = F[\Pi_z(v)]$ , avec  $\Pi_z(v)$  exprimée par le produit (5.184). On a ici, en appliquant la propriété (4.17),  $\Pi_x(v) = \Pi_y(v) = \text{sinc}(v) \exp(j\pi v)$ .

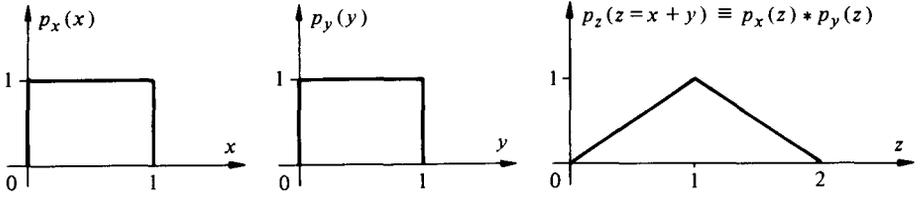


Fig. 5.19

**5.5.3 Théorème de la limite centrale**

Ce théorème, dont la démonstration sort du cadre de cet ouvrage [68], est une conséquence de la convolution multiple (5.186). On peut l'énoncer comme suit : *La distribution statistique de la somme de n variables aléatoires indépendantes, possédant la même loi de probabilité, tend asymptotiquement vers une distribution gaussienne lorsque  $n \rightarrow \infty$ , quelle que soit la distribution des termes individuels.*

Une illustration de ce phénomène est représenté sur la figure 5.20.

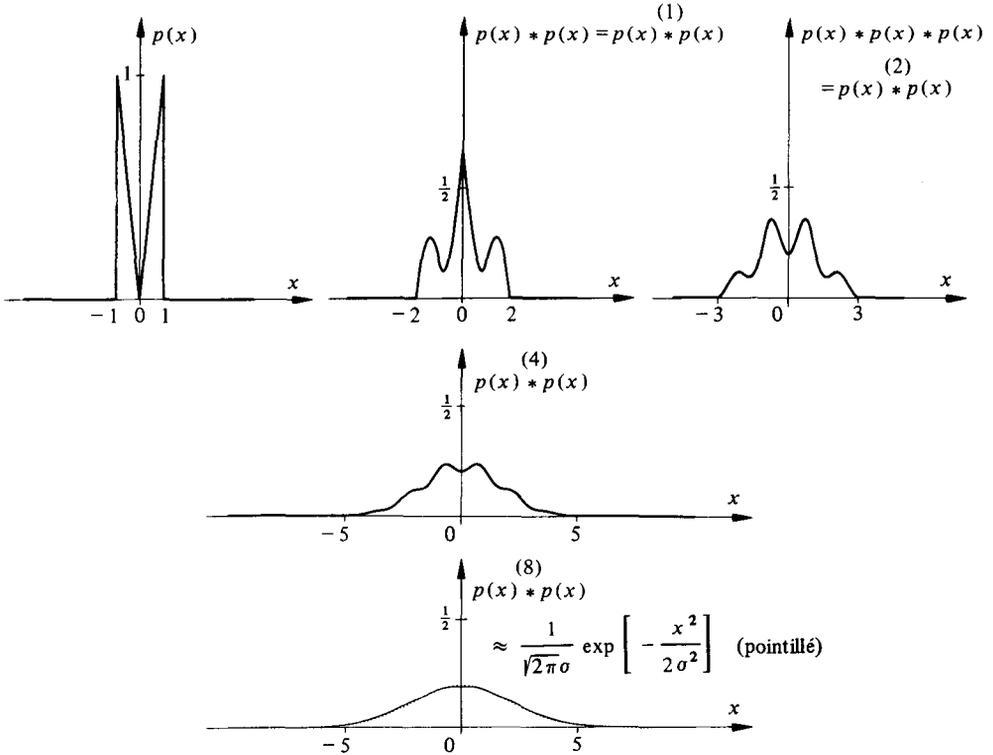


Fig. 5.20

Ce théorème reste valable même si les distributions individuelles sont différentes, pour autant que la variance de chacun des termes individuels soit négligeable vis-à-vis de la variance de la somme.

### 5.5.4 Importance de la tendance vers une loi normale

Le théorème de la limite centrale joue un rôle capital en théorie des fonctions aléatoires [69] en général et en théorie du signal [70] en particulier. Ceci est dû au fait que de nombreux phénomènes aléatoires (certains bruits de fond, présentés au chapitre 6, par exemple) résultent de la somme d'un très grand nombre de contributions individuelles, de distributions parfois inconnues. Il est alors possible d'assimiler la distribution résultante à une loi normale si les contributions peuvent être considérées comme indépendantes. De plus, les processus gaussiens (sect. 5.6) jouissent de propriétés particulières permettant de résoudre certains problèmes insolubles ou difficilement solubles autrement.

### 5.5.5 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale d'une somme de signaux aléatoires

Considérons la combinaison linéaire

$$z(t) = ax(t) + by(t) \quad (5.188)$$

La fonction d'autocorrélation et la densité spectrale du signal  $z(t)$  valent, par (5.55), (5.111), (5.161) et (5.166) :

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E[\mathbf{z}(t) \mathbf{z}(t + \tau)] \\ &= a^2 R_x(\tau) + b^2 R_y(\tau) + ab[R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)] \end{aligned} \quad (5.189)$$

$$\Phi_z(f) = a^2 \Phi_x(f) + b^2 \Phi_y(f) + ab[\Phi_{xy}(f) + \Phi_{yx}(f)] \quad (5.190)$$

Si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont statistiquement indépendants, par (5.176) :  $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(\tau) = \mu_x \mu_y$  et  $\Phi_{xy}(f) = \Phi_{yx}(f) = \mu_x \mu_y \delta(f)$ .

Si, de plus, l'un au moins des signaux est à valeur moyenne nulle :

$$R_z(\tau) = a^2 R_x(\tau) + b^2 R_y(\tau) \quad (5.191)$$

$$\Phi_z(f) = a^2 \Phi_x(f) + b^2 \Phi_y(f) \quad (5.192)$$

Ainsi, la fonction d'autocorrélation [la densité spectrale] de la somme — ou de la différence — de deux signaux aléatoires indépendants, **dont l'un au moins est à valeur moyenne nulle**, est égale à la somme des fonctions d'autocorrélation [densités spectrales] respectives.

Ce résultat est en fait valable pour toute paire de signaux orthogonaux. Une conséquence particulière est que la variance de la somme de signaux aléatoires indépendants — ou simplement orthogonaux — est égale à la somme des variances de chaque terme (§14.3.10).

### 5.5.6 Exemple

Considérons un signal  $z(t)$  résultant de la somme d'un signal  $x(t)$  sinusoïdal à phase aléatoire (§ 5.1.16) et d'un signal  $y(t)$ , en marche d'escalier, tel que celui présenté au paragraphe 5.2.7. Dans l'hypothèse d'indépendance de ces deux signaux, la

fonction d'autocorrélation résultante vaut (fig. 5.21)

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_0 \tau) + \sigma_y^2 \text{tri}(\tau/T) + \mu_y^2$$

et la densité spectrale de puissance (fig. 5.22)

$$\Phi_z(f) = \frac{1}{4} A^2 [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] + \mu_y^2 \delta(f) + \sigma_y^2 T \text{sinc}^2(Tf)$$

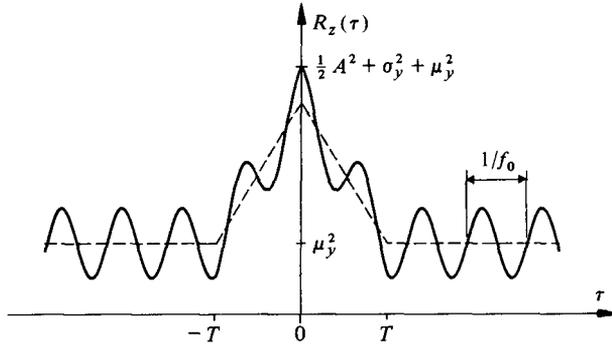


Fig. 5.21

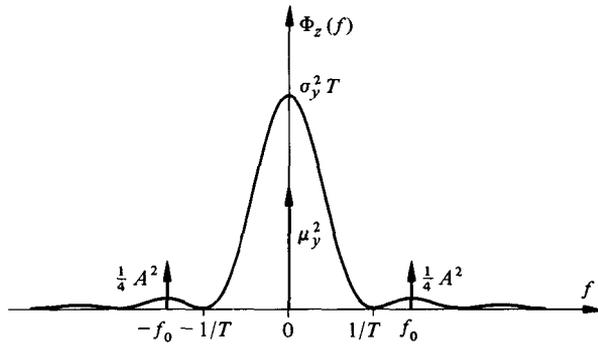


Fig. 5.22

Ce résultat suggère que la corrélation, comme l'analyse spectrale, peut être utilisée pour la détection de périodicités cachées (sect. 13.2).

La puissance totale du signal  $z(t)$  est donnée par

$$P_z = R_z(0) = \sigma_z^2 + \mu_z^2 = \frac{1}{2} A^2 + \sigma_y^2 + \mu_y^2$$

avec

$$\sigma_z^2 = A^2/2 + \sigma_y^2$$

et

$$\mu_z = \mu_y$$

### 5.5.7 Exemple

Une illustration analytique du théorème de la limite centrale peut être obtenue dans le cas suivant. Considérons la variable aléatoire  $\mathbf{z} = \sum \mathbf{x}_k$  où les  $\mathbf{x}_k$  sont des variables indépendantes et toutes distribuées uniformément avec une densité de probabilité

$p_x(x) = \text{rect}(x)$ . Par (14.95) la variance vaut  $\sigma_x^2 = 1/12$ . La fonction caractéristique correspondante est  $\Pi_x(v) = \text{sinc}(v)$  et, par (5.187),  $\Pi_z(v) = \text{sinc}^n(v)$  si la sommation porte sur  $n$  termes.

En prenant le logarithme naturel de  $\Pi_z(v)$  et en introduisant le développement en série (1.59) de la fonction  $\text{sinc}(v)$ , on obtient :  $\ln \Pi_z(v) = n \ln[1 - (\pi v)^2/3! + (\pi v)^4/5! - \dots]$ .

Pour  $n \gg 1$  et  $v \ll 1$  :  $\ln \Pi_z(v) \cong n \ln[1 - (\pi v)^2/3!] \cong -n(\pi v)^2/6$ .

Ainsi  $\Pi_z(v) \cong \exp[-n \pi^2 v^2/6] = \exp[-n u^2/24]$  avec  $u = 2\pi v$ . Par (14.96) et (14.97), la densité de probabilité de la variable  $\mathbf{z}$  vaut approximativement  $p_z(z) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_z^{-1} \exp[-\frac{1}{2} z^2/\sigma_z^2]$  où, en accord avec (14.62),  $\sigma_z^2 = n \sigma_x^2$ .

### 5.6 PRODUIT DE SIGNAUX ALÉATOIRES

#### □ 5.6.1 Densité de probabilité d'un produit de variables aléatoires

Soit

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \mathbf{y} \tag{5.193}$$

En appliquant à nouveau la méthode de transformation décrite au paragraphe 5.1.20 pour déterminer la densité de probabilité de la paire de variables  $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$  à partir de  $p_{xy}(x, y)$  et en intégrant par rapport à  $x$ , on obtient :

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} p_{xy}\left(x, \frac{z}{x}\right) dx \tag{5.194}$$

Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des variables indépendantes, l'intégrale (5.194) devient

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} p_x(x) p_y\left(\frac{z}{x}\right) dx \tag{5.195}$$

L'utilisation de (5.195) nécessite des précautions dans l'évaluation des limites effectives d'intégration.

#### □ 5.6.2 Exemple

Soit deux variables aléatoires indépendantes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  uniformément distribuées dans l'intervalle  $[0, 1]$ . Le produit  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \mathbf{y}$  est donc aussi distribué entre zéro et un et sa densité de probabilité peut être établie à partir de (5.194). Pour que la variable  $\mathbf{y} = \mathbf{z}/\mathbf{x}$  reste inférieure ou égale à l'unité, pour une valeur de  $\mathbf{z}$  donnée inférieure à l'unité, il faut que  $\mathbf{x}$  soit supérieure ou égale à  $\mathbf{z}$  (fig. 5.23).

La densité de probabilité de  $\mathbf{z}$  devient ainsi (fig. 5.24)

$$p_z(z) = \int_z^1 \frac{1}{x} dx = -\ln z$$

La valeur moyenne de ce produit vaut

$$\mu_z = E[\mathbf{z}] = \int_0^1 -z \ln z dz = 1/4$$

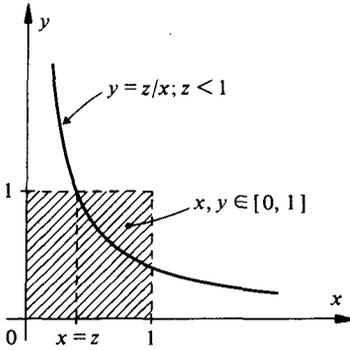


Fig. 5.23

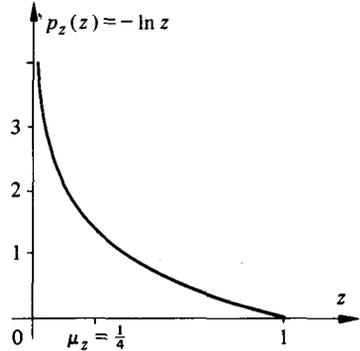


Fig. 5.24

### 5.6.3 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale d'un produit de signaux aléatoires indépendants

Soit le produit des signaux réels

$$z(t) = x(t) y(t) \quad (5.196)$$

Par définition (5.55), la fonction d'autocorrélation statistique est [avec  $x_1 = x(t)$ ,  $x_2 = x(t + \tau)$ ,  $y_1 = y(t)$ ,  $y_2 = y(t + \tau)$ ]:

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= E[ z(t) z(t + \tau) ] \\ &= E[ x(t) y(t) x(t + \tau) y(t + \tau) ] \\ &= \iiint\limits_{x_1, x_2, y_1, y_2} x_1 x_2 y_1 y_2 p_{xy}(x_1, x_2, y_1, y_2) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 \end{aligned} \quad (5.197)$$

Si les deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  sont *indépendants*, par (5.33) :  $p_{xy}(x_1, x_2, y_1, y_2) = p_x(x_1, x_2) p_y(y_1, y_2)$  et, par conséquent :

$$\begin{aligned} R_z &= E[ x(t) x(t + \tau) ] E[ y(t) y(t + \tau) ] \\ &= R_x(\tau) \cdot R_y(\tau) \end{aligned} \quad (5.198)$$

La densité spectrale de puissance est obtenue par transformation de Fourier (propriété 4.15) :

$$\Phi_z(f) = \Phi_x(f) * \Phi_y(f) \quad (5.199)$$

*Ainsi, la fonction d'autocorrélation d'un produit de signaux indépendants est simplement égale au produit des fonctions d'autocorrélation respectives et la densité spectrale résultante est la convolution des densités spectrales respectives.*

### 5.6.4 Exemple

Considérons le produit  $z(t) = x(t) y(t)$  d'un signal  $x(t)$  sinusoïdal à phase aléatoire (§ 5.1.16) de fréquence  $f_0$  et d'amplitude  $A$  et d'un signal binaire cadencé, en mode NRZ (§ 5.3.7), indépendant, antipolaire (niveaux  $\pm V$ ) et à symboles équiprobables de durée  $T$ .

Par (5.125), (5.126), (5.131), (5.132), (5.198) et (5.199)

$$R_z(\tau) = \frac{1}{2} A^2 V^2 \cos(2\pi f_0 \tau) \cdot \text{tri}(\tau/T)$$

$$\Phi_z(f) = \frac{1}{4} A^2 V^2 T \{ \text{sinc}^2 [T(f+f_0)] + \text{sinc}^2 [T(f-f_0)] \}$$

Le signal  $z(t)$ , sa fonction d'autocorrélation et sa densité spectrale de puissance sont représentés sur la figure 5.25.

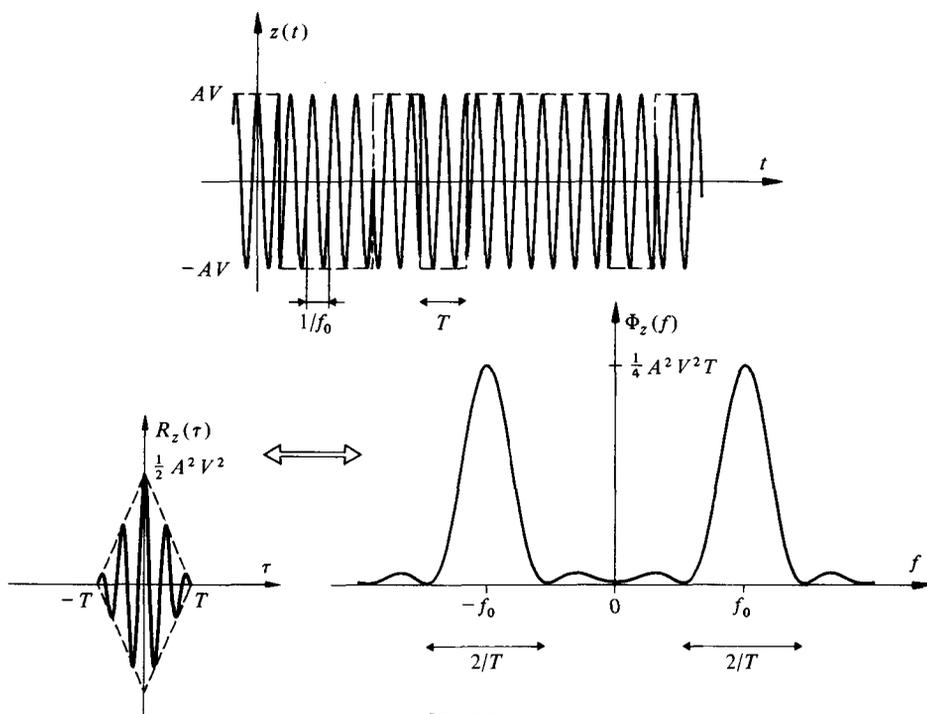


Fig. 5.25

## 5.7 PROCESSUS GAUSSIENS

### 5.7.1 Définition

Un processus aléatoire est un *processus gaussien* si pour tout ensemble d'instants  $\{t_i\}$ , le vecteur aléatoire correspondant  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ , avec  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$ , possède une densité de probabilité conjointe multidimensionnelle gaussienne. En utilisant des notations matricielles, celle-ci a la forme suivante (§ 14.4.5)

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |C_x|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mu_x) C_x^{-1} (\mathbf{x} - \mu_x)^T \right] \quad (5.200)$$

où  $(\mathbf{x} - \mu_x)$  est un vecteur ligne à  $n$  dimensions,  $(\mathbf{x} - \mu_x)^T$  est le même vecteur transposé et  $C_x$  est la matrice de covariance (5.98).

La fonction caractéristique associée s'écrit

$$\Pi_x(\mathbf{u}) = \exp [j \mu_x^T \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u} C_x \mathbf{u}^T] \quad (5.201)$$

Chaque variable  $x_i$  possède une densité de probabilité marginale (fig. 14.14)

$$p_{xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{xi}} \exp \left[ -\frac{(x - \mu_{xi})^2}{2\sigma_{xi}^2} \right] \quad (5.202)$$

et une fonction caractéristique

$$\Pi_{xi}(u = 2\pi\nu) = F^{-1} \{ p_{xi}(x) \} = \exp [j\mu_{xi}u - \frac{1}{2}\sigma_{xi}^2 u^2] \quad (5.203)$$

Si les variables  $x_i$  sont mutuellement non corrélées,  $C_x$  et  $C_x^{-1}$  se résument à des matrices diagonales d'éléments  $\sigma_{xi}^2$  et  $1/\sigma_{xi}^2$ , respectivement. La distribution conjointe (5.200) satisfait alors la condition d'indépendance (5.33) :

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1) p(x_2) \cdots p(x_n)$$

### 5.7.2 Application au cas bidimensionnel

Soit un couple de variables aléatoires gaussiennes  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Leur matrice de covariance est, par (5.171) :

$$C_{xy} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \quad (5.204)$$

d'où :

$$|C_{xy}| = \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho^2) \quad (5.205)$$

$$\begin{aligned} C_{xy}^{-1} &= \frac{1}{|C_{xy}|} \begin{bmatrix} \sigma_y^2 & -\rho\sigma_x\sigma_y \\ -\rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_x^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{bmatrix} 1/\sigma_x^2 & -\rho/(\sigma_x\sigma_y) \\ -\rho/(\sigma_x\sigma_y) & 1/\sigma_y^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.206)$$

La densité de probabilité conjointe (fig. 5.26) de ces deux variables se déduit de (5.200) en introduisant (5.205) et (5.206) :

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1 - \rho^2}} \exp \left[ \frac{-1}{2(1 - \rho^2)} \left\{ \frac{(x - \mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x - \mu_x)(y - \mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y - \mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right\} \right] \quad (5.207)$$

### 5.7.3 Propriétés

L'importance des processus gaussiens résulte, d'une part, du théorème de la limite centrale qui en fait le modèle asymptotique d'un grand nombre de phénomènes naturels et, d'autre part, des propriétés ci-après.

De la définition (5.200), il ressort qu'un processus gaussien est entièrement caractérisé par ses moments du premier (valeur moyenne) et du deuxième degré (covariance). Ainsi, la connaissance de la fonction d'autocorrélation — ou du spectre — d'un signal gaussien entraîne automatiquement la connaissance de sa distribution statistique.

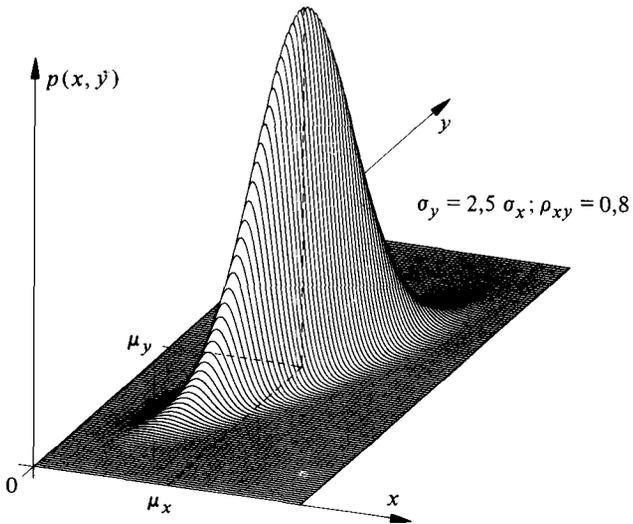
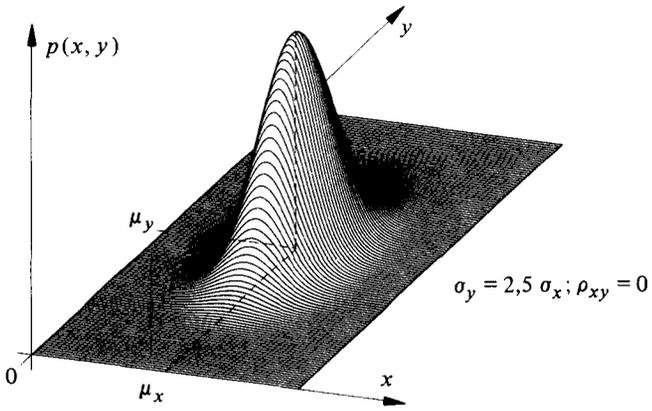
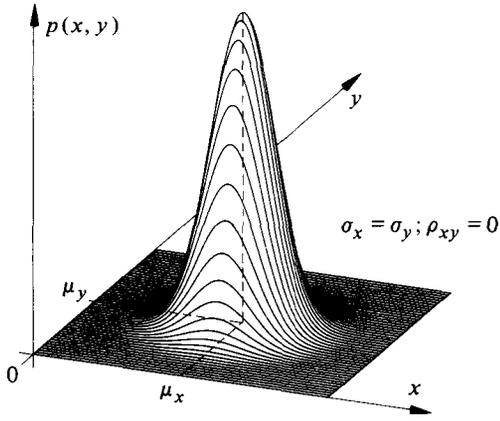


Fig. 5.26

Il en découle également que si le processus est stationnaire au sens large, il l'est également au sens strict (§ 5.1.11).

**La non corrélation de variables gaussiennes entraîne l'indépendance statistique.**

En effet, si l'on pose  $\rho = 0$  dans l'équation (5.207), on obtient la condition (5.33) :  $p(x, y) = p_x(x) \cdot p_y(y)$ . Si l'indépendance statistique entraîne toujours la non corrélation (§ 5.4.4), la réciproque n'est pas vraie en général. Elle l'est toutefois dans le cas gaussien!

**Toute transformation linéaire** (filtrage par exemple) **d'un processus gaussien produit un processus gaussien** [69]. Cette propriété se vérifie aisément (exercice 5.11.34) en observant que toute combinaison linéaire de variables gaussiennes est elle-même une variable gaussienne et en étendant ce résultat à l'intégrale de convolution (somme pondérée) caractérisant tout système linéaire.

#### 5.7.4 Exemple

Considérons un signal aléatoire gaussien  $x(t)$  ayant les caractéristiques spectrales d'un bruit blanc à bande limitée (§ 5.3.10), additionné d'une composante continue positive (fig. 5.27). Sa densité spectrale de puissance (fig. 5.28) est du type :

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{2} \eta \operatorname{rect}[f/(2B)] + A \delta(f)$$

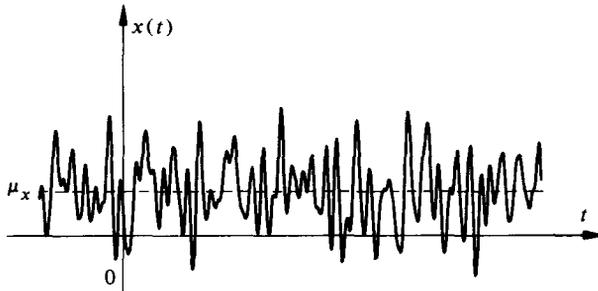


Fig. 5.27

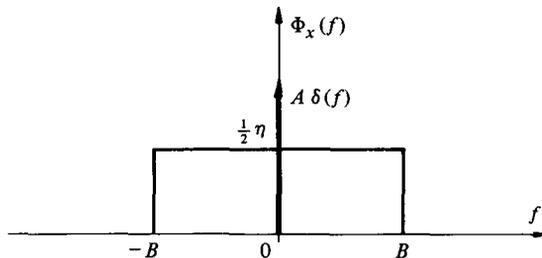


Fig. 5.28

Par transformation de Fourier inverse, la fonction d'autocorrélation (fig. 5.29) est

$$R_x(\tau) = \eta B \operatorname{sinc}(2B\tau) + A$$

et la puissance totale du signal vaut, par (5.119),  $P_x = R_x(0) = \eta B + A$ .

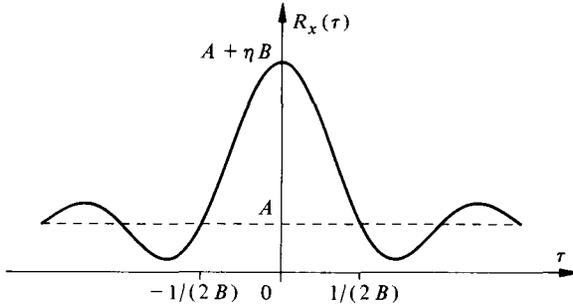


Fig. 5.29

Le carré de la valeur moyenne  $\mu_x$  est égal au poids de la composante spectrale discrète à la fréquence  $f=0$

$$\mu_x^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Phi_x(f) df = A$$

Ce terme peut aussi être déterminé ici, selon (5.76), comme la valeur de  $R_x(\tau \rightarrow \infty)$ .

La fonction de covariance vaut ainsi

$$C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2 = \eta B \operatorname{sinc}(2B\tau)$$

ou sous forme normalisée (fig. 5.30)

$$\rho_x(\tau) = C_x(\tau)/C_x(0) = \operatorname{sinc}(2B\tau)$$

Cette fonction s'annule pour les valeurs  $\tau = k/(2B)$  pour tout  $k$  entier différent de zéro. Ainsi, des échantillons prélevés sur ce signal périodiquement tous les  $\Delta t = 1/(2B)$  seconde seront des réalisations de variables aléatoires non seulement non corrélées ( $\rho_x = 0$ ) les unes avec les autres, mais encore **indépendantes** puisque l'on a affaire à un processus gaussien.

La variance du processus est

$$\sigma_x^2 = C_x(0) = \eta B$$

et la densité de probabilité des amplitudes du signal devient, par (5.202)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta B}} \exp \left[ -\frac{(x - \sqrt{A})^2}{2\eta B} \right]$$

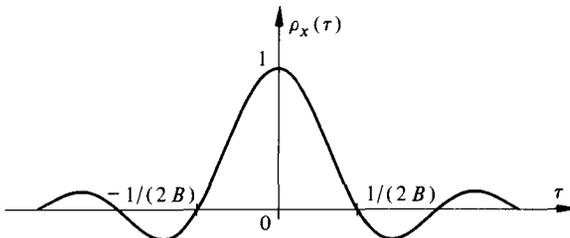


Fig. 5.30

La figure 5.31 représente cette loi pour  $A = 4 \text{ V}^2$ ,  $\eta = 9 \cdot 10^{-4} \text{ V}^2/\text{Hz}$  et  $B = 10^4 \text{ Hz}$ , ce qui donne  $\mu_x = 2 \text{ V}$  et  $\sigma_x = 3 \text{ V}$ .

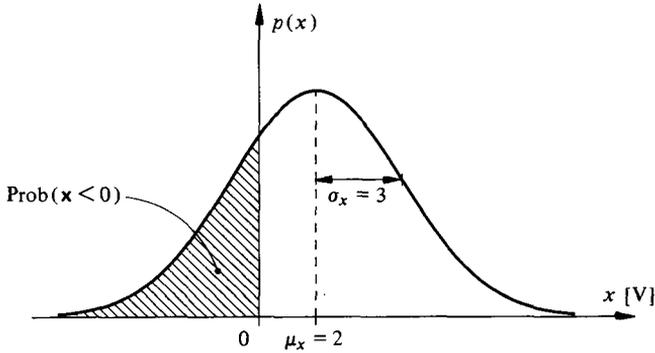


Fig. 5.31

Si l'on désire connaître, par exemple, la probabilité d'observer des amplitudes de  $x(t)$  négatives, on calculera

$$\text{Prob}(x < 0) = \int_{-\infty}^0 p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-2/3} \exp(-z^2/2) dz = 0,252$$

en introduisant la variable centrée réduite  $z = (x - \mu_x)/\sigma_x = (x - 2)/3$  pour pouvoir utiliser une table numérique normalisée telle que celle reproduite à la section 15.8.

### 5.7.5 Représentation d'un signal aléatoire gaussien

Une représentation approximative [14] d'un signal aléatoire gaussien peut être obtenue en considérant celui-ci comme résultant de la somme d'un nombre infini de sinusoides de phases aléatoires  $\alpha_n$  indépendantes et uniformément distribuées entre 0 et  $2\pi$ :

$$x(t) \cong \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(2\pi f_n t + \alpha_n) \quad (5.208)$$

avec  $f_n = n \cdot \Delta f$  et  $a_n = 2 \sqrt{\Phi_x(f_n) \Delta f}$ . Le signal résultant  $x(t)$  est gaussien, en application du théorème de la limite centrale (§ 5.5.3), si la valeur efficace de chaque terme reste négligeable vis-à-vis de celle de l'ensemble.

Une représentation en série de fonctions orthogonales d'un bruit blanc gaussien à bande limitée de type passe-bas se déduit du résultat (3.82) en écrivant

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \text{sinc}(2Bt - k) \quad (5.209)$$

où les  $x_k$  sont des valeurs prises par des variables aléatoires gaussiennes  $x_k$  statistiquement indépendantes, de valeur moyenne nulle et de variance  $\sigma_x^2$ . Le signal  $x(t)$  appartient certainement à un processus gaussien puisqu'il résulte de la somme pondérée de processus gaussiens. De plus, la densité spectrale de puissance et la fonction d'autocor-

relation correspondent à (5.155) et (5.156)

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 \text{sinc}(2B\tau) \leftrightarrow \Phi_x(f) = (2B)^{-1} \sigma_x^2 \text{rect}[f/(2B)] \quad (5.210)$$

car  $R_x(\tau) = E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t + \tau)] = \Sigma \Sigma E[\mathbf{x}_k \mathbf{x}_l] \text{sinc}(2Bt - k) \text{sinc}[2B(t + \tau) - l]$   
 $= \sigma_x^2 \text{sinc}(2B\tau)$  en vertu de l'orthogonalité (§ 3.4.9) des fonctions  $z_k(t)$   
 $= \text{sinc}(2Bt - k)$ .

### 5.8 PROCESSUS DE POISSON

#### 5.8.1 Définition

La *processus de Poisson* est le plus simple des processus ponctuels (comptage). Ce modèle permet toutefois l'étude de nombreux phénomènes résultant de la réalisation d'événements aléatoires distribués dans le temps : appels téléphoniques, décès ou accidents, pannes d'équipements, création de paires électron-trou dans une jonction de semiconducteurs, etc. De tels phénomènes peuvent être représentés par une séquence aléatoire d'événements indépendants qui sont susceptibles de se réaliser à n'importe quel instant avec la même probabilité.

L'établissement de la distribution de Poisson est faite en détail au paragraphe 14.4.3.

Si le nombre moyen d'événements par unité de temps est  $\lambda$ , la probabilité (14.80) de voir se réaliser un seul événement dans un intervalle de temps infinitésimal  $d\tau$  vaut  $\lambda d\tau$ . Comme la probabilité d'avoir plus d'un événement dans le même intervalle  $d\tau$  est négligeable, la probabilité (14.81) de n'avoir aucun événement dans  $d\tau$  vaut  $(1 - \lambda d\tau)$ . Finalement, la probabilité de compter exactement  $N$  événements dans un intervalle donné  $\tau$  est alors donnée par (14.88) reproduite ci-après

$$\text{Prob}(N, \tau) = \mu^N \exp(-\mu)/N! \quad (5.211)$$

où le paramètre  $\mu = \lambda\tau$  est le nombre moyen d'événements par intervalle  $\tau$ .

Si l'on appelle  $z$  la variable aléatoire continue représentant l'intervalle de temps séparant deux événements consécutifs, on obtient pour cette variable une distribution exponentielle (14.90)

$$p(z) = \lambda \exp(-\lambda z); \quad z \geq 0 \quad (5.212)$$

#### 5.8.2 Représentation

Un processus ponctuel  $x(t)$  possédant une distribution de Poisson peut être représenté (fig. 5.32) par une suite d'impulsions de Dirac de poids  $\alpha_i$  placées en des instants aléatoires  $t_i$  :

$$x(t) = \Sigma \alpha_i \delta(t - t_i) \quad (5.213)$$

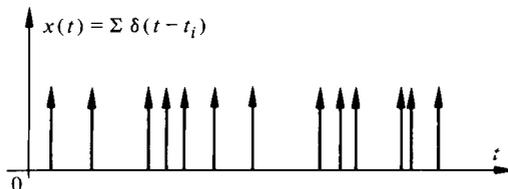


Fig. 5.32

En considérant  $x(t)$  comme l'excitation d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle  $g(t)$ , la sortie  $y(t)$  de ce filtre représente un *processus de Poisson filtré* (application à l'étude du bruit d'effet grenaille par exemple) :

$$y(t) = x(t) * g(t) = \sum \alpha_i g(t - t_i) \quad (5.214)$$

### 5.8.3 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale d'une suite aléatoire d'impulsions de Dirac

Considérons la suite aléatoire (5.213) avec  $\alpha_i = 1$ . Pour déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale d'une telle suite, on représentera l'impulsion de Dirac comme la limite d'une impulsion rectangulaire (1.44) :

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{rect}(t/\epsilon) \quad (5.215)$$

Pour un intervalle  $\epsilon$  suffisamment petit, la probabilité d'y trouver une impulsion unique vaut selon (14.80)

$$\text{Prob}(1, \epsilon) = \lambda \epsilon \quad (5.216)$$

où  $\lambda$  est le nombre moyen d'impulsions par unité de temps.

La fonction d'autocorrélation cherchée est donnée, d'après (5.57), par

$$R_x(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{R}_x(\tau) \quad (5.217)$$

avec

$$\tilde{R}_x(\tau) = \sum_i \sum_j x_{1i} x_{2j} \text{Prob}(x_{1i}, x_{2j}; \tau) \quad (5.218)$$

où  $x = 1/\epsilon$  ou 0. Le produit  $x_{1i} x_{2j} = x(t) x(t + \tau)$  n'est donc non nul que si des impulsions sont simultanément présentes aux temps  $t$  et  $t + \tau$ .

Pour  $|\tau| > \epsilon$  : les impulsions sont statistiquement indépendantes. Ainsi

$$\tilde{R}_x(|\tau| > \epsilon) = (1/\epsilon^2) \text{Prob}(x_1 = 1/\epsilon) \text{Prob}(x_2 = 1/\epsilon) = \lambda^2 \quad (5.219)$$

Pour  $|\tau| \leq \epsilon$ , le produit  $x_{1i} x_{2j}$  est non nul si l'impulsion rectangulaire présente au temps  $t$  est encore présente en  $t + \tau$ . On peut exprimer, selon (14.6), la probabilité conjointe correspondante sous la forme d'un produit :  $\text{Prob}(x_{1i}, x_{2j}; \tau) = \text{Prob}(x_{1i}) \text{Prob}(x_{2j}|x_{1i}; \tau)$  où  $\text{Prob}(x_{1i}) = \lambda \epsilon$  par (5.216) et  $\text{Prob}(x_{2j}|x_{1i}; \tau) = \text{tri}(\tau/\epsilon)$  par analogie avec (5.87). Finalement, on a

$$\tilde{R}_x(|\tau| \leq \epsilon) = (\lambda/\epsilon) \text{tri}(\tau/\epsilon) \quad (5.220)$$

La fonction d'autocorrélation de la suite aléatoire d'impulsions de Dirac est obtenue par passage à la limite (fig. 5.33)

$$R_x(\tau) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{R}_x(\tau) = \lambda^2 + \lambda \delta(\tau) \quad (5.221)$$

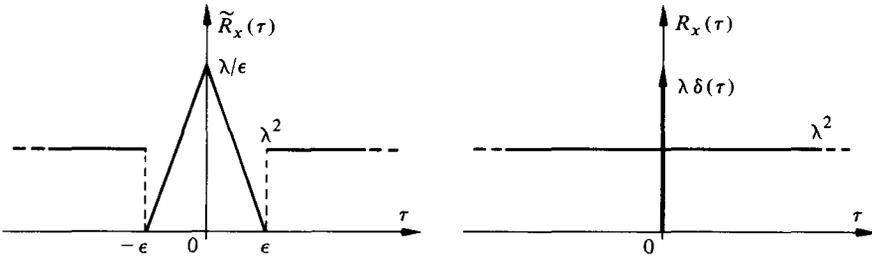


Fig. 5.33

La densité spectrale correspondante (fig. 5.34) apparaît alors uniforme, de valeur égale à la fréquence moyenne  $\lambda$  et complétée par une impulsion de Dirac à l'origine de poids  $\lambda^2$  qui représente le carré de la composante continue (valeur moyenne) du signal.

$$\Phi_x(f) = \lambda^2 \delta(f) + \lambda \tag{5.222}$$

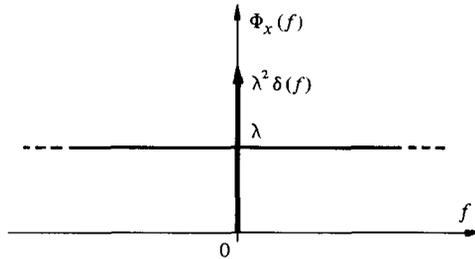


Fig. 5.34

### 5.8.4 Signal binaire à transitions aléatoires

Ce signal (fig. 5.35) est aussi appelé : signal télégraphique aléatoire. Il peut prendre à n'importe quel instant  $t$  et avec une égale probabilité les valeurs  $x(t) = 0$  ou  $x(t) = A$ . Les transitions de l'une à l'autre sont indépendantes et, en vertu des hypothèses faites, leur nombre  $N$  dans un intervalle  $\tau$  est distribué selon la loi de Poisson (5.211). La valeur moyenne est évidemment :  $\mu_x = 0 \cdot \text{Prob}(x = 0) + A \cdot \text{Prob}(x = A) = A/2$ .

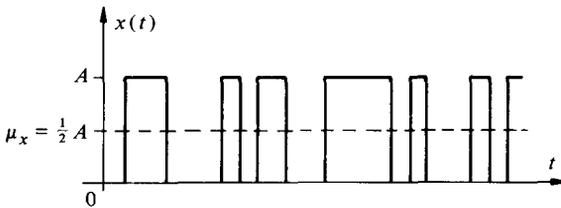


Fig. 5.35

La fonction d'autocorrélation s'obtient facilement, à partir de (5.57), en tenant compte de la distribution du nombre  $N$  de transitions dans  $|\tau|$ . Avec  $x_1 = x(t)$  et  $x_2 = x(t + \tau)$ , le produit  $x_1 x_2$  est non nul et égal à  $A^2$  uniquement si  $N$  est pair ou

nul dans  $|\tau|$ :

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= A^2 \text{Prob}(x_1 = x_2 = A; \tau) \\ &= A^2 \text{Prob}(x_1 = A) \text{Prob}(N \text{ pair ou nul dans } |\tau|) \\ &= \frac{A^2}{2} \exp(-\lambda|\tau|) \sum_{\substack{N=0 \\ (N \text{ pair})}}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^N}{N!} \end{aligned} \quad (5.223)$$

Or, on peut évaluer la somme en écrivant

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{N=0 \\ (N \text{ pair})}}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^N}{N!} &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^N}{N!} + \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-\lambda|\tau|)^N}{N!} \right] \\ &= \frac{1}{2} [\exp(\lambda|\tau|) + \exp(-\lambda|\tau|)] \end{aligned} \quad (5.224)$$

d'où finalement (fig. 5.36)

$$R_x(\tau) = \frac{1}{4} A^2 [1 + \exp(-2\lambda|\tau|)] \quad (5.225)$$

et, par transformation de Fourier (cf. exemple 4.2.19), la densité spectrale de puissance vaut

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{4} A^2 [\delta(f) + \lambda/(\lambda^2 + \pi^2 f^2)] \quad (5.226)$$

La puissance totale de ce signal est  $P_x = R_x(0) = A^2/2$  et la variance  $\sigma_x^2 = C_x(0) = R_x(0) - \mu_x^2 = A^2/4$ .

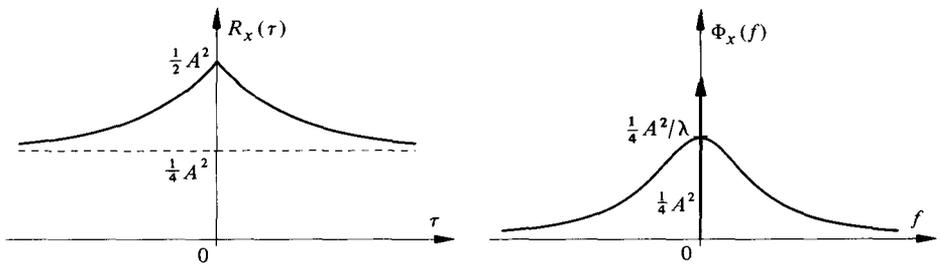


Fig. 5.36

## □ 5.9 PROCESSUS DE MARKOV

### 5.9.1 Définitions

L'examen des propriétés mathématiques des processus de Markov sort du cadre de cet ouvrage. On se contentera ici d'une brève définition afin que ce concept important en technique soit connu du lecteur. Pour une étude plus appropriée, on consultera, par exemple, les références [68, 71, 72].

Dans certaines situations, l'évolution future d'un processus aléatoire ne dépend pas de son passé, mais uniquement de l'état présent. Les processus jouissant de cette propriété sont appelés *processus de Markov*.

Autrement dit, soit une séquence quelconque d'instants  $t_1 < t_2 < t_m < t_{m+1}$  auxquels un processus prend les valeurs arbitraires  $x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}$  : ce processus est markovien (au sens strict) si la densité de probabilité conditionnelle au temps  $t_{m+1}$

$$p(x_{m+1} | x_m, x_{m-1}, \dots, x_1) = p(x_{m+1} | x_m) \tag{5.227}$$

Par extension, on parle de processus de Markov du  $n^{\text{ième}}$  ordre lorsque l'état futur du processus dépend des  $n$  états précédents.

Lorsque le processus est discret, on parle de *chaînes de Markov*.

### 5.9.2 Illustration

Le modèle markovien s'applique à de nombreux phénomènes naturels : particules en mouvement, évolution génétique, processus d'usure, etc. Dans le domaine technique, l'évolution d'un système dynamique (de réglage automatique, par exemple), d'un signal, d'une séquence d'information (langage écrit), peut souvent être assimilée à un processus de Markov.

Le caractère markovien est généralement combiné à d'autres caractéristiques statistiques : processus de Gauss-Markov, par exemple.

Certains signaux de transmission de données relèvent d'un modèle markovien [73].

## □ 5.10 SIGNAUX PSEUDO-ALÉATOIRES

### 5.10.1 Généralités

Les signaux ou variables pseudo-aléatoires sont en fait des grandeurs parfaitement déterministes, mais dont le comportement paraît aléatoire et possède des propriétés statistiques bien définies. De telles grandeurs sont utilisées en particulier pour la simulation (sur ordinateur ou en laboratoire) de phénomènes aléatoires [74] ou la génération de signaux à fonction d'autocorrélation très pointue applicables au codage et à la synchronisation d'informations en télécommunications [75] ou à la détection d'échos radar [27].

### 5.10.2 Séquences binaires à longueur maximum

La méthode la plus courante de génération de signaux pseudo-aléatoires est basée sur la théorie des séquences binaires dites à longueur maximum. De telles séquences

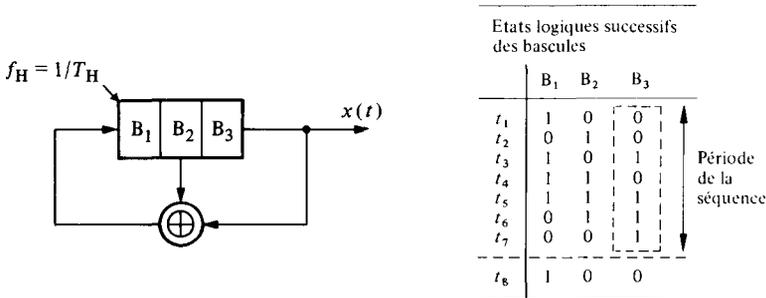


Fig. 5.37

sont facilement produites électroniquement à l'aide d'un registre à décalage (système logique séquentiel synchrone : section V.5.3) comportant  $n$  bascules en série complété par un circuit de contre-réaction réinjectant dans la première bascule la somme modulo-2 des états de certaines bascules. L'ensemble est activé par un signal d'horloge auxiliaire de cadence  $f_H = 1/T_H$ . Un exemple élémentaire d'un tel générateur ( $n = 3$ ) est représenté, avec l'analyse chronologique de ses états, sur la figure 5.37.

Pour autant qu'un état initial comprenant au moins un 1 soit imposé au registre, celui-ci prendra successivement tous les états possibles, sauf l'état composé de zéros uniquement, à condition que la contre-réaction soit adéquatement choisie. La théorie permettant de déterminer le type de contre-réaction à utiliser pour une longueur  $n$  du registre sort du cadre de cet ouvrage et peut être trouvée dans [76]. Le tableau 5.38 donne quelques exemples où la contre-réaction se limite à la seule addition modulo-2 (circuit OU-exclusif) de la sortie  $n$  avec la sortie  $m$  ou  $n - m$ .

Tableau 5.38

$n$	$2^n - 1$	$m$	$n - m$
3	7	1	2
5	31	2	3
7	127	1 ou 3	6 ou 4
10	1 023	3	7
15	32 767	1, 4 ou 7	14, 11 ou 8
20	1 048 575	3	17
22	4 194 303	1	21
25	33 554 431	3 ou 7	22 ou 18
28	268 435 455	3, 9 ou 13	25, 19 ou 15
29	536 870 911	2	27
31	2 147 483 647	3, 6, 7 ou 13	28, 25, 24 ou 18
33	8 589 934 591	13	20
39	$5,5 \cdot 10^{11}$	4, 8 ou 14	35, 31 ou 25

### 5.10.3 Propriétés

Les séquences binaires à longueur maximum ont les propriétés principales suivantes :

- la séquence générée est *périodique*, de période

$$T_s = (2^n - 1) T_H \quad (5.228)$$

- sur une période  $T_s$ , on compte toujours  $2^{n-1}$  digits 1 et  $(2^{n-1} - 1)$  digits 0 : ainsi, pour  $n$  suffisamment grand, ces symboles peuvent être considérés comme pratiquement équiprobables et presque indépendants;
- en comparant terme à terme une période de la séquence avec n'importe quelle permutation circulaire de celle-ci, on obtient une distance de Hamming (§ 3.1.4) égale à  $2^{n-1}$  : en d'autres termes, le nombre de symboles coïncidant deux à deux est inférieur d'une unité au nombre de ceux qui diffèrent.

**5.10.4 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale d'un signal binaire pseudo-aléatoire**

Considérons un signal binaire  $x(t)$ , dont les niveaux antipolaires  $+A$  et  $-A$  sont la transcription des symboles 1 et 0 produits par un générateur de séquence à longueur maximum. La fonction d'autocorrélation (fig. 5.39) de ce signal est facilement déterminée en tenant compte des propriétés mentionnées au paragraphe précédent.

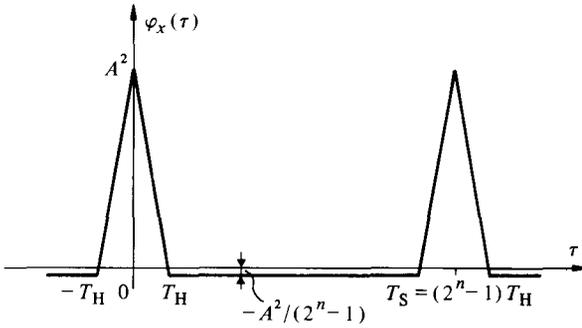


Fig. 5.39

La séquence étant périodique de période  $T_s$ , il en est par conséquent de même de la fonction d'autocorrélation (§ 4.4.12). Le résultat de la comparaison de la séquence avec toute permutation circulaire de celle-ci entraîne que pour

$$kT_s + T_H < |\tau| < (k+1)T_s - T_H, \varphi_x(\tau) = -A^2/(2^n - 1).$$

Enfin, pour

$$kT_s - T_H < |\tau| < kT_s + T_H, \varphi_x(\tau) = A^2 \{ [2^n / (2^n - 1)] \text{tri}(\tau/T_H) - 1 / (2^n - 1) \}.$$

On peut grouper ces résultats, en utilisant les notations du chapitre 1, sous la forme générale

$$\varphi_x(\tau) = A^2 [2^n / (2^n - 1)] \text{rep}_{T_s} [\text{tri}(\tau/T_H)] - A^2 / (2^n - 1) \tag{5.229}$$

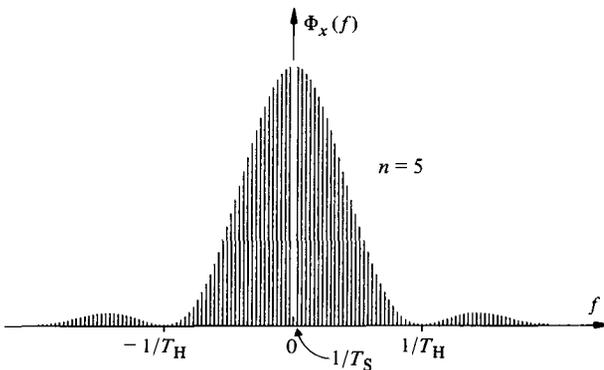


Fig. 5.40

La densité spectrale de puissance correspondante (fig. 5.40) est un spectre de raies d'équation

$$\Phi_x(f) = A^2 [2^n / (2^n - 1)^2] \text{sinc}^2(T_H f) \cdot \delta_{1/T_s}(f) - [A^2 / (2^n - 1)] \delta(f) \quad (5.230)$$

La raie à l'origine a un poids de  $A^2 / (2^n - 1)^2$ , correspondant à la puissance de la composante continue  $\bar{x}$  qui vaut  $\pm A / (2^n - 1)$ , le signe dépendant du niveau attribué au symbole 1. Cette composante s'annule pratiquement pour  $n \gg 1$ .

## 5.11 EXERCICES

**5.11.1** Deux signaux aléatoires  $x(t)$  et  $y(t)$  possèdent les densités de probabilité respectives  $p(x) = a \cdot \text{rect}[(x-2)/2]$  et  $p(y) = b(2-y) \text{rect}[(y-1)/2]$ . Calculer leurs valeurs moyennes statistiques et leurs variances.

**5.11.2** Un signal aléatoire  $z(t)$  possède la densité de probabilité représentée sur la figure 5.41. Calculer la probabilité pour que  $|z(t)| < 1,5$ .

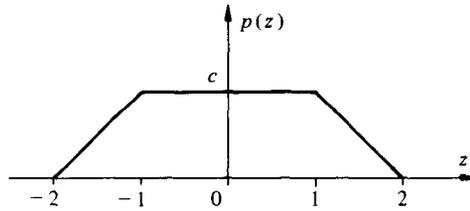


Fig. 5.41

**5.11.3** Démontrer la formule (5.11).

**5.11.4** Déterminer avec quelle probabilité la valeur instantanée d'un signal sinusoïdal à phase aléatoire est supérieure à la moitié de la valeur de crête.

**5.11.5** Calculer la valeur moyenne et la puissance totale d'un signal aléatoire ternaire prenant les trois valeurs  $x_1 = -2$  V,  $x_2 = 0,5$  V et  $x_3 = 3$  V avec les probabilités respectives  $\text{Prob}(x_1) = 1/4$ ,  $\text{Prob}(x_2) = 5/8$  et  $\text{Prob}(x_3) = 1/8$ .

**5.11.6** Déterminer si les variables aléatoires  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  possédant la densité de probabilité conjointe ci-dessous sont indépendantes

$$p_{xy}(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \sqrt{2}; 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

**5.11.7** Sachant que les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  possèdent une densité de probabilité conjointe  $p_{xy}(x, y) = 1/(ab)$  avec  $|y| \leq b$ , démontrer qu'elles sont statistiquement indépendantes.

**5.11.8** Un amplificateur transforme un signal d'entrée  $x(t)$  en un signal de sortie  $y(t) = Ax(t)$ . Déterminer la valeur moyenne et la variance du signal de sortie en fonction de celles du signal d'entrée et du gain  $A$  de l'amplificateur.

**5.11.9** Déterminer quelle est la densité de probabilité de la variable  $y = a/x$  si  $p_x(x)$  est connue.

**5.11.10** Montrer que si le facteur d'atténuation (exprimé ici en nepers) d'une transmission  $\alpha = \ln(P_2/P_1)$  fluctue aléatoirement autour d'une valeur moyenne  $\mu$  avec une distribution gaussienne de variance  $\sigma^2$ , le rapport des puissances  $\beta = P_2/P_1$  possède une densité de probabilité log - normale

$$p(\beta) \doteq (\beta\sigma\sqrt{2\pi})^{-1} \exp[-\frac{1}{2}(\ln\beta - \mu)^2/\sigma^2]; \beta > 0$$

**5.11.11** Quelle est, en fonction de celle d'entrée, la densité de probabilité de la sortie d'un redresseur défini par l'équation  $y = x \cdot \epsilon(x)$ .

**5.11.12** Soit un signal aléatoire  $x(t)$ , mesuré en volt, uniformément distribué entre 0 et  $A$ . Déterminer et représenter par un graphe la densité de probabilité et la fonction de répartition de la puissance instantanée (normalisée). En déduire la probabilité que la puissance instantanée soit supérieure à  $A^2/2$ .

**5.11.13** Démontrer que si  $x(t)$  est un signal à valeur moyenne nulle et distribution gaussienne, la distribution de  $y(t) = ax^2(t)$  est identique à une distribution en  $\chi^2$  à un degré de liberté (§ 14.4.7).

**5.11.14** Un signal  $r(t)$  possède la distribution (5.52) : déterminer l'équation de sa fonction de répartition et en déduire la probabilité que  $r > 3\sigma$ .

**5.11.15** Démontrer que le signal aléatoire  $x(t) = y \cos \omega t + z \sin \omega t$  où  $y$  et  $z$  sont des variables aléatoires indépendantes à valeur moyenne nulle et possédant la même fonction de répartition, est stationnaire au sens large mais non au sens strict.

**5.11.16** Soit  $x(t)$  un signal aléatoire stationnaire et  $\omega$  une constante. Montrer que  $y(t) = x(t) \cos \omega t$  n'est pas stationnaire au sens large, alors que  $z(t) = x(t) \cos(\omega t + \alpha)$  l'est si  $\alpha$  est une variable aléatoire indépendante uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

**5.11.17** On cherche à prédire l'évolution d'un signal stationnaire et ergodique  $x(t)$  à partir de ses valeurs passées  $x(t-T)$  en formant l'approximation linéaire  $\tilde{x}(t) = ax(t-T)$ . Déterminer la valeur de  $a$  qui minimise la puissance de l'erreur d'approximation.

**5.11.18** Reprendre l'exemple 5.2.7 en admettant pour le processus la densité de probabilité  $p(x) = a \exp(-ax)$  pour  $x > 0$  et  $a > 0$ .

**5.11.19** Soit un signal ternaire cadencé stationnaire occupant dans chaque intervalle consécutif de durée  $T$  les niveaux indépendants  $+1$ ,  $0$  ou  $-1$  avec les probabilités respectives  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{4}$ . Déterminer la puissance et la densité spectrale de puissance de ce signal.

**5.11.20** Démontrer la propriété (5.70) en utilisant le théorème de Wiener-Khintchine (§ 5.3.3).

**5.11.21** Soit un signal binaire cadencé en mode NRZ prenant dans chaque intervalle consécutif de durée  $T$  les niveaux indépendants  $x_0 = A$  et  $x_1 = -A$  avec les probabilités  $\text{Prob}(x_0) = 2/3$  et  $\text{Prob}(x_1) = 1/3$ . Déterminer la densité spectrale de puissance de ce signal.

**5.11.22** Un signal aléatoire stationnaire et ergodique  $y(t)$  est formé en modulant les amplitudes d'une suite périodique d'impulsions rectangulaires (signal PAM aléatoire) en fonction d'un signal modulant  $x(t)$  aléatoire et stationnaire, de distribution statistique quelconque, de valeur moyenne  $\mu_x$  et de variance  $\sigma_x^2$ . En supposant que les amplitudes des impulsions sont statistiquement indépendantes les unes des autres et que la durée  $\Delta$  d'une impulsion et la période  $T$  sont liées par la relation  $\Delta < T/2$ , déterminer quelle est la densité spectrale de puissance du signal  $y(t)$  et représenter graphiquement le résultat. Comparer celui-ci à l'exemple 5.2.7 et au résultat (5.132).

**5.11.23** Retrouver les résultats (5.132) et (5.148) à partir de l'équation générale (5.149).

**5.11.24** Déterminer quelle est la densité spectrale de puissance d'un signal binaire cadencé, de cadence  $1/T$ , où chaque symbole logique 0 correspond à un niveau nul et chaque symbole 1 est représenté par une impulsion rectangulaire d'amplitude  $A$  et de durée égale à la moitié de l'intervalle  $T$ , suivie d'un demi-intervalle nul (mode RZ). On supposera les symboles indépendants et équiprobables.

**5.11.25** Démontrer que pour du bruit blanc, l'équation (5.102) est satisfaite pour n'importe quel ensemble de fonctions orthogonales.

**5.11.26** Démontrer la relation (5.181) par la méthode décrite au paragraphe 5.1.20.

**5.11.27** Un signal aléatoire  $z(t)$  est le résultat de la somme de deux signaux indépendants  $x(t)$  et  $y(t)$ . Le signal  $x(t)$  est binaire antipolaire et prend la valeur  $A$  avec une probabilité égale à  $2/3$  et la valeur  $-A$  avec une probabilité égale à  $1/3$ . Le signal  $y(t)$  est gaussien et possède une densité spectrale de puissance  $\Phi_y(f) = \frac{1}{2} \eta \text{tri}(f/B)$ . Déterminer quelles sont la densité de probabilité, la valeur moyenne et la variance de  $z$  ainsi que le coefficient de corrélation de  $x$  et  $y$ .

**5.11.28** Un signal  $z(t)$  est le résultat de la somme de deux signaux indépendants  $x(t)$  et  $y(t)$ . Les amplitudes de  $x(t)$  sont uniformément distribuées avec une valeur moyenne  $\mu_x = 0$  V et une variance  $\sigma_x^2 = 1/3$  V<sup>2</sup>. Les amplitudes de  $y(t)$  sont aussi uniformément distribuées avec  $\mu_y = 2,5$  V et  $\sigma_y^2 = 3/4$  V<sup>2</sup>. Déterminer la probabilité pour que  $z(t)$  dépasse un seuil de 3 V.

**5.11.29** Démontrer la relation (5.194) par la méthode décrite au paragraphe 5.1.20.

**5.11.30** Déterminer la densité de probabilité d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées entre  $a$  et  $a + 1$  (avec  $a > 0$ ).

**5.11.31** Soit le produit  $z(t) = x(t) y(t)$  où  $x(t)$  est le processus décrit au paragraphe 5.2.7 et  $y(t)$  est une suite périodique d'impulsions de Dirac, indépendantes de  $x(t)$ , mais de même période  $T$ . Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de  $z(t)$ .

**5.11.32** Soit un signal aléatoire  $x(t)$  gaussien à valeur moyenne négative dont la fonction d'autocorrélation est  $R_x(\tau) = A + B \operatorname{sinc}^2(\tau/T)$ . Calculer la probabilité pour que la valeur instantanée de ce signal soit comprise entre 2 et 3 V et la probabilité pour qu'elle soit supérieure à 3 V si  $A = 4 \text{ V}^2$  et  $B = 9 \text{ V}^2$ .

**5.11.33** Pour quelles valeurs de  $\tau$ , des échantillons  $x(t_0)$  et  $x(t_0 + \tau)$  du signal décrit au paragraphe précédent sont-ils des réalisations de deux variables aléatoires indépendantes ?

**5.11.34** Démontrer que toute combinaison linéaire de variables gaussiennes est aussi une variable gaussienne.

**5.11.35** Ecrire l'expression de la densité de probabilité conditionnelle  $p(x|y)$  associée à des variables aléatoires gaussiennes à valeur moyenne nulle.

**5.11.36** On démontre [69] que le produit  $z(t) = x(t) y(t)$  de deux signaux aléatoires gaussiens à valeur moyenne nulle possède la fonction d'autocorrélation

$$R_z(\tau) = R_{xy}^2(0) + R_x(\tau) R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) R_{yx}(\tau) \quad (5.231)$$

Vérifier que cette formule se réduit bien à (5.198) en cas d'indépendance de  $x(t)$  et  $y(t)$  et déterminer la densité spectrale de puissance de  $z(t) = x^2(t)$ .

**5.11.37** Déterminer la fonction d'autocorrélation et la densité spectrale de puissance d'un signal binaire à transitions aléatoires (§ 5.8.4) antipolaire (niveaux  $\pm A$ ).



## BRUIT DE FOND

### 6.1 SOURCES DE BRUIT

#### 6.1.1 Bruit et interférences

Au sens le plus large, tout signal indésirable limitant à un degré ou à un autre l'intégrité et l'intelligibilité d'un signal utile peut être considéré comme du bruit : terme employé ici par analogie avec le phénomène acoustique perturbateur du même nom.

Il est préférable cependant d'établir une distinction entre le bruit dû à des perturbations à caractère purement aléatoire — et donc imprévisible — et les interférences provoquées par le captage accidentel d'autres signaux utiles (tels que ceux dus à des couplages entre lignes de transmission voisines) ou la mauvaise élimination de composantes périodiques parasites (par exemple : ronflement dans les installations électro-acoustiques dû au filtrage insuffisant des tensions d'alimentation ou à de mauvaises liaisons de terre).

Les sources de bruit sont classables en deux grandes catégories :

- les sources de bruit localisées à l'extérieur d'un système de traitement donné et agissant sur celui-ci par influence;
- les sources de bruit internes à ce système, créatrices d'un bruit propre indépendant des conditions extérieures.

Si l'on peut toujours envisager d'améliorer la conception d'un système de traitement de manière à limiter les interférences à un niveau acceptable et s'il est généralement possible — quoique difficile — de lutter contre les sources de bruit extérieures par des moyens techniques appropriés (blindages, recherche de compatibilité électromagnétique : abréviation anglaise EMC), il est impossible d'éliminer la contribution des sources de bruit internes.

Celles-ci imposent une limite ultime aux performances du système. Leur étude revêt donc une importance considérable, tant dans le domaine des télécommunications qu'en électronique instrumentale et en métrologie.

Dans la règle, le bon fonctionnement d'un système n'est assuré que si le niveau de puissance du signal utile dépasse de plusieurs ordres de grandeur celui du bruit (rapport signal-sur-bruit de quelques dizaines de décibels). Certaines méthodes élaborées de traitement (voir par exemple chapitre 13) permettent toutefois de travailler avec de très faibles rapports signal sur bruit en exploitant de manière optimale toute connaissance a priori disponible sur le signal utile à interpréter.

Remarquons finalement que si le bruit est généralement considéré comme un phénomène nuisible, il est parfois lui-même porteur d'informations relatives à ses origines

(exemples d'application : radioastronomie, surveillance des vibrations de machines industrielles, etc.). Il est de même souvent nécessaire de générer volontairement du bruit (sect. 6.7) afin de contrôler expérimentalement l'insensibilité d'un système en fonction du niveau de perturbation ou d'analyser l'état du système par des méthodes statistiques.

### 6.1.2 Sources de bruit externes

Les causes de perturbations d'origine externe sont de deux types [77] :

- perturbations artificielles;
- perturbations naturelles.

Les perturbations artificielles (en anglais : man-made noise) sont principalement dues aux parasites générés par des équipements industriels tels que commutateurs, relais, thyristors, moteurs à collecteur, poste de soudure à arc électrique, lignes à haute tension, etc. On peut y ajouter les parasites créés par d'autres activités humaines : allumage des moteurs à explosion, appareils électro-ménagers, éclairage fluorescent, etc.

L'intensité de ces perturbations est très variable selon les endroits; elle domine dans les zones urbaines. Elle décroît usuellement avec la longueur d'onde et est négligeable pour  $\lambda < 3$  m (soit  $f > 100$  MHz). L'importance de certaines de ces perturbations peut être considérablement réduite par des mesures appropriées de déparasitage.

Les perturbations naturelles sont associées à des phénomènes atmosphériques (décharges électriques de nature orageuse) ou cosmique (éruptions solaires, sources galactiques d'ondes électromagnétiques). Les perturbations atmosphériques sont surtout importantes dans les zones tropicales : leur intensité moyenne diminue avec la longueur d'onde et est pratiquement négligeable pour  $\lambda < 10$  m ( $f > 30$  MHz). Pour  $\lambda > 200$  m, les perturbations orageuses produisent des effets sensibles à très grande distance. Le bruit cosmique est surtout perçu par les systèmes utilisant des antennes directionnelles.

Aux perturbations naturelles mentionnées, qui ont un caractère additif, on peut ajouter encore les phénomènes d'évanouissement (en anglais : fading) des signaux de radiocommunication dus à des fluctuations des conditions de propagation. Cette perturbation a un caractère multiplicatif.

L'influence des sources de bruit externes sur des systèmes de traitement particuliers dépend de nombreux facteurs spécifiques tels que localisation, environnement électromagnétique, architecture et mode d'utilisation du système, etc. L'évaluation des performances n'est alors possible qu'en recourant à des formules empiriques basées sur des mesures in situ.

Les perturbations de type impulsionnel peuvent parfois être assimilées à des processus de Poisson filtrés (§ 5.8.2 et exercices 8.5.9) ou combinés : impulsions groupées en rafales selon une loi statistique appropriée et rafales distribuées selon une loi de Poisson.

La diversité des causes empêche d'en établir un modèle général.

### 6.1.3 Sources de bruit internes. Définition

Les causes des perturbations internes à un système de traitement peuvent aussi être classées en deux groupes :

- les perturbations de type essentiellement impulsionnel engendrées par des commutations de courants (circuits logiques, comparateurs, interrupteurs électroniques);
- le *bruit de fond* généré dans les câbles et les composants électroniques en raison des mécanismes statistiques de la conduction électrique (chap. II.2).

Une conception saine des circuits et un mode de construction soigné permettent généralement de réduire, voire d'éliminer, l'influence des perturbations du premier groupe.

Le bruit de fond est malheureusement, quant à lui, irréductible. Il a de nombreuses causes [78]. Pour l'essentiel, on peut dire qu'il résulte du déplacement erratique de particules chargées en équilibre thermodynamique (mouvement Brownien) ou sous l'influence de champs appliqués. Il est assimilable, en conditions stables, à un processus stationnaire et ergodique. Ses trois composantes principales affectant les circuits électroniques sont :

- le bruit thermique;
- le bruit de grenaille;
- le bruit additionnel de basse fréquence (ou en  $1/f$ ).

## 6.2 BRUIT THERMIQUE

### 6.2.1 Mécanisme générateur. Définition

Au-dessus du zéro absolu, les trajectoires des électrons libres d'un matériau conducteur sont soumises à des vibrations aléatoires (agitation thermique). L'ensemble de ces mouvements erratiques provoque, même en l'absence de champ électrique appliqué, une fluctuation aléatoire de la valeur instantanée de la tension observable. Le courant moyen qui résulte de l'application d'un champ électrique ne correspond qu'à une dérive relativement lente des électrons (sect. II.2.2).

Ce *bruit thermique*, parfois appelé *Johnson noise* dans la littérature spécialisée anglo-saxonne, est présent dans tout composant passif ou actif opposant une certaine résistance électrique  $R$  au passage du courant et porté à la température  $T$ .

### 6.2.2 Densité spectrale et fonction d'autocorrélation

Par des arguments relevant de la thermodynamique statistique, on montre que la distribution spectrale (bilatérale) de la puissance maximum de ce phénomène est décrite par la loi [150]

$$\Phi_{th}(f) = \frac{1}{2} \frac{h|f|}{\exp(h|f|/kT) - 1} \quad \text{W} \cdot \text{Hz}^{-1} \quad (6.1)$$

où

- $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} = \text{constante de Planck}$
- $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} = \text{constante de Boltzmann}$

A température ambiante ( $T_a = 290 \text{ K} \cong \vartheta_a = 17^\circ \text{ C}$ ), le produit  $kT$  vaut environ

$$kT \cong 4 \cdot 10^{-21} \text{ J} \quad (6.2)$$

ce qui conduit, par intégration de (6.1) pour  $|f|$  allant jusqu'à l'infini, à une puissance maximum fournie de l'ordre de 40 nW. A très haute fréquence ( $h|f| > kT$ ), la densité spectrale du bruit thermique tend à s'annuler. Un autre bruit de densité  $\frac{1}{2}h|f|$  intervient alors pour tenir compte des effets quantiques [79]. Par contre, pour les fréquences usuelles ( $h|f| \ll kT$ , soit  $|f| < 1000$  GHz), la formule (6.1) se réduit à (fig. 6.1)

$$\Phi_{\text{th}}(f) \cong \frac{1}{2} kT \quad \text{W} \cdot \text{Hz}^{-1} \quad (6.3)$$

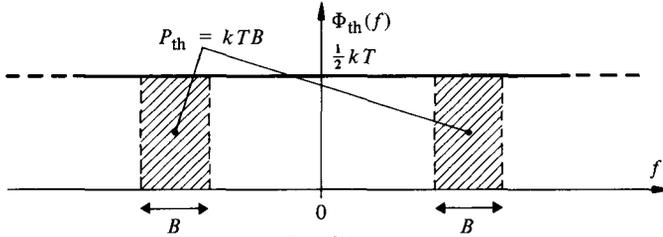


Fig. 6.1

Dans la gamme des fréquences indiquées, le bruit thermique est donc un **bruit blanc** (§ 5.3.10). La puissance totale de bruit thermique disponible dans une bande de fréquence  $B$  est simplement égale à

$$P_{\text{th}} = kTB \quad \text{W} \quad (6.4)$$

La fonction d'autocorrélation du bruit thermique est, en première approximation, une impulsion de Dirac

$$R_{\text{th}}(\tau) \cong \frac{1}{2} kT \delta(\tau) \quad (6.5)$$

### 6.2.3 Fluctuations de tension et de courant dans une résistance $R$

L'agitation thermique des porteurs de charge dans un élément résistif de valeur  $R = 1/G$  provoque à ses bornes une fluctuation aléatoire de tension  $u(t)$  à valeur moyenne nulle et variance (puissance normalisée : voir tableau 5.2)  $\sigma_u^2$  dont la valeur dépend de la largeur de bande  $B$  considérée. On peut de même associer cette agitation à un courant de bruit  $i(t)$ , également à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_i^2$ . Les écarts-types (valeurs efficaces) sont liés par la loi d'Ohm

$$\sigma_i = \sigma_u / R = G \sigma_u \quad \text{A} \quad (6.6)$$

et leur produit correspond à la puissance totale disponible (6.4)

$$\sigma_u \sigma_i = kTB \quad \text{W} \quad (6.7)$$

En combinant (6.6) et (6.7), la puissance totale disponible s'exprime sous forme normalisée :

$$\sigma_u^2 = kTRB \quad \text{V}^2 \quad (6.8)$$

$$\sigma_i^2 = kTGB \quad \text{A}^2 \quad (6.9)$$

Les densités spectrales de puissance associées sont

$$\Phi_u(f) = \frac{1}{2} kTR \quad \text{V}^2/\text{Hz} \quad (6.10)$$

$$\Phi_i(f) = \frac{1}{2} kTG \quad \text{A}^2/\text{Hz} \quad (6.11)$$

### 6.2.4 Schémas équivalents d'une résistance bruyante

Pour analyser l'effet du bruit thermique dans un circuit électrique, il faut disposer d'un schéma équivalent d'une résistance bruyante  $R$ . Celui-ci peut être établi (fig. 6.2) grâce aux théorèmes de Thévenin et Norton (§ I.6.7.9 et IV.5.4.2), en considérant la résistance bruyante comme une source de tension ou de courant aléatoire ayant  $R$  comme résistance interne (ou  $G = 1/R$  comme conductance interne).

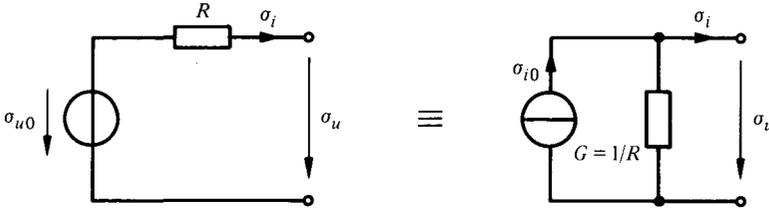


Fig. 6.2

Les valeurs efficaces  $\sigma_{u0}$  de la tension à vide et  $\sigma_{i0}$  du courant de court-circuit s'obtiennent en tenant compte du fait que la puissance maximum est fournie à l'adaptation (§ I.6.7.13), c'est-à-dire lorsque la source réelle est chargée par une résistance de valeur égale à la résistance interne :

$$P_{th} = \sigma_u^2/R = R\sigma_i^2 = \sigma_{u0}^2/4R = R\sigma_{i0}^2/4 \quad \text{W} \quad (6.12)$$

d'où

$$\sigma_{u0}^2 = 4kTRB \quad \text{V}^2 \quad (6.13)$$

$$\sigma_{i0}^2 = 4kTGB \quad \text{A}^2 \quad (6.14)$$

Les densités spectrales de puissance (normalisées) respectives valent

$$\Phi_{u0}(f) = 2kTR \quad \text{V}^2/\text{Hz} \quad (6.15)$$

$$\Phi_{i0}(f) = 2kTG \quad \text{A}^2/\text{Hz} \quad (6.16)$$

### 6.2.5 Exemples

La valeur efficace de la tension à vide due au bruit thermique d'une résistance  $R$  à température ambiante vaut environ

- $R = 10 \text{ k}\Omega$  et  $B = 20 \text{ kHz}$  :  $\sigma_{u0} = 1,8 \text{ }\mu\text{V}$
- $R = 1 \text{ M}\Omega$  et  $B = 20 \text{ MHz}$  :  $\sigma_{u0} = 566 \text{ }\mu\text{V}$

Les valeurs efficaces de courant de court-circuit sont respectivement  $\sigma_{i0} = 180 \text{ pA}$  et  $\sigma_{i0} = 566 \text{ pA}$ .

### 6.2.6 Statistique du bruit thermique

Le bruit d'agitation thermique est engendré par l'action d'une multitude de perturbations élémentaires indépendantes dues au mouvement désordonné de chaque électron. L'effet global résulte de la somme de ces perturbations élémentaires. La distribution statistique du bruit observé (tension ou courant) est donc gaussienne (fig. 6.3),

en application directe du théorème de la limite centrale (§ 5.5.3) :

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_u} \exp \left[ -\frac{u^2}{2\sigma_u^2} \right] \quad (6.17)$$

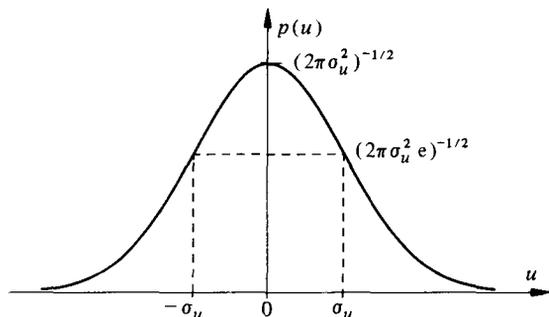


Fig. 6.3

En se référant à une table de probabilité gaussienne (sect. 15.8), on peut constater que l'amplitude d'un tel signal est comprise 99,7 % du temps à l'intérieur de l'intervalle  $[-3\sigma_u, 3\sigma_u]$ .

L'enveloppe (§ 7.3.8) d'une telle tension de bruit possède, elle, une distribution de Rayleigh (5.52).

### 6.2.7 Mise en série ou en parallèle de résistances bruyantes

Les fluctuations de bruit thermique dans deux résistances différentes  $R_1$  et  $R_2$  sont statistiquement indépendantes. Par conséquent (§ 5.5.5), la variance de leur somme est égale à la somme des variances partielles.

Pour deux résistances en série

$$\sigma_{u0}^2 = \sigma_{u01}^2 + \sigma_{u02}^2 \quad (6.18)$$

Pour deux résistances en parallèle

$$\sigma_{i0}^2 = \sigma_{i01}^2 + \sigma_{i02}^2 \quad (6.19)$$

Si les deux résistances sont à la même température  $T$ , les formules (6.18) et (6.19) sont équivalentes à (6.13) et (6.14), à la condition d'introduire les substitutions  $R = R_1 + R_2$  pour la mise en série et  $G = G_1 + G_2$  pour la mise en parallèle.

### 6.2.8 Bruit thermique d'une impédance

Toute impédance peut s'écrire sous la forme

$$Z(f) = R(f) + jX(f) \quad (6.20)$$

L'effet du bruit thermique (puissance active) n'est associé qu'à la partie résistive  $R(f)$ . La densité spectrale de puissance (6.15) est alors remplacée par

$$\Phi_{u0}(f) = 2kTR(f) \quad \text{V}^2/\text{Hz} \quad (6.21)$$

et varie en fonction de la fréquence comme la partie réelle de l'impédance.

La variance de la tension à vide du bruit thermique est obtenue par intégration de (6.21) sur la largeur de bande considérée  $B = f_2 - f_1$ . Puisque  $\Phi_{u0}(f)$  est paire, on peut écrire, de manière à ne considérer que des fréquences positives :

$$\sigma_{u0}^2 = 2 \int_{f_1}^{f_2} \Phi_{u0}(f) df = 4 kT \int_{f_1}^{f_2} R(f) df \quad (6.22)$$

### 6.2.9 Exemple : bipôle RC parallèle

Dans le cas de la mise en parallèle d'une résistance  $R$  et d'une capacité  $C$ , on a

$$\underline{Z}(f) = \frac{R}{1 + j 2\pi f RC} = \frac{R}{1 + (f/f_c)^2} - j \frac{Rf/f_c}{1 + (f/f_c)^2} \quad (6.23)$$

où  $f_c = 1/(2\pi RC)$  est la fréquence de coupure à  $-3$  dB.

La variance de la tension à vide évaluée pour une largeur de bande infinie vaut

$$\sigma_{u0}^2 = 4 kTR \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (f/f_c)^2} df = \frac{kT}{C} \quad (6.24)$$

Elle est indépendante de la valeur de résistance, ce qui s'explique par le fait que, pour un tel circuit RC, la fréquence de coupure  $f_c$  varie proportionnellement à l'inverse de  $R$ .

La densité spectrale de puissance (fig. 6.4) de la tension à vide est ici

$$\Phi_{u0}(f) = 2 kTR [1 + (f/f_c)^2]^{-1} \quad (6.25)$$

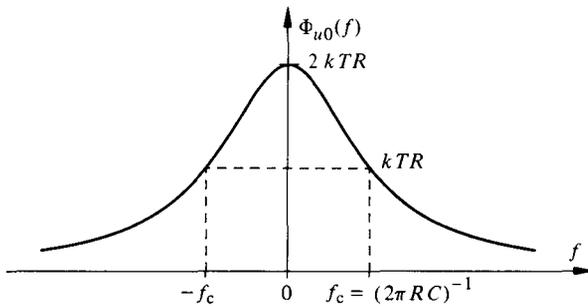


Fig. 6.4

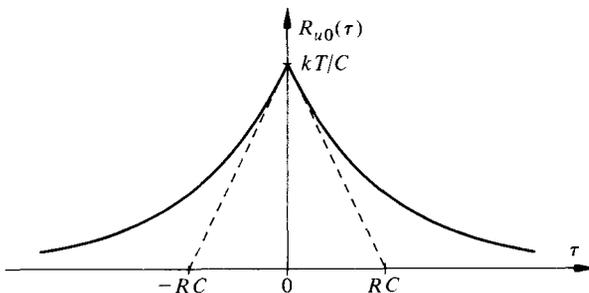


Fig. 6.5

La fonction d'autocorrélation correspondante (fig. 6.5) est obtenue par transformation de Fourier inverse

$$R_{u_0}(\tau) = \frac{kT}{C} \exp(-|\tau|/RC) \quad (6.26)$$

### 6.2.10 Exemple d'application

L'impédance d'entrée d'un amplificateur d'oscilloscope est constituée par une résistance de 1 M $\Omega$  en parallèle avec une capacité parasite de 50 pF. En supposant que l'amplificateur a une largeur de bande  $B \gg f_c = (2\pi RC)^{-1} \cong 3,2$  kHz et que son bruit propre n'introduit qu'une contribution négligeable vis-à-vis du bruit thermique de l'impédance, la valeur efficace de la tension de bruit à vide à l'entrée vaut environ  $\sigma_{u_0} = 9$   $\mu$ V.

### 6.2.11 Réduction du bruit thermique

La puissance totale de bruit thermique (6.4) ne dépend que de la largeur de bande  $B$  et de la température  $T$ . Une fois la largeur de bande fixée au strict minimum nécessaire, le seul moyen disponible pour réduire le bruit thermique est de refroidir le circuit. Cette technique est parfois appliquée, entre autre pour certains récepteurs spéciaux de télécommunications.

### 6.2.12 Notion de largeur de bande équivalente

La puissance totale normalisée de bruit d'un circuit  $RC$  peut être comparée à celle de la seule résistance  $R$  mesurée dans une largeur de bande, dite équivalente,  $B_{eq}$ . En égalant (6.13) à (6.24), on tire dans ce cas

$$B_{eq} = (4RC)^{-1} = (\pi/2)f_c \quad (6.27)$$

Cette notion de largeur de bande équivalente peut être généralisée pour tout opérateur linéaire (§ 8.2.23).

### 6.2.13 Température équivalente de bruit. Définition

Le bruit thermique sert souvent de référence, alors même que le bruit observé résulte d'une combinaison d'effets qui n'ont pas tous les mêmes causes, certains étant en particulier indépendants de la température et différents d'un bruit blanc.

On associe cependant souvent à une source de bruit quelconque de puissance effective  $P_n$  une *température équivalente de bruit*  $T_{eb}$ . Cette température fictive est définie comme celle d'une source de bruit purement thermique ayant la même puissance. Par (6.4) :

$$T_{eb} = \frac{P_n}{kB} \quad \text{K} \quad (6.28)$$

### 6.3 BRUIT DE GRENAILLE

#### 6.3.1 Effet de grenaille. Définition

On appelle *bruit de grenaille* (en anglais *shot noise*) les fluctuations statistiques du nombre de porteurs de charge (électrons ou trou) qui participent à la création d'un courant en traversant une barrière de potentiel. Une telle barrière existe à chaque jonction pn d'un dispositif à semiconducteur (chap. VII.2). Elle intervient également dans les mécanismes d'émission thermoélectrique (tubes à vide) et photoélectrique (sect. II.2.5).

Au contraire du bruit thermique, qui existe indépendamment de la présence d'un courant de conduction moyen dans un élément résistif, le bruit d'effet grenaille dépend directement et se superpose (fig. 6.6) au courant moyen créé.

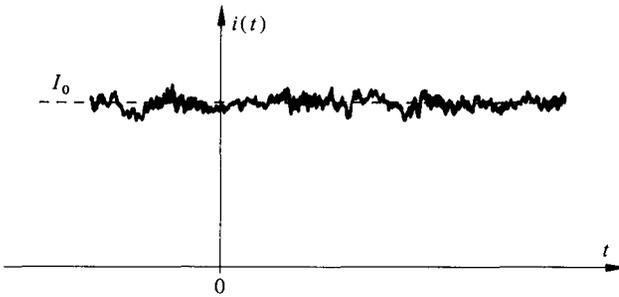


Fig. 6.6

#### 6.3.2 Densité spectrale et fonction d'autocorrélation

Pour autant que les porteurs puissent être considérés comme indépendants, la distribution de leur nombre par unité de temps suit une loi de Poisson (5.211).

On peut, en première approximation (hypothèse : temps de transit des porteurs à travers la barrière de potentiel négligeable), considérer le flux des porteurs comme une suite aléatoire d'impulsions de courant représentées par des impulsions de Dirac (§ 5.8.2) dont chacune a un poids correspondant à la charge  $e$  d'un électron. L'équation du courant devient ici par (5.213) :

$$i(t) = \sum_k e \delta(t - t_k) \quad \text{A} \quad (6.29)$$

où les  $t_k$  sont les instants aléatoires de passage de chaque porteur au travers de la barrière de potentiel et  $e = 0,16 \cdot 10^{-18}$  C.

La fonction d'autocorrélation du courant se déduit alors de (5.221) en tenant compte de la charge  $e$  portée par chaque impulsion

$$R_i(\tau) = (e\lambda)^2 + e^2 \lambda \delta(\tau) = I_0^2 + e I_0 \delta(\tau) \quad \text{A}^2 \quad (6.30)$$

où  $\lambda$  est le nombre moyen de charges par unité de temps et  $I_0 = \lambda e$  est la valeur moyenne du courant (composante continue).

La densité spectrale de puissance vaut alors

$$\Phi_i(f) = \Phi_{i0}(f) + \Phi_{ig}(f) = I_0^2 \delta(f) + e I_0 \quad \text{A}^2/\text{Hz} \quad (6.31)$$

Le premier terme est la distribution spectrale de la composante continue et le deuxième celle des fluctuations de courant dues à l'effet grenaille (fig. 6.7)

$$\Phi_{ig}(f) = eI_0 \quad \text{A}^2/\text{Hz} \quad (6.32)$$

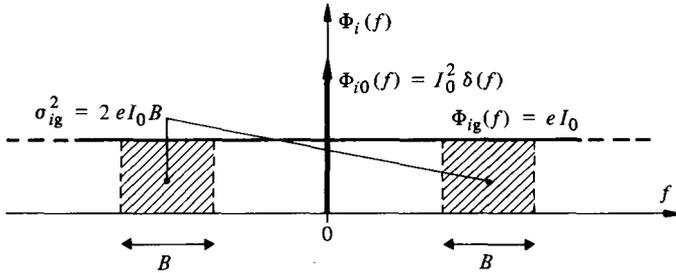


Fig. 6.7

Le bruit de grenaille est donc, avec l'hypothèse faite, un **bruit blanc**. On peut tenir compte d'une forme plus réaliste de chaque impulsion de courant élémentaire en utilisant la représentation d'un processus de Poisson filtré (5.214) où la fonction  $g(t)$  prend une forme rectangulaire (associée au concept de mobilité des porteurs dans les solides) ou en dents de scie (accélération uniforme dans le vide). Le spectre réel des fluctuations (exercice 8.5.11) se met alors à décroître à partir de fréquences voisines de l'inverse du temps de transit.

La variance du courant de bruit de grenaille obtenue pour une largeur de bande  $B$  donnée vaut simplement, par intégration de (6.32)

$$\sigma_{ig}^2 = 2eI_0B \quad \text{A}^2 \quad (6.33)$$

Dans les tubes à vide, la présence d'une charge d'espace au voisinage de la cathode tend à limiter les fluctuations aléatoires du courant. On en tient compte en multipliant (6.33) par un certain facteur de réduction de bruit.

### 6.3.3 Schéma équivalent

Pour analyser l'effet du bruit de grenaille dans un circuit, il suffit d'introduire en parallèle avec l'élément ou la jonction pn considérée une source dépendante de courant (fig. 6.8) aléatoire de variance égale à (6.33).

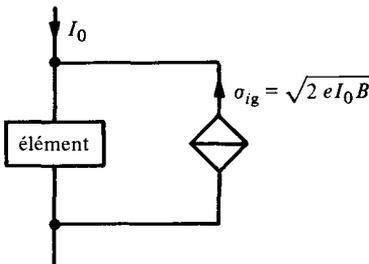


Fig. 6.8

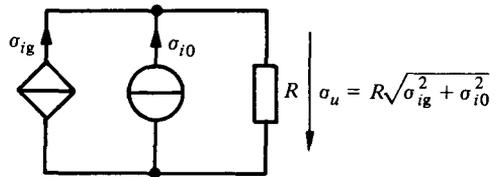


Fig. 6.9

Si ce courant, de valeur efficace  $\sigma_{ig}$ , circule dans une résistance  $R$  (fig. 6.9), il y développe une fluctuation aléatoire de tension de valeur efficace

$$\sigma_{ug} = R \cdot \sigma_{ig} \quad (6.34)$$

qui se superpose à la tension aléatoire indépendante de bruit thermique, dont la valeur efficace à vide vaut  $\sigma_{u0} = \sqrt{4kTRB}$ , et à la valeur moyenne  $U_0 = R I_0$ .

Si l'on ne s'intéresse qu'aux seules fluctuations aléatoires (fig. 6.9), on obtient une valeur efficace résultante

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_{ug}^2 + \sigma_{u0}^2} = R \sqrt{\sigma_{ig}^2 + \sigma_{i0}^2} \quad (6.35)$$

Un exemple d'application au schéma équivalent de bruit d'un transistor en régime linéaire est décrit au § 6.6.7.

### 6.3.4 Statistique du bruit de grenaille

A une échelle microscopique où l'on peut tenir compte de la granularité du courant électrique, la distribution du nombre de charges traversant la barrière de potentiel suit une loi de Poisson. Aux échelles macroscopiques usuelles, où le courant moyen  $I_0$  résulte du flux d'un nombre énorme de charges ( $\lambda = I_0/e = 6,25 I_0 \cdot 10^{18}$  électrons/s), la limite asymptotique de la loi de Poisson est une loi de Gauss. La densité de probabilité du courant total  $i(t)$  est alors donnée par (fig. 6.10)

$$p(i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{ig}} \exp \left[ -\frac{(i - I_0)^2}{2 \sigma_{ig}^2} \right] \quad (6.36)$$

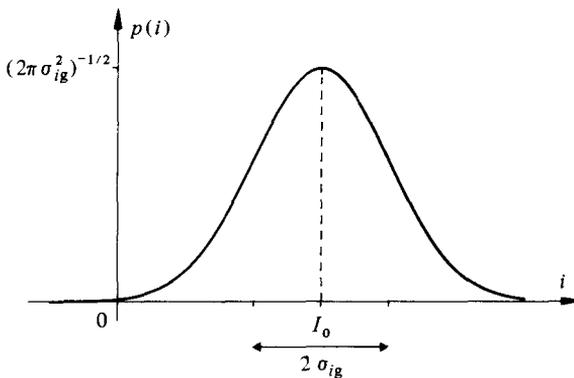


Fig. 6.10

### 6.3.5 Exemple : bruit de grenaille d'une diode à jonction

On sait que la caractéristique courant-tension d'une jonction pn suit approximativement la loi (chap. VIII.1)

$$I = I_s \left[ \exp \left( \frac{U}{nU_T} \right) - 1 \right] \quad A \quad (6.37)$$

où  $I_s$  est le courant de saturation inverse,  $n$  un coefficient compris entre 1 et 2 et  $U_T = kT/e$  est la tension thermodynamique égale environ à 25 mV à température ambiante.

Le bruit de grenaille résulte en fait des deux composantes indépendantes directe et inverse du courant [80] :

$$\begin{aligned}\sigma_{ig}^2 &= \left[ 2 e I_s \exp\left(\frac{U}{nU_T}\right) + 2 e I_s \right] B \\ &= 2 e (I + 2 I_s) B \quad \text{A}^2\end{aligned}\quad (6.38)$$

En polarisation directe usuelle :  $I \gg I_s$ , d'où (6.38) se réduit à

$$\sigma_{ig}^2 = 2 e I B \quad \text{A}^2 \quad (6.39)$$

Pour un courant  $I = 1$  mA et une largeur de bande  $B$  égale respectivement à 20 kHz et 20 MHz, la variance du courant de bruit de grenaille vaut  $\sigma_{ig}^2 = 6,4 \cdot 10^{-18}$  A<sup>2</sup> ou  $\sigma_{ig}^2 = 6,4 \cdot 10^{-15}$  A<sup>2</sup>.

Le schéma équivalent (fig. 6.11) de bruit de grenaille d'une diode ou d'une jonction pn en régime linéaire est une source de courant de valeur efficace  $\sigma_{ig}$  en parallèle avec la conductance différentielle (caractéristique dynamique, donc sans bruit thermique)

$$g_d = \frac{dI}{dU} = \frac{I_s}{nU_T} \exp\left(\frac{U}{nU_T}\right) = \frac{e(I + I_s)}{nkT} \quad (6.40)$$

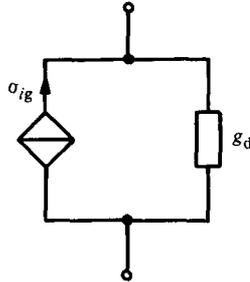


Fig. 6.11

Si le courant  $i_g(t)$  passe essentiellement par la conductance différentielle  $g_d$ , il y développe une tension de bruit de valeur efficace

$$\sigma_{ug} = \sigma_{ig}/g_d \quad (6.41)$$

Pour  $I = 1$  mA,  $n = 1$ ,  $T = 293$  K et  $B = 20$  MHz :  $\sigma_{ug} \cong 2,0$   $\mu$ V.

En combinant (6.38) et (6.40), on obtient la forme équivalente

$$\sigma_{ig}^2 = n 2 k T g_d B \frac{I + 2 I_s}{I + I_s} \approx n 2 k T g_d B \quad (6.42)$$

A courant nul et pour  $n = 1$ , la variance (6.42) est équivalente au bruit thermique d'une conductance normale  $g_d$ . En polarisation directe ( $I \gg I_s$ ), cette variance est la moitié de celle du bruit thermique d'une telle conductance. De plus, à très forte polarisation directe, le schéma équivalent de la diode doit être complété par une résistance série bruyante.

## 6.4 BRUIT ADDITIONNEL DE BASSE FRÉQUENCE (EN $1/f$ )

### 6.4.1 Modulation aléatoire de la conduction de certains composants électroniques

Aux fréquences supérieures à quelques kilohertz, ou quelques dizaines de kilohertz suivant les cas, le bruit de fond des composants électriques et électroniques est essentiellement blanc et dépend pratiquement uniquement de l'effet thermique et de l'effet de grenaille. Aux fréquences inférieures, on observe toutefois que la densité spectrale de puissance croît en fonction inverse de la fréquence. Ce phénomène n'est que partiellement expliqué et semble dû à des fluctuations statistiques de la conduction provoquée par des imperfections de surface ou l'inhomogénéité du matériau conducteur :

- modifications transitoires de l'état de surface des cathodes pour les tubes à vide;
- changement du taux de recombinaison en surface des paires électron-trou pour les dispositifs à semiconducteurs en raison de la présence de défauts;
- variations de la résistance de contact entre granules dans les résistances agglomérées et les microphones au charbon; etc.

Ce type de bruit additionnel est donc fortement dépendant de la technologie et des moyens de passivation des surfaces.

### 6.4.2 Densité spectrale. Définitions

Il n'existe pas de modèle précis permettant d'établir une expression théorique exacte de la densité spectrale de puissance de ce bruit additionnel. On constate expérimentalement que cette densité varie approximativement comme l'inverse de la fréquence (fig. 6.12)

$$\Phi(f) = \kappa \frac{f_a}{|f|^\alpha} \quad (6.43)$$

avec  $0 < \alpha < 2$  et généralement proche de l'unité, d'où son nom usuel de *bruit en  $1/f$* . (On rencontre aussi le terme *bruit de scintillation*, en anglais : *flicker noise*).

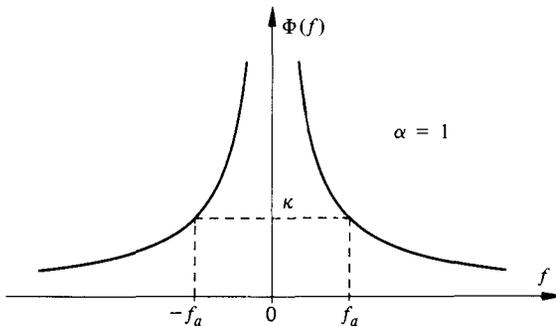


Fig. 6.12

La validité de la loi empirique (6.43) a été vérifiée jusqu'à des fréquences très basses, de l'ordre de  $10^{-6}$  Hz. Si l'on considère le processus comme stationnaire, une limitation doit toutefois intervenir théoriquement lorsque la fréquence tend vers zéro, sinon la puissance de ce bruit serait infinie. On peut tourner cette difficulté en utilisant

un modèle non stationnaire [81] dans lequel l'influence du passé sur l'état présent est important.

Le bruit en  $1/f$  impose des limites sévères à l'amplification directe de signaux constants ou de très basses fréquences. Pour certaines applications critiques (physique, génie biologique, etc.), on recourt à une technique d'amplification indirecte (amplificateur lock-in) basée sur la modulation-démodulation synchrone (§ 13.2.10).

### 6.4.3 Autres processus se comportant comme du bruit en $1/f$

De nombreux processus aléatoires n'ayant aucun rapport direct avec des problèmes de conduction ont des fluctuations dont le spectre est aussi du type (6.43) :

- fréquence des oscillateurs à quartz;
- variation saisonnière de température;
- paramètres biologiques;
- données économiques;
- phénomènes musicaux;
- etc.

Ceci suggère que le modèle non stationnaire [81] du bruit en  $1/f$  est susceptible de s'appliquer à de nombreux phénomènes naturels.

## 6.5 AUTRES SOURCES DE BRUIT

### 6.5.1 Bruit de répartition

Cette source de bruit apparaît lorsque le courant se subdivise en deux parties ou plus. On la trouve, par exemple, dans les transistors bipolaires où les porteurs injectés de l'émetteur se partagent en un courant de base (recombinaison) et de collecteur, ou dans les tubes à vide ayant plus d'une électrode positive. Un porteur diffusant vers le collecteur d'un transistor peut se recombiner ou non dans la base. De même dans une pentode, un électron peut être capté indifféremment par l'une ou l'autre des électrodes positives.

Cette répartition arbitraire du courant provoque une perturbation aléatoire qui se superpose à l'effet grenaille.

### 6.5.2 Bruit d'avalanche

Un bruit important est produit par les jonctions pn fonctionnant au niveau de leur tension inverse de claquage (diodes Zener). Il est associé au phénomène d'avalanche qu'engendrent les ionisations d'atomes du cristal sous l'effet des collisions avec des porteurs de charge accélérés par le champ électrique appliqué.

On peut le considérer comme un bruit de grenaille amplifié.

### 6.5.3 Bruit induit

A hautes fréquences, le courant de bruit circulant dans certains dispositifs électroniques (triode, transistor à effet de champ) induit un courant de bruit de grille par couplage capacitif.

### 6.5.4 Bruit d'émission secondaire

Dans les dispositifs basés sur l'amplification de courant par émission secondaire (photomultiplicateur), le nombre d'électrons secondaires émis pour chaque électron incident varie aléatoirement. Ceci provoque une composante additionnelle de bruit.

### 6.5.5 Informations complémentaires

La présentation faite des causes de bruit de fond est sommaire et non exhaustive. Pour de plus amples détails, le lecteur consultera la littérature spécialisée [78, 80]. Les conditions de mesure du bruit de fond sont décrites dans [82]. Les principes de conception de circuits à faible bruit sont présentés dans [83, 84].

## 6.6 FACTEUR DE BRUIT D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

### 6.6.1 Rapport signal sur bruit

Si  $\Phi_s(f)$  est la densité spectrale de puissance d'un signal utile, la puissance dans la bande  $B$  vaut (toute composante continue étant exclue)

$$P_s = \sigma_s^2 = \int_B \Phi_s(f) df \quad (6.44)$$

Soit  $\Phi_n(f)$  la densité spectrale de puissance résultant de l'addition de toutes les perturbations indépendantes, la puissance totale de bruit de fond

$$P_n = \sigma_n^2 = \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 \quad (6.45)$$

correspond, pour la largeur de bande  $B$ , à l'intégrale

$$P_n = \int_B \Phi_n(f) df \quad (6.46)$$

Une mesure de la contamination du signal par le bruit de fond est le rapport signal sur bruit défini au paragraphe 1.1.5 :

$$\xi = P_s/P_n \quad (6.47)$$

que l'on mesure généralement en décibels

$$\xi_{dB} = 10 \log(P_s/P_n) \quad \text{dB} \quad (6.48)$$

### 6.6.2 Définition : facteur de bruit moyen

Le *facteur de bruit*  $F$  à la température conventionnelle  $T_0 = 290$  K définit la qualité d'un système linéaire (fig. 6.13) du point de vue de son bruit propre : c'est le quotient du rapport signal sur bruit à l'entrée  $\xi_1$  et du rapport signal sur bruit à la sortie  $\xi_2$

$$F = \xi_1/\xi_2 \quad (6.49)$$

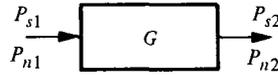


Fig. 6.13

Ce facteur de bruit moyen mesure la dégradation du rapport signal sur bruit. Si  $P_{ni}$  est la puissance de bruit propre interne du système et si  $G = P_{s2}/P_{s1}$  est son gain de puissance, on a

$$P_{n2} = GP_{n1} + P_{ni} \quad (6.50)$$

et

$$F = \frac{P_{n2}}{GP_{n1}} = 1 + \frac{P_{ni}}{GP_{n1}} \geq 1 \quad (6.51)$$

ou, exprimé en décibels :

$$F_{dB} = 10 \log F \geq 0 \text{ dB} \quad (6.52)$$

Le terme

$$\frac{P_{ni}}{GP_{n1}} = F - 1 \quad (6.53)$$

est appelé le *facteur d'excès de bruit*. La puissance de bruit à l'entrée qui sert de référence est conventionnellement notée, selon (6.4),  $P_{n1} = kT_0B_{eq}$  où  $B_{eq}$  est la largeur de bande équivalente considérée.

Le rapport  $P_{ni}/G = P_{n1}(F - 1)$  représente le *bruit propre ramené à l'entrée*. Pour un système idéal (non bruyant) :  $P_{ni} = 0$  et  $F = 1$ .

### 6.6.3 Systèmes linéaires en cascade

Considérons la mise en cascade (fig. 6.14) de deux systèmes ayant des gains de puissance  $G_1$  et  $G_2$  et des facteurs de bruit  $F_1$  et  $F_2$  définis pour la même puissance de bruit à l'entrée  $P_{n1} = kT_0B_{eq}$ . Par (6.51)

$$P_{n2} = F_1 G_1 P_{n1} \quad (6.54)$$

et par (6.50) et (6.53)

$$P_{n3} = G_2 P_{n2} + P_{ni2} = F_1 G_1 G_2 P_{n1} + (F_2 - 1) G_2 P_{n1} \quad (6.55)$$

Mais, on a aussi pour le système global

$$P_{n3} = F G P_{n1} = F G_1 G_2 P_{n1} \quad (6.56)$$

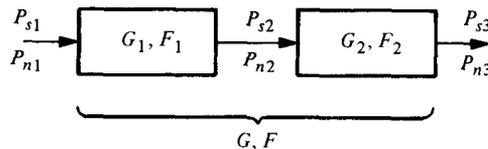


Fig. 6.14

En combinant (6.55) et (6.56), l'expression du facteur de bruit global devient

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} \quad (6.57)$$

On peut facilement généraliser cette expression pour un nombre quelconque  $m$  de systèmes en cascade :

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_m - 1}{\prod_{i=1}^{m-1} G_i} \quad (6.58)$$

Si  $G_1 \gg F_2 - 1$ ,  $F \cong F_1$  : **le bruit propre du système global est principalement déterminé par le premier étage.** C'est donc celui-ci dont la conception doit être tout particulièrement soignée afin d'en limiter au maximum le bruit propre.

#### 6.6.4 Facteur de bruit spectral

En tenant compte des densités spectrales de puissance effectives, on obtient un facteur de bruit dépendant de la fréquence appelé *facteur de bruit spectral*

$$F(f) = \frac{\Phi_{s1}(f)/\Phi_{n1}(f)}{\Phi_{s2}(f)/\Phi_{n2}(f)} \quad (6.59)$$

Représenté en fonction de la fréquence (fig. 6.15), ce facteur de bruit peut être décomposé en trois segments : un segment à pente négative en basses fréquences où le bruit additionnel en  $1/f$  domine en-dessous d'une fréquence  $f_a$ , un segment à pente positive en hautes fréquences résultant de la décroissance progressive du gain  $G(f)$  qui varie sensiblement comme  $1/f^2$  au-delà d'une fréquence de coupure  $f_b$ , un domaine constant entre  $f_a$  et  $f_b$  ne dépendant que du bruit thermique et du bruit de grenaille.

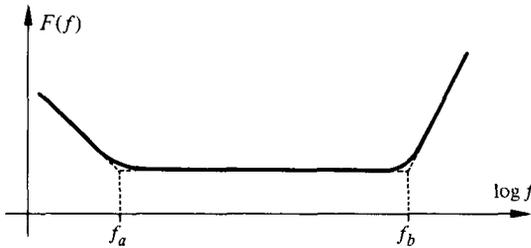


Fig. 6.15

#### 6.6.5 Schéma équivalent de bruit d'un étage amplificateur

Les principales sources de bruit d'un étage amplificateur élémentaire utilisant un composant actif à trois bornes (transistor bipolaire, JFET, MOST, tube à vide) sont le bruit de grenaille du courant de commande  $I_\beta$ , celui du courant contrôlé  $I_\alpha$ , le bruit thermique de la résistance série  $r_\beta$  de l'électrode de commande et celui de la résistance de charge  $R_L$  (fig. 6.16). En caractérisant en première approximation (chap. VIII.2) le comportement dynamique en régime linéaire du composant par sa conductance de transfert  $g_m = dI_\alpha/dU_\beta$ , la source de courant de bruit de grenaille associée au courant

$I_{\alpha 0}$  peut être remplacée par une source de tension équivalente à l'entrée de variance

$$\sigma_{u0\alpha}^2 = \frac{2eI_{\alpha 0}B}{g_m^2} \tag{6.60}$$

Elle s'ajoute à la variance du bruit thermique de l'éventuelle résistance série  $r_\beta$  de l'électrode de commande  $\sigma_{u0\beta}^2 = 4kTr_\beta B$

$$\sigma_{u01}^2 = \sigma_{u0\alpha}^2 + \sigma_{u0\beta}^2 \tag{6.61}$$

Comme  $g_m$  est généralement proportionnelle à  $I_{\alpha 0}$ , la variance (6.60) est en fait inversement proportionnelle à  $g_m$ .

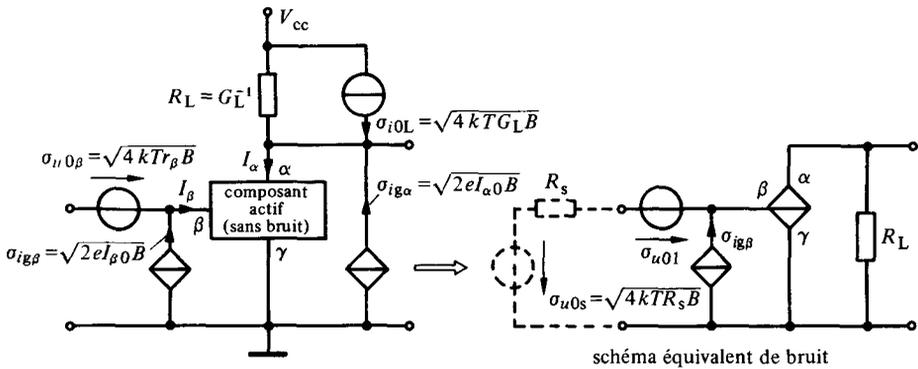


Fig. 6.16

Si la tension continue de polarisation apparaissant aux bornes de  $R_L$  est supérieure à 50 mV (voir exercice 6.8.4), la contribution due au bruit thermique est négligeable vis-à-vis du bruit de grenaille lié à  $I_\alpha$ .

Les sources de bruit propre ramenées à l'entrée sont ainsi essentiellement déterminées par le courant de commande et la conductance de transfert.

Ce modèle simple suffit à analyser en première approximation les performances de bruit de l'étage amplificateur dans la bande  $f_b - f_a$ . Le bruit thermique d'éventuelles résistances de polarisation à l'entrée peut être pris en compte avec celui de la résistance interne de la source de signal. La contribution d'une résistance de contre-réaction  $R_\gamma$  placée entre l'électrode  $\gamma$  et la terre revient à ajouter à (6.61) un terme additionnel  $4kTB(R_\gamma g_m^2)^{-1}$ .

### 6.6.6 Facteur de bruit de l'étage amplificateur

Connectons une source de signal de résistance interne  $R_s$  à l'étage amplificateur de la figure 6.16. La tension de bruit thermique de  $R_s$  possède, à vide, une variance

$$\sigma_{u0s}^2 = 4kTR_s B \tag{6.62}$$

La variance de la tension équivalente de bruit propre de l'amplificateur ramenée (forme normalisée de  $P_{ni}/G$ ) à l'entrée et évaluée aussi à vide vaut

$$\sigma_{u0n}^2 = \sigma_{u01}^2 + \sigma_{ig\beta}^2 \cdot R_s^2 \tag{6.63}$$

Le quotient de (6.63) par (6.62) correspond au facteur d'excès de bruit (6.53) d'où

$$F = 1 + \frac{\sigma_{u01}^2 + \sigma_{ig\beta}^2 R_s^2}{4 k T R_s B} = 1 + \frac{r_\beta}{R_s} + \frac{e I_{\beta 0} R_s}{2 k T} + \frac{e I_{\alpha 0}}{2 k T R_s g_m^2} \quad (6.64)$$

avec  $\sigma_{u01}^2$  donné par (6.61) et  $\sigma_{ig\beta}^2 = 2 e I_{\beta 0} B$ .

Le facteur de bruit  $F$  dépend ainsi de la résistance de la source. Il est minimum pour une valeur particulière optimum  $R_{so}$  que l'on obtient pour la condition  $dF/dR_s = 0$  :

$$R_{so} = \sigma_{u01} / \sigma_{ig\beta} = g_m^{-1} \sqrt{\frac{I_{\alpha 0}}{I_{\beta 0}} \left[ 1 + \frac{2 k T r_\beta g_m^2}{e I_{\alpha 0}} \right]} \quad (6.65)$$

Cette résistance optimum ne dépend pas directement de la résistance d'entrée  $R_e$  de l'amplificateur. Elle ne correspond en général pas à celle requise pour assurer une adaptation de puissance ( $R_s = R_e$ ).

Le facteur de bruit minimum vaut alors

$$F_{min} = 1 + \frac{\sigma_{u01} \cdot \sigma_{ig\beta}}{2 k T B} \quad (6.66)$$

### 6.6.7 Exemple : étage amplificateur à transistor bipolaire

Pour un étage amplificateur à transistor en émetteur commun, le rapport  $I_{\alpha 0} / I_{\beta 0}$  est le gain de courant  $\beta = I_{C0} / I_{B0}$ . La conductance de transfert vaut (chap. VIII.1) à température ambiante

$$g_m = I_{C0} / U_T = e I_{C0} / (k T) = 40 \cdot I_{C0} \quad AV^{-1} \quad (6.67)$$

et  $r_\beta$ , usuellement dénotée  $r_{bb'}$  (§ VII.5.3.4), est la résistance intrinsèque de la base prise en compte dans le schéma équivalent en  $\pi$ -hybride du transistor (fig. 6.17)

$$\sigma_{ig\beta}^2 = 2 e B I_{C0} / \beta \quad (6.68)$$

et

$$\sigma_{u01}^2 = 4 k T B (r_{bb'} + g_m^{-1} / 2) \quad (6.69)$$

La résistance optimum de source vaut ici, par (6.65)

$$R_{so} = g_m^{-1} \sqrt{\beta (1 + 2 r_{bb'} \cdot g_m)} \quad (6.70)$$

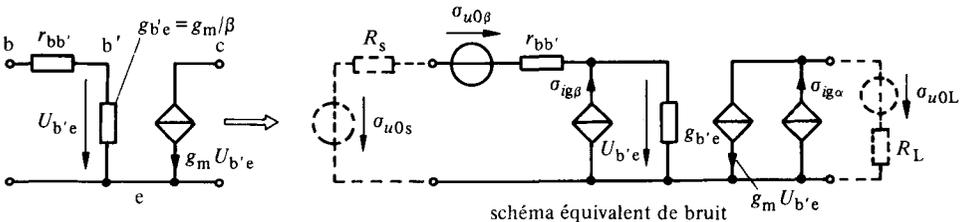


Fig. 6.17

et le facteur de bruit minimum, par (6.66)

$$F_{\min} = 1 + \sqrt{\beta^{-1}(1 + 2 r_{bb'} \cdot g_m)} \quad (6.71)$$

Si  $r_{bb'} = 100 \Omega$ ,  $\beta = 100$  et  $I_{C0} = 1 \text{ mA}$  :  $g_m = 40 \cdot 10^{-3} \text{ AV}^{-1}$  et la résistance de la source optimum vaut  $R_{so} = 750 \Omega$ . Dans ce cas, le facteur de bruit minimum  $F_{\min} = 1,3$  ou 1,14 dB. L'évolution de  $F$  en fonction de  $R_s$  est représentée sur la figure 6.18.

Alternativement, on peut rechercher le courant  $I_{C0}$  qui minimise le facteur de bruit pour une résistance de source donnée.

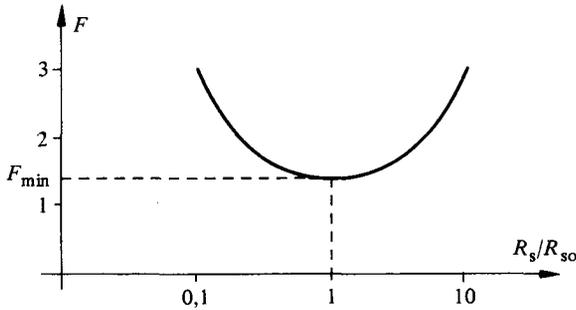


Fig. 6.18

### 6.6.8 Spécification usuelle du niveau de bruit de transistors ou d'amplificateurs

On se contente généralement d'une indication globale. Dans l'hypothèse où la densité spectrale de bruit (généralement spécifiée sous sa forme unilatérale) est constante, la variance de la tension équivalente de bruit propre ramenée à l'entrée est donnée par

$$\sigma_{u0n}^2 = \int_B \Phi_{u0n}^+(f) df = \Phi_{u0n}^+ \cdot B \quad \text{V}^2 \quad (6.72)$$

et la valeur efficace est

$$\sigma_{u0n} = \sqrt{\Phi_{u0n}^+} \cdot \sqrt{B} \quad (6.73)$$

Afin d'être indépendant de la largeur de bande, on indique généralement la valeur

$$\sqrt{\Phi_{u0n}^+} \quad \text{V}/\sqrt{\text{Hz}} \quad (6.74)$$

Par exemple :  $\sqrt{\Phi_{u0n}^+} = 32 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$  correspond à  $\Phi_{u0n}^+ = 1024 \cdot 10^{-18} \text{ V}^2/\text{Hz}$  et pour une bande passante  $B = 10^6 \text{ Hz}$ , on a  $\sigma_{u0n}^2 = 1024 \cdot 10^{-12} \text{ V}^2$  et  $\sigma_{u0n} = 32 \mu\text{V}$ .

## 6.7 GÉNÉRATEURS DE BRUIT

### 6.7.1 Utilité d'une excitation aléatoire

Le bruit est généralement considéré comme un phénomène indésirable. Il existe toutefois des situations où il est souhaitable de disposer d'une source générant un bruit de spectre et de puissance contrôlés [85]. C'est le cas, en particulier, lorsque l'on veut

soumettre un système de mesure ou de télécommunications à des essais permettant de déterminer son degré d'insensibilité au bruit. D'autres applications concernent la simulation de phénomènes aléatoires, la synthèse de la parole, l'identification dynamique de systèmes linéaires, etc.

### 6.7.2 Types de générateurs

On distingue deux types de générateurs de bruit. Ceux simulant un bruit à partir d'un signal pseudo-aléatoire (sect. 5.10) et ceux qui amplifient le bruit de fond fourni par un composant approprié (diode Zener, tubes à gaz, etc.). Le lecteur intéressé trouvera plus de détails dans la littérature spécialisée [86].

## 6.8 EXERCICES

**6.8.1** Calculer la puissance totale de bruit thermique obtenue pour une température ambiante  $T_a = 290$  K et une largeur de bande  $B_1 = 3,1$  kHz (voie téléphonique) et  $B_2 = 5$  MHz (télévision).

**6.8.2** Déterminer la valeur efficace de la tension de bruit thermique apparaissant aux bornes du bipôle de la figure 6.19 si la température est de 290 K et la largeur de bande considérée est de 100 kHz.

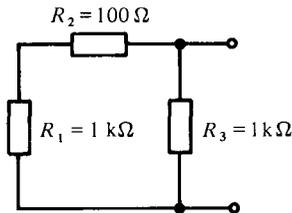


Fig. 6.19

**6.8.3** Déterminer la valeur efficace de la tension de bruit totale apparaissant aux bornes du circuit de la figure 6.20 fonctionnant en régime linéaire si  $U_0 = 12$  V, la température est de 290 K, la bande passante considérée vaut 1 MHz et la caractéristique de la diode est  $I = I_s [\exp(U/U_T) - 1]$  avec  $I_s = 43$  pA.

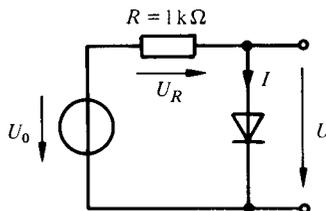


Fig. 6.20

**6.8.4** Déterminer pour quelle valeur de  $U_R$  les contributions de bruit thermique et de bruit de grenaille sont égales pour le circuit de la figure 6.20.



## SIGNAL ANALYTIQUE ET ENVELOPPE COMPLEXE

### 7.1 TRANSFORMÉE DE HILBERT D'UN SIGNAL

#### 7.1.1 Généralisation du concept de phaseur

En électrotechnique (chap. 1.8), on introduit la notion de valeur instantanée complexe d'une grandeur sinusoïdale  $u(t) = \hat{U} \cos(\omega_0 t + \alpha)$

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \hat{U} \exp[j(\omega_0 t + \alpha)] = \hat{U} \exp(j\alpha) \exp(j\omega_0 t) \\ &= \hat{U} \cos(\omega_0 t + \alpha) + j \hat{U} \sin(\omega_0 t + \alpha) \end{aligned} \quad (7.1)$$

où  $\hat{U} = |\underline{u}|$  dénote le module,  $(\omega_0 t + \alpha) = \arg \underline{u}$  est la phase instantanée de  $\underline{u}$  et  $\alpha$  est sa phase initiale. La grandeur réelle  $u(t)$  correspond ainsi à la partie réelle de la grandeur complexe  $\underline{u}(t)$ .

Par (4.77), la transformée de Fourier de  $\underline{u}(t)$  devient (fig. 7.1), avec  $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ :

$$\begin{aligned} F\{\underline{u}(t)\} &= \hat{U} \exp(j\alpha) \delta(f - f_0) \\ &= \underline{\hat{U}} \delta(f - f_0) \end{aligned} \quad (7.2)$$

où  $\underline{\hat{U}} = \hat{U} \exp(j\alpha)$  est le phaseur qui contient l'information d'amplitude et de phase initiale.

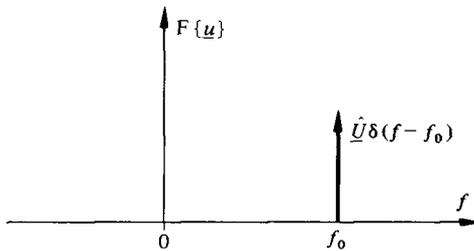


Fig. 7.1

**La transformée de Fourier de la grandeur complexe  $\underline{u}(t)$  est donc nulle aux fréquences négatives.**

La transformée de Fourier de la grandeur réelle  $u(t)$  vaut, elle, par (4.115)

$$F\{u(t) = \hat{U} \cos(\omega_0 t + \alpha)\} = \frac{1}{2} \hat{U} \exp(j\alpha f/f_0) \cdot [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \quad (7.3)$$

Par conséquent, (7.2) correspond à la forme unilatérale de (7.3). Par (4.162)

$$F\{\underline{u}(t)\} = 2 \epsilon(f) F\{u(t)\}, \quad f \geq 0 \quad (7.4)$$

Par analogie, on peut étendre cette représentation complexe au cas des signaux non sinusoïdaux déterministes ou aléatoires [10, 17], en introduisant un signal complexe dont la partie réelle est le signal  $x(t)$ . Cette représentation est limitée au cas de signaux à valeur moyenne nulle dont le spectre ne contient ainsi aucune raie  $\bar{x} \delta(f)$  à l'origine.

### 7.1.2 Définition : signal analytique

On appelle *signal analytique* (fig. 7.2) une fonction complexe du temps dont la transformée de Fourier est la forme unilatérale de celle de la partie réelle. En notant cette partie réelle par  $x(t)$ , la partie imaginaire par  $\check{x}(t)$  et le signal analytique par  $\underline{x}(t)$ :

$$\underline{x}(t) = x(t) + j \check{x}(t) \quad (7.5)$$

avec

$$\underline{X}(f) = F\{\underline{x}(t)\} = X^+(f) = 2\epsilon(f)X(f) \quad (7.6)$$

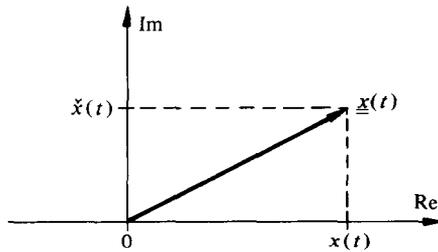


Fig. 7.2

### 7.1.3 Définition : transformée de Hilbert

En dénotant par  $\check{X}(f)$  la transformée de Fourier de la partie imaginaire  $\check{x}(t)$ , on tire de (7.5), (7.6) et (1.20)

$$\underline{X}(f) = X(f) + j \check{X}(f) = 2\epsilon(f)X(f) = [1 + \text{sgn}(f)]X(f) \quad (7.7)$$

Par identification, on obtient :  $\text{sgn}(f) = j \check{X}(f)/X(f)$ , d'où

$$\begin{aligned} \check{X}(f) &= -j \text{sgn}(f) X(f) \\ &= j \text{sgn}(-f) X(f) \end{aligned} \quad (7.8)$$

L'expression de la partie imaginaire est obtenue par transformation de Fourier inverse en utilisant la propriété (4.14), le résultat (4.89) et la quasi-symétrie (sect. 15.3) des transformations directe et inverse (4.1) et (4.2) qui entraîne que si  $X(f) = F\{x(t)\}$  :  $X(t) = F^{-1}\{x(-f)\}$  :

$$\check{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (7.9)$$

L'expression (7.9) est la *transformée de Hilbert* du signal  $x(t)$ , parfois dénotée  $\check{x}(t) = H\{x(t)\}$ . On la rencontre aussi en théorie des circuits (§ IV.7.3.33) où elle établit un lien entre les parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert d'un système causal.

La transformation inverse  $x(t) = H^{-1}\{\check{x}(t)\}$  est obtenue à partir de (7.8) en remarquant que

$$X(f) = j \operatorname{sgn}(f) \check{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(-f) \check{X}(f) \tag{7.10}$$

d'où

$$x(t) = -\frac{1}{\pi t} * \check{x}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau \tag{7.11}$$

Les transformées (7.9) et (7.11) sont définies comme des valeurs principales de Cauchy.

### 7.1.4 Exemple

Soit, par (4.117):  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} A [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$ . Par (7.8):  $\check{X}(f) = (j/2) A [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$  d'où, par (4.118):  $\check{x}(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ . Le signal analytique correspondant est  $\underline{x}(t) = A \exp(j2\pi f_0 t)$ , ce qui justifie l'analogie développée au paragraphe 7.1.1.

### 7.1.5 Exemple

Soit  $x(t) = A \operatorname{rect}(t/T)$ . Par (7.9):

$$\begin{aligned} \check{x}(t) &= \frac{A}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}(\tau/T) \cdot [t-\tau]^{-1} d\tau \\ &= \frac{A}{\pi} \int_{-T/2}^{T/2} (t-\tau)^{-1} d\tau = \frac{A}{\pi} \ln \left| \frac{t+T/2}{t-T/2} \right| \end{aligned}$$

Ces deux fonctions sont représentées sur la figure 7.3.

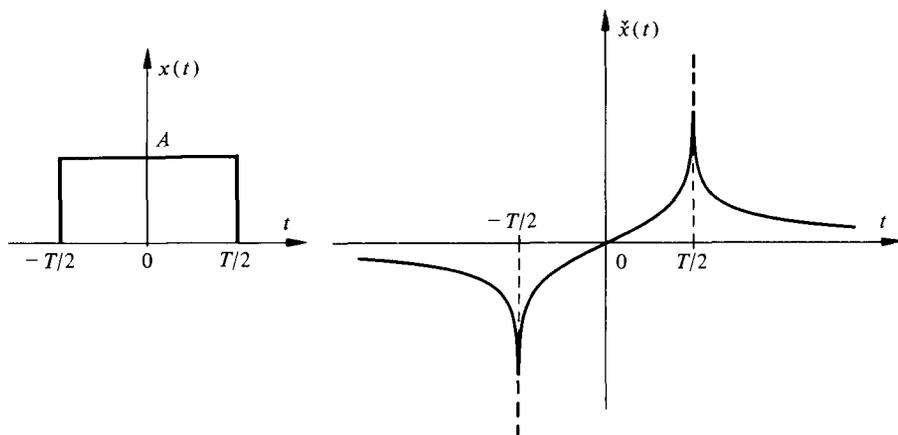


Fig. 7.3

## 7.2 PRINCIPALES PROPRIÉTÉS

## 7.2.1 Linéarité

La transformée de Hilbert  $\check{x}(t)$  d'un signal  $x(t)$  est égale au produit de convolution de celui-ci avec une fonction  $g(t) = (\pi t)^{-1}$ . C'est donc une opération linéaire qui correspond (§ 8.2.18) au filtrage de  $x(t)$  par un système linéaire (fig. 7.4) de réponse impulsionnelle  $g(t)$ .

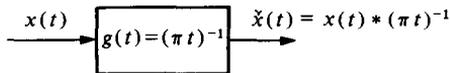


Fig. 7.4

## 7.2.2 Déphaseur pur

Les transformées de Fourier du signal et de sa transformée de Hilbert sont liées par l'équation (7.8). On en déduit que les spectres d'amplitudes sont identiques:

$$|\check{X}(f)| = |X(f)| \quad (7.12)$$

alors que les spectres de phase ne diffèrent que par un déphasage constant

$$\arg \check{X}(f) = \arg X(f) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(f) \quad (7.13)$$

Le système de la figure 7.4 se comporte comme un déphaseur pur de  $\pm \pi/2$ . Le signal  $x(t)$  et sa transformée de Hilbert  $\check{x}(t)$  sont dits *en quadrature*.

## 7.2.3 Orthogonalité

Le produit scalaire  $\langle x, \check{x} \rangle$  est nul. En effet, en introduisant (7.8) dans le théorème du produit (4.67)

$$\begin{aligned} \langle x, \check{x} \rangle &= \varphi_{x\check{x}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \check{x}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(f) \check{X}(f) df \\ &= j \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \operatorname{sgn}(-f) df = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Le signal  $x(t)$  et sa transformée de Hilbert  $\check{x}(t)$  sont des *fonctions orthogonales* sur l'intervalle  $-\infty < t < \infty$ . Cette propriété s'observe facilement sur la figure 7.3.

## 7.2.4 Produit de convolution

Soit  $z(t) = x(t) * y(t)$ , alors

$$\check{z}(t) = x(t) * \check{y}(t) = \check{x}(t) * y(t) \quad (7.15)$$

En effet, par (4.14),  $Z(f) = X(f) Y(f)$  et par (7.8):

$$\begin{aligned} \check{Z}(f) &= j Z(f) \operatorname{sgn}(-f) = j X(f) Y(f) \operatorname{sgn}(-f) \\ &= X(f) \check{Y}(f) = \check{X}(f) Y(f) \end{aligned} \quad (7.16)$$

On a également :

$$x(t) * y(t) = -\check{x}(t) * \check{y}(t) \quad (7.17)$$

### 7.2.5 Produit de deux signaux dont les spectres ont des supports disjoints et l'un est de type passe-bas

Soit  $z(t) = a(t)y(t)$  avec  $A(f) = 0$  pour  $|f| > B$  et  $Y(f) = 0$  pour  $|f| < B$ , alors

$$\check{z}(t) = a(t)\check{y}(t) \quad (7.18)$$

En effet, on vérifie aisément que *dans ce cas*

$$\begin{aligned} \check{Z}(f) &= j \operatorname{sgn}(-f) Z(f) = j \operatorname{sgn}(-f) [A(f) * Y(f)] \\ &= A(f) * j \operatorname{sgn}(-f) Y(f) \end{aligned} \quad (7.19)$$

### 7.2.6 Intercorrélation

Soit  $\check{\varphi}_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau)$  ou  $\varphi_{xy}(\tau) = x(-\tau) \bar{*} y(\tau)$  la fonction d'intercorrélacion de deux signaux réels à énergie finie ou puissance moyenne finie. Par une procédure semblable à celle suivie au paragraphe 7.2.4, on montre que sa transformée de Hilbert est égale à

$$\check{\varphi}_{xy}(\tau) = \check{\varphi}_x \check{y}(\tau) = -\check{\varphi}_{\check{xy}}(\tau); \quad \check{\varphi}_{xy}(\tau) = \varphi_x \check{y}(\tau) = -\varphi_{\check{xy}}(\tau) \quad (7.20)$$

En particulier, si  $y(t) = x(t)$ , on obtient

$$\check{\varphi}_x(\tau) = \check{\varphi}_x \check{x}(\tau) = -\check{\varphi}_{\check{xx}}(\tau); \quad \check{\varphi}_x(\tau) = \varphi_x \check{x}(\tau) = -\varphi_{\check{xx}}(\tau) \quad (7.21)$$

### 7.2.7 Signal causal

En vertu de (2.25) et (4.89), les transformées de Fourier des parties paire et impaire d'un signal réel causal sont, à un facteur  $j$  près, des transformées de Hilbert l'une de l'autre.

### 7.2.8 Représentation en fonction des parties du spectre à fréquences négatives et positives

Soit un signal réel à valeur moyenne nulle

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (7.22)$$

avec

$$x_-(t) = \int_{-\infty}^0 X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (7.23)$$

$$x_+(t) = \int_0^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (7.24)$$

Ces deux composantes du signal  $x(t)$  sont conjuguées complexes l'une de l'autre:  $x_+(t) = x_-^*(t)$ . Elles sont directement liées au signal analytique, en vertu de (7.6):

$$x_+(t) = \frac{1}{2} \underline{x}(t) = \frac{1}{2} [x(t) + j\check{x}(t)] \quad (7.25)$$

$$x_-(t) = \frac{1}{2} \underline{x}^*(t) = \frac{1}{2} [x(t) - j\check{x}(t)] \quad (7.26)$$

d'où les relations:

$$x(t) = x_-(t) + x_+(t) = \frac{1}{2} [\underline{x}(t) + \underline{x}^*(t)] \quad (7.27)$$

$$\check{x}(t) = j[x_-(t) - x_+(t)] = \frac{j}{2} [\underline{x}^*(t) - \underline{x}(t)] \quad (7.28)$$

### 7.2.9 Autocorrélation et spectre de signaux à énergie finie

Les densités spectrales d'énergie et les fonctions d'autocorrélation d'un signal à énergie finie  $x(t)$  et de sa transformée de Hilbert sont identiques. En effet, par (4.55) et (7.12)

$$\hat{\Phi}_x(f) = |X(f)|^2 = |\check{X}(f)|^2 = \hat{\Phi}_{\check{x}}(f) \quad (7.29)$$

et par transformation de Fourier inverse

$$\hat{\varphi}_x(\tau) = \hat{\varphi}_{\check{x}}(\tau) \quad (7.30)$$

Des résultats semblables sont obtenus dans le cas de signaux déterministe ou aléatoire à puissance moyenne finie.

### 7.2.10 Signaux aléatoires

Bien que la définition du paragraphe 7.1.2 ne s'applique pas formellement au cas des signaux aléatoires – dont la transformée de Fourier n'est pas définie – le concept de signal analytique et de transformée de Hilbert s'étend sans autre à cette catégorie de signaux. Le signal analytique (7.5) d'un signal aléatoire stationnaire, ergodique, et à valeur moyenne nulle  $x(t)$  est obtenu en lui adjoignant une partie imaginaire  $\check{x}(t)$  définie par la convolution (7.9). On a alors, de manière analogue à (7.29) et (7.30), identité des fonctions d'autocorrélation et des densités spectrales de puissance:

$$R_{\check{x}}(\tau) = R_x(\tau) \quad (7.31)$$

et donc

$$\Phi_{\check{x}}(f) = \Phi_x(f) \quad (7.32)$$

De plus, par analogie avec (7.21)

$$\check{R}_x(\tau) = R_{x\check{x}}(\tau) = -R_{\check{x}x}(\tau) \quad (7.33)$$

avec en particulier

$$R_{x\check{x}}(0) = R_{\check{x}x}(0) = 0 \quad (7.34)$$

ce qui entraîne que le signal aléatoire  $x(t)$  et sa transformée de Hilbert  $\check{x}(t)$  sont **non corrélés** (et donc statistiquement indépendants dans le cas d'une distribution gaussienne

en vertu du paragraphe 5.7.3, puisque la transformation de Hilbert est une transformation linéaire et que celle-ci conserve le caractère gaussien.

De (7.8) et (7.33), on tire également les équivalences

$$F\{\check{R}_x(\tau)\} = j \operatorname{sgn}(-f) \Phi_x(f) = \Phi_{x\check{x}}(f) = -\Phi_{\check{x}x}(f) \quad (7.35)$$

### 7.2.11 Démonstrations

Les résultats du paragraphe précédent s'obtiennent facilement en observant que, pour un signal stationnaire et ergodique, on peut écrire, en utilisant la relation (5.59),

$$\begin{aligned} R_{\check{x}}(\tau) &= \check{x}(-\tau) \bar{*} \check{x}(\tau) = x(-\tau) * (-\pi\tau)^{-1} \bar{*} x(\tau) * (\pi\tau)^{-1} \\ &= R_x(\tau) * [(-\pi\tau)^{-1} * (\pi\tau)^{-1}] = R_x(\tau) * F^{-1}\{j \operatorname{sgn}(f) \cdot j \operatorname{sgn}(-f)\} \\ &= R_x(\tau) * F^{-1}\{1\} = R_x(\tau) * \delta(\tau) = R_x(\tau) \end{aligned} \quad (7.36)$$

D'autre part, en tenant compte également de (7.17)

$$\begin{aligned} \check{R}_x(\tau) &= R_x(\tau) * (\pi\tau)^{-1} = x(-\tau) \bar{*} x(\tau) * (\pi\tau)^{-1} \\ &= x(-\tau) \bar{*} \check{x}(\tau) = -\check{x}(-\tau) \bar{*} x(\tau) \\ &= R_{x\check{x}}(\tau) = -R_{\check{x}x}(\tau) \end{aligned} \quad (7.37)$$

avec, en particulier :

$$R_{x\check{x}}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} F\{R_x(\tau) * (\pi\tau)^{-1}\} df = j \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) \operatorname{sgn}(-f) df = 0 \quad (7.38)$$

puisque  $\Phi_x(f)$  est une fonction paire et  $\operatorname{sgn}(-f)$  est une fonction impaire.

### 7.2.12 Double transformation de Hilbert

D'une manière générale, on a

$$\check{\check{x}}(t) = -x(t) \quad (7.39)$$

Ce résultat se déduit directement de (7.15) et (7.17).

### 7.2.13 Fonction d'autocorrélation et densité spectrale du signal analytique

La fonction d'autocorrélation du signal analytique  $\underline{x}(t)$  associé au signal aléatoire réel  $x(t)$  est donnée par la relation

$$R_{\underline{x}}(\tau) = 2 [R_x(\tau) + j \check{R}_x(\tau)] \quad (7.40)$$

où  $\check{R}_x(\tau) = H\{R_x(\tau)\}$ . L'expression (7.40) a aussi la forme d'un signal analytique.

La densité spectrale du signal analytique  $\underline{x}(t)$  est alors liée à celle du signal aléatoire  $x(t)$  par la relation

$$\Phi_{\underline{x}}(f) = 4 \epsilon(f) \Phi_x(f) = 2 \Phi_x^+(f) \quad (7.41)$$

où  $\epsilon(f)$  est le saut unité défini par (1.20). Cette relation est illustrée par l'exemple de la figure 7.5.

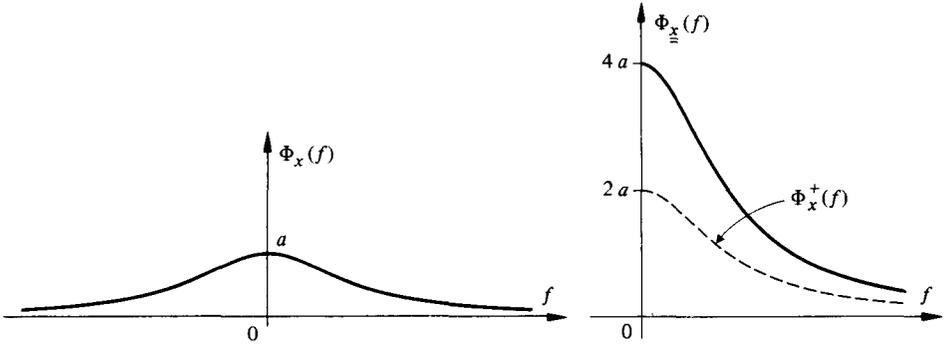


Fig. 7.5

**7.2.14 Démonstration**

Le signal analytique étant une fonction complexe, sa fonction d'autocorrélation vaut, d'après (5.78), (7.31), (7.33):

$$\begin{aligned}
 R_{\underline{x}}(\tau) &= E[\underline{x}^*(t) \underline{x}(t + \tau)] \\
 &= R_x(\tau) + R_{\check{x}}(\tau) + j R_{x\check{x}}(\tau) - j R_{\check{x}x}(\tau) \\
 &= 2 [R_x(\tau) + j \check{R}_x(\tau)]
 \end{aligned}
 \tag{7.42}$$

Par transformation de Fourier et (7.35)

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\underline{x}}(f) &= 2 [1 + \text{sgn}(f)] \Phi_x(f) \\
 &= 4 \epsilon(f) \Phi_x(f) = 2 \Phi_x^+(f)
 \end{aligned}
 \tag{7.43}$$

**7.3 ENVELOPPE RÉELLE ET PHASE D'UN SIGNAL**

**7.3.1 Forme polaire du signal analytique**

La forme cartésienne (7.5) du signal analytique est équivalente à la forme polaire (fig. 7.6)

$$\underline{x}(t) = r_x(t) \exp [j \phi_x(t)]
 \tag{7.44}$$

dont le module vaut

$$r_x(t) = |\underline{x}(t)| = \sqrt{x^2(t) + \check{x}^2(t)}
 \tag{7.45}$$

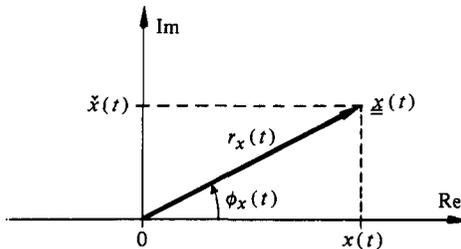


Fig.7.6

et l'argument est

$$\phi_x(t) = \arg \underline{x}(t) = \arctan [\dot{\check{x}}(t)/x(t)] \quad (7.46)$$

### 7.3.2 Modèles de l'enveloppe et de la phase instantanée d'un signal. Définitions

Un modèle de l'enveloppe d'un signal  $x(t)$  est, par définition, le module  $r_x(t)$  du signal analytique  $\underline{x}(t)$ . D'autres définitions peuvent aussi être proposées [87].

Le modèle de la phase instantanée du signal  $x(t)$  est, par définition, l'argument  $\phi_x(t)$  du signal analytique  $\underline{x}(t)$ .

### 7.3.3 Définitions : pulsation et fréquence instantanées

La pulsation instantanée est égale à la dérivée de la phase instantanée par rapport au temps :

$$\omega_i(t) = d\phi_x(t)/dt \quad (7.47)$$

et la fréquence instantanée vaut, par conséquent

$$f_i(t) = \frac{\omega_i(t)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi_x(t)}{dt} = \frac{x(t)\dot{\check{x}}(t) - \dot{x}(t)\check{x}(t)}{2\pi r_x^2(t)} \quad (7.48)$$

où  $\dot{\check{x}}(t) = dx/dt$ .

Cette fonction correspond approximativement à la sortie d'un circuit discriminateur de fréquence.

### 7.3.4 Exemple : signal sinusoïdal

Pour un signal de type sinusoïdal  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , on obtient, selon l'exemple 7.1.4,  $\check{x}(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$  et  $\underline{x}(t) = A \exp[j(\omega_0 t + \alpha)]$ , d'où l'enveloppe  $r_x(t) = |A|$  et la phase instantanée  $\phi_x(t) = \omega_0 t + \alpha$ . La pulsation instantanée  $\omega_i(t) = d\phi_x(t)/dt = \omega_0$  et la fréquence instantanée  $f_i(t) = \omega_i(t)/(2\pi) = f_0$ .

Les définitions des paragraphes 7.3.2 et 7.3.3 sont donc cohérentes avec les concepts traditionnels de phase, de pulsation et de fréquence. De plus, le modèle proposé d'enveloppe d'un signal est conforme à la notion intuitive que l'on peut s'en faire dans ce cas.

Par (7.41), la densité spectrale du signal analytique associé au signal sinusoïdal est  $\Phi_{\underline{x}}(f) = A^2 \delta(f - f_0)$  et la fonction d'autocorrélation correspondante vaut  $\varphi_{\underline{x}}(\tau) = A^2 \exp(j2\pi f_0 \tau)$ .

### 7.3.5 Exemple : signal sinusoïdal modulé

Soit un signal sinusoïdal dont l'amplitude  $a(t)$  est une fonction du temps de spectre passe-bas, nul pour  $|f| > B$  avec  $B < f_0 = \omega_0/(2\pi)$  :  $x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \alpha)$ . Sa transformée de Hilbert vaut, par (7.18) et l'exemple précédent :  $\check{x}(t) = a(t) \sin(\omega_0 t + \alpha)$ . Le signal analytique correspondant est ainsi  $\underline{x}(t) = a(t) \exp[j(\omega_0 t + \alpha)]$  d'où l'on tire l'enveloppe  $r_x(t) = |a(t)|$  et la phase instantanée  $\phi_x(t) = \omega_0 t + \alpha$ .

Ce signal et son enveloppe sont représentés sur la figure 7.7.

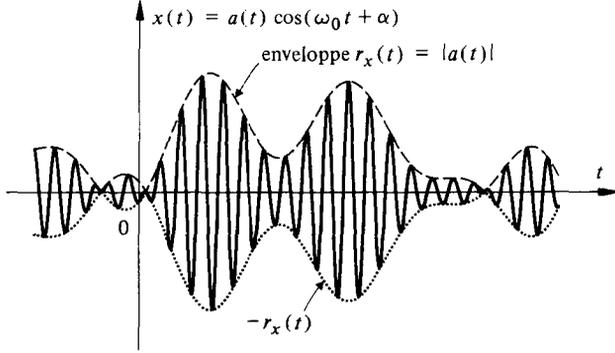


Fig. 7.7

### 7.3.6 Exemple : signal transitoire

La figure 7.8 représente un signal transitoire  $y(t)$  produit par l'enclenchement d'un moteur électrique et son enveloppe selon (7.45) calculée à l'ordinateur.

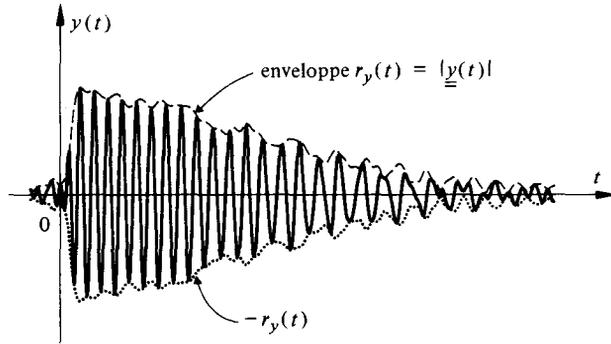


Fig. 7.8

### 7.3.7 Exemple : signal aléatoire

La figure 7.9 représente un signal aléatoire (simulé en fait à l'ordinateur par un signal pseudo-aléatoire) et son enveloppe calculée.

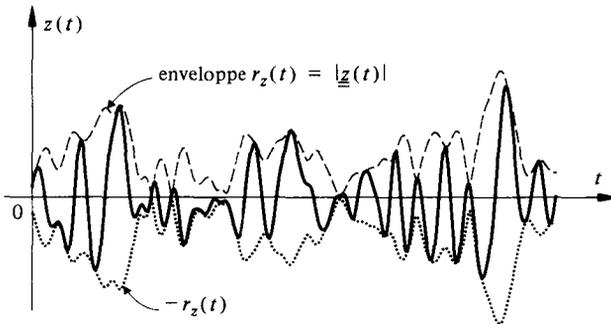


Fig. 7.9

### 7.3.8 Statistique de l'enveloppe et de la phase instantanée d'un bruit gaussien

Si  $n(t)$  est un bruit gaussien à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_n^2$ , sa transformée de Hilbert  $\check{n}(t) = n(t) * (\pi t)^{-1}$  est également un bruit gaussien, de même variance en raison de (7.31), non corrélé – et donc *indépendant* – en raison de (7.34).

L'enveloppe  $r_n(t) = [n^2(t) + \check{n}^2(t)]^{1/2}$  est donc elle-même une grandeur aléatoire dont la distribution statistique est facilement obtenue en effectuant la transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires décrite au paragraphe 5.1.23.

Pour  $n(t)$  et  $\check{n}(t)$  gaussiens, la densité de probabilité de l'enveloppe est la loi de Rayleigh (5.52) reproduite ci-dessous :

$$p_r(r_n) = \frac{r_n}{\sigma_n^2} \exp \left[ -\frac{r_n^2}{2\sigma_n^2} \right]; \quad r_n \geq 0 \quad (7.49)$$

La phase instantanée est, elle, une variable aléatoire uniformément distribuée, selon (5.53), et indépendante de l'enveloppe, selon (5.54) :

$$p_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}; \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad (7.50)$$

### 7.3.9 Distribution de l'enveloppe et de la phase instantanée d'un signal additionné de bruit gaussien

Soit un signal perturbé

$$x(t) = s(t) + n(t) \quad (7.51)$$

où  $s(t)$  est un signal utile et  $n(t)$  un bruit gaussien à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_n^2$ .

L'enveloppe du signal perturbé est donnée par

$$r_x(t) = \sqrt{x^2(t) + \check{x}^2(t)} = \sqrt{[s(t) + n(t)]^2 + [\check{s}(t) + \check{n}(t)]^2} \quad (7.52)$$

En posant :

$$x = s + n = r_x \cos \phi; \quad \check{x} = \check{s} + \check{n} = r_x \sin \phi \quad (7.53)$$

et en utilisant la transformation de coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires (§ 5.1.23), on obtient après introduction de  $n$  et  $\check{n}$  tirés de (7.53) dans (5.49) et évaluation de (5.47),

$$\begin{aligned} p_{r\phi}(r_x, \phi_x) &= \frac{r_x}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left[ -\frac{(s - r_x \cos \phi_x)^2 + (\check{s} - r_x \sin \phi_x)^2}{2\sigma_n^2} \right] \\ &= \frac{r_x}{2\pi\sigma_n^2} \exp \left[ -\frac{r_x^2 + r_s^2}{2\sigma_n^2} \right] \exp \left[ \frac{r_x r_s \cos(\phi_x - \phi_s)}{\sigma_n^2} \right] \end{aligned} \quad (7.54)$$

où

$$r_s(t) = \sqrt{s^2(t) + \check{s}^2(t)} \quad (7.55)$$

est l'enveloppe du signal utile seul, avec  $s = r_s \cos \phi_s$  et  $\check{s} = r_s \sin \phi_s$ .

En introduisant l'expression de la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro [88]

$$I_0(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(\alpha \cos \phi) d\phi \quad (7.56)$$

on obtient, par l'intégration de (7.54) par rapport à  $\phi = \phi_x - \phi_s$ , la densité de probabilité de l'enveloppe  $r_x(t)$ , appelée *distribution de Rice-Nakagami* (fig. 7.10)

$$p_r(r_x) = \frac{r_x}{\sigma_n^2} \exp \left[ -\frac{r_x^2 + r_s^2}{2\sigma_n^2} \right] \cdot I_0 \left( \frac{r_x r_s}{\sigma_n^2} \right) ; r_x \geq 0 \quad (7.57)$$

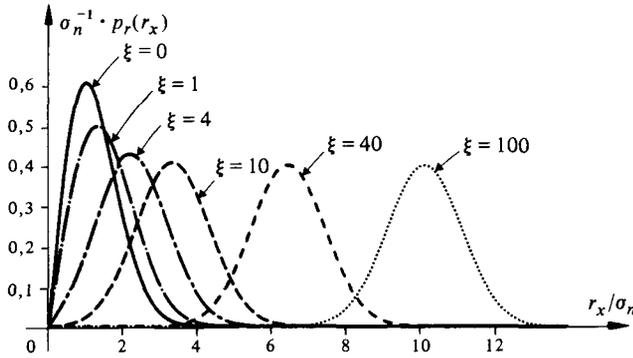


Fig. 7.10 Distribution de Rice-Nakagami pour différentes valeurs du rapport signal sur bruit  $\xi = r_s^2 / \sigma_n^2$ .

En l'absence de signal utile :  $s(t) = 0$ ,  $r_s(t) = 0$  et  $r_x(t) = r_n(t)$ . La valeur  $I_0(0) = 1$  et (7.57) s'identifie à (7.49).

Dans le cas d'un simple signal sinusoïdal  $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$ ,  $r_s(t) = |A|$ .

La distribution de Rice-Nakagami intervient dans l'évaluation des performances de systèmes de télécommunications et de radar utilisant la détection d'enveloppe. A fort rapport signal sur bruit  $\xi = r_s^2 / \sigma_n^2$ , elle se rapproche d'une loi de Gauss.

La distribution de la phase instantanée est obtenue par intégration de (7.54) par rapport à  $r_x$  [24]:

$$p_\phi(\phi) = (2\pi)^{-1} \exp[-r_s^2 / (2\sigma_n^2)] \cdot \{1 + \gamma \sqrt{\pi} \exp(\gamma^2) [1 + \operatorname{erf} \gamma]\} \quad (7.58)$$

où  $\gamma = r_s \cos \phi / (\sqrt{2} \sigma_n)$  et  $\operatorname{erf} \gamma$  est la fonction d'erreur définie par (14.108).

### 7.3.10 Définition : phaseur aléatoire

Certains phénomènes aléatoires peuvent être représentés par une somme vectorielle de composantes aléatoires. Chaque composante est alors décrite par un vecteur du type (7.44)

$$x_k = r_k \exp(j\phi_k) \quad (7.59)$$

dont le module  $r_k$  et la phase instantanée  $\phi_k$  sont des variables aléatoires. Un tel vecteur est appelé *phaseur aléatoire*.

L'étude d'un phénomène correspondant à un tel modèle revient à considérer le comportement d'un phaseur résultant

$$r \exp(j\phi) = \sum_{k=0}^n r_k \exp(j\phi_k) \quad (7.60)$$

possédant aussi un module aléatoire  $r$  et une phase aléatoire  $\phi$  (fig. 7.11).

On donne parfois à ce type de phénomène le nom de *marche aléatoire*.

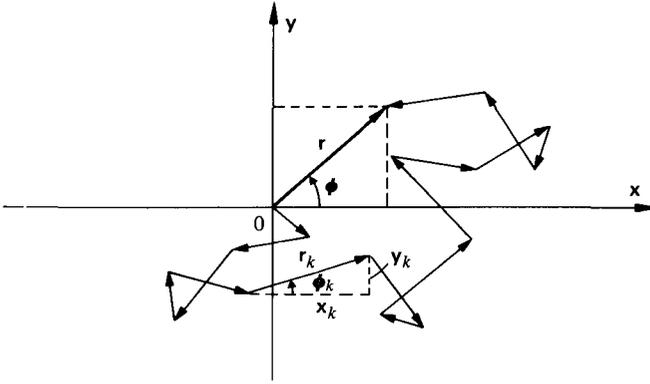


Fig. 7.11

### 7.3.11 Applications

Ce modèle permet de décrire le comportement de l'enveloppe d'un signal d'amplitude et de phase données auquel est ajouté du bruit représenté par une somme de phaseurs aléatoires.

Il peut aussi être utilisé pour caractériser les fluctuations aléatoires affectant la transmission d'un signal radioélectrique lorsque plusieurs signaux de même fréquence interfèrent les uns avec les autres. Ces interférences peuvent être dues à de multiples réflexions, sur les couches ionisées de l'atmosphère par exemple (fig. 7.12), ou causées par des turbulences atmosphériques provoquant des variations locales de l'indice de réfraction. Ces fluctuations engendrent un phénomène d'évanouissement (en anglais: fading).

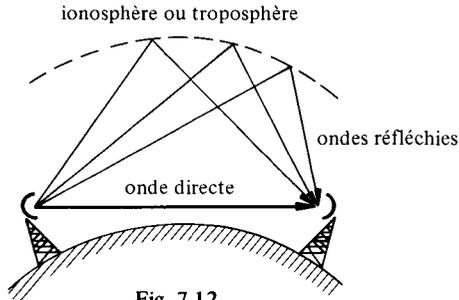


Fig. 7.12

Un modèle approximatif de ce type de perturbation est obtenu en décomposant le signal reçu en une somme de termes correspondant aux contributions respectives de l'onde directe et des multiples ondes réfléchies:

$$r \exp(j\phi) = \underbrace{r_0 \exp(j\phi_0)}_{\text{onde directe}} + \sum_{k=1}^n \underbrace{r_k \exp(j\phi_k)}_{\text{ondes réfléchies}} \quad (7.61)$$

La phase de l'onde directe  $\phi_0$  peut être prise, pour simplifier, comme phase de référence (fig. 7.13).

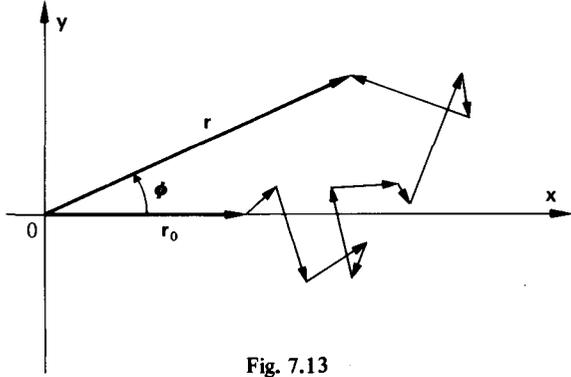


Fig. 7.13

La méthode générale de résolution fait intervenir à nouveau la transformation de coordonnées cartésiennes  $x$  et  $y$  en coordonnées polaires  $r$  et  $\phi$  (§ 5.1.23) avec :

$$x = r \cos \phi = \sum_{k=0}^n x_k = \sum_{k=0}^n r_k \cos \phi_k \quad (7.62)$$

$$y = r \sin \phi = \sum_{k=0}^n y_k = \sum_{k=0}^n r_k \sin \phi_k \quad (7.63)$$

Connaissant les propriétés statistiques des  $r_k$  et  $\phi_k$ , on en déduit la densité de probabilité conjointe  $p(x, y)$  de  $x$  et  $y$ . On peut ensuite, en utilisant le résultat (5.47), déterminer la densité de probabilité conjointe  $p(r, \phi)$  des variables  $r$  et  $\phi$ .

Les densités de probabilité marginale sont alors données par

$$p_r(r) = \int_0^{2\pi} p(r, \phi) d\phi \quad (7.64)$$

$$p_\phi(\phi) = \int_0^\infty p(r, \phi) dr \quad (7.65)$$

### 7.3.12 Somme de phaseurs aléatoires indépendants : phaseur de Rayleigh

Considérons la somme (avec  $r_0 = 0$ , ondes réfléchies seules)

$$r \exp(j\phi) = \sum_{k=1}^n r_k \exp(j\phi_k) \quad (7.66)$$

où tous les phaseurs  $x_k = r_k \exp(j\phi_k)$  sont statistiquement indépendants. On suppose de plus que les variables  $r_k$  sont identiquement distribuées et que la densité de probabilité des phases  $\phi_k$  est uniforme :

$$p_\phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi \quad (7.67)$$

On suppose également que les variables  $r_k$  et  $\phi_k$  sont indépendantes.

Si la sommation est effectuée sur un nombre  $n$  de termes assez grand, les variables aléatoires

$$\mathbf{x} = \sum_{k=1}^n r_k \cos \phi_k \quad (7.68)$$

$$\mathbf{y} = \sum_{k=1}^n r_k \sin \phi_k \quad (7.69)$$

sont approximativement gaussiennes en vertu du théorème de la limite centrale (§ 5.5.3). De plus, ces deux variables sont aussi non corrélées:

$$E[\mathbf{x}\mathbf{y}] = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E[r_k r_l] E[\cos \phi_k \sin \phi_l] = 0 \quad (7.70)$$

car  $E[\cos \phi_k \sin \phi_l] = 0$  pour tous  $k$  et  $l$ . Il s'ensuit que les variables gaussiennes  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont statistiquement indépendantes. Leur valeur moyenne est nulle

$$E[\mathbf{x}] = \sum_{k=1}^n E[r_k] E[\cos \phi_k] = 0 \quad (7.71)$$

$$E[\mathbf{y}] = \sum_{k=1}^n E[r_k] E[\sin \phi_k] = 0 \quad (7.72)$$

car  $E[\cos \phi_k] = E[\sin \phi_k] = 0$  et leur variance est donnée par

$$\sigma^2 = E[\mathbf{x}^2] = E[\mathbf{y}^2] = \frac{n}{2} E[r_k^2] \quad (7.73)$$

car

$$E[\mathbf{x}^2] = \sum_{k=1}^n E[r_k^2] E[\cos^2 \phi_k] \quad (7.74)$$

et

$$E[\cos^2 \phi_k] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi_k d\phi_k = \frac{1}{2} \quad (7.75)$$

En procédant à la transformation en coordonnées polaires, on constate que l'enveloppe  $r$  et la phase  $\phi$  du processus possèdent respectivement, comme au paragraphe 7.3.8, une distribution de Rayleigh (7.49) et une distribution uniforme (7.50). La résultante  $r \exp(j\phi)$  est parfois appelée phaseur de Rayleigh.

### 7.3.13 Somme d'une constante et d'un phaseur de Rayleigh

Si, dans l'expression (7.61), on considère  $r_0$  comme une constante et  $\phi_0 = 0$  (en d'autres termes  $\phi_0$  est prise comme phase de référence), on a

$$\mathbf{r} \exp(j\phi) = r_0 + \sum_{k=1}^n r_k \exp(j\phi_k) \quad (7.76)$$

Ce cas correspond à une transmission avec onde directe. La densité de probabilité

conjointe des variables aléatoires  $x$  et  $y$  devient alors

$$p_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(x-r_0)^2 + y^2}{2\sigma^2}\right] \quad (7.77)$$

La transformation en coordonnées polaires donne

$$\begin{aligned} p_{r\phi}(r, \phi) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(r\cos\phi - r_0)^2 + r^2\sin^2\phi}{2\sigma^2}\right] \\ &= \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2 + r_0^2}{2\sigma^2}\right] \exp\left[\frac{r_0 r \cos\phi}{\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (7.78)$$

avec  $r \geq 0$  et  $0 \leq \phi < 2\pi$ .

En intégrant par rapport à  $\phi$  et en introduisant l'expression intégrale (7.56) de la fonction de Bessel modifiée, on retrouve pour l'enveloppe la distribution de Rice-Nakagami (7.57):

$$p_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{r^2 + r_0^2}{2\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{rr_0}{\sigma^2}\right) \quad (7.79)$$

La distribution de la phase  $\phi$  est, elle, identique à (7.58).

## 7.4 ENVELOPPE COMPLEXE ET REPRÉSENTATION DES SIGNAUX À SPECTRE PASSE-BANDE

### 7.4.1 Définition de l'enveloppe complexe

Soit le signal analytique  $\underline{x}(t) = x(t) + j\check{x}(t)$  et une pulsation arbitraire  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . L'expression

$$\underline{r}(t) = \underline{x}(t) \exp(-j\omega_0 t) \quad (7.80)$$

est appelée *enveloppe complexe* du signal réel  $x(t)$ . Les parties réelles et imaginaires sont notées  $a(t)$  et  $b(t)$ , son module et son argument sont l'enveloppe réelle  $r(t)$  et une phase instantanée  $\alpha(t)$  liée à celle du signal analytique  $\phi(t)$  et dépendante du choix de  $\omega_0$  (fig. 7.14):

$$\underline{r}(t) = a(t) + jb(t) = r(t) \exp[j\alpha(t)] \quad (7.81)$$

avec

$$\alpha(t) = \phi(t) - \omega_0 t = \arctan[b(t)/a(t)] \quad (7.82)$$

et

$$r(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} \quad (7.83)$$

En développant (7.80), on obtient par identification

$$a(t) = r(t) \cos[\alpha(t)] = x(t) \cos(\omega_0 t) + \check{x}(t) \sin(\omega_0 t) \quad (7.84)$$

$$b(t) = r(t) \sin[\alpha(t)] = \check{x}(t) \cos(\omega_0 t) - x(t) \sin(\omega_0 t) \quad (7.85)$$

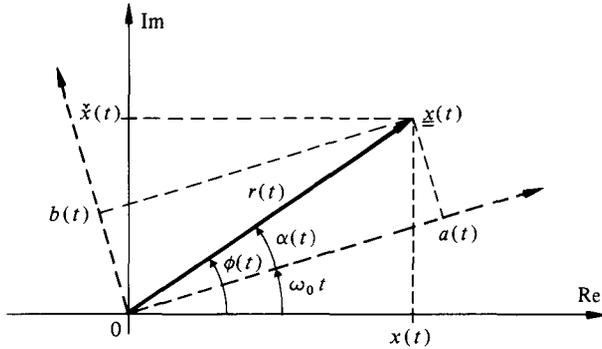


Fig. 7.14

ou inversément

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \text{Re} \{ \underline{r}(t) \exp(j\omega_0 t) \} \\
 &= r(t) \cos [\omega_0 t + \alpha(t)] \\
 &= a(t) \cos(\omega_0 t) - b(t) \sin(\omega_0 t)
 \end{aligned}
 \tag{7.86}$$

et

$$\begin{aligned}
 \check{x}(t) &= r(t) \sin [\omega_0 t + \alpha(t)] \\
 &= b(t) \cos(\omega_0 t) + a(t) \sin(\omega_0 t)
 \end{aligned}
 \tag{7.87}$$

Les fonctions  $a(t)$  et  $b(t)$  sont appelées respectivement les composantes *en phase* et *en quadrature* du signal  $x(t)$ . Si celui-ci est aléatoire et stationnaire au sens large,  $a(t)$  et  $b(t)$  sont aussi des signaux aléatoires stationnaires.

L'enveloppe complexe définie par (7.80) est liée au signal analytique. Cette représentation n'est pas unique, mais elle est jugée optimale [89].

### 7.4.2 Théorème

Soit  $x(t)$  un signal, aléatoire ou non, à spectre  $\Phi_x(f)$  passe-bande (fig. 7.15) c'est-à-dire nul excepté dans l'intervalle de fréquence  $f_1 < |f| < f_2$ , avec  $0 < f_1 < f_2 < \infty$ .

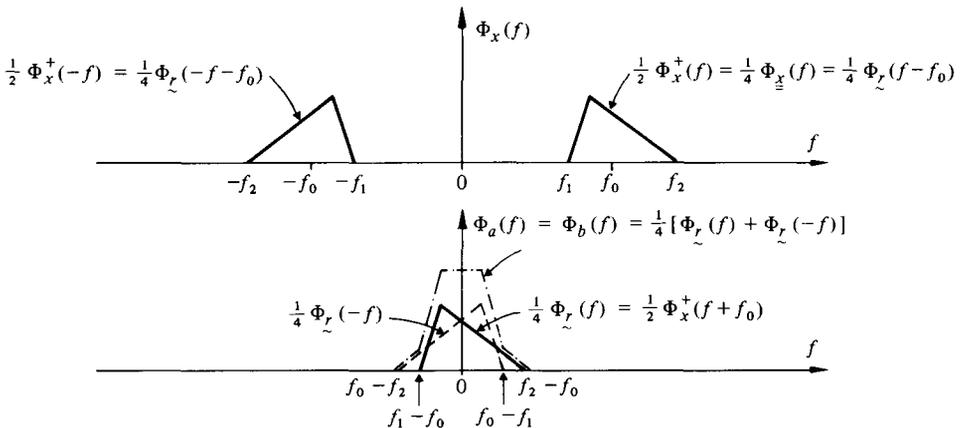


Fig. 7.15

Alors  $x(t)$  peut s'écrire sous la forme (7.86) avec

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{4} [\Phi_{\underline{r}}(-f-f_0) + \Phi_{\underline{r}}(f-f_0)] \quad (7.88)$$

où

$$\Phi_{\underline{r}}(f) = \Phi_{\underline{x}}(f+f_0) = 2\Phi_x^+(f+f_0) = 2[\Phi_a(f) + j\Phi_{ab}(f)] \quad (7.89)$$

est la densité spectrale de l'enveloppe complexe, fonction réelle non négative, mais pas nécessairement paire en  $f$ .

Les densités spectrales des composantes  $a(t)$  et  $b(t)$  sont ici identiques

$$\begin{aligned} \Phi_a(f) = \Phi_b(f) &= \frac{1}{4} [\Phi_{\underline{r}}(f) + \Phi_{\underline{r}}(-f)] \\ &= \frac{1}{2} [\Phi_x^+(f+f_0) + \Phi_x^+(f_0-f)] \end{aligned} \quad (7.90)$$

Elles occupent une largeur de bande  $2B$ , centrée sur l'origine  $f=0$ , avec

$$B = \max(|f_1 - f_0|, |f_2 - f_0|) \quad (7.91)$$

Si  $f_1 < f_0 < f_2$  :  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des signaux à spectre passe-bas.

Si  $f_0 \leq f_1$ , l'enveloppe complexe est elle-même un signal analytique :  $\underline{r}(t) = \underline{a}(t)$  et  $b(t) = \tilde{a}(t)$  car  $\Phi_{\underline{r}}(f) = 2\Phi_a^+(f) = \Phi_{\underline{a}}(f)$ .

### 7.4.3 Démonstration

Par (5.78), (5.198), (7.80) et (7.81) et par analogie avec (7.31) et (7.33)

$$\begin{aligned} R_{\underline{r}}(\tau) &= E[\underline{r}^*(t)\underline{r}(t+\tau)] = 2[R_a(\tau) + jR_{ab}(\tau)] \\ &= R_{\underline{x}}(\tau) \exp(-j2\pi f_0\tau) \end{aligned} \quad (7.92)$$

et par (4.17) et (7.41)

$$\Phi_{\underline{r}}(f) = 2[\Phi_a(f) + j\Phi_{ab}(f)] = \Phi_{\underline{x}}(f+f_0) = 2\Phi_x^+(f+f_0) \quad (7.93)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \Phi_x(f) &= \frac{1}{2} [\Phi_x^+(-f) + \Phi_x^+(f)] \\ &= \frac{1}{4} [\Phi_{\underline{r}}(-f-f_0) + \Phi_{\underline{r}}(f-f_0)] \end{aligned} \quad (7.94)$$

La densité spectrale de l'enveloppe complexe est réelle et non négative en raison de la symétrie hermitienne de la fonction d'autocorrélation d'un signal complexe. Elle est paire en  $f$  si les composantes  $a(t)$  et  $b(t)$  sont orthogonales.

La densité spectrale de  $a(t)$  ou  $b(t)$  s'établit, à partir de (7.84) ou (7.85), par transformation de Fourier de la fonction d'autocorrélation correspondante. Par exemple

$$\begin{aligned} R_a(\tau) &= E[a(t)a(t+\tau)] \\ &= \frac{1}{2} [R_x(\tau) + R_{\tilde{x}}(\tau)] \cos(\omega_0\tau) + \frac{1}{2} [R_{x\tilde{x}}(\tau) - R_{\tilde{x}x}(\tau)] \sin(\omega_0\tau) \end{aligned} \quad (7.95)$$

Avec, par (7.31) et (7.33),  $R_x(\tau) = R_{\tilde{x}}(\tau)$ ,  $R_{x\tilde{x}}(\tau) = -R_{\tilde{x}x}(\tau)$  et, par (7.35),  $\Phi_{\tilde{x}x}(f) = -\Phi_{x\tilde{x}}(f) = j\Phi_x(f) \operatorname{sgn}(f)$ , on obtient après transformation

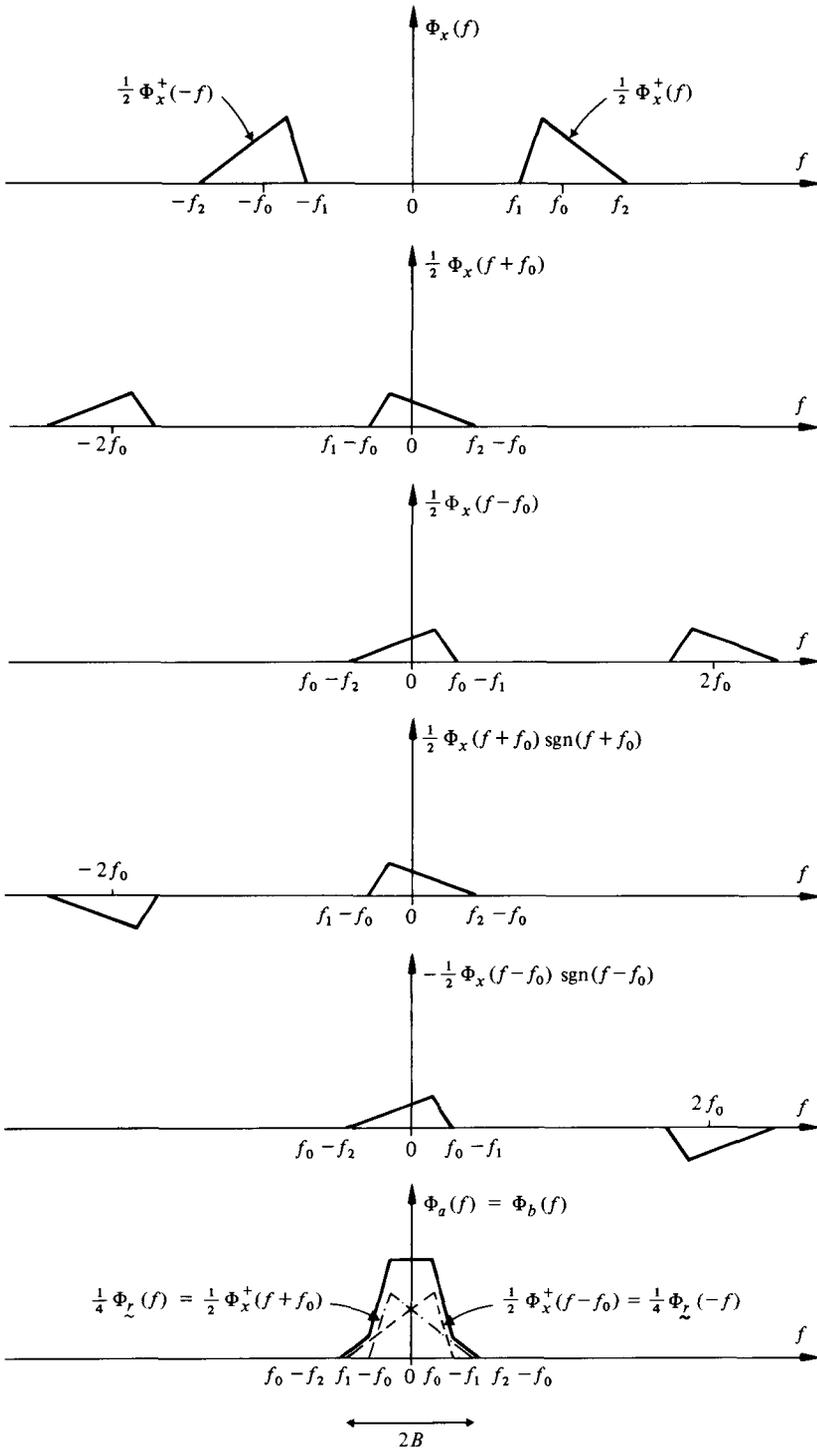


Fig. 7.16

$$\begin{aligned}
\Phi_a(f) &= \Phi_x(f) * \frac{1}{2} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] \\
&\quad + \Phi_x(f) \operatorname{sgn}(f) * \frac{1}{2} [\delta(f+f_0) - \delta(f-f_0)] \\
&= \frac{1}{2} \Phi_x(f+f_0) + \frac{1}{2} \Phi_x(f-f_0) + \frac{1}{2} \Phi_x(f+f_0) \operatorname{sgn}(f+f_0) \\
&\quad - \frac{1}{2} \Phi_x(f-f_0) \operatorname{sgn}(f-f_0) \\
&= \frac{1}{2} [\Phi_x^+(f+f_0) + \Phi_x^+(f_0-f)] = \frac{1}{4} [\Phi_{\tilde{r}}(f) + \Phi_{\tilde{r}}(-f)] \quad (7.96)
\end{aligned}$$

et la largeur de bande occupée vaut  $2B$  avec  $B = \max(|f_1 - f_0|, |f_2 - f_0|)$  ainsi que cela est illustré sur la figure 7.16 pour le cas où  $f_1 < f_0 < f_2$ .

#### 7.4.4 Commentaire

Un signal à spectre passe-bande est donc uniquement déterminé par ses composantes en phase  $a(t)$  et en quadrature  $b(t)$ , donc par sa seule enveloppe complexe  $r(t) = a(t) + jb(t) = r(t) \exp[j\alpha(t)]$  qui est *l'analogue du phaseur*  $\hat{U} = \hat{U} \exp(j\alpha)$  *d'une grandeur purement sinusoïdale*.

Si  $f_1 < f_0 < f_2$ , ces composantes sont de type passe-bas, de fréquence maximum  $B$ . Chacune d'elles peut être représentée par une série cardinale du type (3.82). Cette propriété est mise à profit dans l'établissement du théorème d'échantillonnage des signaux de type passe-bande énoncé au paragraphe 9.3.8.

Il résulte de (7.90) que les puissances (variances) des composantes  $a(t)$  et  $b(t)$  sont identiques et égales à celles de  $x(t)$ .

#### 7.4.5 Cas particulier

Si la densité spectrale  $\Phi_x(f)$  est localement symétrique par rapport à  $\pm f_0$ , c'est-à-dire si

$$\Phi_x^+(f+f_0) = \Phi_x^+(f_0-f) \quad (7.97)$$

la relation (7.96) se réduit à

$$\Phi_a(f) = \Phi_x^+(f+f_0) = \frac{1}{2} \Phi_{\tilde{r}}(f) \quad (7.98)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\Phi_x(f) &= \frac{1}{2} \Phi_x^+(f) + \frac{1}{2} \Phi_x^+(-f) \\
&= \frac{1}{2} \Phi_a(f-f_0) + \frac{1}{2} \Phi_a(f+f_0) \\
&= \Phi_a(f) * \frac{1}{2} [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)]
\end{aligned} \quad (7.99)$$

Par transformation inverse, la fonction d'autocorrélation devient dans ce cas (fig. 7.17)

$$R_x(\tau) = R_a(\tau) \cdot \cos(\omega_0 \tau) \quad (7.100)$$

Les composantes  $a(t)$  et  $b(t)$  sont ici *orthogonales* :  $R_{ab}(\tau) = 0$  et  $\Phi_{ab}(f) = 0$ .

Ainsi, un signal à spectre passe-bande localement symétrique est équivalent à une oscillation sinusoïdale de fréquence  $f_0$ , multipliée par une composante indépendante de type passe-bas  $a(t)$ . C'est le signal sinusoïdal modulé de l'exemple 7.3.5, dont l'enveloppe réelle est  $|a(t)|$ .

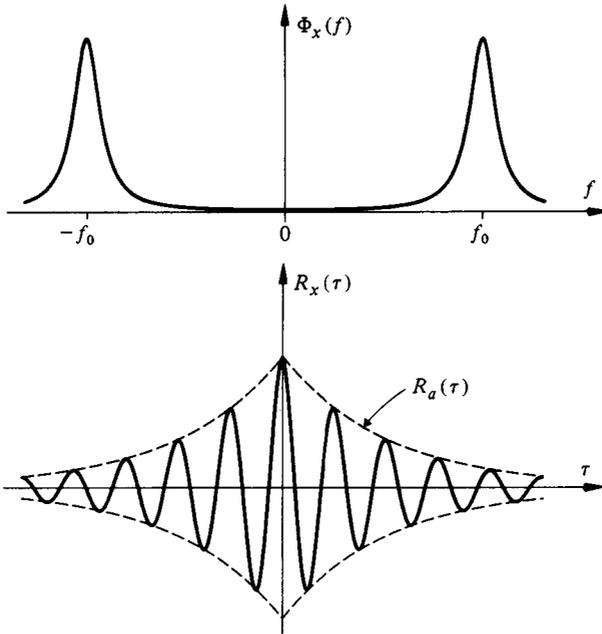


Fig. 7.17

#### 7.4.6 Signaux à bande étroite et cas gaussien

Si  $f_2 - f_1 \ll f_0$  avec  $f_1 < f_0 < f_2$ , les composantes en phase  $a(t)$  et en quadrature  $b(t)$  sont à variation lente. Il en va de même de l'enveloppe réelle  $r(t)$  et de la phase  $\alpha(t)$ .

La fréquence instantanée (7.48) devient

$$f_i(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\alpha(t)}{dt} = f_0 + \frac{a(t)\dot{b}(t) - \dot{a}(t)b(t)}{2\pi[a^2(t) + b^2(t)]} \quad (7.101)$$

Dans le cas d'un signal (ou bruit) aléatoire gaussien à bande étroite de variance  $\sigma^2$ , les composantes  $a(t)$  et  $b(t)$  sont elles-mêmes des signaux gaussiens indépendants, de même variance  $\sigma^2$  et à spectre passe-bas. La phase  $\alpha(t)$  est uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$  et l'enveloppe réelle  $r(t)$  possède la distribution de Rayleigh (7.49).

Si le signal possède un spectre  $\Phi_x(f) = \frac{1}{2} \eta \{ \text{rect} [(f + f_*)/B] + \text{rect} [(f - f_*)/B] \}$ , on a par (7.90), en posant  $f_0 = f_*$ ,  $\Phi_a(f) = \Phi_b(f) = \eta \text{rect} (f/B)$  avec  $\sigma_x^2 = \sigma_a^2 = \sigma_b^2 = \eta B$ .

#### 7.4.7 Application à la représentation vectorielle d'un signal perturbé

Considérons un signal sinusoïdal  $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$  de fréquence  $f_0$  et de phase aléatoire  $\alpha$ , perturbé par du bruit additif  $n(t)$  à bande étroite centrée sur  $f_0$ . Conformément au modèle développé précédemment, on peut écrire (fig. 7.18)

$$n(t) = a_n(t) \cos(\omega_0 t + \alpha) - b_n(t) \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (7.102)$$

et

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) + n(t) \\ &= [A + a_n(t)] \cos(\omega_0 t + \alpha) - b_n(t) \sin(\omega_0 t + \alpha) \end{aligned} \quad (7.103)$$

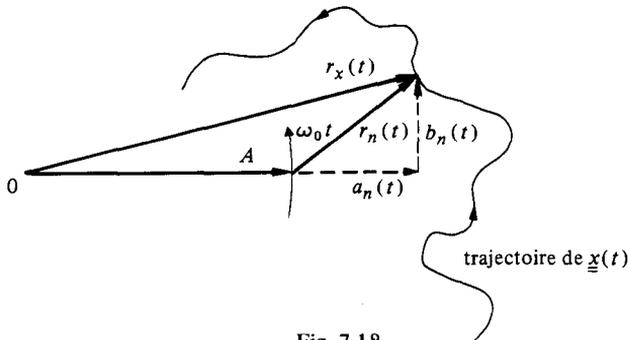


Fig. 7.18

L'extrémité du vecteur  $\underline{x}(t)$  décrit dans le temps une trajectoire aléatoire dans le plan complexe. Lorsque  $n(t)$  est à bande étroite, la vitesse relative de l'extrémité du vecteur  $\underline{x}(t)$  est faible vis-à-vis de la vitesse angulaire  $\omega_0$ .

Cette représentation est d'une grande utilité pour l'évaluation de l'influence du bruit additif sur les signaux modulés. La composante en phase intervient dans l'étude de la démodulation d'amplitude et la composante en quadrature dans celle de la démodulation angulaire (phase ou fréquence).

D'une manière générale, la représentation (7.86) des signaux à spectre passe-bande facilite l'étude théorique des méthodes de modulation utilisant une porteuse sinusoïdale (chap. 11).

#### □ 7.4.8 Application au radar: fonction d'ambiguïté. Définitions

Considérons l'émission d'une impulsion radar décrite par

$$s(t) = r_s(t) \cos[\omega_0 t + \alpha(t)] \quad (7.104)$$

dont l'enveloppe  $r_s(t)$  et la phase  $\alpha(t)$  sont des fonctions réelles à variation lente vis-à-vis de  $\omega_0 t$ .

Le signal d'écho perçu est retardé par rapport au signal émis d'une quantité  $t_0$  proportionnelle à la distance de l'antenne à la cible et sa fréquence est décalée par effet Doppler d'une quantité  $f_d$  proportionnelle à la vitesse radiale de la cible (sect. XIII 8.1). Son amplitude, enfin, est réduite par un facteur d'atténuation  $k$ .

En utilisant le formalisme d'écriture du signal analytique, les signaux d'émission et de réception sont représentés respectivement par

$$\underline{s}(t) = \underline{r}(t) \exp[j\omega_0 t] \quad (7.105)$$

et

$$\begin{aligned} \underline{s}_r(t) &= k \underline{s}(t - t_0) \exp[j2\pi f_d(t - t_0)] \\ &= k \underline{r}(t - t_0) \exp[j2\pi(f_0 + f_d)(t - t_0)] \end{aligned} \quad (7.106)$$

où

$$\underline{r}(t) = a(t) + j b(t) = r_s(t) \exp[j\alpha(t)] \quad (7.107)$$

est l'enveloppe complexe (7.80).

Si plusieurs cibles sont présentes dans le volume illuminé par le faisceau radar, un problème de résolution est posé puisque plusieurs échos seront à identifier. De plus, le

signal radar est généralement formé d'un train périodique d'impulsions et non d'une impulsion unique, ce qui peut créer des ambiguïtés. En effet, si deux cibles sont situées l'une par rapport à l'autre à une distance correspondant à un multiple de l'intervalle de temps séparant deux impulsions, elles seront difficiles à discriminer. Une ambiguïté du même ordre existe aux fréquences multiples de la fréquence  $f_0$  lors de l'estimation des vitesses radiales par mesure du décalage Doppler.

Supposons que le signal émis soit représenté par le signal analytique  $\underline{s}(t)$  et que le signal perçu en retour, dû à la somme des échos  $\underline{s}_{r1}(t)$  et  $\underline{s}_{r2}(t)$  de deux cibles, soit le suivant (l'un des échos est pris comme référence temporelle, les atténuations sont supposées égales et seul l'écart  $\nu$  des décalages Doppler est pris en compte, pour simplifier)

$$\underline{s}_r(t) = k \underline{s}(t) \exp(-j 2\pi \nu t) + k \underline{s}(t + \tau) \quad (7.108)$$

Pour obtenir une bonne résolution, il faut que le signal  $\underline{s}(t)$  choisi, c'est-à-dire en fait l'enveloppe complexe  $\underline{r}(t)$ , soit tel que les contributions dues aux deux échos soient aussi différentes que possible pour une très large gamme de valeurs de  $\tau$  et  $\nu$ . On cherche donc à maximiser la distance euclidienne (3.3)

$$\begin{aligned} d(\underline{s}_{r1}, \underline{s}_{r2}) &= k^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{s}(t) \exp(-j 2\pi \nu t) - \underline{s}(t + \tau)|^2 dt \\ &= 2k^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{s}(t)|^2 dt - \operatorname{Re} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \underline{s}^*(t) \underline{s}(t + \tau) \exp(j 2\pi \nu t) dt \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.109)$$

La première intégrale de (7.109) est l'énergie de l'enveloppe et la seconde est un produit scalaire: une sorte de fonction d'autocorrélation bidimensionnelle en  $\tau$  et  $\nu$  dont il faut minimiser le module pour  $\tau \neq 0$  et  $\nu \neq 0$  de manière à obtenir une bonne résolution.

Avec  $\underline{s}(t) = \underline{r}(t) \exp(j\omega_0 t)$ , cette seconde intégrale devient

$$I(\tau, \nu) = \exp(j\omega_0 \tau) \cdot \chi(\tau, \nu) \quad (7.110)$$

avec

$$\chi(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{r}^*(t) \underline{r}(t + \tau) \exp(j 2\pi \nu t) dt \quad (7.111)$$

Selon les auteurs [11, 27, 67, 90, 91, 92], la fonction  $\chi(\tau, \nu)$ , son conjugué complexe ou son module carré  $|\chi(\tau, \nu)|^2$  sont appelés *fonction d'ambiguïté* du signal.

La signification de cette fonction est la suivante: deux cibles dont les échos diffèrent d'un retard  $\tau$  et d'un décalage Doppler  $\nu$  ne peuvent pas être distinguées si  $|\chi(\tau, \nu)|^2$  est égal à  $|\chi(0, 0)|^2$  et sont difficiles à distinguer si  $|\chi(\tau, \nu)|^2$  est presque égal à  $|\chi(0, 0)|^2$ .

En appliquant le théorème du produit (4.67), la fonction  $\chi(\tau, \nu)$  peut aussi s'écrire

$$\chi(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{R}(f) \underline{R}^*(f + \nu) \exp(j 2\pi f \tau) df \quad (7.112)$$

où  $\underline{R}(f) = F \{ \underline{r}(t) \}$ .

En particulier, on tire de (7.111) la projection

$$\chi(\tau, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{r}^*(t) \underline{r}(t + \tau) dt = \mathring{\varphi}_{\underline{r}}(\tau) \quad (7.113)$$

qui est la fonction d'autocorrélation (4.38) de l'enveloppe complexe. Pour une bonne résolution dans l'estimation de distance, cette fonction devrait se rapprocher le plus possible d'une impulsion de Dirac.

De manière analogue, on tire de (7.112) le résultat

$$\chi(0, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{R}(f) \underline{R}^*(f + \nu) df = \mathring{\varphi}_{\underline{R}}^*(\nu) \quad (7.114)$$

qui est une fonction d'autocorrélation *fréquentielle* de la transformée (spectre) de l'enveloppe. A nouveau, pour une bonne résolution dans l'estimation de vitesse radiale, cette fonction devrait aussi se rapprocher le mieux possible d'une impulsion de Dirac.

La valeur à l'origine

$$\chi(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{r}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\underline{R}(f)|^2 df = W \quad (7.115)$$

correspond à l'énergie de l'enveloppe. Celle-ci est elle-même égale au double de l'énergie du signal réel  $s(t)$ .

La fonction  $|\chi(\tau, \nu)|^2$  décrit une surface au-dessus du plan  $\tau, \nu$ , de valeur maximale  $|\chi(0, 0)|^2$ . Une indication de la résolution combinée en temps et en fréquence est fournie par l'aire  $\Delta$  de la base d'un cylindre, de hauteur égale à  $W^2 = |\chi(0, 0)|^2$  et de volume identique à celui compris sous la surface  $|\chi(\tau, \nu)|^2$ , appelée *aire effective d'ambiguïté* :

$$\Delta = W^{-2} \cdot \iint |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu \quad (7.116)$$

On montre (exercice 7.6.10) que cette aire est indépendante du choix du signal et *toujours égale à l'unité*. Ce résultat fixe une limite théorique aux possibilités de résolution conjointe en temps et en fréquence.

On définit également un *pouvoir de résolution temporelle* (ou *en distance*)

$$T_d = W^{-2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\tau, 0)|^2 d\tau = W^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathring{\varphi}_{\underline{r}}(\tau)|^2 d\tau \quad (7.117)$$

et un *pouvoir de résolution fréquentielle* (ou *en vitesse*)

$$F_v = W^{-2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(0, \nu)|^2 d\nu = W^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathring{\varphi}_{\underline{R}}(\nu)|^2 d\nu \quad (7.118)$$

Les positions de deux cibles dont les échos sont d'intensités comparables pourront difficilement être distinguées si ces échos sont reçus avec un décalage temporel inférieur à  $T_d$ . De même, les vitesses radiales de ces cibles pourront difficilement être discriminées si la différence entre les effets Doppler respectifs est inférieure à  $F_v$ .

Les inverses de  $T_d$  et  $F_v$  sont appelées respectivement *largeur de bande efficace* (ou *ouverture en fréquence*) et *durée efficace* du signal.

**7.4.9 Exemples de fonctions d'ambiguïté**

A une impulsion sinusoïdale de fréquence  $f_0$  fixe et d'enveloppe rectangulaire de durée  $T$

$$s_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \cdot \cos(2\pi f_0 t) \tag{7.119}$$

correspond la fonction (fig. 7.19)

$$|\chi_1(\tau, \nu)|^2 = T^2 \text{sinc}^2[\nu(T - |\tau|)] \text{tri}^2(\tau/T) \tag{7.120}$$

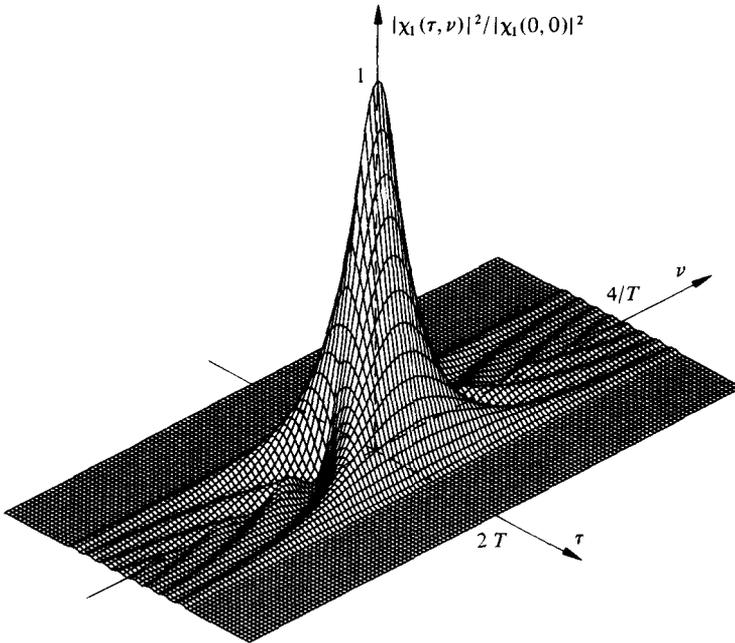


Fig. 7.19

Afin d'améliorer la résolution temporelle, on utilise souvent en radar une impulsion à enveloppe rectangulaire modulée linéairement en fréquence (en anglais: chirp signal)

$$s_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t - T/2}{T}\right) \cdot \cos[2\pi(f_0 + \beta t)t] \tag{7.121}$$

à laquelle correspond l'enveloppe complexe

$$\underline{s}(t) = \text{rect}\left[\frac{t - T/2}{T}\right] \exp(j 2\pi\beta t^2) \tag{7.122}$$

et la fonction

$$|\chi_2(\tau, \nu)|^2 = T^2 \text{sinc}^2[(2\beta\tau + \nu)(T - |\tau|)] \cdot \text{tri}^2(\tau/T) \tag{7.123}$$

Celle-ci est représentée sur la figure 7.20 pour  $\beta = 2/T^2$  Hz/s.

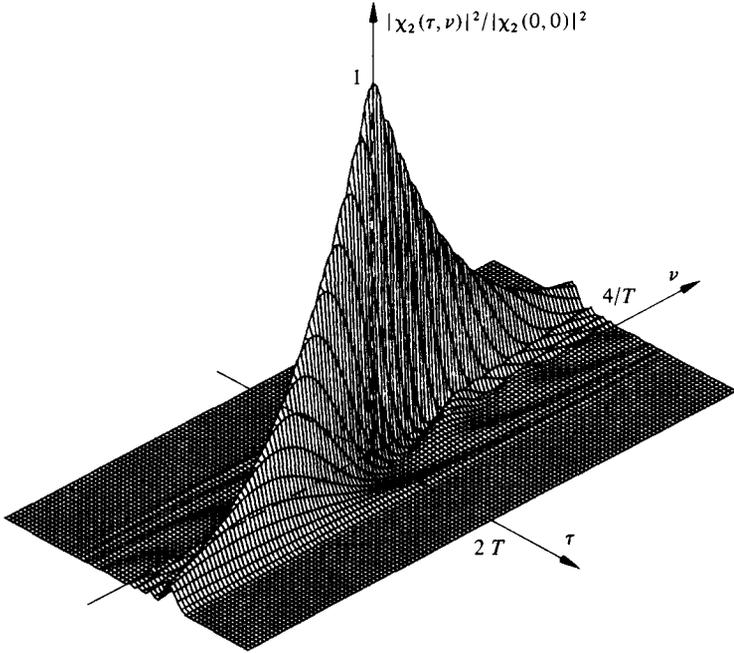


Fig. 7.20

Dans le cas de l'émission d'un train périodique d'impulsions, la fonction d'ambiguïté devient elle aussi localement périodique, à la fois selon l'axe  $\tau$  et selon l'axe  $\nu$ .

#### 7.4.10 Autres applications de la fonction d'ambiguïté

La fonction d'ambiguïté a été introduite en théorie du radar [11]. Elle a trouvé également des applications dans d'autres domaines [67] où l'on désire estimer à la fois les décalages temporel et fréquentiel de deux signaux. C'est le cas des signaux sonars (acoustique sous-marine, chauve-souris). La fonction d'ambiguïté est également liée à la représentation de signaux complexes (en particulier à forte modulation de phase ou de fréquence) dans un plan temps-fréquence conduisant au concept de *spectre instantané* [93].

Par analogie avec (7.111) on peut également définir une fonction d'inter-ambiguïté  $\chi_{xy}(\tau, \nu)$  pour deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ . Celle-ci a été appliquée à l'identification de systèmes linéaires variant dans le temps.

### 7.5 LARGEUR DE BANDE ET DURÉE DES SIGNAUX

#### 7.5.1 Dispersion temporelle et dispersion spectrale

Pour les signaux physiquement réalisables, c'est-à-dire à énergie finie, les distributions temporelle  $x^2(t)$  et fréquentielle  $\hat{\Phi}_x(f) = |X(f)|^2$  de cette énergie tendent nécessairement vers zéro lorsque  $|t|$  et  $|f|$  tendent vers l'infini. L'ampleur de la dispersion de cette énergie sur l'axe du temps ou l'axe des fréquences est une information utile.

En raison de la propriété (4.18) de la transformation de Fourier, à toute contraction d'un signal correspond une dilatation de son spectre et inversement. Ceci suggère l'existence d'une relation entre les dispersions temporelle et fréquentielle de ces distributions d'énergie [10].

La mesure de ces dispersions est toutefois délicate parce que l'on peut envisager plusieurs manières de les définir, toutes aussi arbitraires les unes que les autres. Le choix d'une définition dépend de la commodité d'emploi dans un contexte donné et de la forme du signal. Ce problème est étudié de manière approfondie dans [23] et [91]. Son importance est particulièrement grande en théorie du radar [90] et en transmission de données où les interférences entre symboles doivent être minimisées [49].

On se limite, dans cet ouvrage, à la présentation de définitions relativement générales.

### 7.5.2 Localisation d'un signal

La dispersion temporelle de l'énergie d'un signal est invariante à toute translation de celui-ci. Il est souvent judicieux de choisir au préalable, comme origine, une position moyenne :

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t \cdot x^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt} = W_x^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot x^2(t) dt \quad (7.124)$$

où  $W_x$  est l'énergie totale du signal.

La position moyenne choisie est le *centre de gravité* de la distribution temporelle d'énergie. Elle est analogue à la valeur moyenne – espérance mathématique – d'une variable aléatoire  $\mathbf{t}$  de densité de probabilité  $p(t) = W_x^{-1} x^2(t)$ .

### 7.5.3 Exemple

Soit un signal rectangulaire de support  $[t_1, t_2]$

$$x(t) = A \operatorname{rect} \left( \frac{t - \tau}{t_2 - t_1} \right)$$

Par (7.124)

$$t_0 = \frac{(t_2^2 - t_1^2)/2}{(t_2 - t_1)} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \tau$$

### 7.5.4 Exemple

Soit un signal à décroissance exponentielle décalé

$$x(t) = e(t - \tau) \exp[-a(t - \tau)]$$

$$t_0 = 1/(2a) + \tau$$

### 7.5.5 Durée utile

En statistique (chap. 14), la dispersion des amplitudes d'une variable aléatoire est caractérisée par son écart-type  $\sigma$ , la racine carrée de la variance. Par analogie, on peut définir une variance  $\sigma_t^2$  de la distribution temporelle d'énergie du signal, après avoir choisi

comme nouvelle origine, pour simplifier, la position moyenne  $t_0$  définie par (7.124):

$$\sigma_t^2 = W_x^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t) dt \quad (7.125)$$

La durée utile  $D_u$  du signal est une grandeur proportionnelle à l'écart-type  $\sigma_t$  (fig. 7.21):

$$D_u = 2\alpha\sigma_t \quad (7.126)$$

Le choix de  $\alpha$  est assez arbitraire. On peut, par exemple, choisir  $\alpha = 1$  [57].

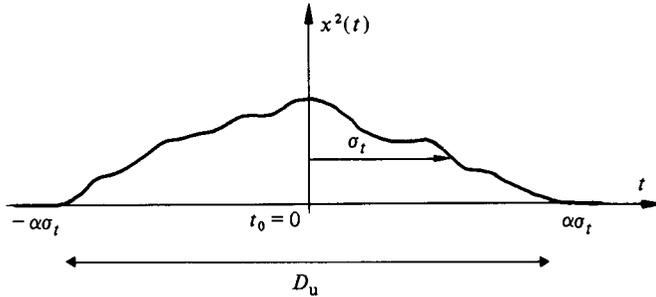


Fig. 7.21

### 7.5.6 Largeur de bande utile

De manière similaire, la dispersion de la densité spectrale d'énergie peut être caractérisée par un écart-type  $\sigma_f$ .

Pour un spectre de type passe-bas, la variance est donnée par

$$\sigma_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f^2 \Phi_x(f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df} = W_x^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \Phi_x(f) df \quad (7.127)$$

A nouveau, la largeur de bande utile  $B_u$  du signal est proportionnelle à l'écart-type  $\sigma_f$  (fig. 7.22)

$$B_u = k\alpha\sigma_f \quad (7.128)$$

avec  $k = 1$  pour un spectre passe-bas.

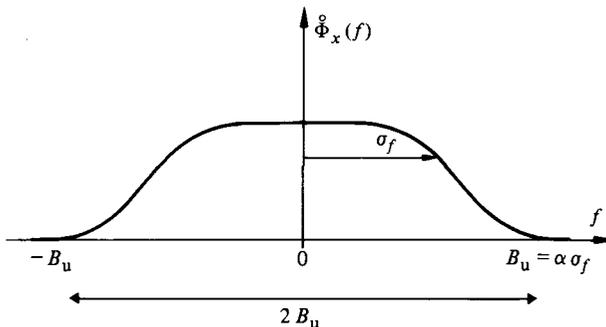


Fig. 7.22

**7.5.7 Durée et largeur de bande utile des signaux à spectre passe-bande**

Dans le cas d'un spectre de type passe-bande, la densité spectrale d'énergie bilatérale est semblable à (7.88). Elle comporte deux termes symétriques centrés sur des fréquences  $\pm f_0$  correspondant aux centres de gravité de la distribution spectrale d'énergie de chaque terme (fig. 7.23)

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{4} [\Phi_z(-f-f_0) + \Phi_z(f-f_0)] \tag{7.129}$$

On peut encore utiliser les formules (7.127) et (7.128) à condition de remplacer  $\Phi_x(f)$  par  $\frac{1}{2} \Phi_r(f)$  et de poser  $k = 2$ .

De même, la position moyenne (7.124) et la variance temporelle (7.125) peuvent être redéfinies en remplaçant  $x^2(t)$  par  $\frac{1}{2} |\underline{r}_x(t)|^2$ . Le facteur  $\frac{1}{2}$  tient compte du fait que l'énergie de l'enveloppe complexe  $\underline{r}_x(t)$  est le double de celle du signal  $x(t)$ .

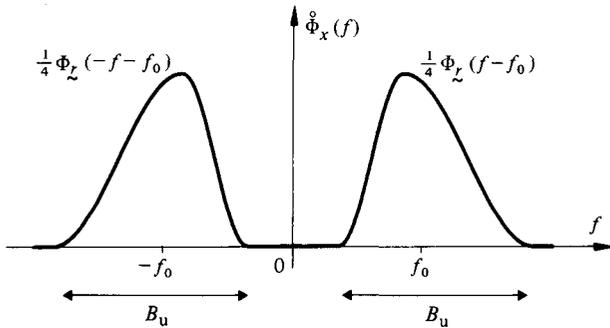


Fig. 7.23

**7.5.8 Exemple**

Soit  $x(t) = A \text{ tri}(t/T)$ . Par (7.125), on obtient comme écart-type temporel  $\sigma_t = T/\sqrt{10}$ . Par (4.35) et (4.55), la densité spectrale d'énergie de ce signal est :  $\Phi_x(f) = (AT) \text{ sinc}^4(Tf)$ . Le calcul de l'écart-type fréquentiel est possible, à partir de (7.127), en tenant compte de l'exercice 2.6.1 et du résultat [94] :

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 \alpha}{\alpha^2} d\alpha = \pi/4$$

On obtient finalement :  $\sigma_f = \sqrt{3}/(2\pi T)$ .

Les distributions temporelle et fréquentielle de ce signal sont représentées sur la figure 7.24 avec les écarts-type correspondants.

On constate que le produit  $\sigma_t \cdot \sigma_f$  est indépendant de la durée totale  $2T$  du signal et vaut  $1/(3,65 \cdot \pi)$ .

**7.5.9 Produit durée  $\times$  largeur de bande**

Une relation générale entre les écarts-type temporel et fréquentiel – et par voie de conséquence la durée utile et la largeur de bande utile – d'un signal  $s(t)$  peut être établie à l'aide de l'inégalité de Schwarz (3.21) en posant  $x(t) = ds/dt$  et  $y(t) = t \cdot s(t)$  :

$$\left| \int_{-\infty}^\infty t s^*(t) \frac{ds}{dt} dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^\infty t^2 |s(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{ds}{dt} \right|^2 dt \tag{7.130}$$

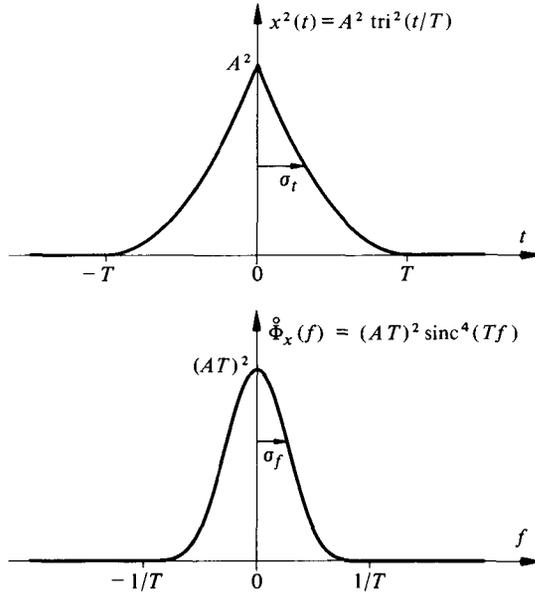


Fig. 7.24

En intégrant par partie, on obtient

$$\int_{-\infty}^{\infty} t s^*(t) \frac{ds}{dt} dt = \left[ \frac{1}{2} t |s(t)|^2 \right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt \quad (7.131)$$

En limitant cette analyse aux seuls signaux pour lesquels la distribution temporelle de l'énergie  $|s(t)|^2$  décroît plus vite que  $1/t$  quand  $|t| \rightarrow \infty$ , on a

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t s^*(t) \frac{ds}{dt} dt \right|^2 = \frac{1}{4} W_s^2 \quad (7.132)$$

où  $W_s$  est l'énergie totale du signal  $s(t)$ .

D'autre part, par (4.13), (4.55), (4.57) et (7.127), on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{ds}{dt} \right|^2 dt = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} f^2 \Phi_s(f) df = 4\pi^2 W_s \sigma_f^2 \quad (7.133)$$

Finalement, l'introduction de (7.125), (7.132) et (7.133) dans l'inégalité (7.130) conduit à la relation

$$\sigma_t \cdot \sigma_f \geq 1/(4\pi) \quad (7.134)$$

Cette expression est appelée **relation d'incertitude** par analogie avec le principe d'incertitude de Heisenberg, rencontré en mécanique quantique (dualité ondes-corpuscules).

En choisissant, par exemple, un facteur de proportionnalité  $\alpha = \sqrt{2\pi}$  on obtient à partir de (7.126), (7.128) et (7.134) pour un signal à spectre passe-bas

$$D_u \cdot B_u \geq 1 \quad (7.135)$$

Le produit durée  $\times$  largeur de bande est borné inférieurement.

### 7.5.10 Commentaire

La relation (7.133) indique qu'un signal à fluctuations rapides doit posséder une grande largeur de bande. Inversement, on peut montrer que de grandes fluctuations dans le spectre d'amplitude ou de phase impliquent un signal de longue durée.

### 7.5.11 Signal à produit durée $\times$ largeur de bande minimal

La condition sous laquelle l'inégalité de Schwarz (3.21) devient une égalité est donnée par (3.22), ce qui conduit ici à poser

$$\frac{ds}{dt} = \lambda t s(t) \quad (7.136)$$

d'où

$$\frac{ds}{s} = \lambda t dt \quad (7.137)$$

Par intégration, on obtient

$$s(t) = C \exp(\lambda t^2/2) \quad (7.138)$$

où  $C$  est une constante et  $\lambda < 0$  pour satisfaire la condition d'énergie finie.

Ainsi, *le signal possédant un produit durée  $\times$  largeur de bande minimal est l'impulsion gaussienne.*

Ce signal jouit d'une propriété remarquable: on peut montrer, en effet, que la transformée de Fourier d'une impulsion gaussienne est encore une impulsion gaussienne (exercice 4.6.9). Avec les notations introduites au paragraphe 1.3.16, on a la correspondance

$$\text{ig}(t') = \exp(-\pi t'^2) \leftrightarrow \text{ig}(f') = \exp(-\pi f'^2) \quad (7.139)$$

et

$$\text{ig}(t/T) \leftrightarrow T \cdot \text{ig}(Tf) \quad (7.140)$$

Par (7.125) et (7.127), on a les équivalences  $\sigma_t = T(2\sqrt{\pi})^{-1}$  et  $\sigma_f = (2\sqrt{\pi}T)^{-1}$  dont le produit correspond bien à la valeur limite de (7.134). En posant  $\alpha = \sqrt{2\pi}$  dans (7.126) et (7.128),  $D_u = B_u^{-1} = \sqrt{2} T$ .

### 7.5.12 Autres définitions: durée et largeur de bande effectives

Le choix des écarts-type définis par (7.125) et (7.127) comme mesure de la dispersion des distributions temporelle et fréquentielle d'énergie n'est pas sans limitation. Certaines distributions peuvent ne pas avoir de variance finie. On peut vérifier, à titre d'exercice, que cette situation apparaît avec des signaux aussi simples que  $x(t) = A \text{rect}(t/T)$  et  $y(t) = \epsilon(t) \exp(-at)$ . Le premier possède un écart-type temporel égal à  $T/(2\sqrt{3})$  et un écart-type fréquentiel infini. Pour le second, l'écart-type temporel vaut  $1/(2a)$  et l'écart-type fréquentiel est indéfini.

On peut remédier à cela en définissant, par des arguments relevant par exemple de la théorie de l'information [91], une *largeur de bande effective*

$$B_e = \frac{1}{2} \frac{[\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}(f) df]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}^2(f) df} = \frac{1}{2} \frac{\hat{\varphi}^2(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}^2(\tau) d\tau} \quad (7.141)$$

et une *durée effective*

$$D_e = \frac{[\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}(\tau) d\tau]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\varphi}^2(\tau) d\tau} = \frac{\dot{\Phi}^2(0)}{\int_{-\infty}^{\infty} \dot{\Phi}^2(f) df} \quad (7.142)$$

La largeur de bande effective (7.141) correspond à la moitié de la largeur de bande efficace définie au paragraphe 7.4.8 comme l'inverse du pouvoir de résolution temporelle (7.117) en radar.

L'avantage de la définition (7.141) est de faire correspondre à une densité spectrale rectangulaire  $\dot{\Phi}(f) = \text{rect}[f/(2B)]$  une largeur de bande effective  $B_e = B$ .

L'évaluation de  $B_e$  et  $D_e$  pour les signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  mentionnés plus haut est laissée comme exercice.

Les définitions (7.141) et (7.142) sont également applicables au cas des signaux aléatoires à valeur moyenne nulle en remplaçant  $\dot{\Phi}(f)$  par  $\Phi(f)$  et  $\dot{\varphi}(\tau)$  par  $R(\tau) = C(\tau)$ .

### 7.5.13 Définition : durée de corrélation et largeur de bande approximative

Pour les signaux aléatoires, la notion de durée utile ou effective n'est pas très pertinente. On lui préfère souvent celle de *durée de corrélation*  $D_\tau$  définie par

$$D_\tau = C^{-1}(0) \int_{-\infty}^{\infty} |C(\tau)| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho(\tau)| d\tau \quad (7.143)$$

où  $\rho(\tau) = C(\tau)/C(0)$  est la fonction d'autocovariance normalisée.

L'inverse  $B_\tau$  de la durée de corrélation est aussi une mesure approximative de la dispersion spectrale – ou *largeur de bande approximative* – du signal.

Pour tous les signaux dont la fonction d'autocovariance est *non négative*, la relation (7.143) se résume à

$$D_\tau = B_\tau^{-1} = \Phi(0)/C(0) \quad (7.144)$$

Les relations (7.143) et (7.144) s'appliquent également au cas de signaux déterministes à énergie finie en remplaçant la fonction d'autocovariance  $C(\tau)$  par la fonction d'autocorrélation  $\dot{\varphi}(\tau)$ .

### 7.5.14 Exemples

Pour le signal binaire cadencé en mode NRZ du paragraphe 5.3.7,  $\rho(\tau) = \text{tri}(\tau/T)$  et par (7.143):  $D_\tau = B_\tau^{-1} = T$ . Pour le signal binaire cadencé en mode biphase du paragraphe 5.3.8,  $\rho(\tau) = 2 \text{tri}(2\tau/T) - \text{tri}(\tau/T)$  d'où l'on tire  $D_\tau = B_\tau^{-1} = 2T/3$ .

Dans le cas du signal rectangulaire  $x(t) = A \text{rect}(t/T)$ , on obtient facilement par (4.63), (4.64) et (7.143):  $D_\tau = T$  et  $B_\tau = 1/T$ .

Pour le signal à décroissance exponentielle  $y(t) = \epsilon(t) \exp(-at)$  on a par (4.61) et (4.62):  $D_\tau = 2/a$  et  $B_\tau = a/2$ .

Ces durées de corrélation et largeurs de bande approximatives peuvent être reportées pour comparaison sur les figures 4.15, 4.16, 5.9, 5.13, 5.15 et 5.16.

7.6 EXERCICES

7.6.1 Déterminer quelle est la transformée de Hilbert du signal  $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$ .

7.6.2 Déterminer quelle est la transformée de Hilbert et le signal analytique de  $x(t) = 2B \text{sinc}(2Bt)$ .

7.6.3 Si  $P_x$  est la puissance du signal  $x(t)$ , calculer la puissance du signal analytique  $\underline{x}(t)$ .

7.6.4 Déterminer la fonction d'intercorrélation  $\varphi_{xy}(\tau)$  et sa transformée de Hilbert  $\check{\varphi}_{xy}(\tau)$  pour  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha)$  et  $y(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$ .

7.6.5 Calculer avec quelle probabilité l'enveloppe d'un signal aléatoire gaussien à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_n^2$  reste inférieure à un seuil  $V_0 = 2\sigma_n$ .

7.6.6 Un signal  $x(t)$  possède la densité spectrale représentée sur la figure 7.25. Déterminer pour quelle valeur de  $f_0$   $x(t)$  peut être exprimé par l'équation (7.86) avec

- 1)  $\Phi_a(f) = \frac{1}{2} \eta \text{rect}[f/(f_2 - f_1)]$  et
- 2)  $\Phi_a(f) = \frac{1}{2} \eta \text{tri}[f/(f_2 - f_1)]$ .

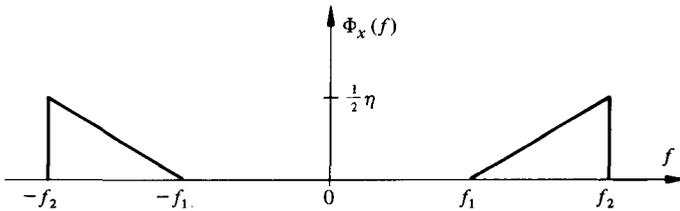


Fig. 7.25

7.6.7 Démontrer que les transformées de Fourier des parties paires et impaires d'un signal réel causal sont des transformées de Hilbert l'une de l'autre, à un facteur  $j$  près.

7.6.8 Soit  $x(t)$  et  $y(t)$  deux signaux réels à spectres passe-bandes et enveloppes complexes  $\underline{x}(t)$  et  $\underline{y}(t)$ . Montrer que le produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \langle \underline{x}, \underline{y}^* \rangle$ .

7.6.9 Vérifier (7.120) et (7.123).

7.6.10 Démontrer que

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu = \chi^2(0, 0) \tag{7.145}$$

sachant que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[j2\pi\nu(t_1 - t_2)] d\nu = \delta(t_1 - t_2) \tag{7.146}$$

7.6.11 Calculer la durée de corrélation  $D_\tau$  et la longueur de bande approximative  $B_\tau$  du signal  $x(t) = A \text{tri}(t/T)$ .



## OPÉRATEURS FONCTIONNELS

## 8.1 MODÉLISATION DES SYSTÈMES DE TRAITEMENT

## 8.1.1 Définition : système de traitement des signaux

Un *système de traitement des signaux* est un dispositif qui effectue sur un signal provenant de l'extérieur ou produit de manière interne un ensemble d'opérations de base telles qu'amplification, filtrage, transformation non-linéaire, modulation, détection, estimation d'un paramètre, etc. Le résultat est restitué soit sous la forme d'un autre signal, soit par l'intermédiaire d'un dispositif d'affichage approprié. On dénomme souvent ce type de dispositif *processeur de signal* (en anglais: *signal processor*).

On peut distinguer les catégories suivantes (fig. 8.1) :

- *générateurs de signal* : un signal de sortie uniquement ;
- *transformateurs de signal* : un signal d'entrée et un signal de sortie ;
- *analyseurs de signal* : un signal d'entrée uniquement, la sortie étant remplacée par un affichage des résultats de l'analyse.

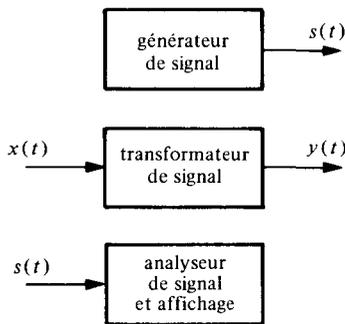


Fig. 8.1

Le signal primaire traité ou le signal final restitué est généralement analogique (fig. 8.2). Le processeur peut être, lui, analogique, numérique ou hybride : la transformation du signal analogique en signal numérique étant assurée par un convertisseur analogique-numérique (A/N) et la transformation inverse par un convertisseur numérique-analogique (N/A). Les conditions à respecter pour ce type de conversion sont précisées aux chapitres 9 et 10. La conception électronique de tels convertisseurs est décrite dans [95].

Lorsque les résultats s'obtiennent au fur et à mesure de l'évolution du signal d'entrée, on parle de *traitement en temps réel*. Cette appellation s'utilise surtout pour caractériser les processeurs numériques ayant un temps d'exécution compatible avec la cadence d'échantillonnage du convertisseur A/N.

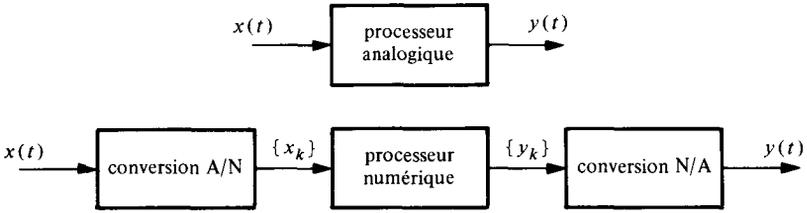


Fig. 8.2

### 8.1.2 Décomposition en schéma-bloc

Vu son caractère souvent complexe, le système de traitement est, de préférence, décrit sous une forme décomposée dans laquelle chaque opération de base apparaît de manière explicite. C'est le principe de la représentation en schéma-bloc (§ 1.2.4).

Une telle décomposition présente l'avantage de correspondre en général assez bien à la structure architecturale ou logicielle interne du processeur et en fait ressortir la modularité.

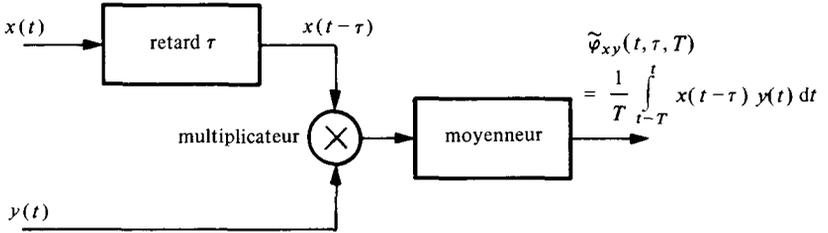


Fig. 8.3

Un exemple de schéma-bloc est reproduit sur la figure 8.3 : c'est le schéma de principe d'un intercorrélateur. Un autre exemple est illustré par la figure 8.4 : c'est le principe d'une mesure de densité spectrale de puissance. Dans le premier cas, le dispositif calcule la valeur moyenne locale, sur une durée  $T$ , du produit du signal  $y(t)$  et de la version retardée d'une quantité  $\tau$  du signal  $x(t)$ . Les opérations fondamentales sont ici : retard, multiplication, moyennage. Une répétition de la mesure pour différentes valeurs du retard  $\tau$  conduit à une reconstruction approximative de la fonction d'intercorrélation. Dans le deuxième cas, le signal d'entrée  $x(t)$  est appliqué préalablement à un filtre sélectif qui ne laisse passer que sa composante  $x(t, f_0, B)$  contenue dans une bande spectrale  $B$  centrée sur la fréquence  $f_0$ . La puissance moyenne de cette dernière est estimée en procédant à une élévation au carré suivie d'un moyennage local sur une durée de mesure  $T$ . La puissance estimée correspond approximativement au produit de la densité spectrale de puissance unilatérale en  $f = f_0$  et de la largeur de bande  $B$  du filtre d'analyse.

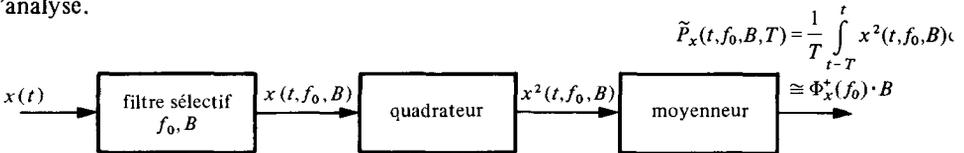


Fig. 8.4

### 8.1.3 Définition : opérateur fonctionnel

La plupart des *blocs* – ou *modules* – *fonctionnels* identifiables dans un schéma-bloc sont des unités de transformation caractérisées par une grandeur de sortie dépendant d'une grandeur d'entrée ou d'une combinaison de grandeurs d'entrée.

Le modèle théorique de ce type de module est appelé *opérateur fonctionnel* : règle de correspondance entre deux ensembles de fonctions. La transformation d'une grandeur  $x$  en une grandeur  $y$  par l'opérateur  $S$  est notée symboliquement (fig. 8.5)

$$y = S\{x\} \quad (8.1)$$

Si les signaux sont analogiques, on écrit en dénotant le temps par la variable continue  $t$  :

$$y(t) = S\{x(t)\} \quad (8.2)$$

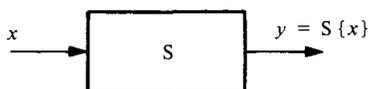


Fig. 8.5

S'ils sont représentés sous forme numérique (ou plus généralement s'ils sont à temps discret), les suites de valeurs des signaux d'entrée et de sortie sont généralement notées  $\{x_k\}$  et  $\{y_k\}$  ou  $x(k)$  et  $y(k)$ , avec  $k$  entier

$$y(k) = S\{x(k)\} \quad (8.3)$$

Dans de nombreux cas, l'équation (8.3) est une simple adaptation discrète de la relation continue (8.2).

Sauf rares exceptions, la modélisation spécifique aux opérateurs numériques ne sera pas développée dans cet ouvrage. On consulera à ce sujet le volume XX ou les références [44-48].

### 8.1.4 Classification et définitions

La gamme des opérateurs usuels est assez vaste. On peut distinguer en particulier trois classes principales :

- les *opérateurs linéaires invariants* qui jouissent des propriétés d'additivité (principe de superposition), d'homogénéité et de stationnarité au cours du temps;
- les *opérateurs paramétriques* qui dépendent du temps en fonction d'une grandeur ou d'un signal auxiliaire de commande;
- les *opérateurs non linéaires* qui forment une vaste classe sans mode de représentation universelle.

Les modules de retard, de filtrage sélectif et de moyennage des figures 8.3 et 8.4 sont modélisés par des opérateurs linéaires invariants. Le multiplicateur de la figure 8.3 correspond à un opérateur paramétrique et le quadrateur de la figure 8.4 à un opérateur non linéaire.

### 8.1.5 Réalisation des modules fonctionnels

La réalisation pratique d'un module fonctionnel consiste à matérialiser l'opérateur correspondant en recourant à une solution technique adéquate. Pour l'essentiel, on dispose de trois options :

- une réalisation en technique analogique, faisant appel, par exemple, dans le domaine des basses et moyennes fréquences, aux nombreuses possibilités offertes par les circuits électroniques exploitant des amplificateurs opérationnels ou d'autres circuits intégrés fonctionnels (multiplicateurs, circuits non linéaires, etc.);
- une réalisation en technique numérique câblée, basée sur l'assemblage de circuits logiques élémentaires ou complexes, tels que portes logiques, bascules, registres à décalage et mémoires, circuits arithmétiques, etc.;
- une réalisation en technique numérique programmée; la fonction est ici définie par un logiciel approprié dont la mémorisation et l'exécution est confiée à des unités spécialisées (mémoires, microprocesseurs, circuits de calcul spécifiques, etc.) dans le cas d'un traitement en temps réel ou à un ordinateur d'usage général pour un traitement ou une simulation en temps différé.

La description de ces divers modes de réalisation sort du cadre de cet ouvrage. On peut consulter à cet effet d'autres volumes du *Traité* (en particulier les volumes VIII et XIV) ou les références [96-98].

## 8.2 OPÉRATEURS LINÉAIRES INVARIANTS

### 8.2.1 Propriétés fondamentales

Soit  $S$  un opérateur linéaire invariant. La linéarité et l'homogénéité entraînent que, si

$$x(t) = \sum_i a_i x_i(t) \quad (8.4)$$

alors

$$S\{x(t)\} = \sum_i a_i S\{x_i(t)\} \quad (8.5)$$

Si  $y(t) = S\{x(t)\}$ , l'invariance se traduit par

$$y(t - \tau) = S\{x(t - \tau)\} \quad (8.6)$$

L'opérateur est donc indépendant de l'origine des temps.

### 8.2.2 Définition : opérateur de convolution et opérateur de transformation orthogonale

On peut distinguer deux classes d'opérateurs linéaires invariants :

- les *opérateurs de transformation orthogonale*, pour lesquels les grandeurs d'entrée et de sortie sont fonction de variables différentes comme le temps  $t$  et la fréquence  $f$  dans le cas d'une transformation de Fourier;
- les *opérateurs de convolution*, pour lesquels les grandeurs d'entrée et de sortie sont fonction d'une même variable indépendante, usuellement le temps.

**8.2.3 Exemple : transformateur de Fourier**

Un transformateur de Fourier est caractérisé par un opérateur F qui, à tout signal  $x(t)$ , fait correspondre une fonction  $X(f)$  définie par (4.1) reproduite ci-dessous

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt \tag{8.7}$$

Dans le cas de signaux représentés sous forme échantillonnée ou numérique, l'opérateur F est défini par (§3.4.10, §9.3.11 et volume XX)

$$X(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k) W_N^{-nk} \tag{8.8}$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons du signal pris en considération,  $W_N$  est la  $N$ ième racine de l'unité

$$W_N = \exp(j2\pi/N) \tag{8.9}$$

et  $k$  et  $n$  sont respectivement les indices de discrétisation temporelle et fréquentielle.

La transformation inverse est associée à l'opérateur  $F^{-1}$  (fig. 8.6) défini dans le cas continu par

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df \tag{8.10}$$

et dans le cas discret par

$$x(k) = N^{-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) W_N^{nk} \tag{8.11}$$

Les opérations (8.8) et (8.11) correspondent au produit d'un vecteur par une matrice de transformation de dimension  $N \times N$ .

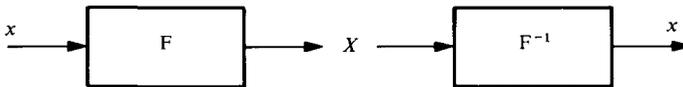


Fig. 8.6

**8.2.4 Description directe des opérateurs de convolution**

Un opérateur de convolution (fig. 8.7) est entièrement défini par sa réponse impulsionnelle (sec. IV.2.2). Celle-ci est notée  $g(t)$  ou  $h(t)$  dans le cas continu : c'est la réponse à une excitation en forme d'impulsion de Dirac (§ 1.3.12). Dans le cas discret, elle est notée  $g(k)$  ou  $h(k)$  et correspond à la réponse du système à un échantillon unité défini par  $d(k) = 1$  pour  $k = 0$  et  $d(k) = 0$  pour  $k \neq 0$ .

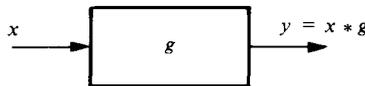


Fig. 8.7

La réponse à une excitation quelconque est représentée par le produit de convolution  $y = x * g$  qui, dans le cas continu, prend la forme

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)g(t - \tau) d\tau \quad (8.12)$$

et dans le cas discret

$$y(k) = x(k) * g(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)g(k - l) \quad (8.13)$$

Le produit de convolution correspond à une sommation pondérée des valeurs (continues ou échantillonnées) du signal d'entrée : la fonction de pondération étant la réponse impulsionnelle. Une interprétation graphique en a été donnée à la figure 1.5.

### 8.2.5 Description indirecte des opérateurs de convolution : définitions

Si les signaux d'entrée et de sortie sont déterministes et possèdent, par conséquent, une transformée de Fourier, on peut associer au produit de convolution (8.12) ou (8.13) un produit des transformées en vertu de la propriété (4.14) :

$$Y(f) = X(f) \cdot G(f) \quad (8.14)$$

pour le cas continu, ou dans le cas discret

$$Y(n) = X(n) \cdot G(n) \quad (8.15)$$

La fonction  $G = F\{g\} = Y/X = |G| \exp(j\vartheta_g)$  est la *fonction de réponse fréquentielle* (aussi appelée *fonction de transfert harmonique*) de l'opérateur de convolution. Son module  $|G|$  est la *réponse d'amplitude* et son argument  $\vartheta_g = \arg G$  est la *réponse de phase* de l'opérateur.

La représentation graphique des réponses d'amplitude et de phase est souvent faite sous la forme de diagrammes logarithmiques (chap. IV. 3).

### 8.2.6 Fonction de réponse d'un système linéaire à constantes localisée

Une description complète du comportement d'un système linéaire invariant à constantes localisées est donnée par son équation différentielle :

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}} y(t) = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^{m-i}}{dt^{m-i}} x(t) \quad (8.16)$$

où les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  sont des constantes.

Dans le cas des circuits électriques (vol. IV), cette équation est obtenue en appliquant les lois de Kirchhoff.

On sait que la solution  $y(t)$  d'une telle équation différentielle est la somme de la solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Cette solution  $y(t)$  peut aussi être décomposée en la somme d'un terme transitoire et d'un terme permanent (de régime). Le terme transitoire est la partie de  $y(t)$  qui s'annule (ou croît indéfiniment) avec le temps. Le terme permanent est soit une constante, soit une combinaison de sinusoides en fonction du temps.

Si, au lieu de résoudre (8.16), nous en prenons la transformée de Fourier terme à terme, en utilisant la propriété (4.13)

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \leftrightarrow (j 2\pi f)^k X(f) \quad (8.17)$$

on obtient :

$$\left[ \sum_{i=0}^n a_i (j 2\pi f)^i \right] Y(f) = \left[ \sum_{i=0}^m b_i (j 2\pi f)^i \right] X(f) \quad (8.18)$$

La transformation a réduit l'équation différentielle à une équation algébrique qui permet d'exprimer l'effet du circuit linéaire dans le domaine des fréquences. La fonction de réponse fréquentielle est alors exprimable à partir des constantes  $a_i$  et  $b_i$  du système sous la forme

$$G(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i (j 2\pi f)^i}{\sum_{i=0}^n a_i (j 2\pi f)^i} = G_0 \frac{\prod_{i=1}^m (j 2\pi f + z_i)}{\prod_{i=1}^n (j 2\pi f + p_i)} \quad (8.19)$$

où  $G_0 = b_m/a_n$  et  $z_i$  et  $p_i$  sont respectivement les racines du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire les zéros et les pôles de la fonction de réponse fréquentielle.

### 8.2.7 Définition : transformation en $z$

Dans l'étude des signaux et systèmes à temps discret utilisant un échantillonnage régulier, on préfère à la description indirecte par transformée de Fourier celle obtenue à l'aide de la *transformation en  $z$*  définie par

$$G(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) z^{-k} \quad (8.20)$$

où  $z$  est une variable complexe.

La transformation en  $z$  est liée à la transformation de Laplace bilatérale (sect. IV.8.1) d'une fonction échantillonnée périodiquement. C'est une généralisation de la transformation de Fourier. Elle s'identifie à cette dernière sur le cercle unité  $z = \exp(j 2\pi f)$ . Le volume XX de ce Traité renseignera le lecteur sur les propriétés et l'utilisation spécifique de cette transformation.

### 8.2.8 Relations entre fonctions de corrélation

Par (4.50), (4.98) ou (5.59), la fonction de corrélation temporelle, quel que soit le type de signaux, peut s'exprimer sous forme d'un produit de convolution du type

$$\varphi_{xy}(\tau) = x(-\tau) * y(\tau) \quad (8.21)$$

En combinant ce résultat avec (8.12) et en exploitant les propriétés de commutativité et d'associativité de la convolution, on obtient les relations suivantes, si  $x(t)$  et  $y(t)$  sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie d'un opérateur linéaire de

réponse impulsionnelle  $g(t)$ :

$$\varphi_y(\tau) = \varphi_x(\tau) * \overset{\circ}{\varphi}_g(\tau) \quad (8.22)$$

où  $\overset{\circ}{\varphi}_g(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation de la réponse impulsionnelle, et

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_x(\tau) * g(\tau) \quad (8.23)$$

### 8.2.9 Relations spectrales

La relation fréquentielle (8.14) ne s'applique qu'au cas des signaux déterministes. En revanche, une expression valable également pour les signaux aléatoires est obtenue en prenant la transformée de Fourier de (8.22):

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot |G(f)|^2 \quad (8.24)$$

car  $F\{\overset{\circ}{\varphi}_g(\tau)\} = F\{g(-\tau) * g(\tau)\} = G^*(f)G(f) = |G(f)|^2$ . En transformant également la relation (8.23), on a

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_x(f) \cdot G(f) \quad (8.25)$$

### 8.2.10 Application à l'identification de systèmes linéaires

On observe que, en vertu de la propriété d'identité (1.47) de l'impulsion de Dirac, si  $x(t)$  est un bruit blanc (§ 5.3.10) de fonction d'autocorrélation

$$\varphi_x(\tau) \equiv R_x(\tau) = \frac{1}{2} \eta \delta(\tau) \quad (8.26)$$

la réponse impulsionnelle d'un système linéaire peut être déterminée en évaluant la fonction d'intercorrélation (8.23)

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \eta g(\tau) \quad (8.27)$$

L'évaluation, dans les mêmes conditions d'excitation, de la densité interspectrale (8.25) permet, elle, d'obtenir la fonction de réponse fréquentielle

$$\Phi_{xy}(f) = \frac{1}{2} \eta G(f) \quad (8.28)$$

### 8.2.11 Application : déconvolution. Définition

Lorsqu'un signal est perçu par l'intermédiaire d'un capteur linéaire de fonction de transfert  $G_1(f)$ , l'information originale peut être altérée par l'influence du capteur lui-même. Les signaux d'entrée et de sortie du capteur étant liés par une relation de convolution (8.12), l'opération de compensation de l'effet du capteur est appelée *déconvolution*.

Une correction parfaite serait réalisable, en théorie, en plaçant en cascade (fig. 8.8) avec le capteur un opérateur inverse défini par

$$G_2(f) = G_1^{-1}(f) = \frac{\Phi_x(f)}{\Phi_{xy}(f)} \quad (8.29)$$

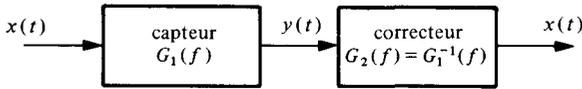


Fig. 8.8

*L'application pratique de ce principe est très délicate*, le système de correction théorique n'étant pas nécessairement stable et amplifiant fortement toutes les perturbations additionnelles dans les bandes spectrales voisines des zéros de la fonction  $G_1(f)$ .

### 8.2.12 Simulation indirecte de convolutions ou de corrélations

Une manière indirecte de réaliser un opérateur de convolution ou une intercorrélation est illustrée sur les figures 8.9 et 8.10. Elle est basée sur l'emploi de transformateurs de Fourier et sur les propriétés (4.14) et (4.18). Cette solution est souvent adoptée pour des analyseurs numériques de signaux.

Le premier cas requiert la mise en mémoire préalable de la fonction de réponse  $G$  désirée.

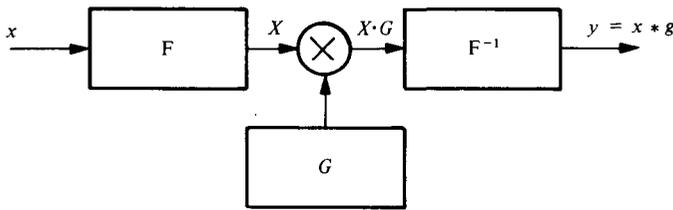


Fig. 8.9

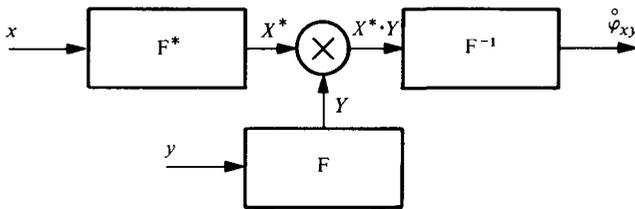


Fig. 8.10

### 8.2.13 Mise en cascade d'opérateurs de convolution

On admet généralement que l'entrée d'un opérateur n'influence pas celui qui le précède. Cette hypothèse est vraie dans le cas numérique, mais n'est, par contre, pas toujours vérifiée dans le cas analogique (effet de charge). Lorsqu'elle est vérifiée, la réponse impulsionnelle globale d'une cascade d'opérateurs de convolution (fig. 8.11) est équivalente à la convolution multiple des réponses impulsionnelles partielles

$$y(t) = x(t) * g(t) \quad (8.30)$$

avec

$$g(t) = g_1(t) * g_2(t) * \dots * g_n(t) \quad (8.31)$$

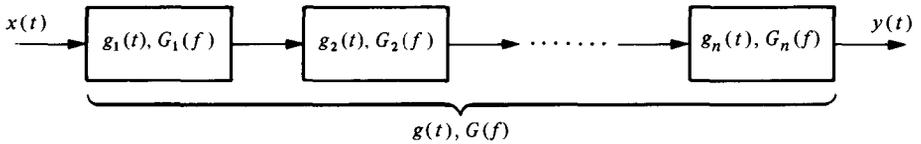


Fig. 8.11

La fonction de réponse fréquentielle globale se résume ainsi au produit des fonctions de réponse partielles

$$Y(f) = X(f) \cdot G(f) \quad (8.32)$$

avec

$$G(f) = G_1(f)G_2(f) \dots G_n(f) = \prod_{i=1}^n G_i(f) \quad (8.33)$$

Cette hypothèse d'indépendance n'est pas vérifiée dans certaines situations pratiques, telles que la mise en cascade de circuits électriques passifs. On démontre aisément (chap. IV.6) que la mise en cascade de deux circuits *RC* semblables à celui décrit dans l'exemple 8.2.24 ne possède pas une fonction de réponse globale équivalente au carré de celle du circuit simple.

#### 8.2.14 Description statistique du signal de sortie d'un opérateur de convolution

En règle générale, il n'est pas possible de déterminer analytiquement la loi de distribution statistique des amplitudes du signal de sortie d'un opérateur de convolution. Ceci résulte du fait que chaque valeur du signal de sortie est une combinaison linéaire des valeurs (passées, si l'opérateur est causal) du signal d'entrée, comme l'indique l'équation de convolution (8.12) ou (8.13). Ces valeurs ne sont en général pas indépendantes. L'évaluation de la probabilité que l'amplitude du signal de sortie se trouve dans un domaine donné implique la connaissance de la loi de probabilité conjointe multidimensionnelle de toutes les valeurs du signal d'entrée! Cette loi est généralement inconnue, sauf dans le cas particulier d'un processus gaussien (sect. 5.7) ou si ces valeurs sont indépendantes. Dans ce dernier cas, la statistique de sortie tend vers une loi gaussienne en vertu du théorème de la limite centrale (§ 5.5.3). Dans le premier cas, on démontre (exercice 5.11.34) que toute combinaison linéaire de variables gaussiennes est aussi une variable gaussienne. Ainsi: **le signal de sortie d'un opérateur de convolution est gaussien si l'entrée l'est aussi.**

Expérimentalement, on constate que la statistique de sortie d'un filtre modérément sélectif se rapproche d'une loi gaussienne pour de nombreux cas d'excitation non gaussiens.

A défaut de pouvoir déterminer dans tous les cas la forme analytique de la distribution statistique du signal de sortie, ses principaux moments peuvent être calculés: valeur moyenne, valeur quadratique moyenne, variance, autocorrélation. Cette dernière est donnée par l'équation (8.22) réécrite ci-dessous en tenant compte que pour un signal stationnaire et ergodique:  $R_x(\tau) \equiv \varphi_x(\tau)$  et  $R_y(\tau) \equiv \varphi_y(\tau)$ :

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * \hat{\varphi}_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau') \hat{\varphi}_g(\tau - \tau') d\tau' \quad (8.34)$$

On sait que la valeur à l'origine de la fonction de corrélation est la valeur quadratique moyenne (alias puissance totale), qui est égale, elle-même, à la somme de la variance et du carré de la valeur moyenne

$$\begin{aligned} P_y &= R_y(0) = E[\mathbf{y}^2] = \sigma_y^2 + \mu_y^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau') \hat{\varphi}_g(\tau') d\tau' = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) \cdot |G(f)|^2 df \end{aligned} \quad (8.35)$$

La deuxième intégrale se déduit de la première grâce au théorème du produit (4.67).

La valeur moyenne  $\mu_y$  est, elle, donnée par

$$\mu_y = E[\mathbf{y}] = E[\mathbf{x}(t) * g(t)] = E[\mathbf{x}] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt \quad (8.36)$$

d'où finalement

$$\mu_y = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \mu_x G(0) \quad (8.37)$$

Ce résultat indique que la valeur moyenne de sortie (composante continue) d'un système linéaire est égale au produit de celle d'entrée par le gain en continu  $G(0)$  du système.

En combinant (8.35) et (8.37), la variance du signal de sortie peut s'exprimer sous les formes équivalentes :

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_x(f) - \mu_x^2 \delta(f)] \cdot |G(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) |G(f)|^2 df - \mu_x^2 G^2(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \hat{\varphi}_g(\tau) d\tau - \mu_x^2 \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) d\tau \right]^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\tau) \hat{\varphi}_g(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (8.38)$$

où  $C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2$  est la fonction d'autocovariance du signal d'entrée.

### 8.2.15 Cas particuliers

Dans le cas d'un filtre passe-bas, on a généralement :  $G(0) = 1$  et  $\mu_y = \mu_x$ . Pour un filtre passe-haut ou passe-bande :  $G(0) = 0$  et  $\mu_y = 0$  quelle que soit  $\mu_x$ .

Si l'excitation d'entrée est du bruit blanc de densité spectrale  $\eta/2$  (variance d'entrée infinie) :  $R_x(\tau) = C_x(\tau) = \frac{1}{2} \eta \delta(\tau)$  et  $\sigma_y^2 = \frac{1}{2} \eta \hat{\varphi}_g(0) < \infty$ . D'autres cas particuliers sont signalés dans plusieurs des exemples suivants.

**8.2.16 Définition : opérateur de multiplication par une constante**

Soit la relation symbolisée par la figure 8.12

$$y(t) = Kx(t) \quad (8.39)$$

où  $K$  est une constante. Elle modélise les systèmes linéaires suivants :

- $K > 1$  : amplificateur idéal (sans limitation de bande passante)
- $K = 1$  : interrupteur fermé, circuit passe-tout (opérateur identité)
- $0 < K < 1$  : atténuateur
- $K = 0$  : interrupteur ouvert
- $K = -1$  : inverseur
- $K < 0$  : multiplication par une constante avec inversion

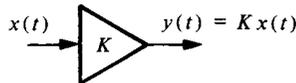


Fig. 8.12

Les propriétés de cet *opérateur de multiplication par une constante* sont résumées dans le tableau 8.13.

On en déduit que  $\Phi_y(f) = K^2 \Phi_x(f)$ ,  $\varphi_y(\tau) = K^2 \varphi_x(\tau)$ ,  $\mu_y = K\mu_x$ ,  $\sigma_y^2 = K^2 \sigma_x^2$  et  $P_y = K^2 P_x$ . Par (5.39), la statistique du signal de sortie se déduit directement de celle d'entrée :  $p_y(y) = |K|^{-1} p_x(y/K)$ .

Tableau 8.13

$g(t) = K \delta(t)$
$G(f) = K$ avec $\begin{cases}  G(f)  =  K  \\ \vartheta_g(f) \end{cases} \begin{cases} 0 \\ -\pi \operatorname{sgn}(f) \end{cases} \begin{cases} \text{pour } K > 0 \\ \text{pour } K < 0 \end{cases}$
$\varphi_g(\tau) = K^2 \delta(\tau)$

**8.2.17 Définition : opérateur de retard**

La relation symbolisée par la figure 8.14

$$y(t) = x(t - t_0) \quad (8.40)$$

est le modèle de tout système assurant une propagation sans distorsion d'un signal, mais nécessitant un délai  $t_0$  (ligne de transmission idéale, ligne à retard, circuit à registre à décalage ou mémoire circulante, dispositif à bande magnétique avec têtes d'enregistrement et lecture séparées, etc.).

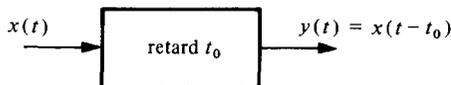


Fig. 8.14

Les propriétés de cet opérateur de retard sont résumées dans le tableau 8.15.

Tableau 8.15

$g(t) = \delta(t - t_0)$	avec $\begin{cases}  G(f)  = 1 \\ \vartheta_g(f) = -2\pi f t_0 \end{cases}$
$G(f) = \exp(-j2\pi f t_0)$	
$\overset{\circ}{\varphi}_g(\tau) = \delta(\tau)$	

Toutes les caractéristiques statistiques sont évidemment identiques à l'entrée et à la sortie dans le cas de signaux stationnaires. Dans le domaine fréquentiel, l'opérateur de retard se comporte (théorème du retard) comme un *déphaseur linéaire pur*. On en déduit que tout système satisfaisant à la condition  $|G(f)| = K$  mais n'ayant pas une réponse de phase linéaire introduit une distorsion (§ 8.2.25).

Dans les systèmes numériques – ou plus généralement à temps discret – il est fréquent de considérer des opérateurs de retard d'un pas d'échantillonnage, appelé *opérateur de retard unité* (fig. 8.16) symbolisé, en utilisant la transformation en  $z$  définie au paragraphe 8.2.7., par la fonction de transfert  $G(z) = z^{-1}$ .

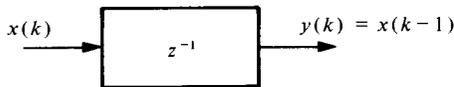


Fig. 8.16

### 8.2.18 Définition : opérateur de Hilbert

La transformée de Hilbert d'un signal a été introduite au chapitre 7 en relation avec la notion de signal analytique. Un *opérateur de Hilbert*  $H$  (fig. 8.17) réalise cette transformation

$$y(t) = \check{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (8.41)$$

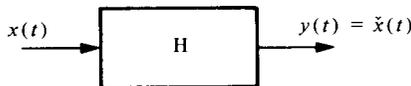


Fig. 8.17

C'est le modèle d'un *déphaseur parfait* de  $\pm 90^\circ$ , comme l'indiquent ses propriétés, déduites des relations développées au paragraphe 7.1.3 et résumées dans le tableau 8.18.

La densité spectrale, la fonction d'autocorrélation et, par conséquent, la puissance totale, la variance et la valeur moyenne sont identiques à l'entrée et à la sortie.

La réalisation pratique d'un circuit effectuant la transformation (8.41) ne peut être qu'approximative, la réponse impulsionnelle  $g(t)$  n'étant pas causale. Un déphasage à peu près constant et voisin de  $90^\circ$  n'est réalisable que sur une largeur de bande limitée.

Tableau 8.18

---


$$\begin{aligned}
 g(t) &= (\pi t)^{-1} \\
 G(f) &= -j \operatorname{sgn}(f) \text{ avec } \begin{cases} |G(f)| = 1 \\ \vartheta_g(f) = -\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(f) \end{cases} \\
 \overset{\circ}{\varphi}_g(\tau) &= \delta(\tau)
 \end{aligned}$$


---

### 8.2.19 Définition : opérateur de moyenne temporelle

L'estimation d'une moyenne temporelle est une opération fréquente en traitement des signaux. La moyenne glissante (1.11), appelée parfois *moyenne temporelle d'horizon*  $T$ , correspond à la sortie d'un opérateur linéaire

$$y(t) = \bar{x}(t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau \quad (8.42)$$

dénommé *moyenneur temporel parfait* (fig. 8.19), dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 8.20.



Fig. 8.19

Tableau 8.20

---


$$\begin{aligned}
 g(t) &= T^{-1} \operatorname{rect}[(t - T/2)/T] \\
 G(f) &= \operatorname{sinc}(Tf) \exp(-j\pi f T) \\
 |G(f)| &= |\operatorname{sinc}(Tf)| \\
 \overset{\circ}{\varphi}_g(\tau) &= T^{-1} \operatorname{tri}(\tau/T)
 \end{aligned}$$


---

Sa réponse impulsionnelle est rectangulaire (fig. 8.21). C'est le modèle d'un circuit intégrateur dont l'approximation analogique est un simple filtre passe-bas (§ 8.2.24). Une réalisation quasi-parfaite, mais impliquant une sortie échantillonnée et une remise à zéro périodique, exploite les propriétés du montage intégrateur à amplificateur opérationnel (chap. VIII.3). Dans le cas discret, l'expression (8.42) se ramène à une simple sommation.

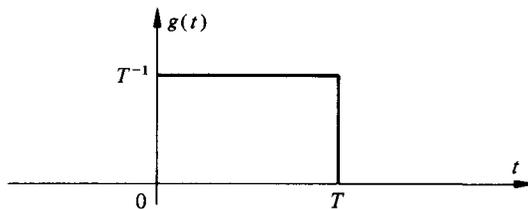


Fig. 8.21

On déduit du tableau 8.20 et de (8.37) et (8.38) les paramètres principaux du signal de sortie qui sont bien entendu la valeur moyenne statistique

$$\mu_y = \mu_x \quad (8.43)$$

et la variance. Celle-ci correspond à la **puissance de l'erreur d'estimation** de la valeur moyenne et sert, par conséquent, de critère de qualité ou d'indice de précision (§ 13.1.24)

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\tau) \operatorname{tri}(\tau/T) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_x(f) - \mu_x^2 \delta(f)] \operatorname{sinc}^2(Tf) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) \operatorname{sinc}^2(Tf) df - \mu_x^2 \end{aligned} \quad (8.44)$$

Elle décroît évidemment en fonction de la durée d'intégration  $T$ .

### 8.2.20 Illustration : estimation d'une valeur moyenne en présence de bruit blanc

Considérons le cas d'un signal  $x(t)$ , composé d'une valeur continue à estimer en présence d'un bruit additif blanc, de densité spectrale  $\Phi_n(f) = \eta/2$ , ou blanc à bande limitée de type passe-bas (§ 5.3.10).

La fonction d'autocovariance  $C_x(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation  $R_n(\tau)$  du bruit. Dans le cas du bruit blanc, on a

$$C_{x1}(\tau) = \frac{1}{2} \eta \delta(\tau) \quad (8.45)$$

Alternativement, la densité spectrale du signal  $x(t)$  diminuée de la contribution de la composante continue est égale à la densité spectrale du bruit  $\Phi_n(f)$ . Dans le cas du bruit blanc à bande limitée, de densité spectrale (5.155), on obtient

$$\Phi_{x2}(f) - \mu_x^2 \delta(f) = \frac{1}{2} \eta \operatorname{rect}[f/(2B)] \quad (8.46)$$

L'évaluation de la variance de l'estimation est facilement obtenue, dans le premier cas, en introduisant (8.45) dans (8.44)

$$\sigma_{y1}^2 = \frac{1}{2} \eta / T \quad (8.47)$$

Alors même que la variance du signal d'entrée est théoriquement infinie, celle de l'estimation obtenue est limitée et inversement proportionnelle au temps de mesure  $T$ .

En introduisant (8.46) dans (8.44), on obtient dans le deuxième cas

$$\begin{aligned} \sigma_{y2}^2 &= \frac{\eta}{2} \int_{-B}^B \operatorname{sinc}^2(Tf) df \\ &= \frac{\eta}{2T} \int_{-BT}^{BT} \operatorname{sinc}^2(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (8.48)$$

Pour  $BT = 1$ ,  $\sigma_{y2}^2 \cong 0,45 \eta/T$  et tend progressivement vers le résultat limite (8.47) lorsque le produit  $BT$  augmente.

8.2.21 Définition : opérateur de filtrage idéal

Un *filtre idéal* est un opérateur permettant le transfert *sans distorsion* de toutes les composantes du signal d'entrée comprises dans une largeur de bande spectrale  $B$ , définie selon (2.15), et appelée aussi *bande passante*. Il atténue totalement toutes les autres.

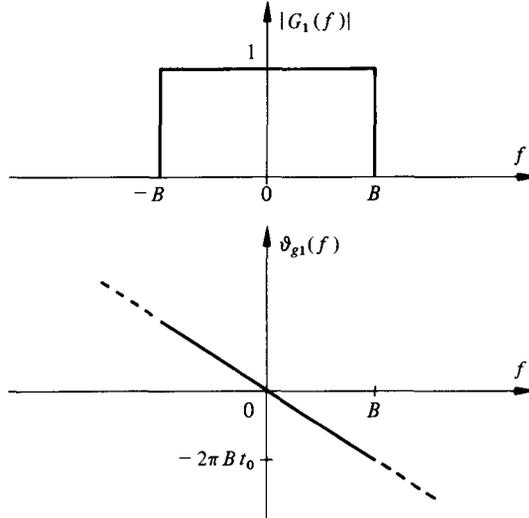


Fig. 8.22

Pour un filtre passe-bas (fig. 8.22), on obtient, en tenant compte d'un retard arbitraire  $t_0$  comme en (8.40), les caractéristiques résumées dans le tableau 8.23.

Tableau 8.23

$G_1(f) = \text{rect}[f/(2B)] \cdot \exp(-j2\pi f t_0)$	$\left\{ \begin{array}{l}  G_1(f)  = \text{rect}[f/(2B)] \\ \vartheta_{g_1}(f) = -2\pi f t_0 \end{array} \right.$
$g_1(t) = 2B \text{sinc}[2B(t - t_0)]$	
$\phi_{g_1}(\tau) = 2B \text{sinc}(2B\tau)$	

Un tel filtre idéal est un opérateur non causal puisque  $g_1(t) \neq 0$  pour  $t < 0$  lorsque  $t_0 \neq \infty$  (fig. 8.24).

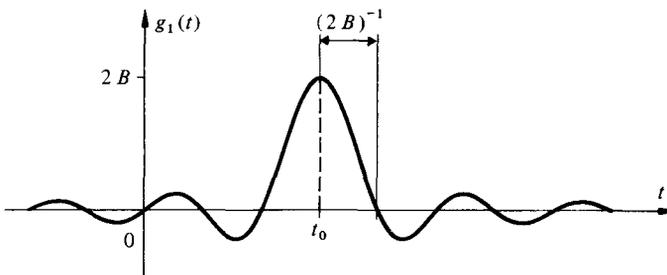


Fig. 8.24

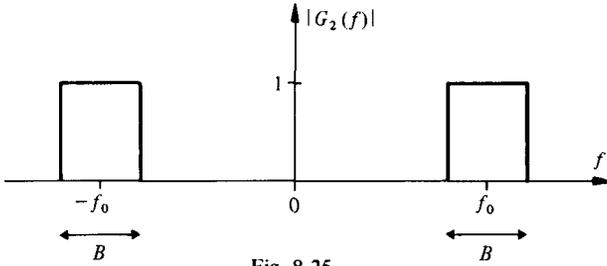


Fig. 8.25

On peut déduire les caractéristiques d'un filtre passe-bande idéal (fig. 8.25) à partir de celles d'un filtre passe-bas de bande passante  $B/2$  en utilisant la propriété de translation de l'impulsion de Dirac

$$G_2(f) = \text{rect}(f/B) \exp(-j2\pi f t_0) * [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)] \quad (8.49)$$

Les résultats sont résumés dans le tableau 8.26.

Tableau 8.26

$ G_2(f) $	$= \text{rect}[(f + f_0)/B] + \text{rect}[(f - f_0)/B]$
$g_2(t)$	$= 2B \text{sinc}[B(t - t_0)] \cdot \cos(2\pi f_0 t)$
$\varphi_{g_2}(\tau)$	$= 2B \text{sinc}(B\tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$

### 8.2.22 Définition : temps de montée d'un filtre idéal

La réponse indicielle  $\gamma(t)$  est l'intégrale de la réponse impulsionnelle (§ 1.3.12). Pour un filtre passe-bas, elle permet de caractériser directement le temps de réaction (inertie) du filtre, mesuré arbitrairement par un certain *temps de montée*  $t_m$ . Pour un filtre passe-bande, c'est la réponse à l'excitation  $\epsilon(t) \cos(2\pi f_0 t)$ , où  $f_0$  se situe au centre de la bande passante, qui fournit la même information. Il est toutefois équivalent et plus simple de considérer, dans ce cas, l'intégrale  $\gamma_{r_{g_2}}(t)$  de l'enveloppe  $r_{g_2}(t)$  de la réponse impulsionnelle.

Cette enveloppe se calcule à partir de (7.45). En tenant compte de (7.18) et de l'exemple 7.1.4, elle vaut pour le filtre passe-bande idéal de largeur de bande  $B$ :  $r_{g_2}(t) = 2B \text{sinc}[B(t - t_0)]$ .

Pour le filtre passe-bas idéal de même bande passante  $B$ , la réponse impulsionnelle, tirée du tableau 8.23, est:  $g_1(t) = 2B \text{sinc}[2B(t - t_0)]$ .

En utilisant le résultat (1.65), on obtient par intégration

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{2} + \pi^{-1} \text{Si}[2\pi B(t - t_0)] \quad (8.50)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{r_{g_2}}(t) = \frac{1}{2} + \pi^{-1} \text{Si}[\pi B(t - t_0)]$$

Le graphe de ces fonctions est représenté sur la figure 8.27. L'oscillation présente dans ces réponses à une discontinuité est connue sous le nom de phénomène de Gibbs (§ IV.7.3.36).

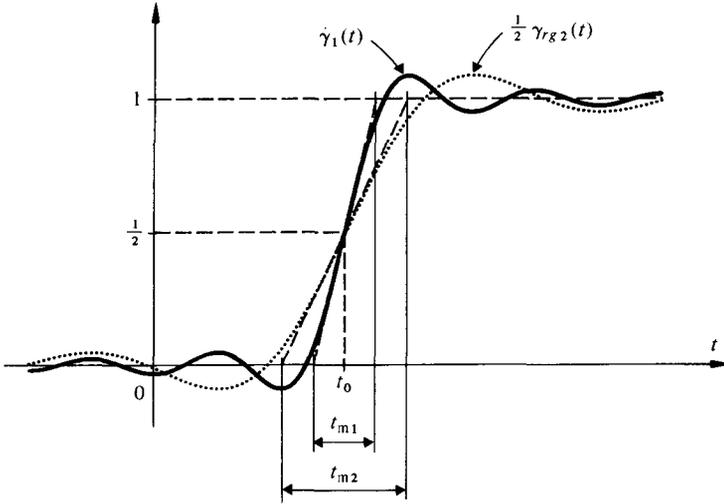


Fig. 8.27

En définissant arbitrairement les temps de montée respectifs  $t_{m1}$  et  $t_{m2}$  comme l'intervalle entre les intersections des dérivées de  $\gamma_1(t)$  et  $\frac{1}{2} \gamma_{rg2}(t)$  en  $t = t_0$  avec les ordonnées 0 et 1, on tire

$$\begin{aligned}
 t_{m1}^{-1} &= d\gamma_1/dt \Big|_{t=t_0} = g_1(t_0) = 2B \\
 t_{m2}^{-1} &= \frac{1}{2} d\gamma_{rg2}/dt \Big|_{t=t_0} = \frac{1}{2} r_{g2}(t_0) = B
 \end{aligned}
 \tag{8.51}$$

*Le temps de montée, ainsi défini, est l'inverse de la bande passante pour un filtre passe-bande idéal et l'inverse du double de la largeur de bande pour un filtre passe-bas idéal.*

Ce résultat fournit un ordre de grandeur utile. Il s'applique approximativement aussi au cas de filtres réels si l'on interprète  $B$  comme la largeur de bande équivalente définie au paragraphe 8.2.23.

Expérimentalement, le temps de montée est généralement défini comme le temps que met la réponse indicielle pour passer de 10% à 90% de sa valeur finale (§ XVIII. 4.1.3).

**8.2.23 Largeur de bande d'un filtre réel. Définitions**

Un filtre réel est un opérateur causal ayant des propriétés sélectives en fonction de la fréquence (vol. XIX). Le module de sa fonction de réponse fréquentielle ne peut être discontinu. Dans ces conditions, la définition d'une largeur de bande a un caractère arbitraire.

On utilise principalement en électronique, pour des raisons de facilité de mesure, la notion de *largeur de bande à -3 dB* (fig. 8.28) notée ici  $B_{-3dB}$  et définie comme le domaine des fréquences *positives* pour lequel

$$\frac{|G(f)|^2}{G_{\max}^2} \geq \frac{1}{2}
 \tag{8.52}$$

En traitement des signaux, en raison de l'importance des processus aléatoires, on introduit le concept de *largeur de bande équivalente de bruit* :

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{G_{\text{max}}^2} \int_0^{\infty} |G(f)|^2 df = \frac{\varphi_g(0)}{2G_{\text{max}}^2} \quad (8.53)$$

C'est la largeur de bande d'un filtre idéal dont le signal de sortie a la même puissance que celui du filtre réel lorsqu'ils sont tous les deux excités par le même bruit blanc.

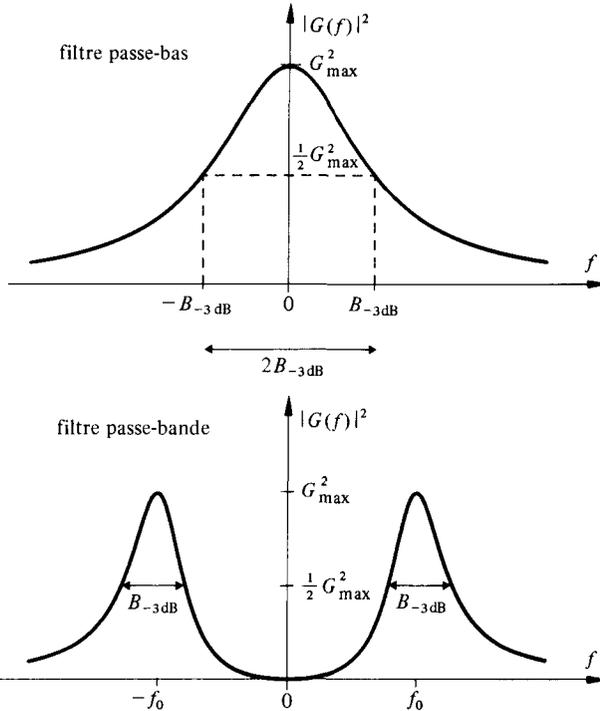


Fig. 8.28

### 8.2.24 Illustration

Un filtre passe-bas  $RC$  (fig. 8.29), en circuit ouvert possède une fonction de réponse fréquentielle

$$G(f) = \frac{1}{1 + j 2\pi f RC} = \frac{1}{1 + j f/f_c} \quad (8.54)$$

où  $f_c = (2\pi RC)^{-1}$  dénote la fréquence de coupure.

On obtient facilement, par le calcul complexe,  $|G(f)| = [1 + (f/f_c)^2]^{-1/2}$ ,  
 $\vartheta_g(f) = -\arctan(f/f_c)$  et

$$|G(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/f_c)^2} \quad (8.55)$$

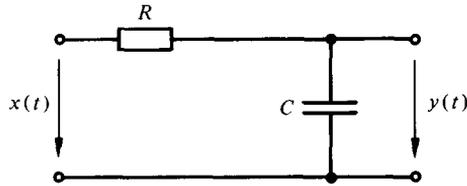


Fig. 8.29

d'où l'on déduit que

$$g(t) = \frac{1}{RC} \exp[-t/(RC)] \cdot \epsilon(t) \quad (8.56)$$

$$\overset{\circ}{\varphi}_g(\tau) = \frac{1}{2RC} \exp[-|\tau|/(RC)] \quad (8.57)$$

$$B_{-3\text{dB}} = f_c \quad (8.58)$$

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{4RC} = \frac{\pi}{2} B_{-3\text{dB}} \quad (8.59)$$

Selon la définition (8.51), le temps de montée vaut ici

$$t_{m1} = (2B_{\text{eq}})^{-1} = 2RC \quad (8.60)$$

soit deux fois la constante de temps du circuit.

Un tel filtre est un intégrateur imparfait souvent utilisé pour réaliser approximativement une opération de moyennage (voir exercice 8.5.6 et paragraphe 13.1.24).

Dans le cas d'un moyenneur parfait (§ 8.2.19), le calcul de la largeur de bande équivalente selon (8.53) donne, avec  $|G(f)|^2 = \text{sinc}^2(Tf)$  et en tenant compte de (1.63):  $B_{\text{eq}} = (2T)^{-1}$ , d'où un temps de montée  $t_{m1} = T$  qui correspond bien à la réalité.

### 8.2.25 Définition : distorsion linéaire

Tout système linéaire dont la réponse d'amplitude n'est pas constante ou dont la réponse de phase n'est pas linéaire, c'est-à-dire n'introduit pas un retard pur, fait subir au signal d'entrée une distorsion. On parle respectivement de *distorsion d'amplitude* ou d'*affaiblissement* et de *distorsion de phase*.

La distorsion de phase résulte du retard différencié que subit chaque composante fréquentielle du signal. Cette distorsion est sans effet perceptibles dans les systèmes électroacoustiques ou en téléphonie, en raison de l'insensibilité de l'oreille à ce phénomène. Elle doit être, au contraire, limitée dans de nombreux autres cas : transmission de données ou de signaux de télévision, réception de signaux radar, etc.

### 8.2.26 Définitions : retard de phase et retard de groupe

Considérons le cas où le signal d'entrée d'un système linéaire est à bande étroite voisine d'une fréquence  $f_0$ . En adoptant la notation complexe développée à la

section 7.4, ce signal peut être représenté par le signal analytique

$$\underline{x}(t) = \underline{r}(t) \exp(j2\pi f_0 t) \quad (8.61)$$

dont  $\underline{r}(t)$  est l'enveloppe complexe (§ 7.4.1).

Si la réponse de phase du système n'est pas linéaire, on peut décrire approximativement son comportement dans la bande d'intérêt au voisinage de la fréquence  $f_0$  par les deux premiers termes d'un développement en série de Taylor :

$$\begin{aligned} \vartheta(f) &= \vartheta(f_0) + (f - f_0) \left. \frac{d\vartheta}{df} \right|_{f=f_0} \\ &= -2\pi f_0 t_\phi - 2\pi(f - f_0)t_g \end{aligned} \quad (8.62)$$

où  $t_\phi$  et  $t_g$  sont deux constantes, ayant la dimension d'un temps, définies par

$$t_\phi = - \frac{\vartheta(f_0)}{2\pi f_0} \quad (8.63)$$

$$t_g = - \left. \frac{1}{2\pi} \frac{d\vartheta}{df} \right|_{f=f_0} \quad (8.64)$$

Elles sont appelées respectivement *retard* ou *temps de propagation de phase* (en anglais : *phase delay*) et *retard* ou *temps de propagation de groupe* (*groupe delay*).

En considérant que la réponse d'amplitude est constante et égale, pour simplifier, à l'unité dans la bande d'intérêt, la fonction de réponse fréquentielle du système devient

$$G(f) = \exp \{-j2\pi [f_0(t_\phi - t_g) + ft_g]\} \quad (8.65)$$

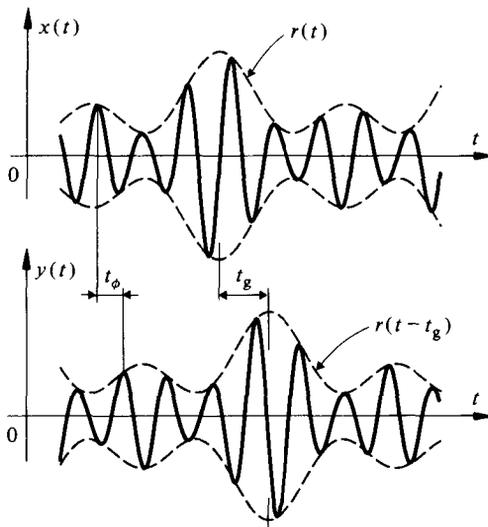


Fig. 8.30

La transformée de Fourier du signal analytique de sortie vaut alors, par (8.14)

$$\begin{aligned}\underline{Y}(f) &= \underline{X}(f) G(f) \\ &= \underline{X}(f) \exp(-j2\pi f t_g) \exp[-j2\pi f_0(t_\phi - t_g)]\end{aligned}\quad (8.66)$$

Par transformation inverse et en tenant compte de (8.61), on obtient finalement

$$\begin{aligned}\underline{y}(t) &= \underline{x}(t - t_g) \exp[-j2\pi f_0(t_\phi - t_g)] \\ &= \underline{z}(t - t_g) \exp[j2\pi f_0(t - t_\phi)]\end{aligned}\quad (8.67)$$

Ainsi l'enveloppe du signal subit le retard  $t_g$  alors que la composante auxiliaire sinusoïdale à fréquence  $f_0$  subit, elle, le retard  $t_\phi$  (fig. 8.30). Ces deux retards ne sont égaux que si la réponse de phase varie linéairement avec la fréquence.

### 8.2.27 Définition : filtre adapté ou opérateur de corrélation

Un *filtre adapté* (sect. 13.4) est un cas particulier de filtre linéaire conçu pour optimiser le rapport signal sur bruit lors de la détection d'un signal  $s(t)$ , de forme connue et de durée  $T$ , masqué par du bruit de fond. En présence d'un bruit blanc, sa réponse impulsionnelle est l'image translatée de  $T$  du signal à détecter

$$g(t) = ks(T - t) \quad (8.68)$$

où  $k$  est une constante arbitraire.

La réponse du filtre adapté à la seule excitation  $x(t) = s(t)$  est égale à la fonction d'autocorrélation translatée du signal

$$y(t) = ks(T - t) * s(t) = k \overset{\circ}{\varphi}_s(t - T) \quad (8.69)$$

Le filtre adapté se comporte ainsi en corrélateur vis-à-vis du signal à détecter. On démontre qu'en présence d'un bruit blanc, le rapport signal sur bruit est optimum en  $t = T$  et ne dépend que de l'énergie du signal et de la densité spectrale du bruit. Ce résultat met en évidence le rôle de la corrélation dans les procédures de détection et d'identification.

Les caractéristiques de cet opérateur sont résumées dans le tableau 8.31.

Tableau 8.31

$g(t)$	$= ks(T - t)$
$G(f)$	$= k S^*(f) \exp(-j2\pi f T)$
$ G(f) ^2$	$= k^2 \overset{\circ}{\Phi}_s(f)$
$\overset{\circ}{\varphi}_g(\tau)$	$= k^2 \overset{\circ}{\varphi}_s(\tau)$

### 8.2.28 Définition : opérateur de dérivation

La transformation linéaire

$$y(t) = \frac{d}{dt} x(t) \quad (8.70)$$

définit un opérateur, appelé *dérivateur*, dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 8.32. Un tel opérateur n'est pas physiquement réalisable, puisque sa réponse d'amplitude croît linéairement sans limite avec la fréquence. Un filtre passe-haut, tel que le circuit RC dérivateur de la figure 8.33, en constitue une réalisation approximative.

**Tableau 8.32**

---

$g(t)$	$= \frac{d}{dt} \delta(t) = \delta'(t)$
$G(f)$	$= j2\pi f$
$ G(f) ^2$	$= (2\pi f)^2$

---

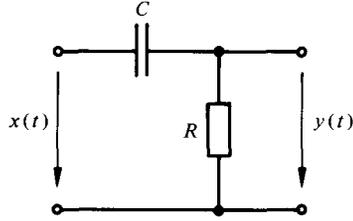


Fig. 8.33

Du tableau 8.32, on déduit que la densité spectrale de la dérivée d'un processus aléatoire (si elle existe) vaut

$$\Phi_{x'}(f) = (2\pi f)^2 \Phi_x(f) \tag{8.71}$$

d'où, par le théorème de Wiener-Khinchine (§ 5.3.3), on a pour les autocorrélations la relation suivante

$$R_{x'}(\tau) = - \frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2} \tag{8.72}$$

L'existence d'une dérivée, au sens d'une convergence en moyenne quadratique, n'est donc possible que si la seconde dérivée de la fonction d'autocorrélation du processus existe.

### 8.3 OPÉRATEURS PARAMÉTRIQUES

#### 8.3.1 Définition

On appelle *opérateur paramétrique* tout opérateur non stationnaire dépendant d'un signal ou grandeur de commande auxiliaire. Le signal de sortie

$$y(t) = S\{x(t), u(t)\} \tag{8.73}$$

est ainsi une fonction de deux signaux  $x(t)$  et  $u(t)$ , l'un étant considéré comme signal d'entrée et l'autre comme signal de commande (fig. 8.34)

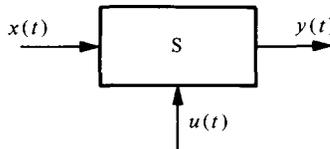


Fig. 8.34

#### 8.3.2 Description générale des opérateurs paramétriques linéaires

Un opérateur est linéaire, mais non stationnaire, si la condition (8.5) est satisfaite, mais non la condition (8.6).

Le signal de sortie  $y(t)$  d'un tel opérateur s'exprime alors en fonction du signal d'entrée  $x(t)$  par la relation [49, 53]

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x(\tau) d\tau \quad (8.74)$$

où  $h(t, \tau)$  est une réponse impulsionnelle, dépendant de la grandeur auxiliaire  $u(t)$ . C'est la réponse, en fonction du temps  $t$ , à une impulsion de Dirac appliquée à l'entrée au temps  $\tau$ . L'opérateur est causal si  $h(t, \tau) = 0$  pour  $\tau > t$ .

L'opérateur linéaire invariant apparaît ainsi comme un cas particulier de cette classe plus générale pour lequel  $h(t, \tau) = g(t - \tau)$ .

Une description indirecte de l'opérateur linéaire non stationnaire est la fonction de réponse

$$H(\nu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) \exp(-j 2\pi\nu\tau) d\tau \quad (8.75)$$

qui dépend aussi du temps. On lui préfère généralement une expression dépendant des deux fréquences  $f$  et  $\nu$  en effectuant une deuxième transformation de Fourier

$$H(f, \nu) = \iint_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) \exp[j 2\pi(\nu\tau - ft)] d\tau dt \quad (8.76)$$

On vérifie (exercice 8.5.12) que les transformées de Fourier des signaux d'entrée et de sortie  $x(t)$  et  $y(t)$  sont liées par la relation

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f, \nu) X(\nu) d\nu \quad (8.77)$$

### 8.3.3 Opérateur séparable. Définition

Un opérateur est dit *séparable* si la réponse impulsionnelle peut s'écrire sous la forme

$$h(t, \tau) = u(t) g(t - \tau) \quad (8.78)$$

ou, de manière équivalente

$$h(t, \tau) = u(\tau) g(t - \tau) \quad (8.79)$$

La fonction de transfert (8.76) devient dans le cas d'une réponse impulsionnelle du type (8.78)

$$H(f, \nu) = U(f - \nu) G(\nu) \quad (8.80)$$

et dans le cas de (8.79)

$$H(f, \nu) = U(f - \nu) G(f) \quad (8.81)$$

### 8.3.4 Définition : opérateur de multiplication

Si l'on pose dans (8.78)  $g(t - \tau) = \delta(t - \tau)$  on obtient

$$h(t, \tau) = u(t) \delta(t - \tau) \quad (8.82)$$

et

$$H(f, \nu) = U(f - \nu) \quad (8.83)$$

d'où, en remplaçant dans (8.74) et (8.77)

$$y(t) = u(t) \cdot x(t) \quad (8.84)$$

et

$$Y(f) = U(f) * X(f) \quad (8.85)$$

Le *multiplicateur* (fig. 8.35) est donc un opérateur paramétrique linéaire (qui se réduit à l'opérateur stationnaire décrit au paragraphe 8.2.16 si  $u(t)$  est une constante).

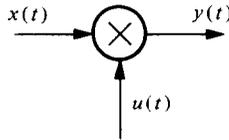


Fig. 8.35

Les relations (8.84) et (8.85) reproduisent la propriété (4.15). Dans le cas de signaux  $x(t)$  et  $u(t)$  *aléatoires indépendants*, les propriétés statistiques et spectrales du signal de sortie  $y(t)$  peuvent se déduire de (5.195), (5.198) et (5.199) qui deviennent ici

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|x|} p_x(x) p_u\left(\frac{y}{x}\right) dx \quad (8.86)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \cdot R_u(\tau) \quad (8.87)$$

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) * \Phi_u(f) \quad (8.88)$$

### 8.3.5 Cas particulier : opérateur idéal d'échantillonnage

En posant  $u(t) = \delta_T(t)$  dans (8.82), le signal de sortie devient en tenant compte de la notation (1.54)

$$y(t) = x(t) \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad (8.89)$$

C'est le modèle du signal échantillonné idéalisé décrit au chapitre 9.

### 8.3.6 Cas particulier : interrupteur périodique

L'opérateur non stationnaire symbolisé (fig. 8.36) par un interrupteur se fermant périodiquement à la cadence  $f = 1/T$  avec une durée de fermeture  $\Delta$  est un opérateur de multiplication pour lequel (voir notation 1.56)

$$u(t) = \text{rep}_T \{ \text{rect}(t/\Delta) \} \quad (8.90)$$

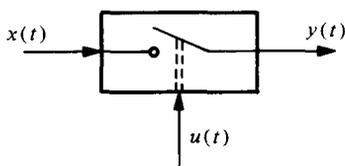


Fig. 8.36

### 8.3.7 Cas particulier : opérateur de pondération uniforme

L'opérateur symbolisé par la figure 8.36 permet également de réaliser une observation  $y(t) = x(t, T)$  de durée finie  $T$  d'un signal  $x(t)$  en donnant à la fonction de commande la forme d'une fenêtre temporelle rectangulaire de pondération :

$$u(t) = \text{rect}(t/T) \quad (8.91)$$

La durée finie d'observation entraîne une résolution spectrale limitée (exercice 8.5.14) et l'apparition d'oscillations (phénomène de Gibbs, § IV.7.3.36) au voisinage des discontinuités du spectre de  $x(t)$ .

D'autres fonctions de pondération (fenêtres temporelles) sont parfois utilisées (§ 12.1.6 et sect. XX.3.7) pour réduire cet inconvénient.

### 8.3.8 Cas particulier : inverseur périodique

L'opérateur symbolisé par un inverseur périodique (multiplication par  $\pm 1$ ) correspond à un multiplicateur avec fonction auxiliaire (ici pour un rapport cyclique de 50%)

$$\begin{aligned} u(t) &= \text{sgn} \{ \cos(2\pi t/T) \} \\ &= \text{rep}_T \{ \text{rect}(2t/T) - \text{rect}[(2t - T)/T] \} \end{aligned} \quad (8.92)$$

### 8.3.9 Exemple : opérateur de multiplication avec préfiltrage

La réponse impulsionnelle (8.78) est celle d'un opérateur décomposable en une cascade d'un opérateur linéaire invariant suivi par un multiplicateur (fig. 8.37). En effet, en introduisant  $h(t, \tau) = u(t)g(t - \tau)$  dans (8.74), on obtient pour le signal de sortie

$$\begin{aligned} y(t) &= u(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau) d\tau \\ &= u(t) \cdot [x(t) * g(t)] \end{aligned} \quad (8.93)$$

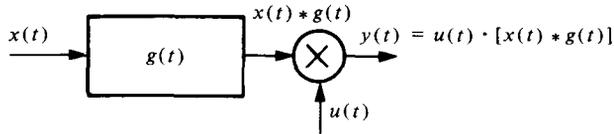


Fig. 8.37

Les propriétés spectrales du signal  $y(t)$  se déduisent facilement

$$Y(f) = U(f) * [X(f) G(f)] \quad (8.94)$$

$$\Phi_y(f) = \Phi_u(f) * [\Phi_x(f) |G(f)|^2] \quad (8.95)$$

### 8.3.10 Exemple : opérateur de multiplication avec postfiltrage

En partant de la réponse impulsionnelle (8.79), le signal de sortie devient

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) u(\tau) x(\tau) d\tau = [x(t) u(t)] * g(t) \quad (8.96)$$

C'est la réponse d'un opérateur (fig. 8.38) combinant un multiplicateur suivi d'un filtre linéaire invariant.

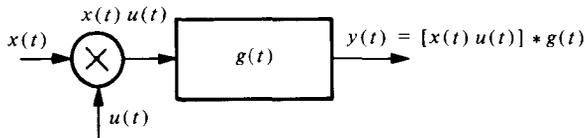


Fig. 8.38

Les propriétés spectrales du signal de sortie sont ici

$$Y(f) = [X(f) * U(f)] G(f) \quad (8.97)$$

$$\Phi_y(f) = [\Phi_x(f) * \Phi_u(f)] \cdot |G(f)|^2 \quad (8.98)$$

Un tel opérateur est utile pour modéliser l'échantillonnage réel, la reconstitution d'un signal continu à partir d'un signal échantillonné, la modulation d'amplitude et le changement de fréquence.

### 8.3.11 Cas particulier : opérateur d'échantillonnage réel

En posant  $u(t) = \delta_T(t)$  dans (8.96), on obtient

$$y(t) = [x(t) \delta_T(t)] * g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) g(t - kT) \quad (8.99)$$

Chaque échantillon est ici le facteur multiplicatif d'une impulsion de forme  $g(t)$ . Dans le cas d'impulsion de Dirac,  $g(t) = \delta(t)$  et l'on retrouve l'échantillonnage idéal (8.89).

**8.3.12 Définition : opérateur de modulation**

Un *modulateur* (fig. 8.39) est typiquement un dispositif paramétrique, linéaire ou non linéaire suivant les cas, qui produit un signal de sortie dont un ou plusieurs paramètres varient en fonction du signal d'entrée.

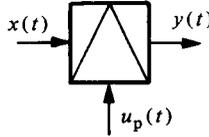


Fig. 8.39

Le signal auxiliaire est appelé la porteuse  $u_p(t)$  en télécommunications (chap. XVIII.4). Les signaux d'entrée et de sortie sont appelés signal primaire (ou modulant) et signal secondaire (ou modulé), respectivement.

La porteuse  $u_p(t)$  est généralement une sinusoïde de fréquence  $f_p$  et le signal de sortie  $y(t)$  est à spectre passe-bande. En utilisant le concept d'enveloppe complexe  $\underline{r}(t)$  introduit à la section 7.4, le signal de sortie peut se mettre sous la forme

$$y(t) = \text{Re}\{\underline{r}(t) \exp(j2\pi f_p t)\} = a(t) \cos(2\pi f_p t) - b(t) \sin(2\pi f_p t) \quad (8.100)$$

où  $\underline{r}(t) = a(t) + jb(t) = f\{x(t)\}$  est une fonction complexe du signal d'entrée typique à chaque genre de modulation (chap. 11).

Le signal d'entrée n'influençant que l'enveloppe complexe, on peut simplifier les notations en définissant [99] un opérateur de modulation (fig. 8.40) par la relation  $\underline{r}(t) = S_m\{x(t)\}$ . Inversement, on peut définir un opérateur de démodulation (fig. 8.41) par la relation  $x(t) = S_d\{\underline{r}(t)\}$ . Ce dernier est soit de type paramétrique, soit de type non linéaire.

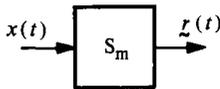


Fig. 8.40

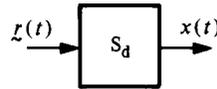


Fig. 8.41

**8.3.13 Définition : opérateur de sommation**

Un *sommateur* (fig. 8.42) ou un *soustracteur* (fig. 8.43) est un opérateur qui ajoute ou retranche  $u(t)$  au signal d'entrée  $x(t)$

$$y(t) = S\{x(t), u(t)\} = x(t) \pm u(t) \quad (8.101)$$

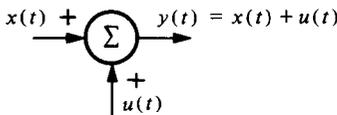


Fig. 8.42

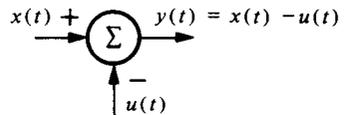


Fig. 8.43

Vis-à-vis du signal d'entrée, cet opérateur n'est pas linéaire homogène puisqu'il ne satisfait pas (8.5) et il est non stationnaire si  $u(t)$  n'est pas une constante. Il est donc logique de le classer parmi les opérateurs paramétriques, encore que dans certaines appli-

cations (filtres actifs), il soit préférable de le considérer comme un dispositif linéaire vectoriel.

Par (4.12), on a pour des signaux déterministes

$$Y(f) = X(f) \pm U(f) \quad (8.102)$$

D'une manière générale, valable aussi pour les signaux aléatoires, on a par (5.189) et (5.190)

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) + R_u(\tau) \pm R_{xu}(\tau) \pm R_{ux}(\tau) \quad (8.103)$$

et

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) + \Phi_u(f) \pm \Phi_{xu}(f) \pm \Phi_{ux}(f) \quad (8.104)$$

Ces deux dernières expressions se résument aux deux premiers termes seulement lorsque les signaux  $x(t)$  et  $u(t)$  sont indépendants et que l'un au moins est à valeur moyenne nulle (§ 5.5.5).

## 8.4 OPÉRATEURS NON LINÉAIRES INVARIANTS

### 8.4.1 Définitions et classification

La modélisation des systèmes non linéaires se heurte à des difficultés considérables. Aucune théorie globale n'existe qui permette, comme dans le cas linéaire, de déterminer simplement les relations liant la sortie à l'entrée du système. C'est un domaine ardu qui, bien qu'étudié depuis fort longtemps, nécessite encore un important effort de recherche. Des approches partielles ont été tentées [100-102]. Le sujet est si complexe qu'il ne peut être abordé en détail dans le présent ouvrage.

Un moyen de relier l'entrée  $x(t)$  à la sortie  $y(t)$  d'un opérateur non linéaire – ici supposé invariant – est la *représentation en série de fonctionnelles de Volterra*

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (8.105)$$

C'est une extension de la représentation intégrale des opérateurs linéaires (8.12); ce cas correspondant au premier terme de la série. Elle implique l'existence des intégrales et la convergence – en moyenne quadratique – de la série. La fonctionnelle générale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \dots, \tau_n) x(t - \tau_1) \dots x(t - \tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (8.106)$$

définit un *opérateur non linéaire homogène de degré  $n$*  caractérisé (fig. 8.44) par le noyau  $h_n(t_1, \dots, t_n)$ .

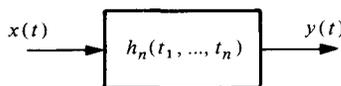


Fig. 8.44

On démontre [102] que la réponse d'un tel opérateur à une excitation sinusoïdale permanente de fréquence  $f_0$  est composée de termes sinusoïdaux de fréquences  $nf_0$ ,  $(n-2)f_0$ , ...,  $f_0$  ( $n$  impair) ou 0 ( $n$  pair). Si le degré  $n$  est impair, la réponse ne contient donc que des harmoniques impaires et, si  $n$  est pair, elle ne contient que des harmoniques paires et une composante continue. Une illustration de ce résultat apparaît aux paragraphes 8.4.4 et 8.4.5.

Certains circuits non linéaires (par exemple à réactance non linéaire) sont susceptibles de produire également des sous-harmoniques de la fréquence d'excitation. Ils ne sont donc pas représentés par ce modèle.

La formule (8.105) suggère une représentation (fig. 8.45) par opérateurs homogènes branchés en parallèle à l'entrée et dont les sorties sont sommées.

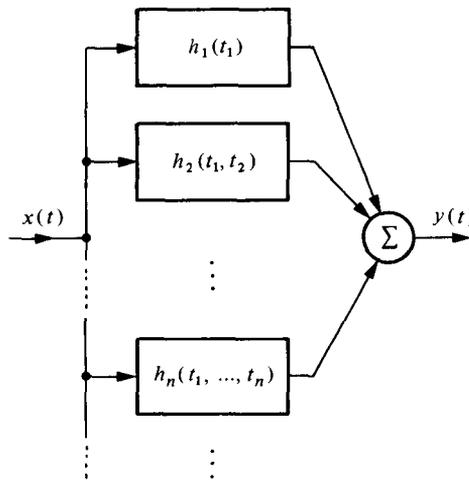


Fig. 8.45

Un cas particulier d'opérateur non linéaire décrit par (8.105) est celui où le signal de sortie est exprimable en série de puissance

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x^n(t) \quad (8.107)$$

Le noyau caractéristique devient ici simplement

$$h_n(t_1, \dots, t_n) = \alpha_n \delta(t_1) \dots \delta(t_n) \quad (8.108)$$

La relation (8.107) permet de décrire une large gamme d'opérateurs *non linéaires amnésiques* (ou *sans mémoire, statiques, non inertiels, instantanés*): le signal de sortie  $y(t)$  à l'instant  $t$  ne dépend que de l'entrée au même instant et aucunement du passé. En électricité, un circuit non linéaire est en principe de ce type s'il ne contient pas d'éléments réactifs.

Or, il est souvent possible [33] de modéliser un système non linéaire par une cascade de deux ou trois opérateurs (fig. 8.46): par exemple, un opérateur linéaire, suivi d'un opérateur non linéaire amnésique et d'un deuxième opérateur linéaire. On parle ici de *système séparable*.

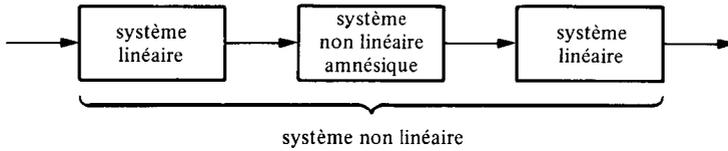


Fig. 8.46

On est ainsi amené à considérer la classification suivante :

- opérateurs non linéaires amnésiques;
- opérateurs non linéaires séparables;
- opérateurs non linéaires non séparables.

La dernière catégorie ne sera pas abordée. La seconde se ramène donc à une cascade d'opérateurs où toute l'inertie (mémoire) du système est prise en compte par l'opérateur linéaire alors que la non linéarité est représentée par le ou les opérateurs amnésiques. On se limite dans ce qui suit à examiner quelques propriétés de ces opérateurs.

#### 8.4.2 Opérateurs non linéaires amnésiques

Un tel opérateur est caractérisé par une relation instantanée entre les signaux d'entrée et de sortie (fig. 8.47) qui est l'équation de la non linéarité

$$y = g(x) \quad (8.109)$$

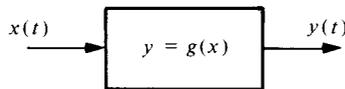


Fig. 8.47

C'est le modèle d'un grand nombre de dispositifs électroniques réalisables analogiquement (vol. VIII) avec des circuits à diodes, des amplificateurs opérationnels, des comparateurs, des multiplicateurs, etc., et numériquement à l'aide d'une table de correspondance mise en mémoire ou d'un algorithme de calcul approprié. Les principaux d'entre eux sont regroupés dans le tableau 8.48. Si la sortie est retardée (temps de réaction, durée de calcul), on en tient compte en combinant en série un opérateur amnésique idéal (sans retard) et un opérateur de retard (§ 8.2.17).

#### 8.4.3 Non linéarité développée en série de Taylor

Le développement en série (8.107) ne converge pas au voisinage de discontinuités. Il ne peut donc être utilisé que dans le cas de caractéristiques non linéaires  $g(x)$  à variation progressive. Dans ce cas, les coefficients  $\alpha_n$  sont liés à la non linéarité  $g(x)$  par

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n g(x)}{dx^n} \right|_{x=0} \quad (8.110)$$

La transformée de Fourier du signal de sortie de l'opérateur excité par un signal déterministe devient simplement, en vertu de (4.15)

$$Y(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overset{n}{\boxplus} X(f) \quad (8.111)$$

Tableau 8.48

Fonction	Caractéristique	Symbole graphique
Redresseur bipolaire (opérateur de valeur absolue)	$y(t) =  x(t) $	
Redresseur unipolaire	$y(t) = \epsilon(x) \cdot  x(t) $ $= \frac{1}{2} [x(t) +  x(t) ]$	
Détecteur de signe (limiteur idéal)	$y(t) = A \cdot \text{sgn} \{x(t)\}$	
Comparateur	$y(t) = \text{sgn} \{x(t) - a\}$	
Ecréteur	$y(t) = \begin{cases} a & \text{si } x < a \\ x(t) & \text{si } a < x < b \\ b & \text{si } x > b \end{cases}$	
Opérateur quadratique	$y(t) = x^2(t)$	
Opérateur de racine carrée	$y(t) = \sqrt{x(t)} ; x \geq 0$	
Opérateur logarithmique	$y(t) = \log_a \{x(t)\} ; x > 0$	
Opérateur trigonométrique	par exemple: $y(t) = \sin \{x(t)\}$	

où

$$\prod_{i=1}^n X(f) = \underbrace{X(f) * X(f) * \dots * X(f)}_{n \text{ fois}} \quad (8.112)$$

dénote une multi-convolution d'ordre  $(n - 1)$ .

Le spectre complexe du signal de sortie contient donc un premier terme proportionnel au spectre  $X(f)$  du signal d'entrée, puis un terme proportionnel à la convolution de  $X(f)$  avec lui-même, etc. En vertu du théorème de la limite centrale (§ 5.5.3), les contributions spectrales (8.112) d'ordre élevé se rapprochent d'une loi de Gauss lorsque  $X(f)$  est réel (ou imaginaire).

**Une propriété caractéristique des systèmes non linéaires est de faire surgir des composantes spectrales totalement absentes du spectre d'entrée.**

Cette propriété est parfois indésirable et interprétée comme la source d'une distorsion (§ 8.4.6) du signal désiré. Elle est, par contre, mise à profit dans d'autres circonstances (modulation, changement et multiplication de fréquence, etc.).

#### 8.4.4 Exemple : opérateur quadratique

Si

$$y(t) = x^2(t) \quad (8.113)$$

le développement (8.107) se résume au seul terme quadratique. La transformée de Fourier du signal de sortie est ici un simple produit de convolution

$$Y(f) = X(f) * X(f) \quad (8.114)$$

Lorsque le signal d'entrée est purement sinusoïdal  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ :  $X(f) = \frac{1}{2} A [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$  et, par (1.50) et (8.114),  $Y(f) = \frac{1}{2} A^2 \delta(f) + \frac{1}{4} A^2 [\delta(f + 2f_0) + \delta(f - 2f_0)]$ . Ce résultat (fig. 8.49), facilement vérifié à l'aide d'identités trigonométriques, correspond au signal de sortie  $y(t) = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{4} A^2 \cos(4\pi f_0 t)$ . Le terme continu  $\frac{1}{2} A^2$  mesure la puissance du signal d'entrée.

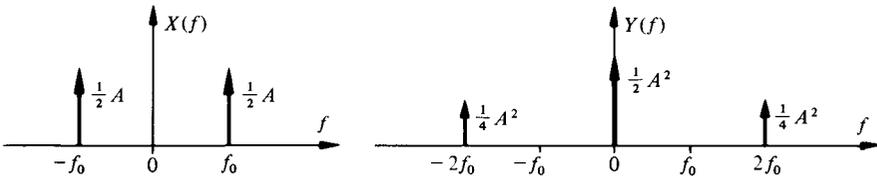


Fig. 8.49

Si l'entrée est la somme de deux termes sinusoïdaux:  $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$ , on obtient  $X(f) = \frac{1}{2} A_1 [\delta(f + f_1) + \delta(f - f_1)] + \frac{1}{2} A_2 [\delta(f + f_2) + \delta(f - f_2)]$ .

Par convolution (fig. 8.50), la transformée du signal de sortie devient ici:  $Y(f) = \frac{1}{2} (A_1^2 + A_2^2) \delta(f) + \frac{1}{4} A_1^2 [\delta(f + 2f_1) + \delta(f - 2f_1)] + \frac{1}{4} A_2^2 [\delta(f + 2f_2) + \delta(f - 2f_2)] + \frac{1}{2} A_1 A_2 [\delta(f + f_1 + f_2) + \delta(f - f_1 - f_2) + \delta(f - f_1 + f_2) + \delta(f + f_1 - f_2)]$ . Le premier terme représente à nouveau la puissance moyenne du signal composite d'entrée. Le dernier terme résulte de ce que l'on appelle des *produits d'intermodulation*: il fait apparaître des composantes aux fréquences  $(f_2 - f_1)$  et  $(f_2 + f_1)$ .

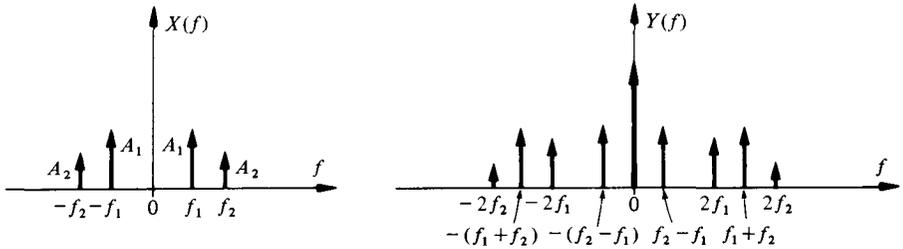


Fig. 8.50

D'une manière plus générale, si

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) \tag{8.115}$$

alors

$$Y(f) = X_1(f) * X_1(f) + X_2(f) * X_2(f) + 2 X_1(f) * X_2(f) \tag{8.116}$$

Le troisième terme caractérise le phénomène d'intermodulation.

Considérons encore (fig. 8.51) le cas d'un signal d'entrée à énergie finie  $x(t) = 2aB \text{ sinc}(2Bt)$  avec  $X(f) = a \cdot \text{rect}[f/(2B)]$ . Par (1.33), on obtient ici  $Y(f) = 2a^2B \cdot \text{tri}[f/(2B)]$ . La valeur à l'origine représente l'énergie du signal d'entrée.

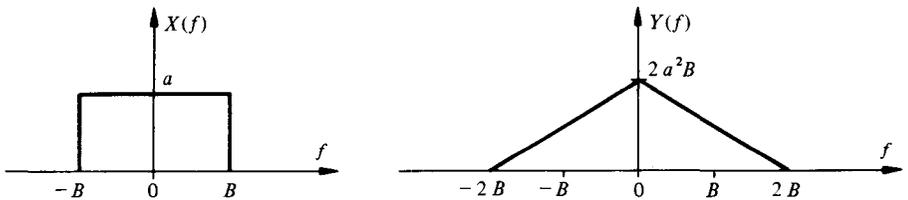


Fig. 8.51

Finalement (fig. 8.52), prenons l'exemple d'un signal d'entrée à spectre passe-bande avec  $X(f) = a \{ \text{rect}[(f+f_0)/B] + \text{rect}[(f-f_0)/B] \}$ . La transformée du signal de sortie devient  $Y(f) = a^2B \{ 2 \text{tri}(f/B) + \text{tri}[(f+2f_0)/B] + \text{tri}[(f-2f_0)/B] \}$ .

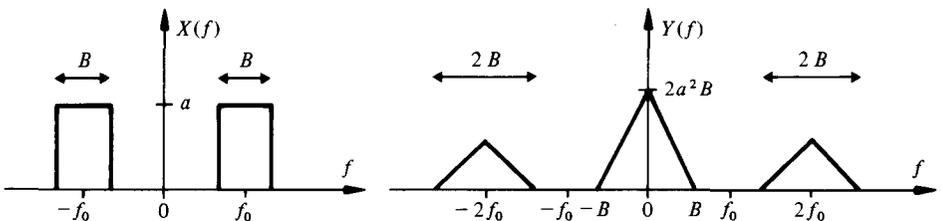


Fig. 8.52

### 8.4.5 Exemple: opérateur cubique

Pour un tel opérateur, on a

$$y(t) = x^3(t) \tag{8.117}$$

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) = X(f) * X(f) * X(f) \tag{8.118}$$

Si l'entrée est une simple sinusoïde  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ , la transformée de Fourier de la sortie devient  $Y(f) = (3A^3/8) [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] + (A^3/8) [\delta(f+3f_0) + \delta(f-3f_0)]$  correspondant à  $y(t) = (3A^3/4) \cos(2\pi f_0 t) + (A^3/4) \cos(6\pi f_0 t)$ . Dans le cas d'une somme de deux sinusoïdes à l'entrée, les produits d'intermodulation apparaissent aux fréquences  $2f_1 + f_2$ ,  $2f_1 - f_2$ ,  $2f_2 + f_1$  et  $2f_2 - f_1$ .

La détermination de  $Y(f)$  correspondant à d'autres signaux d'entrée est laissée comme exercice.

#### 8.4.6 Distorsion non linéaire. Définitions

De nombreux dispositifs de traitement de signaux utilisés en instrumentation ou en télécommunications sont supposés linéaires. Pratiquement, toutefois, ils sont toujours affectés d'une légère non linéarité. Cela se produit pour diverses raisons : non linéarité naturelle des caractéristiques des composants, phénomène de saturation ou d'écrêtage dû à un domaine linéaire borné (par exemple, par des tensions d'alimentation dans les amplificateurs ou autres circuits électroniques), etc. Les signaux d'entrée et de sortie de ces dispositifs ne sont donc pas exactement isomorphes : le spectre du signal de sortie a été enrichi de composantes dues aux contributions non linéaires en  $x^2$ ,  $x^3$ , etc. C'est ce que l'on appelle la *distorsion non linéaire*.

On distingue plus particulièrement

- la distorsion harmonique;
- la distorsion d'intermodulation.

La *distorsion harmonique* est due à la création, en cas d'excitation par une sinusoïde pure de fréquence  $f_0$ , de composantes aux fréquences harmoniques  $kf_0$ . On peut définir alors un taux de distorsion harmonique, indexé à  $k$ , en faisant le rapport de l'amplitude de l'harmonique  $k$  et de celle de la fondamentale (généralement exprimé en %). Un *taux global de distorsion harmonique* est obtenu en faisant le rapport des valeurs efficaces du signal de sortie sans fondamentale et avec fondamentale. Par (3.76), on a

$$d = \left[ \frac{\sum_{k=2}^{\infty} |Y_k|^2}{\sum_{k=1}^{\infty} |Y_k|^2} \right]^{1/2} = \left[ 1 - \frac{|Y_1|^2}{\sum_{k=1}^{\infty} |Y_k|^2} \right]^{1/2} \leq 1 \quad (8.119)$$

La *distorsion d'intermodulation* est liée à l'existence de produits d'intermodulation. Ceux-ci apparaissent lorsque l'entrée est constituée par une somme de termes. Si ceux-ci sont sinusoïdaux et de fréquence anharmonique  $f_i, f_j$ , etc. (signal d'entrée quasi-périodique), le signal de sortie contiendra, en plus de composantes harmoniques, des termes d'intermodulation de fréquence  $(mf_i \pm nf_j)$ .

#### 8.4.7 Distribution statistique du signal de sortie

Lorsque le signal d'entrée d'un système non linéaire amnésique de caractéristique  $y = g(x)$  est aléatoire et de densité de probabilité connue, la distribution du signal de sortie peut se déterminer en appliquant la règle de transformation introduite au paragraphe 5.1.20, où  $J$  est le Jacobien de la transformation :

$$p_y(y) = |J| p_x[x = g^{-1}(y)] \quad (8.120)$$

Si la non linéarité est décrite par la loi  $g(x)$  et si la densité de probabilité du signal d'entrée est  $p(x)$ , les divers moments du 1er ordre (§ 14.3.3) du signal de sortie sont donnés par

$$m_{yn} = E[\mathbf{y}^n] = \int_{-\infty}^{\infty} g^n(x) p_x(x) dx \quad (8.121)$$

et d'une manière générale, la valeur moyenne de toute fonction  $f(y)$  du signal de sortie est exprimée par l'espérance mathématique.

$$E[f(\mathbf{y})] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) p_y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f[g(x)] p_x(x) dx \quad (8.122)$$

#### 8.4.8 Fonction d'autocorrélation du signal de sortie

Un problème central dans l'analyse des effets d'un opérateur non linéaire dans une chaîne de traitement est la détermination de la densité spectrale du signal de sortie lorsque l'entrée est aléatoire. Cette densité spectrale est, en vertu du théorème de Wiener-Khintchine (§ 5.3.3), la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $R_y(\tau)$  du signal  $y(t)$ . Le problème est donc ramené à celui de l'évaluation de ce moment du deuxième ordre.

Par définition avec  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t + \tau)$ ,  $\mathbf{y}_1 = g(\mathbf{x}_1)$  et  $\mathbf{y}_2 = g(\mathbf{x}_2)$ :

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E[\mathbf{y}(t) \mathbf{y}(t + \tau)] = E[\mathbf{y}_1 \mathbf{y}_2] \\ &= E[g(\mathbf{x}_1)g(\mathbf{x}_2)] \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} g(x_1)g(x_2) p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (8.123)$$

La résolution de cette intégrale nécessite, outre la connaissance de la loi de non linéarité, celle de la statistique du 2ème ordre [densité de probabilité conjointe de  $\mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}(t + \tau)$ ] du processus d'entrée. Cette loi est malheureusement rarement connue, sauf dans des cas particuliers comme celui des processus gaussiens (sect. 5.7).

La détermination de  $R_y(\tau)$  par solution de (8.123) est appelée: *méthode directe*. Il est parfois préférable, en particulier lorsque la non linéarité contient des discontinuités, de passer par une *méthode indirecte* où la statistique du 2ème ordre est indiquée par la fonction caractéristique (14.66).

Supposons que la non linéarité  $y = g(x)$  possède une transformée de Fourier  $G(v)$ , alors  $g(x) = F^{-1}\{G(v)\}$  et en remplaçant dans (8.123) avec  $u = 2\pi v$  et  $v = 2\pi \nu$ , on obtient l'expression équivalente

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \frac{1}{4\pi^2} E \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} G(u)G(v) \exp[j(u\mathbf{x}_1 + v\mathbf{x}_2)] du dv \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G(u)G(v) \Pi_x(u, v) du dv \end{aligned} \quad (8.124)$$

où

$$\begin{aligned} \Pi_x(u, v) &= E\{ \exp [j(u x_1 + v x_2)] \} \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2; \tau) \exp [j(u x_1 + v x_2)] dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (8.125)$$

est précisément la fonction caractéristique du 2ème ordre du processus d'entrée.

#### 8.4.9 Signal d'excitation gaussien à valeur moyenne nulle

La solution de (8.123) ou (8.124) est en principe possible lorsque le signal d'entrée est gaussien. Dans ce cas, la densité de probabilité conjointe peut s'écrire, d'après (14.98) et avec  $\mu_x = 0$ :

$$p(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi [R_x^2(0) - R_x^2(\tau)]^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{R_x(0)[x_1^2 - x_2^2] + 2R_x(\tau)x_1x_2}{2[R_x^2(0) - R_x^2(\tau)]} \right\} \quad (8.126)$$

où  $R_x(0) \equiv C_x(0) = \sigma_x^2$  et  $R_x(\tau) \equiv C_x(\tau) = \sigma_x^2 \rho_x(\tau)$ .

La fonction caractéristique du deuxième ordre correspondante est, selon (14.104)

$$\Pi_x(u, v) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} R_x(0) [u^2 + v^2] - R_x(\tau) uv \right\} \quad (8.127)$$

#### 8.4.10 Exemple : redresseur unipolaire

Ce type d'opérateur (tab. 8.48) possède une caractéristique

$$g(x) = x \cdot \epsilon(x) \quad (8.128)$$

En remplaçant dans (8.123), on obtient

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \quad (8.129)$$

Le signal redressé  $y(t)$  possède alors, dans le cas d'une entrée gaussienne à valeur moyenne nulle, la fonction d'autocorrélation (exercice 8.5.24)

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left\{ [R_x^2(0) - R_x^2(\tau)]^{1/2} + R_x(\tau) \arccos \frac{-R_x(\tau)}{R_x(0)} \right\} \quad (8.130)$$

#### 8.4.11 Exemple : non linéarité en $x^n$

Dans le cas où

$$y = g(x) = x^n \quad (8.131)$$

il est avantageux d'exploiter la relation (14.70) qui lie le moment du deuxième ordre  $E[x_1^n x_2^n]$  à la valeur à l'origine de la dérivée partielle de degré  $(n, n)$  de la fonction caractéristique :

$$R_y(\tau) = E[x_1^n x_2^n] = j^{-2n} \left. \frac{\partial^{2n} \Pi_x(u, v)}{\partial u^n \partial v^n} \right|_{u=v=0} \quad (8.132)$$

Si le signal d'entrée  $x(t)$  est gaussien à valeur moyenne nulle, la fonction caractéristique est donnée par (8.127). La solution générale de (8.132) peut être mise sous la forme [27, 104]:

$$R_y(\tau) = \sum_k^n \frac{\{n! / [(n-k)/2]!\}^2}{2^{n-k} \cdot k!} R_x^{n-k}(0) R_x^k(\tau) \quad (8.133)$$

où  $k = 0, 2, 4 \dots$  pour  $n$  pair et  $k = 1, 3, 5 \dots$  pour  $n$  impair (et  $0! = 1$ ).

Le tableau 8.53 résume les résultats obtenus pour quelques valeurs de  $n$ .

Tableau 8.53

$n$	$R_y(\tau)$ pour $y = x^n$
1	$R_x(\tau)$
2	$2R_x^2(\tau) + R_x^2(0)$
3	$6R_x^3(\tau) + 9R_x^2(0)R_x(\tau)$
4	$24R_x^4(\tau) + 72R_x^2(0)R_x^2(\tau) + 9R_x^4(0)$
5	$120R_x^5(\tau) + 600R_x^2(0)R_x^3(\tau) + 225R_x^4(0)R_x(\tau)$

On a par exemple dans le cas d'une transformation cubique:

$$R_y(\tau) = 6R_x^3(\tau) + 9R_x^2(0)R_x(\tau) \quad (8.134)$$

d'où l'on tire l'expression spectrale par transformation de Fourier:

$$\Phi_y(f) = 6 \prod_{i=1}^3 \Phi_x(f) + 9R_x^2(0) \Phi_x(f) \quad (8.135)$$

Ce résultat est à comparer à (8.118), valable pour une entrée déterministe.

#### 8.4.12 Théorème de Price

Le théorème suivant, basé sur l'approche indirecte, se révèle particulièrement commode d'emploi lorsque la loi non linéaire  $g(x)$ , ou l'une de ses dérivées, est composée de segments de droites. Si l'excitation  $x(t)$  est gaussienne et à valeur moyenne nulle, la fonction d'autocorrélation  $R_y(\tau)$  du signal de sortie peut être déterminée par intégration de la relation

$$\frac{\partial^k R_y(\tau)}{\partial R_x^k(\tau)} = E [g^{(k)}(\mathbf{x}_1) g^{(k)}(\mathbf{x}_2)] \quad (8.136)$$

où  $g^{(k)}(x)$  est la  $k$ -ième dérivée de  $g(x)$  par rapport à  $x$ .

D'une manière similaire, la fonction d'intercorrélation  $R_{y_1 y_2}(\tau)$  des signaux de sortie  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  de deux systèmes non linéaires  $g_1(x_1)$  et  $g_2(x_2)$  excitée respectivement par les signaux gaussiens à valeurs moyennes nulles  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  s'obtient par intégration de la relation [avec  $\mathbf{x}_{11} = \mathbf{x}_1(t)$  et  $\mathbf{x}_{22} = \mathbf{x}_2(t + \tau)$ ]

$$\frac{\partial^k R_{y_1 y_2}(\tau)}{\partial R_{x_1 x_2}^k(\tau)} = E [g_1^{(k)}(\mathbf{x}_{11}) g_2^{(k)}(\mathbf{x}_{22})] \quad (8.137)$$

### 8.4.13 Démonstration

En introduisant (8.127) dans (8.124) et en dérivant  $k$  fois par rapport à  $R_x(\tau)$ , on obtient

$$\frac{\partial^k R_y(\tau)}{\partial R_x^k(\tau)} = \frac{1}{4\pi^2} \iint G(u) G(v) (-1)^k u^k v^k \Pi_x(u, v) du dv \quad (8.138)$$

En remplaçant  $\Pi_x(u, v)$  par l'espérance mathématique (8.125), en écrivant  $(-1)^k = j^{2k}$ , en séparant les variables  $u$  et  $v$  et en tenant compte de la propriété (4.13) avec ici  $u = 2\pi v$  et  $v = 2\pi v$ , on a finalement

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k R_y(\tau)}{\partial R_x^k(\tau)} &= \frac{1}{4\pi^2} E \left[ \int G(u) j^k u^k \exp(ju \mathbf{x}_1) du \cdot \int G(v) j^k v^k \exp(jv \mathbf{x}_2) dv \right] \\ &= E [g^{(k)}(\mathbf{x}_1) \cdot g^{(k)}(\mathbf{x}_2)] \end{aligned} \quad (8.139)$$

La relation (8.137) se démontre de manière analogue.

### 8.4.14 Autre relation générale valable en cas d'excitation gaussienne

Par une approche voisine de celle exposée ci-dessus, mais en faisant intervenir le développement en série de (8.127), on peut mettre la fonction d'autocorrélation du signal de sortie sous la forme [69]

$$R_y(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} E [g^{(k)}(\mathbf{x}_1)] E [g^{(k)}(\mathbf{x}_2)] R_x^k(\tau) \quad (8.140)$$

A l'inverse du théorème de Price, cette expression se prête mal à l'étude de non linéarités dont les dérivées contiennent des discontinuités. Elle est, par contre, assez commode d'emploi, si la non linéarité est développable en série de puissances.

### 8.4.15 Exemple : détecteur de signe

Un tel opérateur est répertorié dans le tableau 8.48. Sa caractéristique est

$$y = g(x) = A \operatorname{sgn}(x) \quad (8.141)$$

Si  $x(t)$  est gaussien, avec  $\mu_x = 0$ , on peut appliquer le théorème de Price avec ici

$$g^{(1)}(x) = 2A \delta(x) \quad (8.142)$$

d'où, en tenant compte de (8.126) et (1.35)

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_y(\tau)}{\partial R_x(\tau)} &= 4A^2 E [\delta(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_2)] \\ &= 4A^2 \iint \delta(x_1) \delta(x_2) p_x(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 \\ &= 4A^2 p_x(0, 0) \\ &= \frac{2A^2}{\pi [R_x^2(0) - R_x^2(\tau)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (8.143)$$

Par intégration, on a

$$R_y(\tau) = \frac{2A^2}{\pi} \arcsin \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} + K \quad (8.144)$$

*La constante d'intégration est égale à la valeur particulière de  $R_y(\tau)$  obtenue en imposant  $R_x(\tau) = 0$ .* Or, puisque  $x(t)$  est gaussien et à valeur moyenne nulle (§ 5.7.3),  $R_x(\tau) = 0$  entraîne l'indépendance de  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}(t + \tau)$ . On a ainsi

$$K = R_y(\tau) \Big|_{R_x(\tau)=0} = E[g(\mathbf{x}_1)g(\mathbf{x}_2)]_{R_x(\tau)=0} = E[g(\mathbf{x}_1)]E[g(\mathbf{x}_2)] = 0$$

car

$$E[g(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sgn}(x)p(x)dx = 0 \quad (8.146)$$

puisque  $\text{sgn}(x)$  est une fonction impaire et  $p(x)$  est ici une distribution paire. Finalement

$$R_y(\tau) = \frac{2A^2}{\pi} \arcsin \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \quad (8.147)$$

La densité spectrale correspondante peut être déterminée en développant la fonction arcsinus en série.

#### 8.4.16 Exemple : opérateur quadratique

Cet opérateur de caractéristique  $y = x^2$  a déjà été pris comme exemple au paragraphe 8.4.4 dans le contexte d'une excitation déterministe. La fonction d'autocorrélation du signal de sortie obtenu en cas d'excitation gaussienne à valeur moyenne nulle peut être tirée du tableau 8.53

$$R_y(\tau) = 2R_x^2(\tau) + R_x^2(0) \quad (8.148)$$

On peut aussi l'obtenir (exercice 8.5.26) par application du théorème de Price ou de la formule (8.140).

La densité spectrale correspondante est simplement

$$\Phi_y(f) = 2\Phi_x(f) * \Phi_x(f) + R_x^2(0)\delta(f) \quad (8.149)$$

On tire de (8.148) les paramètres suivants

$$P_y = R_y(0) = 3R_x^2(0) = 3\sigma_x^4 \quad (8.150)$$

$$\mu_y = R_x(0) = \sigma_x^2 \quad (8.151)$$

$$\sigma_y^2 = 2R_x^2(0) = 2\sigma_x^4 \quad (8.152)$$

Le cas d'un signal d'entrée gaussien à spectre blanc borné de type passe-bande est illustré par la figure 8.54.

#### 8.4.17 Opérateur quadratique excité par un signal additionné de bruit gaussien

Soit  $x(t) = s(t) + n(t)$ , où  $s(t)$  et  $n(t)$  sont indépendants et à valeurs moyennes nulles,  $s(t)$  étant un signal quelconque et  $n(t)$  un bruit gaussien. La sortie de

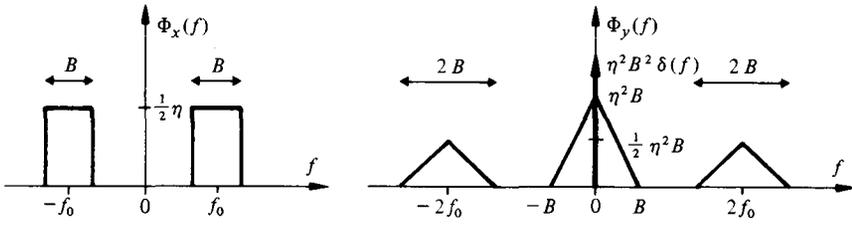


Fig. 8.54

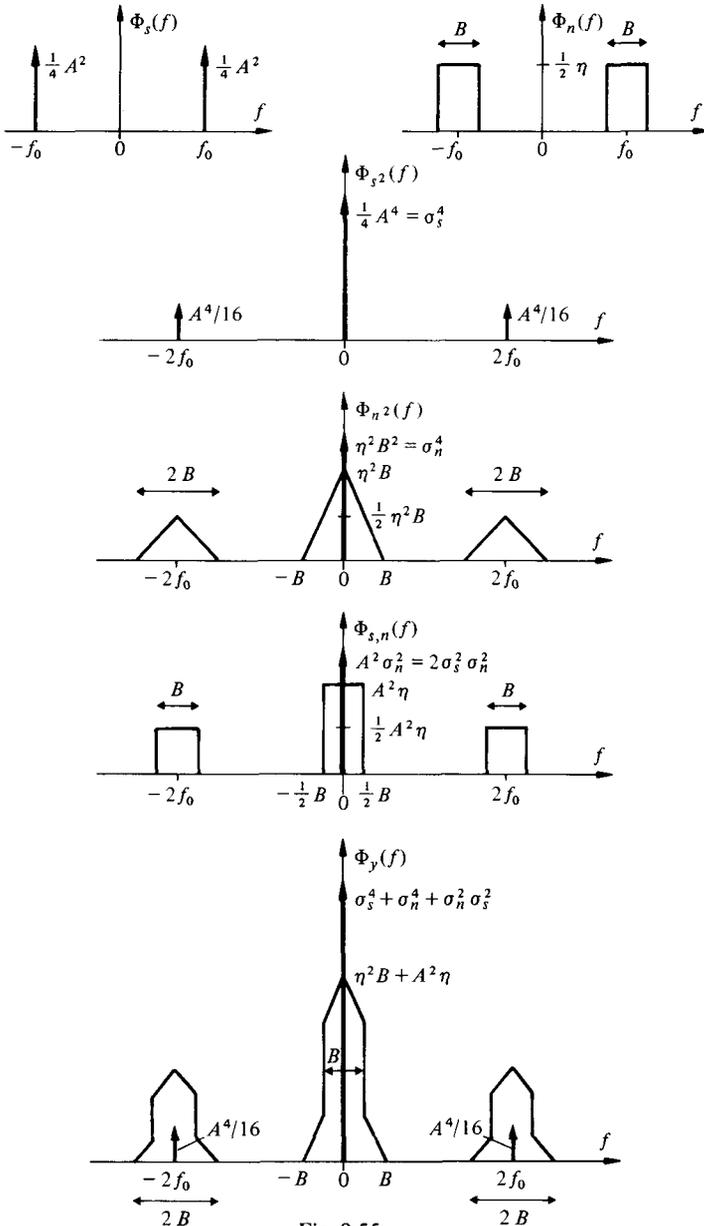


Fig. 8.55

l'opérateur quadratique est

$$y(t) = x^2(t) = s^2(t) + 2s(t)n(t) + n^2(t) \quad (8.153)$$

Sa fonction d'autocorrélation vaut

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E[y(t)y(t+\tau)] = E[\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2] \\ &= E[s_1^2 s_2^2] + E[n_1^2 n_2^2] + E[s_1^2 n_2^2 + n_1^2 s_2^2 + 4s_1 s_2 n_1 n_2] \\ &= R_{s^2}(\tau) + R_{n^2}(\tau) + R_{s,n}(\tau) \end{aligned} \quad (8.154)$$

avec

$$R_{s^2}(\tau) = E[s^2(t)s^2(t+\tau)] \quad (8.155)$$

$$R_{n^2}(\tau) = 2R_n^2(\tau) + R_n^2(0) \quad (8.156)$$

en fonction du résultat (8.148), et

$$R_{s,n}(\tau) = 2R_s(0)R_n(0) + 4R_s(\tau)R_n(\tau) \quad (8.157)$$

La densité spectrale résultante devient

$$\begin{aligned} \Phi_y(f) &= \Phi_{s^2}(f) + [R_n^2(0) + 2R_s(0)R_n(0)]\delta(f) \\ &\quad + 2\Phi_n(f) * \Phi_n(f) + 4\Phi_s(f) * \Phi_n(f) \end{aligned} \quad (8.158)$$

La figure 8.55 résume les résultats obtenus dans le cas d'un signal  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  et d'un bruit blanc gaussien  $n(t)$  à spectre passe-bande.

## 8.5 EXERCICES

**8.5.1** Soit un système linéaire caractérisé par la réponse impulsionnelle  $g(t) = \omega_c \exp(-\omega_c t) \cdot \epsilon(t)$  avec  $\omega_c = 2\pi f_c$ . Déterminer la relation liant les fonctions d'autocorrélation d'entrée et de sortie  $\varphi_x(\tau)$  et  $\varphi_y(\tau)$  ainsi que la largeur équivalente de bruit. Si l'entrée  $x(t)$  est un bruit de densité spectrale de puissance constante  $\Phi_x(f) = \eta/2$ , en déduire la fonction d'autocorrélation  $R_y(\tau)$ , la densité spectrale de puissance  $\Phi_y(f)$  et la puissance totale  $P_y$  du signal de sortie  $y(t)$ .

**8.5.2** Démontrer que le système composite de la figure 8.56, où le signe  $\Sigma$  symbolise une sommation, est encore un système linéaire.

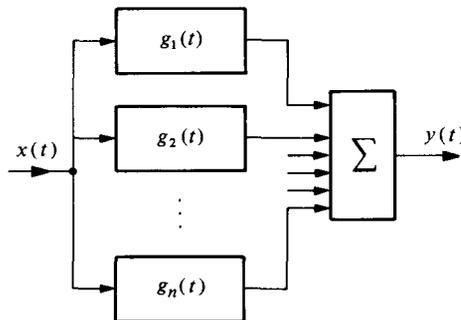


Fig. 8.56

8.5.3 Déterminer la fonction de réponse fréquentielle  $G(f)$  du système linéaire de la figure 8.57 et en déduire la forme particulière correspondant à  $t_0 = 0$ . Quel genre de filtre obtient-on dans ce cas-là ?

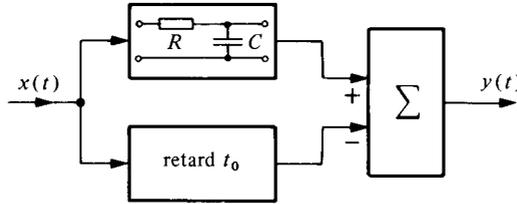


Fig. 8.57

8.5.4 La fonction de réponse fréquentielle d'un amplificateur de signaux acoustiques est la suivante:  $G(f) = G_0 (jf/f_1) (1 + jf/f_1)^{-1} \cdot (1 + jf/f_2)^{-1}$  où  $f_1 = 30$  Hz,  $f_2 = 20$  kHz et  $G_0 = 1000$ . Déterminer l'équation de la réponse impulsionnelle  $g(t)$ . Calculer la puissance  $P_y$  du bruit obtenu à la sortie si l'entrée  $x(t)$  est un bruit blanc de densité spectrale  $\Phi_x(f) = 10^{-7}$  V<sup>2</sup>/Hz. Déterminer également la largeur de bande à  $-3$  dB et la largeur de bande équivalente de bruit de cet amplificateur.

8.5.5 Soit  $x(t) = A + n(t)$  l'entrée d'un moyenneur temporel parfait, défini par (8.42) où  $A$  est une constante à estimer et  $n(t)$  est un bruit additif de densité spectrale  $\Phi_n(f) = \eta [1 + (f/B)^2]^{-1}$ . Sachant que  $\int x \exp(ax) dx = a^{-2} (ax - 1) \exp(ax)$ , déterminer quelle est, en fonction de la durée d'intégration  $T$ , l'expression du rapport signal sur bruit à la sortie et calculer la valeur de  $T$  assurant un rapport signal sur bruit de sortie supérieur de 20 dB à celui de l'entrée pour  $A = 0,1$  V,  $\eta = 10^{-4}$  V<sup>2</sup>/Hz et  $B = 100/\pi$  Hz.

8.5.6 Reprendre l'exercice 8.5.5 dans le cas où le moyenneur n'est pas parfait, mais réalisé approximativement par un filtre passe-bas RC, défini par (8.54), en remplaçant la durée d'intégration par la constante de temps RC du filtre.

8.5.7 Déterminer les temps de propagation de phase et de groupe d'un filtre passe-bas du 1<sup>er</sup> ordre défini par (8.54) et comparer les résultats obtenus pour  $f_0 = f_c$ .

8.5.8 Montrer que la fonction de cohérence (5.178) liant l'excitation  $x(t)$  et la réponse  $y(t)$  d'un système linéaire (sans bruit interne additionnel) vaut l'unité.

8.5.9 Un modèle de bruit impulsionnel à caractéristique spectrale quelconque peut être construit à l'aide du schéma-bloc de la figure 8.58 où  $u_p(t) = \sum_i \delta(t - t_i)$  est une suite aléatoire d'impulsions de Dirac (processus de Poisson). Le bruit produit  $n(t)$  est une somme d'impulsions de forme  $\alpha_i g(t - t_i)$  où  $t_i$  est un instant aléatoire arbitraire et

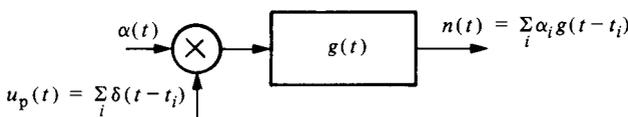


Fig. 8.58

$\alpha_i = \alpha(t = t_i)$  est la valeur échantillonnée d'une grandeur indépendante  $\alpha(t)$ . Déterminer l'équation générale de la densité spectrale de puissance du bruit  $n(t)$  si le nombre moyen d'impulsions par seconde est dénoté par  $\lambda$ .

**8.5.10** Indiquer sous quelles conditions le résultat obtenu à l'exercice 8.5.9 s'identifie avec la formule (6.31).

**8.5.11** Déterminer, à partir du résultat de l'exercice 8.5.9, le spectre d'une suite poissonnienne d'impulsions de forme triangulaire de durée  $\Delta$  et d'amplitude unité pour  $\alpha(t) = e$  (charge d'un électron) et  $\lambda e = I_0$ .

**8.5.12** Démontrer la relation (8.77).

**8.5.13** Dédire de (8.90) la densité spectrale de puissance du signal de sortie d'un interrupteur périodique dans l'hypothèse où le signal d'entrée  $x(t)$  et le signal de commande  $u(t)$  sont indépendants. Interpréter graphiquement le résultat pour  $\Delta = T/2$  et avec pour  $x(t)$  un bruit blanc borné à spectre passe-bas idéal de largeur de bande  $B = (2T)^{-1}$ .

**8.5.14** Déterminer la densité spectrale d'énergie du signal de sortie  $y(t)$  d'un opérateur de pondération défini par (8.91) lorsque le signal d'entrée  $x(t)$  est de type périodique (période  $T_x$ ). Interpréter graphiquement le résultat pour  $T = T_x$  et  $T = 10 T_x$ .

**8.5.15** Le signal quasi-périodique  $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$  est appliqué à l'entrée d'un opérateur de pondération dont la fonction de commande est  $u_i(t)$ . Déterminer analytiquement et comparer graphiquement les spectres d'amplitude obtenus pour  $f_1 = 100$  Hz,  $f_2 = 150$  Hz,  $A_1 = 10$  V,  $A_2 = 1$  V. Pour les trois cas :  $u_1(t) = \text{rect}(t/T)$ ,  $u_2(t) = \text{tri}(t/T)$ ,  $u_3(t) = \text{ig}(t/T)$  avec  $T = 50$  ms.

**8.5.16** Un signal cosinusoidal redressé peut être considéré comme le produit d'une fonction cosinusoidal  $A \cos(2\pi t/T)$  par la fonction signe de cette même fonction. En déduire la transformée de Fourier.

**8.5.17** Quelle est la fonction d'autocorrélation, la densité spectrale de puissance et la puissance totale du signal  $y(t)$  obtenues à la sortie du système représenté sur la figure 8.59, si  $x(t)$  est un signal aléatoire avec une fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau) = \sigma_x^2 \delta(\tau) + \mu_x^2$  et si  $u(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \alpha)$  est indépendant de  $x(t)$ ? Esquisser graphiquement le résultat pour  $f_0 = 2/RC$ .

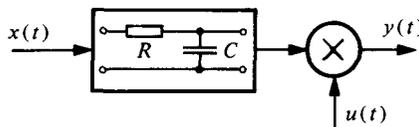


Fig. 8.59

**8.5.18** Déterminer l'expression du signal de sortie  $y(t)$  du système représenté sur la figure 8.60 (modulateur de Hartley), ainsi que celle de sa fonction d'autocorrélation. Montrer que ce signal possède un spectre à bande latérale unique.

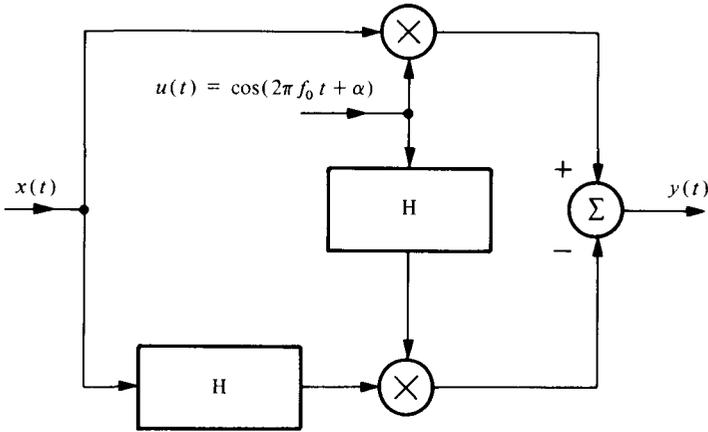


Fig. 8.60

**8.5.19** Soit  $x(t) = A \operatorname{ig}(t/T)$  le signal d'entrée d'un opérateur quadratique. Déterminer et esquisser graphiquement le signal de sortie  $y(t)$ , sa transformée de Fourier et sa densité spectrale d'énergie.

**8.5.20** Déterminer et esquisser graphiquement la transformée de Fourier du signal de sortie d'un opérateur cubique, si a)  $x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$ ; b)  $x(t) = 2AB \operatorname{sinc}(2Bt)$ .

**8.5.21** Le courant de sortie d'un composant électronique commandé par une tension d'entrée  $u$  est donné par l'équation  $i = a + bu + cu^2$ . Déterminer l'expression littérale du taux de distorsion dû au deuxième harmonique en cas d'entrée sinusoïdale d'amplitude  $\hat{U}$ . Evaluer la valeur de ce taux pour  $\hat{U} = 1 \text{ V}$ , si  $i_{\min} = 0,45a$ ,  $i_{\max} = 1,7a$ , et si le courant de sortie en l'absence d'excitation d'entrée vaut  $10 \text{ mA}$ .

**8.5.22** La caractéristique réelle d'entrée-sortie d'un amplificateur peut, au voisinage de l'origine, se mettre sous la forme  $y(x) = AV \arctan(x/V)$  où  $A = 100$  est le facteur d'amplification et  $V = 1 \text{ volt}$  est un facteur d'échelle. Calculer approximativement les taux globaux de distorsion harmonique de cet amplificateur obtenus pour une excitation sinusoïdale d'amplitude égale à: a)  $0,1 \text{ V}$  et b)  $0,2 \text{ V}$ .

**8.5.23** Déterminer en fonction du paramètre  $b$  la valeur moyenne, la valeur quadratique moyenne et la variance du signal de sortie des opérateurs non linéaires définis par  $y_1 = x^2$  et  $y_2 = 1 + x^2 + x^3$ , dont le signal d'entrée est à distribution uniforme  $p(x) = a \operatorname{rect}(x/b)$ .

**8.5.24** Vérifier (8.130) par le théorème de Parseval.

**8.5.25** Déterminer la fonction d'autocorrélation de sortie  $R_y(\tau)$  d'un opérateur de valeur absolue (redresseur bipolaire) de caractéristique  $y = |x|$  dans le cas d'une excitation gaussienne à valeur moyenne nulle de fonction d'autocorrélation  $R_x(\tau)$  connue.

**8.5.26** Vérifier la relation (8.148) en appliquant: a) la formule (8.133); b) le théorème de Price et c) la formule (8.140).

**8.5.27** Soit  $y(t) = x(t) + x^3(t)$  où  $x(t)$  est un signal gaussien à valeur moyenne nulle et fonction d'autocorrélation connue  $R_x(\tau)$ . Déterminer  $R_y(\tau)$ : a) par le théorème de Price (8.136), sachant que  $E[x^{2n}] = 1 \cdot 3 \dots (2n-1) R_x^2(0)$ ; b) en considérant la sortie  $y(t)$  comme la somme de deux signaux  $y_1(t) = x(t)$  et  $y_2(t) = x^3(t)$  et en exploitant la relation (8.137); c) en appliquant la formule (8.140).

**8.5.28** Deux signaux gaussiens  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , à valeurs moyennes nulles, variances  $\sigma_{x_1}^2$  et  $\sigma_{x_2}^2$  et fonction d'intercorrélations  $R_{x_1x_2}(\tau)$ , sont appliqués aux entrées de deux détecteurs de signe. Déterminer la fonction d'intercorrélations des signaux de sortie  $y_1(t) = \text{sgn}[x_1(t)]$  et  $y_2(t) = \text{sgn}[x_2(t)]$ .

**8.5.29** Montrer que la fonction d'intercorrélations des signaux  $y_1(t) = x_1(t)$  et  $y_2(t) = A \text{sgn}[x_2(t)]$ , où  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont gaussiens à valeurs moyennes nulles, est proportionnelle à  $R_{x_1x_2}(\tau)$ .

## ÉCHANTILLONNAGE DES SIGNAUX

## 9.1 INTRODUCTION

## 9.1.1 Motivation et définitions de l'échantillonnage

Les signaux primaires porteurs d'informations sont pratiquement toujours de type analogique (amplitude et temps continus). Un ordinateur, ou tout autre système électronique numérique, est un dispositif qui traite des données, c'est-à-dire des suites de nombres. Il y a apparemment incompatibilité. Si l'on veut traiter un signal par voie numérique, il faut le représenter au préalable par une suite de valeurs ponctuelles prélevées régulièrement (fig. 9.1) ou irrégulièrement. Un tel prélèvement est appelé *échantillonnage*. On parle d'*échantillonnage régulier* ou *périodique* lorsque les prélèvements sont effectués selon un rythme régulier. L'intervalle entre deux échantillons successifs – appelé *pas d'échantillonnage* – est dans ce cas constant. L'*échantillonnage irrégulier* ou à *pas variable* est rarement utilisé.

La représentation numérique des échantillons requiert une opération complémentaire de quantification et de codage dont la nature et les conséquences sont examinées au chapitre 10. L'ensemble réalise une fonction de conversion analogique-numérique (A/N).

Il existe, par ailleurs, des dispositifs tels que les circuits à transferts de charges et les filtres à capacités commutées, qui travaillent naturellement avec des signaux échantillonnés, mais non quantifiés et codés.

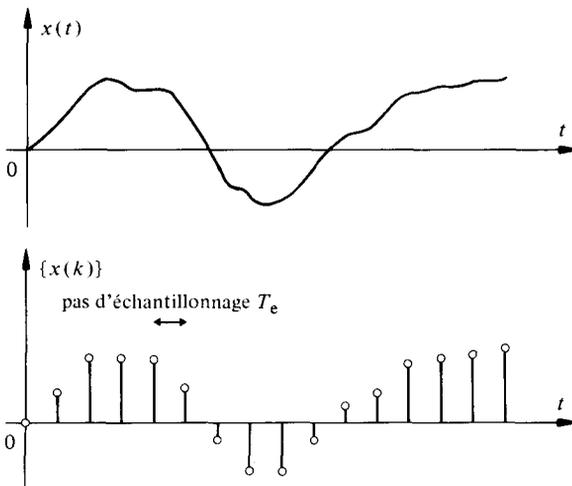


Fig. 9.1

### 9.1.2 Transformation réversible ou irréversible

Lorsqu'un signal doit être échantillonné, la première question à résoudre est de savoir si la transformation ainsi réalisée doit être réversible ou non. En d'autres termes, doit-on pouvoir reconstituer, si nécessaire, le signal analogique de départ à partir des échantillons prélevés ou non.

Le deuxième cas sous-entend que seule une information partielle sur la nature du signal sera extraite par le traitement ultérieur. Un exemple classique est la mesure de l'histogramme (§ 14.2.6) du signal ou d'autres caractéristiques statistiques du 1er ordre (valeur moyenne, puissance, etc.).

La réversibilité d'une telle transformation n'est pas évidente. On montre dans ce qui suit que seules des conditions théoriques, irréalisables parfaitement dans la pratique, permettent une reconstitution exacte du signal analogique à partir de ses échantillons. La procédure d'échantillonnage introduit donc toujours une distorsion inévitable qu'il convient de limiter à un niveau acceptable.

### 9.1.3 Échantillonnage et modulation

Il est courant, dans les ouvrages de télécommunications, de présenter l'échantillonnage dans le contexte d'un chapitre traitant de la modulation. Il y a à cela autant une raison historique (invention de la méthode de représentation numérique des signaux appelée modulation par impulsions codées) qu'un parfait bien-fondé. On verra, en effet, que l'opérateur idéal d'échantillonnage est assimilable à un opérateur de modulation d'amplitude travaillant avec une porteuse constituée par une suite périodique d'impulsions de Dirac. L'échantillonnage est associé à toutes les techniques de modulation d'impulsions (sect. 11.4).

### 9.1.4 Échantillonnage théorique et réalités pratiques

La suite d'échantillons représentée sur la figure 9.1 n'a pas de réalité physique (durée nulle = énergie nulle). Il s'agit donc d'un concept abstrait. Le prélèvement expérimental d'une valeur échantillonnée implique une opération de mesurage qui prend un certain temps. Pratiquement, les valeurs échantillonnées  $x(k) = x(t_k)$  sont représentées par un paramètre (amplitude, surface) d'une suite  $x_e(t) = \sum_k g(t - t_k)$  d'impulsions de forme  $g(t)$  et d'énergie non nulle. Un exemple en est donné par la figure 9.2 où la forme des impulsions est rectangulaire.

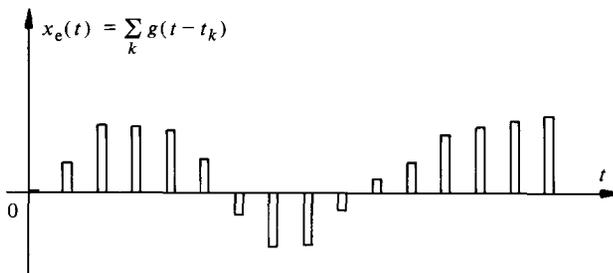


Fig. 9.2

## 9.2 MODÈLES DE SIGNAUX ÉCHANTILLONNÉS

### 9.2.1 Opérateur général d'échantillonnage

Le modèle général (fig. 9.3) d'un échantillonneur est celui d'un opérateur paramétrique séparable (§ 8.3.10) comprenant un multiplicateur suivi d'un circuit linéaire de mise en forme ayant une réponse impulsionnelle  $g(t)$ .

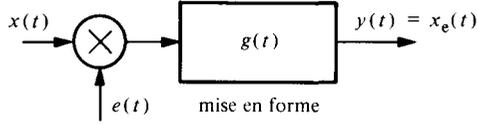


Fig. 9.3

Le signal analogique  $x(t)$  est multiplié par la fonction d'échantillonnage  $e(t)$ , puis filtré. Le signal échantillonné est dénoté  $x_e(t)$ . Il est lié à  $x(t)$  et  $e(t)$  par l'équation (8.96) qui devient ici

$$x_e(t) = [x(t) \cdot e(t)] * g(t) \quad (9.1)$$

Dans le cas de signaux déterministes, la forme générale de la transformée de Fourier du signal échantillonné devient, selon (8.97)

$$X_e(f) = [X(f) * E(f)] \cdot G(f) \quad (9.2)$$

Si  $x(t)$  est un signal aléatoire statistiquement indépendant du signal déterministe d'échantillonnage  $e(t)$ , on a par (8.22) et (8.87)

$$R_{x_e}(\tau) = [R_x(\tau) \cdot \varphi_e(\tau)] * \overset{\circ}{\varphi}_g(\tau) \quad (9.3)$$

et

$$\Phi_{x_e}(f) = [\Phi_x(f) * \Phi_e(f)] \cdot |G(f)|^2 \quad (9.4)$$

### 9.2.2 Échantillonnage réel périodique. Définition

Un *échantillonnage réel périodique* (fig. 9.4) d'un signal analogique  $x(t)$  est obtenu en multipliant  $x(t)$  par une fonction d'échantillonnage  $e(t)$  qui est une suite périodique, de période  $T_e = 1/f_e$  d'impulsions rectangulaires d'amplitude unité et de durée  $D$ :

$$e(t) = \text{rep}_{T_e} \{ \text{rect}(t/D) \} \quad (9.5)$$

Le schéma général de la figure 9.3 se résume ici au seul multiplicateur qui symbolise, dans ce cas, un simple interrupteur périodique (§ 8.3.6). Le filtre linéaire est un circuit passe-tout (court-circuit) de réponse  $g(t) = \delta(t)$ . Le signal échantillonné réellement est dénoté  $x_{er}(t)$ .

Par (4.128) et l'exemple 4.4.17, les formules (9.2) et (9.4) deviennent dans ce cas

$$\begin{aligned} X_{er}(f) &= X(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_e D \text{sinc}(nDf_e) \delta(f - nf_e) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_e D \text{sinc}(nDf_e) X(f - nf_e) \end{aligned} \quad (9.6)$$

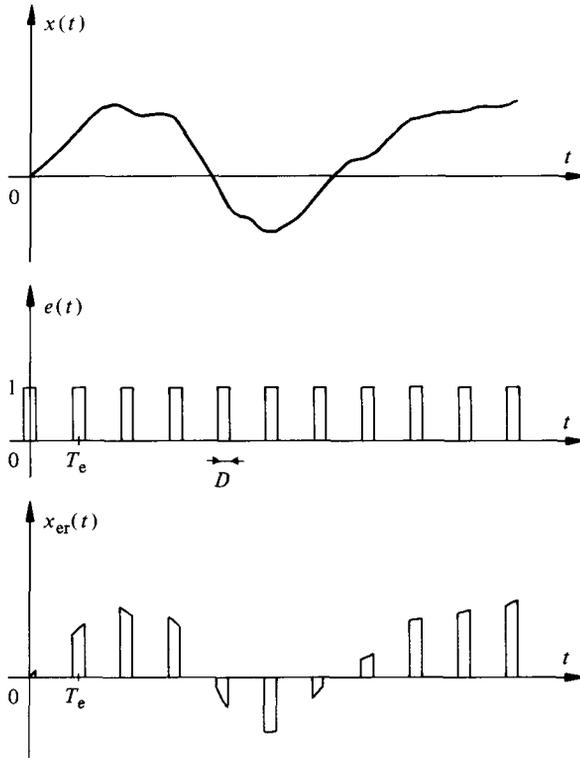


Fig. 9.4

et

$$\begin{aligned}
 \Phi_{x_{er}}(f) &= \Phi_x(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_e^2 D^2 \operatorname{sinc}^2(nDf_e) \delta(f - nf_e) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_e^2 D^2 \operatorname{sinc}^2(nDf_e) \Phi_x(f - nf_e)
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

On constate immédiatement l'importance que joue la *cadence* ou *fréquence d'échantillonnage*  $f_e = 1/T_e$ .

Le spectre du signal échantillonné réellement est donc obtenu par une somme pondérée de termes correspondant à la répétition périodique, de période  $f_e = 1/T_e$ , du spectre du signal analogique. Le facteur de pondération dépend de la densité d'impulsions  $f_e \cdot D = D/T_e$ , qui est compris entre 0 et 1, et varie en fonction de  $n$  selon une loi en sinc pour la transformée de Fourier et en  $\operatorname{sinc}^2$  pour la densité spectrale de puissance. Ce résultat est illustré par la figure 9.5.

Une généralisation de l'échantillonnage réel est la multiplication du signal  $x(t)$  par un train périodique d'impulsions de forme  $g(t)$  quelconque.

### 9.2.3 Échantillonnage périodique idéalisé. Définition

La suite de valeurs ponctuelles  $\{x_k\}$ , où  $x_k = x(t_k)$ , ne constitue pas un signal physiquement réalisable ainsi qu'on l'a relevé au paragraphe 9.1.4. En effet, on peut

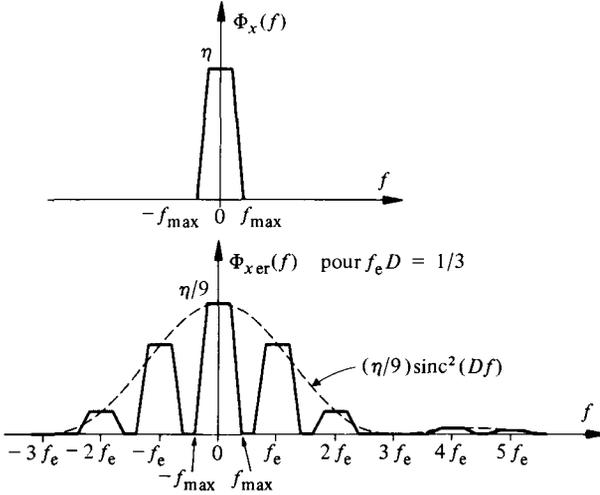


Fig. 9.5

imaginer obtenir un tel signal à partir d'un échantillonnage réel dans lequel on fait tendre la durée  $D$  des impulsions de la fonction d'échantillonnage vers zéro. Il est évident que la puissance du signal ainsi créé tend aussi vers zéro!

Une manière, toute théorique, de mettre en évidence malgré tout les propriétés spectrales d'une telle suite, consiste à multiplier chaque impulsion d'échantillonnage par un facteur  $1/D$ . Le passage à la limite, pour  $D$  tendant vers zéro, transforme alors chaque impulsion rectangulaire en une impulsion de Dirac.

On peut ainsi assimiler théoriquement la suite idéale d'échantillons prélevés avec une cadence fixe  $f_e = 1/T_e$  à un signal  $x_{ei}(t)$  obtenu par la multiplication du signal analogique  $x(t)$  par une fonction d'échantillonnage idéalisée

$$e_i(t) = \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) \quad (9.8)$$

Le modèle général de la figure 9.3 se résume ici à celui d'un *échantillonneur idéalisé* (§ 8.3.5) et (fig. 9.6) dont le signal de sortie est

$$x_{ei}(t) = x(t) \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (9.9)$$

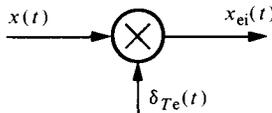


Fig. 9.6

Les propriétés spectrales de  $x_{ei}(t)$  sont obtenues comme dans le cas précédent. La transformée de Fourier et la fonction d'autocorrélation d'une suite périodique d'impulsion de Dirac  $\delta_{T_e}(t)$  sont données respectivement par (4.123) et (4.138)

$$F\{\delta_{T_e}(t)\} = T_e^{-1} \delta_{1/T_e}(f) = f_e \delta_{f_e}(f) \quad (9.10)$$

$$\varphi_{\delta_{T_e}}(\tau) = T_e^{-1} \delta_{T_e}(\tau) = f_e \delta_{T_e}(\tau) \quad (9.11)$$

Ce sont également des suites périodiques d'impulsions de Dirac, de poids  $f_e = 1/T_e$ , et de périodicité  $f_e$  dans le domaine fréquentiel et  $T_e$  dans le domaine temporel. Par (1.57), (9.2) et (9.4), la transformée de Fourier et la densité spectrale du signal échantillonné idéalisé deviennent

$$\begin{aligned} X_{ei}(f) &= X(f) * f_e \delta_{f_e}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_e X(f - n f_e) \\ &= f_e \text{rep}_{f_e}\{X(f)\} \end{aligned} \quad (9.12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{xei}(f) &= \Phi_x(f) * f_e^2 \delta_{f_e}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_e^2 \Phi_x(f - n f_e) \\ &= f_e^2 \text{rep}_{f_e}\{\Phi_x(f)\} \end{aligned} \quad (9.13)$$

Ces deux fonctions correspondent donc à la répétition périodique, de période égale à la cadence d'échantillonnage, de la transformée de Fourier ou de la densité spectrale, respectivement, du signal analogique (fig. 9.7).

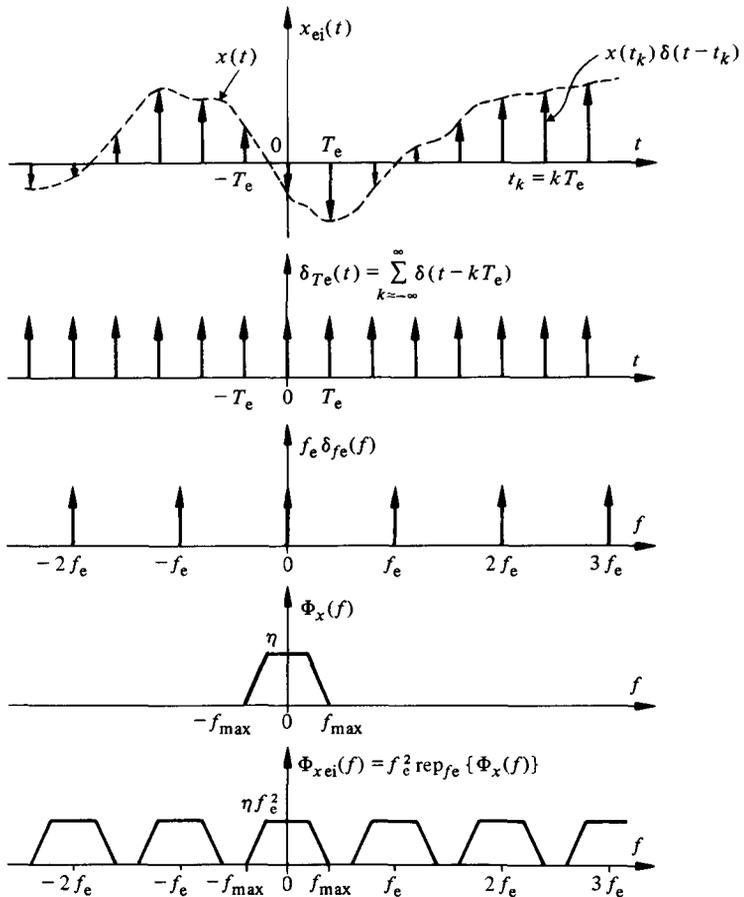


Fig. 9.7

On observe également que la fonction d'autocorrélation (9.3) du signal échantillonné idéalisé est simplement la version échantillonnée idéalement de la fonction d'autocorrélation du signal analogique

$$R_{x_{ei}}(\tau) = R_x(\tau) \cdot \varphi_{\delta T_e}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (9.14)$$

#### 9.2.4 Échantillonnage périodique avec maintien. Définition

Dans l'échantillonnage avec maintien, la valeur échantillonnée instantanément est ensuite mémorisée temporairement sous forme analogique. Ce type d'échantillonnage représente un cas pratique très important.

Le modèle du signal échantillonné avec maintien est facilement obtenu à partir de la figure 9.3 en considérant à nouveau la fonction d'échantillonnage  $e(t)$  comme une suite périodique d'impulsions de Dirac. Le signal d'excitation du filtre de réponse impulsionnelle  $g(t)$  est ainsi le signal échantillonné idéalisé. Le signal de sortie  $x_{em}(t)$  correspond à la convolution du signal d'excitation avec  $g(t)$ . La fonction de maintien pendant une durée  $D$  est obtenue en choisissant comme réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme la fonction

$$g(t) = \text{rect}[(t - D/2)/D] \quad (9.15)$$

qui est, à un facteur  $D$  près, égale à celle d'un moyenneur temporel (§ 8.2.19).

Par (4.29), (9.2), (9.4), (9.12) et (9.13), la transformée de Fourier et la densité spectrale du signal échantillonné avec maintien deviennent

$$X_{em}(f) = Df_e \text{sinc}(Df) \text{rep}_{f_e} \{X(f)\} \exp(-j\pi fD) \quad (9.16)$$

et

$$\Phi_{x_{em}}(f) = D^2 f_e^2 \text{sinc}^2(Df) \text{rep}_{f_e} \{\Phi_x(f)\} \quad (9.17)$$

Le terme  $\exp(-j\pi fD)$  traduit l'effet du retard moyen  $D/2$  introduit par le circuit de maintien (fig. 9.8).

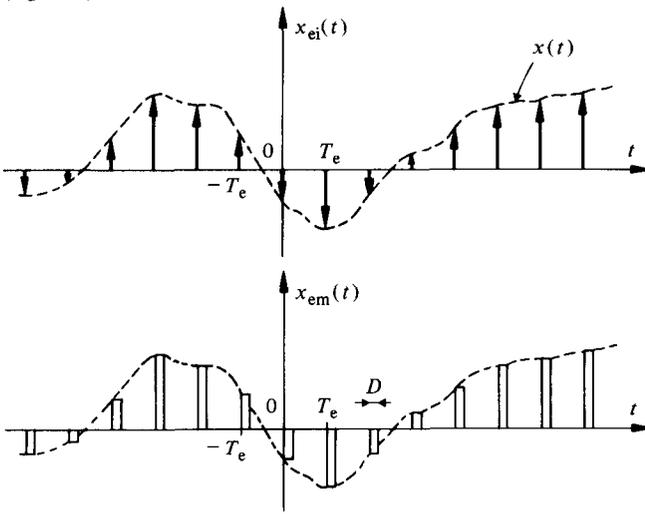


Fig. 9.8

Ainsi, dans le cas de l'échantillonnage avec maintien, la densité spectrale obtenue correspond à celle du cas idéal, pondérée de *manière continue* par une fonction en sinc<sup>2</sup> dont les zéros dépendent de la durée de maintien  $D$  (fig. 9.9). Ceci correspond à une distorsion linéaire d'affaiblissement (§ 8.2.25). L'échantillonnage réel (fig. 9.5) fait lui intervenir une pondération discrète.

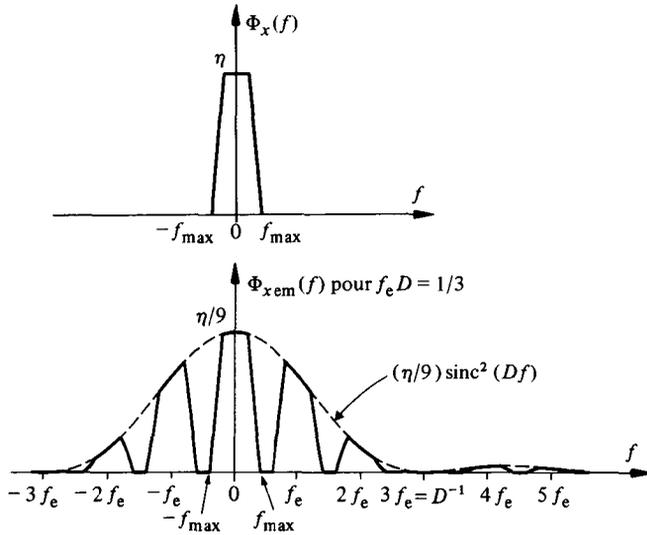


Fig. 9.9

**9.2.5 Échantillonnage périodique avec moyennage. Définition**

Une situation intermédiaire entre l'échantillonnage réel et l'échantillonnage avec maintien est l'*échantillonnage avec moyennage*. L'amplitude de chaque impulsion rectangulaire du signal échantillonné  $x_{e\mu}(t)$  correspond à la valeur moyenne du signal analogique mesurée sur un intervalle de durée équivalente  $D$ . Le modèle (fig. 9.10) d'un échantillonneur de ce type est obtenu en plaçant en amont de l'échantillonneur avec maintien un deuxième circuit moyenneur de réponse impulsionnelle  $g_1(t) = D^{-1} \text{rect} [(t - D/2)/D]$ .

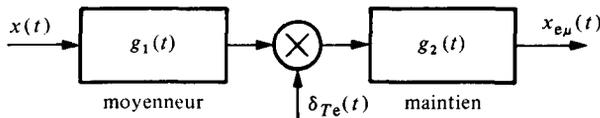


Fig. 9.10

Le signal échantillonné avec moyennage devient

$$x_{e\mu}(t) = [x(t) * g_1(t)] \delta_{Te}(t) * g_2(t) \tag{9.18}$$

et, en tenant compte de (9.15), on obtient pour la densité spectrale

$$\Phi_{x_{e\mu}}(f) = D^2 f_e^2 \text{sinc}^2(Df) \text{rep}_{f_e} \{ \text{sinc}^2(Df) \cdot \Phi_x(f) \} \tag{9.19}$$

### 9.2.6 Transformée de Fourier et transformée en $z$ d'un signal échantillonné idéalisé

Le signal échantillonné idéalisé s'écrit, selon (9.9)

$$x_{ei}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (9.20)$$

Par transformation de Fourier des deux membres, on obtient, en tenant compte de (4.76), l'expression suivante équivalente à (9.12)

$$X_{ei}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \exp(-j2\pi f k T_e) \quad (9.21)$$

Il est d'usage, dans les ouvrages consacrés au traitement numérique des signaux (vol. XX), de normaliser l'axe du temps par rapport à la période d'échantillonnage. En posant ainsi  $T_e = 1$  dans (9.21), on obtient la définition conventionnelle de la transformée de Fourier d'un signal numérique (alias signal échantillonné idéalisé)

$$X_{ei}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \exp(-j2\pi f k) \quad (9.22)$$

En introduisant la même normalisation dans (9.12), on a l'expression équivalente

$$X_{ei}(f) = \text{rep}_1\{X(f)\} \quad (9.23)$$

qui met mieux en évidence sa périodicité égale à l'unité.

On a déjà mentionné, au paragraphe 8.2.7, l'intérêt de la transformée en  $z$  pour l'étude des signaux et systèmes échantillonnés [105]. Elle s'écrit sous forme d'une série de puissances négatives

$$X_{ei}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad (9.24)$$

où  $z$  est une variable complexe. Cette transformation, dont les propriétés sont présentées dans le volume XX de ce Traité, s'identifie avec la transformation de Fourier (9.22) sur le cercle unité  $z = \exp(j2\pi f)$ . Elle permet, entre autres, de caractériser un signal échantillonné par les pôles et les zéros de  $X_{ei}(z)$  et d'exprimer simplement les conditions de stabilité d'un système de traitement échantillonné (souvent numérique).

## 9.3 THÉORÈMES D'ÉCHANTILLONNAGE ET CONSÉQUENCES

### 9.3.1 Recouvrement spectral. Définition

Chaque spectre de signal échantillonné est une fonction de la répétition périodique, de période égale à la cadence d'échantillonnage  $f_e = 1/T_e$ , du spectre original du signal analogique. Selon le support fréquentiel de celui-ci, les motifs spectraux ainsi répétés sont à supports disjoints (cas des figures 9.5, 9.7 et 9.9) ou, au contraire, se recouvrent partiellement (fig. 9.11). La présence d'un tel *recouvrement spectral* (on dit aussi *effet de repliement*, en anglais: *aliasing effect*) entraîne la non-réversibilité de la transformation. L'échantillonnage, même idéal, de tout signal dont le spectre n'est pas strictement à bande limitée implique l'apparition du phénomène de recouvrement spectral et, donc, la non-réversibilité. Pour réduire le risque de recouvrement spectral, on place, en pratique, un filtre adéquat (§ 9.3.6) en amont de l'échantillonneur.

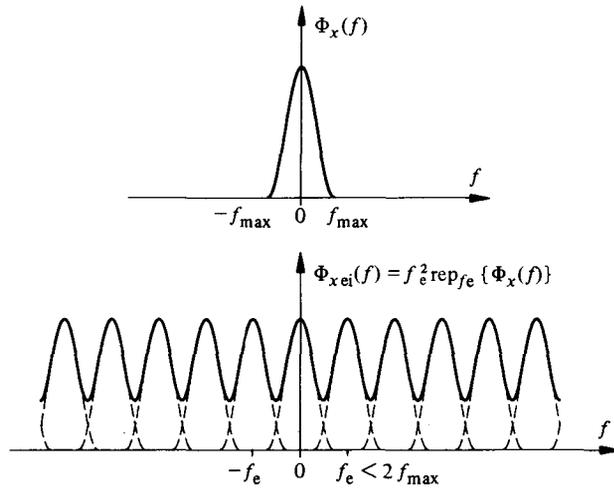


Fig. 9.11

### 9.3.2 Inexistence de signaux à énergie finie et à bande limitée

Tout signal à énergie finie peut être représenté comme le produit d'un signal à puissance moyenne finie non nulle et d'une fonction de pondération du type (8.91). Il en découle, par (8.85) ou (8.88), que son spectre est le résultat d'un produit de convolution dont l'un des termes est une fonction fréquentielle de support infini. Même si le signal à puissance moyenne finie non nulle possède un spectre à support borné (exemple limite : signal sinusoïdal), le signal à énergie finie qui s'en déduit par produit possède nécessairement un spectre à support infini. *Ainsi, tout signal physiquement réalisable ne peut être simultanément à bande limitée.* Ce résultat est un corollaire d'un théorème connu sous le nom de théorème de Paley-Wiener [22].

L'échantillonnage d'un signal physiquement réalisable entraîne donc toujours un certain recouvrement qui exclut toute possibilité de réversibilité parfaite.

La condition d'énergie finie impose, toutefois, que le spectre tende vers zéro lorsque  $|f|$  tend vers l'infini. Il existe, par conséquent, une fréquence au-delà de laquelle le spectre est quasiment nul, d'où la possibilité de choisir une cadence d'échantillonnage ne provoquant qu'un recouvrement négligeable et garantissant une réversibilité acceptable.

### 9.3.3 Théorème d'échantillonnage pour signaux de spectre passe-bas à support borné

Ce théorème, dont la démonstration est due au mathématicien Shannon [5], peut s'énoncer comme suit :

- un signal analogique  $x(t)$  ayant un spectre de type passe-bas s'étendant jusqu'à la fréquence limite  $f_{\max}$  est entièrement décrit par la suite complète de ses valeurs instantanées  $x(t_k)$  prélevées à intervalles réguliers de durée  $T_e$  inférieure ou égale à  $1/(2f_{\max})$ .

En d'autres termes, la condition de réversibilité est assurée si

$$f_e = 1/T_e \geq 2f_{\max} \quad (9.25)$$

Remarquons que la largeur de bande totale occupée par le spectre d'un tel signal est  $B_m = f_{\max}$ . Ainsi, (9.25) peut aussi s'exprimer sous la forme  $f_e \geq 2 B_m$ . Une démonstration mathématique de ce théorème, valable dans le cas d'un signal  $x(t)$  déterministe, avec transformée de Fourier  $X(f) = 0$  pour  $|f| > f_{\max} = B_m$ , est donnée au paragraphe 3.4.9. Le cas des signaux à spectre passe-bande est traité au paragraphe 9.3.8.

Une généralisation valable pour tout type de signaux peut être établie en observant que si la condition (9.25) est satisfaite, aucun recouvrement spectral ne se produit. Il est ainsi théoriquement possible de recréer un signal possédant le spectre  $\Phi_x(f)$  en filtrant le signal échantillonné à l'aide du filtre passe-bas idéal défini sur la figure 8.22 (cas de l'échantillonnage réel et de l'échantillonnage idéalisé). Dans le cas de l'échantillonnage avec maintien ou de l'échantillonnage avec moyennage, la même restitution est possible en exigeant, en plus, que ce filtre compense la distorsion d'affaiblissement introduite.

En reprenant le cas de l'échantillonnage idéalisé (fig. 9.3) suivi d'un filtre passe-bas idéal dont la réponse harmonique d'amplitude est

$$|G(f)| = T_e \text{ rect}(f/f_e) \tag{9.26}$$

on obtient le schéma de la figure 9.12.

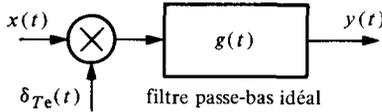


Fig. 9.12

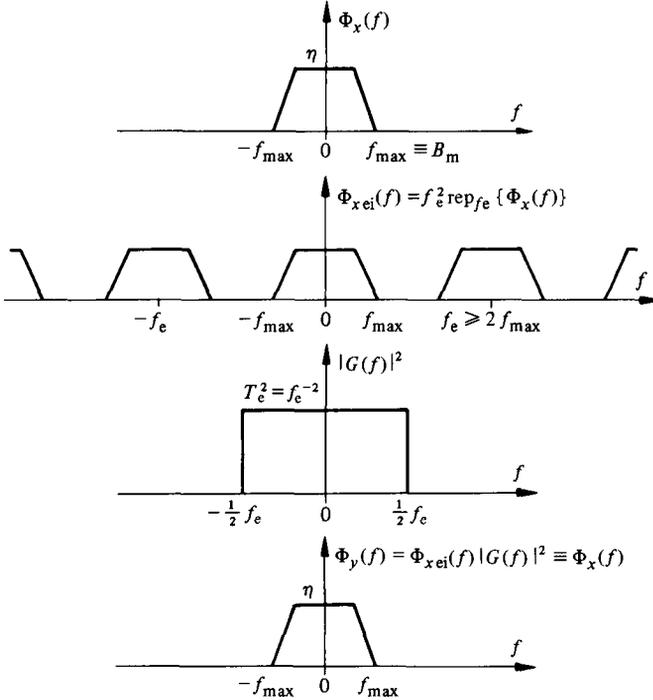


Fig. 9.13

Le signal de sortie  $y(t)$  a, par (9.13) et (8.24), la densité spectrale

$$\Phi_y(f) = \text{rep}_{f_e} \{ \Phi_x(f) \} \cdot \text{rect}(f/f_e) \quad (9.27)$$

qui est égale à  $\Phi_x(f)$  si le support de celle-ci est borné à  $f = f_{\max} = B_m$  et si  $f_e > 2f_{\max}$  (fig. 9.13).

La réponse impulsionnelle du filtre idéal est ici (cf. tab. 8.23)

$$g(t) = \text{sinc}[(t - t_0)/T_e] \quad (9.28)$$

et le signal de sortie devient, en posant  $t_0 = 0$  pour simplifier,

$$\begin{aligned} y(t) \equiv x(t) &= [x(t) \delta_{T_e}(t)] * g(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \text{sinc}[(t/T_e) - k] \end{aligned} \quad (9.29)$$

Cette formule définit l'interpolation idéale examinée à la section suivante.

### 9.3.4 Observation

Dans le cas de l'échantillonnage d'une sinusoïde de fréquence  $f_0$ , la cadence d'échantillonnage ne peut être exactement égale à  $2f_0$  en raison du recouvrement spectral apparaissant dans ce cas théorique.

### 9.3.5 Conséquences pratiques

L'importance pratique du théorème d'échantillonnage, caractérisé par le résultat (9.25), est considérable. Il impose une contrainte fondamentale à tous les systèmes numériques de traitement, de transmission ou d'enregistrement devant travailler en temps réel. Pour des raisons liées à la reconstruction du signal analogique (sect. 9.4), la cadence effective d'échantillonnage doit être généralement nettement supérieure à la limite théorique  $f_e = 2f_{\max}$ .

Ainsi, un signal téléphonique dont la fréquence est limitée à environ 3400 Hz doit être échantillonné à une cadence supérieure à 6800 échantillons par seconde (normalisation internationale:  $f_e = 8000$  Hz). Avec un débit moyen de quelques mots par seconde, une petite phrase nécessite déjà plusieurs dizaines de milliers d'échantillons!

Le signal vidéo de la télévision possède un spectre s'étendant jusqu'à environ 5 MHz. La cadence d'échantillonnage doit donc, dans ce cas, être supérieure à 10 MHz (pratiquement de l'ordre de 18 MHz). Une trame de 20 ms représente, à elle seule, plusieurs centaines de milliers d'échantillons! Le stockage d'une seule trame dans une mémoire d'ordinateur impose des exigences de place disponible importantes.

Par contre, il se révèle inutile d'échantillonner certains signaux de mesures associés à des phénomènes physiques de grande inertie (température, par exemple) à des cadences dépassant quelques échantillons par seconde, voire quelques échantillons par minute.

On voit qu'une bonne connaissance des caractéristiques spectrales du signal analogique à traiter est essentielle afin de pouvoir effectuer un choix intelligent de la cadence d'échantillonnage.

### 9.3.6 Filtre antirepliement. Définitions

Dans de nombreuses circonstances, le spectre du signal à échantillonner n'est pas parfaitement connu. Il contient souvent une composante à large bande due à la présence additionnelle de bruit de fond généré dans le milieu de mesure, le capteur, les circuits d'amplification, etc. Il est alors indispensable d'introduire un pré-filtrage du signal analogique avant de procéder à l'échantillonnage (fig. 9.14) afin de supprimer tout risque de recouvrement spectral sans devoir imposer une cadence d'échantillonnage abusive.

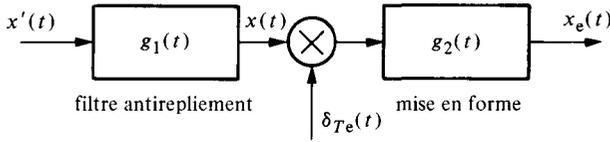


Fig. 9.14

Le *filtre antirepliement* (aussi appelé : *filtre de garde*) parfait serait un filtre passe-bas idéal de bande passante  $B = f_e/2$ . On sait toutefois qu'un tel filtre n'est pas réalisable, car non causal (§ 8.2.21). Tout filtre antirepliement réel comporte donc une bande de transition (fig. 9.15) qui reporte la bande passante limite  $B_m$  bien au-delà de la bande passante effective  $B$ . La cadence d'échantillonnage pratique minimale doit donc être égale à

$$f_{e, \min} = 2B_m > 2B \quad (9.30)$$

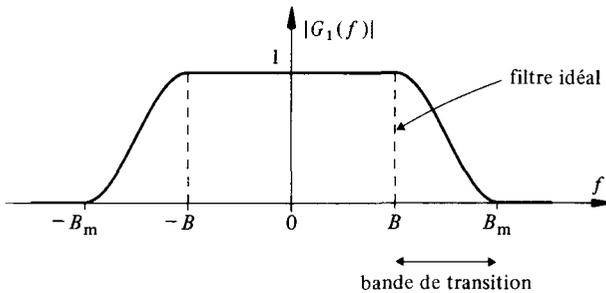


Fig. 9.15

La largeur de la bande de transition dépend du type de filtre utilisé et du critère choisi pour fixer  $B_m$ .

On utilise parfois, pour la réalisation de ce filtre, l'*approximation de Butterworth* (§ XIX.4.3.2) de degré  $n$  :

$$|G_1(f)|^2 = [1 + (f/f_c)^{2n}]^{-1} \quad (9.31)$$

Celle-ci maintient dans la bande passante une réponse plate optimale (fig. 9.16) avec une atténuation de  $-3$  dB pour  $f = f_c$  et une pente asymptotique d'atténuation de  $-20n$  dB/décade ( $-6n$  dB/octave) pour  $f > f_c$ . Le cas  $n = 1$  correspond au filtre passe-bas RC du paragraphe 8.2.24.

Si le spectre du signal d'entrée  $x'(t)$  est constant, on peut montrer [106], en identifiant  $B$  à  $f_c$ , que le rapport  $\xi_{r,x}$  de la puissance  $P_r$  de l'erreur introduite par le recouvrement sur la puissance totale  $P_x$  du signal filtré est approximativement, pour

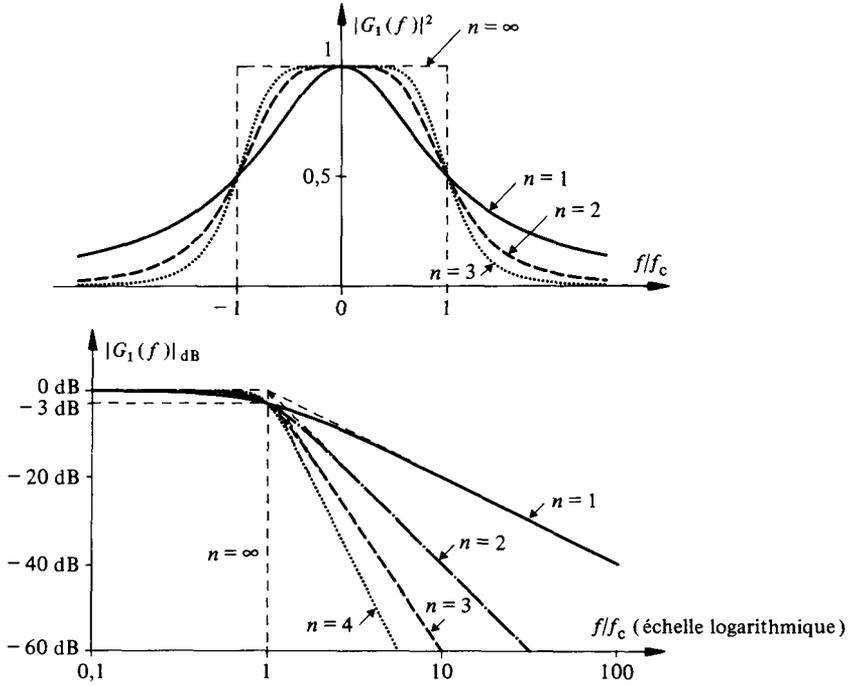


Fig. 9.16

$(2f_c/f_e)^{2n} \ll 1$ , donné par

$$\xi_{rx} = \frac{P_r}{P_x} \cong 2^{2n} \frac{n}{\pi(2n-1)} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \left(\frac{f_c}{f_e}\right)^{2n-1} \tag{9.32}$$

En exprimant ce rapport en décibels ( $\xi_{rx \text{ dB}} = 10 \log_{10} \xi_{rx}$ ), on obtient la loi représentée sur la figure 9.17 :

$$\log_{10} \left(\frac{f_e}{f_c}\right) \cong \frac{1}{2n-1} \left[ \log_{10} \frac{n 2^{2n} \sin(\frac{1}{2} \pi/n)}{(2n-1) \pi} - \frac{\xi_{rx \text{ dB}}}{10} \right] \tag{9.33}$$

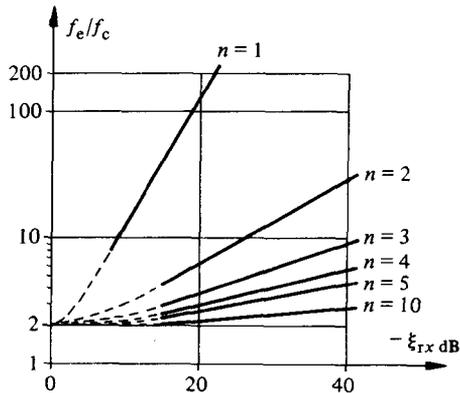


Fig. 9.17

Dans le cas d'un simple filtre  $RC (n = 1)$ , un rapport de puissance de 1% ( $\xi_{rx \text{ dB}} = -20 \text{ dB}$ ) impose une cadence d'échantillonnage  $f_e \cong 127 f_c$ . Pour  $n = 2$  et  $n = 4$ , le même rapport de puissance conduit à une cadence d'échantillonnage de l'ordre de  $6 f_c$  et  $3 f_c$ , respectivement. Il y a donc un compromis à trouver entre l'abaissement de la cadence d'échantillonnage vers la limite théorique et la complexité du filtre antirepliement requis.

D'autres approximations du filtre idéal sont possibles (*filtres de Tchebycheff*, *filtres elliptiques*, etc.). Leurs fonctions de transfert possèdent une transition plus rapide entre bande passante et bande bloquée, au prix d'une ondulation résiduelle dans la bande passante et, pour les filtres elliptiques, dans la bande bloquée également.

### 9.3.7 Distorsion due au recouvrement spectral

Les figures 9.18 et 9.19 illustrent deux types de distorsion due au non respect du théorème d'échantillonnage. Dans le premier cas, une sinusoïde de fréquence  $f_0$  est échantillonnée à une cadence  $f_e = 1/T_e = 1,25 f_0$ . Il existe en fait une infinité de sinusoïdes, de fréquences  $nf_e \pm f_0$ , passant par les mêmes échantillons. En l'absence d'une information plus précise, on interprétera toujours cette suite comme provenant de la sinusoïde de plus basse fréquence  $f'_0 = f_e - f_0$ . C'est ce que tendra à faire naturellement tout filtre passe-bas de reconstitution.

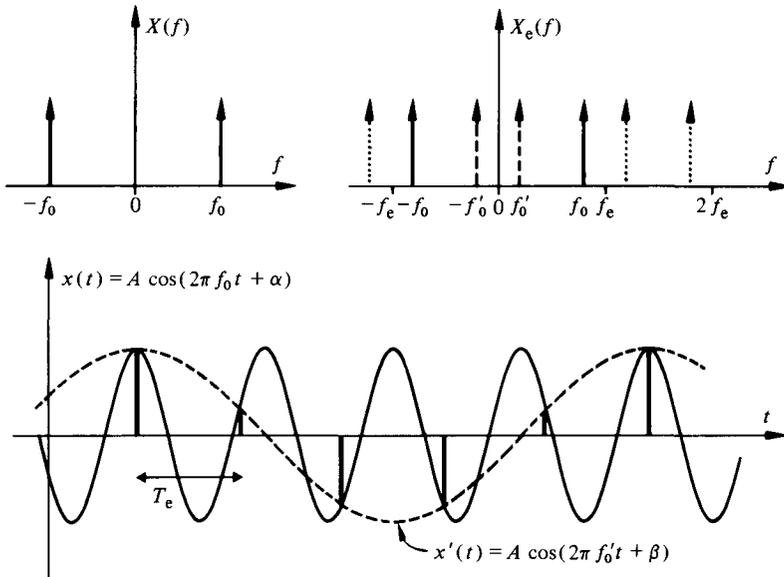


Fig. 9.18

La figure 9.19 montre la déformation subie par le signal reconstitué  $x'(t)$  même après filtrage passe-bas idéal, lorsque le signal analogique initial  $x(t)$  possède un spectre de support non borné et que la cadence d'échantillonnage choisie laisse subsister un recouvrement important.

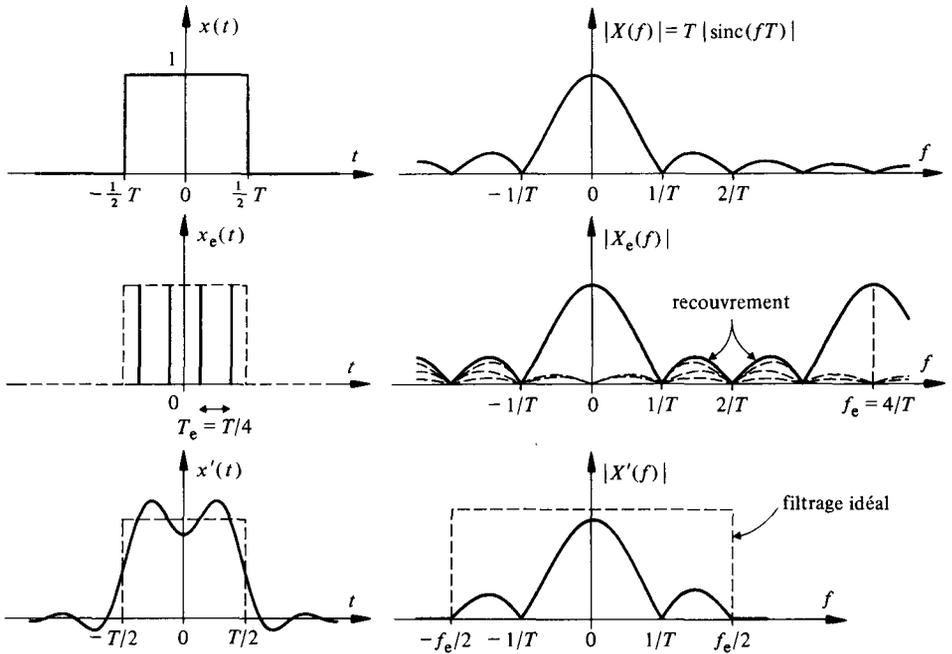


Fig. 9.19

**9.3.8 Théorème d'échantillonnage pour signaux de spectre passe-bande à support borné**

Une application aveugle du théorème d'échantillonnage (9.25) conduit, lorsque le signal analogique est à spectre passe-bande borné par la fréquence inférieure  $f_1$  et la fréquence supérieure  $f_2$ , à une cadence d'échantillonnage  $f_e \geq 2f_2$ .

En fait, la condition de non recouvrement est satisfaite [35] pour une cadence d'échantillonnage minimale

$$f_e = 2f_2/m \tag{9.34}$$

où  $m$  est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à  $f_2/B$ , avec  $B = f_2 - f_1$ . Toutes les cadences supérieures ne sont pas nécessairement utilisables. Pour  $f_2 \gg B$ , la cadence d'échantillonnage minimale tend vers  $2B$ .

Cette limite peut, de fait, être atteinte théoriquement quelle que soit la largeur de bande  $B$  si l'on fait intervenir la représentation introduite à la section 7.4 :

$$\begin{aligned} x(t) &= a(t) \cos(2\pi f_0 t) - b(t) \sin(2\pi f_0 t) \\ &= \text{Re} \{ \underline{x}(t) \exp(j2\pi f_0 t) \} \end{aligned} \tag{9.35}$$

En choisissant ici la fréquence arbitraire  $f_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ , les composantes en phase  $a(t)$  et en quadrature  $b(t)$  sont de spectre passe-bas borné à  $f_{\max} = B/2$ . Elles sont donc chacune représentables par une suite d'échantillons prélevés à la cadence  $f_e = 2f_{\max} = B$  en vertu de (9.25). Le théorème suivant s'en déduit

- soit  $x(t)$  un signal à spectre passe-bande à support borné, de largeur de bande  $B = f_2 - f_1$ , et  $f_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$  la fréquence centrale de cette bande; alors  $x(t)$  peut être représenté par la série cardinale

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [a(kT_e) \cos(2\pi f_0 t) - b(kT_e) \sin(2\pi f_0 t)] \cdot \text{sinc}[(t/T_e) - k] \quad (9.36)$$

où

$$T_e = 1/f_e = 1/B \quad (9.37)$$

La différence par rapport au théorème énoncé au paragraphe 9.3.3 est qu'ici, à chaque pas d'échantillonnage, on prélève un échantillon *sur chacune des deux composantes*  $a(t)$  et  $b(t)$ . Chaque paire d'échantillons définit une valeur ponctuelle (partie réelle et partie imaginaire ou, alternativement, module et argument) de l'enveloppe complexe  $\underline{r}(t) = a(t) + jb(t) = r(t) \exp j\alpha(t)$ . Si la cadence d'échantillonnage est  $f_e = B$ , le taux d'échantillonnage, mesuré en nombre d'échantillons réels par seconde, est encore égal à  $2B$ .

Les composantes  $a(t)$  et  $b(t)$  peuvent être obtenues à l'aide du système schématisé sur la figure 9.20.

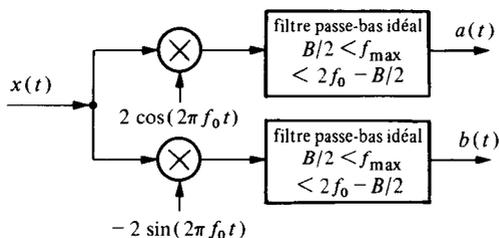


Fig. 9.20

### 9.3.9 Dimension d'un signal de durée finie et de spectre à support borné

Bien qu'un tel signal ne puisse exister, c'est un concept abstrait commode. Il découle des théorèmes d'échantillonnage énoncés que si la durée du signal est  $T$  et la largeur de bande de son spectre est  $B$ , le signal est entièrement déterminé par

$$N = 2BT \quad (9.38)$$

échantillons. Ce nombre  $N$  correspond à la quantité minimale d'informations nécessaires pour reconstituer le signal et en mesure, en quelque sorte, la dimension.

On a montré, au chapitre 3, qu'à tout signal de durée  $T$  correspond un développement en série de Fourier de coefficients complexes  $X_k$  associés aux fréquences discrètes  $k/T$ . Si la largeur de bande est  $B$ , ce développement comprend (pour  $k \geq 0$ )  $BT$  coefficients complexes, donc à nouveau  $2BT$  éléments d'information.

Un signal d'une durée d'une minute et d'une largeur de bande de 10 kHz ne peut pas être correctement représenté par moins de 1 200 000 éléments d'information (si l'on ne prend pas en compte l'éventuelle dépendance statistique entre échantillons introduisant une redondance de l'information).

### 9.3.10 Théorème réciproque

Compte tenu de la dualité temps-fréquence, on démontre aisément que le spectre complexe  $X(f)$  d'un signal  $x(t, T)$  de durée finie  $T$  est uniquement déterminé par la

suite de ses valeurs échantillonnées sur l'axe des fréquences avec un pas  $\Delta f = 1/T$ :

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n/T) \operatorname{sinc}(Tf - n) \quad (9.39)$$

Par analogie avec (9.12), la transformée de Fourier inverse de la fonction d'échantillonnage idéalisée

$$X(f) \cdot \delta_{\Delta f}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n/T) \delta(f - n/T) \quad (9.40)$$

est un *signal périodique*:

$$x_p(t) = T \cdot \operatorname{rep}_T \{x(t, T)\} \quad (9.41)$$

Par (4.77), cette transformée de Fourier inverse peut encore s'écrire sous la forme

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n/T) \exp(j2\pi nt/T) \quad (9.42)$$

qui est le pendant de l'expression (9.21) et s'identifie avec le développement en série de Fourier (3.74) en divisant les deux membres par  $T$ . La période principale  $x(t, T)$  peut ainsi s'écrire

$$x(t, T) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n/T) \exp(j2\pi nt/T) \quad (9.43)$$

### 9.3.11 Représentations échantillonnées conjointes dans le temps et en fréquence: transformation de Fourier discrète. Définitions

En combinant les résultats des paragraphes 9.3.3 et 9.3.10, on peut faire correspondre à une suite temporelle de  $N = T/T_e$  échantillons  $x(kT_e)$  prélevés sur une durée  $T$  à une cadence  $f_e = 1/T_e$ , une suite fréquentielle de  $N$  échantillons complexes  $X(n/T)$  prélevés sur une bande de largeur  $f_e$  avec un pas  $\Delta f = 1/T = f_e/N$ . Par (9.43) et (9.21), on obtient la paire de transformées

$$x(kT_e, T) = \frac{1}{NT_e} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} X(n/T, f_e) \exp(j2\pi kn/N) \quad (k = k_0, \dots, k_0 + N - 1) \quad (9.44)$$

$$X(n/T, f_e) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(kT_e, T) \exp(-j2\pi kn/N) \quad (n = n_0, \dots, n_0 + N - 1) \quad (9.45)$$

La notation utilisée met en évidence le fait que (9.44) et (9.45) représentent chacune *une période d'une suite périodique* (fig. 9.21). Si  $x(t)$  est réel, les échantillons complexes  $X(n/T) = |X(n/T)| \exp j \vartheta_x(n/T)$  situés symétriquement par rapport à  $mf_e$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) forment des paires conjuguées. A  $N$  éléments d'information temporels correspondent donc toujours  $N$  éléments d'information fréquentiels. On choisit généralement  $n_0 = -N/2$  de manière à faire apparaître la *période principale* du spectre complexe. Il est de même usuel de faire coïncider  $k_0$  avec l'origine des temps.

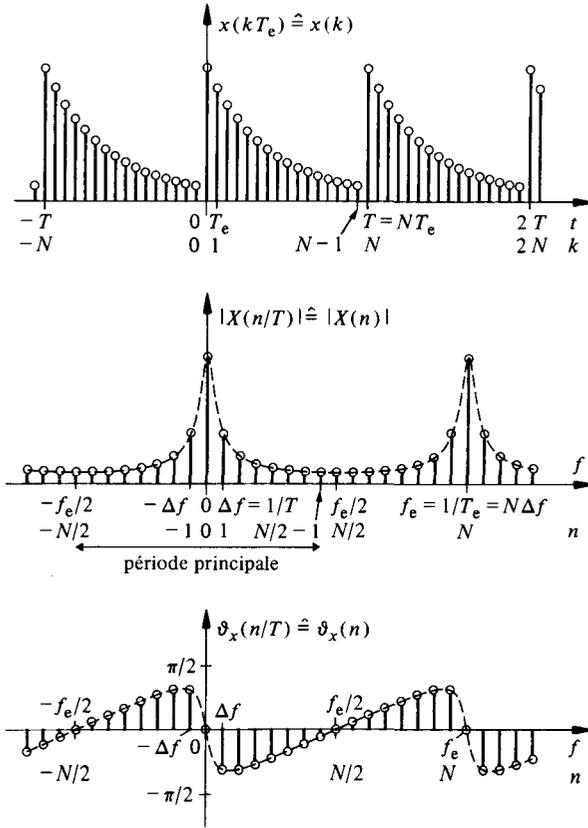


Fig. 9.21

En normalisant l'axe du temps par rapport à la période d'échantillonnage ( $T_e = 1$ ) et en introduisant les simplifications de notation

$$x(k) \hat{=} x(kT_e, T) \quad (9.46)$$

$$X(n) \hat{=} X(n/T, f_e) \quad (9.47)$$

$$W_N \hat{=} \exp(j2\pi/N) \quad (9.48)$$

on obtient la définition conventionnelle (§ XX.3.2.12) de la *transformation de Fourier discrète* (abréviation TFD, en anglais DFT) déjà mentionnée au paragraphe 8.2.3 :

$$x(k) = N^{-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) W_N^{nk} \leftrightarrow X(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k) W_N^{-nk} \quad (9.49)$$

avec  $k = k_0, \dots, k_0 + N - 1$  et  $n = -N/2, \dots, N/2 - 1$ .

Des algorithmes de calcul efficaces, connus sous le nom de *transformations de Fourier rapides* (en anglais: *Fast Fourier Transforms* ou *FFT*) sont décrits dans les ouvrages spécialisés consacrés au traitement numérique des signaux (voir, en particulier, la référence [107] et le volume XX). L'efficacité est obtenue en éliminant les calculs redondants.

### 9.3.12 Sous-échantillonnage d'un signal périodique

Soit  $T$  la période d'un signal périodique  $x(t)$  et  $T_e$  le pas d'échantillonnage. Si  $T_e > T$ , un seul échantillon sera au mieux prélevé à chaque période. Une reconstitution  $x(t)$  de la forme du signal selon une nouvelle échelle de temps  $t'$  est toutefois possible dans ce cas si

$$T_e = mT + \epsilon \quad (9.50)$$

où  $m$  est un nombre entier positif et  $\epsilon$  joue le rôle de pseudo-période d'échantillonnage (fig. 9.22). En effet, une période entière du signal peut être reconstruite à partir des échantillons prélevés à la cadence  $f_e = 1/T_e$  lorsque  $N = T/\epsilon$  échantillons sont disponibles.

Cette technique est principalement utilisée pour l'acquisition et la visualisation de phénomènes périodiques de très haute fréquence (oscilloscope à échantillonnage) et dans certains dispositifs de détection de signaux périodiques noyés dans le bruit de fond appelés moyenneur à échantillonnage (en anglais: boxcar integrator). Elle s'apparente à l'effet stroboscopique employé pour l'observation du mouvement de machines tournantes.

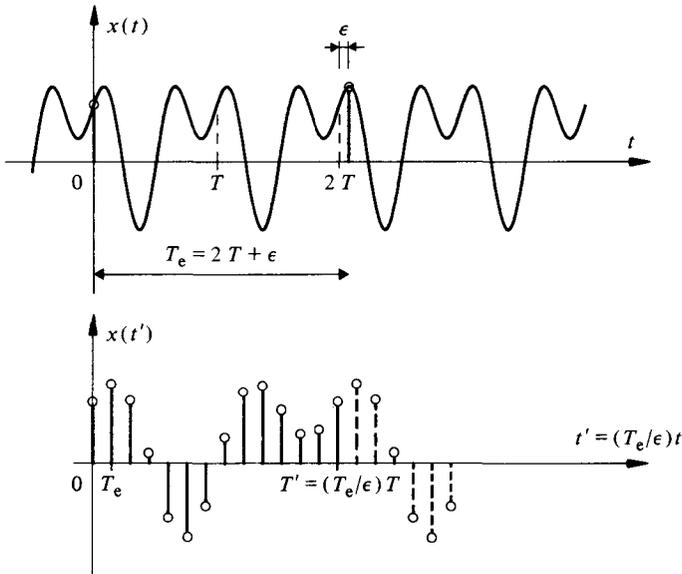


Fig. 9.22

## 9.4 RECONSTITUTION PAR INTERPOLATION OU EXTRAPOLATION

### 9.4.1 Interpolation et extrapolation. Définitions

La reconstitution (fig. 9.23) d'un signal analogique  $y(t)$  à partir d'une suite d'échantillons  $\{y(kT_e)\}$  implique la restitution de toutes les valeurs intermédiaires entre deux échantillons successifs. Cette restitution  $\tilde{y}(t)$  est généralement approximative et introduit donc une distorsion  $d(t) = y(t) - \tilde{y}(t)$ .

Si le système de restitution détermine les valeurs du signal dans le pas d'échantillonnage suivant l'échantillon d'abscisse  $kT_e$  à partir de cet échantillon et des  $m$  échantillons antérieurs, c'est un *extrapolateur d'ordre  $m$* .

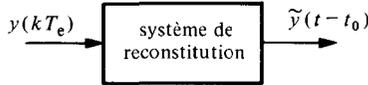


Fig. 9.23

Si les valeurs reconstruites sont déterminées à l'aide de  $m + 1$  échantillons dont certains postérieurs à l'abscisse  $kT_e$ , le système de restitution est un *interpolateur d'ordre m*.

Un interpolateur n'est apparemment pas un système causal, puisqu'il a besoin de connaître l'avenir pour calculer le présent. On le rend causal en admettant un retard  $t_0$  adéquat à la reconstitution.

Un retard, même important, ne pose en principe pas de problème lorsque le traitement n'est pas effectué en temps réel. Même dans ce cas, beaucoup de systèmes de traitement ou de télécommunications peuvent tolérer des retards substantiels. Les exigences sont, par contre, beaucoup plus sévères dans les systèmes en boucle fermée (réglage automatique, par exemple) où le retard introduit peut poser des problèmes de stabilité.

#### 9.4.2 Reconstitution par opérateur linéaire : filtre de lissage. Définition

Par (9.9), le signal échantillonné idéalisé s'écrit

$$y_{ei}(t) = y(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (9.51)$$

En présentant ce signal à l'entrée d'un opérateur linéaire (fig. 9.24) de réponse impulsionnelle  $g(t)$ , on obtient le signal reconstitué

$$\tilde{y}(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT_e) g(t - kT_e) \quad (9.52)$$

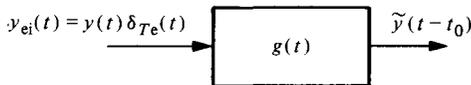


Fig. 9.24

L'opérateur linéaire utilisé dans cette fonction est usuellement appelé *filtre de lissage*. Ce filtre est de type passe-bas si le signal est à spectre passe-bas et de type passe-bande si le spectre du signal l'est aussi. On n'examinera, plus loin, que le cas du filtre passe-bas.

Par (9.13) et (9.24), la densité spectrale du signal reconstitué est donnée par (fig. 9.25)

$$\Phi_{\tilde{y}}(f) = f_e^2 \text{rep}_{f_e} \{ \Phi_y(f) \} \cdot |G(f)|^2 \quad (9.53)$$

et l'erreur quadratique moyenne de reconstitution vaut

$$\overline{d^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_{\tilde{y}}(f) - \Phi_y(f)] df \quad (9.54)$$

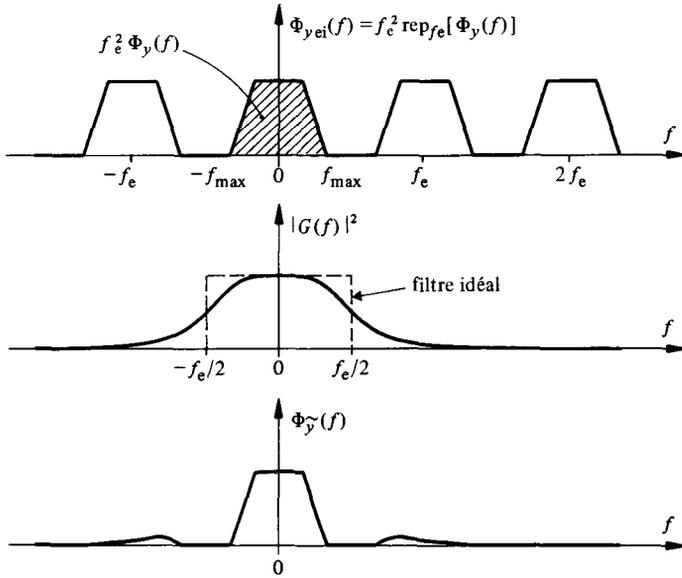


Fig. 9.25

La qualité de la reconstitution dépend, comme au paragraphe 9.3.6, d'un compromis entre cadence d'échantillonnage et complexité du filtre de lissage. Une cadence nettement supérieure à la limite théorique  $f_e = 2f_{\max}$  est pratiquement requise pour limiter à la fois la distorsion de recouvrement spectral et la distorsion de reconstitution.

### 9.4.3 Reconstitution par approximation polynomiale

Par  $m + 1$  échantillons, il n'est possible de faire passer qu'un seul polynôme de degré  $m$ . Cette approche peut être utilisée pour obtenir une approximation du signal analogique à reconstituer.

Si les  $m + 1$  échantillons  $y[(n - m)T_e]$ , ...,  $y(nT_e)$  sont connus, l'approximation de  $y(t - t_0)$  pour  $nT_e \leq t \leq (n + 1)T_e$  et  $0 \leq r \leq m$  peut être calculée en utilisant la méthode des polynômes de Lagrange (§ XIX. 5.1.8 et [105, 108]):

$$\tilde{y}(t - rT_e - t'_0) = \sum_{i=0}^m y[(i + n - m)T_e] q_{m,i}[t - (n + r - m)T_e] \quad (9.55)$$

avec

$$q_{m,i}(t) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^m \frac{t - lT_e}{(i - l)T_e} \quad \text{pour } i = 0, \dots, m \quad (9.56)$$

et

$$q_{0,0}(t) = 1 \quad (9.57)$$

Pour  $0 < r \leq m$ , on obtient une interpolation. Le cas  $r = 0$  correspond à une extrapolation qui peut se ramener à la formule de Newton-Gregory [109]

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t - t'_0) = & y(nT_e) + \{y(nT_e) - y[(n-1)T_e]\} \frac{t - nT_e}{T_e} \\ & + \{y(nT_e) - 2y[(n-1)T_e] + y[(n-2)T_e]\} \frac{(t - nT_e)t}{2T_e^2} + \dots \end{aligned} \quad (9.58)$$

Le retard global  $t_0 = rT_e + t'_0$  dépend du choix de  $r$  et de  $m$ .

En identifiant (9.52) et (9.55), la reconstitution polynomiale apparaît équivalente à un lissage par un filtre linéaire de réponse impulsionnelle

$$g(t) = \sum_{l=0}^m g_{m,m-l}(t - lT_e) \quad (9.59)$$

où

$$g_{m,i}(t) = q_{m,i} [t - (r-m)T_e] \cdot \text{rect} [(t - T_e/2)/T_e] \quad (9.60)$$

Puisque  $g_{m,i}(t)$  est nulle en dehors de l'intervalle  $0 < t < T_e$ ,  $g(t)$  est nulle en dehors de l'intervalle  $0 < t < (m+1)T_e$ .

Une reconstitution polynomiale d'ordre  $m$  élevé n'est possible qu'à la condition de disposer de moyens de calcul appropriés. On se contente généralement, en pratique, d'une extrapolation d'ordre zéro ou éventuellement d'une extrapolation ou interpolation d'ordre 1, souvent combinée avec un lissage complémentaire réalisé par un filtre conventionnel.

#### 9.4.4 Exemple: extrapolateur d'ordre zéro

La reconstitution la plus simple (fig. 9.26) consiste à maintenir, dans tout l'intervalle  $nT_e \leq t < (n+1)T_e$ , la valeur de l'échantillon  $y(nT_e)$ . C'est ce que l'on appelle l'extrapolation d'ordre zéro, qui correspond au cas  $r=0$  et  $m=0$  du paragraphe précédent et est analogue au principe de l'échantillonnage avec maintien (§ 9.2.4).

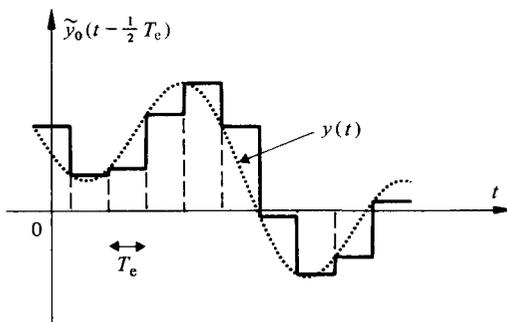


Fig. 9.26

La réponse impulsionnelle du filtre équivalent est (fig. 9.27):

$$g_0(t) = \text{rect} [(t - T_e/2)/T_e] \quad (9.61)$$

Il lui correspond la fonction de réponse fréquentielle (fig. 9.28):

$$G_0(f) = T_e \text{sinc}(T_e f) \exp(-j\pi T_e f) \quad (9.62)$$

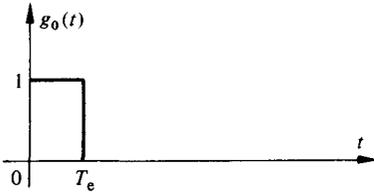


Fig. 9.27

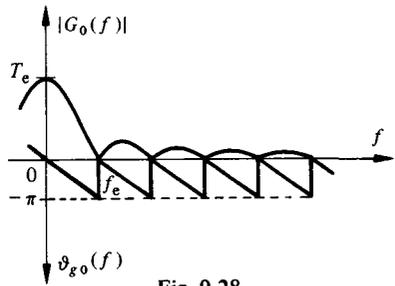


Fig. 9.28

qui introduit un déphasage linéaire  $-\pi T_e f$ , entraînant un retard  $t_0 = T_e/2$ . On obtient ainsi l'approximation

$$\tilde{y}_0(t - T_e/2) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT_e) \text{rect}\left(\frac{t - T_e/2 - kT_e}{T_e}\right) \tag{9.63}$$

avec, par (9.53)

$$\Phi_{\tilde{y}_0}(f) = \text{rep}_{f_e}\{\Phi_y(f)\} \cdot \text{sinc}^2(T_e f) \tag{9.64}$$

Un exemple de densité spectrale résultante est représenté sur la figure 9.29.

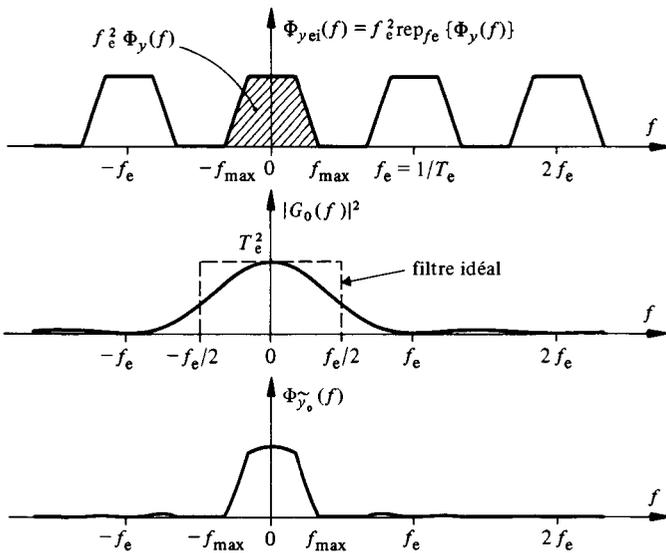


Fig. 9.29

On constate que, pour que  $\Phi_{\tilde{y}}(f) \cong \Phi_y(f)$ , la cadence d'échantillonnage  $f_e$  doit être **nettement plus élevée** que le double de la fréquence maximum  $f_{\text{max}}$ .

La fonction de maintien impliquée par (9.61) est naturellement réalisée par un convertisseur numérique-analogique (§ 10.1.3) à l'entrée duquel les valeurs numériques sont maintenues pendant toute la durée du pas d'échantillonnage  $T_e$ . Aussi la reconstitution par extrapolation d'ordre zéro est-elle de loin la plus couramment employée. On fait souvent suivre le circuit de maintien d'un filtre de lissage additionnel dont le rôle est d'atténuer les composantes spectrales de hautes fréquences indésirables (fig. 9.30). On peut

également chercher à compenser l'atténuation introduite par la fonction de réponse fréquentielle (9.62) dans la bande passante désirée en imposant localement au deuxième filtre une fonction de réponse fréquentielle d'égalisation dont le module est à peu près proportionnel à  $|G_0(f)|^{-1}$ .

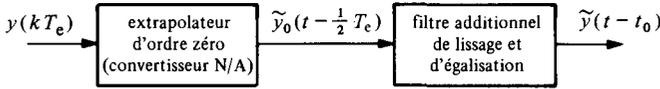


Fig. 9.30

#### 9.4.5 Exemple : extrapolateur d'ordre un

En posant  $r = 0$  et  $m = 1$  dans l'approximation polynomiale (9.55), on obtient l'extrapolation d'ordre un (fig. 9.31):

$$\tilde{y}_{10}(t - t'_0) = y(nT_e) + \{y(nT_e) - y[(n-1)T_e]\} (t - nT_e)/T_e \quad (9.65)$$

pour  $nT_e \leq t < (n+1)T_e$ .

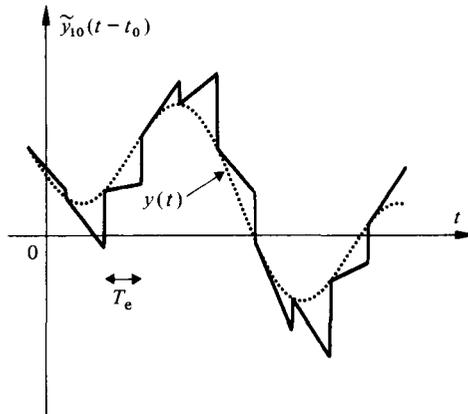


Fig. 9.31

La réponse impulsionnelle équivalente (fig. 9.32) se déduit de (9.60)

$$g_{10}(t) = \begin{cases} (t + T_e)/T_e & \text{pour } 0 \leq t < T_e \\ -(t - T_e)/T_e & \text{pour } T_e \leq t < 2T_e \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (9.66)$$

et conduit à la fonction de réponse fréquentielle (fig. 9.33)

$$G_{10}(f) = T_e \sqrt{1 + (2\pi f T_e)^2} \operatorname{sinc}^2(T_e f) \exp\{-j[2\pi f T_e - \arctan(2\pi f T_e)]\} \quad (9.67)$$

qui n'introduit pas un déphasage linéaire.

Ce type d'extrapolateur agit approximativement, dans la bande passante d'intérêt, comme un filtre passe-haut. Il est donc déconseillé en raison de la distorsion qu'il introduit, tout particulièrement en présence de bruit.

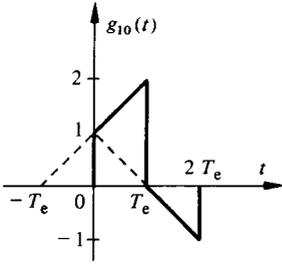


Fig. 9.32

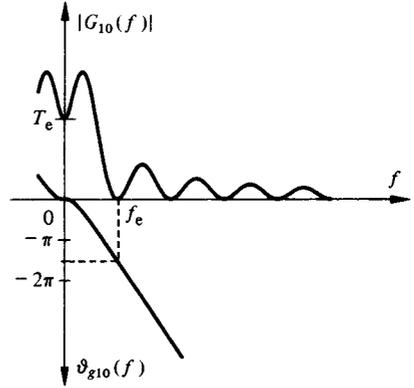


Fig. 9.33

On lui substitue parfois une version modifiée qui se situe entre l'extrapolation d'ordre zéro et celle d'ordre un :

$$\tilde{y}(t - t_0') = y(nT_e) + a \{y(nT_e) - y[(n-1)T_e]\} (t - nT_e)/T_e \quad (9.68)$$

avec  $0 \leq a \leq 1$ .

**9.4.6 Exemple : interpolateur d'ordre un**

Si l'on peut accepter un retard  $t_0$  plus important, correspondant à un pas d'échantillonnage, une relativement bonne approximation est obtenue en reliant les échantillons par des droites. C'est le principe de *l'interpolation linéaire* (fig. 9.34) qui est obtenue pour  $r = 1$  et  $m = 1$  d'où

$$\tilde{y}_{11}(t - T_e) = y[(n-1)T_e] + \{y(nT_e) - y[(n-1)T_e]\} (t - nT_e)/T_e \quad (9.69)$$

pour  $nT_e \leq t \leq (n+1)T_e$ .

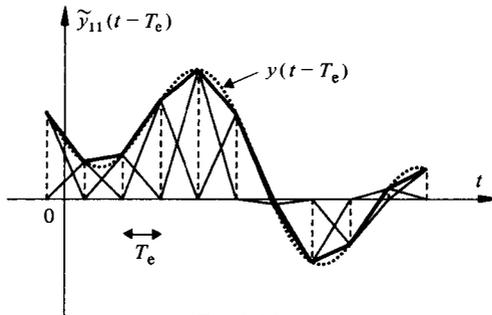


Fig. 9.34

La réponse impulsionnelle de l'interpolateur linéaire est simplement (fig. 9.35)

$$g_{11}(t) = \text{tri}[(t - T_e)/T_e] \quad (9.70)$$

sa fonction de réponse fréquentielle vaut (fig. 9.36)

$$G_{11}(f) = T_e \text{sinc}^2(T_e f) \exp(-j2\pi T_e f) \quad (9.71)$$

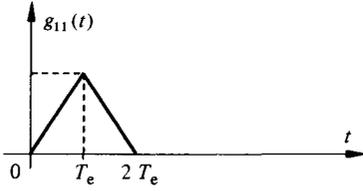


Fig. 9.35

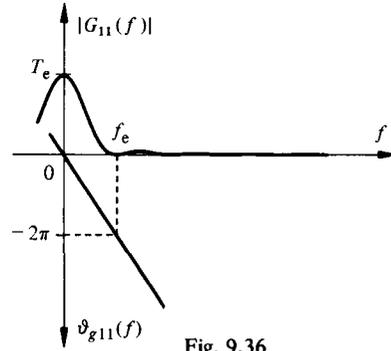


Fig. 9.36

La densité spectrale du signal reconstitué devient ici

$$\Phi_{\tilde{y}}(f) = \text{rep}_{f_e} \{ \Phi_y(f) \} \cdot \text{sinc}^4(T_e f) \tag{9.72}$$

Les composantes de fréquence supérieure à  $f_e$  sont beaucoup plus fortement atténuées que dans le cas des extrapolateurs d'ordre zéro ou un.

On peut, à nouveau, compléter le circuit d'approximation par un filtre additionnel de lissage et d'égalisation.

### 9.4.7 Interpolateur idéal

On peut encore imaginer bien d'autres fonctions d'interpolation correspondant aux réponses impulsionnelles de différents types de filtres passe-bas. Un exemple est le filtre de Butterworth décrit au paragraphe 9.3.6. Dans la règle, on pourra dire que la qualité de l'approximation est d'autant meilleure que l'ordre du filtre est élevé. Il convient toutefois de ne pas négliger le retard introduit et l'erreur provoquée par l'inévitable distorsion de phase.

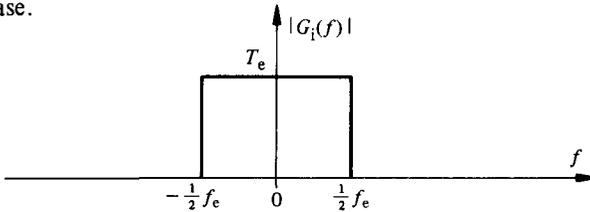


Fig. 9.37

L'interpolateur idéal est bien entendu, pour autant que le théorème d'échantillonnage soit respecté, un filtre idéal de fonction de réponse fréquentielle (fig. 9.37):

$$G_i(f) = T_e \text{rect}(f/f_e) \exp(-j2\pi f t_0) \tag{9.73}$$

et de réponse impulsionnelle (fig. 9.38):

$$g_i(t) = \text{sinc}[(t - t_0)/T_e] \tag{9.74}$$

créant le développement cardinal (9.29) illustré par la figure 9.39:

$$\tilde{y}_i(t - t_0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y(kT_e) \text{sinc}\left(\frac{t - kT_e - t_0}{T_e}\right) \tag{9.75}$$

où le retard  $t_0$  devrait être infini pour rendre le filtre causal!

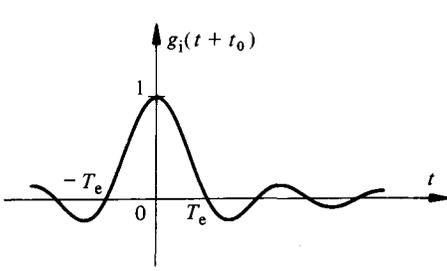


Fig. 9.38

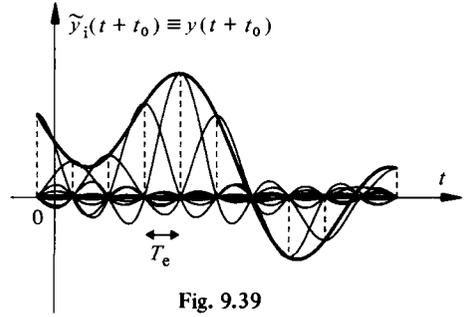


Fig. 9.39

Bien qu'irréalisable, une telle interpolation peut être approximativement réalisée (en principe, par voie numérique) en se limitant à une fonction d'interpolation tronquée (fig. 9.40)

$$\tilde{g}_i(t) = \text{sinc} \left[ \frac{t - mT_e/2}{T_e} \right] \cdot \text{rect} \left[ \frac{t - mT_e/2}{mT_e} \right] \tag{9.76}$$

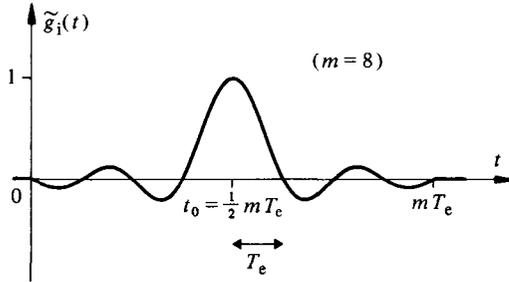


Fig. 9.40

Au lieu d'une fenêtre de pondération rectangulaire, on peut avoir avantage à choisir une fenêtre ne présentant pas de discontinuité et dont la dérivée est elle-même sans discontinuité. Ceci de manière à limiter les ondulations résiduelles du module de la fonction de réponse fréquentielle en dehors de la bande passante, au prix, toutefois, d'un élargissement de la bande de transition.

La reconstitution du signal analogique peut être alors effectuée en deux temps (fig. 9.41): un interpolateur numérique quasi-idéal alimenté à une cadence  $f'_e = Lf_e$  ( $L \gg 1$ ) un extrapolateur d'ordre zéro (convertisseur numérique-analogique) suivi éventuellement d'un filtre additionnel de lissage. Le suréchantillonnage introduit par l'interpolateur remplace la période de répétition  $f_e$  du spectre du signal échantillonné idéalisé par  $Lf_e$  sans modifier la fréquence limite  $f_{\max}$ . La distorsion introduite ensuite par l'extrapolateur d'ordre zéro et le filtre de lissage devient négligeable pour  $L \gg 1$ .

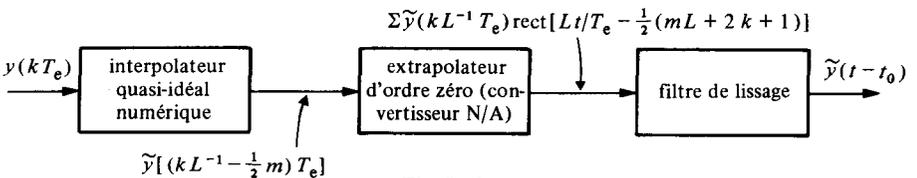


Fig. 9.41

### 9.4.8 Représentation d'un bruit blanc gaussien

On sait (§ 5.7.3) que les échantillons prélevés sur un processus gaussien sont indépendants si les prélèvements sont distants les uns des autres d'un pas  $T_e$  tel que la fonction d'autocovariance soit nulle. En particulier, pour un bruit blanc gaussien borné par une fréquence limite supérieure  $f_{\max} = B$ , cette condition est réalisée si

$$T_e = 1/(2B) \quad (9.77)$$

On peut donc, en s'inspirant de (9.75), construire le modèle suivant d'un bruit blanc gaussien à spectre borné :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \operatorname{sinc} [2B(t - \frac{1}{2} k/B)] \quad (9.78)$$

où les  $x_k$  sont des échantillons de variables gaussiennes, statistiquement indépendantes, de valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_x^2$ .

Le signal  $x(t)$  appartient certainement à un processus gaussien puisqu'il résulte de la somme pondérée de processus gaussiens (ex. 5.11.34).

De plus, la fonction de corrélation est donnée par

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= E[x(t)x(t+\tau)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} E[x_k x_l] \operatorname{sinc} [2B(t - \frac{1}{2} k/B)] \operatorname{sinc} [2B(t+\tau - \frac{1}{2} l/B)] \\ &= \sigma_x^2 \operatorname{sinc} (2B\tau) \end{aligned} \quad (9.79)$$

d'où

$$\Phi_x(f) = \frac{\sigma_x^2}{2B} \operatorname{rect} (\frac{1}{2} f/B) \quad (9.80)$$

avec  $\sigma_x^2/B = \eta$ .

Ceci justifie l'hypothèse de bruit blanc gaussien, stationnaire, à spectre borné par une fréquence maximum  $f_{\max} = B$ .

### 9.4.9 Chaîne de traitement échantillonné

Une chaîne complète de traitement échantillonné comprend les opérateurs représentés sur la figure 9.42.

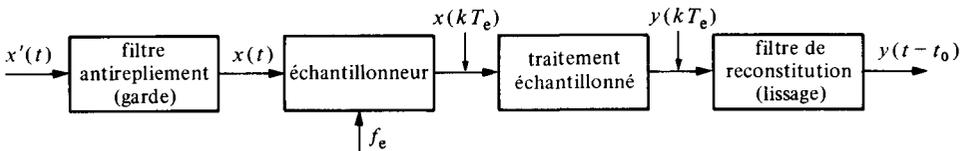


Fig. 9.42

## 9.5 EXERCICES

**9.5.1** Un signal  $x(t) = \exp(-a|t|)$  avec  $a = 2$  Hz est transmis au travers du système représenté sur la figure 9.43.

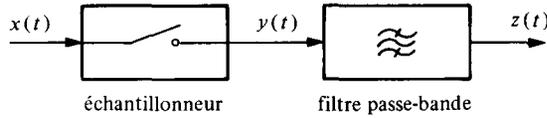


Fig. 9.43

L'échantillonneur est réalisé par un interrupteur qui s'ouvre et se ferme périodiquement à la cadence  $f_e = 20$  Hz avec un temps de fermeture égal à  $T_f = 20$  ms. Le filtre passe-bande idéalisé possède un gain unitaire et une réponse de phase nulle dans une bande de fréquence  $B = f_{\max} - f_{\min} = 10$  Hz centrée sur la fréquence  $f_e = 20$  Hz. L'atténuation en dehors de cette bande est totale. Esquisser l'allure de  $y(t)$  et de son spectre d'amplitude  $|Y(f)|$ ; esquisser l'allure de  $z(t)$  et en donner l'expression mathématique approchée.

9.5.2 Un signal  $x(t)$ , dont la densité spectrale de puissance  $\Phi_x(f)$  est représentée sur la figure 9.44, est échantillonné à une cadence  $f_e$ . Le signal échantillonné (idéalisé) possède la densité spectrale  $\Phi_{x_{ei}}(f)$  représentée également sur la figure 9.44. Déterminer quelle est la fréquence d'échantillonnage utilisée et indiquer si ce choix est judicieux pour permettre une reconstitution du signal par filtrage idéal (*justifier* votre réponse).

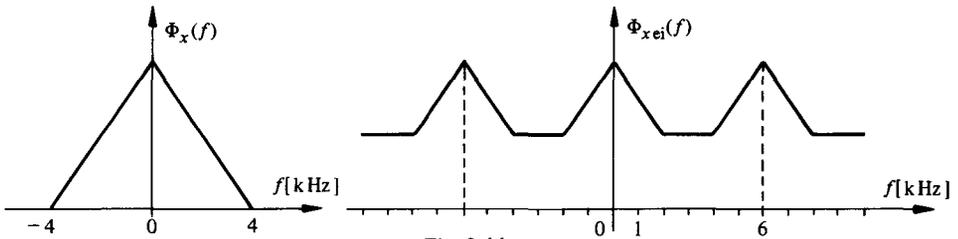


Fig. 9.44

9.5.3 Peut-on reconstituer exactement le signal  $x(t) = B \operatorname{sinc}^2(t/\Delta t)$  s'il est échantillonné idéalement à une cadence  $f_e = 1/\Delta t$  ?

9.5.4 Soit le système de traitement représenté sur la figure 9.45, avec  $X(f) = D \{ \operatorname{rect} [\frac{1}{2} (f + f_0)/B] + \operatorname{rect} [\frac{1}{2} (f - f_0)/B] \}$ ,  $G_1(f) = \operatorname{rect} [f/(4B)]$  et  $f_0 = 3B$ .

- Déterminer la cadence d'échantillonnage *minimale*  $f_e$  du signal  $z(t)$  permettant de reconstituer ce signal sans distorsion à la sortie d'un filtre passe-bas idéal  $G_2(f)$  de largeur de bande adéquate.

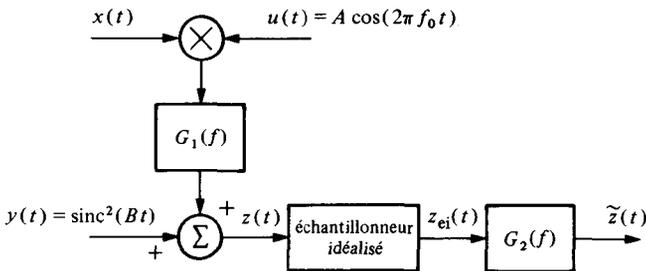


Fig. 9.45

- Quelle cadence d'échantillonnage proposez-vous de choisir si le filtre  $G_2(f)$  possède la fonction de réponse fréquentielle représentée sur la figure 9.46 et que l'on désire également reconstruire  $z(t)$  sans distorsion ?
- Esquisser graphiquement l'allure du spectre d'amplitude à la sortie de l'échantillonneur idéalisé pour les deux cas ci-dessus.

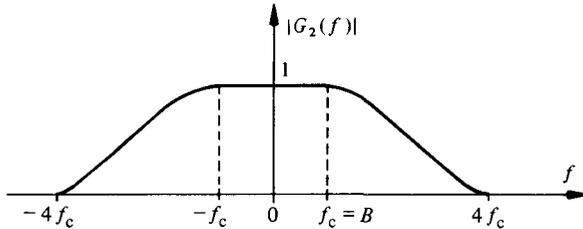


Fig. 9.46

**9.5.5** Rétablir le résultat (9.32), où la puissance de l'erreur de recouvrement  $P_r$  est définie comme la puissance des composantes du signal de fréquences supérieures à  $f_e/2$ , sachant que  $\int_0^\infty (1+x^m)^{-1} dx = \pi [m \sin(\pi/m)]^{-1}$ .

**9.5.6** Un signal  $x(t)$  à spectre uniforme  $\Phi_x(f) = \eta/2$  est filtré par un filtre de Butterworth avant d'être échantillonné à une cadence  $f_e$ . Si  $f_c$  est la fréquence de coupure à  $-3$  dB du filtre, déterminer quel devrait être le rapport  $f_e/f_c$  pour que le rapport  $\xi_{rx\text{dB}}$  de la puissance de l'erreur de recouvrement sur la puissance totale du signal soit de  $-30$  dB pour  $n = 1, 2, 3, 4$ .

**9.5.7** Démontrer le résultat illustré par la figure 9.20.

**9.5.8** Déterminer (sans tenir compte des termes négligeables) la densité spectrale de puissance du signal  $y(t)$  du schéma de la figure 9.47 sachant que

$$x(t) = \sum_i A \cos(2\pi f_i t)$$

pour  $i = 1, 2, 3$  et que  $g(t) = \text{tri}[(t - \Delta)/\Delta]$  avec  $f_e = 1/T_e = 3$  kHz,  $f_1 = 0,3$  kHz,  $f_2 = 0,5$  kHz,  $f_3 = 1,5$  kHz,  $\Delta = 1$  ms et  $A = 10$  V.

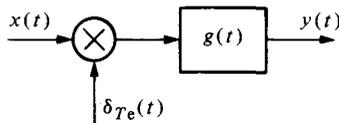


Fig. 9.47

**9.5.9** Un signal aléatoire gaussien  $n(t)$  a comme fonction d'autocorrélation  $R_n(\tau) = 4 + 16 \text{sinc}^2(\tau/T)$  V<sup>2</sup>, avec  $T = 1$  ms. Déterminer la valeur moyenne, la variance et la densité spectrale de puissance de ce signal. Quelle est la cadence minimale à laquelle ce signal peut être échantillonné idéalement et reconstitué parfaitement ? A quelle cadence d'échantillonnage obtient-on des échantillons statistiquement indépendants ?



## NUMÉRISATION DES SIGNAUX

10.1 CONVERSION ANALOGIQUE-NUMÉRIQUE  
ET NUMÉRIQUE-ANALOGIQUE

## 10.1.1 Principe et définitions

Les systèmes numériques de traitement de l'information opèrent sur des nombres. Tout système de traitement de signaux faisant appel à un ordinateur ou à un processeur numérique spécialisé implique donc nécessairement une opération préliminaire de *conversion analogique-numérique* (A/N) – on dit aussi en français: *analogique-digitale* (A/D). Lorsque l'information traitée doit être restituée sous forme analogique, on procède à l'opération inverse de *conversion numérique-analogique* (N/A) ou *digitale-analogique* (D/A). Le schéma de principe d'un système de traitement numérique de signaux analogiques est représenté sur la figure 10.1.

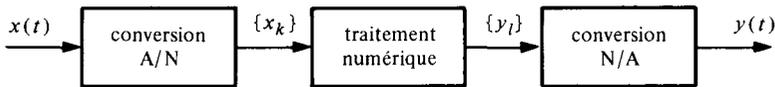


Fig. 10.1

La conversion analogique-numérique (fig. 10.2) fait correspondre au signal analogique d'entrée  $x(t)$  une suite de nombres  $\{x_k\}$ , usuellement codés sous forme binaire. Chaque nombre correspond à l'amplitude  $x(t_k)$  d'un échantillon du signal prélevé à un instant donné  $t_k$ . On procède généralement à cet échantillonnage à intervalles de temps réguliers  $T_e$  (chap. 9).

Comme la détermination du nombre correspondant à l'amplitude d'un échantillon prend un certain temps, il est souvent nécessaire de mémoriser cette valeur analogique entre deux prélèvements successifs.

Chacun des échantillons prélevés peut prendre en principe une infinité de valeurs du fait de la nature analogique du signal. Toutefois, la précision avec laquelle ces amplitudes doivent et peuvent être connues est nécessairement limitée par toutes sortes de considérations pratiques. On est amené à remplacer la valeur exacte de l'échantillon par la plus proche valeur approximative tirée d'un assortiment fini de valeurs discrètes: il y a *quantification*. Chacune de ces valeurs discrètes est désignée par un nombre exprimé sous forme binaire par un *codage* approprié. Ce nombre est compris entre deux valeurs limites qui fixent la *plage de conversion*. Chaque nombre  $x_k$  représente ainsi un ensemble de valeurs analogiques contenues dans un intervalle de largeur  $\Delta_k$  appelé *pas de quantification*. Lorsque la plage de conversion est subdivisée en pas de quantification égaux, on parle de *quantification uniforme* (§ 10.3.4).

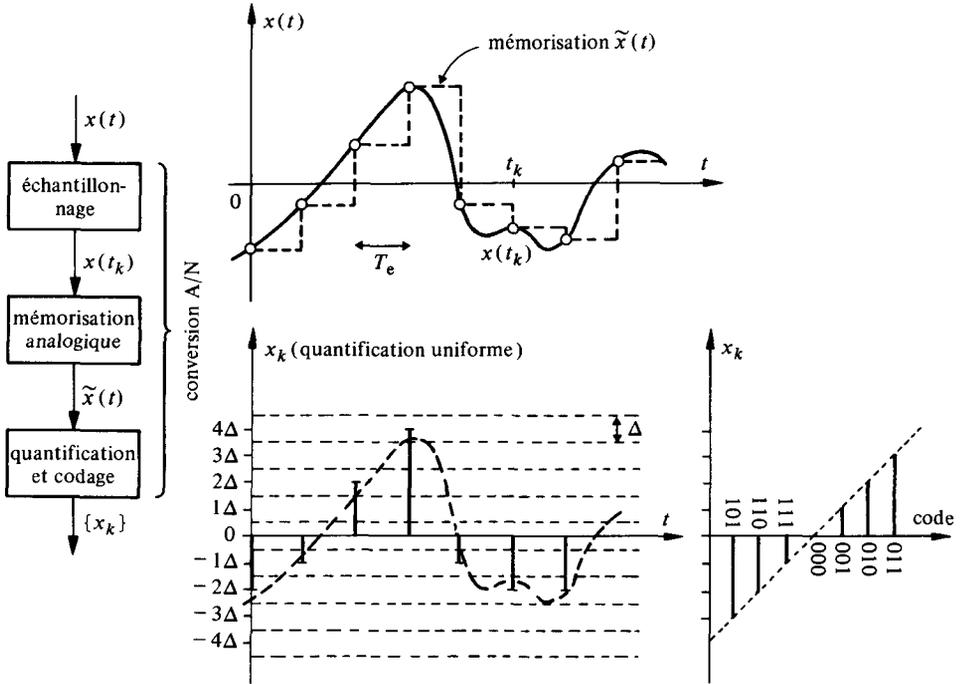


Fig. 10.2

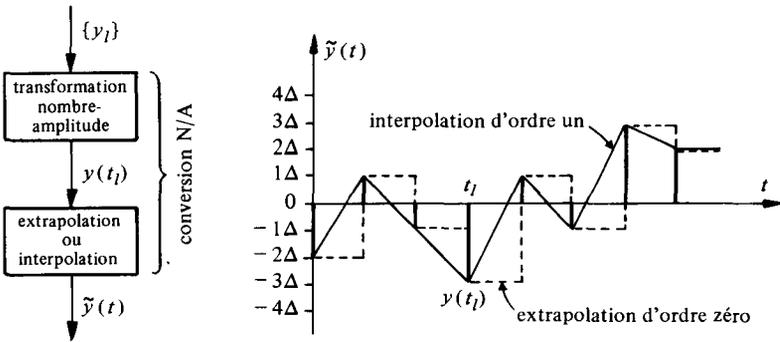


Fig. 10.3

La conversion numérique-analogique (fig. 10.3) est en principe un peu plus directe. La suite de nombres  $\{y_l\}$  est transformée en une suite d'échantillons d'amplitudes discrètes  $y(t_l)$ .

La reconstitution finale du signal analogique de sortie  $\tilde{y}(t)$  est ensuite réalisée par une opération d'extrapolation ou d'interpolation entre les échantillons (comme indiqué au paragraphe 9.4.4). Une simple extrapolation d'ordre zéro est souvent utilisée à cet effet. Elle est facilement réalisée par la mémorisation numérique de la valeur de chaque échantillon à l'entrée du convertisseur N/A, complétée par un filtrage analogique (lissage).

Les représentations graphiques symboliques normalisées des convertisseurs A/N et N/A sont indiquées sur la figure 10.4.



Fig. 10.4

**10.1.2 Principales méthodes de conversion A/N. Définitions**

On distingue les méthodes de *conversion directes* et *indirectes*. Une étude détaillée de celles-ci sort du cadre de cet ouvrage. Le lecteur se reportera, pour plus de détails, à la littérature spécialisée [95, 110, 111].

Dans les méthodes indirectes, la valeur de la tension du signal d'entrée est initialement convertie en une fréquence par un *oscillateur commandé en tension* (en anglais: *voltage controled oscillator* ou VCO: voir paragraphe VIII.6.5.5) ou en une durée proportionnelle obtenue par intégration. Dans le premier cas, la valeur numérique correspondante est déterminée en comptant le nombre de périodes du signal fourni par l'oscillateur pendant un intervalle de temps prescrit. Dans le deuxième cas, cette valeur numérique est donnée par le comptage du nombre d'impulsions fournies par un générateur auxiliaire entre le début et la fin de l'intégration.

De par leur principe, les méthodes indirectes se prêtent à la réalisation de convertisseur A/N de haute précision. Elles sont, par contre, nécessairement lentes en raison de leur nature sérielle et ne conviennent pas, en général, pour les applications usuelles de traitement numérique des signaux. On les utilise essentiellement dans l'instrumentation de précision (par exemple: voltmètres numériques, cf. volume XVII).

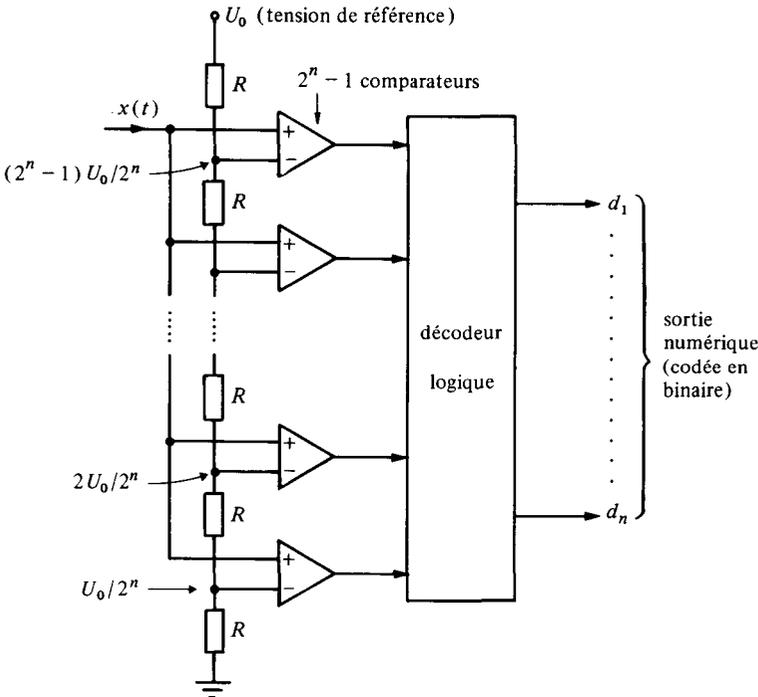


Fig. 10.5

Le convertisseur A/N direct le plus simple dans son principe – mais non dans sa réalisation technologique – est le *convertisseur parallèle* (fig. 10.5). La tension d'entrée est comparée simultanément à  $2^n - 1$  valeurs du type

$$\frac{k}{2^n} U_0 \quad \text{avec} \quad k = 1, 2, \dots, 2^n - 1 \quad (10.1)$$

déduite d'une tension de référence  $U_0$  par un diviseur de tension à résistances. L'état des  $2^n - 1$  variables binaires de sortie des comparateurs (§ VIII.6.2.3) est finalement traduit en un mot binaire de  $n$  bits, ou chiffres binaires notés conventionnellement 0 et 1, par un décodeur logique.

L'avantage des convertisseurs parallèles (en anglais: *flash converters*) est leur rapidité, puisque le mot binaire de sortie est déterminé presque instantanément. L'échantillonnage peut se faire alors en aval du convertisseur par prélèvement périodique des valeurs numériques. Le nombre de comparateurs à mettre en œuvre limite toutefois la résolution à environ 256 niveaux discrets ( $n = 8$  bits). Ce type de convertisseur se prête bien à la conversion analogique-numérique de signaux de haute fréquence (vidéo, radar) ne nécessitant pas une précision trop grande.

Pour des raisons de complexité – donc de coût – et de précision, on emploie plus généralement, lorsque la cadence d'échantillonnage requise n'est pas trop élevée, des *convertisseurs à approximations successives* (fig. 10.6). La tension d'entrée est ici comparée successivement à une combinaison convergente des  $2^n - 1$  valeurs de référence pondérées  $kU_0/2^n$ . C'est un système bouclé qui inclut un convertisseur numérique-analogique (§ 10.1.3).

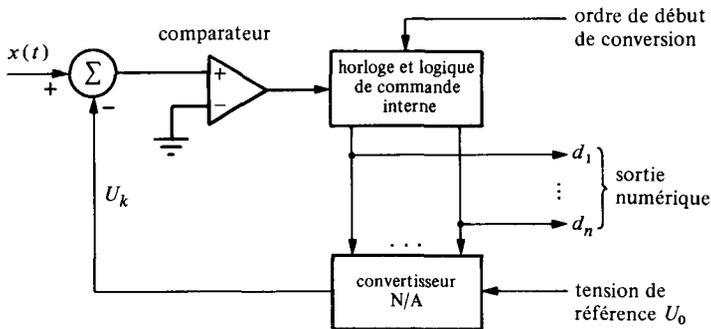


Fig. 10.6

Sous contrôle d'une horloge interne, le dispositif détermine d'abord le premier bit  $d_1$  en décidant si l'entrée analogique  $x(t)$  est supérieure ( $d_1 = 1$ ) ou inférieure ( $d_1 = 0$ ) à la moitié de la tension de référence  $U_0$ . A la période d'horloge suivante, on détermine si  $x(t) - d_1 \cdot U_0/2$  est supérieure ( $d_2 = 1$ ) ou inférieure ( $d_2 = 0$ ) à  $U_0/4$ . La procédure se répète ainsi  $n$  fois dans un convertisseur à  $n$  bits. Le mot binaire définitif n'est donc disponible à la sortie qu'après  $n$  périodes de l'horloge interne.

Les *convertisseurs à modulation delta-sigma* [151] utilisent un principe de poursuite permanente du signal analogique associé à un comparateur unique (d'où le nom de *convertisseur à 1 bit*) travaillant en suréchantillonnage. Des structures hybrides peuvent être utilisées pour obtenir un bon compromis entre vitesse et précision.

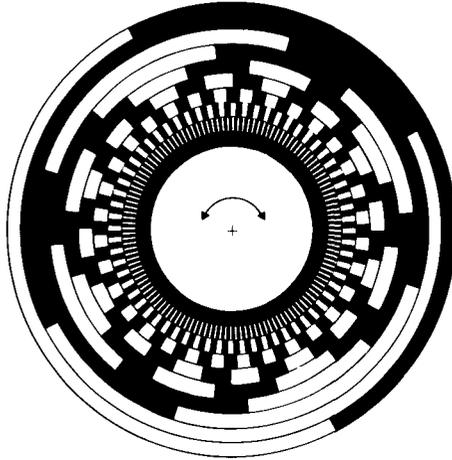


Fig. 10.7

Mentionnons qu'en plus des convertisseurs purement électroniques décrits précédemment, on utilise pour certaines applications des dispositifs électromécaniques comme le disque de codage angulaire représenté sur la figure 10.7.

La lecture, sous forme numérique, de la position angulaire du disque se fait à l'aide de détecteurs photo-électriques placés, à raison de un par anneau, sur une ligne passant par le centre de rotation du disque. Chaque anneau est décomposé en  $2^i$  segments transparents et opaques alternés, avec  $i = 1$  (anneau extérieur déterminant le bit  $d_1$  dans notre exemple) jusqu'à  $n$  (anneau intérieur déterminant le bit  $d_n$ ). Le disque de la figure 10.7 comprend dix anneaux : sa résolution angulaire est donc de  $360/2^{10} = 0,35$  degré.

Si la plupart des convertisseurs décomposent la plage de conversion de la variable à numériser en  $q = 2^n$  intervalles égaux (quantification uniforme), il existe des applications où il est avantageux de recourir à une loi de quantification non uniforme [112]. L'exemple le plus courant est la conversion avec compression logarithmique utilisé pour la transmission numérique des signaux téléphoniques (modulation par impulsion et codage : section XVIII.7.5).

### 10.1.3 Conversion N/A

Un convertisseur numérique-analogique est un dispositif produisant une grandeur de sortie quantifiée  $y$  qui possède  $q = 2^n$  valeurs distinctes. Il est à loi uniforme si ces valeurs sont régulièrement réparties sur une plage allant de zéro à  $2^n \cdot \Delta$  selon la loi

$$y = \Delta (d_1 2^{n-1} + \dots + d_n 2^0) \tag{10.2}$$

où  $\Delta$  est le pas de quantification. Cette grandeur de sortie est généralement un courant ou une tension. Le mode de réalisation usuel est basé sur le principe illustré par la figure 10.8.

Des commutateurs commandés par les variables binaires  $d_k$  aiguillent le passage des courants pondérés  $I_0/2^k$ , provenant de sources de courant dépendant d'une référence  $I_0$ , soit contre terre ( $d_k = 0$ ), soit vers un point de sommation ( $d_k = 1$ ; Kirchhoff). Le courant résultant correspond à la loi (10.2). Une conversion courant-tension est

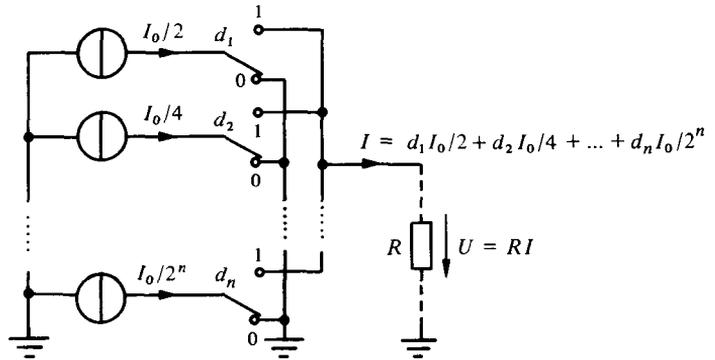


Fig. 10.8

ensuite généralement réalisée, soit à l'aide d'une simple résistance (plage d'amplitude limitée en pratique), soit à l'aide d'un montage à amplificateur opérationnel (chap. VIII.3). Les sources de courant et les commutateurs commandés sont réalisés selon différentes techniques électroniques. On se reportera à la littérature spécialisée pour plus de détails [96, 103].

Le convertisseur N/A est à structure parallèle. A l'application simultanée des bits  $d_1 \dots d_n$  à son entrée correspond presque instantanément la grandeur analogique de sortie  $I = d_1 I_0/2 + \dots + d_n I_0/2^n$ . La conversion courant-tension entraîne, elle, certaines limitations de vitesse (charge de capacités, vitesse limite des amplificateurs opérationnels).

Dans la pratique, tous les commutateurs ne réagissent pas exactement au même instant. Il en résulte des parasites de commutation (en anglais: *glitches*) qui doivent être éliminés par filtrage ou ré-échantillonnage avec maintien décalé (échantillonneur-bloqueur: paragraphe 10.2.4).

## 10.2 CADENCES LIMITES DE CONVERSION A/N

### 10.2.1 Variation du signal pendant la durée de conversion. Définition

La conversion A/N n'est pas une opération instantanée. Elle peut être relativement rapide dans les convertisseurs parallèles et nettement plus lente dans les convertisseurs à approximations successives.

Soit  $V$  la plage de conversion disponible. Si la loi de quantification est uniforme, cette plage est subdivisée en  $q = 2^n$  intervalles de largeur constante  $\Delta = V/2^n$ . La procédure de conversion assigne alors la valeur  $x_k = k\Delta$  à chaque échantillon d'amplitude comprise entre  $k\Delta - \frac{1}{2}\Delta$  et  $k\Delta + \frac{1}{2}\Delta$ . Si le signal varie pendant la *durée de conversion*  $\tau_c$ , le résultat numérique obtenu risque d'être incorrect (fig. 10.9).

En première approximation, la variation  $\Delta x$  du signal analogique pendant la durée  $\tau_c$  vaut

$$\Delta x \approx \tau_c \left| \frac{dx}{dt} \right| \quad (10.3)$$

Une exigence de précision courante est de limiter la variation de  $\Delta x$  à  $\frac{1}{2}\Delta$ :

$$\Delta x \leq \frac{1}{2}\Delta \quad (10.4)$$

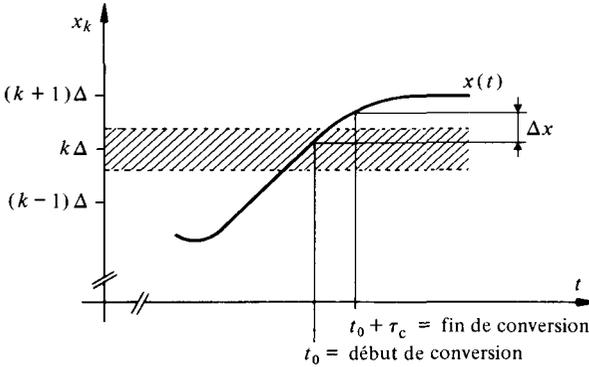


Fig. 10.9

L'erreur globale introduite est ainsi inférieure ou égale à  $\Delta$  en valeur absolue. En combinant (10.3) et (10.4), on obtient la relation

$$\left| \frac{dx}{dt} \right|_{\max} = \frac{\Delta}{2\tau_c} = \frac{V}{2^{n+1} \cdot \tau_c} \tag{10.5}$$

**10.2.2 Exemple : signal sinusoïdal**

Si l'on considère un signal sinusoïdal dont l'amplitude crête à crête correspond à la plage de conversion  $V$  du convertisseur, sa pente maximum vaut

$$\left| \frac{dx}{dt} \right|_{\max} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{V}{2} \sin(2\pi f t) \right]_{t=0} = \pi f V \tag{10.6}$$

En combinant (10.5) et (10.6), on obtient

$$f_{\max} = \frac{1}{2^{n+1} \cdot \pi \tau_c} \tag{10.7}$$

Ainsi, pour une conversion effectuée en  $1\ \mu\text{s}$  par un convertisseur binaire à  $n = 8$  bits, la fréquence maximum tolérée d'un signal sinusoïdal de valeur crête à crête égale à la plage du convertisseur est de 622 Hz seulement! Elle est quatre fois plus faible pour  $n = 10$  et dix fois plus faible pour  $\tau_c = 10\ \mu\text{s}$ .

L'abaque de la figure 10.10 illustre la relation (10.7).

**10.2.3 Exemple : signal aléatoire gaussien**

Dans le cas d'un signal aléatoire, la pente est aussi une grandeur aléatoire et l'on doit raisonner en terme de probabilité de dépassement d'une limite fixée.

Considérons un signal gaussien  $x(t)$  à spectre blanc borné  $\Phi_x(f) = \frac{1}{2} \eta \text{rect}(f/2B)$  et variance  $\sigma_x^2 = \eta B$ . La probabilité que  $|x| > 3\sigma_x$  est inférieure à 3‰ et l'on peut choisir pour le convertisseur la plage de conversion  $V = 6\sigma_x$ .

Par (8.71), la dérivée  $\dot{x} = dx/dt$  possède un spectre  $(2\pi f)^2 \Phi_x(f)$ , d'où une variance

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = 4\pi^2 \eta \int_0^B f^2 df = 4\pi^2 \eta B^3/3 = 4\pi^2 B^2 \sigma_x^2/3 \tag{10.8}$$

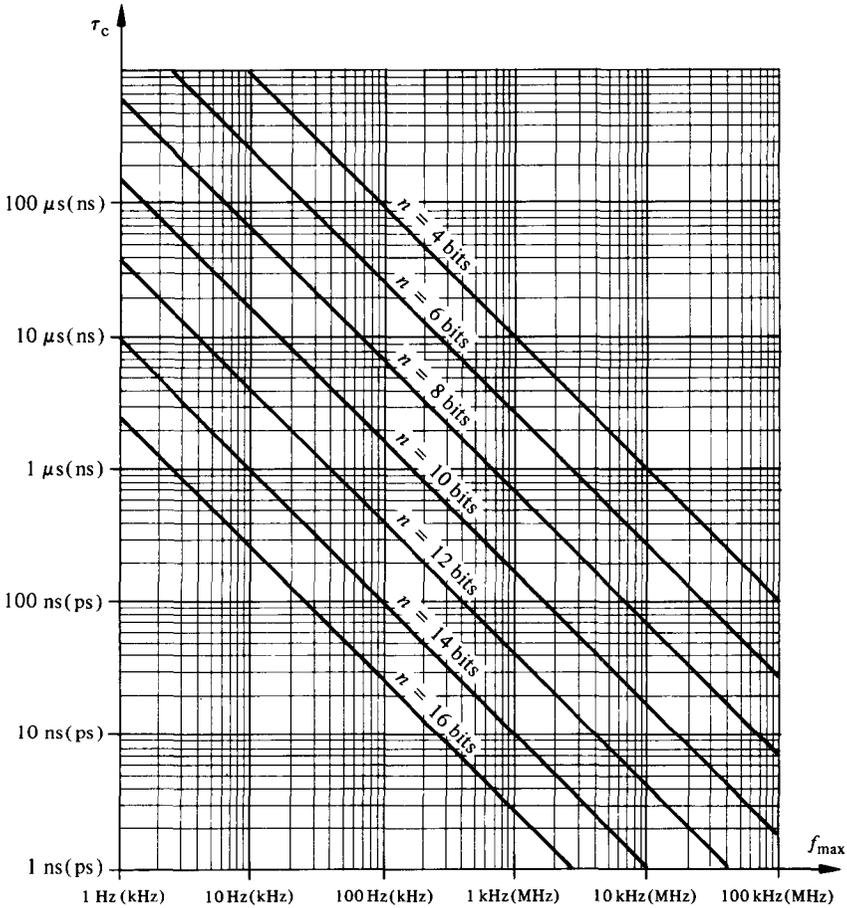


Fig. 10.10

Or  $\dot{x} = dx/dt$  est également à distribution gaussienne, puisque la dérivation est une opération linéaire. La pente ne dépasse donc, en valeur absolue,  $3\sigma_{\dot{x}}$  qu'avec une probabilité inférieure à 3‰. En choisissant cette valeur comme pente maximum ne devant pas introduire d'erreur de conversion, on a

$$\left| \frac{dx}{dt} \right|_{\max} = 3\sigma_{\dot{x}} = \frac{6\pi}{\sqrt{3}} B\sigma_x = \frac{V\pi B}{\sqrt{3}} \quad (10.9)$$

En égalant ce résultat à (10.5), on tire la condition

$$B_{\max} = \frac{\sqrt{3}\Delta}{2\pi V\tau_c} = 1,73 \frac{1}{2^{n+1}\pi\tau_c} \quad (10.10)$$

On constate que (10.7) et (10.10) sont du même ordre de grandeur. L'abaque de la figure 10.10 semble donc un bon indicateur de la fréquence maximum du signal que peut convertir, sans autre précaution, un convertisseur ayant une durée de conversion  $\tau_c$ .

**10.2.4 Mémorisation analogique temporaire par échantillonneur-bloqueur. Définition**

Un convertisseur ayant une durée de conversion  $\tau_c$  est en principe capable de travailler à une fréquence d'échantillonnage  $f_e \approx 1/\tau_c$ . En vertu du théorème d'échantillonnage, la fréquence maximale du signal analogique d'entrée pourrait donc atteindre la valeur  $B_{\max} = 1/(2\tau_c)$ . C'est une valeur de l'ordre de  $2^n \pi$  plus élevée que les fréquences limites tolérées (10.7) ou (10.10). Les possibilités du convertisseur sont donc dans ce cas largement sous-employées.

On évite cet inconvénient en utilisant un circuit de mémorisation temporaire de la valeur de chaque échantillon pendant la durée de conversion. Un tel dispositif porte le nom d'échantillonneur-bloqueur (en anglais: *sample-and-hold*). Le principe de fonctionnement d'un tel circuit est illustré par la figure 10.11. Il effectue une opération d'échantillonnage avec maintien (§ 9.2.4).

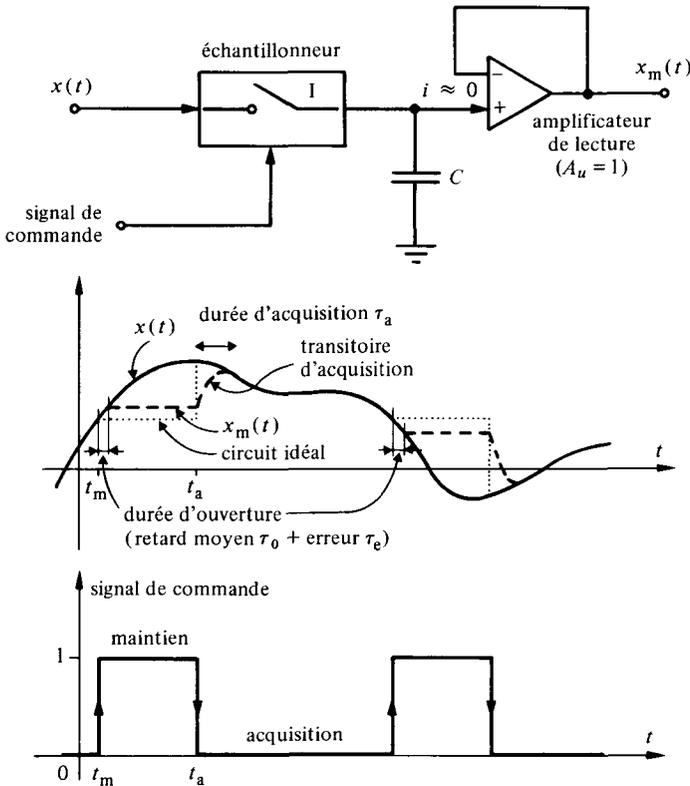


Fig. 10.11

Lorsque le signal de commande est au niveau bas, l'interrupteur I est fermé et le signal de sortie  $x_m(t)$  de l'amplificateur de lecture (gain de tension unité) suit le signal d'entrée  $x(t)$ . L'ordre de mémorisation (signal de commande passant au niveau haut en  $t_m$ ) entraîne l'ouverture de l'interrupteur. La capacité C maintient alors à ses bornes la valeur de la tension présente à l'instant d'ouverture (le courant d'entrée de l'amplificateur de lecture est très faible); cette valeur, disponible à la sortie de l'amplificateur de lecture peut être convertie sans risque de variation par un convertisseur placé en aval (fig. 10.12).

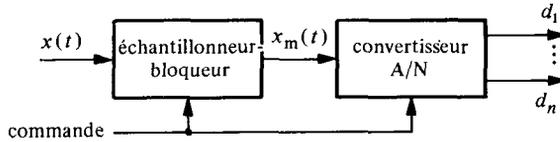


Fig. 10.12

Il y a, toutefois, un certain retard entre l'instant  $t_m$  d'application de l'ordre d'ouverture et la mémorisation effective. Ce retard, appelé *durée d'ouverture (aperture time)*, se décompose en un retard moyen  $\tau_0$  et un retard variable  $\tau_e$  qui crée une certaine incertitude sur l'instant exact d'échantillonnage. Cette incertitude est appelée *erreur ou gigue d'ouverture (aperture uncertainty ou jitter)*. Elle joue, en ce qui concerne l'erreur d'amplitude de l'échantillonneur-bloqueur, le même rôle que la durée de conversion  $\tau_c$  pour le convertisseur, selon (10.5).

La cadence limite de travail de l'échantillonneur-bloqueur dépend surtout de la *durée d'acquisition (acquisition time)*  $\tau_a$  qui est l'intervalle qui sépare la fin du maintien (instant d'application de l'ordre d'acquisition  $t_a$ ) et le moment où la sortie  $x_m(t)$  a rattrapé l'entrée  $x(t)$ . Cette durée est liée à la réponse transitoire du circuit et dépend de la valeur de la capacité de mémorisation employée.

Par exemple: si le convertisseur à  $n = 8$  bits et durée de conversion  $\tau_c = 1 \mu\text{s}$  de l'exemple 10.2.2 est précédé d'un échantillonneur-bloqueur ayant une gigue d'ouverture inférieure à 1 ns et une durée d'acquisition  $\tau_a = 1 \mu\text{s}$ , la cadence d'échantillonnage pourra être de l'ordre de 500 kHz, autorisant l'échantillonnage d'un signal de fréquence maximum avoisinant 250 kHz.

## 10.3 QUANTIFICATION

### 10.3.1 Principe général et définitions

La quantification est une règle de correspondance entre le nombre infini des valeurs possibles du signal d'entrée  $x(t)$  et un nombre fini de valeurs assignées au signal de sortie  $x_q(t)$ . L'opérateur correspondant est du type non linéaire amnésique (§ 8.4.2.). La règle

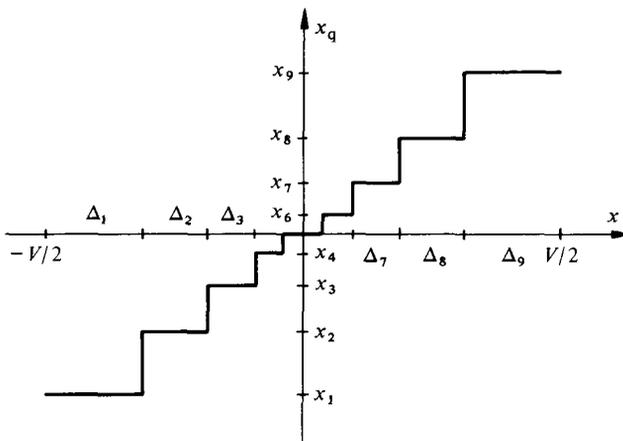


Fig. 10.13

de correspondance (fig. 10.13) est obtenue en subdivisant la plage de conversion  $V$  des variations du signal d'entrée en  $q$  intervalles juxtaposés  $\Delta_i$  avec  $i = 1, \dots, q$  et en assignant au signal de sortie la valeur  $x_i$  lorsque l'amplitude du signal d'entrée appartient au domaine  $\Delta_i$ . Toutes les valeurs d'entrée appartenant au même intervalle sont donc représentées par le même niveau quantifié, qui correspond généralement à la valeur médiane de l'intervalle (*quantification par arrondi*) ou à sa valeur minimale (*quantification par troncature*).

Un tel processus introduit naturellement une distorsion intrinsèque qui dépend autant de la nature du signal que de la loi de quantification adoptée.

**10.3.2 Distorsion ou bruit de quantification. Définition**

La différence

$$n_q(t) = x_q(t) - x(t) \tag{10.11}$$

est appelée *distorsion* ou *bruit de quantification*. Cette distorsion dépend de l'amplitude du signal et peut être considérée comme la sortie d'un opérateur non linéaire de caractéristique (10.11) excité par le signal  $x(t)$ . La figure 10.14 illustre le cas de la distorsion engendrée par la loi de quantification de la figure 10.13.

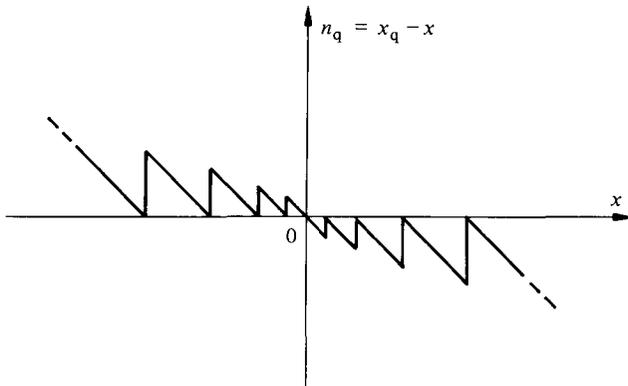


Fig. 10.14

Lorsque le signal  $x(t)$  est aléatoire, il est commode de considérer le signal quantifié comme résultant de la somme de  $x(t)$  et d'un bruit aléatoire de quantification (fig. 10.15). Dans bien des situations, le bruit de quantification se révèle pratiquement non corrélé avec le signal d'entrée.

Le bruit de quantification apparaît non seulement lors de la conversion analogique-numérique d'un signal, mais également dans les opérations de calcul subséquentes (erreur d'arrondi ou de troncature).

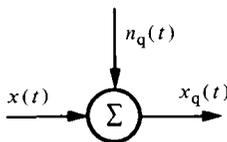


Fig. 10.15

### 10.3.3 Variance du bruit de quantification

Le bruit de quantification  $n_q$  étant considéré comme un processus aléatoire, il possède une valeur moyenne  $\mu_q$  et une variance  $\sigma_q^2$ . Une valeur  $\mu_q \neq 0$  indique la présence d'un biais systématique. Cette situation se présente, en particulier, dans le cas d'une quantification par troncature. Ce biais est nul lorsque deux conditions sont satisfaites: le signal d'entrée a une densité de probabilité paire par rapport à la valeur moyenne  $\mu_x$  et la loi de quantification est à symétrie impaire par rapport à  $\mu_x$ . La variance, elle, s'identifie avec la puissance des fluctuations (tab. 5.2):

$$\sigma_q^2 = \sum_{i=1}^q \int_{\Delta_i} (x - x_i)^2 p(x) dx \quad (10.12)$$

Si le nombre  $q$  d'intervalles est élevé, une approximation raisonnable peut être faite en considérant  $p(x) \approx p(x_i) = \text{constante}$  dans l'intervalle  $\Delta_i$ :

$$\sigma_q^2 \approx \sum_{i=1}^q p(x_i) \int_{\Delta_i} (x - x_i)^2 dx \quad (10.13)$$

Si, de plus, les valeurs quantifiées  $x_i$  correspondent à la valeur médiane de l'intervalle  $\Delta_i$  (quantification par arrondi), la variance du bruit de quantification devient simplement

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 &\approx \sum_{i=1}^q p(x_i) \cdot \int_{x_i - \Delta_i/2}^{x_i + \Delta_i/2} (x - x_i)^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^q p(x_i) \Delta_i^3 / 12 \end{aligned} \quad (10.14)$$

Lorsque la densité de probabilité  $p(x)$  du signal d'entrée est connue, il est possible de rechercher la loi de quantification optimale [112] qui minimise  $\sigma_q^2$  pour un nombre de niveaux de quantification donnés.

Dans certains cas, il peut être avantageux d'obtenir un rapport de la puissance du signal d'entrée à celle du bruit de quantification constant. C'est l'approche utilisée en téléphonie numérique (PCM) qui conduit à une loi de quantification de type logarithmique (sect. XVIII.7.4).

### 10.3.4 Quantification uniforme. Définitions

La loi de quantification de loin la plus fréquemment utilisée est la *loi uniforme* (parfois qualifiée de *linéaire*) dans laquelle les pas de quantification  $\Delta_i$  sont constants (fig. 10.16).

$$\Delta_i = \Delta \quad \forall i \quad (10.15)$$

En remplaçant dans (10.14), on obtient, puisque par (14.14)  $\sum p(x_i) \Delta = 1$

$$\sigma_q^2 \approx \frac{\Delta^2}{12} \quad (10.16)$$

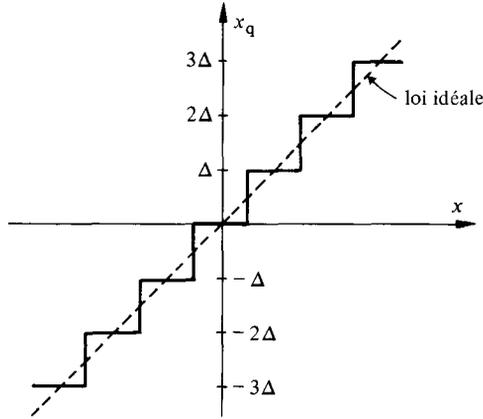


Fig. 10.16

Cette formule approximative, largement utilisée, est en fait exacte lorsque le bruit de quantification, distribué entre  $\pm \Delta/2$  (fig. 10.17), possède une densité de probabilité uniforme. Cette situation est exactement ou presque parfaitement réalisée dans de nombreuses situations pratiques, comme le démontre l'analyse du paragraphe 10.3.10.

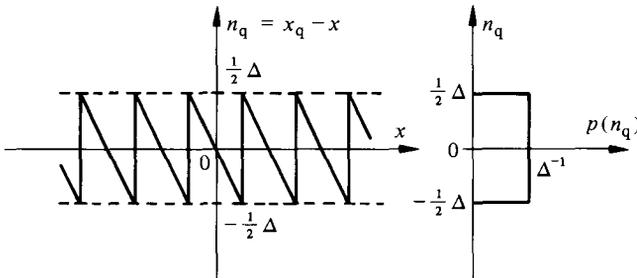


Fig. 10.17

Le rapport signal sur bruit de quantification est défini par

$$\xi_q = \sigma_x^2 / \sigma_q^2 \tag{10.17}$$

où l'écart-type  $\sigma_x$  s'identifie (tab. 5.2) avec la valeur efficace du signal d'entrée  $x(t)$ . En introduisant (10.16), on obtient

$$\xi_q \approx 12 (\sigma_x / \Delta)^2 \tag{10.18}$$

et

$$\xi_{q\text{dB}} = 10 \log_{10} \xi_q \approx 20 \log_{10} (\sigma_x / \Delta) + 10,8 \text{ dB} \tag{10.19}$$

Si la plage de conversion  $V$  est décomposée en  $q = 2^n$  intervalles de largeur  $\Delta$ , la relation (10.19) devient, en posant  $V/\sigma_x = a$ :

$$\xi_{q\text{dB}} \approx 6n + 10,8 - 20 \log_{10} a \text{ dB} \tag{10.20}$$

Ainsi, pour un convertisseur analogique-numérique, où  $n$  représente le nombre de bits des valeurs de sortie, le rapport signal sur bruit de quantification mesuré en décibels

*varie linéairement avec  $n$  et augmente de 6 dB avec chaque bit supplémentaire.* Dans l'analyse ci-dessus, on a négligé la distorsion d'écrêtage intervenant si la plage des amplitudes du signal d'entrée est supérieure à la plage de conversion  $V$ .

### 10.3.5 Exemples

Considérons premièrement un signal d'entrée à **distribution uniforme**  $p(x) = V^{-1} \text{rect}(x/V)$  dont la variance vaut  $\sigma_x^2 = V^2/12$ . Par (10.18),  $\xi_q = (V/\Delta)^2 = q^2 = 2^{2n}$  et

$$\xi_{q\text{dB}} \approx 6n \quad \text{dB} \quad (10.21)$$

***Ce résultat est souvent cité sans faire allusion aux conditions particulières pour lesquelles il est obtenu!***

Il est rare d'avoir affaire à des signaux uniformément distribués. Une répartition approximativement gaussienne est assez fréquente. Une estimation du rapport signal sur bruit de quantification peut aussi être facilement obtenue dans ce cas sous l'hypothèse d'une distribution quasi-uniforme de l'erreur sur un pas de quantification. Par exemple, supposons que la plage de conversion  $V_1$  corresponde à 6 écarts-type  $\sigma_x$  (fig. 10.18). On obtient alors, d'après (10.20):

$$\xi_{q\text{dB}} \approx 6n - 4,76 \quad \text{dB} \quad (10.22)$$

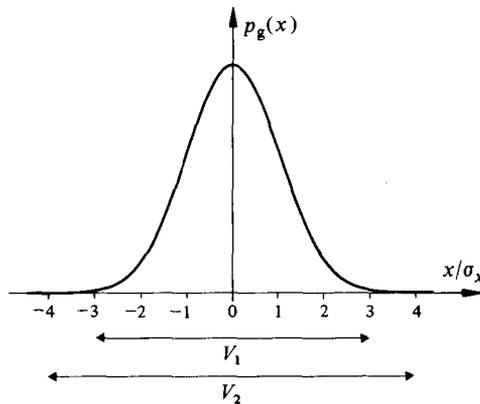


Fig. 10.18

Si l'on fait passer la plage de conversion à  $V_2 = 8 \sigma_x$ , on a

$$\xi_{q\text{dB}} \approx 6n - 7,27 \quad \text{dB} \quad (10.23)$$

Dans le cas d'un signal sinusoïdal d'amplitude crête-à-crête  $V$ , on a  $\sigma_x = V/(2\sqrt{2})$ , d'où

$$\xi_{q\text{dB}} \approx 6n + 1,77 \quad \text{dB} \quad (10.24)$$

Ces résultats sont résumés sur la figure 10.19.

Une quantification à 16 niveaux ( $n = 4$  bits) se révèle suffisante en télévision industrielle. Des valeurs de  $n = 8, 10$  ou  $12$  bits ( $q = 256, 1024$  ou  $4096$ ) sont courantes en traitement des signaux et des images et en acquisition de données en général. Le haut de gamme ( $n = 14$  à  $16, \dots$ ) est réservé à des applications très particulières (mesures de haute précision, signaux acoustiques à haute fidélité).

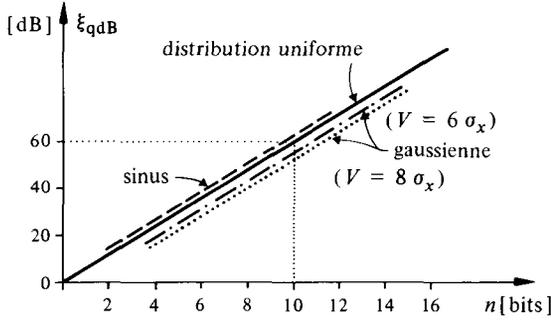


Fig. 10.19

□ 10.3.6 Distribution du signal quantifié

Dans le cas d'une quantification uniforme avec arrondi pour laquelle le nombre de niveau  $q$  est, pour simplifier, considéré comme illimité, la densité de probabilité du signal quantifié est la loi discrète (fig. 10.20)

$$p(x_q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \delta(x_q - k\Delta) \tag{10.25}$$

où (fig. 10.21)

$$p_k = \int_{(k-1/2)\Delta}^{(k+1/2)\Delta} p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cdot \text{rect}[(x - k\Delta)/\Delta] dx \tag{10.26}$$

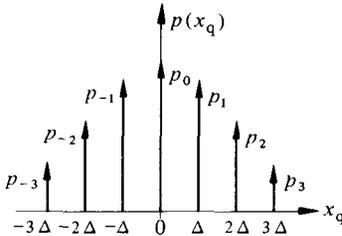


Fig. 10.20

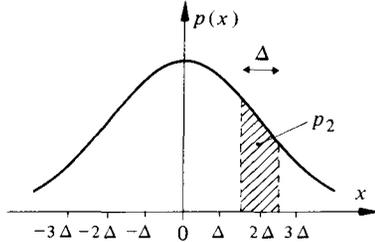


Fig. 10.21

Les probabilités  $p_k$  sont donc équivalentes aux échantillons en  $x = k\Delta$  d'une fonction

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x') \text{rect}[(x - x')/\Delta] dx' \\ &= p(x) * \text{rect}(x/\Delta) \\ &= \text{Prob}(x - \Delta/2 \leq \mathbf{x} \leq x + \Delta/2) \end{aligned} \tag{10.27}$$

Les résultats établis au chapitre 9 concernant l'échantillonnage idéalisé d'un signal temporel peuvent donc être transposés dans le cas de la quantification. *Celle-ci est équivalente à une opération d'échantillonnage idéalisé d'une loi de probabilité  $w(x)$ .*

La fonction caractéristique  $\Pi_{xq}(v)$  du signal quantifié est, par (14.64), la transformée de Fourier (inverse) de la densité de probabilité  $p(x_q)$ . Par (9.12), (10.25) et (10.26) on a

$$\begin{aligned} \Pi_{xq}(v) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Pi_x(v - n/\Delta) \operatorname{sinc}(\Delta v - n) \\ &= \operatorname{rep}_{\Delta^{-1}} \{ \Pi_x(v) \operatorname{sinc}(\Delta v) \} \end{aligned} \tag{10.28}$$

où  $\Pi_x(v)$  est la fonction caractéristique du signal d'entrée  $x(t)$ .

La fonction  $\Pi_x(v) \operatorname{sinc}(\Delta v)$  s'annule, en particulier, pour toutes les valeurs  $v = k/\Delta$  avec  $k$  entier. Par ailleurs, si la plage des amplitudes du signal d'entrée  $x(t)$  est  $V$ , la dispersion de  $\Pi_x(v)$  sur l'axe  $v$  est, selon (4.185), de l'ordre de  $V^{-1}$  (fig. 10.22). Comme en pratique  $\Delta \ll V$ , on a approximativement (fig. 10.23)

$$\Pi_{xq}(v) \approx \operatorname{rep}_{\Delta^{-1}} \{ \Pi_x(v) \} \tag{10.29}$$

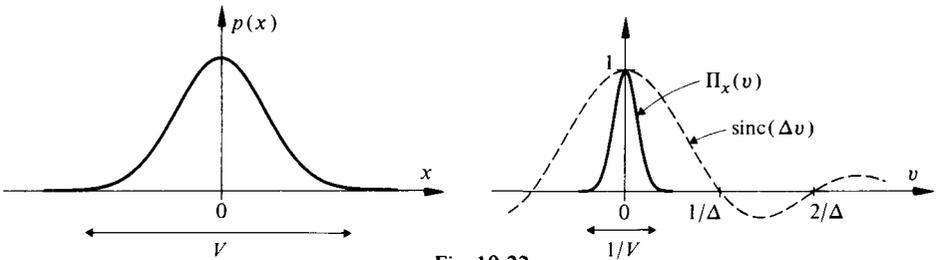


Fig. 10.22

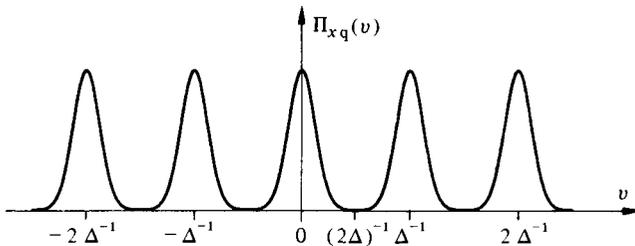


Fig. 10.23

□ 10.3.7 Théorème de la quantification

Par analogie avec le théorème d'échantillonnage du paragraphe 9.3.3, on peut énoncer le théorème suivant :

- la densité de probabilité  $p(x)$  d'une variable continue  $x$  est entièrement décrite par la densité de probabilité  $p(x_q)$  de la variable  $x_q$  quantifiée uniformément avec un pas  $\Delta$ , si la fonction caractéristique  $\Pi_x(v)$  est à support borné tel que :

$$\Pi_x(v) = 0 \quad \text{pour } |v| \geq (2\Delta)^{-1} \tag{10.30}$$

Pour les mêmes raisons que celles mentionnées au paragraphe 9.3.2, lorsque la dynamique du signal est bornée, la fonction caractéristique ne peut en fait s'annuler sur un intervalle non nul. Elle tend toutefois vers zéro lorsque  $v$  tend vers l'infini de telle sorte que (10.30) peut être satisfaite avec une bonne approximation.

□ **10.3.8 Théorème des moments du premier ordre**

Par (14.68), le moment du 1er ordre et de degré  $k : m_{xk} = E[\mathbf{x}^k]$  est proportionnel (facteur  $j - k$ ) à la  $k$ ième dérivée de la fonction caractéristique  $\Pi_x(u)$  évaluée en  $u = 2\pi v = 0$ . Cette dérivée peut être évaluée sans erreur à partir de  $\Pi_{xq}(v)$  si les translations qui la composent ne se superposent pas au voisinage de  $v = 0$ . La condition est donc ici moins sévère que (10.30)

$$\Pi_x(v) = 0 \quad \text{pour } |v| > \Delta^{-1} - \epsilon; \quad \epsilon > 0 \tag{10.31}$$

On obtient alors les formules de Sheppard [64], reproduites ici seulement pour  $k = 1$  et  $k = 2$ :

$$m_{x1} = m_{xq1} \tag{10.32}$$

$$m_{x2} = m_{xq2} - \Delta^2/12 \tag{10.33}$$

□ **10.3.9 Extension à la statistique du second ordre**

Par une analyse similaire, on montre en tenant compte de (14.70) que si la fonction caractéristique du 2ème ordre

$$\Pi_{xy}(v, \nu) = 0 \quad \text{pour } |v| > \Delta^{-1} - \epsilon, | \nu | > \Delta^{-1} - \epsilon; \quad \epsilon > 0 \tag{10.34}$$

les moments du 2ème ordre  $E[\mathbf{x}_1^k \mathbf{y}_2^l]$ , avec  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t)$  et  $\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}(t + \tau)$ , peuvent s'obtenir directement par dérivation en  $v = \nu = 0$  de la fonction caractéristique  $\Pi_{xq}(v, \nu)$ .

En particulier, on a dans ces conditions la relation suivante entre les fonctions de corrélation des signaux non quantifiés et quantifiés

$$R_{xy}(\tau) = \begin{cases} R_{xyq}(0) - \Delta^2/12 & \tau = 0 \\ R_{xyq}(\tau) & \tau \neq 0 \end{cases} \tag{10.35}$$

d'où, dans le cas de l'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \begin{cases} R_{xq}(0) - \Delta^2/12 & \tau = 0 \\ R_{xq}(\tau) & \tau \neq 0 \end{cases} \tag{10.36}$$

Ce résultat indique que, lorsque la condition (10.34) est satisfaite, le bruit de quantification  $n_q = x_q - x$  est un processus à valeur moyenne nulle et variance  $\Delta^2/12$  à distribution uniforme, assimilable à un bruit blanc non corrélé avec  $x(t)$ .

□ **10.3.10 Propriétés du bruit de quantification**

Lorsque  $x_q = k\Delta$ ,  $n_q = x_q - x$  est distribué selon la loi conditionnelle  $p_x(n_q - k\Delta) \text{rect}(n_q/\Delta)$ . La densité de probabilité du bruit de quantification uniforme avec arrondi est, toujours en admettant un nombre infini de niveaux de quantification,

$$p(n_q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_x(n_q - k\Delta) \text{rect}(n_q/\Delta) \tag{10.37}$$

Par conséquent, sa fonction caractéristique est, par (4.15), (4.17), (4.121) et (1.36):

$$\begin{aligned}\Pi_{nq}(v) &= \left[ \Pi_x(v) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi vk\Delta) \right] * \Delta \operatorname{sinc}(\Delta \cdot v) \\ &= \Pi_x(v) \cdot \delta_{\Delta^{-1}}(v) * \operatorname{sinc}(\Delta \cdot v) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi_x(k\Delta^{-1}) \operatorname{sinc}(\Delta \cdot v - k)\end{aligned}\quad (10.38)$$

Les composantes de  $\Pi_{nq}(v)$  pour  $k=0$  et  $k=1$  sont représentées sur la figure 10.24.

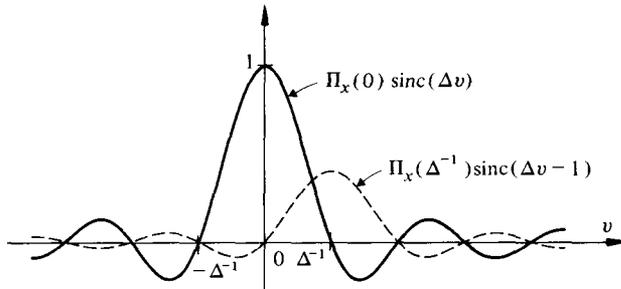


Fig. 10.24

Une condition nécessaire et suffisante [113] pour que le bruit de quantification soit à distribution uniforme

$$p(n_q) = \Delta^{-1} \operatorname{rect}(n_q/\Delta) \quad (10.39)$$

est que la fonction caractéristique  $\Pi_x(v)$  du signal d'entrée soit nulle pour  $v = k\Delta^{-1}$ , avec  $k$  entier différent de zéro. Dans ce cas, en effet, avec  $\Pi_x(0) = \int p(x) dx = 1$ :

$$\Pi_{nq}(v) = \operatorname{sinc}(\Delta \cdot v) = F^{-1}\{p(n_q)\} \quad (10.40)$$

Cette condition est, bien sûr, aussi satisfaite lorsque la condition (10.31) est valable.

Il apparaît donc clairement que **le bruit de quantification peut être considéré comme uniformément distribué même dans des conditions de quantification grossière.**

Sa valeur moyenne est nulle, en cas de quantification par arrondi, et sa variance  $\sigma_q^2 = \Delta^2/12$  est précisément égale au membre de droite de (10.16).

Par une généralisation à deux dimensions, on démontre que sous les mêmes conditions peu sévères, **l'erreur de quantification est assimilable à un bruit blanc non corrélé (mais pas statistiquement indépendant) avec le signal d'entrée  $x(t)$ .**

#### □ 10.3.11 Exemple: signal gaussien

Soit  $x(t)$  tel que

$$p(x) = (2\pi\sigma_x^2)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}x^2/\sigma_x^2) \quad (10.41)$$

avec, selon (14.97) et  $u = 2\pi v$ ,

$$\Pi_x(v) = \exp(-2\pi^2\sigma_x^2v^2) \quad (10.42)$$

Pour  $v \geq (2\sigma_x)^{-1}$ ,  $\Pi_x(v) < 1\%$ . On en déduit qu'une quantification très grossière avec un pas

$$\Delta \leq \sigma_x \tag{10.43}$$

est déjà suffisante pour garantir un bruit de quantification à distribution pratiquement uniforme, à spectre blanc, faiblement corrélé avec  $x(t)$ .

Dans une telle situation, la mesure par voie numérique des propriétés statistiques du premier et du second ordre du signal d'entrée peut s'effectuer avec une précision satisfaisante en se limitant à 8 niveaux de quantification par exemple ( $V = q\Delta = 8\sigma_x$ ), ce qui implique une conversion A/N à 3 bits seulement.

□ **10.3.12 Quantification uniforme à référence stochastique**

L'addition avant quantification (fig. 10.25) au signal d'entrée utile  $s(t)$  d'un bruit aléatoire auxiliaire  $a(t)$  est analogue à la présence d'une fluctuation stochastique (en anglais : *dither quantization*) de l'origine de la loi de quantification.

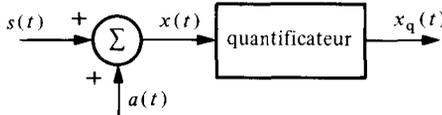


Fig. 10.25

Si  $a(t)$  et  $s(t)$  sont *statistiquement indépendants*, on a, par (5.187), pour  $x(t) = s(t) + a(t)$

$$\Pi_x(v) = \Pi_s(v) \cdot \Pi_a(v) \tag{10.44}$$

Il suffit que  $\Pi_a(v) = 0$  pour  $v = k\Delta^{-1}$ , avec  $k$  entier différent de zéro, pour que  $\Pi_x(v = k\Delta^{-1}) = 0$  *quelle que soit*  $\Pi_s(v)$  et, par conséquent, que le bruit de quantification soit distribué uniformément selon (10.39) avec une valeur moyenne nulle. Le signal quantifié est

$$x_q(t) = x(t) + n_q(t) = s(t) + a(t) + n_q(t) \tag{10.45}$$

Par (14.46), on obtient l'identité des valeurs moyennes

$$\mu_{xq} \equiv \mu_s \tag{10.46}$$

si  $a(t)$  est également à valeur moyenne nulle. Une distribution évidente de  $a(t)$  satisfaisant la condition énoncée est la loi uniforme

$$p(a) = \Delta^{-1} \text{rect}(a/\Delta) \tag{10.47}$$

Cette approche est utilisée [114] en calcul stochastique, où les grandeurs sont représentées par les valeurs moyennes de variables aléatoires quantifiées grossièrement (souvent avec  $q = 2$ ), ou pour améliorer les performances de corrélateurs simplifiés (§ 13.2.4).

## 10.4 CODAGE BINAIRE

## 10.4.1 Représentation binaire des niveaux de quantification

A chacun des  $q = 2^n$  niveaux discrets définis par la loi de quantification, on peut faire correspondre un mot binaire distinct de  $n$  bits. Le choix d'une solution parmi les  $q!$  théoriquement possibles est lié à des considérations pratiques où interviennent le mode de fonctionnement du convertisseur A/N ou N/A et l'origine ou la destination de l'information numérique.

Tous les codes utilisés en pratique se déduisent du code binaire pur (tab. 10.26). Une différence notable est introduite entre le codage de signaux strictement unipolaire et le cas, plus fréquent, des signaux bipolaires.

Tableau 10.26 Principaux codes pour signaux unipolaires et bipolaires ( $n = 4$ ).

$M$	$m = \frac{M}{2^n}$	binaire $d_1 d_2 d_3 d_4$	code de Gray	BCD 8421	BCD 2421
15	15/16	1111	1000		
14	14/16	1110	1001		
13	13/16	1101	1011		
12	12/16	1100	1010		
11	11/16	1011	1110	⋮	⋮
10	10/16	1010	1111	0001	0000
9	9/16	1001	1101		0001
8	8/16	1000	1100		0000
7	7/16	0111	0100		0100
6	6/16	0110	0101		0101
5	5/16	0101	0111		0110
4	4/16	0100	0110		0111
3	3/16	0011	0010		0100
2	2/16	0010	0011		0101
1	1/16	0001	0001		0100
0	0	0000	0000		0011

$M$	$m = \frac{M}{2^n}$	binaire décalé	binaire symétrique	complément à 2	complément à 1
7	7/16	1 111	0 111	0 111	0 111
6	6/16	1 110	0 110	0 110	0 110
5	5/16	1 101	0 101	0 101	0 101
4	4/16	1 100	0 100	0 100	0 100
3	3/16	1 011	0 011	0 011	0 011
2	2/16	1 010	0 010	0 010	0 010
1	1/16	1 001	0 001	0 001	0 001
(-) 0	(-) 0	1 000	(1) 0 000	0 000	0 000 (1111)
-1	-1/16	0 111	1 001	1 111	1 110
-2	-2/16	0 110	1 010	1 110	1 101
-3	-3/16	0 101	1 011	1 101	1 100
-4	-4/16	0 100	1 100	1 100	1 011
-5	-5/16	0 011	1 101	1 011	1 010
-6	-6/16	0 010	1 110	1 010	1 001
-7	-7/16	0 001	1 111	1 001	1 000

### 10.4.2 Définitions: code binaire pur

C'est la méthode la plus simple et la plus connue de représentation d'un nombre  $M$  sous forme binaire (chap. XIV 2). En normalisant l'échelle des nombres entre zéro et un en posant  $m = M/2^n$ , le *code binaire pur* correspondant est l'ensemble des chiffres binaires, ou bits,  $d_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) défini par

$$m = \sum_{i=1}^n d_i \cdot 2^{-i} \quad ; d_i = 0 \text{ ou } 1 \quad (10.48)$$

Les puissances de deux sont appelées les *poids* du code. Dans la notation utilisée,  $d_1$  est le *bit de poids le plus fort* ( $1/2$ ) et  $d_n$  est le *bit de poids le plus faible* ( $1/2^n$ ). En anglais:  $d_1 = \text{MSB} = \text{Most Significant Bit}$  et  $d_n = \text{LSB} = \text{Least Significant Bit}$ .

Ainsi, pour une loi de quantification uniforme avec plage de conversion  $V$ , le niveau  $x_{qm}$  est égal à

$$x_{qm} = mV = M\Delta \quad (10.49)$$

où  $\Delta$  est le pas de quantification.

### 10.4.3 Définition: code de Gray

Le *code de Gray*, appelé aussi code réfléchi, n'est pas un code pondéré. Il se déduit du code binaire pur en examinant successivement chaque bit, en partant du poids le plus fort pour aller vers le poids le plus faible. Pour tout chiffre binaire égal à 0, le chiffre de rang immédiatement inférieur est inchangé. Pour tout chiffre binaire égal à 1, au contraire, le chiffre de rang immédiatement inférieur doit être complété ( $0 \rightarrow 1$  et  $1 \rightarrow 0$ ). Ce transcodage est défini par les relations

$$d_{1g} = d_{1b} \quad (10.50)$$

$$d_{ig} = d_{ib} \oplus d_{(i-1)b} \quad ; i = 2, 3, \dots, n \quad (10.51)$$

où les indices b et g désignent les codes binaires purs et de Gray, respectivement, et le symbole  $\oplus$  caractérise l'opération logique Ou-exclusif:  $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 0$ ,  $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$  (§ V.1.6.1).

Le transcodage inverse est obtenu de manière analogue, avec (10.51) remplacée par

$$d_{ib} = d_{ig} \oplus d_{(i-1)b} \quad ; i = 2, 3, \dots, n \quad (10.52)$$

Ces relations sont facilement réalisées en électronique logique.

Le code de Gray a la propriété que le passage d'un niveau à son voisin n'implique que le changement d'un seul bit. Il est pour cette raison utilisé dans les systèmes de conversion continue (convertisseur parallèle, codeur angulaire électromécanique, etc.) pour limiter à  $\pm \Delta$  les erreurs éventuelles de lecture effectuées au moment d'un changement de niveau.

### 10.4.4 Définition: code BCD

Dans le code *BCD* (*Binary Coded Decimal*), ou code décimal binaire, chaque chiffre décimal (unités, dizaines, centaines, etc.) du nombre entier  $M$  est traduit en code binaire. On utilise à cet effet le système de pondération 8-4-2-1 (code binaire pur) ou

parfois 2-4-2-1. Ce type de codage est utilisé principalement dans les voltmètres numériques et autres dispositifs à affichage numérique, car il permet l'emploi d'un décodeur simple pour traduire chaque groupe de quatre bits en chiffre décimal. Il est également utilisé, pour des raisons semblables, dans les calculatrices de poche et de bureau.

#### 10.4.5 Définition : code binaire décalé

Le *code binaire décalé* correspond simplement à une translation du code binaire pur d'une quantité égale à la moitié de la plage totale. Le bit de poids le plus élevé, qui vaut 1 pour toutes les valeurs positives ou nulles et 0 pour toutes les valeurs négatives, caractérise le signe de la valeur encodée. Ce code est facilement obtenu à partir d'un convertisseur unipolaire auquel est appliqué une tension de décalage analogique.

#### 10.4.6 Définition : code binaire symétrique

Dans le *code binaire symétrique*, les nombres positifs et négatifs de même valeur absolue ne se distinguent que par le bit de signe. Ce type de code, qui n'est pas très fréquemment utilisé en traitement numérique, permet de maintenir une bonne précision et une bonne linéarité autour du niveau zéro, alors que tous les autres codes bipolaires impliquent un changement de tous les bits en passant du niveau  $M=0$  au niveau  $M=-1$ . Ce code peut être obtenu directement à l'aide d'un convertisseur unipolaire et d'un circuit séparé pour l'inversion de la polarité.

Un transcodage du code binaire décalé au code binaire symétrique implique l'inversion du MSB et, si le nouveau MSB vaut 1, l'inversion de tous les autres bits et l'addition d'une unité.

En inversant le bit de signe, on obtient le *code binaire replié* dont une variante est utilisée en modulation PCM pour la téléphonie (sect. XVIII 7.5).

#### 10.4.7 Définition : code complément à 2

Le *code complément à 2* est largement utilisé pour la représentation numérique des signaux bipolaires. Il facilite en particulier les opérations arithmétiques ultérieures d'addition et de soustraction de nombres négatifs (sect. XIV 2.3), le résultat tenant compte automatiquement du signe (exemple 10.4.9).

Si  $M$  est un nombre positif, le nombre négatif  $-M$  est représenté par le code binaire du complément à 2 de  $M$  défini par

$$M' = 2^n - M \quad (10.53)$$

La représentation de la valeur négative d'un nombre positif est obtenue pratiquement en complémentant chaque bit (complément à 1) et en ajoutant une unité dans la position du bit le moins significatif.

**On passe du code binaire décalé au code complément à 2 simplement en inversant le bit de signe.** Les convertisseurs A/N à approximations successives fournissent naturellement un code binaire pur (décalé ou non selon que la plage à convertir est bipolaire ou unipolaire). Ils sont donc aussi directement utilisables en code complément à deux moyennant une simple inversion du bit de poids le plus fort (MSB) qui joue le rôle de

bit de signe. Les fabricants incorporent généralement eux-mêmes un circuit inverseur logique à leurs convertisseurs de manière à fournir simultanément les variables MSB et MSB.

**10.4.8 Définition: code complément à 1**

Pour le *code complément à 1*, la valeur négative d'un nombre positif est simplement obtenue en inversant tous les bits. Ce code a le désavantage, comme le code binaire symétrique, d'offrir deux représentations du nombre zéro. Le code complément à 1 diffère du code complément à 2 d'une seule unité pour les nombres négatifs. Il est parfois utilisé en raison de sa simplicité lorsqu'une erreur systématique d'un pas de quantification peut être tolérée.

**10.4.9 Exemple**

Si  $M = 5$  et  $n = 4$ ,  $-M = -5$  est représenté en code complément à 2 par le code binaire pur de  $M' = 16 - 5 = 11 \leftrightarrow 1011$ .  $M = 5$  correspond en binaire pur à  $0101$ , le code complément à 1 de  $-M = -5$  est  $1010$ .

Si l'on a deux nombres positifs, par exemple  $M_1 = 5 \leftrightarrow 0101$  et  $M_2 = 2 \leftrightarrow 0010$ , les opérations d'addition et de soustraction sont équivalentes en code complément à 2 :

- $M_1 + M_2 = 7 \leftrightarrow 0101 + 0010 = 0111$ ;
- $M_1 - M_2 = 3 \leftrightarrow M_1 + M'_2 \leftrightarrow 0101 + 1110 = (1)0011$  (le 5ème bit est ignoré);
- $M_2 - M_1 = -3 \leftrightarrow M_2 + M'_1 \leftrightarrow 0010 + 1011 = 1101$ .

**10.5 ACQUISITIONS DE DONNÉES**

**10.5.1 Systèmes multi-voies**

Un système d'acquisition de données (fig. 10.27) est une installation groupant généralement plusieurs voies de conversion analogique-numérique reliant des capteurs à un processeur central doublé d'une mémoire. Celui-ci assure premièrement la gestion de l'installation et des données recueillies. Selon ses capacités de traitement, on peut également lui assigner des tâches de filtrage, de compensation des nonlinéarités des capteurs, d'analyse statistique, de contrôle, etc. Il est souvent connecté à un ordinateur principal,

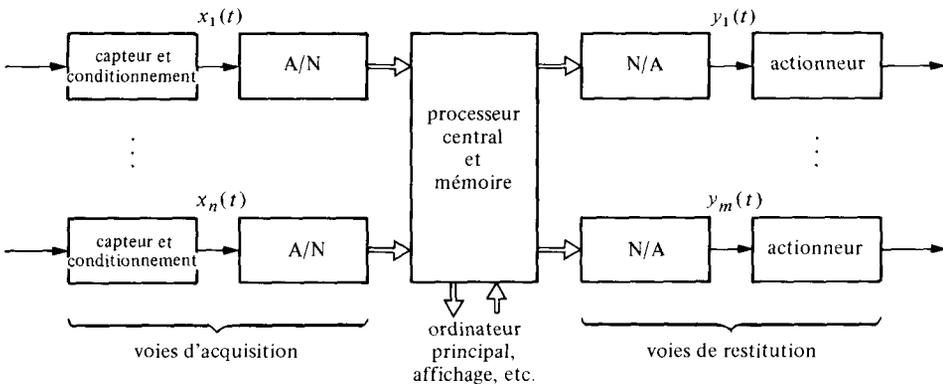


Fig. 10.27

qui se charge des traitements importants, à des dispositifs d'affichage, etc. Selon les besoins, le système comprend également des canaux de restitution de l'information traitée avec conversion analogique-numérique et actionneurs.

Ces installations sont surtout employées en technique des mesures (vol. XVII), en automatisation industrielle et pour le contrôle de grands systèmes (production d'énergie, équipement aéronautique et spatiaux, etc.). Si une ou quelques voies suffisent dans les applications simples, il n'est pas rare de rencontrer des installations comprenant plusieurs centaines, voire, exceptionnellement, plusieurs milliers de voies.

Selon les besoins, les convertisseurs A/N sont reliés aux capteurs de mesure par l'intermédiaire de circuits de conditionnement des signaux (amplification, filtrage, conversion courant-tension, etc.).

Lorsque le nombre de voies est élevé, l'information acquise est souvent multiplexée, soit au niveau analogique (fig. 10.28), soit au niveau numérique (fig. 10.29).

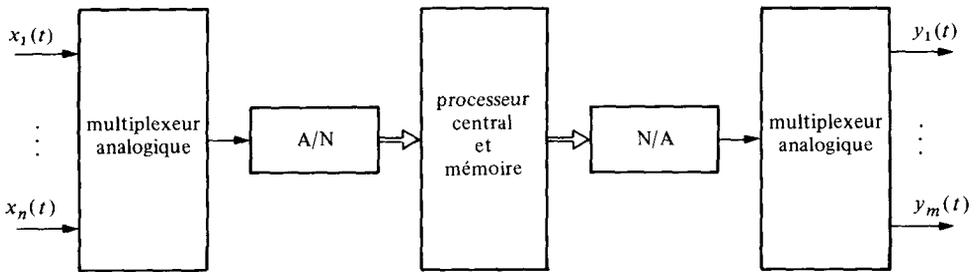


Fig. 10.28

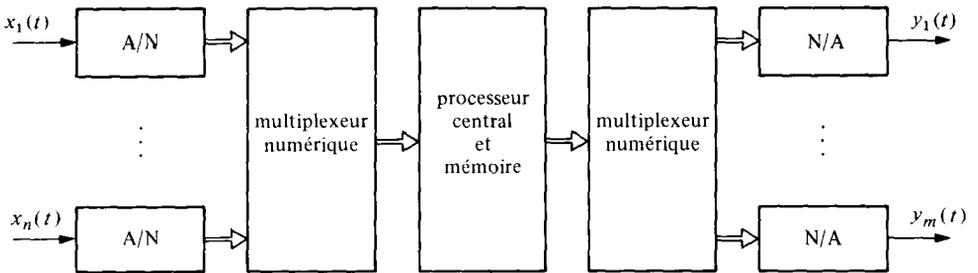


Fig. 10.29

La première solution est utilisée lorsque le convertisseur A/N est l'organe le plus coûteux. Une mémorisation temporaire sur chaque voie analogique par échantillonneurs-bloqueurs est en principe incorporée au multiplexeur. La solution décentralisée permettant d'attribuer à chaque capteur un dispositif de pré-traitement complet comprenant les circuits de conditionnement ad-hoc et un convertisseur A/N, complété au besoin par un microprocesseur, est une tendance actuelle qui offre de nombreux avantages (pré-traitement effectué directement à proximité du capteur, transmission et multiplexage numérique, meilleure insensibilité aux perturbations dues à l'environnement électromagnétique, etc.).

Dans la plupart des systèmes, les cadences d'échantillonnage disponibles sont faibles et ne conviennent que pour des signaux d'assez basse fréquence.

**10.5.2 Enregistrement de phénomènes transitoires**

L'enregistreur de transitoires est un dispositif de mémorisation particulier destiné à servir d'interface entre une source analogique de signaux éphémères et un équipement de visualisation (par exemple, oscilloscope, enregistreur graphique) ou d'analyse. Son principe est illustré par la figure 10.30.

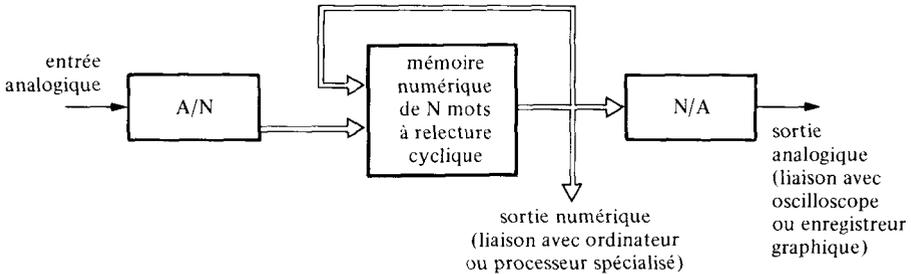


Fig. 10.30

En phase d'acquisition, le signal d'entrée est échantillonné et numérisé, dès son apparition, à une cadence  $f_{e1}$  compatible avec ses caractéristiques fréquentielles et temporelles. Un suréchantillonnage important ( $f_{e1} \gg 2B_m$ ) est souvent utilisé pour garantir une bonne reconstitution ultérieure avec simple extrapolation d'ordre zéro (§ 9.4.4). Lorsque les  $N$  échantillons correspondant à la capacité de la mémoire interne sont acquis, le dispositif est prêt à fonctionner en phase de restitution, avec une nouvelle cadence  $f_{e2}$  qui est choisie, suivant les besoins, supérieure ou inférieure à  $f_{e1}$ . La mémoire bénéficiant d'un circuit de relecture cyclique (recirculation), c'est un signal périodique dont on peut disposer en sortie, ce qui facilite l'observation du signal sur un oscilloscope ou son analyse spectrale par exemple. La conversion temporelle réalisée permet aussi bien d'enregistrer et d'observer commodément ensuite des phénomènes éphémères très lents (par exemple secousse sismique, transitoire thermique) ou, si le convertisseur d'entrée est suffisamment rapide, des impulsions très courtes (foudre, etc.).

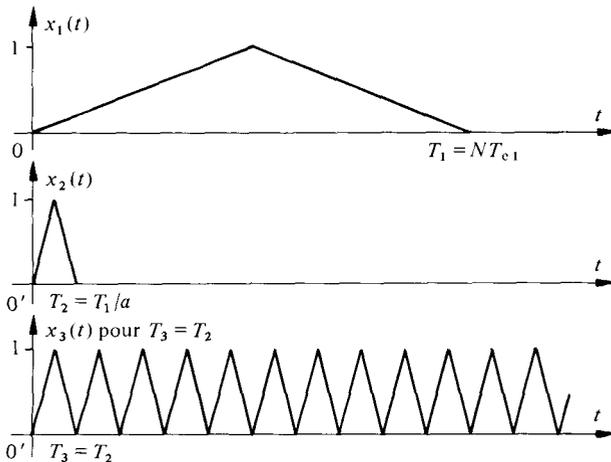


Fig. 10.31

Si  $T_{e1}$  est le pas d'échantillonnage d'acquisition, le tronçon de signal enregistré en mémoire  $x_1(t, T_1)$  a une durée  $T_1 = NT_{e1}$  (fig. 10.31). Le facteur d'accélération ou de ralentissement est

$$a = T_{e1}/T_{e2} = f_{e2}/f_{e1} \quad (10.54)$$

avec  $a > 1$  en cas d'accélération et  $0 < a < 1$  en cas de ralentissement. Le signal reproduit devient ainsi  $x_2(t, T_2) = x_1(at, T_1/a)$ . La relecture cyclique crée, elle, un signal périodique  $x_3(t) = \text{rep}_{T_3} \{x_2(t, T_2)\}$ . Par (4.18) et (4.125), les transformées de Fourier (fig. 10.32) de  $x_2(t, T_2)$  et  $x_3(t)$  se déduisent de celle de  $x_1(t, T_1)$ :

$$X_2(f, T_2) = a^{-1} X_1(f/a, T_1) \quad (10.55)$$

$$\begin{aligned} X_3(f) &= T_{e2}^{-1} X_2(f, T_2) \cdot \delta_{1/T_3}(f) \\ &= T_{e1}^{-1} X_1(f/a, T_1) \delta_{1/T_3}(f) \end{aligned} \quad (10.56)$$

La dilatation spectrale que permet d'obtenir la mémoire recirculante avec un facteur d'accélération  $a > 1$  est mise à profit dans certains analyseurs de spectre (§ 12.3.6).

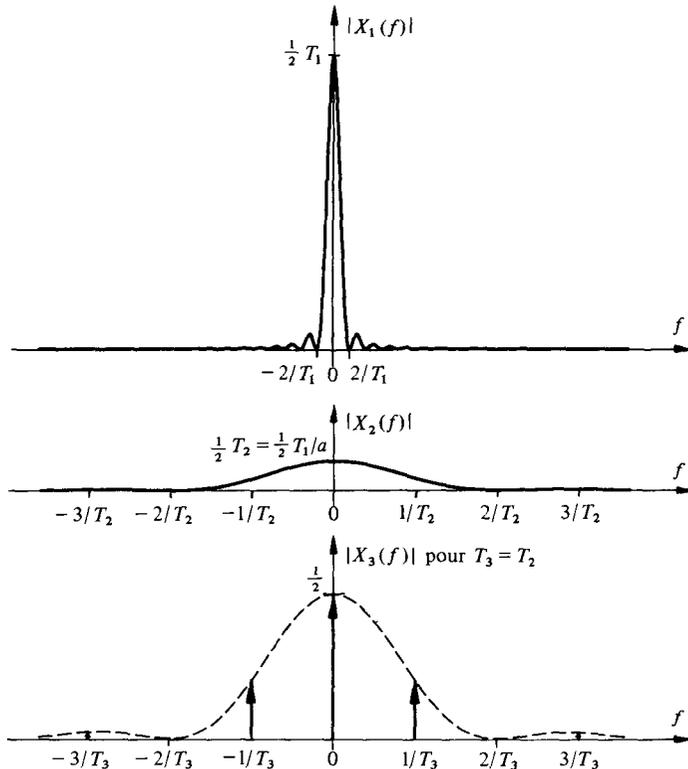


Fig. 10.32

### 10.5.3 Erreurs d'acquisition

En plus de la distorsion par recouvrement spectral (§ 9.3.1) et de la distorsion de quantification, qui sont propres aux opérations d'échantillonnage et de quantification (numérisation), il existe d'autres sources d'erreurs d'acquisition. Celles-ci sont dues aux

imperfections des circuits convertisseurs A/N et N/A. Leur description détaillée sort du cadre de cet ouvrage et peut être trouvée dans le volume XVIII ou la littérature spécialisée [103, 111]. On retiendra simplement pour mémoire, qu'elles ont principalement pour effet de faire dévier la caractéristique de quantification réelle de la loi idéale envisagée au paragraphe 10.3.4 :

- décalage (offset) : la caractéristique de quantification n'est en fait pas symétrique par rapport à l'origine (fig. 10.33);
- modification de pente (gain error) : la caractéristique moyenne croît plus vite – ou moins vite – que la loi théorique (fig. 10.34);
- non linéarité : les pas de quantification ne sont pas tous égaux et la caractéristique moyenne ne suit pas, de ce fait, la ligne droite théorique (fig. 10.35);
- non linéarité différentielle : les ondulations excessives ( $> \pm \Delta$ ) de la caractéristique moyenne par rapport à la droite théorique provoquent l'absence de certains mots-code en conversion A/N (missing codes) ou une croissance non monotone des niveaux en conversion N/A (fig. 10.36).

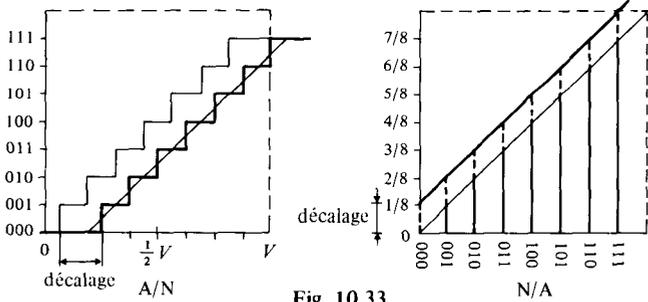


Fig. 10.33

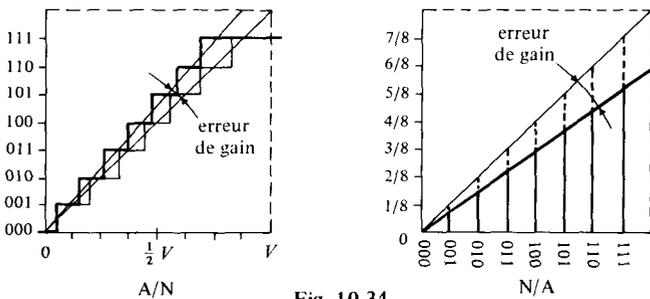


Fig. 10.34

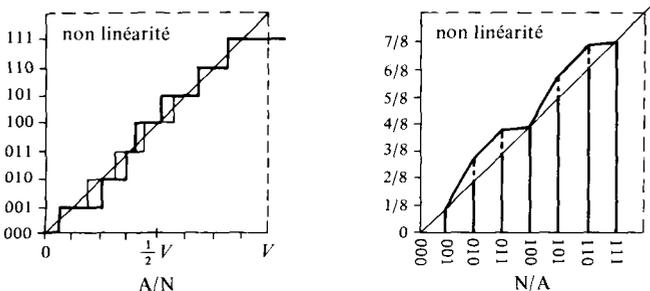


Fig. 10.35

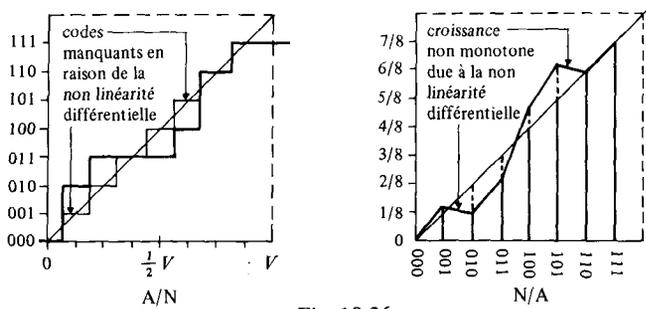


Fig. 10.36

Une méthode efficace de test de circuits convertisseurs est de leur imposer une grandeur d'entrée ayant une distribution statistique connue (par exemple uniforme) et de contrôler la distribution de la grandeur de sortie.

## 10.6 EXERCICES

**10.6.1** On désire enregistrer sous forme numérique binaire un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0 = 500$  Hz et d'amplitude crête à crête égale à 20 V :

- quelles caractéristiques principales (plage de conversion, temps de conversion, nombre de bits) doit posséder le convertisseur analogique-numérique utilisé, si le signal est échantillonné sans mémorisation et si le rapport signal sur bruit de quantification doit être supérieur à 45 dB ?
- Si l'on désire pouvoir restituer ensuite ce signal par une conversion numérique-analogique avec interpolation linéaire, quelle doit être la fréquence d'échantillonnage pour que la valeur absolue de l'erreur de reconstitution ne dépasse pas un pas de quantification ? Comparer le résultat obtenu avec la limite inférieure théorique indiquée par le théorème d'échantillonnage.

**10.6.2** Vérifier les résultats (10.21), (10.22), (10.23) et (10.24).

**10.6.3** Calculer le rapport signal sur bruit de quantification  $\xi_{qdB}$  obtenu dans le cas d'une plage de conversion  $V$  et d'une densité de probabilité du signal d'entrée égale à : a)  $p(x) = 2V^{-1} \text{rect}(2x/V)$ ; b)  $p(x) = 2V^{-1} \text{tri}(2x/V)$ ; c) une distribution gaussienne à valeur moyenne nulle avec  $V = 10 \sigma_x$ .

**10.6.4** Un signal  $x(t)$ , possédant une distribution statistique uniforme entre  $-V/4$  et  $V/4$ , est quantifié uniformément par un dispositif de quantification disposant de 256 niveaux discrets représentant une plage totale  $V$ . Déterminer le rapport signal sur bruit de quantification  $\xi_{qdB}$  ainsi obtenu.

**10.6.5** Un signal  $x(t)$  a pour densité de probabilité  $p(x) = \frac{1}{2} a \exp(-a|x|)$ . Il est quantifié uniformément en  $q = 2^n$  niveaux discrets compris entre  $-5/a$  et  $+5/a$ . Déterminer à partir de quelle valeur de  $n$  on obtient un rapport signal sur bruit de quantification  $\xi_{qdB}$  supérieur à 30 dB.

**10.6.6** Vérifier (10.32) et (10.33).

## MODULATION ET CHANGEMENT DE FRÉQUENCE

### 11.1 PRINCIPES GÉNÉRAUX

#### 11.1.1 Objectifs et définitions

La *modulation* est un procédé dans lequel un *signal primaire*, appelé *signal modulant*, modifie un signal auxiliaire, appelé *signal porteur* ou simplement *porteuse*, pour créer un *signal secondaire*, ou *signal modulé*, dont les caractéristiques sont mieux adaptées aux conditions désirées d'utilisation (fig. 11.1).

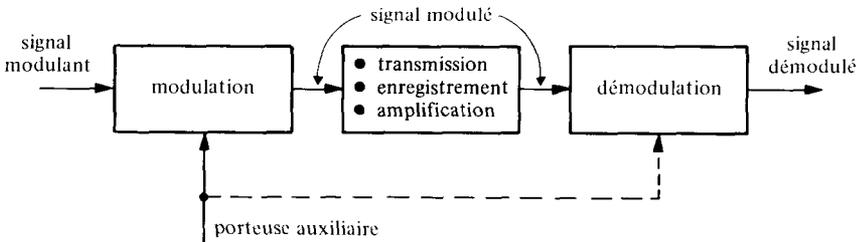


Fig. 11.1

La modulation est donc un moyen de représentation de l'information; elle s'apparente ainsi au codage.

On recourt principalement à la modulation pour :

- transposer sans perte d'information le spectre d'un signal dans un ***autre domaine de fréquences*** pour s'adapter aux contraintes d'émission-réception (efficacité et dimension des antennes), satisfaire des conditions imposées par une voie de transmission (propagation, largeur de bande disponible) ou faciliter certaines opérations de traitement du signal (changement de fréquence pour syntonisation en réception radio ou dans les analyseurs de spectres à balayage, par exemple);
- assurer le partage d'un canal de communication entre plusieurs signaux transmis simultanément (*multiplexage fréquentiel* : allocation d'une bande de fréquence différente à chaque message transmis simultanément, *multiplexage temporel* : transmission séquentielle de valeurs échantillonnées de chaque message);
- obtenir l'amplification et le filtrage efficace de faibles signaux de basse fréquence en s'affranchissant, en particulier, du bruit de fond en  $1/f$  décrit à la section 6.4 (amplificateur synchrone : § 13.2.10);
- enregistrer des signaux, dont le spectre s'étend jusqu'à la fréquence zéro, sur des supports magnétiques (enregistreurs de mesure);

- modifier le spectre du signal émis afin d'améliorer les conditions de détection (radar, par exemple : cf § 7.4.8 et sect. 13.4) et d'immunité au bruit (modulation angulaire et d'impulsions) ou de rendre la communication plus confidentielle et difficile à brouiller (systèmes à étalement de bande, § 13.2.11);
- varier une grandeur appropriée pour la commande ou le réglage automatique de machines ou de processus industriels.

La *démodulation* est l'opération inverse de la modulation : c'est la reconstruction du signal modulant à partir du signal modulé. Selon les cas, cette reconstitution requiert l'emploi d'un signal auxiliaire identique à, ou déduit de, celui utilisé dans la phase de modulation. L'addition éventuelle de bruits, d'interférences et de distorsions limite la fidélité de la reconstruction.

### 11.1.2 Domaines d'application

La modulation est principalement utilisée en *télécommunications* (chap. XVIII.8) dans le cadre des systèmes de

- télégraphie;
- téléphonie;
- radiophonie;
- télévision;
- transmission de données;
- télémesure et télécommandes.

Elle est également employée pour améliorer la résolution des *systèmes de détection* :

- radar;
- sonar;
- télédétection.

L'*instrumentation électronique* et la *métrologie* (vol. XVII) y font également appel pour réaliser des transpositions de fréquence facilitant le traitement du signal.

### 11.1.3 Procédés. Définitions

Les méthodes de modulation sont souvent classées en deux catégories :

- modulations analogiques;
- modulations numériques.

Le terme un peu malheureux de *modulation numérique* est utilisé en télécommunications pour désigner les divers procédés de *représentation codée* d'informations analogiques. La forme la plus usuelle de cette représentation, connue sous le nom de *modulation par impulsion et codage*, abrégé MIC (en anglais: *pulse code modulation*, PCM) est une variante des techniques de numérisation décrites au chapitre 10. Il n'y sera, par conséquent, fait mention que brièvement.

Les *modulations analogiques* satisfont à la définition donnée au paragraphe 11.1. Le signal porteur est soit sinusoïdal (*modulation continue*), soit une suite périodique d'impulsions (*modulation échantillonnée*). Selon la nature du paramètre du signal porteur que l'on fait varier en fonction du signal modulant, on distingue divers types de modulations.

Pour les modulations à porteuse sinusoïdale :

- modulations linéaires : d'amplitude (AM) ou à bande latérale unique (SSB);
- modulations angulaires : de fréquence (FM) ou de phase (ΦM).

Pour les modulations d'impulsions :

- modulation d'impulsions en amplitude (PAM);
- modulation d'impulsions en durée (PDM);
- modulation d'impulsions en position (PPM) ou en fréquence (PFM).

Lorsque le signal modulant est numérique, ou simplement quantifié, on obtient une *modulation discrète*. C'est le cas rencontré tout particulièrement en transmission de données (sect. XVIII 11.4), où l'on fait principalement usage de modulations discrètes de fréquence et de phase.

**11.1.4 Modulations à porteuse sinusoïdale : modèle général**

En utilisant la représentation d'un signal à spectre passe-bande (sect. 7.4), le signal secondaire  $s(t)$  d'un modulateur (§ 8.3.12) dont les entrées sont le signal modulant  $m(t)$  et la porteuse  $u_p(t) = \hat{U}_p \cos(2\pi f_p t + \alpha_p)$  peut s'écrire (fig. 11.2), selon (8.100)

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re} \{ \underline{s}(t) = \underline{r}(t) \exp [j(2\pi f_p t + \alpha_p)] \} \\ &= a(t) \cos(2\pi f_p t + \alpha_p) - b(t) \sin(2\pi f_p t + \alpha_p) \end{aligned} \tag{11.1}$$

où

$$\underline{r}(t) = a(t) + j b(t) = r(t) \exp [j \Delta \phi(t)] \tag{11.2}$$

est l'*enveloppe complexe* associée au signal analytique  $\underline{s}(t)$ , qui contient toute l'information apportée par le signal modulant. Selon les procédés de modulation, cette information est portée par l'enveloppe réelle  $r(t)$  ou par l'écart de phase instantanée  $\Delta \phi(t)$ , ou encore par une combinaison des deux.

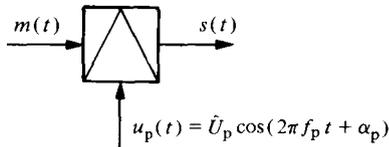


Fig. 11.2

Chaque type de modulation est ainsi caractérisée [99] par une loi du type

$$\underline{r}(t) = S_m \{ m(t) \} \tag{11.3}$$

où  $S_m$  représente l'opérateur de modulation adéquat (fig. 11.3). Inversement, la restitution du signal modulant est obtenue par une loi

$$m(t) = S_d \{ \underline{r}(t) \} \tag{11.4}$$

où  $S_d$  représente l'opérateur de démodulation nécessaire (fig. 11.4).

La densité spectrale du signal modulé est simplement liée à celle de l'enveloppe complexe par (7.88):

$$\Phi_s(f) = \frac{1}{4} [ \Phi_{\underline{r}}(-f - f_p) + \Phi_{\underline{r}}(f - f_p) ] \tag{11.5}$$

Cette formule simple ne s'applique toutefois qu'au cas de signaux stationnaires. La présence d'une non-stationnarité périodique peut entraîner des corrélations spectrales qui ajoutent à (11.5) un terme correctif [149].

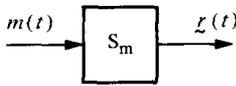


Fig. 11.3

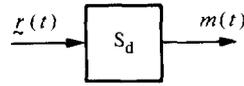


Fig. 11.4

### 11.1.5 Modulation à porteuse impulsionnelle : modèle général

Lorsque la porteuse (fig. 11.5) est une suite périodique d'impulsions de période  $T$  et de forme  $g(t/\Delta)$ , le signal modulé  $s(t)$  peut se mettre sous la forme générale

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g\left(\frac{t - kT - \tau_k}{\Delta_k}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k g(t/\Delta_k) * \delta(t - kT - \tau_k) \end{aligned} \quad (11.6)$$

où  $a_k$  est un paramètre d'amplitude,  $\Delta_k$  un paramètre de durée et  $\tau_k$  un paramètre de position, susceptibles de varier en fonction des valeurs échantillonnées  $m(kT)$  du signal modulant (fig. 11.6).

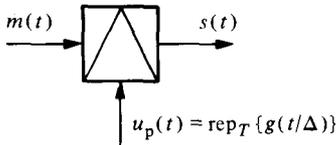


Fig. 11.5

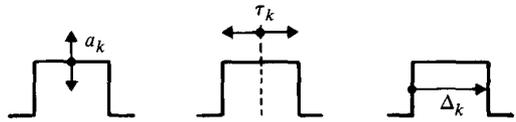


Fig. 11.6

Aucune expression générale de la densité spectrale du signal modulé ne peut être donnée ici. On remarque toutefois que dans le cas particulier (PAM) où  $\tau_k = 0$  et  $\Delta_k = \Delta = \text{constante}$ , le modèle (11.6) devient analogue à celui du signal échantillonné (9.1), avec fonction d'échantillonnage périodique  $e(t) = \delta_T(t)$ . Le spectre correspondant se déduit donc directement de (9.4). Si  $a_k = a$  et  $\Delta_k = \Delta$  sont des constantes (PPM, PFM), l'expression (11.6) est analogue à l'équation du signal de sortie d'un système linéaire invariant, de réponse impulsionnelle  $ag(t/\Delta)$ , excité par une suite aperiodique d'impulsions de Dirac. En dénotant par  $\Phi_\delta(f)$  la densité spectrale d'une telle suite, celle du signal modulé devient, par (4.18) et (8.24):  $\Phi_s(f) = a^2 \Delta^2 |G(\Delta f)|^2 \cdot \Phi_\delta(f)$ . Dans le cas où seule  $\Delta_k$  varie (PDM), l'expression (11.6) est analogue au signal de sortie d'un opérateur paramétrique linéaire (§ 8.3.2) excité par une suite périodique d'impulsions de Dirac  $\delta_T(t)$ .

## 11.2 MODULATIONS LINÉAIRES

### 11.2.1 Introduction

Les modulations linéaires – parfois improprement appelées modulations d'amplitude – forment une famille de techniques apparentées de modulation dans lesquelles l'amplitude d'une porteuse sinusoidale varie en fonction du signal modulant. Les membres de cette famille sont désignés par les appellations conventionnelles suivantes (les acronymes

mentionnés proviennent généralement des appellations utilisées en langue anglaise) :

- modulation d'amplitude avec porteuse (AM);
- modulation d'amplitude sans porteuse (AM-P);
- modulation à bande latérale unique (SSB);
- modulation à bande latérale résiduelle (VSB).

Ces modulations sont obtenues par une **opération linéaire** qui préserve, en général, la morphologie du spectre unilatéral du signal modulant  $m(t)$  en lui faisant subir une translation fréquentielle. Le tableau 11.7 résume les expressions de l'enveloppe complexe  $\underline{z}(t)$  et les spectres  $\Phi_s(f)$  du signal modulé correspondants à chaque type de modulation.

Tableau 11.7

Signal modulant	$m(t) = U_m \cdot m_o(t)$	$\Phi_m(f)$
AM	$\underline{z}(t) = \hat{U}_p [1 + m_o(t)]$	
AM-P	$\underline{z}(t) = \hat{U}_p \cdot m_o(t)$	
SSB	$\underline{z}(t) = \frac{\hat{U}_p}{2} [m_o(t) + j\check{m}_o(t)]$	
VSB	$\underline{z}(t) = \frac{\hat{U}_p}{2} \{ (1 + m_o(t)) + j[\check{m}_o(t) * h(t)] \}$	

L'opération fondamentale impliquée par toute modulation linéaire est la **multiplication** (§ 8.3.4) du signal modulant – ou d'une fonction de ce signal – par une porteuse sinusoïdale (fig. 11.8). Cette multiplication est obtenue, soit directement à l'aide d'un dispositif paramétrique approprié (multiplicateur analogique), soit indirectement en superposant la porteuse et le signal modulant à l'entrée d'un opérateur non linéaire amnésique (§ 8.4.2) de caractéristique  $y = g(x)$  – ou d'un circuit à réactance non linéaire – suivi d'un filtre éliminant les composantes spectrales indésirables (fig. 11.9). La non-linéarité pratiquement utilisée est celle d'un composant électronique (transistor bipolaire ou à effet de champ, tube à vide, capacité non linéaire d'une diode bloquée).

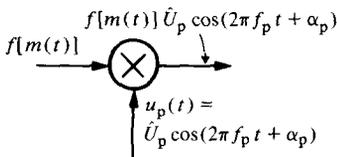


Fig. 11.8

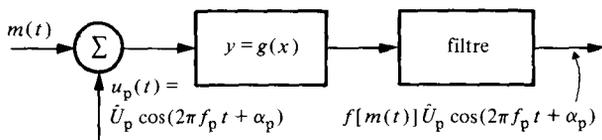


Fig. 11.9

Un exemple simple est celui d'un modulateur quadratique de caractéristique  $y = a_1x + a_2x^2$ . Si  $x(t) = m(t) + \hat{U}_p \cos(\omega_p t + \alpha_p)$ ,  $y(t) = \{a_1 m(t) + a_2 m^2(t) + a_2 \hat{U}_p^2 \cos^2(\omega_p t + \alpha_p)\} + \{a_1 \hat{U}_p \cos(\omega_p t + \alpha_p) [1 + (2a_2/a_1)m(t)]\}$ . Le deuxième terme entre accolades contient le signal modulé désiré, le premier terme doit être éliminé par filtrage.

**11.2.2 Définition : modulation d'amplitude avec porteuse**

La *modulation d'amplitude avec porteuse*, désignée par son abréviation anglaise AM (*Amplitude Modulation*) est la forme la plus classique de modulation linéaire. Son principe est illustré par le schéma de la figure 11.10.

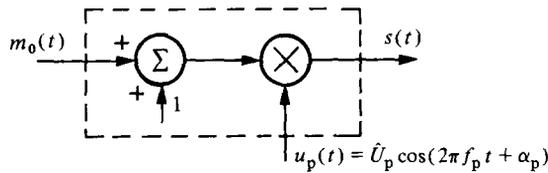


Fig. 11.10

Le signal modulé  $s(t)$  correspond au produit de la porteuse sinusoïdale  $u_p(t)$  par la fonction du signal modulant  $x(t) = 1 + m_0(t)$  supposée statistiquement indépendante. Le signal  $m_0(t) = m(t)/U_m$  est ici sous forme *adimensionnelle* (obtenue en divisant le signal original par une valeur caractéristique  $U_m$ ):

$$s(t) = [1 + m_0(t)] \hat{U}_p \cos(2\pi f_p t + \alpha_p) \tag{11.7}$$

En l'absence de signal modulant [ $m(t) = 0$ ], le signal  $s(t)$  est ici égal à la porteuse seule (fig. 11.11).

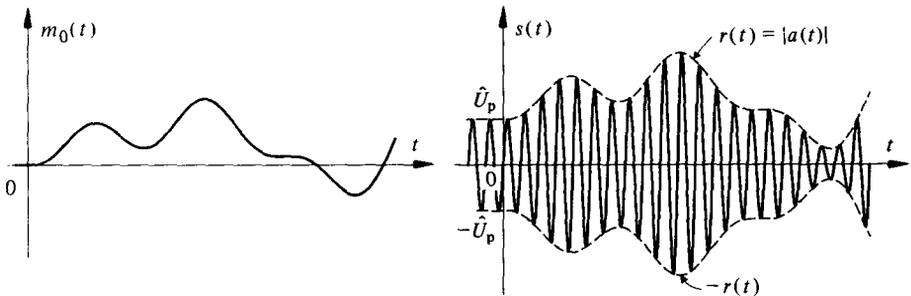


Fig. 11.11

La comparaison de (11.7) avec le modèle général (11.1) montre que l'on a dans ce cas

$$\underline{r}(t) = a(t) = [1 + m_0(t)] \hat{U}_p \tag{11.8}$$

La densité spectrale de l'enveloppe complexe est  $\Phi_r(f) = \hat{U}_p^2 [\delta(f) + \Phi_{m_0}(f)]$  et le spectre du signal modulé (fig. 11.12) devient, par (11.5)

$$\Phi_s(f) = \frac{\hat{U}_p^2}{4} [\delta(f + f_p) + \delta(f - f_p)] + \frac{\hat{U}_p^2}{4} [\Phi_{m_0}(f + f_p) + \Phi_{m_0}(f - f_p)] \tag{11.9}$$

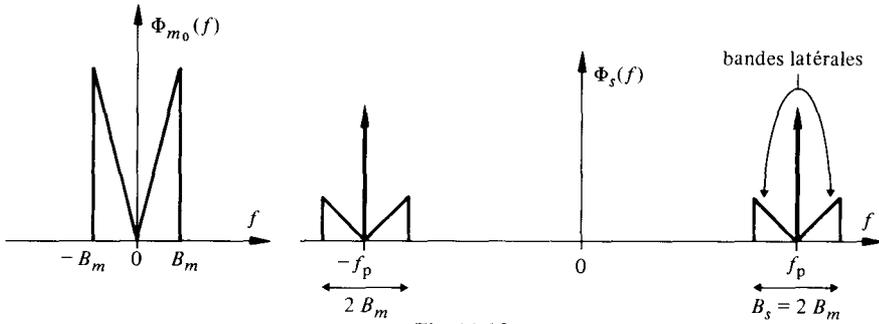


Fig. 11.12

où l'on a tenu compte du caractère pair de  $\Phi_{m_0}(f)$  et de  $\delta(f)$ . La dimension de la densité spectrale du signal adimensionnel  $m_0(t)$  est en  $\text{Hz}^{-1}$  et  $\Phi_m(f) = U_m^2 \Phi_{m_0}(f)$ .

La modulation d'amplitude avec porteuse se caractérise ainsi, sur le plan spectral, par une simple translation du *spectre bilatéral* du signal modulant, d'une quantité correspondant à  $\pm f_p$ , la *fréquence porteuse*, accompagnée de l'apparition de raies à ces mêmes fréquences  $\pm f_p$ . La puissance totale de ce signal vaut  $P_s = (\hat{U}_p^2/2) (1 + P_{m_0})$  où  $P_{m_0} = P_m/U_m^2$  est le coefficient de puissance du signal modulant.

On constate facilement que si  $B_m$  est la largeur de bande du signal modulant, la largeur de bande  $B_s$  occupée par le signal modulé est deux fois plus large :

$$B_s = 2 B_m \tag{11.10}$$

La modulation d'amplitude avec porteuse présente l'avantage, pour autant que

$$a(t) = [1 + m_0(t)] \hat{U}_p \geq 0 \tag{11.11}$$

de permettre une simple démodulation par détection d'enveloppe (§ 11.2.7). Elle est encore largement utilisée pour cela en radiodiffusion (ondes longues, moyennes et courtes).

L'un de ses inconvénients est que la puissance du signal modulé est pour une large part concentrée dans les raies situées à  $f = \pm f_p$  qui ne contiennent pas d'information.

Le rapport de la puissance contenue dans les bandes latérales sur la puissance totale fournit une mesure du rendement de cette modulation :

$$\eta_m = P_{m_0}/(1 + P_{m_0}) \tag{11.12}$$

où  $P_{m_0} = \int \Phi_{m_0}(f) df$  est le coefficient de puissance du signal modulant. Par exemple, dans le cas d'un signal  $m_0(t)$  sinusoïdal d'amplitude unité [valeur maximale satisfaisant encore (11.11), donc autorisant une détection d'enveloppe],  $P_{m_0} = \frac{1}{2}$  et  $\eta_m = 33,3\%$ .

Si l'on considère un signal  $m_0(t)$  aléatoire gaussien à valeur moyenne nulle atteignant la limite imposée par (11.11) pour des amplitudes égales à  $3\sigma_{m_0}$ , le rendement tombe à  $\eta_m = 10\%$ .

### 11.2.3 Définition : modulation d'amplitude sans porteuse

La *modulation d'amplitude dite sans porteuse* AM-P (en anglais DSBSC = *Double Side Band Suppressed Carrier*) se résume à une simple multiplication (fig. 11.13) :

$$s(t) = m_0(t) \cdot u_p(t) = m_0(t) \hat{U}_p \cos(2\pi f_p t + \alpha_p) \tag{11.13}$$

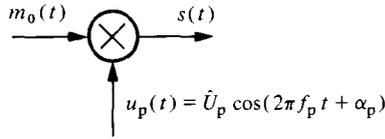


Fig. 11.13

L'enveloppe complexe est ici directement proportionnelle au signal modulant

$$r(t) = a(t) = \hat{U}_p m_0(t) \tag{11.14}$$

Le signal modulé est donc nul en l'absence de signal modulant (fig. 11.14) et son spectre ne contient plus que les contributions traduites du spectre bilatéral du signal modulant (fig. 11.15)

$$\Phi_s(f) = \frac{\hat{U}_p^2}{4} [\Phi_{m_0}(f + f_p) + \Phi_{m_0}(f - f_p)] \tag{11.15}$$

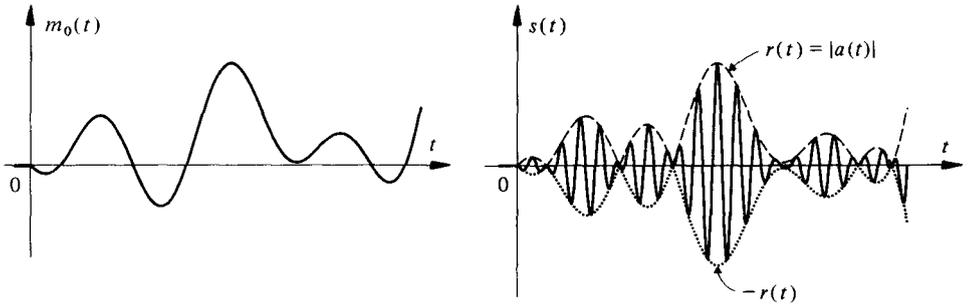


Fig. 11.14

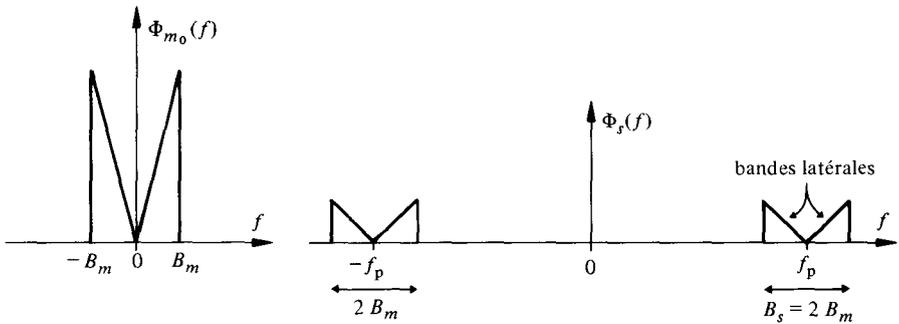


Fig. 11.15

**La largeur de bande  $B_s$  occupée est la même qu'en modulation d'amplitude avec porteuse,** mais les raies à  $f = \pm f_p$  ont disparu. Ceci permet de concentrer la totalité de la puissance émise dans les bandes latérales contenant toute l'information : le rendement est ainsi de 100%.

Il n'est, en revanche, plus possible de démoduler par simple détection d'enveloppe. Il faut recourir à une détection isochrone (§ 11.2.6) qui exige une reconstitution de la porteuse.

**11.2.4 Définition : modulation à bande latérale unique**

De même que le spectre est entièrement défini par sa forme unilatérale, toute l'information du signal modulant se trouve en fait représentée par une seule bande latérale du spectre du signal modulé. Cette constatation permet d'envisager de **réduire la largeur de bande occupée par un facteur deux** en éliminant l'une des bandes latérales. C'est le principe de la **modulation à bande latérale unique** BLU (en anglais : SSB = *Single Side-Band modulation*). Cette technique est surtout utilisée en téléphonie dans les installations de multiplexage fréquentiel appelées *systèmes à courants porteurs* (sect. XVIII.10.1). Elle nécessite aussi une détection isochrone (§ 11.2.6).

Considérons le cas (fig. 11.16) où seule la bande latérale supérieure du spectre est conservée. Le nouveau spectre correspond à la translation de  $f_p$  du **spectre unilatéral** du signal modulant et de son image.

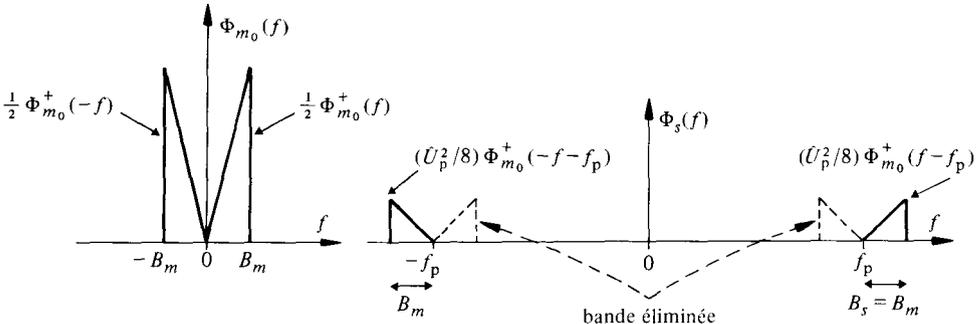


Fig. 11.16

Par (4.162) et (7.41), le spectre du signal modulé devient

$$\begin{aligned} \Phi_s(f) &= \frac{\hat{U}_p^2}{8} [\Phi_{m_0}^+(-f-f_p) + \Phi_{m_0}^+(f-f_p)] \\ &= \frac{\hat{U}_p^2}{16} [\Phi_{\underline{m}_0}(-f-f_p) + \Phi_{\underline{m}_0}(f-f_p)] \end{aligned} \tag{11.16}$$

En comparant avec l'expression générale (11.5), on obtient

$$\Phi_{\underline{r}}(f) = \frac{\hat{U}_p^2}{4} \Phi_{\underline{m}_0}(f) \tag{11.17}$$

d'où l'on déduit qu'ici, l'enveloppe complexe est analytique et vaut

$$\underline{r}(t) \equiv \underline{r}(t) = \frac{1}{2} \hat{U}_p \underline{m}_0(t) \tag{11.18}$$

avec des composantes en phase et en quadrature liées par la transformation de Hilbert

$$a(t) = \frac{1}{2} \hat{U}_p m_0(t); \quad b(t) = \frac{1}{2} \hat{U}_p \check{m}_0(t) \tag{11.19}$$

L'équation du signal modulé à bande latérale unique (supérieure) est ainsi

$$s(t) = \frac{\hat{U}_p}{2} [m_0(t) \cos(2\pi f_p t + \alpha_p) - \check{m}_0(t) \sin(2\pi f_p t + \alpha_p)] \tag{11.20}$$

Le choix de la bande latérale inférieure ne fait que changer le signe du deuxième terme de (11.20).

De (11.19), on déduit que la modulation à bande latérale unique engendre à la fois une variation d'amplitude (enveloppe) et une variation de phase du signal modulé.

Le signal modulé à bande latérale unique peut être théoriquement obtenu soit en filtrant idéalement un signal modulé en amplitude avec suppression de la porteuse (fig. 11.17), soit en partant directement de l'équation (11.20), ce qui revient à échanger le filtre idéal de bande latérale contre un opérateur de Hilbert (§ 8.2.18) et à utiliser deux porteuses en quadrature. Cette deuxième solution conduit au schéma de la figure 11.18. Tant le filtre idéal de bande latérale que l'opérateur de Hilbert sont des modèles difficiles à approcher en pratique.

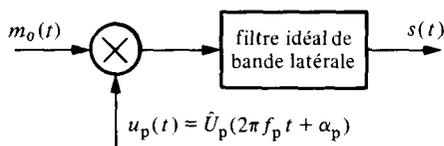


Fig. 11.17

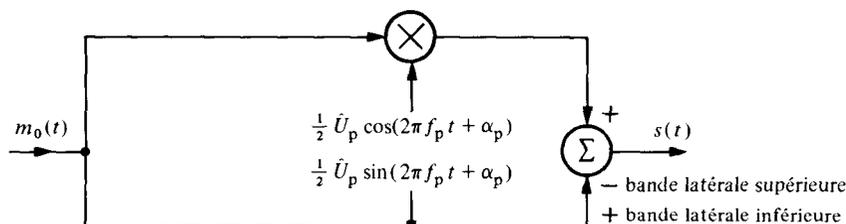


Fig. 11.18

### 11.2.5 Définition : modulation à bande latérale résiduelle

La modulation à bande résiduelle BLR, (en anglais : VSB : *Vestigial Side Band*), est un compromis entre la modulation à bande latérale unique et la modulation d'amplitude avec ou sans porteuse. En conservant un vestige de la bande latérale non désirée, on diminue les exigences imposées au filtre de bande latérale et l'on facilite la transmission d'un signal modulant ayant des composantes de basse fréquence importantes (par exemple signal vidéo). La largeur de bande  $B_s$  occupée en télévision est pratiquement de l'ordre de  $1,25 B_m$ .

Le schéma de la figure 11.19 illustre le principe de la génération d'un signal modulé en VSB (avec porteuse). Le filtre de bande latérale résiduelle doit posséder une fonction de transfert  $G(f)$  à symétrie localement impaire au voisinage de la fréquence porteuse (fig. 11.20). On montre (exercice 11.6.8) que l'enveloppe complexe du signal modulé devient dans ce cas

$$\underline{r}(t) = \frac{\hat{U}_p}{2} \{ [1 + m_0(t)] + j [\check{m}_0(t) * h(t)] \} \quad (11.21)$$

où  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-haut.

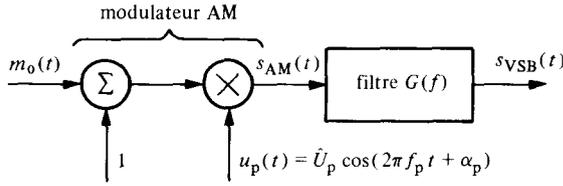


Fig. 11.19

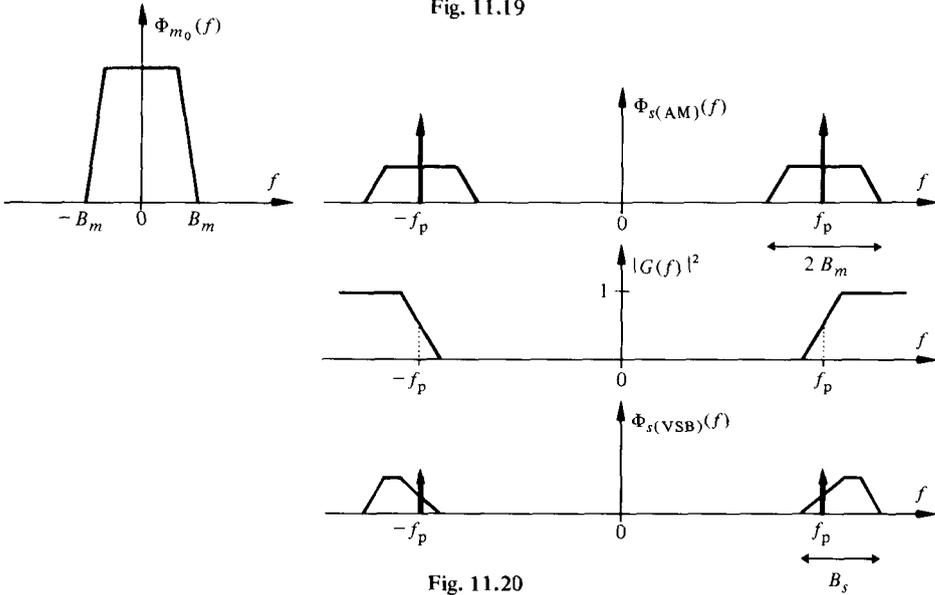


Fig. 11.20

Si l'on part d'une modulation d'amplitude sans porteuse, la démodulation ne peut être que synchrone (§ 11.2.6). Le maintien de la porteuse permet de se contenter d'une démodulation d'enveloppe (§ 11.2.7) introduisant une distorsion tolérable si  $m_0(t) \ll 1$  (télévision).

**11.2.6 Démodulation par détection synchrone. Définition**

La démodulation par *détection synchrone* est analogue à la modulation d'amplitude (fig. 11.21). Elle consiste à multiplier le signal modulé par un signal auxiliaire périodique de même fréquence que la porteuse et à éliminer les composantes résultantes indésirables à l'aide d'un filtrage passe-bas.

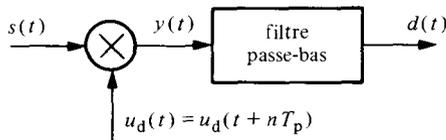


Fig. 11.21

Considérons le cas où le signal auxiliaire est une réplique de la porteuse de phase  $\alpha_d$  et d'amplitude unité :

$$u_d(t) = \cos(2\pi f_p t + \alpha_d) \tag{11.22}$$

Le signal de sortie du multiplicateur, dont les entrées sont  $u_d(t)$  et le signal modulé  $s(t)$  défini par (11.1), devient en exploitant les identités trigonométriques de la section 15.2 :

$$\begin{aligned}
 y(t) &= s(t) \cdot u_d(t) \\
 &= \frac{1}{2} [a(t) \cos(\alpha_p - \alpha_d) - b(t) \sin(\alpha_p - \alpha_d)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [a(t) \cos(4\pi f_p t + \alpha_p + \alpha_d) - b(t) \sin(4\pi f_p t + \alpha_p + \alpha_d)]
 \end{aligned}
 \tag{11.23}$$

Si le filtre passe-bas – supposé idéal – possède une fréquence de coupure

$$f_c < 2f_p - B_m \tag{11.24}$$

où  $B_m$  est la largeur de bande du spectre du signal modulant  $m(t)$ , le signal de sortie vaut

$$d(t) = \frac{1}{2} [a(t) \cos \Delta\alpha - b(t) \sin \Delta\alpha] \tag{11.25}$$

où  $\Delta\alpha = \alpha_p - \alpha_d$  est l'écart de phase entre  $u_p(t)$  et  $u_d(t)$ .

L'opérateur général de démodulation (11.4) est donc caractérisé, dans le cas de la détection synchrone, par

$$d(t) = S_d \{ \tilde{x}(t) \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \tilde{x}(t) \exp(j\Delta\alpha) \} \tag{11.26}$$

En particulier,  $d(t) = \frac{1}{2} a(t)$  si la détection est *cohérente* (ou *isochrone*), c'est-à-dire si  $\Delta\alpha = 0$ .

Le tableau 11.22 résume les résultats déduits de (11.26) pour les divers types de modulations d'amplitude indiqués dans le tableau 11.7.

Tableau 11.22

$\tilde{x}(t)$	$d(t)$	
	synchrone $\Delta\alpha \neq 0$	isochrone $\Delta\alpha = 0$
AM $\dot{U}_p [1 + m_0(t)]$	$\frac{\dot{U}_p}{2} [1 + m_0(t)] \cos \Delta\alpha$	$\frac{\dot{U}_p}{2} [1 + m_0(t)]$
AM-P $\dot{U}_p m_0(t)$	$\frac{\dot{U}_p}{2} m_0(t) \cos \Delta\alpha$	$\frac{\dot{U}_p}{2} m_0(t)$
SSB $\frac{\dot{U}_p}{2} [m_0(t) + j\check{m}_0(t)]$	$\frac{\dot{U}_p}{4} [m_0(t) \cos \Delta\alpha - \check{m}_0(t) \sin \Delta\alpha]$	$\frac{\dot{U}_p}{4} m_0(t)$
VSB $\frac{\dot{U}_p}{2} [(1) + m_0(t) + j\check{m}_0(t) * h(t)]$	$\frac{\dot{U}_p}{4} [(1) + m_0(t)] \cos \Delta\alpha - [\check{m}_0(t) * h(t)] \sin \Delta\alpha$	$\frac{\dot{U}_p}{4} [(1) + m_0(t)]$

Dans le cas des modulations AM et VSB avec porteuse, le signal modulant est déduit de  $d(t)$  par élimination d'une composante continue (filtrage passe-haut). Une détection non isochrone ( $\Delta\alpha \neq 0$ ) fait apparaître dans le signal démodulé en SSB et VSB une distorsion dépendant de la transformée de Hilbert du signal modulant. Cette distorsion peut être sévère si le signal modulant est de type impulsionnel (cf. fig. 7.3).

La détection synchrone nécessite la reconstitution, au niveau du démodulateur, d'une fonction périodique synchrone avec le signal porteur. Ceci est réalisé, soit par la transmission additionnelle d'un signal de synchronisation adéquat, soit par l'extraction directe de cette information du signal modulé (§ 13.2.8).

**11.2.7 Démodulation par détection d'enveloppe**

Sous certaines conditions, on peut remplacer la détection synchrone par une simple détection d'enveloppe, ne nécessitant aucun signal de référence auxiliaire. C'est la technique largement utilisée dans les récepteurs AM de radiodiffusion. Elle s'applique au cas de la modulation d'amplitude avec porteuse et, moyennant une certaine distorsion, aux modulations SSB et VSB avec maintien ... ou réinsertion – d'une porteuse.

Une expression générale de l'enveloppe complexe valable pour ces différents cas est :

$$\underline{r}(t) = a(t) + j b(t) = k \hat{U}_p \{ [1 + m_o(t)] + j \check{m}_o(t) * h(t) \} \tag{11.27}$$

avec  $k = 1$  et  $b(t) = \hat{U}_p \check{m}_o(t) * h(t) = 0$  en AM et  $k = \frac{1}{2}$  et  $b(t) = \frac{1}{2} \hat{U}_p \check{m}_o(t)$  en SSB [ $h(t) = \delta(t)$ ].

L'enveloppe réelle  $r(t)$  est la valeur absolue de l'enveloppe complexe (11.2)

$$r(t) = |\underline{r}(t)| = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)} \tag{11.28}$$

En modulation AM,  $b(t) = 0$  et

$$r(t) = |\underline{r}(t)| = |a(t)| = k \hat{U}_p |1 + m_o(t)| \tag{11.29}$$

On constate immédiatement que si la condition (11.11) est satisfaite, c'est-à-dire, si

$$m_o(t) \geq -1 \tag{11.30}$$

la démodulation par détection d'enveloppe permet de retrouver, après filtrage de la composante continue, un signal proportionnel au signal modulant.

En modulation SSB ou VSB avec porteuse, le terme  $b(t)$  n'est pas nul. Toutefois, si

$$|b(t)| \ll |a(t)| \tag{11.31}$$

on obtient approximativement le résultat (11.29).

La distorsion résiduelle due à la composante en quadrature est généralement négligeable si  $|m_o(t)| \ll 1$ .

Un détecteur d'enveloppe est un dispositif *non linéaire*. Le schéma de principe d'un tel détecteur est représenté sur la figure 11.23. Il comprend un opérateur de valeur absolue (redresseur bipolaire) suivi d'un filtre passe-bas éliminant les composantes redressées indésirables. Ce détecteur est souvent improprement qualifié de linéaire dans la littérature spécialisée.

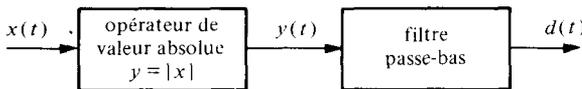


Fig. 11.23

Si le signal d'entrée est modulé en amplitude avec porteuse, par (11.8)  $\underline{r}(t) = a(t) = [1 + m_o(t)] \hat{U}_p$  et  $x(t) = s(t) = a(t) \cos(2\pi f_p t + \alpha_p)$  d'où

$$y(t) = |s(t)| = |a(t)| \cdot |\cos(2\pi f_p t + \alpha_p)| \tag{11.32}$$

En développant  $|\cos(2\pi f_p t + \alpha_p)|$  en série de Fourier, on obtient

$$y(t) = \frac{2}{\pi} |a(t)| \cdot \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} \cos \{ 2n(2\pi f_p t + \alpha_p) \} \right] \tag{11.33}$$

Si la fréquence de coupure  $f_c$  du filtre passe-bas (supposé idéal) est telle que

$$f_c < 2f_p - B_m \quad (11.34)$$

où  $B_m$  représente la fréquence maximale du spectre de  $m(t)$ , le signal démodulé devient

$$d(t) = \frac{2}{\pi} |a(t)| = \frac{2}{\pi} \hat{U}_p |1 + m_0(t)| \quad (11.35)$$

qui est analogue à (11.29).

Une variante de modèle de détecteur d'enveloppe est celui de la figure 11.24. Il comprend, en cascade, un opérateur quadratique, un filtre passe-bas et un opérateur de racine carrée.

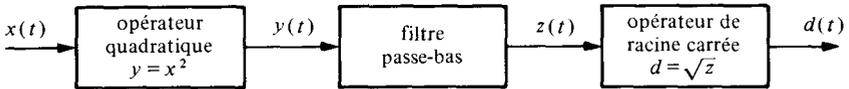


Fig. 11.24

Avec  $x(t) = s(t) = a(t) \cos(2\pi f_p t + \alpha_p)$ , le signal de sortie du quadrateur devient

$$\begin{aligned} y(t) &= x^2(t) = a^2(t) \cos^2(2\pi f_p t + \alpha_p) \\ &= \frac{1}{2} a^2(t) + \frac{1}{2} a^2(t) \cos(4\pi f_p t + 2\alpha_p) \end{aligned} \quad (11.36)$$

Le signal  $a(t) = \hat{U}_p [1 + m_0(t)]$  possède un spectre compris dans le domaine fréquentiel  $|f| \leq B_m$ . En vertu des résultats du paragraphe 8.4.4, il apparaît que le terme  $a^2(t)$  possède, lui, un spectre compris dans le domaine  $|f| \leq 2B_m$ . La multiplication de ce même terme par  $\cos(4\pi f_p t + 2\alpha_p)$  translate ce spectre d'une quantité  $\pm 2f_p$ . Par conséquent, pour autant que

$$f_p > 2B_m \quad (11.37)$$

on peut récupérer le premier terme de  $y(t)$  selon (11.36) par un filtrage passe-bas – supposé à nouveau idéal – de fréquence de coupure

$$f_c < 2(f_p - B_m) \quad (11.38)$$

On obtient donc

$$z(t) = \frac{1}{2} a^2(t) = \frac{\hat{U}_p^2}{2} |1 + m_0(t)|^2 \quad (11.39)$$

A la sortie de l'opérateur de racine carrée, on trouve

$$d(t) = \sqrt{z(t)} = \frac{\hat{U}_p}{\sqrt{2}} |1 + m_0(t)| \quad (11.40)$$

qui est, à nouveau, analogue à (11.29).

Dans le cas où  $|m_0(t)| \ll 1$ , le signal de sortie du filtre passe-bas  $z(t) \approx \hat{U}_p^2/2 + \hat{U}_p^2 m_0(t)$  peut être utilisé directement pour obtenir une bonne approximation du signal modulant.

En pratique, le détecteur d'enveloppe est souvent réalisé approximativement à l'aide d'un simple redresseur à diode, à une alternance, avec charge capacitive  $R_1 C_1$

(fig. 11.25) jouant le rôle de filtre passe-bas et découplage capacitif  $C_2$  éliminant la composante continue. Son principe de fonctionnement est expliqué au chapitre VIII.8.

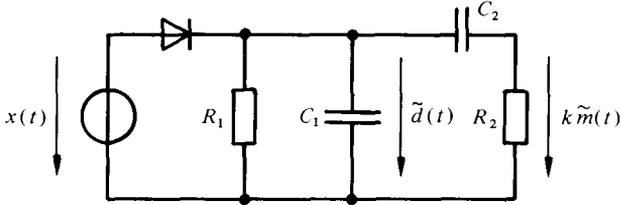


Fig. 11.25

### 11.2.8 Analogie entre détection d'enveloppe et détection synchrone d'un signal AM

L'équation (11.32), décrivant le signal de sortie de l'opérateur de valeur absolue de la figure 11.23, est équivalente, pour autant que l'enveloppe du signal modulé en AM satisfasse à la condition  $r(t) = a(t) \geq 0$ , au produit

$$\begin{aligned}
 y(t) &= x(t) \cdot u_d(t) \\
 &= a(t) \cos(2\pi f_p t + \alpha_p) \cdot \text{sgn}[\cos(2\pi f_p t + \alpha_p)]
 \end{aligned}
 \tag{11.41}$$

où  $u_d(t) = \text{sgn}[\cos(2\pi f_p t + \alpha_p)]$  est une onde synchrone et cohérente (isochrone:  $\Delta\alpha = 0$ ) avec la porteuse. Ceci établit une liaison formelle avec la détection synchrone décrite au paragraphe 11.2.6.

### 11.2.9 Performance en présence de bruit

En présence de bruit additif, le signal  $x(t)$  à l'entrée du démodulateur est

$$x(t) = s(t) + n(t)
 \tag{11.42}$$

où  $s(t)$  est le signal modulé à spectre passe-bande défini par (11.1) et  $n(t)$  est un bruit indépendant, à spectre passe-bande limité à la même bande [e.g.  $x(t)$  est le signal de sortie d'un filtre – supposé idéal – rejetant tous les signaux ou bruits ayant des fréquences hors de la bande passante utile]. On peut donc également l'exprimer sous la forme (7.102)

$$n(t) = a_n(t) \cos(2\pi f_p t + \alpha_p) - b_n(t) \sin(2\pi f_p t + \alpha_p)
 \tag{11.43}$$

où  $a_n(t)$  et  $b_n(t)$  sont les composantes en phase et en quadrature qui ont la même puissance que  $n(t)$ . Elles sont gaussiennes si  $n(t)$  l'est aussi (§ 7.4.6).

Le rapport signal sur bruit à l'entrée du démodulateur est

$$\xi_x = P_s/P_n
 \tag{11.44}$$

où  $P_s$  peut être évaluée dans les différents cas de modulation, par intégration des densités spectrales correspondantes. Si le bruit possède une densité spectrale constante  $\eta/2$  dans la bande utile, sa puissance vaut  $P_n = 2\eta B_m$  en AM et AM-P et  $P_n = \eta B_m$  en SSB.

En cas de démodulation par détection synchrone (hypothèse:  $\Delta\alpha = 0$ ), la forme générale du signal démodulé devient (après suppression de la composante continue en

AM) en tenant compte de (11.43):

$$d(t) = \frac{1}{2} [k \hat{U}_p m_0(t) + a_n(t)] \quad (11.45)$$

où  $k = 1$  en AM et AM-P et  $k = \frac{1}{2}$  en SSB.

Le rapport signal sur bruit après détection est

$$\xi_d = k^2 \hat{U}_p^2 P_{m_0} / P_n \quad (11.46)$$

où  $P_{m_0} = P_m / U_m^2$  est le coefficient de puissance du signal modulant.

On peut mesurer l'efficacité (immunité au bruit) de la démodulation en effectuant le rapport  $\xi_d / \xi_x$ . Les résultats d'ensemble correspondant aux principaux types de modulation sont résumés dans le tableau 11.26. On constate que l'efficacité obtenue en modulation d'amplitude sans porteuse est deux fois plus grande que celle obtenue en modulation à bande latérale unique. Ceci s'explique par le fait que les composantes des deux bandes latérales du signal AM-P s'additionnent de manière cohérente au niveau du détecteur synchrone, alors que les composantes de bruit s'additionnent, elles, de manière incohérente.

Tableau 11.26

Modulation	$B_s$	$P_s$	$P_m$	$\xi_x$	$\xi_d$	$\xi_d / \xi_x$	$\xi_d / \xi_0$
AM	$2B_m$	$\frac{1}{2} \hat{U}_p^2 (1 + P_{m_0})$	$2\eta B_m$	$\frac{1}{4} \hat{U}_p^2 \frac{1 + P_{m_0}}{\eta B_m}$	$\frac{1}{2} \hat{U}_p^2 \frac{P_{m_0}}{\eta B_m}$	$2P_{m_0} < \frac{2P_{m_0}}{1 + P_{m_0}} < 2$	$P_{m_0} < \frac{P_{m_0}}{1 + P_{m_0}} < 1$
AM-P	$2B_m$	$\frac{1}{2} \hat{U}_p^2 P_{m_0}$	$2\eta B_m$	$\frac{1}{4} \hat{U}_p^2 \frac{P_{m_0}}{\eta B_m}$	$\frac{1}{2} \hat{U}_p^2 \frac{P_{m_0}}{\eta B_m}$	2	1
SSB	$B_m$	$\frac{1}{4} \hat{U}_p^2 P_{n_0}$	$\eta B_m$	$\frac{1}{4} \hat{U}_p^2 \frac{P_{n_0}}{\eta B_m}$	$\frac{1}{4} \hat{U}_p^2 \frac{P_{m_0}}{\eta B_m}$	1	1

L'analyse des performances en présence de bruit d'une démodulation d'un signal AM par détection d'enveloppe est plus délicate, en raison du caractère non linéaire du détecteur. Dans le cas d'un bruit  $n(t)$  gaussien, la distribution statistique du signal de sortie du détecteur d'enveloppe de la figure 11.23 est la loi de Rice-Nakagami établie au paragraphe 7.3.9. Celle-ci peut être utilisée [40] pour évaluer le rapport signal sur bruit  $\xi_d$  obtenu après démodulation. A fort rapport signal sur bruit à l'entrée ( $\xi_x \gg 1$ ), l'efficacité obtenue concorde avec celle indiquée dans le tableau 11.26 [avec  $P_{m_0} < 1$  pour assurer la condition de non distorsion  $|m_0(t)| < 1$ ]. Ceci s'explique par l'analogie mentionnée au paragraphe précédent. Lorsque  $\xi_x \ll 1$ , on observe un effet de seuil tel que le rapport signal sur bruit après détection  $\xi_d$  devient proportionnel à  $\xi_x^2$ ; ceci proscribit pratiquement l'usage de la détection d'enveloppe dans ces circonstances.

Pour obtenir une comparaison *globale* des systèmes de modulation-démodulation, on définit un facteur de mérite  $\xi_d / \xi_0$  égal au quotient du rapport signal sur bruit après démodulation  $\xi_d$  et d'un rapport signal sur bruit fictif

$$\xi_0 = P_s / \eta B_m \quad (11.47)$$

qui serait celui d'une transmission directe (sans modulation-démodulation) d'un signal modulant de puissance équivalente à  $P_s$ , affectée par le même bruit de densité spectrale  $\Phi_n(f) = \eta/2$  filtré idéalement à la réception par un filtre passe-bas de caractéristique

$|G(f)|^2 = \text{rect}(f/2B_m)$ . Ce facteur de mérite, également reporté dans le tableau 11.26, montre que les systèmes AM-P et SSB sont, sous cet angle, équivalents et dans tous les cas supérieurs au système AM.

### 11.3 MODULATIONS ANGULAIRES

#### 11.3.1 Définitions

Les résultats du paragraphe 11.2.9 montrent que pour lutter contre le bruit, il n'y a d'autres recours, en modulation linéaire, que d'augmenter la puissance du signal modulé. L'utilisation d'une modulation angulaire, modifiant proportionnellement au signal modulant la phase ou la fréquence de la porteuse sinusoïdale, offre une possibilité d'accroître l'immunité au bruit au prix d'un élargissement de la bande occupée par le spectre du signal modulé.

Contrairement à la modulation linéaire, la modulation angulaire, parfois qualifiée d'exponentielle, est une opération *non linéaire*, ce qui explique d'emblée l'élargissement de la bande occupée.

Le signal modulé  $s(t)$  est encore représenté par l'équation (11.1). L'enveloppe complexe prend ici la forme générale

$$\underline{r}(t) = S_m \{m(t)\} = \hat{U}_p \exp [j\Delta\phi(t)] \tag{11.48}$$

où l'argument  $\Delta\phi(t)$  est une fonction du signal modulant. Ainsi, en dénotant par  $\phi_s(t)$  la phase instantanée du signal modulé :

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re} \{ \underline{r}(t) \exp [j(2\pi f_p t + \alpha_p)] \} \\ &= \hat{U}_p \text{Re} \{ \exp [j\phi_s(t)] \} \\ &= \hat{U}_p \cos \phi_s(t) = \hat{U}_p \cos [2\pi f_p t + \Delta\phi(t) + \alpha_p] \\ &= \hat{U}_p [\cos \Delta\phi(t) \cos (2\pi f_p t + \alpha_p) - \sin \Delta\phi(t) \sin (2\pi f_p t + \alpha_p)] \end{aligned} \tag{11.49}$$

Si l'argument  $\Delta\phi(t)$  de l'enveloppe complexe est directement proportionnelle au signal modulant, on parle de *modulation de phase* ( $\Phi M$ ):

$$\Delta\phi(t) = \beta \cdot m(t) \tag{11.50}$$

Si c'est la dérivée de  $\Delta\phi(t)$ , ou en d'autres termes la fréquence instantanée (7.48), qui est proportionnelle au signal modulant, on parle de *modulation de fréquence* (FM):

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Delta\phi(t)}{dt} = \nu \cdot m(t) \tag{11.51}$$

et en admettant une phase initiale nulle :

$$\Delta\phi(t) = 2\pi\nu \int_0^t m(t) dt \tag{11.52}$$

Les constantes  $\beta$  et  $\nu$  sont des facteurs arbitraires mesurés en rad/V et en Hz/V, respectivement, si  $m(t)$  est une tension. La figure 11.27 représente un exemple comparatif des signaux modulés en  $\Phi M$  et en FM. Les grandeurs  $\Delta\phi(t)$  et  $\Delta f(t)$  sont appelées *déviations de phase* et *déviations de fréquence*, respectivement.

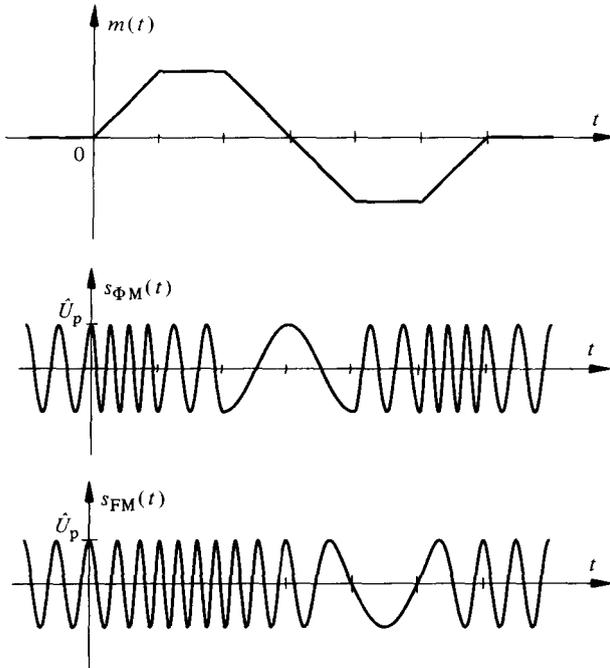


Fig. 11.27

Le signal modulé peut être produit par un oscillateur électronique (chap. VIII.5) dont la fréquence est asservie au signal modulant (VCO = voltage-controlled oscillator). Lorsque la fréquence porteuse  $f_p$  doit être très stable et précise, on recourt à une méthode indirecte de modulation de phase à bas niveau (méthode d'Armstrong : § 11.3.3) suivie d'une multiplication de fréquence (§ 11.5.3).

Les relations (11.51) et (11.52) montrent que les modulations de phase et de fréquence sont liées par une simple opération *linéaire* affectant le signal modulant : intégration ou dérivation. Ainsi, on peut utiliser un modulateur de fréquence pour produire un signal modulé en phase en dérivant au préalable le signal modulant.

### 11.3.2 Spectre des signaux à modulation angulaire

Le signal modulé (11.49) peut encore s'écrire sous la forme équivalente

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \hat{U}_p \operatorname{Re} \left\{ \exp [j(2\pi f_p t + \alpha_p)] \cdot \exp [j\Delta\phi(t)] \right\} \\
 &= \hat{U}_p \operatorname{Re} \left\{ \exp [j(2\pi f_p t + \alpha_p)] \cdot \left[ 1 + j\Delta\phi(t) - \frac{\Delta\phi^2(t)}{2!} - j\frac{\Delta\phi^3(t)}{3!} + \dots \right] \right\}
 \end{aligned}
 \tag{11.53}$$

où l'on fait apparaître le développement en série de  $\exp [j\Delta\phi(t)]$ .

Il est immédiatement apparent qu'en raison des contributions non linéaires de  $\Delta\phi(t)$ , la détermination d'une expression générale du spectre  $\Phi_s(f)$  du signal modulé est pratiquement impossible. Certains résultats spécifiques ont été établis [26, 41, 66] sous l'hypothèse d'un signal modulant aléatoire, en particulier gaussien.

D'une manière générale, la densité spectrale du signal modulé est égale à (1.5)

$$\Phi_s(f) = \frac{1}{4} [\Phi_{\tilde{x}}(-f-f_p) + \Phi_{\tilde{x}}(f-f_p)] \tag{11.54}$$

où  $\Phi_{\tilde{x}}(f)$  est la densité spectrale (réelle, mais pas nécessairement symétrique par rapport à  $f_p$ ) de l'enveloppe complexe  $\tilde{x}(t)$ .

Le spectre  $\Phi_{\tilde{x}}(f)$  est théoriquement de largeur de bande infinie en raison des contributions dues aux termes en  $\Delta\phi^n(t)$ , avec  $n \rightarrow \infty$ , apparaissant dans le développement en série de  $\tilde{x}(t)$ . L'analyse montre toutefois que ces contributions deviennent rapidement négligeables lorsque  $|f|$  croît, de telle sorte que  $\Phi_s(f)$  n'est sensiblement différent de zéro qu'au voisinage de  $|f|=f_p$ .

### 11.3.3 Approximation : modulation à faible niveau

La valeur efficace (écart-type) de la phase  $\Delta\phi(t)$  est  $\sigma_{\Delta\phi}$ . Dans le cas où

$$\sigma_{\Delta\phi} \ll 1 \tag{11.55}$$

le signal modulé (11.49) est approximativement représenté par l'expression simplifiée

$$s(t) \approx \hat{U}_p [\cos(2\pi f_p t + \alpha_p) - \Delta\phi(t) \sin(2\pi f_p t + \alpha_p)] \tag{11.56}$$

L'enveloppe complexe et son spectre valent ici  $\tilde{x}(t) \approx \hat{U}_p [1 + j\Delta\phi(t)]$  et  $\Phi_{\tilde{x}}(f) \approx \hat{U}_p^2 [\delta(f) + \Phi_{\Delta\phi}(f)]$ .

La densité spectrale du signal modulé devient alors

$$\Phi_s(f) \approx \frac{\hat{U}_p^2}{4} [\delta(f+f_p) + \delta(f-f_p)] + \frac{\hat{U}_p^2}{4} [\Phi_{\Delta\phi}(f+f_p) + \Phi_{\Delta\phi}(f-f_p)] \tag{11.57}$$

On constate, en comparant cette expression à (11.9), la grande analogie existant entre le modulation AM et cette modulation angulaire à faible niveau, souvent qualifiée

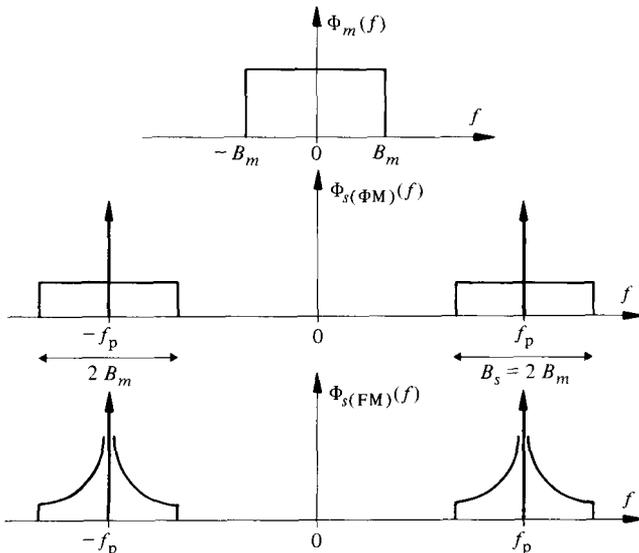


Fig. 11.28

de modulation **à bande étroite** (narrow band modulation). La largeur de bande occupée  $B_s$  est aussi égale à deux fois la largeur de bande du signal modulant (fig. 11.28). La densité spectrale  $\Phi_{\Delta\phi}(f)$  est liée à celle du signal modulant, en tenant compte de (11.50), (11.51) et (8.71), par

$$\Phi_{\Delta\phi}(f) = \beta^2 \Phi_m(f) \quad (11.58)$$

en modulation de phase, et par

$$\Phi_{\Delta\phi}(f) = \nu^2 \Phi_m(f)/f^2 \quad (11.59)$$

en modulation de fréquence.

L'analogie mentionnée plus haut suggère une méthode de modulation de phase déduite de l'équation (11.56). C'est la méthode d'Armstrong illustrée par le schéma-bloc de la figure 11.29.

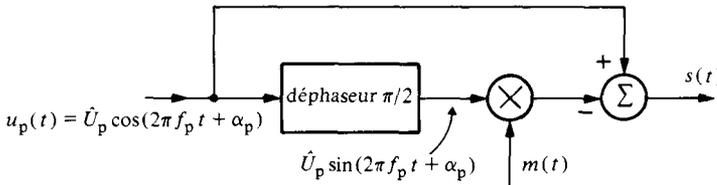


Fig. 11.29

#### 11.3.4 Approximation : modulation à haut niveau

Si le niveau de modulation angulaire est élevé, c'est-à-dire si

$$\sigma_{\Delta\phi} \gg 1 \quad (11.60)$$

l'approximation précédente n'est plus valable. Le spectre du signal modulé est alors dit **à large bande**.

Une nouvelle approximation peut être établie [41] lorsque la fréquence instantanée du signal modulé  $s(t)$  varie suffisamment lentement pour que ce dernier ait sensiblement l'allure d'une sinusoïde de fréquence  $f_i = f_p + \Delta f$  pendant plusieurs périodes. Cette situation se présente si  $\Delta f \gg B_m$ . On peut alors en déduire que, si  $s(t)$  est modulé **en fréquence** selon (11.51) par un signal  $m(t)$ , la probabilité que la fréquence instantanée  $f_i$  soit dans un domaine  $df$  centré sur  $f_p + \Delta f$  est directement liée à la probabilité que l'amplitude de  $m(t)$  soit dans un domaine  $dm$  centré sur  $\Delta f/\nu$ . Le spectre du signal modulé vaut approximativement dans ces conditions, en tenant compte de (5.39)

$$\Phi_s(f) \approx \frac{\dot{U}_p^2}{4\nu} \left[ p_m \left( \frac{-f-f_p}{\nu} \right) + p_m \left( \frac{f-f_p}{\nu} \right) \right] \quad (11.61)$$

où  $p_m(m)$  est la **densité de probabilité** du signal modulant.

En utilisant le concept de largeur de bande utile  $B_u$  introduit au paragraphe 7.5.6, on a pour  $\sigma_{\Delta f} \gg B_m$  :

$$B_s = B_u = \alpha \sigma_{\Delta f} = \alpha \nu \sigma_m \quad (11.62)$$

où  $\alpha$  est un coefficient de proportionnalité dépendant du critère employé pour définir  $B_u$  ;  $\sigma_{\Delta f}$  et  $\sigma_m$  sont les valeurs efficaces respectives de la fréquence instantanée et du signal modulant.

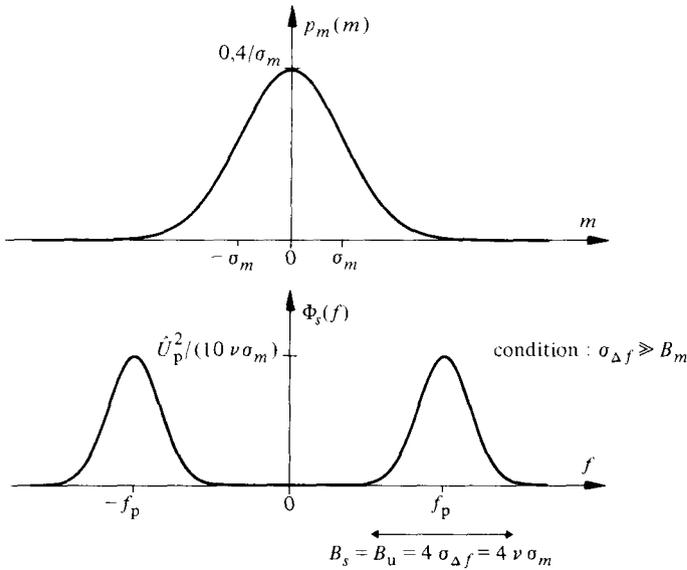


Fig. 11.30

Par exemple (fig. 11.30), si  $m(t)$  est un signal aléatoire gaussien, la densité *spectrale*  $p_m(f/\nu)$  est une loi de Gauss. Si  $B_u$  est définie comme la largeur de bande contenant environ 95% de la puissance totale  $P_s = \int \Phi_s(f) df = \dot{U}_p^2 / 2$  du signal modulé, on a (cf. sect. 15.8):  $\alpha \approx 4$  et  $B_s = B_u = 4 \sigma_{\Delta f} = 4 \nu \sigma_m$ .

**11.3.5 Exemple : modulation par signal aléatoire gaussien**

Si le signal modulant est gaussien,  $\Delta\phi(t)$  est aussi gaussien, que la modulation soit de type  $\Phi M$  ou FM, puisque l'on passe de l'une à l'autre par une opération linéaire (§ 11.3.1 et 5.7.3). Une expression générale de la fonction d'autocorrélation  $R_s(\tau)$  du signal modulé peut être établie dans ce cas. On peut en déduire la densité spectrale de puissance par transformation de Fourier.

Par (7.40) et (7.92), la fonction d'autocorrélation du signal modulé est

$$\begin{aligned}
 R_s(\tau) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{R}_s(\tau) \} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{R}_r(\tau) \exp(j2\pi f_p \tau) \}
 \end{aligned}
 \tag{11.63}$$

avec, dans le cas d'une modulation angulaire,

$$\begin{aligned}
 \underline{R}_r(\tau) &= E [ \underline{r}^*(t) \underline{r}(t + \tau) ] \\
 &= \dot{U}_p^2 E \{ \exp(j[\Delta\phi(t + \tau) - \Delta\phi(t)]) \} \\
 &= \dot{U}_p^2 \Pi_{\Delta\phi}(1, -1)
 \end{aligned}
 \tag{11.64}$$

où  $\Pi_{\Delta\phi}(1, -1)$  est la valeur en  $u = 1$  et  $v = -1$  de la fonction caractéristique du deuxième ordre  $\Pi_{\Delta\phi}(u, v)$  des variables  $\mathbf{x} = \Delta\phi(t)$  et  $\mathbf{y} = \Delta\phi(t + \tau)$ , définie par (14.66).

Pour un processus gaussien à valeur moyenne nulle,  $R_{\Delta\phi}(\tau) \equiv C_{\Delta\phi}(\tau)$ ,  $R_{\Delta\phi}(0) \equiv C_{\Delta\phi}(0) = \sigma_{\Delta\phi}^2$  et, par (14.104),

$$\Pi_{\Delta\phi}(1, -1) = \exp [ R_{\Delta\phi}(\tau) - \sigma_{\Delta\phi}^2 ]
 \tag{11.65}$$

Finalement

$$R_s(\tau) = \frac{\hat{U}_p^2}{2} \exp [R_{\Delta\phi}(\tau) - \sigma_{\Delta\phi}^2] \cos(2\pi f_p \tau) \quad (11.66)$$

La densité spectrale du signal modulé devient alors selon (11.54)

$$\Phi_s(f) = \frac{1}{4} [\Phi_{\tilde{r}}(f + f_p) + \Phi_{\tilde{r}}(f - f_p)] \quad (11.67)$$

avec

$$\Phi_{\tilde{r}}(f) = \Phi_{\tilde{r}}(-f) = F\{R_{\tilde{r}}(\tau)\} = F\{\hat{U}_p^2 \exp [R_{\Delta\phi}(\tau) - \sigma_{\Delta\phi}^2]\} \quad (11.68)$$

Cette transformée de Fourier n'est malheureusement pas calculable par voie analytique dans le cas général.

En développant le terme  $\exp [R_{\Delta\phi}(\tau)]$  on obtient :

$$R_{\tilde{r}}(\tau) = \hat{U}_p^2 \exp(-\sigma_{\Delta\phi}^2) \cdot \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} R_{\Delta\phi}^n(\tau)/n! \right] \quad (11.69)$$

et par transformation de Fourier

$$\Phi_{\tilde{r}}(f) = \hat{U}_p^2 \exp(-\sigma_{\Delta\phi}^2) \cdot \left[ \delta(f) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n \Phi_{\Delta\phi}(f) \right] \quad (11.70)$$

où  $\mathbb{H}$  dénote un produit de convolution multiple

$$\prod_{i=1}^n \Phi_{\Delta\phi}(f) = \underbrace{\Phi_{\Delta\phi}(f) * \Phi_{\Delta\phi}(f) * \dots * \Phi_{\Delta\phi}(f)}_{n \text{ fois}} \quad (11.71)$$

Quel que soit  $\Phi_{\Delta\phi}(f)$ , cette convolution multiple tend vers une loi de Gauss avec  $n \rightarrow \infty$ , en analogie directe avec le théorème de la limite centrale (§ 5.5.3). Plus  $\sigma_{\Delta\phi}$  est grand, plus la largeur de bande occupée  $B_s$  est grande.

### 11.3.6 Exemple : modulation sinusoïdale. Définition

Le spectre du signal modulé peut être exactement déterminé dans l'hypothèse d'un signal modulant purement sinusoïdal.

Soit

$$m(t) = \hat{U}_m \sin(2\pi f_m t) \quad (11.72)$$

Par (11.50) et (11.51), on obtient les déviations de phase et de fréquence instantanées

$$\begin{aligned} \Delta\phi(t) &= \beta \hat{U}_m \sin(2\pi f_m t) \\ &= \Delta\phi_{\max} \cdot \sin(2\pi f_m t) \end{aligned} \quad (11.73)$$

et

$$\begin{aligned} \Delta f(t) &= \beta \hat{U}_m f_m \cos(2\pi f_m t) \\ &= \Delta f_{\max} \cdot \cos(2\pi f_m t) \end{aligned} \quad (11.74)$$

On appelle *indice de modulation*, généralement noté  $\delta$  la déviation maximum de phase  $\Delta\phi_{\max}$ . Ainsi

$$\delta = \Delta\phi_{\max} = \Delta f_{\max}/f_m \tag{11.75}$$

où  $\Delta f_{\max}$  représente la déviation maximum de fréquence.

L'enveloppe complexe (11.48) devient

$$\underline{r}(t) = \hat{U}_p \exp [j\delta \sin (2\pi f_m t)] \tag{11.76}$$

C'est une fonction complexe périodique, de période  $T = 1/f_m$ , qui peut être développée en série de Fourier grâce à l'identité de Bessel-Jacobi [58]

$$\exp [j\delta \sin (2\pi f_m t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta) \exp (j2\pi n f_m t) \tag{11.77}$$

Les coefficients de Fourier (3.75) du développement (11.77) sont des valeurs particulières des fonctions de Bessel de première espèce (sect. 15.7)

$$J_n(\delta) = f_m \int_{-(2f_m)^{-1}}^{(2f_m)^{-1}} \exp \{j[\delta \sin (2\pi f_m t) - n2\pi f_m t]\} dt \tag{11.78}$$

Ainsi, l'enveloppe complexe s'écrit ici

$$\underline{r}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{U}_p J_n(\delta) \exp (j2\pi n f_m t) \tag{11.79}$$

et sa densité spectrale (4.139) devient avec  $\hat{R}_n = \hat{U}_p J_n(\delta)$ ,

$$\Phi_{\underline{r}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{U}_p^2 J_n^2(\delta) \cdot \delta(f - n f_m) \tag{11.80}$$

La densité spectrale du signal modulé (fig. 11.31) est alors déduite de (11.67), en tenant compte qu'ici  $\Phi_{\underline{r}}(-f) = \Phi_{\underline{r}}(f)$ :

$$\begin{aligned} \Phi_s(f) &= \frac{1}{4} [\Phi_{\underline{r}}(f + f_p) + \Phi_{\underline{r}}(f - f_p)] \\ &= \frac{\hat{U}_p^2}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\delta) \cdot [\delta(f + f_p - n f_m) + \delta(f - f_p - n f_m)] \end{aligned} \tag{11.81}$$

avec, en vertu du théorème de Parseval (3.76)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\delta) = 1 \tag{11.82}$$

Le signal modulé a pour expression

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re} \{ \underline{r}(t) \exp [j(2\pi f_p t + \alpha_p)] \} \\ &= \hat{U}_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta) \text{Re} \{ \exp [j(2\pi (f_p + n f_m) t + \alpha_p)] \} \\ &= \hat{U}_p \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\delta) \cos [2\pi (f_p + n f_m) t + \alpha_p] \end{aligned} \tag{11.83}$$

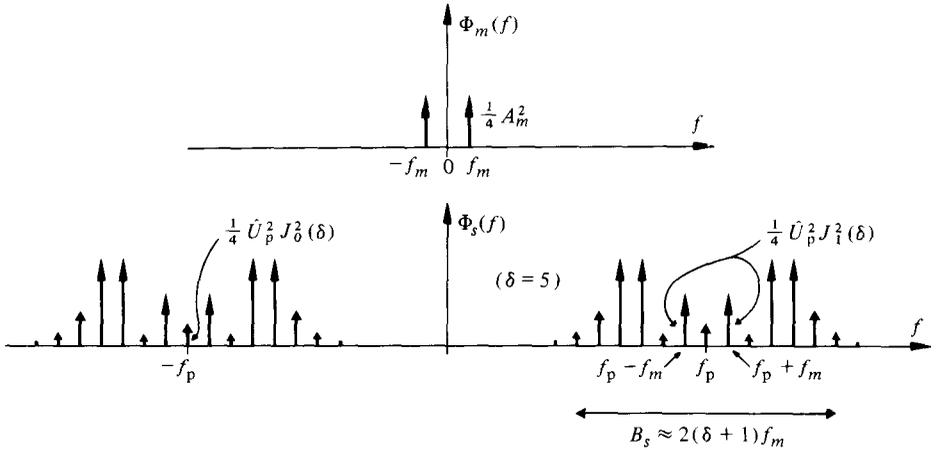


Fig. 11.31

Bien que la série soit théoriquement infinie, les coefficients  $J_n(\delta)$  tendent rapidement vers zéro (fig. 15.2) lorsque  $n$  tend vers l'infini pour satisfaire (11.82). La largeur de bande utile reste donc bornée et peut être estimée par la règle empirique de Carson

$$\begin{aligned}
 B_s &\approx 2(\Delta f + f_m) \\
 &= 2(\delta + 1)f_m
 \end{aligned}
 \tag{11.84}$$

A faible niveau ( $\delta \ll 1$ ), la largeur de bande utile est environ égale à deux fois la fréquence du signal modulant, seules les raies à  $|f_p|$  et  $|f_p \pm f_m|$  ayant des amplitudes non négligeables. Ceci est conforme au résultat général (11.57), avec  $J_0(\delta) \approx 1$  et  $J_1(\delta) = \delta/2$  pour  $\delta \ll 1$ .

En modulant à large bande ( $\delta \gg 1$ ), une enveloppe spectrale approximative de  $\Phi_s(f)$  est obtenue en utilisant la relation (11.61). La densité de probabilité du signal (11.74) modulant la porteuse en fréquence est, par (5.23) et avec  $\nu = \Delta f = \delta \cdot f_m$

$$\frac{1}{\nu} p_m \left( \frac{f}{\nu} \right) = \frac{1}{\pi \sqrt{(\delta \cdot f_m)^2 - f^2}} ; \quad f \leq \delta \cdot f_m
 \tag{11.85}$$

d'où

$$\Phi_s(f) \approx \frac{\hat{U}_p^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(\delta \cdot f_m)^2 - (f + f_p)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\delta \cdot f_m)^2 - (f - f_p)^2}} \right]
 \tag{11.86}$$

La largeur de bande occupée estimée par ce modèle vaut évidemment  $B_s = 2\delta \cdot f_m$ , ce qui est bien en accord avec la règle de Carson pour  $\delta \gg 1$ .

### 11.3.7 Différence entre modulation $\Phi M$ et FM

Dans le cas d'une modulation sinusoïdale de phase, l'indice de modulation  $\delta$  défini par (11.75) est une constante qui ne dépend pas de la fréquence du signal modulant  $f_m$ . Une modification de celle-ci fait subir au spectre  $\Phi_s(f)$  une simple dilatation [contraction] par rapport à  $|f_p|$  avec une variation de la largeur de bande utile proportionnelle à  $f_m$ .

Pour une modulation sinusoïdale en fréquence, c'est l'écart maximum  $\Delta f_{\max}$  qui est constant et l'indice de modulation varie au contraire proportionnellement à l'inverse de  $f_m$ . Un changement de la fréquence du signal modulant entraîne par conséquent non seulement un effet de dilatation [contraction] spectral, mais également une modification des coefficients  $J_n^2(\delta)$ . La largeur de bande utile reste, dans ce cas, sensiblement constante conformément à la règle de Carson.

**11.3.8 Exemple : modulation de phase par un signal binaire aléatoire. Définitions**

La modulation angulaire discrète est largement utilisée pour la transmission d'informations numériques (transmission de données). Si la grandeur modulée est la phase, on parle de *modulation* PSK (de l'anglais *Phase Shift Keying*), si c'est la fréquence, on parle de *modulation* FSK (*Frequency Shift Keying*).

Considérons le cas d'une modulation PSK binaire

$$\Delta\phi(t) = \frac{\pi}{2} [1 + m_0(t)] = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \tag{11.87}$$

où

$$m_0(t) = \pm 1 \tag{11.88}$$

est un signal binaire aléatoire, transportant une information numérique, telle que les deux états +1 et -1 soient équiprobables. L'enveloppe complexe devient simplement

$$\underline{r}(t) = \hat{U}_p \exp [j\Delta\phi(t)] \triangleq \hat{U}_p m_0(t) \tag{11.89}$$

et le signal modulé est ici équivalent à un signal modulé en amplitude avec porteuse :

$$s(t) \triangleq \hat{U}_p m_0(t) \cos(2\pi f_p t + \alpha_p) \tag{11.90}$$

Par (11.15)

$$\Phi_s(f) = \frac{\hat{U}_p^2}{4} [\Phi_{m_0}(f + f_p) + \Phi_{m_0}(f - f_p)] \tag{11.91}$$

avec, dans le cas d'un signal binaire cadencé en mode NRZ (§ 5.3.7 et 5.6.4), de cadence  $1/T$  bits/s et niveaux  $\pm 1$  :

$$\Phi_{m_0}(f) = T \operatorname{sinc}^2(Tf) \tag{11.92}$$

et, dans celui d'un signal binaire cadencé en mode biphase (§ 5.3.8) de même cadence.

$$\Phi_{m_0}(f) = T [\operatorname{sinc}^2(Tf/2) - \operatorname{sinc}^2(Tf)] \tag{11.93}$$

La largeur de bande utile est de l'ordre de  $2/T$  dans le premier cas et de  $4/T$  dans le second, comme on peut le déduire de la figure 5.16.

Dans le cas d'une modulation FSK binaire, la détermination exacte du spectre du signal modulé est beaucoup plus compliquée [115] et ne sera pas effectuée ici. Notons simplement que

$$\Delta f(t) = \Delta f \cdot m_0(t) = \pm \Delta f \tag{11.94}$$

et que la variation de la phase, qui est ici une *fonction continue*, devient

$$\Delta\phi(t) = 2\pi\Delta f \cdot \int m_0(t) dt \tag{11.95}$$

Si l'on autorise les discontinuités de phase à chaque changement de fréquence (exercice 11.6.12) le problème se ramène à celui d'une combinaison de deux signaux sinusoïdaux modulés en amplitude par tout-ou-rien (*modulation* OOK = On-Off Keying).

**11.3.9 Méthodes de démodulation**

L'opération fondamentale de démodulation de fréquence est la dérivation :

$$d(t) = S_d\{\underline{r}(t)\} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg[\underline{r}(t)] = k \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Delta\phi(t) \tag{11.96}$$

Une démodulation indirecte de phase est obtenue en plaçant en cascade un démodulateur (discriminateur) de fréquence et un circuit intégrateur.

Parmi les diverses méthodes utilisées pour réaliser la fonction de discrimination de fréquence, on peut distinguer

- la conversion FM/AM suivie d'une détection d'enveloppe (fig. 11.32);
- la conversion FM/PFM (suite d'impulsions modulées en fréquence) suivie d'un moyennage temporel (fig. 11.33);
- la détection par boucle à asservissement de phase (fig. 11.34).

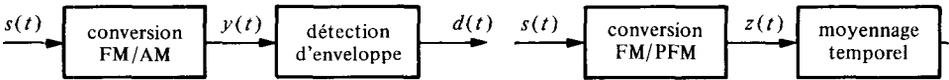


Fig. 11.32

Fig. 11.33

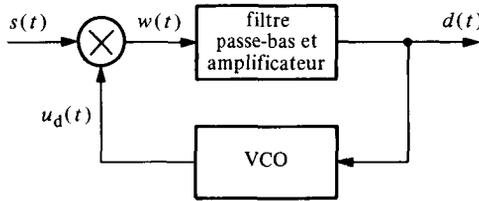


Fig. 11.34

Un opérateur de dérivation (§ 8.2.28) est le modèle idéal d'un convertisseur FM/AM puisque le module de sa fonction de transfert harmonique est proportionnel à la fréquence :  $|G(f)| = 2\pi f$ . Si  $s(t) = \hat{U}_p \cos[\omega_p t + \Delta\phi(t)]$ , la sortie du dérivateur est

$$y(t) = \frac{d}{dt} s(t) = -\hat{U}_p [\omega_p + \frac{d}{dt} \Delta\phi(t)] \cdot \sin[\omega_p t + \Delta\phi(t)] \tag{11.97}$$

En modulation de fréquence :  $d\Delta\phi(t)/dt = 2\pi\nu m(t)$ . Pour autant que  $\Delta f(t) = \nu m(t) < f_p$ , la sortie du détecteur d'enveloppe sera (après suppression de la composante continue  $\hat{U}_p \omega_p$ ):

$$d(t) = \hat{U}_p 2\pi\nu m(t) = k_1 m(t) \tag{11.98}$$

Pour se rendre insensible aux éventuelles fluctuations d'amplitude du signal modulé, on place en amont du convertisseur FM/AM un circuit écreteur (tab. 8.48).

En pratique, tout filtre ayant une fonction de transfert dont le module varie en fonction de  $f$  dans le domaine spectral occupé par  $s(t)$  peut servir de convertisseur FM/AM, au prix d'une certaine distorsion liée à la non linéarité de la relation  $|G(f)|$ . L'exemple le plus simple est celui d'un circuit résonnant accordé à une fréquence voisine de la fréquence porteuse. Une compensation locale approximative de la non linéarité de la caractéristique  $|G(f)|$  est souvent réalisée en combinant deux non linéarités opposées [116]. Ce principe est couramment utilisé dans les récepteurs radio (détecteur à quotient).

La conversion FM/PFM est réalisée en détectant, à l'aide d'un comparateur, les passages par zéro de  $s(t)$  et en générant à l'instant  $t_n$  de chaque passage, une impulsion calibrée  $g(t)$ . Le signal de sortie du convertisseur FM/PFM est alors une suite d'impulsions dont la densité varie avec la fréquence instantanée de  $s(t)$ :

$$z(t) = \sum_n g(t - t_n) \tag{11.99}$$

Le moyennneur temporel (§ 8.2.19) calcule une moyenne glissante de  $z(t)$  sur un intervalle  $f_p^{-1} \ll T \ll B_m^{-1}$

$$d(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t z(t') dt' \approx d_0 + k_2 \cdot m(t) \tag{11.100}$$

Cette méthode permet d'obtenir une démodulation très linéaire pour de très larges déviations de fréquence (instrumentation, télémétrie, enregistreurs de mesure).

La démodulation de fréquence ou de phase par boucle à phase asservie (en anglais: phase locked loop = PLL [117, 118]) est également largement utilisée en télécommunications. Son principe est simple: un oscillateur contrôlé en tension (VCO = voltage controlled oscillator) produit un signal périodique  $u_d(t)$  que la boucle tend à rendre synchrone avec le signal incident  $s(t)$ . Si celui-ci est modulé en fréquence, la tension de commande du VCO varie proportionnellement à la déviation instantanée de fréquence (exercice 11.6.11). L'analyse détaillée du comportement d'une boucle à phase asservie sort du cadre de cet ouvrage.

### 11.3.10 Performances en présence de bruit

L'analyse détaillée des performances d'un système à modulation  $\Phi M$  ou FM en présence de bruit est complexe, en raison des relations non linéaires qu'elle implique [26, 40, 41]. Il est toutefois possible de déduire simplement quelques résultats fondamentaux dans le cas courant où la puissance du bruit est beaucoup plus petite que la puissance de la porteuse.

Considérons une porteuse non modulée (pour simplifier: on peut montrer que le rôle du bruit est identique) reçue en présence d'un bruit additif  $n(t)$  à spectre passe-bande fixé par le filtre sélectif de réception centré sur la fréquence porteuse  $f_p$ . En utilisant la décomposition (11.43), le signal combiné devient

$$\begin{aligned} x(t) &= s(t) + n(t) \\ &= [\dot{U}_p + a_n(t)] \cos(2\pi f_p t + \alpha_p) - b_n(t) \sin(2\pi f_p t + \alpha_p) \\ &= r_x(t) \cos(2\pi f_p t + \Delta\phi_n(t) + \alpha_p) \end{aligned} \tag{11.101}$$

avec

$$r_x(t) = \{ [\hat{U}_p + a_n(t)]^2 + b_n^2(t) \}^{1/2} \quad (11.102)$$

et

$$\Delta\phi_n(t) = \arctan \frac{b_n(t)}{\hat{U}_p + a_n(t)} \quad (11.103)$$

L'effet du bruit à l'entrée du démodulateur se répercute ainsi à la fois sur l'amplitude et sur la phase. Toutefois, les fluctuations d'amplitude sont éliminées par le circuit créateur inclus dans le démodulateur. La seule perturbation à prendre en compte est donc le **bruit de phase**  $\Delta\phi_n(t)$  défini par (11.103).

Dans l'hypothèse d'un fort rapport signal sur bruit à l'entrée  $\xi_x = P_s/P_n = \frac{1}{2} (\hat{U}_p/\sigma_n)^2 \gg 1$ , la relation (11.103) devient approximativement

$$\Delta\phi_n(t) \approx b_n(t)/\hat{U}_p \quad (11.104)$$

Le bruit de phase est ainsi sensiblement proportionnel à la composante en quadrature du bruit d'entrée et sa densité spectrale vaut

$$\Phi_{\Delta\phi}(f) \approx \hat{U}_p^{-2} \Phi_{bn}(f) \quad (11.105)$$

Dans le cas d'une démodulation de fréquence, on obtient par (11.96), un **bruit de fréquence**

$$\Delta f_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Delta\phi_n(t) \quad (11.106)$$

dont la densité spectrale vaut, par (8.71),

$$\Phi_{\Delta f}(f) = f^2 \Phi_{\Delta\phi}(f) \quad (11.107)$$

Le filtre passe-bas de sortie du démodulateur élimine toutes les composantes de fréquence supérieure à  $B_m$ , la largeur de bande du signal modulant. Si le bruit  $n(t)$  est à spectre uniforme  $\Phi_n(f) = \eta/2$  dans la bande d'intérêt  $B_s$  centrée sur  $f_p$ , le spectre de la composante en quadrature vaut (§ 7.4.6) :  $\Phi_{bn}(f) = \eta \text{rect}(f/B_s)$ . Le spectre du bruit de phase est donc aussi uniforme et celui du bruit de fréquence varie de manière parabolique (fig. 11.35).

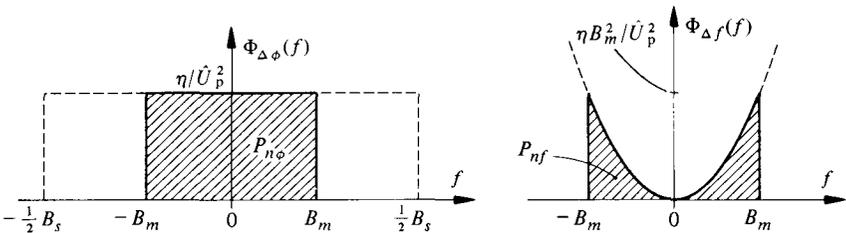


Fig. 11.35

La puissance (variance) de bruit de phase à la sortie d'un démodulateur  $\Phi M$  vaut

$$P_{n\phi} = 2 \int_0^{B_m} \Phi_{\Delta\phi}(f) df = 2\eta B_m / \hat{U}_p^2 \quad (11.108)$$

La puissance du bruit de fréquence observé à la sortie d'un démodulateur FM vaut, elle,

$$P_{nf} = 2 \int_0^{B_m} \Phi_{\Delta f}(f) df = 2\eta B_m^3 / (3\hat{U}_p^2) \quad (11.109)$$

Si  $B_s$  est la largeur de bande utile occupée par le signal modulé, le rapport signal sur bruit à l'entrée du démodulateur vaut

$$\xi_x = P_s/P_n = \frac{1}{2} \hat{U}_p^2 / (\eta B_s) \quad (11.110)$$

En l'absence de bruit, le signal démodulé est proportionnel à la déviation de phase  $\Delta\phi(t)$  en FM et à la déviation de fréquence  $\Delta f(t)$  en FM. En dénotant les variances respectives par  $\sigma_{\Delta\phi}^2$  et  $\sigma_{\Delta f}^2$ , et en admettant un coefficient de proportionnalité unité, le rapport signal sur bruit après démodulation devient

$$\xi_d = \begin{cases} \frac{\hat{U}_p^2}{2\eta B_m} \sigma_{\Delta\phi}^2 & \text{en FM} \\ \frac{3}{2} \frac{\hat{U}_p^2}{\eta B_m^3} \sigma_{\Delta f}^2 & \text{en FM} \end{cases} \quad (11.111)$$

Le rapport  $\xi_d/\xi_x$  fournit, comme au paragraphe 11.2.9, une indication de l'efficacité (immunité au bruit) du démodulateur :

$$\xi_d/\xi_x = \begin{cases} \sigma_{\Delta\phi}^2 B_s/B_m & \text{en FM} \\ 3 \sigma_{\Delta f}^2 B_s/B_m^3 & \text{en FM} \end{cases} \quad (11.112)$$

Alors que cette efficacité est bornée en démodulation d'amplitude (tab. 11.26), on constate qu'*une amélioration importante de l'immunité au bruit est possible en modulation angulaire au prix d'un élargissement de la largeur de bande  $B_s$  occupée par le signal modulé.* En effet, celle-ci dépend directement de  $\sigma_{\Delta\phi}$  ou  $\sigma_{\Delta f}$  (§ 11.3.4).

Pour obtenir une comparaison globale (tab. 11.36) avec les systèmes à modulation linéaire, on forme le rapport  $\xi_d/\xi_0$  où  $\xi_0 = \hat{U}_p^2 / (2\eta B_m)$  est le rapport signal sur bruit d'une transmission directe (sans modulation) d'un signal modulant de puissance équivalente à  $P_s = \hat{U}_p^2 / 2$  et de fréquence maximum  $B_m$ , soumise à du bruit de densité spectrale  $\Phi_n(f) = \eta/2$  :

$$\xi_d/\xi_0 = \begin{cases} \sigma_{\Delta\phi}^2 & \text{en FM} \\ 3 \sigma_{\Delta f}^2 / B_m^3 & \text{en FM} \end{cases} \quad (11.113)$$

En modulation linéaire, ce rapport est toujours égal ou inférieur à l'unité.

### 11.3.11 Exemple : modulation angulaire sinusoïdale en présence de bruit

Dans le cas d'un signal modulant sinusoïdal de fréquence  $f_m$ , les valeurs efficaces de déviation de phase et de déviation de fréquence deviennent, par (11.73), (11.74) et (11.75)

$$\sigma_{\Delta\phi} = \delta / \sqrt{2} \quad (11.114)$$

$$\sigma_{\Delta f} = \delta f_m / \sqrt{2} \quad (11.115)$$

En identifiant la largeur de bande  $B_m$  à  $f_m$  (ce qui est contestable!), on obtient en remplaçant dans (11.113)

$$\xi_d/\xi_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} \delta^2 & \text{en } \Phi M \\ \frac{3}{2} \delta^2 & \text{en FM} \end{cases} \quad (11.116)$$

Ce facteur de mérite est proportionnel au carré de l'indice de modulation  $\delta$ . Il peut donc être largement supérieur à l'unité pour autant que  $\delta \gg 1$ . La largeur de bande, donnée par la formule de Carson (11.84), est alors proportionnelle à l'indice de modulation:  $B_s \approx 2\delta f_m = 2\delta B_m \gg B_m$ .

Tableau 11.36

Modulation	$\zeta(t)$	$B_s/B_m$	$\xi_d/\xi_0$
AM	$\hat{U}_p[1 + m_o(t)]$	2	< 1
AM-P	$\hat{U}_p m_o(t)$	2	1
SSB	$\frac{\hat{U}_p}{2} [m_o(t) + j\check{m}_o(t)]$	1	1
$\Phi M$	$\hat{U}_p \exp[j\beta m(t)]$	$2(\delta + 1)$	$\delta^2/2$
FM	$\hat{U}_p \exp[j2\pi\nu \int_0^t m(t) dt]$	$2(\delta + 1)$	$3\delta^2/2$

### 11.3.12 Observation

La variation parabolique du spectre du bruit de fréquence (fig. 11.35) suggère un moyen additionnel pour améliorer l'efficacité du démodulateur. Il s'agit de modifier la distribution de la puissance du signal modulant à l'émission en privilégiant les fréquences élevées par un filtrage approprié (préaccentuation). La distorsion linéaire introduite est compensée, après démodulation, par un filtrage (désaccentuation) qui a pour effet de réduire fortement le bruit de fréquence, principalement distribué aux fréquences élevées.

Cette technique, qui revient à créer une modulation mixte FM- $\Phi M$ , est utilisée, entre autre, en radiodiffusion en ondes ultra-courtes et dans les transmission par faisceau hertziens (chap. XVIII.12).

## 11.4 MODULATIONS D'IMPULSIONS

### 11.4.1 Introduction

La modulation d'impulsions est associée au principe de l'échantillonnage décrit au chapitre 9. Selon son type, elle peut offrir un accroissement de l'immunité au bruit au prix d'un élargissement de la bande passante occupée, comme en modulation angulaire. Mais sa raison d'être principale est de permettre la transmission simultanée de plusieurs messages par multiplexage temporel (§ 11.1.1). On la rencontre aussi dans certaines applications de réglage automatique.

Aux modulations d'impulsions analogiques (fig. 11.37: PAM, PDM, PPM, PFM), on préfère de plus en plus la technique de représentation — déjà décrite au chapitre 10 — connue sous le nom de modulation par impulsions codées (MIC, en anglais: PCM).

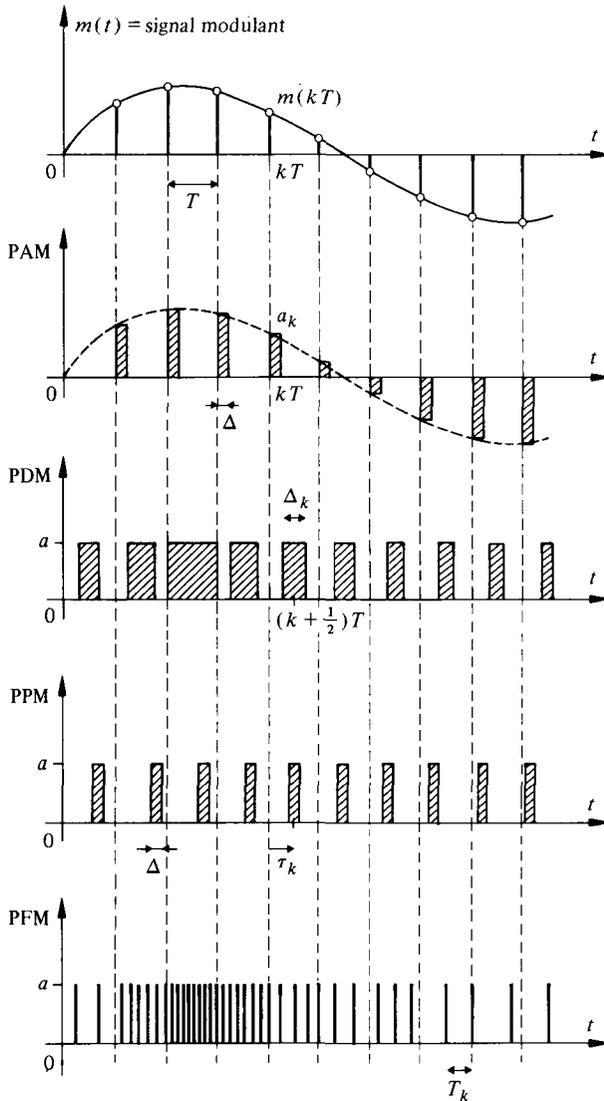


Fig. 11.37

Aussi se limitera-t-on ici à une description très brève de ces diverses modulations. Le lecteur trouvera plus de détails dans le volume XVIII de ce Traité et dans l'abondante littérature spécialisée consacrée aux télécommunications. Les références [40, 41] contiennent des analyses mathématiques poussées des spectres et des performances en présence de bruit de ces diverses modulations.

### 11.4.2 Définition : modulation d'impulsions en amplitude

En modulation d'impulsions en amplitude (PAM = Pulse Amplitude Modulation), le signal modulé correspond à l'équation générale (11.6) avec  $a_k = m(kT)$ ,  $\tau_k = \frac{1}{2} \Delta$  (ou toute autre valeur arbitraire) et  $\Delta_k = \Delta = \text{constante}$ . Un tel signal est, dans le cas où

l'impulsion est de forme rectangulaire, celui obtenu par échantillonnage périodique avec maintien (§ 9.2.4) et sa densité spectrale se déduit, par analogie, de l'équation (9.17).

Une démodulation (reconstitution) est donc possible par simple filtrage passe-bas avec égalisation.

Comme toute modulation d'amplitude, cette technique offre des performances limitées en présence de bruit additif et est, par conséquent, peu utilisée.

#### 11.4.3 Définition : modulation d'impulsions en durée

Dans la *modulation d'impulsions en durée* (PDM = *Pulse Duration Modulation*) ou PWM = *Pulse Width Modulation*), les paramètres du signal modulé (11.6) sont  $a_k = a = \text{constante}$ ,  $\tau_k = \frac{1}{2} T$  et  $\Delta_k = \frac{1}{2} T + \alpha m(kT)$  où  $\alpha$  est un coefficient de proportionnalité.

L'intégrale de chaque impulsion varie linéairement avec l'échantillon  $m(kT)$  correspondant, comme en modulation PAM. Ce fait permet d'obtenir également une démodulation par simple filtrage passe-bas (filtre moyennneur). Une amplitude constante facilite la régénération des impulsions en présence de bruit additif.

#### 11.4.4 Définition : modulation d'impulsions en position

En *modulation d'impulsions en position* (PPM = *Pulse Position Modulation*) les paramètres du signal modulé (11.6) sont  $a_k = a = \text{constante}$ ,  $\tau_k = \frac{1}{2} T + \alpha m(kT)$  et  $\Delta_k = \Delta = \text{constante}$ .

Le format invariant des impulsions rend cette modulation attrayante dans certaines circonstances : la puissance du signal modulé est constante et indépendante du signal modulant ; une régénération des impulsions en présence de bruit est aisée.

Cette modulation peut se déduire d'une modulation PDM : l'impulsion de format calibré étant générée au flanc descendant de chaque impulsion du signal PDM.

Inversément, la démodulation indirecte d'un signal PPM est effectuée par une conversion préalable en signal PDM, suivie d'un filtrage passe-bas.

#### 11.4.5 Définition : modulation d'impulsions en fréquence

La *modulation d'impulsions en fréquence* (PFM = *Pulse Frequency Modulation*) s'apparente à la modulation PPM. Les paramètres  $a_k$  et  $\Delta_k$  de (11.6) sont ici aussi des constantes, mais au lieu de faire varier le retard  $\tau_k$  proportionnellement au signal modulant, c'est l'inverse de la période instantanée  $1/T_k = 1/T + \nu m(t)$  qui varie linéairement en fonction du signal modulant. Ceci proscriit son usage en multiplexage temporel. La modulation PFM est à la modulation PPM ce que la modulation d'une porteuse sinusoïdale en FM est à la modulation  $\Phi M$ .

Le nombre d'impulsions par unité de temps variant proportionnellement au signal modulant, une simple démodulation par filtre passe-bas (moyennneur) est aussi possible.

#### 11.4.6 Modulations numériques d'impulsions. Définitions

Comme on l'a déjà relevé, le nom de *modulation par impulsion et codage* (MIC ou PCM = *Pulse Code Modulation*) est donné en télécommunication à la représentation numérique décrite au chapitre 10. Les termes de *modulation PCM différentielle* (DPCM)

et de *modulation delta* ( $\Delta M$ ), sont donnés à des méthodes de représentation numériques particulières de la dérivée du signal primaire. Il s'agit en fait de techniques de codage et non de modulation, au sens où ce mot est défini au paragraphe 11.1.1. Leurs particularités associées aux contraintes des télécommunications sont décrites dans le volume XVIII de ce Traité.

### 11.5 CHANGEMENT ET MULTIPLICATION DE FRÉQUENCE

#### 11.5.1 Principe et définition du changement de fréquence

Le *changement de fréquence* est une opération de translation spectrale analogue à la modulation d'amplitude. Dans cette dernière, le spectre d'un signal primaire de basse fréquence est transposé d'une quantité égale à la fréquence porteuse  $f_p$  par produit du signal primaire et d'une sinusoïde de fréquence  $f_p$ . Le même principe appliqué à un signal primaire de spectre passe-bande est appelé changement de fréquence. Il s'effectue souvent à l'aide d'un oscillateur auxiliaire (hétérodyne) dont la fréquence  $f_0$  peut être variée.

Si le signal à spectre passe-bande est

$$s(t) = m_0(t) \hat{U}_p \cos(2\pi f_p t) \tag{11.117}$$

et si le signal auxiliaire est

$$u_0(t) = \cos(2\pi f_0 t) \tag{11.118}$$

le produit

$$z(t) = s(t) u_0(t) = \frac{1}{2} \hat{U}_p m_0(t) \{ \cos [2\pi (f_0 + f_p) t] + \cos [2\pi (f_0 - f_p) t] \} \tag{11.119}$$

a pour densité spectrale (fig. 11.38)

$$\begin{aligned} \Phi_z(f) = \frac{\hat{U}_p^2}{16} [ & \Phi_{m_0}(f + f_0 + f_p) + \Phi_{m_0}(f + f_0 - f_p) + \\ & + \Phi_{m_0}(f - f_0 + f_p) + \Phi_{m_0}(f - f_0 - f_p) ] \end{aligned} \tag{11.120}$$

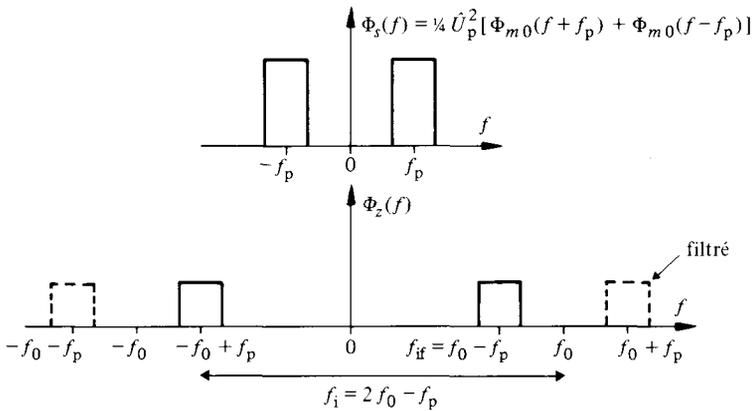


Fig. 11.38

Un filtre passe-bande élimine ensuite les termes indésirables, par exemple ceux transposés autour de  $|f_0 + f_p|$ .

Comme en modulation d'amplitude, la multiplication peut être réalisée soit de manière directe, à l'aide d'un opérateur paramétrique approprié (§ 8.3.4), soit de manière indirecte en superposant la porteuse et le signal primaire  $s(t)$  à l'entrée d'un opérateur non linéaire amnésique (§ 8.4.2).

Dans un récepteur à changement de fréquence (super-hétérodyne), la fréquence de l'oscillateur local  $f_0$  est choisie de telle façon que l'on ait toujours  $f_0 - f_p = f_{if} =$  constante, où  $f_p$  est la fréquence de la porteuse de l'onde reçue. Ceci permet d'amplifier le signal reçu à l'aide d'un amplificateur sélectif accordé sur la fréquence intermédiaire  $f_{if}$  (valeurs usuelles de  $f_{if}$  en radiophonie : 455 kHz en modulation d'amplitude et 10.7 MHz en modulation de fréquence).

### 11.5.2 Définition: fréquence image

Le signal à spectre passe-bande  $s(t)$  défini par (11.117) n'est pas le seul à produire, après multiplication avec (11.118), des composantes spectrales au voisinage de la fréquence intermédiaire  $f_{if}$ . En effet, il résulte de la convolution spectrale découlant du produit (11.119) qu'un signal à spectre passe-bande  $s'(t)$  dont les bandes spectrales sont centrées sur les fréquences  $f = |f_i|$  avec

$$f_i = 2f_0 \pm f_p \quad (11.121)$$

fournira également, après multiplication par  $u_0(t)$ , une contribution transposée en  $f_{if} = f_0 \pm f_p$ .

La fréquence  $f_i$ , définie par (11.121), est appelée la *fréquence image* de la fréquence désirée  $f_p$ . Elle est l'image de  $f_p$  par rapport à  $f_0$ .

Tout signal de fréquence  $f_i$  présent à l'entrée du récepteur simultanément avec le signal désiré de fréquence  $f_p$  produit un brouillage. Il est donc nécessaire de l'éliminer, ou tout au moins de l'affaiblir suffisamment à l'aide d'un filtre accordé à la fréquence  $f_p$ .

### 11.5.3 Multiplication de fréquence

Il est parfois nécessaire de créer un signal périodique, ou à bande étroite, dont la fréquence est proportionnelle à celle d'un autre signal (fig. 11.39). Ce dernier peut être fourni par un générateur de référence (p. ex. oscillateur à quartz) ou correspondre à un signal modulé en fréquence.

Une telle multiplication de fréquence est utilisée, entre autre, pour :

- générer un ou plusieurs signaux de fréquences précises à partir d'une seule référence (sous-porteuses, synthétiseur de fréquence);
- convertir un signal FM à bande étroite (§ 11.3.3) en signal FM à large bande.

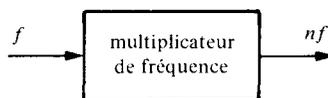


Fig. 11.39

La multiplication de fréquence peut être réalisée :

- à l'aide d'un circuit non linéaire (§ 8.4.2), dont la caractéristique provoque l'apparition de composantes spectrales à des multiples de la fréquence originale, suivi d'un filtre éliminant les termes indésirables;
- au moyen d'une boucle à asservissement de phase (PLL) incluant un circuit logique diviseur de fréquence (fig. 11.40).

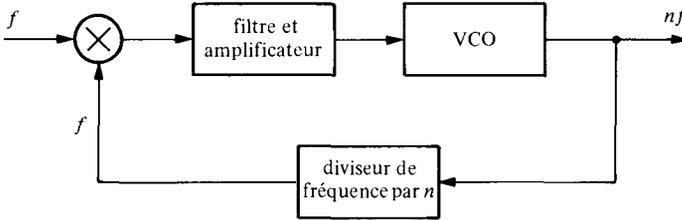


Fig. 11.40

L'existence de circuits électroniques intégrés adéquats rend la deuxième méthode actuellement très populaire.

Si le signal original est modulé en fréquence, avec fréquence porteuse  $f_p$  et déviation  $\Delta f$ , le nouveau signal a comme fréquence  $nf_p$  et comme déviation  $n\Delta f$ .

## 11.6 EXERCICES

**11.6.1** Déterminer le rendement  $\eta_m$  d'une modulation d'amplitude avec porteuse où le signal modulant normalisé  $m_0(t)$  :

- possède une fonction d'autocorrélation  $R_{m_0}(\tau) = \sigma_{m_0}^2 \exp(-a|\tau|)$  avec  $a = 1000$  Hz et  $\sigma_{m_0} = 0.5$ ;
- est une onde carrée d'amplitude unité;
- est une onde carrée d'amplitude une-demi.

**11.6.2** Etablir l'efficacité  $\xi_d/\xi_x$  d'une démodulation d'amplitude par détection synchrone en fonction de l'indice de modulation  $m$  défini en cas de modulation sinusoïdale avec porteuse par  $m_0(t) = m \cdot \cos(2\pi f_m t)$ .

**11.6.3** Démontrer que le signal modulé d'un système à bande latérale unique conservant la bande latérale inférieure est donné par (11.20) avec changement du signe du deuxième terme.

**11.6.4** Etablir les expressions du signal modulé  $s(t)$  et de la densité spectrale  $\Phi_s(f)$  d'un système à bande latérale unique conservant la bande latérale a) supérieure, b) inférieure, pour le cas d'un signal modulant sinusoïdal  $m_0(t) = \cos(2\pi f_m t)$ .

**11.6.5** Quel est le type de modulation réalisé par le modulateur double de la figure 11.41, si la transformée de Fourier du signal modulant  $M_0(f) = 0$  pour  $|f| \geq f_m$  ?

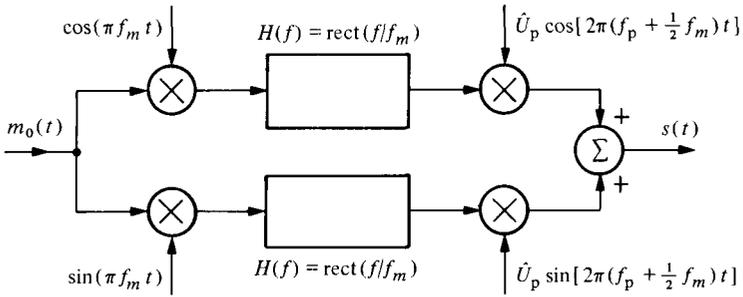


Fig. 11.41

**11.6.6** Montrer qu'il est possible de transmettre deux signaux  $m_1(t)$  et  $m_2(t)$ , indépendants et de même largeur de bande, avec la même porteuse sinusoïdale modulée en amplitude, moyennant l'utilisation au récepteur d'une double détection isochrone avec signaux auxiliaires sinusoïdaux  $u_{d1}(t)$  et  $u_{d2}(t)$  en quadrature (modulation QAM).

**11.6.7** Déterminer sous quelle condition la détection d'enveloppe peut être utilisée pour la démodulation d'un signal VSB avec porteuse, modulé par un signal  $m(t)$  de puissance  $P_m$ .

**11.6.8** Démontrer (11.21) en considérant, pour simplifier,  $m_0(t)$  comme déterministe.

**11.6.9** Comparer graphiquement (11.81) et (11.86) pour  $\delta = 10$ .

**11.6.10** Déterminer l'expression approchée de la densité spectrale de puissance d'un signal sinusoïdal  $s(t)$  modulé en fréquence à haut niveau par un signal modulant aléatoire  $m(t)$  à distribution uniforme entre  $\pm \hat{m}$ .

**11.6.11** Démontrer que la tension de commande  $d(t)$  de la figure 11.34 est proportionnelle à la fréquence instantanée du signal modulé  $s(t)$ .

**11.6.12** Déterminer la densité spectrale de puissance d'un signal sinusoïdal modulé en fréquence (avec discontinuités de phase) par un signal  $m_0(t)$  binaire aléatoire en mode NRZ tel que  $s(t) = \hat{U}_p \cos(2\pi f_1 t + \alpha_1)$  pour  $m_0(t) = 1$  et  $s(t) = \hat{U}_p \cos(2\pi f_2 t + \alpha_2)$  pour  $m_0(t) = -1$ .

**11.6.13** Démontrer qu'une modulation de phase discrète (PSK) à 4 états:  $0, \pi/2, -\pi/2, \pi$ , indépendants et équiprobables, occupe la même bande passante utile que la modulation biphase traitée au paragraphe 11.3.8.

**11.6.14** Déterminer le spectre du signal modulant  $m(t)$  d'un modulateur FM stéréophonique généré par le système de la figure 11.42 où  $m_d(t)$  et  $m_g(t)$  représentent respectivement les voies de droite et de gauche du signal stéréophonique, de largeur de bande limitée à 15 kHz.

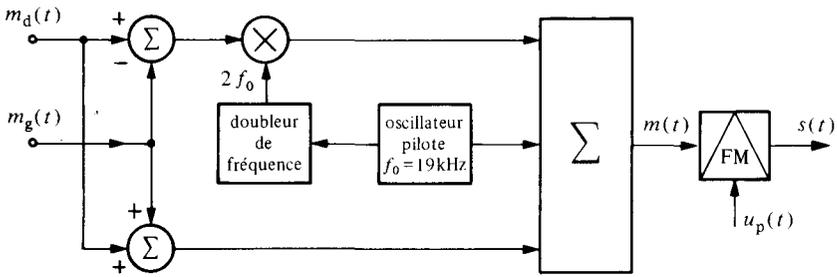


Fig. 11.42

**11.6.15** Démontrer que le schéma de la figure 11.43 est celui d'un démodulateur FM stéréophonique adapté au traitement du signal produit par le modulateur de la figure 11.42.

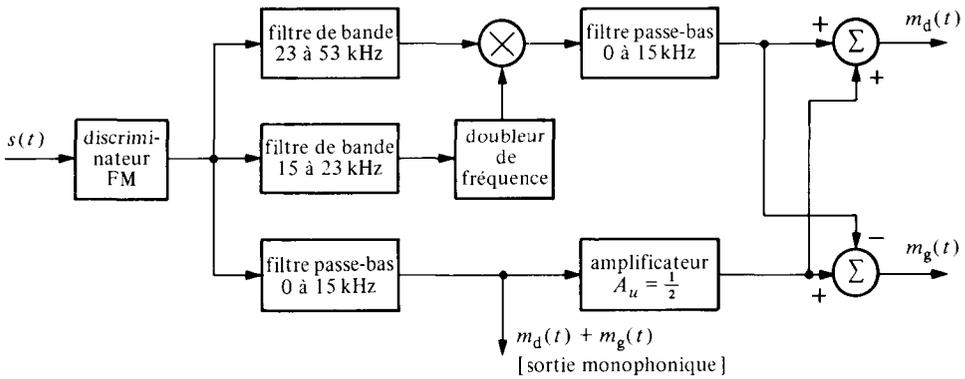


Fig. 11.43



## ANALYSE SPECTRALE EXPÉRIMENTALE

### 12.1 PRINCIPES GÉNÉRAUX

#### 12.1.1 Buts, définitions et terminologie

L'*analyse spectrale* est la décomposition d'une grandeur variant en fonction du temps en ses composantes fréquentielles. C'est l'une des techniques les plus courantes de traitement des signaux.

L'analyse spectrale expérimentale est un outil d'investigation irremplaçable dans de nombreux domaines. Différentes approches, basées sur des méthodes analogiques, numériques ou hybrides, sont employées pour réaliser une telle analyse.

Les instruments de mesure autonome effectuant cette opération sont appelés *analyseurs de spectres*. Les *transformateurs de Fourier* (calculateurs numériques spécialisés souvent appelés en anglais *Fourier* ou *FFT processors*) jouent principalement ce rôle. Mais ils peuvent également exécuter d'autres tâches: mesure des fonctions de corrélation et de cohérence, de fonction de réponse (fonction de transfert, réponse impulsionnelle), capture et analyse de signaux transitoires (shock analysis), etc. Les *analyseurs d'onde* sont essentiellement des voltmètres sélectifs. Avec certaines restrictions, ils sont utilisables comme analyseurs de spectres.

L'analyse spectrale expérimentale est également souvent réalisée à l'aide d'un ordinateur sur des données préalablement acquises. La suite des opérations mathématiques nécessaires est alors décrite par un logiciel approprié.

Ce chapitre a pour but d'expliquer sommairement le principe de fonctionnement des méthodes expérimentales usuelles d'analyse spectrale. Les relations liant les modèles théoriques de spectres développés précédemment avec les résultats expérimentaux que l'on peut obtenir sont établies. Quelques exemples d'application permettent d'illustrer ces propos (sect. 12.4).

#### 12.1.2 Domaine principaux d'application

De nombreux signaux sont difficiles à interpréter en tant que fonctions du temps. Par contre, leurs spectres fournissent des informations précieuses. Celles-ci permettent de reconnaître la nature d'un signal, d'identifier éventuellement son origine et de déceler des variations de ses caractéristiques.

En métrologie, en électronique, en réglage automatique, en télécommunications, en physique appliquée, en chimie, etc., l'analyse spectrale est utilisée pour déterminer la distribution fréquentielle de l'énergie des signaux observés, mesurer la fonction de réponse de systèmes linéaires (filtres, capteurs, amplificateurs, etc.), révéler les distor-

sions induites par les non linéarités de certains circuits, estimer le bruit de phase d'oscillateurs, etc.

En télécommunication, en technique radar et sonar, elle offre en outre de nombreuses possibilités de caractérisation des signaux modulés et d'observation des conditions de transmission (bruit de fond et autres phénomènes parasites, séparation des canaux en multiplexage fréquentiel, etc.) et de réception.

En liaison avec un microphone calibré, l'analyseur de spectre est un puissant instrument d'investigation en acoustique.

On l'utilise également en analyse des vibrations (étude de structures, machines tournantes, véhicules de transport, aéronautique, etc.) où les signaux sont fournis généralement par des capteurs accélérométriques. Par exemple, les vibrations produites par un train d'engrenages ou le bruit créé par un roulement à billes peuvent être caractérisés par une certaine *signature* fréquentielle due à la présence de raies spectrales associées aux périodicités mécaniques de ces dispositifs.

Enfin, l'analyse spectrale de nombreux signaux d'origine naturelle (biologiques, sismiques, océanographiques, atmosphériques, galactiques) ou résultant d'activités humaines (prospection pétrolière, explosions nucléaires, interférences électromagnétiques, etc.) est un outil d'investigation indispensable.

### 12.1.3 Méthodes fondamentales d'analyse spectrale. Définitions

Les techniques usuelles d'analyse spectrale se rattachent à deux classes principales :

- les méthodes directes (filtrage sélectif, méthode du périodogramme);
- les méthodes indirectes (méthode du corrélogramme, méthodes paramétriques à haute résolution : autorégressive, du maximum d'entropie, de Pisarenko, etc.).

Les méthodes directes fonctionnent de manière analogue au principe de l'analyseur général à fonctions orthogonales représenté sur la figure 3.6. Le domaine spectral exploré est décomposé en une suite de canaux adjacents dans lesquels on évalue la densité spectrale locale. Cette décomposition est obtenue par le calcul d'une transformée de Fourier discrète dans la *méthode du périodogramme* (fig. 12.1) ou à l'aide d'un ensemble de filtres à bandes étroites (fig. 12.2). Cet ensemble peut être réalisé par  $N$  filtres travaillant simultanément en parallèle (analyseurs à banc de filtres; § 12.2.1) ou par un seul filtre explorant séquentiellement tout le domaine spectral désiré (analyseurs à balayage : sect. 12.3). Les analyseurs de spectre utilisant des techniques de diffraction optique appartiennent aussi à cette classe [67].

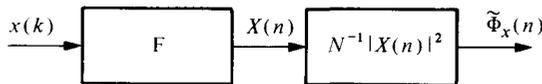


Fig. 12.1 Méthode du périodogramme.

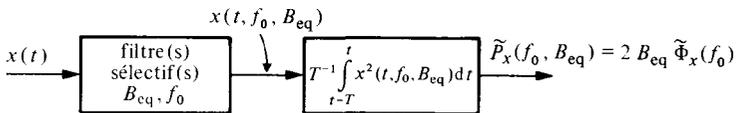


Fig. 12.2 Méthode par filtrage sélectif.

Les méthodes indirectes exploitent des algorithmes de calcul numérique basés soit sur le théorème de Wiener-Khinchine (*méthode du corrélogramme* [31]), soit sur l'estimation du spectre d'un modèle de signal devant satisfaire les données observées (*méthodes paramétriques* [119]). Dans le premier cas (fig. 12.3), on évalue successivement la fonction d'autocorrélation du signal (supposé ergodique), puis la transformée de Fourier de celle-ci. L'approche la plus typique des méthodes paramétriques est la *modélisation autorégressive* (AR, ARMA). Elle consiste à considérer le signal observé comme la réponse d'un système linéaire excité par du bruit blanc (fig. 12.4). L'estimation spectrale est alors remplacée, selon (8.24), par celle de la fonction de réponse fréquentielle  $G(f)$  du système. L'identification des paramètres du modèle est basée sur la résolution d'un ensemble d'équations linéaires décrivant les relations entre ces paramètres et la fonction d'autocorrélation du signal. La *méthode du maximum d'entropie* (MEM) est une approche équivalente non linéaire dans laquelle, de tous les spectres consistants avec les données limitées disponibles, on choisit celui qui correspond à un signal aléatoire d'entropie maximum. La *méthode de Pisarenko* modèle le spectre comme la somme d'un spectre de raies et d'un spectre de bruit blanc. Elle permet d'atteindre la plus grande résolution si les hypothèses de travail sont vérifiées.

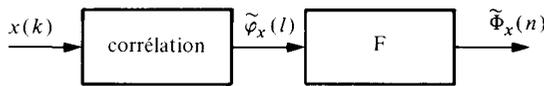


Fig. 12.3 Méthode du corrélogramme.

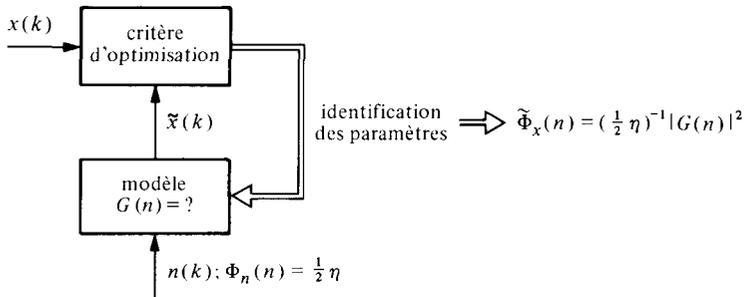


Fig. 12.4 Méthode paramétrique.

Les méthodes directes sont relativement simples à mettre en œuvre. Elles fournissent d'excellents résultats pour autant que la durée du signal observé ne soit pas trop limitée (§ 12.1.5). Dans le cas contraire, les méthodes paramétriques se révèlent généralement plus performantes [120]. Leur mise en œuvre est toutefois nettement plus complexe et leur succès dépend de l'adéquation de la méthode choisie au type de signal analysé.

La méthode indirecte du corrélogramme, qui a eu son heure de gloire, a été supplantée par la méthode du périodogramme depuis la mise au point d'algorithme de calcul rapide de la transformation de Fourier (FFT).

Seules les méthodes directes, couramment utilisées pour la réalisation d'analyseurs de spectres, sont décrites plus en détail dans le reste de ce chapitre. Pour les méthodes indirectes, on se référera à la littérature spécialisée mentionnée.

### 12.1.4 Erreurs de mesure

L'analyse spectrale expérimentale diffère du modèle théorique pour plusieurs raisons :

- observation du signal pendant une durée limitée  $T$  (nombre fini d'échantillons dans le cas numérique);
- forme et largeur de bande  $B_{eq}$  du ou des filtres d'analyse en technique analogique;
- échantillonnage fréquentiel en technique numérique;
- approximation de la mesure de vraie valeur efficace par une détection linéaire d'enveloppe;
- distorsion engendrée par la vitesse d'exploration des analyseurs à balayages;
- fluctuations statistiques en analyse de signaux aléatoires;
- non respect du théorème d'échantillonnage, bruit de quantification et erreurs de calcul (arrondi, troncature) en technique numérique;
- bruit propre des équipements d'acquisition et d'analyse;
- biais introduit par un lissage exagéré du spectre dans le domaine des fréquences.

Les principales causes d'erreurs des méthodes classiques sont de loin la durée finie d'observation  $T$ , la largeur de bande équivalente  $B_{eq}$  du filtre d'analyse et les fluctuations statistiques. Elles sont inhérentes à l'approche expérimentale et ne peuvent être réduites à volonté pour des raisons pratiques. Leurs origines et leurs conséquences sont expliquées plus loin.

### 12.1.5 Résolution, largeur de bande et durée d'observation. Définitions

Par *résolution*, ou *pouvoir séparateur*, on entend l'aptitude qu'a une technique d'analyse à distinguer deux raies spectrales voisines de même amplitude.

Dans les analyseurs à filtres sélectifs (fig. 12.2), cette résolution correspond approximativement à la largeur de bande équivalente  $B_{eq}$ , définie par (8.53), du ou des filtres utilisés. Dans les analyseurs à banc de filtres (§ 12.2.1), elle est par nécessité assez grossière et généralement variable en fonction de la fréquence centrale  $f_0$  de chaque filtre ( $B_{eq}/f_0 \approx$  constante). Les analyseurs à balayage (sect. 12.3) peuvent atteindre une très haute résolution, mais au prix d'une diminution drastique de la vitesse de balayage (§ 12.3.4). Ceci entraîne des contraintes d'existence et de stationnarité du signal pendant toute la durée de l'analyse.

La résolution des analyseurs utilisant la méthode du périodogramme, selon le schéma de la figure 12.1, dépend de la durée d'observation (ou d'acquisition) nécessairement finie  $T$  du signal. Cette durée est égale au produit du nombre  $N$  d'échantillons  $x(k)$  disponibles (ou que l'on peut mettre en mémoire) et du pas d'échantillonnage  $T_e$  :

$$T = NT_e \quad (12.1)$$

Les échantillons  $x(k)$  sont en fait ceux d'un signal de durée limitée  $x_u(t)$  défini par le produit

$$x_u(t) = x(t) \cdot u(t) \quad (12.2)$$

où  $x(t)$  est le signal à analyser et  $u(t)$  est une fonction de pondération – ou fenêtre temporelle – appropriée, sans dimension, nulle en dehors de l'intervalle d'observation  $T$ .

Par (8.88), les densités spectrales de  $x(t)$ ,  $x_u(t)$  et  $u(t)$  sont liées par la convolution

$$\mathring{\Phi}_{x_u}(f) = \Phi_x(f) * \mathring{\Phi}_u(f) \quad (12.3)$$

L'évaluation de la densité spectrale de puissance de  $x(t)$  est obtenue en divisant (12.3) par  $T$ :

$$\tilde{\Phi}_x(f) = T^{-1} \mathring{\Phi}_{x_u}(f) \quad (12.4)$$

Le résultat est une approximation du périodogramme (5.108).

Si  $x(t)$  possède deux composantes sinusoïdales d'amplitude  $A_1$  et  $A_2$  et de fréquence  $f_1$  et  $f_2$ , sa densité spectrale de puissance bilatérale théorique (4.154) contient les raies  $\frac{1}{4}A_1^2[\delta(f+f_1) + \delta(f-f_1)] + \frac{1}{4}A_2^2[\delta(f+f_2) + \delta(f-f_2)]$ . Par (12.4) et la convolution (12.3), ces raies sont remplacées par la somme de versions translatées de la fonction continue  $T^{-1} \mathring{\Phi}_u(f)$ :  $\frac{1}{4}T^{-1}A_1^2[\mathring{\Phi}_u(f+f_1) + \mathring{\Phi}_u(f-f_1)] + \frac{1}{4}T^{-1}A_2^2[\mathring{\Phi}_u(f+f_2) + \mathring{\Phi}_u(f-f_2)]$ . La puissance  $A_k^2/2$  de chaque paire de raies de fréquences  $\pm f_k$  est ainsi distribuée sur l'axe des fréquences selon une loi  $\Phi(f) = T^{-1}[\mathring{\Phi}_u(f+f_k) + \mathring{\Phi}_u(f-f_k)]$ . Celle-ci peut être interprétée comme l'équivalent du module carré de la fonction de réponse fréquentielle d'un filtre. Par analogie avec (8.53), la largeur de bande équivalente associée à la fenêtre temporelle  $u(t)$  devient, avec l'hypothèse  $T \ll f_k^{-1}$ :

$$B_{\text{eq}} = \frac{1}{\Phi_{\text{max}}} \int_0^{\infty} \Phi(f) df = \frac{1}{\mathring{\Phi}_u(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{\Phi}_u(f) df = \frac{\mathring{\Phi}_u(0)}{\mathring{\Phi}_u(0)} \quad (12.5)$$

### 12.1.6 Illustration et définitions

La fenêtre la plus simple est une fonction de pondération uniforme (fig. 12.5)

$$u_1(t) = \text{rect}[(t-t_0)/T] \quad (12.6)$$

Il lui correspond, par (4.64)

$$\mathring{\Phi}_{u_1}(f) = T^2 \text{sinc}^2(Tf) \quad (12.7)$$

et, par (4.63) et (12.5)

$$B_{\text{eq}} = 1/T \quad (12.8)$$

La figure 12.6 fournit trois exemples de la densité spectrale unilatérale approximative  $\tilde{\Phi}_x^+(f)$  obtenue dans le cas d'un signal  $x(t)$  formé de trois composantes sinusoïdales de même puissance normalisée  $A_k^2/2 = 1 \text{ V}^2$ . L'écart de fréquence entre les composantes d'indice  $k = 2$  et  $3$  vaut  $\Delta f = f_3 - f_2 = 1/128 \text{ Hz}$ . Chaque exemple correspond à une durée d'observation  $T = 64 \text{ s}$ ,  $T = 128 \text{ s}$  et  $T = 256 \text{ s}$ , respectivement. Les largeurs de bande équivalentes respectives valent ainsi:  $B_{\text{eq}} = 2\Delta f$ ,  $B_{\text{eq}} = \Delta f$  et  $B_{\text{eq}} = \frac{1}{2}\Delta f$ . La résolution limite apparaît clairement pour  $B_{\text{eq}} \approx \Delta f$ .

Les discontinuités de la fenêtre de pondération uniforme  $u_1(t)$  font apparaître dans la fonction  $\mathring{\Phi}_{u_1}(f)$  des lobes latéraux relativement importants. Ceux-ci peuvent masquer la présence d'une raie de faible puissance située au voisinage d'une raie de forte puissance. Pour palier cet inconvénient, d'autres fenêtres de pondération à variation plus graduelle ont été proposées [67, 122, 123]. Les propriétés de certaines d'entre-elles sont

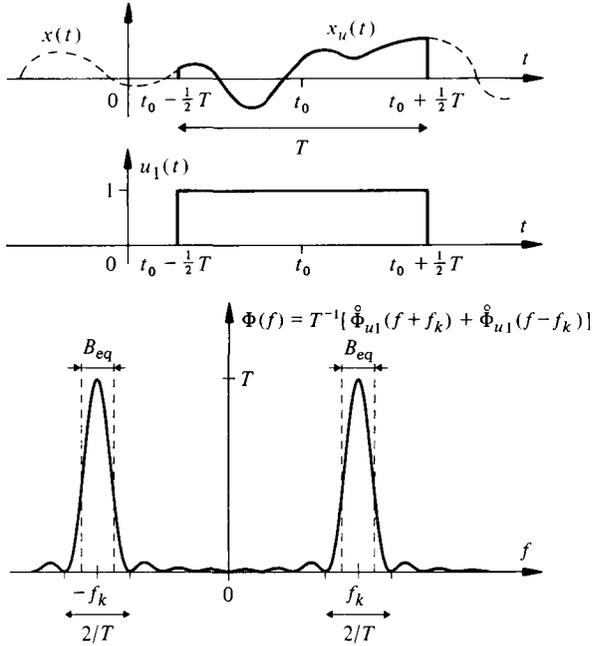


Fig. 12.5

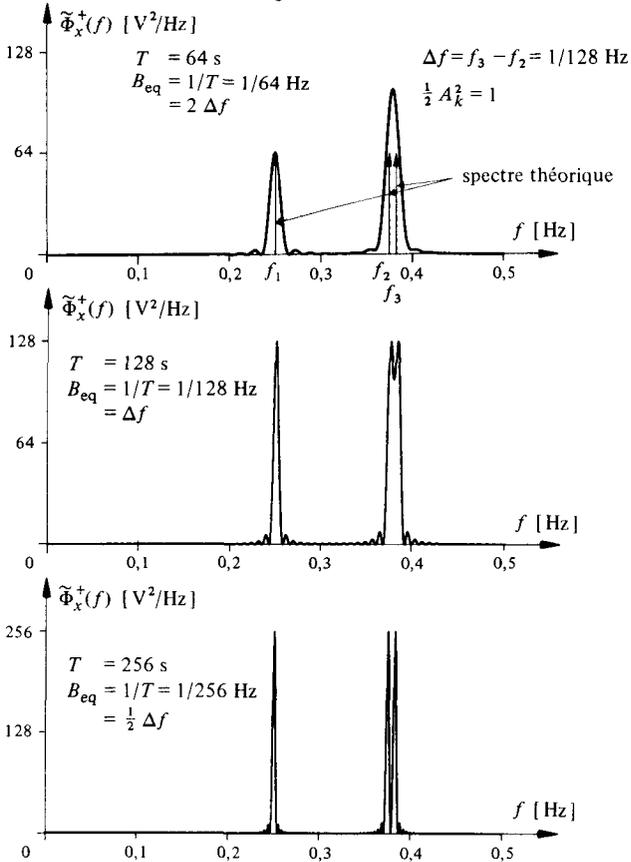


Fig. 12.6

présentées en détails dans le volume XX de ce Traité. D'une manière générale, la diminution de l'importance des lobes latéraux se paye par une augmentation de la largeur de bande équivalente et, par conséquent, par une diminution de la résolution.

Un ensemble classique de fonctions de pondération est généré par la relation suivante, appelée *fenêtre de Hamming généralisée* (fig. 12.7):

$$u_{\alpha}(t) = [\alpha + (1-\alpha) \cos(2\pi t/T)] \cdot \text{rect}(t/T) \quad (12.9)$$

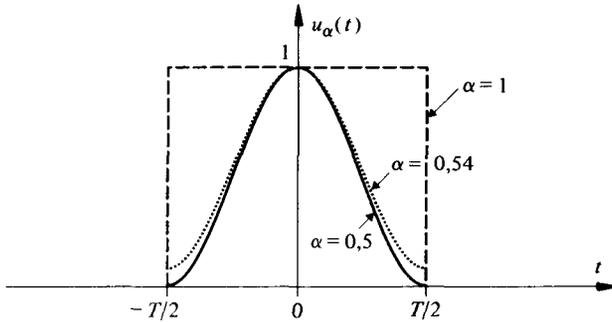


Fig. 12.7

La fonction rectangulaire (12.6) correspond au cas particulier  $\alpha = 1$ . Pour  $\alpha = 0,5$  on obtient la *fenêtre de Hanning* et pour  $\alpha = 0,54$ , la *fenêtre de Hamming*.

On détermine facilement (exercice 12.5.1) la densité spectrale  $\hat{\Phi}_{u_{\alpha}}(f)$  et la largeur de bande équivalente  $B_{\text{eq}}$  correspondantes (fig. 12.8):

$$\hat{\Phi}_{u_{\alpha}}(f) = T^2 |\alpha \text{sinc}(Tf) + \frac{1}{2} (1-\alpha) [\text{sinc}(Tf+1) + \text{sinc}(Tf-1)]|^2 \quad (12.10)$$

$$B_{\text{eq}} = \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^2 \right] \cdot T^{-1} \quad (12.11)$$

La largeur de bande équivalente de la fenêtre de Hanning est ainsi égale à  $1,5 T^{-1}$  et celle de Hamming à  $1,36 T^{-1}$ .

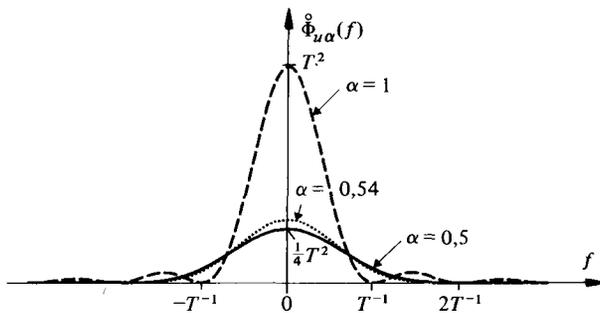


Fig. 12.8

### 12.1.7 Commentaires

La méthode indirecte du corrélogramme (fig. 12.3) est en principe équivalente à la méthode directe du périodogramme (fig. 12.1). Les résolutions que l'on peut obtenir dans ces deux cas pour les mêmes durées d'observation sont donc comparables. Si une

pondération plus sévère de la fonction d'autocorrélation est introduite pour réduire les incertitudes statistiques, il peut en résulter une dégradation de la résolution.

Les méthodes modernes à haute résolution (fig. 12.4) remplacent l'a priori d'une pondération nulle en dehors de l'intervalle d'observation par des hypothèses sur la nature du signal et de son évolution en dehors de cet intervalle [120]. Elles ne sont pas universellement applicables mais, sous certaines conditions, elles apportent une amélioration significative de la résolution.

### 12.1.8 Fluctuations statistiques de l'estimation spectrale d'un analyseur à filtre sélectif. Définitions

L'estimation spectrale d'un signal aléatoire appartient, comme toutes les méthodes d'interprétation statistique de mesures, au domaine de l'estimation traitée au chapitre 13. On détermine en avant propos, dans ce paragraphe et dans le suivant, la statistique de l'erreur aléatoire de mesure des méthodes directes.

Considérons tout d'abord le schéma de principe d'un analyseur à filtre sélectif (fig. 12.2.). Il peut être décomposé en première approximation en trois opérateurs (fig. 12.9): un filtre idéal (§ 8.2.21) de largeur de bande  $B_{eq}$  centrée sur une fréquence d'analyse  $f_0$ , un opérateur quadratique (§ 8.4.16) et un moyenneur temporel parfait (§ 8.2.19).

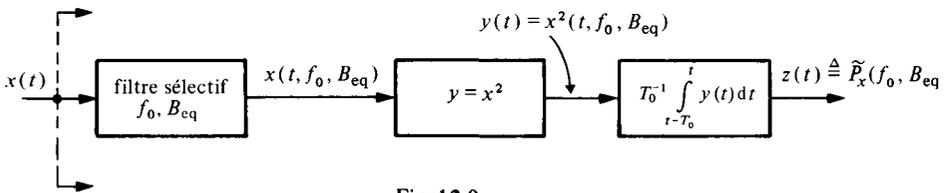


Fig. 12.9

Le signal de sortie  $z(t)$  correspond à l'estimation  $\tilde{P}_x(f_0, B_{eq})$  de la puissance du signal filtré. L'estimation de la densité spectrale de puissance bilatérale  $\tilde{\Phi}_x(f_0)$  s'en déduit en divisant par  $2B_{eq}$  [ou par  $B_{eq}$  si l'on désire la densité spectrale unilatérale  $\tilde{\Phi}_x^+(f_0)$ ].

Compte tenu de la largeur de bande réduite du filtre d'analyse, il est raisonnable (§ 8.2.14) de représenter approximativement la statistique du signal filtré  $x(t, f_0, B_{eq})$  par une loi gaussienne, de valeur moyenne nulle et variance (alias puissance)  $\sigma_x^2$ . On admettra, de plus, que la densité spectrale  $\Phi_x(f)$  est approximativement constante dans l'étroit domaine  $f_0 - \frac{1}{2}B_{eq} < |f| < f_0 + \frac{1}{2}B_{eq}$ . Ainsi  $\sigma_x^2 \equiv P_x(f_0, B_{eq}) = 2B_{eq}\Phi_x(f_0)$ .

L'estimation de puissance effectuée par le schéma de la figure (12.9) est liée à la valeur théorique  $P_x(f_0, B_{eq})$  par la relation

$$z(t) \hat{=} \tilde{P}_x(f_0, B_{eq}) = P_x(f_0, B_{eq}) + \epsilon(t) \quad (12.12)$$

où  $\epsilon(t)$  représente ici l'erreur aléatoire de mesure. Cette erreur possède elle-même une valeur moyenne  $\mu_\epsilon$  et une variance  $\sigma_\epsilon^2$ . La valeur moyenne  $\mu_\epsilon$  est appelée le *biais* (erreur systématique) de la mesure. L'erreur quadratique moyenne est liée à  $\mu_\epsilon$  et  $\sigma_\epsilon$  par (14.53)

$$E[\epsilon^2] = \mu_\epsilon^2 + \sigma_\epsilon^2 \quad (12.13)$$

L'écart-type  $\sigma_\epsilon = \sigma_z$  caractérise l'ampleur de la dispersion des mesures par rapport à la valeur moyenne. Elle est souvent utilisée comme critère principal de la qualité de l'estimation, par exemple pour définir une sorte de rapport signal sur bruit de la mesure. *Ceci n'est valable que si le biais  $\mu_\epsilon$  est nul ou négligeable.*

De (12.12), on déduit que le biais est donné par la différence

$$\mu_\epsilon = P_x(f_0, B_{eq}) - \mu_z \quad (12.14)$$

Dans le cas du schéma de la figure 12.9, l'estimation (12.12) peut s'écrire sous la forme

$$z(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t x^2(t, f_0, B_{eq}) dt \quad (12.15)$$

Cet estimateur est *non biaisé*, car

$$\begin{aligned} \mu_z = E[z] &= \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t E[x^2(t, f_0, B_{eq})] dt = \sigma_x^2 \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0}^t dt \\ &= \sigma_x^2 \equiv P_x(f_0, B_{eq}) \end{aligned} \quad (12.16)$$

d'où  $\mu_\epsilon = 0$ .

La variance  $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_z^2$  peut être déterminée en utilisant les résultats des paragraphes 8.2.19 et 8.4.16. Le spectre du signal de sortie  $y(t)$  du quadrateur est identique à celui représenté sur la figure 8.54 avec la correspondance  $\eta B = \sigma_x^2$ . Par (8.44)

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma_z^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_y(f) - \mu_y^2 \delta(f)] \text{sinc}^2(T_0 f) df \quad (12.17)$$

avec ici

$$\Phi_y(f) - \mu_y^2 \delta(f) = \frac{\sigma_x^4}{B_{eq}} \left[ \text{tri}\left(\frac{f}{B_{eq}}\right) + \frac{1}{2} \text{tri}\left(\frac{f+f_0}{B_{eq}}\right) + \frac{1}{2} \text{tri}\left(\frac{f-f_0}{B_{eq}}\right) \right] \quad (12.18)$$

Pour  $B_{eq} T_0 < 1$  et  $f_0 \gg 1/T_0$ , l'intégrand de (12.17) est approximativement donné par

$$[\Phi_y(f) - \mu_y^2 \delta(f)] \text{sinc}^2(T_0 f) \approx (\sigma_x^4/B_{eq}) \text{tri}(f/B_{eq}) \quad (12.19)$$

d'où une variance de la mesure indépendante de  $B_{eq}$  et de la durée d'intégration  $T_0$  :

$$\sigma_\epsilon^2 \approx \sigma_x^4 \quad (12.20)$$

La loi statistique des fluctuations est facilement établie en observant que, d'après (7.86), le signal filtré peut s'exprimer en fonction de ses composantes de basse-fréquence en phase et en quadrature

$$x(t, f_0, B_{eq}) = a(t) \cos(2\pi f_0 t) - b(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (12.21)$$

En vertu des hypothèses faites (§ 7.4.6),  $a(t)$  et  $b(t)$  sont des variables gaussiennes indépendantes, à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_x^2$ . Le signal de sortie du quadra-

teur est

$$y(t) = x^2(t, f_0, B_{\text{eq}}) = a^2(t) \cos^2(2\pi f_0 t) + b^2(t) \sin^2(2\pi f_0 t) - 2a(t)b(t) \cos(2\pi f_0 t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (12.22)$$

Pour  $B_{\text{eq}} T_0 < 1$  et  $f_0 \gg 1/T_0$ , le moyennneur filtre les contributions spectrales voisines de  $2f_0$  et conserve le terme

$$z(t) = \frac{1}{2} [a^2(t) + b^2(t)] \quad (12.23)$$

Par (14.115), la variable aléatoire  $z = \tilde{P}_x(f_0, B_{\text{eq}})$  est distribuée selon une loi en  $\chi_m^2$  à  $m = 2$  degrés de liberté (loi exponentielle : fig. 12.10) :

$$p_z(z) = \sigma_z^{-1} \exp(-z/\sigma_z) \approx \sigma_x^{-2} \exp(-z/\sigma_x^2) \quad (12.24)$$

pour  $z \geq 0$ , avec  $\mu_z = \sigma_z = \sigma_x^2$ .

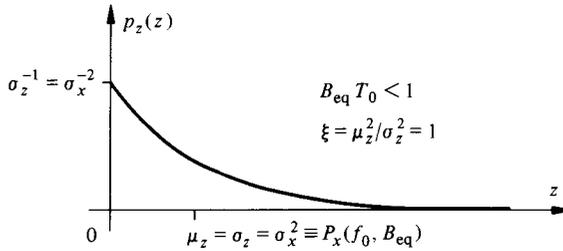


Fig. 12.10

L'écart-type des fluctuations est ici égal à la puissance à estimer ! Le rapport signal sur bruit de la mesure vaut  $\xi = \mu_z^2 / \sigma_z^2 = 1$  (0 dB). Cette situation est pratiquement inacceptable. Pour réduire la variance, il faut augmenter le produit largeur de bande équivalente fois durée d'intégration.

Pour  $B_{\text{eq}} T_0 \gg 1$ , l'expression (12.17) se ramène à

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma_z^2 \approx \frac{\sigma_x^4}{B_{\text{eq}}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(T_0 f) df = \frac{\sigma_x^4}{B_{\text{eq}} T_0} \quad (12.25)$$

Comme  $\mu_z = P_x(f_0, B_{\text{eq}}) = \sigma_x^2$ , le rapport signal sur bruit de la mesure devient

$$\xi = \mu_z^2 / \sigma_z^2 = B_{\text{eq}} T_0 \quad (12.26)$$

En raison du filtrage passe-bas sévère imposé par le moyennneur pour  $T_0 \gg B_{\text{eq}}^{-1}$ , l'estimation  $z(t)$  possède maintenant une distribution approximativement gaussienne (fig. 12.11)

$$p_z(z) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_z}} \exp\left[-\frac{(z - \mu_z)^2}{2\sigma_z^2}\right] \quad (12.27)$$

avec  $\mu_z = \sigma_x^2 = P_x(f_0, B_{\text{eq}})$  et  $\sigma_z = \sigma_x^2 / \sqrt{\xi} = \mu_z / \sqrt{\xi}$ . Ces résultats sont en accord avec l'expérience [121]. La table de la section 15.8 permet d'interpréter (12.27) en disant, par exemple, que la valeur théorique  $\mu_z$  cherchée a environ 95% de chance de se situer entre  $\pm 2\sigma_z$  de la valeur estimée  $z$  (*intervalle de confiance*). Pour un intervalle de confiance à 95% inférieur à 20% de la valeur moyenne cherchée, il faut un rapport  $\xi > 400$  (26 dB).

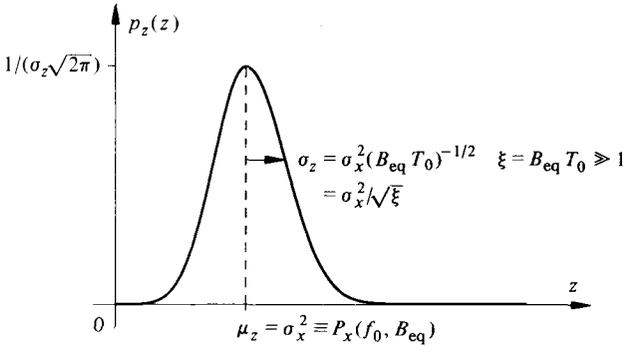


Fig. 12.11

### 12.1.9 Fluctuations statistiques de l'estimation spectrale d'un analyseur numérique

Considérons le cas de l'estimation numérique du périodogramme selon le schéma de la figure 12.1.

$$\tilde{\Phi}_x(n) = \frac{1}{N} |X(n)|^2 = \frac{1}{N} [A_x^2(n) + B_x^2(n)] \quad (12.28)$$

où  $X(n) = A_x(n) + jB_x(n)$ . Le périodogramme  $\tilde{\Phi}_x(n)$  est théoriquement à nouveau une variable aléatoire distribuée selon une loi en  $\chi_m^2$  à  $m = 2$  degrés de liberté si le signal analysé est gaussien. En effet, les parties réelles  $A_x(n)$  et imaginaire  $B_x(n)$  de la transformée de Fourier  $X(n)$  d'un processus gaussien sont des variables gaussiennes indépendantes (transformation linéaire et condition d'orthogonalité). La densité de probabilité est donc semblable à (12.24)

$$p_{\Phi}(\tilde{\Phi}_x) = \Phi_x^{-1}(n) \exp[-\tilde{\Phi}_x(n)/\Phi_x(n)] \quad (12.29)$$

pour  $\tilde{\Phi}_x(n) \geq 0$ , avec  $\mu_{\Phi} = \sigma_{\Phi} = \Phi_x(n)$ .

La variance de cet estimateur est à nouveau prohibitive en pratique. Pour la réduire, on dispose de deux moyens:

- calculer la moyenne arithmétique de  $\tilde{\Phi}_x(n)$  à partir de  $K$  estimations indépendantes (§ 13.1.24);
- lisser (filtrer) la suite des valeurs  $\tilde{\Phi}_x(n)$  au prix d'une diminution de la résolution et de l'introduction d'un biais éventuel (§ 12.1.12).

Dans le premier cas, la variance des fluctuations statistiques décroît, selon (13.82), avec le nombre  $K$  des mesures indépendantes et le rapport signal sur bruit  $\xi$  est simplement égal à  $K$ . Par (12.8), la résolution minimale est équivalente à  $1/T$ , où  $T$  est la durée d'observation nécessaire à une mesure spectrale. La durée totale d'observation (acquisition) nécessaire pour  $K$  mesures indépendantes vaut donc  $T_0 = KT$ , d'où finalement

$$\xi = K = B_{\text{eq}} T_0 \quad (12.30)$$

qui est analogue à (12.26).

Par (14.115), l'estimation obtenue est distribuée selon une loi en  $\chi_m^2$  à  $m = 2K = 2B_{\text{eq}} T_0$  degrés de liberté (4.113) avec valeur moyenne  $m$  et variance  $2m$ . Celle-ci tend – en vertu du théorème de la limite centrale (§ 5.5.3) – vers une loi gaussienne semblable à (12.27) lorsque  $m \rightarrow \infty$ .

### 12.1.10 Comparaison

Les méthodes d'analyse directe par filtrage sélectif ou évaluation du périodogramme sont donc équivalentes au niveau des performances. Le critère de qualité de la mesure est dans les deux cas exprimé par le rapport signal sur bruit  $\xi = B_{\text{eq}} T_0$ .

Pour les analyseurs à filtre(s) sélectif(s), la résolution est fixée par la largeur de bande équivalente  $B_{\text{eq}}$  du filtre choisi. La durée d'intégration à prévoir est alors déterminée par le rapport signal sur bruit  $\xi$  désiré:  $T_0 = \xi/B_{\text{eq}}$ .

Dans les analyseurs multicanaux, tout le domaine spectral  $B_m$  est exploré en parallèle. Dans le cas d'une résolution constante, le nombre de canaux requis vaut  $N = B_m/B_{\text{eq}}$  et la durée d'intégration  $T_0$  représente aussi la durée totale d'observation nécessaire. Si la résolution n'est pas constante, la valeur de  $T_0$  minimale est fixée par le canal le plus sélectif (le rapport signal sur bruit de mesure est alors meilleur dans les autres canaux).

Les analyseurs à balayage explorent séquentiellement le domaine spectral  $B_m$ . Chaque mesure partielle requiert  $T_0$  secondes pour atteindre le rapport signal sur bruit désiré et la durée totale du balayage devient égale à  $T_b = (B_m/B_{\text{eq}}) T_0$ . Si l'analyseur comprend un dispositif d'enregistrement-recirculation (§ 10.5.2 et 12.3.6), la durée minimale d'observation du signal est encore  $T_0$ ; sinon elle vaut  $T_b$ .

L'analyse par transformation de Fourier discrète (TFD) et évaluation du périodogramme présente beaucoup d'analogie avec le cas de l'analyseur multicanal à résolution constante. Ceci pour autant que le nombre de valeurs discrètes  $\tilde{\Phi}_x^*(n)$ , avec  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , du périodogramme soit égal ou supérieur à  $B_m/B_{\text{eq}}$ . Le domaine spectral  $B_m$  exploré dépend ici directement de la cadence  $f_e$  à laquelle est échantillonné le signal temporel:  $B_m = \frac{1}{2} f_e$  (§ 12.2.3). Le rapport signal sur bruit est égal au nombre  $K$  des estimations spectrales indépendantes effectuées en principe séquentiellement sur le même signal (ergodisme). La résolution choisie fixe la durée  $T$  minimale requise pour chaque observation (acquisition) indépendante:  $T = B_{\text{eq}}^{-1}$  dans le cas d'une fenêtre de pondération temporelle uniforme. La durée totale d'observation nécessaire est alors de  $T_0 = KT = \xi/B_{\text{eq}}$ .

La discussion qui précède montre que, dans tous les cas, lorsque la durée du signal à analyser est limitée (ce qui fixe  $T_0$  ou  $T_b$ ), l'expérimentateur doit choisir un compromis acceptable entre résolution et rapport signal sur bruit.

Les paramètres expérimentaux ainsi définis sont des valeurs limites. L'utilisation de moyennes non parfaits, de fenêtres de pondération non uniforme (§ 12.1.6), d'estimations spectrales non indépendantes ou de procédés de lissage du spectre (§ 12.1.12) dégrade quelque peu ces résultats.

Une approximation fréquente du moyennage parfait (ex. 8.5.6 et § 13.1.24) est, en technique analogique, le filtre passe-bas  $RC$  du 1er ordre (§ 8.2.24). On montre que dans ce cas, le même rapport signal sur bruit de mesure est atteint en remplaçant dans (12.26)  $T_0$  par  $2RC$ . En raison de la réponse indicielle d'un tel filtre, une mesure effectuée après un temps d'établissement limité à  $T_0 = 2RC$  contient un biais de l'ordre de 14%. On recommande en pratique d'adopter un temps d'établissement minimum (alias durée d'observation)  $T_0' = 4RC$  réduisant le biais à moins de 2%.

### 12.1.11 Exemples

Considérons l'analyse spectrale d'un signal aléatoire de basse fréquence dont le spectre unilatéral s'étend de 0 à 20 kHz.

Pour une résolution de 100 Hz et un rapport signal sur bruit de mesure  $\xi = 100$  (20 db) conduisant à un intervalle de confiance à 95% de l'ordre de  $0,4 \mu_z$ , les paramètres expérimentaux sont les suivants :

- pour un analyseur à balayage :  $B_{eq} = 100$  Hz,  $T_0 = 1$  s et  $T_b = 200$  s ;
- pour un analyseur multicanal à banc de filtres :  $B_{eq} = 100$  Hz,  $N = 200$  canaux,  $T_0 = 1$  s ;
- pour un analyseur multicanal à transformation de Fourier numérique :  $f_e = 40$  kHz,  $N \geq 200$ ,  $T = 10$  ms,  $K = 100$  et  $T_0 = 1$  s.

Le lecteur extrapolera facilement ces résultats à d'autres conditions d'analyse.

### 12.1.12 Définition : lissage spectral

Le *lissage spectral* est une alternative au calcul de valeur moyenne (par intégration ou sommation pondérée) introduit au paragraphe 12.1.9 pour réduire la variance des fluctuations aléatoires de mesure. C'est un simple filtrage linéaire (le long de l'axe des fréquences) de la densité spectrale mesurée qui s'exprime par la convolution

$$\tilde{\Phi}_{xl}(f) = \tilde{\Phi}_x(f) * U(f) \quad (12.31)$$

où  $U(f)$  est une fenêtre spectrale jouant un rôle analogue à la réponse impulsionnelle d'un filtre. La relation (12.31) est semblable à la relation (12.3). On en déduit que :

- le lissage spectral est équivalent à la multiplication de la fonction d'autocorrélation du signal par une fonction de pondération  $u(\tau) = F^{-1}\{U(f)\}$  ;
- il introduit nécessairement une réduction de la résolution ( $B_{eq} \uparrow$ ) ;
- comme dans tout cas d'utilisation d'une largeur de bande  $B_{eq}$  trop grande, la réduction de la variance de l'erreur d'estimation se paie par un accroissement du risque de biais ( $\mu_e \neq 0$ ).

L'intérêt principal du lissage est de se prêter assez facilement à un traitement interactif dans lequel l'expérimentateur cherche par tâtonnement à choisir les paramètres d'analyse les plus favorables.

Pour une étude plus détaillée de ce problème, le lecteur consultera les références [65, 122].

En technique analogique, le lissage est réalisé par un simple filtrage passe-bas (filtre RC) de la fonction du temps  $\tilde{\Phi}_x(t)$  créée par le balayage. En technique numérique, on procède au calcul d'une *moyenne glissante pondérée*.

### 12.1.13 Remplacement de l'opérateur quadratique par une détection linéaire d'enveloppe

L'opération quadratique apparaissant dans les méthodes directes d'analyse spectrale limite en pratique la dynamique des mesures. Pour obtenir une dynamique plus grande, l'opérateur quadratique peut être remplacé par une détection linéaire d'enveloppe (fig. 11.23). Cette astuce introduit toutefois un biais calculable entre les mesures de composantes purement aléatoires et sinusoïdales.

Dans le cas d'une sinusoïde de valeur efficace  $\sigma_x$ , la valeur moyenne de l'enveloppe détectée est la valeur de crête  $\sqrt{2} \sigma_x$ .

En cas de composante purement aléatoire – gaussienne par hypothèse – de variance  $\sigma_x^2$ , la distribution de l'enveloppe est une loi de Rayleigh (§ 7.3.8) dont la valeur moyenne (14.111) vaut  $\sqrt{\pi/2}\sigma_x$ .

Le rapport entre ces deux valeurs est de  $2/\sqrt{\pi} = 1,128$  correspondant à environ 1 dB. Si l'analyseur est calibré pour des mesures de bruit, le niveau d'éventuelles raies spectrales dues à la présence de composantes sinusoïdales sera systématiquement affecté d'un biais positif de l'ordre de 1 dB.

#### 12.1.14 Affichage des mesures

Les résultats d'une analyse spectrale sont généralement affichés en mode X – Y (Y = mesure, X = fréquence) sur un écran calibré (oscilloscope, moniteur vidéo ou terminal graphique) ou enregistrés sur du papier gradué (traceur graphique).

Selon le principe de fonctionnement de l'analyseur, la mesure affichée est

- une puissance normalisée (étalonnage en  $V^2$ );
- une valeur efficace (étalonnage en V);
- une densité spectrale de puissance, généralement unilatérale (étalonnage en  $V^2/Hz$ );
- une densité spectrale en valeur efficace obtenue en calculant la racine carrée de la densité spectrale de puissance (étalonnage en  $V/\sqrt{Hz}$ ).

Les analyseurs à transformateur de Fourier offrent en principe aussi la possibilité de calculer et d'afficher le spectre de phase (étalonnage en degrés).

L'affichage en terme de puissance ou de densité spectrale de puissance est réservé au cas où la dynamique exigée est modeste ( $\sim 30$  dB). On préfère généralement un affichage en valeur efficace ou en densité spectrale de valeur efficace afin d'obtenir une dynamique améliorée (fig. 12.12).

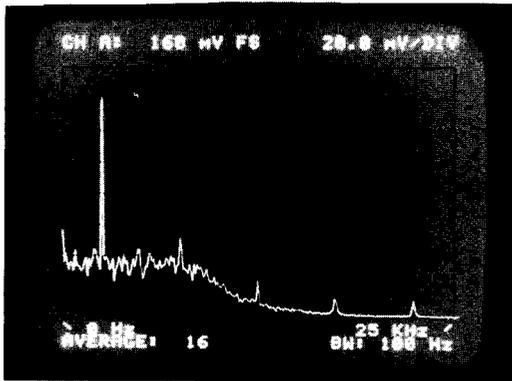


Fig. 12.12 Spectre d'un signal périodique bruité analysé entre 0 et 25 kHz avec une résolution de 100 Hz; l'affichage indique en ordonnée la valeur efficace mesurée selon une échelle linéaire (20 mV/division).

Si la dynamique doit être grande, ces mêmes mesures peuvent être affichées en échelle logarithmique (fig. 12.13) étalonnée linéairement en décibels (p. ex. échelle en dBV où  $OdBV \triangleq 1 V_{eff}$ .)

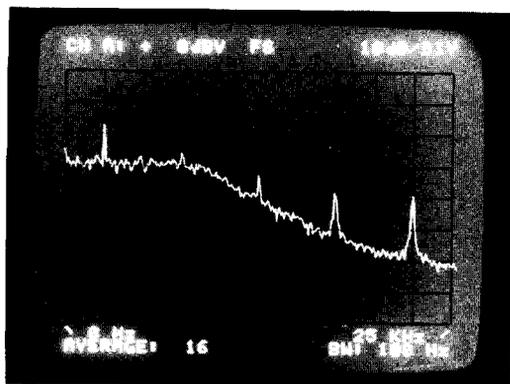


Fig. 12.13 Affichage logarithmique en ordonnée (10 dB/division) du spectre de la figure 12.12.

Des différences existent, selon la méthode d'analyse, dans la calibration des mesures de composantes purement aléatoire ou sinusoïdales.

Dans les analyseurs à filtre(s) de largeur de bande  $B_{eq}$ , on mesure et on affiche la puissance normalisée  $\tilde{P}_x(f_0, B_{eq})$  ou la valeur efficace  $\sqrt{\tilde{P}_x(f_0, B_{eq})}$ . On peut en déduire, par calcul, la densité spectrale de puissance unilatérale  $\tilde{\Phi}_x^+(f_0) = \tilde{P}_x(f_0, B_{eq})/B_{eq}$  ou la densité spectrale en valeur efficace  $\sqrt{\tilde{\Phi}_x^+(f_0)}$ . Dans le cas d'un spectre de raies, la puissance de chaque composante sinusoïdale est indépendante du choix de  $B_{eq}$  : le niveau reste donc constant quelque soit  $B_{eq}$ . Par contre, dans le cas d'un spectre continu, la puissance mesurée  $\tilde{P}_x(f, B_{eq}) = \tilde{\Phi}_x^+(f) B_{eq}$  est proportionnelle à  $B_{eq}$  : le niveau d'affichage varie en conséquence selon le choix de la largeur de bande équivalente (fig. 12.14).

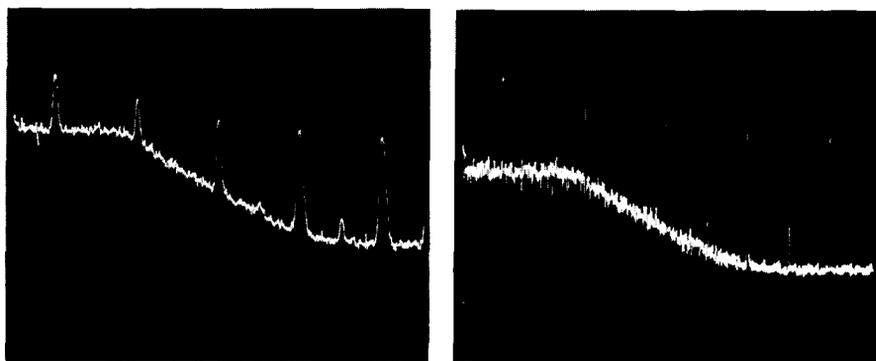


Fig. 12.14 Analyse spectrale analogique d'un signal périodique bruité pour deux largeurs de bande  $B_{eq}$  de 300 Hz (photo de gauche) et de 30 Hz (photo de droite); la calibration de l'échelle des fréquences (abscisse) est de 5 kHz/division et celle des amplitudes (ordonnée) est de 10 dB/division.

Un analyseur à transformateur de Fourier calcule en principe directement le périodogramme  $\tilde{\Phi}_x(f, T) = T^{-1} |X(f, T)|^2$  ou sa racine carrée. Comme indiqué au paragraphe 12.1.6, la largeur de bande équivalente est ici proportionnelle à  $1/T$ . Dans le cas

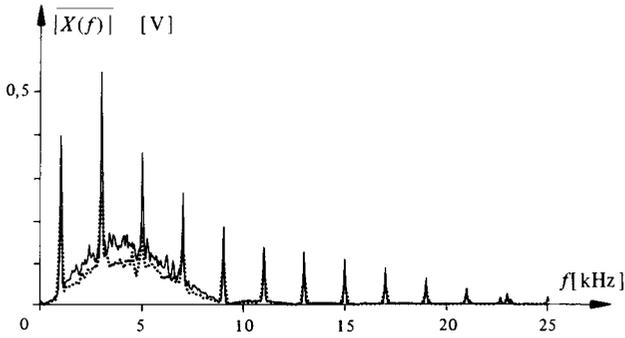


Fig. 12.15 Analyse spectrale numérique d'un signal périodique bruité pour deux durées d'observation  $T = NT_e$  de 1,024 ms ( $N = 512$  : trace en pointillé) et de 2,048 ms ( $N = 1024$  : trace continue).

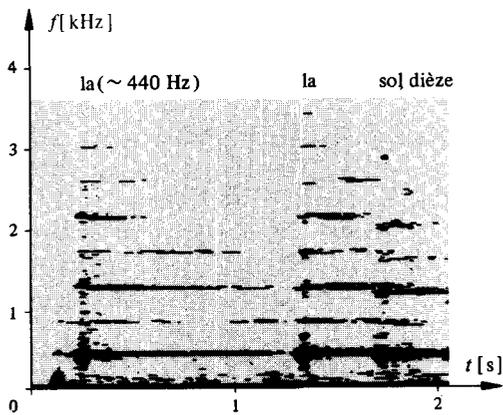


Fig. 12.16 Sonogramme de notes de piano : représentation graphique de l'évolution du spectre en fonction du temps ( $B_{eq} = 20$  Hz). L'amplitude des composantes spectrales mesurées est traduite en traces plus ou moins sombres; l'image ainsi formée met en évidence la structure spectro-temporelle des sons analysés.

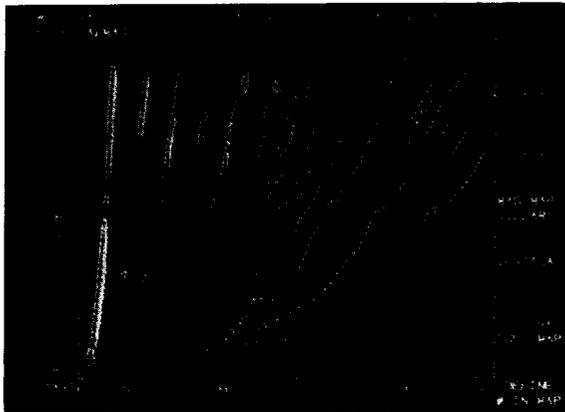


Fig. 12.17 Représentation en cascade (en anglais : waterfall) : la mémoire interne de l'analyseur permet de stocker et d'afficher une séquence d'estimations spectrales successives révélant l'évolution des composantes fréquentielles (en abscisse) en fonction du temps (en ordonnée).

d'un spectre continu, la densité spectrale ne dépend pas de la durée  $T$  du signal analysé et le niveau d'affichage est indépendant de la résolution choisie. Par contre, la transformée de Fourier  $X(f, T)$  d'une composante sinusoïdale vue au travers d'une fenêtre temporelle de durée  $T$  est proportionnelle à  $T$ . Le niveau d'affichage d'un spectre de raies varie donc avec la résolution sélectionnée (fig. 12.15). La mesure se rapproche du modèle théorique de raies décrites par des distributions de Dirac lorsque  $T \rightarrow \infty$ . Lorsque l'affichage utilise une échelle logarithmique (indications en dB), les raies mesurées sont simplement décalées verticalement de  $-10 \log B_{eq}$ .

Une pseudo-représentation à trois dimensions est utilisée en acoustique (fig. 12.16) ou dans d'autres situations où l'on désire mettre en évidence l'évolution spectrale d'un signal non stationnaire (fig. 12.17).

## 12.2 ANALYSEURS DE SPECTRE MULTICANAUX

### 12.2.1 Analyseurs à banc de filtres

Le principe le plus simple d'analyseur de spectre est celui représenté sur la figure 12.18.

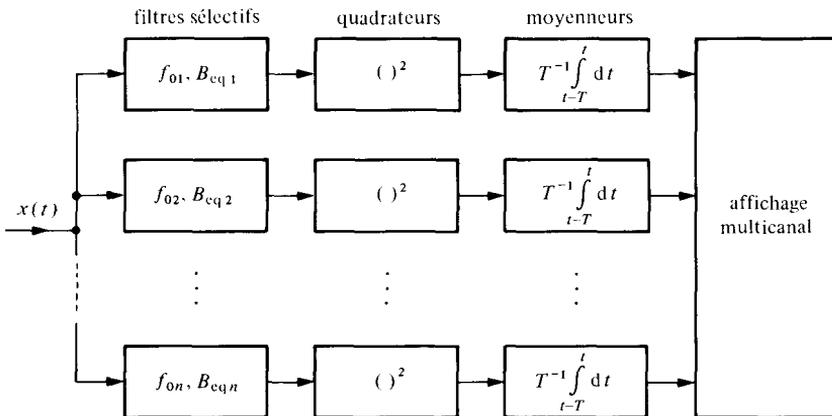


Fig. 12.18

Le signal à analyser est appliqué simultanément aux entrées d'un ensemble de filtres dont les bandes passantes sont contiguës, de manière à couvrir toute la plage spectrale requise. Chaque filtre permet, en principe, de mesurer la puissance – ou la valeur efficace – des composantes du signal comprises dans une bande de fréquence distincte (canal). Une superposition partielle résulte toutefois de la nature non idéale des réponses fréquentielles des filtres utilisés.

La résolution d'un tel analyseur est évidemment limitée par le nombre (quelques dizaines) de filtres disponibles et l'étendue de la plage de fréquence à analyser.

L'avantage principal de ce type d'appareil est de permettre une surveillance permanente de chaque canal. C'est la raison de son emploi pour certaines applications : analyse de phénomènes non stationnaires en géophysique, en acoustique : étude des vibrations mécaniques, etc. Son usage est essentiellement limité aux signaux de basse fréquence.

Les filtres ont longtemps été réalisés selon une technique classique analogique. La tendance actuelle est de recourir à des dispositifs intégrés traitant des signaux échantillonnés (circuits à transfert de charges ou à capacités commutées) ou de simuler le banc de filtres par voie numérique.

### 12.2.2 Résolution variable

L'analyseur à banc de filtres possède une résolution variable si les largeurs de bande équivalente ne sont pas identiques. Ceci permet de surveiller une plage de fréquence assez étendue avec un ensemble réduit de filtres. Cette solution est surtout employée en acoustique (vol. XXI).

La répartition des fréquences centrales  $f_{0i}$  et des largeurs de bande équivalentes  $B_{eqi}$  est généralement de type exponentielle

$$f_{0(i+1)} = 2^n \cdot f_{0i}; \quad B_{eq(i+1)} = 2^n \cdot B_{eqi} \quad (12.32)$$

La fréquence centrale est ici définie par la moyenne géométrique des fréquences de coupures (par exemple à  $-3$  dB) inférieure et supérieure  $f_1$  et  $f_2$

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} \quad (12.33)$$

Pour  $n = \frac{1}{3}$ , on obtient l'analyse courante par  $\frac{1}{3}$  d'octave (fig. 12.19). Le regroupement en parallèle des filtres trois par trois (fig. 12.20) permet de passer facilement à une analyse par octave entière ( $n = 1$ ). Les gabarits d'atténuation des filtres d'octave et de  $1/3$  d'octave (fig. 12.21) sont normalisés (CEI = Commission Electrotechnique Internationale, ANSI = American National Standards Institute). Une solution modulaire à la simulation numérique des filtres en tiers d'octave est décrite dans [123].

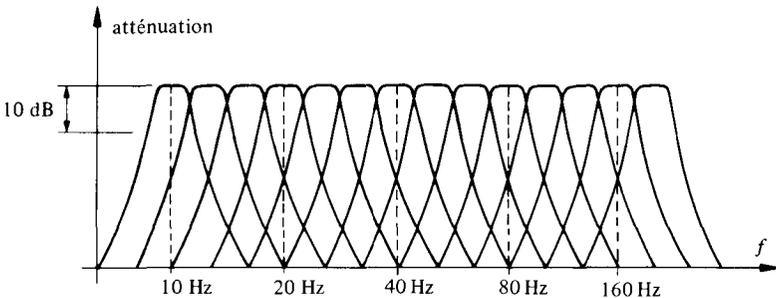


Fig. 12.19

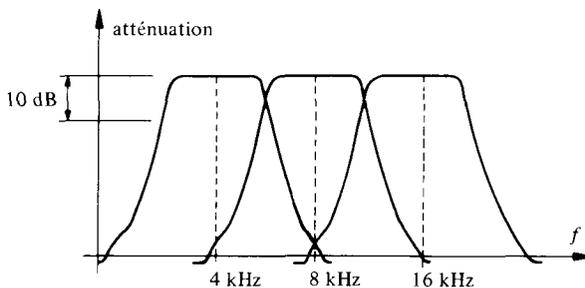


Fig. 12.20

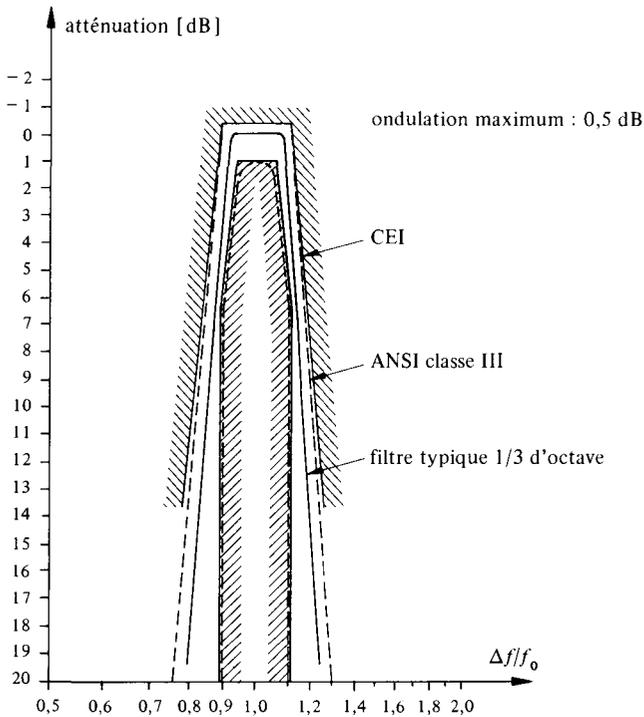


Fig. 12.21

### 12.2.3 Analyseurs multicanaux à transformateur de Fourier numérique

La mise au point d'algorithmes rapides de calcul de la transformation de Fourier discrète (§ 9.3.11) et l'évolution du matériel électronique numérique ont conduit à la réalisation d'analyseurs de signaux utilisés, entre autre, comme analyseurs de spectre multicanaux (fig. 12.22).

La résolution potentielle est assez élevée, car le nombre de canaux équivalents est généralement de l'ordre de plusieurs centaines, voir plusieurs milliers (ce qui conduit les fabricants à parler d'analyseurs à haute résolution). La résolution effective dépend

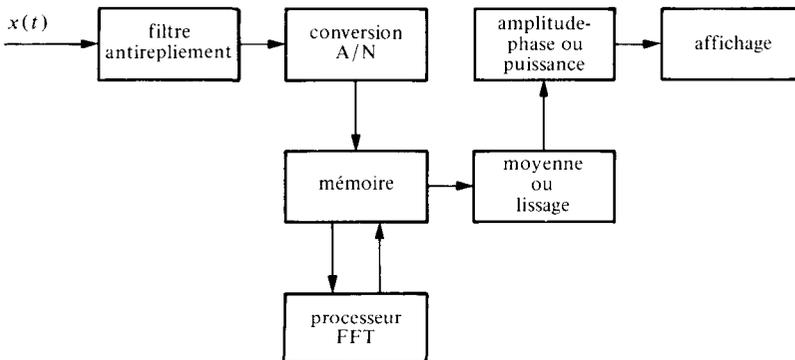


Fig. 12.22

toutefois aussi de la fenêtre temporelle de pondération et de l'éventuelle fonction de lissage spectral utilisées (§ 12.1.5 et 12.1.12).

Une combinaison pondérée des canaux permet de synthétiser une analyse par bande d'octave ou tiers d'octave (§ 12.2.2).

Le fonctionnement de ces dispositifs est séquentiel : il comprend une opération initiale d'acquisition (échantillonnage, conversion A/N, stockage) d'un tronçon du signal, suivie d'un ensemble d'opérations de calcul : transformée de Fourier rapide (FFT = Fast Fourier Transform), moyenne de spectres successifs ou lissage spectral, évaluation de coordonnées polaires (spectres d'amplitude et de phase ou spectre de puissance), affichage, etc.

Un traitement de type *temps réel* est réalisé lorsque l'ensemble de ces opérations est effectué dans un laps de temps inférieur à celui de l'acquisition. En raison des contraintes d'échantillonnage (sect. 9.3) et de temps de calcul, le traitement en temps réel est limité à des signaux d'assez basse fréquence. Avec des cadences d'échantillonnage plus élevées, le traitement devient discontinu : les tronçons du signal successivement enregistrés et analysés ne sont plus jointifs.

Le nombre  $N$  d'échantillons mémorisés pendant la phase d'acquisition d'un tronçon du signal dépend de l'algorithme de calcul de la transformée de Fourier discrète (TFD) utilisé. C'est en général une puissance de 2. Les algorithmes rapides décrits dans le volume XX (sect. XX.4.6) tirent parti des nombreuses redondances et symétries de calcul de la TFD. Ils réduisent ainsi le nombre d'opérations de base (additions plus multiplications complexes) de  $N^2$  à un ordre de grandeur correspondant à  $N \log N$ . Le gain réalisé est ainsi d'environ 100 pour  $N = 2^{10} = 1024$ .

Ce traitement numérique a certaine conséquence. Si  $T_e = 1/f_e$  est le pas d'échantillonnage temporel choisi, la durée d'observation vaut  $T = NT_e$ . La TFD calculée est elle-même représentée par une suite de  $N$  échantillons complexes dont le pas fréquentiel est  $\Delta f = 1/T$ . L'échantillonnage temporel a pour effet de rendre le spectre périodique (§ 9.2.2), de périodicité  $f_e$ . En principe, seule la demi période principale couvrant une plage fréquentielle allant de 0 à  $\frac{1}{2} f_e$  est affichée (spectre unilatéral) en tout ou partie. En vertu du théorème réciproque (§ 9.3.10), ce spectre échantillonné correspond à celui d'une répétition périodique du segment de  $N$  échantillons prélevés.

Les conditions expérimentales d'analyse dépendent donc directement du choix de la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  et du nombre  $N$  d'échantillons mémorisés. La fréquence  $f_e$  fixe la plage analysée. Elle doit respecter le théorème d'échantillonnage (9.25) pour éviter les erreurs dues à un recouvrement spectral. Le nombre  $N$  détermine alors à la fois la plus basse fréquence analysée et la résolution limite donnée par (12.8)

$$\Delta f = B_{eq} = 1/T = f_e/N \quad (12.34)$$

Une pré-multiplication numérique du signal à analyser avec une fonction cosinus-oidale, accompagnée d'un filtrage passe-bas et d'un ré-échantillonnage, est parfois utilisée pour obtenir un décalage spectral (changement de fréquence : § 11.5.1) et un effet de loupe (zoom).

Par l'intermédiaire du calcul de la transformée de Fourier effectué sur un ou deux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$ , il est possible d'évaluer par (4.65), (5.168) et (5.178), d'autres relations importantes : densité spectrale  $\Phi_x(f)$  et densité spectrale mutuelle  $\Phi_{xy}(f)$ , fonctions d'auto- et d'intercorrélation  $\varphi_x(\tau) = F^{-1}\{\Phi_x(f)\}$  et  $\varphi_{xy}(\tau) = F^{-1}\{\Phi_{xy}(f)\}$ , fonction de cohérence  $\Gamma_{xy}(f) = |\Phi_{xy}(f)|^2 / [\Phi_x(f)\Phi_y(f)]$ , fonction de transfert

$G(f) = Y(f)/X(f)$ , etc. Les analyseurs numériques se prêtent donc généralement à une plus grande variété d'emplois que les analyseurs de spectre conventionnels.

### 12.2.4 Transformation de Fourier discrète avec modulation linéaire de fréquence.

#### Définitions

En posant  $2nk = n^2 + k^2 - (n-k)^2$  dans (9.49), la transformée de Fourier discrète peut se mettre sous les formes équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned} X(n) &= \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k) \exp(-j2\pi nk/N) \\ &= \exp(-j\pi n^2/N) \left\{ \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k) \exp(-j\pi k^2/N) \cdot \exp[j\pi(n-k)^2/N] \right\} \end{aligned} \quad (12.35)$$

La seconde forme porte, en anglais, le nom de *chirp-z transform* (CZT). Le mot *chirp* (= gazouillis) fait partie du jargon des radaristes pour désigner une impulsion sinusoïdale modulée linéairement en fréquence. L'expression complexe et échantillonnée d'un tel signal est du type  $\exp(j\pi k^2/N)$ .

L'interprétation de (12.35) est simple : la transformée de Fourier discrète peut être évaluée par un système effectuant les opérations successives suivantes :

- pré-multiplication du signal  $x(k)$  par une exponentielle complexe modulée linéairement en fréquence  $\exp(-j\pi k^2/N)$ ;
- convolution discrète (8.13) du résultat avec une exponentielle complexe  $\exp(j\pi k^2/N)$  ayant une modulation linéaire de fréquence de signe contraire;
- post-multiplication par une exponentielle complexe modulée linéairement en fréquence  $\exp(-j\pi n^2/N)$ .

La convolution discrète correspond à un filtrage linéaire par un filtre transversal de réponse impulsionnelle complexe  $g(k) = \exp(j\pi k^2/N)$ , conduisant au schéma-bloc de la figure 12.23. Lorsque seule la densité spectrale de puissance est requise, la post-multiplication n'est pas nécessaire.

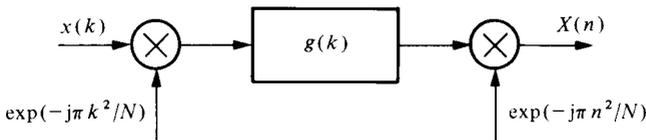


Fig. 12.23

Une telle structure se prête tout particulièrement à une réalisation intégrée en technologie des circuits à transfert de charge (CCD [124]) ou à ondes acoustiques de surface (SAW [125]). Ces dispositifs sont utilisés pour des applications spécifiques en instrumentation, en télécommunications et en radar. Leurs gammes de fonctionnement sont assez distinctes : de quelques kilohertz à quelques mégahertz pour les CCD, de quelques mégahertz à plusieurs centaines de mégahertz pour les SAW [126].

### 12.2.5 Analyseur de spectre optique

Une lentille optique travaillant en lumière cohérente est un transformateur de Fourier bidimensionnel [127]. Le principe de cette transformation est illustré par la figure 1.21. En plaçant dans le plan focal de la lentille un capteur photo-électrique constitué d'un réseau de  $N$  photorécepteurs ayant une réponse quadratique, on mesure simultanément  $N$  valeurs de la densité spectrale de la fonction de transmittance placée dans le plan focal frontal de la lentille.

La traduction d'un signal électrique à analyser en une image à transmittance variable est réalisée par voie photographique lorsque le traitement en temps réel n'est pas recherché. Toutefois, l'intérêt de ce genre de dispositif est précisément son fonctionnement parallèle naturel et ses potentialités pour le traitement en temps réel.

Divers modulateurs électro-optiques assurant la conversion directe tension électrique – transmittance optique ont été développés [67]. L'approche la plus prometteuse est celle de l'optique intégrée qui incorpore dans un circuit monolithique de quelques centimètres (fig. 12.24) un laser à semiconducteurs, deux lentilles géodésiques séparées par un transducteur (acousto-optique ou électro-optique) déviant le faisceau optique d'un angle dépendant de la fréquence du signal appliqué et, finalement, un réseau linéaire de détecteurs photo-électriques. Ce type d'analyseur est réservé à des signaux de haute fréquence ( $\geq 1$  MHz).

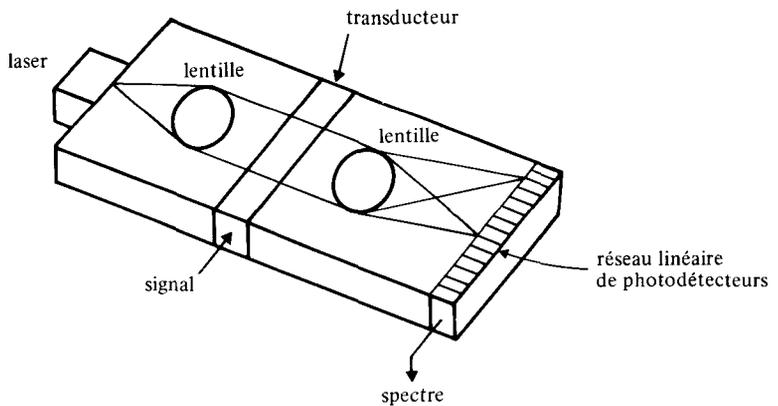


Fig. 12.24

## 12.3 ANALYSEURS DE SPECTRE À BALAYAGE

### 12.3.1 Principe général des analyseurs à changement de fréquence

Les analyseurs de spectre à balayage exploitent le changement de fréquence décrit à la section 11.5 pour transposer le spectre du signal à analyser et le faire défiler progressivement devant un unique filtre sélectif. La figure 12.25 en donne le schéma de principe.

Le signal d'entrée  $x(t)$  est multiplié par un signal auxiliaire sinusoïdal (ou une onde carrée) de fréquence  $f_p$ . Cette fréquence est asservie à la tension fournie par un générateur de balayage et varie entre deux limites qui fixent le domaine spectral analysé. Le spectre du signal d'entrée est ainsi transposé en fréquence de la quantité  $f_p$ . Le signal résultant de la multiplication est appliqué à l'entrée d'un filtre, de réponse fréquentielle

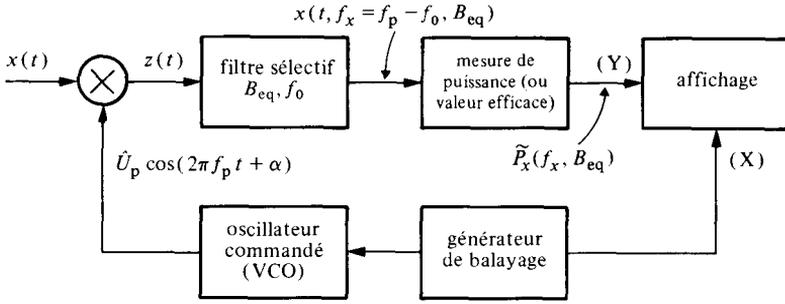


Fig. 12.25

$G(f)$ , dont la bande passante étroite est centrée sur une fréquence fixe  $f_0$ . Sa largeur de bande équivalente  $B_{eq}$  détermine la résolution d'analyse. Les appareils de ce type offrent généralement plusieurs largeurs de bande à choix. Le signal filtré est enfin appliqué à un circuit mesurant sa puissance moyenne (ou sa valeur efficace). Le résultat commande, selon une loi linéaire ou logarithmique (mesure en dB), le déplacement vertical (Y) du spot d'un écran d'affichage. La tension produite par le générateur de balayage est en principe en forme de dents de scie. Elle assure à la fois la commande de la fréquence variable  $f_p$  de l'oscillateur et le balayage horizontal (X) de l'écran d'affichage.

Si  $\Phi_x(f)$  est le spectre du signal d'entrée, à la multiplication  $z(t) = x(t) \hat{U}_p \cos(2\pi f_p t + \alpha)$  correspond, par (5.199) et (4.144)

$$\Phi_z(f) = k^2 [\Phi_x(f + f_p) + \Phi_x(f - f_p)] \quad (12.36)$$

où  $k = \hat{U}_p/2$  est un paramètre arbitraire de calibration qu'il convient de poser ici égal à l'unité.

En supposant  $f_0 < f_p$ , le signal de sortie du filtre peut se noter  $x(t, f_x = f_p - f_0, B_{eq})$ . Il correspond à la part du signal  $x(t)$  dont le spectre unilatéral est réduit à une bande de largeur  $B_{eq}$  centrée sur la fréquence  $f_x = f_p - f_0$  (fig. 12.26). La puissance mesurée est égale à  $\tilde{P}_x(f_x, B_{eq})$ .

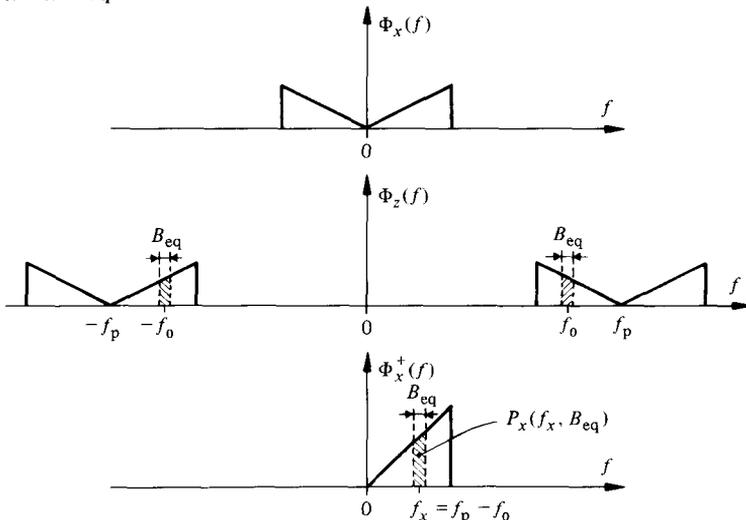


Fig. 12.26

L'estimation de la densité spectrale bilatérale du signal  $x(t)$  à la fréquence  $f_x = f_p - f_0$  est obtenue en divisant la puissance mesurée par  $2B_{eq}$

$$\tilde{\Phi}_x(f_x) = \frac{1}{2} \tilde{P}_x(f_x, B_{eq}) / B_{eq} \tag{12.37}$$

En faisant glisser progressivement la fréquence  $f_p$  de l'oscillateur de  $f_0$  à  $f_0 + f_m$ , on explore séquentiellement tout le spectre du signal  $x(t)$  contenu entre  $f_x = 0$  et la fréquence maximum  $f_x = f_m$ .

Si la commande de l'oscillateur permet à la fréquence  $f_p$  de devenir inférieure à  $f_0$ , l'analyseur explore également la partie symétrique du spectre bilatéral  $\Phi_x(f)$ , théoriquement située aux fréquences  $f_x = f_p - f_0$  négatives!

L'origine correspondant à  $f_x = 0$  est généralement repérée sur l'affichage par une pseudo-raie spectrale créée (cf. § 12.3.3) en ajoutant au signal  $x(t)$ , dont la composante continue éventuelle a été préalablement éliminée par un filtrage passe-haut, une composante continue artificielle, mais calibrée.

### 12.3.2 Relation entre spectre théorique et spectre mesuré

La puissance mesurée  $\tilde{P}_x(f_x, B_{eq}) = 2\tilde{\Phi}_x(f)B_{eq}$  est identique à celle que l'on obtiendrait en filtrant directement le signal  $x(t)$  à l'aide d'un filtre sélectif analogue à  $G(f)$ , mais dont la largeur de bande équivalente  $B_{eq}$  est centrée sur la fréquence  $f_x$ .

La puissance étant l'intégrale de la densité spectrale de puissance, la mesure (12.37) peut aussi s'exprimer, en tenant compte de (8.24), par le produit de convolution fréquentiel

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_x(f_x) &= \frac{1}{B_{eq}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) |H(f_x - f)|^2 df \\ &= B_{eq}^{-1} \Phi_x(f_x) * \dot{\Phi}_h(f_x) \end{aligned} \tag{12.38}$$

où  $\dot{\Phi}_h(f) = |H(f)|^2 \hat{=} |G(f + f_0)|^2 \epsilon(f + f_0)$  est une fonction de filtrage obtenue par la translation d'une quantité  $f_0$  du module carré de la réponse fréquentielle  $G(f)$  définie pour  $f > 0$  (fig. 12.27).

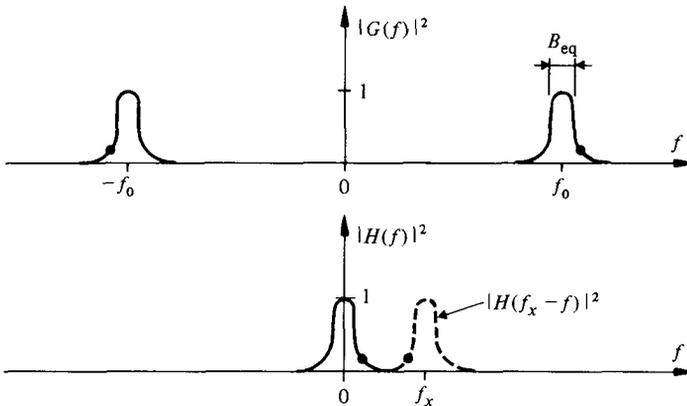


Fig. 12.27

La convolution (12.38) est analogue à (12.3), établie sous l'hypothèse d'une multiplication du signal à analyser par une fonction de pondération temporelle  $u(t)$ . Il en découle une limitation analogue de la résolution dont le paragraphe suivant donne une illustration.

### 12.3.3 Exemple : cas d'un spectre de raies

Toute raie d'un spectre théorique, représentée par une distribution de Dirac à la fréquence  $f_*$ , est transformée par la convolution (12.38) et la propriété (1.48) en une fonction continue proportionnelle à  $\mathring{\Phi}_h(f-f_*)$ .

Des raies spectrales sont uniquement associées à la présence d'une composante continue ou de composantes sinusoïdales. Dans ce cas, le signal peut s'écrire sous la forme

$$x(t) = \bar{x} + \sum_k A_k \sin(2\pi f_k t + \alpha_k) \quad (12.39)$$

et sa densité spectrale de puissance vaut, par (4.154)

$$\Phi_x(f) = \bar{x}^2 \delta(f) + \sum_k \frac{1}{4} A_k^2 [\delta(f+f_k) + \delta(f-f_k)] \quad (12.40)$$

Par (12.38), la densité spectrale mesurée devient (fig. 12.28)

$$\tilde{\Phi}_x(f_x) = B_{eq}^{-1} \left\{ \bar{x}^2 \mathring{\Phi}_h(f_x) + \sum_k \frac{1}{4} A_k^2 [\mathring{\Phi}_h(f_x + f_k) + \mathring{\Phi}_h(f_x - f_k)] \right\} \quad (12.41)$$

La résolution est donc directement déterminée par la largeur de bande équivalente  $B_{eq}$  du filtre d'analyse.

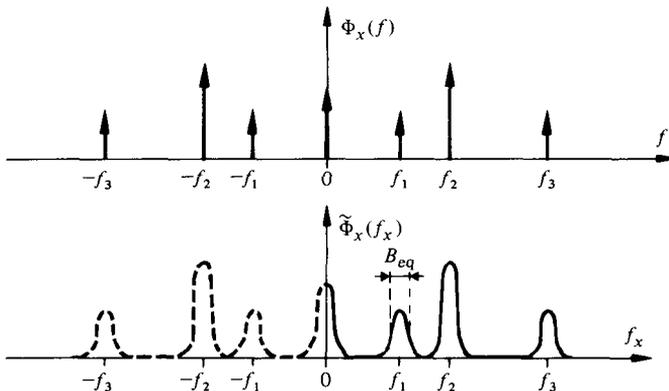


Fig. 12.28

### 12.3.4 Compromis précision-résolution-vitesse de balayage

La vitesse de balayage  $\nu_b$ , mesurée en Hz/s, ne peut pas être quelconque. Elle doit être impérieusement inférieure ou égale à une limite dépendant de la résolution choisie — donc de la largeur de bande  $B_{eq}$  du filtre d'analyse — et de la durée de mesure  $T$  du moyenneur utilisé pour l'estimation de la puissance  $\tilde{P}_x(f_x, B_{eq})$ .

Pour avoir une réponse correcte de l'analyseur à toute discontinuité du spectre  $\Phi_x(f)$ , il faut que le motif spectral correspondant au spectre transposé  $\Phi_z(f)$  se déplace en fréquence d'une valeur inférieure ou égale à  $B_{eq}$  pendant l'intervalle équivalent de mesure  $T$ :

$$\nu_b \leq B_{eq}/T \quad \text{Hz/s} \quad (12.42)$$

Mais  $T$  est également lié au rapport signal sur bruit  $\xi$  de la mesure (§ 12.1.8). Pour un moyennneur parfait,  $T = T_0$  représente la durée totale d'intégration et, par (12.26),  $\xi = B_{eq} T_0$ . Dans le cas, plus usuel en pratique, d'un moyennneur à pondération exponentielle de constante de temps  $\tau$  (par exemple: filtre passe-bas  $RC$ ), le même rapport signal sur bruit  $\xi$  est atteint avec une constante de temps  $\tau = T_0/2$ .

Mais l'erreur systématique (biais) introduite par le terme transitoire de la réponse temporelle du filtre n'est réduite à une valeur acceptable ( $< 2\%$ ) que pour  $T \geq 4\tau = 2T_0$ .

La condition (12.42) peut alors s'exprimer directement en fonction de la résolution et du rapport signal sur bruit désiré par

$$\nu_b \leq \alpha B_{eq}^2/\xi \quad (12.43)$$

où  $\alpha = 1$  pour un moyennneur parfait et  $\alpha = \frac{1}{2}$  pour un moyennneur à pondération exponentielle.

Une autre restriction est liée au temps de montée  $t_m$  du filtre passe-bande d'analyse. Celui-ci est environ égal à l'inverse de sa largeur de bande équivalente (§ 8.2.22). On obtient alors

$$\nu_b \leq B_{eq}/t_m \cong B_{eq}^2 \quad (12.44)$$

En combinant (12.43) et (12.44) on a la double condition

$$\nu_b \leq \alpha B_{eq}^2/\xi \leq B_{eq}^2 \quad (12.45)$$

La première restriction est pratiquement toujours la plus contraignante, car le rapport signal sur bruit désiré est en principe largement supérieur à l'unité.

La durée totale de balayage d'une plage spectrale  $B_m$  est ainsi donnée par

$$T_b = B_m/\nu_b \geq \xi B_m/(\alpha B_{eq}^2) \quad (12.46)$$

### 12.3.5 Exemples

L'analyse par balayage d'une plage spectrale  $B_m$  égale à 1 kHz avec une résolution  $B_{eq} = 10$  Hz et un rapport signal sur bruit de mesure  $\xi = 100$  requiert une vitesse de balayage  $\nu_b \leq 1$  Hz/s dans le cas d'un moyennneur parfait et  $\nu_b \leq 0,5$  Hz/s dans le cas d'un moyennneur à pondération exponentielle (biais inférieur à 2%). Les durées totales de balayage sont respectivement données par  $T_b \geq 1000$  s  $\cong 17$  minutes et  $T_b \geq 2000$  s  $\cong 33$  minutes!

Dans les mêmes conditions de rapport signal sur bruit, et de biais, le balayage d'une plage de 100 MHz, avec une résolution de 1 MHz, exige une vitesse de balayage  $\nu_b \leq 5$  GHz/s avec un moyennneur à pondération exponentielle, d'où une durée totale de balayage  $T_b \geq 20$  ms.

Ainsi, à résolution relative  $B_{eq}/B_m$  égale, l'analyseur à balayage se révèle mieux adapté au domaine des hautes fréquences qu'à celui des basses fréquences.

### 12.3.6 Procédure de recirculation

Pour palier la limitation de vitesse de balayage imposée aux analyseurs destinés à des signaux de relativement basse fréquence, le principe d'enregistrement et recirculation numérique décrit au paragraphe 10.5.2 peut être utilisé en amont de l'analyseur proprement dit (fig. 12.29).

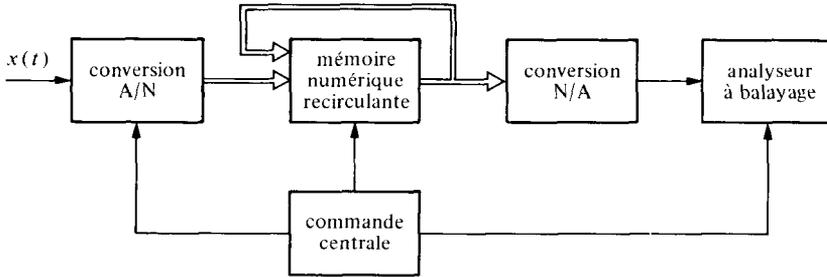


Fig. 12.29

Une portion  $x_1(t, T_1)$ , de durée  $T_1$ , du signal d'entrée à analyser est initialement numérisée et enregistrée. Sa relecture cyclique, accélérée d'un facteur  $a > 1$ , crée un signal périodique  $x_3(t) = \text{rep}_{T_3} \{x_2(t, T_2)\}$  dont la transformée de Fourier vaut, par (4.18) et (10.56)

$$X_3(f) = T_{e1}^{-1} X_1(f/a, T_1) \delta_{1/T_3}(f) \quad (12.47)$$

où  $T_{e1}$  est le pas d'échantillonnage d'acquisition et  $T_2 = T_1/a$ .

Par analogie avec (4.139), on obtient pour la densité spectrale de puissance

$$\Phi_{x_3}(f) = T_{e1}^{-2} \overset{\circ}{\Phi}_{x_1}(f/a, T_1) \delta_{1/T_3}(f) \quad (12.48)$$

Le procédé de recirculation crée ainsi un spectre de raies dont l'*enveloppe spectrale* (§ 4.4.9) est proportionnelle à une version dilatée par le facteur  $a$  du spectre de  $x_1(t, T_1)$ .

En appliquant ce signal accéléré à un analyseur de spectre à balayage utilisant un filtre sélectif de largeur de bande  $B_{eq}$ , on obtient pour le signal d'entrée  $x_1(t)$  une résolution équivalente  $B_{eq}/a$ . Ceci pour autant que la condition  $T_1 \gg a/B_{eq}$  soit satisfaite selon (12.8). Il est ainsi possible de conserver une bonne résolution tout en augmentant d'un facteur  $a^2$  la vitesse de balayage. La durée totale est réduite d'un facteur  $a$  puisque la plage spectrale explorée est, elle, dilatée du même facteur  $a$ .

Des facteurs d'accélération de l'ordre de  $10^2$  à  $10^5$  sont couramment utilisés selon le domaine spectral choisi.

Ce type de dispositif à mémoire permet également l'analyse spectrale par balayage de signaux transitoires.

## 12.4 EXEMPLES D'APPLICATION

### 12.4.1 Analyse d'un signal périodique

Le signal périodique de la figure 12.30 est analysé par un analyseur numérique à FFT (fig. 12.31) et un analyseur à balayage (fig. 12.32) avec les paramètres indiqués en légende.

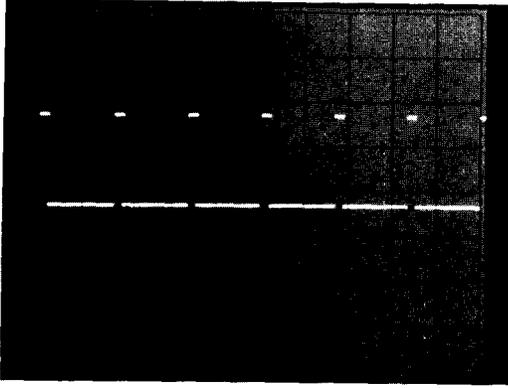


Fig. 12.30 Oscillogramme d'une suite périodique d'impulsions rectangulaires à valeur moyenne nulle, de 0,2 ms de durée et de 600 Hz de fréquence de répétition (échelle temporelle : 1 ms/division, échelle d'amplitude : 2 V/division).

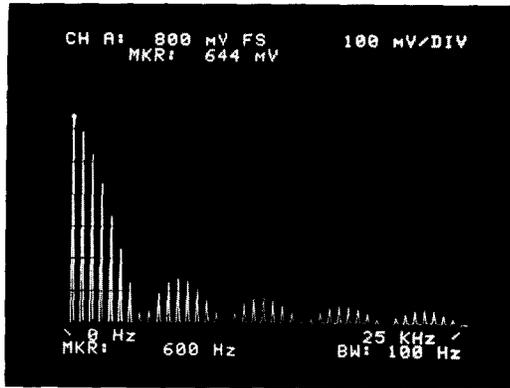


Fig. 12.31 Analyse numérique du spectre du signal de la figure 12.30 pour une plage fréquentielle s'étendant de 0 à 25 kHz avec  $B_{\text{eq}} = 100$  Hz; le repère lumineux (MKR) indique l'amplitude et la fréquence de la fondamentale.

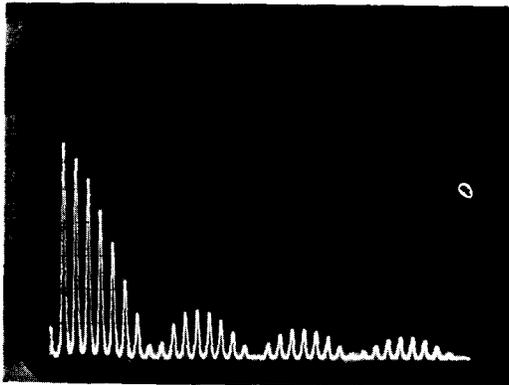


Fig. 12.32 Analyse spectrale du signal de la figure 12.30 avec un filtre analogique de 100 Hz de bande passante équivalente (échelle d'amplitude : 0,1 V/division, échelle fréquentielle : 2,5 kHz/division).

### 12.4.2 Analyse d'un signal transitoire

Une analyse numérique par FFT du signal transitoire de la figure 12.33 est représentée sur la figure 12.34. Les paramètres expérimentaux sont indiqués en légende.

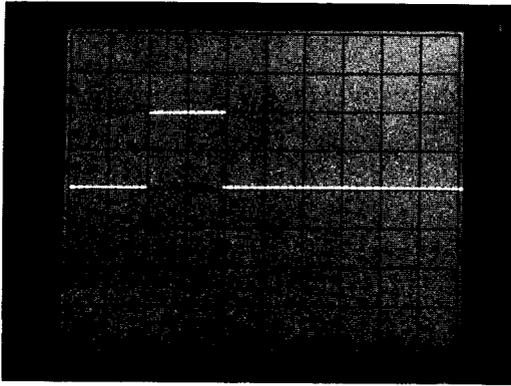


Fig. 12.33 Oscillogramme d'une impulsion rectangulaire de 4 V et de 0,2 ms de durée.

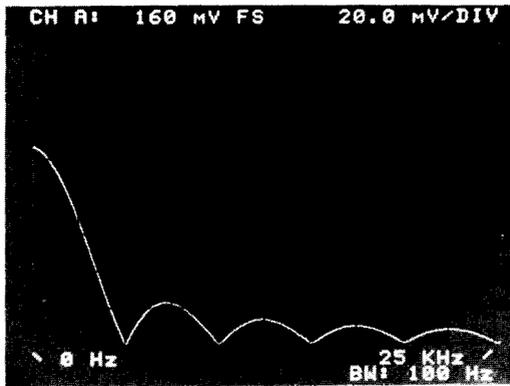


Fig. 12.34 Spectre d'amplitude du signal de la figure 12.33 mesuré entre 0 et 25 kHz avec une durée d'observation  $T = 10$  ms ( $B_{\text{eq}} = 100$  Hz).

### 12.4.3 Analyse d'un signal aléatoire

La figure 12.36 reproduit plusieurs périodogrammes évalués numériquement à partir du signal de la figure 12.35. Une analyse spectrale par balayage du même signal est reproduite sur la figure 12.37.

### 12.4.4 Analyse de signaux de vibrations

Deux exemples de signaux de vibrations d'une turbine hydraulique sont représentés sur la figure 12.38. La présence de raies spectrales dans le signal obtenu en soumettant la turbine à un choc (percussion) permet de mettre en évidence diverses résonances mécaniques également présentes dans le spectre des vibrations de la turbine en phase d'exploitation (roue en rotation).

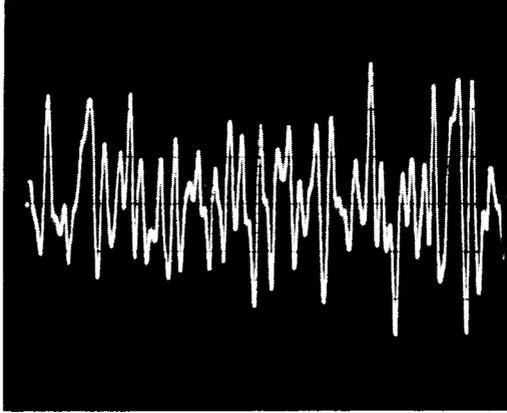


Fig. 12.35 Oscillogramme d'un signal aléatoire (échelle temporelle : 1 ms/division, échelle d'amplitude : 1 V/division).

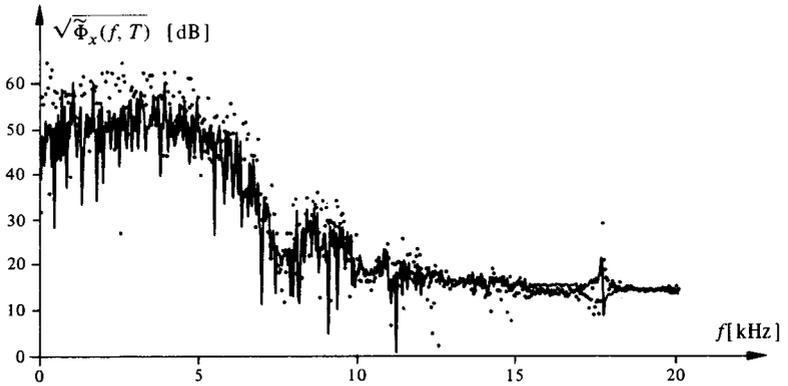


Fig. 12.36 Superposition de deux périodogrammes (traces continue et en pointillé) évalués sur des tronçons différents du signal de la figure 12.35 et affichés en valeur efficace (échelle logarithmique en ordonnée).

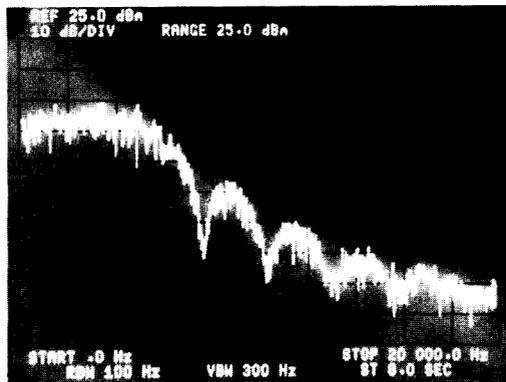


Fig. 12.37 Analyse spectrale par balayage de 0 à 20 kHz avec un filtre de 100 Hz du signal de la figure 12.35.

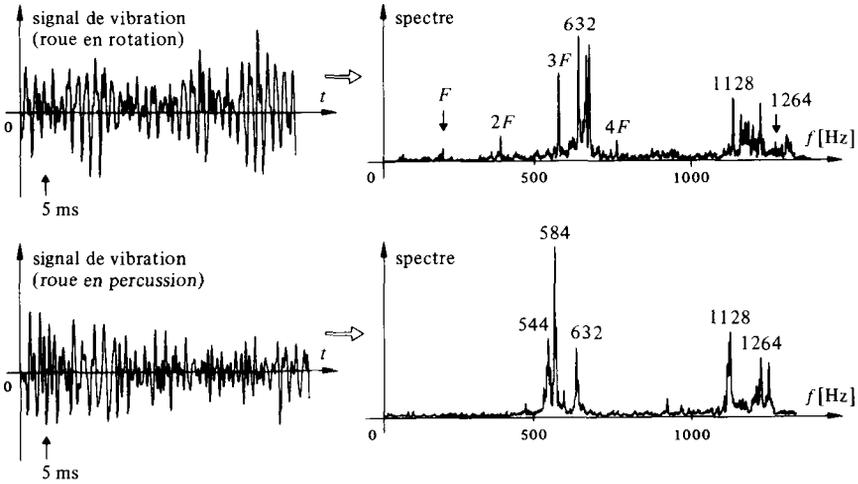


Fig. 12.38 Signaux et spectres de vibration d'une turbine Pelton de 23 aubes; la fréquence  $F$  est le produit du nombre d'aubes par la fréquence de rotation de la roue ( $8 \frac{1}{3}$  tours/s).

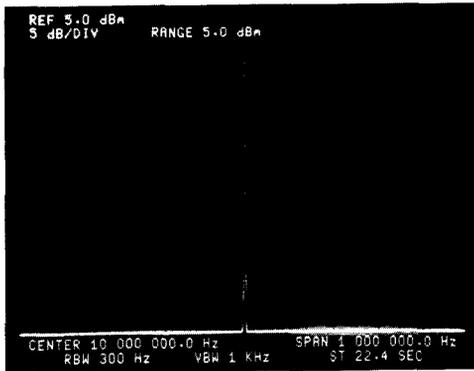


Fig. 12.39 Spectre d'une sinusoïde de 10 MHz mesuré avec une résolution de 300 Hz.

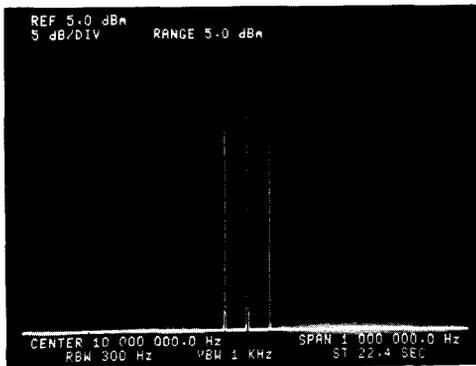


Fig. 12.40 Spectre d'une sinusoïde de 10 MHz modulée en amplitude avec porteuse par une sinusoïde de 50 kHz.

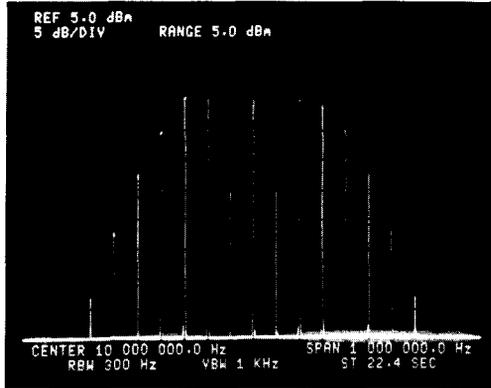


Fig. 12.41 Spectre d'une sinusoïde de 10 MHz modulée en fréquence par une sinusoïde de 50 kHz (indice de modulation  $\delta \approx 6$ ).

#### 12.4.5 Signaux modulés

Les figures 12.39, 12.40 et 12.41 présentent le spectre d'une sinusoïde, d'une sinusoïde modulée en amplitude et d'une sinusoïde modulée en fréquence par un signal modulant sinusoïdal.

#### 12.4.6 Signaux échantillonnés

Le spectre d'une sinusoïde de fréquence  $f_0$ , échantillonnée avec maintien à une cadence  $f_e = 5 f_0$ , est reproduite sur la figure 12.42.

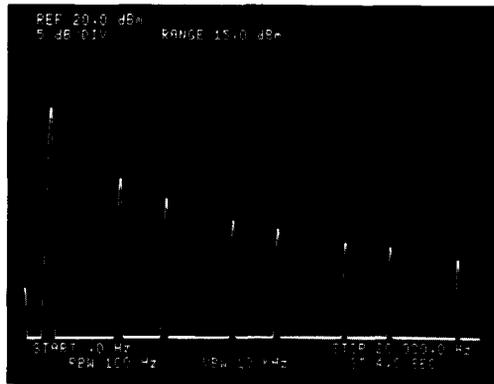


Fig. 12.42 Spectre d'une sinusoïde de 1 kHz échantillonnée avec maintien à une cadence de 5 kHz.

#### 12.4.7 Mesure de la pureté d'un oscillateur ou de la distorsion non linéaire d'un amplificateur

L'analyse spectrale permet de mesurer facilement la distorsion harmonique du signal produit par un oscillateur (fig. 12.43).

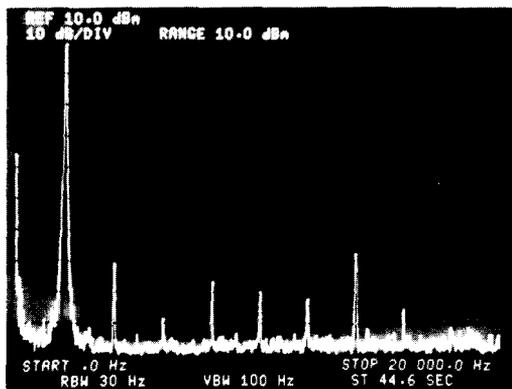


Fig. 12.43 Spectre du signal d'un oscillateur sinusoïdal oscillant à la fréquence de 2 kHz.

En analysant le signal de sortie d'un amplificateur excité par un signal composé de deux sinusoïdes de fréquences différentes (fig. 12.44), on met en évidence sa distorsion non linéaire qui fait apparaître des produits d'intermodulation (§ 8.4.6).

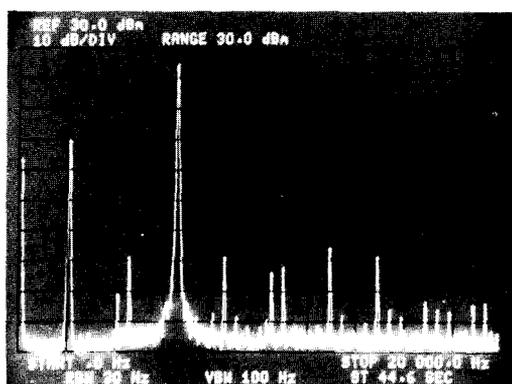


Fig. 12.44 Analyse fréquentielle du signal de sortie d'un amplificateur excité par une somme de deux sinusoïdes de 2 kHz et 6,5 kHz; les nombreuses raies secondaires sont dues à la distorsion harmonique et à la distorsion d'intermodulation.

#### 12.4.8 Stabilité de fréquence et de phase

Les instabilités de fréquence ou de phase d'un oscillateur peuvent être révélées grâce à l'analyse spectrale. On mesure de la même manière les fluctuations de la vitesse de défilement d'un enregistreur à bande magnétique en analysant le spectre d'une sinusoïde préalablement enregistrée (fig. 12.45).

#### 12.4.9 Réseau d'alimentation en énergie électrique

Le caractère non purement sinusoïdal de la tension du réseau d'énergie électrique (220 V, 50 Hz) est mis en évidence sur la figure 12.46.

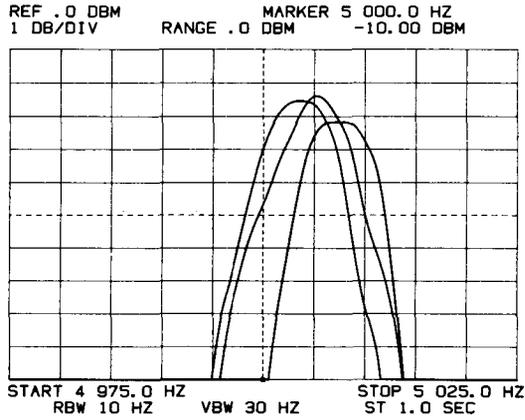


Fig. 12.45 Fluctuations de fréquence d'une sinusoïde enregistrée révélées par une analyse spectrale répétée.

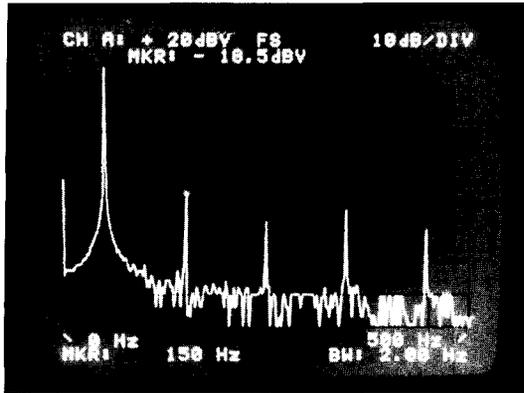


Fig. 12.46 Analyse spectrale de la tension du réseau à 50 Hz; le repère lumineux (MKR) indique l'amplitude relative et la fréquence de la troisième harmonique.

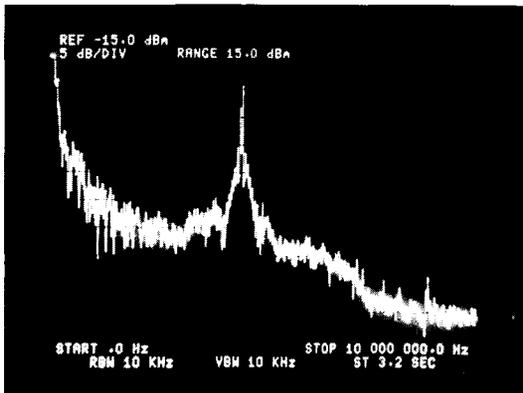


Fig. 12.47 Analyse spectrale du signal vidéo produit par une caméra de télévision dans la bande de 0 à 10 MHz.

### 12.4.10 Signal vidéo

L'analyse spectrale permet de mesurer la bande passante occupée par un signal de télévision (fig. 12.47).

### 12.4.11 Réponse fréquentielle d'un filtre ou d'un amplificateur

L'analyseur de spectre à balayage, ou sa version connue sous le nom d'analyseur d'onde, se prête bien au relevé des réponses fréquentielles de systèmes linéaires tels que filtres (fig. 12.48) ou amplificateurs (fig. 12.49). Une dynamique de mesure importante (70 à 100 dB) est obtenue en excitant le système linéaire avec un signal sinusoïdal asservi à celui de l'oscillateur commandé et ayant, grâce à un changement de fréquence approprié, une fréquence rigoureusement centrée sur la bande passante d'analyse. Ceci permet l'utilisation d'une bande passante très étroite qui réduit le bruit de fond résiduel à un niveau très bas.

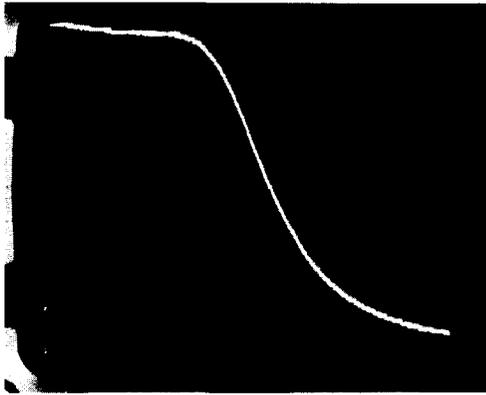


Fig. 12.48 Réponse fréquentielle d'un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c = 10$  kHz analysé sur une plage linéaire allant de 0 à 20 kHz avec une échelle d'amplitude linéaire en ordonnée.

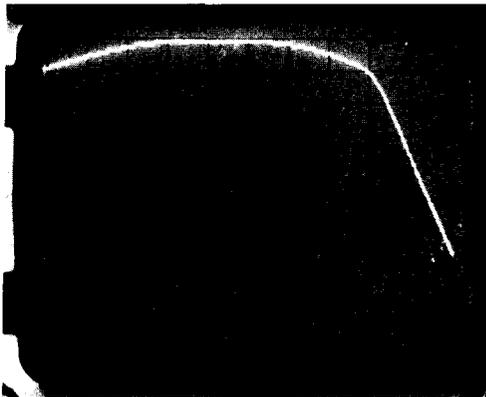


Fig. 12.49 Réponse fréquentielle d'un amplificateur analysée avec une échelle logarithmique en ordonnée (10 dB/division) et une échelle logarithmique en fréquences (repères spéciaux gravés au bas du graticule: 20 Hz, 200 Hz, 2 kHz et 20 kHz).

Les analyseurs numériques offrent la possibilité de mesurer simultanément les réponses d'amplitude et de phase (fig. 12.50) avec cependant une dynamique généralement plus réduite. La méthode utilisée est, par exemple, celle décrite au paragraphe 8.2.10 ou l'emploi de la formule (8.25).

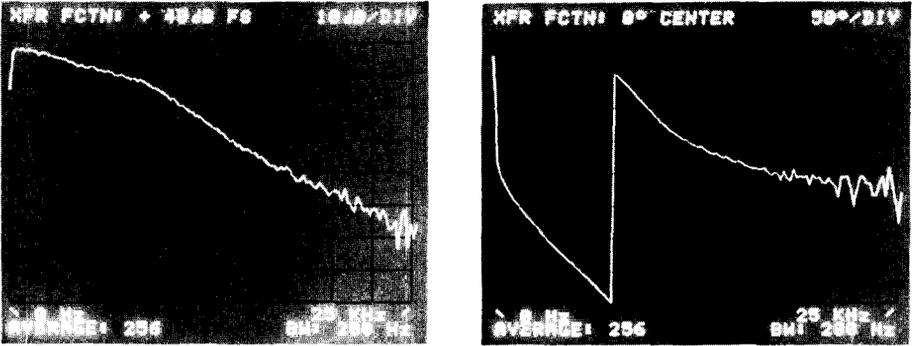


Fig. 12.50 Réponses d'amplitude (photo de gauche) et de phase (photo de droite) d'un amplificateur.

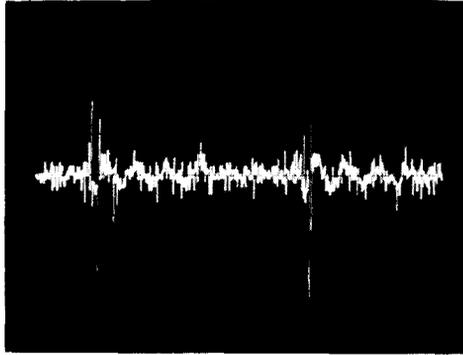


Fig. 12.51 Oscillogramme des fluctuations de la tension de sortie d'un régulateur de tension continue (échelle verticale : 2 mV/division, échelle horizontale : 5  $\mu$ s/division).

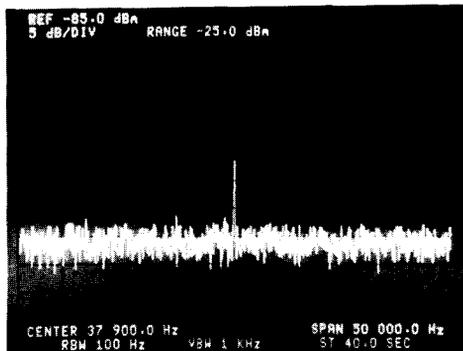


Fig. 12.52 Analyse spectrale du signal de la figure 12.51 révélant la présence d'une oscillation à environ 37,9 kHz.

### 12.4.12 Détection d'oscillations parasites

Un amplificateur improprement réalisé est souvent le siège d'oscillations parasites apparaissant à des fréquences largement supérieures au domaine normal d'utilisation (problèmes de stabilité : section VIII.4.9). De telles oscillations sont facilement révélées et mesurées grâce à l'analyse spectrale (fig. 12.51 et 12.52).

### 12.4.13 Analyse cepstrale. Définition

Le *cepstre* d'un signal est une fonction du temps définie soit comme la transformée de Fourier du logarithme de la densité spectrale de puissance (chap. XX.7), soit comme le module carré de cette transformée. Cette fonction est utilisée pour mettre en évidence des périodicités du spectre. On l'utilise, par exemple, en traitement de la parole (extraction des formants) et dans l'analyse de signaux de vibration de dispositifs à engrenages (boîtes à vitesse, etc.). Les analyseurs numériques sont souvent prévus pour réaliser l'analyse cepstrale (fig. 12.53). Le cepstre s'apparente à la fonction d'autocorrélation.

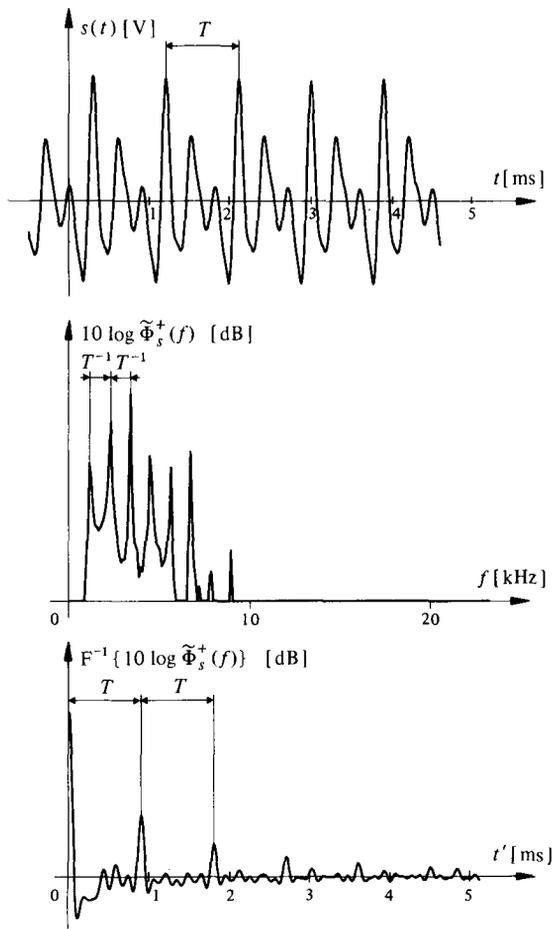


Fig. 12.53 Signal, densité spectrale logarithmique et cepstre correspondant.

## 12.5 EXERCICES

**12.5.1** Vérifier les résultats (12.10) et (12.11).

**12.5.2** Déterminer les principaux paramètres expérimentaux d'analyse spectrale directe d'un signal aléatoire de bande passante allant de 0 Hz à 5 MHz si l'on désire une résolution de 10 kHz et un intervalle de confiance à 95% de l'ordre de  $0,1\mu_z$ .

**12.5.3** Montrer pour quelles raisons un analyseur de spectre à filtre(s) sélectif(s) fournit, dans le cas d'un spectre de raies, une mesure de l'amplitude des raies indépendantes de la résolution, et dans le cas d'un spectre continu, un résultat fonction de la résolution. Montrer aussi pourquoi c'est l'inverse qui se produit avec un analyseur numérique évaluant le périodogramme.

## DÉTECTION ET ESTIMATION

### 13.1 ESTIMATION DE PARAMÈTRES

#### 13.1.1 Introduction et définitions

L'observation et l'interprétation de signaux perturbés par des bruits parasites est l'une des tâches majeures du traitement des signaux.

L'interprétation est effectuée en vue d'une prise de *décision optimale* : le choix, selon un critère donné, de la meilleure solution parmi un ensemble – continu ou discret – de solutions possibles. Elle consiste en :

- la mesure d'un ou plusieurs paramètres – déterministes mais inconnus, ou aléatoires – du signal, tels que valeur moyenne, énergie ou puissance, amplitude, fréquence, phase, position, durée, etc. : c'est un problème d'*estimation* ;
- la reproduction aussi fidèle que possible d'un signal contaminé par du bruit : c'est un problème de *recupération* ou de *filtrage optimal*, qui est un cas particulier d'estimation ;
- la *prédiction* du comportement futur du signal basée sur la connaissance de son passé ou l'*interpolation* de valeurs intermédiaires à deux valeurs connues : c'est un autre cas particulier d'estimation ;
- la détection de la présence ou de l'absence d'un signal et son classement dans une catégorie connue : c'est un problème d'*identification* ou de *reconnaissance de formes* qui requiert une opération initiale d'estimation de paramètres.

La problématique de l'estimation est la minimisation d'une fonction de l'erreur commise. Celle de la détection est la minimisation de la probabilité de fausses décisions.

La théorie statistique de l'estimation et de la décision ([34] et [128-133]) propose diverses méthodes permettant de trouver la solution optimale à ces problèmes dans un contexte donné. Cette solution ne conduit pas toujours à un système réalisable ou d'une complexité acceptable. Mais sa connaissance est source d'inspiration pour l'ingénieur qui doit concevoir un système sous-optimal à la fois raisonnablement simple et performant.

#### 13.1.2 Exemples d'applications

L'analyse spectrale expérimentale présentée au chapitre 12 est un problème typique où l'estimation statistique joue un grand rôle.

Le traitement du signal radar – ou sonar – est un exemple classique où la détection et l'estimation de paramètres sont mis en œuvre. La décision est basée sur l'observation d'un éventuel écho à une impulsion initialement rayonnée par l'antenne dans la direction choisie. Cette décision commande directement l'allumage ou l'extinction du

spot de l'écran d'affichage. La mesure du retard de l'écho par rapport à l'impulsion émise fournit l'information de distance. Le décalage de fréquence Doppler entre l'écho et le signal émis permet de déduire la vitesse radiale de la cible.

Les télécommunications radio à grande distance – en particulier spatiales – requièrent des systèmes de détection élaborés.

Un filtrage optimal des mesures de position d'un satellite – ou de tout autre corps céleste – est employé pour obtenir une détermination précise de son orbite.

En cherchant à prédire l'évolution prochaine d'un signal à partir de l'observation de ses états antérieurs, on peut dans certains cas réduire considérablement le volume d'information nécessaire pour le mettre en mémoire (p. ex. synthèse de la parole) ou le transmettre à distance (systèmes de communications à débit d'information ou largeur de bande réduits).

La récupération de signaux noyés dans le bruit de fond intervient dans de nombreux domaines de la physique, de l'astrophysique et de la recherche biomédicale.

La prospection pétrolière utilise des méthodes d'évaluation des structures géologiques en détectant et interprétant les échos sonores perçus par des réseaux de capteurs à la suite de l'explosion d'une charge de dynamite ou d'une autre forme d'excitation mécanique.

L'identification automatique de caractères imprimés ou de codes graphiques simplifiés facilite la gestion des stocks de produits commerciaux ou industriels, le tri du courrier postal, etc.

La reconnaissance d'objets et l'estimation de leurs positions relatives est un thème central en robotique.

Des propositions de diagnostic médical sont effectuées en recourant à une classification opérée après analyse de certains signaux physiologiques (électrocardiogrammes, électroencéphalogrammes, etc.).

L'estimation des paramètres acoustiques de la voix est une tâche fondamentale en reconnaissance de la parole.

### 13.1.3 Évaluation déterministe de paramètres

Considérons tout d'abord le cas de la détermination des paramètres non aléatoires – mais inconnus – d'un signal observé en l'absence de bruit. On sait que le signal appartient à une famille donnée de signaux décrits par un nombre fini  $N$  de paramètres variant dans des plages connues.

Une telle famille engendre un espace de signaux (sect. 3.1) à  $N$  dimensions dont chaque point représente un signal donné. La détermination des  $N$  paramètres (alias coordonnées) requiert un nombre  $M \geq N$  de mesures.

### 13.1.4 Exemples

Soit à déterminer la pulsation et la phase d'un signal sinusoïdal d'amplitude connue  $x(t) = \cos(\omega_0 t + \alpha)$  avec  $0 \leq \omega_0 \leq \omega_{\max}$  et  $0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$ . Si  $\alpha_{\max} < \pi$  et  $\omega_0 t + \alpha \leq \pi$ , les deux mesures  $x(0) = \cos \alpha$  et  $x(t_1) = \cos(\omega_0 t_1 + \alpha)$  suffisent à déterminer  $\omega_0$  et  $\alpha$ . Dans le cas contraire, plusieurs solutions sont possibles et un nombre  $M > 2$  de mesures est nécessaire pour lever les ambiguïtés.

D'une manière générale, on sait par le théorème d'échantillonnage que tout signal de spectre à support borné, de largeur de bande  $B$  et de durée  $T$ , est théoriquement entièrement déterminé par  $N = 2BT$  échantillons (§ 9.3.9). Compte tenu de l'inexistence des signaux à bande limitée (§ 9.3.2) et des conditions pratiques d'interpolation (sect. 9.4), une reconstitution satisfaisante du signal nécessite en fait la connaissance de  $M > N$  échantillons.

**13.1.5 Estimation statistique de paramètres. Définition**

En traitement des signaux, l'estimation statistique a pour but l'évaluation la plus fidèle possible d'un ou des paramètres d'un signal  $s(t)$  à partir d'une observation bruitée  $x(t)$ .

Une approche classique consiste à tenir compte des modèles statistiques supposés du signal, de ses paramètres et du bruit. On recherche alors une stratégie de traitement qui minimise une certaine distance  $d(a, \tilde{a})$  entre l'estimation  $\tilde{a}$  et la grandeur estimée  $a$ . Une distance usuelle est l'erreur quadratique moyenne  $E[(a - \tilde{a})^2]$  analogue à (3.3).

Lorsque la connaissance disponible a priori est réduite, on recherche des procédures plus robustes, capables de performances proches de l'optimum tout en tolérant d'assez larges déviations de la statistique réelle vis-à-vis du modèle nominal supposé (fig. 13.1.). Les solutions théoriques sont, dans ce cas, souvent très proches de celles que dicte le simple bon sens!

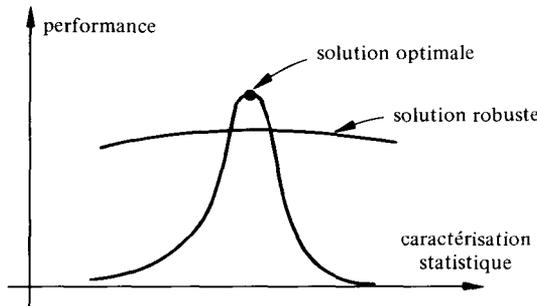


Fig. 13.1

La représentation dans un espace de signaux mentionnés au paragraphe 13.1.3 est toujours valable. L'ensemble des paramètres estimés définit un vecteur d'estimation  $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_M)$ . Mais l'ensemble des résultats possibles d'estimation forme, en raison du bruit, un *nuage* de solutions à l'intérieur duquel se trouve le point représentatif du vecteur  $a$  cherché (fig. 13.2).

On déduit de la formulation mathématique de l'estimation la structure de l'estimateur : processeur analogique ou numérique traitant l'observation  $x(t)$  pour en déduire  $\tilde{a}$ .

La théorie classique de l'estimation postule la connaissance d'une densité de probabilité  $p(x; a)$  du signal observé  $x(t; a)$ , dépendant de  $M$  paramètres inconnus représentés par le vecteur  $a = (a_1, a_2, \dots, a_M)$ . En présence de bruit additif  $n(t)$ , le signal observé est de la forme

$$x(t; a) = s(t, a) + n(t) \tag{13.1}$$

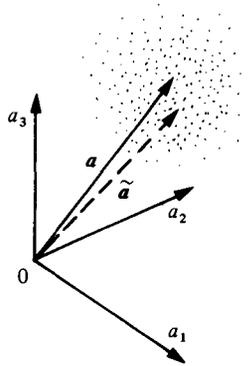


Fig. 13.2

où  $s(t; \mathbf{a})$  représente le signal utile. À partir d'un vecteur de  $N$  échantillons (mesures)  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  ou d'une observation continue de  $x(t)$  sur un intervalle  $T$ , l'estimation consiste à attribuer une valeur aux  $M$  composantes du vecteur  $\tilde{\mathbf{a}}$ .

Différentes stratégies sont utilisables à cet effet selon l'information a priori disponible. La méthode du maximum de vraisemblance (§ 13.1.6) s'applique lorsque l'on ignore la statistique des paramètres ou que ceux-ci ne sont tout simplement pas aléatoires (cas fréquent). La méthode du risque minimum (§ 13.1.7) requiert la connaissance des densités de probabilité des paramètres à estimer et dépend du choix d'une fonction appropriée de pondération de l'erreur commise. En estimation linéaire (§ 13.1.17), on se limite à l'étude d'estimateurs réalisables à l'aide d'opérateurs linéaires (sect. 8.2).

### 13.1.6 Méthode du maximum de vraisemblance. Définitions

Si  $\mathbf{a}$  est un vecteur de paramètres non aléatoires, mais inconnus, ou aléatoires mais de statistique inconnue, l'estimation doit se baser sur la seule connaissance a priori de la densité de probabilité conditionnelle du vecteur d'observation  $\mathbf{x}$  dépendant du vecteur de paramètre  $\mathbf{a}$  et de la statistique du bruit:  $p(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ . Cette densité est appelée *fonction de vraisemblance*.

L'estimation au sens du maximum de vraisemblance consiste tout simplement à choisir pour  $\tilde{\mathbf{a}}$  le vecteur, noté  $\tilde{\mathbf{a}}_{mv}$ , qui rend  $p(\mathbf{x}|\mathbf{a})$  maximum (fig. 13.3). Elle est en

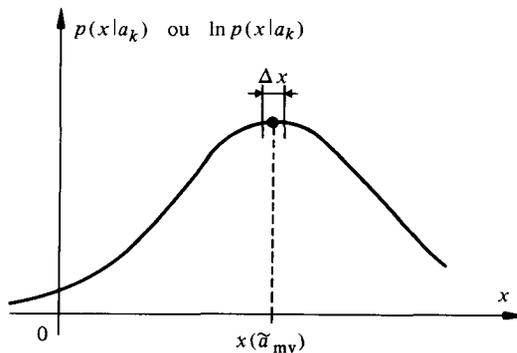


Fig. 13.3

général obtenue en résolvant l'ensemble d'équations de vraisemblance

$$\left. \frac{\partial p(\mathbf{x}|a_k)}{\partial a_k} \right|_{a_k = \tilde{a}_{k, \text{mv}}} = 0 \text{ avec } k = 1, 2, \dots, M \tag{13.2}$$

Comme le logarithme est une fonction monotone, il est parfois préférable (bruit gaussien, etc.) de dériver la fonction  $\ln p(\mathbf{x}|a_k)$ .

L'estimation au sens du maximum de vraisemblance revient simplement à choisir comme estimation  $\tilde{a}_{\text{mv}}$  celle qui correspond à l'observation  $\mathbf{x}$  la plus fréquente (mesurée dans un petit intervalle  $\Delta\mathbf{x}$ ).

### 13.1.7 Exemple

Soit un signal aléatoire gaussien  $x(t)$  de valeur moyenne  $a = \mu_x$  inconnue. Sa densité de probabilité conditionnelle à  $a$  est simplement

$$p(x|a) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-a)^2/\sigma^2\right] \tag{13.3}$$

Si  $N$  échantillons statistiquement indépendants (c'est-à-dire ici non corrélés) de ce signal sont prélevés, ils forment par (14.36) un vecteur  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  de densité de probabilité conditionnelle d'ordre  $N$

$$p(\mathbf{x}|a) = \prod_{i=1}^N p(x_i|a) = (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - a)^2\right] \tag{13.4}$$

En prenant le logarithme naturel de (13.4) et en annulant sa dérivée par rapport au paramètre inconnu  $a$ , on obtient

$$\tilde{a}_{\text{mv}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \tag{13.5}$$

L'estimation au sens du maximum de vraisemblance coïncide ici avec la valeur moyenne arithmétique des échantillons. Le comportement de la variance de cette estimation est étudiée au paragraphe 13.1.24.

### 13.1.8 Méthode du risque minimum. Définitions

Lorsque la densité de probabilité  $p(\mathbf{a})$  du vecteur de paramètres  $\mathbf{a}$  est également connue, la *méthode d'estimation de Bayes* consiste à associer à l'erreur  $(\mathbf{a} - \tilde{\mathbf{a}})$  un *coût*  $c(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}})$  – appelé aussi *fonction de perte* – et à minimaliser le coût moyen dénommé *risque*  $d_r(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}}) = E[c(\mathbf{a}, \tilde{\mathbf{a}})]$ .

La figure 13.4 représente trois exemples de coût ou critère de pondération de l'erreur souvent cités associés à un seul paramètre  $a$  :

- le critère quadratique

$$c(a, \tilde{a}) = (a - \tilde{a})^2 \tag{13.6}$$

- le critère de la valeur absolue

$$c(a, \tilde{a}) = |a - \tilde{a}| \tag{13.7}$$

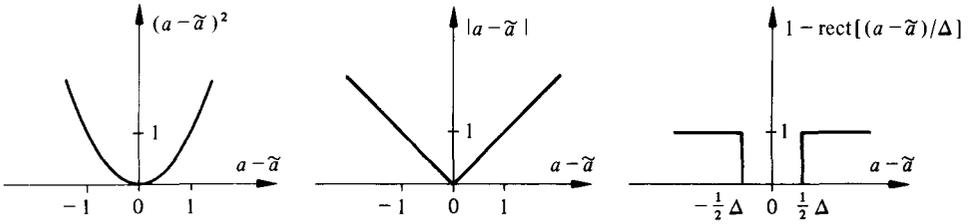


Fig. 13.4

- le critère de la pondération uniforme en dehors d'une zone morte  $\Delta$

$$c(a, \tilde{a}) = 1 - \text{rect}[(a - \tilde{a})/\Delta] \quad (13.8)$$

Le critère quadratique est le plus usité.

Le risque associé à l'estimation  $\tilde{a}$  basée sur l'observation  $\mathbf{x}$  exprime en fait une distance pondérée  $d_r(a, \tilde{a})$ , analogue à celles introduites au paragraphe 3.1.4. et définie par

$$d_r(a, \tilde{a}) = E[c(a, \tilde{a})] = \iint_{-\infty}^{\infty} c(a, \tilde{a}) p(\mathbf{x}, a) d\mathbf{x} da \quad (13.9)$$

Mais, par (14.32), la densité de probabilité conjointe  $p(\mathbf{x}, a) = p(a|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$ , d'où

$$d_r(a, \tilde{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{\infty} c(a, \tilde{a}) p(a|\mathbf{x}) da \right]}_I p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (13.10)$$

Minimiser  $d_r(a, \tilde{a})$  revient à minimiser le risque – ou distance – conditionnel représenté par l'intégrale  $I$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} c(a, \tilde{a}) p(a|\mathbf{x}) da \quad (13.11)$$

puisque  $p(\mathbf{x})$  est une fonction non négative.

Dans le cas du critère quadratique,  $c(a, \tilde{a}) = \sum_i (a_i - \tilde{a}_i)^2$  et le risque conditionnel exprime l'*erreur quadratique moyenne*. L'estimation optimale  $\tilde{a}_{\text{eqm}}$  correspondante est obtenue en annulant dans ce cas la dérivée de (13.11) par rapport à chaque paramètre  $a_i$ . En tenant compte également de la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(a|\mathbf{x}) da = 1 \quad (13.12)$$

l'estimation à *erreur quadratique moyenne minimum* vaut

$$\tilde{a}_{\text{eqm}} = \int_{-\infty}^{\infty} a p(a|\mathbf{x}) da \quad (13.13)$$

C'est, par définition, la *valeur moyenne* de la densité de probabilité conditionnelle a posteriori  $p(a|\mathbf{x})$  appelée *moyenne conditionnelle*.

On montre, de manière analogue, que le critère de la valeur absolue conduit à une estimation  $\tilde{a}_{\text{abs}}$  correspondant à la *médiane* de  $p(a|x)$ , c'est-à-dire à la valeur  $\tilde{a}_{\text{abs}}$  qui partage la densité de probabilité en deux zones dont les intégrales sont égales à  $\frac{1}{2}$ .

Pour le coût uniforme, le risque conditionnel minimum est obtenue, lorsque  $\Delta$  tend vers zéro, avec l'estimation du maximum a posteriori  $\tilde{a}_{\text{map}}$  définie par l'abscisse du *maximum* – ou *mode* – de  $p(a|x)$ .

Ces trois estimations sont représentées sur la figure 13.5 dans le cas d'un paramètre unique  $a$ , de loi conditionnelle au vecteur d'observation  $\mathbf{x}$  :  $p(a|x)$ .

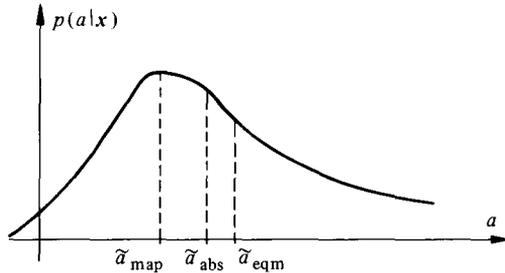


Fig. 13.5

### 13.1.9 Propriétés et définitions

L'estimation du maximum a posteriori  $\tilde{a}_{\text{map}}$  est souvent plus facile à déterminer que  $\tilde{a}_{\text{abs}}$  ou  $\tilde{a}_{\text{eqm}}$ . *Dans le cas de distribution unimodales symétriques comme la loi de Gauss, ces trois estimations sont identiques.*

Par (14.32) et (14.33), la densité de probabilité a posteriori  $p(a|x)$  peut s'écrire

$$p(a|x) = p(x|a)p(a)/p(x) \tag{13.14}$$

où  $p(x)$  est en fait une valeur connue lorsque l'observation  $\mathbf{x}$  est effectuée. Les estimations obtenues par la méthode du risque minimum dépendent donc uniquement du produit des densités de probabilité  $p(x|a)p(a) = p(x, a)$ . On constate alors que l'estimation du maximum de vraisemblance  $\tilde{a}_{\text{mv}}$  définie au paragraphe 13.1.6 coïncide avec l'estimation du maximum a posteriori  $\tilde{a}_{\text{map}}$  si la densité de probabilité  $p(a)$  est uniforme. Dans le cas contraire, ces deux estimations sont souvent voisines. Ceci justifie parfois l'utilisation de l'estimation simplifiée  $\tilde{a}_{\text{mv}}$  même dans des situations où la statistique a posteriori pourrait être établie.

Remarquons également que  $\tilde{a}_{\text{mv}}$  est une estimation assez *robuste*, puisqu'elle n'est pas influencée par des variations éventuelles de la statistique des paramètres à évaluer.

Une autre propriété utile de l'estimation à vraisemblance maximale, pas nécessairement partagée par les autres estimations, est d'être invariante à toute transformation réversible. C'est-à-dire que le même résultat est obtenu en estimant  $a$  ou une fonction monotone  $f(a)$ , avec simplement  $f_{\text{mv}} = f(\tilde{a}_{\text{mv}})$ .

Les performances d'une estimation sont essentiellement représentées par son biais (erreur systématique) et par sa variance (dispersion des résultats). Le *biais d'une estimation* est la différence entre la valeur moyenne de l'estimation et celle de la valeur estimée

$$b = E[\tilde{a}] - E[a] \tag{13.15}$$

avec  $E[\mathbf{a}] \equiv \mathbf{a}$  dans le cas de paramètres non aléatoires. Il est généralement souhaitable que le biais soit nul.

La variance d'une estimation non biaisée est bornée inférieurement (*inégalité de Cramer-Rao* [134]). Une estimation satisfaisant cette limite est dite *efficace*.

L'estimation est *consistante* si elle tend vers la vraie valeur  $\mathbf{a}$  lorsque le nombre d'observations  $N$  – ou la durée d'observation  $T$  dans un cas continu – tend vers l'infini.

On montre que, pour des conditions assez peu restrictives, l'estimation à vraisemblance maximale  $\tilde{\mathbf{a}}_{\text{mv}}$  de paramètres non aléatoires est à la fois consistante, asymptotiquement efficace et, de plus, asymptotiquement gaussienne [134]. On montre également que, dans le cas de l'estimation de paramètres aléatoires, s'il existe une estimation efficace, elle est unique et donnée par  $\tilde{\mathbf{a}}_{\text{map}} \equiv \tilde{\mathbf{a}}_{\text{eqm}}$ .

### 13.1.10 Exemple

Considérons la situation suivante. Un signal aléatoire  $a(t)$ , à distribution de Rayleigh (14.110) avec variance  $\sigma_a^2$  est observé en présence d'un bruit additif gaussien  $n(t)$  à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_n^2$ . On cherche à estimer  $a$  à partir d'un échantillon unique de  $x(t) = a(t) + n(t)$ .

La densité de probabilité conditionnelle a priori  $p(x|a)$  est simplement la version décalée de  $a$  de la densité de probabilité du bruit

$$p(x|a) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-a)^2/\sigma_n^2\right] \quad (13.16)$$

L'estimation à vraisemblance maximale est ici simplement

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\text{mv}} = x \quad (13.17)$$

Par (13.14), la densité de probabilité conditionnelle a posteriori devient

$$p(a|x) = K a \exp\left[-\frac{1}{2}(\alpha/\sigma_n)^2(a-x/\alpha)^2\right] \quad (13.18)$$

où  $K = 2\pi\sigma_n^2\sigma_a^2/p(x)$  est une constante, lorsque  $x$  est connue, qui peut être évaluée en utilisant la condition (13.12), et  $\alpha = 1 + \sigma_n^2/\sigma_a^2$ .

L'estimation du maximum a posteriori est obtenue en annulant la dérivée de (13.18) par rapport à  $a$  :

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\text{map}} = x(1 + \sqrt{1 + 4\alpha\sigma_n^2/x^2})/(2\alpha) \quad (13.19)$$

C'est une fonction non linéaire de l'observation qui tend vers (13.17) pour  $\sigma_n^2 \rightarrow 0$ .

### 13.1.11 Exemple

Soit à estimer le paramètre aléatoire  $\mathbf{a} \geq 0$  d'une observation  $x$  à distribution exponentielle (14.90)

$$p(x|a) = a \exp(-ax) \epsilon(x) \quad (13.20)$$

sachant que  $\mathbf{a}$  possède une distribution semblable

$$p(a) = \lambda \exp(-\lambda a) \epsilon(a) \quad (13.21)$$

avec  $\lambda \geq 0$ .

Un tel exemple [135] peut décrire une situation de trafic dans un réseau routier ou de télécommunications:  $\mathbf{a}$  représente la fréquence moyenne de véhicules ou de messages traversant un nœud du réseau et cette fréquence moyenne fluctue elle aussi d'un nœud à l'autre selon la loi (13.21) avec une valeur moyenne  $E[\mathbf{a}] = \lambda^{-1}$ . L'observation  $x$  est ici l'intervalle entre les instants de passage de deux véhicules ou messages successifs (processus ponctuel de Poisson: sect. 5.8).

La distribution a posteriori prend la forme (exercice 13.5.3)

$$p(a|x) = (x + \lambda)^2 a \exp[-a(x + \lambda)] \epsilon(a) \quad (13.22)$$

La valeur moyenne de cette distribution est l'estimation à erreur quadratique minimale

$$\tilde{a}_{\text{eqm}} = \int_0^{\infty} a p(a|x) da = 2(x + \lambda)^{-1} \quad (13.23)$$

L'abscisse du maximum de  $p(a|x)$  est l'estimation du maximum a posteriori  $\tilde{a}_{\text{map}}$  que l'on obtient en résolvant l'équation  $\partial p(a|x)/\partial a = 0$  pour  $a = \tilde{a}_{\text{map}}$ :

$$\tilde{a}_{\text{map}} = (x + \lambda)^{-1} \quad (13.24)$$

Quant à la médiane, qui représente l'estimation  $\tilde{a}_{\text{abs}}$ , c'est la solution de l'équation transcendante

$$[1 - (x + \lambda)\tilde{a}_{\text{abs}}] \exp[-\tilde{a}_{\text{abs}}(x + \lambda)] + \frac{1}{2} = 0 \quad (13.25)$$

obtenue en résolvant l'intégrale

$$\int_0^{\tilde{a}_{\text{abs}}} p(a|x) da = \frac{1}{2} \quad (13.26)$$

### 13.1.12 Exemple

Considérons l'estimation d'une valeur moyenne  $a$  inconnue en présence de fluctuations aléatoires  $n(t)$  gaussiennes, à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_n^2$ . L'estimation est effectuée à partir d'un ensemble  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  de  $N$  échantillons indépendants

$$x_i = a + n_i \quad (13.27)$$

La densité de probabilité conditionnelle  $p(\mathbf{x}|a)$  est la même que (13.4), avec  $\sigma_n^2$  remplaçant  $\sigma^2$ , et l'estimation à vraisemblance maximale  $\tilde{a}_{\text{mv}}$  est identique au résultat (13.5) puisque cette estimation ne tient pas compte de  $p(a)$ . C'est une estimation non biaisée, de variance

$$\sigma_{\text{mv}}^2 = \sigma_n^2/N \quad (13.28)$$

tendant vers zéro lorsque  $N$  tend vers l'infini (§ 13.1.24).

Supposons maintenant que  $a$  soit une variable aléatoire gaussienne de valeur moyenne  $\mu_a$  et variance  $\sigma_a^2$ . En appliquant (13.14), on obtient après quelques manipulations algébriques [34] la distribution

$$p(a|x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}(a - \mu)^2/\sigma^2] \quad (13.29)$$

avec

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_a^2 \sigma_n^2 / N}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2 / N} = \alpha \sigma_n^2 / N \quad (13.30)$$

et

$$\mu = \frac{\sigma_a^2 \bar{x} + \mu_a \sigma_n^2 / N}{\sigma_a^2 + \sigma_n^2 / N} = \alpha \bar{x} + \beta \quad (13.31)$$

où  $\bar{x}$  dénote la moyenne arithmétique qui correspond à l'estimation à vraisemblance maximale

$$\tilde{a}_{\text{mv}} = \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (13.32)$$

et où  $\alpha = \sigma_a^2 / (\sigma_a^2 + \sigma_n^2 / N) < 1$  et  $\beta = (1 + N\sigma_a^2 / \sigma_n^2)^{-1} \mu_a$ . Puisque l'abscisse du maximum, la médiane et la valeur moyenne sont identiques pour une loi de Gauss (§ 13.1.9), on a

$$\tilde{a}_{\text{eqm}} = \tilde{a}_{\text{map}} = \tilde{a}_{\text{abs}} = \mu \neq \bar{x} = \tilde{a}_{\text{mv}} \quad (13.33)$$

L'estimation optimale de Bayes est aussi linéaire, mais elle est biaisée. Elle tend vers la moyenne arithmétique non biaisée  $\bar{x} = \tilde{a}_{\text{mv}}$  lorsque  $\sigma_n^2 / N$  tend vers zéro, c'est-à-dire en particulier lorsque  $N$  tend vers l'infini. Lorsque  $\sigma_a^2$  tend vers zéro, l'estimation optimale tend vers  $\mu_a$ , la valeur moyenne a priori, et dépend peu de l'observation.

On vérifie que l'estimation a posteriori est optimale puisque sa variance vaut, en tenant compte de (13.28) et (13.31)

$$\sigma_\mu^2 = \text{Var}[\alpha \bar{\mathbf{x}}] = \alpha^2 \text{Var}[\bar{\mathbf{x}}] = \alpha^2 \sigma_{\text{mv}}^2 = \alpha^2 \sigma_n^2 / N \quad (13.34)$$

et que  $\alpha < 1$ .

### 13.1.13 Exemple : estimation à vraisemblance maximale de l'amplitude d'un signal de forme connue; cas discret

Soit  $x(t) = a \cdot s(t) + n(t)$  où  $s(t)$  est un signal de forme connue (sinusoïde, impulsion, etc.). Le paramètre  $a$  est aléatoire et traduit une modulation d'amplitude, une atténuation variable due à des conditions de propagation (p. ex. phénomènes d'évanouissement : § 7.3.11) ou de réflexion (radar, sonar), etc. Comme précédemment,  $n(t)$  est un bruit gaussien à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_n^2$ .

L'estimation est basée à nouveau sur un ensemble de  $N$  échantillons indépendants  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Chaque échantillon  $x_i = as_i + n_i$  possède une distribution conditionnelle

$$p(x_i | a) = (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2} (x_i - as_i)^2 / \sigma_n^2\right] \quad (13.35)$$

Le vecteur  $\mathbf{x}$  des  $N$  observations indépendantes possède la distribution conditionnelle

$$p(\mathbf{x} | a) = \prod_{i=1}^N p(x_i | a) = (2\pi\sigma_n^2)^{-N/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_n^2} \sum_{i=1}^N (x_i - as_i)^2\right] \quad (13.36)$$

L'estimation à vraisemblance maximale est donnée par la valeur  $a = \tilde{a}_{mv}$  satisfaisant l'équation  $\partial p(\mathbf{x}|a)/\partial a = 0$ :

$$\tilde{a}_{mv} = \frac{\sum_{i=1}^N s_i x_i}{\sum_{i=1}^N s_i^2} \quad (13.37)$$

Le numérateur est tout simplement le produit scalaire (3.10) des vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{s}$  (alias corrélation) et le dénominateur est un facteur d'échelle égal, selon (3.11), au carré de la norme (alias énergie) de  $\mathbf{s}$ . L'estimateur correspondant est un type de filtre adapté (sect. 13.4). Dans le cas particulier où  $s_i = 1 \forall i$ , (13.37) s'identifie à (13.32).

### 13.1.14 Estimation à vraisemblance maximale des paramètres d'un signal de forme connue; cas continu

Soit le signal observé pendant un intervalle  $T$

$$x(t) = s(t, a) + n(t); \quad 0 \leq t \leq T \quad (13.38)$$

où  $s(t, a)$  est un signal de forme connue dépendant d'un paramètre  $a$  (amplitude, fréquence, phase, position, etc.) et  $n(t)$  est un bruit gaussien de fonction d'autocorrélation  $R_n(\tau)$ .

La distribution a priori du paramètre  $a$  étant rarement connue, on se limitera à l'examen de l'estimation à vraisemblance maximale.

Le logarithme du rapport  $p(x|a)/p_0(x)$  est une autre forme de fonction de vraisemblance où  $p_0(x)$  dénote la distribution qu'aurait l'observation  $x(t)$  en l'absence de signal  $s(t, a)$ . Elle peut se mettre sous la forme [34]:

$$l(a) = \ln [p(x|a)/p_0(x)] = \int_0^T x(t)g(t, a) dt - \frac{1}{2} \int_0^T s(t, a)g(t, a) dt \quad (13.39)$$

où  $g(t, a)$  est la solution de l'équation intégrale

$$s(t, a) = \int_0^T R_n(t - \tau)g(\tau, a) d\tau; \quad 0 \leq t \leq T \quad (13.40)$$

En comparant (13.40) avec (8.23), on constate que si  $T \rightarrow \infty$ , la fonction  $g(t, a)$  tend vers la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire tel que  $s(t, a)$  représente l'intercorrélation entre les signaux d'entrée et de sortie lorsque l'entrée est  $n(t)$ . Ce résultat est à rapprocher de (13.64).

Dans le cas d'un **bruit blanc gaussien** de densité spectrale de puissance bilatérale  $\Phi_n(f) = \frac{1}{2} \eta$  et de fonction d'autocorrélation  $R_n(\tau) = \frac{1}{2} \eta \delta(\tau)$ , la solution de (13.40) est  $g(t, a) = (2/\eta) s(t, a)$  d'où

$$l(a) = \frac{2}{\eta} \int_0^T x(t)s(t, a) dt - \frac{1}{\eta} \int_0^T s^2(t, a) dt \quad (13.41)$$

L'estimation à vraisemblance maximale  $\tilde{a}_{mv}$  est la valeur de  $a$  qui maximise (13.41) et satisfait l'équation

$$\int_0^T [x(t) - s(t, a)] \frac{\partial s(t, a)}{\partial a} dt \Big|_{a=\tilde{a}_{mv}} = 0 \quad (13.42)$$

Dans d'autres cas, la solution de l'équation intégrale (13.40) est délicate, voire impossible [34, 131].

### 13.1.15 Exemple : récepteur à corrélation. Définition

Soit  $s(t, a) = as(t)$  comme au paragraphe 13.1.13. Alors  $g(t, a) = ag(t)$  où  $g(t)$  est la solution de l'équation

$$s(t) = \int_0^T R_n(t-\tau) g(\tau) d\tau ; \quad 0 \leq t \leq T \quad (13.43)$$

La fonction de vraisemblance (13.39) devient

$$l(a) = a \int_0^T g(t) x(t) dt - \frac{1}{2} a^2 \int_0^T g(t) s(t) dt \quad (13.44)$$

et est maximum pour

$$\tilde{a}_{mv} = \frac{\int_0^T g(t) x(t) dt}{\int_0^T g(t) s(t) dt} \quad (13.45)$$

En cas de **bruit blanc gaussien** de densité spectrale  $\Phi_n(f) = \frac{1}{2} \eta$ ,  $g(t) = (2/\eta) s(t)$  et l'estimation devient

$$\tilde{a}_{mv} = \frac{\int_0^T s(t) x(t) dt}{\int_0^T s^2(t) dt} \quad (13.46)$$

Cette relation est à comparer avec le cas discret (13.37).

En normalisant, pour simplifier, l'énergie du signal  $s(t)$  dans l'intervalle  $T$ , il vient

$$\tilde{a}_{mv} = \int_0^T s(t) x(t) dt = \langle s, x \rangle \quad (13.47)$$

Le schéma bloc d'un tel estimateur (fig. 13.6) se déduit directement de (13.47). Il effec-

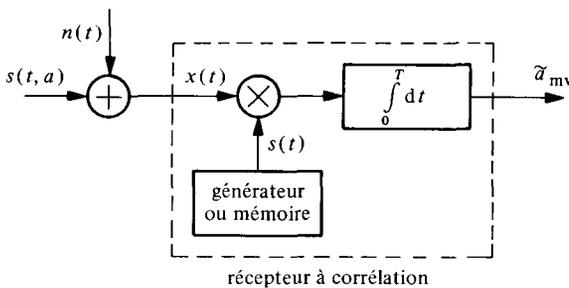


Fig. 13.6

tue une **corrélation** du signal observé avec une réplique mémorisée du signal connu  $s(t)$  et est appelé pour cette raison **récepteur à corrélation**. Une réalisation équivalente du même estimateur est le filtre adapté (sect. 13.4).

**13.1.16 Exemple : estimation de la phase d'un signal sinusoïdal**

Si le paramètre inconnu est la phase, le signal utile est de la forme  $s(t, a) = A \sin(\omega_0 t + a)$  où  $A$  et  $\omega_0$  sont connues. L'estimation  $\tilde{a}_{mv}$  de la phase en présence de bruit blanc gaussien est obtenue en résolvant (13.42)

$$\int_0^T [x(t) - A \sin(\omega_0 t + \tilde{a}_{mv})] \cos(\omega_0 t + \tilde{a}_{mv}) dt = 0 \tag{13.48}$$

Pour  $\omega_0 T = k\pi$  ou  $\omega_0 T \gg 1$ , la deuxième intégrale du développement de (13.48) s'annule et l'estimation est donnée par

$$\int_0^T x(t) \cos(\omega_0 t + \tilde{a}_{mv}) dt = 0 \tag{13.49}$$

En tirant parti des identités trigonométriques rappelées à la section 15.2, l'estimation devient

$$\tilde{a}_{mv} = \arctan \left\{ \frac{\int_0^T x(t) \cos(\omega_0 t) dt}{\int_0^T x(t) \sin(\omega_0 t) dt} \right\} \tag{13.50}$$

L'évaluation des intégrales du numérateur et du dénominateur correspond à nouveau à une corrélation (fig. 13.7).

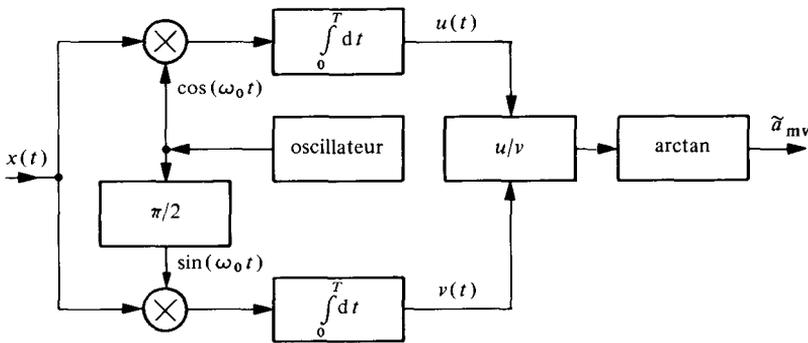


Fig. 13.7

L'intégrale (13.49) suggère toutefois une solution beaucoup plus intéressante : c'est la boucle à asservissement de phase (fig. 13.8) déjà rencontrée dans le contexte de la démodulation de fréquence et de phase (§ 11.3.9). La tension moyenne d'erreur  $\bar{\epsilon}$  contrôle en permanence l'oscillateur commandé (VCO = voltage controlled oscillator) de manière à introduire une correction automatique de phase  $\tilde{a}_{mv}$  ramenant  $\bar{\epsilon}$  à zéro.

D'autres exemples, parfois nettement plus compliqués, sont traités dans la littérature spécialisée citée.

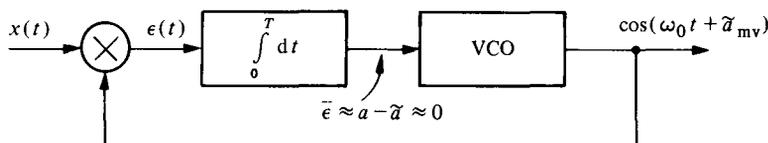


Fig. 13.8

### 13.1.7 Estimation linéaire. Définitions

Les critères d'estimation examinés précédemment requièrent au minimum la connaissance d'un modèle statistique du signal observé. Ils conduisent souvent à des estimateurs non linéaires.

En se limitant à une *estimation linéaire* du type

$$\tilde{a}_Q = S_Q\{x\} \quad (13.51)$$

où  $S_Q$  représente un opérateur linéaire (sect. 8.2), discret ou continu, l'information nécessaire a priori se réduit aux seules fonctions d'autocorrélation de l'observation  $x$  et d'intercorrélations de  $x$  avec la grandeur estimée  $a$ .

L'estimateur linéaire (fig. 13.9) peut souvent être considéré comme un filtre, numérique dans le cas discret et analogique dans le cas continu, dont la réponse impulsionnelle  $g$  doit satisfaire (13.51).

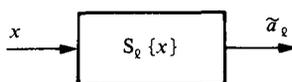


Fig. 13.9

Par analogie avec le théorème de la projection (3.26) qui définit les conditions optimales d'approximation linéaire d'un signal déterministe au sens des moindres carrés, l'estimation linéaire optimale  $\tilde{a}_{Q0}$  qui minimise l'erreur quadratique moyenne doit satisfaire le *principe d'orthogonalité* [24]. Celui-ci indique que *l'erreur d'estimation optimale  $a - \tilde{a}_{Q0}$  et l'observation  $x$  sont orthogonales*, c'est-à-dire que leur intercorrélations statistiques (sect. 5.4) doit être nulle

$$E[(a - \tilde{a}_{Q0})^* x] = E[x^*(a - \tilde{a}_{Q0})] = 0 \quad (13.52)$$

L'erreur quadratique moyenne minimale ainsi réalisée est alors donnée, de manière analogue à (3.29), par

$$E[(a - \tilde{a}_{Q0})^2] = E[a^*(a - \tilde{a}_{Q0})] = E[|a|^2] - E[|\tilde{a}_{Q0}|^2]$$

En développant (13.52), l'estimateur linéaire optimum est finalement défini par la solution de l'équation

$$E[x^* \tilde{a}_{Q0}] = E[x^* a] \quad (13.53)$$

On peut montrer [24] que, *dans le cas où l'observation est à statistique gaussienne, aucun estimateur non linéaire ne peut parvenir à une erreur quadratique moyenne plus faible que l'estimateur linéaire optimum.*

**13.1.18 Application à l'estimation numérique**

Soit un estimateur linéaire discret chargé d'interpréter  $N$  échantillons d'un signal aléatoire stationnaire  $x(t)$

$$\tilde{a}_{\ell_0} = S_{\ell} \{x\} = \sum_{j=1}^N g_j x_j \tag{13.54}$$

Les coefficients optimums  $g_j$  sont donnés par la solution de (13.53) qui se ramène à celle du système de  $N$  équations à  $N$  inconnues

$$\sum_{j=1}^N g_j R_x(i-j) = R_{xa}(i); \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{13.55}$$

où  $R_x(i-j) = E[\mathbf{x}_i \mathbf{x}_j^*]$  sont les éléments (§ 5.2.8) de la matrice d'autocorrélation  $R_x$  du vecteur d'observation  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  et  $R_{xa}(i) = E[\mathbf{x}_i^* \mathbf{a}]$  sont les intercorrélations des  $x_i$  avec la grandeur estimée  $a$ .

En regroupant ces valeurs d'intercorrélation dans un vecteur colonne  $R_{xa}$  et les coefficients  $g_j$  dans un vecteur colonne  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_N)$ , le système d'équation (13.55) s'écrit simplement

$$R_x \mathbf{g} = R_{xa} \tag{13.56}$$

dont la solution est, avec  $R_x^{-1}$  la matrice inverse de  $R_x$  :

$$\mathbf{g} = R_x^{-1} R_{xa} \tag{13.57}$$

**13.1.19 Exemple : observation simple d'un signal en présence de bruit**

Soit  $x(t) = s(t) + n(t)$  où  $s(t) = a(t)$  est le signal à estimer et  $n(t)$  est un bruit à valeur moyenne nulle non corrélé à  $s(t)$ . On forme l'estimation simple  $\tilde{a}_{\ell} = \tilde{s}(t) = g x(t)$ . Par (13.57), le coefficient optimum  $g$  correspond à

$$g_0 = R_{xa}(0)/R_x(0) = R_s(0)/[R_s(0) + R_n(0)] \tag{13.58}$$

**13.1.20 Exemple et définition : prédiction linéaire**

Soit un signal aléatoire  $x(t)$  connu à l'instant  $t$ . On désire prévoir sa valeur  $a(t) = x(t+T)$  à l'instant  $t+T$  par une simple prédiction linéaire  $\tilde{a}_{\ell} = \tilde{x}(t+T) = g x(t)$ . Par (13.57), le coefficient optimum  $g$  du système prédicteur (fig. 13.10) vaut

$$g_0 = R_x(T)/R_x(0) \tag{13.59}$$

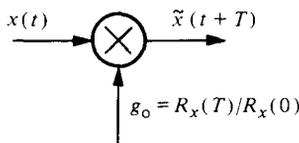


Fig. 13.10

Dans un cas plus général, la valeur estimée du signal  $\tilde{x}(t+T)$  est prédite par une combinaison linéaire des  $N$  valeurs précédentes  $x(t-iT)$  avec  $i = 0, 1, \dots, N-1$

$$\tilde{a}_\varrho = \tilde{x}(t+T) = \sum_{i=0}^{N-1} g_i x(t-iT) \tag{13.60}$$

La structure de l'estimateur (fig. 13.11) est celle d'un filtre numérique transversal (chap. XX.5) dont les coefficients  $g_i$  sont donnés par la solution de (13.57) qui devient ici

$$\mathbf{g} = \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{R}_x \tag{13.61}$$

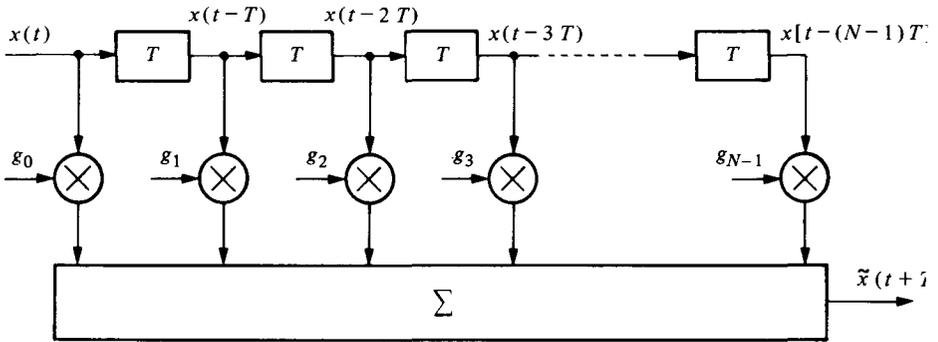


Fig. 13.11

Le vecteur  $\mathbf{R}_x = \{R_x(0), R_x(T), R_x(2T), \dots, R_x[(N-1)T]\}$  et  $\mathbf{R}_x^{-1}$  est l'inverse de la matrice de corrélation

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} R_x(0) & \dots & R_x(T) & \dots & R_x[(N-1)T] \\ R_x(T) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & R_x(T) \\ R_x[(N-1)T] & \dots & R_x(T) & \dots & R_x(0) \end{bmatrix} \tag{13.62}$$

La *prédiction linéaire* est utilisée, par exemple, en traitement de la parole (codage par vocodeur, synthèse, reconnaissance automatique), en analyse spectrale (méthodes paramétriques), en identification de systèmes linéaires dynamiques (réglage automatique) et pour la correction des imperfections des caractéristiques de voies de communication en transmission numérique (égalisation).

**13.1.21 Application : filtrage linéaire optimum**

Si l'estimation  $\tilde{a}_\varrho$  est représentée par le signal de sortie d'un filtre linéaire, de réponse impulsionnelle  $g(t)$ , excité par l'observation, supposée ici stationnaire,  $x(t)$ , on a par (8.12)

$$\tilde{a}_\varrho(t) = S_\varrho \{x(t)\} = x(t) * g(t) \tag{13.63}$$

L'introduction de (13.63) dans (13.53) conduit au produit de convolution

$$R_x(\tau) * g_o(\tau) = R_{xa}(\tau) \tag{13.64}$$

Par transformation de Fourier, la fonction de réponse fréquentielle du filtre optimum (généralement non causal) est

$$G_o(f) = \Phi_{xa}(f)/\Phi_x(f) \tag{13.65}$$

Si  $x(t) = s(t) + n(t)$ , avec  $s(t)$  un signal à extraire au mieux d'un bruit  $n(t)$  indépendant à valeur moyenne nulle, la solution (13.65) devient

$$G_o(f) = \Phi_s(f)/[\Phi_s(f) + \Phi_n(f)] \tag{13.66}$$

Dans le cas très particulier où l'observation  $x(t)$  est un bruit blanc, de fonction d'autocorrélation  $\frac{1}{2} \eta \delta(\tau)$ , la réponse impulsionnelle optimale tirée de (13.64) devient, par (1.47)

$$g_o(t) = 2\eta^{-1} R_{xa}(t) \tag{13.67}$$

Le traitement en temps différé ne requiert pas nécessairement une réponse impulsionnelle causale. Celle-ci s'impose, par contre, dans tout traitement en temps réel et, en particulier, dans les traitements analogiques. Dans ce cas, une bonne approximation causale du filtre optimum peut souvent s'obtenir en introduisant un retard adéquat  $t_0$  et en considérant la fonction

$$\tilde{g}_o(t) = g_o(t - t_0) \epsilon(t) \tag{13.68}$$

où  $\epsilon(t)$  dénote, comme d'habitude, la fonction saut unité.

**13.1.22 Définition: filtre de Wiener**

Le nom de *filtre de Wiener* est associé à la solution de l'équation (13.64) sous la condition additionnelle de causalité:  $g_o(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

Par exemple, si  $x(t)$  est du bruit blanc de densité spectrale  $\frac{1}{2} \eta$ , la réponse impulsionnelle causale optimale devient simplement

$$g_o(t) = 2\eta^{-1} R_{xa}(t) \epsilon(t) \tag{13.69}$$

Une solution plus générale est obtenue en imaginant de décomposer le filtre de Wiener en une mise en cascade (fig. 13.12) de deux filtres de réponses  $g_1(t) \leftrightarrow G_1(f)$  et  $g_2(t) \leftrightarrow G_2(f)$ . Le premier a pour rôle de transformer l'observation  $x(t)$ , de densité spectrale  $\Phi_x(f)$ , en un bruit blanc  $z(t)$  de densité spectrale unité  $\Phi_z(f) = 1$ . Par (8.24), on a immédiatement

$$|G_1(f)|^2 = G_1^*(f) G_1(f) = \Phi_x^{-1}(f) \tag{13.70}$$

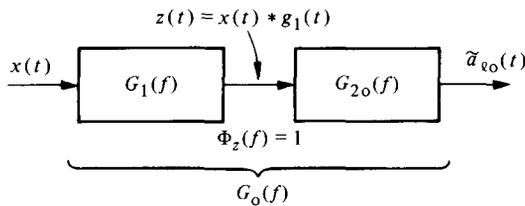


Fig. 13.12

Par (13.69), le deuxième filtre peut être rendu optimum pour l'observation transformée  $z(t)$  en posant

$$g_{2o}(t) = R_{za}(t) \epsilon(t) \quad (13.71)$$

En dénotant par  $[\Phi_{za}(f)]_+$  la transformée de Fourier de (13.71), on obtient, avec  $R_{za}(\tau) = g_1(-\tau) * x(-\tau) * a(\tau) = g_1(-\tau) * R_{xa}(\tau)$ :

$$G_{2o}(f) = [\Phi_{za}(f)]_+ = [G_1^*(f) \Phi_{xa}(f)]_+ \quad (13.72)$$

En exprimant enfin  $\Phi_x(f)$  sous la forme d'un produit de deux fonctions conjuguées (factorisation toujours possible si cette densité spectrale est représentée par une fonction rationnelle : son caractère non négatif, réel et pair impliquant que ses racines sont complexes, conjuguées ou réelles d'ordre pair)

$$\Phi_x(f) = \Psi_x(f) \Psi_x^*(f) \quad (13.73)$$

de telle sorte que, par identification avec (13.70), la réponse fréquentielle

$$G_1(f) = \Psi_x^{-1}(f) \quad (13.74)$$

soit aussi celle d'un filtre causal (racines pour  $f > 0$ ), le filtre de Wiener est défini par

$$G_o(f) = G_1(f) G_{2o}(f) = \frac{1}{\Psi_x(f)} \left[ \frac{\Phi_{xa}(f)}{\Psi_x^*(f)} \right]_+ \quad (13.75)$$

### 13.1.23 Définition: filtre de Kalman

Si l'on lève la restriction de stationnarité, la relation (13.64) est remplacée par l'équation intégrale plus générale (*équation de Wiener-Hopf*)

$$\int R_x(t_1, u) g_o(t_2, u) du = R_{xa}(t_1, t_2) \quad (13.76)$$

Le nom de *filtre de Kalman* [136] est donné à une forme de solution de l'équation de Wiener-Hopf dans laquelle l'estimation, continue ou discrète, est de type récurrente.

Dans un cas simple, on aura par exemple pour un estimateur numérique

$$\tilde{a}(k) = \tilde{a}(k-1) + \beta(k)[x(k) - \tilde{a}(k-1)] \quad (13.77)$$

L'estimation du  $k$ -ième échantillon est égale à l'estimation précédente complétée par un terme correctif dépendant de la différence entre l'observation courante et l'estimation précédente. Le coefficient  $\beta(k)$  est, au besoin, adapté à chaque pas.

Le filtre de Kalman généralise celui de Wiener et s'applique surtout au traitement de signaux non stationnaires. Son étude sort du cadre de cet ouvrage. Il est principalement utilisé pour l'identification permanente de systèmes évolutifs et la prédiction des valeurs effectives de paramètres imposés en réglage automatique, la détermination d'orbites de véhicules spatiaux, etc.

### 13.1.24 Estimation de valeurs moyennes

L'estimation d'une valeur moyenne  $a = \mu_x$  joue un rôle essentiel en traitement des signaux. On la rencontre dans de nombreuses applications: analyse spectrale, corrélation, mesure de puissance, etc.

L'estimateur linéaire courant est le moyennneur temporel parfait décrit au paragraphe 8.2.19. Il évalue la moyenne glissante

$$\tilde{a}_q = \bar{x}(t, T) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(t) dt \tag{13.78}$$

dans sa version continue. Sous forme numérique, il calcule la moyenne arithmétique

$$\tilde{a}_q = \bar{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=k-N+1}^k x_i = \bar{x}_{k-1} + (x_k - x_{k-N})/N \tag{13.79}$$

C'est, d'une manière générale, un estimateur non biaisé, consistant et asymptotiquement efficace. Il n'est, par contre, pas optimum au sens du paragraphe 13.1.17 comme le montre l'exemple 13.1.12. Dans ce cas (statistique gaussienne), il réalise une estimation à vraisemblance maximale:  $\tilde{a}_q = \tilde{a}_{mv}$ .

La variance de l'estimation (13.78) dépend de la durée d'intégration  $T$  et est donnée par (8.44)

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tri}(\tau/T) C_x(\tau) d\tau \tag{13.80}$$

où  $C_x(\tau) = R_x(\tau) - \mu_x^2$  est la fonction d'autocovariance de l'observation (supposée ici stationnaire et ergodique).

Le rapport signal sur bruit avant estimation est  $\xi_x = a^2/\sigma_x^2$ . Après estimation, on a  $\xi_{\bar{x}} = a^2/\sigma_{\bar{x}}^2$  et l'amélioration du rapport signal sur bruit réalisée correspond simplement au rapport des variances.

Par analogie, on obtient pour l'estimation discrète basée sur  $N$  échantillons prélevés périodiquement avec un pas  $T_e$ , avec  $x_i = x(iT_e)$ ,  $T = NT_e$ ,  $\tau = iT_e$  et en tenant compte de (9.14)

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} \text{tri}(i/N) C_x(iT_e) = \frac{\sigma_x^2}{N} + \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) C_x(iT_e) \tag{13.81}$$

Si les échantillons sont **non corrélés**:  $C_x(iT_e) = 0$  pour  $i \neq 0$  et

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma_x^2/N \tag{13.82}$$

**Dans ce cas, l'amélioration du rapport signal sur bruit est proportionnelle au nombre  $N$  d'échantillons considérés.** C'est un résultat classique en statistique.

D'une manière générale, on constate par (8.37) que n'importe quel système linéaire causal dont la réponse indicielle  $\gamma(t)$  satisfait à la condition

$$\gamma(\infty) = \int_0^{\infty} g(t) dt = 1 \tag{13.83}$$

peut servir d'estimateur (imparfait) de valeur moyenne. La mesure étant pratiquement effectuée après un temps d'établissement  $T_0$  non infini, celui-ci doit être choisi de manière à avoir  $\gamma(T_0) \approx 1$  sous peine d'introduire un biais important.

L'exemple le plus familier est le moyennneur à oubli progressif défini par

$$g(t) = \alpha^{-1} \exp(-t/\alpha) \epsilon(t) \tag{13.84}$$

qui correspond à un filtre passe-bas du premier ordre, de constante de temps  $\alpha$ . La variance de l'estimation est donnée, selon (8.38), par

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} C_x(\tau) \exp(-\tau/\alpha) d\alpha \quad (13.85)$$

La réalisation pratique d'un tel estimateur est usuellement le filtre *RC* du paragraphe 8.2.24 en technique analogique. Afin d'afficher facilement les résultats progressifs du calcul, on simule souvent le filtre *RC* par voie numérique (sect. XX.5.4) à l'aide d'une équation de récurrence approximative du type

$$\tilde{a}_k = \bar{x}_k = \bar{x}_{k-1} + (x_k - \bar{x}_{k-1})/K \approx \frac{1}{K} \sum_{i=k-N+1}^k x_i \exp[-(k-i)/K] \quad (13.86)$$

où  $K$  est un entier fixe  $> 1$  (généralement une puissance de 2 pour simplifier la division). La constante de temps équivalente est proportionnelle à  $K$ .

### 13.1.25 Performances comparées

En cas de bruit blanc, la fonction d'autocovariance  $C_x(\tau) = \frac{1}{2} \eta \delta(\tau)$  et  $\sigma_x^2 = \frac{1}{2} \eta / T$  pour le moyennneur parfait et  $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{4} \eta / \alpha$  pour le filtre passe-bas du premier ordre de constante de temps  $\alpha$ . Les mêmes performances en terme de rapport signal sur bruit de mesure sont donc atteintes si  $T = 2\alpha$ .

En raison de sa réponse indicielle  $\gamma(t) = 1 - \exp(-t/\alpha)$ , le filtre du premier ordre nécessite toutefois un temps d'établissement de l'ordre de  $T_0 \approx 4$  ou  $5\alpha$  pour assurer une estimation raisonnablement non biaisée. Avec le moyennneur parfait, ce temps d'établissement est limité à  $T$ .

### 13.1.26 Application: extraction d'un signal répétitif noyé dans le bruit de fond.

#### Définitions

Le principe suivant de récupération d'un signal très fortement perturbé, mais susceptible de se répéter selon un horaire connu, est utilisé dans différents domaines, en particulier en physique et en électrophysiologie. Il est connu sous les noms de *détection par accumulation*, *par intégration*, *par moyennage* (en anglais: *signal averaging*).

Soit  $\{s(t - t_i)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , un ensemble de signaux de forme identique et de durée finie  $T$  apparaissant généralement en réponse à des excitations (stimulus) appliquées aux instants connus  $t_i$  (fig. 13.13). Si l'observation disponible est

$$x(t) = \sum_{i=1}^N s(t - t_i) + n(t) \quad (13.87)$$

où  $n(t)$  est un bruit à valeur moyenne nulle et valeur efficace (écart-type) largement supérieure aux amplitudes des signaux  $s(t - t_i)$ , ceux-ci sont littéralement noyés dans le bruit et aucune analyse directe n'est envisageable.

Une estimation de la forme de la réponse  $s(t)$  au stimulus est toujours possible en tirant parti du caractère répétitif (périodique ou non) du phénomène, pour autant que  $t_{i+1} - t_i \geq T$ . Un échantillonnage est effectué aux instants  $t_i + kT_e$ , avec  $T_e \ll T$ . Pour

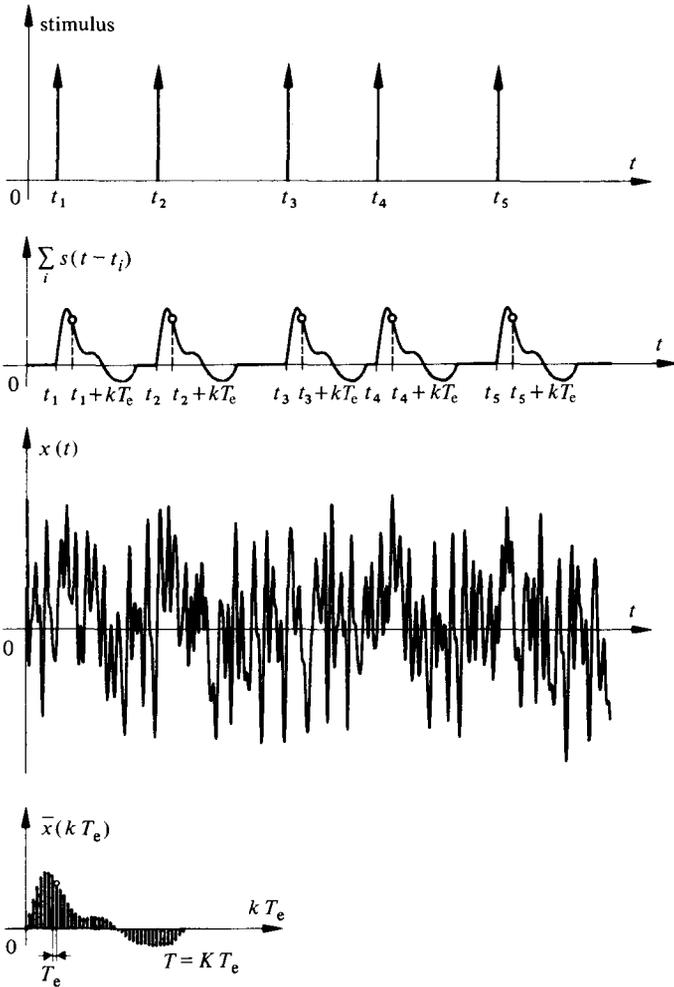


Fig. 13.13

une valeur  $k$  donnée, on a

$$x_i \hat{=} s(kT_e) + n_i \tag{13.88}$$

La valeur instantanée  $s(kT_e)$  représente ainsi la valeur moyenne des échantillons  $x_i$ . L'estimation (13.79) donne ici

$$\bar{x}(kT_e) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = s(kT_e) + \bar{n} \tag{13.89}$$

où  $\bar{n}$  est la moyenne arithmétique des  $N$  échantillons de bruit seuls. Si ces échantillons sont indépendants (donc non corrélés),  $\bar{n}$  devient gaussienne en vertu du théorème de la limite centrale (§ 5.3.3) et sa variance vaut, par (13.82)

$$\sigma_{\bar{n}}^2 = \sigma_n^2/N \tag{13.90}$$

Le rapport signal sur bruit après  $N$  sommations est ainsi amélioré d'un facteur  $N$ . Par exemple, pour  $N = 1000$ , l'amélioration est de 30 dB. Il n'y a théoriquement pas de limite à l'amélioration réalisable pour autant que  $N \rightarrow \infty$ . Les limitations pratiques sont liées à  $N \ll \infty$ , à la connaissance imparfaite des instants  $t_i$  (gigue du signal de synchronisation) et aux déformations possibles des signaux  $s(t - t_i)$  eux-mêmes.

En opérant cette estimation de valeur moyenne sur un ensemble de valeurs  $k = 0, 1, \dots, K$ , on reconstitue le signal  $s(t)$  sur l'intervalle  $[0, K T_e]$ .

Cette reconstitution peut se faire en mode *parallèle* si l'on enregistre à chaque réalisation du signal  $s(t - t_i)$  un ensemble d'échantillons  $s(k T_e - t_i)$  avec  $k = 0, 1, \dots, K$ .

Il est possible aussi d'utiliser un mode *séquentiel* : c'est la solution adoptée sur les dispositifs analogiques connus sous le nom de *moyenneur à échantillonnage* ou *boxcar integrator*. Un échantillonnage réel (§ 9.2.2) de l'observation  $x(t)$  est effectué aux instants  $t_i + \tau$  et la suite d'impulsions modulées en amplitude ainsi obtenue est présentée à un filtre moyenneur. En faisant varier progressivement et lentement le retard  $\tau$ , la sortie du moyenneur reconstitue séquentiellement  $\tilde{s}(\tau)$ . On peut montrer (ex. 13.5.14) qu'en régime de stimulation périodique de période  $T$ , le moyenneur se comporte comme un filtre en peigne très sélectif (réponse fréquentielle non nulle seulement au voisinage des harmoniques  $n f_1 = n/T$  du signal à récupérer).

## 13.2 COMPARAISON DE SIGNAUX

### 13.2.1 Techniques de corrélation

L'importance de la corrélation — ou du produit scalaire de deux signaux — dans les problèmes de détection et d'estimation a déjà été signalée dans la section précédente. La relation formelle entre le produit scalaire et la distance euclidienne est établie au paragraphe 3.1.13.

Diverses techniques de corrélation sont utilisées [38, 67, 137]. Elles servent parfois à révéler l'existence d'un signal attendu et à en mesurer certains paramètres. Plus souvent, elles sont un moyen de comparer deux signaux afin de mettre en évidence leur degré de ressemblance ou d'estimer leur retard relatif. Ceci permet, par exemple [138], d'assurer une synchronisation, d'estimer une vitesse de déplacement (fig. 13.14), de localiser la position d'une source de bruit ou de vibration (fig. 13.15), de mesurer des caractéristiques acoustiques (fig. 13.16) ou biophysique (fig. 13.17).

Comme en analyse spectrale, diverses approches pour estimer la fonction de corrélation sont disponibles. La solution directe (fig. 13.18) se déduit de l'équation

$$\tilde{\varphi}_{xy}(t, \tau) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(t' - \tau) y(t') dt' \quad (13.91)$$

ou de sa version discrète (numérique)

$$\tilde{\varphi}_{xy}(m, k) = \frac{1}{K} \sum_{l=m-K+1}^m x(l-k) y(l) \quad (13.92)$$

L'approche numérique indirecte (fig. 13.19) se déduit de (4.65) et tire parti des algorithmes de calcul rapide de la transformation de Fourier.

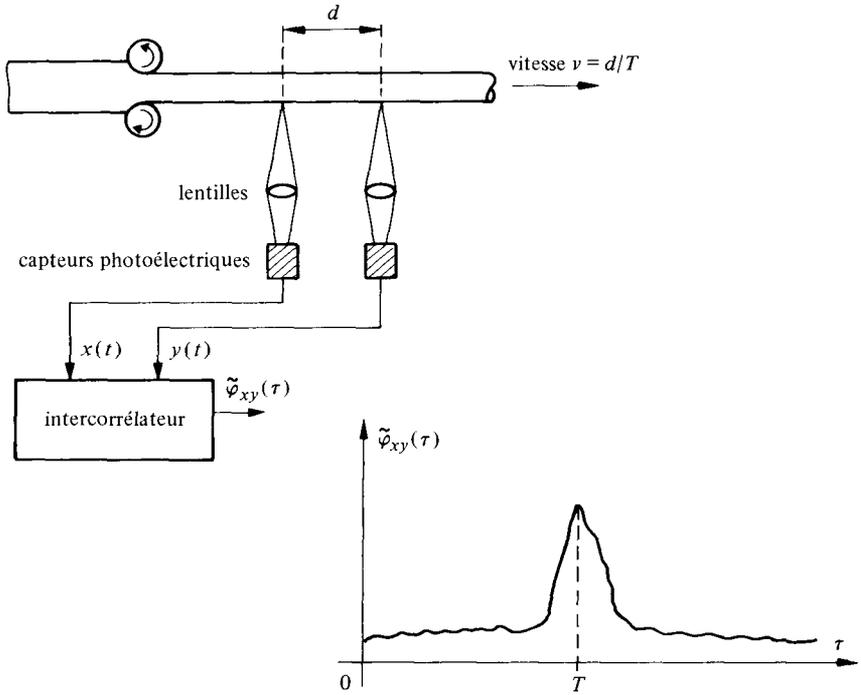


Fig. 13.14 Une mesure de la vitesse de défilement (d'un produit laminé par exemple) peut être obtenue en déterminant la position du maximum de la fonction d'intercorrélation des signaux de deux capteurs photoélectriques. Ceux-ci reçoivent la lumière, modulée par les irrégularités de surface, réfléchiée en deux endroits différents du corps en mouvement situés à une distance  $d$  l'un de l'autre.

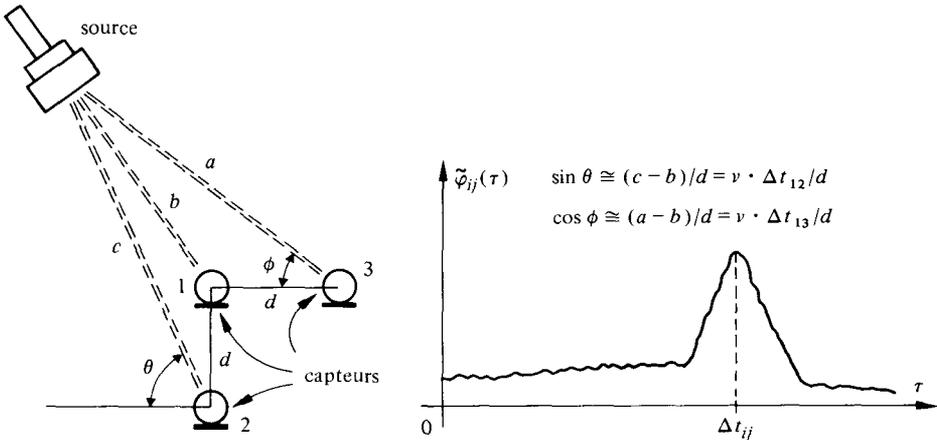


Fig. 13.15 Deux mesures successives suffisent pour déterminer les angles  $\theta$  et  $\phi$  définissant la position d'une source de vibrations par rapport à trois capteurs placés dans le même plan sur les sommets d'un carré dont le côté vaut  $d$ , connaissant la vitesse de propagation  $v$  des vibrations. L'intercorrélation permet d'estimer la différence  $\Delta t_{ij}$  des temps de propagation entre la source et les capteurs 1 et 2 d'une part, 1 et 3 d'autre part.

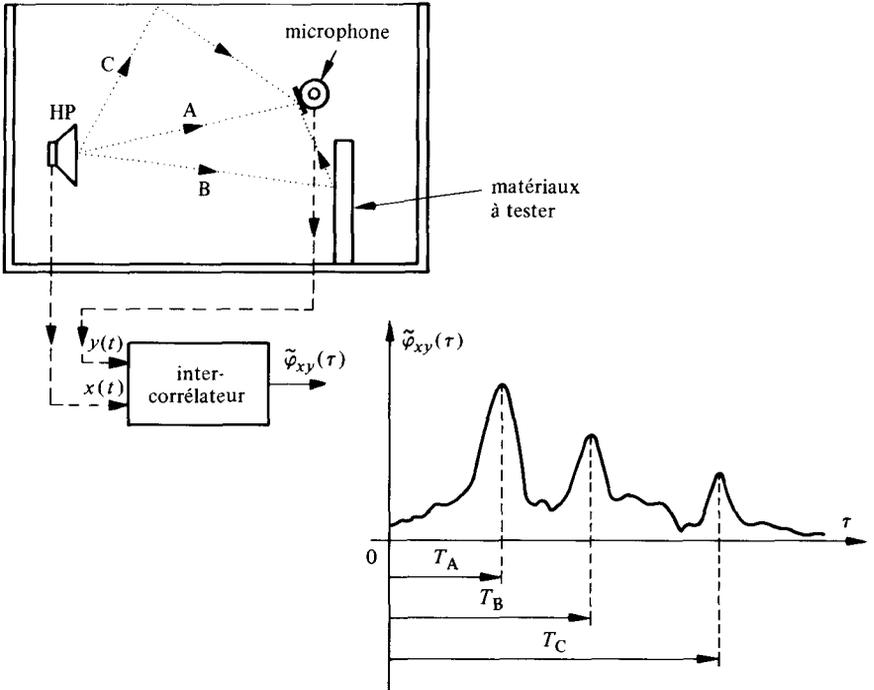


Fig. 13.16 Exemple de mesure acoustique : l'intercorrélation du signal d'entrée du haut-parleur (HP) et du signal de sortie du microphone permet de mettre en évidence différents chemins de propagation et de mesurer leurs coefficients d'absorption.

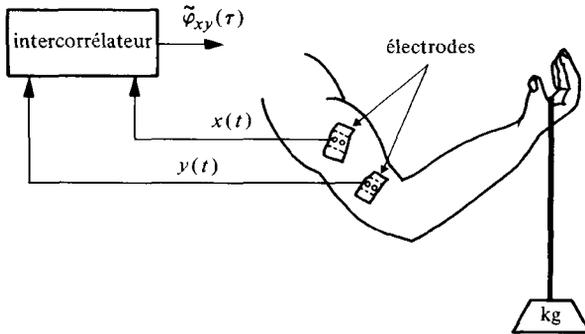


Fig. 13.17 L'intercorrélation des signaux provenant de deux électrodes placées sur un muscle permet de détecter si des cellules musculaires voisines travaillent d'une manière cohérente ou incohérente. Cette intercorrélation fournit une information utile sur la condition musculaire

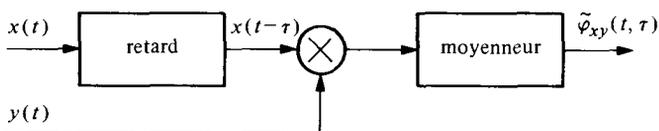


Fig. 13.18

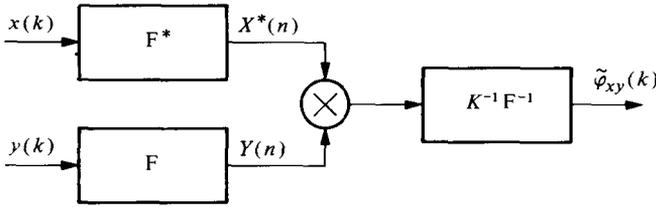


Fig. 13.19

**13.2.2 Erreur d'estimation**

Pour un retard  $\tau$  donné, la valeur mesurée  $\tilde{\varphi}_{xy}(\tau)$  est une réalisation particulière d'une variable aléatoire si les signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  sont aléatoires (et considérés ici comme stationnaires et ergodiques). Sa valeur moyenne

$$E[\tilde{\varphi}_{xy}(\tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T E[\mathbf{x}(t-\tau) \mathbf{y}(t)] dt = R_{xy}(\tau) = \varphi_{xy}(\tau) \tag{13.93}$$

est égale à la valeur théorique limite : l'estimation est donc non biaisée.

Sa variance est exprimée par (13.80)

$$\sigma_{\tilde{\varphi}}^2 = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} C_z(u) \text{tri}(u/T) du \tag{13.94}$$

où  $C_z(u)$  est la fonction de covariance du produit  $z(t) = x(t-u)y(t)$ .

Si la durée d'intégration  $T$  est beaucoup plus grande que la durée équivalente de corrélation (7.144) de  $z(t)$

$$\sigma_{\tilde{\varphi}}^2 \approx \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} C_z(u) du = \frac{C_z(0)}{B_\tau T} \tag{13.95}$$

où  $C_z(0)$  est l'autocovariance à l'origine de  $z(t) = x(t)y(t)$  et  $B_\tau = D_\tau^{-1}$  est la largeur de bande approximative du signal  $z(t)$ .

**13.2.3 Exemple : estimation de l'autocorrélation d'un signal gaussien à valeur moyenne nulle**

Considérons l'estimation de la valeur à l'origine  $\tilde{\varphi}_x(0)$  de la fonction d'autocorrélation d'un signal  $x(t)$  gaussien à valeur moyenne nulle. On a ici  $z(t) = x^2(t)$  et  $R_x(\tau) \equiv C_x(\tau)$ .

Par (8.148),  $R_z(\tau) = 2R_x^2(\tau) + R_x^2(0)$  et  $C_z(\tau) = 2R_x^2(\tau)$  d'où

$$\sigma_{\tilde{\varphi}}^2(0) = \frac{2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} R_x^2(u) \text{tri}(u/T) du \tag{13.96}$$

Si  $x(t)$  est un bruit blanc borné de densité spectrale  $\Phi_x(f) = \frac{1}{2} \eta \text{rect}(\frac{1}{2} f/B)$ ,  $R_x^2(u) = \eta^2 B^2 \text{sinc}^2(2Bu)$  et, pour  $T \gg B^{-1}$

$$\sigma_{\tilde{\varphi}}^2(0) \approx \frac{R_x^2(0)}{BT} \tag{13.97}$$

avec  $R_x(0) = \eta B \equiv \varphi_x(0)$ . Le rapport signal sur bruit de mesure vaut

$$\xi = \varphi_x^2(0) / \sigma_{\tilde{\varphi}}^2(0) = BT \quad (13.98)$$

Ceci met en évidence, une nouvelle fois, le rôle du produit  $BT$  dans l'estimation de valeurs moyennes

### 13.2.4 Corrélateurs simplifiés

Il est parfois suffisant d'évaluer la corrélation à l'aide de structures simplifiées exploitant la grande tolérance de cette fonction aux déformations non linéaires du signal.

La solution la plus simple (fig. 13.20) consiste à considérer la corrélation des fonctions signes des signaux à comparer

$$\tilde{\varphi}_{uv}(t, \tau) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \text{sgn}[x(t' - \tau)] \text{sgn}[y(t')] dt' \quad (13.99)$$

avec  $u(t) = \text{sgn}[x(t)]$  et  $v(t) = \text{sgn}[y(t)]$ .

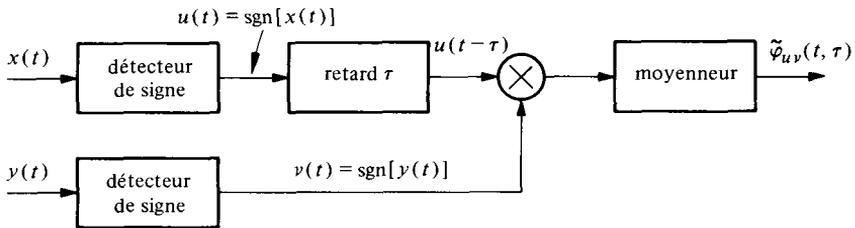


Fig. 13.20

La quantification à deux niveaux (1 bit) facilite la réalisation de l'opérateur de retard et celle du multiplicateur dont l'équivalent logique est l'opérateur Ou-exclusif (§ V.1.6.1). Malgré l'introduction des opérateurs non linéaires de détection de signe, la fonction d'intercorrélation calculée  $\tilde{\varphi}_{uv}(\tau)$  conserve certaines propriétés de  $\varphi_{xy}(\tau)$ , en particulier la position de son maximum.

Dans le cas de signaux gaussiens à valeur moyenne nulle, on montre (§ 8.4.15 et exercice 8.5.28) que la corrélation statistique de  $u(t)$  et  $v(t)$  est liée à celle de  $x(t)$  et  $y(t)$  par la relation simple

$$R_{uv}(\tau) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (13.100)$$

En ajoutant aux signaux  $x(t)$  et  $y(t)$  des bruits aléatoires (pratiquement : pseudo-aléatoires) indépendants, à distribution uniforme, on peut rendre les fonctions  $R_{uv}(\tau)$  et  $R_{xy}(\tau)$  proportionnelles pour une classe très large de signaux [67].

Un résultat semblable (exercice 8.5.29) est obtenu dans le cas d'un corrélateur à structure hybride dans lequel seule une voie comprend un détecteur de signe. La multiplication revient ici à inverser ou non le signe de l'autre voie.

**13.2.5 Détection de signaux périodiques par autocorrélation**

Soit à détecter l'existence et estimer la période  $T_0$  d'un signal périodique inconnu  $s(t) = s(t + mT_0)$  noyé dans un bruit de fond  $n(t)$  indépendant et à valeur moyenne nulle. Le signal observé est  $x(t) = s(t) + n(t)$ . La fonction d'autocorrélation d'un signal périodique est elle-même périodique (§ 4.4.12) de période  $T_0$ . Par contre, la fonction d'autocorrélation du bruit de fond (que l'on peut supposer filtré) est une fonction qui tend vers zéro lorsque  $\tau$  tend vers l'infini. Par (5.191) et en admettant que les signaux considérés soient ergodiques, on a

$$\varphi_x(\tau) = \varphi_s(\tau) + \varphi_n(\tau) \tag{13.101}$$

Pour  $\tau$  beaucoup plus grand que la durée de corrélation équivalente (§ 7.5.13) du bruit  $D_\tau = 1/B_\tau$

$$\varphi_x(\tau \gg D_\tau) \approx \varphi_s(\tau) \tag{13.102}$$

Si, en plus, la forme générale du signal  $s(t)$  est connue, il est possible de déduire de  $\varphi_x(\tau)$  non seulement la période, mais aussi une information d'amplitude.

La fonction effectivement mesurée (fig. 13.21) peut s'exprimer sous la forme

$$\tilde{\varphi}_x(\tau) = \varphi_x(\tau) + \varphi_\epsilon(\tau) \tag{13.103}$$

où  $\varphi_\epsilon(\tau)$  représente l'erreur (bruit + biais) résiduelle due à la durée d'intégration  $T$  limitée avec

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \varphi_\epsilon(\tau) = 0 \tag{13.104}$$

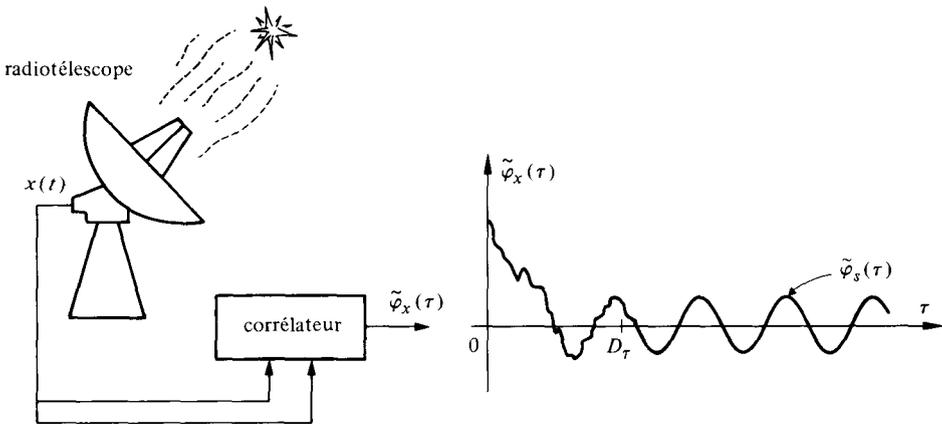


Fig. 13.21 Illustration de la détection de signaux cosmiques périodiques en astrophysique.

**13.2.6 Détection de signaux par intercorrélation**

Soit deux signaux perturbés contenant des versions décalées du même signal utile  $s(t)$

$$x(t) = s(t - t_1) + n_1(t) \tag{13.105}$$

et

$$y(t) = s(t - t_2) + n_2(t) \tag{13.106}$$

où  $n_1(t)$  et  $n_2(t)$  sont des bruits indépendants à valeur moyenne nulle. Toujours sous l'hypothèse d'ergodisme, la fonction d'intercorrrelation théorique de  $x(t)$  et  $y(t)$  vaut

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_s(\tau - t_2 + t_1) \quad (13.107)$$

et son maximum se situe en  $\tau = t_2 - t_1$  (fig. 13.22).

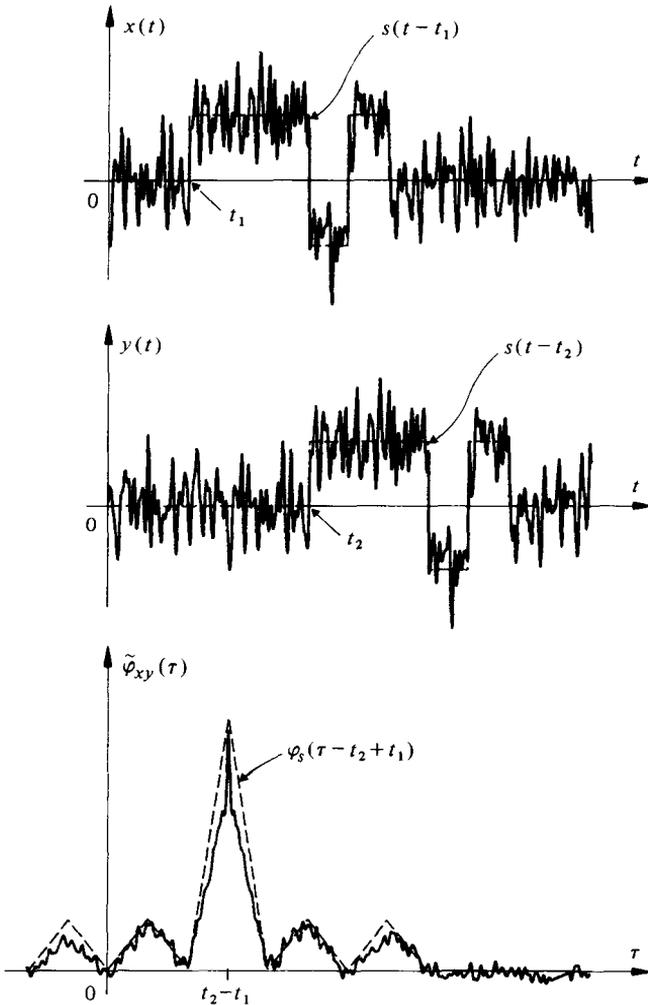


Fig. 13.22

La fonction mesurée peut, à nouveau, s'exprimer sous la forme

$$\tilde{\varphi}_{xy}(\tau) = \varphi_{xy}(\tau) + \varphi_\epsilon(\tau) \quad (13.108)$$

où  $\varphi_\epsilon(\tau)$  tient compte des erreurs résiduelles dues à la durée d'intégration limitée.

La détection par intercorrrelation s'apparente au filtrage adapté décrit à la section 13.4.

**13.2.7 Application : mesure du retard entre deux signaux aléatoires**

La phase relative entre deux sinusoïdes se mesure en comparant leurs passages par zéro. Le décalage relatif entre deux versions retardées d'un signal aléatoire est beaucoup plus délicat à estimer.

La technique la plus efficace est celle de l'intercorrélation (fig. 13.23). Le retard cherché correspond à l'abscisse du maximum de (13.107). La mesure de cette position est d'autant plus précise que la fonction d'autocorrélation du signal aléatoire est proche d'une impulsion de Dirac, c'est-à-dire que son spectre est à large bande.

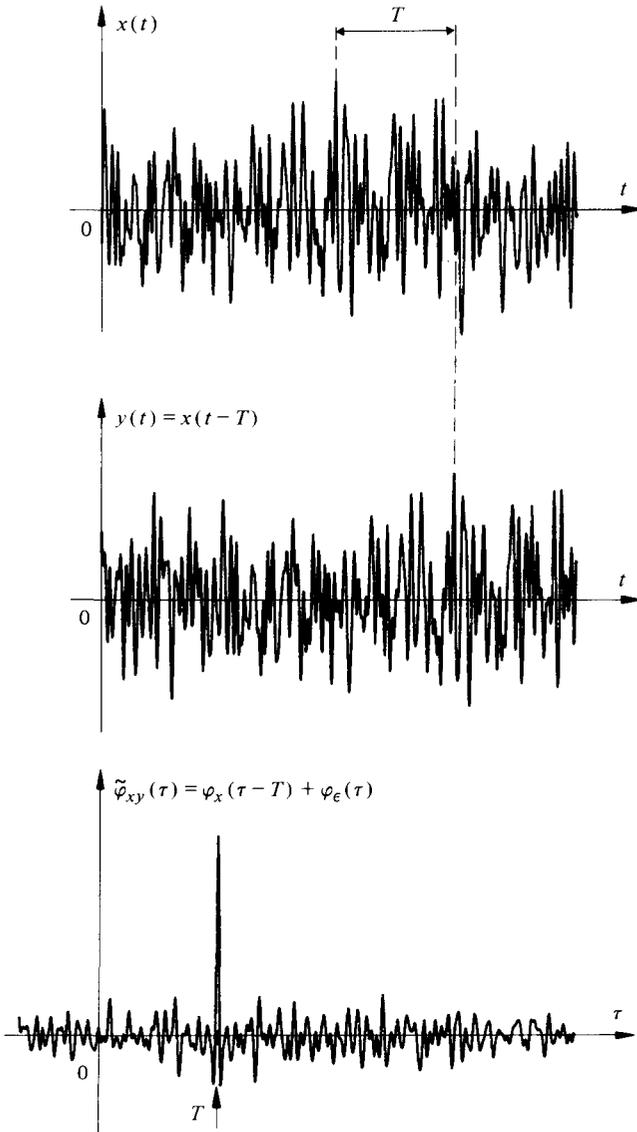


Fig. 13.23

### 13.2.8 Application : synchronisation

La boucle à asservissement de phase (fig. 13.8) est une technique classique de synchronisation de signaux sinusoïdaux ou périodiques en général. Elle réalise en fait une corrélation (multiplication suivie d'une intégration) en assurant, grâce à la boucle d'asservissement, l'orthogonalité maximale (corrélation nulle) du signal reçu et de celui généré par l'oscillateur commandé.

A très faible rapport signal sur bruit, l'accrochage initial est difficile à réaliser.

L'intercorrélation d'un signal – dont l'autocorrélation se rapproche d'une impulsion de Dirac – avec sa réplique générée au niveau du récepteur est un moyen efficace de mise en synchronisme. Le signal périodique pseudo-aléatoire décrit à la section 5.10 est souvent utilisé à cet effet [73].

### 13.2.9 Récupération de signaux périodiques par intercorrélation synchrone. Définition

Considérons le problème de l'extraction d'un signal périodique  $s(t)$  d'un bruit de fond  $n(t)$ , indépendant et à valeur moyenne nulle, lorsque l'on dispose d'un signal auxiliaire  $u(t)$  parfaitement synchrone.

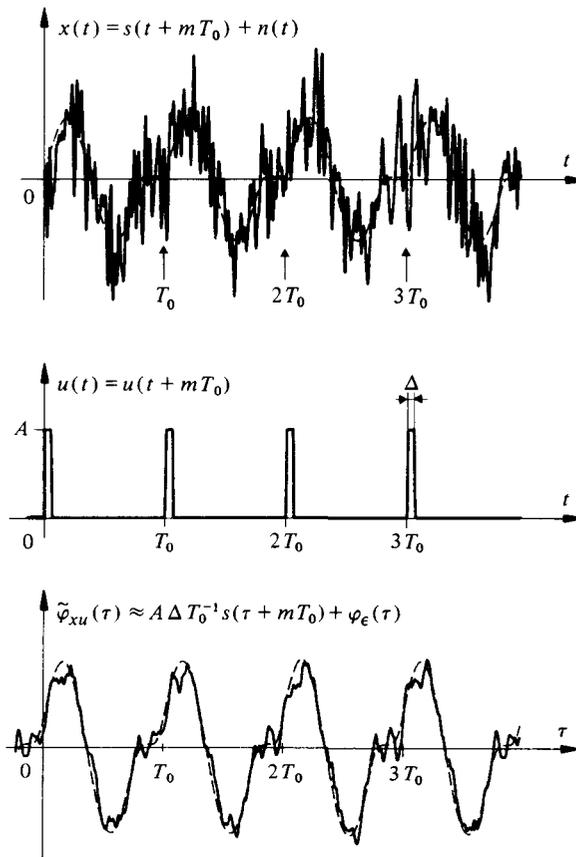


Fig. 13.24

Le signal à extraire peut s'exprimer par les formes équivalentes  $s(t) = s(t + mT_0) = s(t, T_0) * \delta_{T_0}(t)$ . Le signal observé est  $x(t) = s(t) + n(t)$ . L'intercorrélation mesurée (fig. 13.24) est

$$\tilde{\varphi}_{xu}(\tau) = \varphi_{xu}(\tau) + \varphi_\epsilon(\tau) \tag{13.109}$$

où  $\varphi_\epsilon(\tau)$  représente l'erreur résiduelle.

Si  $u(t)$  est une suite périodique d'impulsions très courtes, de même période  $T_0$  et d'amplitude très élevée – modélisée ici, pour simplifier, par une suite périodique d'impulsions de Dirac  $\delta_{T_0}(t)$  – la fonction d'intercorrélation théorique devient, par (1.57), (4.98) et (4.138)

$$\varphi_{xu}(\tau) = \delta_{T_0}(-\tau) \overline{x(\tau)} = T_0^{-1} \delta_{T_0}(\tau) * s(\tau, T_0) \equiv T_0^{-1} s(\tau) \tag{13.110}$$

Cette intercorrélation correspond, dans le domaine fréquentiel, à un *filtrage en peigne* : filtrage très sélectif à toutes les fréquences discrètes  $f_n = n/T_0$ . Par (4.14), (4.123) et (4.126), on a

$$\begin{aligned} \Phi_{xu}(f) &= T_0^{-2} S(f, T_0) \delta_{1/T_0}(f) = T_0^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n \delta(f - n/T_0) = \\ &= T_0^{-1} S(f) \end{aligned} \tag{13.111}$$

Un tel filtrage extrait théoriquement du signal observé  $x(t)$  uniquement les composantes  $S_n$  présentes aux fréquences discrètes  $f_n = n/T_0$ , c'est-à-dire les diverses harmoniques du signal périodique  $s(t)$ . Le bruit  $n(t)$  est totalement éliminé.

En pratique (exercice 13.5.15), la fonction de filtrage périodique réelle correspond à la convolution de la suite périodique  $\delta_{1/T_0}(f)$  avec la réponse fréquentielle  $H(f)$  d'un filtre passe-bas dont la largeur de bande est non nulle. Celle-ci dépend de la durée d'intégration  $T$  et de la forme non idéale des impulsions périodiques formant le signal auxiliaire  $u(t)$ .

Cette technique de récupération est – dans le cas des signaux périodiques – équivalente à la détection par accumulation décrite au paragraphe 13.1.26.

### 13.2.10 Cas particulier: amplificateur synchrone. Définition

Un *amplificateur synchrone* (en anglais fréquemment dénommé *lock-in amplifier*) est une sorte de voltmètre très sélectif (fig. 13.25) qui exploite le principe de la détection par intercorrélation pour la mesure d'un signal constant ou très lentement variable noyé

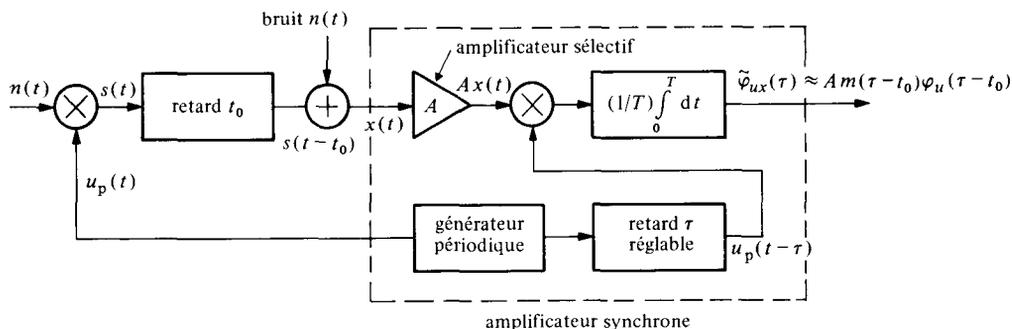


Fig. 13.25

dans un bruit indépendant. Il assure la transposition du signal à mesurer dans une bande de fréquence favorable (évitement de la bande spectrale où le bruit en  $1/f$  est dominant) et permet conjointement un filtrage extrêmement efficace.

Cette méthode est applicable lorsque le signal à mesurer, dénoté ici par  $m(t)$ , peut être modulé en amplitude à l'aide d'une fonction auxiliaire  $u_p(t)$  périodique et connue (signal d'excitation électrique, acoustique, optique, mécanique, etc.). Le signal modulé est  $s(t) = m(t)u_p(t)$ .

Le signal observé à l'entrée de l'amplificateur est  $x(t) = s(t - t_0) + n(t)$  où  $n(t)$  tient compte à la fois du bruit capté avec l'observation  $m(t)$  et du bruit propre de l'amplificateur. Le retard  $t_0$  est un paramètre inconnu lié aux conditions de propagation du signal.

L'amplificateur synchrone possède un gain  $A$  à la fréquence de répétition  $1/T$  du signal auxiliaire  $u_p(t)$ . Il effectue de plus le produit du signal amplifié  $Ax(t)$  par la fonction auxiliaire  $u_p(t - \tau)$  et moyenne le résultat. Le paramètre  $\tau$  est réglable.

La mesure, pour une valeur  $\tau$  donnée, correspond à la corrélation

$$\tilde{\varphi}_{ux}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T Ax(t)u_p(t - \tau) dt \quad (13.112)$$

dont la valeur asymptotique est

$$\begin{aligned} \varphi_{ux}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_{ux}(\tau) = Au_p(-\tau) \overline{[m(\tau - t_0)u_p(\tau - t_0) + n(\tau)]} \\ &\approx Am(\tau - t_0)\varphi_u(\tau - t_0) \end{aligned} \quad (13.113)$$

car  $m(t)$  varie, par hypothèse, très lentement vis-à-vis de  $u_p(t)$  et le terme résiduel  $\varphi_{un}(\tau)$  est nul si le bruit  $n(t)$  est indépendant de  $u_p(t)$  et si l'un de ces deux signaux est à valeur moyenne nulle.

Comme la fonction d'autocorrélation  $\varphi_u(\tau)$  est maximale à l'origine, et correspond à la puissance  $P_u$ , la mesure passe par une valeur maximale pour  $\tau = t_0$ . On peut estimer ainsi à la fois  $m(t)$  et le retard  $t_0$ .

### 13.2.11 Système de communication à étalement de bande. Définition

Un exemple typique d'application de la corrélation destinée à permettre une transmission d'information malgré des perturbations intenses est employé dans les *systèmes à étalement de bande* (en anglais: *spread spectrum systems* [139]). Ceux-ci ont principalement été développés dans le contexte d'applications militaires (lutte contre le brouillage intentionnel). Ils peuvent toutefois aussi être utilisés dans le domaine civil, en raison de leur immunité naturelle aux interférences et de leur aptitude à assurer des communications confidentielles avec adressage sélectif.

Le principe fondamental d'un tel système est illustré par la figure 13.26.

La puissance du signal secondaire émis  $s(t)$  est dispersée sur une très large bande  $B_2$  en multipliant le signal message  $m(t)$  par un signal auxiliaire indépendant  $c(t)$ , à très large bande, servant de clé de codage. La multiplication de signaux indépendants entraîne la convolution de leurs spectres:

$$s(t) = m(t)c(t) \longleftrightarrow \Phi_s(f) = \Phi_m(f) * \Phi_c(f) \quad (13.114)$$

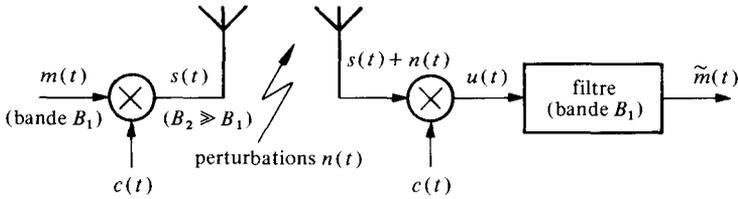


Fig. 13.26

Si  $m(t)$  est à bande relativement étroite  $B_1$  et  $c(t)$  est à bande très large, le produit des deux possède approximativement le même spectre que  $c(t)$ .

Au récepteur, la somme du signal émis  $s(t)$  et des perturbations  $n(t)$  est également multipliée par le même signal auxiliaire  $c(t)$ , ce qui présuppose une synchronisation adéquate :

$$u(t) = [s(t) + n(t)] c(t) = m(t) c^2(t) + n(t) c(t) \tag{13.115}$$

Si  $c(t)$  est, par exemple, une séquence binaire pseudo-aléatoire (niveaux  $\pm 1$ ), le résultat correspond au signal message  $m(t)$  accompagné d'un terme de bruit  $n(t) c(t)$  à très large bande qui est essentiellement éliminé par le filtrage final.

Seuls les récepteurs disposant de la même clé au décodage peuvent reconstituer l'information. Plusieurs communications distinctes (clés de codage différentes) peuvent ainsi utiliser la même bande spectrale sans se gêner mutuellement.

L'efficacité de tels systèmes est d'autant plus grande que le rapport  $B_2/B_1$  est élevé.

### 13.3 ÉLÉMENTS DE THÉORIE DE LA DÉCISION

#### 13.3.1 Processus de décision. Définitions

En traitement des signaux, en reconnaissance de formes (§ 13.4.8), un processus de décision se présente généralement de la manière suivante : sur la base d'un ensemble d'observations (estimation de paramètres, extraction de caractéristiques) le signal [forme] analysé est attribué à une classe, en principe prédéterminée, de signaux [formes] possibles.

Un tel processus de décision est parfois basé sur l'observation d'un seul paramètre du signal (amplitude, fréquence, phase) ou sur un ensemble de valeurs d'un même paramètre (ensemble de  $N$  échantillons, etc.). Une modélisation générale consiste à représenter, comme à la section 13.1, les observations par un vecteur de paramètres  $\tilde{a} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_N)$ .

Si seules deux classes sont considérées, on parle de *décision binaire* : choix entre les deux termes d'une alternative. C'est par exemple :

- la présence ou l'absence d'un signal d'écho radar ;
- le choix entre les états logiques 0 et 1 représentés par un signal de télécommunication en transmission d'informations numériques.

Dans d'autres situations, le classement à opérer implique un grand nombre de choix : propositions de diagnostic basées sur l'interprétation d'un signal biomédical, déduction des causes probables de mal-fonctionnement d'une machine d'après l'analyse des signaux de capteurs appropriés, identification de caractères alphabétiques ou de

chiffres, tri de pièces mécaniques observées par une caméra de télévision, étiquetage d'entités géographiques en télédétection terrestre, etc. Le nombre de paramètres à mesurer (coefficients spectraux, moments statistiques, facteurs de corrélation, etc.) ou d'attributs à déterminer (nombre d'intersections, de segments droits ou courbes, d'angles d'un contour, etc.) peut être élevé. C'est un problème de *décision à hypothèses multiples*.

L'ensemble des observations constitue un *événement*. Une formulation classique du processus de décision consiste à représenter chaque événement par un point dans un espace vectoriel appelé *espace d'observation* ou *espace des caractéristiques*. La dimension de cet espace est inférieure ou égale au nombre d'observations faites; ce dernier cas correspondant à des observations indépendantes.

Chaque classe de signaux [formes] à identifier  $y$  est représentée par une combinaison typique de valeurs de paramètres formant un vecteur  $a$  : elle est donc définie par un point spécifique de coordonnées en principe connues.

En raison du bruit, des imperfections de mesure, des distorsions de forme, etc., chaque événement se traduit par un point situé à une distance variable du point typique. L'ensemble des événements possibles associés à une classe donnée forment ainsi un *amas* ou *nuage* de points groupés autour du point typique (fig. 13.27).

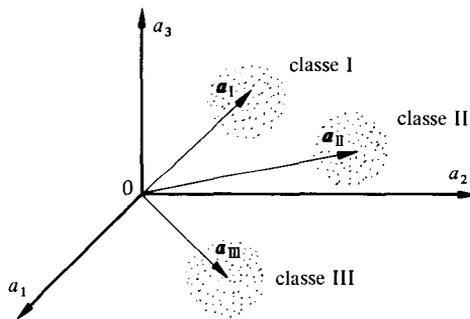


Fig. 13.27

La règle de décision (d'identification) est obtenue en subdivisant l'espace d'observation en autant de régions distinctes que de classes, de manière à minimiser les risques de fausses décisions. Un problème théorique essentiel est donc celui du mode de partition (choix des frontières entre régions).

Un taux élevé de décisions correctes n'est évidemment obtenu que si les amas de points sont nettement séparés. Pour que cette condition soit satisfaite, il faut, d'une part, chercher à limiter la dispersion des points autour de la valeur typique, c'est-à-dire réduire le bruit et les autres causes d'incertitudes. On doit, d'autre part, vouer une attention particulière au choix des paramètres utilisés, de manière à éloigner le plus possible les amas les uns des autres (maximisation de la distance entre classes) et choisir pour mesurer cette distance une définition appropriée.

### 13.3.2 Distances usuelles. Définition

Dans le cas courant d'une observation unidimensionnelle (échantillon ou groupe d'échantillons d'un signal), la distance utilisée est souvent une simple différence de valeurs moyennes normalisées (variance unité) qui peut être interprétée comme la racine

carrée du rapport signal sur bruit d'observation

$$d(x, y) = (\mu_x - \mu_y) / \sigma_n = \sqrt{\xi} \tag{13.116}$$

Lorsque l'espace d'observation est multidimensionnel, la distance euclidienne (3.3) est souvent employée sous forme pondérée

$$d(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^n w_i (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2} \tag{13.117}$$

où  $w_i$  est un facteur de pondération attaché à la  $i$ ème caractéristique observée.

Une généralisation de cette approche est la *distance de Mahalanobis* [140] qui permet de pondérer l'influence des dépendances entre caractéristiques

$$d(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (x_i - y_i) (x_j - y_j) \right\}^{1/2} \tag{13.118}$$

Le facteur de pondération est usuellement l'élément d'indice  $ij$  de l'inverse de la matrice de covariance  $C_{xy}$ .

Lorsque les attributs sont binaires (symbole 0 et 1, etc.), on emploie couramment la distance de Hamming (3.7).

### 13.3.3 Illustration

Soit à identifier un message binaire A ou B représenté par une suite de 3 bits (attributs). Sous l'effet du bruit présent au moment de l'observation, chaque bit du message risque d'être mal interprété. L'espace des observations est ainsi constitué de  $2^3 = 8$  mots distincts (fig. 13.28). La distance de Hamming entre ces mots est au maximum de 3 : par exemple entre 000 et 111.

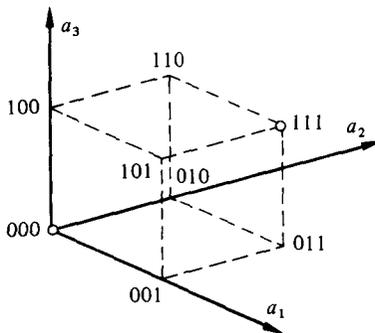


Fig. 13.28

Une partition optimale de cet espace consiste à attribuer à l'information A l'un des mots de cet ensemble, par exemple 000, ainsi que tous ceux qui ont avec lui une distance de Hamming égale à un : 001, 010, 100. L'information B est alors représentée par le mot le plus distant de 000, c'est-à-dire 111, complété par tous les mots qui sont à distance unité : 110, 101, 011.

Une erreur de décision n'est ainsi commise que si au moins deux bits du mot sont incorrectement interprétés.

### 13.3.4 Décision binaire. Définitions

Le problème de la décision binaire classique peut être formulé de la manière suivante.

Une source d'information produit deux signaux possible  $s_0$  et  $s_1$ , avec les probabilités respectives  $p_0 = \text{Prob}(s_0)$  et  $p_1 = \text{Prob}(s_1)$ . Ces signaux parviennent à l'observateur sous une forme altérée (par exemple :  $x = s_i + n$ ) en raison de leur contamination par des perturbations aléatoires diverses. Connaissant la nature binaire de la source, l'observateur peut émettre deux *hypothèses*, dénotées par  $H_0$  et  $H_1$ , sur l'identité du signal émis. Sur la base de son observation (continue ou discrète) du signal reçu  $x$  ou, plus généralement, d'un ensemble d'observations  $\mathbf{x}$  l'observateur doit faire le choix de l'hypothèse la plus vraisemblable. Pour ce faire, il doit appliquer un *critère de décision*.

Le choix entre ces deux hypothèses peut conduire aux quatre situations suivantes :

- choix de  $H_0$  alors que  $H_0$  est vraie;
- choix de  $H_1$  alors que  $H_1$  est vraie;
- choix de  $H_0$  alors que  $H_1$  est vraie;
- choix de  $H_1$  alors que  $H_0$  est vraie.

Les deux premiers cas correspondent à une prise de décision correcte; les deux cas suivants correspondent à des décisions erronées. Le critère de décision établit une stratégie destinée à réduire au minimum le risque d'une décision incorrecte. Il peut être interprété comme une règle permettant de diviser l'espace d'observation  $O$  en deux régions mutuellement exclusives  $O_0$  et  $O_1$ . Selon que l'observation est un élément de  $O_0$  *ou* de  $O_1$ , la décision est prise d'accepter l'hypothèse  $H_0$  ou, au contraire, l'hypothèse  $H_1$ .

Les trois principaux critères usuels sont le critère de Bayes, le test minimax et le critère de Neyman-Pearson.

### 13.3.5 Critère de Bayes. Définitions

Le *critère de Bayes* est applicable lorsque l'on a une connaissance *a priori* des probabilités  $p_0$  et  $p_1$  d'apparition des deux signaux de la source  $s_0$  et  $s_1$ . Ce critère consiste à déterminer les régions  $O_0$  et  $O_1$  de l'espace de décision de manière à rendre minimum la *probabilité d'erreur totale*. Cette probabilité, dénotée  $p_\epsilon$ , est égale à la somme de la probabilité conjointe d'accepter l'hypothèse  $H_1$  lorsque le signal  $s_0$  est émis et de la probabilité conjointe d'accepter l'hypothèse  $H_0$  lorsque  $s_1$  est émis. Par (14.6) :

$$p_\epsilon = \text{Prob}(H_1, s_0) + \text{Prob}(H_0, s_1) = p_0 \text{Prob}(H_1 | s_0) + p_1 \text{Prob}(H_0 | s_1) \quad (13.119)$$

Les décisions incorrectes sont prises lorsque l'observation  $\mathbf{x}$  appartient à la région  $O_0$  alors que  $s_i = s_1$  ou à la région  $O_1$  alors que  $s_i = s_0$ . Les probabilités conditionnelles correspondantes sont par conséquent obtenues en intégrant les densités de probabilité conditionnelle  $p(\mathbf{x}|s_0)$  et  $p(\mathbf{x}|s_1)$  sur l'ensemble des valeurs de  $\mathbf{x}$  appartenant à la région  $O_1$ , respectivement  $O_0$  :

$$\begin{aligned} \text{Prob}(H_1 | s_0) &= \int_{O_1} p(\mathbf{x}|s_0) d\mathbf{x} = 1 - \int_{O_0} p(\mathbf{x}|s_0) d\mathbf{x} \\ \text{Prob}(H_0 | s_1) &= \int_{O_0} p(\mathbf{x}|s_1) d\mathbf{x} = 1 - \int_{O_1} p(\mathbf{x}|s_1) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (13.120)$$

En introduisant (13.120) dans (13.119) de manière à regrouper des intégrales relatives au même domaine d'intégration, la probabilité d'erreur totale devient

$$\begin{aligned}
 p_\epsilon &= p_0 + \int_{O_0} [p_1 p(x|s_1) - p_0 p(x|s_0)] dx \\
 &= p_1 + \int_{O_1} [p_0 p(x|s_0) - p_1 p(x|s_1)] dx
 \end{aligned}
 \tag{13.121}$$

Cette probabilité d'erreur est évidemment minimale si les régions  $O_0$  et  $O_1$  sont choisies de manière à rendre le résultat des intégrations respectives le plus négatif possible. Une probabilité et une densité de probabilité étant par définition positive, cette condition est réalisée si  $O_0$  est définie comme la région de l'espace d'observation pour laquelle

$$p_0 p(x|s_0) > p_1 p(x|s_1) \tag{13.122}$$

et la région  $O_1$  celle pour laquelle

$$p_1 p(x|s_1) > p_0 p(x|s_0) \tag{13.123}$$

La figure 13.29 illustre cette partition optimale dans le cas de densités de probabilité unimodales gaussiennes et d'une observation unidimensionnelle.

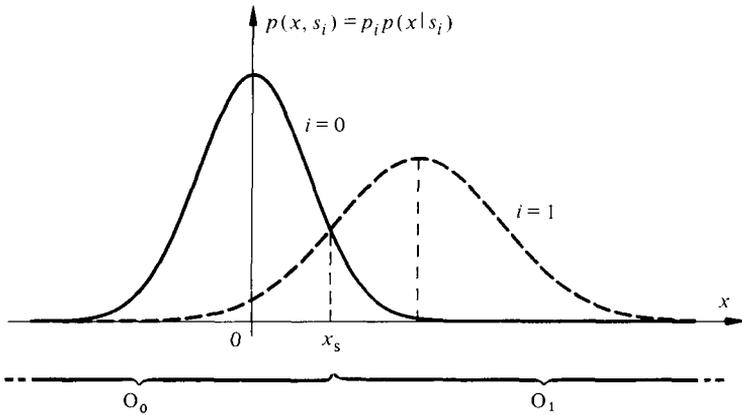


Fig. 13.29

Le critère de Bayes se résume de la manière suivante

$$\frac{p(x|s_1)}{p(x|s_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{p_0}{p_1} \tag{13.124}$$

et s'énonce comme suit :

- si l'observation  $x$  est dans la région  $O_0$  déterminée par (13.122), l'hypothèse  $H_0$  est acceptée;
- si l'observation  $x$  est dans la région  $O_1$  déterminée par (13.123), l'hypothèse  $H_1$  est acceptée.

### 13.3.6 Définition : rapport de vraisemblance

Le rapport

$$\Lambda(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|s_1)}{p(\mathbf{x}|s_0)} \quad (13.125)$$

est appelé le *rapport de vraisemblance* (en anglais : *likelihood ratio*).

Une forme équivalente à la relation (13.124) est obtenue en prenant le logarithme des deux membres. Le logarithme étant une fonction monotonement croissante, on obtient pour le critère de Bayes :

$$\ln \Lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \ln \left( \frac{p_0}{p_1} \right) \quad (13.126)$$

### 13.3.7 Terminologie et définitions

Les probabilités conditionnelles apparaissant dans les relations (13.120) sont souvent appelées, dans la littérature spécialisée, de la manière suivante (fig. 13.30) :

- *probabilité de fausse alarme*

$$p_f = \text{Prob}(H_1|s_0) = \int_{O_1} p(\mathbf{x}|s_0) d\mathbf{x} \quad (13.127)$$

- *probabilité de détection*

$$p_d = \text{Prob}(H_1|s_1) = \int_{O_1} p(\mathbf{x}|s_1) d\mathbf{x} \quad (13.128)$$

- *probabilité de non détection*

$$p_n = \text{Prob}(H_0|s_1) = 1 - p_d = \int_{O_0} p(\mathbf{x}|s_1) d\mathbf{x} \quad (13.129)$$

avec, par (13.116), la probabilité d'erreur totale

$$p_e = p_0 p_f + p_1 p_n \quad (13.130)$$

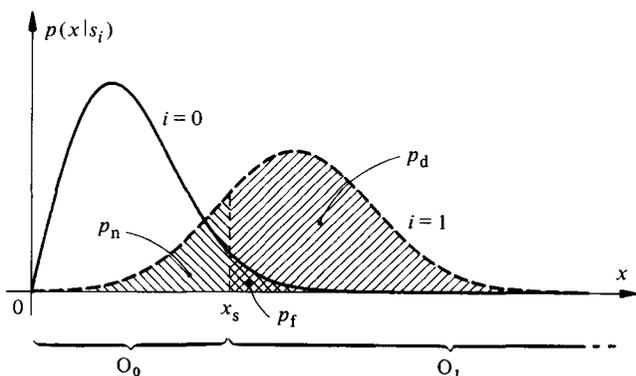


Fig. 13.30

Cette terminologie est empruntée au langage utilisé en radar où les hypothèses  $H_1$  et  $H_0$  correspondent respectivement à la présence ou à l'absence d'une cible située sur le passage du faisceau d'exploration. On préfère, en reconnaissance de formes, parler en lieu et place de fausse alarme et non détection de *fausse décision positive* et *fausse décision négative*.

En terminologie statistique, l'erreur commise en rejetant l'hypothèse  $H_0$  alors qu'elle est correcte est appelée *erreur de première espèce*. La probabilité d'erreur de première espèce est dénotée par  $\alpha$ . L'erreur commise en acceptant l'hypothèse  $H_0$  alors que  $H_1$  est correcte est appelée *erreur de deuxième espèce*. La probabilité d'erreur de deuxième espèce est dénotée par  $\beta$ . On a ainsi :  $p_f = \alpha$  et  $p_n = \beta$ .

**13.3.8 Coefficients de coût et risque moyen. Définitions**

Pour mettre en évidence l'importance relative accordée à chacune des quatre situations qui peuvent découler du choix entre les deux hypothèses  $H_0$  et  $H_1$ , on peut modifier la règle de décision en introduisant des coefficients de pondération. Ces coefficients, appelés *coefficients de coût*, sont dénotés usuellement par  $c_{ij}$  où le premier indice représente l'hypothèse correcte et le second la décision. Ils peuvent être représentés sous forme matricielle par :

$$c = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix} \tag{13.131}$$

On définit ainsi un *risque moyen* :

$$R = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 c_{ij} p_i \int_{O_j} p(\mathbf{x}|s_i) d\mathbf{x} \tag{13.132}$$

La règle de décision selon le critère de Bayes est obtenue en cherchant le minimum du risque moyen. On obtient :

$$\Lambda(\mathbf{x}) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{p_0}{p_1} \frac{c_{01} - c_{00}}{c_{10} - c_{11}} \tag{13.133}$$

avec, dans certains cas,  $c_{00} = c_{11} = 0$  (pondération différenciée des risques de non détection et de fausse alarme).

**13.3.9 Exemple : observation unique**

Considérons une source de tension générant un signal binaire aléatoire  $s(t)$  prenant soit la valeur  $A$  (hypothèse  $H_1$ ) avec une probabilité  $p_1$ , soit la valeur zéro (hypothèse  $H_0$ ) avec une probabilité  $p_0$ . Avant de parvenir à l'observateur (système de détection) ce signal est contaminé par un bruit gaussien  $n(t)$  de valeur moyenne nulle et de variance  $\sigma_n^2$ . La tension de sortie de la source et le bruit sont des phénomènes statistiquement indépendants. La distance normalisée séparant les deux amas de points d'observation peut être simplement définie selon (13.116) par  $d(x_{H0}, x_{H1}) = (\mu_{xH1} - \mu_{xH0})/\sigma_n = A/\sigma_n$ .

A la réception, l'observateur doit décider, sur la base d'un prélèvement  $x$  effectué sur le signal reçu à un instant  $t$  donné, à quelle valeur du signal émis correspond la valeur

observée. Pour prendre sa décision, l'observateur applique le critère (13.126). En raison du caractère unimodal de la densité de probabilité gaussienne, le test se ramène ici à la comparaison de l'échantillon prélevé avec une tension de référence : seuil de décision optimum minimisant la probabilité d'erreur totale.

Dans l'hypothèse  $H_0$ , le signal observé est  $x_{H_0}(t) = n(t)$  avec densité de probabilité conditionnelle

$$p(x|s_0) = (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2/\sigma_n^2\right) \quad (13.134)$$

Dans l'hypothèse  $H_1$ , on a  $x_{H_1}(t) = A + n(t)$  avec

$$p(x|s_1) = (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x-A)^2/\sigma_n^2\right] \quad (13.135)$$

En remplaçant dans (13.126) et en résolvant par rapport à l'observation  $x$ , le test optimum devient

$$x \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2}{A} \ln(p_0/p_1) + \frac{1}{2}A \quad (13.136)$$

et le seuil de décision est la valeur  $x_s$  correspondant à l'égalité des deux membres de (13.136).

Les probabilités de fausse alarme, de non détection, de détection et d'erreur totale se calculent alors à partir de (13.127), (13.128), (13.129) et (13.130) avec ici :  $O_1 = [x_s, +\infty]$  et  $O_0 = [-\infty, x_s]$ .

Par exemple, pour  $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$ ,  $\sigma_n = 2\text{ V}$  et  $A = 6\text{ V}$ , on obtient  $x_s = A/2 = 3\text{ V}$  et en se référant à la table de la loi normale de la section 15.8 :  $p_f = p_n = p_e = 6,68 \cdot 10^{-2}$ .

Par contre, dans le cas de probabilités d'émission inégales  $p_0 = 0,9$  et  $p_1 = 0,1$  avec même niveau de signal  $A$  et même variance  $\sigma_n^2$ , on a :  $x_s = 4,46\text{ V}$ ,  $p_f \cong 1,3 \cdot 10^{-2}$ ,  $p_n \cong 2,2 \cdot 10^{-1}$  et  $p_e = 3,36 \cdot 10^{-2}$ . Le maintien, dans ce cas, d'un seuil de décision non optimal à  $A/2$  conduit à la probabilité d'erreur totale supérieure de  $6,68 \cdot 10^{-2}$ .

### 13.3.10 Exemple : observations multiples indépendantes

Dans les mêmes conditions de signal et de bruit, considérons le prélèvement, non pas d'un échantillon unique du signal reçu, mais d'un ensemble de  $N$  échantillons  $x_1, x_2, \dots, x_N$  dont les contributions de bruit sont statistiquement indépendantes. Ces  $N$  échantillons forment dans l'espace d'observation à  $N$  dimensions un vecteur  $\mathbf{x}$  qui, selon l'hypothèse  $H_0$  ou  $H_1$ , possède les densités de probabilité conditionnelle déduites de (5.33)

$$p(\mathbf{x}|s_0) = \prod_{i=0}^N (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}x_i^2/\sigma_n^2\right) \quad (13.137)$$

et

$$p(\mathbf{x}|s_1) = \prod_{i=0}^N (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x_i - A)^2/\sigma_n^2\right] \quad (13.138)$$

Le test (13.126) se ramène ainsi à :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{\sigma_n^2}{NA} \ln(p_0/p_1) + \frac{1}{2} A \tag{13.139}$$

où la valeur moyenne expérimentale  $\bar{x}$  représente une *statistique suffisante* pour la prise de décision. La variance du bruit est alors réduite d'un facteur  $N$  en accord avec (13.28).

**13.3.11 Test minimax. Définitions**

L'hypothèse fondamentale du critère de Bayes est la connaissance des probabilités a priori  $p_0$  et  $p_1$ . Cette hypothèse permet de déterminer le test qui minimise la probabilité d'erreur totale (ou le risque moyen). Cependant, dans un certain nombre de problèmes, la statistique de la source ( $p_0$  et  $p_1$ ) n'est pas connue ou n'est pas stationnaire. Si le seuil est fixé arbitrairement, la probabilité d'erreur totale n'est pas nécessairement minimum. On peut, par contre, déterminer en fonction de la statistique de la source, le cas le plus défavorable conduisant au risque moyen le plus grand et chercher à le rendre minimum. Ceci implique bien sûr le choix des coefficients de coût. Le critère de Bayes utilisé pour rendre *minimum* le risque moyen *maximum* est appelé le *test minimax* et le risque correspondant est noté  $R_{\text{minimax}}$ .

Dans ce type de décision, on introduit généralement un risque différencié pour tenir compte de l'importance relative des cas de décision erronée, sans introduire de pondération relative pour les décisions correctes. L'expression du risque moyen (13.132), avec  $c_{00} = c_{11} = 0$ , peut ainsi se mettre sous la forme suivante, avec  $p_0 = 1 - p_1$  :

$$R = c_{01} p_0 p_f + c_{10} p_1 p_n = c_{01} p_f + p_1 (c_{10} p_n - c_{01} p_f) \tag{13.140}$$

Pour un seuil de décision  $x_s$  et des densités de probabilité conditionnelles  $p(x|s_0)$  et  $p(x|s_1)$  donnés, les probabilités  $p_f$  et  $p_n$  sont déterminées et par conséquent, le risque moyen  $R$  est une fonction linéaire de  $p_1$  (fig. 13.31), de pente  $c_{10} p_n - c_{01} p_f$ . Cette droite  $R(p_1)$  est tangente au lieu des risques moyens minima  $R_{\text{min}}(p_1)$  évalués selon le critère de Bayes pour chaque valeur de  $p_1$ .

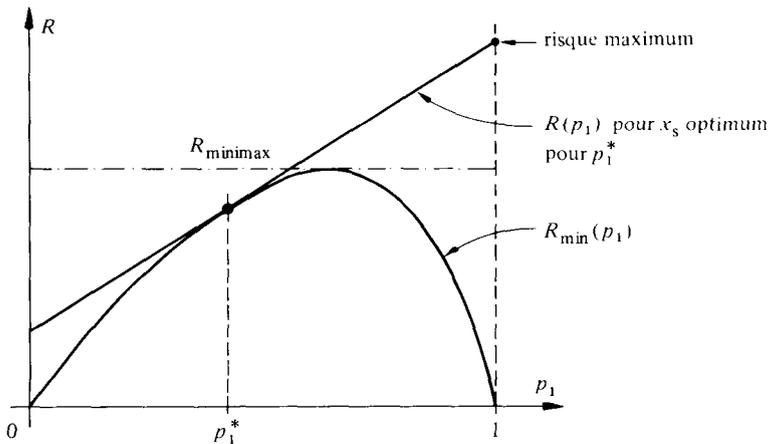


Fig. 13.31

La minimisation du risque maximum, quelque soit  $p_1$ , est obtenue en choisissant comme seuil  $x_s$  celui qui annule la pente de  $R(p_1)$ , c'est-à-dire celui qui satisfait l'équation *minimax*

$$c_{10} p_n - c_{01} p_f = 0 \quad (13.141)$$

Dans le cas particulier où  $c_{01} = c_{10} = 1$  (erreurs de première et de deuxième espèces jugées d'égal coût), le test *minimax* revient à choisir  $x_s$  de manière à rendre les probabilités d'erreur conditionnelles  $p_f$  et  $p_n$  égales.

### 13.3.12 Critère de Neyman-Pearson. Définition

Si les probabilités a priori  $p_0$  et  $p_1$  ne sont pas connues et qu'il est difficile d'attribuer des valeurs réalistes aux coefficients de risque, on peut chercher à établir un critère de décision en utilisant uniquement les probabilités conditionnelles  $p_f$  et  $p_d = 1 - p_n$ . En principe, on désire rendre simultanément  $p_f$  et  $p_n$  aussi faibles que possible. Malheureusement, la diminution de l'une provoque en général l'augmentation de l'autre. On recourt alors au *critère de Neyman-Pearson* qui consiste à fixer la probabilité de fausse alarme à une valeur admissible arbitraire  $\alpha_a$  et à chercher, sous cette contrainte et dans la mesure du possible, à rendre maximum la probabilité de détection  $p_d$  (ou, d'une manière équivalente, rendre minimum  $p_n$ ).

Dans le cas général, cette minimisation sous contrainte peut être menée par la méthode des extrema liés (multiplicateur de Lagrange  $\lambda$ ). Le test de vraisemblance (13.126) associé au critère de Bayes est alors remplacé par le test :  $\ln \Lambda(\mathbf{x}) \geq \ln \lambda(\alpha_a)$ . Le seuil  $\lambda(\alpha_a)$  est déterminé par la relation :  $p_f = \text{Prob}[\Lambda(\mathbf{x}) > \lambda | H_0] = \alpha_a$ .

Dans le cas le plus simple (seuil de décision unique),  $\lambda = x_s$  est directement déterminé, pour  $\alpha_a$  fixé, par

$$p_f = \alpha_a = \int_{x_s}^{\infty} p(x|s_0) dx \quad (13.142)$$

La probabilité de non détection est alors simplement donnée par

$$p_n = \int_{-\infty}^{x_s} p(x|s_1) dx \quad (13.143)$$

### 13.3.13 Exemple : détection radar

Soit un signal radar, constitué d'échos éventuels de forme  $A \text{ rect}(t/T) \cos(2\pi f_0 t)$ , observé en présence de bruit additif gaussien de valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_n^2$  par un récepteur comprenant un détecteur d'enveloppe (fig. 11.23) suivi d'un organe de décision. Ce dernier reconnaît la présence ou l'absence d'écho en comparant la valeur d'un échantillon de l'enveloppe  $r(t)$  à un seuil de référence  $V$ .

En l'absence d'écho, l'enveloppe  $r(t)$  du bruit seul possède, selon (7.49), une distribution de Rayleigh et la probabilité de fausse alarme vaut

$$p_f = \int_V^{\infty} (r/\sigma_n^2) \exp(-\frac{1}{2} r^2/\sigma_n^2) dr = \exp(-\frac{1}{2} V^2/\sigma_n^2) \quad (13.144)$$

d'où l'on tire, pour une valeur  $p_f = \alpha_a$  donnée,

$$V = \sigma_n \sqrt{-2 \ln \alpha_a} \tag{13.145}$$

En présence d'un écho, la statistique de l'enveloppe est celle de Rice-Nakagami (7.57). La probabilité de détection vaut alors

$$p_d = \int_V^\infty \frac{r}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma_n^2}\right) I_0\left(\frac{rA}{\sigma_n^2}\right) dr = Q\left(\frac{A}{\sigma_n}, \frac{V}{\sigma_n}\right) \tag{13.146}$$

L'intégrale

$$Q(a, b) = \int_b^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2 + u^2)\right] I_0(au) u du \tag{13.147}$$

est connue sous le nom de *fonction de Marcum* et peut être évaluée numériquement [141] par la formule de récurrence

$$Q(a, b) = 1 - \sum_{n=0}^\infty g_n k_n \tag{13.148}$$

avec

$$g_n = g_{n-1} - \left(\frac{1}{2} b^2/n!\right) \exp(-\frac{1}{2} b^2) ; k_n = \frac{1}{2} a^2 k_{n-1}/n. \tag{13.149}$$

Une abaque de la fonction de Marcum est représentée à la section 15.9.

Tableau 13.32

Critère	Connaissance a priori	Facteur de mérite minimisé	Test
Bayes	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p_0</math> et <math>p_1</math></li> <li><math>p(x s_i)</math> avec <math>i = 0, 1</math></li> </ul>	Probabilité d'erreur totale: $p_e = p_0 p_f + p_1 p_n$	$\Lambda(x) = \frac{p(x s_1)}{p(x s_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{p_0}{p_1}$
Bayes avec erreurs pondérées	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p_0</math> et <math>p_1</math></li> <li><math>p(x s_i)</math> avec <math>i = 0, 1</math></li> <li><math>c = \begin{bmatrix} 0 &amp; c_{01} \\ c_{10} &amp; 0 \end{bmatrix}</math></li> </ul>	Risque moyen: $R = c_{01} p_0 p_f + c_{10} p_1 p_n$	$\Lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{p_0 c_{01}}{p_1 c_{10}}$
Bayes avec décisions pondérées	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p_1</math> et <math>p_1</math></li> <li><math>p(x s_i)</math> avec <math>i = 0, 1</math></li> <li><math>c = \begin{bmatrix} c_{00} &amp; c_{01} \\ c_{10} &amp; c_{11} \end{bmatrix}</math></li> </ul>	Risque moyen: $R = \sum_{i=0} \sum_{j=0} c_{ij} p_i \int_{\Omega_j} p(x s_i) dx$	$\Lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \frac{p_0(c_{01} - c_{00})}{p_1(c_{10} - c_{11})}$
Minimax	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p(x s_i)</math> avec <math>i = 0, 1</math></li> <li><math>c = \begin{bmatrix} 0 &amp; c_{01} \\ c_{10} &amp; 0 \end{bmatrix}</math></li> </ul>	Risque moyen maximum: $R_{\text{minimax}}$	Seuil déduit de $c_{10} p_n = c_{01} p_f$
Neyman-Pearson	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>p(x s_i)</math> avec <math>i = 0, 1</math></li> <li><math>p_f = \alpha_a</math></li> </ul>	Probabilité de non détection: $p_n$	$\Lambda(x) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\geq}} \lambda(\alpha_a)$ avec $\lambda$ déduit de $p_f = \alpha_a$

**13.3.14 Comparaison des critères de décision binaire**

Les caractéristiques des différents critères de décision mentionnés sont résumés dans le tableau 13.32.

**13.3.15 Définition : caractéristiques opérationnelles d'un récepteur**

L'application des critères de décision à des cas concrets fait apparaître un paramètre important : la distance  $d = d(x_{H0}, x_{H1})$  entre les valeurs moyennes des distributions  $p(x|s_0)$  et  $p(x|s_1)$ . Dans l'exemple 13.3.9, cette distance est simplement égale à l'am-

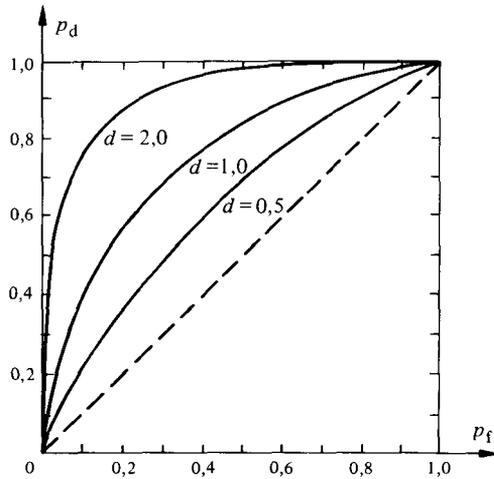


Fig. 13.33

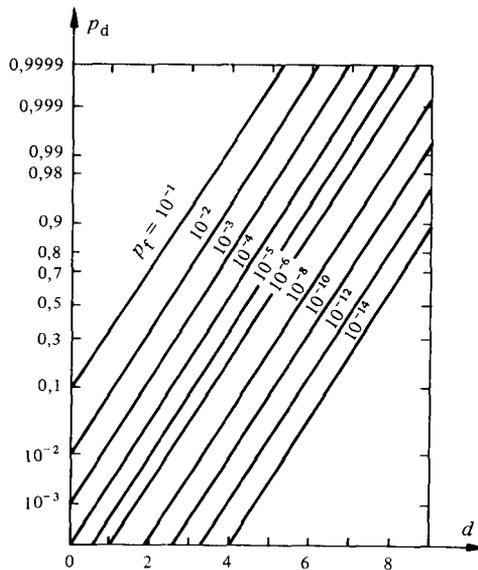


Fig. 13.34

plitude du signal divisée par la valeur efficace (écart-type) du bruit. On appelle *caractéristiques opérationnelles d'un récepteur* la représentation graphique de la probabilité de détection  $p_d$  en fonction de la probabilité de fausse alarme  $p_f$  pour des valeurs constantes de la distance  $d$ . Pour un bruit gaussien, on obtient les caractéristiques représentées sur la figure 13.33.

Il est également possible de représenter la probabilité de détection  $p_d$  en fonction de la distance  $d$  pour  $p_f$  constante. Dans le cas d'un bruit gaussien, une représentation, avec une échelle gaussienne en ordonnée et linéaire en abscisse, conduit au réseau de droites reproduit sur la figure 13.34.

### 13.4 DÉTECTION DE SIGNAUX DE FORMES CONNUES

#### 13.4.1 Détection optimale d'un signal connu en présence de bruit : le filtrage adapté.

##### Définition

Un *filtre adapté* (en anglais: *matched filter*) est un système linéaire (§ 8.2.27) optimisant la détection d'un signal  $s(t)$  de forme connue en présence de bruit additif indépendant. **Il maximise le rapport signal sur bruit à l'instant de la décision.**

Dans le cas d'un **bruit blanc**, la réponse impulsionnelle du filtre adapté se déduit simplement de la forme du signal  $s(t)$  par la relation

$$g_a(t) = k s^*(t_0 - t) \tag{13.150}$$

où  $k$  est une constante arbitraire (dépendant du gain du filtre) et  $t_0$  un paramètre de retard correspondant généralement à la durée  $T$  du signal.

Le signal de sortie du filtre excité par la somme  $x(t) = s(t) + n(t)$  devient alors

$$y(t) = x(t) * g_a(t) = k \varphi_s(t - t_0) + k \varphi_{sn}(t - t_0) \tag{13.151}$$

Le filtre adapté se comporte ainsi en *corrélateur* vis-à-vis du signal à détecter. **Le rapport signal sur bruit est optimum en  $t = t_0$  et ne dépend que de l'énergie du signal et de la densité spectrale du bruit.**

#### 13.4.2 Démonstration

Considérons le système de traitement représenté à la figure 13.35.

Soit  $x(t) = s_1(t) + n_1(t)$  et  $y(t) = s_2(t) + n_2(t)$ . Le signal utile d'entrée  $s_1(t)$  est connu. Son modèle peut être réel ou complexe (enveloppe). Le bruit  $n_1(t)$  à l'entrée est un processus aléatoire stationnaire à valeur moyenne nulle supposé ici à spectre constant (bruit blanc):  $\Phi_{n1}(f) = \frac{1}{2} \eta$ . Dénotons par  $\xi(t_0)$  le rapport de la puissance instantanée du signal à l'instant  $t = t_0$  et de la puissance moyenne (variance) du bruit à la sortie du filtre

$$\xi(t_0) = |s_2(t_0)|^2 / P_{n2} \tag{13.152}$$

On choisira évidemment  $t_0$  comme l'instant où  $|s_2(t)|$  est maximum.

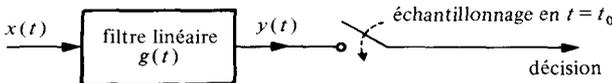


Fig. 13.35

La densité spectrale de puissance du bruit à la sortie du filtre est donnée, selon (8.24), par

$$\Phi_{n2}(f) = \Phi_{n1}(f) |G(f)|^2 \quad (13.153)$$

où  $G(f) = F\{g(t)\}$  est la réponse fréquentielle du filtre. Ainsi, la puissance moyenne du bruit à la sortie du filtre vaut

$$P_{n2} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{n2}(f) df = \frac{1}{2} \eta \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \frac{1}{2} \eta \hat{\varphi}_g(0) \quad (13.154)$$

où  $\hat{\varphi}_g(\tau)$  est la fonction d'autocorrélation de la réponse impulsionnelle  $g(t)$ .

D'autre part, le signal utile de sortie du filtre est donné par :

$$s_2(t) = g(t) * s_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) S_1(f) \exp(j2\pi ft) df \quad (13.155)$$

On obtient finalement :

$$\xi(t_0) = \left| \int_{-\infty}^{\infty} G(f) S_1(f) \exp(j2\pi ft_0) df \right|^2 / \left( \frac{1}{2} \eta \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \right) \quad (13.156)$$

Le filtre optimum qui maximise  $\xi(t_0)$  est facilement obtenu en utilisant l'inégalité de Schwarz (3.21) qui entraîne qu'ici

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} G(f) S_1(f) \exp(j2\pi ft_0) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(f)|^2 df \quad (13.157)$$

L'égalité n'est réalisée, selon (3.22), que si

$$G(f) = G_a(f) = k S_1^*(f) \exp(-j2\pi ft_0) \quad (13.158)$$

où  $k$  est une constante complexe arbitraire.

On obtient ainsi l'inégalité

$$\xi(t_0) \leq \left(\frac{1}{2}\eta\right)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |S_1(f)|^2 df = 2W_s/\eta \quad (13.159)$$

car  $|S_1(f) \exp(j2\pi ft_0)|^2 \equiv |S_1(f)|^2$  et  $W_s = \int |S_1(f)|^2 df$  est l'énergie du signal incident.

La valeur maximum de  $\xi(t_0)$  est donc atteinte lorsque le filtre est défini par (13.158) ou, en d'autres termes et en tenant compte de (4.54), lorsque sa réponse impulsionnelle est donnée par

$$\begin{aligned} g_a(t) &= F^{-1}\{G_a(f)\} = k \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(f) \exp[j2\pi f(t-t_0)] df = \\ &= k s_1^*(t_0 - t) \end{aligned} \quad (13.160)$$

Lorsque  $s_1(t)$  est une fonction réelle :  $s_1^*(t) = s_1(t)$  et l'on a simplement

$$g_a(t) = k s_1(t_0 - t) \quad (13.161)$$

Pour être réalisable, le filtre doit être causal, c'est-à-dire que  $g(t) = 0$  pour  $t < 0$ . Il en découle que si  $s_1(t)$  est un signal impulsionnel de durée  $T$ , on doit avoir  $t_0 \geq T$  pour satisfaire la condition de causalité, le cas  $t_0 = T$  étant pratiquement la règle.

Le signal utile de sortie est donné par la convolution

$$s_2(t) = s_1(t) * g_a(t) = k s_1(t) * s_1^*(t_0 - t) = k \hat{\varphi}_{s_1}(t - t_0) \tag{13.162}$$

et s'identifie, par (4.51) avec une version décalée de  $t_0$  de la fonction d'autocorrélation du signal incident  $s_1(t)$ . Le maximum de cette réponse a bien lieu, selon (4.49), en  $t = t_0$ .

**Le filtre adapté est donc équivalent à un intercorrélateur comparant le signal bruité d'entrée  $x(t)$  à une réplique du signal à détecter  $s_1(t)$ .**

### 13.4.3 Rapport signal sur bruit instantané et résolution temporelle

Ainsi que l'indique le second membre de l'inégalité (13.159), le rapport signal sur bruit optimum à l'instant  $t = t_0$  **ne dépend que de l'énergie du signal utile d'entrée** et de la densité spectrale de puissance du bruit blanc

$$\xi_{\text{opt}}(t_0) = 2W_s/\eta \tag{13.163}$$

En présence du même bruit, différents filtres adaptés à des signaux de formes différentes – mais ayant la même énergie  $W_s$  – se comporteront de manière équivalente en terme de rapport signal sur bruit à l'instant de la décision.

Il n'en va pas de même en ce qui concerne la résolution temporelle qui fixe le pouvoir de séparation de deux impulsions rapprochées.

Sans filtrage adapté, cette résolution est sensiblement égale à la durée  $T$  de l'impulsion incidente. Or cette durée ne peut être réduite sans réduire du même coup l'énergie  $W_s$ , car la puissance moyenne  $W_s/T$  d'émission du signal est naturellement limitée en pratique.

Après filtrage adapté, la résolution est déterminée par la **durée de corrélation  $D_\tau$**  du signal, comme l'indique le résultat (13.162). Or on sait, par (7.144), que cette durée

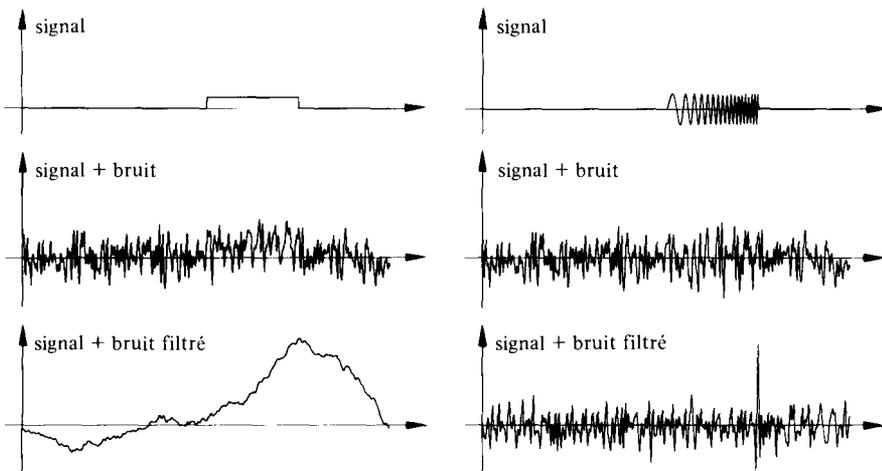


Fig. 13.36

est inversement proportionnelle à la largeur de bande approximative  $B_\tau$ . Le filtrage adapté offre ainsi la possibilité d'un gain substantiel en résolution, à la condition de travailler avec des signaux à large bande (fonction d'autocorrélation étroite): donc **à produit  $BT$  élevé**.

Les signaux de ce type les plus fréquemment utilisés sont l'impulsion sinusoïdale modulée en fréquence [27, 90], mieux connue sous son patronyme anglais de *chirp*, et les séquences pseudo-aléatoires (sect. 5.10). D'autres séquences à bonnes propriétés de corrélation sont décrites dans [142].

La figure 13.36 illustre les performances en rapport signal sur bruit instantané et en résolution obtenues par filtrage adapté pour deux signaux de même énergie  $W_s$  et même durée  $T$  noyés dans du bruit blanc indépendant: une simple impulsion rectangulaire et un signal chirp.

#### 13.4.4 Filtrage adapté en présence de bruit coloré

Si le bruit n'est pas blanc, la réponse fréquentielle  $G_a(f)$  du filtre adapté peut être obtenue en considérant la mise en cascade d'un premier filtre, de réponse  $G_1(f)$ , transformant le bruit coloré en bruit blanc, et d'un second filtre, de réponse  $G_2(f)$ , adapté au signal utile de sortie du premier (fig. 13.37).

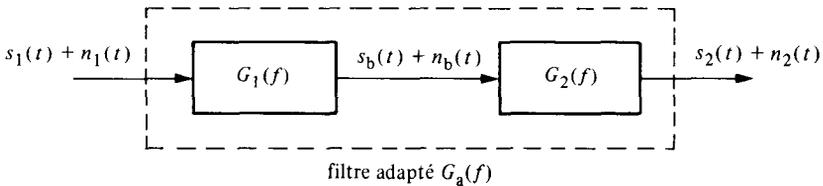


Fig. 13.37

En dénotant par  $\Phi_{n1}(f)$  la densité spectrale de puissance du bruit coloré incident  $n_1(t)$  et par  $\Phi_{nb}(f) = \frac{1}{2}\eta$  celle du bruit blanc à la sortie du premier filtre, sa fonction de réponse fréquentielle doit satisfaire, selon (8.24), la relation

$$|G_1(f)|^2 = \frac{1}{2}\eta / \Phi_{n1}(f) \quad (13.164)$$

Par (13.158), le deuxième filtre possède la réponse fréquentielle

$$G_2(f) = k S_b^* \exp(-j2\pi f t_0) \quad (13.165)$$

où  $S_b(f)$  est la transformée de Fourier du signal utile à la sortie du premier filtre:  $s_b(t) = s_1(t) * g_1(t)$ . Ainsi, par (8.14),

$$S_b(f) = S_1(f) G_1(f) \quad (13.166)$$

La réponse fréquentielle globale du filtre adapté vaut ainsi, selon (8.33)

$$\begin{aligned} G_a(f) &= G_1(f) G_2(f) = k |G_1(f)|^2 S_1^*(f) \exp(-j2\pi f t_0) \\ &= k' S_1^*(f) \exp(-j2\pi f t_0) / \Phi_{n1}(f) \end{aligned} \quad (13.167)$$

avec  $k' = \frac{1}{2}\eta k$ .

### 13.4.5 Filtres sous-optimums

Le filtre adapté optimum défini par (13.150) ou (13.167) n'est pas toujours facilement réalisable. Des filtres sous-optimums plus simples peuvent être utilisés au prix d'une légère diminution du rapport signal sur bruit instantané (13.152).

Les performances en résolution dépendent surtout de l'adaptation (conjugaison) de la réponse de phase du filtre au spectre de phase du signal [143].

L'efficacité relative du filtre sous-optimum est donnée par le quotient de son rapport signal sur bruit instantané et de celui du filtre optimum. Dans le cas du bruit blanc, on a par (13.152), (13.154) et (13.163)

$$\xi(t_0)/\xi_{\text{opt}} = |s_2(t_0)|^2 W_s^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = |s_2(t_0)|^2 / [W_s \dot{\varphi}_g(0)] \quad (13.168)$$

avec  $t_0$  choisi de manière à rendre  $s_2(t_0)$  maximum.

### 13.4.6 Exemple

Soit  $s_1(t) = A \text{rect} [(t - \frac{1}{2} T)/T]$  avec  $W_s = A^2 T$ . Par (13.150), la réponse impulsionnelle du filtre adapté optimum est, avec  $k = 1$ :  $g_a(t) = A \text{rect} [(t_0 - t - \frac{1}{2} T)/T] = A \text{rect} [(t - \frac{1}{2} T)/T]$  en raison de la symétrie de  $s_1(t)$  et en choisissant  $t_0 = T$ . Le filtre adapté optimum est donc un opérateur d'intégration pendant une durée  $T$  (§ 8.2.19).

On sait qu'une réalisation approximative d'un intégrateur est le filtre  $RC$  passe-bas du premier ordre (§ 8.2.24) de fonction de réponse fréquentielle  $G(f) = [1 + j(f/f_c)]^{-1}$  où  $f_c^{-1} = 2\pi RC$  et de réponse impulsionnelle  $g(t) = (RC)^{-1} \exp[-t/(RC)] \cdot \epsilon(t)$ . La réponse  $s_2(t)$  de ce filtre à l'excitation  $s_1(t)$  pour  $0 \leq t \leq T$  est la réponse indicielle  $s_2(t) = A \{1 - \exp[-t/(RC)]\} \cdot \epsilon(t)$  qui est maximum pour  $t_0 = T$ . La valeur à l'origine  $\dot{\varphi}_g(0) = (2RC)^{-1}$ . En remplaçant dans (13.168), l'efficacité relative devient

$$\xi(t_0 = T)/\xi_{\text{opt}} = 2RC \{1 - \exp[-T/(RC)]\}^2 / T \quad (13.169)$$

qui est maximum pour  $T/(RC) = 1,25$  et vaut alors 0,816. Ceci correspond à une dégradation relative du rapport signal sur bruit de 0,88 dB.

Un résultat identique est obtenu, dans le cas d'une impulsion sinusoïdale d'enveloppe rectangulaire, avec un circuit résonnant  $RLC$  en remplaçant dans (13.169) la constante de temps  $RC$  du filtre passe-bas par  $(\pi B)^{-1}$  où  $B$  est la bande passante à  $-3$  dB du circuit résonnant.

D'autres approximations sont possibles (exercices 13.5.24).

### 13.4.7 Applications: détecteur à corrélation ou à filtres adaptés

La théorie du filtrage adapté montre qu'une technique optimale d'identification de signaux de formes connues en présence de bruit indépendant est la corrélation. Celle-ci peut être implémentée soit à l'aide de corrélateurs (fig. 13.38) – éventuellement réalisés de manière simplifiée (§ 13.2.4) – soit à l'aide de filtres adaptés selon le schéma de la figure 13.39.

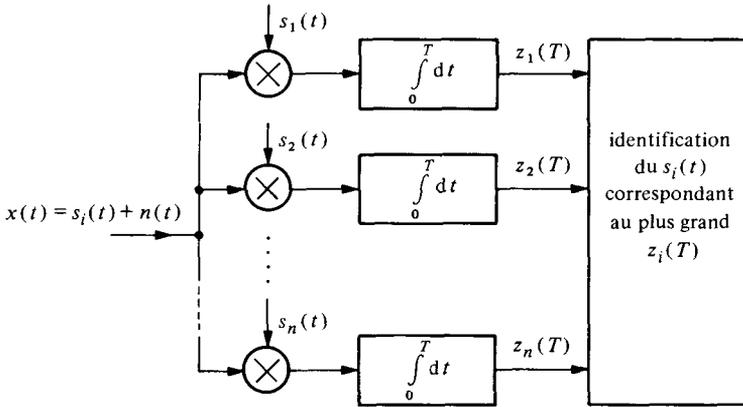


Fig. 13.38

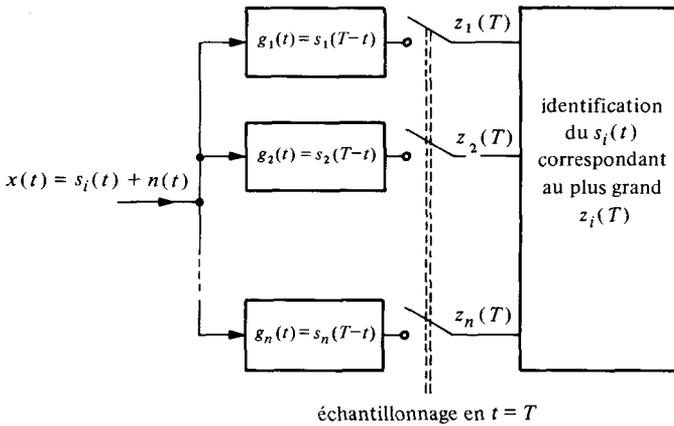


Fig. 13.39

**13.4.8 Introduction à la reconnaissance de formes. Définitions**

La *reconnaissance de formes* (en anglais: *pattern recognition*) est un processus de décision. Son objectif est l'identification, malgré une observation généralement imparfaite, d'un signal uni-, bi- ou tri-dimensionnel (phénomènes acoustiques, sismiques, biologiques, caractères imprimés ou manuscrits, empreintes digitales, objets matériels, etc.). Son potentiel d'application en robotique, en inspection automatique et comme aide au diagnostic industriel (surveillance de machines) ou médical (surveillance de malades), est considérable. Elle fait largement appel aux principes théoriques d'estimation, de comparaison et de décision décrits dans ce chapitre.

Les méthodes de reconnaissance de formes peuvent être subdivisées en trois catégories [144-148]:

- les *méthodes corrélatives* (en anglais: *template matching*) dans lesquelles la forme à identifier est comparée à un ensemble de gabarits constituant les prototypes de chaque classe connue;

- les *méthodes vectorielles* (géométriques ou statistiques, souvent dénommées en anglais: *decision-theoretic approach*) où chaque forme correspond à un point dans un espace d'observation;
- les *méthodes syntaxiques* qui font appel à une description structurale des formes.

Les méthodes corrélatives sont les plus simples à appliquer. Elles englobent le filtrage adapté décrit dans cette section et peuvent être considérées comme un cas particulier des méthodes vectorielles ou syntaxiques. Une mesure de concordance (par exemple : corrélation) entre la forme à identifier et chaque gabarit est calculée. Le critère de décision d'appartenance à une classe donnée est celui de la plus grande concordance. Le schéma de principe d'un système de reconnaissance de formes corrélatif est analogue à ceux des figures 13.38 et 13.39.

Dans les méthodes vectorielles (fig. 13.40), chaque forme observée est représentée dans l'espace d'observation introduit au paragraphe 13.3.1 par un *vecteur de description*  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Chaque composante  $x_k$  est une caractéristique particulière mesurée (par ex. variance, coefficients de Fourier, surface, périmètre, moment d'inertie, etc.). A chaque classe de formes correspond ainsi un amas plus ou moins compact de résultats possibles. L'identification est basée sur un test d'appartenance du vecteur  $\mathbf{x}$  à un amas donné (segmentation de l'espace d'observation). Les critères de décision sont divers. Une approche courante est l'utilisation de *fonctions discriminantes* définissant les frontières entre classes. Aux  $M$  classes  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$  de formes à identifier, on associe  $M$  fonctions  $\Delta_1(\mathbf{x}), \dots, \Delta_M(\mathbf{x})$  telles que, pour  $i \neq j, \Delta_i(x_*) > \Delta_j(x_*)$  pour le plus grand nombre de formes  $x_*$  d'une classe  $\Omega_i$  donnée, de manière à minimiser le risque de mauvaise classification. Ce problème peut être abordé analytiquement si la statistique des erreurs de mesure est connue (un exemple simple est le critère de Bayes en décision binaire décrit au paragraphe 13.3.5). En pratique, l'optimisation des règles de décision est effectuée au cours d'une phase initiale d'apprentissage réalisée avec une population adéquatement choisie de formes représentatives. La recherche d'un mode de description optimal de l'ensemble des formes à identifier permettant de les regrouper en amas aussi disjoints que possible est le problème de la *classification automatique* ou *coalescence* (en anglais: *clustering*).

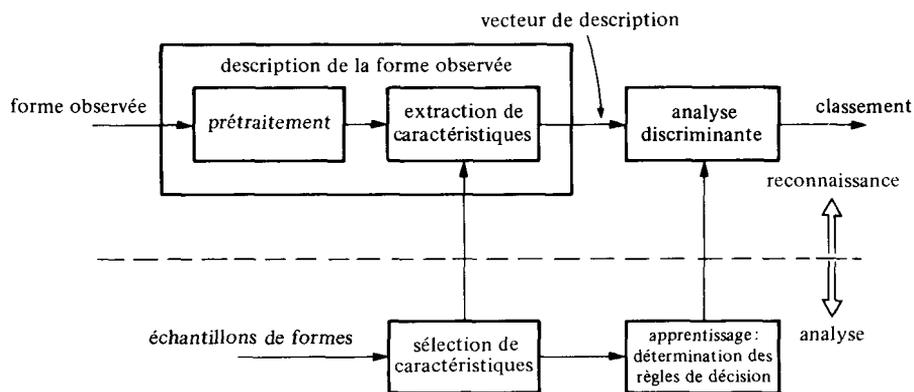


Fig. 13.40 Schéma-bloc d'un système de reconnaissance de formes vectoriel.

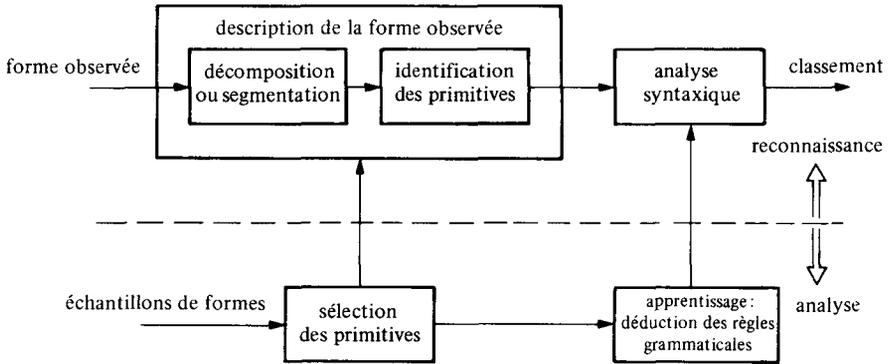


Fig. 13.41 Schéma-bloc d'un système de reconnaissance de formes syntaxique.

L'approche syntaxique (fig. 13.41) fait appel à la théorie des langages. Une forme est décrite comme une certaine combinaison structurée de *primitives* : éléments de formes reconnaissables dont les règles d'enchaînement (concaténation) définissent une grammaire. La reconnaissance implique une identification initiale des primitives suivie d'une analyse syntaxique. Une représentation arborescente des règles d'enchaînement des primitives est souvent utilisée. Le classement peut s'opérer alors en comparant la trajectoire décrite dans l'arbre par la forme observée aux trajectoires types définies pendant la phase d'apprentissage.

## 13.5 EXERCICES

**13.5.1** Soit un signal  $x(t)$  dérivant linéairement avec le temps:  $x(t) = at + b + n(t)$  où  $n(t)$  est un bruit gaussien à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_n^2$ . Déterminer les équations des paramètres  $\tilde{a}$  et  $\tilde{b}$  estimés selon la méthode du maximum de vraisemblance à l'aide d'un ensemble de  $m$  mesures (échantillons)  $x_1$  à  $x_m$  si les échantillons de bruit sont indépendants.

**13.5.2** Déterminer les équations des estimations, au sens du maximum de vraisemblance, de la variance d'un processus gaussien  $\mathbf{x}(t)$  à valeur moyenne nulle :

- si l'on dispose de  $N$  échantillons indépendants  $x_1$  à  $x_N$  ;
- si l'on dispose d'une observation continue  $x(t)$  de durée  $T$ .

**13.5.3** Démontrer la relation (13.22) et calculer les estimations  $\tilde{a}_{\text{eqm}}$ ,  $\tilde{a}_{\text{map}}$  et  $\tilde{a}_{\text{abs}}$  correspondantes.

**13.5.4** Soit  $x(t) = s(t - a) + n(t)$  où  $s(t)$  est un signal de forme connue et  $n(t)$  est un bruit gaussien. On dispose d'une observation continue de  $x(t)$  de durée  $T \gg a$ . Déterminer et interpréter l'équation intégrale dont la solution correspond à l'estimation à vraisemblance maximale  $\tilde{a}_{\text{mv}}$  du retard  $a$ .

**13.5.5** Evaluer l'erreur quadratique moyenne commise dans le cas de la prédiction linéaire de l'exemple 13.1.20.

**13.5.6** Soit  $z_i = a + n_i, i = 1, \dots, N$ , avec  $E[n_i] = 0, E[n_i n_j] = 0$  et  $E[n_i^2] = \sigma_n^2$ . Montrer que l'estimation linéaire optimale  $\tilde{a}_{\text{LO}}$  du paramètre  $a$  ne correspond pas à la moyenne arithmétique des  $z_i$  et est biaisée.

**13.5.7** Soit un signal  $x(t)$  dont les valeurs sont connues aux instants  $t = 0$  et  $t = T$ . Déterminer l'équation de l'estimation linéaire optimale de  $x(t)$  pour  $0 < t < T$  (interpolation linéaire).

**13.5.8** Soit  $x(t) = s(t) + n(t)$  où  $n(t)$  est un bruit indépendant du signal  $s(t)$ . Montrer que le filtre de Wiener causal possède la fonction de réponse fréquentielle  $G_0(f) = 1 - [\Phi_n(f)/\Psi^*(f)]_+ / \Psi(f)$  où  $|\Psi(f)|^2 = \Phi_x(f)$ . Montrer que si  $\Phi_n(f) = \frac{1}{2}\eta$  (bruit blanc) et que la puissance du signal est finie,  $G_0(f) = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}\eta} / \Psi(f)$ .

**13.5.9** Soit  $x(t) = s(t) + n(t)$  avec  $\Phi_s(f) = \alpha / [\beta^2 + (2\pi f)^2]$  et  $\Phi_n(f) = \frac{1}{2}\eta$ . Dans l'hypothèse où  $n(t)$  est indépendant de  $s(t)$ , démontrer que le filtre de Wiener causal estimant  $s(t)$  est un simple filtre passe-bas du premier ordre.

**13.5.10** Déterminer l'expression de la variance de l'estimation de la valeur moyenne du signal binaire à transition aléatoire (§ 5.8.4) effectuée par un moyennneur temporel intégrant pendant une durée  $T$ .

**13.5.11** Soit un signal  $x(t)$  dont la densité spectrale de puissance vaut  $\Phi_x(f) = \mu_x^2 \delta(f) + B^{-1} \text{sinc}^2(f/B)$ . Ce signal est intégré pendant une durée  $T$  afin d'estimer sa valeur moyenne  $\mu_x$ . Déterminer la variance de l'estimateur  $\bar{x}$  en fonction du produit  $BT$  et évaluer le temps d'intégration minimum nécessaire pour obtenir une mesure avec un rapport signal sur bruit meilleur que 30 dB, lorsque le paramètre  $B$  du signal vaut 1 kHz et que le rapport signal sur bruit avant intégration vaut 0 dB.

**13.5.12** Soit le même  $x(t)$  qu'à l'exercice 13.5.11 sur lequel on désire faire la même estimation de valeur moyenne à l'aide de prélèvements discrets périodiques. Déterminer la durée d'échantillonnage totale minimale  $T$  permettant d'améliorer le rapport signal sur bruit de la même quantité que sous 13.5.11:

- lorsque la période d'échantillonnage est telle que les échantillons sont non corrélés (covariance nulle);
- lorsque la période d'échantillonnage est égale à  $1/(2B)$ .

**13.5.13** Vérifier les résultats énoncés au paragraphe 13.1.25.

**13.5.14** Démontrer qu'un moyennneur à échantillonnage périodique est analogue à un filtre en peigne (réponse fréquentielle périodique).

**13.5.15** Comparer le résultat théorique idéal (13.110) avec celui obtenu en corrélant le signal observé  $x(t)$  avec une suite d'impulsions réelles de forme  $g(t)$  et de même périodicité  $T$  que le signal  $s(t)$  à récupérer.

**13.5.16** Un très faible flux lumineux d'intensité constante doit être mesuré à l'aide d'un tube photomultiplicateur suivi d'un amplificateur de faible courant (électromètre). Le signal de sortie de l'amplificateur comprend une valeur moyenne  $U_0 = 10$  mV proportionnelle au flux lumineux incident à laquelle est additionnée le bruit de fond propre  $n(t)$  de l'amplificateur. La densité spectrale de puissance de ce bruit vaut:  $\Phi_n(f) = \frac{1}{2} \eta / (1 + f^2/f_c^2)$  avec  $f_c = 10$  Hz et  $\eta = 1$  V<sup>2</sup>/Hz.

Déterminer le rapport signal sur bruit (rapport de la puissance du signal  $U_0$  à celle du bruit de fond) si la tension de sortie de l'amplificateur est filtrée par un filtre passe-bas idéal atténuant totalement toutes les composantes de fréquences supérieures à 0,1 Hz.

Déterminer le rapport signal sur bruit obtenu en interrompant périodiquement le flux lumineux à l'aide d'un obturateur périodique réalisé avec une hélice à quatre pales tournant à 250 tours par seconde (on supposera que la durée d'ouverture de l'obturateur est égale à la durée de fermeture) et en faisant suivre l'amplificateur par un détecteur synchrone suivi par le même filtre passe-bas idéal. Le détecteur synchrone doit être considéré comme un circuit assurant la multiplication de la tension de sortie de l'amplificateur avec une onde carrée de référence, isochrone avec la fonction d'obturation, dont l'amplitude vaut  $\pm 1$ .

**13.5.17** Déterminer le rapport de vraisemblance correspondant à la détection d'enveloppe d'un signal bruité  $x(t) = s_i(t) + n(t)$  où  $s_i(t) = A_i \cos(\omega_0 t)$  avec  $A_0 = 0$  et  $A_1 = A$ , dans le cas où l'observation est constituée de  $N$  échantillons indépendants et où  $p_0 = \text{Prob}(s_0) = \frac{1}{2}$ . En déduire le schéma-bloc du détecteur optimum.

**13.5.18** Un système de détection (présence ou absence d'un signal utile) est perturbé par du bruit additif gaussien à valeur moyenne nulle et variance  $\sigma_n^2$ . Déterminer la valeur du seuil de décision fixant la probabilité de fausse alarme à  $p_f = \alpha_a = 0,05$ .

**13.5.19** Soit une source binaire générant aléatoirement les signaux  $s_0 = 0$  avec une probabilité  $p_0$  et  $s_1 = A$  avec une probabilité  $p_1$ . La voie de transmission est perturbée par un bruit  $n(t)$ , à valeur moyenne nulle et densité de probabilité  $p_n(n) = \exp(-2|n|)$ . Déterminer en fonction des paramètres  $A$ ,  $p_0$  et  $p_1$ , le seuil de décision qui minimise la probabilité d'erreur totale (ou risque moyen). Application numérique:  $p_0 = 0,8$ ;  $p_1 = 0,2$ ;  $A = 3$  V.

**13.5.20** Soit une source binaire générant les signaux  $s_0 = 0$  (absence de signal) et  $s_1 = +A$ . De plus, la statistique du bruit au niveau du récepteur varie en fonction de la présence ou de l'absence du signal:  $p_{n0}(n|s_0) = \exp(-n) \epsilon(n)$ ,  $p_{n1}(n|s_1) = (2\pi\sigma_n^2)^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2} n^2/\sigma_n^2)$ . En supposant que les coefficients de coût associés aux cas de décisions erronées sont égaux à 1 (avec  $c_{00} = c_{11} = 0$ ), définir le seuil de décision qui minimise la probabilité d'erreur maximum. Application numérique:  $\sigma_{n1} \cong 11,1$  V et  $A = 6 \sigma_{n1}$ .

**13.5.21** Soit un signal radar  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  détecté en présence de bruit blanc gaussien  $n(t)$  de densité spectrale de puissance  $\Phi_n(f) = \eta/2$ . A la réception, ce signal

traverse un filtre passe-bande idéal de largeur  $B$ , centré sur  $f_0$ , puis un détecteur linéaire d'enveloppe. En fixant la probabilité de fausse alarme maximum à  $p_f = \alpha_a$ , déterminer le seuil optimum à la sortie du détecteur, au sens du critère de Neyman-Pearson, et déterminer la probabilité de détection en utilisant la tabulation de la fonction de Marcum  $Q(a, b)$ , donnée à la section 15.9. Application numérique:  $B = 400 \text{ Hz} \gg f_0$ ,  $\eta = 0,01 \text{ V}^2/\text{Hz}$ ;  $A = 16 \text{ V}$ ;  $p_f = \alpha_a = 10^{-9}$ .

**13.5.22** Soit une source générant de façon équiprobable les niveaux  $+V$  et  $-V$  (signal antipolaire) auxquels s'ajoute un bruit gaussien à valeur moyenne nulle, de variance  $\sigma_n^2$ . Quelle doit être, en fonction de  $\sigma_n^2$ , la puissance du signal émis pour obtenir à la réception une probabilité d'erreur totale de  $10^{-4}$ , en admettant que les deux cas de décisions erronées ont la même importance. Utiliser les caractéristiques opérationnelles du récepteur (§ 13.3.15).

**13.5.23** Déterminer les fonctions d'autocorrélation des signaux binaires d'énergie  $W_s = A^2 T$  de la figure 13.42 et comparer leurs performances en résolution.

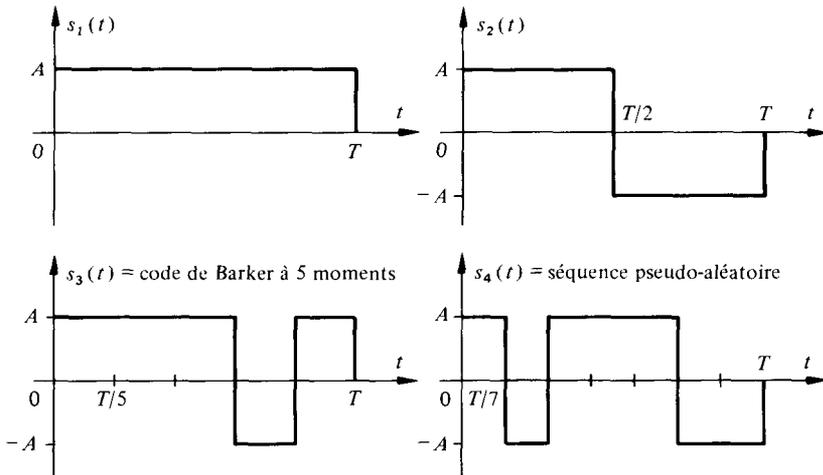


Fig. 13.42

**13.5.24** La fonction de réponse fréquentielle d'un filtre composé par la mise en cascade de filtres  $RC$  peut être donnée par l'expression approximative  $G(f) = \exp[-\frac{1}{2}(2\pi f)^2/\sigma^2] \exp(-j2\pi f\tau_0)$ . Ce filtre est appelé filtre gaussien. Quelle est l'efficacité relative d'un tel filtre pour la détection d'une impulsion rectangulaire d'amplitude  $A$  et de durée  $T$ ? Quelle doit être la valeur de l'instant d'échantillonnage optimum  $t_0$ ?



## RÉSUMÉ DE THÉORIE DES PROBABILITÉS

### 14.1 DÉFINITIONS FONDAMENTALES

#### 14.1.1 Concept de probabilité. Définitions

Une *expérience statistique* consiste en l'observation d'événements dont les réalisations sont gouvernées par les lois du hasard. L'ensemble  $Z$  de tous les résultats possibles  $\xi$  (ou épreuves) forme l'*espace des épreuves*.

Un *événement*  $A$  est un quelconque sous-ensemble de  $Z$  auquel on accorde un intérêt particulier. Si l'expérience est répétée  $N$  fois et que l'événement  $A$  se produit  $M$  fois, le rapport  $M/N$  mesure la *fréquence relative* d'apparition de  $A$  en  $N$  essais.

La *probabilité* de réalisation de  $A$  est définie comme la limite pour  $N \rightarrow \infty$  de la fréquence relative de  $A$  :

$$\text{Prob}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} M/N \text{ avec } 0 \leq \text{Prob}(A) \leq 1 \quad (14.1)$$

#### 14.1.2 Événements s'excluant mutuellement

Si deux événements  $A$  et  $B$  s'excluent mutuellement, la probabilité d'apparition de l'événement  $C = A \cup B$  ( $A$  *ou*  $B$  au sens de la théorie des ensembles) est donnée par :

$$\text{Prob}(C) = \text{Prob}(A \cup B) = \text{Prob}(A) + \text{Prob}(B) \quad (14.2)$$

Si l'ensemble fondamental  $Z$  est subdivisé en  $n$  sous-ensembles  $A_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) s'excluant mutuellement ( $A_j A_k = \emptyset$  pour  $j \neq k$ , où  $\emptyset$  est l'ensemble vide), on a :

$$\sum_{i=1}^n \text{Prob}(A_i) = \text{Prob}(Z) = 1 \quad (14.3)$$

#### 14.1.3 Probabilité conjointe. Définition

Si  $D = A \cup B$  avec  $A \cap B \neq \emptyset$  (ensembles non-disjoints), on a

$$\text{Prob}(D) = \text{Prob}(A \cup B) = \text{Prob}(A) + \text{Prob}(B) - \text{Prob}(A, B) \quad (14.4)$$

Le terme  $\text{Prob}(A, B)$  est la *probabilité conjointe* (ou composée) mesurant les chances de réalisation de l'événement  $A \cap B$  ( $A$  *et*  $B$  au sens de la théorie des ensembles). Si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\text{Prob}(A, B) = 0$ .

#### 14.1.4 Probabilités conditionnelles. Définitions

Soit deux événements A et B ne s'excluant pas mutuellement. Lors d'une expérience répétée  $N$  fois, le nombre d'apparitions des événements A, B et  $A \cap B$  est donné respectivement par  $M(A)$ ,  $M(B)$  et  $M(A, B)$ .

Le rapport  $M(A, B)/M(B)$  exprime la fréquence relative d'apparition de A *lorsque B est réalisé*.

En divisant le numérateur et le dénominateur par  $N$  et en passant à la limite, pour  $N \rightarrow \infty$ , on obtient la *probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé* :

$$\text{Prob}(A|B) = \text{Prob}(A, B)/\text{Prob}(B) \quad (14.5)$$

La probabilité conjointe de deux événements A et B peut ainsi être exprimée à l'aide des probabilités simples et conditionnelles :

$$\text{Prob}(A, B) = \text{Prob}(A|B) \text{Prob}(B) = \text{Prob}(B|A) \text{Prob}(A) \quad (14.6)$$

Par extension, la probabilité conjointe associée à  $n$  événements est donnée par la relation générale suivante (règle de multiplication) :

$$\text{Prob}(A_1, A_2, \dots, A_n) = \frac{\text{Prob}(A_1) \text{Prob}(A_2|A_1) \text{Prob}(A_3|A_1 A_2) \dots \text{Prob}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})}{\text{Prob}(A_n|A_1 A_2 \dots A_{n-1})} \quad (14.7)$$

#### 14.1.5 Événements indépendants

Deux événements A et B sont statistiquement indépendants si :

$$\text{Prob}(A|B) = \text{Prob}(A); \text{Prob}(B|A) = \text{Prob}(B) \quad (14.8)$$

ou autrement dit lorsque :

$$\text{Prob}(A, B) = \text{Prob}(A) \text{Prob}(B) \quad (14.9)$$

## 14.2 VARIABLES ALÉATOIRES

### 14.2.1 Définitions

Une *variable aléatoire* est une grandeur réelle dont la valeur dépend du hasard. Cette dépendance est exprimée par une loi de probabilité, communément appelée *distribution*.

La distribution d'une variable aléatoire  $\mathbf{x}$  peut être définie soit par sa *fonction de répartition*  $F(x)$ , soit par sa *densité de probabilité*  $p(x)$  ou, encore, par sa *fonction caractéristique*  $\Pi_{\mathbf{x}}(u)$ .

### 14.2.2 Fonction de répartition. Définition

La *fonction de répartition* exprime la probabilité que la variable  $\mathbf{x}$  soit inférieure à une valeur  $x$  donnée :

$$F(x) = \text{Prob}(\mathbf{x} \leq x) \quad (14.10)$$

La fonction de répartition est une fonction non décroissante de  $x$  avec les valeurs limites

$$F(-\infty) = 0 \quad (14.11)$$

et

$$F(+\infty) = 1 \quad (14.12)$$

### 14.2.3 Densité de probabilité. Définition

La *densité de probabilité* est par définition la dérivée de la fonction de répartition

$$p(x) = dF(x)/dx \quad (14.13)$$

On déduit de (14.10) et (14.12) que  $p(x) \geq 0$  pour tout  $x$  et que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = F(\infty) = 1 \quad (14.14)$$

On passe donc de la densité de probabilité à une valeur de probabilité par intégration. La probabilité d'observer la variable  $x$  entre deux limites  $a$  et  $b$  peut ainsi s'exprimer sous les formes équivalentes

$$\text{Prob}(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b p(x) dx \quad (14.15)$$

### 14.2.4 Variable aléatoire discrète (VAD)

Une variable aléatoire est dite *discrète* lorsqu'elle ne peut prendre qu'un nombre fini, ou dénombrable, de valeurs distinctes.

Si l'on dénote par  $x_i$  les différentes valeurs distinctes prises par la variable  $x$  et par  $\text{Prob}(x_i)$  les probabilités correspondantes, la fonction de répartition d'une VAD peut être exprimée par :

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} \text{Prob}(x_i) \epsilon_-(x - x_i) \quad (14.16)$$

où

$$\epsilon_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases} \quad (14.17)$$

est le saut unité défini au paragraphe 1.3.3, mais avec valeur unité à l'origine.

La densité de probabilité d'une VAD est alors exprimée par

$$p(x) = \sum_i \text{Prob}(x_i) \delta_-(x - x_i) \quad (14.18)$$

où  $\delta_-(x) = d\epsilon_-(x)/dx$  est une impulsion de Dirac telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^0 \delta_-(x) dx = 1 \quad (14.19)$$

et non  $\frac{1}{2}$  comme usuellement admis.

Un exemple de fonction de répartition et de densité de probabilité d'une VAD est représenté sur la figure 14.1.

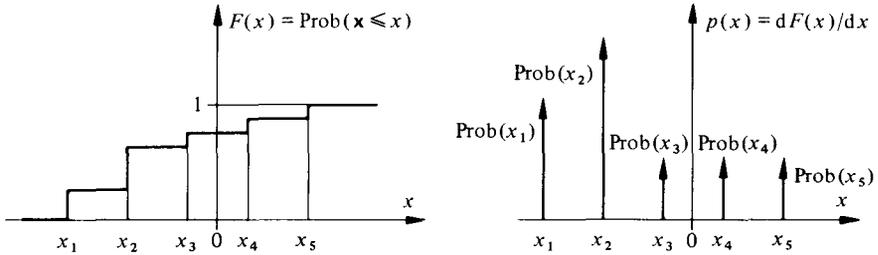


Fig. 14.1

**14.2.5 Variable aléatoire continue (VAC)**

Une variable aléatoire est dite *continue* lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur dans un intervalle donné.

Un exemple de fonction de répartition et de densité de probabilité d'une VAC est représenté sur la figure 14.2

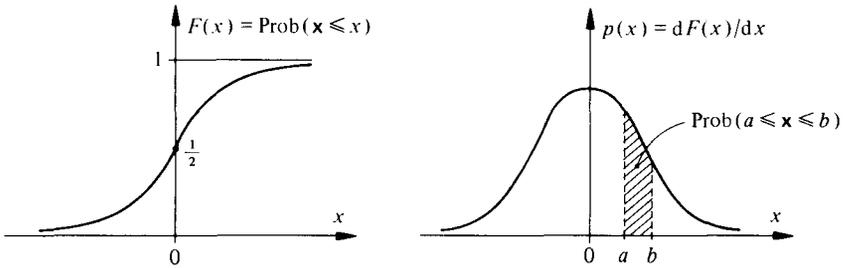


Fig. 14.2

**14.2.6 Estimation d'une densité de probabilité : histogramme. Définition**

La densité de probabilité d'une variable aléatoire ne peut pas être déterminée expérimentalement. On peut, par contre, mesurer la fréquence relative d'apparition  $M(x_i, \Delta x)/N$  de la variable  $x$  dans un intervalle  $[x_i - \frac{1}{2} \Delta x, x_i + \frac{1}{2} \Delta x]$  d'amplitude de largeur  $\Delta x$  centré sur une valeur particulière  $x_i$  où  $M(x_i, \Delta x) = M(x_i - \frac{1}{2} \Delta x < x < x_i + \frac{1}{2} \Delta x)$  dénote le nombre d'événements favorables comptés sur un total de  $N$  essais.

La probabilité de rencontrer  $x$  dans cet intervalle est, par (14.1), la valeur atteinte lorsque  $N \rightarrow \infty$  :

$$\text{Prob} ( x_i - \Delta x/2 < x < x_i + \Delta x/2 ) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M(x_i, \Delta x)}{N} \tag{14.20}$$

Une estimation locale (fig. 14.3) de la densité de probabilité est obtenue en divisant la fréquence relative mesurée par la largeur de l'intervalle utilisé

$$\tilde{p}(x_i, \Delta x) = \frac{M(x_i, \Delta x)}{N \cdot \Delta x} \tag{14.21}$$

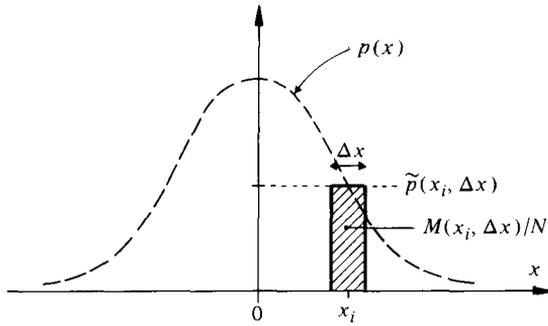


Fig. 14.3

En subdivisant la totalité du domaine de variation de  $\mathbf{x}$  en un ensemble d'intervalles juxtaposés et en effectuant pour chaque intervalle une mesure du type (14.21), on obtient une estimation globale de la densité de probabilité appelée *histogramme*.

Une bonne estimation [65] implique à la fois un nombre d'essais  $N$  élevés (réduction des fluctuations statistiques de la mesure) et un intervalle  $\Delta x$  petit (limitation de l'erreur d'estimation, appelée biais, apparaissant en cas d'absence de symétrie locale de la loi  $p(x)$  relativement à  $x_i$ ).

**14.2.7 Variables aléatoires bidimensionnelles. Définitions**

Soit  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux variables aléatoires. Le couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  est une *variable aléatoire bidimensionnelle* dont la distribution peut être définie soit par sa *fonction de répartition conjointe*

$$F(x, y) = \text{Prob}(\mathbf{x} \leq x \text{ et } \mathbf{y} \leq y) \tag{14.22}$$

soit par sa *densité de probabilité conjointe* (fig. 14.4)

$$p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \tag{14.23}$$

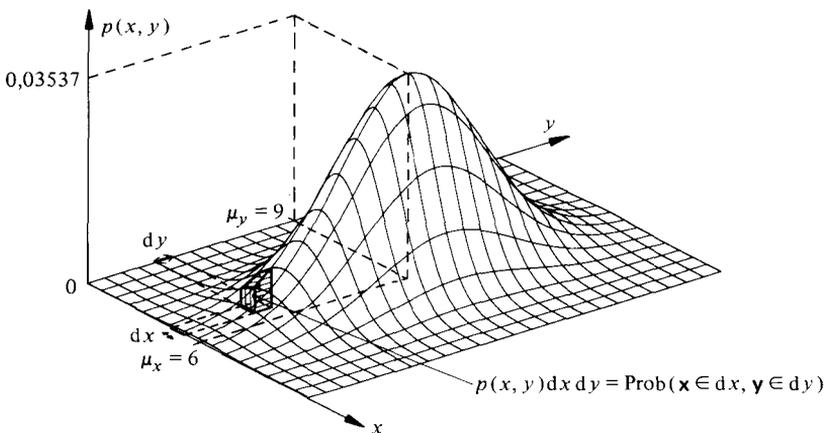


Fig. 14.4 Représentation graphique de la fonction  $p(x, y) = (2\pi\sigma_x\sigma_y)^{-1} \exp[-\frac{1}{2}(x - \mu_x)^2/\sigma_x^2 - \frac{1}{2}(y - \mu_y)^2/\sigma_y^2]$  avec  $\mu_x = 6$ ,  $\sigma_x = 1,5$ ,  $\mu_y = 9$ ,  $\sigma_y = 3$ .

avec

$$F_{x,y}(\infty, \infty) = \iint_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx dy = 1 \quad (14.24)$$

Si  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des variables discrètes, elles peuvent prendre les valeurs  $x_1, x_2, \dots, x_m$  et  $y_1, y_2, \dots, y_n$  respectivement. La variable bidimensionnelle peut ainsi prendre  $m \cdot n$  paires de valeurs  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_n)$ . On représente avantageusement l'ensemble des événements  $(x_i, y_j)$  et leurs probabilités conjointes correspondantes  $\text{Prob}(x_i, y_j)$  sous forme de deux matrices  $m \times n$  :

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} (x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \dots & (x_1, y_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_m, y_1) & (x_m, y_2) & \dots & (x_m, y_n) \end{bmatrix} \quad (14.25)$$

$$[\text{Prob}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \begin{bmatrix} \text{Prob}(x_1, y_1) & \dots & \text{Prob}(x_1, y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Prob}(x_m, y_1) & \dots & \text{Prob}(x_m, y_n) \end{bmatrix} \quad (14.26)$$

La densité de probabilité conjointe devient ici un réseau d'impulsions de Dirac (fig. 14.5)

$$p(x, y) = \sum_i \sum_j \text{Prob}(x_i, y_j) \delta(x - x_i, y - y_j) \quad (14.27)$$

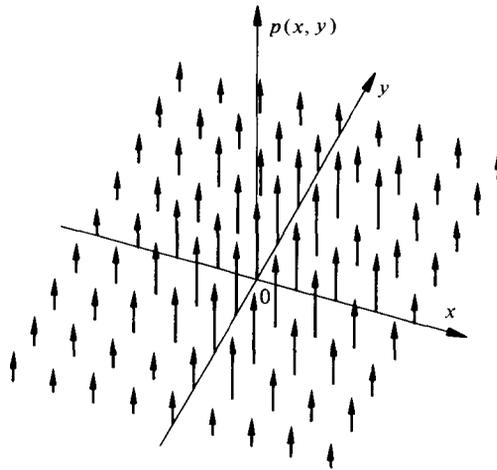


Fig. 14.5

Les lois de probabilité marginale permettent de définir la distribution de l'une des variables, indépendamment de l'autre. Elles sont obtenues à partir de la distribution bidimensionnelle par les relations :

- VAC

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \quad (14.28)$$

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx \quad (14.29)$$

- VAD

$$\text{Prob}(x_i) = \sum_{j=1}^n \text{Prob}(x_i, y_j) \quad (14.30)$$

$$\text{Prob}(y_j) = \sum_{i=1}^m \text{Prob}(x_i, y_j) \quad (14.31)$$

$\text{Prob}(x_i)$  est égale à la somme de tous les éléments de la  $i$ ème ligne de la matrice des probabilités conjointes et  $\text{Prob}(y_j)$  est égale à la somme de tous les éléments de la  $j$ ème colonne de cette matrice.

Les lois de probabilité conditionnelle correspondantes sont tirées de relations analogues à (14.5) :

- VAC

$$p(x|y) = p(x, y)/p_y(y) \quad (14.32)$$

$$p(y|x) = p(x, y)/p_x(x) \quad (14.33)$$

- VAD

$$\text{Prob}(x_i|y_j) = \text{Prob}(x_i, y_j)/\text{Prob}(y_j) \quad (14.34)$$

$$\text{Prob}(y_j|x_i) = \text{Prob}(x_i, y_j)/\text{Prob}(x_i) \quad (14.35)$$

Ainsi, toutes les lois de probabilités marginales, conjointes et conditionnelles d'une variable bidimensionnelle peuvent être déterminées à partir de la connaissance

- soit de la densité de probabilité conjointe seule;
- soit d'une densité de probabilité marginale et d'une densité de probabilité conditionnelle.

Dans le cas discret, ceci correspond à la connaissance

- de la matrice des probabilités conjointes;
- ou d'une matrice marginale et d'une matrice conditionnelle.

### 14.2.8 Variables statistiquement indépendantes

La condition d'indépendance statistique de deux variables aléatoires continues est que leur densité de probabilité conjointe soit égale au produit des densités de probabilités marginales :

$$p(x, y) = p_x(x) \cdot p_y(y) \quad (14.36)$$

Dans le cas discret, cette condition s'exprime au niveau des probabilités selon (14.9), par

$$\text{Prob}(x_i, y_j) = \text{Prob}(x_i) \cdot \text{Prob}(y_j) \quad \forall i \text{ et } j \quad (14.37)$$

### 14.2.9 Exemple (VAC)

Soit une distribution bidimensionnelle définie par (fig. 14.6)

$$p(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

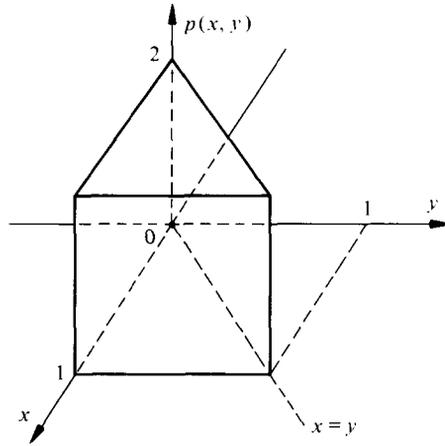


Fig. 14.6

- Calcul des densités de probabilité marginale (fig. 14.7)

$$p_x(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \int_0^{y=x} 2 dx = 2x & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

$$p_y(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x, y) dx = \int_{x=y}^1 2 dx = 2(1-y) & ; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

Vérifications :

$$\int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1$$

$$\int_0^1 p_y(y) dy = \int_0^1 2(1-y) dy = (2y - y^2) \Big|_0^1 = 1$$

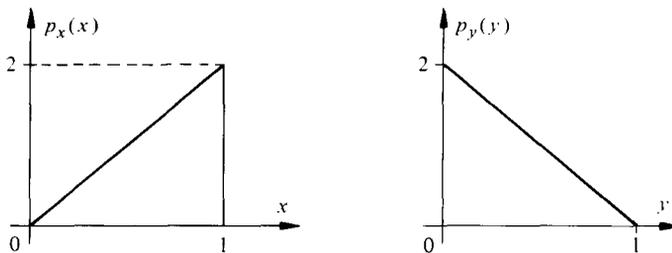


Fig. 14.7

- Calcul des densités de probabilité conditionnelle (fig. 14.8)

$$p(x|y) = p(x, y)/p_y(y) = 1/(1-y); 0 \leq y \leq 1 \text{ et } y \leq x \leq 1$$

$$p(y|x) = p(x, y)/p_x(x) = 1/x \quad ; 0 \leq x \leq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq x$$

avec

$$\int_y^1 p(x|y) dx = 1 \quad ; \quad \int_0^x p(y|x) dy = 1$$

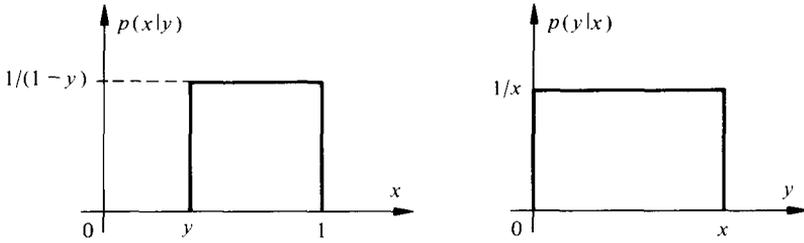


Fig. 14.8

Les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne sont pas statistiquement indépendantes, car :

$$p(x, y) \neq p_x(x) \cdot p_y(y)$$

ou

$$p(x|y) \neq p_x(x) \text{ et } p(y|x) \neq p_y(y)$$

#### 14.2.10 Exemple (VAD)

Soit

$$[\text{Prob}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/3 & 0 \\ 2/9 & 1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$$

Il s'ensuit que :

- $\text{Prob}(x_1) = 1/3 + 1/9 = 4/9$ ,  $\text{Prob}(x_2) = 5/9$ ,  
 $\Sigma \text{Prob}(x_i) = 9/9 = 1$  (vérification);
- $\text{Prob}(y_1) = 3/9$ ,  $\text{Prob}(y_2) = 4/9$ ,  $\text{Prob}(y_3) = 2/9$ ,  
 $\Sigma \text{Prob}(y_j) = 3/9 + 4/9 + 2/9 = 9/9 = 1$  (vérification)
- $[\text{Prob}(\mathbf{x}|\mathbf{y})] = \begin{bmatrix} 1/3 & 3/4 & 0 \\ 2/3 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$
- $[\text{Prob}(\mathbf{y}|\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 2/5 \end{bmatrix}$

Les deux variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  ne sont pas indépendantes puisque

$$\text{Prob}(x_i, y_j) \neq \text{Prob}(x_i) \cdot \text{Prob}(y_j)$$

ou respectivement que

$$\text{Prob}(x_i|y_j) \neq \text{Prob}(x_i) \text{ et } \text{Prob}(y_j|x_i) \neq \text{Prob}(y_j)$$

## 14.3 MOYENNES STATISTIQUES ET MOMENTS

**14.3.1 Espérance mathématique d'une fonction d'une variable aléatoire. Définitions**

Soit une variable aléatoire discrète  $\mathbf{x}$ , à  $n$  états, dont on observe  $N$  réalisations. L'état  $x_1$  apparaît  $N_1$  fois, l'état  $x_2$  apparaît  $N_2$  fois, etc., avec  $N_1 + N_2 + \dots + N_n = N$ .

La *valeur moyenne expérimentale* de  $\mathbf{x}$  est

$$\bar{\mathbf{x}} = (x_1 N_1 + x_2 N_2 + \dots + x_n N_n) / N \quad (14.38)$$

L'*espérance mathématique* de  $\mathbf{x}$  est la *valeur moyenne statistique*, c'est-à-dire la valeur théorique limite atteinte par  $\bar{\mathbf{x}}$  lorsque  $N$  tend vers l'infini. Celle-ci, notée  $\mu_x$ , est égale, en tenant compte de (14.1), à

$$\mu_x = E[\mathbf{x}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n x_i \text{Prob}(x_i) \quad (14.39)$$

On a, par analogie et de manière générale pour une variable aléatoire  $\mathbf{x}$  continue ou discrète

$$\mu_x = E[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \quad (14.40)$$

La valeur moyenne est le centre de gravité de la densité de probabilité.

Soit  $f(\mathbf{x})$  une fonction d'une variable aléatoire  $\mathbf{x}$ . Sa valeur moyenne statistique est, de manière analogue, définie par

$$E[f(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx \quad (14.41)$$

Dans le cas d'une variable discrète, cette expression se réduit après intégration à

$$E[f(\mathbf{x})] = \sum_{i=1}^n f(x_i) \text{Prob}(x_i) \quad (14.42)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire bidimensionnelle ( $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ ), la valeur moyenne statistique d'une fonction  $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$  est donnée par

$$E[f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) p(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (14.43)$$

qui se réduit, dans le cas discret, à

$$E[f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)] = \sum_i \sum_j f(x_{1i}, x_{2j}) \text{Prob}(x_{1i}, x_{2j}) \quad (14.44)$$

**14.3.2 Valeur moyenne d'une somme de variables aléatoires**

Soit  $\mathbf{z} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ . Par (14.43), (14.28) et (14.29)

$$\begin{aligned} \mu_z = E[\mathbf{z}] &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x + y) p(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x p_x(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p_y(y) dy = \mu_x + \mu_y \end{aligned} \quad (14.45)$$

D'une manière générale, *l'espérance mathématique d'une somme de variables aléatoires* (dépendantes ou indépendantes) *est égale à la somme de leurs espérances mathématiques* :

$$E \left[ \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \right] = \sum_{i=1}^n E [ \mathbf{x}_i ] \quad (14.46)$$

### 14.3.3 Moments. Définition

On appelle *moment* du premier ordre et de degré  $n$  d'une variable aléatoire l'espérance mathématique de sa  $n$ -ième puissance

$$m_{x^n} = E [ \mathbf{x}^n ] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \quad (14.47)$$

La valeur moyenne  $\mu_x$  correspond donc au moment de degré 1.

### 14.3.4 Valeur quadratique moyenne. Définition

La *valeur quadratique moyenne* d'une variable aléatoire est son moment de degré 2.

$$m_{x^2} = E [ \mathbf{x}^2 ] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \quad (14.48)$$

Dans le cas d'une variable discrète, (14.48) se réduit à

$$m_{x^2} = \sum_i x_i^2 \text{Prob} (x_i) \quad (14.49)$$

### 14.3.5 Moments centrés. Définition

On appelle *moments centrés* du premier ordre et de degré  $n$  d'une variable aléatoire l'espérance mathématique de la  $n$ -ième puissance de l'écart entre la variable et sa valeur moyenne

$$m_{x-\mu, n} = E [ ( \mathbf{x} - \mu_x )^n ] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^n p(x) dx \quad (14.50)$$

### 14.3.6 Variance et écart-type. Définitions

La *variance* (ou écart quadratique moyen) d'une variable aléatoire est son moment centré de degré 2. Vu son importance, elle est notée  $\sigma_x^2$  ou parfois  $\text{Var}(\mathbf{x})$

$$\sigma_x^2 = m_{x-\mu, 2} = E [ ( \mathbf{x} - \mu_x )^2 ] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 p(x) dx \quad (14.51)$$

Dans le cas d'une variable discrète, (14.51) se réduit à

$$\sigma_x^2 = \sum_i (x_i - \mu_x)^2 \text{Prob} (x_i) \quad (14.52)$$

La racine carrée de la variance,  $\sigma_x$ , est appelée l'écart-type (ou *déviat*ion standard). C'est une mesure de la dispersion des valeurs de  $\mathbf{x}$  autour de la valeur moyenne  $\mu_x$  (fig. 14.9).

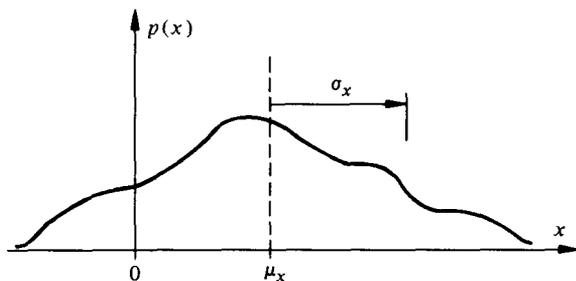


Fig. 14.9

En développant (14.51), on obtient la relation suivante liant la valeur moyenne, la variance et la valeur quadratique moyenne

$$m_{x2} = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \tag{14.53}$$

La variance s'identifie donc à la valeur quadratique moyenne pour toute variable à valeur moyenne nulle.

L'estimation non biaisée  $s_x^2$  de  $\sigma_x^2$ , c'est-à-dire telle que  $E[s_x^2] = \sigma_x^2$ , se calcule à partir de  $N$  réalisations d'une variable discrète  $\mathbf{x}$  par la formule  $s_x^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 / (N - 1)$  [24].

### 14.3.7 Inégalité de Tchebycheff

On démontre (§ XVII 2.4.14 et [24]) l'inégalité suivante

$$\text{Prob}(\mu_x - \epsilon < \mathbf{x} < \mu_x + \epsilon) \geq 1 - \sigma_x^2 / \epsilon^2 \tag{14.54}$$

Ainsi, quelle que soit la densité de probabilité  $p(x)$ , la probabilité que  $\mathbf{x}$  prenne une valeur comprise dans l'intervalle  $[\mu_x - \epsilon, \mu_x + \epsilon]$  est proche de l'unité pour autant que  $\sigma_x \ll \epsilon$ .

### 14.3.8 Corrélation et covariance. Définitions

Dans le cas d'un couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de variables aléatoires, on définit encore les moments du deuxième ordre suivants :

$$R_{xy} = E[\mathbf{x} \mathbf{y}] = \begin{cases} \iint_{-\infty}^{\infty} xy p(x, y) dx dy & \text{(VAC)} \\ \sum_i \sum_j x_i y_j \text{Prob}(x_i, y_j) & \text{(VAD)} \end{cases} \tag{14.55}$$

$$C_{xy} = E[(\mathbf{x} - \mu_x)(\mathbf{y} - \mu_y)] = \begin{cases} \iint_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)(y - \mu_y) p(x, y) dx dy & \text{(VAC)} \\ \sum_i \sum_j (x_i - \mu_x)(y_j - \mu_y) \text{Prob}(x_i, y_j) & \text{(VAD)} \end{cases} \tag{14.56}$$

qui sont liés par la relation

$$R_{xy} = C_{xy} + \mu_x \mu_y \tag{14.57}$$

Le moment  $R_{xy}$  mesure la *corrélation statistique* entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . Le moment centré  $C_{xy}$ , aussi noté  $\text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , est appelé la *covariance* du couple  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

**La corrélation s'identifie donc à la covariance lorsque l'une au moins des variables est à valeur moyenne nulle.**

On vérifie aisément, par (14.36) ou (14.37), (14.6) et (14.57) que, si les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont *indépendantes* :

$$C_{xy} = 0 \quad \text{et} \quad R_{xy} = \mu_x \mu_y \quad (14.58)$$

**La réciproque n'est pas nécessairement vraie!**

### 14.3.9 Coefficient de corrélation. Définition

La covariance normalisée est appelée *coefficient de corrélation*

$$\rho_{xy} = \frac{C_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \text{avec} \quad |\rho_{xy}| \leq 1 \quad (14.59)$$

Les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont dites *non corrélées* si  $\rho_{xy} = 0$ . Elles sont totalement corrélées si  $|\rho_{xy}| = 1$ . Les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont alors liées par une relation linéaire. Le coefficient de corrélation est une mesure de ressemblance entre  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ .

### 14.3.10 Variance d'une somme de deux variables aléatoires

Si  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ , la variance  $\sigma_z^2$  est donnée, en tenant compte de (14.53), (14.46), (14.55) et (14.57), par

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= m_{z2} - \mu_z^2 = E[(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2] - E^2[\mathbf{x} + \mathbf{y}] \\ &= m_{x2} + 2R_{xy} + m_{y2} - \mu_x^2 - \mu_y^2 - 2\mu_x \mu_y \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2C_{xy} \end{aligned} \quad (14.60)$$

Si les variables  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont *indépendantes* :  $C_{xy} = 0$  et

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (14.61)$$

**D'une manière générale, la variance d'une somme de variables  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  indépendantes est égale à la somme des variances :**

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_{x_i}^2 \quad (14.62)$$

si  $\mathbf{z} = \sum \mathbf{x}_i$ .

### 14.3.11 Fonction caractéristique. Définition

La *fonction caractéristique* d'une variable aléatoire  $\mathbf{x}$  est, par définition, l'espérance mathématique de la fonction  $\exp(ju\mathbf{x})$  :

$$\Pi_x(u) = E[\exp(ju\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp(jux) dx \quad (14.63)$$

avec  $\Pi_x(0) = 1$  par (14.14).

En posant  $u = 2\pi v$ , on constate que la fonction caractéristique correspond à la *transformée inverse de Fourier* (4.2) de la densité de probabilité

$$\Pi_{\mathbf{x}}(v) = F^{-1}\{p(x)\} \quad (14.64)$$

et réciproquement

$$p(x) = F\{\Pi_{\mathbf{x}}(v)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi_{\mathbf{x}}(u) \exp(-jux) du / (2\pi) \quad (14.65)$$

Dans le cas d'une variable bidimensionnelle  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , on a

$$\Pi_{\mathbf{xy}}(u, v) = E\{\exp[j(u\mathbf{x} + v\mathbf{y})]\} = \iint_{-\infty}^{\infty} p(x, y) \exp[j(ux + vy)] dx dy \quad (14.66)$$

qui correspond à la transformée de Fourier inverse bidimensionnelle de la densité de probabilité conjointe.

En introduisant le développement en série de  $\exp(ju\mathbf{x})$ , on peut mettre la fonction caractéristique (14.63) sous la forme suivante, pour autant que tous les moments de  $\mathbf{x}$  soient finis :

$$\Pi_{\mathbf{x}}(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ju)^k}{k!} E[\mathbf{x}^k] \quad (14.67)$$

Si  $\Pi_{\mathbf{x}}(u)$  est dérivable à l'origine, on peut ainsi calculer les différents moments par la relation

$$m_{\mathbf{x}^k} = E[\mathbf{x}^k] = j^{-k} \left. \frac{d^k \Pi_{\mathbf{x}}(u)}{d u^k} \right|_{u=0} \quad (14.68)$$

Dans le cas bidimensionnel, on a, si les moments existent

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{xy}}(u, v) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{j^{(k+l)} u^k v^l}{k! l!} E[\mathbf{x}^k \mathbf{y}^l] \\ &= 1 + j(u\mu_x + v\mu_y) - \frac{1}{2} (u^2 m_{x2} + v^2 m_{y2}) - uv R_{xy} + \dots \end{aligned} \quad (14.69)$$

et

$$E[\mathbf{x}^k \mathbf{y}^l] = j^{-(k+l)} \left. \frac{\partial^{k+l} \Pi_{\mathbf{xy}}(u, v)}{\partial u^k \partial v^l} \right|_{u=v=0} \quad (14.70)$$

Ainsi, en particulier, la corrélation (14.55) est égale à la dérivée à l'origine pour  $k=l=1$

$$R_{xy} = - \left. \frac{\partial^2 \Pi_{\mathbf{xy}}(u, v)}{\partial u \partial v} \right|_{u=v=0} \quad (14.71)$$

## 14.4 PRINCIPALES DISTRIBUTIONS

### 14.4.1 Variable binaire

Si  $\mathbf{x} \in \{a, b\}$  avec  $\text{Prob}(\mathbf{x} = a) = p$  et  $\text{Prob}(\mathbf{x} = b) = 1 - p$ , la densité de probabilité de  $\mathbf{x}$  est (fig. 14.10)

$$p(x) = p\delta(x-a) + (1-p)\delta(x-b) \quad (14.72)$$

avec

$$\mu_x = ap + b(1-p) \quad (14.73)$$

$$\sigma_x^2 = p(1-p)(b-a)^2 \quad (14.74)$$

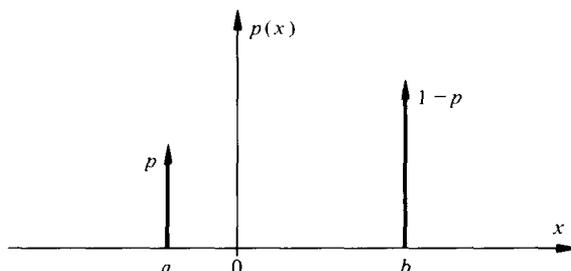


Fig. 14.10

#### 14.4.2 Distribution binomiale. Définition

La *distribution binomiale* est la loi statistique de la variable aléatoire discrète obtenue en comptant le nombre de réalisations d'un événement au cours de  $n$  essais indépendants. Si  $p$  est la probabilité de réalisation de l'événement, celle d'obtenir exactement  $k$  réalisations sur  $n$  essais est

$$\text{Prob}(k, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (14.75)$$

avec la notation

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (14.76)$$

La densité de probabilité correspondante s'écrit

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \text{Prob}(k, n) \delta(x-k) \quad (14.77)$$

avec

$$\mu_x = np \quad (14.78)$$

$$\sigma_x^2 = np(1-p) \quad (14.79)$$

La loi binomiale permet, par exemple, de déterminer la probabilité d'avoir plus de  $k$  symboles 1 dans un mot binaire de  $n$  bits.

#### 14.4.3 Distribution de Poisson. Définition

La *distribution de Poisson* caractérise de nombreux processus aléatoires ponctuels dont les instants de réalisation sont aléatoires (§ 5.8.1).

Soit une séquence aléatoire d'événements indépendants susceptibles de se réaliser à n'importe quel instant avec la même probabilité. Le nombre moyen d'événements par unité de temps est une constante  $\lambda$ .

Soit  $\text{Prob}(N, \tau)$  la probabilité de compter exactement  $N$  événements pendant un intervalle de temps  $\tau$ . Sur un intervalle infinitésimal  $d\tau$ , on a :

$$\text{Prob}(1, d\tau) = \lambda d\tau \quad (14.80)$$

et

$$\text{Prob}(0, d\tau) = 1 - \lambda d\tau \quad (14.81)$$

car  $\text{Prob}(N > 1, d\tau) \approx 0$ .

Sur un intervalle  $\tau + d\tau$ , on a :

$$\text{Prob}(N, \tau + d\tau) = \text{Prob}(N, \tau) \text{Prob}(0, d\tau) + \text{Prob}(N-1, \tau) \text{Prob}(1, d\tau) \quad (14.82)$$

et

$$\text{Prob}(0, \tau + d\tau) = \text{Prob}(0, \tau) \text{Prob}(0, d\tau) \quad (14.83)$$

On tire de ces relations les équations différentielles :

$$\begin{aligned} d \text{Prob}(N, \tau)/d\tau &= [\text{Prob}(N, \tau + d\tau) - \text{Prob}(N, \tau)]/d\tau \\ &= \lambda [\text{Prob}(N-1, \tau) - \text{Prob}(N, \tau)] \end{aligned} \quad (14.84)$$

et

$$\begin{aligned} d \text{Prob}(0, \tau)/d\tau &= [\text{Prob}(0, \tau + d\tau) - \text{Prob}(0, \tau)]/d\tau \\ &= -\lambda \text{Prob}(0, \tau) \end{aligned} \quad (14.85)$$

La solution de cette dernière équation donne, avec la condition initiale  $\text{Prob}(0, 0) = 1$

$$\text{Prob}(0, \tau) = \exp(-\lambda\tau) \quad (14.86)$$

On peut alors résoudre la première équation différentielle pour le cas où  $N=1$ , avec la condition initiale  $\text{Prob}(1, 0) = 0$ , ce qui conduit à

$$\text{Prob}(1, \tau) = \lambda\tau \exp(-\lambda\tau) \quad (14.87)$$

En procédant par récurrence pour  $N$  croissant, on obtient finalement (fig. 14.11)

$$\text{Prob}(N, \tau) = \frac{(\lambda\tau)^N}{N!} \exp(-\lambda\tau) = \frac{\mu^N}{N!} \exp(-\mu) \quad (14.88)$$

en posant comme paramètre la valeur moyenne

$$\mu = \lambda\tau$$

La variance s'identifie ici à la valeur moyenne :  $\sigma^2 = \mu = \lambda\tau$ .

Soit  $z$  la variable aléatoire représentant l'intervalle de temps séparant deux événements consécutifs. Cette situation correspond à l'absence d'événements sur l'intervalle  $z$  suivi d'un événement sur l'intervalle infinitésimal  $dz$  suivant. Ainsi, par (14.80) et (14.86)

$$p(z) dz = \text{Prob}(0, z) \text{Prob}(1, dz) = \exp(-\lambda z) \cdot \lambda dz \quad (14.89)$$

d'où

$$p(z) = \lambda \exp(-\lambda z); z \geq 0 \quad (14.90)$$

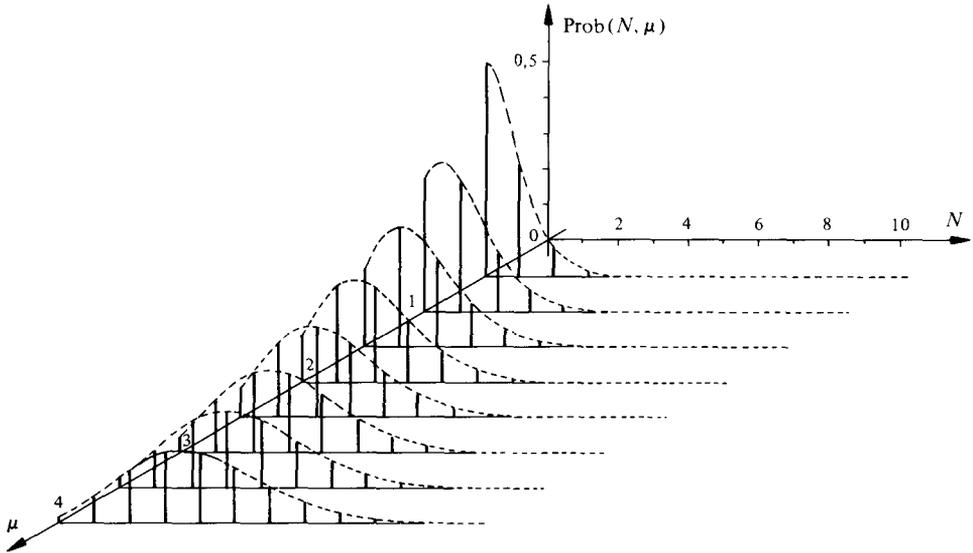


Fig. 14.11 Représentation graphique de la distribution de Poisson:  $\text{Prob}(N; \mu) = \mu^N \exp(-\mu) / N!$ .

avec

$$\mu_z = \lambda^{-1} \tag{14.91}$$

et

$$\sigma_z^2 = \lambda^{-2} = \mu_z^2 \tag{14.92}$$

C'est une *distribution exponentielle* (fig. 14.12). La distribution exponentielle paire  $\frac{1}{2} \lambda \exp(-\lambda |z|)$  est parfois appelé *laplacienne*.

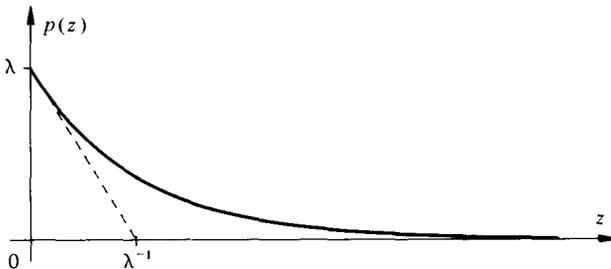


Fig. 14.12

**14.4.4 Distribution uniforme. Définition**

Une variable aléatoire continue est à *distribution uniforme* si sa densité de probabilité est du type (fig. 14.13)

$$p(x) = (b - a)^{-1} \text{rect} \{ [x - \frac{1}{2}(a + b)] / (b - a) \} \tag{14.93}$$

avec

$$\mu_x = \frac{1}{2} (a + b) \tag{14.94}$$

$$\sigma_x^2 = (b - a)^2 / 12 \tag{14.95}$$

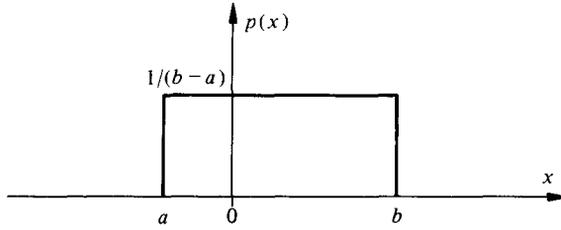


Fig. 14.13

#### 14.4.5 Distribution normale ou de Gauss. Définition

Une variable aléatoire continue de valeur moyenne  $\mu_x$  et variance  $\sigma_x^2$  est à *distribution normale* (ou *gaussienne*) si sa densité de probabilité est du type (fig. 14.14)

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp \left[ -\frac{(x - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right] \quad (14.96)$$

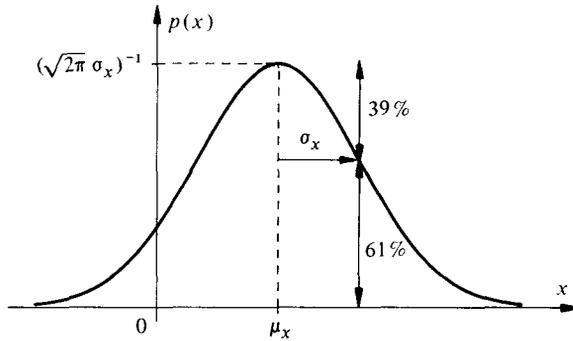


Fig. 14.14

Sa fonction caractéristique est

$$\Pi(u) = \exp(j\mu_x u - \frac{1}{2}\sigma_x^2 u^2) \quad (14.97)$$

Dans le cas d'une variable aléatoire gaussienne bidimensionnelle  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  possèdent toutes deux une distribution marginale du type (14.96). La distribution bidimensionnelle peut être caractérisée par la densité de probabilité conjointe qui prend la forme généralisée suivante :

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} \quad (14.98)$$

où  $\rho_{xy}$  est le coefficient de corrélation (14.59) de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . **La non corrélation** ( $\rho_{xy} = 0$ ) **de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  entraîne leur indépendance statistique.**

Les densités de probabilité conditionnelle sont déterminées à partir de (14.32), (14.33), (14.96) et (14.98). Ce sont des lois gaussiennes. Pour le cas où  $\mu_x = \mu_y = 0$ ,

on obtient par exemple

$$p(x|y) = \frac{1}{\sigma_{x|y} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ - \frac{(x - \mu_{x|y})^2}{2 \sigma_{x|y}^2} \right] \tag{14.99}$$

en définissant la valeur moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle par

$$\mu_{x|y} = \rho_{xy}(\sigma_x/\sigma_y)y = (C_{xy}/\sigma_y^2)y \tag{14.100}$$

$$\sigma_{x|y}^2 = \sigma_x^2(1 - \rho_{xy}^2) \tag{14.101}$$

La densité de probabilité conjointe multidimensionnelle gaussienne peut être exprimée, en utilisant des notations matricielles, de la manière suivante :

$$p(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} |C_x|^{-1/2} \exp \left[ - \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x) C_x^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T \right] \tag{14.102}$$

où  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  est un vecteur aléatoire gaussien à  $n$  dimensions,  $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)$  est un vecteur ligne,  $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_x)^T$  est le même vecteur transposé et  $C_x$  est la matrice de covariance :

$$C_x = \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & C_{x1x2} & \dots & C_{x1xn} \\ \vdots & \sigma_{x2}^2 & \dots & \vdots \\ C_{xn x1} & \dots & \dots & \sigma_{xn}^2 \end{bmatrix} \tag{14.103}$$

Si les variables  $\mathbf{x}_i$  sont indépendantes,  $C_{xi xj} = 0$  et la matrice de covariance se résume à une matrice diagonale.

La fonction caractéristique multidimensionnelle gaussienne s'écrit

$$\Pi_x(\mathbf{u}) = \exp \left[ j \boldsymbol{\mu}_x^T \mathbf{u} - \frac{1}{2} \mathbf{u} C_x \mathbf{u}^T \right] \tag{14.104}$$

En raison de sa très grande importance, la distribution de Gauss est tabulée dans la littérature spécialisée sous forme normalisée (*loi normale réduite*), obtenue en introduisant la *variable centrée réduite* :

$$z = (x - \mu_x) / \sigma_x \tag{14.105}$$

donnant :

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ - \frac{z^2}{2} \right] \tag{14.106}$$

Avec la notation introduite au paragraphe 1.3.16, on a l'équivalence

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{ig} \left( \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \right) \tag{14.107}$$

Sont en général tabulées (voir sect. 15.8) : la densité de probabilité normalisée  $p(z)$ , la fonction de répartition correspondante  $F(z)$ , ainsi que la fonction de répartition complémentaire  $F_c(z) = 1 - F(z)$ . On rencontre aussi la *fonction d'erreur* et son

complément (avec  $z = \sqrt{2u}$ ) :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \exp(-\alpha^2) d\alpha = 2F(z) - 1 \tag{14.108}$$

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty \exp(-\alpha^2) d\alpha = 2F_c(z) \tag{14.109}$$

**14.4.6 Distribution de Rayleigh. Définition**

Une variable aléatoire continue possède une *distribution de Rayleigh* si sa densité de probabilité est du type (fig. 14.15)

$$p(x) = (x/\sigma^2) \exp(-\frac{1}{2} x^2/\sigma^2) \epsilon(x) \tag{14.110}$$

avec

$$\mu_x = \sigma\sqrt{\pi/2} \tag{14.111}$$

$$\sigma_x^2 = \sigma^2(2 - \pi/2); \quad m_{x^2} = E[x^2] = 2\sigma^2 \tag{14.112}$$

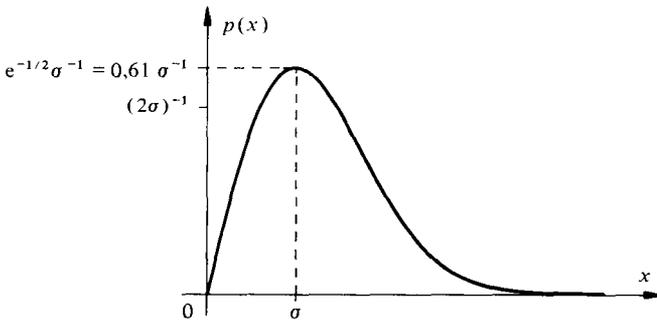


Fig. 14.15

**14.4.7 Distribution en  $\chi^2$ . Définition**

La forme générale de la loi du  $\chi_m^2$  à  $m$  degrés de liberté est donnée par :

$$p(\chi_m^2) = \frac{1}{2^{m/2} \Gamma(m/2)} \chi_m^2 (m/2 - 1) \exp(-\chi_m^2/2) \tag{14.113}$$

où

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty \alpha^{n-1} \exp(-\alpha) d\alpha \tag{14.114}$$

avec les valeurs particulières  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(2) = 1$  et  $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$ . En particulier, si  $n$  est un nombre entier :  $\Gamma(n + 1) = n!$

La valeur moyenne est égale au nombre de degrés de liberté :  $\mu_{\chi^2} = m$ , la variance est égale au double de ce nombre :  $\sigma_{\chi^2}^2 = 2m$ .

Cette distribution permet de définir la statistique d'une variable

$$\chi_m^2 = \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^2 \quad (14.115)$$

où les  $\mathbf{x}_i$  sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes, à valeur moyenne nulle et variance unité.

Pour  $m \rightarrow \infty$ , la loi du  $\chi_m^2$  tend asymptotiquement vers une loi gaussienne.

La variable  $\chi_2 = (\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2)^{1/2}$  est distribuée selon une loi de Rayleigh (14.110).

La somme de deux variables en  $\chi^2$  à  $a$ , respectivement,  $a$  et  $b$  degrés de liberté est une nouvelle variable en  $\chi^2$  à  $(a + b)$  degrés de liberté.



## FORMULAIRE ET TABLES DE RÉFÉRENCES

### 15.1 FORMULAIRE

#### 15.1.1 Préambule

Une sélection des principales formules utilisées dans cet ouvrage et généralement repérées par un numéro en chiffres gras est reproduite ci-après. Elles sont groupées par thème et sont indiquées avec leur numéro d'origine.

La section 15.2 est consacrée au rappel des identités trigonométriques usuelles. Les relations relatives à la transformation de Fourier et à ses propriétés font l'objet de la section 15.3.

Une table illustrée des principales transformées de Fourier est reproduite à la section 15.4.

#### 15.1.2 Propriétés de l'impulsion de Dirac

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt \quad (1.36)$$

$$x(t) * \delta(t) = x(t) \quad (1.47)$$

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \quad (1.48)$$

$$x(t-t_1) * \delta(t-t_2) = x(t-t_1-t_2) \quad (1.49)$$

$$\delta(t-t_1) * \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2) \quad (1.50)$$

$$\delta(at) = |a|^{-1}\delta(t) \quad (1.51)$$

#### 15.1.3 Valeurs moyennes temporelles, énergie et puissance normalisées de signaux réels

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)dt \quad (1.30)$$

$$\overline{x^n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^n(t)dt \quad (5.17)$$

$$W_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt \quad (2.11)$$

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \quad (2.12)$$

#### 15.1.4 Représentation vectorielle dans l'espace $L^2$

- Distance euclidienne, norme et produit scalaire

$$d(x, y) = \|x - y\| = \left[ \int_{t_1}^{t_2} |x(t) - y(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.9)$$

$$\|x\| = \left[ \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

$$\langle x, y^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt \quad (3.12)$$

- Inégalité de Schwarz

$$|\langle x, y^* \rangle|^2 \leq \langle x, x^* \rangle \cdot \langle y, y^* \rangle \quad (3.20)$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt \right|^2 \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \cdot \int_{t_1}^{t_2} |y(t)|^2 dt \quad (3.21)$$

- Condition d'orthogonalité

$$\langle x, y^* \rangle = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt = 0 \quad (3.15)$$

- Développement orthogonal

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \psi_k(t) \quad (3.50)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k} \langle x, \psi_k^* \rangle = \frac{1}{\lambda_k} \int_{t_1}^{t_2} x(t) \psi_k^*(t) dt \quad (3.43)$$

$$\lambda_k = \langle \psi_k, \psi_k^* \rangle = \|\psi_k\|^2 = \int_{t_1}^{t_2} |\psi_k(t)|^2 dt \quad (3.44)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \lambda_k \quad (3.49)$$

#### 15.1.5 Signaux aléatoires stationnaires

- Valeurs moyennes statistiques

$$E[f(\mathbf{x})] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx \quad (14.41)$$

$$E[\mathbf{x}^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx \tag{5.18}$$

$$\mu_x = E[\mathbf{x}] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \tag{14.40}$$

$$m_{x2} = E[\mathbf{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx \tag{14.48}$$

$$\sigma_x^2 = m_{x-\mu, 2} = E[(\mathbf{x} - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 p(x) dx \tag{14.51}$$

$$m_{x2} = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \tag{14.53}$$

• Densités de probabilité

$$p_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy \tag{14.28}$$

$$p_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx \tag{14.29}$$

$$p(x|y) = p(x, y)/p_y(y) \tag{14.32}$$

$$p(y|x) = p(x, y)/p_x(x) \tag{14.33}$$

• Fonctions de corrélation et de covariance de signaux réels

$$R_x(\tau) = E[\mathbf{x}(t) \mathbf{x}(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 \tag{5.55}$$

$$\varphi_x(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt \tag{5.58}$$

$$C_x(\tau) = E\{[\mathbf{x}(t) - \mu_x][\mathbf{x}(t + \tau) - \mu_x]\} = R_x(\tau) - \mu_x^2 \tag{5.63}$$

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau) \tag{5.65}$$

$$R_x(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2 \tag{5.68}$$

$$R_{xy}(\tau) = E[\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_2] = \iint_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 p(x_1, y_2; \tau) dx_1 dy_2 \tag{5.161}$$

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) \tag{5.165}$$

$$C_{xy}(\tau) = E[(\mathbf{x}_1 - \mu_x)(\mathbf{y}_2 - \mu_y)] = R_{xy}(\tau) - \mu_x \mu_y \tag{5.169}$$

$$\rho_{xy}(\tau) = C_{xy}(\tau)/(\sigma_x \sigma_y) \tag{5.171}$$

$$|\rho_{xy}(\tau)| \leq 1 \tag{5.174}$$

• Signaux indépendants

$$p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y) \tag{5.33}$$

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}(\tau) = \rho_{xy}(\tau) = 0 \tag{5.175}$$

- Somme  $z(t) = x(t) + y(t)$  de signaux indépendants

$$p_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_x(x) p_y(z-x) dx = p_x(z) * p_y(z) \tag{5.182}$$

$$\left. \begin{aligned} R_z(\tau) &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2\mu_x \mu_y \\ \Phi_z(f) &= \Phi_x(f) + \Phi_y(f) + 2\mu_x \mu_y \delta(f) \\ C_z(\tau) &= C_x(\tau) + C_y(\tau); \sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{adapté de} \\ (5.189) \text{ et} \\ (5.190) \\ \text{par (5.63)} \end{array}$$

- Produit  $z(t) = x(t) y(t)$  de signaux indépendants

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) \cdot R_y(\tau) \tag{5.198}$$

$$\Phi_z(f) = \Phi_x(f) * \Phi_y(f) \tag{5.199}$$

**15.1.6 Principales distributions statistiques**

- Binomiale

$$\text{Prob}(k, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{14.75}$$

- Poisson

$$\text{Prob}(N, \tau) = \frac{(\lambda \tau)^N}{N!} \exp(-\lambda \tau) = \frac{\mu^N}{N!} \exp(-\mu) \tag{14.88}$$

- Gauss

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \tag{14.96}$$

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho_{xy}^2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2(1-\rho_{xy}^2)} \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho_{xy}(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right] \right\} \tag{14.98}$$

- Rayleigh

$$p(x) = (x/\sigma^2) \exp(-\frac{1}{2}x^2/\sigma^2) \epsilon(x) \tag{14.110}$$

**15.1.7 Bruit de fond**

- Bruit blanc

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{2} \eta \quad \text{pour } |f| < \infty \tag{5.151}$$

$$R_x(\tau) = F^{-1}\left\{\frac{1}{2} \eta\right\} = \frac{1}{2} \eta \delta(\tau) \tag{5.152}$$

- Bruit thermique

$$P_{th} = kTB \tag{6.4}$$

$$\sigma_{u0}^2 = 4 kTRB \tag{6.13}$$

- Bruit de grenaille

$$\sigma_{ig}^2 = 2 e I_0 B \quad A^2 \quad (6.33)$$

- Facteur de bruit d'un système linéaire à plusieurs étages

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \dots + \frac{F_m - 1}{\prod_{i=1}^{m-1} G_i} \quad (6.58)$$

**15.1.8 Signal analytique et enveloppe complexe**

$$\underline{x}(t) = x(t) + j\check{x}(t) \quad (7.5)$$

$$\check{x}(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (7.9)$$

$$x(t) = -\frac{1}{\pi t} * \check{x}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\check{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (7.11)$$

$$R_{\underline{x}}(\tau) = 2 [R_x(\tau) + j\check{R}_x(\tau)] \quad (7.40)$$

$$\Phi_{\underline{x}}(f) = 4 \epsilon(f) \Phi_x(f) = 2\Phi_x^+(f) \quad (7.41)$$

$$\underline{x}(t) = r_x(t) \exp [j\phi_x(t)] \quad (7.44)$$

$$\underline{r}(t) = \underline{x}(t) \exp (-j\omega_0 t) \quad (7.80)$$

$$\underline{r}(t) = a(t) + jb(t) = r(t) \exp [j\alpha(t)] \quad (7.81)$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re} \{ \underline{r}(t) \exp (j\omega_0 t) \} \\ &= r(t) \cos [\omega_0 t + \alpha(t)] \end{aligned} \quad (7.86)$$

$$= a(t) \cos (\omega_0 t) - b(t) \sin (\omega_0 t)$$

$$\Phi_x(f) = \frac{1}{4} [\Phi_{\underline{r}}(-f - f_0) + \Phi_{\underline{r}}(f - f_0)] \quad (7.88)$$

$$\Phi_{\underline{r}}(f) = \Phi_{\underline{x}}(f + f_0) = 2\Phi_x^+(f + f_0) = 2[\Phi_a(f) + j\Phi_{ab}(f)] \quad (7.89)$$

**15.1.9 Système linéaire de réponse impulsionnelle  $g(t)$**

$$y(t) = x(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (8.12)$$

$$Y(f) = X(f) \cdot G(f) \quad (8.14)$$

$$\varphi_y(\tau) = \varphi_x(\tau) * \dot{\varphi}_g(\tau) \quad (8.22)$$

$$\varphi_{xy}(\tau) = \varphi_x(\tau) * g(\tau) \quad (8.23)$$

$$\Phi_y(f) = \Phi_x(f) \cdot |G(f)|^2 \quad (8.24)$$

$$\Phi_{xy}(f) = \Phi_x(f) \cdot G(f) \quad (8.25)$$

$$\mu_y = \mu_x \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt = \mu_x G(0) \quad (8.37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_x(f) - \mu_x^2 \delta(f)] \cdot |G(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_x(\tau) \varphi_g(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (8.38)$$

### 15.1.10 Echantillonnage et quantification

- Théorème d'échantillonnage de signaux à spectre passe-bas

$$f_e = 1/T_e \geq 2f_{\max} \quad (9.25)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \operatorname{sinc}[(t/T_e) - k] \quad (9.29)$$

- Dimension d'un signal de durée  $T$

$$N = 2BT \quad (9.38)$$

- Transformation de Fourier discrète

$$x(k) = N^{-1} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} X(n) W_N^{nk} \leftrightarrow X(n) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} x(k) W_N^{-nk} \quad (9.49)$$

$$W_N \hat{=} \exp(j2\pi/N) \quad (9.48)$$

- Bruit de quantification pour loi uniforme de pas  $\Delta$

$$\sigma_q^2 \approx \frac{\Delta^2}{12} \quad (10.16)$$

### 15.1.11 Modulation à porteuse sinusoïdale

$$s(t) = a(t) \cos(2\pi f_p t) - b(t) \sin(2\pi f_p t) \quad (8.100)$$

$$\underline{r}(t) = a(t) + jb(t) = r(t) \exp[j\Delta\phi(t)] \quad (11.2)$$

$$\Phi_s(f) = \frac{1}{4} [\Phi_r(-f - f_p) + \Phi_r(f - f_p)] \quad (11.5)$$

(Une table plus complète se trouve dans le volume I, § 14.3.31)

- Produit de fonctions trigonométriques

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha + \beta) - \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta)$$

- Somme et différence de fonctions trigonométriques

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin[(\alpha + \beta)/2] \cos[(\alpha - \beta)/2]$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos[(\alpha + \beta)/2] \sin[(\alpha - \beta)/2]$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos [(\alpha + \beta)/2] \cos [(\alpha - \beta)/2]$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin [(\alpha + \beta)/2] \sin [(\alpha - \beta)/2]$$

● Somme et différence d'angles

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

● Elévation au carré

$$\sin^2 \alpha = (1 - \cos 2\alpha)/2$$

$$\cos^2 \alpha = (1 + \cos 2\alpha)/2$$

● Relations exponentielles

$$\exp (j\alpha) = \cos \alpha + j \sin \alpha \quad j = \sqrt{-1}$$

$$\sin \alpha = \frac{\exp (j\alpha) - \exp (-j\alpha)}{2j}$$

$$\cos \alpha = \frac{\exp (j\alpha) + \exp (-j\alpha)}{2}$$

● Développement en série

$$\sin \alpha = \alpha - \alpha^3/3! + \alpha^5/5! - \alpha^7/7! + \dots$$

$$\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2! + \alpha^4/4! - \alpha^6/6! + \dots$$

$$\exp \alpha = 1 + \alpha + \alpha^2/2! + \alpha^3/3! + \dots$$

15.3 PROPRIÉTÉS PRINCIPALES DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER ET RELATIONS ASSOCIÉES

15.3.1 Signaux à énergie finie

Propriété	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
transformation directe	$x(t)$	$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$
transformation inverse	$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$	$X(f)$
conjugaison complexe	$y(t) = x^*(t)$	$Y(f) = X^*(-f)$

(continue)

## 15.3.1 Signaux à énergie finie (suite)

Propriété	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
rabattement autour de l'axe $t = 0$	$y(t) = x(-t)$ complexe réel	$Y(f) = X(-f)$ $Y(f) = X(-f) \hat{=} X^*(f)$
multiplication de la variable par une constante $> 0$	$y(t) = x(at)$ $a > 1$ accélération $0 < a < 1$ ralentissement	$Y(f) = \frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right)$
translation temporelle (théorème du retard)	$y(t) = x(t - t_0)$	$Y(f) = e^{-j2\pi f t_0} \cdot X(f)$
translation fréquentielle (changement de fréquence)	$y(t) = e^{j2\pi f_0 t} \cdot x(t)$	$Y(f) = X(f - f_0)$
modulation	$y(t) = x(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t$	$Y(f) = \frac{1}{2} [X(f + f_0) + X(f - f_0)]$
dérivation	$y(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$Y(f) = (j2\pi f)^n X(f)$
intégration	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$	$Y(f) = \frac{1}{j2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f)$ avec $X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$
symétrie	$y(t) = X(t)$	$Y(f) = x(-f)$
superposition	$z(t) = ax(t) + by(t)$	$Z(f) = aX(f) + bY(f)$
multiplication	$z(t) = x(t) \cdot y(t)$	$Z(f) = X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f_0) Y(f - f_0) df_0$
convolution	$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$Z(f) = X(f) \cdot Y(f)$
corrélation	$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t + \tau) dt$ $= x^*(-\tau) * y(\tau)$	$\overset{\circ}{\Phi}_{xy}(f) = X^*(f) Y(f)$
théorème du produit	$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) y(t) dt$	$\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(f) Y(f) df$
autocorrélation et densité spectrale d'énergie	$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) x(t + \tau) dt$ $= x^*(-\tau) * x(\tau)$	$\overset{\circ}{\Phi}_x(f) = X^*(f) X(f) =  X(f) ^2$
identité de Parseval	$W_x = \overset{\circ}{\varphi}_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}  x(t) ^2 dt$	$W_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \overset{\circ}{\Phi}_x(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty}  X(f) ^2 df$

**15.3.2 Signaux à puissance moyenne finie**

Propriété	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
corrélation	$\varphi_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) y(t + \tau) dt$	$\Phi_{xy}(f) = F\{\varphi_{xy}(\tau)\}$
autocorrélation et densité spectrale de puissance	$\varphi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) x(t + \tau) dt$	$\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\}$
identité de Parseval	$P_x = \varphi_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2}  x(t) ^2 dt$	$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df$

**15.3.3 Cas particuliers des signaux périodiques**

Propriété	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
transformation	$x(t) = x(t + T)$ $= \text{rep}_T\{x(t, T)\} = x(t, T) * \delta_T(t)$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{jn2\pi f_1 t}$ avec $f_1 = \frac{1}{T}$	$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - nf_1)$ $= X(f, T) \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$ avec $X_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-jn2\pi f_1 t} dt$ $= \frac{1}{T} X(f_n = nf_1, T)$
multiplication de la variable par une constante	$y(t) = x(at)$	$Y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \delta(f - anf_1)$
translation temporelle (théorème du retard)	$y(t) = x(t - \tau)$	$Y_n = X_n e^{-jn2\pi f_1 \tau}$
dérivation	$y(t) = \frac{d^n}{dt^n} x(t)$	$Y_n = (jn2\pi f_1)^n X_n$
intégration	$y(t) = \int_{-\infty}^t x(u) du$	$Y_n = \frac{X_n}{jn2\pi f_1} \quad (n \neq 0)$ si $\bar{x} = X_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) dt = 0$
convolution	$z(t) = x(t) * y(t)$ $= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$ avec $x(t) = x(t + T)$ et $y(t) = y(t + T)$	$Z_n = X_n \cdot Y_n$

(continue)

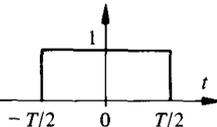
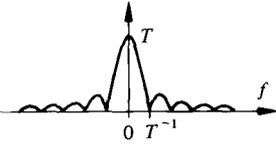
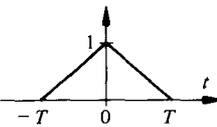
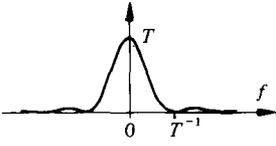
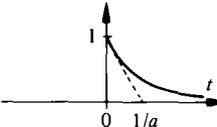
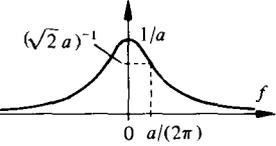
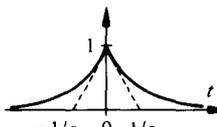
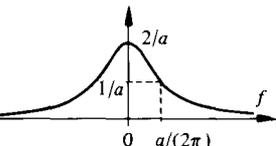
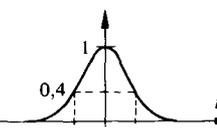
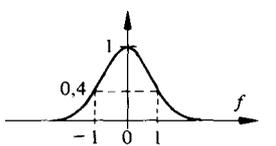
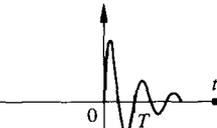
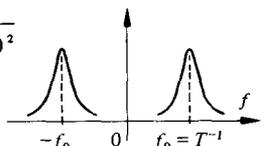
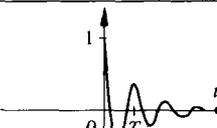
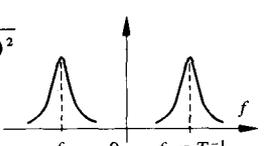
15.3.3 Cas particuliers des signaux périodiques (suite)

Propriété	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
corrélation	$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t)y(t+\tau) dt$ $= x^*(-\tau) \bar{y}(\tau)$ avec $x(t) = x(t+T)$ et $y(t) = y(t+T)$	$\Phi_{xy}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n^* Y_n \delta(f - n f_1)$ avec $f_1 = \frac{1}{T}$
autocorrélation et densité spectrale de puissance	$\varphi_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x^*(t)x(t+\tau) dt$ $= x^*(-\tau) \bar{x}(\tau)$ $= \text{rep}_T [T^{-1} \overset{\circ}{\varphi}_x(\tau, T)]$ avec $x(t) = x(t+T)$ ; $y(t) = y(t+T)$ et $\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau, T) = x^*(-\tau, T) * x(\tau, T)$	$\Phi_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}  X_n ^2 \delta(f - n f_1)$ $= \frac{1}{T^2} \overset{\circ}{\Phi}_x(f, T) \delta_{1/T}(f)$ avec $\overset{\circ}{\Phi}_x(f, T) =  X(f, T) ^2$
identité de Parseval	$P_x = \varphi_x(0) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T}  x(t) ^2 dt$	$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_x(f) df$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty}  X_n ^2$

15.3.4 Signaux aléatoires stationnaires

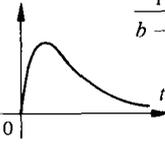
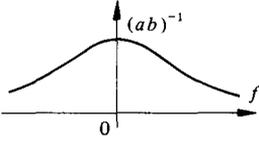
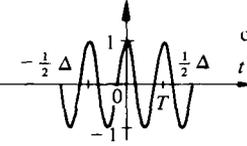
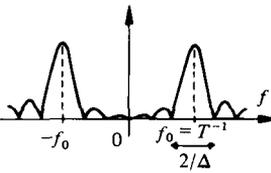
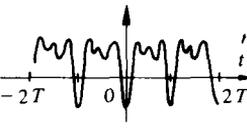
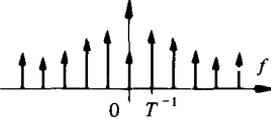
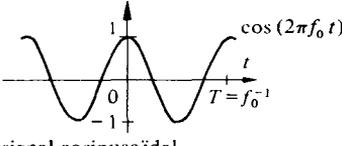
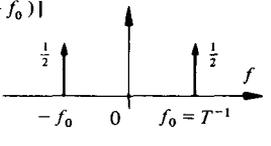
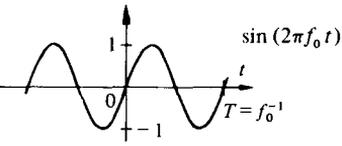
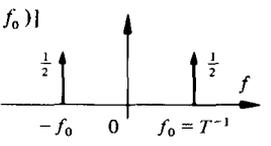
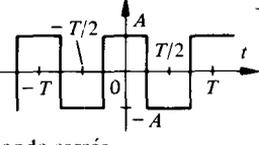
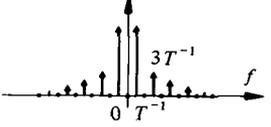
Propriété	Domaine temporel	Domaine fréquentiel
corrélation	$R_{xy}(\tau) = E \{ \mathbf{x}^*(t) \mathbf{y}(t+\tau) \}$	$\Phi_{xy}(f) = F \{ R_{xy}(\tau) \}$
théorème de Wiener-Khintchine	$R_x(\tau) = E \{ \mathbf{x}^*(t) \mathbf{x}(t+\tau) \}$ $\equiv \varphi_x(\tau) \text{ si } \mathbf{x}(t) \text{ ergodique}$	$\Phi_x(f) = F \{ R_x(\tau) \}$ $= \lim_{T \rightarrow \infty} E \{ \Phi_{xi}(f, T) \}$ où $\Phi_{xi}(f, T) = T^{-1}  X_i(f, T) ^2$ (périodogramme)
identité de Parseval	$P_x = R_x(0) = E \{ \mathbf{x}^2 \} = \sigma_x^2 + \mu_x^2$ $= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx$	$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_x(f) df$

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER

$x(t)$		$X(f)$	$ X(f) $
 <p>impulsion rectangulaire</p>	$\text{rect}(t/T)$	$T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$ $= T \text{sinc}(fT)$	
 <p>impulsion triangulaire</p>	$\text{tri}(t/T)$	$T \text{sinc}^2(fT)$	
 <p>impulsion exponentielle</p>	$e^{-at}\epsilon(t)$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$	
 <p>double exponentielle</p>	$e^{-a t }$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$	
 <p>impulsion gaussienne</p>	$\text{ig}(t) = e^{-\pi t^2}$	$\text{ig}(f) = e^{-\pi f^2}$	
 <p>sinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \sin(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{2\pi f_0}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	
 <p>cosinusoïde amortie</p>	$e^{-at} \cos(2\pi f_0 t) \epsilon(t)$	$\frac{a + j2\pi f}{(a + j2\pi f)^2 + (2\pi f_0)^2}$	

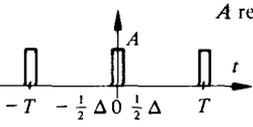
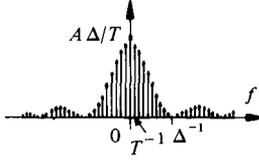
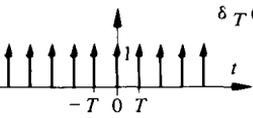
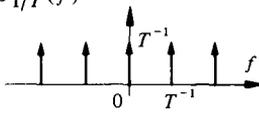
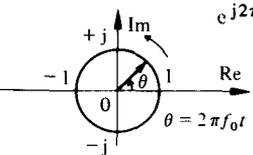
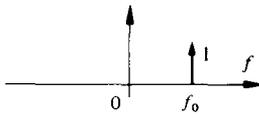
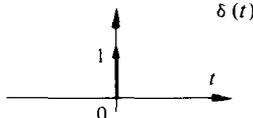
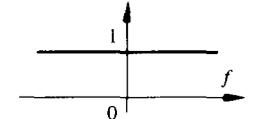
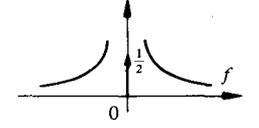
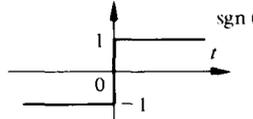
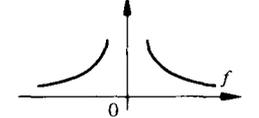
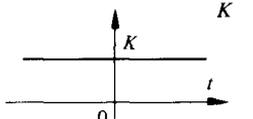
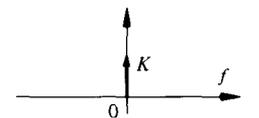
(continue)

15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt}) \epsilon(t)$	$\frac{1}{(a + j2\pi f)(b + j2\pi f)}$	 $(ab)^{-1}$
 <p>impulsion cosinusoidale</p>	$\frac{\Delta}{2} \{ \text{sinc} [\Delta (f + f_0)] + \text{sinc} [\Delta (f - f_0)] \}$	
 <p>signal périodique</p>	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{-j2\pi \frac{nt}{T}}$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n \delta \left( f - \frac{n}{T} \right)$	
 <p>signal cosinusoidal</p>	$\frac{1}{2} [\delta (f + f_0) + \delta (f - f_0)]$	
 <p>signal sinusoidal</p>	$\frac{j}{2} [\delta (f + f_0) - \delta (f - f_0)]$	
 <p>onde carrée</p>	$A \text{ rep }_T [2 \text{ rect} (2t/T) - \text{rect} (t/T)]$ $\sum_n X_n \delta (f - n/T)$ <p>avec</p> $X_n = A \text{ sinc} (n/2)$ $= \begin{cases} \left  \frac{2A}{\pi n} \right  & \text{pour } n = \pm 1, \pm 5, \dots \\ -\left  \frac{2A}{\pi n} \right  & \text{pour } n = \pm 3, \pm 7, \dots \end{cases}$ <p><math>X_n = 0</math> pour <math>n</math> nul ou pair</p>	

(continue)

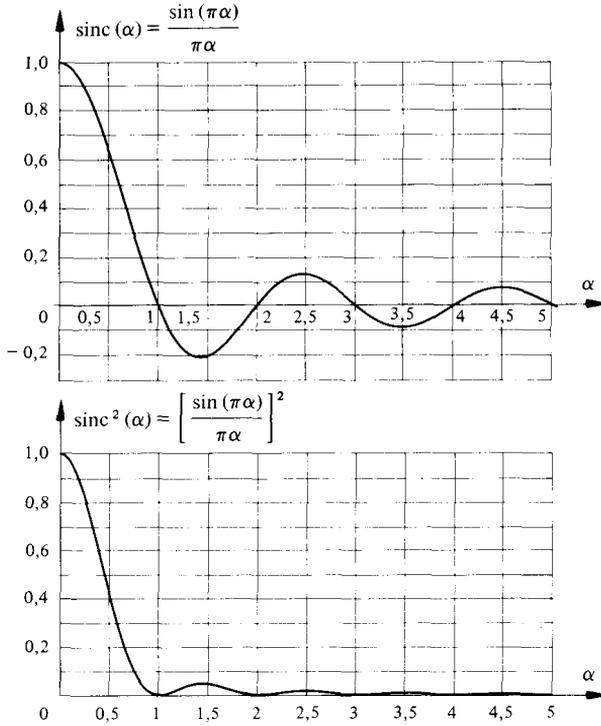
15.4 TABLE ILLUSTRÉE DE TRANSFORMÉES DE FOURIER (suite)

$x(t)$	$X(f)$	$ X(f) $
 <p><math>A \text{ rep } T[\text{rect}(t/\Delta)]</math></p> <p>suite d'impulsions rectangulaires</p>	$\sum_n X_n \delta(f - n/T) \text{ avec}$ $X_n = \frac{A\Delta}{T} \text{sinc}(n\Delta/T)$	
 <p>peigne de Dirac</p>	$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$ $\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \delta_{1/T}(f)$	
 <p><math>e^{j2\pi f_0 t}</math></p>	$\delta(f - f_0)$	
 <p><math>\delta(t)</math></p>	$1$	
 <p><math>\epsilon(t)</math></p> <p>saut unité</p>	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$	
 <p><math>\text{sgn}(t) = \frac{t}{ t }</math></p> <p>fonction signe</p>	$\frac{1}{j\pi f}$	
 <p><math>K</math></p> <p>constante</p>	$K \delta(f)$	

15.5 DESCRIPTION TEMPORELLE, SPECTRALE ET STATISTIQUE DE SIGNAUX TYPIQUES

Signal $x(t)$	Autocorrélation $\varphi_x(\tau)$	Spectre $\sqrt{\Phi_x^*(f)}$	Densité de probabilité $p(x)$	Fonction de répartition $F(x)$
sinusoïde 				
onde carrée 				
suite d'impulsions rectangulaires 				
onde triangulaire 				
onde en dents de scie 				
bruit gaussien à large bande 				
bruit gaussien filtré (largeur de bande B) 				
sinusoïde + bruit gaussien 				
signal binaire pseudo-aléatoire 				

15.6 REPRÉSENTATION ET TABULATION  
DES FONCTIONS  $\text{sinc}(\alpha)$  ET  $\text{sinc}^2(\alpha)$



$\alpha$	$\text{sinc}(\alpha)$	$\text{sinc}^2(\alpha)$	$\alpha$	$\text{sinc}(\alpha)$	$\text{sinc}^2(\alpha)$	$\alpha$	$\text{sinc}(\alpha)$	$\text{sinc}^2(\alpha)$
0,00	1,000000	1,000000	1,75	-0,128617	0,016542	3,50	-0,090946	0,008271
0,05	0,995893	0,991802	1,80	-0,103943	0,010804	3,55	-0,088561	0,007843
0,10	0,983632	0,967531	1,85	-0,078113	0,006102	3,60	-0,084092	0,007071
0,15	0,963398	0,928135	1,90	-0,051170	0,002680	3,65	-0,077703	0,006038
0,20	0,935489	0,875140	1,95	-0,025536	0,000652	3,70	-0,069599	0,004844
0,25	0,900316	0,810569	2,00	0,000000	0,000000	3,75	-0,060021	0,003603
0,30	0,858394	0,736840	2,05	0,024290	0,000590	3,80	-0,049236	0,002424
0,35	0,810332	0,656638	2,10	0,046840	0,002194	3,85	-0,037535	0,001409
0,40	0,756827	0,572787	2,15	0,067214	0,004518	3,90	-0,025221	0,000636
0,45	0,698847	0,488107	2,20	0,085044	0,007233	3,95	-0,012606	0,000159
0,50	0,636620	0,405285	2,25	0,100035	0,010007	4,00	0,000000	0,000000
0,55	0,571820	0,326749	2,30	0,111964	0,012536	4,05	0,012295	0,000151
0,60	0,504551	0,254572	2,35	0,120688	0,014566	4,10	0,023991	0,000576
0,65	0,436333	0,180386	2,40	0,126136	0,015911	4,15	0,034822	0,001213
0,70	0,367863	0,135338	2,45	0,128323	0,016467	4,20	0,044547	0,001984
0,75	0,300105	0,090063	2,50	0,127324	0,016211	4,25	0,052960	0,002805
0,80	0,233872	0,054696	2,55	0,123291	0,015201	4,30	0,059888	0,003587
0,85	0,170011	0,028904	2,60	0,116435	0,013557	4,35	0,065199	0,004251
0,90	0,109292	0,011945	2,65	0,107025	0,011454	4,40	0,068802	0,004734
0,95	0,052415	0,002747	2,70	0,095377	0,009097	4,45	0,070650	0,004991
1,00	-0,000000	0,000000	2,75	0,081847	0,006699	4,50	0,070736	0,005004
1,05	-0,047423	0,002249	2,80	0,066821	0,004465	4,55	0,069097	0,004774
1,10	-0,089421	0,007996	2,85	0,050705	0,002571	4,60	0,065811	0,004331
1,15	-0,125661	0,015791	2,90	0,033918	0,001150	4,65	0,060993	0,003720
1,20	-0,155915	0,024309	2,95	0,016880	0,000285	4,70	0,054791	0,003002
1,25	-0,180063	0,032423	3,00	-0,000000	0,000000	4,75	0,047385	0,002245
1,30	-0,198091	0,039240	3,05	-0,016326	0,000267	4,80	0,038979	0,001519
1,35	-0,210086	0,044136	3,10	-0,031730	0,001007	4,85	0,029796	0,000888
1,40	-0,216236	0,046758	3,15	-0,045876	0,002105	4,90	0,020074	0,000403
1,45	-0,216821	0,047011	3,20	-0,058468	0,003419	4,95	0,010060	0,000101
1,50	-0,212207	0,045032	3,25	-0,069255	0,004796	5,00	-0,000000	0,000000
1,55	-0,202833	0,041141	3,30	-0,078036	0,006090			
1,60	-0,189207	0,035799	3,35	-0,084662	0,007168			
1,65	-0,171889	0,029546	3,40	-0,089038	0,007928			
1,70	-0,151481	0,022947	3,45	-0,091128	0,008304			

## 15.7 FONCTIONS DE BESSEL DE PREMIÈRE ESPÈCE

## 15.7.1 Relations générales

La fonction de Bessel de première espèce et d'ordre  $n$  entier  $J_n(x)$  est l'une des solutions particulières de l'équation différentielle de Bessel [88]:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (15.1)$$

La représentation intégrale de  $J_n(x)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta - n\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \exp(jx \sin \theta - n\theta) d\theta \end{aligned} \quad (15.2)$$

Le développement en série de  $J_n(x)$  est donné par :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \quad (15.3)$$

On a également la relation

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (15.4)$$

Les fonctions génératrices et les séries associées sont :

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos(2k\theta) \quad (15.5)$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(x) \sin[(2k+1)\theta] \quad (15.6)$$

$$\exp(jx \sin \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) \exp(jn\theta) \quad (15.7)$$

avec, en posant  $\theta = 0$ :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) = 1 \quad (15.8)$$

L'évolution des fonctions  $J_n(x)$  en fonction de l'argument  $x$  pour  $n$  compris entre 0 et 4 est représentée à la figure 15.1. La figure 15.2 donne la suite des amplitudes obtenues en fonction de l'ordre  $n$  pour quelques valeurs constantes de l'argument.

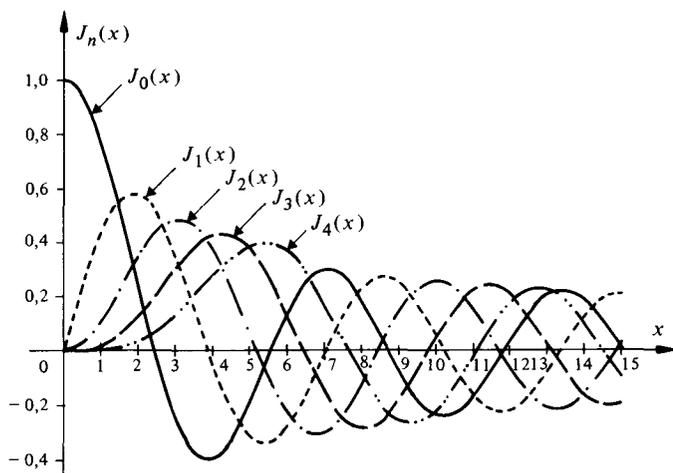


Fig. 15.1

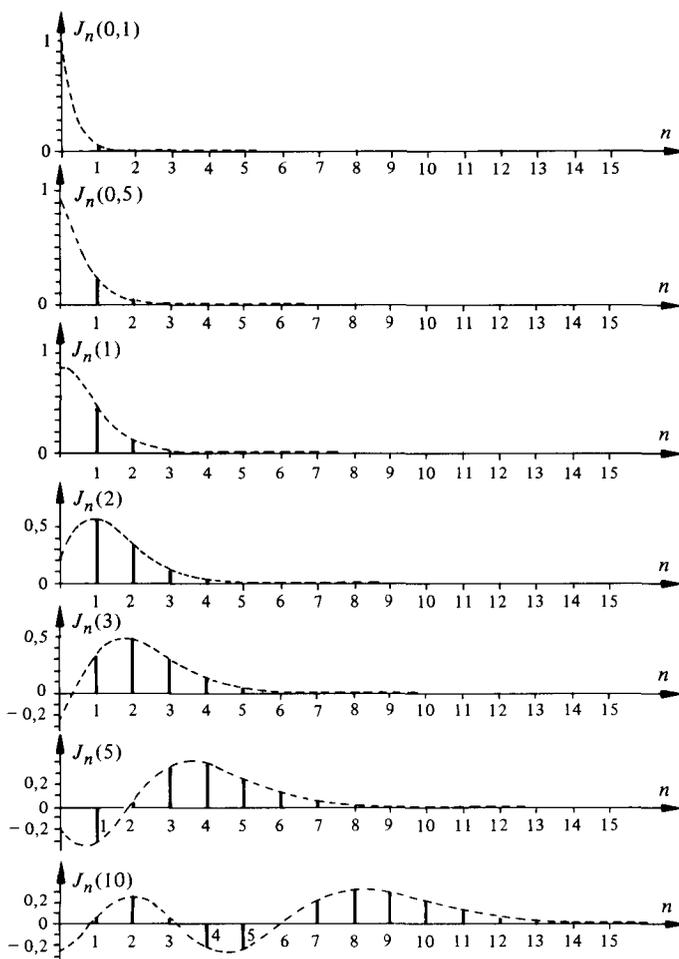


Fig. 15.2

## 15.8 LOI NORMALE (GAUSS)

## 15.8.1 Normalisation de la loi de Gauss

La densité de probabilité

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad (15.9)$$

et son intégrale  $F(x)$  sont ramenées à une forme normalisée en effectuant le changement de variable

$$z = (x - \mu_x) / \sigma_x \quad (15.10)$$

On obtient alors la *loi normale réduite* (fig. 15.3)

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} z^2\right) \quad (15.11)$$

La fonction de répartition correspondante est

$$F(z) = \int_{-\infty}^z p(z') dz' \quad (15.12)$$

et la fonction de répartition complémentaire (fig. 15.4) vaut

$$F_c(z) = 1 - F(z)$$

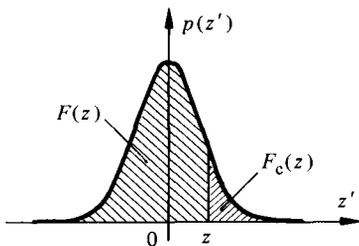


Fig. 15.3

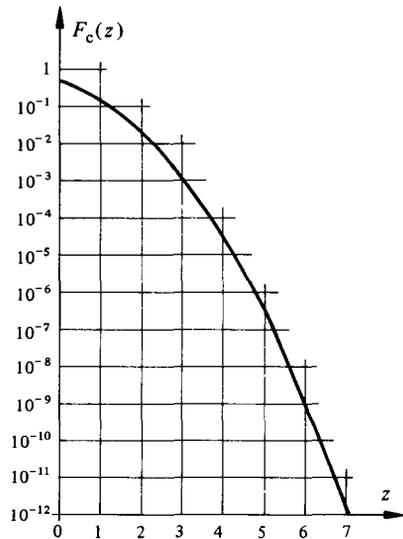


Fig. 15.4

15.8.2 Tabulation de la loi normale et de son intégrale

$z$	$F(z)$	$F_c(z) = 1 - F(z)$	$p(z)$	$z$	$F(z)$	$F_c(z) = 1 - F(z)$	$p(z)$
0, 00	0, 50000	0, 50000	0, 39894	0, 70	0, 75804	0, 24196	0, 31225
0, 01	0, 50399	0, 49601	0, 39892	0, 71	0, 76115	0, 23885	0, 31006
0, 02	0, 50798	0, 49202	0, 39886	0, 72	0, 76424	0, 23576	0, 30785
0, 03	0, 51197	0, 48803	0, 39876	0, 73	0, 76730	0, 23270	0, 30563
0, 04	0, 51595	0, 48405	0, 39862	0, 74	0, 77035	0, 22965	0, 30339
0, 05	0, 51994	0, 48006	0, 39844	0, 75	0, 77337	0, 22663	0, 30114
0, 06	0, 52392	0, 47608	0, 39822	0, 76	0, 77637	0, 22363	0, 29887
0, 07	0, 52790	0, 47210	0, 39797	0, 77	0, 77935	0, 22065	0, 29659
0, 08	0, 53188	0, 46812	0, 39767	0, 78	0, 78230	0, 21770	0, 29431
0, 09	0, 53586	0, 46414	0, 39733	0, 79	0, 78524	0, 21476	0, 29200
0, 10	0, 53983	0, 46017	0, 39695	0, 80	0, 78814	0, 21186	0, 28969
0, 11	0, 54380	0, 45620	0, 39654	0, 81	0, 79103	0, 20897	0, 28737
0, 12	0, 54776	0, 45224	0, 39608	0, 82	0, 79389	0, 20611	0, 28504
0, 13	0, 55172	0, 44828	0, 39559	0, 83	0, 79673	0, 20327	0, 28269
0, 14	0, 55567	0, 44433	0, 39505	0, 84	0, 79955	0, 20045	0, 28034
0, 15	0, 55962	0, 44038	0, 39448	0, 85	0, 80234	0, 19766	0, 27798
0, 16	0, 56356	0, 43644	0, 39387	0, 86	0, 80511	0, 19489	0, 27562
0, 17	0, 56749	0, 43251	0, 39322	0, 87	0, 80785	0, 19215	0, 27324
0, 18	0, 57142	0, 42858	0, 39253	0, 88	0, 81057	0, 18943	0, 27086
0, 19	0, 57535	0, 42465	0, 39181	0, 89	0, 81327	0, 18673	0, 26848
0, 20	0, 57926	0, 42074	0, 39104	0, 90	0, 81594	0, 18406	0, 26609
0, 21	0, 58317	0, 41683	0, 39024	0, 91	0, 81859	0, 18141	0, 26369
0, 22	0, 58706	0, 41294	0, 38940	0, 92	0, 82121	0, 17879	0, 26129
0, 23	0, 59095	0, 40905	0, 38853	0, 93	0, 82381	0, 17619	0, 25888
0, 24	0, 59483	0, 40517	0, 38762	0, 94	0, 82639	0, 17361	0, 25647
0, 25	0, 59871	0, 40129	0, 38667	0, 95	0, 82894	0, 17106	0, 25406
0, 26	0, 60257	0, 39743	0, 38568	0, 96	0, 83147	0, 16853	0, 25164
0, 27	0, 60642	0, 39356	0, 38466	0, 97	0, 83398	0, 16602	0, 24923
0, 28	0, 61026	0, 38974	0, 38361	0, 98	0, 83646	0, 16354	0, 24681
0, 29	0, 61409	0, 38591	0, 38251	0, 99	0, 83891	0, 16109	0, 24439
0, 30	0, 61791	0, 38209	0, 38139	1, 00	0, 84134	0, 15866	0, 24197
0, 31	0, 62172	0, 37828	0, 38023	1, 01	0, 84375	0, 15625	0, 23955
0, 32	0, 62552	0, 37448	0, 37903	1, 02	0, 84614	0, 15386	0, 23713
0, 33	0, 62930	0, 37070	0, 37780	1, 03	0, 84849	0, 15151	0, 23471
0, 34	0, 63307	0, 36693	0, 37654	1, 04	0, 85083	0, 14917	0, 23230
0, 35	0, 63683	0, 36317	0, 37524	1, 05	0, 85314	0, 14686	0, 22988
0, 36	0, 64058	0, 35942	0, 37391	1, 06	0, 85543	0, 14457	0, 22747
0, 37	0, 64431	0, 35569	0, 37255	1, 07	0, 85769	0, 14231	0, 22506
0, 38	0, 64803	0, 35197	0, 37115	1, 08	0, 85993	0, 14007	0, 22265
0, 39	0, 65173	0, 34827	0, 36973	1, 09	0, 86214	0, 13786	0, 22025
0, 40	0, 65542	0, 34458	0, 36827	1, 10	0, 86433	0, 13567	0, 21785
0, 41	0, 65910	0, 34090	0, 36678	1, 11	0, 86650	0, 13350	0, 21546
0, 42	0, 66276	0, 33724	0, 36526	1, 12	0, 86864	0, 13136	0, 21307
0, 43	0, 66640	0, 33360	0, 36371	1, 13	0, 87076	0, 12924	0, 21069
0, 44	0, 67003	0, 32997	0, 36213	1, 14	0, 87286	0, 12714	0, 20831
0, 45	0, 67364	0, 32636	0, 36053	1, 15	0, 87493	0, 12507	0, 20594
0, 46	0, 67724	0, 32276	0, 35889	1, 16	0, 87698	0, 12302	0, 20357
0, 47	0, 68082	0, 31918	0, 35723	1, 17	0, 87900	0, 12100	0, 20121
0, 48	0, 68439	0, 31561	0, 35553	1, 18	0, 88100	0, 11900	0, 19886
0, 49	0, 68793	0, 31207	0, 35381	1, 19	0, 88298	0, 11702	0, 19652
0, 50	0, 69146	0, 30854	0, 35207	1, 20	0, 88493	0, 11507	0, 19419
0, 51	0, 69497	0, 30503	0, 35029	1, 21	0, 88686	0, 11314	0, 19186
0, 52	0, 69847	0, 30153	0, 34849	1, 22	0, 88877	0, 11123	0, 18954
0, 53	0, 70194	0, 29806	0, 34667	1, 23	0, 89065	0, 10935	0, 18724
0, 54	0, 70540	0, 29460	0, 34482	1, 24	0, 89251	0, 10749	0, 18494
0, 55	0, 70884	0, 29116	0, 34294	1, 25	0, 89435	0, 10565	0, 18265
0, 56	0, 71226	0, 28774	0, 34105	1, 26	0, 89617	0, 10383	0, 18037
0, 57	0, 71566	0, 28434	0, 33912	1, 27	0, 89796	0, 10204	0, 17810
0, 58	0, 71904	0, 28096	0, 33718	1, 28	0, 89973	0, 10027	0, 17585
0, 59	0, 72240	0, 27760	0, 33521	1, 29	0, 90147	0, 09853	0, 17360
0, 60	0, 72575	0, 27425	0, 33322	1, 30	0, 90320	0, 09680	0, 17137
0, 61	0, 72907	0, 27093	0, 33121	1, 31	0, 90490	0, 09510	0, 16915
0, 62	0, 73237	0, 26763	0, 32918	1, 32	0, 90658	0, 09342	0, 16694
0, 63	0, 73565	0, 26435	0, 32713	1, 33	0, 90824	0, 09176	0, 16474
0, 64	0, 73891	0, 26109	0, 32506	1, 34	0, 90988	0, 09012	0, 16256
0, 65	0, 74215	0, 25785	0, 32297	1, 35	0, 91149	0, 08851	0, 16038
0, 66	0, 74537	0, 25463	0, 32086	1, 36	0, 91309	0, 08691	0, 15822
0, 67	0, 74857	0, 25143	0, 31874	1, 37	0, 91466	0, 08534	0, 15608
0, 68	0, 75175	0, 24825	0, 31659	1, 38	0, 91621	0, 08379	0, 15395
0, 69	0, 75490	0, 24510	0, 31443	1, 39	0, 91774	0, 08226	0, 15183

(continue)

## 15.8.2 Tabulation de la loi normale et de son intégrale (suite)

$z$	$F(z)$	$F_c(z) = 1 - F(z)$	$p(z)$	$z$	$F(z)$	$F_c(z) = 1 - F(z)$	$p(z)$
1.40	0,91924	0,08076	0,14973	2.10	0,98214	0,01786	0,04398
1.41	0,92073	0,07927	0,14764	2.11	0,98257	0,01743	0,04307
1.42	0,92220	0,07780	0,14556	2.12	0,98300	0,01700	0,04217
1.43	0,92364	0,07636	0,14350	2.13	0,98341	0,01659	0,04128
1.44	0,92507	0,07493	0,14146	2.14	0,98382	0,01618	0,04041
1.45	0,92647	0,07353	0,13943	2.15	0,98422	0,01578	0,03955
1.46	0,92785	0,07215	0,13742	2.16	0,98461	0,01539	0,03871
1.47	0,92922	0,07078	0,13542	2.17	0,98500	0,01500	0,03788
1.48	0,93056	0,06944	0,13344	2.18	0,98537	0,01463	0,03706
1.49	0,93189	0,06811	0,13147	2.19	0,98574	0,01426	0,03626
1.50	0,93319	0,06681	0,12952	2.20	0,98610	0,01390	0,03547
1.51	0,93448	0,06552	0,12758	2.21	0,98645	0,01355	0,03470
1.52	0,93574	0,06426	0,12566	2.22	0,98679	0,01321	0,03394
1.53	0,93699	0,06301	0,12376	2.23	0,98713	0,01287	0,03319
1.54	0,93822	0,06178	0,12188	2.24	0,98745	0,01255	0,03246
1.55	0,93943	0,06057	0,12001	2.25	0,98778	0,01222	0,03174
1.56	0,94062	0,05938	0,11816	2.26	0,98809	0,01191	0,03103
1.57	0,94179	0,05821	0,11632	2.27	0,98840	0,01160	0,03034
1.58	0,94295	0,05705	0,11450	2.28	0,98870	0,01130	0,02965
1.59	0,94408	0,05592	0,11270	2.29	0,98899	0,01101	0,02898
1.60	0,94520	0,05480	0,11092	2.30	0,98928	0,01072	0,02833
1.61	0,94630	0,05370	0,10915	2.31	0,98956	0,01044	0,02768
1.62	0,94738	0,05262	0,10741	2.32	0,98983	0,01017	0,02705
1.63	0,94845	0,05155	0,10567	2.33	0,99010	0,00990	0,02643
1.64	0,94950	0,05050	0,10396	2.34	0,99036	0,00964	0,02582
1.65	0,95053	0,04947	0,10226	2.35	0,99061	0,00939	0,02522
1.66	0,95154	0,04846	0,10059	2.36	0,99086	0,00914	0,02463
1.67	0,95254	0,04746	0,09893	2.37	0,99111	0,00889	0,02406
1.68	0,95352	0,04648	0,09728	2.38	0,99134	0,00866	0,02349
1.69	0,95449	0,04551	0,09566	2.39	0,99158	0,00842	0,02294
1.70	0,95543	0,04457	0,09405	2.40	0,99180	0,00820	0,02239
1.71	0,95637	0,04363	0,09246	2.41	0,99202	0,00798	0,02186
1.72	0,95728	0,04272	0,09089	2.42	0,99224	0,00776	0,02134
1.73	0,95818	0,04182	0,08933	2.43	0,99245	0,00755	0,02083
1.74	0,95907	0,04093	0,08780	2.44	0,99266	0,00734	0,02033
1.75	0,95994	0,04006	0,08628	2.45	0,99286	0,00714	0,01984
1.76	0,96080	0,03920	0,08478	2.46	0,99305	0,00695	0,01936
1.77	0,96164	0,03836	0,08329	2.47	0,99324	0,00676	0,01888
1.78	0,96246	0,03754	0,08183	2.48	0,99343	0,00657	0,01842
1.79	0,96327	0,03673	0,08038	2.49	0,99361	0,00639	0,01797
1.80	0,96407	0,03593	0,07895	2.50	0,99379	0,00621	0,01753
1.81	0,96485	0,03515	0,07754	2.51	0,99396	0,00604	0,01709
1.82	0,96562	0,03438	0,07614	2.52	0,99413	0,00587	0,01667
1.83	0,96638	0,03362	0,07477	2.53	0,99430	0,00570	0,01625
1.84	0,96712	0,03288	0,07341	2.54	0,99446	0,00554	0,01585
1.85	0,96784	0,03216	0,07206	2.55	0,99461	0,00539	0,01545
1.86	0,96856	0,03144	0,07074	2.56	0,99477	0,00523	0,01506
1.87	0,96926	0,03074	0,06943	2.57	0,99492	0,00508	0,01468
1.88	0,96995	0,03005	0,06814	2.58	0,99506	0,00494	0,01431
1.89	0,97062	0,02938	0,06687	2.59	0,99520	0,00480	0,01394
1.90	0,97128	0,02872	0,06562	2.60	0,99534	0,00466	0,01358
1.91	0,97193	0,02807	0,06438	2.61	0,99547	0,00453	0,01323
1.92	0,97257	0,02743	0,06316	2.62	0,99560	0,00440	0,01289
1.93	0,97320	0,02680	0,06195	2.63	0,99573	0,00427	0,01256
1.94	0,97381	0,02619	0,06077	2.64	0,99585	0,00415	0,01223
1.95	0,97441	0,02559	0,05959	2.65	0,99598	0,00402	0,01191
1.96	0,97500	0,02500	0,05844	2.66	0,99609	0,00391	0,01160
1.97	0,97558	0,02442	0,05730	2.67	0,99621	0,00379	0,01130
1.98	0,97615	0,02385	0,05618	2.68	0,99632	0,00368	0,01100
1.99	0,97670	0,02330	0,05508	2.69	0,99643	0,00357	0,01071
2.00	0,97725	0,02275	0,05399	2.70	0,99653	0,00347	0,01042
2.01	0,97778	0,02222	0,05292	2.71	0,99664	0,00336	0,01014
2.02	0,97831	0,02169	0,05186	2.72	0,99674	0,00326	0,00987
2.03	0,97882	0,02118	0,05082	2.73	0,99683	0,00317	0,00961
2.04	0,97932	0,02068	0,04980	2.74	0,99693	0,00307	0,00935
2.05	0,97982	0,02018	0,04879	2.75	0,99702	0,00298	0,00909
2.06	0,98030	0,01970	0,04780	2.76	0,99711	0,00289	0,00885
2.07	0,98077	0,01923	0,04682	2.77	0,99720	0,00280	0,00861
2.08	0,98124	0,01876	0,04586	2.78	0,99728	0,00272	0,00837
2.09	0,98169	0,01831	0,04491	2.79	0,99736	0,00264	0,00814

(continue)

15.8.2 Tabulation de la loi normale et de son intégrale (suite)

$z$	$F(z)$	$F_c(z) = 1 - F(z)$	$p(z)$	$z$	$F(z)$	$F_c(z) = 1 - F(z)$	$p(z)$
2.80	0, 99744	0, 00256	0, 00792	3.50	0, 9997674	2, 33E-004	8, 73E-004
2.81	0, 99752	0, 00248	0, 00770	3.51	0, 9997759	2, 24E-004	8, 43E-004
2.82	0, 99760	0, 00240	0, 00748	3.52	0, 9997842	2, 16E-004	8, 14E-004
2.83	0, 99767	0, 00233	0, 00727	3.53	0, 9997922	2, 08E-004	7, 85E-004
2.84	0, 99774	0, 00226	0, 00707	3.54	0, 9997999	2, 00E-004	7, 58E-004
2.85	0, 99781	0, 00219	0, 00687	3.55	0, 9998074	1, 93E-004	7, 32E-004
2.86	0, 99788	0, 00212	0, 00668	3.56	0, 9998146	1, 85E-004	7, 06E-004
2.87	0, 99795	0, 00205	0, 00649	3.57	0, 9998215	1, 78E-004	6, 81E-004
2.88	0, 99801	0, 00199	0, 00631	3.58	0, 9998282	1, 72E-004	6, 57E-004
2.89	0, 99807	0, 00193	0, 00613	3.59	0, 9998347	1, 65E-004	6, 34E-004
2.90	0, 99813	0, 00187	0, 00595	3.60	0, 9998409	1, 59E-004	6, 12E-004
2.91	0, 99819	0, 00181	0, 00578	3.61	0, 9998469	1, 53E-004	5, 90E-004
2.92	0, 99825	0, 00175	0, 00562	3.62	0, 9998527	1, 47E-004	5, 69E-004
2.93	0, 99831	0, 00169	0, 00545	3.63	0, 9998583	1, 42E-004	5, 49E-004
2.94	0, 99836	0, 00164	0, 00530	3.64	0, 9998637	1, 36E-004	5, 29E-004
2.95	0, 99841	0, 00159	0, 00514	3.65	0, 9998689	1, 31E-004	5, 10E-004
2.96	0, 99846	0, 00154	0, 00499	3.66	0, 9998739	1, 26E-004	4, 92E-004
2.97	0, 99851	0, 00149	0, 00485	3.67	0, 9998787	1, 21E-004	4, 74E-004
2.98	0, 99856	0, 00144	0, 00470	3.68	0, 9998834	1, 17E-004	4, 57E-004
2.99	0, 99861	0, 00139	0, 00457	3.69	0, 9998879	1, 12E-004	4, 41E-004
3.00	0, 99865	0, 00135	0, 00443	3.70	0, 9998922	1, 08E-004	4, 25E-004
3.01	0, 99869	0, 00131	0, 00430	3.71	0, 9998964	1, 04E-004	4, 09E-004
3.02	0, 99874	0, 00126	0, 00417	3.72	0, 9999004	9, 96E-005	3, 94E-004
3.03	0, 99878	0, 00122	0, 00405	3.73	0, 9999043	9, 97E-005	3, 80E-004
3.04	0, 99882	0, 00118	0, 00393	3.74	0, 9999080	9, 20E-005	3, 66E-004
3.05	0, 99886	0, 00114	0, 00381	3.75	0, 9999116	8, 84E-005	3, 53E-004
3.06	0, 99889	0, 00111	0, 00370	3.76	0, 9999150	8, 50E-005	3, 40E-004
3.07	0, 99893	0, 00107	0, 00358	3.77	0, 9999184	8, 16E-005	3, 27E-004
3.08	0, 99896	0, 00104	0, 00348	3.78	0, 9999216	7, 84E-005	3, 15E-004
3.09	0, 99900	0, 00100	0, 00337	3.79	0, 9999247	7, 53E-005	3, 03E-004
3.10	0, 99903	0, 00097	0, 00327	3.80	0, 9999277	7, 23E-005	2, 92E-004
3.11	0, 99906	0, 00094	0, 00317	3.81	0, 9999305	6, 95E-005	2, 81E-004
3.12	0, 99910	0, 00090	0, 00307	3.82	0, 9999333	6, 67E-005	2, 71E-004
3.13	0, 99913	0, 00087	0, 00298	3.83	0, 9999359	6, 41E-005	2, 60E-004
3.14	0, 99916	0, 00084	0, 00288	3.84	0, 9999385	6, 15E-005	2, 51E-004
3.15	0, 99918	0, 00082	0, 00279	3.85	0, 9999409	5, 91E-005	2, 41E-004
3.16	0, 99921	0, 00079	0, 00271	3.86	0, 9999433	5, 67E-005	2, 32E-004
3.17	0, 99924	0, 00076	0, 00262	3.87	0, 9999456	5, 44E-005	2, 23E-004
3.18	0, 99926	0, 00074	0, 00254	3.88	0, 9999478	5, 22E-005	2, 15E-004
3.19	0, 99929	0, 00071	0, 00246	3.89	0, 9999499	5, 01E-005	2, 07E-004
3.20	0, 99931	0, 00069	0, 00238	3.90	0, 9999519	4, 81E-005	1, 99E-004
3.21	0, 99934	0, 00066	0, 00231	3.91	0, 9999539	4, 61E-005	1, 91E-004
3.22	0, 99936	0, 00064	0, 00224	3.92	0, 9999557	4, 43E-005	1, 84E-004
3.23	0, 99938	0, 00062	0, 00216	3.93	0, 9999575	4, 25E-005	1, 77E-004
3.24	0, 99940	0, 00060	0, 00210	3.94	0, 9999593	4, 07E-005	1, 70E-004
3.25	0, 99942	0, 00058	0, 00203	3.95	0, 9999609	3, 91E-005	1, 63E-004
3.26	0, 99944	0, 00056	0, 00196	3.96	0, 9999625	3, 75E-005	1, 57E-004
3.27	0, 99946	0, 00054	0, 00190	3.97	0, 9999641	3, 59E-005	1, 51E-004
3.28	0, 99948	0, 00052	0, 00184	3.98	0, 9999655	3, 45E-005	1, 45E-004
3.29	0, 99950	0, 00050	0, 00178	3.99	0, 9999670	3, 30E-005	1, 39E-004
3.30	0, 99952	0, 00048	0, 00172	4.00	0, 9999683	3, 17E-005	1, 34E-004
3.31	0, 99953	0, 00047	0, 00167	4.05	0, 9999744	2, 56E-005	1, 09E-004
3.32	0, 99955	0, 00045	0, 00161	4.10	0, 9999793	2, 07E-005	8, 93E-005
3.33	0, 99957	0, 00043	0, 00156	4.15	0, 9999834	1, 66E-005	7, 26E-005
3.34	0, 99958	0, 00042	0, 00151	4.20	0, 9999867	1, 33E-005	5, 89E-005
3.35	0, 99960	0, 00040	0, 00146	4.25	0, 9999893	1, 07E-005	4, 77E-005
3.36	0, 99961	0, 00039	0, 00141	4.30	0, 9999915	8, 54E-006	3, 85E-005
3.37	0, 99962	0, 00038	0, 00136	4.35	0, 9999932	6, 81E-006	3, 10E-005
3.38	0, 99964	0, 00036	0, 00132	4.40	0, 9999946	5, 41E-006	2, 49E-005
3.39	0, 99965	0, 00035	0, 00127	4.45	0, 9999957	4, 29E-006	2, 00E-005
3.40	0, 99966	0, 00034	0, 00123	4.50	0, 9999966	3, 40E-006	1, 60E-005
3.41	0, 99968	0, 00032	0, 00119	4.55	0, 9999973	2, 68E-006	1, 27E-005
3.42	0, 99969	0, 00031	0, 00115	4.60	0, 9999979	2, 11E-006	1, 01E-005
3.43	0, 99970	0, 00030	0, 00111	4.65	0, 9999983	1, 66E-006	8, 05E-006
3.44	0, 99971	0, 00029	0, 00107	4.70	0, 9999987	1, 30E-006	6, 37E-006
3.45	0, 99972	0, 00028	0, 00104	4.75	0, 9999990	1, 02E-006	5, 03E-006
3.46	0, 99973	0, 00027	0, 00100	4.80	0, 9999992	7, 93E-007	3, 96E-006
3.47	0, 99974	0, 00026	0, 00097	4.85	0, 9999994	6, 17E-007	3, 11E-006
3.48	0, 99975	0, 00025	0, 00094	4.90	0, 9999995	4, 79E-007	2, 44E-006
3.49	0, 99976	0, 00024	0, 00090	4.95	0, 9999996	3, 71E-007	1, 91E-006

(continue)

15.8.2 Tabulation de la loi normale et de son intégrale (suite)

$z$	$F(z)$	$F_C(z) = 1 - F(z)$	$p(z)$	$z$	$F(z)$	$F_C(z) = 1 - F(z)$	$p(z)$
5.00	0.9999997	2.87E-007	1.49E-006	6.00	1.0000000	9.87E-010	6.08E-009
5.05	0.9999998	2.21E-007	1.16E-006	6.10	1.0000000	5.30E-010	3.32E-009
5.10	0.9999998	1.70E-007	8.97E-007	6.20	1.0000000	2.82E-010	1.79E-009
5.15	0.9999999	1.30E-007	6.94E-007	6.30	1.0000000	1.49E-010	9.60E-010
5.20	0.9999999	9.96E-008	5.36E-007	6.40	1.0000000	7.77E-011	5.09E-010
5.25	0.9999999	7.60E-008	4.13E-007	6.50	1.0000000	4.02E-011	2.67E-010
5.30	0.9999999	5.79E-008	3.17E-007	6.60	1.0000000	2.06E-011	1.39E-010
5.35	1.0000000	4.40E-008	2.43E-007	6.70	1.0000000	1.04E-011	7.13E-011
5.40	1.0000000	3.33E-008	1.86E-007	6.80	1.0000000	5.23E-012	3.63E-011
5.45	1.0000000	2.52E-008	1.42E-007	6.90	1.0000000	2.60E-012	1.83E-011
5.50	1.0000000	1.90E-008	1.08E-007	7.00	1.0000000	1.28E-012	9.13E-012
5.60	1.0000000	1.07E-008	6.18E-008	8.00	1.0000000	6.13E-016	5.05E-015
5.70	1.0000000	5.99E-009	3.51E-008	9.00	1.0000000	1.13E-019	1.03E-018
5.80	1.0000000	3.32E-009	1.98E-008	10.00	1.0000000	7.62E-024	7.69E-023
5.90	1.0000000	1.82E-009	1.10E-008				

15.9 FONCTION DE MARCUM

15.9.1 Introduction

La fonction  $Q(a, b)$  de Marcum est définie par :

$$\begin{aligned}
 Q(a, b) &= \int_b^\infty \exp\left(-\frac{a^2 + x^2}{2}\right) I_0(ax) x \, dx \\
 &= 1 - \int_0^b \exp\left(-\frac{a^2 + x^2}{2}\right) I_0(ax) x \, dx
 \end{aligned}
 \tag{15.13}$$

Elle peut être calculée numériquement par une méthode d'itération basée sur le développement en série de la fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro [141]

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \frac{1}{(n!)^2}
 \tag{15.14}$$

On obtient alors

$$Q(a, b) = 1 - \sum_{n=0}^\infty g_n k_n
 \tag{15.15}$$

avec

$$g_n = g_{n-1} - \frac{1}{n!} \left(\frac{b^2}{2}\right) \exp\left[-\frac{b^2}{2}\right]
 \tag{15.16}$$

et

$$k_n = \frac{a^2}{2} \frac{k_{n-1}}{n}
 \tag{15.17}$$

15.9.2 Propriétés principales et relation asymptotique

$$Q(\sqrt{2a}, \sqrt{2b}) = \int_b^\infty \exp(-a - y) I_0(2\sqrt{ay}) \, dy
 \tag{15.18}$$

$$Q(0, b) = \exp(-b^2/2)
 \tag{15.19}$$

$$Q(a, 0) = 1 \tag{15.20}$$

$$Q(a, b) \approx \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{b-a}{\sqrt{2}} \right) \text{ pour } b \gg 1 \text{ et } b \gg b-a \tag{15.21}$$

### 15.9.3 Abaqués

Des abaqués des fonctions  $Q(a, b)$  et  $1 - Q(a, b)$  sont reproduites sur les figures 15.5 et 15.6.

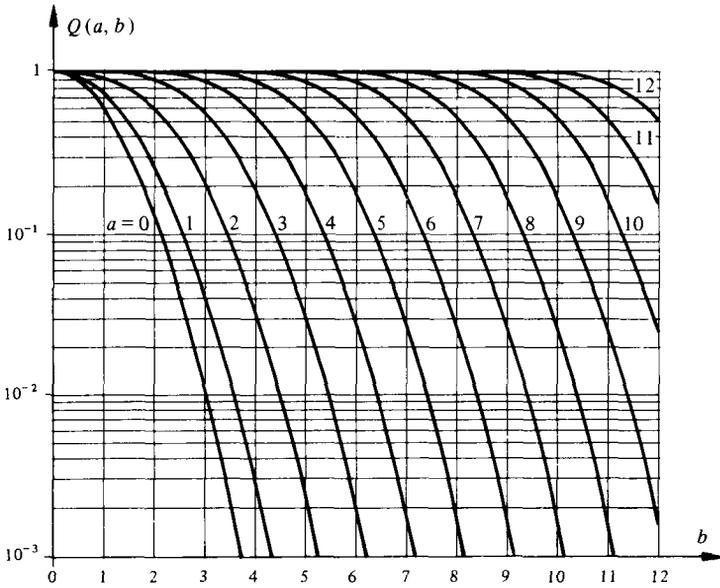


Fig. 15.5

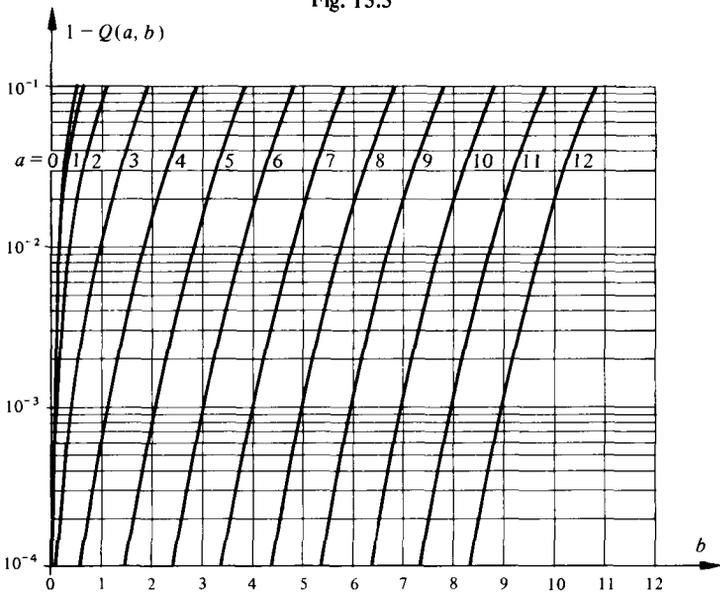


Fig. 15.6



## SOLUTIONS DES EXERCICES

### CHAPITRE 1

1.4.1  $A\Delta$ ;  $\bar{x} = \bar{y} = A\Delta/T$ .

1.4.2  $x(t) = \frac{1}{2} A [\text{sgn}(t - t_0) - \text{sgn}(t - t_0 - T)]$ .

1.4.3

$$z_1(t) = AB [\delta(t + t_0) + \delta(t - t_0)] + \frac{1}{2} AB [\delta(t + t_0 + t_1) + \delta(t - t_0 + t_1) + \delta(t + t_0 - t_1) + \delta(t - t_0 - t_1)]$$

$$z_2(t) = A \text{rep}_T [\cos(\pi t/T) \text{rect}(t/T)] = A |\cos(\pi t/T)|.$$

1.4.5

$$\bar{x}(t, T_1) = (A/\pi)(T_0/T_1) \sin(\pi T_1/T_0) \sin[(2\pi t/T_0) - \pi T_1/T_0]$$

et

$$\bar{x}(t, T_1 = T_0/2) = -(2A/\pi) \cos(2\pi t/T_0)$$

et

$$\bar{x}(t, T_1 = kT_0) = 0.$$

1.4.6

$$z(t) = x(t) * y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \delta(t - kT)$$

avec

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \exp(-1) - 1 = -0,63$$

et

$$c_k = \exp(-k) - \exp(-k+1) + \exp(-k+2) \text{ pour } k \geq 2.$$

1.4.7  $\bar{x}(T_1 = 2T) = A/2$ ;  $W_x(T_1 = 2T) = 2A^2T/3$ ,  $P_x(T_1 = 2T) = A^2/3$ .

### CHAPITRE 2

2.6.1  $P = 0$ ,  $W = A^2T$ ;  $P = A^2/2$ ,  $W = \infty$ ;  $P = A^2/4$ ,  $W = \infty$ ;  $P = \frac{1}{2}$ ,  $W = \infty$ ;  $P = \infty$ ,  $W = \infty$ ;  $P = 0$ ,  $W = A^2/2a$ ;  $P = \infty$ ,  $W = \infty$ ;  $P = 0$ ,  $W = 2A^2T/3$ .

2.6.2  $P(T) = \frac{1}{2} A^2 [1 - \text{sinc}(2T/T_0)]$ ;  $P(T) = P = A^2/2$  pour  $T = kT_0/2$ ,  $k$  entier  $\neq 0$ .

$$2.6.3 \quad x_p(t) = -A \sin \alpha \cos \omega t; \quad x_i(t) = A \cos \alpha \sin \omega t.$$

$$2.6.4 \quad \text{Montrer que } \bar{x}_i = \bar{x} - \bar{x} = 0.$$

### CHAPITRE 3

$$3.5.1 \quad d_1(x_k, x_l) = A\sqrt{T} \quad \forall k, l; \quad d_1^2(x_k, x_l) = A^2T = \|x_k\|^2 + \|x_l\|^2 \\ = \text{somme des énergies de chaque signal; } x_k \text{ et } x_l \text{ sont orthogonaux } \forall k, l.$$

$$3.5.2 \quad d_1(x_i, x_i) = d_2(x_i, x_i) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3; \quad d_1(x_1, x_3) = d_1(x_2, x_3) = \\ = \sqrt{2/3}A; \quad d_1(x_1, x_2) = 2A/\sqrt{3}; \quad \frac{1}{2}d_2(x_1, x_2) = d_2(x_1, x_3) = d_2(x_2, x_3) = A/2.$$

$$3.5.3 \quad \langle x, y^* \rangle = -T/2 \sin \Delta\theta; \quad \langle x, y^* \rangle = 0 \quad \text{pour } \Delta\theta = 0 \pm k\pi.$$

#### 3.5.4

$$\tilde{x}(t) = -1,917 e^{-t} + 10,914 e^{-2t} - 9,472 e^{-3t}$$

$$\|e\|^2 = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt - \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \alpha_k \alpha_l \lambda_{kl} = 0,152.$$

#### 3.5.5

$$\tilde{x}(t) = (2/\pi) [\text{rect}(t - \frac{1}{2}) - \text{rect}(t + \frac{1}{2})]; \quad \|e\|^2 = 1 - 8/\pi^2 \cong 0,18943.$$

3.5.6 Toute fonction impaire sur l'intervalle n'est pas représentable par une combinaison linéaire des  $\psi_k(t)$ .

3.5.7 Développer  $x(t)$  et  $y(t)$  à l'aide de l'ensemble  $\{\psi_k(t)\}$  et tenir compte de l'orthogonalité de ces fonctions.

#### 3.5.10

$$\psi_4(t) = -2\sqrt{2}(4e^{-t} - 30e^{-2t} + 60e^{-3t} - 35e^{-4t}) \\ \psi_5(t) = \frac{1}{2}\sqrt{10}(10e^{-t} - 120e^{-2t} + 420e^{-3t} - 560e^{-4t} + 252e^{-5t}).$$

#### 3.5.11

$$\psi_1(t) = v_1(t) / \sqrt{12} \\ \psi_2(t) = (1/\sqrt{8})[v_2(t) + \sqrt{3}\psi_1(t)] = (1/\sqrt{2}) \text{rect}[(t-2)/2]; \\ \psi_k(t) = 0 \quad \text{pour } k = 3 \text{ et } 4; \\ v_1(t) = \sqrt{12}\psi_1(t); \\ v_2(t) = -\sqrt{3}\psi_1(t) + \sqrt{8}\psi_2(t); \\ v_3(t) = \sqrt{3}\psi_1(t) - \sqrt{2}\psi_2(t); \\ v_4(t) = -\sqrt{3}\psi_1(t) - \sqrt{8}\psi_2(t).$$

3.5.12 Cas a):  $\alpha_k$  non nuls seulement pour  $k=0$ :  $\tilde{x}(t) = \alpha_0 = 1/2$ ;  $\xi = 4$  et  $\xi_{dB} = 6\text{dB}$ ; aucune valeur de  $m$  ne permet une meilleure approximation.

Cas b):  $\alpha_0 = 1/2$ ,  $\alpha_2 = -1/4$ ,  $\alpha_6 = -1/8$ ,  $\alpha_{14} = -1/16$ ,  $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = \alpha_7 = \alpha_9 = \alpha_{11} = \alpha_{13} = \alpha_4 = \alpha_8 = \alpha_{12} = 0$ ; pour  $m_{\min} = 14$  (mais 4 coeff.  $\neq 0$ ):  $\xi_{dB} = 24$  dB; chaque coefficient non nul entraîne une amélioration de 6 dB.

3.5.13  $x(t)$  réel :  $X_{-k} = X_k^*$ , avec  $X_0 = A/2$  et  $X_k = j(A/2\pi k)$  pour  $k \neq 0$ .

## CHAPITRE 4

4.6.1 Développer (4.10) et examiner chaque terme.

4.6.2 Idem (4.6.1).

4.6.3 Utiliser (4.76)

4.6.4 Utiliser (4.24) et (4.14).

4.6.5 Utiliser (4.67) avec  $\text{rect}(t) * \text{tri}(t) \leftrightarrow \text{sinc}^3(f)$  et  $\text{tri}(t) * \text{tri}(t) \leftrightarrow \text{sinc}^4(f)$ .

4.6.6 Convolution évaluée par méthode indirecte avec (4.14), (4.18) et (4.24):  
 $v(t) = \pi \sin(t)/t$ .

4.6.7  $X(f) = \frac{1}{2} AT [\text{sinc}(fT) - \frac{1}{2} \text{sinc}^2(fT/2)]$ ;  
 $Y(f) = [jA/(2\pi f)] [\cos(\pi fT) - \text{sinc}(fT)]$ .

4.6.8 Dériver l'expression (4.1).

4.6.9

$$dx/dt = -2\pi t \exp(-\pi t^2) \leftrightarrow j2\pi fX(f) = -j dX/df$$

d'où

$$X(f) = \text{solution de l'équation } dX/X = -2\pi f df.$$

4.6.10 Par (4.14), (4.68) et (4.181):

$$x(\tau) * y(\tau) = \hat{\varphi}_{xy}(\tau) = T_1 T_2 [T_1^2 + T_2^2]^{-1/2} \cdot \text{ig} [t (T_1^2 + T_2^2)^{-1/2}].$$

4.6.11  $|X(f)| = 2AT |\text{sinc}(2Tf) - \text{sinc}(Tf) \cos(7\pi Tf)|$ ;  $\hat{\Phi}_x(f) = |X(f)|^2$ .

L'autocorrélation  $\hat{\varphi}_x(\tau) = \hat{\varphi}_x(-\tau)$  peut être déterminée par voie graphique, elle est représentée sur la figure 4.31.

4.6.12  $X(f) = \frac{1}{2} AT [\text{sinc}^2(Tf+1) - \text{sinc}^2(Tf-1)] \exp[j(\pi/2 - \pi fT)]$ . Graphes voir fig. 4.32.

4.6.13  $\hat{\varphi}_{xy}(\tau) = 0$  pour  $|\tau| > T$ ;  $\hat{\varphi}_{xy}(\tau) = AB(\tau^2/T - 2|\tau| + T)$  pour  $\frac{1}{2}T < |\tau| < T$ ;  $\hat{\varphi}_{xy}(\tau) = AB(\frac{1}{2}T - \tau^2/T)$  pour  $0 < |\tau| < \frac{1}{2}T$ .

4.6.14  $X(f) = (j2\pi f)^{-1} \text{sinc}(af) + \frac{1}{2} \delta(f)$  par (4.87). Le même résultat peut être trouvé en appliquant la propriété d'intégration du tableau 15.3.1.

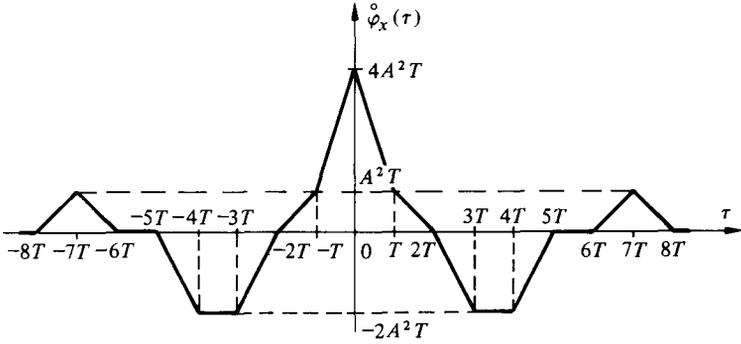


Fig. 4.31

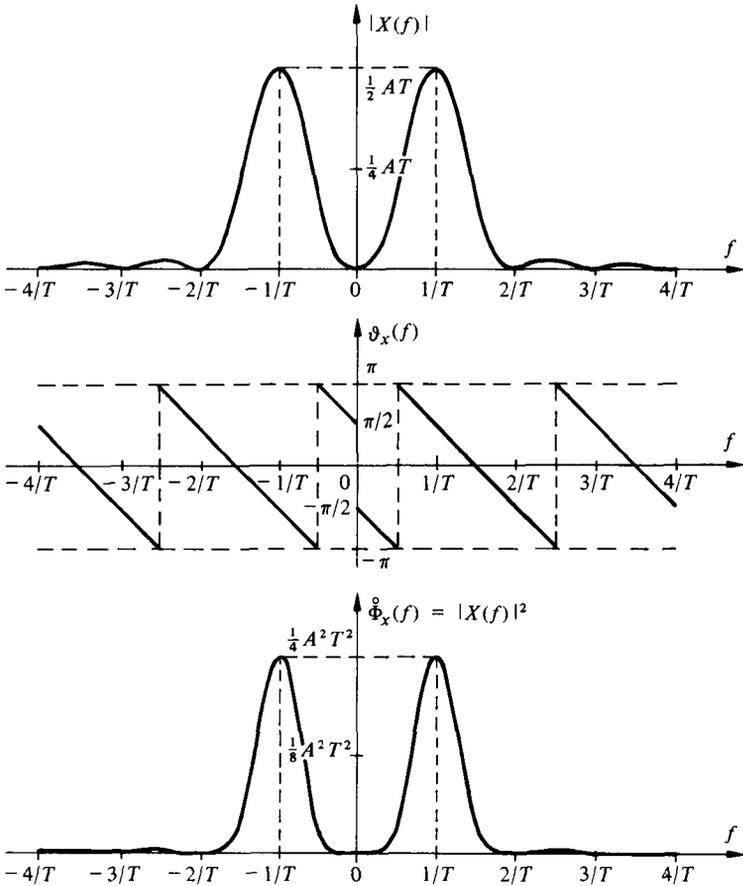


Fig. 4.32

4.6.15

$$\varphi_x(\tau) = (A^2\Delta/T) \text{rep}_T \{ 2 \text{tri}(\tau/\Delta) - \text{tri}[(\tau + T/2)/\Delta] - \text{tri}[(\tau - T/2)/\Delta] \};$$

$$\Phi_x(f) = \sum_n (2A\Delta/T)^2 \text{sinc}^2(n\Delta/T) \delta(f - n/T) \text{ pour } n \text{ impair.}$$

## 4.6.16

$$\begin{aligned}
 x(t) &= A \operatorname{rep}_T [\cos(2\pi f_0 t) \cdot \operatorname{rect}(t/\Delta)]; \\
 \cos(2\pi f_0 t) \cdot \operatorname{rect}(t/\Delta) &\leftrightarrow \frac{1}{2} \Delta \{ \operatorname{sinc}[\Delta(f+f_0)] + \operatorname{sinc}[\Delta(f-f_0)] \}; \\
 \Phi_x(f) &\cong (\frac{1}{2} A \Delta / T)^2 \{ \operatorname{sinc}^2[\Delta(f+f_0)] + \operatorname{sinc}^2[\Delta(f-f_0)] \} \delta_{1/T}(f) \\
 &\text{pour } f_0 \gg 1/\Delta.
 \end{aligned}$$

4.6.17 Par identité de Parseval (4.142) appliquée à une suite périodique d'impulsions rectangulaires  $\operatorname{rep}_T [\operatorname{rect}(t/\Delta)]$ .

## 4.6.18

$$\begin{aligned}
 \varphi_{xy}(\tau) &= 0; \quad \varphi_z(\tau) = \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi f_0 \tau) + (A^2/8) \cos(2f_0 \tau); \\
 \Phi_z(f) &= \frac{1}{4} A^2 \{ \delta(f+f_0) + \delta(f-f_0) + \frac{1}{4} [\delta(f+f_0/\pi) + \delta(f-f_0/\pi)] \}; \\
 P_z &= 5 A^2/8.
 \end{aligned}$$

4.6.19 Par (4.67):  $\langle z_k, z_l^* \rangle = \operatorname{sinc}(k-l)$  qui vaut 1 pour  $k=l$  et zéro pour  $k \neq l$ .

## CHAPITRE 5

5.11.1  $\mu_x = 2, \sigma_x^2 = 1/3; \mu_y = 2/3, \sigma_y^2 = 2/9$ .

5.11.2  $\operatorname{Prob}(|z| < 1,5) = 11/12$ .

5.11.4  $\operatorname{Prob}(x \geq A/2 = F_x(x = -A/2) = 0,33$  par (5.22).

5.11.5  $\mu_x = \sum_i \operatorname{Prob}(x_i) \cdot x_i = 3/16; P_x = \sum_i \operatorname{Prob}(x_i) \cdot x_i^2 = 73/32$ .

5.11.6  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont dépendantes car  $p_{xy}(x, y) \neq p_x(x) p_y(y) = x(\sqrt{2}-y)$ ; résolution analogue à l'exemple 14.2.9.

5.11.7 Montrer que  $p_{xy}(x, y) = p_x(x) p_y(y)$  avec  $p_x(x) = 2/a$  et  $p_y(y) = 1/(2b)$ .

5.11.8  $\mu_y = A \mu_x; \sigma_y^2 = A^2 \sigma_x^2$ .

5.11.9  $p_y(y) = (|a|/y^2) p_x(a/y)$ .

## 5.11.11

$$p_y(y) = p_0 \delta(y) + p_x(y) \epsilon(y) \text{ avec } p_0 = \int_{-\infty}^0 p_x(x) dx.$$

5.11.12 Puissance instantanée  $y(t) = x^2(t); p_y(y) = 1/(2A\sqrt{y})$  et  $F_y(y) = \sqrt{y}/A$  avec  $0 < y < A^2; \operatorname{Prob}(y > A^2/2) = 1 - F_y(A^2/2) = 0,293$ .

5.11.13 Comparer  $p_y(y) = (\sigma_x^2 2\pi a y)^{-1/2} \exp[-y/(2a\sigma_x^2)]$  pour  $y > 0$  avec (14.113) pour  $m=1$  et en tenant compte de la correspondance  $p_y(y) dy = p(x_1^2) dx_1^2$ .

5.11.14  $F_r(r) = 1 - \exp[-r^2/(2\sigma^2)]; \operatorname{Prob}(r > 3\sigma) = \exp(-4,5) = 1,11 \cdot 10^{-2}$ .

**5.11.15**  $E[\mathbf{x}] = 0$ ;  $R_x(t_1, t_2) = R_x(\tau) = \sigma_y^2 \cdot \cos \omega \tau$  mais  $E[\mathbf{x}^3(t)] = E[\mathbf{y}^3](\sin^3 \omega t + \cos^3 \omega t)$  dépend de  $t$  si  $E[\mathbf{y}^3] \neq 0$ .

**5.11.16**  $\mu_y(t) = \mu_x \cos \omega t$  et  $R_y(t, t + \tau) = \frac{1}{2} R_x(\tau) [\cos \omega \tau + \cos(2\omega t + \omega \tau)]$  dépendent de  $t$ ;  $R_z(t, t + \tau) = R_z(\tau) = \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos \omega \tau$ .

**5.11.17**  $a = R_x(T)/R_x(0)$  pour  $P(e = x - \tilde{x}) = R_e(0)$  minimum.

**5.11.18**  $R_x(\tau) = [\text{tri}(\tau/T) + 1]/a^2$ .

**5.11.19** Cas particulier de l'exemple 5.2.7 avec  $\mu_x = 0$  et  $P_x \equiv \sigma_x^2 = 1/2$ ;  $\Phi_x(f) = (T/2) \text{sinc}^2(Tf)$ .

**5.11.20**  $|R_x(\tau)| = |\int \Phi_x(f) \exp(j2\pi ft) df| \leq \int |\Phi_x(f) \exp(j2\pi ft)| df = \int \Phi_x(f) df$ .

**5.11.21** Cas particulier de l'exemple 5.2.7 avec  $\mu_x = A/3$  et  $P_x \equiv \sigma_x^2 = 8A^2/9$ ;  $\Phi_x(f) = A^2(8T/9) \text{sinc}^2(Tf) + (A^2/9) \delta(f)$ .

**5.11.22**  $\Phi_y(f) = (\Delta^2/T) \sigma_x^2 \text{sinc}^2(\Delta f) + (\Delta/T)^2 \mu_x^2 \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(n\Delta/T) \delta(f - n/T)$ ; formule générale dont (5.132) n'est que le cas particulier pour  $\Delta = T$  et qui correspond également au résultat de l'exemple 4.4.17 lorsque  $\sigma_x^2 = 0$ .

**5.11.24**

$$\Phi(f) = (A/4)^2 [T \text{sinc}^2(Tf/2) + \delta(f)] + (A/2\pi)^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2n+1)^{-2} \cdot \delta(f - [2n+1]/T).$$

**5.11.25** En introduisant (5.152) dans (5.102) avec  $\sigma_k^2 = \eta/2$ .

**5.11.26** Poser  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$  et  $\mathbf{w} = \mathbf{x}$  et appliquer (5.35).

**5.11.27**  $p(z) = [1/(3\sqrt{\eta B \pi})] \{2 \exp[-(z-A)^2/\eta B] + \exp[-(z+A)^2/\eta B]\}$ ;  $\mu_z = \mu_x = A/3$  car  $\mu_y = 0$ ;  $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 = 8A^2/9 + \eta B/2$ ;  $\rho_{xy} = 0$  puisque  $x(t)$  et  $y(t)$  sont indépendants.

**5.11.28**  $\text{Prob}(z > 3) = 1/3$ .

**5.11.29** Poser  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  et  $\mathbf{w} = \mathbf{x}$  et appliquer (5.35).

**5.11.30**  $p_z(z) = \ln z - 2 \ln a$  pour  $a^2 \leq z < a(a+1)$  et  $p_z(z) = 2 \ln(a+1) - \ln z$  pour  $a(a+1) \leq z \leq (a+1)^2$ .

**5.11.31** Par (5.198), (5.199), (4.138), (4.123), (5.92) et (5.132):  $R_z(\tau) = \sigma_x^2 T^{-1} \delta(\tau) + \mu_x^2 T^{-1} \delta_T(\tau)$ ;  $\Phi_z(f) = \sigma_x^2/T + (\mu_x/T)^2 \delta_{1/T}(f)$ .

**5.11.32**  $\text{Prob}(2 \leq x \leq 3) \cong 0,044$ ;  $\text{Prob}(x > 3) \cong 0,048$ .

**5.11.33**  $\tau = kT \forall k$  entier  $\neq 0$ .

5.11.34 Par (5.180), (5.181), (5.202) et (5.207).

5.11.35 Cf. paragraphe 14.4.5:  $p(x|y) = p(x, y) / p(y) = (\sigma_{x|y} \sqrt{2\pi})^{-1} \cdot \exp[-(x - \mu_{x|y})^2 / 2\sigma_{x|y}^2]$  avec  $\mu_{x|y} = y\rho\sigma_x/\sigma_y$  et  $\sigma_{x|y}^2 = \sigma_x^2(1 - \rho^2)$ .

5.11.36 Pour  $x(t)$  et  $y(t)$  indépendants:  $R_{xy}(\tau) = C_{xy}(\tau) = 0$ ; pour  $x(t) = y(t)$ :  $R_z(\tau) = R_x^2(0) + 2R_x^2(\tau)$  et  $\Phi_z(f) = R_x^2(0)\delta(f) + 2\Phi_x(f) * \Phi_x(f)$ .

5.11.37  $R_x(\tau) = A^2 \exp(-2\lambda|\tau|)$ ;  $\Phi_x(f) = A^2 \lambda / (\lambda^2 + \pi^2 f^2)$ .

## CHAPITRE 6

6.8.1  $P_1 = 12,4 \cdot 10^{-18} \text{ W} = 12,4 \text{ aW}$ ;  $P_2 = 20 \cdot 10^{-15} \text{ W} = 20 \text{ fW}$ .

6.8.2  $R_{\text{eq}} = 524 \Omega$ ;  $\sigma_u = 0,92 \mu\text{V}$ .

6.8.3  $U = 0,6 \text{ V}$  et  $I = 11,4 \text{ mA}$ ;  $\sigma_i^2 = \sigma_{ig}^2 + \sigma_{io}^2 = 3,66 \cdot 10^{-15} \text{ A}^2$ ;  $\sigma_u \cong \sigma_i \cdot g_d^{-1} = 0,13 \mu\text{V}$ .

6.8.4  $U_R = 2kT/e = 50 \text{ mV}$ .

## CHAPITRE 7

7.6.1  $-A \cos(\omega t + \alpha)$ .

7.6.2 Par (7.8), (7.7) et (4.17):  $\check{x}(t) = 2\pi B^2 t \text{ sinc}^2(Bt)$  et  $\underline{x}(t) = 2B \text{ sinc}(Bt) \cdot \exp(j\pi Bt)$ .

7.6.3 Par (7.32), (7.39) et (7.40):  $P_{\underline{x}} = R_{\underline{x}}(0) = 2R_x(0) = 2P_x$ .

7.6.4 Par (4.129):  $\varphi_{xy}(\tau) = (A^2/2) \sin(\omega_0 \tau)$  et par le résultat de l'exercice 7.6.1:  $\check{\varphi}_{xy}(\tau) = -(A^2/2) \cos(\omega_0 \tau)$ .

7.6.5  $\text{Prob}(r_n < V_0 = 2\sigma_n) = 1 - e^{-2} = 0,865$ .

7.6.6 1)  $f_0 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ; 2)  $f_0 = f_2$ .

7.6.7 Par (2.25), (4.15), (4.89) et (7.9).

7.6.8 Montrer que  $\langle \underline{x}, \underline{y}^* \rangle = \langle \underline{r}_x, \underline{r}_y^* \rangle$  et que  $\langle x, y \rangle = \langle \check{x}, \check{y} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \langle \underline{x}, \underline{y}^* \rangle$ .

7.6.9 Résoudre (7.111) avec  $\underline{r}_1(t) = \text{rect}[(t - T/2)/T]$  et  $\underline{r}_2(t)$  donnée par (7.122).

7.6.10 Introduire (7.111) dans (7.145) et tenir compte de (7.146), de (1.48) et de (7.115).

7.6.11 Par (7.144):  $D_\tau = B_\tau^{-1} = 3T/2$ .

## CHAPITRE 8

**8.5.1**  $\varphi_y(\tau) = \varphi_x(\tau) * \hat{\varphi}_g(\tau)$  avec  $\hat{\varphi}_g(\tau) = \frac{1}{2} \omega_c \exp(-\omega_c |\tau|)$ ;  $B_{\text{eq}} = \omega_c/4$ ;  
 $R_y(\tau) = (\eta \omega_c/4) \exp(-\omega_c |\tau|)$  et  $\Phi_y(f) = (\eta/2) / [1 + (f/f_c)^2]$ ;  $P_y = \eta \omega_c/4$ .

**8.5.2** Montrer que  $y(t) = \sum_i \sum_j x_i(t) * g_j(t) = x(t) * g(t)$  pour  $x(t) = \sum_i x_i(t)$ ,  $g(t) = \sum_j g_j(t)$  et  $j = 1, \dots, n$ .

**8.5.3**  $G(f) = [1 + jf/f_c]^{-1} - \exp(-j2\pi f t_0)$  avec  $f_c = (2\pi RC)^{-1}$ ; pour  $t_0 = 0$ :  
 $G(f) = -j(f/f_c) [1 + jf/f_c]^{-1}$ ; filtre passe-haut du 1er ordre de fréquence de coupure  $f_c$ .

**8.5.4** Poser  $G(f) = j2\pi f G_2(f)$  d'où, par (4.13) et le tableau 15.4:  $g(t) = dg_2(t)/dt = [2\pi G_0 f_2 / (f_2 - f_1)] [f_2 \exp(-2\pi f_2 t) - f_1 \exp(2\pi f_1 t)] \cdot \epsilon(t)$ ;  $P_y \cong 3142 \text{ V}^2$ ;  
 $B_{-3\text{dB}} \cong 20 \text{ kHz}$  et  $B_{\text{eq}} \cong 31,42 \text{ kHz}$ .

**8.5.5**  $P_{sy}/P_{ny} = (2\pi BA^2 T^2/\eta) [2\pi BT + \exp(-2\pi BT) - 1]^{-1}$ ;  $T \cong 0,995 \text{ s}$ .

**8.5.6**  $P_{sy}/P_{ny} = A^2 (1 + 2\pi BRC) / (\eta \pi B)$ ;  $RC = 0,5 \text{ s}$ .

**8.5.7**  $t_\phi = (2\pi f_0)^{-1} \arctan(f_0/f_c)$  et  $t_g = (2\pi f_c)^{-1} [1 + (f_0/f_c)^2]^{-1}$ ; pour  $f_0 = f_c$ :  
 $t_\phi = (8f_c)^{-1}$  et  $t_g = (4\pi f_c)^{-1}$ .

**8.5.8** Introduire (8.24) et (8.25) dans (5.178).

**8.5.9** Par (5.222), (8.88), (8.24) et (1.35):  $\Phi_n(f) = [\lambda^2 \Phi_\alpha(f) + \lambda R_\alpha(0)] \cdot |G(f)|^2$ .

**8.5.10**  $\alpha(t) = e$  et  $g(t) = \delta(t)$ .

**8.5.11**  $\Phi_n(f) = I_0 \delta(f) + I_0 e \text{sinc}^4(\Delta f)$ .

**8.5.12** Exprimer  $Y(f)$  en tenant compte de (8.74), de  $x(\tau) = F^{-1}[X(\nu)]$  et de (8.76).

**8.5.13**  $\Phi_y(f) = (\Delta/T)^2 \sum_n \text{sinc}^2(n\Delta/T) \Phi_x(f - n/T)$ .

**8.5.14**  $\hat{\Phi}_y(f) = \Phi_x(f) * T^2 \text{sinc}^2(Tf) = T^2 \sum_n |X_n|^2 \text{sinc}^2[T(f - n/T_x)]$ .

**8.5.15**  $|Y(f)| = \frac{1}{2} |A_1| [ |U_1(f + f_1)| + |U_1(f - f_1)| ] + \frac{1}{2} |A_2| [ |U_2(f + f_2)| + |U_2(f - f_2)| ]$  avec  $U_1(f) = T \text{sinc}(Tf)$ ,  $U_2(f) = T \text{sinc}^2(Tf)$ ,  $U_3(f) = T \cdot \text{ig}(Tf)$ .

**8.5.16**  $Y(f) = \sum_n (A/2) [\text{sinc}(n - \frac{1}{2}) + \text{sinc}(n + \frac{1}{2})] \delta(f - 2n/T)$ .

**8.5.17**

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} A^2 [(\sigma_x^2/2RC) \exp(-|\tau|/RC) + \mu_x^2] \cos(2\pi f_0 \tau);$$

$$\Phi_y(f) = (A^2/4) [\sigma_x^2 \{1 + [2\pi(f + f_0)RC]^2\}^{-1} + \sigma_x^2 \{1 + [2\pi(f - f_0)RC]^2\}^{-1} + \mu_x^2 [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]];$$

$$P_y = R_y(0) = A^2 \sigma_x^2 / (4RC) + A^2 \mu_x^2 / 2.$$

**8.5.18** Par (8.41) et (7.8):  $y(t) = x(t) \cos(2\pi f_0 t) - \dot{x}(t) \sin(2\pi f_0 t)$ ; par (8.103), (7.31) et (7.33):  $R_y(\tau) = R_x(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) + \dot{R}_x(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau)$  et par (7.35):  $\Phi_y(f) = \frac{1}{2} [\Phi_x^+(f+f_0) + \Phi_x^+(-f-f_0)]$ .

**8.5.19**  $y(t) = A^2 \text{ig}(\sqrt{2}t/T)$ ;  $Y(f) = (A^2 T/\sqrt{2}) \text{ig}(Tf/\sqrt{2})$ ;  $\hat{\Phi}_y(f) = (A^4 T^2/2) \text{ig}(Tf)$ .

**8.5.20**

$$Y_a(f) = \frac{A_1^2 + A_2^2}{2} X(f) + \frac{A_1^2}{4} [X(f+2f_1) + X(f-2f_1)] + \frac{A_2^2}{4} [X(f+2f_2) + X(f-2f_2)] + \frac{A_1 A_2}{2} [X(f+f_2-f_1) + X(f-f_2+f_1) + X(f+f_1+f_2) + X(f-f_1-f_2)].$$

avec

$$X(f) = \frac{A_1}{2} [\delta(f+f_1) + \delta(f-f_1)] + \frac{A_2}{2} [\delta(f+f_2) + \delta(f-f_2)]$$

$$Y_b(f) = \begin{cases} A^3(3B^2 - f^2) & \text{pour } |f| \leq B \\ A^3(9B^2/2 - 3Bf + f^2/2) & \text{pour } B \leq |f| \leq 3B \text{ et zéro ailleurs.} \end{cases}$$

**8.5.21**  $d_2 = c\hat{U}/(2b) = 8\%$ .

**8.5.22**  $d_a \cong 8,3 \cdot 10^{-4}$ ;  $d_b \cong 3,3 \cdot 10^{-3}$ .

**8.5.23**

$$\begin{aligned} \mu_{y1} &= b^3/32, \quad m_{y12} = b^6/448, \quad \sigma_{y1}^2 = 9b^6/7168; \\ \mu_{y2} &= 1 + b^2/12 + b^3/32, \quad m_{y22} = 1 + b^2/6 + b^3/16 + b^4/80 + b^5/96 + b^6/448, \\ \sigma_{y2}^2 &= b^4/180 + b^5/192 + 9b^6/7168. \end{aligned}$$

**8.5.25**  $R_y(\tau) = 2\pi^{-1} \{R_x(\tau) \arcsin [R_x(\tau)/R_x(0)] + [R_x^2(0) - R_x^2(\tau)]^{1/2}\}$ .

**8.5.27**  $R_y(\tau) = [1 + 3R_x(0)]^2 R_x(\tau) + 6R_x^3(\tau)$ .

**8.5.28**  $R_{y_1 y_2}(\tau) = 2\pi^{-1} \arcsin [R_{x_1 x_2}(\tau)/(\sigma_{x_1} \sigma_{x_2})]$ .

**8.5.29**  $R_{y_1 y_2}(\tau) = (2/\pi)^{1/2} A \sigma_{x_2}^{-1} R_{x_1 x_2}(\tau)$ .

## CHAPITRE 9

**9.5.1**  $y(t) = x(t) \cdot e(t) = \text{rep}_{T_e} \{\text{rect}(t/T_f)\}$  et  $|Y(f)| = |(T_f/T_e) \sum_n \text{sinc}(nT_f f_0) \cdot X(f - nf_0)|$ ;  $z(t) \approx 2\pi^{-1} \exp(-a|t|) \cdot \cos(2\pi f_0 t)$ .

**9.5.2**  $f_e = 6$  kHz introduit une distorsion par recouvrement spectral; une reconstitution idéale impliquerait une cadence d'échantillonnage  $f_e' = 8$  kHz au minimum.

9.5.3 Non, il faudrait  $f_e = 2/\Delta t$ .

9.5.4  $f_e = 2B$  avec  $G_{2i}(f) = \text{rect}(f/2B)$ ;  $f'_e \geq 5B$ .

9.5.5 Évaluez  $P_T$  en utilisant l'approximation  $|G(f)|^2 \approx (f/f_c)^{2n}$  pour  $f > f_c$ .

9.5.6  $f_e = 1272 f_c (n=1)$ ,  $f_e = 13,4 f_c (n=2)$ ,  $f_e = 5,7 f_c (n=3)$ ,  $f_e = 4,1 f_c (n=4)$ .

9.5.8  $\Phi_y(f) \approx 255 \sum_{i=1}^2 \text{sinc}^4(f_i \Delta) [\delta(f+f_i) + \delta(f-f_i)]$ .

9.5.9  $\mu_n = 2V$ ;  $\sigma_n^2 = 16V^2$ ;  $\Phi_n(f) = 4\delta(f) + 16 \cdot 10^{-3} \text{tri}(10^{-3}f)$ ;  $f_e = 2 \text{ kHz}$ ;  
 $f'_e = (kT)^{-1} = k^{-1} \text{ kHz}$  avec  $k = 1, 2, 3, \dots$

## CHAPITRE 10

10.6.1  $V = 20V$ ;  $\tau_c = 1,25 \mu\text{s}$ ;  $n = 8 \text{ bits}$ ;  $f_e \geq 25f_0 = 12,5 \text{ kHz} \geq 2f_0$ .

10.6.3 a)  $6n - 6 \text{ dB}$ ; b)  $6n - 3 \text{ dB}$ ; c)  $6n - 9,2 \text{ dB}$ .

10.6.4  $\xi_{\text{qdB}} \approx 42 \text{ dB}$ .

10.6.5  $\xi_{\text{qdB}} \approx 32,8 \text{ dB}$  pour  $n = 7$ .

10.6.6 Par dérivation en  $v = 0$ , selon (14.68), de  $\Pi_x(v)$  et  $\Pi_{xq}(v) = \Pi_x(v) \text{sinc}(\Delta v)$  avec  $\Pi_x(0) = 1$ ,  $d(\Pi \cdot F) d\alpha = F d\Pi/d\alpha + \Pi dF/d\alpha$  et  $d^2(\Pi \cdot F) d\alpha^2 = F d^2\Pi/d\alpha^2 + 2d\Pi/d\alpha \cdot dF/d\alpha + \Pi d^2F/d\alpha^2$  où  $F(\alpha) = \text{sinc}(\alpha) = 1 - (\pi\alpha)^2/3! + \dots$  par (1.59).

## CHAPITRE 11

11.6.1  $\eta_m = 20\%$ ;  $\eta_m = 50\%$ ;  $\eta_m = 20\%$ .

11.6.2  $\xi_a/\xi_x = 2m^2/(2 + m^2)$ .

11.6.4

- a)  $\tilde{r}(t) = \frac{1}{2} \hat{U}_p \exp(j2\pi f_m t)$ ,  $s(t) = (\hat{U}_p/2) \cos[2\pi(f_p + f_m)t + \alpha_p]$ ,  
 $\tilde{\Phi}_s(f) = (\hat{U}_p^2/16) [\delta(f + f_p + f_m) + \delta(f - f_p - f_m)]$ ;  
 b)  $\tilde{r}(t) = \frac{1}{2} \hat{U}_p \exp(-j2\pi f_m t)$ ,  $s(t) = (\hat{U}_p/2) \cos[2\pi(f_p - f_m)t + \alpha_p]$ ,  
 $\tilde{\Phi}_s(f) = (\hat{U}_p^2/16) [\delta(f + f_p - f_m) + \delta(f - f_p + f_m)]$ .

11.6.5 AM-SSB avec bande latérale supérieure.

11.6.6  $\tilde{r}(t) = m_1(t) + jm_2(t)$ .

11.6.7  $\hat{U}_p \gg \sigma_m = \sqrt{P_m}$ .

11.6.8  $S(f) = (\hat{U}_p/2) \{M_0(f+f_p)[1 - H(f+f_p) \operatorname{sgn}(f+f_p)] + M_0(f-f_p) \cdot [1 + H(f-f_p) \operatorname{sgn}(f-f_p)]\}$  où  $H(f)$  est la fonction de réponse fréquentielle d'un filtre passe-haut (fig. 11.44).

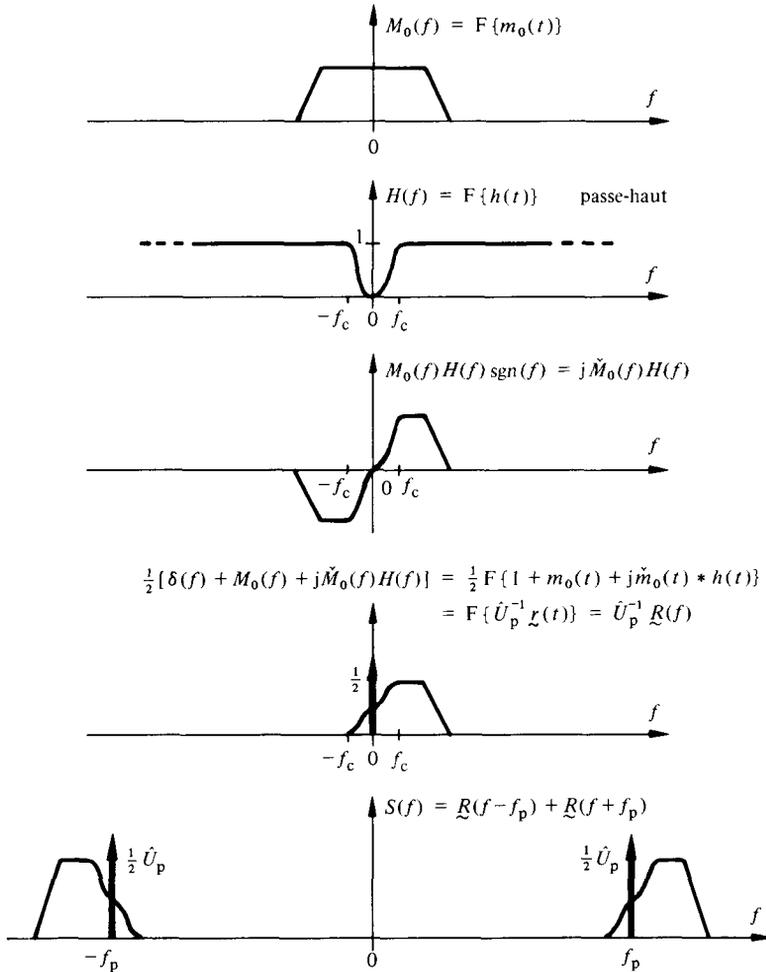


Fig. 11.44

11.6.9 Utiliser la figure 15.2 pour  $\delta = 10$  et la figure 5.4 pour  $A = \delta f_m$ .

11.6.10  $\Phi_s(f) \approx \hat{U}_p^2 (8\nu\hat{m})^{-1} \{ \operatorname{rect} [(f+f_p)(2\nu\hat{m})^{-1}] + \operatorname{rect} [(f-f_p)(2\nu\hat{m})^{-1}] \}$ .

11.6.12

$$s(t) = \frac{1}{2} [m_0(t) + 1] \hat{U}_p \cos(2\pi f_1 t + \alpha_1) - \frac{1}{2} [m_0(t) - 1] \hat{U}_p \cos(2\pi f_2 t + \alpha_2);$$

$$\Phi_s(f) = (\hat{U}_p^2/16) [\Phi_{m0}(f+f_1) + \Phi_{m0}(f-f_1) + \delta(f+f_1) + \delta(f-f_1) + \Phi_{m0}(f+f_2) + \Phi_{m0}(f-f_2) + \delta(f+f_2) + \delta(f-f_2)] \text{ avec, par (5.132),}$$

$$\Phi_{m0}(f) = T \operatorname{sinc}^2(Tf).$$

**11.6.13** Situation analogue à celle de l'exemple 5.2.7 avec enveloppe complexe  $\underline{r}(t) = \hat{U}_p \exp [jm_o(t)\pi/2]$  où  $m_o(t)$  prend, pendant chaque intervalle de durée  $T$ , l'un des états indépendants 0, 1, 2 ou 3:  $\Phi_{\underline{r}}(f) = \hat{U}_p^2 T \text{sinc}^2(Tf)$ ;  $B_u \approx 2/T$ .

**11.6.14**  $\Phi_m(f) = \Phi_{m_d+m_g}(f) + \frac{1}{4} [\delta(f+f_0) + \delta(f-f_0)] + \frac{1}{4} [\Phi_{m_d-m_g}(f+2f_0) + \Phi_{m_d-m_g}(f-2f_0)]$ .

## CHAPITRE 12

**12.5.1** Par (4.55), (4.26), (4.78), (4.117), (4.57) et (7.144).

**12.5.2**  $\xi \approx 1600$  (32 dB); pour un analyseur à balayage: résolution  $B_{\text{eq}} = 10$  kHz, durée d'intégration  $T_0 = 0,16$  s, durée de balayage  $T_b = 80$  s. Pour un analyseur multi-canal à banc de filtres:  $B_{\text{eq}} = 10$  kHz,  $N = 500$  canaux,  $T_0 = 0,16$  s. Pour un analyseur numérique:  $B_{\text{eq}} = 10$  kHz,  $f_e = 10$  MHz,  $N \geq 500$ ,  $T = 100 \mu\text{s}$ ,  $K = 1600$ ,  $T_0 = 0,16$  s.

**12.5.3** En technique analogique, c'est la puissance  $P_x(f_0, B_{\text{eq}}) \cong \Phi^+(f_0) B_{\text{eq}}$  ou la valeur efficace correspondante mesurée sur une largeur de bande  $B_{\text{eq}}$  que l'on affiche; le niveau dépend donc de  $B_{\text{eq}}$  dans le cas d'un spectre continu, mais il est indépendant de  $B_{\text{eq}}$  dans le cas d'un spectre de raies, car la puissance de chaque composante est concentrée à une fréquence discrète.

En technique numérique, le signal analysé est le produit du signal observé par une fenêtre  $u(t)$  de durée  $T$ : le périodogramme calculé est  $\tilde{\Phi}_x(f) = T^{-1} \Phi_x(f) * \tilde{\Phi}_u(f)$ , selon (12.3) et (12.4), où  $\tilde{\Phi}_u(f)$  est proportionnelle à  $T^2$  et son intégrale à  $T$ ; cette convolution avec une densité spectrale continue redonne approximativement  $\Phi_x(f)$ , indépendamment du choix de  $T$ . Par contre, en tenant compte de (1.48), le résultat est proportionnel à  $T$  en cas de spectre de raies.

## CHAPITRE 13

**13.5.1** Soit  $x_i = at_i + b + n_i$ :  $p(x|a, b) = \prod_i p(n_i = x_i - at_i - b)$  avec  $p(n)$  gaussien à valeur moyenne nulle. En résolvant  $\partial \ln p(x|a, b) / \partial a = 0$  et  $\partial \ln p(x|a, b) / \partial b = 0$ :  $\tilde{a}_{\text{mv}} = (\sum_i x_i t_i - m\bar{x}\bar{t}) / (\sum_i t_i^2 - m\bar{t}^2)$  et  $\tilde{b}_{\text{mv}} = \bar{x} - a\bar{t}$  avec  $\bar{x} = m^{-1} \sum_i^m x_i$  et  $\bar{t} = m^{-1} \sum_i^m t_i$ .

**13.5.2**  $\tilde{a}_{\text{mv}} = N^{-1} \sum_i^N x_i^2$ ;  $\tilde{a}_{\text{mv}} = T^{-1} \int_0^T x^2(t) dt$ .

**13.5.3**  $p(a|x) = p(x|a)p(a)/p(x)$  avec  $p(x) = \lambda/(x+\lambda)^2$  donné par la condition  $\int_0^\infty p(a|x) da = 1$ .

**13.5.4**  $\tilde{a}_{\text{mv}}$  est la solution de l'équation

$$\int_0^T x(t) \frac{\partial s(t-a)}{\partial a} dt \approx 0$$

ce qui correspond à la corrélation de l'observation  $x(t)$  avec la dérivée du signal connu.

13.5.5  $E[(a - \tilde{a}_0)^2] = R_y(0) - R_y^2(T)/R_y(0)$ .

13.5.6  $\tilde{a}_{00} = (N + a^2/\sigma_n^2)^{-1} \sum_i^N z_i$  et  $\sigma_y^2 = \sigma_n^2/(N + \sigma_n^2/a^2)$ .

13.5.7  $\tilde{a}_{00} = \tilde{x}(t) = g_1 x(0) + g_2 x(T)$  avec  $g_1 = [R_x(t)R_x(0) - R_x(T-t)R_x(T)]/[R_x^2(0) - R_x^2(T)]$  et  $g_2 = [R_x(T-t)R_x(0) - R_x(t)R_x(T)]/[R_x^2(0) - R_x^2(T)]$ .

13.5.8 Par (13.75) avec ici  $\Phi_{xa}(f) = \Phi_s(f) = |\Psi_x(f)|^2 - \Phi_n(f)$ ; factoriser  $\Phi_x(f) = |\Psi_x(f)|^2$  avec la condition  $\Phi_n(f) = \eta/2$ .

13.5.9  $G_0(f) = A [B + j2\pi f]^{-1}$  avec  $A = \alpha [(\eta/2)(\alpha + \eta/2)^{1/2} + \beta]^{-1}$  et  $B = (2\alpha/\eta + \beta^2)^{1/2}$ .

13.5.10 Par (13.80) avec  $C_x(\tau) = (A^2/4) \exp(-2\lambda|\tau|)$ :  $\sigma_{\tilde{x}}^2 = (A^2/8) [\exp(-2\lambda T) + 2\lambda T - 1]/(\lambda T)^2$ .

13.5.11 Par (13.80):  $\sigma_{\tilde{x}}^2 = (BT)^{-1} - (BT)^{-2}/3 \approx (BT)^{-1}$  pour  $T \gg B^{-1}$ ;  $T_{\min} \approx 1$  s.

13.5.12  $C_x(\tau) = 0$  pour  $T_e \geq B^{-1}$  et  $N = 1000$  selon (13.82) d'où  $T = NT_e \geq 1$  s; pour  $T_e = (2B)^{-1} = 0,5$  ms, par (13.81):  $N_{\min} = 2000$  et  $T = NT_e = 1$  s.

13.5.14 Par analogie avec (13.110) et (13.111).

13.5.15  $\varphi_{xu}(\tau) = T^{-1} g(-\tau) * s(\tau)$ .

13.5.16  $\xi_1 = 10^{-3}$  (-30 dB);  $\xi_2 = 3,13$  (5 dB).

13.5.17 Pour  $N$  échantillons indépendants  $p_r(r|s_i) = \prod_{j=1}^N p_r(r_j|s_i)$  avec  $p_r(r_j|s_i)$  donnée par (7.57) et l'on tire de (13.126):  $\sum_j \ln I_0(r_j A/\sigma_n^2) \geq \frac{1}{2} A^2 \sigma_n^2$ : le schéma du détecteur optimum correspondant est celui de la figure 13.43.

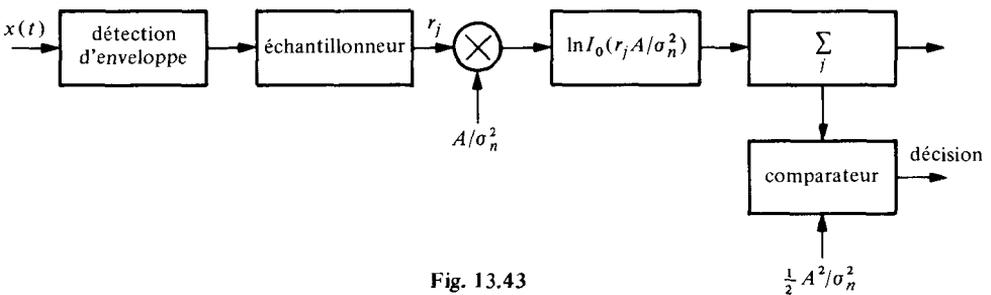


Fig. 13.43

13.5.18 De la table 15.8, on tire  $x_s = 1,65 \cdot \sigma_n$ .

13.5.19  $x_s = A/2 + (1/4) \ln(p_0/p_1) = 1,847$  V;  $p_e \approx 2 \cdot 10^{-2}$ .

13.5.20  $x_s \approx 13,9$  V;  $p_e = p_f = p_n \approx 10^{-6}$ .

13.5.21 Par (13.145):  $V = (-2\eta B \ln p_f)^{1/2} = 12,88 \text{ V}$  et  $p_d = Q(A/\sigma_n; V/\sigma_n) = Q(8; 6,44) \cong 0,95$ .

13.5.22  $V^2 = 14\sigma_n^2$ .

13.5.23 Voir figure 13.44.

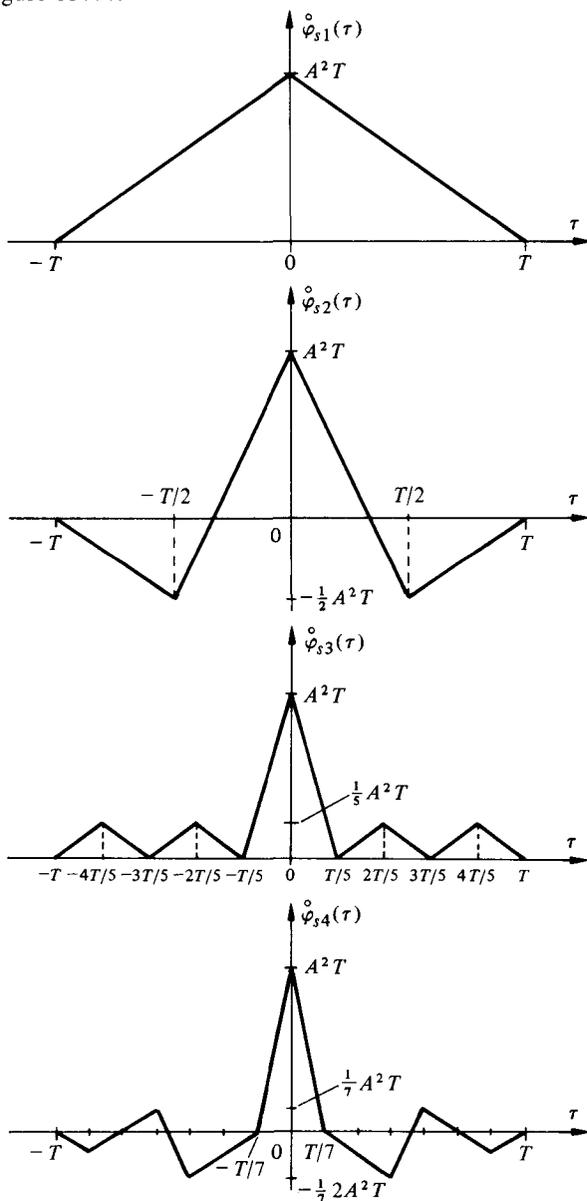


Fig. 13.44

13.5.24  $\xi(T)/\xi_{\text{opt}} = 0,89$ ;  $t_0 = \tau_0 + T/2$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.R. PIERCE, *Symbols, Signals and Noise: the Nature and Process of Communication*, Harper & Brothers, New York, 1961 (également publié en traduction française sous le titre *Symboles, signaux et bruit* chez Masson, Paris, 1966).
- [2] N. WIENER, Generalized Harmonic Analysis, *Acta Mathematica*, 55, 1930, pp. 117-258.
- [3] N. WIENER, *The Fourier Integral and Certain of its Applications*, Cambridge Press, New York, 1933.
- [4] A. Y. KHINTCHINE, Korrelationstheorie der Stationären Stockastischen Prozesse, *Math. Annalen*, 109, 1934, pp. 604-615.
- [5] C.E. SHANNON, The Mathematical Theory of Communication, *Bell Syst. Tech. J.*, 27, July 1948, pp. 379-423 and Oct. 1948, pp. 623-656.
- [6] C.E. SHANNON, Communication in the presence of noise, *Proc. IRE*, 37, Jan. 1949, pp. 10-21.
- [7] N. WIENER, *Cybernetics: Control and Communication in Animal and Machine*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., USA, 1948.
- [8] N. WIENER, *The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., USA, 1949.
- [9] K. KÜPFMÜLLER, *Die Systemtheorie der Elektrischen Nachrichtenübertragung*, Hirzel Verlag, Stuttgart, 1949.
- [10] D. GABOR, Theory of Communication, *J. Inst. Electr. Eng.*, 93, Part III, Nov. 1946, pp. 429-457.
- [11] P.M. WOODWARD, *Probability and Information Theory with Application to Radar*, Pergamon Press, Oxford, 1953 (1st ed.), 1964 (2nd ed.) Traduction française : Eyrolles, Paris, 1980.
- [12] A.N. KOLMOGOROV, Interpolation und Extrapolation von stationären Zufälligen Folgen, *Acad. Sci., URSS, Ser. Math.*, 5, 1941, pp. 3-14.
- [13] W.A. KOTELNIKOV, Über die Kanalkapazität des Athers und der Drahtverbindungen in der elektrischen Nachrichtentechnik, *Tag. Ber. d. I. Allunionskonf. Nach. Tech.*, Moscou, 1933.
- [14] S.O. RICE, Mathematical Analysis of Random Noise, *Bell Syst. Techn. J.*, 23, 1944, pp. 282-332 et 24, 1945, pp. 46-156.
- [15] S. GOLDMAN, *Frequency Analysis, Modulation and Noise*, McGraw-Hill, New York, 1948.
- [16] J.L. LAWSON, G.E. UHLENBECK, *Threshold Signals*, M.I.T. Rad. Lab. Serie, 24, McGraw-Hill, New York, 1950.
- [17] J. VILLE, Théorie et applications de la notion de signal analytique, *Câbles et transmissions*, 1, Jan. 1948, pp. 61-74.

- [18] A. BLANC-LAPIERRE, R. FORTET, *Théorie des fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1953.
- [19] L. BRILLOUIN, *La science et la théorie de l'information*, Masson, Paris, 1959.
- [20] J.M. WOZENCRAFT, I.M. JACOBS, *Principles of Communication Engineering*, John Wiley, New York, 1965.
- [21] Y.W. LEE, *Statistical Theory of Communication*, John Wiley, New York, 1960.
- [22] A. PAPOULIS, *The Fourier Integral and its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1962.
- [23] R. BRACEWELL, *The Fourier Transform and its Applications*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [24] A. PAPOULIS, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, New York, 1965 (1st ed.), 1984 (2nd ed.).
- [25] W.B. DAVENPORT, W.L. ROOT, *Introduction to the Random Signals and Noise*, McGraw-Hill, New York, 1958 (ré-édité par IEEE-Press, New York, 1987).
- [26] D. MIDDLETON, *Introduction to Statistical Communication Theory*, McGraw-Hill, New York, 1960.
- [27] R.S. BERKOWITZ (Editor), *Modern Radar, Analysis, Evaluation and System Design*, John Wiley, New York, 1965.
- [28] B. LEVINE, *Théorie des processus aléatoires et son application à la radio-technique*, Sovetskoe radio, Moscou, 1957, (traduit du russe).
- [29] E. HÜLSER, H. HOLZWARTH, *Theorie und Technik der Pulsmodulation*, Springer Verlag, Berlin, 1957.
- [30] J.S. BENDAT, *Principles and Applications of Random Noise Theory*, John Wiley New York, 1958.
- [31] R.B. BLACKMAN, J.W. TUKEY, *The Measurement of Power Spectra*, Dover, New York, 1958.
- [32] M. SCHWARTZ, *Information Transmission, Modulation and Noise*, McGraw-Hill, New York, 1959 (1st ed.), 1979 (2nd ed.).
- [33] S.J. MASON, H.J. ZIMMERMANN, *Electronic Circuits, Signals and Systems*, John Wiley, New York, 1960.
- [34] C.W. HELSTROM, *Statistical Theory of Signal Detection*, Pergamon Press, Oxford, 1960 (1st ed.), 1968 (2nd ed.).
- [35] J.C. HANDCOCK, *An Introduction to the Principle of Communication Theory*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [36] F.M. REZA, *An Introduction to Information Theory*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [37] L.A. WAINSTEIN, V.D. ZUBAKOV, *Extraction of Signals from Noise*, Prentice-Hall, London, 1962 (traduction de l'édition russe publiée par Sovetskoe Radio à Moscou en 1960).
- [38] F.H. LANGE, *Korrelationselektronik*, Verlag Technik, Berlin, 1962.
- [39] W.W. HARMAN, *Principles of the Statistical Theory of Communication*, McGraw-Hill, New York, 1963.
- [40] P.F. PANTER, *Modulation, Noise and Spectral Analysis*, McGraw-Hill, 1965.
- [41] H.E. ROWE, *Signals and Noise in Communication Systems*, Van Nostrand, Princeton, 1965.
- [42] B.P. LATHI, *Signals, Systems and Communication*, John Wiley, New York, 1965.

- [43] P.A. LYNN, *The Analysis and Processing of Signals*, Macmillan, London, 1982 (2nd ed.).
- [44] B. GOLD, C. RADER, *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill, New York, 1969.
- [45] A.V. OPPENHEIM, R.W. SHAFER, *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [46] L.R. RABINER, B. GOLD, *Theory and Application of Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [47] R. BOITE, H. LEICH, *Les filtres numériques*, Masson, Paris, 1980.
- [48] M. BELLANGER, *Traitement numérique du signal*, Masson, Paris, 1980.
- [49] L.E. FRANKS, *Signal Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [50] B. PICINBONO, *Éléments de théorie du signal*, Dunod Université, Paris, 1977.
- [51] R.G. GALLAGER, *Information Theory and Reliable Communication*, John Wiley, New York, 1968.
- [52] G. CULLMANN, *Codes détecteurs et correcteurs d'erreurs*, Dunod, Paris, 1967.
- [53] A. SPĂTARU, *Théorie de la transmission de l'information*, Masson, 1970-1973.
- [54] S. LIN, *An Introduction to Error-correcting Codes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1970.
- [55] H. STARK, F.B. TUTEUR, *Modern Electrical Communications, Theory and Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1979.
- [56] H.D. LUEKE, *Signal-übertragung*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [57] E. ROUBINE, *Introduction à la théorie de la communication*, (Tome I: *Signaux non aléatoires*, Tome II: *Signaux aléatoires*), Masson, Paris, 1970.
- [58] J. BASS, *Cours de mathématiques*, Masson, Paris, 1968-1971, (3 volumes).
- [59] A.J. VITERBI, J.K. OMURA, *Principles of Digital Communication and Coding*, McGraw-Hill, New York, 1979.
- [60] C. CARDOT, Définition analytique simple des fonctions de Walsh et application à la détermination exacte de leurs propriétés spectrales, *Annales Télécomm.*, 72, Jan-Feb. 1972, pp. 31-47.
- [61] H.F. HARMUTH, *Transmission of Information by Orthogonal Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [62] K.G. BEAUCHAMP, *Walsh Functions and their Applications*, Academic Press, London, 1975.
- [63] N. AHMED, K.R. RAO, *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [64] J. STERN, J. DE BARBEYRAC, R. POGGI, *Méthodes pratiques d'études des fonctions aléatoires*, Dunod, Paris, 1967.
- [65] J.S. BENDAT, A.G. PIERSOL, *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*, Wiley-Interscience, New York, 1971.
- [66] J. DUPRAZ, *Théorie de la communication (signaux, bruits et modulations)*, Eyrolles, Paris, 1973.
- [67] J. MAX (et collaborateurs), *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, Masson, Paris, 1981 (3e édition, 2 volumes).
- [68] H.J. LARSON, B.O. SHUBERT, *Probabilistic Models in Engineering Sciences*, Vol. I & II, John Wiley, New York, 1979.
- [69] A. BLANC-LAPIERRE, P. PICINBONO, *Fonctions aléatoires*, Masson, Paris, 1981.
- [70] P. BECKMANN, *Probability in Communication Engineering*, Harcourt, Brace & World, New York, 1967.

- [71] G. CULLMANN, *Initiation aux chaînes de Markov – Méthodes et applications*, Masson, Paris, 1975.
- [72] A.V. BALAKRISHNAN *et al.*, *Communication Theory*, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [73] W.C. LINDSAY, M.K. SIMON, *Telecommunication Systems Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [74] G.A. KORN, *Random-Process Simulation and Measurements*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [75] S.W. GOLOMB (ed.), *Digital Communications with Space Applications*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1964.
- [76] S.W. GOLOMB, *Shift Register Sequences*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1967.
- [77] *Reference Data for Radio Engineers*, Howard W. Sams & Co., New York, 1975, (6th ed.).
- [78] F.N.H. ROBINSON, *Noise and fluctuations in electronic devices and circuits*, Clarendon Press, Oxford, 1974.
- [79] H. URKOWITZ, *Signal Theory and Random Processes*, Artech House, Dedham, 1983.
- [80] A. VAN DER ZIEL, Noise in solid-state devices and lasers, *Proc. IEEE*, 58, Aug. 1970, pp. 1178-1206, (reproduced in [86]).
- [81] M.S. KESHNER,  $1/f$  noise, *Proc. IEEE*, 70, March 1982, pp. 212-218.
- [82] A. VAN DER ZIEL, *Noise Measurements*, John Wiley, New York, 1976.
- [83] C.D. MOTCHENBACHER, F. FITCHEN, *Low Noise Electronic Design*, John Wiley, New York, 1973.
- [84] Y. NETZER, The Design of low-noise Amplifiers, *Proc. IEEE*, 69, June 1981, pp. 728-741.
- [85] M.S. GUPIA, Applications of Electrical Noise, *Proc. IEEE*, 63, July 1975, pp. 996-1010, (reproduced in [86]).
- [86] M.S. GUPIA, (ed.), *Electrical Noise: Fundamentals & Sources*, IEEE Press, New York, 1977.
- [87] S.O. RICE, Envelop of narrow-band signals, *Proc. IEEE*, 70, July 1982, pp. 692-699.
- [88] M. ABRAMOWITZ, I.A. STEGUN, (ed.), *Handbook of Mathematical Functions*, Applied Mathematics Series no 55, National Bureau of Standards, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C. USA, 1964.
- [89] A. PAPOULIS, Random modulation: a review, *IEEE Trans. ASSP*, 31, February 1983, pp. 96-105.
- [90] W.S. BURDIC, *Radar Signal Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1968.
- [91] R. DEUTSCH, *System Analysis Techniques*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- [92] M. CARPENTIER, *Radars, Bases modernes*, Masson, Paris, 1981 (4e éd.).
- [93] B. ESCUDIE, Représentation en temps et fréquence des signaux d'énergie finie : analyse et observation des signaux, *Annales Télécomm.*, 35, mars-avril 1979, pp. 101-111.
- [94] I.S. GRADSHTEYN, I.M. RYZHIK, *Table of integrals, series and products*, Academic Press, New York, 1965.
- [95] A.F. ARBEL, *Analog signal processing and instrumentation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

- [96] U. TIETZE, CH. SCHENK, *Advanced Electronic Circuits*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [97] S.K. MITRA, *An Introduction to Digital and Analog Integrated Circuits and Applications*, Harper & Row, New York, 1980.
- [98] A.C. SALAZAR (ed.), *Digital Signal Computers and Processors*, IEEE Press, New York, 1977.
- [99] F. KÜHNE, Modulationssysteme mit Sinusträger, *Archiv f. Electr. Übertrag.*, 24, (1970), pp. 139-150 et 25 (1971), pp. 117-128.
- [100] R. DEUTSCH, *Nonlinear Transformations of Random Processes*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [101] A.H. HADDAD (ed.), *Non Linear Systems: Processing of Random Signals – Classical Analysis*, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, 1975.
- [102] W.J. RUGH, *Nonlinear System Theory*, The John Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
- [103] D. H. SHEINGOLD (ed.), *Analog-Digital Conversion Handbook*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986.
- [104] E.D. SUNDE, *Communication Systems Engineering Theory*, John Wiley, New York, 1969.
- [105] S.A. TRETTER, *Introduction to Discrete-Time Signal Processing*, John Wiley, New York, 1976.
- [106] J.A. BETTS, *Signal Processing, Modulation and Noise*, The English University Press, London, 1970.
- [107] H.J. NUSSBAUMER, *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.
- [108] K. ARBENZ, A. WOLHAUSER, *Analyse numérique*, Presses polytechniques romandes, Lausanne, 1980.
- [109] J.R. RAGAZZINI, G.F. FRANKLIN, *Sampled-Data Control Systems*, McGraw-Hill, New York, 1958.
- [110] B. LORIFERNE, *La conversion analogique-numérique/numérique-analogique*, Eyrolles, Paris, 1976.
- [111] B.M. GORDON, Linear Electronic Analog/Digital Conversion Architectures, their Origins, Parameters, Limitations and Applications, *IEEE Trans. Circuits & Systems*, CAS-25, 7, July 1978, pp. 391-418.
- [112] J. MAX, Quantizing for minimum distortion, *IRE Trans. Inform. Theory*, IT-6, March 1960, pp. 7-12.
- [113] A.B. SRIPAD, D.L. SNYDER, A necessary and sufficient condition for quantization errors to be uniform and white, *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Proc.*, ASSP-25, Oct. 1977, pp. 442-448.
- [114] F. CASTANIE, Signal processing by random reference quantizing, *Signal Processing*, 1, January 1979, pp. 27-43.
- [115] W.R. BENNETT, J.R. DAVEY, *Data Transmission*, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [116] P.M. CHIRLIAN, *Analysis and Design of Integrated Electronic Circuits*, Harper & Row, New York, 1981.
- [117] F.M. GARDNER, *Phaselock Techniques*, John Wiley, New York, 1979.
- [118] A.J. VITERBI, *Principles of Coherent Communication*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [119] D.G. CHILDERS (ed.), *Modern Spectrum Analysis*, IEEE Press, New York, 1978.

- [120] S.M. KAY, S.L. MARPLE, Spectrum analysis – A modern perspective, *Proc. IEEE*, 69, 11, Nov. 1981, pp. 1380-1419.
- [121] B. BAJIĆ, Distribution of results of analysis by mean of spectrum analyser with ideal bandpass filter and true integrator, *Signal Processing*, 5, 1983, pp. 47-60.
- [122] G.M. JENKINS, D.G. WATTS, *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day, San Francisco, 1968.
- [123] R.K. OTNES, L. ENOCHSON, *Digital Time Series Analysis*, John Wiley, New York, 1972.
- [124] R.W. BRODERSEN, C.R. HEWES, D.D. BUSS, A 500-stages CCD transversal filter for spectral analysis, *IEEE J. Solid-State Circuits*, SC-11, 1, February 1976, pp. 75-84.
- [125] J.D. MAINES, E.G.S. PAIGE, Surface-acoustic-wave devices for signal processing applications, *Proc. IEEE*, 64, 5, May 1976, pp. 639-651.
- [126] B.V. MARKEVITCH, Spectral analysis: a comparison of various methods, *Proc. Int. Specialist Seminar on the Impact of New Technologies in Signal Processing*, Aviemore, Scotland, 20-24 September 1976, IEE Conf. Publication No. 144, pp. 96-103.
- [127] W.T. CATHEY, *Optical Information Processing and Holography*, John Wiley, New York, 1974.
- [128] J.L. MESA, D.L. COHN, *Decision and Estimation Theory*, McGraw-Hill, Tokyo, 1978.
- [129] M.D. SRINATH, P.K. RAJASEKARAN, *An Introduction to Statistical Signal Processing with Applications*, John Wiley, New York, 1979.
- [130] H.L. VAN TREES, *Detection, Estimation and Modulation Theory*, John Wiley, New York, 1968-1971, (3 vol.).
- [131] A.D. WAHLEN, *Detection of Signals in Noise*, Academic Press, New York, 1971.
- [132] P.-Y. ARQUÈS, *Décisions en traitement du signal*, Masson, Paris, 1979.
- [133] J. LIFERMANN, *Les principes du traitement statistique du signal*, Masson, Paris, 1981.
- [134] H. CRAMER, *Mathematical Methods of Statistics*, Princeton University Press, Princeton, 1946.
- [135] H. SCHWARTZ, L. SHAW, *Signal Processing: Discrete Spectral Analysis, Detection and Estimation*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [136] B.D.O. ANDERSON, J.B. MOORE, *Optimal Filtering*, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, 1979.
- [137] J.S. BENDAT, A.G. PIERSON, *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*, John Wiley, New York, 1980.
- [138] Correlation in Action, *Hewlett-Packard Journal*, Nov. 1969.
- [139] R.C. DIXON, *Spread Spectrum Systems*, John Wiley, New York, 1976.
- [140] C.H. CHEN (ed.), *Digital Waveform Processing and Recognition*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida, 1982.
- [141] L.E. BRENNAN, I.S. REED, A recursive method of computing the Q-function, *IEEE Trans. Inf. Theory*, IT-11, April 1965, pp. 312-313.
- [142] D.V. SARAVATE, M.B. PURSLEY, Crosscorrelation properties of pseudorandom and related sequences, *Proc. IEEE*, 68, 5, May 1980, pp. 593-619.
- [143] T.H. BIRDSALL, On understanding the matched filter in the frequency domain, *IEEE Trans. on Education*, E-19, Nov. 1976, pp. 168-169.

- [144] K. FUKUNAGA, *Introduction to Statistical Pattern Recognition*, Academic Press, New York, 1972.
- [145] R.O. DUDA, P.E. HART, *Pattern Classification and Scene Analysis*, John Wiley, New York, 1973.
- [146] J.R. ULLMAN, *Pattern Recognition Techniques*, Butterworth & Co., London, 1973.
- [147] J.T. TOU, R.C. GONZALES, *Pattern Recognition Principles*, Addison-Wesley, Reading, 1974.
- [148] R.C. GONZALES, M.G. THOMASON, *Syntactic Pattern Recognition: An Introduction*, Addison-Wesley, Reading, 1978.
- [149] W.A. GARDNER, Rice's Representation for Cyclostationary Processes, *IEEE Trans. on Communications*, COM-35, 1, Jan. 1987, pp. 74-78.
- [150] H. NYQUIST, Thermal agitation of electrical charges in conductors, *Physical Rev.*, vol. 32, pp. 110-113, 1928.
- [151] J. CANDY, G. TEMES, Oversampling methods for A/D and D/A conversion, in *Oversampling Delta-Sigma Data Converters*, pp. 1-25, IEEE Press, New York, 1992.



## INDEX ANALYTIQUE

Les références sont celles des pages

- Aire effective d'ambiguïté, 216
- Alias effect, 281
- Ambiguïté (fonction d'...), 214
- Amplificateur synchrone, 439
- Analyse
  - cepstrale, 407
  - spectrale, 371
- Analyseur
  - à banc de filtres, 387
  - d'onde, 371
  - de signal, 55, 227
  - de spectre, 371
  - de spectre à balayage, 392
  - de spectre optique, 392
  - à transformateur de Fourier numérique, 389
- Approximation
  - de Butterworth, 285
  - optimale au sens des moindres carrés, 49
  - (erreur d'...), 53
  - (qualité de l'...), 51
- Armstrong (méthode d'...), 352
- Autocorrélation
  - (fonction d'...), 80
  - (propriétés), 81
- Bande passante, 242
- Base, 41
- BCD, 325
- Bessel (fonction de ...), 203, 355, 502
- Biais
  - d'une estimation, 415
  - de mesure, 378
- Biphasé (mode), 139
- Bloc fonctionnel, 228
- Boltzmann (constante de ...), 173
- Boxcar integrator, 430
- Bruit, 3
  - blanc, 142
  - blanc à bande limitée, 143
  - d'avalanche, 184
  - d'émission secondaire, 185
  - de basse fréquence, 183
  - de fond, 171
  - de grenaille, 179
  - de quantification, 315
  - de répartition, 184
  - de scintillation, 183
  - en  $1/f$ , 183
  - induit, 184
  - thermique, 173
  - thermique d'une impédance, 176
- Butterworth (filtre de ...), 285
- Cadence d'échantillonnage, 276
- Caractéristiques opérationnelles d'un récepteur, 453
- Carson (règle empirique de ...), 356
- Cepstre d'un signal, 407
- Chaîne de Markov, 163
- Changement de fréquence, 11, 365
- Chirp-z transform, 391
- Classification
  - automatique, 459
  - des signaux, 27
  - énergétique, 33
  - morphologique, 35
  - phénoménologique, 28
  - spectrale, 36
- Clustering, 459
- Coalescence, 459
- Codage, 5, 305
  - binaire, 324
- Code
  - binaire décalé, 326

- binaire pur, 325
- binaire replié, 326
- binaire symétrique, 326
- complément à 1, 327
- complément à 2, 326
- de Gray, 325
- Coefficient
  - d'intercorrélacion, 145
  - de corrélation, 127, 477
- Composante
  - en phase, 209
  - en quadrature, 209
- Constante
  - de Boltzmann, 173
  - de Planck, 173
- Conversion
  - analogique-numérique, 305
  - numérique-analogique, 309
- Convertisseur
  - à approximations successives, 308
  - parallèle, 308
- Convolution, 11
  - à deux dimensions, 13
  - complexe, 73
  - (simulation indirecte), 235
- Corrélateur, 228
  - simplifié, 434
- Corrélation
  - croisée, 81
  - de signaux à énergie finie, 80
  - de signaux à puissance moyenne finie, 91
  - mutuelle, 81
  - statistique, 476
  - (dérivée de la fonction de ...), 88
  - (simulation indirecte), 235
- Coût d'une erreur, 413
- Coût moyen (coefficient de ...), 447
- Covariance, 476
- Cramer-Rao (inégalité de ...), 416
- Critère
  - de Bayes, 444
  - de décision, 444
  - de la pondération uniforme, 414
  - de la valeur absolue, 413
  - de Neyman-Pearson, 450
  - quadratique, 413
- Crosscorrelation, 81
- Décibels, 3
- Décision
  - à hypothèses multiples, 442
  - binaire, 441, 444
  - optimale, 309
- Déconvolution, 234
- Démodulation, 334
- Densité
  - de probabilité, 114, 467
  - conjointe, 115
  - conjointe multidimensionnelle gaussienne, 483
- Densité interspectrale
  - d'énergie, 85
  - de puissance, 93, 145
- Densité spectrale
  - croisée, 86
  - d'énergie, 82
  - d'interaction, 86
  - de puissance, 92
  - de puissance mutuelle, 93
  - de puissance d'un processus aléatoire, 133
  - de raies, 71
  - mutuelle, 85, 145
- Déphaseur pur, 196
- Dérivateur, 249
- Description mathématique d'un signal, 3
- Détecteur de signe, 265
- Détection, 10, 409
  - d'enveloppe, 345
  - de signaux par intercorrélacion, 435
  - de signaux périodiques par auto-corrélacion, 435
  - optimale d'un signal connu, 453
  - par accumulation, 428
  - par intégration, 428
  - par moyennage, 428
  - synchrone, 343
- Développement
  - de Karhunen-Loeve, 132
  - orthogonal, 52
- Déviacion
  - de fréquence, 349
  - de phase, 349
  - standard, 476
- DFT, 290
- Dimension d'un espace vectoriel, 41
- Dirac
  - (impulsion de ...), 19
  - (suite périodique d'impulsions de ...), 96

- Dispersion
  - spectrale, 218
  - temporelle, 218
- Distance, 42
  - de Hamming, 44
  - de Mahalanobis, 443
  - de signaux, 43
  - en moyenne quadratique, 43
  - euclidienne de deux signaux, 43
- Distances usuelles, 442
- Distorsion
  - d'affaiblissement, 246
  - d'amplitude, 246
  - d'intermodulation, 261
  - de phase, 246
  - de quantification, 315
  - due au recouvrement spectral, 287
  - harmonique, 261
  - linéaire, 246
  - non linéaire, 261
- Distribution, 466
  - binomiale, 479
  - de Poisson, 479
  - de Rayleigh, 125, 484
  - de Rice-Nakagami, 204
  - delta, 19
  - en  $\chi^2$ , 484
  - exponentielle, 481
  - gaussienne, 482
  - laplacienne, 481
  - normale, 482
  - uniforme, 481
- Dither quantization, 323
- Double Side Band Suppressed Carrier Modulation (DSBSC), 339
- Durée
  - d'acquisition, 314
  - d'observation, 374
  - d'ouverture, 314
  - de conversion, 310
  - de corrélation, 224
  - effective, 223
  - efficace, 216
  - utile, 219
- Ecart-type, 24, 114, 475
- Echantillonnage, 273
  - à pas variable, 273
  - avec maintien, 279
  - avec moyennage, 280
  - périodique, 273
  - idéalisé, 276
  - réel, 275
  - régulier, 273
  - (théorèmes d'...), 281
- Echantillonneur idéal, 277
  - bloqueur, 313
- Echelon unité, 16, 19
- Effet
  - de grenaille, 179
  - de repliement, 281
- Energie
  - (normalisée), 34
  - totale, 34
- Ensemble complet (total), 54
- Enveloppe, 201
  - complexe, 208
  - spectrale, 97
- Equation
  - de Wiener-Hopf, 426
  - minimax, 450
  - de vraisemblance, 413
- Ergodisme, 116
- Erreur
  - d'approximation, 53
  - d'estimation, 433
  - de deuxième espèce, 447
  - de première espèce, 447
  - d'ouverture, 314
  - quadratique moyenne, 49, 50, 414
  - d'acquisition, 330
- Espace
  - complet, 42
  - d'observation, 442
  - de Hilbert, 47
  - de signaux, 41, 42
  - des caractéristiques, 442
  - des épreuves, 465
  - fonctionnel, 42
  - $L^2$ , 46
  - vectoriel, 41, 42
- Espérance mathématique, 474
- Estimateur, 411
- Estimation, 409
  - à erreur quadratique moyenne minimum, 414
  - à vraisemblance maximale, 419
  - au sens du maximum de vraisemblance, 412
  - consistante, 416
  - du maximum a posteriori, 415

- efficace, 416
- linéaire, 422
- Euler (formule d'...), 30
- Événement, 442, 465
- Événements indépendants, 466
- Existence d'une transformée de
  - Fourier, 70
- Expérience statistique, 465
- Extrapolateur d'ordre  $m$ , 292
  
- Facteur
  - d'excès de bruit, 186
  - de bruit moyen, 185
  - de bruit spectral, 187
- Fast Fourier transform, 291
- Fausse
  - décision négative, 447
  - décision positive, 447
- Fenêtre
  - de Hamming, 377
  - de Hamming généralisée, 377
  - de Hanning, 377
- FFT, 291, 390
- FFT processor, 371
- Filtrage, 10
  - en peigne, 439
  - linéaire optimum, 424
  - optimal, 309
- Filtre, 43
  - adapté, 247, 453
  - adapté en présence de bruit coloré, 456
  - antirepliement, 285
  - de Butterworth, 285
  - de garde, 285
  - de Kalman, 426
  - de lissage, 293
  - de Tchebycheff, 287
  - de Wiener, 425
  - elliptique, 287
  - idéal, 242
  - sous-optimum, 457
- Flash converters, 308
- Flicker noise, 183
- FM, 349
- Fonction, 5
  - caractéristique, 466, 477
  - d'ambiguïté, 214
  - d'autocorrélation, 80
  - d'autocorrélation de signaux à
    - puissance moyenne finie, 91
  - d'autocorrélation statistique, 115
  - d'autocorrélation normalisée, 127
  - d'autocorrélation d'un processus aléatoire, 125
  - d'autocovariance, 115
  - d'autocovariance d'un processus aléatoire, 126
  - d'échantillonnage, 22
  - d'erreur, 483
  - d'intercorrélation, 80
  - d'intercorrélolation de signaux à
    - puissance moyenne finie, 91
  - d'intercorrélolation statistique, 144
  - d'intercovariance, 145
  - d'intercovariance normalisée, 145
  - de Bessel de première espèce, 502
  - de Bessel modifiée, 203
  - de cohérence, 146
  - de corrélation de signaux périodiques, 99
  - de Marcum, 451, 508
  - de perte, 413
  - de Rademacher, 59
  - de répartition, 114, 466
  - de répartition conjointe, 115, 469
  - de réponse fréquentielle, 13, 232
  - de réponse fréquentielle bidimensionnelle, 13
  - de transfert, 13, 232
  - de vraisemblance, 412
  - de Walsh, 59
  - discriminante, 16
  - échelon unité, 16, 19
  - porte, 16
  - rampe, 16
  - rectangulaire normalisée, 16
  - saut unité, 16, 19
  - signe, 15
  - triangulaire normalisée, 18
- Fonctionnelle, 5
- Fonctions
  - orthogonales, 47, 65
  - orthonormales, 53
- Formule d'Euler, 30
- Fourier
  - processor, 371
  - (série de ...), 63
  - (transformation de ...), 69
- Fréquence
  - d'échantillonnage, 276

- image, 366
- instantanée, 201
- négative, 30
- porteuse, 339
- relative, 465
- Frequency Shift Keying (FSK), 357
- Gauss (distribution de ...), 482
- Générateur de signal, 227
- Gigue d'ouverture, 314
- Gram-Schmidt (procédure d'orthogonalisation de ...), 56
- Gray (code de ...), 325
- Groupe delay, 247
- Hadamard (matrice de ...), 62
- Hermitienne (symétrie ...), 47
- Hilbert (opérateur de ...), 239, 342
- (transformée de ...), 194
- Histogramme, 468
- Identification, 10
- de formes, 309
- Identité
- de Parseval, 53
- trigonométrique, 492
- Impulsion
- de Dirac, 19
- gaussienne, 24
- unité, 19
- Incertitude (relation d'...), 221
- Indépendance de processus aléatoires, 121
- Indice de modulation
- angulaire, 355
- d'amplitude, 367
- Inégalité
- de Cramer-Rao, 416
- de Schwarz, 48
- de Tchebycheff, 476
- Intercorrélation
- (fonction d'...), 80
- (matrice d'...), 147
- (propriétés), 81
- Intercovariance (matrice d'...), 147
- Intermodulation, 260
- Interpolateur
- d'ordre  $m$ , 293
- idéal, 299
- Interpolation, 309
- Intervalle de confiance, 380
- Jacobien, 122
- Johnson noise, 173
- Karhunen-Loeve (développement de ...), 132
- Kronecker (produit de ...), 62
- Largeur de bande, 37, 218, 374
- à  $-3$  dB, 244
- approximative, 224
- d'un filtre réel, 244
- effective, 223
- efficace, 216
- équivalente de bruit, 245
- utile, 220
- Likelihood ratio, 446
- Limite centrale (théorème de la ...), 148
- Lissage spectral, 383
- Localisation d'un signal, 219
- Lock-in amplifieur, 439
- Loi
- de Gauss, 482, 504
- du  $\chi_m^2$  à  $m$  degrés de liberté, 484
- normale, 504
- normale réduite, 483
- uniforme, 316
- Markov
- (chaîne de ...), 163
- (processus de ...), 162
- Matched filter, 453
- Matrice
- de corrélation, 131
- de covariance, 131
- de Hadamard, 62
- Méthode
- corrélative, 458
- d'estimation de Bayes, 413
- de Pisarenko, 373
- du corrélogramme, 373
- du maximum d'entropie, 373
- du maximum de vraisemblance, 412
- du périodogramme, 372
- du risque minimum, 413
- paramétrique, 373
- syntaxique, 459
- vectorielle (géométrie ou statistique), 459
- Modèle d'un signal, 27, 36, 89
- Modélisation autorégressive, 373

- Modulateur, 254
- Modulation, 333
  - à bande latérale unique (SSB), 341
  - à bande latérale résiduelle (VSB), 342
  - à faible niveau, 351
  - à haut niveau, 352
  - à porteuse impulsionnelle, 336
  - à porteuse sinusoïdale, 335
  - analogique, 334
  - angulaire, 349
  - continue, 334
  - d’amplitude avec porteuse (AM), 338
  - d’amplitude sans porteuse (AM-P), 339
  - d’impulsions en durée (PDM), 364
  - d’impulsions en amplitude (PAM), 363
  - d’impulsions en position (PPM), 364
  - d’impulsions en fréquence (PFM), 364
  - de fréquence (FM), 11, 349
  - de phase ( $\Phi M$ ), 349
  - delta ( $\Delta M$ ), 365
  - discrète, 335
  - échantillonnée, 334
  - numérique, 334
  - par impulsion et codage (PCM), 334, 364
  - PCM différentielle (DPCM), 364
- Module fonctionnel, 229
- Moment, 475
  - centré, 475
- Moyenne
  - conditionnelle, 414
  - courante (glissante), 12, 18, 240
- Moyenueur
  - à échantillonnage, 430
  - temporel parfait, 240
- Multiplexage
  - fréquentiel, 333
  - temporel, 333
- Multiplicateur, 251
- Multiplication de fréquence, 366
- NRZ (mode), 138
- Nuage de points, 442
- On-Off-Keying modulation (OOK), 358
- Onde carrée, 59
- OOK, 358
- Opérateur
  - cubique, 260
  - de convolution, 230
  - de corrélation, 247
  - de dérivation, 248
  - de filtrage idéal, 242
  - de Hilbert, 239, 342
  - de modulation, 254
  - de moyenne temporelle, 240
  - de multiplication, 251
  - de multiplication par une constante, 238
  - de répétition, 22
  - de retard, 238
  - de sommation, 254
  - de transformation orthogonale, 230
  - fonctionnel, 229
  - général d’échantillonnage, 275
  - idéal d’échantillonnage, 251
  - instantané, 256
  - linéaire invariant, 229, 230
  - non inertiel, 254
  - non linéaire, 229
  - non linéaire amnésique, 256, 257
  - non linéaire homogène de degré  $n$ , 255
  - non linéaire invariant, 255
  - paramétrique, 229, 249
  - quadratique, 259
  - sans mémoire, 256
  - séparable, 250
  - statique, 256
- Ordre
  - naturel, 62
  - séquentiel, 60
- Orthogonalisation (procédure d’...), 56
- Ouverture en fréquence, 216
- Paley-Wiener (théorème de ...), 282
- Parseval (identité de ...), 53
- Pas
  - d’échantillonnage, 273
  - de quantification, 305
- Pattern recognition, 458
- Neyman-Pearson (critère de ...), 450
- Norme, 41
- Notation complexe des signaux sinusoïdaux, 30

- PCM, 334, 364  
PDM, 364  
Peigne de Dirac, 22  
Périodogramme, 133  
PFM, 364  
Phase  
– delay, 247  
– instantanée, 201  
– shift keying (modulation PSK), 357  
Phaseur  
– aléatoire, 204  
– de Rayleigh, 206  
– (concept de ...), 193  
Pisarenko (méthode de ...), 373  
Plage de conversion, 305  
Planck (constante de ...), 173  
Poisson (distribution de ...), 479  
Porteuse, 333  
Pouvoir  
– de résolution en distance, 216  
– de résolution en vitesse, 216  
– de résolution fréquentielle, 216  
– de résolution temporelle, 216  
– séparateur, 374  
PPM, 364  
Prédiction, 309  
– linéaire, 423  
Price (théorème de ...), 264  
Primitives, 460  
Principe  
– d'orthogonalité, 422  
– de superposition, 21  
Probabilité, 465  
– conditionnelle, 466, 471  
– conjointe, 465  
– d'erreur totale, 444  
– de détection, 446  
– de fausse alarme, 446  
– de non détection, 446  
Processeur de signal, 227  
Processus  
– aléatoire, 111  
– aléatoire continu, 111  
– aléatoire discret, 111  
– aléatoire indépendant, 121  
– aléatoire (autocorrélation d'un ...), 125  
– aléatoire (autocovariance d'un ...), 126  
– aléatoire (densité spectrale de puissance), 133  
– de décision, 441  
– de Markov, 162  
– de Poisson, 159  
– ergodique, 116  
– gaussien, 153  
– gaussien (propriétés), 154  
– pontuel, 111, 159  
– stochastique, 111  
Produit  
– de convolution, 11  
– de Kronecker, 62  
– de signaux aléatoires, 151  
– d'intermodulation, 259  
– durée  $\times$  largeur de bande, 221  
– scalaire de signaux, 47  
– (théorème du ...), 86  
Profil instrumental, 13  
Projection (théorème de la ...), 49  
Propriétés  
– de l'impulsion de Dirac, 21, 487  
– de la transformation de Fourier, 72, 493  
PSK, 357  
Puissance  
– moyenne normalisée, 34  
– moyenne totale, 34  
Pulsation instantanée, 201  
Pulse  
– amplitude modulation (PAM), 363  
– code modulation (PCM), 334  
– duration modulation (PDM), 364  
– fréquence modulation (PFM), 364  
– position modulation (PPM), 364  
– width modulation (PWM), 364  
PWM, 364  
Qualité de l'approximation, 51  
Quantification, 305, 314  
– uniforme, 305, 316  
– (théorème de ...), 320  
Rademacher (fonction de ...), 59  
Rapport  
– de vraisemblance, 446  
– signal sur bruit, 3  
– signal sur bruit de quantification, 317  
– signal sur bruit instantané, 455  
Rayleigh  
– (phaseur de ...), 206  
– (distribution de ...), 484

- Récepteur à corrélation, 420
- Reconnaissance de formes, 309, 458
- Reconstitution, 292
- Recouvrement spectral, 281
- Récupération optimale, 309
- Redresseur unipolaire, 263
- Régénération, 10
- Repliement (effet de ...), 281
- Réponse
  - d'amplitude, 232
  - de phase, 232
  - impulsionnelle, 11, 21
  - indicielle, 21
  - percussive, 21
- Représentation
  - bilatérale, 105
  - de signaux à spectre passe-bande, 208
  - discrète des signaux, 41
  - en série de fonctionnelles de Volterra, 255
  - unilatérale, 105
  - vectorielle, 43
- Résistance bruyante (schéma équivalent), 175
- Résolution, 374
- Retard
  - de propagation de phase, 247
  - de propagation de groupe, 247
- Réversibilité d'une transformation, 274
- Rice-Nakagami (distribution de ...), 204
- Risque moyen (coefficient de ...), 447
  
- Sample and hold, 313
- Saut unité, 16, 19
- Schwarz (inégalité de ...), 48
- Séquence, 60
  - binaire à longueur maximum, 163
- Série de Fourier, 63
  - unilatérale, 107
- Shot noise, 179
- Signal, 3
  - aléatoire, 29, 111
  - analogique, 35
  - analytique, 194
  - analytique (forme polaire), 200
  - averaging, 428
  - binaire cadencé, 138, 139
  - digital, 35
  - échantillonné, 35
  - modulant, 333
  - modulé, 333
  - numérique, 35
  - porteur, 333
  - primaire, 333
  - processor, 227
  - quantifié, 35
  - secondaire, 333
  - à bande limitée, 38
  - à énergie finie, 34
  - Signaux
    - à puissance moyenne finie, 34
    - à puissance moyenne finie (corrélée de ...), 91
    - à support borné, 38
  - aléatoires, 29, 111
  - aléatoires non stationnaires, 32
  - aléatoires stationnaires, 32
  - causals, 39
  - de carré intégrable (sommable), 34
  - de durée limitée, 38
  - de spectre à support borné, 38
  - déterministes, 28
  - ergodiques, 32
  - impairs, 38
  - non périodiques, 29
  - pairs, 38
  - périodiques, 29
  - périodiques (fonctions de corrélation), 94
  - périodiques (spectres d'amplitude et de phase), 29
  - pseudo-aléatoires, 29, 163
  - quasi-périodiques, 29
  - sinusoïdaux, 29
  - transitoires, 291
- Signum, 15
- Single side bande modulation (SSB), (341)
- Sinus
  - cardinal (fonction sinc), 23, 501
  - intégral, 24
- Sommateur, 254
- Somme de signaux aléatoires, 147
- Sous-échantillonnage d'un signal
  - périodique, 292
- Soustracteur, 254
- Spectre, 4
  - d'amplitude, 72
  - d'énergie, 82
  - de phase, 72
  - de raies, 71, 94

- instantané, 218
- Spread spectrum systems, 440
- SSB, 341
- Stationnarité, 115
  - au sens large, 116
  - au sens stricte, 115
  - du deuxième ordre, 115
- Statistique
  - d'ordre 1, 114
  - d'ordre 2, 115
  - d'ordre  $k$ , 114
- Suite aléatoire, 111
- Symétrie hermitienne, 47, 80
- Synthèse, 10
- Synthétiseur de signaux, 55
- Système
  - à courant porteur, 341
  - à étalement de bande, 440
  - analogique, 37
  - de traitement des signaux, 227
  - digital, 37
  - échantillonné, 37
  - numérique, 37
  - séparable, 256
  
- Taux global de distorsion harmonique, 261
- Tchebycheff (inégalité de ...), 476
- Température équivalente de bruit, 178
- Template matching, 458
- Temps
  - de montée, 243
  - de propagation de groupe, 247
  - de propagation de phase, 247
- Test minimax, 449
- TFD, 290
- Théorème
  - d'échantillonnage (signaux à spectre passe-bas), 65, 282
  - d'échantillonnage (signaux à spectre passe-bande), 288
  - de la limite centrale, 148
  - de la projection, 49
  - de Paley-Wiener, 282
  - de Price, 264
  - de quantification, 320
  - de Wiener-Khintchine, 134
  - des moments du premier ordre, 321
  - du produit, 86
  - du retard, 73
- Théorie
  - de l'information (de la communication), 5
  - du signal, 3
- Traitement
  - des signaux, 9
  - en temps réel, 227
- Transformation
  - de Fourier, 231, 371
  - de signal, 227
- Transformation
  - d'un vecteur aléatoire, 122
  - de Fourier discrète, 65, 290, 390
  - de Fourier rapide, 14, 291, 390
  - de Fourier (propriétés), 72, 493
  - de Fourier (table illustrée), 497
  - de Hilbert, 194, 239
  - en  $z$ , 233
  - irréversible, 274
  - quadratique, 123
  - réversible, 274
- Transformée
  - de Fourier, 69
  - de Fourier bidimensionnelle, 7, 13
  - de Fourier d'un signal périodique, 94
  - de Fourier d'un signal échantillonné idéalisé, 281
  - de Fourier (extension), 89
  - de Hilbert, 194, 239
  - en  $z$  d'un signal échantillonné idéalisé, 281
- True RMS value, 116
  
- Valeur
  - efficace, 18
  - moyenne, 17, 18
  - moyenne expérimentale, 474
  - moyenne statistique, 114, 474
  - quadratique, 17
  - quadratique moyenne, 17, 475
- Variable
  - aléatoire, 112, 466
  - aléatoire bidimensionnelle, 469
  - aléatoire continue (VAC), 468
  - aléatoire discrète (VAD), 467
  - binaire, 478
  - centrée réduite, 483
- Variables statistiquement indépendantes, 471
- Variance, 114, 475

- Vecteur  
– aléatoire, 114  
– aléatoire (transformation d'un ...),  
122  
– de description, 459
- Vestigial side band modulation  
(VSB), 342
- Volterra (représentation en série de  
fonctionnelles de ...), 255
- Vraie valeur efficace, 116
- Walsh (fonctions de ...), 59
- Wiener-Hopf (équations de ...), 426
- Wiener-Khintchine (théorème de ...),  
134

## GLOSSAIRE

Symbole	Désignation	Page
$a$	Paramètre	411
$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots)$	Vecteur de paramètres	411
$\tilde{a}$	Estimation du paramètre $a$	411
$\tilde{a}_{\text{abs}}$	Estimation selon le critère de la valeur absolue	415
$\tilde{a}_{\text{eqm}}$	Estimation à erreur quadratique minimale	414
$\tilde{a}_{\ell}$	Estimation linéaire	422
$\tilde{a}_{\ell\text{O}}$	Estimation linéaire optimale	422
$\tilde{a}_{\text{map}}$	Estimation du maximum a posteriori	415
$\tilde{a}_{\text{mv}}$	Estimation à vraisemblance maximale	412
$a(t)$	Partie réelle de l'enveloppe complexe $\underline{z}(t)$	208
$A$	Amplitude	000
$b$	Biais	415
$b(t)$	Partie imaginaire de l'enveloppe complexe $\underline{z}(t)$	208
$B$	Largeur de bande fréquentielle	36
$B_e$	Largeur de bande effective	223
$B_{\text{eq}}$	Largeur de bande équivalente (de bruit)	245
$B_u$	Largeur de bande utile	220
$B_{-3\text{dB}}$	Largeur de bande à $-3\text{ dB}$	244
$B_{\tau}$	Largeur de bande approximative	224
$c_{ij}$	Coefficient de coût	447
$c(a, \tilde{a})$	Fonction de coût ou de perte	413
$C$	Capacité électrique	177
$C_x$	Matrice de covariance	131
$C_{xy}$	Covariance des variables aléatoires $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$	476
$C_x(\tau)$	Fonction d'autocovariance du processus aléatoire $\mathbf{x}(t)$	126
$C_{xy}(\tau)$	Fonction d'intercovariance de $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{y}(t)$	145
$d$	Distorsion	261
$d(t)$	Signal démodulé	344
$d(x, y)$	Distance entre $x$ et $y$	43
$D$	Durée, largeur d'impulsions	275
$D_e$	Durée effective	224
$D_u$	Durée utile	220
$D_{\tau}$	Durée de corrélation	224
$e$	Charge de l'électron	179
$e(t)$	Fonction d'échantillonnage	275
$e(t)$	Erreur d'approximation ou d'estimation	49
$\ e\ ^2$	Erreur quadratique moyenne	50

E	Espérance mathématique	474
$f$	Fréquence	—
$f_c$	Fréquence de coupure	245, 285
$f_e$	Fréquence ou cadence d'échantillonnage	275
$f_i$	Fréquence image	366
$f_p$	Fréquence porteuse	335
$f_i(t)$	Fréquence instantanée	201
F	Transformation de Fourier	69
$F$	Facteur de bruit	185
$F_v$	Pouvoir de résolution fréquentielle (en vitesse)	216
$F(x)$	Fonction de répartition de la variable aléatoire $\mathbf{x}$	466
$F_c(x) =$ $1 - F(x)$	Fonction de répartition complémentaire	483
$g(t), h(t)$	Réponse impulsionnelle d'un système linéaire	21
$G(f), H(f)$	Réponse fréquentielle d'un système linéaire	232
$h$	Constante de Planck	173
H	Transformation de Hilbert	194
$H_0, H_1$	Hypothèses associées à une décision binaire	444
$H_N$	Matrice de Hadamard d'ordre $N \times N$	62
$i(t)$	Courant électrique (valeur instantanée)	33
$I_0(x)$	Fonction de Bessel modifiée d'ordre zéro	203
$j = \sqrt{-1}$	Unité imaginaire	—
$J$	Jacobien (déterminant fonctionnel)	122
$J_n(x)$	Fonction de Bessel de première espèce d'ordre $n$	502
$k$	Constante de Boltzmann	—
$K$	Constante	—
lb	Logarithme binaire (base 2)	—
ln	Logarithme naturel (base e)	—
$\log_{10}$	Logarithme décimal (base 10)	—
$l(a)$	Fonction de vraisemblance	419
$L^2$	Espace vectoriel des signaux à énergie finie	46
$m$	Indice de modulation d'amplitude	367
$m_{xn} = E[\mathbf{x}^n]$	Moment statistique de degré $n$ de $\mathbf{x}$	475
$m_{x-\mu, n} =$ $E[(\mathbf{x} - \mu)^n]$	Moment statistique centré de degré $n$ de $\mathbf{x}$	475
$m_{x1} = \mu_x$	Valeur moyenne statistique de $\mathbf{x}$	474
$m_{x2}$	Valeur quadratique moyenne statistique de $\mathbf{x}$	475
$m_{x-\mu, 2} = \sigma_x^2$	Variance de $\mathbf{x}$	475
$m(t)$	Signal modulant	335
$n(t)$	Perturbation aléatoire (bruit)	347
$n_q(t)$	Distorsion (bruit) de quantification	315
$N$	Nombre d'échantillons, de composantes, etc.	—
O	Espace d'observation	444
$O_0, O_1$	Régions subdivisant O en décision binaire	—
$p$	Probabilité (notation simplifiée)	444
$p_d$	Probabilité de détection	446
$p_f$	Probabilité de fausse alarme (fausses positives)	446
$p_n$	Probabilité de non détection (fausses négatives)	446
$p_e$	Probabilité d'erreur	444
$p(t)$	Puissance instantanée	33
$p_x(x)$	Densité de probabilité de la variable aléatoire $\mathbf{x}$	467

$p_{x,y}(x,y)$	Densité de probabilité conjointe de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$	469
$p(x y)$	Densité de probabilité conditionnelle de $\mathbf{x}$ connaissant l'état $y$	471
$P_x$	Puissance (normalisée) de $x(t)$	34
$P_{th} = kTB$	Puissance du bruit thermique	174
Prob(A)	Probabilité de réalisation de l'événement A	465
Prob(A, B)	Probabilité conjointe de réalisation de A et B	465
Prob(A B)	Probabilité conditionnelle de réalisation de A connaissant l'état de B	466
$q$	Nombre total de pas de quantification	309
$Q(a,b)$	Fonction de Marcum	508
$r(t)$	Fonction rampe	16
$r_x(t)$	Enveloppe réelle de $x(t)$	200
$\tilde{r}_x(t) = a(t) + jb(t)$	Enveloppe complexe de $x(t)$	208
$R$	Résistance électrique	33
$R$	Risque moyen	447
$R_x$	Matrice de corrélation	131
$R_{x,y} = E[\mathbf{x}^* \mathbf{y}]$	Corrélation des variables aléatoires $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$	476
$R_x(\tau)$	Fonction d'autocorrélation statistique de $\mathbf{x}(t)$	125
$R_{xy}(\tau)$	Fonction d'intercorrélation statistique de $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{y}(t)$	144
$s_k$	Séquence de la fonction de Walsh wal( $k, t/T$ )	60
$s(t)$	Signal modulé	335
$s(t)$	Signal utile	—
$S$	Opérateur fonctionnel	229
$t$	Temps	—
$t_g$	Retard de groupe	243
$t_m$	Temps de montée	243
$t_\phi$	Retard de phase	247
$T$	Température absolue	173
$T$	Intervalle de temps ou période	—
$T_a$	Température ambiante absolue	173
$T_d$	Pouvoir de résolution temporel (en distance)	216
$T_e$	Période (pas) d'échantillonnage	275
$T_{eb}$	Température équivalente de bruit	178
$u(t)$	Tension électrique (valeur instantanée)	33
$u(t)$	Signal auxiliaire, fonction de pondération	249, 252
$u_p(t)$	Porteuse	335
$\hat{U}$	Valeur de crête de la tension $u(t)$	193
$\hat{U} = \hat{U} \exp(j\alpha)$	Phaseur de la tension sinusoïdale $u(t)$	193
$v_b$	Vitesse de balayage	395
$V$	Seuil de décision	450
$W_x$	Energie normalisée du signal $x(t)$	34
$W_N = \exp(j2\pi/N)$	$N$ ième racine de l'unité	231
$x_k = x(t_k)$	Echantillon de $x(t)$ prélevé en $t = t_k$	276
$\{x_k\}$	Séquence d'échantillons	276
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ , etc.	Variables aléatoires	—
$\ x\ $	Norme de $x(t)$	46
$\bar{x}, \bar{x}(t)$	Valeur moyenne temporelle de $x(t)$ ou $\{x_k\}$	18
$\bar{x}(T)$	Valeur moyenne déterminée sur l'intervalle $T$	17

$\bar{x}(t, T)$	Valeur moyenne glissante déterminée sur un intervalle $T$	12
$\mathbf{x}, \mathbf{x}^T$	Vecteur ligne et vecteur colonne (transposé)	483
$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$	Vecteur aléatoire	114
$x(t), y(t), z(t)$ , etc.	Signaux réels ou complexes	—
$x^*(t)$	Conjugué complexe de $x(t)$	72
$\tilde{x}(t)$	Approximation ou estimation de $x(t)$	49
$\mathbf{x}(t) \triangleq \mathbf{x}(t, \xi)$	Processus aléatoire	111
$x(t, T) \leftrightarrow X(f, T)$	Segment de durée $T$ de $x(t)$ et sa transformée de Fourier	93
$\tilde{x}(t) \leftrightarrow \tilde{X}(f)$	Transformée de Hilbert de $x(t)$ et sa transformée de Fourier	194
$\underline{x}(t) \leftrightarrow \underline{X}(f)$	Signal analytique de $x(t)$ et sa transformée de Fourier	194
$x_e(t)$	Signal échantillonné	274
$x_i(t) \leftrightarrow X_i(f)$	Partie impaire du signal $x(t)$ et sa transformée de Fourier	72
$x_p(t) \leftrightarrow X_p(f)$	Partie paire du signal réel $x(t)$ et sa transformée de Fourier	72
$X_n$	Coefficient de Fourier	63
$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$	Transformée de Fourier de $x(t)$	69
$ X(f) $	Spectre d'amplitude de $x(t)$	72
$X^+(f) = 2\varepsilon(f)X(f)$	Représentation unilatérale de $X(f)$	194
$X(z)$	Transformée en $z$ de $x(t)$	281
$\underline{Z}(f)$	Impédance complexe	176
$\alpha, \beta, \theta, \phi$	Déphasage	—
$\alpha_k$	Coefficients d'un développement en série	41
$\gamma_\varrho = \langle x, \psi_\varrho^* \rangle$	Produit scalaire de $x(t)$ et $\psi_\varrho(t)$	50
$\gamma(t)$	Réponse indicielle d'un système linéaire	21
$\Gamma$	Vecteur colonne des $\gamma_\varrho$	50
$\Gamma_{xy}(f)$	Fonction de cohérence	146
$\delta$	Indice de modulation angulaire (FM, $\Phi M$ )	355
$\delta(t)$	Impulsion unité de Dirac	19
$\delta_T(t)$	Train périodique (période $T$ ) d'impulsion de Dirac	22
$\Delta$	Intervalle ou pas de quantification	310
$\Delta t, \Delta x$ , etc.	Petit intervalle, accroissement	—
$\Delta f(t)$	Déviations de fréquence (FM)	349
$\Delta \phi(t)$	Déviations de phase ( $\Phi M$ )	349
$\varepsilon$	Erreur de mesure	378
$\varepsilon(t)$	Saut (échelon) unité	16
$\xi$	Résultat d'une expérience aléatoire	111
$\eta$	Densité spectrale de puissance unilatérale du bruit blanc	142
$\eta_m$	Rendement de modulation (AM)	339
$\vartheta_a$	Température ambiante en $^\circ C$	173
$\vartheta_x(f) = \arg X(f)$	Spectre de phase du signal $x(t)$	72
$\vartheta_g(f) = \arg G(f)$	Réponse de phase d'un système linéaire	232
$\lambda$	Longueur d'onde	172
$\lambda_{k\varrho} = \langle \psi_k, \psi_\varrho^* \rangle$	Produit scalaire de fonctions de base	50
$\lambda_k = \ \psi_k\ ^2$	Carré de la norme de $\psi_k(t)$	53
$\Lambda$	Matrice des $\lambda_{k\varrho}$	50

$\Lambda(x)$	Rapport de vraisemblance	446
$\mu_x = E[\mathbf{x}]$	Valeur moyenne statistique de la variable $\mathbf{x}$	474
$\nu$	Décalage Doppler, fréquence (notation auxiliaire)	215, 250
$\xi$	Rapport signal sur bruit	3
$\xi_0$	Rapport signal sur bruit de référence	348
$\xi_{dB} = 10 \log \xi$	Rapport signal sur bruit en décibels	3
$\Pi_x(u)$	Fonction caractéristique de la variable aléatoire $\mathbf{x}$	477
$\Pi_{xy}(u, \nu)$	Fonction caractéristique du couple $\mathbf{x}, \mathbf{y}$	478
$\rho_{xy}$	Coefficient de corrélation (covariance normée) de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$	477
$\rho_x(\tau)$	Fonction d'autocovariance normalisée	127
$\rho_{xy}(\tau)$	Fonction d'intercovariance normalisée	145
$\sigma_x$	Ecart-type (déviatoin standard) de la variable $\mathbf{x}$	476
$\sigma_x^2 = \text{Var}(\mathbf{x})$	Variance (écart quadratique moyen) de $\mathbf{x}$	475
$\tau$	Paramètre de retard, temps (notation auxiliaire)	—
$\phi_x(t)$	Phase instantanée de $x(t)$	201
$\varphi_x(\tau)$	Fonction d'autocorrélation temporelle du signal à puissance moyenne finie $x(t)$	91
$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau)$	Fonction d'autocorrélation temporelle du signal à énergie finie $x(t)$	80
$\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau, T)$	Fonction d'autocorrélation de $x(t, T)$	100
$\varphi_{xy}(\tau), \overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau)$	Fonction d'intercorrélation temporelle de $x(t)$ et $y(t)$	80, 91
$\varphi_{xy}(\tau, T)$	Fonction d'intercorrélation de $x(t, T)$ et $y(t, T)$	100
$\Phi_x(f) = F\{\varphi_x(\tau)\}$	Densité spectrale de puissance de $x(t)$	92
$\overset{\circ}{\Phi}_x(f) = F\{\overset{\circ}{\varphi}_x(\tau)\}$	Densité spectrale d'énergie de $x(t)$	82
$\overset{\circ}{\Phi}_x(f, T)$	Densité spectrale d'énergie de $x(t, T)$	102
$\Phi_x^+(f) = 2\epsilon(f)\Phi_x(f)$	Densité spectrale de puissance unilatérale	106
$\overset{\circ}{\Phi}_x^+(f) = 2\epsilon(f)\overset{\circ}{\Phi}_x(f)$	Densité spectrale d'énergie unilatérale	106
$\Phi_{xy}(f) = F\{\varphi_{xy}(\tau)\}$	Densité interspectrale de puissance de $x(t)$ et $y(t)$	93
$\overset{\circ}{\Phi}_{xy}(f) = F\{\overset{\circ}{\varphi}_{xy}(\tau)\}$	Densité interspectrale d'énergie de $x(t)$ et $y(t)$	85
$\overset{\circ}{\Phi}_{xy}(f, T)$	Densité interspectrale d'énergie de $x(t, T)$ et $y(t, T)$	103
$\Phi_{th}(f)$	Densité spectrale de puissance du bruit thermique	173
$\chi(\tau, \nu)$	Fonction d'ambiguïté	215
$\chi_m^2$	Variable aléatoire (chi carré) à $m$ degrés de liberté	484
$\{\psi_k(t)\}$	Ensemble de fonctions indépendantes, éventuellement orthogonales, formant la base d'un espace vectoriel de signaux	42
$\omega = 2\pi f$	Pulsation	—
$\omega_i(t)$	Pulsation instantanée	201

## ABRÉVIATIONS

A/N	Conversion analogique-numérique
AM	Modulation d'amplitude
AM-P	Modulation d'amplitude sans porteuse

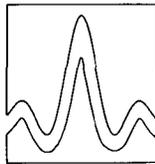
DPCM	Modulation PCM différentielle
FFT	Transformation de Fourier rapide (fast Fourier transform)
FM	Modulation de fréquence
FSK	Modulation discrète de fréquence (frequency shift keying)
MIC	Modulation par impulsion et codage (PCM)
N/A	Conversion numérique-analogique
NRZ	Non retour à zéro
PAM	Modulation d'impulsions en amplitude
PCM	Pulse code modulation (MIC)
PDM	Modulation d'impulsions en durée (pulse duration modulation)
PFM	Modulation d'impulsions en fréquence (pulse frequency modulation)
PLL	Boucle à phase asservie (phase locked loop)
PPM	Modulation d'impulsions en position (pulse position modulation)
PSK	Modulation de phase discrète (phase shift keying)
SSB	Modulation à bande latérale unique (single side band)
TFD	Transformation de Fourier discrète
VAC	Variable aléatoire continue
VAD	Variable aléatoire discrète
VCO	Oscillateur contrôlé en tension (voltage controlled oscillator)
VSF	Modulation à bande latérale résiduelle (vestigial side band)
$\Delta M$	Modulation delta
$\Phi M$	Modulation de phase

## NOTATION SPÉCIALES

*	Produit de convolution	7
$\bar{*}$	Produit de convolution en valeur moyenne	92
**	Produit de convolution de fonctions bidimensionnelles	13
$\mathbb{H}$	Multiple produit de convolution	259
$\langle \rangle$	Produit scalaires	7
$\otimes$	Produit de Kronecker	62
$\oplus$	Addition modulo-2	44
$\text{cal}(s_k, t/T)$	Fonction de Walsh pair de séquence $s_k$ pour $k$ pair	60
$\text{ig}(t)$	Impulsion gaussienne	24
$\text{rad}(i, t/T)$	Fonction de Rademacher	59
$\text{rect}(t)$	Fonction rectangulaire	17
$\text{rep}_T [ \ ]$	Opérateur de répétition de période $T$	22
$\text{sal}(s_k, t/T)$	Fonction de Walsh de séquence $s_k$ pour $k$ impair	60
$\text{sgn}(t)$	Fonction signe	15
$\text{sinc}(\alpha)$	Fonction sinus cardinal	23
$\text{Si}(u)$	Fonction sinus intégral	24
$\text{tri}(t)$	Fonction triangulaire	18
$\text{wal}(k, t/T)$	Fonction de Walsh	60

Le Traité d'Electricité est l'œuvre collective  
des membres du Département d'Electricité de l'EPFL,  
assistés par quelques collaborateurs externes.  
A ce volume ont collaboré plus particulièrement :

*Mohamadrez Aminian* : composition de formules  
*Hakan Birsal* : composition de formules  
*Françoise de Coulon* : correction de l'orthographe et support moral  
*Frédéric de Coulon* : rédaction du volume  
*Claire-Lise Delacrausaz* : directrice  
des Presses polytechniques romandes  
*Walter Dübler* : photographies  
*Pierre-Gérard Fontolliet* : critique du manuscrit  
*Eric Gruaz* : photographies  
*Kurt Hofer* : dessins, photographies,  
*Allen Kilner* : mise en page et montage  
*Murat Kunt* : critique du manuscrit  
*Andrée Moinat* : dactylographie du manuscrit  
*Jacques Neirynek* : direction du Traité, critique du manuscrit  
*Hubert Osako* : composition de formules  
*Nicolas Pesenti* : index analytique  
*Renée Pittet* : composition du texte et de formules  
*Julien Piot* : critique du manuscrit  
*Thierry Pun* : critique du manuscrit  
*Christiane Stehlé* : dactylographie du manuscrit,  
composition du texte et de formules  
*Michael Unser* : critique du manuscrit  
*Roger Vuistiner* : critique du manuscrit, élaboration  
des illustrations par ordinateur  
*Ida Wegmüller* : montage du lettrage et des corrections  
*Marc Weill* : composition de formules



Cet ouvrage fait partie d'une série de vingt-deux volumes  
dont les titres sont les suivants :

- I INTRODUCTION À L'ÉLECTROTECHNIQUE
- II MATÉRIAUX DE L'ÉLECTROTECHNIQUE
- III ÉLECTROMAGNÉTISME
- IV THÉORIE DES RÉSEAUX DE KIRCHHOFF
- V ANALYSE ET SYNTHÈSE DES SYSTÈMES LOGIQUES
- VI THÉORIE ET TRAITEMENT DES SIGNAUX
- VII DISPOSITIFS À SEMICONDUCTEUR
- VIII ÉLECTRONIQUE
- IX ÉLECTROMÉCANIQUE
- X MACHINES ÉLECTRIQUES
- XI MACHINES SÉQUENTIELLES
- XII ÉNERGIE ÉLECTRIQUE
- XIII HYPERFRÉQUENCES
- XIV CALCULATRICES
- XV ÉLECTRONIQUE DE PUISSANCE
- XVI ÉLECTRONIQUE DE RÉGLAGE ET DE COMMANDE
- XVII SYSTÈMES DE MESURE
- XVIII SYSTÈMES DE TÉLÉCOMMUNICATIONS
- XIX FILTRES ÉLECTRIQUES
- XX TRAITEMENT NUMÉRIQUE DES SIGNAUX
- XXI ÉLECTROACOUSTIQUE
- XXII HAUTE TENSION



Le Traité d'Electricité est une publication des  
**Presses polytechniques et universitaires romandes**, fondation  
scientifique dont le but est la diffusion des travaux  
de l'Ecole polytechnique fédérale de Lausanne.  
Le catalogue de ces publications peut être obtenu aux  
**Presses polytechniques et universitaires romandes**,  
CH-1015 Lausanne.

---

Quatrième édition revue et corrigée  
ISBN (série) : 2-604-00002-4  
ISBN (ce volume) : 2-88074-319-2  
© 1998 Presses polytechniques et universitaires romandes  
CH-1015 Lausanne  
Imprimé en Suisse par Corbaz S.A., Montreux