

SCIENCES SUP

$bx + c$

Aide-mémoire

IUT • CPGE • Licence

MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

*Daniel Fredon
Michel Bridier*

DUNOD

Consultez nos catalogues
sur le Web

<http://www.dunod.com>



Illustration de couverture : Lionel Auvergne

Ce pictogramme mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du **photocopillage**.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les



établissements d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.

Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20 rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2003
ISBN 2 10 006516 5

Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants eause est illicite selon le Code de la propriété intellectuelle (Art L 122-4) et constitue une contrefaçon réprimée par le Code pénal. • Seules sont autorisées (Art L 122-5) les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective, ainsi que les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, pédagogique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées, sous réserve, toutefois, du respect des dispositions des articles L 122-10 à L 122-12 du même Code, relatives à la reproduction par reprographie.

Table des matières

PARTIE 1

ANALYSE

1 • INTÉGRATION	2
2 • FONCTIONS SPÉCIALES	11
3 • APPROXIMATION DE LA FORME D'UNE FONCTION	25
4 • CHAMPS SCALAIRES ; CHAMPS DE VECTEURS	29
5 • INTÉGRALES MULTIPLES	38
6 • INTÉGRALES CURVILIGNES	47

7 • INTÉGRALES DE SURFACE	52
8 • ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES	56
9 • SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS	62
10 • SÉRIES ENTIÈRES	68
11 • FONCTIONS D'UNE VARIABLE COMPLEXE	76
12 • ESPACES FONCTIONNELS	89
13 • POLYNÔMES ORTHOGONAUX	98
14 • SÉRIES DE FOURIER	104
15 • ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES	114
16 • DISTRIBUTIONS	127
17 • CONVOLUTION	138
18 • TRANSFORMATION DE LAPLACE	144
19 • TRANSFORMATION DE FOURIER	153
20 • TRANSFORMATIONS DISCRÈTES	163
21 • ONDELETTES	171
22 • CALCUL DES VARIATIONS	175

PARTIE 2	
GÉOMÉTRIE	
23 • COURBES	184
24 • SURFACES	193
25 • VOLUMES	202
26 • GÉOMÉTRIE FRACTALE	209
PARTIE 3	
PROBABILITÉS ET STATISTIQUES	
27 • CALCUL DES PROBABILITÉS	218
28 • VARIABLES ALÉATOIRES	227
29 • LOIS USUELLES	239
30 • CONVERGENCES	254
31 • PROCESSUS ALÉATOIRES	261
32 • ESTIMATION	268
33 • TESTS STATISTIQUES	276
INDEX	294

PARTIE 1

Analyse

Intégration

INTÉGRALE DE RIEMANN

Subdivision

On appelle subdivision σ de $[a, b]$, la donnée d'un nombre fini de points $x_0, \dots, x_n$ tels que $x_0 = a$, $x_n = b$, et $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a, b]$.

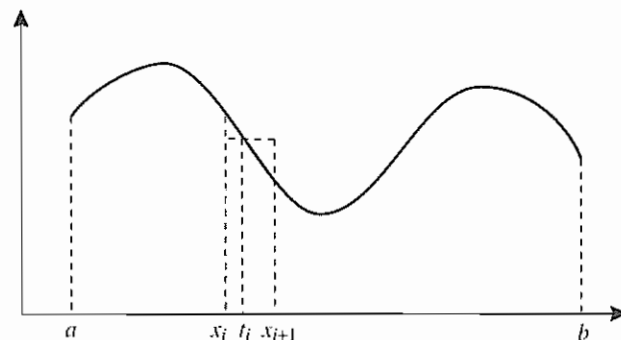
Le pas d'une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ est le nombre :

$$\delta(\sigma) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Sommes de Riemann

Soit f une fonction réelle, définie et bornée sur $[a, b]$, et σ une subdivision de $[a, b]$. Une somme de Riemann de f pour σ est de la forme :

$$S(\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) \quad \text{avec } t_i \in [x_i, x_{i+1}].$$



Fonction intégrable

Une fonction f est intégrable sur $[a, b]$ au sens de Riemann si ses sommes de Riemann tendent vers une limite I lorsque le pas de la subdivision σ tend vers 0, ce qui se formalise :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{S} \quad \delta(\sigma) < \alpha \implies |S(\sigma) - I| < \varepsilon.$$

On note $I = \int_a^b f(x) dx$.

Exemples

► Sont intégrables au sens de Riemann :

les fonctions continues, continues par morceaux, monotones,

les fonctions à variations bornées, c'est-à-dire telles qu'il existe un majorant de

$$\sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \quad \text{pour toute subdivision } \sigma.$$

► Une fonction définie et bornée sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann si, et seulement si, l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle (la mesure d'une partie de $\mathbb{R}$ généralise la longueur d'un intervalle).

INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE

Fonction localement intégrable

Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est localement intégrable sur I si elle est intégrable sur tout segment inclus dans I .

Cas d'une fonction non bornée sur un intervalle borné

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a, b]$ avec $a < b$. Si la limite

$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$ existe, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Si f possède une limite à droite en a , il n'y a aucun problème d'existence pour l'intégrale généralisée.

Cas d'une fonction définie sur un intervalle non borné

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a, +\infty[$.

Si la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$ existe, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est convergente.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Exemples fondamentaux

Pour $]a, +\infty[$ avec $a > 0$, on a :

$$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

Pour $]0, a]$ avec $a > 0$, on a :

$$\int_0^a \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha < 1.$$

Fonctions sommables

► Définition

Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, +\infty[$. On dit que f est sommable sur cet intervalle si $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

On dit aussi que l'intégrale est absolument convergente.

► Théorème

$$\int_a^{+\infty} |f(t)| dt \text{ converge } \implies \int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge.}$$

Si f est localement intégrable sur $]a, b]$, on a une définition et un théorème analogue.

VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY

Définition

Soit f continue sur $[a, b]$ sauf en $c \in]a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ est convergente si, et seulement si :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon'} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right]$$

où ε et ε' tendent vers 0 indépendamment l'un de l'autre.

Si l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ n'est pas convergente, la valeur principale au sens de Cauchy est définie par :

$$\text{vp} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

Exemple

Si $A > 0$, on a :

$$\int_{-A}^A \frac{dx}{x} \text{ diverge } \quad \text{et} \quad \text{vp} \int_{-A}^A \frac{dx}{x} = 0.$$

La réponse impulsionnelle $h(t)$ d'un filtre de Hilbert est

$$h(t) = \text{vp} \left(\frac{1}{\pi t} \right).$$

Le filtre de Hilbert permet de générer un signal en bande latérale unique (BLU) utilisé en transmission.

Propriété

Si φ est continue sur $[-A, A]$ et dérivable en 0, on a :

$$\text{vp} \int_{-A}^A \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-A}^A \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$

FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE DÉFINIE**Existence et continuité**

Soit f une fonction de deux variables, continue sur $[a, b] \times [c, d]$; alors la fonction F définie par $F(x) = \int_c^d f(x, t) dt$ est continue sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t) dt \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, t) dx \right) dt$$

Dérivabilité

Si f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $[a, b] \times [c, d]$, alors F est dérivable sur $[a, b]$ et on a :

$$F'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Si de plus, u et v sont des fonctions de classe C^1 de $[a, b]$ dans $[c, d]$, alors la fonction G définie par $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, t) dt$ est dérivable et

$$F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, v(x)) v'(x) - f(x, u(x)) u'(x).$$

FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE GÉNÉRALISÉE

Soit f une fonction de deux variables, continue sur $[a, b] \times [c, +\infty[$. Lorsqu'elle existe, on considère la fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = \int_c^{+\infty} f(x, t) dt.$$

Existence et continuité

S'il existe une fonction positive g définie, continue par morceaux et sommable sur $]c, +\infty[$, et qui vérifie :

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall t \in]c, +\infty[\quad |f(x, t)| \leq g(t)$$

alors F existe et est continue sur $[a, b]$.

Dérivabilité

Supposons en plus que f admette une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $[a, b] \times [c, +\infty[$ et qu'il existe une fonction positive h définie, continue par morceaux et sommable sur $[c, +\infty[$, et qui vérifie :

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall t \in]c, +\infty[\quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq h(t)$$

alors F est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $F'(x) = \int_c^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Remarques

- Le théorème précédent se généralise pour les dérivées successives de F .
- Pour la continuité et les dérivabilités successives, il suffit d'établir les hypothèses de domination du type $|f(x, t)| \leq g(t)$ sur tout segment de $[c, -\infty[$.

INTÉGRALE DE LEBESGUE

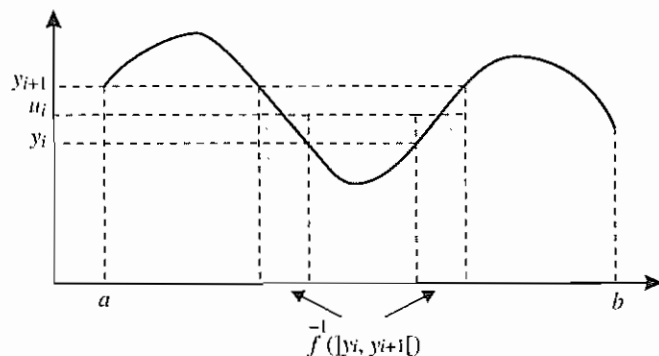
Aspect intuitif

Au lieu de subdiviser l'ensemble de départ comme dans l'intégrale de Riemann, l'intégration de Lebesgue partage l'ensemble d'arrivée de f .

Pour calculer l'aire sous le graphe de la fonction f définie sur $[a, b]$, on fait intervenir une subdivision $y_0 < y_1 < \dots < y_n$ de $f([a, b])$ et la valeur approchée :

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i \mu \left[f^{-1}([y_i, y_{i+1}[) \right] \quad \text{avec } u_i \in [y_i, y_{i+1}[.$$

où $f^{-1}([y_i, y_{i+1}[)$ est l'image réciproque de $[y_i, y_{i+1}[$ et où μ généralise la longueur d'un intervalle.



On termine comme avec l'intégrale de Riemann en passant à la limite. Mais il faut pouvoir attribuer une mesure à des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont plus des intervalles, ce qui conduit à la notion de fonction mesurable, c'est-à-dire telle que l'image réciproque de tout intervalle soit mesurable.

Définitions

➤ Ensemble de mesure nulle

Une partie $E \subset \mathbb{R}$ est de mesure nulle si, à tout $\varepsilon > 0$, on peut associer une suite d'intervalles ouverts (I_n) telle que :

$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$$

où $|I_n|$ désigne la longueur de I_n .

➤ Propriété vraie presque partout (p.p.)

Une propriété est vraie presque partout sur un intervalle, si elle est vraie sauf sur un ensemble de mesure nulle.

➤ Exemple

$\mathbb{N}$ (ou tout ensemble dénombrable) est de mesure nulle : ε étant donné, il suffit d'associer à tout n l'intervalle :

$$I_n =]n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[\quad \text{où} \quad |I_n| = \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Propriétés

➤ Une fonction f est intégrable au sens de Lebesgue sur l'intervalle I si, et seulement si, $|f|$ l'est aussi, et, dans ce cas, on a :

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx.$$

➤ On a :

$$\int_I |f(x)| dx = 0 \iff f = 0 \quad (\text{p.p.})$$

► Si f et g (mesurables) sont telles que $|f| \leq g$ sur I et si g est intégrable, alors f l'est aussi et on a :

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx \leq \int_I g(x) dx.$$

► Une fonction intégrable au sens généralisé de Riemann est intégrable sur l'intervalle I au sens de Lebesgue si, et seulement si, elle est sommable.

Il existe des fonctions intégrables au sens de Lebesgue qui ne le sont pas au sens de Riemann. C'est le cas de la fonction de Dirichlet, c'est-à-dire de la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q}.$$

INTÉGRALE DE RIEMANN COMPLÈTE

En modifiant légèrement le point de vue de Riemann, on obtient une définition de l'intégrale qui englobe l'intégrale de Riemann ordinaire et généralisée, et l'intégrale de Lebesgue.

Le réel I est l'intégrale de Riemann complète d'une fonction f sur $[a, b]$ si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une fonction α de $[a, b]$ dans $]0, +\infty[$ telle que, pour toute subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ et tout choix des $t_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tels que $x_{i+1} - x_i < \alpha(t_{i+1})$, on ait :

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(t_i) - I \right| < \varepsilon.$$

2

Fonctions spéciales

FONCTIONS EULÉRIENNES

Fonction gamma

► Définition

La fonction Γ est définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

► Autre expression

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt.$$

➤ Formule de récurrence

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

Comme $\Gamma(1) = 1$, on obtient $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

➤ Formule de Stirling

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left[1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

➤ Formule des compléments

$$\text{Si } 0 < x < 1 \quad \Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

En particulier :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

➤ Formule de duplication

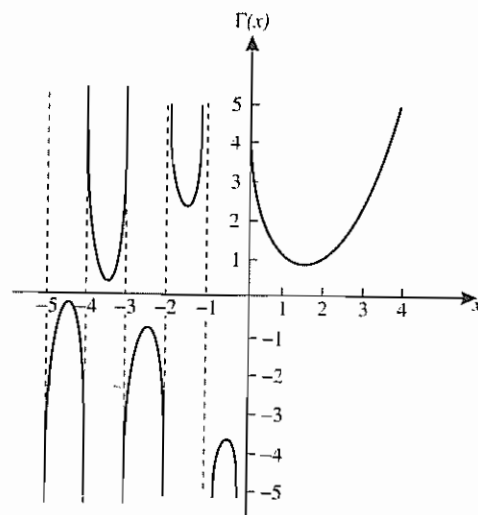
$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

➤ Prolongement de l'ensemble de définition

En utilisant l'égalité $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ on définit de proche en proche $\Gamma(x)$ pour $x < 0$ et x non entier.

En x entier négatif ou nul, la fonction tend vers l'infini.

On obtient la représentation graphique :



Fonction bêta

➤ Définition

La fonction B est définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

➤ Autres expressions

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt.$$

➤ Propriété

Si $x > 0$ et $y > 0$

$$B(x, y) = B(y, x) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Intégrales s'exprimant par des fonctions eulériennes

► Intégrales de Wallis

$$I_\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^\alpha x \, dx.$$

Si $\alpha = 2p$ est un entier pair :

$$I_{2p} = \frac{\pi}{2^{2p+1}} \frac{(2p)!}{(p!)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

Si $\alpha = 2p + 1$ est un entier impair :

$$I_{2p} = 2^{2p} \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Si α est un réel tel que $\alpha > -1$:

$$I_\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}+1)}.$$

► Exemples d'intégrales elliptiques

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{n})}{n \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{n})} \quad (n > 0)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^n}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{n}) \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{n})}{n \Gamma(\frac{1}{2})} \quad (n > 0)$$

FONCTIONS DE BESSEL

Fonctions de Bessel (ou fonctions cylindriques) d'ordre α

Ce sont les solutions de l'équation différentielle de Bessel :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Dans la forme réelle, y est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Dans la forme complexe, y est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

L'ensemble des solutions constitue un espace vectoriel de dimension 2.

Forme générale (cas $\alpha \notin \mathbb{Z}$)

$$y = AJ_\alpha(x) + BJ_{-\alpha}(x)$$

où A et B sont des constantes quelconques et

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{2^{2k} k! \Gamma(\alpha + k + 1)}.$$

Valeurs particulières

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \quad J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

Fonctions de Bessel d'indice entier (cas $\alpha \in \mathbb{Z}$)

► Solution générale de l'équation de Bessel

Si $\alpha = n \in \mathbb{Z}$, on a alors $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Les solutions J_n et J_{-n} ne sont donc plus linéairement indépendantes.

Dans tous les cas, on obtient deux solutions linéairement indépendantes en considérant :

$$J_\alpha(x) \text{ et } N_\alpha(x) = \frac{\cos \alpha \pi J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin \alpha \pi}.$$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, $N_\alpha(x)$ est défini par $\lim_{k \rightarrow \alpha} N_k(x)$.

La fonction N_α est la fonction de Neumann d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou fonction de Bessel de deuxième espèce).

$H_\alpha^1 = J_\alpha + iN_\alpha$ et $H_\alpha^2 = J_\alpha - iN_\alpha$ sont les fonctions de Hankel (ou fonctions de Bessel de troisième espèce).

► *Fonction génératrice*

$$\exp \left[\frac{x}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} t^n J_n(x).$$

Représentation des fonctions de Bessel par des intégrales

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > -\frac{1}{2}$:

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2} \right)^\alpha \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{ixt} dt.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(nt - x \sin t) dt.$$

Relation de récurrence et formules de dérivation

$$J_{\alpha+1}(x) + J_{\alpha-1}(x) = \frac{2\alpha}{x} J_\alpha(x)$$

$$J'_\alpha(x) = \frac{1}{2} [J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x)]$$

$$\frac{d}{dx} [x^\alpha J_\alpha(x)] = x^\alpha J_{\alpha-1}(x)$$

Les fonctions de Bessel permettent de déterminer le spectre d'une onde modulée en fréquence.

FONCTIONS PARENTES DES FONCTIONS DE BESSEL

Fonctions de Bessel modifiées

► *Définition*

Ce sont les solutions de l'équation de Bessel modifiée :

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\alpha^2}{x^2} \right) y = 0 \quad (\alpha > 0).$$

► *Forme générale*

$$y = AJ_\alpha(ix) + BN_\alpha(ix).$$

Mais les fonctions $J_\alpha(ix)$ et $N_\alpha(ix)$ ne sont pas nécessairement réelles lorsque x est réel. Pour obtenir des fonctions qui prennent des valeurs réelles pour $x > 0$, on utilise généralement :

$$I_\alpha(x) = e^{-i\pi\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\alpha+2k}$$

$$K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\alpha}(x) - J_\alpha(x)}{\sin \pi \alpha}$$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, $K_\alpha(x)$ est défini par $\lim_{k \rightarrow \alpha} K_k(x)$.

Les fonctions K_α sont les fonctions de Macdonald.

► *Relations de récurrence et dérivation*

$$I_{\alpha-1}(x) - I_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x} I_\alpha(x)$$

$$I'_\alpha(x) = \frac{1}{2} [I_{\alpha-1}(x) + I_{\alpha+1}(x)]$$

$$K_{\alpha-1}(x) - K_{\alpha+1}(x) = -\frac{2\alpha}{x} K_{\alpha}(x)$$

$$K'_{\alpha}(x) = -\frac{1}{2} [K_{\alpha-1}(x) + K_{\alpha+1}(x)]$$

► Représentation par des intégrales

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > -\frac{1}{2}$:

$$I_{\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-xt} dt$$

$$K_{\alpha}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\alpha} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-xt} dt$$

Fonctions de Kelvin

► Définition

Ce sont les fonctions réelles Ber_{α} et Bei_{α} définies par :

$$\text{Ber}_{\alpha} + i \text{Bei}_{\alpha} = J_{\alpha} \left(x e^{3i\frac{\pi}{4}} \right)$$

où J_{α} est la fonction de Bessel d'indice α .

Elles vérifient l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(i + \frac{\alpha^2}{x^2} \right) y = 0.$$

► Développements en séries

Pour $\alpha = 0$, $\text{Ber}_0(x)$ et $\text{Bei}_0(x)$ se notent respectivement $\text{Ber}(x)$ et $\text{Bei}(x)$ et on a :

$$\text{Ber}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n)!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{[n!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$\text{Bei}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[(2n+1)!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{[n!]^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

Pour α quelconque :

$$\text{Ber}_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\left[\left(\frac{3}{2}\alpha - n\right) \frac{\pi}{2}\right]}{n! \Gamma(\alpha + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

$$\text{Bei}_{\alpha}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left[\left(\frac{3}{2}\alpha - n\right) \frac{\pi}{2}\right]}{n! \Gamma(\alpha + n + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

POLYNÔMES D'HURWITZ

Définition

Un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ est dit polynôme d'Hurwitz si la partie réelle de tous ses zéros dans $\mathbb{C}$ est négative.

Quand un système physique est représenté par une équation différentielle linéaire à coefficients constants dont l'équation caractéristique est un polynôme d'Hurwitz, il est stable. S'il est écarté de sa position d'équilibre, il y revient exponentiellement en fonction du temps.

Condition nécessaire (non suffisante)

Tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Condition nécessaire et suffisante

$$\left| \frac{P(z)}{P(-z)} \right| > 1 \quad \text{quand } \text{Re}(z) > 0$$

$$= 1 \quad \text{quand } \text{Re}(z) = 0$$

$$< 1 \quad \text{quand } \text{Re}(z) < 0$$

Le dénominateur de la fonction de transfert d'un filtre polynomial est un polynôme de Hurwitz. L'approximation de Butterworth est telle que, pour un polynôme de degré n , l'atténuation du filtre et ses $n - 1$ premières dérivées sont nulles à l'origine.

Avec ces conditions, on obtient un polynôme B_n , unique pour chaque degré n .

Premières valeurs des polynômes de Butterworth :

$$B_1 = 1 + x$$

$$B_2 = 1 + \sqrt{2}x + x^2$$

$$B_3 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

$$B_4 \approx x^4 + 2,613x^3 + 3,414x^2 + 2,613x + 1$$

$$B_5 \approx x^5 + 3,236x^4 + 5,236x^3 + 5,236x^2 + 3,236x + 1$$

AUTRES FONCTIONS SPÉCIALES

Sinus et cosinus intégral

► Définitions

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$\text{si}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \text{Si}(x) - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ci}(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = \ln x + C - \int_0^x \frac{1 - \cos t}{t} dt \quad (x > 0)$$

où C est la constante d'Euler, c'est-à-dire :

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right] \approx 0,5772.$$

La fonction sinus cardinal $\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ représente le spectre d'une vibration sinusoïdale tronquée. Elle est utilisée en traitement du signal.

► Développements en séries

$$\text{Si}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

$$\text{Ci}(x) = \ln x + C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n)!}$$

Exponentielle et logarithme intégral

► Définitions ($x > 0$)

$$E_1(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{u} du, \quad Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$$

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}, \quad li(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$$

► Propriétés

$$E_1(x) = -Ei(-x)$$

$$li(x) = Ei(\ln x) = -E_1(-\ln x)$$

► Développement en série

$$E_1(x) = -C - \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n n!}$$

où C est la constante d'Euler.

Intégrales de Fresnel

► Définitions

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt.$$

► Propriété

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} C(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \frac{1}{2}.$$

► Développements en séries

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!}$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \frac{x^{4n+1}}{(4n+3)(2n+1)!}$$

► Expressions à l'aide des fonctions de Bessel

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right), \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right).$$

Fonction zêta de Riemann

► Définition

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

La série est convergente pour $x > 1$. On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)\zeta(x) = 1$.

► Valeurs particulières

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

► Lien avec la constante d'Euler

$$C = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \zeta(n).$$

► Identité d'Euler

$$\zeta(s) = \prod_{p=2}^{\infty} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

où le produit concerne tous les nombres premiers p successifs.

La répartition des zéros de la fonction ζ est utilisée en thermodynamique (gaz parfaits).

Fonctions de Debye

► Définition

$$D_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{e^t - 1} dt.$$

► Lien avec la fonction ζ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} D_n(x) = n! \zeta(n+1).$$

Fonction d'erreur

► Définition

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

notée aussi $\text{erf}(x)$. Elle est liée à la fonction de répartition Φ de la loi normale réduite par $\Theta\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 2\Phi(x)$.

► *Développement en série*

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)}.$$

3

Approximation de la forme d'une fonction

COURBES DE BÉZIER

Polynômes de Bernstein

Pour i et n entiers avec $0 \leq i \leq n$, on définit :

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}.$$

Courbes de Bézier

Il s'agit d'un modèle mathématique de la forme d'un objet, en vue de sa réalisation industrielle par des machines à commande numérique.

► *Définition*

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $n+1$ points de contrôle $P_0, \dots, P_n$. La courbe de Bézier associée est l'ensemble

des points $M(t)$ définis par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \overrightarrow{OP}_i$$

lorsque t décrit $[0, 1]$.

Cette définition s'étend aux surfaces.

► Propriétés

$M(t)$ est le barycentre des points P_i affectés des coefficients $B_{i,n}(t)$ puisque $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) = 1$. Une courbe de Bézier ne dépend donc que des points de contrôle. Mais si on modifie l'un de ces points, on change l'allure globale de la courbe.

La courbe de Bézier, de points de contrôle $P_0, \dots, P_n$, est tangente en P_0 à la droite (P_0P_1) si $P_0 \neq P_1$, et en P_n à la droite $(P_{n-1}P_n)$ si $P_{n-1} \neq P_n$.

► Construction

Pour $0 \leq p \leq n$, on considère une suite de points $(M_0^p, \dots, M_n^p)$ égaux aux points de contrôle pour $p = 0$ et qui vérifient la relation de récurrence :

$$\overrightarrow{OM}_n^p(t) = (1-t) \overrightarrow{OM}_{n-1}^{p-1}(t) + t \overrightarrow{OM}_n^{p-1}(t).$$

Pour $p = n$, on aboutit aux points $M(t)$ de la courbe de Bézier.

COURBES B-SPLINES

Le modèle de Bézier ne permet pas une modification locale de la courbe. Et le degré des polynômes de Bernstein devient vite un obstacle aux calculs quand le nombre des points de contrôle augmente.

On préfère donc un modèle qui utilise des polynômes de degré faible et qui permet une déformation locale.

Vecteur nœud

Un vecteur nœud est une suite finie croissante d'entiers naturels $t_0, \dots, t_k$. t_i est un nœud simple si $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$.

t_i est un nœud multiple d'ordre p si $t_{i-1} < t_i = \dots = t_{i+p-1} < t_{i+p}$.

Fonctions B-splines

► Définition

Les fonctions polynomiales B-splines $N_{i,m}$ sont définies par :

(1) pour $m = 0$:

$$N_{i,0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(2) pour $m \in \mathbb{N}^*$:

$$N_{i,m}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i} N_{i,m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1} - t}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} N_{i+1,m-1}(t).$$

Dans le cas de nœuds multiples, il peut arriver que le dénominateur d'un quotient du second membre de la relation (2) soit nul. On convient alors que ce quotient est nul.

► Propriétés

Une fonction B-spline $N_{i,m}$ est polynomiale de degré m par intervalles, nulle à l'extérieur de $[t_i, t_{i+m+1}[$.

Si, dans l'intervalle $[t_i, t_{i+m+1}[$, tous les nœuds sont simples, alors la fonction $N_{i,m}$ est de classe C^{m-1} .

La présence d'un nœud multiple d'ordre p diminue de $p - 1$ l'ordre de différentiabilité.

Courbes B-splines

► Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $n+1$ points de contrôle $P_0, \dots, P_n$ et le nœud $t_0, \dots, t_k$.

La courbe B-spline associée est l'ensemble des points $M(t)$ définis par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n N_{i,m}(t) \overrightarrow{OP_i}$$

où les $N_{i,m}$ sont les fonctions B-splines de degré m avec $m \leq n$.

► Propriétés

La forme d'une courbe B-spline dépend de la position des points de contrôle, mais aussi du choix du vecteur nœud.

Pour une courbe de degré m , on choisit souvent un vecteur nœud tel que l'ordre de multiplicité des valeurs extrêmes soit égal à $m+1$. La courbe passe alors par P_0 et P_n , et admet pour tangentes en ces points les droites (P_0P_1) et $(P_{n-1}P_n)$.

► Construction

En notant $\alpha_{i,m}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i}$, la relation de récurrence :

$$N_{i,m}(t) = \alpha_{i,m}(t) N_{i,m-1}(t) + [1 - \alpha_{i+1,m}(t)] N_{i+1,m-1}(t)$$

conduit à un algorithme de construction analogue à celui des courbes de Bézier.

4

Champs scalaires ; champs de vecteurs

Soit A une partie ouverte du plan ou de l'espace.

Un **champ scalaire** défini sur A est une application f de A dans $\mathbb{R}$.

Un **champ de vecteurs** défini sur A est une application qui à tout point M de A associe un vecteur $\vec{V}(M)$. Dans le cas de l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on peut écrire :

$$\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

Le champ $\vec{V}$ est de classe C^k sur A si les fonctions P , Q et R sont C^k sur A .

OPÉRATEURS CLASSIQUES

Gradient

Soit f un champ scalaire de classe C^1 sur A . Son gradient au point $M(x, y, z)$ est le vecteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \vec{k}.$$

Laplacien

Soit f un champ scalaire de classe C^2 sur A . Son laplacien en $M(x, y, z)$ est le scalaire :

$$\Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z).$$

Divergence

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur A . Sa divergence au point $M(x, y, z)$ est le scalaire :

$$\text{div } \vec{V}(x, y, z) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z).$$

Ce réel ne dépend pas du repère orthonormal choisi.

Rotationnel

Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur A . Son rotationnel au point $M(x, y, z)$ est le vecteur :

$$\text{rot } \vec{V}(x, y, z) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Ce vecteur ne dépend pas du repère orthonormal direct choisi.

PROPRIÉTÉS DES OPÉRATEURS CLASSIQUES

On considère des champs scalaires f et g , et des champs de vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, définis sur un ouvert A . On suppose $f, g, \vec{U}$ et $\vec{V}$ de classe C^2 .

Propriétés fondamentales

$$\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) ; \text{div}(\text{rot } \vec{V}) = 0 ; \text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0}.$$

Autres égalités

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} f ;$$

$$\Delta(fg) = f \Delta g + g \Delta f + 2 \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{\text{grad}} g ;$$

$$\text{div}(f \vec{V}) = f \text{div } \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{V}$$

$$\text{rot}(f \vec{V}) = f \text{rot } \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \vec{V} ;$$

$$\text{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{U} \cdot \text{rot } \vec{V} - \vec{V} \cdot \text{rot } \vec{U}.$$

Théorème de Poincaré

Sur un ouvert A simplement connexe, on a :

$$\text{rot } \vec{V} = \vec{0} \iff \exists f \quad \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f.$$

L'hypothèse sur A signifie que deux points de A peuvent toujours être reliés par une courbe continue incluse dans A et que toute courbe fermée de A peut être ramenée à un point par déformation continue.

Attention, cette équivalence exige des conditions sur le domaine sur lequel on se place.

Dans le cas d'attractions coulombiennes, on est conduit à considérer des champs de vecteurs non définis en un point, ou deux. Dans ce cas, distinguez bien le plan et l'espace.

Le plan privé d'un point n'est pas simplement connexe et le théorème de Poincaré ne s'applique pas. En revanche, l'espace privé d'un point est simplement connexe et le théorème de Poincaré s'applique.

Le champ magnétique créé par un courant électrique dans un fil illimité a son rotationnel nul, mais n'est pas un champ de gradients. Ce n'est pas surprenant, car le théorème de Poincaré ne s'applique pas à l'espace privé d'une droite.

COORDONNÉES POLAIRES (DANS LE PLAN)

Repérage d'un point

$(O, \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormal du plan, un point M se repère par ses coordonnées cartésiennes (x, y) telles que :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Il peut aussi se repérer par ses coordonnées polaires (ρ, θ) telles que :

$$x = \rho \cos \theta \quad \text{et} \quad y = \rho \sin \theta,$$

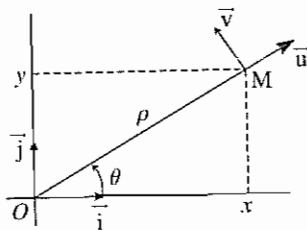
et on a $\vec{OM} = \rho \vec{u}$.

Les nombres ρ et θ sont bien définis, sauf pour l'origine O caractérisée par $\rho = 0$ avec θ quelconque. Ils sont uniques si on impose $\rho > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Repère mobile

Si M est distinct de O , $(M, \vec{u}, \vec{v})$ est le repère mobile orthonormal lié à M dans les coordonnées polaires (ρ, θ) . Il est défini par :

$$\begin{aligned} \vec{u}(\theta) &= \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v}(\theta) &= -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}. \end{aligned}$$



On a :

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}.$$

Le repère mobile associé aux coordonnées polaires se note aussi $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta)$.

Gradient et laplacien

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 . Le repérage d'un point (x, y) par ses coordonnées polaires (ρ, θ) conduit à introduire la fonction :

$$(\rho, \theta) \mapsto F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Le gradient de f en un point peut alors s'écrire :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial F}{\partial \rho} \vec{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{v}$$

et le laplacien :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

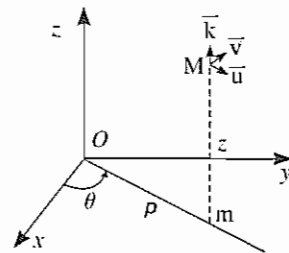
COORDONNÉES CYLINDRIQUES (DANS L'ESPACE)

Repérage d'un point

Un point M de l'espace peut se repérer par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans un repère orthonormal.

En notant m le projeté orthogonal de M sur le plan xOy , on peut aussi repérer le point $m(x, y)$ par ses coordonnées polaires (ρ, θ) si $m \neq O$ et conserver la cote z .

Le triplet (ρ, θ, z) représente les coordonnées cylindriques de M .



Un cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon R a pour équation $\rho = R$ et un point M de ce cylindre se caractérise par deux coordonnées (θ, z) . C'est l'origine du mot « coordonnées cylindriques ».

Repère mobile

Le repère mobile associé aux coordonnées cylindriques est le repère orthonormal $(M, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$. Il se note aussi $(M, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

Gradient et laplacien

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 . Le repérage d'un point (x, y, z) par ses coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) conduit à introduire la fonction F définie par :

$$F(\rho, \theta, z) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z).$$

Le gradient de f en un point peut alors s'écrire :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial F}{\partial \rho} \vec{u} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{v} + \frac{\partial F}{\partial z} \vec{k}$$

et le laplacien :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

Divergence et rotationnel

Si $\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z$, on a :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{\rho} V_\rho + \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} V_\theta + \frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

COORDONNÉES SPHÉRIQUES (DANS L'ESPACE)

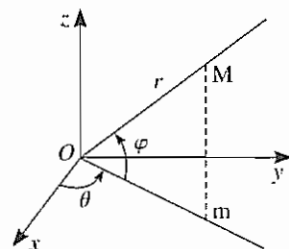
Repérage d'un point

Dans l'espace, on peut aussi repérer un point M n'appartenant pas à (Oz) par :

► l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ entre le demi-plan xOz et le demi-plan zOM (θ est représenté dans le plan horizontal xOy);

► l'angle $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ situé dans le demi-plan zOM entre $\vec{Om}$ et $\vec{OM}$;

► la distance $r = OM$.



Le triplet (r, θ, φ) représente les coordonnées sphériques de M .

Une sphère de centre O et de rayon R a pour équation $r = R$ et un point M de la sphère se caractérise par deux coordonnées (θ, φ) .

C'est l'origine du mot « coordonnées sphériques ».

Sur la sphère terrestre, xOy est le plan de l'équateur, Oz est l'axe des pôles, xOz est le demi-plan du méridien de Greenwich; θ est alors la longitude et φ la latitude du point M . On a :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

En physique on considère souvent l'angle $(Oz, OM) \in]0, \pi[$. On l'appelle la colatitude du point M . Dans ce cas, n'oubliez pas d'en tenir compte dans les formules.

Repère mobile

Soit M un point n'appartenant pas à (Oz) , de coordonnées sphériques $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$.

$r = r_0$ est l'équation de la sphère de centre O passant par M . Sur cette sphère, $\theta = \theta_0$ est l'équation du méridien passant par M et $\varphi = \varphi_0$ celle du parallèle passant par M .

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire tel que $\vec{OM} = r_0 \vec{u}$; $\vec{v}$ le vecteur unitaire tangent au parallèle passant par M et parcouru dans le sens des θ croissants; $\vec{w}$ le vecteur unitaire tangent au méridien passant par M et parcouru dans le sens des φ croissants.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base orthonormale directe de l'espace.

$(M, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le repère mobile lié à M dans les coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On le note aussi $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. On a :

$$\vec{u} = \frac{d\vec{OM}}{dr} = \cos \varphi \cos \theta \vec{i} + \cos \varphi \sin \theta \vec{j} + \sin \varphi \vec{k}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{OM}}{d\theta} \right\|} \frac{d\vec{OM}}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{\left\| \frac{d\vec{OM}}{d\varphi} \right\|} \frac{d\vec{OM}}{d\varphi} = -\sin \varphi \cos \theta \vec{i} + \sin \varphi \sin \theta \vec{j} + \cos \varphi \vec{k}$$

Gradient et laplacien

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$. Le repérage d'un point (x, y, z) par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) conduit à introduire la fonction F définie par :

$$F(r, \theta, \varphi) = f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi).$$

Le gradient de f en un point peut alors s'écrire :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{u} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{v} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \vec{w}$$

et le laplacien :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - \frac{\tan \varphi}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

Divergence et rotationnel

Si $\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\varphi \vec{e}_\varphi$, on a :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{2}{r} V_r + \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\tan \varphi}{r} V_\varphi + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{V} = & \left(-\frac{\tan \varphi}{r} V_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} - \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r \\ & + \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} V_\varphi \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho \cos \varphi} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} V_\theta - \frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

5

Intégrales multiples

INTÉGRALE DOUBLE SUR UN RECTANGLE

Sommes de Darboux

Soit f une fonction bornée sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ et à valeurs réelles.

Soit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b$ une subdivision de $[a, b]$

et $y_0 = c < y_1 < \dots < y_n = d$ une subdivision de $[c, d]$.

Les mn rectangles $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ forment une subdivision σ de R .

On appelle sommes de Darboux de f associées à σ les nombres :

$$s(\sigma) = \sum_{i,j} \inf_{R_{ij}} f \times \text{aire } R_{ij} \quad \text{et} \quad S(\sigma) = \sum_{i,j} \sup_{R_{ij}} f \times \text{aire } R_{ij}$$

L'ensemble des sommes $s(\sigma)$, quand σ varie, est majoré et admet donc une borne supérieure.

L'ensemble des sommes $S(\sigma)$, quand σ varie, est minoré et admet donc une borne inférieure.

Fonction intégrable

Si f est bornée sur R , on dit que f est intégrable sur R lorsque la borne supérieure des $s(\sigma)$ est égale à la borne inférieure des $S(\sigma)$. Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur R et notée :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \quad \text{ou} \quad \iint_R f$$

En particulier, les fonctions continues sont intégrables sur R .

Propriétés de l'intégrale

► Linéarité

Soit f et g deux fonctions intégrables sur R et λ et μ deux réels ; alors :

$$\iint_R [\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)] \, dx \, dy = \lambda \iint_R f(x, y) \, dx \, dy + \mu \iint_R g(x, y) \, dx \, dy.$$

► Croissance

Soit f et g deux fonctions intégrables sur R telles que $f(x, y) \leq g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in R$; alors :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_R g(x, y) \, dx \, dy.$$

On en déduit que :

$$\left| \iint_R f(x, y) \, dx \, dy \right| \leq \iint_R |f(x, y)| \, dx \, dy.$$

➤ **Additivité par rapport au domaine**

Si $x_0 \in]a, b[$ et $y_0 \in]c, d[$, on a :

$$\begin{aligned}\iint_R f &= \iint_{[a, x_0] \times [c, d]} f + \iint_{[x_0, b] \times [c, d]} f \\ &= \iint_{[a, b] \times [c, y_0]} f + \iint_{[a, b] \times [y_0, d]} f\end{aligned}$$

Calcul de l'intégrale

➤ **Théorème de Fubini**

Soit f une fonction intégrable sur un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ et à valeurs réelles. On a :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

Ce théorème permet de calculer l'intégrale double par deux intégrales simples successives.

Il peut arriver que l'un des emboîtements ne permette pas le calcul de primitives et que l'autre conduise au résultat.

➤ **Cas particulier**

Dans le cas où f s'écrit sous la forme d'un produit de deux fonctions intégrables à une variable :

$$f(x, y) = g(x) h(y)$$

l'intégrale double sur le rectangle est alors le produit de deux intégrales simples :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b g(x) \, dx \times \int_c^d h(y) \, dy$$

EXTENSION À UNE PARTIE BORNÉE DU PLAN

Définition

Soit f une fonction bornée, définie sur une partie bornée A de $\mathbb{R}^2$, et à valeurs dans $\mathbb{R}$. La partie A est alors incluse dans un rectangle R .

On dit que f est intégrable sur A si la fonction $\tilde{f}$ définie sur R par :

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y) \in R \setminus A \end{cases}$$

est intégrable et l'on pose :

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R \tilde{f}(x, y) \, dx \, dy.$$

L'additivité par rapport au domaine entraîne que cette définition ne dépend pas du choix du rectangle R contenant A .

Théorème de Fubini

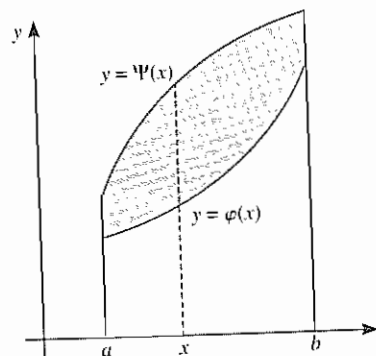
Soit φ et ψ deux fonctions continues sur $[a, b]$ avec $\varphi \leq \psi$; notons A l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad \varphi(x) \leq y \leq \psi(x).$$

Alors :

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

On peut permuter les rôles de x et de y .



CHANGEMENT DE VARIABLES

Théorème

Soit $f(x, y)$ une fonction intégrable sur une partie bornée D , en bijection avec une partie bornée Δ au moyen des fonctions de classe C^1 $x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$; alors :

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| \, du \, dv$$

Le déterminant :

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v) \end{vmatrix}$$

est le jacobien du changement de variables.

Cas des coordonnées polaires

Le changement de variables $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$ a pour jacobien

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho \text{ d'où :}$$

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{\Delta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho \, d\rho \, d\theta$$

Grâce à cette transformation, l'intégration sur un disque, une couronne ou un secteur angulaire se ramène à une intégration sur un rectangle.

INTÉGRALES TRIPLES

Approche et calcul

f étant une fonction bornée sur une partie bornée D de $\mathbb{R}^3$, on définit l'intégrale triple $\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ de façon analogue aux intégrales doubles.

Le calcul pratique se fait par intégrations successives à l'aide du théorème de Fubini prolongé en dimension 3.

L'intégrale triple possède les propriétés de linéarité habituelles et la propriété d'additivité par rapport à la réunion de domaines dont l'intersection est de volume nul.

Changement de variables

Dans le cas général, si D est en bijection avec Δ borné au moyen des fonctions de classe C^1

$$\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

on a :

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \iiint_{\Delta} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

En particulier, si le même domaine géométrique est représenté par une partie D de $\mathbb{R}^3$ en coordonnées cartésiennes et par une partie Δ (plus simple) en coordonnées cylindriques ou sphériques, on utilise la formule de changement de variables.

► en coordonnées cylindriques :

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Delta} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz,$$

► en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \iiint_{\Delta} f(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta. \end{aligned}$$

Attention, dans cette formule φ est la latitude. N'oubliez pas de modifier si vous utilisez la colatitude.

APPLICATIONS

Aire et volume

Si $f(x, y) = 1$, l'intégrale double $\iint_A dx \, dy$ est l'aire de A .

Si $f(x, y, z) = 1$, l'intégrale triple $\iiint_A dx \, dy \, dz$ est le volume de A .

Moments et centres d'inertie

Supposons que $f(x, y)$, ou $f(x, y, z)$, représente la densité surfacique au point (x, y) , ou la densité volumique au point (x, y, z) , d'une surface ou d'un volume A .

► Masse

L'intégrale double, ou triple de f sur A est alors la masse M de A .

► Centre d'inertie

Le centre d'inertie G d'un solide A est défini par ses coordonnées :

$$x_G = \frac{1}{M} \iint_A x f(x, y) \, dx \, dy;$$

$$y_G = \frac{1}{M} \iint_A y f(x, y) \, dx \, dy.$$

Dans l'espace, les coordonnées de G sont des intégrales triples analogues.

► Moments d'inertie

Le moment d'inertie de A par rapport à un point O , ou par rapport à un axe Δ , est le nombre :

$$\iint_A r^2(x, y) f(x, y) \, dx \, dy,$$

où $r(x, y)$ est la distance du point (x, y) à O , ou à Δ .

Dans l'espace, l'intégrale double est remplacée par une intégrale triple.

On définit aussi le moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan.

INTÉGRALES MULTIPLES GÉNÉRALISÉES (DOMAINE NON BORNÉ)

Définition

Soit f une fonction à 2 (ou 3) variables, continue sur un domaine non borné D . On considère une suite de domaines fermés bornés D_n , croissante, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad D_n \subset D_{n+1}$$

et tendant vers D , c'est-à-dire :

$$\forall x \in D \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x \in D_n$$

Par exemple, si D est le plan, on peut prendre pour D_n des disques de centre O et de rayons R_n avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n \leq R_{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = +\infty$$

Si la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy$ existe, et ne dépend pas du choix de la suite (D_n) , on dit que l'intégrale double généralisée de f sur D converge, ou existe, et on note :

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée diverge, ou n'existe pas.

Cas d'une fonction positive

Si $f(x, y) \geq 0$ pour tout $(x, y) \in D$, pour que l'intégrale de f sur D converge, il faut et il suffit que la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy$ existe pour une seule suite (D_n) .

On obtient $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$ en calculant $I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy$ avec des disques de centre O et les coordonnées polaires.

6

Intégrales curvilignes

ARC DE COURBE PARAMÉTRÉ

Définition

Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle définie et continue sur un intervalle I :

$$t \mapsto \vec{F}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$$

L'espace étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'ensemble Γ des points M tels que :

$$\vec{OM} = \vec{F}(t) \quad t \in I$$

est un arc de courbe paramétré.

On dit que $\vec{F}(t)$ est une représentation paramétrique de Γ , ou encore que Γ a pour équations paramétriques :

$$x = x(t) ; y = y(t) ; z = z(t) \quad t \in I$$

et on supposera la fonction $\vec{F}$ de classe C^2 .

Droite tangente et plan normal

Un point régulier de Γ est tel que $\vec{OM}'(t) \neq \vec{0}$. Dans ce cas, $\vec{OM}'(t)$ est un vecteur directeur de la tangente en $M(t)$ à Γ , ainsi que le vecteur unitaire

$$\vec{T} = \frac{\vec{OM}'(t)}{\|\vec{OM}'(t)\|}.$$

Le plan passant par M et orthogonal à $\vec{T}$ est le plan normal en M à Γ .

Un arc Γ est orienté par le choix de l'un des deux sens de parcours possibles, ce qui revient à distinguer les vecteurs unitaires tangents (opposés) $\vec{T}_+$ et $\vec{T}_-$.

Si $\vec{OM}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ est l'équation du mouvement d'une particule, alors la courbe Γ , orientée dans le sens du parcours, est la trajectoire du mouvement ; le vecteur $\vec{OM}'(t)$ est la vitesse de la particule et $\vec{OM}''(t)$ l'accélération.

Longueur d'un arc de courbe paramétré

Si $I = [a, b]$, l'arc Γ a pour longueur :

$$L = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

La longueur L est indépendante du paramétrage choisi.

On pose habituellement :

$$ds = \|\vec{OM}'(t)\| dt = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

L'élément d'arc ds joue dans les intégrales curvilignes le même rôle que l'élément dx dans l'intégrale simple. L'abscisse curviligne s est

un paramétrage de C tel que $\frac{d\vec{OM}}{ds}$ soit unitaire.

INTÉGRALE CURVILIGNE

Intégrale curviligne d'une fonction

Soit f une fonction continue dans un domaine D contenant Γ . L'intégrale curviligne de f sur Γ est définie par l'intégrale simple du second membre :

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\vec{OM}'(t)\| dt$$

Si f est la densité de répartition d'une grandeur physique le long de Γ , l'intégrale représente la quantité totale contenue dans Γ .

Le chemin optique entre deux points A et B d'une courbe C est l'intégrale curviligne $\int_{AB} n(x, y, z) ds$ où $n(x, y, z)$ est l'indice du milieu au point (x, y, z) .

Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe orientée

Soit Γ^+ un arc orienté par $\vec{T}_+$ et $\vec{V}$ le champ de vecteurs :

$$\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}.$$

La circulation du champ de vecteurs le long de la courbe orientée est l'intégrale curviligne :

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{T}_+ ds \quad \text{notée aussi} \quad \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{M}.$$

Dans le cas où $\vec{V}(M)$ représente une force variable appliquée au point M , la circulation est le travail de la force au cours du déplacement le long de Γ^+ .

Propriétés de l'intégrale curviligne

► Linéarité par rapport au champ de vecteurs

Si $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont deux champs de vecteurs, et λ et μ des réels, on a :

$$\int_{\Gamma} (\lambda \vec{V}_1 + \mu \vec{V}_2) \cdot d\vec{M} = \lambda \int_{\Gamma} \vec{V}_1 \cdot d\vec{M} + \mu \int_{\Gamma} \vec{V}_2 \cdot d\vec{M}$$

► Additivité par rapport aux arcs

Si Γ a pour origine A et pour extrémité B , et si C est un point de l'arc $\widehat{AB}$, alors :

$$\int_{\widehat{AB}} \vec{V} \cdot d\vec{M} = \int_{\widehat{AC}} \vec{V} \cdot d\vec{M} + \int_{\widehat{CB}} \vec{V} \cdot d\vec{M}$$

Si $\widehat{AB}$ est C^1 par morceaux avec des arcs $\widehat{AC}$ et $\widehat{CB}$ qui sont C^1 , cette égalité sert de définition à l'intégrale curviligne sur $\widehat{AB}$.

Circulation d'un champ de gradients

Si $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} f$ est un champ de gradients, la circulation de $\vec{V}$ le long d'un arc $\widehat{AB}$ est égale à $f(B) - f(A)$.

Elle ne dépend donc que des extrémités du chemin d'intégration.

La circulation d'un champ de gradients le long d'une courbe fermée est nulle.

Si $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ est un champ électrique, la circulation de $\vec{E}$ conduit à la définition du potentiel électrique entre deux points.

FORMULE DE GREEN-RIEMANN

Soit D une partie fermée bornée du plan limitée par un bord C de classe C^1 par morceaux, et P et Q des fonctions C^1 dans D . On a :

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

où le symbole C^+ désigne le bord C , orienté de sorte qu'un mobile parcourant C a toujours D à sa gauche.

7

Intégrales de surface

SURFACE PARAMÉTRÉE

Définition

Une surface S peut être représentée :

- soit par une équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, avec le cas particulier $z = g(x, y)$;
- soit par une représentation paramétrique $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(u, v)$ où $\overrightarrow{F}$ est une fonction vectorielle de classe C^1 sur un domaine borné D ayant une frontière C^1 par morceaux :

$$(u, v) \mapsto \overrightarrow{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3.$$

Plan tangent et droite normale

- Sous forme cartésienne, un point régulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de S est défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0) \neq \overrightarrow{0}.$$

Le plan tangent en M_0 à S a alors pour équation :

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

et $\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0, z_0)$ est normal en M_0 à S .

- Sous forme paramétrique, un point régulier $M_0(u_0, v_0)$ de S est tel que les vecteurs $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont linéairement indépendants.

Le plan tangent en M_0 à S est alors défini par les vecteurs directeurs

$$\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ et } \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0, v_0) \text{ et la normale en } M_0 \text{ par le vecteur directeur } \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Aire d'une surface

Une surface paramétrée par :

$$\begin{aligned} D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto \overrightarrow{F}(u, v) \end{aligned}$$

a pour aire :

$$A = \iint_D \left\| \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$$

L'expression $dA = \left\| \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u, v) \right\| du dv$ est appelée élément d'aire de la surface.

Dans le cas particulier où S est définie sous la forme $z = g(x, y)$, on a alors :

$$dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

INTÉGRALE DE SURFACE

Soit S une surface définie par la représentation paramétrique :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(u, v) \quad (u, v) \in D$$

Intégrale de surface d'une fonction

Soit f une fonction continue sur S . L'intégrale de surface de f sur S est définie par l'intégrale double du second membre :

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) \, dA \\ = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left\| \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v}(u, v) \right\| \, du \, dv \end{aligned}$$

Si f est la densité de répartition d'une grandeur physique sur S , l'intégrale représente la quantité totale sur S .

Flux d'un champ de vecteurs

► Surface orientée

Soit S une surface comportant deux faces distinctes. Elle est dite orientable.

En chaque point régulier, il existe deux vecteurs unitaires normaux opposés. Le choix de l'un de ces vecteurs $\vec{n}_+$ oriente la surface S .

► Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée

Soit S une surface orientable, orientée par le choix d'une normale unitaire $\vec{n}_+$ et $\vec{V}$ un champ de vecteurs continu sur S .

Le flux du champ $\vec{V}$ à travers S ainsi orientée est l'intégrale de surface :

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}_+ \, dA.$$

► Angle solide

L'angle solide sous lequel on voit la surface S orientée par le vecteur unitaire $\vec{n}_+$, à partir d'un point $M_0 \notin S$, est le flux à travers cette surface du champ de vecteurs :

$$\vec{V}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{M_0 M} \right).$$

Formule de Stokes

Soit S une surface orientée par la normale $\vec{n}$ et limitée par une courbe C qui est C^1 par morceaux. Le sens de parcours positif sur C est le sens direct autour de $\vec{n}$ et $\vec{T}$ désigne la tangente unitaire correspondant à cette orientation.

Soit $\vec{V}(x, y, z)$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur S . On a alors :

$$\iint_S \text{rot } \vec{V}(x, y, z) \cdot \vec{n} \, dA = \int_C \vec{V}(x, y, z) \cdot \vec{T} \, ds.$$

Autre énoncé

La circulation du champ $\vec{V}$ le long de la courbe fermée C est égale au flux du rotationnel de $\vec{V}$ à travers une surface limitée par C (avec l'orientation déjà précisée).

Formule d'Ostrogradski

Soit D un domaine de l'espace, borné et fermé, limité par une surface S , et $\vec{V}$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur D . On a la relation :

$$\iint_{S_+} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA = \iiint_D \text{div } \vec{V} \, dx \, dy \, dz$$

où S_+ désigne la surface orientée par la normale sortante.

Si $\vec{B}$ est un champ magnétique, sa divergence est nulle. Son flux à travers toute surface fermée est donc nul.

8

Équations aux différences finies

GÉNÉRALITÉS

Définitions

Lors de l'échantillonnage d'une grandeur physique x , le temps t est divisé en périodes successives de durée constante prise comme unité de temps. On introduit alors des différences finies

d'ordre 1 : $\Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$,

d'ordre 2 : $\Delta^2 x(t) = \Delta x(t+1) - \Delta x(t)$,

d'ordre p : $\Delta^p x(t) = \Delta^{p-1} x(t+1) - \Delta^{p-1} x(t)$.

Une équation aux différences finies d'ordre p est du type :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi(t, x(t), \Delta x(t), \dots, \Delta^p x(t)) = 0,$$

ce qu'on peut aussi écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \psi(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+p)) = 0.$$

En général, on s'intéresse aux solutions discrètes où t décrit $\mathbb{N}$ et on est ramené à la recherche des suites vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = f(n, u_{n+p-1}, \dots, u_n).$$

Si on dispose des p premières valeurs de la suite comme conditions initiales, les valeurs u_n peuvent s'obtenir, par récurrence, de façon unique.

Équations linéaires

► Définition

On a une équation linéaire aux différences finies dans le cas particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \dots + a_p u_n + b \quad (1)$$

où $a_1, a_2, \dots, a_p, b$ sont des fonctions données de n .

L'équation est d'ordre p si $a_p \neq 0$.

► Théorèmes dus à la linéarité

- La solution générale de l'équation (1) est égale à la solution générale de l'équation homogène associée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} - a_1 u_{n+p-1} - a_2 u_{n+p-2} - \dots - a_p u_n = 0, \quad (2)$$

et d'une solution particulière de (1).

- Les solutions de (2) forment un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension p .
- Si (v_n) est une solution particulière de

$$u_{n+p} - a_1 u_{n+p-1} - a_2 u_{n+p-2} - \dots - a_p u_n = b_1(n),$$

et si (w_n) est une solution particulière de

$$u_{n+p} - a_1 u_{n+p-1} - a_2 u_{n+p-2} - \dots - a_p u_n = b_2(n),$$

alors $(v_n + w_n)$ est une solution particulière de

$$u_{n+p} - a_1 u_{n+p-1} - a_2 u_{n+p-2} - \dots - a_p u_n = b_1(n) + b_2(n).$$

ÉQUATIONS LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Définition

Ces équations peuvent se mettre sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - au_n = b(n) \quad (1)$$

où a est une constante non nulle donnée.

Solution générale de l'équation homogène (2)

La solution générale (u_n^0) de l'équation homogène associée est une suite géométrique quelconque de raison a , soit $u_n^0 = u_0 a^n$.

Solution générale de (1)

Il reste à déterminer une solution particulière de (1).

► Cas où $b(n) = cb^n$ avec b et c constantes réelles

• Si $a \neq b$, en cherchant une solution particulière de (1) sous la forme Kb^n , on obtient $K = \frac{c}{b-a}$, d'où la solution générale :

$$u_n = \alpha a^n + \frac{c}{b-a} b^n = \left(u_0 - \frac{c}{b-a} \right) a^n + \frac{c}{b-a} b^n.$$

• Si $a = b$, en cherchant une solution particulière de (1) sous la forme $Kn b^n$, on obtient $K = \frac{c}{a}$, d'où la solution générale :

$$u_n = \alpha a^n + n c a^{n-1} = \left(u_0 + n \frac{c}{a} \right) a^n.$$

► Cas où $b(n) = b$ avec b constante réelle

• Si $a \neq 1$, la solution générale de (1) est :

$$u_n = \alpha a^n + \frac{b}{1-a} = \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) a^n + \frac{b}{1-a}.$$

• Si $a = 1$, la solution générale de (1) est :

$$u_n = \alpha a^n + nb = \alpha + nb = u_0 + nb.$$

► Cas où $b(n)$ est un polynôme de degré k

Le cas précédent correspond au cas particulier $k = 0$.

On cherche une solution particulière de (1) sous la forme d'un polynôme de degré $\leq k$ si $a \neq 1$,
de degré $\leq k + 1$ si $a = 1$.

ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Définition

Ces équations peuvent se mettre sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = c(n) \quad (1)$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

Solution générale de l'équation homogène (2)

On cherche des solutions de la forme r^n pour obtenir une base de l'espace vectoriel, de dimension 2, des solutions de l'équation homogène associée (2).

r est racine de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$ et la solution générale de (2) dépend du signe du discriminant $\Delta = a^2 + 4b$.

Remarquez l'analogie avec l'équation différentielle $x'' - ax' - bx = 0$.
Mais dans ce cas, on part de $x(t) = e^t$.

► Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 . La solution générale de (2) s'écrit alors :

$$u_n^0 = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et } \mu \in \mathbb{R}.$$

► Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine réelle double $r_0 = \frac{a}{2}$. La solution générale de (2) s'écrit alors :

$$u_n^0 = (\lambda + \mu n) r_0^n \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et } \mu \in \mathbb{R}.$$

► Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$. La solution générale de (2) s'écrit alors :

$$u_n^0 = \rho^n (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et } \mu \in \mathbb{R}.$$

Solution générale de (1)

Il reste à déterminer une solution particulière de (1).

► *Cas où $c(n) = dc^n$ avec c et d constantes réelles*

- Si c n'est pas racine de l'équation caractéristique, (1) admet une solution particulière de la forme Kc^n et on obtient $K = \frac{d}{c^2 - ac - b}$.
- Si c est racine simple de l'équation caractéristique, (1) admet une solution particulière de la forme Knc^n et on obtient $K = \frac{d}{2c^2 - ac}$.
- Si c est racine double de l'équation caractéristique, (1) admet une solution particulière de la forme Kn^2c^n et on obtient $K = \frac{2d}{c^2}$.

► *Cas où $c(n)$ est un polynôme de degré k*

On cherche une solution particulière de (1) sous la forme d'un polynôme de degré $\leq k$ si 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique,
de degré $\leq k+1$ si 1 est racine simple,
de degré $\leq k+2$ si 1 est racine double.

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

Soit (S) un système de p équations aux différences finies, linéaires du premier ordre, et faisant intervenir p suites inconnues. Si on dispose des p valeurs initiales, ces suites sont définies de façon unique.

La résolution de (S) peut se faire en utilisant la réduction d'une matrice.

Toute équation aux différences finies, linéaire d'ordre n , se ramène à un système de n équations du premier ordre.

Les équations aux différences finies permettent d'étudier le comportement des systèmes numériques. En particulier, une équation aux différences finies d'ordre n reliant les grandeurs d'entrée et de sortie d'un filtre numérique donne accès, après utilisation de la transformation en Z, à la fonction de transfert d'un filtre.

Suites et séries de fonctions

SUITES DE FONCTIONS

(f_n) désigne une suite de fonctions f_n définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Convergence simple

► Définition

La suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f , de I dans K , si :

$$\forall x \in I \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

► Convergence simple presque partout

On dit que (f_n) converge simplement vers f , presque partout sur I , si la convergence ponctuelle a lieu pour tout x appartenant à I privé d'un ensemble de mesure nulle.

Modes globaux de convergence

La convergence de (f_n) vers f peut faire intervenir le comportement global d'une fonction sur un intervalle.

À une fonction f , donnée sur $I = [0, T]$, on peut associer les grandeurs physiques pouvant être mesurées :

$$\text{amplitude maximale : } \sup_{t \in I} |f(t)|$$

$$\text{valeur moyenne : } \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| \, dt$$

$$\text{puissance moyenne : } \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

ce qui conduit à définir les normes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| ; \quad \|f\|_1 = \int_I |f(x)| \, dx ; \quad \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(x)|^2 \, dx},$$

puis les modes de convergence :

(f_n) converge uniformément vers f sur I si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

(f_n) converge en moyenne vers f sur I si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$$

(f_n) converge en moyenne quadratique vers f sur I si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$$

Liens entre les divers types de convergence

► Si (f_n) converge au sens de deux des cinq types de convergence énoncés (simple, simple presque partout, uniforme, en moyenne, en moyenne quadratique), alors les deux limites sont égales presque partout.

► Dans tous les cas :

convergence uniforme $\implies$ convergence simple

convergence simple $\Rightarrow$ convergence simple presque partout.

► Si I est un intervalle borné :

convergence uniforme $\Rightarrow$ convergence eu moyenne quadratique

convergence en moyenne quadratique $\Rightarrow$ convergence en moyenne.

Pour une suite de fonctions, l'information forte est donc la convergence uniforme.

Continuité de la limite

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I , et si chaque f_n est continue sur I , alors f est continue sur I .

Si les f_n sont continues sur I , et si f n'est pas continue sur I , alors la convergence n'est pas uniforme.

Il suffit que la convergence soit uniforme sur tout segment inclus dans I , pour que f soit continue sur I .

Intégration de la limite

Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I , et si chaque f_n est continue sur I , alors pour tous a et b dans I , on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

Si cette égalité n'a pas lieu, alors la convergence n'est pas uniforme.

Dérivation de la limite

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans I , convergeant en un point $a \in I$.

Si la suite des dérivées (f'_n) converge uniformément sur I , alors la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ dans I qui vérifie :

$$\forall x \in I \quad f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x).$$

SÉRIES DE FONCTIONS

Soit (u_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I . On considère les sommes partielles définies par :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

Convergence simple

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur I si la suite (S_n) converge simplement et on note :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x).$$

Convergence uniforme

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge uniformément sur I si la suite (S_n) converge uniformément sur I .

Propriétés

Pour une série $\sum_n u_n$ qui converge uniformément sur I , les théorèmes sur les suites de fonctions entraînent :

► Continuité

Si les u_n sont continues sur I , alors la somme S est continue sur I .

► Intégration

Si les u_n sont continues dans I et si $\sum_n u_n$ converge uniformément sur I , alors, pour tous a et b dans I , on a :

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^b u_k(x) dx \right).$$

► Dérivation

Si les u_n sont de classe C^1 dans I et si $\sum_n u'_n$ converge uniformément, alors la somme S est de classe C^1 et vérifie :

$$\forall x \in I \quad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u'_k(x).$$

Convergence normale

► Définition

On dit que la série $\sum_n u_n$ converge normalement sur I si la série des normes

$$\sum_n \|u_n\|_{\infty} \text{ converge.}$$

► Condition nécessaire et suffisante

La série $\sum_n u_n$ converge normalement sur I si, et seulement si, il existe une série numérique à termes positifs a_n telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |u_n(x)| \leq a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ convergente.}$$

► Théorème

La convergence normale de $\sum_n u_n$ entraîne la convergence uniforme de $\sum_n u_n$ et, pour tout $x \in I$, la convergence absolue de $\sum_n u_n(x)$.

Pour une série de fonctions, l'information forte est donc la convergence normale.

10

Séries entières

CONVERGENCE D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Série entière

Une série entière est une série de fonctions de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \quad \text{avec} \quad u_n(z) = a_n z^n$$

où z est la variable réelle ou complexe et les a_n des constantes réelles ou complexes.

Lemme d'Abel

Si la suite $(|a_n| r^n)$ est bornée, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < r$.

Rayon de convergence

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une série entière, elle vérifie une, et une seule, des trois propriétés :

- la série converge uniquement pour $z = 0$;
- il existe un nombre réel $R > 0$ tel que la série converge absolument pour tout z tel que $|z| < R$, et diverge pour tout z tel que $|z| > R$;
- La série converge absolument pour tout z .

Le nombre R du deuxième cas est appelé rayon de convergence de la série entière.

Dans le premier cas, le rayon de convergence est nul.

Dans le troisième cas, on dit que le rayon de convergence est infini.

Détermination du rayon de convergence

► Le nombre R est la borne supérieure des ensembles :

$$\{r \in \mathbb{R}_+ ; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \text{ converge}\} ; \quad \{r \in \mathbb{R}_+ ; |a_n| r^n \text{ borné}\}$$

► On détermine souvent R à partir de la règle de d'Alembert.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = l |z|^k$, en écrivant :

$$l |z|^k < 1 \iff |z| < \sqrt[k]{\frac{1}{l}}$$

on obtient $R = \sqrt[k]{\frac{1}{l}}$.

Cette méthode suppose l'existence d'une limite, ce qui n'est pas toujours le cas.

Mode de convergence

► La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence R converge absolument

dans l'intervalle (ouvert) de convergence $] - R, R[$ dans le cas réel ;
dans le disque (ouvert) de convergence $B(0, R)$ dans le cas complexe.

Pour $|z| > R$, la série diverge.

Si $|z| = R$, il n'y a pas de résultat général.

► La convergence est normale, donc uniforme, sur toute boule fermée incluse dans le disque de convergence.

Opérations algébriques

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2 , et de sommes respectives $f(z)$ et $g(z)$.

► Linéarité

Pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n$ a pour somme $\alpha f(z) + \beta g(z)$; son rayon de convergence R est tel que :

$$R = \min(R_1, R_2) \quad \text{si } R_1 \neq R_2$$

$$R \geq R_1 \quad \text{si } R_1 = R_2$$

► Produit

Si l'on pose :

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ a pour somme $f(z)g(z)$; son rayon de convergence R est tel que $R \geq \min(R_1, R_2)$.

Continuité

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ et de somme $f(z)$.

La fonction f est continue sur son disque de convergence (cas complexe) ou son intervalle de convergence (cas réel).

SÉRIE ENTIÈRE D'UNE VARIABLE RÉELLE

Dérivation

Si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, alors f est dérivable dans $] - R, R[$ et l'on a :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Il en résulte que f est indéfiniment dérivable sur $] - R, R[$.

Une série entière et sa série dérivée ont même rayon de convergence.

Mais, sur le bord de l'intervalle de convergence, les deux séries ne sont pas toujours de même nature.

Intégration

Si la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R \neq 0$, pour tout $x \in]-R, R[$ on a :

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

La série entière ainsi obtenue par intégration terme à terme a le même rayon de convergence que la série initiale.

FONCTIONS ANALYTIQUES

Fonction analytique en 0

Soit f une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert U contenant l'origine.

On dit que f est développable en série entière s'il existe une série entière de rayon de convergence $R \neq 0$ telle que :

$$\forall x \in]-R, R[\cap U \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On dit aussi que f est analytique en 0.

Si f est paire, on a $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si f est impaire, on a $a_{2k} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Condition nécessaire

Si f est développable en série entière avec $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, alors f est indéfiniment dérivable et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Donc, si le développement en série entière de f existe, il est unique.

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est la série de Taylor de f en 0.

Fonction analytique en x_0

Une fonction f est analytique en x_0 s'il existe un intervalle ouvert contenant x_0 dans lequel la somme de sa série de Taylor en x_0 est égale à $f(x)$, ce qui signifie qu'il existe $R > 0$ tel que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{pour } |x - x_0| < R.$$

Attention, il peut arriver que f soit indéfiniment dérivable au voisinage de 0 et que sa série de Taylor diverge pour tout $x \neq 0$, ou qu'elle converge et que sa somme soit différente de $f(x)$.

Condition suffisante

Si f est indéfiniment dérivable dans l'intervalle I défini par $|x - x_0| < R$ et s'il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

alors f est analytique en x_0 .

Développements de base

$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$

$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$R = 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$

APPLICATION AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Considérons l'équation différentielle du second ordre :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad (E)$$

On se propose d'obtenir des solutions au voisinage de x_0 (en général $x_0 = 0$).

Cas régulier

Si les coefficients $p(x)$ et $q(x)$ sont analytiques en x_0 , toute solution de l'équation différentielle (E) est analytique en x_0 .

Pour résoudre (E), on écrit $y(x)$ sous la forme d'une série entière de la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n.$$

On calcule $y'(x)$ et $y''(x)$: on reporte dans (E).

L'unicité d'un développement en série entière conduit à des relations permettant de calculer les coefficients c_n , souvent en fonction de c_0 et c_1 .

N'oubliez pas de vérifier que les séries entières obtenues ont un rayon de convergence non nul.

Cas singulier

Si les fonctions $(x - x_0)p(x)$ et $(x - x_0)^2 q(x)$ sont analytiques en x_0 , l'équation (E) possède au moins une solution de la forme :

$$y(x) = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n \quad \text{avec } c_0 \neq 0.$$

dans l'intervalle $|x - x_0| < R$ où R est le rayon de convergence de la série entière.

Ce théorème permet d'obtenir au moins une solution non nulle $y_1(x)$ de (E). On peut alors utiliser le changement de fonction inconnue

$y(x) = y_1(x)z(x)$ qui conduit à une équation différentielle du premier ordre en $z'(x)$.

Fonctions d'une variable complexe

FONCTION HOLOMORPHE

Fonction d'une variable complexe

Une fonction f de variable complexe est une application définie sur un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$:

$$z = x + iy \mapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

La limite et la continuité en un point, la continuité uniforme sur une partie se définissent comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définitions

La fonction f est dérivable en $z_0 \in D$ si $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ admet une limite (notée $f'(z_0)$) quand z tend vers z_0 .

Les opérations algébriques sur les dérivées sont les mêmes que dans le cas réel.

La fonction f est holomorphe sur D si elle est dérivable en tout point de D . Dans la suite, il faudra parfois supposer que D est

► *connexe* : d'un seul tenant (formellement, il n'existe pas de partition formée de deux parties ouvertes) ;

► *simplement connexe* : deux points de D peuvent toujours être reliés par une courbe continue incluse dans D (formellement, D est connexe par arcs) et toute courbe fermée incluse dans D peut être ramenée à un point par déformation continue (formellement, tout lacet inclus dans D est homotope à un point).

Cette propriété entraîne que D est connexe.

Conditions de Cauchy

La fonction f est holomorphe sur un domaine D si, et seulement si, les fonctions P , Q et leurs dérivées partielles sont continues sur D et vérifient :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Attention aux hypothèses de continuité. La fonction définie par

$$\begin{cases} f(z) = \frac{x^3 - y^3 + i(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} & \text{pour } z \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

vérifie les conditions de Cauchy en 0, alors que $f'(0)$ n'existe pas.

Propriétés angulaires

► Transformation conforme

Si f est holomorphe dans D et si $f'(z_0) \neq 0$, alors la transformation $z \mapsto Z = f(z)$ est conforme en z_0 , c'est-à-dire qu'elle conserve les angles.

La condition $f'(z_0) \neq 0$ est essentielle. Par exemple, $f(z) = z^2$ est holomorphe en 0 et les angles ne sont pas conservés.

On utilise des transformations conformes en aéronautique, en électronique... pour transformer un problème en un problème plus simple.

► Courbes orthogonales

Si f est holomorphe, les lignes de niveau $P(x, y) = a$ et $Q(x, y) = b$ se coupent à angle droit en tout point où les dérivées partielles des fonctions P et Q ne s'annulent pas.

Fonction holomorphe de classe $\mathcal{C}^2$

Si f est holomorphe dans D et si P et Q possèdent des dérivées partielles secondes continues, alors P et Q sont harmoniques, c'est-à-dire que :

$$\Delta P = 0 = \Delta Q.$$

Réciproquement, si P est une fonction harmonique de classe $\mathcal{C}^2$ dans un ouvert simplement connexe D , on peut lui associer une autre fonction harmonique Q , définie à une constante additive près, telle que

$$z \mapsto f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

soit holomorphe dans D .

Exemples de fonctions holomorphes

► Toute fonction rationnelle est holomorphe dans $\mathbb{C}$ privé des pôles de la fraction.

► Toute fonction définie par une série entière est holomorphe dans son disque ouvert de convergence ; par exemple :

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} ; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} ; \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} ; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

► Le logarithme népérien est holomorphe dans le plan coupé, c'est-à-dire le plan complexe privé d'une demi-droite. Pour ceci, on choisit presque toujours le demi-axe des réels négatifs.

Pour $z = \rho e^{i\theta} \neq 0$, on a donc :

$$\ln z = \ln \rho + i\theta \quad \text{avec} \quad \theta \in]-\pi, \pi[.$$

INTÉGRATION DANS LE PLAN COMPLEXE

Chemins

► Un chemin γ est une application $t \mapsto \gamma(t)$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux, de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$.

$\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont respectivement appelés origine et extrémité du chemin.

Un chemin γ est inclus dans un ouvert D si $\gamma(t) \in D$ pour tout $t \in [a, b]$.

► Un lacet est un chemin dont l'origine est égale à l'extrémité.

► Deux chemins γ_1 et γ_2 , définis sur $[a, b]$ et inclus dans D , sont homotopes s'il existe une application continue φ de $[a, b]^2$ dans D telle que

$$\forall t \in [a, b] \quad \varphi(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \text{et} \quad \varphi(t, 1) = \gamma_2(t).$$

Intuitivement, on passe de γ_1 à γ_2 par une déformation continue sans sortir de D .

Intégrale le long d'un chemin

► Définition

Soit γ un chemin inclus dans un ouvert D et f une fonction continue dans D . L'intégrale de f le long de γ est le nombre complexe :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

► Exemple

Si γ est un cercle de centre z_0 , on a :

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 2i\pi.$$

► Majoration du module

Si M est un majorant de $|f(z)|$ pour $z \in \gamma([a, b])$, et si l est la longueur du chemin γ , alors :

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leqslant Ml.$$

Théorème de Cauchy

► Théorème

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert D . Si γ_1 et γ_2 sont deux lacets homotopes inclus dans D , alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

► Cas où D est simplement connexe

Si γ_1 et γ_2 sont deux chemins inclus dans D , de même origine et de même extrémité, alors :

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Si γ est un lacet inclus dans D , alors :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

► Conséquence

Si D est connexe et si $z_0 \in D$, alors $D \setminus \{z_0\}$ n'est pas simplement connexe.

Primitive d'une fonction holomorphe

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert D simplement connexe et $z_0 \in D$ un point fixé.

L'intégrale de f le long d'un chemin d'origine z_0 et d'extrémité z ne dépend que de z et se note :

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(u) du.$$

F est holomorphe et vérifie : $F'(z) = f(z)$.

On dit que F est une primitive de f .

Formule intégrale de Cauchy

► Théorème

Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert D simplement connexe, $z_0 \in D$ un point fixé, et γ un lacet inclus dans D et entourant z_0 .

En notant γ^+ le lacet orienté dans le sens positif du plan complexe, on a :

$$f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

► Conséquences (dans les hypothèses du théorème précédent)

Il suffit de connaître f sur γ pour connaître f en tout point intérieur à γ .

La valeur de f au centre d'un cercle est égale à sa valeur moyenne sur le cercle.

Si $|f|$ atteint un maximum local en $z_0 \in D$, alors f est constante dans D .

Si $P(x, y)$ est harmonique dans D , elle ne peut pas avoir de maximum local.

Analycité d'une fonction holomorphe

Toute fonction holomorphe dans un ouvert D est analytique dans D , c'est-à-dire développable en série entière au voisinage de tout $a \in D$.

Dans un disque de centre a , inclus dans D , de bord orienté γ^+ , on a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$$\text{où } c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

C'est la grande différence avec une fonction d'une variable réelle : si une fonction d'une variable complexe est dérivable dans D , elle est indéfiniment dérivable dans D .

Une fonction entière est une fonction analytique dans $\mathbb{C}$.

Remarquez que la somme d'une série entière n'est une fonction entière que si son rayon de convergence est infini.

Théorème de Liouville

Toute fonction holomorphe et bornée dans $\mathbb{C}$ est constante.

On en déduit le théorème de d'Alembert (admis en premier cycle) : tout polynôme de degré ≥ 1 admet au moins une racine complexe.

CALCUL DES RÉSIDUS

Série de Laurent

Soit C la couronne ouverte dont le centre a pour affixe a et de rayons $R_1 < R_2$, c'est-à-dire :

$$C = \{z \in \mathbb{C} ; R_1 < |z-a| < R_2\}.$$

Une fonction f , définie dans un ouvert contenant C , est développable en série de Laurent dans cette couronne si on peut écrire :

$$\forall z \in C \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n.$$

Cette écriture exige à la fois la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$

pour $|z-a| < R_2$ et de la série $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{z-a}\right)^n$ pour $|z-a| > R_1$.

On a :

$$c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

où γ est un lacet simple (sans point double) inclus dans la couronne C .

Comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point

Soit f une fonction holomorphe dans un disque pointé de centre a

$$C = \{z \in \mathbb{C} ; 0 < |z-a| < R\}.$$

Elle admet un développement en série de Laurent qui peut s'écrire :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}.$$

Trois cas sont possibles :

- Tous les coefficients b_n sont nuls. La fonction f est prolongeable en a par une fonction holomorphe.
- Il existe une infinité de coefficients b_n non nuls. On dit alors que a est un point singulier essentiel de f .
- Les coefficients b_n non nuls sont en nombre fini. Si p est le plus grand entier k tel que $b_k \neq 0$, on dit que le point a est un pôle d'ordre p de la fonction f .

Une fonction méromorphe dans D est holomorphe sauf en un nombre fini de points qui sont des pôles.

La typologie précédente ne s'applique qu'aux points singuliers isolés.

Résidu en un point singulier isolé

➤ Définition

Le résidu de f au point a est le coefficient b_{-1} de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement en série de Laurent de f au voisinage du point a . On le note $\text{Res}(f, a)$. Si γ est un lacet simple n'entourant que le seul point singulier a , alors :

$$\text{Res}(f, a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma^+} f(z) dz.$$

➤ Calcul

Soit a un pôle simple de $f(z) = \frac{F(z)}{G(z)}$, c'est-à-dire que F et G sont holomorphes dans un disque de centre a , que $F(a) \neq 0$ et $G(z) = (z-a)G_1(z)$ avec $G_1(a) \neq 0$. Alors :

$$\text{Res}(f, a) = \frac{F(a)}{G'(a)}.$$

plus généralement, si a est un pôle d'ordre p de $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^p}$, on a :

$$\text{Res}(f, a) = \frac{\varphi^{(p-1)}(a)}{(p-1)!}.$$

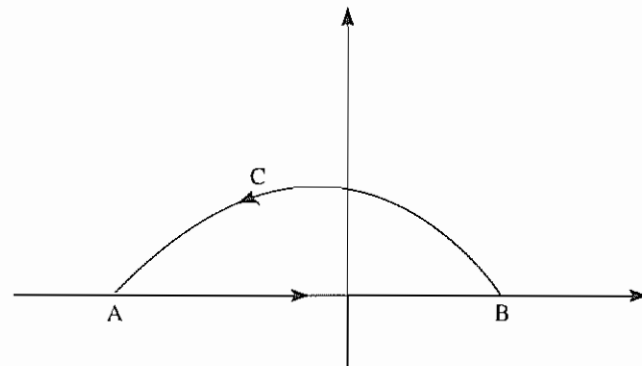
Théorème des résidus

Soit f une fonction méromorphe dans D et γ un lacet simple, inclus dans D , entourant les pôles $a_1, \dots, a_n$ de f . On a :

$$\int_{\gamma^+} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k).$$

APPLICATION AU CALCUL D'INTÉGRALES RÉELLES

Méthode générale



Soit γ un lacet simple comportant un segment réel $[AB]$. Si f est méromorphe et possède les pôles $a_1, \dots, a_n$ à l'intérieur de γ , on a :

$$\int_{AB} f(x) dx + \int_{BCA} f(z) dz = I + J = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k).$$

Si on connaît J (en particulier avec les lemmes de Jordan), on en déduit I .

Lemmes de Jordan

Soit C_R un arc de cercle de centre z_0 , de rayon R , parcouru dans le sens positif, et f une fonction méromorphe.

Si $|(z - z_0)f(z)|$ tend vers 0, uniformément par rapport à l'argument de $z - z_0$, on a :

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{C_R} f(z) dz = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Intégrales de fonctions rationnelles

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ existe lorsque Q n'a pas de racine réelle et $d^\circ P - d^\circ Q \leq -2$. Elle est égale à :

$$2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k)$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont les pôles de $\frac{P(z)}{Q(z)}$ situés dans le demi-plan $\text{Im } z > 0$.

On choisit le contour constitué par le demi-cercle de centre O et de rayon R situé dans le demi-plan $y \geq 0$, ainsi que son diamètre $[-R, R]$. Puis on fait tendre R vers $+\infty$.

Après avoir démontré que l'intégrale existe, on l'obtient donc de manière particulière, au sens de la valeur principale de Cauchy, en considérant

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$ où $R(u, v)$ est une fonction rationnelle en u et v

On pose $z = e^{ix}$ et l'intégrale devient : $I = \int_C F(z) dz$

où F est une fonction rationnelle et C^+ le cercle trigonométrique parcouru dans le sens direct.

L'intégrale I n'existe que si F est définie sur C et on a alors :

$$I = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(F, a_k).$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont les pôles de F tels que $|a_k| < 1$.

Intégrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx$ où $m \in \mathbb{R}$

P et Q sont des polynômes et Q n'a pas de racine réelle. L'intégrale est absolument convergente lorsque $d^\circ P - d^\circ Q \leq -2$ et semi-convergente pour $d^\circ P - d^\circ Q = -1$.

On utilise la fonction $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} e^{imz}$ et le même contour que dans le cas d'une fonction rationnelle si $m > 0$, ou son symétrique par rapport à Ox si $m < 0$.

On obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{imx} dx = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, a_k).$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont les pôles de f tels que $\text{Im}(a_k) > 0$ si $m > 0$, et $\text{Im}(a_k) < 0$ si $m < 0$.

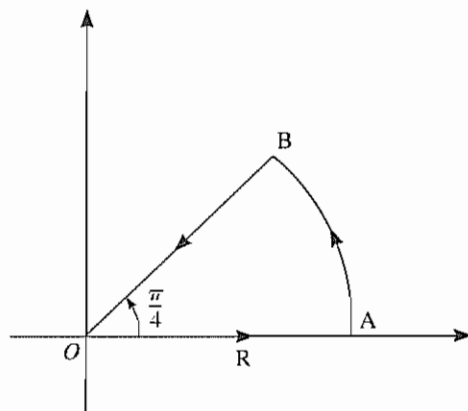
On en déduit $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos mx dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin mx dx$

et en particulier : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

On utilise la fonction $f(z) = e^{iz^2}$ et le contour OAB :



12

Espaces fonctionnels

ESPACE VECTORIEL NORMÉ

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une norme sur E est une application N de E dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

- (1) $\forall x \in E \quad N(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad N(x) = 0 \implies x = 0$;
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall x \in E \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$;
- (3) $\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé. On écrit souvent $N(x) = \|x\|$.

Premiers exemples

1. $E = \mathbb{K}^n$; pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$, on définit :

$$N_1(x) = |x_1| + \dots + |x_n|$$

$$N_2(x) = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

$$N_\infty(x) = \sup \{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

2. $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ étant l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$, pour $f \in E$ on pose :

$$N_1(f) = \int_a^b |f(t)| dt ; N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}.$$

N_1 est la norme de la convergence en moyenne, N_2 la norme de la convergence en moyenne quadratique.

3. $E = \mathcal{B}(A, F)$ étant l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur un ensemble A et à valeurs dans un espace vectoriel normé F , on pose :

$$N_\infty(f) = \sup_{t \in A} \|f(t)\|$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme dans F .

N_∞ est la norme de la convergence uniforme.

4. Si $(E_1, N_1), \dots, (E_p, N_p)$ sont des espaces vectoriels normés, on définit une norme sur le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_p$ en posant :

$$N(u_1, \dots, u_p) = \sup_{1 \leq i \leq p} N_i(u_i).$$

Convergence d'une suite

La suite (u_n) est convergente vers l dans un espace normé si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|u_n - l\| < \varepsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est divergente.

Normes équivalentes

Soit N et N' deux normes sur E . On dit qu'elles sont équivalentes si toute suite qui converge vers l pour une norme, converge aussi vers l pour l'autre norme.

Pour ceci, il faut, et il suffit, qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall x \in E \quad \alpha N'(x) \leq N(x) \leq \beta N'(x).$$

Dans un espace vectoriel de dimension finie, deux normes quelconques sont toujours équivalentes.

Suites de Cauchy

► Définition

Une suite (u_n) d'éléments d'un espace vectoriel normé E est de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad (p \geq n_0 \text{ et } q \geq n_0) \implies \|u_p - u_q\| < \varepsilon.$$

► Propriétés

Toute suite convergente est de Cauchy.

Toute suite de Cauchy est bornée.

L'image d'une suite de Cauchy par une fonction uniformément continue est de Cauchy.

Espace des fonctions linéaires continues

L'ensemble des fonctions linéaires et continues de E dans F est un espace vectoriel. On le note $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Si E est de dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues. Mais ce n'est pas vrai si E est de dimension infinie.

Norme d'une application linéaire continue

En posant :

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$$

on définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$, dite norme subordonnée aux normes choisies dans E et dans F .

Si $f \in \mathcal{L}_c(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_c(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}_c(E, G)$ et :

$$\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|.$$

Cette propriété, vraie pour une norme subordonnée, n'est pas vérifiée pour une norme quelconque.

ESPACE DE BANACH

Définition

Un espace vectoriel normé E est dit complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.

On dit aussi que E est un espace de Banach.

Exemples

► Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

► Si F est complet, alors $\mathcal{L}_c(E, F)$ est complet pour la norme subordonnée aux normes de E et de F .

En particulier, le dual topologique $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ d'un espace vectoriel normé E est un espace de Banach.

Le produit d'espaces de Banach sur $\mathbb{K}$ est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$.

► L'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ est un espace de Banach pour la norme N_∞ de la convergence uniforme, mais n'est pas un espace de Banach pour la norme N_1 de la convergence en moyenne.

ESPACE DE HILBERT

Produit scalaire hermitien

► Définitions

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire hermitien sur E est une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui

vérifie la symétrie hermitienne, soit :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$$

est linéaire à droite, soit :

$$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$$

$$\varphi(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 \varphi(x, y_1) + \lambda_2 \varphi(x, y_2)$$

est donc semi-linéaire à gauche, soit :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3 \quad \forall (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$$

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \overline{\lambda_1} \varphi(x_1, y) + \overline{\lambda_2} \varphi(x_2, y)$$

est définie positive, soit :

$$\forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geq 0 \quad ; \quad \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0.$$

$\varphi(x, y)$ se note $\langle x | y \rangle$ ou $(x | y)$.

► Exemples

$$\text{Dans } \mathbb{C}^n \quad \langle X | Y \rangle = {}^t \overline{X} Y = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i.$$

$$\text{Dans } E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}) \quad \langle f | g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

➤ Norme hermitienne

E étant un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien, on définit une norme sur E en posant :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle},$$

On obtient aussi une distance en posant $d(x, y) = \|x - y\|$.

Relations entre produit scalaire et norme

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E$$

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x | y \rangle$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

$$4 \langle x | y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i\|x + iy\|^2 + i\|x - iy\|^2.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

➤ Théorème (inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x et y sont liés.

➤ Corollaire (inégalité triangulaire)

$$\forall x \in E \quad \forall y \in E \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Dans cette inégalité, l'égalité a lieu si, et seulement si, x et y sont liés avec $\langle x | y \rangle \in \mathbb{R}_+$.

Espace de Hilbert

Un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, muni d'un produit scalaire hermitien, est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme associée.

Un espace de Hilbert est donc un espace de Banach.

Pour les produits scalaires ci-dessus, $\mathbb{C}^n$ est un espace de Hilbert, mais $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ n'est pas un espace de Hilbert.

Base hilbertienne

Une famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert E est une base hilbertienne si :

$$\forall i \neq j \quad \langle e_i | e_j \rangle = 0$$

$$\forall i \quad \langle e_i | e_i \rangle = 1$$

$$[\forall i \in \mathbb{N} \quad \langle x | e_i \rangle = 0] \implies x = 0$$

Approximation des moindres carrés

Soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert E . Notons H_k le sous-espace de E engendré par $e_0, \dots, e_k$.

Pour tout $x \in E$, le vecteur :

$$x_k = \sum_{j=0}^k \langle x | e_j \rangle e_j$$

est la projection orthogonale de x sur H_k , c'est-à-dire le seul vecteur de H_k tel que :

$$\forall j \in \{0, \dots, k\} \quad \langle x - x_k | e_j \rangle = 0.$$

x_k est la meilleure approximation dans H_k de x au sens de la norme de E , c'est-à-dire :

$$\forall y \in H_k \quad \|x - x_k\| \leq \|x - y\|.$$

On dit aussi que x_k est la meilleure approximation de x au sens des moindres carrés.

Supposons que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ dans E , c'est-à-dire $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x_k\| = 0$, ou

encore $x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x | e_k \rangle e_k$. On a alors l'égalité de Parseval :

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x | e_k \rangle^2.$$

ESPACES L^k ET l^k

Cas des fonctions

► Notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère les fonctions de I dans $\mathbb{C}$ et on confond les fonctions égales presque partout.

On désigne par $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions sommables sur I , c'est-à-dire telles que $\int_I |f(t)| dt$ existe.

On désigne par $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions de carré sommable sur I , c'est-à-dire telles que $\int_I |f(t)|^2 dt$ existe.

$L^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des signaux analogiques d'énergie finie.

Si I est un intervalle borné, on a $L^2(I) \subset L^1(I)$. Mais on ne peut rien dire de tel si $I = \mathbb{R}$.

► Structure de $L^2(I)$

$L^2(I)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \int_I \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Cas des suites

► Notations

On considère des suites $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

On désigne par l^1 l'ensemble des suites sommables, c'est-à-dire telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$ existe.

On désigne par l^2 l'ensemble des suites de carré sommable, c'est-à-dire telles que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$ existe.

l^2 est l'ensemble des signaux numériques d'énergie finie.

► Structure de l^2

l^2 est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$\langle a | b \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{a_n} b_n.$$

On a $l^2 \subset l^1$.

13

Polynômes orthogonaux

CAS GÉNÉRAL

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et p une application (un poids) de I dans $]0, +\infty[$. On considère l'ensemble $L_p^2(I)$ des fonctions f de I dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) telles que $|f(x)|^2 p(x)$ soit sommable sur I , et on confond les fonctions égales presque partout.

Le produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \int_I \overline{f(x)} g(x) p(x) dx$$

munit $L_p^2(I)$ d'une structure d'espace de Hilbert.

Dans les cas usuels, $\mathbb{R}[X]$ est inclus dans $L_p^2(I)$. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt conduit à une base hilbertienne.

Dans les exemples qui suivent, l'étape de normalisation n'est pas réalisée pour ne pas alourdir l'écriture.

POLYNÔMES DE LEGENDRE P_n

- Ils sont orthogonaux pour $I = [-1, 1]$ et $p(x) = 1$

$$\text{et on a } \langle P_n | P_n \rangle = \frac{2}{2n+1}.$$

- Ils sont donnés par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n],$$

- Ils vérifient la relation de récurrence :

$$(n+2)P_{n+2}(x) - (2n+3)xP_{n+1}(x) + (n+1)P_n(x) = 0$$

et l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

- Fonction génératrice :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n.$$

- Premières valeurs :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

POLYNÔMES D'HERMITE H_n

- Ils sont orthogonaux pour $I = \mathbb{R}$ et $p(x) = e^{-x^2}$

$$\text{et on a } \langle H_n | H_n \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Certains auteurs choisissent $p(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ et modifient les diverses informations en conséquence.

- Ils sont donnés par :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}].$$

- Ils vérifient la relation de récurrence :

$$H_{n+2}(x) - 2x H_{n+1}(x) + 2(n+1) H_n(x) = 0$$

et l'équation différentielle :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

- Fonction génératrice :

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

- Premières valeurs :

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2, \quad H_3 = 8x^3 - 12x,$$

$$H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5 = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Fonctions de Weber-Hermite

Les fonctions $W_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ vérifient l'équation différentielle :

$$y'' + (2n+1-x^2)y = 0.$$

POLYNÔMES DE LAGUERRE L_n

- Ils sont orthogonaux pour $I = [0, +\infty[$ et $p(x) = e^{-x}$ et on a :

$$\langle L_n | L_m \rangle = 1.$$

- Ils sont donnés par :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^n].$$

- Ils vérifient la relation de récurrence :

$$(n+2) L_{n+2}(x) + (x-2n-3) L_{n+1}(x) + (n+1) L_n(x) = 0$$

et l'équation différentielle :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

- Fonction génératrice :

$$\frac{1}{1-t} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) t^n.$$

- Premières valeurs :

$$L_0 = 1, \quad L_1 = -x + 1, \quad L_2 = \frac{1}{2!}(x^2 - 4x + 2),$$

$$L_3 = \frac{1}{3!}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6), \quad L_4 = \frac{1}{4!}(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24).$$

POLYNÔMES DE TCHEBYCHEFF DE PREMIÈRE ESPÈCE T_n ET FONCTIONS DE TCHEBYCHEFF DE SECONDE ESPÈCE U_n

- Les familles (T_n) et (U_n) sont orthogonales pour $I =]-1, 1[$ et

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ et on a } \langle T_n | T_m \rangle = \frac{\pi}{2} = \langle U_n | U_m \rangle.$$

- Elles sont données par :

$$T_n(x) = \frac{(-1)^{n-1} 2^n n!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}]$$

$$U_n(x) = \frac{n(-1)^{n-1} 2^n n!}{(2n)!} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}]$$

et peuvent s'écrire à partir des fonctions trigonométriques :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad U_n(x) = \sin(n \arccos x) \quad \text{si } |x| \leq 1$$

$$T_n(x) = \operatorname{ch}(n \operatorname{argch} |x|), \quad U_n(x) = \operatorname{sh}(n \operatorname{argch} |x|) \quad \text{si } |x| \geq 1$$

- Les zéros de T_n sont $\omega_k = \cos \left[(2k-1) \frac{\pi}{2n} \right]$ avec $k \in \{1, \dots, n\}$.
- Les fonctions T_n et U_n sont des solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

- Elles vérifient la relation de récurrence :

$$u_{n+2}(x) - 2xu_{n+1}(x) + u_n(x) = 0.$$

- Fonctions génératrices :

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n.$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_{n+1}(x) t^n.$$

- Premières valeurs :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = x, \quad T_2 = 2x^2 - 1, \quad T_3 = 4x^3 - 3x$$

$$T_4 = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

$$U_0 = 0, \quad U_1 = \sqrt{1-x^2}, \quad U_2 = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad U_3 = (4x^2-1)\sqrt{1-x^2}$$

$$U_4 = (8x^3-4x)\sqrt{1-x^2}, \quad U_5 = (16x^4-12x^2+1)\sqrt{1-x^2}.$$

Les polynômes de Tchebycheff sont utilisés comme fonctions de filtrage.

POLYNÔMES DE JACOBI $P_n^{(\alpha, \beta)}$

- Ils sont orthogonaux pour $I =]-1, 1[$ et $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ avec $\alpha > -1$ et $\beta > -1$, et on a :

$$\langle P_n^{(\alpha, \beta)} | P_n^{(\alpha, \beta)} \rangle = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+\alpha+1) \Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1) n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Dans le cas $\alpha = \beta = 0$, on obtient les polynômes de Legendre.

Dans le cas $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, on obtient les polynômes de Tchebycheff.

- Ils sont donnés par :

$$P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{(-1)^n}{2^n n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}].$$

- Ils vérifient l'équation différentielle :

$$(1-x^2)y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0.$$

- Fonction génératrice :

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2xt+t^2} [1-t+\sqrt{1-2xt+t^2}]^\alpha [1+t+\sqrt{1-2xt+t^2}]^\beta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) t^n. \end{aligned}$$

- Polynômes de Gegenbauer C_n^α (ou ultra-sphériques)

Ils correspondent au cas particulier $\alpha = \beta$ des polynômes de Jacobi.

14

Séries de Fourier

SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

Fonction périodique

► Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles ou complexes. Un nombre $T > 0$ est une période de f si :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+T) = f(t).$$

Le plus petit nombre T vérifiant la propriété est la période de f .

On dit aussi que f est T -périodique.

► Propriétés

L'intégrale d'une fonction continue de période T , sur un intervalle de longueur T , est indépendante des bornes.

Si f est dérivable, de période T , alors f' est aussi périodique de période T .

► Vocabulaire de la physique

f étant T -périodique, le nombre $\nu = \frac{1}{T}$ est la fréquence et le nombre $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation.

On appelle énergie moyenne de f sur une période le nombre :

$$\frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(t)|^2 dt.$$

Sa racine carrée est appelée valeur efficace de f .

Coefficients de Fourier

Soit f est une fonction T -périodique, continue par morceaux.

► Forme réelle ($n \in \mathbb{N}$)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos n\omega t dt \quad ; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin n\omega t dt.$$

► Forme complexe ($n \in \mathbb{Z}$)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} e^{-in\omega t} f(t) dt.$$

► Passage des coefficients complexes aux coefficients réels

$$\begin{cases} a_n = c_n + c_{-n} & \text{pour } n \geq 0 \\ b_n = i(c_n - c_{-n}) & \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

► *Passage des coefficients réels aux coefficients complexes*

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \text{et pour } n \geq 1 : \quad c_n = \frac{a_n - i b_n}{2} ; \quad c_{-n} = \frac{a_n + i b_n}{2} .$$

Série de Fourier d'une fonction périodique

On associe à f une série qui, lorsqu'elle converge, définit une fonction S périodique de période T .

► *Forme réelle*

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) .$$

► *Forme complexe*

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} .$$

Propriétés

► *Parité*

Si f est une fonction paire, pour tout n on a $b_n = 0$, soit $c_n = c_{-n}$.

Si f est une fonction impaire, pour tout n on a $a_n = 0$, soit $c_n = -c_{-n}$.

► *Coefficients de Fourier d'une dérivée*

Les coefficients de Fourier de f et f' sont reliés par :

Forme complexe :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad c_n(f') = i n c_n(f) ;$$

Forme réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n(f') = n b_n(f) \quad \text{et} \quad b_n(f') = -n a_n(f) .$$

CONVERGENCE DE LA SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION

• **Fonction C^1 par morceaux**

On dit que f est C^1 par morceaux sur le segment $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \dots < a_p = b$ telle que :

► f soit définie, continue, dérivable et à dérivée continue dans chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ ($i = 0, \dots, p-1$),

► $f(t)$ et $f'(t)$ possèdent une limite en chaque extrémité de ces intervalles.

Théorème de Dirichlet

Si f est périodique de période T et est C^1 par morceaux sur tout un segment de longueur T , alors la série de Fourier de f est convergente et sa somme S vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad S(t) = \frac{f(t_+) + f(t_-)}{2} .$$

De plus, la convergence est normale (donc uniforme) sur tout segment où la fonction est continue, ou sur $\mathbb{R}$ si f est continue sur $\mathbb{R}$.

Remarquez que si f est continue en t , alors $S(t) = f(t)$.

Mais au voisinage d'un point de discontinuité, la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier ne donne pas toujours une bonne approximation de f , même avec n très grand. Cette particularité est connue sous le nom de phénomène de Gibbs.

Interprétation physique

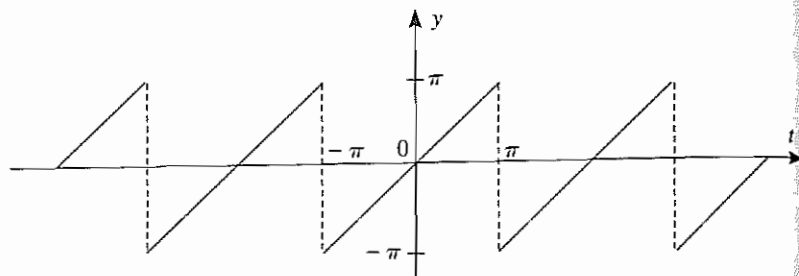
Décomposer une fonction périodique f en série de Fourier revient à traduire que le signal qu'elle représente est la superposition :

► d'un terme constant (égal à la valeur moyenne de la fonction sur un intervalle de longueur égale à une période),

- d'un terme sinusoïdal de même fréquence que f (appelé le fondamental),
 - et d'une infinité de termes sinusoïdaux dont les fréquences sont multiples entiers de la fréquence du fondamental (appelés les harmoniques).
- On retrouve dans cette terminologie le langage de l'acoustique.

Développement de signaux classiques

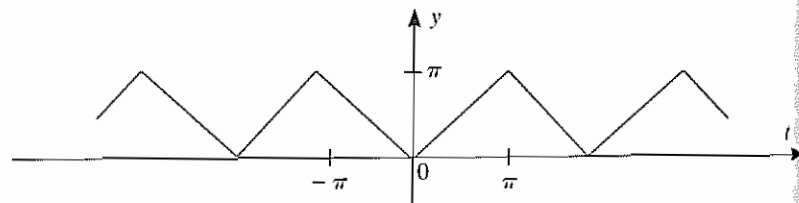
- Fonction 2π -périodique avec $f(t) = t$ sur $]-\pi, \pi]$.



série de Fourier :

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt.$$

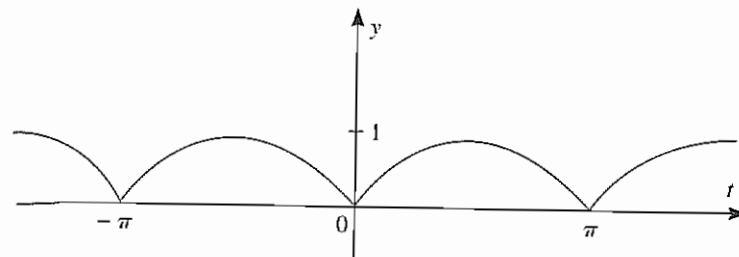
- Fonction 2π -périodique avec $f(t) = |t|$ sur $]-\pi, \pi]$.



série de Fourier :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)t}{(2n-1)^2}.$$

- Fonction $f(t) = |\sin t|$.

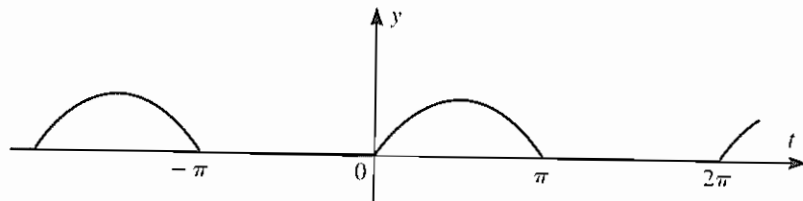


série de Fourier :

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}.$$

- Fonction 2π -périodique avec
$$\begin{cases} f(t) = \sin t & \text{pour } 0 < t \leq \pi \\ f(t) = 0 & \text{pour } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

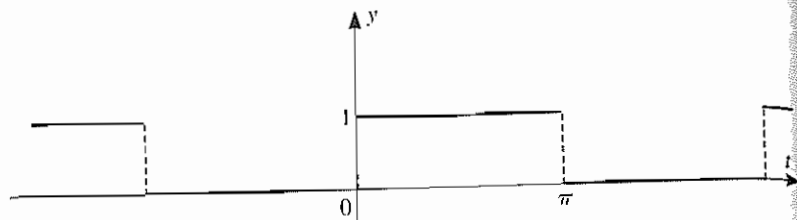
soit $f(t) = \frac{1}{2}(|\sin t| + \sin t)$.



série de Fourier :

$$\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1} + \frac{1}{2} \sin t.$$

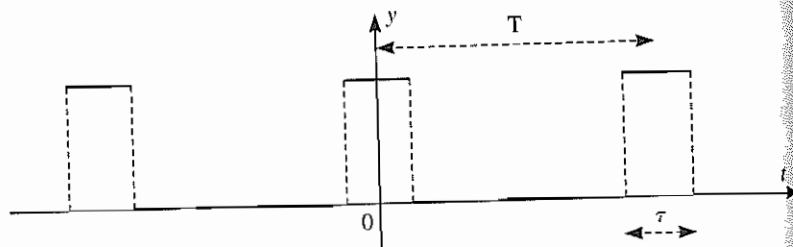
- Fonction 2π -périodique avec
$$\begin{cases} f(t) = 1 & \text{pour } 0 < t \leq \pi \\ f(t) = 0 & \text{pour } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$



série de Fourier :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}.$$

- Fonction T -périodique avec
$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{pour } \frac{\tau}{2} \leq t \leq T - \frac{\tau}{2} \\ f(t) = a & \text{sinon} \end{cases}$$



série de Fourier :

$$\frac{a\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n \frac{\tau}{T})}{\pi n \frac{\tau}{T}} e^{i2\pi n \frac{t}{T}}.$$

Formule de Parseval

Si f est continue par morceaux sur un segment de longueur T on a la relation suivante reliant l'énergie de f et les énergies des termes de sa série de Fourier :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} [f(t)]^2 dt &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |c_n|^2. \end{aligned}$$

Dans cette décomposition, tous les termes n'ont pas la même importance.

On détermine les termes dominants en étudiant le spectre des fréquences, c'est-à-dire le diagramme en bâtons obtenu en associant à chaque entier n un segment vertical de longueur égale à l'amplitude de l'harmonique de rang n , soit $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour $n \neq 0$ et $A_0 = |\frac{a_0}{2}|$ pour le terme constant.

Point de vue des espaces fonctionnels

Notons $L^2(0, T)$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, définies et de carré sommable dans $[0, T]$, dans lequel on confond les fonctions égales presque partout.

Le produit scalaire

$$\langle f | g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt$$

munit $L^2(0, T)$ d'une structure d'espace de Hilbert.

Dans cet espace, la famille des fonctions $(e^{in\omega t})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne.

L'écriture $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t}$ peut s'interpréter comme la décomposition de f dans cette base infinie, au sens de la convergence quadratique :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f(t) - \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} \right\|_2 = 0.$$

Dans cette optique, la formule de Parseval apparaît comme la généralisation du théorème de Pythagore. Elle s'obtient en considérant des projections orthogonales.

APPROXIMATION D'UNE FONCTION PAR UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

Cas général

Soit f une fonction, non nécessairement périodique, et $[a, b[$ un intervalle de son domaine de définition.

On peut lui associer la fonction périodique f_1 , de période $T = b - a$, définie par :

$$f_1(x) = f(x) \quad \text{pour } x \in [a, b[$$

$$f_1(x) = f(y) \quad \text{avec } y - x = kT, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{et } y \in [a, b[$$

La série de Fourier de la fonction f_1 approche alors la fonction f sur l'intervalle $[a, b[$.

Développement en série de sinus ou de cosinus

Si l'intervalle $[0, a[$ ($a > 0$) est contenu dans le domaine de f on peut obtenir un développement ne comportant que des sinus ou des cosinus. Il suffit de prolonger préalablement f sur l'intervalle $[-a, a]$ en une fonction impaire ou paire.

Dans le premier cas, on définit la fonction f_1 par :

$$f_1(t) = f(t) \quad \text{pour } x \in [0, a[$$

$$f_1(t) = -f(-t) \quad \text{pour } x \in [-a, 0[$$

$$f_1(t) = f(t + T) \quad \text{avec } T = 2a$$

et dans le second, on définit la fonction f_2 par :

$$f_2(t) = f(t) \quad \text{pour } x \in [0, a[$$

$$f_2(t) = f(-t) \quad \text{pour } x \in [-a, 0[$$

$$f_2(t) = f(t + T) \quad \text{avec } T = 2a$$

Dans chaque cas, la période est égale à $2a$.

15

Équations aux dérivées partielles

GÉNÉRALITÉS

Vocabulaire

Une équation aux dérivées partielles est une relation entre des variables réelles et les valeurs d'une fonction inconnue u et de certaines de ses dérivées partielles.

L'ordre de l'équation (E) est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui figure dans l'équation.

On appelle solution toute fonction définie sur un intervalle ouvert I , de classe C^n , et vérifiant l'équation.

Résoudre (E) dans I , c'est rechercher l'ensemble de ses solutions dans I .

Types de problèmes

Comme la solution générale d'une équation aux dérivées partielles est un ensemble de fonctions, des conditions supplémentaires sont nécessaires pour modéliser un phénomène physique. On parle de :

- problème de Cauchy quand on connaît des conditions initiales ;
- problème aux limites quand on connaît des conditions sur la frontière du domaine Ω considéré ;
- problème mixte quand on connaît des conditions initiales et des conditions aux limites.

Équations linéaires

► Définitions

Une équation aux dérivées partielles est linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue et à ses dérivées. On peut l'écrire sous la forme

$$L[u] = f \quad (1)$$

où u inconnue et f donnée sont de classe C^n sur un domaine Ω .

L'équation homogène associée est $L[u] = 0$.

► Théorèmes dus à la linéarité

Les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel.

Si u est solution de (1) et v solution de l'équation homogène, alors $u + v$ est solution de (1).

Si u_1 est solution de $L[u] = f_1$ et u_2 solution de $L[u] = f_2$, alors $u_1 + u_2$ est solution de $L[u] = f_1 + f_2$.

ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

Forme générale

$$\sum_{i=1}^k a_i(x_1, \dots, x_k, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, \dots, x_k, u) \quad (E)$$

où $a_1, \dots, a_k, b$ sont des fonctions données, de classe C^1 dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^{k+1}$.

On peut lui associer le système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(x_1, \dots, x_k, u) \\ \vdots \\ \frac{dx_k}{dt} = a_k(x_1, \dots, x_k, u) \\ \frac{du}{dt} = b(x_1, \dots, x_k, u) \end{cases}$$

que l'on écrit souvent :

$$\frac{dx_1}{a_1} = \dots = \frac{dx_k}{a_k} = \frac{du}{b}$$

Courbes caractéristiques

Une courbe caractéristique de (E) est une solution

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t) \\ \vdots \\ x_k = \varphi_k(t) \\ u = \varphi_{k+1}(t) \end{cases}$$

de (S).

Intégrales premières de (S)

Une intégrale première de (S) est une fonction F de classe C^1 , non constante, telle que la restriction $F(x_1, \dots, x_k, u)$ à toute solution de (S) soit constante.

Il existe k intégrales premières $F_1, \dots, F_k$ indépendantes, c'est-à-dire telles que le jacobien

$$\frac{D(F_1, \dots, F_k)}{D(x_1, \dots, x_k)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k} \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas dans Ω .

Toute intégrale première de (S) est de la forme

$$\Phi(F_1, \dots, F_k)$$

où Φ est une fonction de classe C^1 .

Pour obtenir les F_i , on part, par exemple, de $\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2}$ et on se ramène à $df_1 = 0$ en utilisant si nécessaire un facteur intégrant.

Solutions de (E)

Si u est une solution de (E) dans Ω , $z = u(x_1, \dots, x_k)$ est l'équation d'une hypersurface de $\mathbb{R}^{k+1}$ appelée surface intégrale de (E).

Les surfaces intégrales ont pour équation implicite :

$$\Phi(F_1(x_1, \dots, x_k, u), \dots, F_k(x_1, \dots, x_k, u)) = 0$$

et il reste à résoudre en u .

ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE

On se limite aux équations à deux variables notées (x, y) .

Définition

Elles sont de la forme :

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y) u = f(x, y)$$

où $A, B, \dots, f$ sont des fonctions données, définies dans un domaine Ω du plan.

Classification

L'équation linéaire précédente est :

- hyperbolique si $\Delta = B^2 - AC > 0$ dans Ω ;
exemple fondamental : équation des ondes.
- parabolique si $\Delta = B^2 - AC = 0$ dans Ω ;
exemple fondamental : équation de la chaleur.
- elliptique si $\Delta = B^2 - AC < 0$ dans Ω ;
exemple fondamental : équation de Laplace.

Formes standard

On utilise un changement de variables

$$X = X(x, y) \quad ; \quad Y = Y(x, y)$$

pour ramener chaque équation à une forme plus simple par rapport aux dérivées secondes.

➤ Équations hyperboliques

On peut se ramener à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = F \left(\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, u, X, Y \right)$$

ou à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = F \left(\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, u, X, Y \right).$$

➤ Équations paraboliques

On peut se ramener à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = F \left(\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, u, X, Y \right).$$

➤ Équations elliptiques

On peut se ramener à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = F \left(\frac{\partial u}{\partial X}, \frac{\partial u}{\partial Y}, u, X, Y \right).$$

ÉQUATION DES ONDES

Équation des ondes à une dimension

L'étude des vibrations d'une corde, d'une membrane, des oscillations électromagnétiques ... conduit à des équations hyperboliques. La plus simple est l'équation des ondes à une dimension (ou équation des cordes vibrantes) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (E)$$

Le changement de variables

$$\begin{cases} X = x + ct \\ T = x - ct \end{cases}$$

ramène cette équation à la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial T} = 0,$$

ce qui donne la solution générale :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

où f et g sont des fonctions de classe C^2 .

Problème de Cauchy pour une corde illimitée

Avec les conditions initiales

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x)$$

où φ_0 est C^2 et φ_1 est C^1 . l'équation (E) a une solution, et une seule, donnée par la formule de d'Alembert :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi_0(x + ct) + \varphi_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(\xi) d\xi.$$

Vibrations libres d'une corde d'extrémités fixes

La corde étant de longueur l , on a les conditions aux limites :

$$\forall t \geq 0 \quad u(0, t) = 0 = u(l, t)$$

et les conditions initiales :

$$\forall x \in [0, l] \quad u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x)$$

La méthode de séparation des variables qui consiste à chercher des solutions sous la forme $u(x, t) = X(x)T(t)$ conduit à :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi ct}{l} + B_k \sin \frac{k\pi ct}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Les conditions initiales deviennent :

$$\varphi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \text{et} \quad \varphi_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Les constantes A_k et B_k se calculent comme coefficients de Fourier :

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad \text{et} \quad B_k = \frac{2}{k\pi c} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Vibrations forcées d'une corde illimitée

On est conduit à intégrer :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (F)$$

(où la force extérieure f est donnée), avec les conditions initiales :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x).$$

L'équation (F) a une solution, et une seule :

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi_0(x + ct) + \varphi_0(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Vibrations forcées d'une corde d'extrémités fixes

On intègre l'équation (F) avec les conditions aux limites :

$$\forall t \geq 0 \quad u(0, t) = 0 = u(l, t)$$

et les conditions initiales :

$$\forall x \in [0, l] \quad u(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1(x).$$

On utilise des développements en séries suivant les fonctions $\sin \frac{k\pi x}{l}$.

Pour la force extérieure, on a :

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \text{avec} \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi.$$

On obtient :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{k\pi ct}{l} + B_k \sin \frac{k\pi ct}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

où les A_k et B_k sont calculés par les mêmes formules que dans le cas des vibrations libres et

$$T_k(t) = \frac{1}{k\pi c} \int_0^t f_k(\tau) \sin \frac{k\pi c(t-\tau)}{l} d\tau.$$

ÉQUATION DE LA CHALEUR

Équation de la chaleur à une dimension

L'étude des problèmes de diffusion conduit à l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \Delta u + f.$$

En dimension 1, cette équation devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (F)$$

dont l'équation homogène associée est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (E)$$

Problème de Cauchy pour l'équation (E)

La condition initiale s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u(x, 0) = \varphi(x)$$

et il est inutile de se donner $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$.

Parmi les fonctions bornées, le problème de Cauchy admet une solution, et une seule, appelée intégrale de Poisson :

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t} \right] \varphi(y) dy.$$

Problème de Cauchy pour l'équation (F)

Avec le second membre f , la solution du problème de Cauchy devient :

$$u(x, t) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t} \right] \varphi(y) dy \\ + \frac{1}{2c\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp \left[-\frac{(x-\xi)^2}{4c^2(t-\tau)} \right] f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

Cas d'une tige de longueur finie /

Il faut rajouter au problème de Cauchy des conditions aux limites :

$$\forall t \geq 0 \quad u(0, t) = \psi_1(t) \quad \text{et} \quad u(l, t) = \psi_2(t).$$

On utilise la méthode de séparation des variables et des développements en séries.

► Cas de l'équation homogène avec $\psi_1(t) = 0 = \psi_2(t)$

En supposant que φ est $\mathcal{C}^2$ sur $[0, l]$ et que $\varphi(0) = 0 = \varphi(l)$, on obtient la solution :

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \exp \left[-\left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 t \right] \sin \frac{k\pi x}{l}$$

avec

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

► Cas de l'équation complète (F) avec $\psi_1(t) = 0 = \psi_2(t)$

On suppose que $f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à x et que $f(0, t) = 0 = f(l, t)$ pour $t \geq 0$.

On développe $f(x, t)$ en série de Fourier de sinns :

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

où

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi.$$

La solution du problème de Cauchy s'obtient en additionnant à la solution $u(x, t)$ du problème homogène la fonction :

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

avec

$$T_k(t) = \int_0^l f_k(\tau) \exp \left[- \left(\frac{k\pi a}{l} \right)^2 (t - \tau) \right] d\tau.$$

► Cas général

Ou pose $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$ où

$$w(x, t) = \psi_1(t) + \frac{x}{l} [\psi_2(t) - \psi_1(t)]$$

et la recherche de v est ramenée au problème précédent.

ÉQUATION DE LAPLACE

Généralités

L'étude d'états d'équilibre conduit à des équations elliptiques, dont la plus simple est l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0$$

où Δu désigne le laplacien de u .

Une fonction u qui vérifie cette équation dans un ouvert Ω est dite harmonique dans Ω .

Si une fonction harmonique u ne dépend que de la distance r à un point fixe A , et si Ω ne contient pas A , alors elle est de la forme :

$$a \ln r + b \quad \text{en dimension 2}$$

$$\frac{a}{r} + b \quad \text{en dimension 3}$$

Problèmes aux limites

L'ouvert Ω étant limité par une surface Σ , on parle de :

- problème de Dirichlet quand on connaît la restriction à Σ de $u(M)$;
- problème de Neumann quand on connaît la restriction à Σ de la dérivée $\frac{\partial u}{\partial n}(M)$ suivant la normale extérieure ;
- problème mixte quand on connaît la restriction à Σ d'une expression de la forme $\frac{\partial u}{\partial n}(M) + h(M)u(M)$.

Problème de Dirichlet

► Problème intérieur

Il s'agit de déterminer une fonction u à deux variables, harmonique dans un disque de centre O et de rayon ρ_0 , prenant des valeurs données sur la frontière, c'est-à-dire en coordonnées polaires telle que :

$$u(\rho_0, \theta) = \varphi(\theta)$$

avec φ de classe C^2 et 2π -périodique.

En utilisant l'expression du laplacien en coordonnées polaires (cf. chap.4) et la méthode de séparation des variables, on obtient :

$$u(\rho, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

avec

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \cos kt dt \quad \text{et} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \sin kt dt.$$

► Intégrale de Poisson

La fonction précédente s'écrit aussi sous la forme de l'intégrale de Poisson :

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - t) + \rho^2} \varphi(t) dt.$$

L'expression

$$\frac{\rho_0^2 - \rho^2}{\rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - t) + \rho^2}$$

est le noyau de Poisson relatif au disque de centre O et de rayon ρ_0 .

► Problème extérieur

On cherche u harmonique (et bornée) pour $\rho > \rho_0$ avec la même condition sur la frontière. On obtient :

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - t) + \rho_0^2} \varphi(t) dt.$$

Attention, cette fonction n'est pas l'opposée de la fonction précédente car les domaines de définition ne sont pas les mêmes.

16

Distributions

NOTION DE DISTRIBUTION

Introduction

Pour décrire les phénomènes impulsionnels, les fonctions constituent un outil insuffisant. Il faut alors passer à la notion de distribution.

On peut considérer une fonction f comme une forme linéaire sur un espace vectoriel (constitué de fonctions appelées fonctions test) à l'aide des intégrales :

$$\varphi \mapsto \int f(x) \varphi(x) dx.$$

Les distributions sont des formes linéaires convenablement choisies parmi lesquelles figurent les formes linéaires du type précédent.

Par exemple, une fonction T -périodique f , sommable sur un intervalle de longueur T , peut être caractérisée par les nombres :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-inat} dt$$

on encore par son action sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}$ des polynômes trigonométriques :

$$\varphi \mapsto \int_0^T f(x) \varphi(x) dx.$$

Par ce procédé, une classe de fonctions égales presque partout peut être identifiée à une forme linéaire sur $\mathcal{T}$.

Espace $\mathcal{D}$ des fonctions test

► Définitions

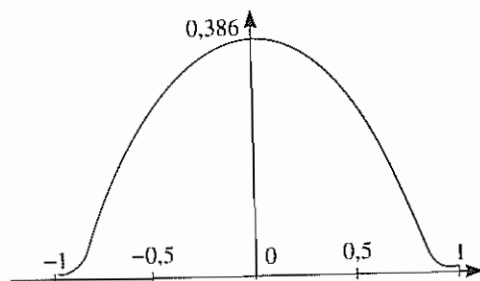
On appelle support d'une fonction f le plus petit ensemble fermé en dehors duquel la fonction est nulle. On le note $\text{supp } f$.

L'espace $\mathcal{D}$ est l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, indéfiniment dérivables et à support borné.

► Exemples de fonctions de $\mathcal{D}$

• Fonction de L. Schwartz

$$\zeta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad \text{supp } \zeta = [-1, 1].$$



• Fonctions associées

$$\zeta_{a,b}(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)\right) & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases}$$

$\text{supp } \zeta_{a,b} = [a, b]$.

• Produit par une fonction indéfiniment dérivable

Si $\varphi \in \mathcal{D}$ et $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors $\alpha\varphi \in \mathcal{D}$.

Convergence dans $\mathcal{D}$

► Définition

Une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{D}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{D}$ si :

- il existe un segment contenant les supports de toutes les fonctions φ_n ;
- pour tout entier p , la suite $(\varphi_n^{(p)})$ des dérivées d'ordre p converge uniformément vers la dérivée p -ième $\varphi^{(p)}$.

► Exemples

La suite $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \zeta(x)$ converge vers 0 dans $\mathcal{D}$.

La suite $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \zeta\left(\frac{x}{n}\right)$ ne converge pas dans $\mathcal{D}$ car $\text{supp } \varphi_n = [-n, n]$.

Définition d'une distribution

► Une forme linéaire T sur $\mathcal{D}$ est continue si, pour toute suite (φ_n) convergeant vers 0 dans $\mathcal{D}$, la suite des valeurs $(T(\varphi_n))$ converge vers 0 dans $\mathbb{C}$.

Pour une application linéaire définie sur E , la continuité sur E est équivalente à sa continuité en 0.

► On appelle distribution toute forme linéaire continue sur $\mathcal{D}$.

L'ensemble des distributions est un espace vectoriel noté $\mathcal{D}'$.

Pour $T \in \mathcal{D}'$ et $\varphi \in \mathcal{D}$, on écrit $\langle T, \varphi \rangle$ à la place de $T(\varphi)$.

Distributions régulières

À toute fonction f localement sommable (sommable sur tout intervalle borné) on peut associer une distribution unique T_f définie par l'intégrale de Lebesgue :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

Une telle distribution est dite régulière. Elle est en fait associée à la classe des fonctions presque partout égales à f .

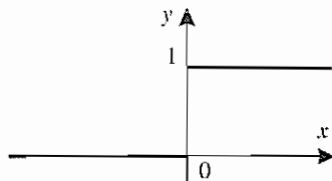
Exemples utilisés en théorie du signal

► Fonction échelon unité

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On lui associe la distribution Y de Heaviside définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle Y, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

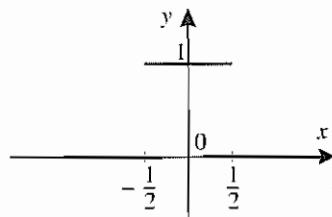


► Fonction porte unité

$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On lui associe la distribution Π définie par :

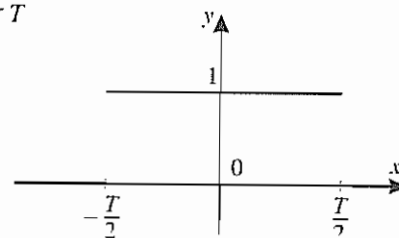
$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \Pi, \varphi \rangle = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi(x) dx.$$



► Fonction porte de largeur T

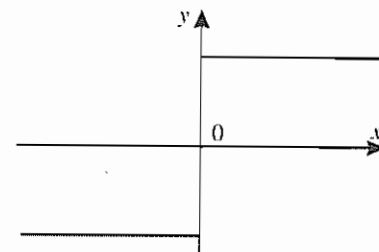
$$\begin{cases} f(x) = 1 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2} \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La distribution associée se note Π_T , ou rect_T .



► Fonction signe

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Distributions singulières

► Distribution δ de Dirac

Elle est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

Elle représente un phénomène impulsionnel de grandeur 1.

L'impulsion de Dirac au point d'abscisse a (notée δ_a) est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

► Distribution peigne de Dirac

Elle est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(n).$$

Elle est constituée d'une impulsion de Dirac en chaque point d'abscisse entière. On la note $\mathbb{L}$.

► Distribution peigne de Dirac de période T

Elle est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(nT).$$

On la note $\mathbb{L}_T$. Elle est constituée d'une impulsion de Dirac en chaque point d'abscisse nT avec $n \in \mathbb{Z}$.

► Distribution $\text{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$

Elle est définie par :

$$\left\langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-A}^A \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

où $A > 0$ est tel que $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$ (cf. valeur principale de Cauchy, chap. I Intégration page 5).

Support d'une distribution

Une distribution T est nulle sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ si $\langle T, \varphi \rangle = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ ayant son support inclus dans U .

La réunion de tous les ouverts sur lesquels T est nulle est un ouvert dont le complémentaire (fermé) est le support de T , noté $\text{supp } T$.

Par conséquent, si le support de T et le support de φ sont disjoints, alors $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

► Exemples

$$\text{supp } Y = [0, +\infty[, \quad \text{supp } \delta = \{0\}, \quad \text{supp } \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right) = \mathbb{R}.$$

OPÉRATIONS SUR LES DISTRIBUTIONS

Combinaison linéaire

L'addition et la multiplication par un scalaire sont les opérations usuelles sur l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{D}$. Elles sont définies par :

$$\forall S, T \in \mathcal{D}' \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R} \quad \langle \lambda S + \lambda' T, \varphi \rangle = \lambda \langle S, \varphi \rangle + \lambda' \langle T, \varphi \rangle.$$

Retard

Si $f(x)$ est une fonction localement sommable, la fonction $g(x) = f(x - a)$ est appelée la retardée de $f(x)$, de retard a . Elle est localement sommable et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle T_g, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - a) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x + a) dx \\ &= \langle T_f, \varphi(x + a) \rangle. \end{aligned}$$

► Définition

À toute distribution $T \in \mathcal{D}'$ (qu'on écrit encore $T(x)$) et tout $a \in \mathbb{R}$ on associe la distribution notée $T(x - a)$, appelée retardée de T , de retard a , définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T(x - a), \varphi(x) \rangle = \langle T(x), \varphi(x + a) \rangle.$$

► Exemples

$$Y(x - a) \text{ est définie par : } \langle Y(x - a), \varphi(x) \rangle = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx.$$

$$\delta(x - a) = \delta_a \text{ est définie par : } \langle \delta(x - a), \varphi \rangle = \varphi(a).$$

On définit une distribution périodique, de période a , par $T(x + a) = T(x)$.

Par exemple, le peigne de Dirac est périodique de période 1.

Changement d'échelle

Si $f(x)$ est une fonction localement sommable, pour $k \neq 0$ la fonction $x \mapsto f(kx)$ définit un changement d'échelle sur le domaine de f . Elle est localement sommable et vérifie :

$$\langle T_{f(kx)}, \varphi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(kx) \varphi(x) dx = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi\left(\frac{x}{k}\right) dx.$$

► Définition

À $T(x) \in \mathcal{D}'$ et $k \in \mathbb{R}^*$, on associe la distribution $T(kx)$ définie par :

$$\forall \varphi(x) \in \mathcal{D} \quad \langle T(kx), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|k|} \langle T(x), \varphi\left(\frac{x}{k}\right) \rangle.$$

$T(kx)$ est dite déduite de $T(x)$ par le changement d'échelle de rapport k .

► Exemples

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x).$$

On définit une distribution paire par $T(-x) = T(x)$ et une distribution impaire par $T(-x) = -T(x)$.

Par exemple, $\delta(x)$ et $\llbracket \cdot \rrbracket(x)$ sont des distributions paires.

Dérivation

Si f est une fonction dérivable, et $f(x)$ et $f'(x)$ localement sommables, on a pour toute $\varphi(x) \in \mathcal{D}$:

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi(x) dx = [f(x) \varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi'(x) dx = -\langle T_f, \varphi' \rangle.$$

► Définition

À toute $T \in \mathcal{D}'$ on associe la distribution T' , appelée dérivée de T , définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle.$$

Il en résulte que toute distribution T est indéfiniment dérivable. Sa dérivée d'ordre n est notée $T^{(n)}$. Elle est définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle.$$

► Premiers exemples

$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

$$Y' = \delta$$

$$\Pi' = \delta\left(x + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

► Dérivation d'une distribution régulière associée à une fonction ayant des discontinuités de première espèce

Soit $f(x)$ une fonction continue pour $x \neq x_0$ et présentant en ce point une discontinuité de première espèce de saut $\sigma(x_0) = f(x_0+) - f(x_0-)$.

Supposons que la dérivée $f'(x)$ au sens des fonctions soit définie pour $x \neq x_0$ et désignons par $\{f'(x)\}$ une fonction presque partout égale à cette dérivée.

On suppose enfin que $\{f'(x)\}$ est localement sommable. On a alors :

$$T_{f'} = T_{\{f'\}} + \sigma(x_0) \delta(x - x_0).$$

Cette formule se généralise au cas où la fonction présente un nombre fini de points de discontinuité de première espèce $x_1, \dots, x_n$ avec des sauts $\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_n)$. On désigne encore par $\{f'\}$ une fonction presque partout égale à la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$ (au sens des fonctions) et on suppose f et $\{f'\}$ localement sommables. On a alors :

$$T_{f'} = T_{\{f'\}} + \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) \delta(x - x_i).$$

► **Dérivation d'une distribution régulière associée à une fonction ayant une discontinuité de deuxième espèce**

La fonction $\ln|x|$ possède en 0 une discontinuité de deuxième espèce et est localement sommable. Elle est dérivable au sens des distributions et on a :

$$\langle T_f', \varphi \rangle = \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \langle \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \rangle,$$

ce qu'on écrit encore :

$$(\ln|x|)' = \text{vp} \left(\frac{1}{x} \right).$$

Multiplication d'une distribution par une fonction

► **Définition**

À toute distribution $T \in \mathcal{D}'$ et toute fonction $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on associe la distribution αT définie par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle \alpha T, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \varphi \rangle.$$

► **Dérivation du produit αT**

Pour $T \in \mathcal{D}'$ et $\alpha \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on a :

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'.$$

► **Équation $xT = 0$**

D'après la définition de δ , on a : $\alpha \delta = \alpha(0)\delta$.

δ est donc une solution de $xT = 0$.

Toutes les solutions de $xT = 0$ sont de la forme $T = C\delta$ où C est une constante arbitraire.

CONVERGENCE DANS $\mathcal{D}'$

Définition

La suite de distributions (T_n) converge vers la distribution T si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Lien avec la convergence des fonctions

► **Théorème**

Si la suite de fonctions localement sommables (f_n) converge uniformément vers la fonction localement sommable f , alors la suite des distributions régulières (T_{f_n}) converge dans $\mathcal{D}'$ vers T_f .

► **Remarque**

Il n'y a aucune relation d'implication entre la convergence simple presque partout des fonctions et la convergence dans $\mathcal{D}'$.

Lien avec la dérivation

Si la suite (T_n) converge vers T dans $\mathcal{D}'$, alors la suite (T_n') converge vers T' dans $\mathcal{D}'$.

Au sens des distributions, la dérivée de la limite est donc toujours égale à la limite des dérivées. Ceci entraîne que l'application $T \mapsto T'$, de $\mathcal{D}'$ dans $\mathcal{D}'$, est continue.

Exemple : peigne de Dirac

$$\sqcup \sqcup (x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2in\pi x}.$$

17

Convolution

CONVOLUTION DES FONCTIONS

Définition

On appelle produit de convolution des fonctions localement sommables f et g , la fonction h définie, lorsqu'elle existe, par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt.$$

Notation : $h = f * g = g * f$.

Il ne suffit pas que f et g soient localement sommables pour que h soit définie. Si $f(x) = g(x) = e^x$, $h(x)$ n'existe pour aucune valeur de x .

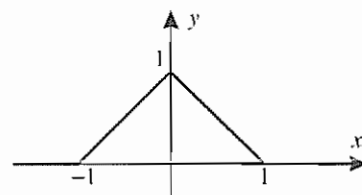
Fonctions à support borné

► Si l'une des deux fonctions f et g est à support borné, $f * g$ est défini pour tout x . Par exemple, si $f(x) = \frac{1}{a} \square\left(\frac{x}{a}\right)$, on a :

$$h(x) = \frac{1}{a} \int_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} g(t) dt$$

qui est la moyenne glissante de g sur un intervalle de longueur a .

► Si f et g sont toutes les deux à supports bornés, il en est de même de leur produit de convolution. Par exemple :

$$\begin{aligned} \square * \square &= \int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \square(t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } |x| > 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$


La fonction ainsi définie est appelée fonction triangle : $\Delta = \square * \square$.

Fonctions à support limité à gauche

Si f et g sont à supports limités à gauche, $f * g$ est définie et à support limité à gauche. Ainsi, si $f(x) = g(x) = 0$ pour $x < a$, on a :

$$(f * g)(x) = \int_a^{x-a} f(t)g(x-t) dt \quad ; \quad (f * g)(x) = 0 \text{ pour } x < 2a.$$

Si f et g sont quelconques, $Y(x-a)f(x)$ et $Y(x-a)g(x)$ ont leurs supports limités à gauche par a . On a alors :

$$Y(x-a)f(x) * Y(x-a)g(x) = Y(x-2a) \int_a^{x-a} f(t)g(x-t) dt.$$

Fonctions causales

Si f et g sont causales (nulles pour $x < 0$), $f * g$ est causale et on a pour $x \geq 0$:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt.$$

Si f et g sont quelconques, $Y(x)f(x)$ et $Y(x)g(x)$ sont causales et on a :

$$(Yf * Yg)(x) = Y(x) \int_0^x f(t) g(x-t) dt : (f * g)(x) = 0 \text{ pour } x < 0.$$

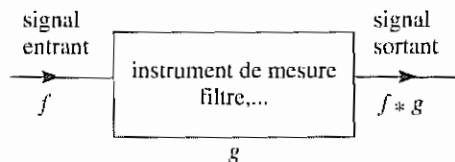
Si f est causale, $Y * f$ est appelée primitive causale de f . Sa dérivée (au sens des distributions) est égale à f .

Si f est quelconque, la primitive causale de Yf est :

$$(Y * Yf)(x) = Y(x) \int_0^x f(t) dt.$$

Interprétation physique : filtrage du signal

Le traitement subi par un signal dans un instrument de mesure peut être interprété par un produit de convolution de la fonction f qui caractérise le signal d'entrée et de la fonction g (appelée réponse impulsionnelle) qui caractérise l'instrument.



CONVOLUTION DES DISTRIBUTIONS

Introduction

Si on cherche à interpréter le produit de convolution de deux fonctions localement sommables comme une distribution régulière, on est conduit à

calculer pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \langle (f * g)(x), \varphi(x) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt \right) \varphi(x) dx \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(u) g(v) \varphi(u+v) du dv. \end{aligned}$$

Mais si la fonction à une variable $\varphi(x)$ est à support borné, cela n'entraîne pas qu'il en soit de même de la fonction à deux variables $\varphi(u+v)$.

Par exemple, si le support de φ est le segment $[a, b]$, le support de $\varphi(u+v)$ est la bande comprise entre les droites parallèles $x+y=a$ et $x+y=b$.

Il faut donc une condition supplémentaire.

Définition

Si S et $T \in \mathcal{D}$ sont telles que la partie $D_\varphi \cap (\text{supp } S \times \text{supp } T)$ de $\mathbb{R}^2$ est bornée pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$, on définit une nouvelle distribution $S * T$ par :

$$\langle S * T, \varphi \rangle = \langle S(x), \langle T(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle.$$

Des conditions suffisantes d'existence de $S * T$ sont :

- au moins une des deux distributions est à support borné,
- les deux distributions ont des supports limités du même côté ; par exemple, elles sont toutes les deux causales.

Commutativité

Si $S * T$ existe, alors $T * S$ aussi, et on a :

$$S * T = T * S \quad \text{et} \quad \text{supp}(S * T) \subset \text{supp } S + \text{supp } T.$$

Associativité

Si R, S, T sont telles que $R * S, S * T$ et $T * R$ existent, alors :

$$(R * S) * T = R * (S * T).$$

Les deux membres de cette égalité peuvent être distincts, si les hypothèses ne sont pas vérifiées.

Par exemple, $(1 * \delta') * Y = 0$ et $1 * (\delta' * Y) = 1$.

Rôle de δ et de ses dérivées

➤ Élément unité

$$\forall S \in \mathcal{D}' \quad \delta * S = S.$$

➤ Retard

$$\forall S \in \mathcal{D}' \quad \delta(x - a) * S(x) = S(x - a).$$

➤ Dérivation

$$\forall S \in \mathcal{D}' \quad \delta' * S = S' \quad ; \quad \delta^{(n)} * S = S^{(n)}.$$

Si S est une distribution régulière associée à une fonction localement sommable, il s'agit de la dérivation au sens des distributions.

Conséquence :

$$(S * T)' = (S * T) * \delta' = S' * T = S * T'$$

$$(S * T)^{(n)} = (S * T) * \delta^{(n)} = S^{(n)} * T = S * T^{(n)}.$$

ALGÈBRES DE CONVOLUTION

Définition

On cherche à résoudre, en termes de distributions, une équation de la forme : $A * X = B$.

Comme la convolution possède un élément unité, on recherche un inverse

de convolution pour A (unique si la loi est associative), ce qui permet d'obtenir la solution :

$$X = A^{-1} * B.$$

Pour cela, on se restreint à des sous ensembles $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}'$ possédant les propriétés suivantes, qui assurent l'unicité de la solution d'une équation de convolution :

$\mathcal{A}$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles de $\mathcal{D}'$;

$\mathcal{A}$ est stable pour la convolution qui est aussi associative.

Lorsque ces deux propriétés sont réalisées, $\mathcal{A}$ vérifie les axiomes d'une algèbre. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre de convolution.

Algèbres de convolution usuelles

On obtient une algèbre de convolution en considérant :

– l'ensemble $\mathcal{E}'$ des distributions à support borné ;

– l'ensemble $\mathcal{D}'_+$ des distributions causales.

Exemple d'équation de convolution

L'intensité qui traverse un circuit RLC vérifie l'équation :

$$R i(t) + L i'(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = e(t)$$

(e et i sont des fonctions causales).

Dans $\mathcal{D}'_+$, cette équation s'écrit sous la forme équivalente :

$$\left(R \delta + L \delta' + \frac{Y}{C} \right) * i = e.$$

La résolution de l'équation du circuit revient donc à la recherche de :

$$A = \left(R \delta + L \delta' + \frac{Y}{C} \right)^{-1}$$

qui permet d'obtenir l'intensité correspondant à e donnée par :

$$i = A * e.$$

Transformation de Laplace

TRANSFORMATION DE LAPLACE DES FONCTIONS

Définition

On appelle transformée de Laplace de la fonction causale f (c'est-à-dire que $f(t) = 0$ pour $t < 0$), la fonction F de la variable p définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

pour les valeurs de $p \in \mathbb{C}$ telles que la fonction à intégrer soit sommable. La transformée de Laplace de la fonction causale f est notée $F(p)$ ou $\mathcal{L}[f](p)$, ou encore $\mathcal{L}[f(t)](p)$.

Si g est la réponse impulsionnelle d'un système physique, sa transformée de Laplace $G(p)$ est la fonction de transfert en p du système. Elle décrit le régime permanent et le régime transitoire.

Exemple

La fonction Y de Heaviside (ou échelon unité) a pour transformée de Laplace :

$$\mathcal{L}[Y(t)](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{p} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(p) > 0.$$

Domaine de sommabilité

► Propriétés

Soit $p = \alpha + i\beta$ et $p_0 = \alpha_0 + i\beta_0$.

La transformée $\mathcal{L}[f](p)$ existe si, et seulement si, $\mathcal{L}[f](\alpha)$ existe.

Si $\mathcal{L}[f](p_0)$ existe, alors $\mathcal{L}[f](p)$ existe pour tout p tel que $\alpha \geq \alpha_0$.

► Définition

L'abscisse de sommabilité de f est le réel a tel que $\mathcal{L}[f](p)$ existe pour $\operatorname{Re}(p) > a$ et n'existe pas pour $\operatorname{Re}(p) < a$.

Si $\mathcal{L}[f](p)$ existe pour tout $p \in \mathbb{C}$ (par exemple si $f(t) = Y(t)e^{-t^2}$), on pose $a = +\infty$.

Si $\mathcal{L}[f](p)$ n'existe jamais (par exemple si $f(t) = Y(t)e^t$), on pose $a = -\infty$.

Le demi-plan défini par $\operatorname{Re}(p) > a$ est le domaine de sommabilité de f . Sur la frontière $\operatorname{Re}(p) = a$, il n'y a pas de réponse générale.

► Critère pratique

On dit que la fonction $f(t)$ est d'ordre exponentiel s'il existe des constantes réelles t_0 , k et $A > 0$ telles que :

$$\forall t \geq t_0 \quad |f(t)| \leq A e^{kt}.$$

Dans ce cas, l'abscisse de sommabilité de f vérifie : $a \leq k$.

Attention, il existe des fonctions qui ne sont pas d'ordre exponentiel et qui possèdent cependant une transformée de Laplace ; par exemple $\frac{Y(t)}{\sqrt{t}}$.

► Holomorphie de $F(p)$

La fonction $p \mapsto F(p)$ est holomorphe dans le domaine de sommabilité.

Pour $\operatorname{Re}(p) > a$, $F(p)$ est donc indéfiniment dérivable et on a :

$$F^{(n)}(p) = \int_0^{+\infty} (-1)^n e^{-pt} f(t) dt.$$

Original

Étant donnée une fonction $F(p)$, peut-on trouver une fonction causale $f(t)$ telle que $F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)$?

► Théorème

Soit $f(t)$ et $g(t)$ des fonctions causales, continues par morceaux sur tout segment et d'ordre exponentiel. S'il existe un nombre réel α tel que $\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[g](p)$ pour tout $\operatorname{Re}(p) > \alpha$, alors, on a $f(t) = g(t)$, pour chaque valeur de t où les deux fonctions sont continues.

Dans la pratique on dispose de tables rassemblant les transformées de Laplace de fonctions usuelles.

PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Linéarité

Si f_1 et f_2 sont causales et possèdent des transformées de Laplace, et si λ_1 et λ_2 sont des complexes, alors $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ possède une transformée de

Laplace et l'on a :

$$\mathcal{L}[\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2](p) = \lambda_1 \mathcal{L}[f_1](p) + \lambda_2 \mathcal{L}[f_2](p).$$

Changement d'échelle

Soit $f(t)$ une fonction causale possédant une transformée de Laplace. La fonction $g(t) = f(kt)$ est dite obtenue par changement d'échelle à partir de la fonction $f(t)$.

Si $k > 0$, alors $g(t)$ est causale et possède une transformée de Laplace qui vérifie :

$$\mathcal{L}[f(kt)](p) = \frac{1}{k} \mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{p}{k}\right) \quad k > 0.$$

Retard sur une fonction

Soit $f(t)$ une fonction causale possédant une transformée de Laplace. La fonction $g(t) = f(t - t_0)$ est appelée la retardée de $f(t)$, de retard t_0 .

$g(t)$ est causale si $t_0 > 0$ et on a alors :

$$\mathcal{L}[f(t - t_0)](p) = e^{-t_0 p} \mathcal{L}[f](p).$$

On peut aussi effectuer un retard sur la transformée :

$$\mathcal{L}[f](p - p_0) = \mathcal{L}[e^{p_0 t} f(t)](p) \quad p_0 \in \mathbb{C}.$$

Théorème de la valeur initiale

Soit f une fonction causale admettant une transformée de Laplace et telle que $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$; alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \mathcal{L}[f](x) = f(0^+).$$

Théorème de la valeur finale

Soit f une fonction causale admettant une transformée de Laplace et telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = l$ (fini) ; alors l'abscisse de sommabilité est ≤ 0 et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \mathcal{L}[f](x) = l.$$

Transformation d'une dérivée

► Théorème

Soit f une fonction causale continue pour $t > 0$, possédant une dérivée continue par morceaux sur tout segment pour $t > 0$ et d'ordre exponentiel. Supposons que $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$ existe.

Alors $f(t)$ est d'ordre exponentiel et on a, pour $\operatorname{Re}(p)$ suffisamment grand :

$$\mathcal{L}[f'(t)](p) = p \mathcal{L}[f](p) - f(0^+)$$

► Remarques

• La formule s'adapte au cas où f' est continue pour $t > 0$, f'' est d'ordre exponentiel et continue par morceaux sur tout segment pour $t > 0$ et, enfin, lorsque les limites $f(0^+)$ et $f'(0^+)$ existent, on a :

$$\mathcal{L}[f''(t)](p) = p^2 \mathcal{L}[f](p) - p f(0^+) - f'(0^+).$$

• Il existe des fonctions admettant une transformée de Laplace et dont la dérivée n'en admet pas ; par exemple $\frac{Y(t)}{\sqrt{t}}$.

Transformation d'une primitive

Soit f une fonction causale admettant une transformée de Laplace et a son abscisse de sommabilité. Pour $\operatorname{Re}(p) > \max(a, 0)$, on a :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f](p).$$

Transformation d'un produit de convolution

Soit f et g deux fonctions causales dont les abscisses de sommabilité respectives sont a et b . Pour $\operatorname{Re}(p) > \max(a, b)$, $\mathcal{L}[f * g](p)$ existe et on a :

$$\mathcal{L}[f * g](p) = \mathcal{L}[f](p) \cdot \mathcal{L}[g](p).$$

TABLE

Dans ce tableau n est entier. La colonne a indique l'abscisse de sommabilité.

$f(t)$	$\mathcal{L}[Y(t)f(t)](p)$	a
1	$\frac{1}{p}$	0
t	$\frac{1}{p^2}$	0
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	0
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$	0
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	α
$e^{\alpha t} t^n$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$	α
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	0
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	0
$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	0
$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	0
$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{p(p^2 + \omega^2)}$	0
$\omega t - \sin \omega t$	$\frac{\omega^3}{p^2(p^2 + \omega^2)}$	0

$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega^3}{(p^2 + \omega^2)^2}$	0
$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$	0
$\sin \omega t + \omega t \cos \omega t$	$\frac{2\omega p^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$	0
$e^{\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$	α
$e^{\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}$	α
$e^{\alpha t} - e^{\beta t}$	$\frac{\alpha - \beta}{(p - \alpha)(p - \beta)}$	$\max(\alpha, \beta)$
$1 + \frac{\beta e^{\alpha t} - \alpha e^{\beta t}}{\alpha - \beta}$	$\frac{\alpha \beta}{p(p - \alpha)(p - \beta)}$	$\max(0, \alpha, \beta)$

TRANSFORMATION DE LAPLACE DES DISTRIBUTIONS

Définition

On est tenté de définir la transformée de Laplace d'une distribution $T \in \mathcal{D}'_+$ (distributions causales) par la relation :

$$\mathcal{L}[T(t)](p) = \langle T(t), e^{-pt} \rangle$$

qui permet de retrouver le cas régulier.

Toutefois cette expression n'a de sens que si T est à support borné, ce qui est très restrictif.

► Théorème

Soit $T \in \mathcal{D}'_+$ et supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $e^{-\alpha t} T \in \mathcal{S}'$.

Alors $\langle T(t), e^{-pt} \rangle$ est une fonction indéfiniment dérivable pour $\operatorname{Re}(p) > \alpha$ et définit la transformée de Laplace de T .

La condition imposée permet ainsi de retrouver les fonctions d'ordre exponentiel parmi les distributions régulières possédant une transformée de Laplace.

Convolution

Pour $\operatorname{Re}(p)$ assez grand, on a :

$$\mathcal{L}[T * S](p) = \mathcal{L}[T](p) \cdot \mathcal{L}[S](p).$$

Dérivation

$$\mathcal{L}[T^{(n)}](p) = p^n \mathcal{L}[T](p).$$

Retard

$$\mathcal{L}[T(t - a)](p) = e^{-ap} \mathcal{L}[T](p) \quad a > 0.$$

On a une propriété analogue pour le retard de la transformée :

$$\mathcal{L}[e^{at} T(t)](p) = \mathcal{L}[T](p - a) \quad a \in \mathbb{R}.$$

Exemple

$$\mathcal{L}[\delta] = 1 \quad ; \quad \mathcal{L}[\delta(t - a)] = e^{-ap} \quad ; \quad \mathcal{L}[\delta^{(n)}] = p^n.$$

Primitivation

$$\mathcal{L}[Y(t) * T(t)](p) = \frac{\mathcal{L}[T](p)}{p}.$$

Rappelons que, si T est une fonction causale $f(t)$, on a

$$(Y * f)(t) = \int_0^t f(u) du.$$

Dérivation de la transformée

Pour $\operatorname{Re}(p)$ assez grand, on a :

$$(\mathcal{L}[T])^{(n)}(p) = \mathcal{L}[(-t)^n T(t)](p).$$

Application à la résolution d'équations de convolution dans $\mathcal{D}'_+$

Reprenons l'exemple du circuit RLC du chapitre 17, représenté par l'équation de convolution dans $\mathcal{D}'_+$:

$$\left(R\delta + L\delta' + \frac{Y}{C}\right) * i = e.$$

La résolution de cette équation est équivalente à la recherche de l'original

$$\text{de } I(p) = \frac{E(p)}{R + Lp + \frac{1}{Cp}}.$$

19

Transformation de Fourier

TRANSFORMATION DE FOURIER DES FONCTIONS

Définition

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Sous réserve d'existence, on appelle transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx.$$

et co-transformée de Fourier de f la fonction $\check{f}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\check{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu.$$

Sur le plan physique, ν est une fréquence.

Si g est la réponse impulsionnelle d'un système physique, sa transformée de Fourier $\hat{g}(\nu) = \mathcal{L}[g](i2\pi\nu) = \mathcal{L}[g](i\omega)$ est la fonction de transfert en fréquence du système. Elle décrit le régime permanent.

La fonction $\hat{f}$ se note $\mathcal{F}[f]$ ou $\mathcal{F}^+[f]$. La fonction $\check{f}$ se note $\mathcal{F}^-[f]$.

Premières propriétés

$$\mathcal{F}^-[f](\nu) = \mathcal{F}^+[f](-\nu).$$

Si f est paire, $\mathcal{F}^+[f]$ et $\mathcal{F}^-[f]$ sont paires et égales.

Si f est impaire, $\mathcal{F}^+[f]$ et $\mathcal{F}^-[f]$ sont impaires et opposées.

Existence

Une condition suffisante pour que $\hat{f}$ existe est que f soit sommable.

Si f est sommable, $\hat{f}$ est bornée, continue et $\hat{f}(\nu)$ tend vers 0 quand $|\nu|$ tend vers l'infini. Mais $\hat{f}$ n'est pas nécessairement sommable.

Transformation de Hilbert

Soit f un signal causal réel et $\mathcal{F}[f](\nu) = A(\nu) + iB(\nu)$ sa transformée de Fourier, où A est la partie réelle de $\mathcal{F}[f]$ et B la partie imaginaire.

On a :

$$B(\nu) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(x)}{x - \nu} dx \quad \text{et} \quad A(\nu) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(x)}{x - \nu} dx.$$

On dit que B est la transformée de Hilbert de A , et A la transformée de Hilbert inverse de B .

Formule d'inversion

➤ Deux fonctions sommables qui ont la même transformée de Fourier sont égales presque partout. Si elles sont toutes les deux continues, elles sont égales.

➤ Si f et $\hat{f}$ sont sommables, alors on a presque partout :

$$\mathcal{F}^-[\mathcal{F}^+[f]] = f \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}^+[\mathcal{F}^-[f]] = f.$$

Si f est continue, ces égalités ont lieu partout.

On dit que $\mathcal{F}^+$ est la transformée directe de Fourier et $\mathcal{F}^-$ la transformée inverse de Fourier.

Sur le plan physique, le théorème de réciprocité établit que le signal f est la superposition d'oscillations harmoniques de fréquences ν et d'amplitudes complexes $\hat{f}(\nu)$.

➤ Il n'est pas toujours facile de savoir si $\hat{f}$ est sommable.

Quand f est $\mathcal{C}^2$, si f, f' et f'' sont sommables, alors $\hat{f}$ est sommable.

On dispose aussi du résultat plus général qui suit.

➤ Théorème de Dirichlet-Fourier

Si f est sommable et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors :

$$\text{vp} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu x} d\nu = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Linéarité

$$\mathcal{F}[\lambda f_1 + \lambda_2 f_2] = \lambda_1 \mathcal{F}[f_1] + \lambda_2 \mathcal{F}[f_2].$$

Retard, changement d'échelle

$$\mathcal{F}[f(x - x_0)](\nu) = e^{-2i\pi\nu x_0} \mathcal{F}[f](\nu) ; \quad \mathcal{F}[f](\nu - \nu_0) = \mathcal{F}[e^{2i\pi\nu_0 x} f(x)](\nu)$$

$$\mathcal{F}[f(kx)](\nu) = \frac{1}{|k|} \mathcal{F}[f]\left(\frac{\nu}{k}\right) \quad k \neq 0.$$

Transformation d'un produit de convolution

Si f et g sont sommables, $f * g$ est sommable et on a :

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g].$$

Dérivation par rapport à la variable temporelle

Si f est sommable et possède des dérivées sommables jusqu'à l'ordre m , pour $0 \leq k \leq m$ on a :

$$\mathcal{F}[f^{(k)}(x)](\nu) = (2i\pi\nu)^k \mathcal{F}[f](\nu).$$

Dérivation par rapport à la fréquence

Si $x^m f(x)$ est sommable, alors $\hat{f}(\nu)$ possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre m et pour $0 \leq k \leq m$ on a :

$$\hat{f}^{(k)}(\nu) = \mathcal{F}[(-2i\pi x)^k f(x)](\nu).$$

Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}$

On dit que la fonction φ est à décroissance rapide à l'infini si $\varphi(x)$ tend vers 0 plus vite que toute puissance de $\frac{1}{x}$ lorsque x tend vers l'infini.

On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables qui sont à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées.

► Théorème

La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ établit un automorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$. L'automorphisme réciproque est $\mathcal{F}^{-1}$.

RÉPARTITION DE L'ÉNERGIE

Théorème de Parseval-Plancherel

Si f et $\hat{f}$ sont sommables et de carrés sommables, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu,$$

c'est-à-dire : $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Cette relation est analogue à la formule de Parseval des séries de Fourier. Elle traduit que, lorsqu'on interprète f comme superposition de signaux harmoniques complexes au moyen de la transformation de Fourier, les énergies de ces derniers se superposent pour donner l'énergie de f .

$|\hat{f}(\nu)|^2$ est la densité spectrale d'énergie de f .

Fonction d'autocorrélation

► Définition

Soit f une fonction sommable et de carré sommable. La fonction d'autocorrélation de f est la fonction C_f définie par :

$$\begin{aligned} C_f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \bar{f}(u-x) du \\ &= f(x) * \bar{f}(-x). \end{aligned}$$

► Transformée de Fourier

La transformée de Fourier de C_f est la densité spectrale d'énergie de f :

$$\mathcal{F}[C_f](\nu) = |\mathcal{F}[f](\nu)|^2.$$

► Propriétés

Si f est réelle, alors C_f est réelle et paire.

$C_f(0)$ est réel et positif. Il représente une énergie.

Le module de $C_f(x)$ est maximal en $x = 0$. On a donc $0 \leq \frac{|C_f(x)|}{C_f(0)} \leq 1$.

Fonction d'intercorrélation

➤ Définition

Soit f et g deux fonctions sommables et de carrés sommables. La fonction d'intercorrélation de f et g est la fonction C_{fg} définie par :

$$C_{fg}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\overline{g(u-x)} du = f(x) * \overline{g}(-x).$$

➤ Propriétés

$$C_{gf}(x) = \overline{C_{fg}(-x)} ; |C_{fg}(x)|^2 \leq C_f(0)C_g(0).$$

La fonction d'intercorrélation mesure l'énergie d'interaction entre deux phénomènes.

TRANSFORMATION DE FOURIER DES DISTRIBUTIONS

Espace $\mathcal{S}$ des fonctions test

L'espace $\mathcal{S}$ est l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables, à décroissance rapide à l'infini, ainsi que toutes leurs dérivées.

L'inclusion $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ est stricte car $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$ et $e^{-x^2} \notin \mathcal{D}$.

On définit une convergence dans $\mathcal{S}$, qui n'est pas la même que celle dans $\mathcal{D}$, par : une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{S}$ converge vers $\varphi \in \mathcal{S}$ si, pour tout $(k, p) \in \mathbb{N}^2$, $(x^k \varphi_n^{(p)}(x))_n$ converge vers $x^k \varphi^{(p)}(x)$, uniformément sur $\mathbb{R}$.

Espace $\mathcal{S}'$ des distributions tempérées

On appelle distribution tempérée toute forme linéaire continue sur $\mathcal{S}$.

L'ensemble des distributions tempérées est noté $\mathcal{S}'$.

Exemples de distributions tempérées

- Une fonction f sommable, ou de carré sommable, est tempérée, c'est-à-dire que sa distribution associée est tempérée.
- Une fonction f localement sommable et à croissance modérée à l'infini (il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^m} = 0$) est tempérée.
- Une distribution à support borné est tempérée.
- La dérivée d'une distribution tempérée est tempérée.
- La distribution δ et ses dérivées, le peigne de Dirac, sont des distributions tempérées.

Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

À toute distribution tempérée T on associe les distributions $\hat{T} = \mathcal{F}[T]$ et $\check{T} = \mathcal{F}^{-}[T]$, appelées respectivement transformée et co-transformée de Fourier de T et définies par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S} \quad \langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle ; \quad \langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle.$$

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{-}$ sont des automorphismes continus de $\mathcal{S}'$, inverses l'un de l'autre.

Cas des distributions à support borné

Si T est à support borné, sa transformée de Fourier est la fonction indéfiniment dérivable définie par :

$$\mathcal{F}[T](\nu) = \langle T(x), e^{-2i\pi\nu x} \rangle.$$

Ceci entraîne que le support de $\mathcal{F}[T]$ ne peut pas être borné.

Transformée de Fourier et convolution

Si S est à support borné et T tempérée, alors $S * T$ est tempérée et on a :

$$\mathcal{F}[S * T] = \mathcal{F}[S] \cdot \mathcal{F}[T] \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-}[S * T] = \mathcal{F}^{-}[S] \cdot \mathcal{F}^{-}[T].$$

Le produit de convolution de deux distributions tempérées n'est pas toujours défini.

DISTRIBUTIONS PÉRIODIQUES

Périodisation d'une distribution à support borné

Soit T_0 une distribution à support borné et $X > 0$ un nombre réel. La distribution T définie par :

$$T = T_0 * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nX)$$

est périodique, de période X .

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nX)$ est le peigne de Dirac avec des impulsions unitaires situées aux points d'abscisses nX .

En notant $\widehat{T}_0$ la transformée de Fourier $\mathcal{F}[T_0]$, on a :

$$T(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n \frac{x}{X}} \quad \text{avec} \quad c_n = \frac{1}{X} \widehat{T}_0\left(\frac{n}{X}\right).$$

L'expression précédente est appelée série de Fourier de la distribution périodique T . Elle converge vers $T(x)$ dans $\mathcal{S}'$.

Transformée de Fourier d'une distribution périodique

Toute distribution périodique T (de période X) est tempérée et sa transformée de Fourier est de la forme :

$$\mathcal{F}[T](\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta\left(\nu - \frac{n}{X}\right).$$

On peut dire que $\mathcal{F}[T]$ est une sorte de peigne de Dirac dont les dents sont situées aux points d'abscisses $\frac{n}{X}$ et de longueurs variables c_n .

On parle aussi de peigne de Dirac modulé par c_n .

Théorème d'échantillonnage

On considère $X > 0$ et une fonction f qui possède les propriétés nécessaires pour former :

► le produit :

$$f'(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nX)$$

qui représente un échantillonnage de $f(x)$ avec un pas égal à X ;

► le produit de convolution :

$$\tilde{f}(x) = f(x) * \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - nX) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - nX)$$

qui réalise une périodisation de $f(x)$.

La première hypothèse suppose f indéfiniment dérivable.

L'existence de $\tilde{f}$ est assurée si f est à support borné, contenu par exemple dans l'intervalle $[-x_0, x_0]$. Cette opération de périodisation présente un intérêt si $X \geq 2X_0$. Il n'y a pas alors chevauchement des diverses répliques de $f(x)$.

► Théorème de Shannon

Supposons que $f(x)$ soit telle que $\mathcal{F}[f](\nu)$ ait son support contenu dans $[-\nu_0, \nu_0]$ avec $\frac{1}{X} \geq 2\nu_0$. On a alors :

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right) \text{sinc}(2\pi\nu_0 x - n\pi)$$

$$\text{où } \text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}.$$

Cette formule montre qu'on peut reconstituer $f(x)$ à partir d'un échantillonnage.

C'est étonnant. Mais n'oubliez pas que le théorème de Shannon ne s'applique qu'à des fonctions indéfiniment dérivables et à support non borné (puisque leurs transformées de Fourier doivent être à support borné).

TABLE

	$f(x)$ ou $T(x)$	$\mathcal{F}[f](\nu)$
porte	$\square$	$\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$
triangle	$\wedge$	$\left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$
$a > 0$	e^{-ax^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\pi^2\nu^2}{a}\right)$
$a > 0$	$e^{-a x }$	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2\nu^2}$
	$\frac{1}{1+x^2}$	$\pi e^{-2\pi \nu }$
	$\delta(x)$	1
	$\delta^{(k)}(x)$	$(2i\pi\nu)^k$
	$\delta(x-x_0)$	$e^{-2i\pi\nu x_0}$
	$\text{vp}\left(\frac{1}{x}\right)$	$-i\pi \operatorname{sgn}(\nu)$
	$Y(x)$	$\frac{1}{2}\delta(\nu) + \frac{1}{2i\pi} \text{vp}\left(\frac{1}{\nu}\right)$
peigne	$\square\square$	$\square\square$

20

Transformations discrètes

Les transformations discrètes sont, en particulier, utilisées en électronique numérique dans l'étude des filtres numériques (télécommunications ...). La fonction de transfert en z et la transformée de Fourier caractérisent le comportement du dispositif.

CONVOLUTION DISCRÈTE

Généralités

Un signal numérique est représenté par une suite a dont l'élément général est noté $a(n)$, ou a_n , avec $n \in \mathbb{Z}$.

Le signal est causal si $a_n = 0$ pour tout $n < 0$.

Le support de la suite a est l'ensemble des $n \in \mathbb{Z}$ tels que $a_n \neq 0$.

On note l^1 l'ensemble des suites sommables ($\sum_n |a_n|$ converge) et l^2 l'ensemble des suites de carré sommable ($\sum_n |a_n|^2$ converge).

Produit de convolution

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux suites. Le produit de convolution de ces deux suites est la suite $c = (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ définie, lorsqu'elle existe, par :

$$c_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{n-k} b_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k b_{n-k}.$$

On note : $c = a * b = b * a$.

La suite δ_k définie par :

$$\delta_k(n) = 0 \quad \text{si } n \neq k \quad \text{et} \quad \delta_k(k) = 1$$

vérifie :

$$\delta_k * (a_n) = (a_{n-k}).$$

En particulier, $\delta_p * \delta_q = \delta_{p+q}$.

Existence

Le produit de convolution n'est pas toujours défini. Il l'est dans les cas suivants :

- la suite a est sommable ($a \in l^1$) et b est bornée (en particulier $b \in l^1$) ;
- les suites a et b sont de carrés sommables ($a, b \in l^2$) ;
- une suite a ou b est à support fini ;
- les suites a et b sont causales.

Algèbres de convolution

On obtient une algèbre de convolution (dont l'élément unité est δ_0) en considérant :

– l'ensemble d des suites à support fini,

– l'ensemble d'_+ des suites causales.

Dans d'_+ , une suite a admet un inverse pour le produit de convolution si, et seulement si, $a_0 \neq 0$. Dans ce cas, l'équation $a * x = b$ admet donc une solution unique $x = a^{-1} * b$.

Exemple d'équation de convolution

Considérons une équation aux différences finies à coefficients constants :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_0 u_n + \alpha_1 u_{n-1} + \dots + \alpha_p u_{n-p} = b_n$$

$$\alpha_0 \neq 0 \quad ; \quad u_k = 0 \quad \text{pour } k < 0.$$

Elle s'écrit de manière équivalente :

$$(\alpha_0 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 + \dots + \alpha_p \delta_p) * u = b.$$

Avec la condition $\alpha_0 \neq 0$ on obtient la solution unique :

$$u = (\alpha_0 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 + \dots + \alpha_p \delta_p)^{-1} * b.$$

TRANSFORMATION EN z

Définition

À toute suite $a = (a_n)$, la transformation en z associe la fonction A de la variable complexe z définie par la série de Laurent :

$$A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n}.$$

Cette série converge sur une couronne $R_1 < |z| < R_2$ où les rayons R_1 et R_2 peuvent être nuls, finis ou infinis.

On note $A = \mathcal{Z}[a]$ on parloir $\mathcal{Z}[a_n]$.

Inversion de la transformation en z

Il s'agit de retrouver la suite a en partant de la fonction $A(z)$ et de sa couronne de convergence.

Attention, si la couronne de convergence n'est pas précisée, il peut y avoir ambiguïté sur le signal a .

Si C est un cercle inclus dans la couronne de convergence, on a :

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C A(z) z^{n-1} dz.$$

Cette formule n'étant pas simple, d'autres méthodes sont disponibles :

– Lecture dans une table de transformées (cf. p168).

– La fonction A est souvent une fraction rationnelle que l'on décompose en éléments simples avant d'utiliser les développements usuels en séries entières.

– Dans le cas d'un signal causal, $A(z)$ est une série entière en $\frac{1}{z}$ et on peut utiliser la division suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{z}$.

– L'intégrale curviligne peut se calculer par la méthode des résidus :

$$a_n = \sum_i \text{Res} [A(z) z^{n-1}; z_i]$$

où les z_i retenus sont les pôles de $A(z) z^{n-1}$ intérieurs au contour C .

Propriétés

Soit a et b deux suites dont les transformées en z sont définies dans la même couronne et $\lambda \in \mathbb{C}$.

► Linéarité

$$\mathcal{Z}[a + b] = \mathcal{Z}[a] + \mathcal{Z}[b] ; \mathcal{Z}[\lambda a] = \lambda \mathcal{Z}[a].$$

► Retard

$$\mathcal{Z}[a_{n-p}](z) = z^{-p} \mathcal{Z}[a_n](z).$$

Physiquement, on ne sait réaliser que des retards. Comme cela entraîne un facteur multiplicatif z^{-p} , c'est la raison du choix de la transformée en z comme série en $\frac{1}{z}$ et non en z comme chez certains auteurs.

► Produit par une suite géométrique

$$\mathcal{Z}[k^n a_n](z) = \mathcal{Z}[a_n] \left(\frac{z}{k} \right).$$

Il s'agit de la multiplication d'un signal par un signal exponentiel.

► Dérivation de la transformée

$$\mathcal{Z}[na_n] = -z(\mathcal{Z}[a_n])'(z).$$

► Convolution

Lorsque le produit de convolution est défini, on a :

$$\mathcal{Z}[a * b] = \mathcal{Z}[a] \mathcal{Z}[b].$$

Pour résoudre une équation de convolution $a * x = b$, on écrit donc $\mathcal{Z}[x] = \frac{\mathcal{Z}[b]}{\mathcal{Z}[a]}$ (si $\mathcal{Z}[a]$ inversible) et on inverse la transformée $\mathcal{Z}[x]$ pour obtenir x .

Cas des signaux causaux

Dans le cas d'un signal causal, la condition d'existence de la transformée en z se réduit à $R_1 < |z|$.

► Théorème de la valeur initiale

$$a_0 = \lim_{|z| \rightarrow \infty} A(z).$$

► **Théorème de la valeur finale**

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, alors $l = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})A(z)$.

► **Théorème de Parseval**

Si le cercle unité $|z| = 1$ est à l'intérieur de la couronne de convergence de $A(z)$, l'énergie du signal s'écrit :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = \int_0^1 \left| A(e^{2i\pi\nu}) \right|^2 d\nu.$$

$\left| A(e^{2i\pi\nu}) \right|^2$ est la densité spectrale d'énergie du signal a .

Table de transformées en z de signaux causaux

a_n (avec $n \geq 0$)	$A(z)$	R_1
1	$\frac{z}{z-1}$	1
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	1
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	1
k^n	$\frac{z}{z-k}$	$ k $
$n k^{n-1}$	$\frac{z}{(z-k)^2}$	$ k $
$k^n \cos n\theta$	$\frac{z^2 - kz \cos \theta}{z^2 - 2kz \cos \theta + k^2}$	$ k $
$k^n \sin n\theta$	$\frac{kz \sin \theta}{z^2 - 2kz \cos \theta + k^2}$	$ k $

TRANSFORMATION DE FOURIER DISCRÈTE

Transformée de Fourier discrète des suites périodiques

Soit $a = (a_n)$ une suite N -périodique, c'est-à-dire telle que $a_{n+N} = a_n$ pour tout n .

La transformée de Fourier discrète de a est la suite A , de période N , de terme général :

$$A_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \omega^{kn}$$

où $\omega = \exp\left(-\frac{2i\pi}{N}\right)$ est racine N -ième de l'unité.

Connaissant A , on revient à a par la transformation inverse :

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k \omega^{-kn}.$$

La transformée de Fourier discrète a des propriétés analogues à la transformée de Fourier classique.

Interprétation matricielle

Notons $\bar{a}$ et $\bar{A}$ les matrices colonnes $\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{N-1} \end{pmatrix}$ et W

la matrice carrée d'ordre N dont le terme général situé sur la ligne k et la colonne l est ω^{kl} .

Les relations précédentes s'écrivent matriciellement :

$$\bar{A} = W \bar{a} \quad \text{et} \quad \bar{a} = \frac{1}{N} \bar{W} \bar{A}$$

où $\bar{W}$ est la matrice conjuguée de W .

Application au calcul numérique de la transformation de Fourier des fonctions

Il s'agit de rendre réalisable par ordinateur le calcul de :

$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx.$$

Pour ceci, on remplace $f(x)$ par des nombres $f(kT)$ qui représentent un échantillonnage de f , et en se limitant à un intervalle $[0, NT]$.

Une approximation de $\hat{f}(\nu)$ est fournie par :

$$\varphi(\nu) = \sum_{k=0}^{N-1} T f(kT) e^{-2i\pi\nu kT}.$$

On ne peut obtenir $\varphi(\nu)$ que pour un nombre limité de valeurs de ν . Puisque φ est périodique, de période $\frac{1}{T}$, on approxime $\varphi(\nu)$ par interpolation à partir des N valeurs :

$$\varphi\left(\frac{n}{NT}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} T f(kT) e^{-2i\pi\frac{nk}{N}} \quad n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Il s'agit de la transformée de Fourier discrète de la suite N -périodique dont les valeurs de base sont $T f(kT)$ pour $k \in \{0, \dots, N-1\}$.

L'opération précédente suppose que la fonction f est à support borné.

Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord la tronquer et choisir la fenêtre d'observation de façon à conserver les éléments importants du signal.

21

Ondelettes

La transformation de Fourier d'un signal contient toutes les informations. Mais elle ne permet pas de localiser les zones où les variations du signal sont rapides et les zones où elles sont faibles.

ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE

L'analyse de Fourier d'un signal est rendue locale à l'aide de fenêtres (fonctions régulières à support borné) que l'on fait glisser.

Transformation de Gabor

On utilise la fenêtre :

$$g(x) = 2^{\frac{1}{4}} e^{-\pi x^2}$$

À toute fonction f de carré sommable, on associe les coefficients (où $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$) :

$$G_{m,n}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) g(x-n) e^{-2i\pi mx} dx$$

et on reconstruit le signal comme pour l'analyse de Fourier.

Les ondelettes de Gabor oscillent trop aux hautes fréquences, pas assez aux basses fréquences, et la reconstruction du signal n'est pas pratique.

Transformation de Wigner-Ville

Elle est définie pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de carré sommable par :

$$W_f(t, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t + \frac{x}{2}\right) \bar{f}\left(t - \frac{x}{2}\right) e^{-2i\pi \nu x} dx$$

et elle vérifie :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(t, \xi) d\xi = |f(t)|^2.$$

La non-linéarité de cette transformation ne l'empêche pas d'être efficace pour les signaux de courte durée.

TRANSFORMATION EN ONDELETTES

Transformation continue

Une ondelette (ou ondelette-mère) ψ est une fonction très oscillante, d'intégrale nulle, et qui permet tous les calculs qui suivent.

On lui associe une famille d'ondelettes :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a > 0 \quad b \in \mathbb{R}$$

qui sont des copies par translation et dilatation.

Soit f une fonction de carré sommable sur $\mathbb{R}$. L'analyse de f se fait par les coefficients d'ondelettes :

$$T_{a,b}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{a,b}(t) f(t) dt.$$

La reconstruction de f à partir de ces coefficients se fait par :

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} T_{a,b}(f) \psi_{a,b}(t) \frac{1}{a^2} da db$$

où

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{1}{\xi} d\xi.$$

Transformation dyadique

La transformation en ondelettes continue est une représentation très redondante de $f(t)$. Il suffit en fait de connaître les coefficients $T_{a,b}$ pour certaines valeurs de a et de b .

On peut choisir comme coefficient de dilatation $a = 2^m$ (où $m \in \mathbb{Z}$) et comme coefficient de translation $b = n2^m$ (où $n \in \mathbb{Z}$) ; et noter $\psi_{m,n}$ au lieu de $\psi_{a,b}$.

La famille $\psi_{m,n}$ constitue alors une base orthonormale de l'espace des fonctions de carré sommable.

Ondelette de Haar

L'ondelette-mère est $\psi = \chi_{[0, \frac{1}{2}]} - \chi_{[\frac{1}{2}, 1]}$, soit :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{pour } \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle engendre les ondelettes :

$$\psi_{m,n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2^m}} & \text{pour } n2^m \leq t < \left(n + \frac{1}{2}\right)2^m \\ -\frac{1}{\sqrt{2^m}} & \text{pour } \left(n + \frac{1}{2}\right)2^m < t \leq (n+1)2^m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est l'exemple le plus simple. Il a l'inconvénient d'approcher les fonctions continues par des fonctions discontinues.

Ondelette de Morlet

L'ondelette-mère est :

$$\psi(t) = (t^2 - 1)e^{-\frac{t^2}{2}} = \left(e^{-\frac{t^2}{2}}\right)'' \quad \text{pour } t > 0.$$

En approximant sa transformée de Fourier $\nu^2 e^{-\frac{\nu^2}{2}}$ et en inversant l'approximation, on obtient $-\frac{1}{25}e^{-\frac{t^2}{2}} \cos 5t$. Pour ceci, il est donc possible de choisir :

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos 5t \quad \text{pour } t > 0.$$

Les ondelettes les plus utilisées sont d'expressions compliquées, mais ont des propriétés numériques efficaces.

Applications

- signaux à statistiques non stationnaires ;
- analyse des signaux radar ;
- simulation des tremblements de terre ;
- compression d'image en télévision numérique...

22

Calcul des variations

MINIMUM SANS CONTRAINTE

Minimum d'une fonction de plusieurs variables

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Si f possède un extrémum local en M_0 , et si f possède des dérivées partielles en ce point, on a alors la condition nécessaire :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(M_0) = \overrightarrow{0}.$$

On dit que M_0 est un point stationnaire, ou un point critique, de f .

Fonctionnelle définie par une intégrale

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^3$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

$$F : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y, Z) \longmapsto F(X, Y, Z)$$

et quatre réels a, b, A, B avec $a < b$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2 , telles que :

$$\begin{cases} u(a) = A & ; & u(b) = B \\ \forall x \in [a, b] & (x, u(x), u'(x)) \in U \end{cases}$$

On peut donc définir une fonctionnelle de $\mathcal{E}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$I(u) = \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) \, dx$$

et chercher les fonctions u qui rendent $I(u)$ minimale (ou maximale).

Équation d'Euler

Si $u_0 \in \mathcal{E}$ est un extrémum de I , alors u_0 vérifie l'équation d'Euler :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\partial F}{\partial Z}(x, u_0(x), u'_0(x)) \right] - \frac{\partial F}{\partial Y}(x, u_0(x), u'_0(x)) = 0.$$

On écrit souvent cette équation sous la forme :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) - \frac{\partial F}{\partial u} = 0.$$

En développant, l'équation d'Euler devient :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} u'' + \frac{\partial^2 F}{\partial Y \partial Z} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Z} - \frac{\partial F}{\partial Y} = 0.$$

Si $\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2} \neq 0$, il s'agit d'une équation différentielle du second ordre en u . Sa solution générale dépend de deux constantes d'intégration déterminées en général par les conditions aux extrémités du segment.

Mais on ne sait intégrer cette équation différentielle que dans quelques cas particuliers.

Cas particuliers

► Cas où F ne dépend pas de X

L'équation d'Euler devient une équation différentielle du premier ordre :

$$u' \frac{\partial F}{\partial Z}(u, u') - F(u, u') = \text{constante}.$$

► Cas où F ne dépend pas de Y

L'équation d'Euler devient une équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\partial F}{\partial Z}(x, u') = \text{constante}.$$

► Cas où F ne dépend pas de Z

L'équation d'Euler devient une équation algébrique :

$$\frac{\partial F}{\partial Y}(x, u) = 0.$$

Généralisation (plusieurs fonctions)

Soit F une fonction de classe C^2 définie dans un ouvert U de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. On considère des réels $a, b, A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ avec $a < b$.

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $u : x \mapsto u(x) = (u_1(x), \dots, u_n(x))$, appartenant à $C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$, telles que :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n\} & u_i(a) = A_i & ; & u_i(b) = B_i \\ \forall x \in [a, b] & (x, u_1(x), \dots, u_n(x), u'_1(x), \dots, u'_n(x)) \in U \end{cases}$$

On considère la fonctionnelle définie sur $\mathcal{E}$ par :

$$I(u) = \int_a^b F(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u'_1(x), \dots, u'_n(x)) \, dx.$$

Si $u_0 \in \mathcal{E}$ est un extrémum de I , alors u_0 vérifie les équations d'Euler :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial u_i} = 0.$$

Généralisation (plusieurs variables)

Dans la fonctionnelle $I(u)$, il peut arriver que u dépende de plusieurs variables indépendantes $x = (x_1, \dots, x_n)$ et soit une intégrale multiple :

$$I(u) = \int_{\Omega} F \left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right) dx_1 \dots dx_n$$

où Ω est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$.

Pour une valeur extrémale u_0 de $I(u)$ on a alors, en posant $u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}$, l'équation d'Euler :

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial u_k}(u_0) \right) - \frac{\partial F}{\partial u}(u_0) = 0.$$

Méthodes directes

Elles consistent à prouver, par des arguments théoriques, qu'il existe un minimum u_0 , puis à construire une suite minimisante qui converge vers u_0 .

MINIMUM AVEC CONTRAINTES

Extrémum lié d'une fonction à deux variables

Soit f et g deux fonctions de classe C^1 dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et $A = \{(x, y) \in U : g(x, y) = 0\}$.

Si la restriction de f à A présente un extrémum en $(x_0, y_0) \in A$ et si $\overrightarrow{\text{grad}} g(x_0, y_0) \neq \overrightarrow{0}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(x_0, y_0) + \lambda \overrightarrow{\text{grad}} g(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}.$$

λ est appelé multiplicateur de Lagrange.

L'optimisation de la fonction f sous la contrainte $g(x, y) = 0$ se ramène à l'optimisation (sans contrainte) du lagrangien :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Fonctionnelle définie par une intégrale

Considérons une fonction F et l'ensemble $\mathcal{E}$ déjà définis dans le problème d'extrémum libre généralisé à plusieurs fonctions.

L'objectif est de minimiser la même fonctionnelle $I(u)$, mais en imposant à u de vérifier une contrainte

$$g(u_1, \dots, u_n) = 0$$

où g est une fonction donnée de classe C^1 .

Le problème se ramène à la recherche d'un minimum sans contrainte de la fonctionnelle :

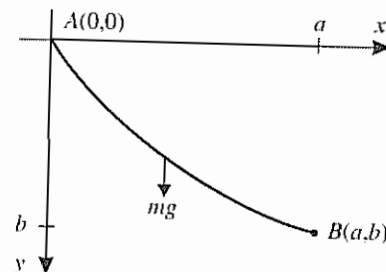
$$\int_a^b [F(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u'_1(x), \dots, u'_n(x)) + \lambda g(u_1(x), \dots, u_n(x))] dx$$

Les équations d'Euler correspondantes, et la contrainte, permettent alors de déterminer $u_1(x), \dots, u_n(x)$ et le multiplicateur de Lagrange λ .

APPLICATIONS

La brachistochrone

C'est la courbe joignant deux points d'un plan vertical et le long de laquelle une particule tombant d'une position de repos et sous la seule action de la pesanteur (sans frottement) se meut du point le plus haut au point le plus bas dans le temps le plus court.



On est conduit à minimiser la fonctionnelle :

$$\int_0^a \sqrt{\frac{1+u'^2}{u}} dx$$

avec $u(0) = 0$ et $u(a) = b$.

On obtient la forme paramétrique :

$$\begin{cases} x = K(\theta - \sin \theta) \\ y = K(1 - \cos \theta) \end{cases}$$

où K est tel que la courbe passe par B .

Il s'agit d'un arc de cycloïde ayant un point de rebroussement en A .

Propagation des rayons lumineux

Dans un milieu d'indice variable $n(x, y, z)$, le temps mis par un rayon lumineux pour aller d'un point A à un point B donnés est proportionnel à :

$$\int_{AB} n(x, y, z) ds.$$

D'après le principe de Fermat, le trajet du rayon lumineux minimise cette fonctionnelle.

Surface minimum de révolution

Soit (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux points donnés du plan. Parmi toutes les courbes de classe C^2 joignant ces deux points, on cherche celle qui engendre la surface minimum par rotation autour de l'axe Ox .

On est conduit à minimiser :

$$A(u) = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} u(x) \sqrt{1+u'^2(x)} dx$$

avec $u(x_0) = y_0$ et $u(x_1) = y_1$.

On obtient qu'une solution est de la forme $u(x) = \alpha \operatorname{ch} \left(\frac{x+\beta}{\alpha} \right)$. Par conséquent, si le problème a une solution, c'est une chaînette passant par (x_0, y_0) et (x_1, y_1) .

Trois cas peuvent se présenter selon les positions relatives des points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) :

- Il existe une seule chaînette passant par ces points ; c'est la solution du problème.
- il existe deux chaînettes passant par ces points ; l'une est solution du problème, l'autre ne l'est pas.
- il n'y a pas de chaînette passant par ces points ; le problème n'a pas de solution dans la classe de fonctions choisie.

La connaissance des surfaces minimales est utilisée dans le choix de formes qui contribuent à la diminution des frottements.

Géodésiques d'une surface

Soit S une surface et A et B deux points de S . Une géodésique est une courbe reliant A et B , tracée sur la surface, et de longueur minimale.

Si S a pour équation cartésienne $g(x, y, z) = 0$, il s'agit donc de déterminer les courbes paramétrées $(x(t), y(t), z(t))$ telles que

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

soit minimum avec la contrainte $g(x, y, z) = 0$.

Les géodésiques de l'espace euclidien sont les droites ; celles de la sphère sont les grands cercles ; celles du cylindre sont les hélices tracées sur le cylindre.

Principe de Hamilton

Soit S un système matériel à n degrés de liberté. À l'instant t , on le caractérise par $(q_1(t), \dots, q_n(t))$ dans l'espace des configurations.

Si $T(q_i, \dot{q}_i, t)$ est l'énergie cinétique du système et si les forces extérieures appliquées dérivent d'un potentiel $V(q_i, t)$, on est conduit à minimiser le

lagrangien de S :

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t).$$

La trajectoire du mouvement dans l'espace des configurations (à ne pas confondre avec la trajectoire physique dans l'espace affine) entre les instants t_1 et t_2 est une courbe joignant les points (A_i) et (B_i) de $\mathbb{R}^n$. Elle rend minimum la fonctionnelle

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$$

parmi les fonctions vectorielles $q = (q_i)$ vérifiant

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad q_i(t_1) = A_i \quad \text{et} \quad q_i(t_2) = B_i.$$

Les équations d'Euler correspondantes sont :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Il s'agit des équations de Lagrange du système.

Le principe de Hamilton est le principe de moindre action. Il permet d'établir des liens entre divers domaines de la physique.

PARTIE 2

Géométrie

23

Courbes

COURBES DE L'ESPACE

Plan osculateur

En un point birégulier, les vecteurs $\overrightarrow{OM}'(t)$ et $\overrightarrow{OM}''(t)$ sont linéairement indépendants.

Le plan osculateur en M est le plan passant par $M(t)$ qui admet pour vecteurs directeurs $(\overrightarrow{OM}'(t), \overrightarrow{OM}''(t))$.

Formules et repère de Frenet

Un point est dit trirégulier, si les vecteurs $(\overrightarrow{OM}'(t), \overrightarrow{OM}''(t), \overrightarrow{OM}^{(3)}(t))$ sont linéairement indépendants.

Le repère de Frenet en un point trirégulier est le repère orthonormal direct $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ qui vérifie les formules :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma \overrightarrow{N} \quad \text{où } \gamma \text{ est la courbure de } \Gamma \text{ en } M;$$

$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma \overrightarrow{T} + \tau \overrightarrow{B} \quad \text{où } \tau \text{ est la torsion de } \Gamma \text{ en } M;$$

$$\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = -\tau \overrightarrow{N}.$$

$\overrightarrow{N}$ est le vecteur normal principal et $\overrightarrow{B}$ le vecteur binormal en M à Γ .

Le plan $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est le plan osculateur ; le plan $(M, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ est le plan normal.

$R = \frac{1}{\gamma}$ est le rayon de courbure et $T = \frac{1}{\tau}$ le rayon de torsion en M .

Le centre de courbure en M est le point I défini par $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$.

ENVELOPPE D'UNE FAMILLE DE DROITES DANS LE PLAN

Définition

Une famille de droites (D_t) définies par :

$$a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$$

où a , b et c sont définies et de classe C^1 sur un intervalle I , admet pour enveloppe une courbe (E) si :

- toute droite (D_t) est tangente à (E) en au moins un point de contact dit point caractéristique de (E) ;
- par tout point de (E) passe au moins une droite (D_t) tangente à (E) en ce point.

Caractérisation

Si le déterminant $t \mapsto \Delta(t) = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) \\ a'(t) & b'(t) \end{vmatrix}$ ne s'annule pas sur I , la famille (D_t) admet pour enveloppe l'ensemble des points (x, y) solutions du système :

$$\begin{cases} a(t)x + b(t)y + c(t) = 0 & (D_t) \\ a'(t)x + b'(t)y + c'(t) = 0 & (D'_t) \end{cases}$$

On parle aussi de *génération tangentielle* de la courbe enveloppe.

DÉVELOPPÉE, DÉVELOPPANTE (COURBES PLANES)

Développée

On appelle développée d'une courbe paramétrée Γ l'ensemble des centres de courbure I de Γ .

C'est aussi l'enveloppe des normales à Γ .

Développante

On appelle développante de Γ toute courbe admettant Γ pour développée.

Si les points M de Γ sont repérés par l'abscisse curviligne s , les points P d'une développante vérifient :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + (s_0 - s) \vec{T}$$

où s_0 est une constante.

COURBES PARTICULIÈRES

Coniques

Soit F un point du plan affine euclidien, $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par F , e un réel strictement positif. On désigne par $d(M, \mathcal{D})$ la distance du point M à la droite $\mathcal{D}$.

L'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{d(M, \mathcal{D})} = e$ est la conique de foyer F , de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e .

C'est une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$, une hyperbole si $e > 1$.

La perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par F est l'axe focal de la conique.

La conique de foyer O , de paramètre p et d'excentricité e a pour équation polaire :

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

θ_0 est l'angle polaire de l'axe focal et $p = ed$ où d est la distance du foyer à la directrice.

Parabole

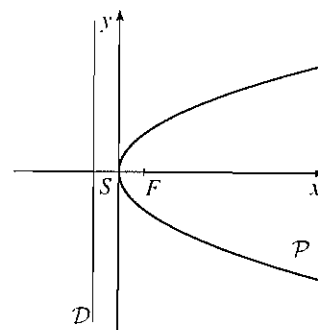
Dans le repère orthonormal d'origine S et admettant l'axe focal comme axe des abscisses, l'équation de $\mathcal{P}$ est :

$$y^2 = 2px$$

où p est le paramètre de la parabole.

F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

$\mathcal{D}$ a pour équation $x = -\frac{p}{2}$.



Un signal lumineux émis au foyer est réfléchi par la parabole parallèlement à l'axe focal. C'est le principe du phare de voiture.

Le trajet inverse de la lumière est à la base du four solaire.

Ellipse

► Équation réduite

Dans le repère orthonormal d'origine O et admettant l'axe focal comme axe des abscisses et l'axe non focal comme axe des ordonnées, l'équation de $\mathcal{E}$ est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$.

En posant $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, on a $FF' = 2c$, $e = \frac{c}{a}$ et $\mathcal{D}$ a pour équation

$$x = \frac{a^2}{c}.$$

► Aire : πab

► Longueur :

$a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t} dt$, intégrale elliptique dont le calcul approché se fait avec des séries entières.

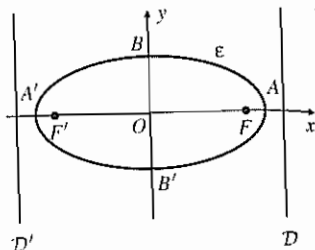
► Représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

► Définition bifocale

Soit F et F' deux points distincts et a un réel tel que $FF' < 2a$.

L'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est une ellipse de foyers F et F' .



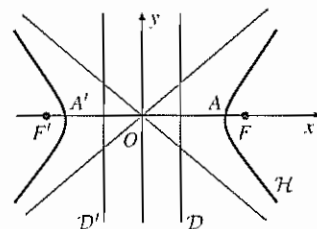
Un signal (lumineux, acoustique ...) émis en un foyer est réfléchi par l'ellipse à l'autre foyer. C'est le principe du confessionnal pour lépreux qu'on trouve à La Chaise Dieu.

Hyperbole

► Équation réduite

Dans le repère orthonormal d'origine O et admettant l'axe focal comme axe des abscisses et l'axe non focal comme axe des ordonnées, l'équation de $\mathcal{H}$ est :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



On a $AA' = 2a$, $FF' = 2c$, $b^2 = c^2 - a^2$ et $e = \frac{c}{a}$.

$\mathcal{D}$ a pour équation $x = \frac{a^2}{c}$.

► Équation des asymptotes

$$y = \frac{b}{a}x \quad ; \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

► Représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \theta \\ y = b \operatorname{sh} \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

► Définition bifocale

Soit F et F' deux points distincts et a un réel tel que $0 < 2a < FF'$.

L'ensemble des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole de foyers F et F' .

En électronique, on utilise l'hyperbole d'équipuissance qui permet de déterminer la zone de fonctionnement d'un composant.

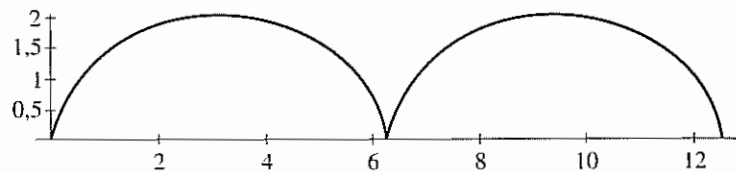
Cycloïde

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

Aire d'une arche : $3\pi R^2$.

Longueur d'une arche : $8R$.

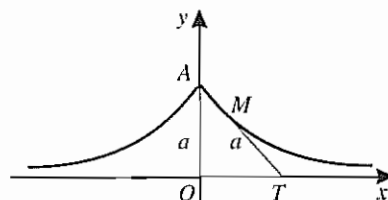


La cycloïde est la trajectoire, dans un repère fixe, d'un point P lié à un cercle de rayon R qui roule sans glisser sur une droite ; autrement dit la trajectoire de la valve d'une roue de vélo (d'où cycloïde).

Tractrice

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a(t - \operatorname{th} t) \\ y = \frac{a}{\operatorname{ch} t} \end{cases}$$



$A(0, a)$ est un point de rebroussement et (Ox) une droite asymptote.

La développée de la tractrice est une chaînette.

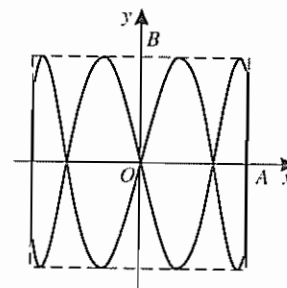
La tractrice est caractérisée par $MT = a$ (constante) où T est l'intersection de la tangente en M et de (Ox) . C'est donc le chemin suivi par une personne tirée (d'où tractrice) par son chien qui parcourt l'axe des abscisses, la laisse MT restant tendue.

Courbe de Lissajous

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a \sin mt \\ y = b \sin nt \end{cases}$$

a, b, m, n sont des réels.



Ces courbes s'obtiennent dans la superposition de deux mouvements vibratoires d'axes Ox et Oy , et permettent de mesurer la différence de phase entre les deux mouvements.

Dans une telle superposition, on a souvent $m = n = \omega$ avec un déphasage. On obtient alors la courbe

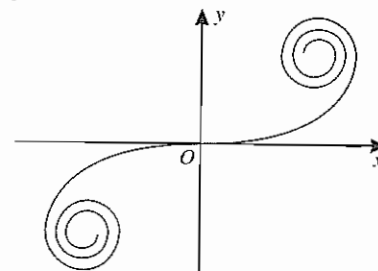
$$\begin{cases} x = a \sin \omega t \\ y = b \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

qui est une ellipse.

Spirale de Cornu (ou clothoïde, ou radioïde aux arcs)

Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \int_0^t \cos(u^2) du \\ y = \int_0^t \sin(u^2) du \end{cases}$$



À partir de O , l'abscisse curviligne est s et la courbure $2s$.

On rencontre cette courbe en optique dans des problèmes de diffraction. Dans les travaux publics, elle donne une courbe que l'on peut négocier à vitesse constante en tournant le volant à vitesse constante.

Néphroïde

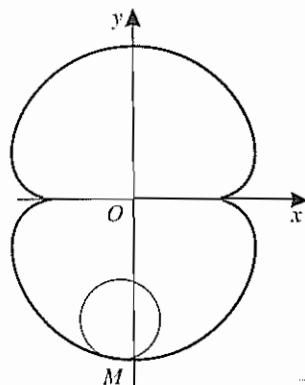
Représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a(3 \cos t - \cos 3t) \\ y = b(3 \sin t - \sin 3t) \end{cases}$$

Longueur : $24a$

Aire : $12\pi a^2$.

Elle est engendrée par un cercle de rayon a qui roule extérieurement sans glisser sur un cercle de rayon $2a$.



Dans le cas d'un miroir sphérique sur lequel arrivent des rayons parallèles à l'axe, les rayons réfléchis dans un plan contenant l'axe ont pour enveloppe un arc de néphroïde. On parle de caustique par réflexion et la courbe s'observe facilement quand des rayons de soleil frappent un verre.

24

Surfaces

GÉNÉRALITÉS

Représentation d'une surface

Une surface S peut être représentée

soit par une équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$ où f est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$,

soit par des équations paramétriques $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{F}(u, v)$.

Un point de S est régulier si $\overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) \neq \vec{0}$, ou si $\left(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial u}, \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial v} \right)$ est une famille libre.

Plan tangent

► Eu un point régulier $M(x, y, z)$ de S , le plan tangent en M à S a pour équation :

$$(X - x) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + (Z - z) \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

et $\vec{\text{grad}} f(x, y, z)$ est normal en M à S .

► Sous forme paramétrique, le plan tangent en M à S est défini par les vecteurs directeurs $\left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{F}}{\partial v} \right)$ et la normale par le vecteur directeur

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{F}}{\partial v}.$$

Intersection de deux surfaces

► Pour déterminer explicitement l'intersection de deux surfaces S_1 et S_2 , il est préférable que l'une soit sous forme cartésienne et l'autre sous forme paramétrique.

On reporte alors les équations paramétriques de l'une dans l'équation cartésienne de l'autre.

► En un point régulier M_0 de l'intersection de S_1 et de S_2 , si les plans tangents respectifs $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont distincts, la courbe $S_1 \cap S_2$ a pour tangente la droite $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Surfaces réglées

Une surface est réglée si elle peut être engendrée par une famille de droites dites génératrices de la surface.

CYLINDRES

Définitions

Un cylindre de direction D et de courbe directrice $\mathcal{C}$ est l'ensemble des droites parallèles à D et rencontrant $\mathcal{C}$. Ces droites sont les génératrices du cylindre.

On suppose que $\mathcal{C}$ n'est pas une courbe plane dont le plan contient D .

Si le plan de section est orthogonal à D , on obtient une section droite Γ . On parle alors de cylindre droit de base Γ .

Un cylindre de révolution admet une section droite circulaire.

Plans tangents

Le plan tangent en un point M d'une génératrice Δ d'un cylindre est défini par Δ et la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'intersection de $\mathcal{C}$ et de Δ .

Équations réduites

– Cylindre elliptique

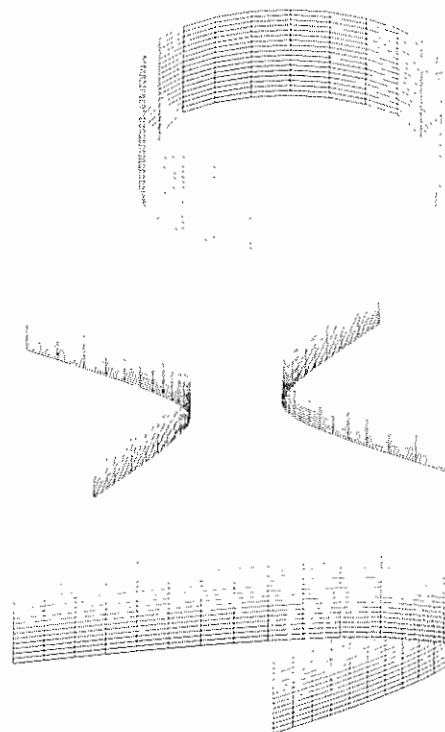
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– Cylindre hyperbolique

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

– Cylindre parabolique

$$y^2 = 2px$$



CÔNES

Définitions

Un cône de sommet S et de courbe directrice $\mathcal{C}$ est l'ensemble des droites passant par S et rencontrant $\mathcal{C}$. Ces droites sont dites génératrices du cône. On suppose que $\mathcal{C}$ n'est pas une courbe plane dont le plan contient S .

Plans tangents

Soit M un point du cône. Il appartient à une génératrice Δ qui rencontre en P une base $\mathcal{C}$ du cône. Le plan tangent en M au cône passe par S et contient la tangente en P à $\mathcal{C}$.

Équation réduite

Dans un repère adapté, dont l'origine est le sommet du cône, on obtient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Si $a = b$, c'est un cône circulaire droit.

SURFACES DE RÉVOLUTION

Définitions

Une surface de révolution Σ d'axe D est obtenue en faisant tourner une courbe $\mathcal{C}$ autour de la droite D .

Tout plan contenant D est un plan méridien et son intersection avec Σ est une méridienne.

Les cercles, intersections de Σ avec des plans perpendiculaires à D , sont les parallèles de la surface.

Équations

La forme la plus générale de l'équation d'une surface de révolution est $f(P, S) = 0$ où $P = 0$ et $S = 0$ sont les équations d'un plan et d'une sphère.

L'axe de Σ est alors la droite perpendiculaire au plan et passant par le centre de la sphère.

Toute équation de la forme $g(x^2 + y^2, z) = 0$ représente une surface de révolution d'axe $(O, \vec{k})$.

QUADRIQUES

Définitions

Une surface du second degré $f(x, y, z) = 0$, où f est un polynôme de degré 2 par rapport aux trois variables, peut être soit deux plans, soit un cylindre, soit un cône, soit une quadrique propre de l'un des cinq types qui suivent.

On peut les décrire à partir de leurs équations réduites dans un repère orthormal.

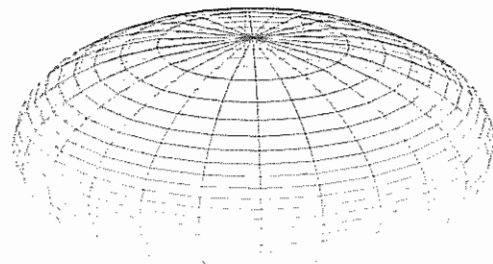
Types de quadrique

► Ellipsoïde

Équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

$$\text{Volume : } \frac{4}{3}\pi abc.$$

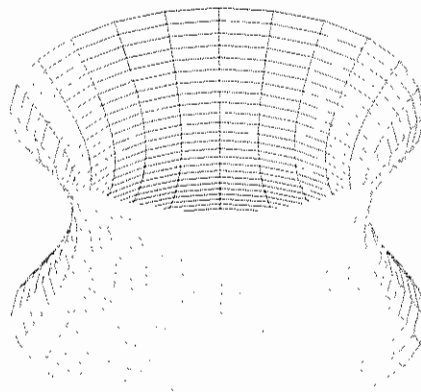


➤ *Hyperboloïde à une nappe*

Équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

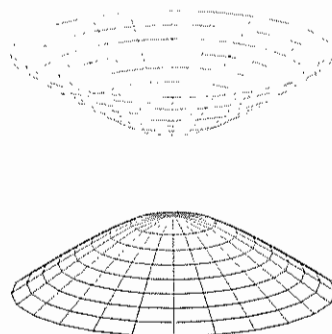
C'est une surface réglée.



➤ *Hyperboloïde à deux nappes*

Équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$



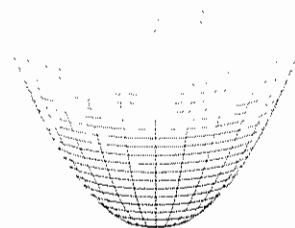
➤ *Paraboloïde elliptique*

Équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z.$$

Volume limité par le plan $z = h$:

$$\frac{1}{2} \pi abh.$$

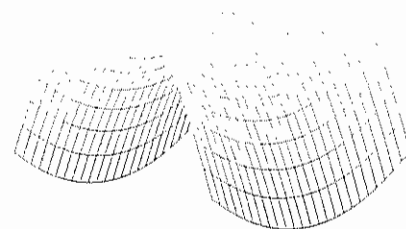


➤ *Paraboloïde hyperbolique*

Équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z.$$

C'est une surface réglée.



Centres de symétrie

Tout centre de symétrie d'une surface du second degré $f(x, y, z) = 0$ vérifie $\text{grad } f(x, y, z) = \vec{0}$, et la recherche d'une forme réduite se fait en prenant pour origine un tel point.

Les paraboloïdes n'ont pas de centre.

Réduction de l'équation d'une surface du second degré

Soit S une surface algébrique du second degré d'équation $f(x, y, z) = 0$ où f est un polynôme de degré 2.

Les termes de f de degré égal à 2 définissent une forme quadratique q dont la matrice A est symétrique et réelle. A admet donc trois valeurs propres α , β , γ .

Les tableaux qui suivent donnent la nature de S .

► Cas où les trois valeurs propres sont non nulles

(soit $\text{rg } q = 3$)

Équation réduite : $\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = k$.

$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$			$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma < 0$		
$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$	$k < 0$	$k = 0$	$k > 0$
$\emptyset$	un point	ellipsoïde	hyperboloïde à deux nappes	cône	hyperboloïde à une nappe

► Cas où une seule valeur propre est nulle

(soit $\text{rg } q = 2$)

Équation réduite : $\alpha X^2 + \beta Y^2 + aX + bY + cZ = d$.

Si $c \neq 0$, l'équation peut se réduire à la forme $\alpha X^2 + \beta Y^2 = pZ$.

$\alpha \beta > 0$	$\alpha \beta < 0$
paraboloïde elliptique	paraboloïde hyperbolique

Si $c = 0$, l'équation peut se réduire à la forme $\alpha X^2 + \beta Y^2 = k$.

$k = 0$		$k \neq 0$		
$\alpha \beta > 0$	$\alpha \beta < 0$	$\alpha \beta > 0$ k de même signe que α	$\alpha \beta > 0$ k de signe contraire à α	$\alpha \beta < 0$
droite parallèle à Oz	deux plans sécants	cylindre elliptique	$\emptyset$	cylindre hyperbolique

► Cas où deux valeurs propres sont nulles

(soit $\text{rg } q = 1$)

Si $b \neq 0$ ou $c \neq 0$, l'équation peut se réduire à la forme $\alpha X^2 = pY + qZ$.

S est un cylindre parabolique.

Si $b = c = 0$, l'équation peut se réduire à la forme $\alpha X^2 = k$.

$k = 0$	$k\alpha < 0$	$k\alpha > 0$
plan	$\emptyset$	deux plans parallèles

Volumes

POLYÈDRES RÉGULIERS

Généralités

Un polyèdre est un solide à faces planes. Le théorème d'Euler relie le nombre S de sommets, le nombre A d'arêtes et le nombre F de faces :

$$A = F + S - 2.$$

Un polyèdre est régulier si ses faces sont des polygones réguliers de même nature.

Il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes, dits solides de Platon : le tétraèdre régulier, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Tétraèdre régulier

Les quatre faces sont des triangles équilatéraux de côté a .

$$A = 6, F = 4, S = 4.$$

$$\text{Volume} : \frac{\sqrt{2}}{12} a^3.$$

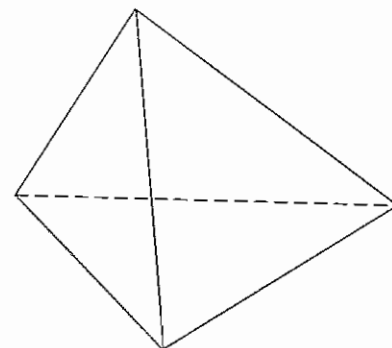
$$\text{Aire} : \sqrt{3} a^2.$$

Distance du centre à une face :

$$\frac{\sqrt{6}}{12} a.$$

Distance du centre à un som-

$$\text{met} : \frac{\sqrt{6}}{4} a.$$



La molécule de méthane CH_4 comporte quatre atomes d'hydrogène situés aux sommets d'un tétraèdre régulier et un atome de carbone situé au centre de ce tétraèdre.

L'angle entre deux liaisons $\text{C} - \text{H}$ est : $2 \arctan(\sqrt{2}) \approx 109,5^\circ$.

Cube

Les six faces sont des carrés de côté a .

$$A = 12, F = 6, S = 8.$$

$$\text{Volume} : a^3.$$

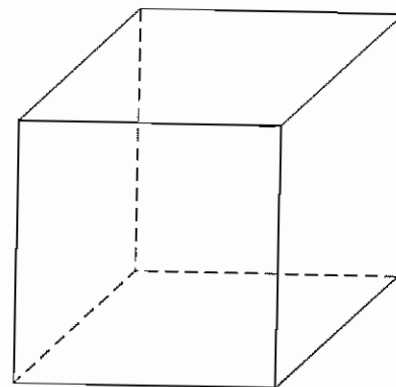
$$\text{Aire} : 6a^2.$$

Distance du centre à une face :

$$\frac{1}{2} a.$$

Distance du centre à un sommet :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} a.$$



Octaèdre

Les huit faces sont des triangles équilatéraux de côté a .

$$A = 12, F = 8, S = 6.$$

$$\text{Volume} : \frac{\sqrt{2}}{3} a^3.$$

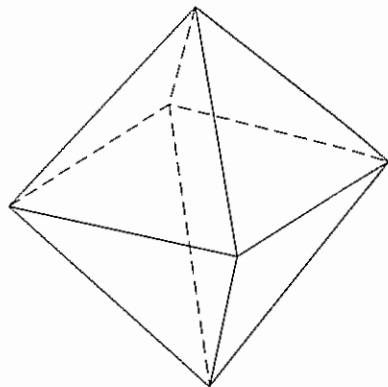
$$\text{Aire} : 2\sqrt{3} a^2.$$

Distance du centre à une face :

$$\frac{\sqrt{6}}{6} a.$$

Distance du centre à un sommet :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} a.$$



Dodécaèdre

Les douze faces sont des pentagones réguliers de côté a .

$$A = 30, F = 12, S = 20.$$

$$\text{Volume} : \frac{1}{4} (15 + 7\sqrt{5}) a^3.$$

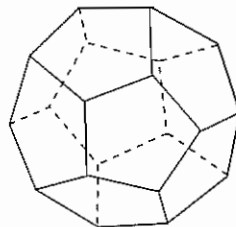
$$\text{Aire} : 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} a^2.$$

Distance du centre à une face :

$$\frac{1}{4} \sqrt{10 + 22\sqrt{0,2}} a.$$

Distance du centre à un sommet :

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{4} a.$$



Icosaèdre

Les vingt faces sont des triangles équilatéraux de côté a .

$$A = 30, F = 20, S = 12.$$

$$\text{Volume} : \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12} a^3.$$

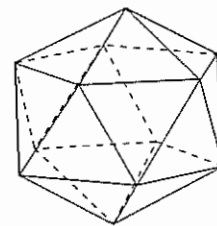
$$\text{Aire} : 5\sqrt{3} a^2.$$

Distance du centre à une face :

$$\frac{5\sqrt{3} + \sqrt{15}}{12} a.$$

Distance du centre à un sommet :

$$\frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} a.$$

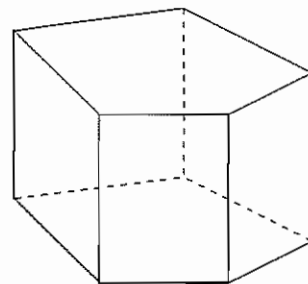


AUTRES VOLUMES

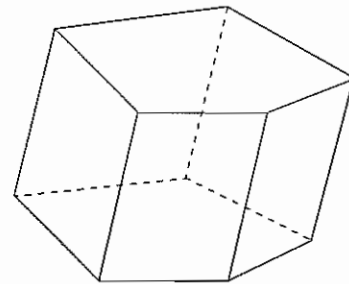
Prisme

Un prisme est un cylindre admettant un polygone comme courbe directrice, et limité par deux plans parallèles. Les deux faces portées par ces plans sont les bases. Elles ont la même aire.

Un prisme est droit quand les arêtes sont perpendiculaires aux bases.



prisme droit



prisme oblique



Volume : Bh où B est l'aire de la base

Aire latérale : Ph où P est le périmètre de la base.

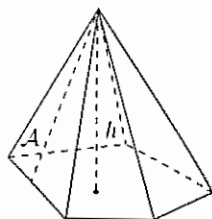
Pyramide

La base est un polygone, les faces latérales sont des triangles avec un sommet commun.

Volume : $\frac{1}{3}Bh$ où B est l'aire de la base.

Si le polygone de base est régulier, la pyramide est régulière. Le centre du polygone est le projeté orthogonal du sommet. La mesure commune des hauteurs des faces latérales issues du sommet est l'apothème A .

Aire latérale : $\frac{1}{2}PA$ où P est le périmètre de base.

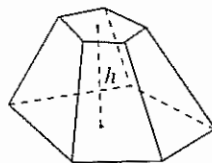


Tronc de pyramide

Volume :

$$\frac{1}{3}h(B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2)$$

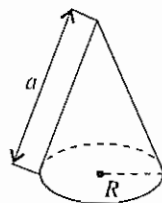
où B_1 et B_2 sont les aires des bases.



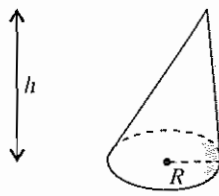
Cône circulaire

Volume : $\frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Aire latérale : πRa .



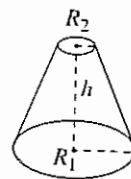
cône droit



cône oblique

Tronc de cône circulaire

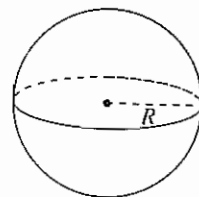
Volume : $\frac{1}{3}\pi h(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2)$.



Sphère

Volume : $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Aire : $4\pi R^2$.



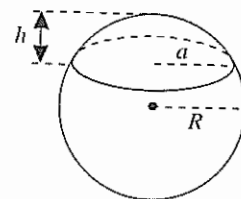
Calotte sphérique

Volume :

$$\frac{\pi}{3}h^2(3R - h) = \frac{\pi}{6}h(3a^2 + h^2)$$

avec $a^2 = 2Rh - h^2$.

Aire : $2\pi Rh = \pi(a^2 + h^2)$.

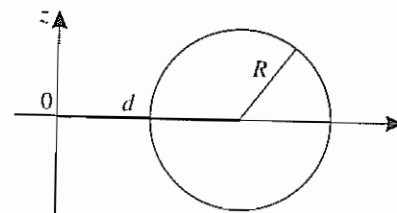


Tore

Le tore de rayons $0 < R < d$ est engendré par la rotation d'angle 2π autour de l'axe de révolution Oz du cercle ci-contre.

Volume : $2\pi^2 R^2 d$.

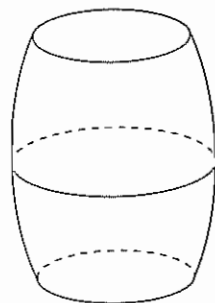
Aire : $4\pi^2 R d$.



Barrique*Volume :*

$$\frac{h}{6}(\mathcal{B}_0 + 4\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2)$$

où $\mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_2$ sont les aires des faces et $\mathcal{B}_1$ l'aire de la section médiane.



Cette expression est appelée formule des trois niveaux.

26

Géométrie fractale**GÉNÉRALITÉS****Objet auto-semblable**

Une figure est auto-semblable quand une structure de base est répétée à différentes échelles ; c'est-à-dire qu'en agrandissant autant que l'on veut, on voit toujours la même chose.

De nombreux objets de la nature (littoraux, plantes, nuages...) et des systèmes chaotiques ont un caractère auto-semblable.

Pour construire un objet auto-semblable, on part d'un motif de base. À chaque étape, on en fait N copies, chacune étant obtenue par une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$.

On peut dire aussi qu'un motif se divise en N motifs semblables, chacun obtenu par une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$.

Pour joindre deux points fixés, d'un niveau à l'autre de la construction de l'objet fractal on fait N fois plus de pas, chaque pas étant k fois plus petit.

Dimension de Hausdorff-Besicovitch

Dans le cas euclidien,

➤ en dimension 1, un segment se divise en $N = 2$ sous-segments obtenus par une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$ avec $k = 2$ et la dimension vérifie $1 = \frac{\ln N}{\ln k}$.

➤ en dimension 2, un carré se divise en $N = 4$ sous-carrés obtenus par une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$ avec $k = 2$ et la dimension vérifie $2 = \frac{\ln N}{\ln k}$.

➤ en dimension 3, un cube se divise en $N = 8$ sous-cubes obtenus par une homothétie de rapport $\frac{1}{k}$ avec $k = 2$ et la dimension vérifie $3 = \frac{\ln N}{\ln k}$.

Pour un objet fractal, la dimension de Hausdorff est définie par :

$$d = \frac{\ln N}{\ln k}.$$

La dimension d'un objet fractal n'est pas un nombre entier.

Les écoulements turbulents sont décrits par des attracteurs étranges qui sont des objets de dimension non entière.

Des circuits permettant d'approcher les objets fractals sont utilisés en automatique et en électronique (synchronisation d'oscillateurs).

Détermination empirique d'une dimension fractale

Considérons, par exemple, un littoral représenté selon diverses échelles. Sur une carte, pour un rayon donné r , on détermine le nombre N de disques de rayon r qui sont nécessaires pour recouvrir le littoral étudié. Si d est la

dimension de Hausdorff du littoral, on a :

$$N \approx \left(\frac{1}{r}\right)^d.$$

Après avoir obtenu plusieurs couples (r, N) , on détermine d par ajustement au modèle linéaire $\ln N = -d \ln r$.

Plus généralement, on utilise un maillage (dans le plan ou dans l'espace) de taille r et on compte le nombre N d'éléments du réseau nécessaires pour recouvrir l'objet fractal.

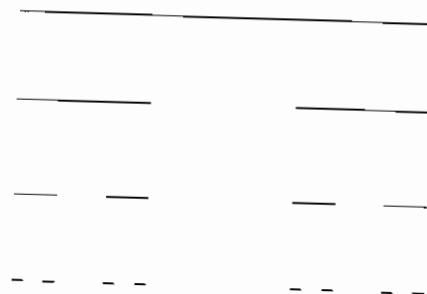
Cette recherche empirique suppose l'existence d'une dimension d de l'objet global. Si d varie en fonction du point, on parle de multifractalité.

La dimension de la côte bretonne est d'environ 1,2 et celle de la côte vendéenne 1,1. La côte bretonne est donc plus découpée que la côte vendéenne.

EXEMPLES

Ensemble triadique de Cantor

On part d'un segment. À chaque étape, on enlève le tiers central de chaque segment.

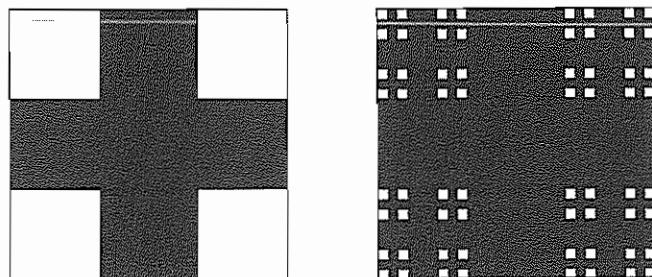


$$N = 2 \quad ; \quad k = 3 \quad ; \quad d = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63.$$

Si on part d'un segment de longueur 1, l'ensemble triadique de Cantor est aussi l'ensemble des réels de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$ avec $c_n = 0$ ou 2 ; c'est-à-dire l'ensemble des réels du segment $[0, 1]$ dont l'écriture en base trois ne contient aucun 1.

Carré triadique de Cantor

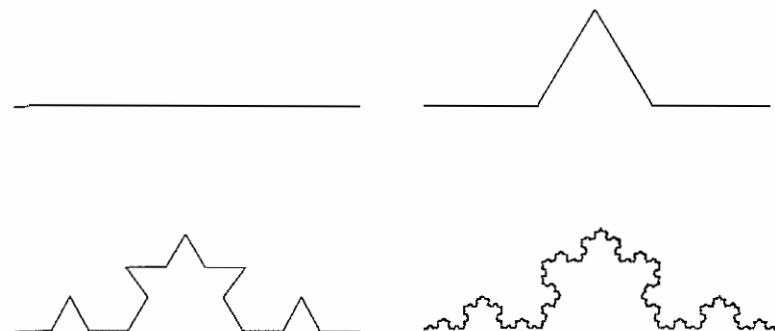
On part d'un carré. À chaque étape, on découpe les côtés en 3 segments égaux, donc le carré en 9 sous-carrés, et on ne conserve que les 4 sous-carrés situés dans les coins.



$$N = 4 \quad ; \quad k = 3 \quad ; \quad d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

Courbe de Koch

On part d'un segment. À chaque étape, on remplace le tiers central de chaque segment par les deux autres côtés d'un triangle équilatéral.

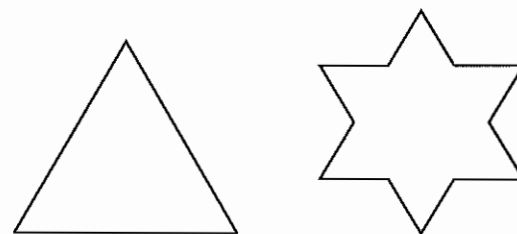


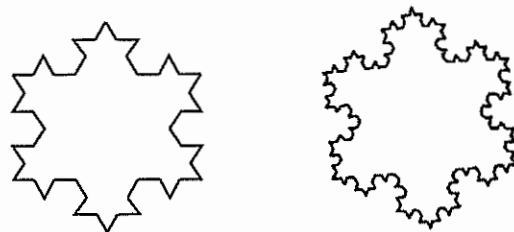
$$N = 4 \quad ; \quad k = 3 \quad ; \quad d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

À chaque étape, la longueur est multipliée par $\frac{4}{3}$, ce qui entraîne que la courbe de Koch a une longueur infinie.

Flocon de neige de Koch

On part d'un triangle équilatéral. À chaque étape, on remplace chaque côté comme pour la courbe de Koch ci-dessus.



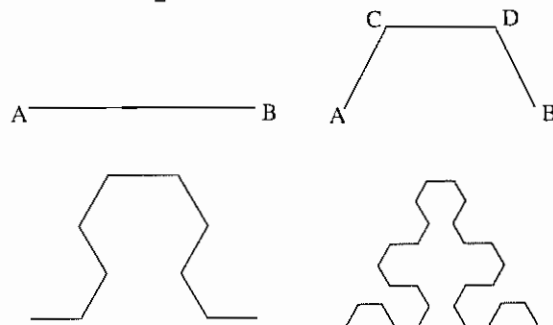


$$N = 4 \quad ; \quad k = 3 \quad ; \quad d = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1,26.$$

On obtient ainsi une courbe de périmètre infini qui limite une surface d'aire finie.

Courbe de Sierpinski

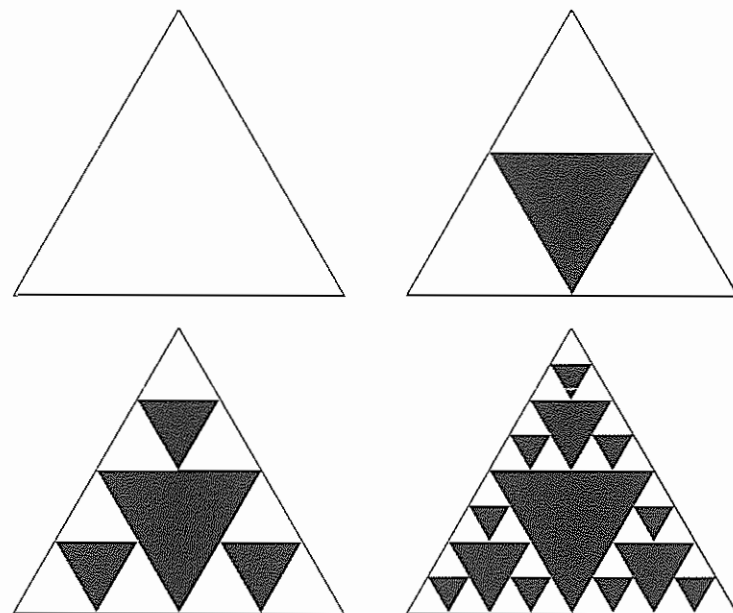
On part d'un segment $[AB]$. On le remplace par un trapèze isocèle $ACDB$ avec $AC = CD = DB = \frac{AB}{2}$.



$$N = 3 \quad ; \quad k = 2 \quad ; \quad d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58.$$

Tapis de Sierpinski

On part d'un triangle équilatéral. À chaque étape, on découpe les côtés en 2 segments égaux, donc le triangle en 4 sous-triangles et on élimine le triangle central.

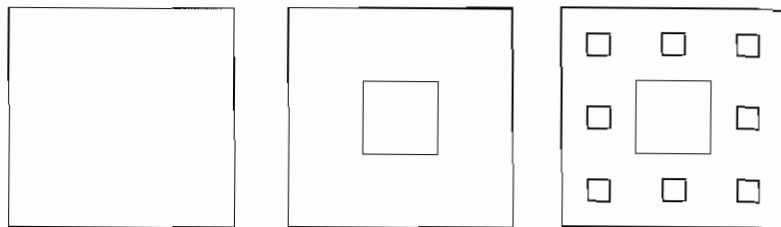


$$N = 3 \quad ; \quad k = 2 \quad ; \quad d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,58.$$

À chaque étape, l'aire est multipliée par $\frac{3}{4}$, ce qui entraîne que le tapis de Sierpinski a une aire nulle.

Carpette de Sierpinski

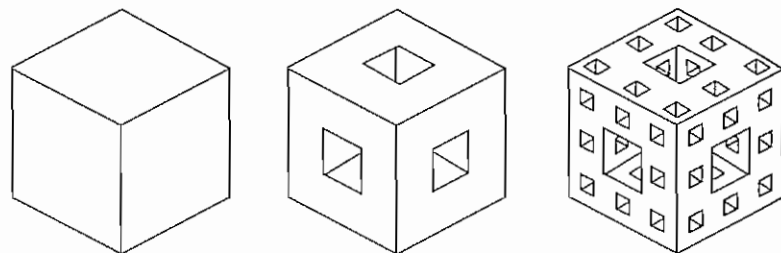
On part d'un carré. À chaque étape, on le divise en 9 carrés et on supprime le carré central.



$$N = 8 \quad ; \quad k = 3 \quad ; \quad d = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1,89.$$

Éponge de Sierpinski

On part d'un cube. À chaque étape, on le divise en 27 cubes et on supprime le cube central et les 6 cubes situés aux centres des faces.



$$N = 20 \quad ; \quad k = 3 \quad ; \quad d = \frac{\ln 20}{\ln 3} \approx 2,73.$$

PARTIE 3

Probabilités et statistiques

27

Calcul des probabilités

DÉNOMBREMENT

Indications sur les problèmes de dénombrement

Pour dénombrer des situations, il est commode de se poser les questions :
quel est le nombre n d'objets de référence ?

quel est le nombre p d'objets concernés par une situation ?

les p objets sont-ils considérés sans ordre (en vrac ; tirage simultané) ou avec ordre ?

les répétitions sont-elles impossibles (les p objets sont tous distincts ; tirage sans remise) ou possibles (tirage avec remise) ?

Quand une situation comporte plusieurs choix :

on effectue un produit quand on doit faire un choix, puis un autre ...

on effectue une somme quand on considère un cas ou bien un autre ...

Formules de dénombrement

	sans répétition	avec répétition
avec ordre	A_n^p	n^p
sans ordre	C_n^p	K_n^p

$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ est le nombre d'arrangements de n éléments pris p à p .

$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ est le nombre de combinaisons de n éléments pris p à p .

La notation anglo-saxonne est : $\binom{n}{p}$.

K_n^p est le nombre de combinaisons avec répétition. On a : $K_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Permutations avec répétition

Soit un ensemble à n éléments comportant :

n_1 éléments d'un premier type, indiscernables entre eux,

n_2 éléments d'un deuxième type, indiscernables entre eux...

n_q éléments d'un q -ième type, indiscernables entre eux.

Une permutation avec répétition de ces n éléments est une disposition ordonnée de ces éléments. Il y en a $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_q!}$.

Application à la mécanique statistique des particules

En mécanique statistique, une particule est caractérisée par sa position et sa vitesse, c'est-à-dire par un élément de l'espace des phases $\mathbb{R}^6$. On considère un système constitué par N particules.

Lorsque les interactions sont négligeables, on définit un nombre fini α d'états quantiques possibles pour une particule.

► Statistique de Fermi-Dirac

Si les particules sont des fermions identiques, c'est-à-dire des particules à spin demi-entier (électrons ...), le principe d'exclusion de Pauli indique qu'il est impossible que deux particules aient le même état quantique.

Il y a donc C_N^a possibilités pour le système de N particules.

► Statistique de Bose-Einstein

Si les particules sont des bosons identiques, c'est-à-dire des particules à spin entier (photons ...), le principe de Pauli ne s'applique pas. Les combinaisons sont avec répétition possible.

Il y a donc K_N^a possibilités pour le système de N particules.

ALGÈBRE DES ÉVÉNEMENTS

Généralités

Une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ est une expérience qui, répétée dans des conditions apparemment identiques, peut conduire à des résultats différents. L'ensemble de tous les résultats possibles est l'univers Ω associé à $\mathcal{E}$.

On dit qu'un événement est lié à $\mathcal{E}$ si, quel que soit le résultat $\omega \in \Omega$, on sait dire si l'événement est réalisé ou non. On convient d'identifier un tel événement à l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels il est réalisé. Un événement lié à $\mathcal{E}$ est donc identifié à une partie de Ω .

Événements particuliers

Un singleton $\{\omega\}$ est un événement élémentaire.

Ω est l'événement certain car il est toujours réalisé.

$\emptyset$ est l'événement impossible car il n'est jamais réalisé.

Opérations sur les événements

► Événement contraire $\bar{A}$

$\bar{A}$ est réalisé si, et seulement si, A n'est pas réalisé.

► Événement $A \cap B$

$A \cap B$ est réalisé si, et seulement si, A et B sont simultanément réalisés.

Plus généralement, $\bigcap_{i \in I} A_i$ est réalisé si, et seulement si, tous les événements sont réalisés.

Si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire si la réalisation simultanée des événements A et B est impossible, les événements A et B sont incompatibles.

► Événement $A \cup B$

$A \cup B$ est réalisé si, et seulement si, l'un au moins des événements est réalisé.

Plus généralement, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est réalisé si, et seulement si, au moins un des événements est réalisé.

► Système complet d'événements

Une partition de Ω est un système complet d'événements. Autrement dit, des événements $(A_i)_{i \in I}$ forment un système complet s'ils sont différents de $\emptyset$, deux à deux incompatibles et si $\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

► Inclusion

$A \subset B$ signifie que la réalisation de A implique la réalisation de B .

Tribu des événements

Dans le cas où Ω est dénombrable, on retient $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{T}$ comme ensemble des événements liés à $\mathcal{E}$.

Dans le cas où Ω est infini non dénombrable, on retient comme ensemble des événements liés à $\mathcal{E}$, une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\omega)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

$$(1) \quad \Omega \in \mathcal{T}$$

$$(2) \quad A \in \mathcal{T} \implies \bar{A} \in \mathcal{T} \text{ (stabilité de } \mathcal{T} \text{ par passage au complémentaire)}$$

$$(3) \quad \text{Pour toute suite } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } \mathcal{T}, \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ est encore un élément de } \mathcal{T} \text{ (stabilité de } \mathcal{T} \text{ par réunion dénombrable).}$$

On dit que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω . Les trois axiomes de définition de $\mathcal{T}$ entraînent les autres propriétés :

$$(4) \quad \emptyset \in \mathcal{T}$$

$$(5) \quad \text{Pour toute suite } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ d'éléments de } \mathcal{T}, \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ est encore un élément de } \mathcal{T} \text{ (stabilité de } \mathcal{T} \text{ par intersection dénombrable).}$$

Dans tous les cas, on appelle espace probabilisable lié à l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$, le couple $(\Omega, \mathcal{T})$ où Ω est l'univers des résultats possibles et $\mathcal{T}$ la tribu des événements liés à $\mathcal{E}$.

PROBABILITÉS

Définitions

$(\Omega, \mathcal{T})$ étant un espace probabilisable associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, on appelle probabilité définie sur Ω toute application P de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+$ qui vérifie les axiomes suivants :

$$(A_1) \quad P(\Omega) = 1;$$

(A₂) Pour toute réunion finie ou dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$, deux à deux incompatibles, on a $P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$.

On appelle alors espace probabilisé le triplet $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

P est une mesure des événements de $\mathcal{T}$, l'unité étant telle que la masse totale est égale à 1.

Propriétés

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad ; \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad ; \quad A \subset B \implies P(A) \leq P(B)$$

A et B étant des événements quelconques, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si (A_n) est un système complet d'événements, on a :

$$\sum_n P(A_n) = 1.$$

Construction d'une probabilité sur un univers dénombrable

► Cas général

Toute probabilité P sur $\mathbb{N}$ est entièrement déterminée par la donnée des nombres réels $p_n = P(\{n\})$ vérifiant :

$$\forall n \quad p_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_n p_n = 1.$$

► Probabilité uniforme sur un univers fini

Sur un univers fini Ω , l'hypothèse d'équiprobabilité définit la probabilité uniforme donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}.$$

card A est souvent appelé « nombre de cas favorables » et card Ω « nombre de cas possibles ».

► Détermination empirique

En sciences expérimentales, la probabilité $P(A)$ est souvent estimée par la fréquence observée de l'événement A .

Il faut veiller à ce que cette démarche ait un sens : la population considérée est-elle homogène ? l'événement A est-il clairement défini ? l'échantillon observé est-il représentatif et prélevé de façon aléatoire ?

CONDITIONNEMENT

Probabilité conditionnelle

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et A un événement donné tel que $P(A) \neq 0$. Pour un événement quelconque B , on appelle probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé, le nombre défini par :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

En fait, il est courant de connaître directement $P(B/A)$ et d'utiliser la formule des probabilités composées pour calculer $P(A \cap B)$:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A).$$

Événements indépendants

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, deux événements A et B sont dits indépendants si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

L'indépendance de deux événements dépend de la probabilité choisie.

Généralisation

Des événements $(A_i)_{i \in I}$ sont indépendants dans leur ensemble si, pour toute partie $J \subset I$, on a :

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i).$$

Cette notion est plus forte que l'indépendance deux à deux.

Par exemple, il peut arriver que trois événements A, B, C soient deux à deux indépendants, mais ne vérifient pas la condition supplémentaire $P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$ pour l'indépendance d'ensemble.

Formule des probabilités totales

$(E_i)_{i \in I}$ étant un système complet d'événements, on a :

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(E_i) P(A/E_i).$$

Formule de Bayes

$(E_i)_{i \in I}$ étant un système complet d'événements, et A un événement tel que $P(A) \neq 0$, on a :

$$\forall j \quad P(E_j/A) = \frac{P(E_j) P(A/E_j)}{\sum_{i \in I} P(E_i) P(A/E_i)}.$$

L'usage de la formule de Bayes est souvent facilité par l'utilisation d'un arbre.

EXPÉRIENCES INDÉPENDANTES

Supposons que des expériences aléatoires successives soient réalisées dans des conditions telles qu'elles soient, a priori, indépendantes. Pour chaque expérience, une probabilité a été retenue.

Considérons alors un événement A , relatif à l'ensemble des n expériences, noté $A = A_1 \times \dots \times A_n$, ce qui signifie qu'on s'intéresse à la réalisation successive des événements : A_1 pour la première expérience ... A_n pour la n -ième expérience.

Alors, pour traduire la situation, on est amené à choisir comme probabilité de A : $P(A) = P(A_1) \times \dots \times P(A_n)$.

Ce choix de probabilité définit l'indépendance des expériences aléatoires. On se place dans cette hypothèse quand on parle d'expériences aléatoires successives.

28

Variables aléatoires

VARIABLE ALÉATOIRE RÉELLE

Généralités

(Ω, P, T) étant un espace probabilisé, une variable aléatoire réelle est une application :

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si B est une partie de $\mathbb{R}$, on définit sa probabilité par :

$$P_1(B) = P\left(X^{-1}(B)\right)$$

à condition que l'image réciproque $X^{-1}(B)$ appartienne à T .

Cette probabilité se note $P(X = a)$ si $B = \{a\}$, $P(a < X < b)$ si $B =]a, b[$...

Variable aléatoire discrète

► Loi de probabilité

Une variable aléatoire X est discrète quand son univers-image $\Omega_1 = X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. Dans ce cas, connaître la loi de probabilité (ou distribution de probabilité) de X , c'est connaître les probabilités élémentaires :

$$\forall x_i \in \Omega_1 \quad P(X = x_i) = p_i.$$

Il est toujours utile de vérifier que $p_i \geq 0$ et $\sum_i p_i = 1$.

En terme de distributions, on peut associer à cette loi la densité de probabilité :

$$f(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i)$$

ce qui permet d'unifier avec le cas continu.

► Fonction de répartition

C'est la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = P(X \leq x).$$

Dans le cas discret, comme $F(x_i) - F(x_{i-1}) = P(X = x_i) = p_i$, si on connaît la fonction de répartition, on peut reconstituer la loi de probabilité de X par différences successives.

Variable aléatoire continue

Si Ω_1 n'est pas dénombrable, on retient pour $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les intervalles, dite tribu des boréliens.

Connaître la loi de X , c'est donc connaître les probabilités du type $P(a \leq X \leq b)$, ce qui revient à connaître la fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$.

Une variable aléatoire X , de fonction de répartition F , est continue (absolument continue pour les puristes) s'il existe une fonction continue par morceaux f , dite densité de probabilité de X , telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Réciproquement, si f est une fonction continue par morceaux telle que $f(x) \geq 0$ pour tout x et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$, alors f est une densité de la loi de probabilité de fonction de répartition $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

Propriétés

En tout point où f est continue, F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.

$$\text{Si } a < b, \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt.$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad P(X = a) = 0.$$

Voilà de quoi surprendre : un événement dont la probabilité est nulle et qui n'est pas impossible. En fait, c'est comme la longueur d'un point qui est nulle, bien que le point (formalisé) ne soit pas vide. Mais savoir qu'une catastrophe majeure a une probabilité négligeable ne la rend pas impossible : désolé de perturber votre sommeil !

Espérance mathématique et variance

► Cas discret

Sous réserve que les séries soient absolument convergentes, on définit :

$$\text{l'espérance mathématique : } E(X) = \sum_i x_i p_i;$$

$$\text{la variance : } V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i = \left(\sum_i x_i^2 p_i \right) - (E(X))^2;$$

$$\text{l'écart type : } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Pour une série numérique, la convergence absolue est équivalente à la convergence commutative ; c'est-à-dire que la somme ne dépend pas de l'ordre des termes.

► Cas continu

Sous réserve que les fonctions à intégrer soient sommables, on définit :

l'espérance mathématique : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) dt$;

la variance : $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt - (E(X))^2$;

l'écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Fonction d'une variable aléatoire

► Cas discret

Soit X une variable aléatoire discrète et φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$\varphi(X)$ est une variable discrète dont l'espérance mathématique (si elle existe) est donnée par :

$$E(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i) p_i.$$

► Cas continu

Soit X une variable aléatoire continue de densité f et φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bijective avec φ^{-1} dérivable.

$\varphi(X)$ est une variable continue dont l'espérance mathématique (si elle existe) est donnée par :

$$E(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f(t) dt.$$

► Transformation affine

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad ; \quad V(aX + b) = a^2 V(X).$$

$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est la variable centrée réduite associée à X .

On a $E(Y) = 0$ et $V(Y) = 1$.

Moments m_k et moments centrés μ_k d'ordre $k \in \mathbb{N}$

► Cas discret

Sous réserve de convergence absolue des séries :

$$m_k = E(X^k) = \sum_i x_i^k p_i$$

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k = \sum_i (x_i - E(X))^k p_i$$

► Cas continu

Sous réserve de sommabilité des fonctions à intégrer :

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx$$

$$\mu_k = E[X - E(X)]^k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f(x) dx$$

$m_2 = E(X^2)$ représente la puissance moyenne du signal X .

► Égalités remarquables

$$m_0 = 1 \quad ; \quad m_1 = E(X) \quad ; \quad \mu_0 = 1 \quad ; \quad \mu_1 = 0 \quad ; \quad \mu_2 = \sigma^2$$

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2 \quad (\text{théorème de Koenig})$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_1 m_2 + 2m_1^3$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_1 m_3 + 6m_1^2 m_2 - 3m_1^4.$$

Paramètres de forme

► Coefficient d'asymétrie (ou skewness)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Si $\gamma_1 = 0$, la distribution est symétrique. Si $\gamma_1 < 0$, la distribution est étalée vers la gauche. Si $\gamma_1 > 0$, la distribution est étalée vers la droite.

► Coefficient d'aplatissement (ou kurtosis)

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}.$$

Si $\gamma_2 = 3$ l'aplatissement est le même que celui de la loi de Gauss réduite. On parle alors de bruit blanc.

Si $\gamma_2 < 3$ la distribution est plus aplatie.

Si $\gamma_2 > 3$ la distribution est moins aplatie.

VARIABLE ALÉATOIRE VECTORIELLE

Couple de variables aléatoires

Soit X et Y définies sur le même espace probabilisé.

► Cas de deux variables discrètes

Connaître la loi du couple, c'est connaître les probabilités élémentaires :

$$\forall x_i \quad \forall y_j \quad P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) = p_{ij}.$$

On peut en déduire les lois marginales

$$\text{de } X : P(X = x_i) = \sum_j p_{ij} = p_{i.}$$

$$\text{de } Y : P(Y = y_j) = \sum_i p_{ij} = p_{.j}$$

Mais, en général, les lois marginales ne permettent pas de reconstituer la loi du couple (X, Y) .

► Cas de deux variables continues

La fonction de répartition du couple (X, Y) est définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x, y) = P(X \leq x \text{ et } Y \leq y).$$

Le couple (X, Y) est continu (absolument continu pour les puristes) s'il existe une fonction de densité de probabilité f telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) \, dv \, du.$$

On a alors :

$$P(a \leq X \leq b \text{ et } c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(u, v) \, dv \, du.$$

On peut en déduire les densités marginales

$$\text{de } X : f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dy$$

$$\text{de } Y : f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \, dx$$

Mais, en général, ces densités marginales ne permettent pas de reconstituer la densité du couple (X, Y) .

Lois conditionnelles

► Cas de deux variables discrètes

Loi de X pour $Y = y_j$ fixé :

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}.$$

Loi de Y pour $X = x_i$ fixé :

$$P(Y = y_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_i}.$$

► Cas de deux variables continues

Densité conditionnelle de X pour $Y = y$ fixé :

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}.$$

Densité conditionnelle de Y pour $X = x$ fixé :

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}.$$

Indépendance de deux variables aléatoires

► Cas de deux variables discrètes

$$\forall (i, j) \quad p_{ij} = p_i \cdot p_j.$$

► Cas de deux variables continues

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

Vecteur aléatoire

► Loi conjointe

Soit $X_1, \dots, X_p$ définies sur le même espace probabilisé. Le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_p)$ a pour fonction de répartition :

$$F(x_1, \dots, x_p) = P(X_1 \leq x_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_p \leq x_p).$$

Il est continu s'il existe une fonction de densité de probabilité f telle que :

$$F(x_1, \dots, x_p) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_p} f(u_1, \dots, u_p) du_1 \dots du_p.$$

► Espérance mathématique

Sous réserve d'existence des $E(X_i)$, l'espérance de X est définie par :

$$E(X) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_p) \end{pmatrix}.$$

► Matrice de variance-covariance

C'est la matrice carrée d'ordre p dont le terme général est :

$$\sigma_{ij} = E[(X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j))].$$

OPÉRATIONS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé. Comme il s'agit de fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, la somme $X+Y$ et le produit XY se définissent immédiatement. Mais pour connaître les lois de probabilité, il faut connaître la loi conjointe du couple (X, Y) et pas seulement les lois marginales de X et de Y .

Lois de probabilité

► Cas de deux variables discrètes

L'univers-image de $Z = X+Y$ est constitué par les réels z_k du type $z_k = x_i + y_j$ et on a :

$$P(Z = z_k) = \sum p_{ij}$$

la somme étant étendue à tous les couples (i, j) tels que la somme $x_i + y_j$ soit égale au réel fixé z_k .

Pour le produit, le résultat est analogue en considérant des produits à la place des sommes.

► Cas de deux variables continues

Si f est la densité du couple (X, Y) , la densité de la loi de $X + Y$ est :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x - t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - u, u) du.$$

Si X et Y sont indépendantes, la densité de $X + Y$ est donc le produit de convolution des densités marginales f_1 et f_2 .

Covariance, corrélation

Si X et Y admettent des moments d'ordre 2, leur covariance est :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Leur coefficient de corrélation est :

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On dit que X et Y sont corrélées si $\rho_{XY} \neq 0$, et non corrélées si $\rho_{XY} = 0$.

Paramètres

► Cas général

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$$

► Cas où X et Y sont indépendantes

$$\text{Cov}(X, Y) = 0$$

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Mais il peut arriver que ces relations soient vérifiées sans que X et Y soient indépendantes.

FONCTION CARACTÉRISTIQUE

Définition

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f (au sens des distributions dans le cas discret). Sa fonction caractéristique est la transformée de Fourier de f . Elle est donc définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_X(t) = E(e^{-2i\pi tX}).$$

Certains auteurs prennent comme définition : $\varphi_X(t) = E(e^{itX})$.

Propriétés

► La fonction caractéristique caractérise la loi de X ; autrement dit, si deux variables aléatoires ont la même fonction caractéristique, elles ont la même loi de probabilité.

► On a : $\varphi_X(0) = 1$ et $|\varphi_X| \leq 1$.

► Si X et Y sont indépendantes, on a :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \varphi_Y(t).$$

► Si $\varphi_X(t)$ est de classe C^∞ , on obtient les moments de X par dérivation :

$$m_k = E(X^k) = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^k \varphi_X^{(k)}(0).$$

Fonction caractéristique d'un couple

La fonction caractéristique du couple (X, Y) est définie par :

$$\varphi_{X,Y}(t_1, t_2) = E(e^{-2i\pi(t_1X+t_2Y)}).$$

X et Y sont indépendantes si, et seulement si :

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi_{X,Y}(t_1, t_2) = \varphi_X(t_1) \varphi_Y(t_2).$$

La définition et le théorème se généralisent à un vecteur aléatoire quelconque.

29

Lois usuelles

VARIABLES DISCRÈTES

Loi binomiale

► Probabilités élémentaires

X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$, notée $\mathcal{B}(n, p)$, si l'univers-image est $\{0, \dots, n\}$ et si :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \quad P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

On obtient une loi binomiale quand :

– on répète n fois la même expérience aléatoire, les n répétitions étant indépendantes entre elles ;

– on s'intéresse seulement à la réalisation ou non d'un événement fixé A de probabilité p , et on pose $q = 1 - p$;

– on considère la variable aléatoire X égale au nombre de fois où A a été réalisé.

En langage imagé, on dispose d'une urne constituée de boules présentant un type A dans la proportion p . On effectue n tirages avec remise et on compte le nombre de boules de type A obtenues.

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq.$$

➤ Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement

$$\gamma_1 = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}} \quad ; \quad \gamma_2 = 3 + \frac{1-6p}{npq}.$$

➤ Fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = (pe^{-2i\pi t} + q)^n.$$

➤ Somme

Si X suit la loi $\mathcal{B}(n_1, p)$ et Y la loi $\mathcal{B}(n_2, p)$, et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Loi hypergéométrique

➤ Probabilités élémentaires

Une loi hypergéométrique dépend de trois paramètres entiers positifs : N , $K \leq N$ et $n \leq N$. En notant l le plus petit des deux entiers K et n , l'univers-image est $\{0, \dots, l\}$ et on a :

$$\forall k \in \{0, \dots, l\} \quad P(X = k) = \frac{C_K^k C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}.$$

En langage imagé, on dispose d'une urne constituée de N boules dont K présentent un type A . On prélève n boules sans remise et on compte le nombre X de boules de type A obtenues.

En fait la loi hypergéométrique est peu utilisée : on l'approxime par une loi binomiale dès que la taille N de la population est grande par rapport à la taille n de l'échantillon.

➤ Espérance mathématique et variance

En posant $p = \frac{K}{N}$ et $q = 1 - p$, on obtient :

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = npq \frac{N-n}{N-1}.$$

$\frac{N-n}{N-1}$ est le facteur d'exhaustivité.

Loi géométrique

➤ Probabilités élémentaires

X suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ si l'univers-image est $\mathbb{N}^*$ et si :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X = k) = p q^{k-1}.$$

Dans les hypothèses qui conduisent à la loi binomiale, on obtient la loi géométrique quand la variable aléatoire X désigne le temps d'attente de l'événement A , c'est-à-dire le rang de la première réalisation de A .

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad ; \quad V(X) = \frac{q}{p^2}.$$

➤ Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement

$$\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}} \quad ; \quad \gamma_2 = 3 + \frac{(p-3)^2 - 3}{1-p}.$$

Loi de Pascal

➤ Probabilités élémentaires

X suit la loi de Pascal de paramètres $r \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ si l'univers-image est l'ensemble des entiers $k \geq r$ et si :

$$\forall k \quad P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r q^{k-r}.$$

Dans les hypothèses qui conduisent à la loi binomiale, on obtient la loi de Pascal quand la variable aléatoire X désigne le nombre d'essais nécessaires pour obtenir k fois l'événement A .

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \frac{r}{p} \quad ; \quad V(X) = \frac{rq}{p^2}.$$

➤ Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement

$$\gamma_1 = \frac{2-p}{\sqrt{rq}} \quad ; \quad \gamma_2 = 3 + \frac{p^2 + 6q}{rq}.$$

Loi binomiale négative

➤ Probabilités élémentaires

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale négative de paramètres r et p si $X + r$ suit la loi de Pascal de paramètres r et p . On a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = C_{k+r-1}^r p^r q^k.$$

Dans les hypothèses qui conduisent à la loi binomiale, X désigne le nombre d'échecs ($\bar{A}$) précédant le r -ième succès (A).

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \frac{rq}{p} \quad ; \quad V(X) = \frac{rq}{p^2}.$$

➤ Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement

Les valeurs de γ_1 et γ_2 sont identiques à celles de la loi de Pascal puisqu'on passe de la loi de Pascal à la loi binomiale négative par une translation.

Loi de Poisson

➤ Probabilités élémentaires

X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si l'univers-image est $\mathbb{N}$ et si :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

La loi de Poisson est utilisée pour modéliser le nombre d'apparitions d'un événement rare, par exemple dans la désintégration atomique.

Les humoristes apprécieront aussi son usage pour décrire la répartition des tâches de rouille sur la coque d'un bateau de pêche !

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \lambda \quad ; \quad V(X) = \lambda.$$

➤ Fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = \exp \left(\lambda (e^{-2i\pi t} - 1) \right)$$

➤ *Somme*

Si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et Y la loi $\mathcal{P}(\lambda_2)$, et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

VARIABLES CONTINUES

Loi uniforme

➤ *Densité*

X suit la loi uniforme sur le segment $[a, b]$, notée $\mathcal{U}[a, b]$, si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \notin [a, b] \\ f(x) = \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \end{cases}$$

➤ *Espérance mathématique et variance*

$$E(X) = \frac{a+b}{2} ; \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

En statistique descriptive, quand les données sont groupées en classes, le réflexe qui consiste à remplacer chaque intervalle par son milieu est fondé sur l'hypothèse de répartition uniforme. Comme $E(X)$ est le milieu de l'intervalle, la moyenne est inchangée. Mais la variance est modifiée. On peut alors utiliser la correction de Sheppard (retrancher $\frac{h^2}{12}$ où h est l'amplitude des classes) fondée sur le calcul de $V(X)$.

Loi exponentielle

➤ *Densité*

X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Elle intervient en fiabilité pour modéliser la durée de vie d'un appareil qui fonctionne sans usure, les seules causes de panne étant externes.

➤ *Espérance mathématique et variance*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} ; \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

➤ *Coefficients d'asymétrie et d'aplatissement*

$$\gamma_1 = 2 ; \quad \gamma_2 = 9.$$

➤ *Fonction caractéristique*

$$\varphi_X(t) = \left(1 + 2i\pi \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}.$$

Loi de Cauchy

➤ *Densité*

X suit la loi de Cauchy si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

➤ Espérance mathématique et variance

X n'admet pas d'espérance mathématique, et donc pas de variance.

Loi gamma

➤ Densité

X suit la loi gamma de paramètres $a > 0$ et $\lambda > 0$, notée $\gamma(a; \lambda)$, si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(a)} (\lambda x)^{a-1} e^{-\lambda x}.$$

En fiabilité, la loi gamma peut servir à modéliser la durée de vie d'un matériel dans le cas où un certain nombre de défauts partiels peuvent apparaître avant qu'un système tombe en panne.

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \frac{a}{\lambda} \quad ; \quad V(X) = \frac{a}{\lambda^2}.$$

➤ Cas particuliers

$\gamma(1; \lambda)$ est la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

$\gamma(n; \lambda)$, avec n entier > 1 , est la loi de Erlang. Elle correspond à la somme de n variables indépendantes qui suivent la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

➤ Fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = \left(1 + 2i\pi \frac{t}{\lambda}\right)^{-a}.$$

➤ Somme

Si X suit la loi $\gamma(a_1; \lambda)$ et Y la loi $\gamma(a_2; \lambda)$, et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit $\gamma(a_1 + a_2; \lambda)$.

Loi normale, ou loi de Gauss, ou loi de Laplace-Gauss

➤ Densité

X suit la loi de Gauss de paramètres μ et σ , notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ si elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \mu \quad ; \quad V(X) = \sigma^2.$$

➤ Loi normale centrée réduite

La variable centrée réduite $U = \frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Tout problème relatif à X se ramène à U et on dispose (support papier ou électronique) de plusieurs tables concernant U .

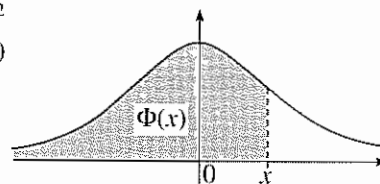
➤ La table de la fonction de répartition (cf. annexe table 1)

notée dans ce cas particulier $\Phi(x)$ (ou $\Pi(x)$) pour la distinguer de la notation générale $F(x)$.

Un réel x étant donné (arrondi à 10^{-2} sur support papier), la table donne $\Phi(x)$ pour $x \geq 0$.

Pour $x < 0$, on a :

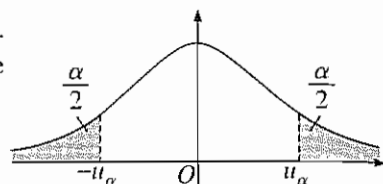
$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$



➤ La table des écarts réduits (cf. annexe table 2)

Une probabilité α étant donnée (arrondie à 10^{-2} sur support papier), la table donne la valeur $u_\alpha > 0$ telle que

$$P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha.$$



➤ Fonction caractéristique

$$\varphi_X(t) = e^{-2i\pi t\mu} e^{-2\pi^2 t^2 \sigma^2}.$$

➤ Somme

Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et Y la loi $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$, et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Loi log-normale

X suit la loi log-normale de paramètres μ et σ si $\ln X$ suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Elle admet pour densité de probabilité la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad ; \quad V(X) = (e^{\sigma^2} - 1) e^{2\mu + \sigma^2}.$$

Loi de Pearson (ou loi du χ^2)

➤ Définition

X suit la loi de Pearson, ou loi du χ^2 (lire khi-deux), à ν degrés de liberté s'il existe ν variables $U_1, \dots, U_\nu$, indépendantes, qui suivent chacune la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, et telles que :

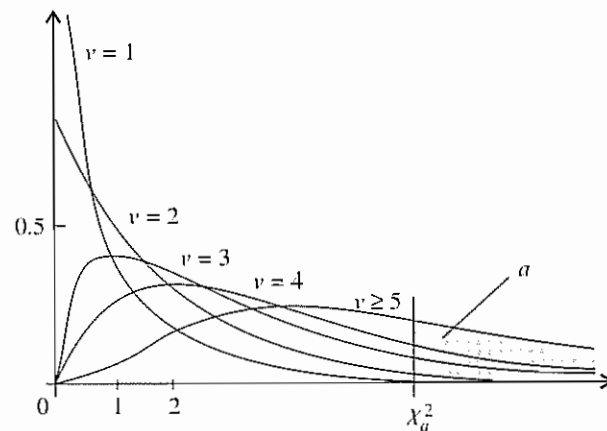
$$X = U_1^2 + \dots + U_\nu^2.$$

➤ Fonction caractéristique

$$\varphi_\nu(t) = (1 + 4i\pi t)^{-\frac{\nu}{2}}.$$

➤ Densité

$$\begin{cases} f_\nu(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f_\nu(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$



Une probabilité α étant donnée, la table 3 (cf. annexe) donne le réel χ_α^2 tel que :

$$P(|X| \geq \chi_\alpha^2) = \alpha.$$

La loi du χ^2 intervient en statistique inférentielle.

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \nu \quad ; \quad V(X) = 2\nu.$$

➤ Somme

Si X suit la loi du χ^2 à ν_1 degrés de liberté et Y la loi du χ^2 à ν_2 degrés de liberté, et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit la loi du χ^2 à $\nu_1 + \nu_2$ degrés de liberté

➤ Cas où ν est grand

Si $\nu \geq 30$, la variable aléatoire :

$$U = \sqrt{2X} - \sqrt{2\nu - 1}$$

suit à peu près la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

Loi de Student (ou loi de T)

➤ Définition

Une variable aléatoire T suit la loi de Student à ν degrés de liberté si on peut écrire :

$$T = \frac{U \sqrt{\nu}}{\sqrt{X}}$$

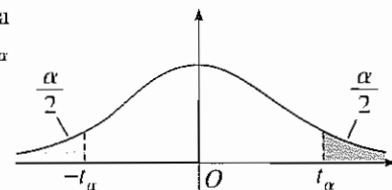
où U suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et X la loi du χ^2 à ν degrés de liberté.

➤ Densité

L'expression de f est compliquée. On retient seulement que c'est une fonction paire.

Une probabilité α étant donnée, la table 4 (cf. annexe) donne le réel t_α tel que :

$$P(|X| \geq t_\alpha) = \alpha.$$



La loi de Student intervient en statistique inférentielle.

➤ Espérance mathématique et variance

$$E(X) = 0 \quad ; \quad V(X) = \frac{\nu}{\nu - 2} \quad \text{si } \nu > 2.$$

Loi de Snedecor (ou loi de F , ou loi de Fisher-Snedecor)

➤ Définition

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois du χ^2 de degrés de liberté respectifs ν_1 et ν_2 .

La variable aléatoire

$$F = \frac{X_1/\nu_1}{X_2/\nu_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \frac{X_1}{X_2}$$

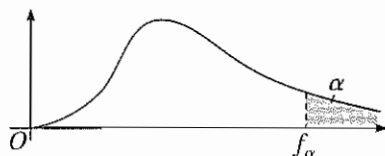
suit la loi de Snedecor à (ν_1, ν_2) degrés de liberté.

$$\text{On a } E(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad \text{si } \nu_2 > 2.$$

► Tables

Les tables donnent le nombre f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \alpha$.

La table 5 correspond à $\alpha = 0,025$ et la table 6 à $\alpha = 0,05$.



Pour obtenir f'_α tel que $P(F'_\alpha \leq F) = \alpha$, il suffit de transformer la probabilité sous la forme $P\left(\frac{1}{F} \leq \frac{1}{f'_\alpha}\right)$ et de remarquer que $\frac{1}{F}$ suit la loi de Snedecor à (ν_2, ν_1) degrés de liberté (Attention à l'ordre !).

Loi de Pareto

► Densité

X suit la loi de Pareto de paramètres $a > 0$ et $\alpha > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < a \\ f(x) = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{si } x \geq a \end{cases}$$

La loi de Pareto est utilisée en économie et en fiabilité.

► Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \frac{\alpha a}{\alpha - 1} \quad \text{si } \alpha > 1$$

$$V(X) = \frac{\alpha a^2}{\alpha - 2} - \left(\frac{\alpha a}{\alpha - 1}\right)^2 \quad \text{si } \alpha > 2$$

Loi de Weibull

► Densité

X suit la loi de Weibull de paramètres γ (paramètre d'origine), $\beta > 0$

(paramètre de forme) et $\eta > 0$ (paramètre d'échelle) si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < \gamma \\ f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\eta}\right)^\beta\right] & \text{si } x \geq \gamma \end{cases}$$

La loi de Weibull est utilisée en fiabilité pour modéliser la durée de vie d'objets vieillissants.

► Espérance mathématique et variance

$$E(X) = \gamma + \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$V(X) = \eta^2 \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \right]$$

► Cas particulier

Pour $\beta = 2$, on parle de loi de Rayleigh. Elle est utilisée en transmissions pour étudier le comportement de signaux bruités à bande étroite.

30

Convergences

CONVERGENCE EN PROBABILITÉ

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.

a étant un réel donné, on dit que (X_n) converge en probabilité vers a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 0.$$

X étant une variable aléatoire donnée, on dit (X_n) converge en probabilité vers X si $(X_n - X)$ converge en probabilité vers 0.

La convergence en probabilité n'entraîne pas la convergence de la suite des espérances mathématiques.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire admettant une espérance mathématique μ et un écart type $\sigma \neq 0$. On a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|X - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

La majoration fournie est assez médiocre. Mais c'est une étape préliminaire pour démontrer des résultats plus importants.

Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, deux à deux indépendantes, de même loi d'espérance mathématique μ et de variance σ^2 .

Alors $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge en probabilité vers μ .

Cas particulier

Dans une suite d'épreuves répétées, la fréquence observée d'un événement de probabilité p converge en probabilité vers p .

N'oubliez pas que la suite des fréquences observées est monotone et qu'un numéro moins sorti que d'autres depuis la création du loto va rattrapper son retard lors du prochain tirage !

Condition suffisante de convergence en probabilité

Soit (X_n) et X des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, possédant toutes une espérance mathématique et une variance.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} V(X_n - X) = 0$, alors la suite (X_n) converge en probabilité vers X .

CONVERGENCE EN LOI

Définition

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, de fonctions de répartition respectives F_n .

Soit X une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé, de fonction de répartition F .

On dit que (X_n) converge en loi vers X si, en tout point x où F est continue, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x).$$

Comparaison des modes de convergence

Si (X_n) converge en probabilité vers X , alors (X_n) converge en loi vers X .

La réciproque est fausse.

Lien avec les fonctions caractéristiques

Soit φ_n et φ les fonctions caractéristiques respectives de X_n et de X .

La suite (X_n) converge en loi vers X si, et seulement si, la suite (φ_n) converge simplement vers φ .

Cas particulier des variables discrètes

Si les variables aléatoires X_n et X sont toutes discrètes, d'univers-image Ω_1 , la convergence en loi de (X_n) vers X peut s'écrire :

$$\forall x_i \in \Omega_1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = x_i) = P(X = x_i).$$

Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires discrètes telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n \rightarrow \infty} n p_n = \lambda$ (avec $\lambda > 0$).

Alors (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire discrète X qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Si n est grand et p assez petit, on peut donc remplacer la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par la loi de Poisson de même espérance mathématique $\mathcal{P}(np)$.

Dans la pratique, on admet que cette approximation est satisfaisante lorsque $n \geq 30$ et $p \leq 0,1$ avec $np \leq 10$.

• Théorème de la limite centrée (ou théorème central limite)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, deux à deux indépendantes, et toutes de même loi, d'espérance mathématique μ et de variance σ^2 .

On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ leur somme et $M_n = \frac{1}{n} S_n$ leur moyenne.

Comme $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ (grâce à l'indépendance),

$Z_n = \frac{M_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ est la variable centrée réduite associée à M_n .

► Théorème

La suite (Z_n) converge en loi vers une variable X qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

► Application

Si n est grand, la loi de M_n est voisine de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ et la loi de S_n est voisine de la loi normale $\mathcal{N}(n\mu, \sqrt{n} \sigma)$.

Ce théorème permet de comprendre l'importance de la loi normale puisqu'il signifie que la somme d'un grand nombre de grandeurs aléatoires comparables et indépendantes peut se modéliser par une loi de Gauss.

• Loi binomiale et loi normale

► Théorème de Moivre-Laplace

Dans les hypothèses du théorème de la limite centrée, si la loi de X_n est $B(n, p)$ avec p fixé, alors la suite définie par $Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$ converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée réduite.

► Application

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n, p)$.

Pour n assez grand et p pas trop voisin de 0 et de 1, X suit à peu près la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{npq})$ de même espérance mathématique et de même écart type.

En pratique, on utilise cette approximation lorsque $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $nq \geq 5$.

Certains auteurs fixent ces bornes conventionnelles de façon plus élevée : 50 au lieu de 30, 10 ou 15 au lieu de 5.

Bien entendu, il s'agit de compromis. Quand les bornes augmentent, l'approximation est meilleure mais on s'en sert moins souvent.

► Correction de continuité

Si k_1 et k_2 sont deux entiers compris entre 0 et n , les intervalles $]k_1, k_2[$ et $[k_1, k_2]$ n'ont pas la même probabilité pour la loi binomiale, alors qu'ils ont la même probabilité pour la loi normale. Cela est dû au fait qu'on approche une loi discrète par une loi continue.

On peut corriger cette différence en décalant les bornes entières de 0,5, c'est-à-dire en remplaçant $]k_1, k_2[$ par $[k_1 + 0,5, k_2 - 0,5]$ et $[k_1, k_2]$ par $[k_1 - 0,5, k_2 + 0,5]$.

De la même façon, on peut estimer la probabilité $P(X = k)$ relative à la loi binomiale par $P(k - 0,5 \leq X \leq k + 0,5)$ calculée avec la loi normale.

AUTRES CONVERGENCES

Convergence en moyenne quadratique

► Définition

Soit (X_n) et X des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, possédant toutes une espérance mathématique et une variance.

On dit que la suite (X_n) converge en moyenne quadratique vers X si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(X_n - X)^2] = 0.$$

► Propriété

La convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité, donc en loi.

► Autre version de la loi des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, de même espérance mathématique μ , dont les variances sont toutes majorées par une constante, et telles que $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$ pour $i \neq j$.

Alors $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge en moyenne quadratique vers μ .

Convergence presque sûre

► Définition

Soit (X_n) et X des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé.

On dit que la suite (X_n) converge presque sûrement vers X si l'événement

$$\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}$$

est de probabilité égale à 1.

► Propriété

La convergence presque sûre implique la convergence en probabilité, donc en loi.

Il n'y a pas de lien entre convergence en moyenne quadratique et convergence presque sûre.

► Loi forte des grands nombres

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi ayant une espérance mathématique μ et une variance.

Alors la suite définie par $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ converge presque sûrement vers la variable certaine μ .

Processus aléatoires

GÉNÉRALITÉS

Définitions

Un processus X est une famille de variables aléatoires qui dépend du temps t . On note $X(\omega, t)$ le réel (parfois le complexe) observé à l'instant t en présence de l'événement ω .

Si l'événement ω est fixé, $t \mapsto X(\omega, t)$ est une réalisation, ou une trajectoire, de X . C'est un signal certain.

Si le temps t est fixé, $\omega \mapsto X(\omega, t)$ est une variable aléatoire, notée $X(t)$ pour abrégé.

Si on observe le phénomène aux instants t d'un intervalle, le processus est continu, ou analogique.

Si on observe le phénomène aux instants d'une suite (en général $t \in \mathbb{Z}$), le processus est discret, ou numérique.

Un processus est d'ordre 2 si toutes les variables aléatoires $X(t)$ ont un moment d'ordre 2.

Fonction d'autocorrélation

Soit X un processus d'ordre 2. Sa fonction d'autocorrélation est définie par :

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)].$$

On introduit aussi la fonction de covariance :

$$C(t_1, t_2) = \text{Cov}[X(t_1)X(t_2)] = R(t_1, t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)].$$

Dans le cas de valeurs complexes, on définit :

$$R(t_1, t_2) = E[\overline{X(t_1)}X(t_2)].$$

Processus stationnaires

► Stationnarité stricte

Un processus X est dit stationnaire au sens strict si sa loi de probabilité est invariante par translation dans le temps.

S'il est d'ordre 2, cela entraîne que $E[X(t)]$ est une constante μ , que $V[X(t)]$ est une constante σ^2 et que $R(t_1, t_2)$ ne dépend que de la différence $t_1 - t_2$.

On dit que X est centré si $\mu = 0$. Dans ce cas, les fonctions d'autocorrélation et de covariance sont égales.

► Stationnarité d'ordre 2

Un processus est stationnaire à l'ordre 2 si $E[X(t)]$ est une constante et si la fonction d'auto-corrélation $R(t_1, t_2)$ ne dépend que de la différence $t_1 - t_2$.

La fonction de corrélation définie par :

$$\varphi(\tau) = R(t, t - \tau)$$

est paire et vérifie $|\varphi(\tau)| \leq \varphi(0)$.

La puissance instantanée $E[X^2(\omega, t)] = R(t, t)$ est égale à la constante $\varphi(0)$. On l'appelle la puissance de X .

Ergodicité

Les valeurs comme $E[X(t)]$, $V[X(t)]$, $R(t_1, t_2)$ sont prises à un (ou deux) instant donné et associées à l'ensemble des résultats possibles de X à cet instant. Sur le plan expérimental, il serait plus commode d'effectuer des moyennes temporelles sur une réalisation $x(t)$ du processus aléatoire.

On appelle processus ergodique un processus aléatoire X tel que les moyennes d'ensemble soient identiques aux moyennes temporelles de l'une quelconque des réalisations $x(t)$. On a alors :

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

$$\varphi(t) = E[X(t)X(t - \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t - \tau) dt.$$

Densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire

La densité spectrale d'un processus aléatoire stationnaire est la transformée de Fourier de sa fonction de corrélation $\varphi(t)$.

Lorsque la densité spectrale est constante, le processus aléatoire est appelé bruit blanc.

Intercorrélation de deux processus

Soit X et Y deux processus d'ordre 2. Leur fonction d'intercorrélacion est définie par :

$$R_{X,Y}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)].$$

Si $X = Y$, on retrouve la fonction d'autocorrélation de X .

PROCESSUS DE MARKOV

Définition

Un processus aléatoire est dit de Markov, ou markovien, si son évolution future ne dépend que du présent et non du passé.

Si, de plus, le processus est discret ($t \in \mathbb{N}$) et si l'ensemble E des états est dénombrable, il s'agit d'une chaîne de Markov. Il s'agit donc alors d'une suite (X_k) de variables aléatoires discrètes dont l'univers-image est E .

Elle vérifie la propriété de Markov :

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour toute suite (e_p) d'éléments de E , on a :

$$P(X_{k+1} = e_{k+1} / X_0 = e_0, \dots, X_k = e_k) = P(X_{k+1} = e_{k+1} / X_k = e_k).$$

Matrice de transition

La probabilité de transition d'un état e à un état e' à l'instant k est

$$P(X_{k+1} = e' / X_k = e).$$

La chaîne de Markov est dite homogène lorsque cette probabilité ne dépend pas de k . C'est ce que nous supposons dans la suite.

On note alors $p(e, e')$ la probabilité de transition de e à e' .

Si E est fini, identifié à $\{1, \dots, n\}$ pour simplifier l'écriture, la matrice carrée P d'ordre n de terme général

$$p_{ij} = p(i, j) = P(X_{k+1} = j / X_k = i)$$

est la matrice de transition de la chaîne de Markov.

Matrice stochastique

► Définition

Une matrice carrée P est dite stochastique si tous ses éléments sont positifs ou nuls et si la somme des éléments de chaque ligne est égale à 1.

► Lien avec les matrices de transition

Une matrice de transition est stochastique car

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$$

puisque, quel que soit l'état fixé $X_k = i$, l'un quelconque des états j sera atteint par X_{k+1} .

Réciproquement, toute matrice stochastique peut être considérée comme une matrice de transition.

► Propriétés

Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.

Une matrice stochastique P admet la valeur propre 1 associé au vecteur

$$\text{propre} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Toutes les valeurs propres λ de P vérifient $|\lambda| \leq 1$.

Toutes les valeurs propres de module 1 sont racines de l'unité.

Distribution limite

La transition de $t = 0$ à $t = n$ est représentée par P^n . L'étude d'un état limite est donc l'étude de $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$.

Pour qu'une chaîne de Markov possède un vecteur d'état stationnaire indépendant de l'état initial, il faut et il suffit que toutes les valeurs propres de P autres que 1 vérifient $|\lambda| < 1$.

PROCESSUS DE POISSON

Définition

► Soit A un événement (une panne, une arrivée à un guichet...). Notons T_1 le temps d'attente de la première réalisation de A .

On suppose la situation sans mémoire, c'est-à-dire que, pour $t > 0$ donné, la loi de $T_1 - t$ sachant que $T_1 > t$, est la même que celle de T_1 .

Alors T_1 suit une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

► Poursuivons les observations de A et notons T_k le temps qui sépare la $(k-1)$ -ième et la k -ième réalisations de A .

L'absence de mémoire conduit à supposer que les variables aléatoires T_k sont indépendantes et suivent toutes la même loi que T_1 .

Dans ce cas, la variable aléatoire

$$S_n = T_1 + \dots + T_n$$

suit la loi de Erlang de paramètre λ .

► On appelle processus de Poisson la suite de variables aléatoires à valeurs entières définie par :

$$X(\omega, t) = n \iff S_n(\omega) \leq t < S_{n+1}(\omega)$$

c'est-à-dire le nombre de réalisations de A avant l'instant t .

Propriétés

► La loi de $X(\omega, t)$ est la loi de Poisson de paramètre λt .

On a donc $E[X(\omega, 1)] = \lambda$, c'est-à-dire que λ est le nombre moyen de réalisations de A par unité de temps.

► Si $0 < t_1 < t_2$, la loi de $X(\omega, t_2) - X(\omega, t_1)$ est la loi de Poisson de paramètre $\lambda(t_2 - t_1)$.

MOUVEMENT BROWNIEN

Définition

Le mouvement brownien est le processus B défini par les trois propriétés :

– $B(\omega, 0) = 0$;

– $B(\omega, t_2) - B(\omega, t_1)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{|t_2 - t_1|})$;

– pour toute suite finie $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$, les variables aléatoires

$$B(\omega, t_1), B(\omega, t_2) - B(\omega, t_1), \dots, B(\omega, t_n) - B(\omega, t_{n-1})$$

sont indépendantes.

Fonction d'autocorrélation

$$R(t_2, t_1) = \min\{t_1, t_2\}.$$

Estimation

GÉNÉRALITÉS

Échantillonnage

► On s'intéresse à l'étude d'un caractère dans une population à laquelle on n'a pas accès. Si on extrait plusieurs échantillons représentatifs de taille n fixée, les différences observées entre les résultats obtenus sont dues à des fluctuations d'échantillonnage. À partir d'un échantillon, on n'a donc pas de certitudes, mais des estimations de paramètres.

► L'échantillonnage est dit non-exhaustif si le tirage des n individus constituant l'échantillon a lieu avec remise.

Il est exhaustif si le tirage est réalisé sans remise. En fait, le plus souvent la taille d'un échantillon est faible par rapport à celle de la population et on assimile alors l'échantillonnage au cas non-exhaustif.

► L'échantillon utilisé doit être représentatif de la population, c'est-à-dire reproduire les catégories pertinentes pour l'étude effectuée. Pour un sondage d'opinion on reproduit les tranches d'âge, mais on ne tient pas compte de la couleur des cheveux.

► L'échantillon doit être constitué de manière aléatoire et non par volontariat (ce sont les râleurs qui téléphonent), ou par commodité (prélever des épis de blé seulement en bordure du champ).

► Pour estimer un paramètre θ relatif à la population on utilise, soit une estimation ponctuelle (un seul nombre), soit un intervalle de confiance dans lequel on peut situer θ avec un risque α choisi.

Estimateur

► Une variable aléatoire T_n , associée à un échantillon de taille n , est un estimateur sans biais d'un paramètre θ si $E(T_n) = \theta$. Dans le cas contraire, l'estimateur est dit biaisé.

T_n est asymptotiquement sans biais si $\lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n) = \theta$.

► T_n est un estimateur convergent de θ si la suite (T_n) converge en probabilité vers θ , c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|T_n - \theta| > \varepsilon) = 0.$$

Pour ceci, il suffit que T_n soit sans biais et que $\lim_{n \rightarrow \infty} V(T_n) = 0$.

La variance étant un indicateur de dispersion, on préfère un estimateur sans biais, convergent, dont la variance soit aussi faible que possible.

Maximum de vraisemblance

Soit X une variable aléatoire, définie sur une population, dépendant d'un paramètre θ à estimer.

On dispose d'un échantillon de taille n dont les valeurs observées sont $x_1, \dots, x_n$. Ce sont les valeurs prises par des variables aléatoires notées $X_1, \dots, X_n$.

La fonction du maximum de vraisemblance est définie dans le cas où X est une loi discrète par :

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i);$$

dans le cas où X est une loi continue admettant une densité f par :

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta).$$

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à choisir comme estimation de θ la valeur qui rend maximale la fonction :

$$\theta \mapsto L(x_1, \dots, x_n, \theta).$$

➤ Remarques

La fonction L étant en général strictement positive, il est équivalent de maximiser $\ln L$.

La méthode du maximum de vraisemblance nécessite l'emploi d'un ordinateur. Elle se généralise à l'estimation simultanée de plusieurs paramètres.

Quantité d'information de Fisher

➤ Définition

La fonction du maximum de vraisemblance étant supposée de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à θ , la quantité d'information apportée par l'échantillon est définie (sous réserve d'existence) par :

$$I_n(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(X_1, \dots, X_n, \theta) \right)^2 \right]$$

➤ Inégalité de Cramer-Rao

$$V(T_n) \geq \frac{1}{I_n(\theta)}.$$

➤ Estimateur efficace

Un estimateur est efficace s'il est sans biais, convergent et conduit à une égalité dans l'inégalité de Cramer-Rao.

Il est alors de variance minimum parmi les estimateurs sans biais, convergents, possédant une variance.

S'il existe un estimateur efficace de θ , on est sûr de l'obtenir par la méthode du maximum de vraisemblance.

ESTIMATION D'UNE MOYENNE ET D'UNE VARIANCE

Notations

On étudie sur la population un caractère quantitatif X dont la moyenne μ et la variance σ^2 sont à estimer.

Pour un échantillon de taille n , on note $x_1, \dots, x_n$ les valeurs observées et $X_1, \dots, X_n$ les variables aléatoires associées.

On définit deux variables aléatoires :

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ qui prend pour valeurs les moyennes des échantillons de taille n ;

$V_e = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ qui prend pour valeurs les variances des échantillons de taille n .

Estimation ponctuelle d'une moyenne

► Théorème

$$E(\bar{X}) = \mu \quad ; \quad V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

$\bar{X}$ est donc un estimateur sans biais, convergent, de μ .

Dans la pratique, on dispose d'un seul échantillon et on retient comme estimation de la moyenne théorique μ la moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon.

Estimation ponctuelle d'une variance

► Théorème

$$E(V_e) = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

V_e est donc un estimateur biaisé de σ^2 . Pour obtenir un estimateur non biaisé on considère $S^2 = \frac{n}{n-1} V_e$. Ces deux estimateurs sont convergents.

Dans la pratique, on dispose d'un seul échantillon et on retient comme estimation de la variance théorique σ^2 la variance estimée :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

On estime aussi σ par s , bien que cette estimation soit biaisée.

Attention aux notations choisies selon les critères : en grec ce qui concerne la population, en latin ce qui concerne l'échantillon ; et l'écriture la plus simple pour la notion la plus importante.

Certains auteurs notent s^2 la variance de l'échantillon au lieu de v_e ici.

Remarquez que $s^2 = \frac{n}{n-1} v_e$.

Estimation d'une moyenne par intervalle de confiance

► Cas d'une population gaussienne (σ connu)

Si X suit une loi normale, alors $\bar{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Pour un risque α donné, on lit l'écart-réduit u_α dans la table 2 et on peut affirmer, avec un risque α de se tromper, que :

$$-u_\alpha < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_\alpha$$

soit :

$$\mu \in \left] \bar{x} - u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[.$$

► Cas d'une population gaussienne (σ inconnu)

La variable aléatoire $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit la loi de Student à $\nu = n - 1$ degrés de liberté.

Pour un risque α donné, on lit le nombre t_α dans la table 3 et on peut affirmer (au risque α) que :

$$\mu \in \left] \bar{x} - t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \right[.$$

► Cas d'une loi quelconque et d'un grand échantillon

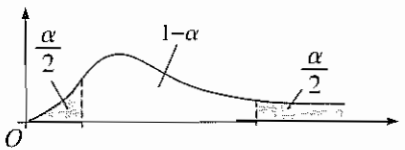
Si $n \geq 30$, la variable aléatoire $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit approximativement la loi normale centrée réduite. L'intervalle de confiance de μ (au risque α) s'écrit donc :

$$\left] \bar{x} - u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + u_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}} \right[.$$

Estimation d'une variance par intervalle de confiance
(population gaussienne)

Si X suit une loi normale, la variable aléatoire $Y = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2$ suit la loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté.

Pour α donné, on détermine les nombres a et b tels que $P(Y \leq a) = \frac{\alpha}{2}$ et $P(Y \geq b) = \frac{\alpha}{2}$.



Au risque α , on peut alors affirmer que :

$$\sigma^2 \in \left] \frac{(n-1)s^2}{b}, \frac{(n-1)s^2}{a} \right[.$$

Si on ne dispose que de tables sur papier, pour $n > 31$ on ne peut pas lire a et b . On utilise alors l'approximation signalée en bas de la table 3, ce qui conduit à :

$$\sigma^2 \in \left] \frac{2(n-1)s^2}{(\sqrt{2n-3} + u_\alpha)^2}, \frac{2(n-1)s^2}{(\sqrt{2n-3} - u_\alpha)^2} \right[.$$

ESTIMATION D'UNE PROPORTION

Notations

Si la population est formée d'individus ayant ou non un caractère A , on définit la variable aléatoire F qui prend pour valeurs les fréquences observées de A sur des échantillons de taille n , supposés tirés avec remise.

Soit p la probabilité pour qu'un individu, pris au hasard dans la population, présente le caractère A . C'est p qu'il s'agit d'estimer.

Estimation ponctuelle d'une proportion

► Théorème

$$E(F) = p \quad ; \quad V(F) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

F est donc un estimateur sans biais, convergent, de p .

Dans la pratique, on dispose d'un seul échantillon et on retient comme estimation de la proportion théorique p la fréquence f de l'échantillon.

Estimation d'une proportion par intervalle de confiance

nF , nombre d'individus ayant le caractère A dans un échantillon de taille n , suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On peut en déduire un intervalle de confiance de p par cumul de probabilités élémentaires, ce qui est très pénible sans ordinateur.

Si on peut approximer la loi binomiale par une loi de Gauss, alors $U = \frac{F-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ suit approximativement la loi normale centrée réduite.

On peut donc dire (au risque α) que :

$$f - u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq p \leq f + u_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

Pour expliciter les bornes, deux points de vue sont possibles.

Remplacer p par f , ce qui donne l'intervalle de confiance :

$$\left] f - u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}, f + u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right[.$$

Estimer sans biais $p(1-p)$, ce qui donne l'intervalle de confiance :

$$\left] f - u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}, f + u_\alpha \sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} \right[.$$

Mais comme n est supposé grand, il s'agit d'une différence sans conséquence.

Tests statistiques

GÉNÉRALITÉS

Test d'une hypothèse simple contre une hypothèse simple

► Objectif

On formule une hypothèse nulle (H_0) qu'il s'agit de rejeter ou de valider. Si la conclusion est le rejet de (H_0), ce sera au bénéfice d'une hypothèse alternative (H_1) précisée au préalable. Par défaut, il s'agit du contraire de (H_0).

► Risques

L'information étant incomplète, toute décision est associée à une prise de risque.

Si on décide que (H_0) est fausse, le risque de se tromper est noté α et s'appelle risque de première espèce.

Si on décide que (H_0) est vraie, le risque de se tromper est noté β et s'appelle risque de deuxième espèce.

Le concepteur d'un nouveau test s'intéresse à la puissance du test qui est $1 - \beta$.

L'utilisateur d'un test s'intéresse au risque α et ses conclusions sont donc :

(H_0) rejetée au risque α :

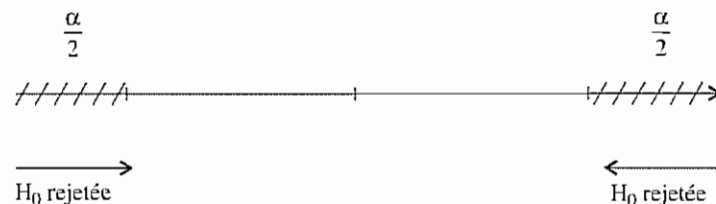
(H_0) non rejetée (ou acceptée) au risque α .

► Fonctionnement

Dans chaque situation, on dispose d'un théorème dont le schéma est le suivant :

Si (H_0) est vraie, et si on a des hypothèses de fonctionnement, alors une variable de décision X suit une loi théorique connue.

On repère la valeur idéale que devrait prendre X . On choisit un risque α (souvent 0,05) et on détermine une zone (souvent en deux morceaux), de probabilité α , éloignée de cette valeur idéale.



Si la valeur prise par X appartient à cette zone critique, on décide de rejeter (H_0) au risque α ; sinon on accepte (H_0).

Les logiciels déterminent souvent le risque minimum α pour lequel on rejette (H_0). Il vous reste alors à apprécier si ce risque est acceptable ou non.

Exemples d'utilisation

➤ Comparer un échantillon à une référence théorique

L'hypothèse (H_0) consiste à supposer que les différences observées sont suffisamment faibles pour être explicables par les hasards du tirage au sort. Il s'agit d'un test de conformité.

➤ Comparer plusieurs échantillons

L'hypothèse (H_0) consiste à supposer qu'ils proviennent d'une même population, c'est-à-dire que les différences observées sont explicables par les fluctuations d'échantillonnage. Il s'agit d'un test d'homogénéité.

COMPARAISON DE DEUX FRÉQUENCES

Comparaison d'une fréquence expérimentale et d'une fréquence théorique

➤ Position du problème

Dans une population, on étudie un caractère statistique à deux modalités A et $\bar{A}$; par exemple, dans une production, une pièce est défectueuse ou non. Soit p la fréquence d'apparition de A dans la population et f la fréquence d'apparition de A dans un échantillon de taille n . Le problème est de savoir si la différence entre f et p est significative. Notons F la variable aléatoire dont f est une réalisation sur un échantillon de taille n .

➤ Hypothèse nulle

(H_0) : la fréquence observée f est conforme à la fréquence théorique p . On va effectuer un test bilatéral si (H_1) est le contraire de (H_0).

Mais il est possible que f soit a priori supérieure (ou inférieure) à p . Il s'agit alors d'un test unilatéral où (H_1) s'écrit : la différence entre f et p est trop importante (avec un signe connu au départ) pour être explicable par les fluctuations d'échantillonnage.

➤ Théorème

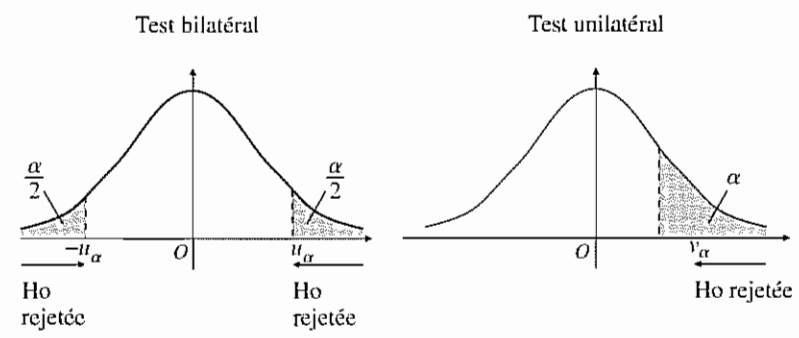
Supposons que l'on puisse approximer la loi binomiale par une loi normale, soit $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$. Alors, si (H_0) est vraie, la variable aléatoire

$$U = \frac{F - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

suit approximativement la loi normale centrée réduite.

➤ Décision

On calcule la valeur u prise par U . Le risque α étant choisi, on conclut suivant la zone où se situe u .



Comparaison de deux fréquences expérimentales

► Position du problème

Dans deux populations P_1 et P_2 , on étudie un caractère statistique à deux modalités A et $\bar{A}$. Les fréquences d'apparition de A dans les populations P_1 et P_2 sont les nombres (inconnus) p_1 et p_2 .

De P_1 et P_2 , on extrait deux échantillons de tailles n_1 et n_2 dans lesquels les fréquences observées de A sont f_1 et f_2 . Le problème est de savoir si la différence entre f_1 et f_2 est significative, ou, au contraire, explicable par les fluctuations d'échantillonnage.

► Hypothèse nulle

$$(H_0) : p_1 = p_2 = p.$$

Si des raisons expérimentales a priori le justifient, on peut faire un test unilatéral. Par défaut, le test est bilatéral.

► Théorème

Sous (H_0) , on peut réunir les deux échantillons et estimer p par :

$$\hat{p} = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2} = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2}.$$

La variable aléatoire

$$U = \frac{F_1 - F_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

suit approximativement la loi normale centrée réduite.

► Décision

Comme dans le test qui précède ; seule la formule de calcul de u diffère.

COMPARAISON DE DEUX MOYENNES

Comparaison d'une moyenne expérimentale et d'une moyenne théorique

► Position du problème

Dans une population, on étudie un caractère quantitatif X et on note $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$.

Sur un échantillon de taille n , les mesures observées ont pour moyenne $\bar{x}$ et pour variance estimée s^2 .

On connaît $\bar{x}$, s^2 et μ et il s'agit de comparer $\bar{x}$ et μ .

► Hypothèse nulle

$(H_0) : \bar{x}$ est conforme à μ . Il n'y a pas de différence significative entre la moyenne observée et la norme théorique.

Si des raisons expérimentales a priori le justifient, on peut faire un test unilatéral. Par défaut, le test est bilatéral.

► Cas d'une population gaussienne (σ connu)

La variable aléatoire $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale centrée réduite.

La règle de décision en résulte (cf. premier test sur les fréquences).

► Cas d'une population gaussienne (σ inconnu)

La variable aléatoire $T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit la loi de Student à $\nu = n - 1$ degrés de liberté.

La règle de décision est analogue à ce qui précède, en remplaçant u_α (table 2) par t_α (table 3).

➤ *Cas d'une loi quelconque et d'un grand échantillon*

Si $n \geq 30$, la variable aléatoire $U = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit approximativement la loi normale centrée réduite.

La règle de décision en résulte.

Comparaison de deux moyennes expérimentales (échantillons indépendants)

➤ *Position du problème*

Dans deux populations P_1 et P_2 , on étudie une variable aléatoire X . On note :

μ_1 et σ_1^2 la moyenne et la variance de X dans P_1 ;

μ_2 et σ_2^2 la moyenne et la variance de X dans P_2 .

Tous ces nombres sont inconnus.

De P_1 , on extrait un échantillon de taille n_1 pour lequel on calcule la moyenne $\bar{x}_1$ et la variance estimée s_1^2 .

De P_2 , on extrait un échantillon de taille n_2 et on calcule $\bar{x}_2$ et s_2^2 .

Le problème est de savoir si la différence entre $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ est significative, ou, au contraire, explicable par les fluctuations d'échantillonnage.

➤ *Hypothèse nulle*

$(H_0) : \mu_1 = \mu_2$.

Si des raisons expérimentales a priori le justifient, on peut faire un test unilatéral. Par défaut, le test est bilatéral.

➤ *Cas de grands échantillons*

Si $n_1 \geq 30$ et $n_2 \geq 30$, sous (H_0) , la variable aléatoire $U = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ suit approximativement la loi normale centrée réduite.

La règle de décision en résulte.

➤ *Cas de petits échantillons extraits de populations gaussiennes*

Faisons l'hypothèse supplémentaire $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (à tester au préalable). Cette valeur commune σ^2 est alors estimée par :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Dans ces hypothèses, la variable aléatoire

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

suit la loi de Student à $\nu = n_1 + n_2 - 2$ degrés de liberté.

La règle de décision en résulte.

Comparaison de deux moyennes expérimentales (échantillons appariés)

➤ *Position du problème*

Deux échantillons sont appariés si les mesures sont associées par paires ; c'est-à-dire que chaque mesure $x_{1,i}$ du premier échantillon est associée à la mesure $x_{2,i}$ du deuxième échantillon. Cela entraîne la condition nécessaire $n_1 = n_2 = n$.

Pour étudier l'efficacité d'un traitement il faut comparer des individus avant et après traitement. Si les individus sont interchangeables,

on prend deux échantillons indépendants. Mais s'il y a une forte variabilité individuelle, on considère les mêmes individus avant et après traitement et les échantillons sont appariés.

► Hypothèse nulle

$(H_0) : \mu_1 = \mu_2$.

$(H_1) : \mu_1 \neq \mu_2$ (test bilatéral) ; $\mu_1 > \mu_2$ (ou $<$) (test unilatéral).

► Décision

Pour ne pas perdre le caractère apparié des deux échantillons, on ne considère que les différences $d_i = x_{1,i} - x_{2,i}$.

L'échantillon des différences a pour moyenne $\bar{d}$ et pour variance estimée s_d^2 .

L'hypothèse nulle signifie que la moyenne théorique des différences est 0.

On est donc ramené à la comparaison d'une moyenne expérimentale $\bar{d}$ et d'une moyenne théorique 0.

COMPARAISON DE DEUX VARIANCES

Comparaison d'une variance expérimentale et d'une variance théorique

► Position du problème

Avec les notations déjà introduites, il s'agit de comparer la variance σ^2 d'une population et la variance estimée s^2 calculée sur un échantillon de taille n .

La répétabilité d'une méthode de dosage peut être quantifiée par la dispersion des mesures obtenues. Pour apprécier la qualité d'une nouvelle méthode, on peut comparer la variance obtenue s^2 avec la variance de référence σ^2 .

► Hypothèse nulle

$(H_0) : \text{pas de différence significative entre } s^2 \text{ et } \sigma^2$.

► Théorème

Si la population est gaussienne, sous (H_0) , la variable aléatoire

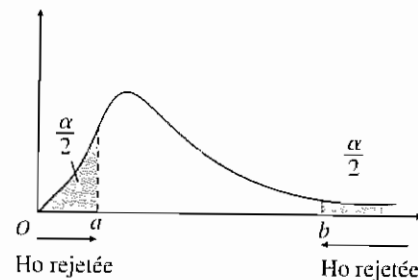
$$Y = \frac{n-1}{\sigma^2} S^2$$

suit la loi du χ^2 à $\nu = n - 1$ degrés de liberté.

► Décision

Pour α choisi, on lit a et b dans la table 3.

On calcule la valeur y prise par Y et on conclut suivant la zone où se situe cette valeur.



Comparaison de deux variances expérimentales

► Position du problème

On utilise les mêmes notations que dans la comparaison de deux moyennes expérimentales d'échantillons indépendants. Il s'agit de comparer s_1^2 et s_2^2 , c'est-à-dire d'effectuer le test préalable pour comparer les moyennes d'échantillons de petites tailles dans le cas de populations gaussiennes.

► Hypothèse nulle

$(H_0) : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

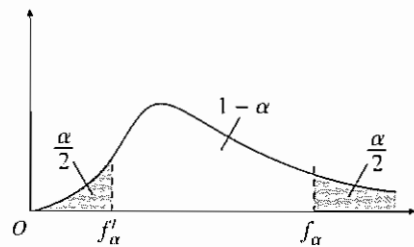
➤ *Théorème*

Si les populations sont gaussiennes, sous (H_0) , la variable aléatoire

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$ suit la loi de Snedecor à $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ degrés de liberté.

➤ *Décision*

On pourrait calculer f et décider en fonction de la zone où se situe cette valeur.



Mais les tables ne fournissent que f_α . De ce fait, on permute si nécessaire les deux échantillons pour que $\frac{S_1^2}{S_2^2} \geq 1$.

On compare alors ce quotient à f_α .

Attention à permuter éventuellement les degrés de liberté. Et regardez bien le graphique pour ne pas vous tromper de table : à droite de f_α il n'y a que la moitié du risque.

Tables

TABLE 1

Fonction de répartition de la loi normale réduite

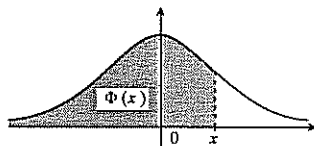
Si U suit la loi normale réduite, pour $x \geq 0$, la table donne la valeur :

$$\Phi(x) = P(U \leq x).$$

La valeur x s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

Pour $x < 0$, on a :

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x).$$



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9065	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9755	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

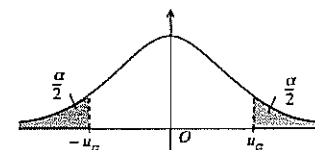
TABLE 2

Loi normale réduite (table de l'écart réduit)

Si U est une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite, la table donne, pour α choisi, la valeur u_α telle que :

$$P(|U| \geq u_\alpha) = \alpha.$$

La valeur α s'obtient par addition des nombres inscrits en marge.

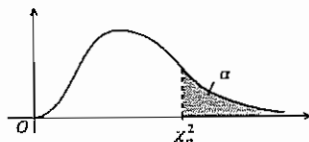


α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,1	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,2	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,3	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,4	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,5	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,6	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,7	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,8	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,9	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

TABLE 3

Lois de Pearson
ou lois du χ^2

Si Y^2 est une variable aléatoire qui suit la loi du χ^2 à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre χ^2_α tel que $P(Y^2 \geq \chi^2_\alpha) = \alpha$.



α ν	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0002	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,12	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,52
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,47	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,13
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,36	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,67	21,92	24,72	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,84	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,08	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,80	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,32
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,61	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,41	39,37	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,88	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,57	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

Lorsque le degré de liberté ν est tel que $\nu > 30$, la variable aléatoire :

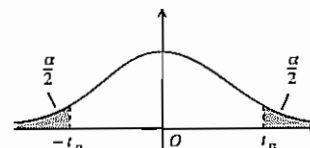
$$U = \sqrt{2Y^2} - \sqrt{2\nu - 1}$$

suit à peu près la loi normale réduite.

TABLE 4

Lois de Student

Si T est une variable aléatoire qui suit la loi de Student à ν degrés de liberté, la table donne, pour α choisi, le nombre t_α tel que $P(|T| \geq t_\alpha) = \alpha$.



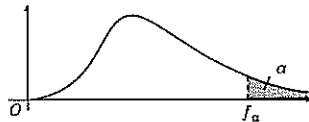
α ν	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,126	0,681	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
80	0,126	0,679	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,126	0,677	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,126	0,674	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Lorsque le degré de liberté est infini, il s'agit du nombre u_α correspondant à la loi normale centrée réduite (cf. table 2).

TABLE 5

Lois de Snédécór ($\alpha = 0,025$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécór à (v_1, v_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \alpha = 0,025$.

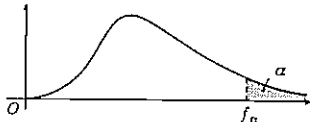


$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1001	1018
2	38,5	39,0	39,2	39,3	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1	13,9
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46	8,26
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23	6,02
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07	4,85
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36	4,14
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89	3,67
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56	3,33
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31	3,08
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12	2,88
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96	2,72
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84	2,60
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73	2,49
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64	2,40
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57	2,32
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50	2,25
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44	2,19
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39	2,13
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35	2,09
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27	2,00
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21	1,94
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16	1,88
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11	1,83
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07	1,79
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94	1,64
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87	1,55
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82	1,48
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75	1,40
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71	1,35
∞	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,19	2,05	1,83	1,71	1,57	1,00

TABLE 6

Lois de Snédécór ($\alpha = 0,05$)

Si F est une variable aléatoire qui suit la loi de Snédécór à (v_1, v_2) degrés de liberté, la table donne le nombre f_α tel que $P(F \geq f_\alpha) = \alpha = 0,05$.



$v_1 \backslash v_2$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98	1,78
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94	1,73
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90	1,69
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87	1,65
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69	1,44
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60	1,32
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57	1,28
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00

Index

A

Abel 68
angle solide 55
appariés 283
approximation des moindres carrés 95
arc de cercle 47
arrangement 219
asymétrie 232
autocorrélation 157

B – C

barrique 208
base hilbertienne 95
brachistochrone 179
calcul des variations 175
calotte sphérique 207
carpettes de Sierpinski 216
carré triadique de Cantor 212
centre d'inertie 45
centre de courbure 185
chaleur 122
champ de vecteurs 29
champ scalaire 29
chemins 79
circulation 50
coefficients de Fourier 105
combinaisons 219
conditions de Cauchy 77
cône 196
 circulaire 206
coniques 187
connexe 77

converge
 en moyenne 63
 quadratique 63
 uniformément 63
convergence
 en loi 256
 en moyenne quadratique 259
 en probabilité 254
 normale 66
 presque sûre 260
 simple 62, 65
 presque partout 62
 uniforme 65
convolution 138, 140
 discrète 163
coordonnées
 cylindriques 33
 polaires 32
 sphériques 35
correction de continuité 258
corrélation 236
cosinus intégral 20
courbe
 B-spline 26
 de Bézier 25
 de Koch 212
 de Lissajous 191
 de Sierpinski 214
courbure 185
covariance 236
cramer-Rao 271
cube 203

cycloïde 190
cylindres 194

D – E

densité
 de probabilité 229
 spectrale 157, 263
développante 186
développée 186
différences finies 56
dimension de Hausdorff 210
Dirichlet 107, 125
distribution 127
 δ de Dirac 131
 périodique 160
divergence 30
dodécaèdre 204
écart type 229
échantillonnage 161, 268
échelon unité 130
ellipse 188
ellipsoïde 197
elliptique 118
ensemble
 de mesure nulle 9
 triadique de Cantor 211
enveloppe 185
éponge de Sierpinski 216
équation
 aux dérivées partielles 114
 d'Euler 176
espace
 de Banach 92
 de Hilbert 93
 vectoriel normé 89
espérance mathématique 229
estimateur 269

Euler 202
exponentielle intégral 21

F

flocon de neige de Koch 213
flux 54
fonction
 analytique 72
 bêta 13
 caractéristique 237
 causale 140
 d'erreur 23
 de Bessel 14
 de Bessel modifiée 17
 de Debye 23
 de Hankel 15
 de Kelvin 18
 de Macdonald 17
 de Neumann 15
 de répartition 228
 de Weber-Hermite 100
 dzéta de Riemann 22
 eulériennes 11
 gamma 11
 holomorphe 76
 méromorphe 84
 test 128
 triangle 139
formule
 de Bayes 225
 des probabilités totales 225
 intégrale de Cauchy 81
fréquence 105
Fubini 40, 41

G – H

géodésiques 181
 Gibbs 107
 gradient 30
 Green-Riemann 51
 Hamilton 181
 hyperbole 189
 hyperbolique 118
 hyperboloïde 198

I

icosaèdre 205
 indépendants 225
 inégalité
 de Bienaymé-Tchebychev 255
 de Cauchy-Schwarz 94
 intégrable 3
 intégrale
 curviligne 49
 de Fresnel 22, 88
 de Lebesgue 8
 de Poisson 126
 de Riemann 2
 complète 10
 de surface 54
 de Wallis 14
 double 38
 généralisée 4
 première 117
 triple 43

intercorrélation 158, 263
 Koeuig 231
 Kurtosis 232

L

L. Schwartz 128
 lacet 79

Laplace 124
 laplacien 30
 lemmes de Jordan 86
 limite centrée 257
 logarithme intégral 21
 loi

 binomiale 239
 négative 242
 de Cauchy 245
 de Erlang 246
 de Pareto 252
 de Pascal 242
 de Pearson 249
 de Poisson 243
 de probabilité 228
 de Rayleigh 253
 de Snedecor 251
 de Student 250
 de Weibull 252
 exponentielle 245
 faible des grands nombres 255
 forte des grands nombres 260
 géométrique 241
 gamma 246
 hypergéométrique 240
 log-normale 248
 normale 247
 uniforme 244

longueur 48

M – N – O

matrice de transition 264
 matrice de variance-covariance 235
 matrice stochastique 264
 maximum de vraisemblance 269
 Moivre-Laplace 258

moments
 centrés 231
 d'inertie 45
 mouvement brownien 266
 multiplicateur de Lagrange 178
 néphroïde 192
 norme
 équivalente 91
 hermitienne 94
 objet fractal 210
 octaèdre 204
 ondelette
 de Haar 173
 de Morlet 174
 ondes 119
 original 146
 Ostrogradski 55

P

parabole 187
 parabolique 118
 paraboloïde 199
 Parseval 111
 Parseval-Plancherel 156
 peigne de Dirac 131
 permutation 219
 plan osculateur 184
 Poincaré 31
 polyèdres 202
 polynômes
 d'Hermite 99
 d'Hurwitz 19
 de Bernstein 25
 de Butterworth 20
 de Gegenbauer 103
 de Jacobi 103
 de Laguerre 100

 de Legendre 99
 de Tchebycheff 101
 orthogonaux 98
 porte unité 130
 prisme 205
 probabilité 222
 conditionnelle 224
 processus
 aléatoire 261
 de Markov 264
 de Poisson 265
 ergodique 263
 stationnaire 262
 produit
 scalaire hermitien 93
 pulsation 105
 pyramide 206

Q – R

quadriques 197
 quantité d'information de Fisher 270
 rayon
 de convergence 69
 de courbure 185
 de torsion 185
 réglées 194
 régulières 130
 repère
 de Frenet 184
 mobile 32
 résidus 83
 risques 276
 rotationnel 30

S

série
 de Fourier 104
 de Laurent 83
 entière 68
signe 131
simplement connexe 77
singulières 131
sinus intégral 20
skewness 232
sommales 5
sommes
 de Darboux 38
 de Riemann 2
sphère 207
spirale de Cornu 191
statistique
 de Bose-Einstein 220
 de Fermi-Dirac 220
Stirling 12
Stokes 55
subdivision 2
suites de Cauchy 91
support 132
surface 193
 paramétrée 52
système complet d'événements 221

T

tapis de Sierpinski 215
tests statistiques 276
tétraèdre 202

théorème
 de Cauchy 80
 de la valeur finale 168
 de Liouville 82
 de Parseval 168
tore 207
torsion 185
tractrice 190
transformation
 conforme 78
 de Fourier 153, 158
 discrète 169
 de Gabor 171
 de Hilbert 154
 de Laplace 144, 150
 de Wigner-Ville 172
 en ondelettes 172
 en τ 165
tribu des événements 222
trirégulier 184
tronc
 de cône circulaire 207
 de pyramide 206

V

valeur
 finale 147
 initiale 147
 principale de Cauchy 5
variable aléatoire 227
variance 229
vecteur aléatoire 234

046516-(I)-(2,5)-OSB 80°-PUB-API

STEDI, 1, boulevard Ney, 75018 Paris
Dépôt légal, Imprimeur, n° 7828

Dépôt légal : mars 2003

Imprimé en France