Progress in Mathematics
286

Ahmed Abbes

Éléments de Géométrie Rigide

Volume I. Construction et Étude Géométrique des Espaces Rigides

Birkhäuser

Birkhäuser

Progress in Mathematics
Volume 286

Series Editors

H. Bass
J. Oesterlé
A. Weinstein

Ahmed Abbes

Éléments de Géométrie Rigide

Volume I
Construction et Étude Géométrique des Espaces Rigides

Birkhäuser

Ahmed Abbes
Université de Rennes
IRMAR
Campus de Beaulieu
35042 Rennes cedex
France
ahmed.abbes@univ-rennes1.fr

ISBN 978-3-0348-0011-2 e-ISBN 978-3-0348-0012-9
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9

Mathematics Subject Classification (2010): 14G22

© Springer Basel AG 2010
This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. For any kind of use permission of the copyright owner must be obtained.

Cover design: deblik, Berlin

Printed on acid-free paper

Springer Basel AG is part of Springer Science+Business Media

www.birkhauser-science.com

A MES PARENTS

Je ne publie qu'un volume, Du côté de chez Swann*, d'un roman qui aura pour titre général* À la recherche du temps perdu*. J'aurais voulu publier le tout ensemble ; mais on n'édite plus d'ouvrage en plusieurs volumes. Je suis comme quelqu'un qui a une tapisserie trop grande pour les appartements actuels et qui a été obligé de la couper.*

De jeunes écrivains, avec qui je suis d'ailleurs en sympathie, préconisent au contraire une action brève avec peu de personnages. Ce n'est pas ma conception du roman. Comment vous dire cela ? Vous savez qu'il y a une géométrie plane et une géométrie dans l'espace. Eh bien, pour moi, le roman ce n'est pas seulement de la psychologie plane, mais de la psychologie dans le temps. Cette substance invisible du temps, j'ai tâché de l'isoler, mais pour cela il fallait que l'expérience pût durer. J'espère qu'à la fin de mon livre, tel petit fait social sans importance, tel mariage entre deux personnes qui dans le premier volume appartiennent à des mondes bien différents, indiquera que du temps a passé et prendra cette beauté de certains plombs patinés de Versailles, que le temps a engainés dans un fourreau d'émeraude.

Marcel Proust
Le Temps du 12 novembre 1913

Table des matières

Préface par Michel Raynaud

En 1961, John Tate pose les bases d'une géométrie analytique globale sur un corps valué non archimédien. Par opposition à la géométrie analytique "molle" (wobbly spaces), il va l'appeler *géométrie analytique rigide*.

Tate se place sur un corps valué K, corps des fractions d'un anneau de valuation complet R, de hauteur 1. Soient Γ le groupe de la valuation de K et k le corps résiduel de R. On note $K\langle \underline{T} \rangle$ l'algèbre de Banach noethérienne des séries entières convergentes sur un polydisque unité fermé. Les pièces élémentaires, qui vont constituer ces espaces rigides, sont les affinoïdes. Ils sont définis par leur algèbre A de fonctions holomorphes, algèbre de Banach quotient de l'algèbre $K\langle \underline{T} \rangle$ et par leur ensemble de points qui est le spectre maximal de A. La nouveauté consiste à introduire certains recouvrements ouverts *admissibles* de ces affinoïdes qui se chevauchent suffisamment pour que leurs espaces de fonctions holomorphes se recollent. Le prototype de tels recouvrements consiste à prendre une fonction holomorphe f sur un affinoïde X, un élément γ de Γ et à recouvrir X par les deux ouverts affinoïdes où f prend des valuations $\geq \gamma$ et $\leq \gamma$. Plus généralement, Tate étudie les recouvrements d'un affinoïde par des ouverts affinoïdes spéciaux et montre qu'ils sont acycliques. Il faut toute l'autorité de Serre et la complicité de l'IHÉS pour que le texte de Tate soit disponible dès 1962. Plus tard (en 1971), viendra une publication en bonne et due forme dans Inventiones [43].

La théorie de Tate est reprise et complétée par R. Kiehl en 1967 dans [34, 35]. Kiehl présente les recouvrements qui donnent lieu à recollement dans le cadre d'une topologie de Grothendieck (comme celui-ci l'avait d'ailleurs suggéré à Tate), obtient les énoncés de recollement et de nullité de la cohomologie pour les faisceaux cohérents sur les affinoïdes, introduit les espaces rigides propres et prouve les énoncés de finitude de la cohomologie afférents.

Les premières applications de la géométrie rigide mettent en jeu des revêtements analytiques de degré infini. C'est d'abord la réalisation de la courbe elliptique dite de Tate, comme quotient du groupe multiplicatif par un réseau, qui a été une profonde motivation pour le fondement de la théorie. Ce résultat est étendu par Mumford en genre supérieur : une courbe propre et lisse sur K, qui admet sur R une réduction semi-stable ayant une fibre spéciale à composantes irréductibles rationnelles, possède une uniformisation « à la Schottky » : elle est le quotient par un groupe libre de type fini, d'un ouvert rigide de la droite projective sur K.

A partir des années 70, la géométrie analytique rigide va s'égailler, de façon un peu anarchique, dans des directions variées que nous allons rapidement évoquer.

Géométrie rigide et géométrie formelle. A un R-schéma formel $\mathfrak{X}$ localement de présentation finie, on associe un K-espace rigide X, sa “fibre générique” : un ouvert affine formel de $\mathfrak{X}$ de R-algèbre $\mathscr{A}$ correspond à l'ouvert affinoïde de X, de K-algèbre $A = \mathscr{A} \otimes_R K$. Pour X, le schéma formel $\mathfrak{X}$ joue alors le rôle d'un modèle R-entier et on dispose d'une spécialisation de X vers la fibre résiduelle $\underline{\mathfrak{X}}$ de $\mathfrak{X}$. Réciproquement, si l'on part d'un K-espace rigide X, séparé de type fini, il est la fibre générique d'un R-schéma formel de présentation finie $\mathfrak{X}$. De plus, deux modèles entiers de X sont comparables par éclatement formel *permis*, c'est-à-dire de centre dans la fibre fermée. Vue ainsi, la géométrie rigide apparaît comme étroitement liée à la géométrie formelle et il existe souvent des modèles entiers naturels, comme dans la théorie de Mumford-Schottky. Ce point de vue est esquissé en 74 dans [41]. Un rôle clé est joué par une technique de platification par éclatement dont la version algébrique est présentée dans [42]. La version formelle paraît quelques années plus tard (Mehlmann [39], Bosch, Lütkebohmert [9]). Partant d'un morphisme $u\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ entre R-schémas formels de type fini, qui est plat sur les fibres génériques, on peut modifier les modèles entiers par éclatement permis de façon à obtenir un morphisme plat entre modèles formels $u'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$.

Le point de vue de Berkovich. Celui-ci considère pour tout n-uple de nombres réels > 0 $r = (r_1, \ldots, r_n)$, l'algèbre de Banach noethérienne $K\langle r^{-1}\underline{T}\rangle$ des séries convergentes dans le polydisque fermé $|T_i| \leq r_i$ et les affinoïdes ont encore pour algèbre de fonctions holomorphes les algèbres de Banach A, quotient de $K\langle r^{-1}\underline{T}\rangle$. Mais, au lieu de se limiter aux points à valeurs dans les extensions finies de K, Berkovich évalue les éléments de A dans des corps valués L, complets pour une valeur absolue réelle arbitraire qui prolonge celle de K. La topologie des réels retrouve sa place : l'espace des points d'un affinoïde, muni de la topologie produit, est compact et localement connexe par arcs. Durant les années 90, Berkovich développe la cohomologie étale des espaces rigides et celle des cycles évanescents sur les schémas formels, pour des coefficients ℓ-adiques, où ℓ est un nombre premier distinct de la caractéristique de k [2, 3, 4].

L'approche de Fujiwara. On part du point de vue des R-schémas formels, à éclatements permis près. Considérons un K-espace rigide de type fini, séparé X. Ses modèles entiers $\mathfrak{X}$ forment un système projectif filtrant de R-schémas formels qui, par passage à la limite, donnent un espace annelé quasi-compact. Cette construction, qui rappelle celle de la voûte étoilée (Riemann space) introduite en géométrie algébrique par Zariski, conduit à des “modèles entiers limites” lointains mais canoniques. La platitude, après éclatement permis, devient une platitude au niveau des modèles limites. Cette présentation est esquissée dans [20] et devrait être développée dans un ouvrage à venir.

Ainsi, depuis sa naissance, la géométrie rigide a oscillé entre le point de vue des K-séries convergentes qui l'apparente à la géométrie analytique complexe et celui des R-modèles entiers formels qui la relie à la géométrie algébrique sur k.

Le but de ce livre est de présenter les fondements d'une géométrie rigide-formelle relative. Le point de vue adopté est celui des schémas formels à éclatements permis près, mais est abordé dans une situation relative. Les tentatives faites jusqu'à présent (confer [8]) devaient distinguer deux cas : la base $\mathscr{S}$ était soit un schéma formel noethérien, soit un R-schéma formel localement de présentation finie. Trouver une approche uniforme qui englobe ces deux cas particuliers, requiert de dégager une classe d'anneaux topologiques, qui satisfont à certaines propriétés de cohérence et ont un bon comportement vis-à-vis de la platitude, par complétion.

Michel Raynaud
mars 2009

Avant-propos

Il n'est guère possible d'aborder la lecture de ce traité sans avoir une bonne connaissance des oeuvres suivantes d'A. Grothendieck :

a) Éléments de Géométrie Algébrique [28, 29, 30, 31] ;
b) Séminaires de Géométrie Algébrique 1 et 4 [26, 1].

Le lecteur prendra garde que nos références à EGA I [28] se rapportent à la seconde édition (Springer-Verlag, 1971).

Nous suivons d'une manière générale la terminologie introduite par Grothendieck dans les traités mentionnés ci-dessus. Nous nous en écartons à de rares exceptions près, bien mentionnées dans le texte, afin de mettre l'accent sur les concepts fondamentaux pour ce traité. Ainsi, nous renforçons la définition d'anneau *adique* et les notions géométriques qui en découlent.

Suivant les conventions de ([1] VI), nous utilisons l'adjectif *cohérent* comme synonyme de quasi-compact et quasi-séparé.

Introduction

1. La géométrie rigide est devenue, au fil des ans, un outil indispensable dans un grand nombre de questions en géométrie arithmétique. Depuis ses premières fondations, posées par J. Tate en 1961, la théorie s'est développée dans des directions variées. Il est hors de notre propos de présenter ici ces diverses approches. Ce traité se concentrera donc sur celle de M. Raynaud, esquissée en 1974 dans [41], que nous exposerons dans une situation relative et d'une façon systématique. Il y a plusieurs raisons à ce choix. D'une part, plusieurs applications importantes de la géométrie rigide passent par les schémas formels et utilisent, si ce n'est explicitement, du moins implicitement, l'approche de M. Raynaud. D'autre part, de par son essence même, cette approche est particulièrement bien adaptée aux questions de nature algébrique et semble tout à fait incontournable pour les problèmes de platitude.

2. Ce traité sera constitué de deux volumes. Ce premier volume est consacré à la construction des espaces rigides et à l'étude de leurs propriétés géométriques. On trouvera plus loin un résumé détaillé de son contenu. Plusieurs aspects de la théorie de Raynaud ont été développés par Mehlmann dans sa thèse [39] et dans une série d'articles par Lütkebohmert [38], Bosch et Lütkebohmert [8, 9] et Bosch, Lütkebohmert et Raynaud [10, 11]. Mais le besoin de consolider et compléter les fondations s'est fait sentir en particulier pour développer la théorie associée de la cohomologie étale, qui fera l'objet du second volume. Le plan prévu pour ce dernier est le suivant. Nous établirons d'abord des énoncés de comparaison du type GAGA entre la topologie algébrique-étale et la topologie rigide-étale, dont le plus important est du à Gabber et Fujiwara [19]. Celui-ci nous permettra de ramener certaines propriétés du topos rigide-étale à leurs analogues algébriques. Nous démontrerons ensuite les principales propriétés de la cohomologie rigide-étale suivant le plan général de SGA 4 [1] (faisceaux constructibles, théorème de changement de base propre, théorème de changement de base lisse, dimension cohomologique, cohomologie à support compact, dualité de Poincaré...). Nous donnerons enfin quelques applications à la cohomologie étale des schémas comme le théorème d'acyclicité locale des morphismes réguliers ([1] XIX 4.1).

3. Dans la théorie de Raynaud, les espaces rigides sont les "fibres génériques" des schémas formels. Avant de préciser cette notion, il nous faut fixer ses limites, c'est à dire les conditions de finitude requises sur les schémas formels. Initialement, la théorie présentait à ce niveau une dichotomie : on pouvait considérer soit des schémas formels de présentation finie sur un anneau de valuation complet de hauteur 1, soit des schémas formels noethériens. Si le premier cas permet de retrouver la théorie originelle de Tate, le second introduit de nouveaux espaces rigides et donne à cette approche l'un de ses points forts. Nous unifions ces deux cas en introduisant une nouvelle classe d'anneaux topologiques que nous qualifions d'*idylliques*. La première propriété importante de ces anneaux, à la base de beaucoup d'autres, est la propriété d'*Artin-Rees* (1.8.25). Nous la déduisons dans le cas non noethérien d'un résultat de Raynaud-Gruson (1.9.18). La seconde propriété importante est due à Gabber et n'était pas connue en général dans [8, 9, 39] : si A est un anneau idyllique et B est une A-algèbre de type fini, le séparé complété de B pour la topologie déduite de celle de A est B-plat (1.12.17). On dit qu'un schéma formel affine est *globalement idyllique* s'il est de la forme $\mathrm{Spf}(A)$, où A est un anneau idyllique, et qu'un schéma formel est *idyllique* s'il est adique[1] et si tout point admet un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique. Nous étendons à ces objets certains résultats de Grothendieck initialement établis pour les schémas formels noethériens [28, 30], entre autres ceux qui portent sur les faisceaux cohérents (2.7.2 et 2.8.5) et leurs cohomologies (théorème de finitude (2.11.5), comparaison de la théorie “algébrique” à la théorie “formelle” (2.12.2)...).

4. Pour définir la “fibre générique” d'un schéma formel idyllique, nous avons besoin de sortir du cadre des schémas formels (et même des espaces annelés). Le sens que nous donnons à cette notion est celui des catégories quotients. Il est naturel d'inverser dans la catégorie des schémas formels idylliques les *éclatements admissibles*, c'est à dire de centre un idéal ouvert de type fini (appelés aussi éclatements permis dans la préface). Raynaud [41] a montré que cette opération suffit pour retrouver la théorie de Tate au-dessus d'un anneau de valuation complet de hauteur 1. Nous l'utiliserons donc comme définition générale. Mais avant d'introduire la bonne catégorie quotient, nous étudions certains objets et propriétés *rigides* relatifs aux schémas formels idylliques, c'est à dire des objets et propriétés stables par éclatements admissibles. Nous donnons ici deux exemples :

(i) On appelle *ordre* 1*-valuatif* un anneau idyllique, local, intègre, de dimension 1 et dont la topologie n'est pas discrète. Un *point rigide* (resp. un *point rigide fermé*) d'un schéma formel idyllique est un sous-schéma (resp. un sous-schéma fermé) affine dont l'anneau est un ordre 1-valuatif. L'ensemble des points rigides d'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ est noté $\langle\mathfrak{X}\rangle$. Si A est un anneau idyllique et J est un idéal de définition de A, alors l'ensemble des points rigides fermés de $\mathrm{Spf}(A)$ est en bijection avec l'ensemble des points fermés de $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ (3.3.2). Tout morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ induit une application que l'on note encore

[1] On prendra garde que notre notion de schéma formel adique est plus forte que celle de [28].

$f\colon \langle\mathfrak{X}\rangle \to \langle\mathfrak{Y}\rangle$. Nous montrons que si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un éclatement admissible, alors l'application $f\colon \langle\mathfrak{X}\rangle \to \langle\mathfrak{Y}\rangle$ est bijective (3.3.8).

(ii) Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. On appelle *clôture rigide* de $\mathscr{F}$, et l'on note $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ (cf. [31] 5.9), le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = \varinjlim_{n} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}).$$

Cette définition ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathscr{J}$. Si $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un morphisme adique de schémas formels idylliques, on a un morphisme canonique fonctoriel

$$\beta_f(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{F})).$$

Nous montrons que si $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est un éclatement admissible de présentation finie et $\mathscr{F}$ est cohérent, alors $\beta_f(\mathscr{F})$ est un isomorphisme (3.5.5). C'est une version formelle du théorème d'*acyclicité de Tate* (cf. 3.5.7 et 4.7.9).

5. On désigne par $\mathbf{S}$ la catégorie dont les objets sont les schémas formels idylliques quasi-compacts et les morphismes sont les morphismes localement de présentation finie, et par $\mathbf{B}$ l'ensemble des éclatements admissibles de $\mathbf{S}$. On définit la catégorie des *espaces rigides cohérents*, baptisée catégorie de Raynaud et notée $\mathbf{R}$, comme la catégorie localisée de $\mathbf{S}$ par rapport à $\mathbf{B}$. On note $\mathbf{S} \to \mathbf{R}$, $\mathfrak{X} \mapsto \mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}$ le foncteur de localisation. Nous illustrons cette construction par des exemples classiques de disques et couronnes fermés relatifs (cf. 4.1.9 et 4.3.11). On appelle *point rigide* de $\mathbf{R}$ l'image canonique du spectre formel d'un ordre 1-valuatif. Cette notion correspond aux points de la théorie de Tate. Certaines propriétés des morphismes de $\mathbf{S}$ passent au quotient. Ainsi, on dit qu'un morphisme de $\mathbf{R}$ est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée, resp. fini, resp. propre) s'il admet un modèle formel vérifiant la propriété analogue dans $\mathbf{S}$.

6. La nouveauté par rapport à [8, 9] consiste à développer l'aspect topologique des espaces rigides cohérents. Pour ce faire, nous généralisons la notion de *recouvrement admissible* de Tate : une famille $(X_i \to X)_{i\in I}$ d'immersions ouvertes de $\mathbf{R}$ est un recouvrement admissible si elle admet une sous famille *finie* couvrante pour les points rigides, c'est à dire, s'il existe une partie finie J de I telle que tout point rigide P au-dessus de X majore un point rigide P_j au-dessus de l'un des X_j, $j \in J$ (*i.e.*, $\mathrm{Hom}_X(P_j, P) \neq \emptyset$). La topologie de $\mathbf{R}$ engendrée par les recouvrements admissibles est appelée topologie admissible. Elle donne naissance au *gros topos admissible*, noté $\widetilde{\mathbf{R}}$, que nous utiliserons pour définir les espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). Il est commode d'associer à tout espace rigide cohérent X la sous-catégorie $\mathbf{Ad}_{/X}$ de $\mathbf{R}_{/X}$ formée des immersions ouvertes $U \to X$. Nous la munirons de la topologie induite par la topologie admissible de $\mathbf{R}$, appelée encore topologie admissible de X. Le topos

X_{ad} des faisceaux d'ensembles sur $\mathbf{Ad}_{/X}$ est le *topos admissible* de X. Tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ induit par changement de base un morphisme de topos admissibles que l'on note encore $f\colon X_{\mathrm{ad}} \to Y_{\mathrm{ad}}$.

7. Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$. Notons $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{S}_{/\mathfrak{X}}$ formée des éclatements admissibles ; c'est une catégorie cofiltrante. Nous démontrons dans 4.5.12 que le topos $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ est canoniquement équivalent à la limite projective du topos fibré

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}_{\mathfrak{X}},$$

obtenu en associant à tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ le topos de Zariski $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et à tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ le foncteur $f^*\colon \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}''_{\mathrm{zar}}$ image inverse par le morphisme de topos déduit de f (cf. [1] VI 8.1.1). Ce théorème ramène l'étude du topos $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ à celle des topos bien connus $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$, $(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B}_{\mathfrak{X}})$. Grâce aux résultats généraux de ([1] VI §8), nous en déduisons quelques corollaires importants :

(a) Le topos $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ a mêmes points que la voûte étoilée de $\mathfrak{X}$ (ou l'espace de Zariski-Riemann), c'est à dire, la limite projective d'espaces topologiques

$$\varprojlim_{(\mathfrak{X}', \varphi) \in \mathbf{B}_{\mathfrak{X}}} |\mathfrak{X}'|,$$

où $|\mathfrak{X}'|$ désigne l'espace topologique sous-jacent au schéma formel $\mathfrak{X}'$ (4.5.15). Tout point rigide de $\mathfrak{X}$ définit un point de la voûte étoilée, mais cette application est loin d'être surjective en général.

(b) La catégorie $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$ est canoniquement équivalente à la catégorie des sections cartésiennes de la catégorie fibrée

$$\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}},$$

obtenue en associant à tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ le topos de Zariski $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et à tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ le foncteur $f_*\colon \mathfrak{X}''_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ image directe par le morphisme de topos déduit de f (4.5.22). La donnée d'une section de $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}$ équivaut à la donnée pour tout objet $(\mathfrak{X}', \varphi)$ de $\mathbf{B}_{\mathfrak{X}}$ d'un faisceau F_φ de $\mathfrak{X}'_{\mathrm{zar}}$ et pour tout morphisme $f\colon (\mathfrak{X}'', \psi) \to (\mathfrak{X}', \varphi)$ d'un morphisme $\gamma_f(F)\colon F_\varphi \to f_*(F_\psi)$, ces morphismes étant soumis à des relations de compatibilité. Une telle section est notée $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto F_\varphi\}$. Les sections cartésiennes sont caractérisées par la propriété que les morphismes $\gamma_f(F)$ sont des isomorphismes.

(c) Nous associons fonctoriellement à tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ une section $\{(\mathfrak{X}', \varphi) \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\varphi^*\mathscr{F})\}$ de $\mathfrak{F}'_{\mathfrak{X}} \to \mathbf{B}^{\circ}_{\mathfrak{X}}$. Le théorème d'acyclicité de Tate implique que cette section est cartésienne lorsque $\mathscr{F}$ est cohérent. Elle définit donc un faisceau $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ de $\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}$, appelé *fibre rigide* de $\mathscr{F}$. En fait, nous définirons le faisceau $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ (pas nécessairement cohérent) (cf. 4.7.4). Le faisceau $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})^{\mathrm{rig}}$ est un anneau ; on le note aussi $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$. La correspondance $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ est un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules dans celle des

$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-modules. Nous étudions les principales propriétés de ce foncteur sur la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Nous associons à tout morphisme adique $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ entre objets de $\mathbf{S}$ (en particulier, à tout morphisme de $\mathbf{S}$) un morphisme de topos annelés $\underline{f}\colon (\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}) \to (\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{\mathrm{rig}}})$ (cf. 4.7.20). Si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, le morphisme de topos sous-jacent à $\underline{f}$ est le morphisme f^{rig}.

(d) Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Pour tout $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}$ est cohérent, et on a un morphisme fonctoriel

$$\kappa^q\colon (\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F})^{\mathrm{rig}} \to \mathrm{R}^q \underline{f}_*(\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}).$$

Nous montrons que κ^0 est un isomorphisme ; si de plus, $\mathfrak{Y}$ admet localement un idéal de définition monogène, alors κ^q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$ (4.7.36). On notera que la condition supplémentaire pour $q \geq 1$ est suffisante pour les applications rigides puisqu'il est loisible d'éclater un idéal de définition cohérent.

8. Nous associons à tout objet X de $\mathbf{R}$ un anneau $\mathscr{O}_X$ de X_{ad} et à tout morphisme $f\colon X \to Y$ de $\mathbf{R}$ un homomorphisme $\theta_f\colon \mathscr{O}_Y \to f_*(\mathscr{O}_X)$ vérifiant des relations de compatibilité, tels que pour tout objet $\mathfrak{X}$ de $\mathbf{S}$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$ soit l'anneau défini dans la section précédente et pour tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathbf{S}$, $\theta_{f^{\mathrm{rig}}}$ soit l'homomorphisme déduit de $\underline{f}$. On note encore $f\colon (X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X) \to (Y_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_Y)$ le morphisme de topos annelés déduit de f et θ_f. Nous montrons les résultats suivants :

(i) Si X est un espace rigide cohérent, alors le topos $(X_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_X)$ est localement annelé (4.8.6). De plus, les fibres de $\mathscr{O}_X$ en les points rigides de X sont des anneaux locaux noethériens (4.8.10). Cette dernière propriété nous permet de définir la dimension d'un $\mathscr{O}_X$-module de type fini.

(ii) Soit $\mathfrak{X}$ un objet de $\mathbf{S}$. Pour qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}^{\mathrm{rig}}}$-module soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ (4.8.18). En particulier, pour tout espace rigide cohérent X, l'anneau $\mathscr{O}_X$ est cohérent.

(iii) Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme propre d'espaces rigides cohérents, F un $\mathscr{O}_X$-module cohérent. Alors pour tout entier $q \geq 0$, $\mathrm{R}^q f_*F$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent (4.8.22).

(iv) On appelle *affinoïde* un espace rigide cohérent qui admet un modèle formel affine globalement idyllique et ayant localement un idéal de définition monogène. Nous montrons que si X est un affinoïde et F est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, alors F est engendré par ses sections globales et $\mathrm{H}^q(X_{\mathrm{ad}}, F) = 0$ pour tout $q \geq 1$ (4.8.26).

9. Nous présentons des versions formelles idylliques de certains résultats de platitude de Raynaud-Gruson, initialement établis dans le cadre algébrique [42]. La plupart de ces énoncés sont parus dans [9] dans le cas général[2] et dans [39] pour

[2]On prendra garde cependant que le traitement de [9] est légèrement incomplet.

les schémas formels de présentation finie au-dessus d'un anneau de valuation de hauteur 1.

Nous étudions en premier lieu les modules cohérents plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $x \in \mathfrak{X}$, $s = f(x)$. Nous introduisons la notion de $\mathscr{S}$-dévissage de $\mathscr{F}$ en x, qui permet de raisonner par récurrence sur la dimension relative $\dim_x(\mathscr{F}/\mathscr{S})$. Quitte à remplacer $(\mathfrak{X}, x)$ et $(\mathscr{S}, s)$ par des voisinages étales élémentaires, on peut toujours construire de tels dévissages. Nous donnons un critère important pour que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x en termes de dévissages relatifs (5.3.6). Nous en déduisons de nombreux corollaires, entre autres le fait que l'ensemble des points x de $\mathfrak{X}$ tels que $\mathscr{F}$ soit $\mathscr{S}$-plat en x est ouvert (5.3.10).

Il y a deux façons d'introduire les modules plats sur les espaces rigides cohérents. La façon la plus directe mais la moins explicite est la définition générale de la platitude pour les topos annelés. Nous présentons aussi une autre notion plus *ad hoc*, celle des modules cohérents rig-plats sur les schémas formels idylliques. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de type fini entre schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{P}$ un point rigide de $\mathfrak{X}$. Supposons d'abord que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ soient formels affines globalement idylliques, que $\mathscr{P}$ soit fermé dans $\mathfrak{X}$ et que $f(\mathscr{P})$ soit fermé dans $\mathscr{S}$. Soit K un idéal de définition de B. On a $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, où M est un B-module cohérent, et $\mathscr{P}$ correspond à un point fermé $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(K)$. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* en $\mathscr{P}$ si $M_{\mathfrak{p}}$ est A-plat. Cette notion se localise bien (c'est pour cela que l'on suppose $f(\mathscr{P})$ fermé dans $\mathscr{S}$). Par suite, on peut la globaliser. On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-f-plat* s'il est rig-f-plat en tout point rigide de $\mathfrak{X}$. Nous montrons que si f est un morphisme de $\mathbf{S}$, pour que $\mathscr{F}$ soit rig-f-plat, il faut et il suffit que $\mathscr{F}^{\mathrm{rig}}$ soit f^{rig}-plat dans le sens des topos annelés (5.5.8).

Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme de $\mathbf{S}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-$f$-plat. Nous montrons qu'il existe un éclatement admissible de présentation finie $\varphi\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ tel que le transformé strict de $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{S}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}$ soit $\mathscr{S}'$-plat (5.8.1). Comme corollaire, nous en déduisons que la platitude pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents est stable par changement de base (5.8.9).

Nous étudions aussi les modules cohérents fidèlement plats sur les espaces rigides cohérents. Nous établissons des énoncés de descente fidèlement plate pour les modules cohérents sur les espaces rigides cohérents (5.11.11) et pour les morphismes d'espaces rigides cohérents (5.12.4), dus essentiellement à Gabber, Bosch et Görtz [6].

10. Nous développons les propriétés différentielles des espaces rigides cohérents. Nous introduisons d'abord les invariants normaux d'une immersion et les invariants différentiels fondamentaux d'un morphisme. Nous définissons ensuite les morphismes lisses, non ramifiés et étales par les critères infinitésimaux, et nous étudions leurs principales propriétés. Nous donnons enfin quelques critères de lissité, entre autres le *critère jacobien* (6.4.21).

11. La dernière partie de ce volume est consacrée aux espaces rigides quasi-séparés (mais pas nécessairement quasi-compacts). La notion de recouvrement admissible s'étend naturellement aux préfaisceaux sur $\mathbf{R}$. On appelle *espace rigide quasi-séparé* un faisceau du gros topos admissible $\widetilde{\mathbf{R}}$ qui admet un recouvrement admissible par des objets de $\mathbf{R}$. Nous donnons une caractérisation simple de ces espaces (7.1.12) qui permet de retrouver des exemples classiques, comme le disque unité ouvert relatif (7.1.20). Nous étudions ensuite leurs propriétés géométriques, puis leurs structures héritées des espaces rigides cohérents (site et topos admissibles, structure annelée...).

12. Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé, U l'ouvert $S - T$ de S. Supposons la paire (S, T) idyllique (*i.e.*, soit S est noethérien, soit S est localement de présentation fini au-dessus d'un anneau idyllique A et l'idéal de T dans S est l'image réciproque d'un idéal de définition de type fini de A). Notons $\mathscr{S} = S_{/T}$ le schéma formel complété de S le long de T, qui est alors un objet de $\mathbf{S}$, et posons $\Theta = \mathscr{S}^{\mathrm{rig}}$. Nous associons fonctoriellement à tout U-schéma de type fini V un préfaisceau $\mathfrak{A}(V)$ sur la catégorie $\mathbf{R}_{/\Theta}$. Nous montrons que si V est séparé de type fini sur U, alors $\mathfrak{A}(V)$ est un Θ-espace rigide quasi-séparé (7.4.11) ; on le note V^{an}. Le foncteur $V \mapsto V^{\mathrm{an}}$ ainsi défini est appelé *foncteur GAGA* relatif à (S, T). Nous l'étudions et montrons qu'il préserve certaines propriétés des morphismes (*e.g.*, être propre, fini, lisse, étale, une immersion, une immersion ouverte, une immersion fermée).

Soit V un U-schéma séparé de type fini. Le foncteur GAGA induit un morphisme de topos annelés

$$\Phi_V \colon (V^{\mathrm{an}}_{\mathrm{ad}}, \mathscr{O}_{V^{\mathrm{an}}}) \to (V_{\mathrm{zar}}, \mathscr{O}_V).$$

Nous montrons qu'il est plat (7.6.8). Si F est un $\mathscr{O}_V$-module, on pose $F^{\mathrm{an}} = \Phi_V^*(F)$ (l'image réciproque étant prise au sens des modules). Soient $f \colon V' \to V$ un morphisme séparé de type fini, F' un $\mathscr{O}_{V'}$-module. On a pour tout $q \geq 0$, un morphisme de changement de base (ou de comparaison)

$$\mathsf{c}^q \colon (\mathrm{R}^q f_* F')^{\mathrm{an}} \to \mathrm{R}^q f_*^{\mathrm{an}}(F'^{\mathrm{an}}).$$

Nous montrons que si f est propre et F' est cohérent, alors c^q est un isomorphisme pour tout $q \geq 0$ (7.6.11).

Remerciements. Voila des années que j'ai été séduit par l'approche de la géométrie rigide proposée par Michel Raynaud. Ce livre, qu'il me fait l'honneur de préfacer, en est l'illustration. Je l'ai conçu comme un témoignage de reconnaissance et d'admiration. Ce travail a germé durant ma longue collaboration avec Takeshi Saito sur la théorie de la ramification. Il n'aurait peut-être pas vu le jour sans son soutien et ses encouragements. Je suis heureux de lui exprimer ici ma reconnaissance et ma sincère amitié. L'influence de Siegfried Bosch, Ofer Gabber et Werner Lütkebohmert sur ce traité est évidente. Je leurs exprime mes vifs remerciements. Je remercie également Pierre Berthelot, Jean-François Dat, Michel Gros, Luc Illusie et Farid Mokrane pour leurs conseils et encouragements. Ce projet a bénéficié de l'hospitalité de l'Université de Tokyo durant de nombreux séjours entre 2004 et 2008 et de l'Université de Bielefeld ainsi que de l'Université de Padoue en 2006. Je remercie les auditeurs d'un cours que j'ai donné sur ce sujet à l'Université de Tokyo durant le printemps 2008 et dont les questions et remarques ont été précieuses pour mettre au point ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre contient des rappels et compléments d'algèbre commutative, de géométrie algébrique et de topologie. Nous introduisons les anneaux *idylliques* et nous établissons leurs principales propriétés. Certains compléments de géométrie algébrique ne serviront qu'au second volume. C'est le cas du théorème 1.13.21, dû à Gabber, qui donne un complément au résultat de platification par éclatement admissible de Raynaud-Gruson ([42] 5.2.2), et de la section 1.16 qui généralise au cadre idyllique des résultats d'algébrisation d'Elkik [17].

> *Tous les anneaux considérés dans ce traité possèdent un élément unité ; les homomorphismes d'anneaux sont toujours supposés transformer l'élément unité en l'élément unité ; un sous-anneau d'un anneau A est supposé contenir l'élément unité de A. Nous considérons surtout des anneaux commutatifs, et lorsque nous parlons d'anneau sans préciser, il est sous-entendu qu'il s'agit d'un anneau commutatif ; en particulier, il est sous-entendu, lorsque nous parlons d'un topos annelé (E, A) sans préciser, que A est commutatif.*

1.1 Des catégories et des topos

1.1.1. Pour une catégorie $\mathscr{C}$, nous notons $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ l'ensemble de ses objets, $\mathscr{C}^\circ$ la catégorie opposée, et pour $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$ (ou $\mathrm{Hom}(X, Y)$ lorsqu'il n'y a aucune ambiguïté) l'ensemble des morphismes de X dans Y.

Si $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont deux catégories, nous désignons par $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ l'ensemble des foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$, et par $\mathbf{Hom}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la catégorie des foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$.

Soient $\mathscr{E}$ une catégorie, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux catégories sur $\mathscr{E}$ ([26] VI 2). Nous notons $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ l'ensemble des foncteurs cartésiens ([26] VI 5.2). Nous désignons par $\mathbf{Hom}_{\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la catégorie des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}'$ et par $\mathbf{Hom}_{\mathrm{cart}/\mathscr{E}}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ la sous-catégorie pleine formée des foncteurs cartésiens.

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_1, © Springer Basel AG 2010

1.1.2. Soient $\mathbb{U}$ un univers, **Cat** la catégorie des catégories qui se trouvent dans $\mathbb{U}$, $\mathscr{C} \to \mathscr{E}$ un morphisme de **Cat** (*i.e.*, un foncteur). Si $\mathscr{C}$ est *clivée normalisée* sur $\mathscr{E}$ ([26] VI 7.1), elle donne naissance aux objets suivants :

($\mathtt{C}_1$) une application $S \mapsto \mathscr{C}_S$ de $\mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ dans **Cat** ;

($\mathtt{C}_2$) une application $f \mapsto f^*$ associant à toute flèche $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$ un foncteur $f^*\colon \mathscr{C}_S \to \mathscr{C}_T$;

($\mathtt{C}_3$) une application $(f,g) \mapsto c_{g,f}$, associant à tout couple de flèches composables (f,g) de $\mathscr{E}$, un homomorphisme fonctoriel $c_{g,f}\colon g^*f^* \to (fg)^*$.

Ces données satisfont aux conditions suivantes :

($\mathtt{C}_4$) pour tout objet S de $\mathscr{E}$, $f = \mathrm{id}_S$ implique $f^* = \mathrm{id}_{\mathscr{C}_S}$;

($\mathtt{C}_5$) pour tout morphisme $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$, on a $c_{\mathrm{id}_T,f} = \mathrm{id}_{f^*}$ et $c_{f,\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{f^*}$;

($\mathtt{C}_6$) pour tout triplet $h\colon V \to U$, $g\colon U \to T$, $f\colon T \to S$ de morphismes de $\mathscr{E}$, on a

$$c_{gh,f} \circ (c_{h,g} * f^*) = c_{h,fg} \circ (h^* * c_{g,f}). \tag{1.1.2.1}$$

Suivant ([26] VI 8), nous appelons *pseudo-foncteur* de $\mathscr{E}^\circ$ dans **Cat** un ensemble de données ($\mathtt{C}_1$), ($\mathtt{C}_2$) et ($\mathtt{C}_3$) satisfaisant aux conditions ($\mathtt{C}_4$), ($\mathtt{C}_5$) et ($\mathtt{C}_6$). On renvoie à loc. cit. pour la construction inverse qui associe à un pseudo-foncteur de $\mathscr{E}^\circ$ dans **Cat** une catégorie clivée normalisée sur $\mathscr{E}$. Les catégories fibrées sur $\mathscr{E}$ sont caractérisées par la propriété que les homomorphismes $c_{g,f}$ sont des isomorphismes.

Un $\mathscr{E}$-foncteur $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ de catégories clivées normalisées sur $\mathscr{E}$ donne naissance aux données suivantes ([26] VI 12) :

($\mathtt{F}_1$) un foncteur $F_S\colon \mathscr{C}_S \to \mathscr{D}_S$ pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$;

($\mathtt{F}_2$) un homomorphisme fonctoriel $\varphi_f\colon F_T f^*_{\mathscr{C}} \to f^*_{\mathscr{D}} F_S$ pour tout morphisme $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$.

Ces données satisfont aux conditions suivantes :

($\mathtt{F}_3$) $\varphi_{\mathrm{id}_S} = \mathrm{id}_{F_S}$ pour tout $S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$;

($\mathtt{F}_4$) pour deux morphismes $g\colon U \to T$ et $f\colon T \to S$ de $\mathscr{E}$, on a

$$\varphi_{fg} \circ (F_U * c^{\mathscr{C}}_{g,f}) = (c^{\mathscr{D}}_{g,f} * F_S) \circ (g^*_{\mathscr{D}} * \varphi_f) \circ (\varphi_g * f^*_{\mathscr{C}}). \tag{1.1.2.2}$$

On obtient ainsi une correspondance biunivoque entre l'ensemble des $\mathscr{E}$-foncteurs de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{D}$, et l'ensemble des données ($\mathtt{F}_1$) et ($\mathtt{F}_2$) satisfaisant aux conditions ($\mathtt{F}_3$) et ($\mathtt{F}_4$). Les foncteurs cartésiens sont caractérisés par la propriété que les homomorphismes φ_f sont des isomorphismes.

1.1.3. Soient $\mathbb{U}$ un univers, $\mathscr{C}$ une catégorie. On note $\mathbb{U}$-**Ens**, et l'on appelle catégorie des $\mathbb{U}$-ensembles, la catégorie des ensembles qui se trouvent dans $\mathbb{U}$. On désigne par $\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$, c'est à dire la catégorie des foncteurs contravariants sur $\mathscr{C}$ à valeurs dans $\mathbb{U}$-**Ens** ([1] I 1.2). Si $\mathscr{C}$ est munie d'une topologie ([1] II 1.1), on désigne par $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$ le topos des faisceaux de

$\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$ ([1] II 2.1). Lorsqu'aucune ambiguïté n'en résultera, on omettra $\mathbb{U}$ des notations $\mathbb{U}$-**Ens**, $\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$ et $\widetilde{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$.

On dit que $\mathscr{C}$ est une $\mathbb{U}$-catégorie si pour tout couple d'objets (X,Y) de $\mathscr{C}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}(X,Y)$ est isomorphe à un élément de $\mathbb{U}$ ([1] I 1.1).

Supposons que $\mathscr{C}$ soit une $\mathbb{U}$-catégorie. On a un foncteur canonique ([26, I 1.3]) :

$$\mathrm{h}_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{C} \to \widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}. \tag{1.1.3.1}$$

Rappelons que pour un objet X de $\mathscr{C}$, le préfaisceau $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}(X)$ est défini comme suit. Soit $Y \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

(a) Si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)$ est un élément de $\mathbb{U}$, alors $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}(X)(Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)$.
(b) Supposons que $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)$ ne soit pas un élément de $\mathbb{U}$ et soit $\mathrm{R}(Z,X,Y)$ la relation : *l'ensemble Z est but d'un isomorphisme* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X) \xrightarrow{\sim} Z$. On pose alors $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}(X)(Y) = \tau_Z \mathrm{R}(Z,X,Y)$, où τ est le symbole de Bourbaki-Hilbert.

Le foncteur $\mathrm{h}_{\mathscr{C}}$ est pleinement fidèle ([1] I 1.4).

Pour F un objet de $\widehat{\mathscr{C}}_{\mathbb{U}}$, on note $\mathscr{C}_{/F}$ la catégorie suivante ([1] I 3.4.0). Les objets de $\mathscr{C}_{/F}$ sont les couples formés d'un objet X de $\mathscr{C}$ et d'un morphisme u de X dans F. Si (X,u) et (Y,v) sont deux objets, un morphisme de (X,u) vers (Y,v) est un morphisme $g\colon X \to Y$ tel que $u = v \circ g$.

1.1.4. Rappelons que la donnée d'une topologie sur une catégorie où les produits fibrés sont représentables est complètement déterminée par la donnée de ses familles couvrantes de morphismes ([1] II 1.3.1).

1.1.5. Soient $\mathbb{U}$ un univers, $\mathscr{C}$ un $\mathbb{U}$-site ([1] II 3.0.2), $\widetilde{\mathscr{C}}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$, X un objet de $\widehat{\mathscr{C}}$. On munit $\mathscr{C}_{/X}$ de la topologie induite par la topologie de $\mathscr{C}$ au moyen du foncteur "source" $j_X\colon \mathscr{C}_{/X} \to \mathscr{C}$ ([1] III 3.1). D'après ([1] III 5.2), j_X est un foncteur continu et cocontinu. Il définit donc une suite de trois foncteurs adjoints :

$$j_{X!}\colon (\mathscr{C}_{/X})^{\sim} \to \widetilde{\mathscr{C}}, \quad j_X^*\colon \widetilde{\mathscr{C}} \to (\mathscr{C}_{/X})^{\sim}, \quad j_{X*}\colon (\mathscr{C}_{/X})^{\sim} \to \widetilde{\mathscr{C}}, \tag{1.1.5.1}$$

dans le sens que pour deux foncteurs consécutifs de la suite, celui de droite est adjoint à droite de l'autre. Le foncteur $j_{X!}$ se factorise par la catégorie $\widetilde{\mathscr{C}}_{/X^{\mathrm{a}}}$, où X^{a} est le faisceau associé à X, et le foncteur induit $(\mathscr{C}_{/X})^{\sim} \to \widetilde{\mathscr{C}}_{/X^{\mathrm{a}}}$ est une équivalence de catégories ([1] III 5.4). Le couple de foncteurs (j_X^*, j_{X*}) définit un morphisme de topos $j_X\colon \widetilde{\mathscr{C}}_{/X^{\mathrm{a}}} \to \widetilde{\mathscr{C}}$.

1.1.6. Soient $\mathscr{E}$ un topos, X un objet de $\mathscr{E}$. D'après 1.1.5, $\mathscr{E}_{/X}$ est un topos et on a un morphisme canonique

$$j_X\colon \mathscr{E}_{/X} \to \mathscr{E}, \tag{1.1.6.1}$$

dit *morphisme de localisation* ([1] IV 5.2). Pour tout objet F de $\mathscr{E}$, on pose $F|X = j_X^* F$.

Soient $u\colon \mathscr{E}' \to \mathscr{E}$ un morphisme de topos, $\psi\colon X' \to u^*(X)$ un morphisme de $\mathscr{E}'$. On peut alors considérer le morphisme de topos

$$u_\psi\colon \mathscr{E}'_{/X'} \quad \to \quad \mathscr{E}_{/X} \tag{1.1.6.2}$$

composé de

$$\mathscr{E}'_{/X'} \longrightarrow \mathscr{E}'_{/u^*(X)} \xrightarrow{u_{/X}} \mathscr{E}_{/X} \ ,$$

où la première flèche est le morphisme de localisation associé à ψ ([1] IV 5.5) et la seconde flèche est le morphisme déduit de u par ([1] IV 5.10). Il résulte aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{E}'_{/X'} \arrow[r, "u_\psi"] \arrow[d, "j_{X'}"'] & \mathscr{E}_{/X} \arrow[d, "j_X"] \\ \mathscr{E}' \arrow[r, "u"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

est commutatif à isomorphisme canonique près.

1.1.7. Soit $\mathbb{U}$ un univers. Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont deux $\mathbb{U}$-topos ([1] IV 1.1), nous désignons par $\mathbf{Homtop}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ la catégorie des morphismes de topos de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$. On a alors un foncteur pleinement fidèle

$$\mathbf{Homtop}(\mathscr{E}, \mathscr{E}') \to \mathbf{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}'), \quad u \mapsto u_*.$$

Si $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ sont deux $\mathbb{U}$-topos fibrés sur une catégorie $\mathscr{C}$ ([1] VI 7.1), nous désignons par $\mathbf{Homtop}_{\mathscr{C}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ la catégorie des morphismes de topos fibrés et par $\mathbf{Homtop}_{\mathrm{cart}/\mathscr{C}}(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$ la sous-catégorie pleine formée des morphismes m tels que m_* soit un foncteur cartésien ([1] VI 7.1.7).

1.1.8. Soient $\mathbb{U}$ un univers, $\mathscr{C}$ un $\mathbb{U}$-site, $\mathscr{E}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$. On sait que la catégorie $\mathbb{U}$-**Ens** des $\mathbb{U}$-ensembles est un $\mathbb{U}$-topos ([1] IV 2.2). On désigne par $\mathbf{Pt}(\mathscr{E}) = \mathbf{Homtop}(\mathbb{U}\text{-}\mathbf{Ens}, \mathscr{E})$ la catégorie des points de $\mathscr{E}$ ([1] IV 6.1).

Soient p un point de $\mathscr{E}$, $\varphi_p\colon \mathscr{E} \to \mathbb{U}\text{-}\mathbf{Ens}$ le foncteur fibre correspondant ([1] IV 6.2). On rappelle qu'un voisinage du point p du topos $\mathscr{E}$ est un couple (X, ξ), où $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{E})$ et $\xi \in X_p$ ([1] IV 6.8). D'après ([1] IV 6.7.2), on peut aussi interpréter ξ comme un relèvement de p en un point du topos $\mathscr{E}_{/X}$. Ces voisinages forment une catégorie cofiltrante que l'on note $\mathbf{V}(p)$ ([1] IV 6.8). On a un isomorphisme canonique fonctoriel ([1] IV 6.8.1)

$$\varphi_p(F) = F_p \simeq \varinjlim_{\mathbf{V}(p)^\circ} F(X). \tag{1.1.8.1}$$

On désigne encore, par abus de notations, par φ_p le composé $\varphi_p \circ \varepsilon$, où $\varepsilon\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ est le foncteur canonique ([1] II 4.4.0). On rappelle qu'un voisinage du point p dans le site $\mathscr{C}$ est un couple (X, ξ), où $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et $\xi \in \varphi_p(X)$. Ces voisinages forment encore une catégorie cofiltrante que l'on note $\mathbf{V}_{\mathscr{C}}(p)$ ([1] IV 6.8.2). On a un isomorphisme canonique fonctoriel ([1] IV 6.8.3)

$$F_p \simeq \varinjlim_{\mathbf{V}_{\mathscr{C}}(p)^\circ} F(X). \qquad (1.1.8.2)$$

1.1.9. Soit $(\mathscr{E}, A)$ un topos annelé. Nous notons $\mathbf{Mod}(A)$ la catégorie des A-modules, $\mathbf{D}(A)$ sa catégorie dérivée, $\mathbf{D}^-(A)$, $\mathbf{D}^+(A)$ et $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(A)$ les sous-catégories pleines de $\mathbf{D}(A)$ formées des complexes à cohomologie bornée supérieurement, inférieurement et des deux côtés, respectivement.

1.1.10. Soit $(\mathscr{E}, A)$ un topos annelé, M un A-module. On rappelle que M est dit *plat* si le foncteur $N \mapsto N \otimes_A M$ est exact sur la catégorie des A-modules. On a alors les propositions suivantes ([1] V 1.6) :

1.1.10.1. Lorsque M est plat, pour tout point p de $\mathscr{E}$, le A_p-module M_p est plat.

1.1.10.2. Soit $(p_i)_{i \in I}$ une famille conservative de points de $\mathscr{E}$ telle que pour tout $i \in I$, M_{p_i} soit un A_{p_i}-module plat. Alors M est plat.

1.1.11. Étant donné un morphisme $u\colon (\mathscr{E}', A') \to (\mathscr{E}, A)$ de topos annelés, nous utilisons pour les modules la notation u^{-1} pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation u^* pour l'image inverse aux sens des modules.

1.1.12. Soient $u\colon (\mathscr{E}', A') \to (\mathscr{E}, A)$ un morphisme de topos annelés, M un A'-module.

1.1.12.1. On dit que M est *u-plat en un point p* de $\mathscr{E}'$ si M_p est un $(A_{u \circ p})$-module plat.

1.1.12.2. On dit que M est *u-plat* si le $u^{-1}(A)$-module M est plat. Il revient au même de demander que le foncteur $N \mapsto u^*(N) \otimes_{A'} M$ de la catégorie des A-modules dans la catégorie des A'-modules soit exact ([1] V 1.7).

1.1.12.3. On dit que u est *plat en un point p* de $\mathscr{E}'$ (resp. *plat*) si A' est u-plat en p (resp. u-plat).

1.1.12.4. Si M est u-plat, il est u-plat en tout point de $\mathscr{E}'$. Si $\mathscr{E}'$ a suffisamment de points, pour que M soit u-plat, il faut et il suffit qu'il soit u-plat en tout point de $\mathscr{E}'$.

1.1.12.5. Soient X un objet de $\mathscr{E}$, $\psi : X' \to u^*(X)$ un morphisme de $\mathscr{E}'$. D'après 1.1.6, on a un diagramme commutatif à isomorphisme canonique près de morphismes de topos annelés

$$\begin{tikzcd} (\mathscr{E}'_{/X'}, A'|X') \arrow[r, "u_\psi"] \arrow[d, "j_{X'}"'] & (\mathscr{E}_{/X}, A|X) \arrow[d, "j_X"] \\ (\mathscr{E}', A') \arrow[r, "u"] & (\mathscr{E}, A) \end{tikzcd}$$

où $u_\psi\colon \mathscr{E}'_{/X'} \to \mathscr{E}_{/X}$ est le morphisme de topos associé à (u,ψ) (1.1.6.2). Si M est u-plat, alors $M|X'$ est u_ψ-plat ([1] V 1.6.1).

1.2 Scholie sur le morphisme de changement de base

1.2.1. Si $f\colon (E,A) \to (F,B)$ est un morphisme de topos annelés, nous notons $\theta_f\colon B \to f_*(A)$ l'homomorphisme canonique. Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation f^{-1} pour désigner l'image réciproque au sens des faisceaux abéliens en réservant la notation f^* pour l'image réciproque au sens des modules. Nous désignons par $\mathrm{R}^q f_*$, $q \in \mathbb{N}$, les foncteurs dérivés du foncteur $f_*\colon \mathbf{Mod}(A) \to \mathbf{Mod}(B)$ pour les modules.

1.2.2. Soit

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"] \\ F' \arrow[r, "\beta"] & F \end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos, commutatif à isomorphisme canonique près ; autrement dit, on a un isomorphisme

$$f_*\alpha_* \xrightarrow{\sim} \beta_* f'_*. \tag{1.2.2.1}$$

On définit un morphisme de foncteurs

$$\beta^* f_* \to f'_*\alpha^*, \tag{1.2.2.2}$$

appelé *morphisme de changement de base*, de la manière suivante : se donner un tel morphisme équivaut à se donner un morphisme

$$f_* \to \beta_* f'_* \alpha^*.$$

On prend pour ce morphisme le morphisme composé

$$f_* \to f_*\alpha_*\alpha^* \xrightarrow{\sim} \beta_* f'_*\alpha^*,$$

où le premier morphisme est induit par le morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to \alpha_*\alpha^*$ et le second par (1.2.2.1).

En restreignant (1.2.2.2) aux faisceaux abéliens (resp. de groupes), on déduit un morphisme pour tout $q \geq 0$ (resp. pour $q = 0, 1$)

$$\beta^*(\mathrm{R}^q f_*) \to (\mathrm{R}^q f'_*)\alpha^*. \tag{1.2.2.3}$$

En effet, cela revient à donner un morphisme

$$\mathrm{R}^q f_* \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*)\alpha^*,$$

et on prend le morphisme composé

$$\mathrm{R}^q f_* \to (\mathrm{R}^q f_*)\alpha_*\alpha^* \to \mathrm{R}^q(f\alpha)_*\alpha^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q(\beta f')_*\alpha^* \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*)\alpha^*,$$

où le premier morphisme provient du morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to \alpha_*\alpha^*$, le deuxième et le dernier de la suite spectrale de Cartan-Leray ([1] V 5.4) et le troisième de (1.2.2.1).

1.2.3. Soit

$$\begin{tikzcd} (E', A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E, A) \arrow[d, "f"] \\ (F', B') \arrow[r, "\beta"] & (F, B) \end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos annelés, commutatif à isomorphisme canonique près ; autrement dit, on a un isomorphisme

$$f_*\alpha_* \xrightarrow{\sim} \beta_* f'_* \tag{1.2.3.1}$$

et le diagramme

$$\begin{tikzcd} f_*A & B \arrow[l, "\theta_f"'] \arrow[r, "\theta_\beta"] & \beta_*B' \arrow[d, "\beta_*(\theta_{f'})"] \\ f_*(\alpha_*A') \arrow[u, leftarrow, "f_*(\theta_\alpha)"'] \arrow[rr, "(1.2.3.1)", "\sim"'] & & \beta_*(f'_*A') \end{tikzcd} \tag{1.2.3.2}$$

est commutatif. Si M est un A-module, on a, pour tout $q \geq 0$, un morphisme B'-linéaire canonique

$$\beta^*(\mathrm{R}^q f_* M) \to \mathrm{R}^q f'_*(\alpha^* M), \tag{1.2.3.3}$$

appelé *morphisme de changement de base.* En effet, cela revient à donner un morphisme

$$\mathrm{R}^q f_* M \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*(\alpha^* M)),$$

et on prend le morphisme composé

$$\mathrm{R}^q f_* M \to \mathrm{R}^q f_*(\alpha_*\alpha^* M) \to \mathrm{R}^q(f\alpha)_*(\alpha^* M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}^q(\beta f')_*(\alpha^* M) \to \beta_*(\mathrm{R}^q f'_*(\alpha^* M)),$$

où le premier morphisme provient du morphisme d'adjonction $\mathrm{id} \to \alpha_*\alpha^*$, le deuxième et le dernier de la suite spectrale de Cartan-Leray ([1] V 5.4) et le troisième de (1.2.3.1).

Proposition 1.2.4 ([1] XII 4.4).

(i) *Soit*

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f''"'] & E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"'] \\ F'' \arrow[r, "\beta'"] & F' \arrow[r, "\beta"] & F \end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\beta\beta')^* f_* \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & f''_*(\alpha\alpha')^* \arrow[d, equal] \\
\beta'^*\beta^* f_* \arrow[r] & \beta'^* f'_*\alpha^* \arrow[r] & f''_*\alpha'^*\alpha^*
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux proviennent des morphismes de changement de base est commutatif. De plus, le diagramme obtenu en remplaçant f_*, f'_*, f''_* *par* $\mathrm{R}^1 f_*, \mathrm{R}^1 f'_*, \mathrm{R}^1 f''_*$ *pour les faisceaux de groupes est aussi commutatif.*

(ii) *Soit*

$$\begin{tikzcd}
(E'', A'') \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f''"'] & (E', A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E, A) \arrow[d, "f"'] \\
(F'', B'') \arrow[r, "\beta'"] & (F', B') \arrow[r, "\beta"] & (F, B)
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos annelés tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors pour tout A*-module* M *et tout entier* $q \geq 0$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(\beta\beta')^*(\mathrm{R}^q f_* M) \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & \mathrm{R}^q f''_*((\alpha\alpha')^* M) \arrow[d, equal] \\
\beta'^*(\beta^*(\mathrm{R}^q f_* M)) \arrow[r] & \beta'^*(\mathrm{R}^q f'_*(\alpha^* M)) \arrow[r] & \mathrm{R}^q f''_*(\alpha'^*(\alpha^* M))
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux proviennent des morphismes de changement de base est commutatif.

(iii) *Soit*

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"] \\
F' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g'"'] & F \arrow[d, "g"] \\
G' \arrow[r, "\gamma"] & G
\end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\gamma^*(gf)_* \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & (g'f')_*\alpha^* \arrow[d, equal] \\
\gamma^* g_* f_* \arrow[r] & g'_*\beta^* f_* \arrow[r] & g'_* f'_*\alpha^*
\end{tikzcd}$$

où les morphismes horizontaux proviennent des morphismes de changement de base est commutatif.

(iv) *Sous les hypothèses de* (iii), *pour tout faisceau de groupes B, on a un morphisme de suites spectrales*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \gamma^*(\mathrm{R}^1 g_*(f_*B)) \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^*(\mathrm{R}^1(gf)_*B) \arrow[r] \arrow[d] & \gamma^*(g_*(\mathrm{R}^1 f_*B)) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{R}^1 g'_*(f'_*(\alpha^*B)) \arrow[r] & \mathrm{R}^1(g'f')_*(\alpha^*B) \arrow[r] & g'_*(\mathrm{R}^1 f'_*(\alpha^*B)) \end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux proviennent des morphismes de changement de base.

(v) *Soit*

$$\begin{tikzcd} (E',A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E,A) \arrow[d, "f"] \\ (F',B') \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g'"'] & (F,B) \arrow[d, "g"] \\ (G',C') \arrow[r, "\gamma"] & (G,C) \end{tikzcd}$$

un diagramme de morphismes de topos annelés tel que chaque carré soit commutatif à isomorphisme canonique près. Alors pour tout A-modules M, le morphisme de changement de base pour gf est induit par un morphisme de suites spectrales

$$\begin{tikzcd} E_2^{p,q} = \gamma^*(\mathrm{R}^p f_*(\mathrm{R}^q g_* M)) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & \gamma^*(\mathrm{R}^{p+q}(gf)_*M) \arrow[d] \\ F_2^{p,q} = \mathrm{R}^p f'_*(\mathrm{R}^q g'_*(\alpha^*M)) \arrow[r, Rightarrow] & \mathrm{R}^{p+q}(g'f')_*(\alpha^*M) \end{tikzcd}$$

qui, pour les termes initiaux, est induit par les morphismes de changement de base pour f et g.

Nous laissons la démonstration au lecteur.

Proposition 1.2.5. *Soient*

$$\begin{tikzcd} (E',A') \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"'] & (E,A) \arrow[d, "f"] \\ (F',B') \arrow[r, "\beta"] & (F,B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (E',A') \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "f'"'] & (E,A) \arrow[d, "f"] \\ (F',B') \arrow[r, "\beta'"] & (F,B) \end{tikzcd}$$

deux diagrammes de morphismes de topos annelés, commutatifs à isomorphismes canoniques près, et soient $i\colon \alpha_* \to \alpha'_*$, $j\colon \beta_* \to \beta'_*$ *deux morphismes de foncteurs tels que les diagrammes*

$$\begin{tikzcd} f_*\alpha_* \arrow[r, "f_**i"] \arrow[d, equal] & f_*\alpha'_* \arrow[d, equal] \\ \beta_*f'_* \arrow[r, "j*f'_*"] & \beta'_*f'_* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta_\alpha"] \arrow[dr, "\theta_{\alpha'}"'] & \alpha_*A' \arrow[d, "i(A')"] \\ & \alpha'_*A' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\theta_\beta"] \arrow[dr, "\theta_{\beta'}"'] & \beta_*B' \arrow[d, "j(B')"] \\ & \beta'_*B' \end{tikzcd}$$

soient commutatifs. Notons $i^\sharp\colon \alpha'^* \to \alpha^*$ *et* $j^\sharp\colon \beta'^* \to \beta^*$ *les morphismes adjoints de* i *et* j *respectivement. Alors :*

(i) *Pour tout* A*-module* M*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \beta'^*(f_*M) \arrow[r] \arrow[d, "j^\sharp*f_*"'] & f'_*(\alpha'^*M) \arrow[d, "f'_**i^\sharp"] \\ \beta^*(f_*M) \arrow[r] & f'_*(\alpha^*M) \end{tikzcd} \tag{1.2.5.1}$$

où les morphismes horizontaux sont les morphismes de changement de base est commutatif.

(ii) *Supposons* α, α', β *et* β' *plats. Alors pour tout* A*-module* M *et tout* $q \geq 0$*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \beta'^*(\mathrm{R}^qf_*M) \arrow[r] \arrow[d, "j^\sharp*(\mathrm{R}^qf_*)"'] & \mathrm{R}^qf'_*(\alpha'^*M) \arrow[d, "(\mathrm{R}^qf'_*)*i^\sharp"] \\ \beta^*(\mathrm{R}^qf_*M) \arrow[r] & \mathrm{R}^qf'_*(\alpha^*M) \end{tikzcd} \tag{1.2.5.2}$$

où les morphismes horizontaux sont les morphismes de changement de base est commutatif.

(i) D'après ([1] XVII 2.1.3), le morphisme de changement de base $\beta^*f_* \to f'_*\alpha^*$ est l'adjoint du morphisme

$$f'^*\beta^*f_* = \alpha^*f^*f_* \to \alpha^*$$

déduit du morphisme canonique $f^*f_* \to \mathrm{id}$. D'autre part, les hypothèses entraînent par adjonction que le diagramme

$$\begin{tikzcd} f'^*\beta'^*f_* \arrow[r, equal] \arrow[d, "f'^**j^\sharp*f_*"'] & \alpha'^*f^*f_* \arrow[r] \arrow[d, "i^\sharp*f^**f_*"'] & \alpha'^* \arrow[d, "i^\sharp"'] \\ f'^*\beta^*f_* \arrow[r, equal] & \alpha^*f^*f_* \arrow[r] & \alpha^* \end{tikzcd} \tag{1.2.5.3}$$

est commutatif. Il en est donc de même du diagramme (1.2.5.1).

(ii) Si C est un anneau d'un topos T, on note $\mathbf{K}^+(C)$ la catégorie des complexes de C-modules bornés inférieurement, à homotopie près, et $\mathbf{D}^+(C)$ la catégorie dérivée des complexes de C-modules à cohomologie bornée inférieurement. Comme α est plat, il définit un foncteur dérivé $\mathrm{L}\alpha^*\colon \mathbf{D}^+(A) \to \mathbf{D}^+(A')$ et de même pour α', β et β'. Notons $\mathrm{L}i^\sharp\colon \mathrm{L}\alpha'^* \to \mathrm{L}\alpha^*$ et $\mathrm{L}j^\sharp\colon \mathrm{L}\beta'^* \to \mathrm{L}\beta^*$ les morphismes déduits de $i^\sharp$ et $j^\sharp$.

D'après ([1] XVII 4.1.5, (i)), pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^+(A))$, on a un morphisme de changement de base

$$\mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X) \quad \to \quad \mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X), \tag{1.2.5.4}$$

défini par ([1] XVII 2.1.3). De plus, comme les images directes $\mathrm{R}\alpha_*(\mathrm{L}\alpha^*X)$ et $\mathrm{R}\beta_*(\mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X))$ existent au sens strict ([1] XVII 4.1.3), celui ci est l'adjoint du morphisme

$$\mathrm{R}f_*X \to \mathrm{R}f_*(\mathrm{R}\alpha_*(\mathrm{L}\alpha^*X)) = \mathrm{R}\beta_*(\mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X))$$

déduit du morphisme canonique $X \to \mathrm{R}\alpha_*(\mathrm{L}\alpha^*X)$. Mais en général, comme les images réciproques $\mathrm{L}f^*(\mathrm{R}f_*X)$ et $\mathrm{L}f'^*(\mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X))$ n'existent pas, le morphisme (1.2.5.4) n'a pas de description analogue à celle utilisée dans la preuve de (i). On notera que comme α et β sont plats, pour tout A-module M, le morphisme (1.2.5.4) pour le complexe $M[0]$, formé de M concentré en degré 0, redonne sur les groupes de cohomologie les morphismes de changement de base définis dans (1.2.3.3).

Soient X un objet de $\mathbf{D}^+(A)$, $\widetilde{X}$ l'objet de $\mathrm{K}^+(A)$ au dessus de X. On désigne par $\widetilde{X}/\mathrm{Qis}^+$ la catégorie des quasi-isomorphismes de source $\widetilde{X}$ et de but dans $\mathbf{K}^+(A)$. On a un isomorphisme fonctoriel ([15] C.D. 2.1 page 40)

$$\mathrm{R}f_*(X) \simeq \varinjlim_{\widetilde{X}/\mathrm{Qis}^+} f_*(\cdot).$$

Comme α et β sont plats et que $\mathrm{L}\beta^*$ commute aux limites inductives (car il admet un adjoint à droite), le morphisme de changement de base $\beta^*f_* \to f'_*\alpha^*$ (1.2.3.1) induit par passage à la limite inductive un morphisme

$$\mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X) \to \mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X). \tag{1.2.5.5}$$

Il est facile de voir qu'avec les conventions de ([1] XVII 2.1), le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{L}\alpha^*X \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & \mathrm{R}f_*X \\
\mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X) \arrow[rr, "(1.2.5.5)^\circ"] & & \mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

est commutatif. Par suite, les morphismes (1.2.5.4) et (1.2.5.5) sont égaux ([1] XVII 2.1.3).

Le diagramme (1.2.5.1) induit par passage à la limite inductive un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{L}\beta'^*(\mathrm{R}f_*X) & \longrightarrow & \mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha'^*X) \\ {\scriptstyle \mathrm{L}j^\sharp*(\mathrm{R}f_*)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{R}f'_*)*\mathrm{L}i^\sharp} \\ \mathrm{L}\beta^*(\mathrm{R}f_*X) & \longrightarrow & \mathrm{R}f'_*(\mathrm{L}\alpha^*X) \end{array}$$

Par suite, le diagramme (1.2.5.2) est aussi commutatif.

1.3 Rappels sur les modules cohérents

1.3.1. Dans cette section, $\mathbb{U}$ désigne un univers, $\mathscr{C}$ un $\mathbb{U}$-site ayant un objet final $\mathrm{e}_{\mathscr{C}}$, $\mathscr{E}$ le topos des faisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathscr{C}$ et A un anneau commutatif de $\mathscr{E}$. Pour tout objet X de $\widehat{\mathscr{C}}$ (1.1.3), si l'on note X^{a} le faisceau associé à X, le topos $\mathscr{E}_{/X^{\mathrm{a}}}$ sera annelé par l'anneau $A|X$ (1.1.5 et [1] IV 11.2.1).

1.3.2. Soit F un A-module. On dit que F est *de $\mathscr{C}$-type fini* si la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets X tels qu'il existe un épimorphisme $E \to (F|X)$ avec E un $(A|X)$-module libre de type fini, est un raffinement de $\mathrm{e}_{\mathscr{C}}$. On dit que F est *$\mathscr{C}$-cohérent* si les conditions suivantes sont vérifiées ([5] I 3.1) :

(a) F est de $\mathscr{C}$-type fini ;
(b) pour tout objet X de $\mathscr{C}$ et tout morphisme $u\colon E \to (F|X)$ où E est un $(A|X)$-module libre de type fini, $\ker(u)$ est de $(\mathscr{C}_{/X})$-type fini.

On dit que A est un *anneau $\mathscr{C}$-cohérent* s'il est $\mathscr{C}$-cohérent en tant que A-module. On dit qu'une A-algèbre est *$\mathscr{C}$-cohérente* si le A-module sous-jacent est cohérent.

On désigne par $\mathbf{Mod}_{\mathscr{C}\text{-coh}}(A)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Mod}(A)$ (1.1.9) formée des A-modules $\mathscr{C}$-cohérents.

Remarques 1.3.3.

(i) Si $\mathscr{C}$ est le site ponctuel et A est un anneau, un A-module est de $\mathscr{C}$-type fini si et seulement s'il est de type fini au sens ordinaire.
(ii) Nous laisserons tomber le site dans les notations $\mathscr{C}$-type fini, $\mathscr{C}$-cohérent, $\mathbf{Mod}_{\mathscr{C}\text{-coh}}\dots$ lorsque cela n'entraîne aucune confusion. Nous ferons cet abus en particulier lorsque $(\mathscr{C}, A)$ est associé à un espace annelé (e.g., schémas, schémas formels...).

Proposition 1.3.4 ([5] I 3.4). *La catégorie $\mathbf{Mod}_{\mathscr{C}\text{-coh}}(A)$ est stable par limites projectives et inductives finies. En particulier, le noyau, le conoyau, l'image d'une flèche entre deux A-modules $\mathscr{C}$-cohérents sont $\mathscr{C}$-cohérents. Soit*

$$F^0 \to F^1 \to F^2 \to F^3 \to F^4$$

une suite exacte de A-modules. Si F^0, F^1, F^3 et F^4 sont $\mathscr{C}$-cohérents, il en est de même de F^2.

Corollaire 1.3.5 ([28] 0.5.3.7). *Si F et G sont des A-modules $\mathscr{C}$-cohérents, il en est de même de $F \otimes_A G$ et de $\mathscr{H}om_A(F, G)$.*

Proposition 1.3.6 ([28] 0.5.3.13). *Supposons que A soit un anneau $\mathscr{C}$-cohérent, et soit J un idéal $\mathscr{C}$-cohérent de A. Pour qu'un (A/J)-module F soit $\mathscr{C}$-cohérent, il faut et il suffit qu'en tant que A-module, F soit $\mathscr{C}$-cohérent. En particulier, A/J est un anneau $\mathscr{C}$-cohérent.*

1.3.7. Soient E un complexe de A-modules, $n \in \mathbb{Z}$. On dit que E est *strictement n-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent* (resp. *strictement $\mathscr{C}$-pseudo-cohérent*) si $E^i = 0$ pour i assez grand et E^i est un A-module libre de type fini pour $i \geq n$ (resp. pour tout i) ([5] I 2.1).

1.3.8. Soient F un objet de $\mathbf{D}(A)$ (1.1.9), $n \in \mathbb{Z}$. On dit que F est *n-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent* si la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets X tels qu'il existe un quasi-isomorphisme $E \to (F|X)$ avec E un complexe de $(A|X)$-modules strictement n-$(\mathscr{C}_{/X})$-pseudo-cohérent, est un raffinement de $\mathrm{e}_{\mathscr{C}}$ ([5] 2.3). On dit que F est *$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent* si F est n-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

1.3.9. Soient F un A-module, $n \in \mathbb{N}$. On dit que F est *de n-$\mathscr{C}$-présentation finie* si la sous-catégorie pleine de $\mathscr{C}$ formée des objets X tels qu'il existe une suite exacte

$$E^{-n} \to \cdots \to E^0 \to (F|X) \to 0,$$

où E^i est un $(A|X)$-module libre de type fini pour $-n \leq i \leq 0$, est un raffinement de $\mathrm{e}_{\mathscr{C}}$. On dit que F est *d'∞-$\mathscr{C}$-présentation finie* si F est de n-$\mathscr{C}$-présentation finie pour tout $n \in \mathbb{N}$ ([5] I 2.8). On dira aussi que F est de *$\mathscr{C}$-présentation finie* lorsqu'il est de 1-$\mathscr{C}$-présentation finie.

Pour que F soit de n-$\mathscr{C}$-présentation finie, il faut et il suffit que le complexe $F[0]$, formé du A-module F concentré en degré 0, soit $(-n)$-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent ([5] I 2.9).

Proposition 1.3.10 ([5] I 3.5). *Supposons que A soit un anneau $\mathscr{C}$-cohérent.*

(a) *Soit F un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *F est de $\mathscr{C}$-présentation finie.*
- (ii) *F est $\mathscr{C}$-cohérent.*
- (iii) *F est d'∞-$\mathscr{C}$-présentation finie.*

(b) *Soient F un objet de $\mathbf{D}^-(A)$, $n \in \mathbb{Z}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *F est n-$\mathscr{C}$-pseudo-cohérent.*
- (ii) *$\mathrm{H}^i(F)$ est $\mathscr{C}$-cohérent pour tout $i \geq n+1$ et $\mathrm{H}^n(F)$ est de $\mathscr{C}$-type fini.*

En particulier, pour que F soit $\mathscr{C}$-pseudo-cohérent, il faut et il suffit que $\mathrm{H}^n(F)$ soit $\mathscr{C}$-cohérent pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 1.3.11 ([28] 0.5.2.2). *Soient F un A-module de $\mathscr{C}$-type fini, p un point de $\mathscr{E}$.*

(i) *Si (X, ξ) est un voisinage de p dans $\mathscr{C}$ (1.1.8), s_i $(1 \leq i \leq n)$ des sections de F sur X telles que les $(s_i)_p$ engendrent F_p, il existe un morphisme $(X', \xi') \to (X, \xi)$ de la catégorie des voisinages de p dans $\mathscr{C}$ tel que les $(s_i|X')$ engendrent $F|X'$.*

(ii) *Si G est un A-module, $u\colon F \to G$ un homomorphisme tel que $u_p = 0$, il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $u|X = 0$.*

(iii) *Si G est un A-module, $v\colon G \to F$ un homomorphisme tel que v_p soit surjectif, il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $v|X$ soit un épimorphisme.*

(iv) *Si $F_p = 0$, il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $F|X = 0$.*

Il suffit de calquer la preuve de ([28] 0.5.2.2) en tenant compte de (1.1.8.2).

1.3.12. Soient F un A-module de $\mathscr{C}$-présentation finie, p un point de $\mathscr{E}$; alors, pour tout A-module G, l'homomorphisme canonique fonctoriel

$$(\mathscr{H}om_A(F, G))_p \to \mathrm{Hom}_{A_p}(F_p, G_p) \tag{1.3.12.1}$$

est bijectif. En effet, il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ et une suite exacte de $(A|X)$-modules

$$(A|X)^n \to (A|X)^m \to (F|X) \to 0. \tag{1.3.12.2}$$

Pour tout A-module H, on a $(H|X)_\xi = H_p$ et ([1] IV 12.3)

$$j_X^*(\mathscr{H}om_A(H, G)) = \mathscr{H}om_{(A|X)}(H|X, G|X).$$

Appliquant les foncteurs $(\mathscr{H}om_{(A|X)}(-, G|X))_\xi$ et $\mathrm{Hom}_{(A|X)_\xi}((-)_\xi, (G|X)_\xi)$ à la suite (1.3.12.2), on obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (\mathscr{H}om_A(F, G))_p \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & (\mathscr{H}om_A(A^m, G))_p \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & (\mathscr{H}om_A(A^n, G))_p \arrow[d, "\gamma"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_p}(F_p, G_p) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_p}(A_p^m, G_p) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{A_p}(A_p^n, G_p)
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes. Il est immédiat de vérifier que β et γ sont des isomorphismes, d'où la conclusion.

1.3.13. Soient F, G deux A-modules de $\mathscr{C}$-présentation finie. Si, pour un point p de $\mathscr{E}$, F_p et G_p sont deux A_p-modules isomorphes, alors il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $F|X$ et $G|X$ soient isomorphes. En effet, si $a\colon F_p \to G_p$ et $b\colon G_p \to F_p$ sont deux isomorphismes réciproques, il existe, d'après 1.3.12 et (1.1.8.2), un voisinage (Y, ζ) de p dans $\mathscr{C}$ et une section s (resp. t) de $\mathscr{H}om_A(F, G)$ (resp. $\mathscr{H}om_A(F, G)$) au-dessus de Y telle que $s_\zeta = a$ (resp. $t_\zeta = b$). Comme $(s \circ t)_\zeta$ et $(t \circ s)_\zeta$ sont les automorphismes identiques, il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ au-dessus du voisinage (Y, ζ) (1.1.8) tel que $(s \circ t)|X$ et $(t \circ s)|X$ soient les automorphismes identiques (1.3.12), d'où la proposition.

1.3.14. Soient p un point de $\mathscr{E}$, M un A_p-module de présentation finie, donc isomorphe au conoyau d'un homomorphisme $a\colon A_p^m \to A_p^n$; alors il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ et un $(A|X)$-module de $(\mathscr{C}_{/X})$-présentation finie F tel que F_ξ soit isomorphe à M. En effet, en vertu de 1.3.12 et (1.1.8.2), il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ et une section s de $\mathscr{H}om_A(A^m, A^n)$ au-dessus de X telle que $s_\xi = a$; le conoyau F de l'homomorphisme $s : (A|X)^m \to (A|X)^n$ répond à la question.

Proposition 1.3.15. *Soient E un A-module de $\mathscr{C}$-type fini, F un A-module localement libre de type fini, $u\colon E \to F$ un homomorphisme, p un point de $\mathscr{E}$. Supposons l'anneau A_p local et notons $\kappa(p)$ son corps résiduel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u_p est inversible à gauche* (*autrement dit, u_p est injectif et son image est facteur direct de F_p*).

(ii) *L'homomorphisme $E_p \otimes_{A_p} \kappa(p) \to F_p \otimes_{A_p} \kappa(p)$ déduit de u_p par passage aux quotients, est injectif.*

(iii) *Il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ tel que $u|X$ soit inversible à gauche.*

Il suffit de calquer la preuve de ([28] 0.5.5.4) en tenant compte de 1.3.12 et 1.3.13.

Remarque 1.3.16 ([5] I 2.15.1). Supposons $(\mathscr{C}, A)$ localement annelé au sens de ([31] IV 13.9), ce qui signifie que pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ et tout $f \in \Gamma(X, A)$, on a $X = X_f \cup X_{1-f}$, où X_f (resp. X_{1-f}) désigne le sous-objet de X où f (resp. $1-f$) est inversible. Alors tout facteur direct d'un module libre de type fini est localement libre de type fini.

Proposition 1.3.17 ([28] 0.5.7.3). *Soient $u\colon (\mathscr{E}', A') \to (\mathscr{E}, A)$ un morphisme de $\mathbb{U}$-topos annelés, M un A'-module, p un point de $\mathscr{E}'$, $q = u \circ p$. Supposons que l'anneau A soit $\mathscr{C}$-cohérent, et notons $\varepsilon\colon \mathscr{C} \to \mathscr{E}$ le foncteur canonique* ([1] II 4.4.0). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est u-plat en p.*

(ii) *Pour tout voisinage (X, ξ) de q dans $\mathscr{C}$* (1.1.8), *il existe un voisinage (X', ξ') de p dans $\mathscr{E}'$ et un morphisme $\psi\colon X' \to u^*(\varepsilon(X))$ tels que l'on ait $\psi_p(\xi') = \xi$, et si l'on note $u_\psi\colon (\mathscr{E}'_{/X'}, A'|X') \to (\mathscr{E}_{/\varepsilon(X)}, A|X)$ le morphisme de topos annelés déduit de u et ψ* (1.1.6.2), *le foncteur*

$$N \mapsto (u_\psi^*(N) \otimes_{(A'|X')} (M|X'))_{\xi'} \tag{1.3.17.1}$$

soit exact sur la catégorie des $(A|X)$-modules cohérents.

(iii) *Il existe une petite catégorie $\mathscr{C}'$ et un foncteur pleinement fidèle $\mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ tels que tout objet de $\mathscr{C}$ puisse être recouvert par des objets provenant de $\mathscr{C}'$ et la condition* (ii) *soit satisfaite pour tout voisinage (X, ξ) de q dans $\mathscr{C}$ avec X provenant de $\mathscr{C}'$.*

Il est clair que l'on a (i)⇒(ii)⇒(iii). Pour montrer (iii)⇒(i), il suffit de montrer que si $\mathscr{I}$ est un idéal de type fini de A_q, l'homomorphisme canonique $\mathscr{I} \otimes_{A_q} M_p \to M_p$ est injectif ([12] chap. I §2.3 rem. 1). On sait qu'il existe un voisinage (X, ξ) de p dans $\mathscr{C}$ et un $(A|X)$-module de $(\mathscr{C}_{/X})$-présentation finie F tel que $F_\xi \simeq A_q/\mathscr{I}$ (1.3.14). Quitte à changer (X, ξ), on peut supposer que X provient de $\mathscr{C}'$ et qu'on a un homomorphisme $r : (A|X) \to (F|X)$ dont la fibre en ξ est la flèche canonique $A_q \to F_\xi$ (1.3.12.1). Le noyau I de r est un $(A|X)$-module cohérent (1.3.4) tel que $I_\xi = \mathscr{I}$. Notre assertion résulte alors de l'exactitude du foncteur (1.3.17.1).

1.4 Modules cohérents sur un schéma

Définition 1.4.1. On dit qu'un anneau A est *universellement cohérent* si l'anneau de polynômes $A[t_1, \dots, t_n]$ est cohérent pour tout entier $n \geq 0$.

Proposition 1.4.2. *Soit A un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est universellement cohérent.*

(ii) *Toute A-algèbre de présentation finie est un anneau universellement cohérent.*

(iii) *Toute A-algèbre de présentation finie est un anneau cohérent.*

Il suffit de prouver que (i) entraîne (iii). Soit B une A-algèbre de présentation finie, quotient de l'anneau des polynômes $A[t_1, \dots, t_n]$ par un idéal de type fini I. Par hypothèse, $A[t_1, \dots, t_n]$ est un anneau cohérent. Il en résulte que l'idéal I est de présentation finie ; il est donc cohérent (1.3.10). Par suite B est un anneau cohérent (1.3.6).

Proposition 1.4.3. *Soit $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine. Alors le foncteur $M \mapsto \widetilde{M}$, de la catégorie des A-modules vers celle des $\mathscr{O}_X$-modules, induit une équivalence entre les sous-catégories pleines d'objets cohérents. En particulier, pour que A soit un anneau cohérent, il faut et il suffit que $\mathscr{O}_X$ soit un anneau cohérent.*

Cela résulte de ([28] 1.4.2 et 1.4.3), quand on observe que, pour tout A-module cohérent M et tout $f \in A$, M_f est un A_f-module cohérent.

1.4.4. Soient $n \in \mathbb{Z}$, $f \colon X \to Y$ un morphisme localement de type fini de schémas, E un objet de $\mathbf{D}(\mathscr{O}_X)$ (1.1.9). On dit que E est *n-pseudo-cohérent relativement à f* si, localement sur X, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "g"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

avec h une immersion fermée et g un morphisme lisse, tel que $h_*(E)$ soit n-pseudo-cohérent en tant qu'objet de $\mathbf{D}(\mathscr{O}_Z)$ (1.3.8) (cf. [5] III 1.2). On dit que E est *pseudo-cohérent relativement à* f si E est n-pseudo-cohérent relativement à f pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On dit que f est *n-pseudo-cohérent* (resp. *pseudo-cohérent*) si $\mathscr{O}_X$ est n-pseudo-cohérent (resp. pseudo-cohérent) relativement à f.

Proposition 1.4.5 ([5] III 1.12). *Soient $n \in \mathbb{Z}$, $f\colon X \to Y$ un morphisme localement de type fini de schémas, E un objet de $\mathbf{D}^-(\mathscr{O}_X)$. Si f est pseudo-cohérent, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est n-pseudo-cohérent relativement à f.*
(ii) *E est n-pseudo-cohérent sur X.*

Proposition 1.4.6. *Soient $Y = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine, $f\colon X \to Y$ un morphisme localement de présentation finie de schémas, F un $\mathscr{O}_X$-module. Si A est universellement cohérent, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *F est pseudo-cohérent relativement à f.*
(ii) *F est d'∞-présentation finie sur X.*
(iii) *F est cohérent en tant que $\mathscr{O}_X$-module.*

La question étant locale sur X, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ est affine. Compte tenu de 1.3.10 et 1.4.5, il suffit de montrer que $\mathscr{O}_X$ est un anneau cohérent et qu'il est pseudo-cohérent relativement à f. En vertu de ([28] 6.2.9), B est une A-algèbre de présentation finie ; donc il existe un homomorphisme surjectif $u\colon A' = A[t_1, \dots, t_n] \to B$ de A-algèbres dont le noyau I est de type fini. Par hypothèse, A' est un anneau cohérent. Il résulte que I est de présentation finie sur A' ; il est donc cohérent (1.3.10). On en déduit que B est un A'-module cohérent et un anneau cohérent (1.3.6). Par suite $\mathscr{O}_X$ est un anneau cohérent (1.4.3). Soit $h\colon X \to Z = \mathrm{Spec}(A')$ l'immersion fermée définie par u. On a $h_*(\mathscr{O}_X) = \widetilde{B}$, qui est donc un $\mathscr{O}_{X'}$-module cohérent (1.4.3). Utilisant de nouveau le fait que A' est un anneau cohérent, on conclut que $h_*(\mathscr{O}_X)$ est pseudo-cohérent sur Z (1.3.10) ; autrement dit $\mathscr{O}_X$ est pseudo-cohérent relativement à f.

Théorème 1.4.7 ([36] 2.9'a). *Soient S un schéma, $f\colon X \to Y$ un S-morphisme propre de schémas localement de type fini sur S, E un objet de $\mathbf{D}^+(\mathscr{O}_X)$. Alors si E est pseudo-cohérent relativement à S, il en est de même de $\mathrm{R}f_*(E)$.*

Ce théorème est aussi démontré dans ([5] III 2.2) si f est un morphisme projectif ou si S est localement noethérien (comme conséquence de [30] 3.2.1).

Corollaire 1.4.8. *Soient Y un schéma, $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie. Si Y admet un recouvrement par des ouverts affines (U_α) tels que $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_Y)$ soit universellement cohérent pour tout α, alors pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ et tout entier $q \geq 0$, $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent.*

La question étant locale sur Y, on peut se borner au cas où $Y = \mathrm{Spec}(A)$ est affine et A est universellement cohérent. Le complexe $\mathrm{R}f_*(\mathscr{F})$ est un objet de $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathscr{O}_X)$ ([30] 1.4.12), et il est pseudo-cohérent sur Y (1.4.6 et 1.4.7). Donc les $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ sont des $\mathscr{O}_Y$-modules cohérents (1.3.10).

Théorème 1.4.9 ([5] 2.3). *Soient S un schéma quasi-compact, $f\colon X \to Y$ un S-morphisme projectif de schémas localement de type fini sur S, $\mathscr{L} = i^*\mathscr{O}_P(1)$ le faisceau inversible défini par un plongement $i : X \to P = \mathbf{P}(\mathscr{E})$, où $\mathscr{E}$ est un $\mathscr{O}_Y$-module quasi-cohérent de type fini. Pour $E \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}(\mathscr{O}_X))$ et $n \in \mathbb{Z}$, posons $E(n) = E \otimes^L \mathscr{L}^{\otimes n}$. Alors, si $E \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D}^+(\mathscr{O}_X))$ est pseudo-cohérent relativement à S et acyclique en degré $> a$ ($a \in \mathbb{Z}$), il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $\mathrm{R}f_*(E(n))$ vérifie les mêmes conditions.*

Corollaire 1.4.10. *Soient Y un schéma, $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie, $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_X$-module inversible ample pour f ; pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ et tout entier n, posons $\mathscr{F}(n) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes n}$. Si Y admet un recouvrement fini par des ouverts affines (U_α) tels que $\Gamma(U_\alpha, \mathscr{O}_Y)$ soit universellement cohérent pour tout α, alors pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $q > 0$, $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}(n)) = 0$.*

Notons d'abord que si le corollaire est vrai lorsque l'on remplace $\mathscr{L}$ par $\mathscr{L}^{\otimes d}$ ($d > 0$), il est vrai sous sa forme initiale. On peut donc supposer $\mathscr{L}$ très ample relativement à f ([29] 4.6.11). Il résulte de 1.4.8 que $f_*(\mathscr{L})$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent. Donc f est projectif ([29] 5.5.4(i)), et il existe un plongement $i : X \to P = \mathbf{P}(f_*(\mathscr{L}))$ tel que $\mathscr{L} = i^*\mathscr{O}_P(1)$ ([29] 4.4.4). Le corollaire résulte alors de 1.4.6 et 1.4.9.

1.5 Rappels sur l'assassin et la pureté

1.5.1. Soient S un schéma, X un S-schéma. La fibre de X au-dessus d'un point s de S, c'est à dire le schéma $X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(s))$, sera aussi notée $X \otimes_S \kappa(s)$.

1.5.2. Soient S un schéma, X un S-schéma, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire. On dit que u est *S-universellement injectif* si le morphisme $u \otimes_S \mathscr{O}_{S'}\colon \mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S'} \to \mathscr{G} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}$ est injectif pour tout changement de base $S' \to S$. Il revient au même de demander que pour tout $x \in X$ d'image s dans S, l'homomorphisme $u_x\colon \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ est $\mathscr{O}_s$-universellement injectif. Lorsque $\mathscr{G}$ est S-plat, cette condition équivaut à demander que u soit injectif et que son conoyau soit S-plat ([12] chap. I §2.5 prop. 4).

1.5.3. Soient $\rho\colon A \to B$ un homomorphisme local d'anneaux locaux noethériens, k le corps résiduel de A, M, N deux B-modules de type fini, N étant supposé A-plat. Soit $u\colon M \to N$ un B-homomorphisme. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est injectif et $\mathrm{coker}(u)$ est un A-module plat ;
(i′) u est A-universellement injectif ;
(ii) $u \otimes_A k$ est injectif.

Cela résulte de ([12] chap. III §5.2 théo. 1).

Définition 1.5.4 ([37] II 1.1). Soient A un anneau, M un A-module. On dit qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A est *associé* à M, s'il existe $f \in M$ tel que $\mathfrak{p}$ soit minimal parmi les idéaux premiers contenant l'annulateur de f. On appelle *assassin* de M, et l'on note $\mathrm{Ass}_A(M)$ ou simplement $\mathrm{Ass}(M)$, l'ensemble des idéaux premiers associés à M.

Bourbaki ([12] chap. IV §1 exerc. 17) ajoute le qualificatif "faible" à cette notion. Cela est inutile, car, dans le cas noethérien, elle redonne la notion classique, et dans le cas général, la notion classique a très peu d'intérêt. Pour les propriétés usuelles de l'assassin, on renvoie à *loc. cit.*

Définition 1.5.5 ([42] 3.2.1). Soient X un schéma, x un point de X, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. On dit que x est *associé* à $\mathscr{F}$ s'il existe un élément f de $\mathscr{F}_x$ dont l'annulateur I dans $\mathscr{O}_x$ a pour radical l'idéal maximal de $\mathscr{O}_x$. On appelle *assassin* de $\mathscr{F}$ dans X, et l'on note $\mathrm{Ass}_X(\mathscr{F})$ ou simplement $\mathrm{Ass}(\mathscr{F})$, l'ensemble des points de X associés à $\mathscr{F}$. On appelle assassin de X, et l'on note $\mathrm{Ass}(X)$, l'ensemble $\mathrm{Ass}_X(\mathscr{O}_X)$.

On notera que cette notion diffère en général de celle de Grothendieck ([31] 3.1.1), et que les deux notions coïncident lorsque X est localement noethérien. Notons ici quelques propriétés élémentaires de l'assassin (cf. [31] 3.1 pour le cas localement noethérien).

1.5.5.1. Il est clair que $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Supp}(\mathscr{F})$.

1.5.5.2. Supposons $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module ; pour qu'un point $x \in X$ soit associé à $\mathscr{F}$, il faut et il suffit que l'idéal premier correspondant $\mathfrak{p}$ de A soit associé à M. Cela résulte de la définition et de ([12] chap. IV §1 exerc. 17(d)).

1.5.5.3. Pour que $\mathscr{F} = 0$, il faut et il suffit que $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) = \emptyset$. En effet, la question étant locale, on est ramené au cas où X est affine, et la conclusion résulte de 1.5.5.2 et ([12] chap. IV §1 exerc. 17(a)).

1.5.5.4. Soit $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents. Alors $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}') \subset \mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset \mathrm{Ass}(\mathscr{F}') \cup \mathrm{Ass}(\mathscr{F}'')$. En effet, cela résulte aussitôt de l'assertion correspondante pour les modules ([12] chap. IV §1 exerc. 17(c)).

1.5.5.5. Soient $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$, X' le sous-schéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$, U l'ouvert $X - X'$ de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}) \subset U$.

(b) Pour tout ouvert affine V de X, toute section de $\mathscr{F}$ au-dessus de V, dont la restriction à $V \cap U$ est nulle, est égale à 0.

(c) L'homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}, \mathscr{F})$ est injectif.

La question étant locale, on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$ et $\mathscr{J} = \widetilde{J}$, où M est un A-module et J est un idéal de type fini de A. D'abord (a) est équivalent à (c) d'après ([37] II 1.14). Ensuite (b) implique (c) : en effet, si on a $Jm = 0$ pour un élément non nul m de M, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, il existe $a \in J - \mathfrak{p}$; la relation $am = 0$ entraîne que l'image canonique de m dans $M_\mathfrak{p}$ est nulle, autrement dit m est une section non nulle de $\mathscr{F}$ au-dessus de X dont la restriction à U est nulle. Enfin (a) entraîne (b) car l'homomorphisme canonique $M \to \prod_{\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(M)} M_\mathfrak{p}$ est injectif ([12] chap. IV §1 exerc. 17(i)).

Définition 1.5.6 ([42] 3.2.2). Soient S un schéma, X un S-schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. On appelle *assassin de $\mathscr{F}$ dans X relativement à S*, et l'on note $\mathrm{Ass}_{X/S}(\mathscr{F})$ ou simplement $\mathrm{Ass}(\mathscr{F}/S)$, l'ensemble

$$\bigcup_{s\in S} \mathrm{Ass}_{X\otimes_S \kappa(s)}(\mathscr{F} \otimes_S \kappa(s)).$$

Si $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module, on note $\mathrm{Ass}_{X/S}(\widetilde{M})$ aussi par $\mathrm{Ass}_{B/A}(M)$.

Lemme 1.5.7. *Soient A un anneau local de corps résiduel k, B une A-algèbre de type fini, M un B-module projectif sur A. On note Σ la partie multiplicative de B formée des éléments non diviseurs de zéro dans $M \otimes_A k$. Alors :*

(i) *$B[\Sigma^{-1}]$ est un anneau semi-local dont le spectre est formé des générisations dans* $\mathrm{Spec}(B)$ *de* $\mathrm{Ass}_{B\otimes_A k}(M \otimes_A k)$.

(ii) *Le morphisme de localisation $M \to M[\Sigma^{-1}]$ est A-universellement injectif; a fortiori, tout élément de* $\mathrm{Ass}_{B/A}(M)$ *est une générisation de*

$$\mathrm{Ass}_{B\otimes_A k}(M \otimes_A k).$$

La première assertion est immédiate ([12] chap. IV §1 exerc. 17(b)), et la seconde résulte de ([42] 3.1.6).

Lemme 1.5.8 ([42] 3.2.5). *Soient $f\colon (X, x) \to (S, s)$ un morphisme localement de présentation finie de schémas pointés, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie et S-plat, Σ la partie multiplicative de $\mathscr{O}_x$ formée des éléments non diviseurs de zéro dans $\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s)$. Alors,*

(i) *$\mathscr{O}_x[\Sigma^{-1}]$ est un anneau semi-local dont le spectre est formé des générisations dans* $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_x)$ *de* $\mathrm{Ass}_{\mathscr{O}_x\otimes\kappa(s)}(\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s))$.

(ii) *Le morphisme de localisation $\mathscr{F}_x \to \mathscr{F}_x[\Sigma^{-1}]$ est $\mathscr{O}_s$-universellement injectif; a fortiori, tout élément de* $\mathrm{Ass}_{\mathscr{O}_x/\mathscr{O}_s}(\mathscr{F}_x)$ *est une générisation de* $\mathrm{Ass}_{\mathscr{O}_x\otimes\kappa(s)}(\mathscr{F}_x \otimes \kappa(s))$.

Pour montrer (ii), on se ramène par passage à la limite inductive au cas où (S, s) est local noethérien. L'assertion résulte alors de 1.5.3 par passage à la limite inductive.

Proposition 1.5.9 ([42] 3.2.6). *Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie, M un B-module de présentation finie, plat sur A. Soit B' une B-algèbre plate telle que l'image de* $\mathrm{Spec}(B')$ *dans* $\mathrm{Spec}(B)$ *contienne* $\mathrm{Ass}_{B/A}(M)$. *Alors l'homomorphisme canonique $M \to M \otimes_B B'$ est A-universellement injectif.*

Signalons l'application de 1.5.9 suivante :

Proposition 1.5.10 ([42] 3.3.1). *Soient A un anneau, B une A-algèbre lisse, à fibres géométriquement intègres. Alors B est un A-module projectif.*

Définition 1.5.11 ([42] 3.3.3). Soient S un schéma, X un S-schéma localement de type fini, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini.

(i) Soit s un point de S ; notons $(\widetilde{S}, \widetilde{s})$ un hensélisé de (S, s), $\widetilde{X} = X \times_S \widetilde{S}$, $\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{\widetilde{S}}$. On dit que $\mathscr{F}$ est *pur le long de* $X \otimes_S \kappa(s)$ si $\mathrm{Ass}(\widetilde{\mathscr{F}}/\widetilde{S})$ est contenu dans le générisé de $X \otimes_S \kappa(\widetilde{s})$, autrement dit, si pour tout point $\widetilde{x}$ de $\mathrm{Ass}(\widetilde{\mathscr{F}}/\widetilde{S})$, l'adhérence de $\widetilde{x}$ dans $\widetilde{X}$ rencontre $X \otimes_S \kappa(\widetilde{s})$.

(ii) On dit que $\mathscr{F}$ est *S-pur* ou *pur relativement à S* s'il est pur le long de $X \otimes_S \kappa(s)$ pour tout point s de S. On dit que X est *S-pur* ou *pur relativement à S* si $\mathscr{O}_X$ est S-pur.

Si $S = \mathrm{Spec}(A)$ et $X = \mathrm{Spec}(B)$ sont affines, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module de type fini, on dira que M est *A-pur* lorsque $\mathscr{F}$ est S-pur.

Exemples 1.5.12. Soit $f : X \to S$ un morphisme localement de type fini.

(i) Si f est propre, tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini est S-pur.

(ii) Supposons f séparé, de type fini, à fibres finies. Pour que X soit S-pur, il faut et il suffit que f soit fini.

(iii) Si f est fidèlement plat, à fibres géométriquement irréductibles et sans composantes immergées, alors X est S-pur.

Théorème 1.5.13 ([42] 3.3.5). *Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie, M un B-module de présentation finie, plat sur A. Pour que M soit un A-module projectif, il faut et il suffit qu'il soit A-pur.*

On notera que la nécessité de la condition est immédiate (1.5.7).

Corollaire 1.5.14 ([42] 3.3.11). *Sous les hypothèses de* (1.5.13)*, supposons que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, on ait* $\dim_{B \otimes \kappa(\mathfrak{p})}(M \otimes \kappa(\mathfrak{p})) \geq 1$. *Alors si M est un A-module A-plat et A-pur, M est un A-module libre.*

Corollaire 1.5.15. *Soient A un anneau, B une A-algèbre lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension constante. Alors B est libre sur A.*

D'après 1.5.12(iii), B est A-pur. Le corollaire résulte alors de 1.5.14 lorsque la dimension des fibres de B sur A est ≥ 1. Supposons B étale sur A. Alors B est un A-module projectif de type fini (1.5.10 et 1.5.12(ii)), et compte tenu des hypothèses, il est inversible ; par suite $B = A$.

Théorème 1.5.16 ([42] 3.4.6). *Soient $f : X \to S$ un morphisme localement de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini. On suppose que* $\mathrm{Ass}(S)$ *est localement fini. Alors, l'ensemble U des points de X où $\mathscr{F}$ est S-plat est ouvert et $\mathscr{F}|U$ est un $\mathscr{O}_U$-module de présentation finie.*

Corollaire 1.5.17 ([42] 3.4.7). *Soient A un anneau intègre, B une A-algèbre de type finie, plate sur A. Alors B est de présentation finie.*

1.6 Rappels sur les idéaux de coefficients

1.6.1. Il sera sous-entendu dans cette section que les schémas envisagés appartiennent à un univers donné $\mathbb{U}$. On désigne par $\mathbf{Sch}$ la catégorie des schémas (éléments de l'univers $\mathbb{U}$) et par $\widehat{\mathbf{Sch}}$ la catégorie des préfaisceaux de $\mathbb{U}$-ensembles sur $\mathbf{Sch}$.

1.6.2. Soient S un schéma, X un S-schéma, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire. On désigne par $\mathscr{E}_u$ le sous-objet de S dans $\widehat{\mathbf{Sch}}$ défini, pour tout schéma T, par l'ensemble des morphismes $T \to S$ tels que $u \otimes_S \mathscr{O}_T$ soit un isomorphisme (cf. [1] IV 8.5.1).

On dit qu'un idéal quasi-cohérent $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_S$ est un *idéal de coefficients* pour u si $\mathscr{E}_u$ est représentable par le sous-schéma fermé de S défini par $\mathscr{C}$. Lorsqu'un tel idéal existe, il est unique. On dit alors que u admet un idéal de coefficients relativement à S.

Le fait que u admette un idéal de coefficients relativement à S est une question locale sur S.

Si u admet un idéal de coefficients $\mathscr{C}$ relativement à S, alors pour tout morphisme $S' \to S$, $\mathscr{C}\mathscr{O}_{S'}$ est un idéal de coefficients pour $u \otimes_S \mathscr{O}_{S'} \colon \mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S'} \to \mathscr{G} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}$.

Définition 1.6.3. Soient S un schéma, X un S-schéma, $\mathscr{A}$ un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$. On dit qu'un idéal quasi-cohérent $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_S$ est un *idéal de coefficients* de $\mathscr{A}$ si $\mathscr{C}$ est un idéal de coefficients pour l'homomorphisme surjectif canonique $\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{A}$. Lorsqu'un tel idéal existe, il est unique et $\mathscr{A} \subset \mathscr{C}\mathscr{O}_X$. On dit alors que $\mathscr{A}$ admet un idéal de coefficients relativement à S.

Notons deux conséquences immédiates de la définition :

1.6.4. Soient S un schéma, X un S-schéma fidèlement plat, $\mathscr{C}$ un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$. Alors $\mathscr{C}$ est l'idéal de coefficients de $\mathscr{C}\mathscr{O}_X$.

1.6.5. Soient S un schéma, Y un S-schéma, X un Y-schéma, $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_Y$) tels que $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}\mathscr{O}_X$, $u\colon \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X/\mathscr{A}$, $v\colon \mathscr{O}_Y \to \mathscr{O}_Y/\mathscr{B}$ les homomorphismes surjectifs canoniques, $\mathscr{E}_u$ (resp. $\mathscr{E}_v$) le sous-objet de S dans $\widehat{\mathbf{Sch}}$ où u (resp. v) est un isomorphisme. Alors :

(i) $\mathscr{E}_v$ est un sous-objet de $\mathscr{E}_u$. En particulier, si $\mathscr{A}$ (resp. $\mathscr{B}$) admet un idéal de coefficients $\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{D}$) relativement à S, alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.

(ii) Supposons que $\mathscr{B}$ soit l'idéal de coefficients de $\mathscr{A}$. Alors $\mathscr{E}_v = \mathscr{E}_u$. En particulier, pour qu'un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_S$ soit l'idéal de coefficients de $\mathscr{A}$, il faut et il suffit qu'il soit l'idéal de coefficients de $\mathscr{B}$.

Théorème 1.6.6 ([42] 4.1.1). *Soient S un schéma, X un S-schéma de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie, S-plat et S-pur, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent, $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire surjectif. Alors u admet un idéal de coefficients relativement à S, qui est de type fini si $\mathscr{G}$ est de présentation finie.*

Corollaire 1.6.7. *Soit $X \to S$ un morphisme lisse, de présentation finie, à fibres géométriquement intègres de dimension constante. Alors tout idéal quasi-cohérent $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_X$ admet un idéal de coefficients relativement à S, qui est de type fini si $\mathscr{A}$ est de présentation finie.*

En effet, X est S-pur (1.5.12).

1.6.8. Soient A un anneau, B une A-algèbre lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension constante. Alors B est libre sur A (1.5.15). Soient $\mathfrak{b}$ un idéal de B, $\mathfrak{a}$ son idéal de coefficients relativement à A (1.6.7). Il est immédiat de voir que $\mathfrak{a}$ est l'idéal de A engendré par les coordonnées des éléments de $\mathfrak{b}$ par rapport à une base de B.

Proposition 1.6.9. *Soient $X \to S$ un morphisme affine, lisse, à fibres géométriquement intègres de dimension constante, $\mathscr{A}$ un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{C}$ l'idéal de coefficients de $\mathscr{A}$ relativement à S* (1.6.7), *$\mathscr{L}$ un idéal localement monogène de $\mathscr{O}_S$. Alors $\mathscr{L}\mathscr{C}$ est l'idéal de coefficients de $\mathscr{L}\mathscr{A}$.*

La question étant locale sur S, elle résulte facilement de 1.6.8.

1.7 Rappels sur les idéaux de Fitting

1.7.1. Soient X un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module, $\mathscr{A}$ un idéal de $\mathscr{O}_X$. On note $\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}}(\mathscr{A})$ le plus grand sous-module de $\mathscr{F}$ annulé par $\mathscr{A}$, c'est à dire le noyau de l'homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{A}, \mathscr{F})$.

1.7.2. Soient X un schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, r un entier ≥ 0. Rappelons la définition du r-ième idéal de Fitting de $\mathscr{F}$.

Supposons d'abord X affine d'anneau A et considérons une présentation

$$A^{(I)} \xrightarrow{\ u\ } A^n \longrightarrow \Gamma(X, \mathscr{F}) \longrightarrow 0\,. \tag{1.7.2.1}$$

Alors l'idéal de A engendré par les coefficients de la matrice de $\wedge^{n-r}(u)$ ne dépend pas du choix de la suite exacte (1.7.2.1) ; c'est le r-ième idéal de Fitting de $\mathscr{F}$; on le note $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$.

Dans le cas général, lorsque U parcourt l'ensemble des ouverts affines de X, les idéaux $\mathrm{F}_r(\mathscr{F}|U)$ de $\mathscr{O}_X|U$ se recollent et définissent le r-ième idéal de Fitting $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$.

Si $\mathscr{F}$ est de présentation finie, $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est de type fini.

Pour tout X-schéma Y, on a $\mathrm{F}_r(\mathscr{F} \otimes_X \mathscr{O}_Y) = \mathrm{F}_r(\mathscr{F}).\mathscr{O}_Y$.

Un point x de X est dans $\mathrm{V}(\mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ si et seulement si $\dim_{\kappa(x)}(\mathscr{F} \otimes \kappa(x)) > r$, et l'ouvert complémentaire de $\mathrm{V}(\mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ dans X est le plus grand ouvert de X au-dessus duquel $\mathscr{F}$ peut être localement engendré par r éléments.

Lemme 1.7.3 ([42] 5.4.2). *Si $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est localement monogène, $\mathscr{F}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}}(\mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ est localement engendré par r éléments.*

Lemme 1.7.4 ([42] 5.4.3). *Si $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est inversible et si $\mathscr{F}$ est libre de rang r aux points de $\mathrm{Ass}(X)$, alors $\mathscr{F}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}}(\mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ est localement libre de rang r.*

Proposition 1.7.5 (Raynaud-Gruson). *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme de schémas, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_S$, $\mathscr{C}$ un idéal inversible de $\mathscr{O}_S$, r un entier ≥ 0. Supposons que les conditions suivantes soient remplies :*

(i) *f est plat à fibres intègres.*

(ii) *L'ouvert $U = S - \mathrm{V}(\mathscr{J})$ de S est schématiquement dense dans S, et pour tout $s \in U$, si l'on note x le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$, $\mathscr{F}_x$ est un $\mathscr{O}_x$-module libre de rang r.*

(iii) *$\mathrm{F}_r(\mathscr{F}) \subset \mathscr{C}\mathscr{O}_X$; donc $\mathscr{B} = (\mathscr{C}\mathscr{O}_X)^{-1}\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_X$; soit W l'ouvert $X - \mathrm{V}(\mathscr{B})$ de X.*

On suppose aussi vérifiée au moins l'une des deux conditions suivantes :

(iv) *f est localement de présentation finie.*

(iv′) *Le schéma U est noethérien et le schéma $f^{-1}(U)$ est localement noethérien.*

Alors $\mathscr{F}/\mathrm{Ann}_{\mathscr{F}}(\mathscr{C}\mathscr{O}_X)$ est localement libre de rang r sur W.

Comme f est plat, $\mathscr{C}\mathscr{O}_X$ est inversible ; donc $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ est inversible sur W. Il suffit alors de montrer que $\mathscr{F}$ est libre de rang r aux points de $\mathrm{Ass}(X)$ (1.7.4). La condition (ii) entraîne que $\mathrm{Ass}(S) \subset U$ (1.5.5.5). De même, on a $\mathrm{Ass}(X) \subset f^{-1}(U)$, car $f^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans X ([31] 11.10.5) ; on notera dans le cas (iv') que U est un ouvert retro-compact de S ([28] 6.1.5). D'autre part, on a

$$\mathrm{Ass}(X) = \cup_{s \in \mathrm{Ass}(S)} \mathrm{Ass}(X \otimes_S \kappa(s)),$$

en vertu de ([42] 3.4.3) dans le cas (iv), et de ([31] 3.3.1) dans le cas (iv'). Comme $\mathrm{Ass}(X \otimes_S \kappa(s))$ est le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$, notre assertion résulte de la condition (ii).

Remarque 1.7.6. La proposition 1.7.5 est extraite de la démonstration du théorème ([42] 5.2.2) dans un cas particulier (*loc. cit.* 5.4). Soient $s \in S$, x le point générique de $X \otimes_S \kappa(s)$. Si $s \in U$, $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})_x = \mathscr{O}_x$, et par suite $x \in W$. L'intérêt de la proposition réside dans le choix de l'idéal $\mathscr{C}$, de sorte que $x \in W$ pour tout $s \in S$.

1.8 Rappels d'algèbre topologique

La terminologie de Grothendieck pour certaines notions d'algèbre topologique est essentiellement adaptée au cadre noethérien, qui n'est pas le cadre exclusif de ce traité. Nous nous en écartons à certains endroits pour mettre l'accent sur les concepts fondamentaux pour la suite. Pour éviter toute confusion, nous reformulons toutes les définitions, même celles que nous conservons identiques à ([28] §0.7).

1.8.1. On dit qu'un anneau topologique A est *linéairement topologisé* (et sa topologie est *linéaire*) s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans A formé d'*idéaux* (nécessairement ouverts).

Si A et B sont deux anneaux topologiques, $\rho\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux définissant sur B une structure de A-algèbre, on dit que B est une A-*algèbre topologique* si ρ est *continu* pour les topologies envisagées.

Si A est un anneau linéairement topologisé, M un A-module topologique, on dit que M est *linéairement topologisé* s'il existe un système fondamental de voisinages de 0 dans M formé de *sous-modules* de M ; pour abréger, nous dirons "*système fondamental d'idéaux* (*resp. de sous-modules*) *ouverts*" au lieu "système fondamental de voisinages de 0 formé d'idéaux (resp. de sous-modules)".

Etant donnés un anneau linéairement topologisé A et un A-module M, les ensembles JM, où J parcourt un système fondamental d'idéaux ouverts, forment un système fondamental de sous-modules ouverts pour une topologie sur M faisant de M un A-module topologique, et que l'on dit *déduite* de la topologie de A.

Soit M un A-module topologique dont la topologie est moins fine que la topologie déduite de celle de A ; alors, si N est un sous-module ouvert de M, le A-module discret M/N est annulé par un idéal ouvert de A, car par hypothèse il existe un idéal ouvert J tel que $JM \subset N$.

Lorsque B est une A-algèbre topologique, linéairement topologisée, la topologie sur B déduite de celle de A est plus fine que la topologie donnée, car pour tout idéal ouvert I de B, il y a par hypothèse un idéal ouvert J de A tel que $JB \subset I$.

Lemme 1.8.2. *Soient A un anneau linéairement topologisé, B une A-algèbre topologique. Supposons que l'homomorphisme canonique $\varphi\colon A \to B$ soit surjectif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *φ est un morphisme strict* ([13] chap. III §2.8 déf. 1).

(ii) *La topologie de B est déduite de celle de A.*

En effet, la condition (i) est équivalente à dire que l'image par φ de tout idéal ouvert de A est un idéal ouvert de B ([13] chap. III §2.8 prop. 24). Si (J_λ) est un système fondamental d'idéaux ouverts de A, la condition (ii) revient à dire que $(\varphi(J_\lambda))$ est un système fondamental d'idéaux ouverts de B. Donc l'équivalence en question résulte immédiatement du fait que φ est continu et surjectif.

Définition 1.8.3 ([28] 7.1.2). Dans un anneau linéairement topologisé A, on dit qu'un idéal J est un *idéal de définition* si J est ouvert et si, pour tout voisinage V de 0, il existe un entier $n > 0$ tel que $J^n \subset V$ (ce qu'on exprime, par abus de langage, en disant que la suite J^n tend vers 0). On dit qu'un anneau linéairement topologisé A est *préadmissible* s'il existe dans A un idéal de définition ; on dit que A est *admissible* s'il est préadmissible et si en outre il est séparé et complet.

On peut faire les remarques suivantes :

1.8.3.1. Si A est un anneau préadmissible, J un idéal de définition, L un idéal ouvert, $J \cap L$ est encore un idéal de définition ; les idéaux de définition d'un anneau préadmissible forment donc un système fondamental d'idéaux ouverts (mais on notera que les puissances J^n ne sont pas nécessairement des idéaux ouverts).

1.8.3.2. Si A est un anneau préadmissible, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologique dont la topologie est déduite de celle de A, alors B est un anneau préadmissible et JB est un idéal de définition de B.

1.8.3.3. Si un anneau préadmissible A est tel que, pour un idéal de définition J, les puissances J^n ($n > 0$) forment un système fondamental de voisinages de 0, il en est de même des puissances J'^n de tout idéal de définition J' de A ([28] 7.1.8).

Définition 1.8.4. On dit qu'un anneau préadmissible A est *préadique* s'il existe un idéal de définition J de A tel que les J^n forment un système fondamental de voisinage de 0 dans A (ou, ce qui revient au même, tel que les J^n soient ouverts). On appelle anneau *adique* un anneau préadique séparé, complet et ayant un idéal de définition de type fini.

On peut préciser la terminologie et faire les remarques suivantes :

1.8.4.1. Nous nous écartons ici de la terminologie de Grothendieck ([28] 7.1.9) : notre notion d'anneau adique est plus forte que la sienne (les deux notions coïncident évidemment dans le cas noethérien). La notion de Grothendieck n'est pas en général stable par localisation et complétion.

1.8.4.2. Si J est un idéal de définition d'un anneau préadique A, on dit encore que A est un anneau J-préadique, et que sa topologie est la topologie J-préadique. Plus généralement, si M est un A-module, la topologie sur M déduite de celle de A (*i.e.*, la topologie ayant pour système fondamental de voisinages de 0 les sous-modules J^nM) est dite topologie J-préadique et la filtration (J^nM) est dite filtration J-préadique.

1.8.4.3. Si J est un idéal de définition de type fini d'un anneau adique A, on dit encore que A est un anneau J-adique, et que sa topologie est la topologie J-adique. Plus généralement, si M est un A-module, la topologie sur M déduite de A est dite topologie J-adique.

1.8.4.4. Lorsque A est un anneau préadique et B est une A-algèbre topologique dont la topologie est déduite de celle de A, on dit que B est une A-algèbre *préadique* (ou *préadique* sur A) et que l'homomorphisme canonique $\rho\colon A \to B$ est *préadique.*

1.8.4.5. Lorsque A est un anneau adique et B est une A-algèbre préadique, séparée et complète, on dit que B est une A-algèbre *adique* (ou *adique* sur A) et que l'homomorphisme canonique $\rho\colon A \to B$ est *adique.*

1.8.4.6. Soient A un anneau préadique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologique. Pour que B soit une A-algèbre préadique, il faut et il suffit que B soit un anneau JB-préadique. En outre, si A est adique et J est de type fini, pour que B soit une A-algèbre adique, il faut et il suffit que B soit un anneau JB-adique.

Proposition 1.8.5. *Soient A un anneau, J un idéal de A, M un A-module complet pour la topologie J-préadique, N un A-module séparé pour la topologie J-préadique, $u\colon M \to N$ un morphisme A-linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est surjectif.*
(ii) *Le morphisme $u_0\colon M/JM \to N/JN$ déduit de u par le changement d'anneaux $A \to A/J$ est surjectif.*

Posons $\mathrm{gr}(A) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} J^n/J^{n+1}$, et considérons le foncteur

$$P \mapsto \mathrm{gr}(P) = \oplus_{n\in\mathbb{N}}(J^nP/J^{n+1}P)$$

de la catégorie des A-modules vers la catégorie des $\mathrm{gr}(A)$-modules. Comme le morphisme canonique $\mathrm{gr}(A) \otimes_{A/J} (P/JP) \to \mathrm{gr}(P)$ est surjectif, la condition (ii) entraîne que $\mathrm{gr}(u)$ est surjectif. Le proposition résulte alors de ([12] chap. III §2.8 théo. 1 et cor. 2).

Corollaire 1.8.6. *Soient A un anneau préadique séparé et complet, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{a}$ un idéal de A. Pour que $\mathfrak{a}$ soit un A-module de type fini, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}/J\mathfrak{a}$ soit un A-module de type fini.*

En effet, en tant que sous-module de A, $\mathfrak{a}$ est séparé pour la topologie J-préadique, et le corollaire résulte de 1.8.5.

Proposition 1.8.7. *Soient A un anneau, J un idéal de A tel que J/J^2 soit un A-module de type fini, M un A-module tel que M/JM soit un A-module de type fini, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert pour la topologie J-préadique de A tel que $\mathfrak{a}/J\mathfrak{a}$ soit un A-module de type fini.*

(i) *L'anneau $\widehat{A} = \varprojlim(A/J^{n+1})$ est adique. Si $\widehat{J}$ est l'adhérence dans $\widehat{A}$ de l'image canonique de J, qui s'identifie aussi à $\varprojlim(J/J^{n+1})$, $\widehat{J}$ est un idéal de définition de type fini de $\widehat{A}$, $\widehat{J}^n$ est l'adhérence dans $\widehat{A}$ de l'image canonique de J^n, $\widehat{A}/\widehat{J}^n$ est isomorphe à A/J^n et $\widehat{J}/\widehat{J}^2$ à J/J^2.*
(ii) *Soient $\widehat{M} = \varprojlim(M/J^{n+1}M)$ le séparé complété de M, $i\colon M \to \widehat{M}$ l'application canonique. Alors $\widehat{M}$ est un $\widehat{A}$-module de type fini, $\widehat{M} = \widehat{A}.i(M)$,*

$\widehat{J}^n\widehat{M}$ est l'adhérence dans $\widehat{M}$ de l'image canonique de J^nM, et $\widehat{M}/\widehat{J}^n\widehat{M}$ est isomorphe à M/J^nM.

(iii) *Soit $\widehat{\mathfrak{a}} = \varprojlim(\mathfrak{a}/J^{n+1}\mathfrak{a})$ le séparé complété de $\mathfrak{a}$. Alors $\widehat{\mathfrak{a}}$ est un idéal ouvert de type fini de $\widehat{A}$, et on a $\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\widehat{A}$; en particulier, on a $\widehat{J} = J\widehat{A}$.*

Les propositions (i) et (ii) résultent de ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1). Si $J^m \subset \mathfrak{a}$, alors $\widehat{\mathfrak{a}}$ s'identifie à $\varprojlim_{n\geq m}(\mathfrak{a}/J^{n+1})$, qui est un idéal ouvert de $\widehat{A}$. Les autres assertions de la proposition (iii) résultent de (ii).

1.8.8. Soient A un anneau préadique, B une A-algèbres préadique, C une A-algèbre topologique. Supposons C un anneau préadique (mais pas forcement une A-algèbre préadique). La topologie sur C déduite de celle de A étant plus finie que la topologie donnée, pour tout idéal de définition K de C, il existe un idéal de définition J de A tel que $JC \subset K$; donc le produit tensoriel complété $B\widehat{\otimes}_A C$, qui est par définition ([28] 0.7.7.1) la limite projective des anneaux

$$(B/J^nB) \otimes_{A/J^n} (C/K^n) \simeq (B \otimes_A C)/K^n(B \otimes_A C),$$

est isomorphe au séparé complété de $B \otimes_A C$ pour la topologie $K(B \otimes_A C)$-préadique. Si K est de type fini sur C, il résulte de 1.8.7 que $B\widehat{\otimes}_A C$ est un anneau $K(B\widehat{\otimes}_A C)$-adique et

$$(B\widehat{\otimes}_A C)/K^n(B\widehat{\otimes}_A C) \simeq (B \otimes_A C)/K^n(B \otimes_A C) \simeq (B/J^nB) \otimes_{A/J^n} (C/K^n). \tag{1.8.8.1}$$

1.8.9. Soient A un anneau linéairement topologisé, (J_λ) un système fondamental d'idéaux ouverts de A, S une partie multiplicative de A. Notons S_λ l'image canonique de S dans A/J_λ. Les anneaux $S_\lambda^{-1}(A/J_\lambda)$ forment un système projectif. On désigne par $A\{S^{-1}\}$ la limite projective de ce système et on l'appelle *anneau complet de fractions* de A ayant leurs dénominateurs dans S. Cette définition ne dépend pas du système fondamental (J_λ) choisi. L'anneau $A\{S^{-1}\}$ est topologiquement isomorphe au séparé complété de $S^{-1}A$ pour la topologie dont un système fondamental de voisinages de 0 est formé des $S^{-1}J_\lambda$ ([28] 0.7.6.2). Plus généralement, si M est un A-module, on désigne par $M\{S^{-1}\}$ le séparé complété de $S^{-1}M$ pour la topologie déduite de celle de $S^{-1}A$.

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de A ; on peut supposer que $J_\lambda \subset \mathfrak{a}$ pour tout λ, et par suite $S^{-1}J_\lambda \subset S^{-1}\mathfrak{a}$ dans $S^{-1}A$, autrement dit, $S^{-1}\mathfrak{a}$ est un idéal ouvert de $S^{-1}A$. Donc $\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ est un idéal ouvert de $A\{S^{-1}\}$, et l'anneau discret $A\{S^{-1}\}/\mathfrak{a}\{S^{-1}\}$ est isomorphe à $S^{-1}(A/\mathfrak{a})$. Inversement, tout idéal ouvert de $A\{S^{-1}\}$ est de cette forme ([28] 0.7.6.9).

Proposition 1.8.10 ([28] 0.7.6.11). *Si A est un anneau admissible, il en est de même de $A\{S^{-1}\}$, et pour tout idéal de définition J de A, $J\{S^{-1}\}$ est un idéal de définition de $A\{S^{-1}\}$.*

Proposition 1.8.11. *Soient A un anneau adique, S une partie multiplicative de A, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de type fini de A. Alors $A\{S^{-1}\}$ est un anneau adique, $J\{S^{-1}\}$ est un idéal de définition de type fini de $A\{S^{-1}\}$, et on a $\mathfrak{a}\{S^{-1}\} = \mathfrak{a}(A\{S^{-1}\})$; en particulier, on a $J\{S^{-1}\} = J(A\{S^{-1}\})$ et $J^n\{S^{-1}\} = (J\{S^{-1}\})^n = J^n(A\{S^{-1}\})$ pour tout $n \geq 1$.*

Cela résulte de 1.8.7.

1.8.12. Soient A un anneau linéairement topologisé, M un A-module. Pour tout élément f de A, on désigne par $A_{\{f\}}$ l'anneau complet des fractions $A\{S_f^{-1}\}$ et par $M_{\{f\}}$ le $A_{\{f\}}$-module $M\{S_f^{-1}\}$, où S_f est l'ensemble multiplicatif des f^n ($n \geq 0$). Lorsque f parcourt une partie multiplicative S de A, les $A_{\{f\}}$ forment un système inductif filtrant d'anneaux ([28] 0.7.6.15), et les $M_{\{f\}}$ forment un système inductif filtrant de modules. On pose $A_{\{S\}} = \varinjlim_{f \in S} A_{\{f\}}$ et $M_{\{S\}} = \varinjlim_{f \in S} M_{\{f\}}$. On a un homomorphisme canonique d'anneaux $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$, et un morphisme canonique $A_{\{S\}}$-linéaire $M_{\{S\}} \to M\{S^{-1}\}$.

Proposition 1.8.13 ([28] 0.7.6.17). *Soient A un anneau admissible, $\mathfrak{p}$ un idéal premier ouvert de A, $S = A - \mathfrak{p}$. Alors les anneaux $A_{\{S\}}$ et $A\{S^{-1}\}$ sont locaux, l'homomorphisme canonique $A_{\{S\}} \to A\{S^{-1}\}$ est local et les corps résiduels de $A_{\{S\}}$ et $A\{S^{-1}\}$ sont canoniquement isomorphes au corps des fractions de $A/\mathfrak{p}$.*

Proposition 1.8.14 ([28] 0.7.6.18). *Sous les hypothèses de* (1.8.13), *si on suppose de plus que A est un anneau adique noethérien, les anneaux locaux $A\{S^{-1}\}$ et $A_{\{S\}}$ sont noethériens, et $A\{S^{-1}\}$ est un $A_{\{S\}}$-module fidèlement plat.*

Remarque 1.8.15. L'énoncé 1.8.14 sera étendu à un cas non noethérien (1.12.7).

1.8.16. Soient A un anneau linéairement topologisé, $\mathscr{B}$ un système fondamental d'idéaux ouverts de A. On désigne par $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$ le sous-anneau des séries formelles restreintes de $A[[\xi_1, \ldots, \xi_n]]$ ([12] chap. III §4.2 déf. 2). Pour tout $J \in \mathscr{B}$, on a un homomorphisme canonique

$$u_J \colon A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle \to (A/J)[\xi_1, \ldots, \xi_n]. \tag{1.8.16.1}$$

On munit $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$ de la topologie linéaire dont les noyaux des u_J (pour $J \in \mathscr{B}$) forment un système fondamental d'idéaux ouverts. Si A est complet et séparé, l'homomorphisme

$$\varprojlim_{\mathscr{B}} u_J \colon A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle \to \varprojlim_{\mathscr{B}} (A/J)[\xi_1, \ldots, \xi_n] \tag{1.8.16.2}$$

est un isomorphisme d'anneaux topologiques ([12] chap. III §4.2 prop. 3).

Proposition 1.8.17 ([28] 0.7.5.2).

(i) *Si A est un anneau admissible, il en est de même de $A' = A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$.*

(ii) *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A. Si l'on pose $J' = JA'$, alors A' est un anneau J'-adique, et J' est le noyau de l'homomorphisme u_J* (1.8.16.1). *Si, en outre, A est noethérien, il en est de même de A'.*

Définition 1.8.18. Soient A un anneau admissible, B une A-algèbre topologique. On dit que B est une A-algèbre *topologiquement de type fini* (ou *topologiquement de type fini* sur A) et que l'homomorphisme canonique $\rho\colon A \to B$ est *topologiquement de type fini* si B est admissible et est isomorphe en tant que A-algèbre topologique à un quotient d'une algèbre de séries restreintes $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$.

On dit que B est une A-algèbre *topologiquement de présentation finie* (ou *topologiquement de présentation finie* sur A) et que l'homomorphisme canonique $\rho\colon A \to B$ est *topologiquement de présentation finie* si B est admissible et est isomorphe en tant que A-algèbre topologique à un quotient d'une algèbre de séries restreintes $A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$ par un idéal de *type fini.*

On peut faire les remarques suivantes :

1.8.18.1. Soient A un anneau admissible, B une A-algèbre topologique. Dire que B est topologiquement de type fini sur A équivaut aux conditions suivantes :

(i) B est un anneau admissible.

(ii) Il existe un homomorphisme continu, strict ([13] chap. III §2.8 déf. 1) et surjectif de A-algèbres topologiques

$$\varphi\colon A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle \to B. \tag{1.8.18.1}$$

Dire que B est topologiquement de présentation finie sur A équivaut aux mêmes conditions avec en plus $\ker(\varphi)$ un idéal de type fini.

1.8.18.2. Soient A un anneau adique, B une A-algèbre topologique, $\varphi\colon A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle \to B$ un homomorphisme surjectif de A-algèbres. Pour que φ soit continu et strict, il faut et il suffit que B soit une A-algèbre préadique. Cela résulte de 1.8.2 et 1.8.17(ii).

Proposition 1.8.19. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A, B une A-algèbre topologique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est une A-algèbre adique, et B/JB est une (A/J)-algèbre de type fini.*

(ii) *B est topologiquement de type fini sur A.*

En effet, (ii) entraîne (i) en vertu de 1.8.17(ii) et 1.8.18.2. Montrons que (i) entraîne (ii). Soient $(b_1, \ldots, b_n)$ des éléments de B dont les classes modulo JB forment un système de générateurs de la (A/J)-algèbre B/JB, $\varphi\colon A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle \to B$ l'homomorphisme continu associé ([12] chap. III §4.2 prop. 4). Alors φ est surjectif (1.8.5) et strict (1.8.18.2), d'où la conclusion.

Corollaire 1.8.20. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de type fini. Alors $\widehat{B} = \varprojlim (B/J^{n+1}B)$ est topologiquement de type fini sur A.*

En effet, on peut supposer J de type fini sur A, et la conclusion résulte de 1.8.7 et 1.8.19.

Corollaire 1.8.21. *Soient A un anneau adique, B une A-algèbre topologiquement de type fini, C une B-algèbre topologiquement de type fini. Alors C est topologiquement de type fini sur A.*

Corollaire 1.8.22. *Soient A un anneau adique, B une A-algèbre topologiquement de type fini, A' une A-algèbre topologique. Supposons A' un anneau adique (mais pas forcement une A-algèbre adique). Alors $B\widehat{\otimes}_A A'$ est topologiquement de type fini sur A'.*

Cela résulte de 1.8.8 et 1.8.19.

Proposition 1.8.23. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie. Alors B est une A-algèbre adique, et B/JB est une (A/J)-algèbre de présentation finie.*

En effet, cela résulte de 1.8.17(ii) et 1.8.18.2.

Remarque 1.8.24. La proposition 1.8.23 sera renforcée dans 1.10.4.

Définition 1.8.25. Soient A un anneau, J un idéal de A. On dit que (A, J) vérifie :

(a) la condition d'*Artin-Rees* (en abrégé AR), si J est de type fini et si pour tout A-module de type fini M et tout sous-A-module N de M, la filtration induite sur N par la filtration J-préadique sur M est J-bonne ([12] chap. III §3.1 déf. 1) ; autrement dit, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$J((J^n M) \cap N) = (J^{n+1} M) \cap N. \qquad (1.8.25.1)$$

(b) la condition de *Krull* (en abrégé Kr), si pour tout A-module de type fini M et tout sous-A-module N de M, la topologie J-préadique de N est induite par la topologie J-préadique de M.

On peut faire les remarques suivantes :

1.8.25.2. La condition (AR) est clairement plus forte que (Kr).

1.8.25.3. Si (A, J) vérifie (Kr), il en est de même de (A, K), pour tout idéal de définition K de la topologie J-préadique sur A.

1.8.25.4. D'après le lemme d'Artin-Rees ([12] chap. III §3.1 prop. 1 et cor. 1), pour tout anneau noethérien A et tout idéal J de A, (A, J) vérifie (AR). On donnera dans 1.9.18 un exemple important d'anneaux non noethériens qui vérifient (AR).

Proposition 1.8.26. *Soient A un anneau, J un idéal de A tels que (A, J) vérifie* (Kr)*. Pour tout A-module M, on note $\widehat{M}$ le séparé complété de M pour la topologie J-préadique.*

(i) *Pour toute suite exacte de A-modules $0 \to N \to L \to M \to 0$ telle que L soit de type fini, la suite $0 \to \widehat{N} \to \widehat{L} \to \widehat{M} \to 0$ est exacte.*

(ii) *Pour tout A-module de présentation finie M, la flèche canonique $M \otimes_A \widehat{A} \to \widehat{M}$ est un isomorphisme.*

(i) Le morphisme surjectif $L \to M$ est toujours strict pour les topologies J-préadiques. Comme (A, J) vérifie (Kr), le morphisme $N \to L$ est strict pour les topologies J-préadiques ([13] chap. III §2.8 prop. 24). La proposition résulte alors de ([12] chap. III §2.12 lem. 2).

(ii) Soit $0 \to N \to L \to M \to 0$ une suite exacte de A-modules, où $L = A^n$ et N est de type fini. Compte tenu de (i), on a un diagramme commutatif de $\widehat{A}$-modules

$$\begin{tikzcd} & N \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & L \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & M \otimes_A \widehat{A} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \widehat{N} \arrow[r] & \widehat{L} \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes et β est un isomorphisme. Comme α est surjectif ([12] chap. III §2.12 prop. 16), γ est un isomorphisme ([12] chap. I §1.4 prop. 2).

Lemme 1.8.27. *Soient A un anneau, J un idéal de type fini de A, M un A-module de type fini. Si (A, J) vérifie* (AR)*, la fermeture $\bigcap_{n \geq 0} J^n M$ de $\{0\}$ dans M pour la topologie J-préadique est l'ensemble des $x \in M$ pour lesquels il existe $t \in J$ tel que $(1-t)x = 0$.*

Il suffit de calquer la démonstration de ([12] chap. III §3.2 prop. 5). Si $x = tx$, où $t \in J$, alors $x = t^n x \in J^n M$ pour tout $n \geq 0$, et donc $x \in F = \cap_{n \in \mathbb{N}} J^n M$. Inversement, si $x \in F$, il existe un entier n tel que

$$Jx = J((J^n M) \cap Ax) = (J^{n+1} M) \cap Ax = Ax.$$

Donc il existe $t \in J$ tel que $x = tx$.

Proposition 1.8.28. *Soient A un anneau, J un idéal de type fini de A tels que (A, J) vérifie* (AR)*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *J est contenu dans le radical de A.*

(b) *Tout A-module de type fini est séparé pour la topologie J-préadique.*

(c) *Pour tout A-module de type fini M, tout sous-A-module de M est fermé pour la topologie J-préadique.*

(d) *Tout idéal maximal de A est fermé pour la topologie J-préadique.*

Il suffit de calquer la démonstration de ([12] chap. III §3.3 prop. 6), en remplaçant l'usage de ([12] chap. III §3.2 prop. 5) par celui de 1.8.27.

Corollaire 1.8.29. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A tels que (A, J) vérifie* (AR). *Alors les conditions équivalentes de* (1.8.28) *sont remplies ; en particulier, tout A-module de type fini est complet et séparé pour la topologie J-adique.*

En effet, la condition 1.8.28(a) est clairement remplie ([12] chap. III §2.13 lem. 3), et la topologie J-adique d'un A-module de type fini est complète en vertu de ([12] chap. III §2.12 cor. 1 de prop. 16).

1.8.30. Soient A un anneau, J un idéal de A, M un A-module. On appelle sous-module de *J-torsion* de M, et l'on note $M_{J\text{-tor}}$, le sous-module des sections $x \in M$ pour lesquelles il existe un entier $k \geq 0$ tel que $J^k x = 0$. On dit que M est *J-nul* (resp. *J-pur*) si $M = M_{J\text{-tor}}$ (resp. $M_{J\text{-tor}} = 0$). On dit que A est *J-pur* s'il est J-pur en tant que A-module.

On peut préciser la terminologie et faire les remarques suivantes :

1.8.30.1. Lorsque A est un anneau préadmissible et J est un idéal de définition de A, le module $M_{J\text{-tor}}$ ne dépend pas du choix de J ; on l'appelle sous-module de *torsion topologique* de M et on le note M_{tor}. On dit que M est *rig-nul* (resp. *rig-pur*) si $M = M_{\text{tor}}$ (resp. $M_{\text{tor}} = 0$). On dit que A est *rig-pur* s'il est rig-pur en tant que A-module.

1.8.30.2. Supposons J de type fini ; posons $X = \operatorname{Spec}(A)$ et $U = X - \mathrm{V}(J)$. Il résulte de ([28] 6.8.4) que $M_{J\text{-tor}}$ est le noyau du morphisme de restriction $M \to \Gamma(U, \widetilde{M})$. De plus, en vertu de 1.5.5.5, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\operatorname{Ass}(A) \subset U$.
- (ii) U est schématiquement dense dans X.
- (iii) A est J-pur.

1.8.31. Soient X un schéma, Y un sous-schéma fermé de présentation finie de X, défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, U l'ouvert $X - Y$ de X, $j \colon U \to X$ l'injection canonique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. On dit que $\mathscr{F}$ est *Y-pur* (ou *$\mathscr{J}$-pur*) si l'homomorphisme canonique $\mathscr{F} \to j_*(\mathscr{F}|U)$ est injectif (cf. [31] 5.9.9).

Lorsque $X = \operatorname{Spec}(A)$ est affine, $\mathscr{J} = \widetilde{J}$, où J est un idéal de type fini de A, et $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A module, $\mathscr{F}$ est $\mathscr{J}$-pur si et seulement si M est J-pur.

Lemme 1.8.32. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de présentation finie de S, U l'ouvert $S - T$ de S, X un S-schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent, Y l'image réciproque de T dans X. Si U est schématiquement dense dans S et $\mathscr{F}$ est S-plat, alors $\mathscr{F}$ est Y-pur.*

En effet, la question étant locale sur S et sur X, on peut se borner au cas où $S = \operatorname{Spec}(A)$ et $X = \operatorname{Spec}(B)$ sont affines, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module, et T

est défini par un idéal de type fini J de A. Comme A est J-pur (1.8.30.2) et M est A-plat, M est (JB)-pur.

Proposition 1.8.33 ([28] 6.9.17). *Soient X un schéma, $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$, Y le sous-schéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$, U l'ouvert $X-Y$ de X, $j\colon U \to X$ l'injection canonique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. Alors le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_U}(\mathscr{F}|U,\mathscr{G}|U) \tag{1.8.33.1}$$

est injectif ; il est bijectif dans chacun des cas suivants :

(a) *X est quasi-compact, $\mathscr{J}$ est localement monogène, le noyau du morphisme d'adjonction $\mathscr{O}_X \to j_*(\mathscr{O}_U)$ est de type fini et $\mathscr{F}$ est X-plat.*

(b) *X admet un recouvrement fini (V_i) par des ouverts affines tels que pour tout i, si l'on pose $A_i = \Gamma(V_i,\mathscr{O}_X)$, $J_i = \Gamma(V_i,\mathscr{J})$ et $M_i = \Gamma(V_i,\mathscr{F})$, (A_i,J_i) vérifie* (Kr) *et que M_i soit cohérent.*

Montrons d'abord que le morphisme (1.8.33.1) est injectif. Soit $f\colon \mathscr{J}^n\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme $\mathscr{O}_X$-linéaire tel que $f|U = 0$; alors l'image $f(\mathscr{J}^n\mathscr{F}) \subset \mathscr{G}$ est un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, dont le support est contenu dans Y. En vertu de ([28] 6.8.4), il existe un entier $m > 0$ tel que $\mathscr{J}^m f(\mathscr{J}^n\mathscr{F}) = 0$, autrement dit la restriction de f à $\mathscr{J}^{n+m}\mathscr{F}$ est nulle, donc aussi l'image de f dans $\varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G})$.

Pour prouver que le morphisme (1.8.33.1) est surjectif sous l'une des conditions (a) ou (b), considérons d'abord le cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ est affine, de sorte que $\mathscr{J} = \widetilde{J}$, où J est un idéal de type fini de A, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini et $\mathscr{G} = \widetilde{N}$, où N est un A-module.

Supposons que J soit principal engendré par t, que M soit A-plat et que le noyau du morphisme d'adjonction $\mathscr{O}_X \to j_*(\mathscr{O}_U)$ soit de type fini. Il faut montrer que le morphisme canonique

$$\varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_A(t^nM,N) \to \mathrm{Hom}_{A_t}(M_t,N_t) \tag{1.8.33.2}$$

est surjectif. On peut se réduire grâce aux isomorphismes canoniques $t^nM \simeq t^nA\otimes_A M$ et $\mathrm{Hom}_A(t^nA\otimes_A M,N) \simeq \mathrm{Hom}_A(t^nA,\mathrm{Hom}_A(M,N))$ au cas où $M = A$. Comme j est cohérent, $j_*(\mathscr{O}_U)$ est un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent ([28] 6.7.1). Il résulte alors des hypothèses que $A_{t\text{-tor}}$ est un idéal de type fini de A. Il existe donc un entier $\alpha \geq 0$ tel que $t^\alpha A_{t\text{-tor}} = 0$. Soient $s \in N$, n un entier ≥ 0. La suite

$$0 \longrightarrow A_{t\text{-tor}} \longrightarrow A \xrightarrow{\cdot t^{n+\alpha}} t^{n+\alpha}A \longrightarrow 0$$

est exacte. Le morphisme $A \to N$ qui à x associe $xt^\alpha s$, s'annule sur $A_{t\text{-tor}}$. Il induit donc un A-morphisme $\varphi\colon t^{n+\alpha}A \to N$ tel que $\varphi(t^{n+\alpha}x) = t^\alpha xs$ pour tout $x \in A$.

L'image canonique de φ dans $\mathrm{Hom}_{A_t}(A_t, N_t) = N_t$ est s/t^n ; d'où la surjectivité de (1.8.33.1) dans ce cas.

Supposons que (A, J) vérifie (Kr) et que M soit cohérent, et montrons que le morphisme (1.8.33.1) est surjectif. Soient $(g_i)_{1\leq i\leq m}$ un système de générateurs de J, $(s_j)_{1\leq j\leq n}$ un système de générateurs de M. Soit $f\colon \mathscr{F}|U \to \mathscr{G}|U$ un $\mathscr{O}_U$-morphisme, et considérons les sections $t_i = f(s_j|U)$ de $\mathscr{G}$ au-dessus de U. Par la preuve de ([28] 6.9.17), il existe un entier $h \geq 0$ tel que chacune des sections $g_i^h t_j$ se prolonge en une section u_{ij} de $\mathscr{G}$ au-dessus de X. Si J_1 est l'idéal de A engendré par les g_i^h, on a $J^{mh} \subset J_1 \subset J$, donc on peut désormais supposer $h = 1$.

Les éléments $g_i s_j$ engendrent le A-module JM et définissent donc un épimorphisme $p\colon A^{mn} \to JM$ tel que $p(e_{ij}) = g_i s_j$, où (e_{ij}) est la base canonique de A^{mn} ; soit $R = \ker(p)$ son noyau. Comme M est cohérent, R est un A-module de type fini. Soit d'autre part $q\colon A^{mn} \to N$ le A-morphisme tel que $q(e_{ij}) = u_{ij}$, et soit $S = \ker(q)$ son noyau. Par définition, on a $\widetilde{q}|U = f \circ (\widetilde{p}|U)$. Donc on a $\widetilde{R}|U \subset \widetilde{S}|U$. Cela s'exprime aussi en disant que le $\mathscr{O}_X$-module $\widetilde{R}/(\widetilde{R}\cap\widetilde{S})$ a son support dans $\mathrm{V}(J)$. Il existe donc un entier $\nu \geq 0$ tel que $J^\nu(\widetilde{R}/(\widetilde{R}\cap\widetilde{S})) = 0$ ([28] 6.8.4), autrement dit $J^\nu R \subset S$. Comme (A, J) vérifie (Kr), il existe $\mu \geq 0$ tel que $J^\mu A^{mn} \cap R \subset J^\nu R \subset S$. On en déduit un A-morphisme $\varphi\colon J^{1+\mu}M \to N$ tel que $\varphi \circ (p|J^\mu A^{mn}) = q|J^\mu A^{mn}$. En particulier, la restriction de $\widetilde{\varphi}\colon \mathscr{J}^{1+\mu}\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ à U est f ; d'où la surjectivité de (1.8.33.1) dans ce cas.

Montrons maintenant la surjectivité du morphisme (1.8.33.1) lorsque X est un schéma quelconque sous l'une des conditions (a) ou (b). Soit (V_i) un recouvrement fini de X par des ouverts affines tels que si l'on pose $A_i = \Gamma(V_i, \mathscr{O}_X)$, $J_i = \Gamma(V_i, \mathscr{J})$ et $M_i = \Gamma(V_i, \mathscr{F})$, l'une des deux conditions suivantes soit remplie :

(a′) Le noyau du morphisme d'adjonction $\mathscr{O}_X \to j_*(\mathscr{O}_U)$ est de type fini, $\mathscr{F}$ est X-plat et pour tout i, J_i est un idéal principal.

(b) (A_i, J_i) vérifie (Kr) et M_i est cohérent.

Pour tout couple (i, j), posons $V_{ij} = V_i \cap V_j$. On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_U(\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[r] & \prod_i \mathrm{Hom}_{U\cap V_i}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{i,j} \mathrm{Hom}_{U\cap V_{ij}}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \\
\varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_X(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[u] & \prod_i \varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{V_i}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u] & \prod_{i,j} \varinjlim_{n\geq 0} \mathrm{Hom}_{V_{ij}}(\mathscr{J}^n\mathscr{F},\mathscr{G}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où l'on a écrit pour simplifier $\mathrm{Hom}_W(\mathscr{M},\mathscr{N})$ au lieu de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_W}(\mathscr{M}|W,\mathscr{N}|W)$ pour deux faisceaux $\mathscr{M},\mathscr{N}$ et un ouvert W. En effet, la ligne inférieure est exacte car le foncteur $\varinjlim$ commute aux produits finis dans la catégorie des ensembles. Comme la flèche verticale centrale est bijective et que la flèche verticale de droite est injective d'après ce qui a été vu précédemment, la flèche verticale de gauche est bijective.

Corollaire 1.8.34. *Soient X un schéma, $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$, Y le sous-schéma fermé de X défini par $\mathscr{J}$, U l'ouvert $X-Y$ de X, $j\colon U \to X$ l'injection canonique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. Alors le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{n\geq} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{F}) \tag{1.8.34.1}$$

est injectif ; il est bijectif dans chacun des cas suivants :

(a) *X est quasi-compact, $\mathscr{J}$ est localement monogène et le noyau du morphisme d'adjonction $\mathscr{O}_X \to j_*(\mathscr{O}_U)$ est de type fini.*

(b) *X admet un recouvrement fini (V_i) par des ouverts affines tels que pour tout i, si l'on pose $A_i = \Gamma(V_i, \mathscr{O}_X)$ et $J_i = \Gamma(V_i, \mathscr{J})$, (A_i, J_i) vérifie* (Kr) *et que A_i soit cohérent.*

1.9 Anneaux valuatifs

Définition 1.9.1 ([19] 3.1.1). On dit qu'un anneau topologique A est *prévaluatif* si les conditions suivantes sont remplies :

(i) A est local.

(ii) La topologie de A est définie par un idéal de type fini.

(iii) Tout idéal ouvert de type fini de A est inversible.

On dit que A est *valuatif* s'il est prévaluatif et si en outre il est séparé et complet.

On notera que tout idéal de définition de type fini d'un anneau prévaluatif est principal, engendré par un élément non diviseur de zéro.

Exemple 1.9.2. Soient A un anneau de valuation, J un idéal non nul de type fini de A. Alors A muni de la topologie J-préadique est un anneau prévaluatif.

Proposition 1.9.3. *Soient A un anneau prévaluatif qui n'est pas un corps, J un idéal de définition de type fini de A, t un générateur de J. Pour que A soit séparé, il faut et il suffit que A_t soit un corps. Dans ces conditions, A est un anneau de valuation et J est contenu dans l'idéal maximal de A.*

Notons d'abord que $A \subset A_t$ car t est non diviseur de zéro dans A. Montrons que si A_t est un corps, A est séparé. Soient f un élément non nul de $\cap_m J^m$, $g \in A$, n un entier ≥ 0, tels que g/t^n soit l'inverse de f dans A_t. La relation $t^n = fg$ dans A, entraîne que $t^n \in t^m A$ pour tout $m \geq 0$. Donc t est inversible dans A et $A = A_t$ est un corps, ce qui est exclu. Par suite A est séparé.

Montrons que si A est séparé, A_t est un corps. Il suffit évidemment de montrer que tout élément non nul f de A est inversible dans A_t. Comme A est prévaluatif, il existe $g \in A$ non diviseur de zéro tel que $fA+tA = gA$. On peut alors considérer

t/g et f/g comme des éléments de A, et au moins l'un d'eux est inversible, car A est local. Si f/g est inversible alors $t \in fA$; donc f est inversible dans A_t. Si t/g est inversible alors $f \in tA$; on se ramène dans ce cas à montrer que $f/t \in A$ est inversible dans A_t. Or par hypothèse, il existe $n > 0$ tel que $f \notin t^n A$; on en déduit par une récurrence fini que f est inversible dans A_t.

Supposons toujours A séparé ; donc J est contenu dans l'idéal maximal de A. Montrons que les idéaux principaux de A sont totalement ordonnés par la relation d'inclusion ([12] chap. VI §1.2 théo. 1). Soient f, g deux éléments non nuls de A. On a vu que $f \in tA$ ou $t \in fA$; et de même pour g. Si $t \in fA$ ou $t \in gA$, alors $fA + gA$ est ouvert et on conclut comme plus haut que $f \in gA$ ou $g \in fA$. Sinon, f et g appartiennent à tA et on recommence avec f/t et g/t. Comme A est séparé, on en déduit par une récurrence fini que $f \in gA$ ou $g \in fA$.

Proposition 1.9.4 ([19] 3.3.1). *Soient A un anneau prévaluatif, J un idéal de définition de type fini de A, t un générateur de J. Supposons J contenu dans l'idéal maximal de A et posons $V = A/(\cap_n J^n)$. Alors :*

(i) *A_t est un anneau local.*

(ii) *V est un anneau de valuation, de corps des fractions le corps résiduel de A_t.*

(iii) *V est séparé pour de la topologie JV-préadique.*

Notons d'abord que $\mathrm{Spec}(A_t) \neq \emptyset$ car t n'est pas diviseur de zéro dans A. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A qui définit un point fermé de $\mathrm{Spec}(A_t)$, $\kappa(\mathfrak{p})$ le corps résiduel de $A_\mathfrak{p}$, $W = A/\mathfrak{p}$, $\overline{t}$ la classe de t dans W. Donc W est un anneau local intègre, de corps des fractions $\kappa(\mathfrak{p})$ et $\overline{t} \neq 0$. On munit W de la topologie JW-préadique. Tout idéal ouvert de W est l'image d'un idéal ouvert de A, donc monogène et même inversible puisqu'il contient une puissance de $\overline{t}$; par suite W est prévaluatif. D'autre part, $W \neq \kappa(\mathfrak{p})$ car $\mathfrak{p}$ n'est pas l'idéal maximal de A, et $W_{\overline{t}} = \kappa(\mathfrak{p})$. Dans ces conditions, il résulte de 1.9.3 que W est un anneau de valuation, séparé pour la topologie JW-préadique.

Montrons que A_t est un anneau local (et est donc isomorphe à $A_\mathfrak{p}$). Il suffit de montrer que tout $f \in A$, de classe non nulle $\overline{f}$ dans W, est inversible dans A_t. Comme W est un anneau de valuation, si $\overline{t}^n \notin \overline{f}W$ pour tout $n > 0$, alors $\overline{f} \in \cap_n \overline{t}^n W = 0$, ce qui est exclu. Il existe donc un entier $n > 0$ tel que $\overline{t}^n \in \overline{f}W$. Soit h un élément non diviseur de zéro de A tel que $fA + t^n A = hA$, et soit $g \in A$ tel que $f = hg$. On a alors $\overline{f}W = \overline{f}W + \overline{t}^n W = hW$. Comme $\overline{f} \neq 0$, g est inversible dans W, et donc aussi dans A ; d'où $t^n \in fA$. Par suite f est inversible dans A_t.

Montrons enfin que $W = V$, autrement dit que $\mathfrak{p} = \cap_n J^n$. Soient $f \in \mathfrak{p}$, n un entier > 0, h un élément non diviseur de zéro de A tels que $fA + t^n A = hA$, et soit $g \in A$ tel que $t^n = hg$. On a alors $\overline{t}^n W = hW$. Comme $\overline{t} \neq 0$, g est inversible dans W, et donc aussi dans A. D'où $f \in t^n A$ et $\mathfrak{p} \subset \cap_n J^n$. L'inclusion inverse découle du fait que W est séparé pour la topologie JW-préadique.

Lemme 1.9.5. *Soient A un anneau de valuation qui n'est pas un corps, J un idéal non nul de type fini de A. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La topologie J-préadique sur A est séparée.*

(ii) *Tout idéal non nul de A est ouvert pour la topologie J-préadique.*

Comme A n'est pas un corps, (ii) entraîne facilement (i). Montrons que (i) implique (ii). Soient t un élément non nul de A qui engendre J, f un élément non nul de A. Il existe $n > 0$ tel que $f \notin t^n A$, et donc $t^n \in fA$. Par suite, tout idéal non nul de A est ouvert pour la topologie J-préadique.

Remarque 1.9.6. Il existe sur tout anneau intègre une et une seule topologie linéaire, non discrète telle que tout idéal non nul soit ouvert, à savoir la topologie linéaire pour laquelle les idéaux non nuls forment un système fondamental d'idéaux ouverts ([13] Chap. III §1.2 prop. 1).

Proposition 1.9.7. *Soit A un anneau de valuation qui n'est pas un corps. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La topologie linéaire de A pour laquelle les idéaux non nuls forment un système fondamental d'idéaux ouverts* (1.9.6)*, est définie par un idéal de type fini J de A.*

(ii) *Il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de A, contenu dans tous les idéaux premiers non nuls de A.*

Dans ces conditions, pour qu'un idéal de type fini de A soit un idéal de définition de la topologie définie dans (i)*, il faut et il suffit qu'il soit engendré par un élément non nul de $\mathfrak{p}$.*

Notons d'abord qu'étant donnés deux idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de A, on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. En effet, sinon il existerait $a \in \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ et $b \in \mathfrak{b} - \mathfrak{a}$, ce qui est impossible car $a \in bA$ ou $b \in aA$.

Soient t un élément de l'idéal maximal de A, $\sqrt{tA}$ le radical de tA. Soient $a, b \in A$ tels que $ab \in \sqrt{tA}$. D'après ce qui précède, on peut supposer $\sqrt{aA} \subset \sqrt{bA}$; autrement dit, $a^n \in bA$ pour un entier $n > 0$; d'où $a \in \sqrt{tA}$. Par suite $\sqrt{tA}$ est un idéal premier de A.

Supposons la condition (i) remplie. Comme la topologie J-préadique de A est séparée (1.9.5) et non discrète, J est engendré par un élément non nul t de l'idéal maximal de A. D'autre part, tout idéal non nul de A contient une puissance de t ; donc $\sqrt{tA}$ est un idéal premier, contenu dans tout idéal premier non nul de A, d'où (ii).

Supposons la condition (ii) remplie. Soit t un élément non nul de $\mathfrak{p}$. Pour tout élément non nul a de A, on a $\sqrt{tA} = \mathfrak{p} \subset \sqrt{aA}$. Par suite, tout idéal non nul de A est ouvert pour la topologie tA-préadique. Il résulte de 1.9.6 que la topologie définie dans (i) est la topologie tA-préadique.

On a démontré la dernière assertion de la proposition.

Corollaire 1.9.8. *Pour un anneau topologique A, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est un anneau prévaluatif séparé.*

(ii) *A est un anneau de valuation, ayant un idéal premier non nul* $\mathfrak{p}$ *contenu dans tous les idéaux premiers non nuls, muni de la topologie linéaire pour laquelle les idéaux non nuls forment un système fondamental d'idéaux ouverts.*

Dans ces conditions, pour qu'un idéal de type fini de A *soit un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il soit engendré par un élément non nul de* $\mathfrak{p}$.

On notera que chacune des conditions entraîne que A n'est pas un corps. Le corollaire résulte donc de 1.9.3, 1.9.5, 1.9.6 et 1.9.7.

Définition 1.9.9. On appelle *hauteur* d'un anneau valuatif sa hauteur en tant qu'anneau de valuation (1.9.8). Si cette hauteur est finie égale à n, on dit que l'anneau est n*-valuatif*.

Corollaire 1.9.10. *Pour un anneau topologique* A*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A *est un anneau* 1*-valuatif.*

(ii) A *est un anneau de valuation de hauteur* 1*, muni de la topologie linéaire pour laquelle les idéaux non nuls forment un système fondamental d'idéaux ouverts, et il est complet et séparé.*

Dans ces conditions, pour qu'un idéal de type fini de A *soit un idéal de définition, il faut et il suffit qu'il soit engendré par un élément non nul de l'idéal maximal de* A.

Lemme 1.9.11. *Soient* A *un anneau prévaluatif séparé,* J *un idéal de définition de type fini de* A*,* $A_0 = A/J$*. Alors* $\mathrm{Ass}(A_0) = \mathrm{Spec}(A_0)$.

Notons $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Compte tenu de 1.9.8, ([12] chap. IV §1 exerc. 17(d) et chap. VI §4.1 prop. 1), il suffit de montrer que $\mathfrak{m}/J \in \mathrm{Ass}(A_0)$. Soient $x \in \mathfrak{m} - J$, t un générateur de J. Comme $x \notin J$, il existe $y \in A$ tel que $t = xy$; de plus, $y \notin J$ (sinon x serait inversible dans A). Par suite, la classe de x modulo J est un diviseur de zéro de A_0. On en déduit que $\mathfrak{m}/J$ est la réunion des idéaux premiers dans $\mathrm{Ass}(A_0)$ ([12] chap. IV §1 exerc. 17(b)). Comme $\mathrm{Spec}(A)$ est totalement ordonné par inclusion, on conclut que $\mathfrak{m}/J \in \mathrm{Ass}(A_0)$.

Lemme 1.9.12. *Soient* R *un anneau valuatif,* t *un élément non nul de* R *tel que* tR *soit un idéal de définition de* R*,* M *un* R*-module. Pour que* M *soit* R*-plat, il faut et il suffit que* t *ne soit pas diviseur de zéro dans* M.

On sait que M est R-plat si et seulement si M est sans-torsion, *i.e.*, tout élément non nul de R n'est pas diviseur de zéro dans M ([12] chap. VI §3.6 lem. 1). Comme R est séparé, pour tout élément non nul f de R, il existe un entier $n > 0$ tel que $f \notin t^n R$. Donc $t^n \in fR$, et le lemme s'ensuit.

Proposition 1.9.13. *Soient* R *un anneau valuatif,* t *un élément non nul de* R *tel que* tR *soit un idéal de définition de* R*,* A *une* R*-algèbre. Supposons que pour tout* A*-module de type fini* M*, tout sous-module* N *de* M *tel que* M/N *soit* R*-plat, est de type fini sur* A*. Alors* (A, tA) *vérifie* (AR) (1.8.25).

Soient M un A-module de type fini, N un sous-module de M,

$$N_{\mathrm{sat}} = \{x \in M |\ t^n x \in N \text{ pour un entier } n \geq 1\}$$

la saturation de N dans M. On a alors $(t^n M) \cap N_{\mathrm{sat}} = t^n N_{\mathrm{sat}}$ pour tout $n \geq 0$. Comme t n'est pas diviseur de zéro dans M/N_{sat}, M/N_{sat} est R-plat (1.9.12). Par suite, N_{sat} est un A-module de type fini. Il existe alors un entier $n_0 \geq 0$ tel que $t^{n_0} N_{\mathrm{sat}} \subset N$. Pour tout $n \geq n_0$, on a

$$(t^n M) \cap N = ((t^n M) \cap N_{\mathrm{sat}}) \cap N = (t^n N_{\mathrm{sat}}) \cap N = t^n N_{\mathrm{sat}},$$

d'où la conclusion.

Proposition 1.9.14. *Soient R un anneau valuatif de hauteur finie, A une R-algèbre topologiquement de type fini, M un A-module de type fini, N un sous-module de M tel que M/N soit R-plat. Alors N est de type fini sur A.*

On peut se borner au cas où $A = R\langle \xi_1, \ldots, \xi_r \rangle$. Si $u\colon A^j \to M$ est un morphisme A-linéaire surjectif, $A^j/u^{-1}(N) \simeq M/N$; on peut donc supposer M libre de type fini. Soient J un idéal de définition de type fini de R, $R_0 = R/J$, $A_0 = A \otimes_R R_0$, $M_0 = M \otimes_R R_0$, $N_0 = N \otimes_R R_0$. Par hypothèse, $A_0 = R_0[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ et $(M/N) \otimes_R R_0$ est un A_0-module de type fini, R_0-plat. Donc en vertu de 1.5.16, $(M/N) \otimes_R R_0$ est de présentation finie sur A_0. Comme la suite $0 \to N_0 \to M_0 \to (M/N) \otimes_R R_0 \to 0$ est exacte, N_0 est de type fini sur A_0. D'autre part, N est séparé pour la topologie JA-adique, en tant que sous-module de $M = A^j$. Donc N est de type fini sur A (1.8.5).

Remarque 1.9.15. La condition que R est de hauteur finie dans 1.9.14 ne sert qu'à garantir que $\mathrm{Ass}(R_0)$ est fini (1.9.11).

Corollaire 1.9.16. *Soient R un anneau valuatif de hauteur finie, A une R-algèbre topologiquement de type fini qui est plate sur R. Alors A est topologiquement de présentation finie sur R.*

Corollaire 1.9.17. *Soient R un anneau valuatif de hauteur finie, A une R-algèbre topologiquement de type fini, S une partie multiplicative de A, M un $(S^{-1}A)$-module de type fini, N un sous-$(S^{-1}A)$-module de M tel que M/N soit R-plat. Alors N est un $(S^{-1}A)$-module de type fini.*

Soit P un sous-A-module de type fini de M tel que $M = S^{-1}P$. Posons $Q = N \cap P$ dans M, qui est un sous-A-module de P tel que $N = S^{-1}Q$. Comme P/Q est un sous-A-module de M/N, il est R-plat (1.9.12). Donc en vertu de 1.9.14, Q est un A-module de type fini, d'où la conclusion.

Corollaire 1.9.18. *Soient R un anneau valuatif de hauteur finie, t un élément non nul de R tel que tR soit un idéal de définition de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, S une partie multiplicative de A, M un $(S^{-1}A)$-module de type fini. Alors,*

(i) $(S^{-1}A, tS^{-1}A)$ *vérifie* (AR) *; en particulier,* (A, tA) *vérifie* (AR)*.*
(ii) *L'anneau* A_t *est noethérien.*
(iii) M_{tor} *est un* $(S^{-1}A)$*-module de type fini et* M/M_{tor} *est un* $(S^{-1}A)$*-module cohérent.*

(i) Cela résulte de 1.9.13 et 1.9.17.

(ii) Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A_t, $\mathfrak{b}$ le noyau de l'homomorphisme canonique $A \to A_t/\mathfrak{a}$; donc $\mathfrak{b}_t = \mathfrak{a}$. Comme $A/\mathfrak{b}$ est R-plat (1.9.12), $\mathfrak{b}$ est un A-module de type fini (1.9.14), ce qui démontre l'assertion.

(iii) Tout sous-$(S^{-1}A)$-module de M/M_{tor} est R-plat (1.9.12). Donc en vertu de 1.9.17, M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module de type fini. De même, le noyau de tout homomorphisme $S^{-1}A^n \to M/M_{\mathrm{tor}}$ est de type fini ; donc M/M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module cohérent.

1.10 Anneaux idylliques

Définition 1.10.1. On dit qu'un anneau adique est *idyllique* s'il est noethérien ou s'il est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif (1.9.9).

On peut préciser la terminologie comme suit :

1.10.1.1. On dit qu'un anneau adique est *quasi-idyllique* s'il est noethérien ou s'il est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif. On notera que cette notion faible est secondaire.

1.10.1.2. On pourrait être tenté d'élargir la notion d'anneaux idylliques pour inclure les anneaux topologiquement de présentation finie sur un anneau valuatif de hauteur finie. Nous nous en sommes abstenus car d'une part, cela nous obligerait à nous éloigner du point de vue de M. Raynaud que nous avons adopté pour ce traité, et d'autre part, nous aurions dû sacrifier de nombreux résultats (par exemple ceux relatifs à la notion de rig-platitude) dont l'énoncé ou la démonstration nécessitent d'introduire la notion de point rigide (3.3.1), et donc celle d'ordre 1-valuatif (1.11.1). Par ailleurs, le cadre fixé ci-dessus est largement suffisant pour les applications que nous avons en vue, et inclut la géométrie rigide de Tate.

Proposition 1.10.2. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, M un A-module de type fini. Alors :*

(i) (A, J) *vérifie* (Kr)*, et le schéma* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *est noethérien.*
(ii) *M est complet et séparé pour la topologie J-adique.*
(iii) M_{tor} *est de type fini et* M/M_{tor} *est cohérent.*
(iv) *Tout idéal premier de A qui n'est pas ouvert est de type fini.*

Les assertions (i)–(iii) résultent de 1.8.25.4, 1.9.18 et 1.8.29. Pour (iv), on peut se borner au cas où A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R : si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A qui n'est pas ouvert, alors $A/\mathfrak{p}$ est R-plat (1.9.12), et $\mathfrak{p}$ est de type fini sur A en vertu de 1.9.14.

Proposition 1.10.3. *Soit A un anneau idyllique. Alors :*

(i) *A est cohérent.*

(ii) *Tout idéal de type fini de A est cohérent ; en particulier, tout idéal premier de A qui n'est pas ouvert est cohérent.*

(iii) *Si M est un A-module cohérent, alors M_{tor} est cohérent.*

Tout sous-module de type fini d'un module cohérent est cohérent. Donc compte tenu de 1.10.2, il suffit de montrer (i). On peut clairement supposer $A = R\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle/\mathfrak{I}$, où R est un anneau 1-valuatif et $\mathfrak{I}$ est un idéal de type fini de $R\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$. D'après 1.10.2(iii), $R\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ est un anneau cohérent. Par suite $\mathfrak{I}$ est un idéal cohérent. Donc A est un anneau cohérent (1.3.6).

Proposition 1.10.4. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologique ; posons $A_n = A/J^{n+1}$ et $B_n = B \otimes_A A_n$ $(n \geq 0)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est une A-algèbre adique, et B_n est une A_n-algèbre de présentation finie pour tout $n \geq 0$.*

(ii) *B est topologiquement de présentation finie sur A.*

Notons d'abord que la condition (i) est équivalente à la même condition pour tout autre choix de l'idéal de définition J de A. On peut donc supposer J de type fini sur A. Compte tenu de 1.8.23, il suffit de montrer que (i) entraîne (ii). En vertu de 1.8.19, B est une A-algèbre topologiquement de type fini. On peut donc se borner au cas où A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R et J est engendré par un élément non nul de l'idéal maximal de R. Soit $\varphi\colon A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle \to B$ un homomorphisme continu, strict et surjectif de A-algèbres, et soit $\mathfrak{I}$ son noyau. Pour tout $n \geq 0$, on a une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{I}/(\mathfrak{I} \cap J^{n+1}A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle) \to A_n[\xi_1, \dots, \xi_r] \to B_n \to 0$$

qui montre que $\mathfrak{I}/(\mathfrak{I} \cap J^{n+1}A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle)$ est de type fini sur $A_n[\xi_1, \dots, \xi_r]$ ([28] 6.2.7). Comme $A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle$ est topologiquement de type fini sur R (1.8.21), il existe un entier $n \geq 0$ tel que $\mathfrak{I} \cap J^{n+1}A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle \subset J\mathfrak{I}$, en vertu de 1.9.18(i). Donc $\mathfrak{I}/J\mathfrak{I}$ est de type fini sur $A_0[\xi_1, \dots, \xi_r]$. Comme $\mathfrak{I}$ est séparé pour la topologie J-adique (en tant que sous-module de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle$), il est de type sur $A\langle\xi_1, \dots, \xi_r\rangle$ (1.8.5), et l'assertion est démontrée.

Corollaire 1.10.5. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, $\varphi\colon A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle \to B$ un homomorphisme surjectif de A-algèbres. Alors φ est continu et strict, et son noyau est de type fini sur $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$.*

En effet, φ est continu et strict en vertu de 1.8.18.2 et 1.8.23, et $\ker(\varphi)$ est de type fini d'après la démonstration de 1.10.4.

Corollaire 1.10.6. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de présentation finie. Alors $\widehat{B} = \varprojlim(B/J^{n+1}B)$ est topologiquement de présentation finie sur A.*

En effet, on peut supposer J de type fini sur A, et la conclusion résulte de 1.8.7 et 1.10.4.

Corollaire 1.10.7. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, C une B-algèbre topologiquement de présentation finie. Alors C est topologiquement de présentation finie sur A.*

Corollaire 1.10.8. *Une algèbre topologiquement de présentation finie sur un anneau idyllique est un anneau idyllique.*

Corollaire 1.10.9. *Soient A un anneau adique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, A' une A-algèbre topologique. Supposons A' un anneau quasi-idyllique. Alors $B\widehat{\otimes}_A A'$ est topologiquement de présentation finie sur A'.*

Cela résulte de 1.8.8 et 1.10.4.

Remarque 1.10.10. Soient A un anneau adique, $\mathfrak{I}$ un idéal de l'algèbre des séries formelles restreintes $A\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle$, B la A-algèbre topologique quotient $A\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle/\mathfrak{I}$, A' une A-algèbre topologique. Supposons A' quasi-idyllique. Alors on a un isomorphisme canonique de A'-algèbres topologiques

$$B\widehat{\otimes}_A A' \simeq A'\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle/\mathfrak{I}A'\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle. \tag{1.10.10.1}$$

En effet, $B\widehat{\otimes}_A A'$ est canoniquement isomorphe à $B\widehat{\otimes}_{A\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle} A'\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle$, c'est à dire au séparé complété de l'algèbre

$$B\otimes_{A\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle} A'\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle = A'\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle/\mathfrak{I}A'\langle\xi_1,\ldots,\xi_n\rangle$$

pour la topologie déduite de celle de A' ; notre assertion résulte alors de 1.10.2(ii).

L'isomorphisme (1.10.10.1) fournit une seconde preuve de 1.10.9.

Proposition 1.10.11. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, M un A-module, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est un A-module de présentation finie.*

(ii) *M est isomorphe à la limite projective d'une suite (M_n) de A_n-modules de présentation finie tels que $M_m = M_n \otimes_{A_n} A_m$ pour $m \leq n$. Le système projectif (M_n) est alors isomorphe au système des $M \otimes_A A_n$.*

De plus, lorsque A est idyllique, elles sont équivalentes aux conditions suivantes :

(i′) *M est un A-module cohérent.*

(ii′) *M est isomorphe à la limite projective d'une suite (M_n) de A_n-modules cohérents tels que $M_m = M_n \otimes_{A_n} A_m$ pour $m \leq n$. Le système projectif (M_n) est alors isomorphe au système des $M \otimes_A A_n$.*

Si M est un A-module de présentation finie, $M_n = M \otimes_A A_n$ est un A_n-module de présentation finie, et $M_m = M_n \otimes_{A_n} A_m$ pour $m \leq n$. Comme M est complet et séparé pour la topologie J-adique (1.10.2), M est limite projective du système projectif (M_n), ce qui prouve que (i) entraîne (ii). Montrons l'implication inverse. Il résulte aussitôt de la définition des A_n que le système projectif (M_n) vérifie les conditions de ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1) ; sa limite projective M est par suite un A-module de type fini tel que $M_n = M \otimes_A A_n$ pour tout n. Soient L un A-module libre de type fini, $u \colon L \to M$ un homomorphisme surjectif de noyau N. Pour tout $n \geq 0$, on a une suite exacte de A-modules

$$0 \to N/(N \cap J^{n+1}L) \to L \otimes_A A_n \to M_n \to 0.$$

Comme M_n est un A_n-module de présentation finie, $N/(N \cap J^{n+1}L)$ est un A_n-module de type fini. D'après 1.10.2(i), il existe un entier n tel que $N \cap J^{n+1}L \subset JN$. Par suite N/JN est un A_0-module de type fini. Comme N est séparé pour la topologie J-adique (en tant que sous-module de L), il est de type fini sur A (1.8.5) ; donc (ii) entraîne (i).

La dernière assertion de la proposition résulte de 1.3.6, 1.3.10 et 1.10.3.

Proposition 1.10.12. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, S une partie multiplicative de A, $A\{S^{-1}\}$ le séparé complété de $S^{-1}A$ pour la topologie $(S^{-1}J)$-préadique* (1.8.9), *M un $(S^{-1}A)$-module de type fini, $\widehat{M}$ son séparé complété pour la topologie $(S^{-1}J)$-préadique. Alors :*

(i) *$(S^{-1}A, S^{-1}J)$ vérifie* (Kr).

(ii) *M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module de type fini et M/M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module cohérent.*

(iii) *Le morphisme canonique $M \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \to \widehat{M}$ est bijectif.*

Les propositions (i) et (ii) résultent de 1.8.25.4 et 1.9.18. Pour un $(S^{-1}A)$-module de présentation finie M, la proposition (iii) résulte de (i) et 1.8.26(ii). Montrons (iii) dans le cas général. Compte tenu de (i) et 1.8.26(i), on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd} & M_{\mathrm{tor}} \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & M \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & (M/M_{\mathrm{tor}}) \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (M_{\mathrm{tor}})^{\wedge} \arrow[r] & \widehat{M} \arrow[r] & (M/M_{\mathrm{tor}})^{\wedge} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

D'après (ii), M/M_{tor} est un $(S^{-1}A)$-module de présentation finie et $J^n M_{\mathrm{tor}} = 0$ pour un entier $n \geq 1$. On en déduit que α et γ sont des isomorphismes. Donc β est un isomorphisme.

Corollaire 1.10.13. *Soient A un anneau quasi-idyllique, S une partie multiplicative de A, M un A-module de type fini. Alors avec les notations de* (1.8.12), *l'homomorphisme canonique $M \otimes_A A_{\{S\}} \to M_{\{S\}}$ est bijectif.*

En effet, pour tout $f \in S$, le morphisme canonique $M \otimes_B B_{\{f\}} \to M_{\{f\}}$ est bijectif, d'après 1.10.12(iii). Le corollaire s'en déduit par passage à la limite inductive.

1.11 Ordres 1-valuatifs

Définition 1.11.1. On dit qu'un anneau idyllique est un *ordre* 1*-valuatif* s'il est rig-pur (1.8.30.1), local, intègre et de dimension 1.

On peut faire les remarques suivantes :

1.11.1.1. Un anneau préadique intègre est rig-pur si et seulement si sa topologie n'est pas discrète.

1.11.1.2. Un anneau 1-valuatif est un ordre 1-valuatif. La terminologie sera justifiée ultérieurement (1.11.4).

1.11.1.3. Soient A un ordre 1-valuatif, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Comme $J \subset \mathfrak{m}$ et $J \neq 0$, A/J est un anneau de Jacobson ([12] chap. V §3.4 déf. 1) de nilradical $\mathfrak{m}/J$ ([12] chap. V §3.4 prop. 3). Par suite, tout élément de $\mathfrak{m}$ est topologiquement nilpotent, et A est un anneau hensélien, en vertu du lemme de Hensel ([12] chap. III §4.3 théo. 1 et [31] 18.5.13).

Proposition 1.11.2. *Soient A un anneau idyllique, B une A-algèbre topologique, locale, intègre et de dimension* 1*. Supposons qu'il existe un idéal de définition de type fini J de A tel que A/J soit un anneau de Jacobson. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est une A-algèbre adique* (1.8.4.5) *et un A-module cohérent.*

(ii) *B est topologiquement de présentation finie sur A.*

(iii) *B est topologiquement de type fini sur A.*

Dans ces conditions, B est un anneau idyllique rig-pur (*i.e., un ordre* 1*-valuatif*)*.*

En vertu de 1.10.4 et ([28] 6.2.10), (i) implique (ii). Il est clair que (ii) implique (iii). Montrons que (iii) entraîne (i) et le fait que B soit rig-pur ; on notera que (ii) implique que B est idyllique (1.10.8). En vertu de 1.8.19, B est une A-algèbre adique, et B/JB est une (A/J)-algèbre de type fini. Si $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de B, on a évidemment $JB \subset \mathfrak{m}$. On en déduit que B/JB est un anneau de Jacobson, $B/\mathfrak{m}$ est une (A/J)-algèbre finie, et $\mathfrak{m}/JB$ est le nilradical de B/JB ([12] chap. V §3.4 théo. 3 et prop. 3). Par suite, B/JB est une (A/J)-algèbre entière, et donc finie. Par conséquent B est une A-algèbre finie (1.8.5). Comme B est intègre et $JB \neq 0$ (sinon $\mathfrak{m}$ serait le nilradical de B, ce qui est impossible), B est rig-pur. Reste à montrer que B est un A-module cohérent. On peut évidemment se borner au cas où A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R. Comme B est topologiquement de type fini sur R (1.8.21) et R-plat (1.9.12), il est topologiquement de présentation finie sur R (1.9.16). On en déduit que B est topologiquement de présentation finie sur A, en vertu de 1.10.4 et ([28]

6.2.6(v)). Par suite, compte tenu de ([28] 6.2.10), B/J^nB est un (A/J^n)-module de présentation finie pour tout $n \geq 1$. Donc B est un A-module cohérent, en vertu de 1.10.11.

Remarque 1.11.3. Soient R un ordre 1-valuatif, I un idéal de définition de type fini de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini. Alors A/IA est un anneau de Jacobson ([12] chap. V §3.4 théo. 3).

Proposition 1.11.4. *Soient A un ordre 1-valuatif, L le corps des fractions de A, $\overline{A}$ la clôture intégrale de A dans L. Alors $\overline{A}$ muni de la topologie déduite de celle de A est un anneau 1-valuatif. Si A est noethérien, $\overline{A}$ est un anneau de valuation discrète complet et fini sur A.*

Supposons d'abord A noethérien et montrons la seconde proposition. Il résulte de 1.11.1.3 que l'idéal maximal de A est un idéal de définition. Donc $\overline{A}$ est fini sur A ([31] 7.7.4). On en déduit que $\overline{A}$ est un anneau noethérien, local (1.11.1.3), intègre, intégralement clos et de dimension 1. Par suite, $\overline{A}$ est un anneau de valuation discrète complet (pour la topologie canonique qui coïncide avec la topologie déduite de celle de A).

Montrons ensuite la première proposition. On peut se borner au cas où A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R. En vertu de 1.11.2, A est une R-algèbre finie et plate ; donc L est une extension algébrique finie du corps des fractions K de R. Il existe un anneau de valuation S pour L tel que $S \cap K = R$ ([12] chap. VI §1.2 théo. 2). Il est de hauteur 1 ([12] chap. VI §8.1 prop. 1 et cor. 1). Il est unique et L est complet pour la valuation associée à S ([12] chap. VI §8.2 prop. 2 et cor. 1). Donc S est la clôture intégrale de R dans L ([12] chap. VI §1.3 théo. 3), ce qui implique que $S = \overline{A}$.

Proposition 1.11.5. *Soient A un ordre 1-valuatif, B une A-algèbre topologiquement de type fini, qui est un ordre 1-valuatif. Alors :*

(i) *B est une A-algèbre topologiquement de présentation finie, et un A-module cohérent.*
(ii) *L'homomorphisme canonique $A \to B$ est injectif.*

La proposition (i) résulte de 1.11.1.3 et 1.11.2, et implique facilement (ii).

Proposition 1.11.6. *Soient A un ordre 1-valuatif, B un anneau intègre contenant A et fini sur A. Alors B muni de la topologie déduite de celle de A, est une A-algèbre topologiquement de présentation finie, et un ordre 1-valuatif.*

Il est clair que B est un anneau local (1.11.1.3), de dimension 1, complet et séparé pour la topologie déduite de celle de A (1.10.2), topologiquement de type fini sur A (1.8.19) et rig-pur. Si A est noethérien, il en est de même de B. Si A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R, il en est de même de B (1.9.16). Donc B est un ordre 1-valuatif. Enfin, B est topologiquement de présentation finie sur A en vertu de 1.11.5.

Corollaire 1.11.7. *Soient A un ordre 1-valuatif, B, C deux A-algèbres topologiquement de type fini, qui sont des ordres 1-valuatifs. Alors l'algèbre $B \otimes_A C$ munie de la topologie du produit tensoriel, est complète et séparée, et elle admet un homomorphisme continu, strict et surjectif dans un ordre 1-valuatif.*

Cela résulte de 1.11.5, 1.10.2 et 1.11.6.

Proposition 1.11.8. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A, $X = \mathrm{Spec}(A)$, X_{g} l'ouvert $X - \mathrm{V}(J)$ de X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathfrak{p}$ est un idéal cohérent, et la A-algèbre topologique quotient $A/\mathfrak{p}$ est un ordre 1-valuatif.*

(ii) *$J \not\subset \mathfrak{p}$ et $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$.*

(iii) *$\mathfrak{p}$ détermine un point fermé de X_{g}.*

D'abord (i) entraîne (ii) : comme $A/\mathfrak{p}$ est rig-pur, $(J + \mathfrak{p})/\mathfrak{p} = J(A/\mathfrak{p}) \neq 0$. Ensuite (ii) entraîne (iii) : comme J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3), l'ouvert X_{g} ne contient aucun point fermé de X. Montrons que (iii) entraîne (i). Supposons en premier lieu que A soit topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R. On sait que $A/\mathfrak{p}$ est R-plat (1.9.12), $\mathfrak{p}$ est cohérent (1.10.3), et $A/\mathfrak{p}$ est complet et séparé pour la topologie J-adique (1.10.2). On en déduit que $A/\mathfrak{p}$ est topologiquement de présentation finie sur A, et donc idyllique (1.10.8) et rig-pur. Reste à montrer que $A/\mathfrak{p}$ est un anneau local de dimension 1. Pour ce faire, on peut se borner au cas où $A = R\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$. Soient K le corps des fractions de R, L le corps résiduel de X en $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{p}$, κ une clôture algébrique de $A/\mathfrak{m}$. Comme J est contenu dans le radical de A, $\mathfrak{m}$ est au-dessus de l'idéal maximal de R et $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{m}$. Appliquons ([12] chap. VI §1.2 théo. 2) au sous-anneau $A/\mathfrak{p}$ de L et à l'homomorphisme naturel $h \colon A/\mathfrak{p} \to \kappa$. Il existe alors un anneau de valuation S pour L et un homomorphisme $h' \colon S \to \kappa$ tels que S contienne $A/\mathfrak{p}$, que h' prolonge h et que $h'^{-1}(0) = \mathfrak{m}_S$ soit l'idéal maximal de S. Il résulte aussitôt que $K \cap S$ est un anneau de valuation pour K ([12] chap. VI §1.4 exem. 2) qui domine R ; donc $R = K \cap S$. En vertu de ([7] 6.1.2/3), L est une extension finie de K. Raisonnant comme dans le preuve de 1.11.4, on conclut que S est entier sur R, et donc sur $A/\mathfrak{p}$. Par suite, $A/\mathfrak{p}$ est un anneau local de dimension 1, ce qui achève la preuve dans ce cas.

Supposons en second lieu que A soit noethérien. Alors $A/\mathfrak{p}$ est complet et séparé pour la topologie J-adique, intègre et rig-pur. Reste à montrer que $A/\mathfrak{p}$ est un anneau local de dimension 1. Soit L le corps résiduel de X en $\mathfrak{p}$. Il existe $g \in J$ tel que $\mathfrak{p}$ soit un point fermé de $D(g)$; on a donc un homomorphisme surjectif $u \colon A[g^{-1}] \to L$. Comme $(A/\mathfrak{p})[g^{-1}] = L$, $A/\mathfrak{p}$ est un anneau semi-local de dimension ≤ 1 ([31] 0.16.3.3). Mais comme J est contenu dans le radical de A, $A/\mathfrak{p}$ est intègre sans être un corps ; donc $\dim(A/\mathfrak{p}) = 1$. Il en résulte aussi que $\dim(A/(J + \mathfrak{p})) = 0$ et la topologie J-adique de $A/\mathfrak{p}$ coïncide avec la topologie définie par son radical. Par suite, $A/\mathfrak{p}$ est un anneau local ([12] chap. III §2.13 cor. de prop. 19).

Proposition 1.11.9. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A ; alors* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *est un schéma noethérien de Jacobson.*

Si A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif, la conclusion résulte de 1.10.2 et ([7] 6.1.1/3). Supposons A noethérien, et considérons un système de générateurs $(g_i)_{1\leq i\leq r}$ de J. Comme J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3), A_{g_i} est un anneau de Jacobson en vertu de ([31] 10.5.8). Par suite, $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J) = \cup D(g_i)$ est un schéma de Jacobson ([28] 6.4.2).

Proposition 1.11.10. *Soient A un anneau adique, noethérien et rig-pur, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{X} =$ $\mathrm{Spf}(A)$, $X =$ $\mathrm{Spec}(A)$, X_{g} l'ouvert $X -$ $\mathrm{V}(J)$ de X, x un point fermé de X. Alors, quitte à remplacer $\mathfrak{X}$ par un ouvert formel affine contenant x, il existe un point fermé y de X_{g} tel que x appartienne à l'adhérence de y dans X.*

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A correspondant à x ; alors $J \subset \mathfrak{m}$ car J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3).

Si $\mathrm{V}(J) = \{x\}$, A est local. Comme X_{g} est quasi-compact et non vide (1.8.30.2), il contient des points fermés ([28] 0.2.1.2), et tout point fermé convient.

Supposons $\mathrm{V}(J) \neq \{x\}$ et posons $r = \dim((A/J)_{\mathfrak{m}})$. En vertu de ([31] 0.16.3.1) appliqué à l'idéal $\mathfrak{m}/J$ de A/J, il existe r éléments f_i de A $(1 \leq i \leq r)$ tels que, si on note I l'idéal de A engendré par les f_i, alors $\mathfrak{m}$ est minimal dans l'ensemble des idéaux premiers contenant $I + J$; autrement dit, $\{x\}$ est une composante connexe de $\mathrm{V}(I + J)$. Quitte à remplacer $\mathfrak{X}$ par un ouvert formel affine contenant x, on peut supposer que $\mathrm{V}(I+J) = \{x\}$ ([12] chap. III §3.4 théo. 3(iii)) ; en particulier, $r = \dim((A/J)_{\mathfrak{m}})$ ne change pas. Montrons qu'on a

$$r = \dim((A/J)_{\mathfrak{m}}) < \dim(A_{\mathfrak{m}}).$$

En effet, les idéaux premiers associés de $A_{\mathfrak{m}}$ sont en bijection avec les idéaux premiers associés de A contenus dans $\mathfrak{m}$ ([12] chap. IV §1.2 prop. 5) ; donc d'après 1.8.30.2, $\mathrm{V}(JA_{\mathfrak{m}})$ ne contient aucun idéal premier associé de $A_{\mathfrak{m}}$, ce qui entraîne notre assertion ([12] chap. IV §1.4 théo. 2). D'où, compte tenu de ([31] 0.16.3.7),

$$\dim(A_{\mathfrak{m}}/IA_{\mathfrak{m}}) \geq \dim(A_{\mathfrak{m}}) - r > 0.$$

On en déduit que $\mathrm{V}(I) \neq \{x\}$, et donc $\mathrm{V}(I) \not\subset \mathrm{V}(J)$ (sinon on aurait $\mathrm{V}(I) = \mathrm{V}(I+J) = \{x\}$, ce qui n'est pas possible). Par suite, $\mathrm{V}(I)$ contient un point fermé y de X_{g} ([28] 0.2.1.2). Si z est un point fermé de l'adhérence de y dans X, alors $z \in \mathrm{V}(J + I)$; d'où $z = x$, ce qui achève la preuve.

1.12 Compléments sur la platitude

L'énoncé suivant est essentiellement contenu dans ([12] chap. III §5.2 théo. 1) :

Proposition 1.12.1. *Soient A un anneau, J un idéal de A, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$, M un A-module. Supposons que, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A, les conditions suivantes soient remplies :*

(a) *La topologie J-préadique de $\mathfrak{a}$ est induite par la topologie J-préadique de A.*
(b) *$\mathfrak{a} \otimes_A M$ est séparé pour la topologie J-préadique.*

Alors, pour que M soit plat sur A, il faut et il suffit que $M \otimes_A A_n$ soit plat sur A_n pour tout $n \geq 0$. Si, de plus, J est contenu dans le radical de A, alors M est fidèlement plat sur A si et seulement si $M \otimes_A A_n$ est fidèlement plat sur A_n pour tout $n \geq 0$.

Pour la première assertion, il suffit de reprendre la partie ([12] chap. III §5.3 E) de la preuve de ([12] chap. III §5.2 théo. 1). Montrons la second assertion. Si M est fidèlement plat sur A, $M \otimes_A A_n$ est fidèlement plat sur A_n en vertu de ([12] chap. I §3.3 prop. 5). Inversement, supposons que $M \otimes_A A_n$ soit fidèlement plat sur A_n pour tout $n \geq 0$. On en déduit déjà que M est plat sur A. Soit N un A-module de type fini tel que $M \otimes_A N = 0$. Tensorisant avec A_0, on obtient que $(M/JM) \otimes_{A_0} (NJN) = 0$. D'où $N/JN = 0$, ce qui implique que $N = 0$ car J est contenu dans le radical de A.

1.12.2. Soient A un anneau, J un idéal de A, B une A-algèbre, M un B-module. On peut faire les remarques suivantes concernant les hypothèses de 1.12.1 :

(i) La condition (a) est remplie si (A, J) vérifie (Kr).
(ii) La condition (b) est remplie si M est un B-module de type fini et si la topologie J-préadique de B admet un idéal de définition K contenu dans le radical de B, tel que (B, K) vérifie (AR). En effet, $\mathfrak{a} \otimes_A M = (\mathfrak{a} \otimes_A B) \otimes_B M$ est un B-module de type fini, et les topologies J-préadique et K-préadique coïncident ; donc $\mathfrak{a} \otimes_A M$ est séparé pour la topologie J-préadique, en vertu de 1.8.28.

Proposition 1.12.3. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$, B une A-algèbre, M un B-module de type fini. Supposons que l'une des conditions suivantes soit remplie :*

(a) *B est un anneau noethérien et JB est contenu dans le radical de B.*
(b) *B muni de la topologie JB-préadique est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif.*

Alors, pour que M soit plat (resp. fidèlement plat) sur A, il faut et il suffit que $M \otimes_A A_n$ soit plat (resp. fidèlement plat) sur A_n pour tout $n \geq 0$.

Cela résulte de 1.12.1, 1.12.2, 1.9.18 et 1.10.2.

Corollaire 1.12.4. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$, B une A-algèbre adique qui est un anneau quasi-idyllique, M un B-module de type fini. Pour que M soit plat (resp. fidèlement plat) sur A, il faut et il suffit que $M \otimes_A A_n$ soit plat (resp. fidèlement plat) sur A_n pour tout $n \geq 0$.*

Corollaire 1.12.5. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, M un A-module de type fini, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$. Alors, pour que M soit un A-module projectif, il faut et il suffit que $M \otimes_A A_n$ soit un A_n-module projectif pour tout $n \geq 0$.*

Il n'y a que la suffisance de la condition à démontrer. Comme tout module projectif de type fini est de présentation finie, il résulte de 1.10.2 et 1.10.11 que M est un A-module de présentation finie. D'autre part, M est A-plat en vertu de 1.12.4. Donc M est un A-module projectif d'après ([12] chap. II §5.2 cor. 2 du théo. 1).

Proposition 1.12.6. *Soient A un anneau quasi-idyllique, S une partie multiplicative de A, $A\{S^{-1}\}$ et $A_{\{S\}}$ les anneaux définis dans* (1.8.9) *et* (1.8.12)*. Alors $A_{\{S\}}$ est A-plat et $A\{S^{-1}\}$ est $A_{\{S\}}$-plat ; en particulier, $A\{S^{-1}\}$ est A-plat.*

Il résulte de 1.8.26(i) et 1.10.12 que pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $S^{-1}A$, le morphisme canonique $\mathfrak{a} \otimes_{S^{-1}A} A\{S^{-1}\} \to \mathfrak{a}A\{S^{-1}\}$ est injectif, et donc bijectif. Par suite, $A\{S^{-1}\}$ est $(S^{-1}A)$-plat ([12] chap. I §2.3 rem. 1). En particulier, $A_{\{f\}}$ est A-plat, pour tout $f \in S$. On en déduit, par passage à la limite inductive, que $A_{\{S\}}$ est A-plat. D'autre part, comme $A_{\{f\}}$ est quasi-idyllique et $A\{S^{-1}\} \simeq (A_{\{f\}})\{S^{-1}\}$, alors $A\{S^{-1}\}$ est $A_{\{f\}}$-plat. Par suite, $A\{S^{-1}\}$ est $A_{\{S\}}$-plat ([12] chap. I §2.7 prop. 9).

Corollaire 1.12.7. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{p}$ un idéal premier ouvert de A, $S = A - \mathfrak{p}$. Alors, $A_{\{S\}}$ est fidèlement plat sur $A_{\mathfrak{p}}$ et $A\{S^{-1}\}$ est fidèlement plat sur $A_{\{S\}}$; en particulier, $A_{\{S\}}$ est séparé pour la topologie J-adique.*

Cela résulte de 1.8.13 et 1.12.6.

Proposition 1.12.8. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $A_n = A/J^{n+1}$ $(n \geq 0)$, B une A-algèbre adique qui est un anneau quasi-idyllique, $\varphi\colon A \to B$ l'homomorphisme canonique, $\mathfrak{q}$ un idéal premier ouvert de B, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $T = B - \mathfrak{q}$, $S = A - \mathfrak{p}$, M un B-module de type fini. Alors avec les notations de* (1.8.9) *et* (1.8.12)*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *$M_{\{T\}}$ est $A_{\{S\}}$-plat.*
(ii) *$M_{\{T\}}$ est A-plat.*
(iii) *$M\{T^{-1}\}$ est A-plat.*
(iv) *$M_{\mathfrak{q}}$ est A-plat.*
(v) *$M_{\mathfrak{q}} \otimes_A A_n$ est A_n-plat pour tout $n \geq 0$.*

D'abord, (i) entraîne (ii) en vertu de 1.12.7. Ensuite, $M\{T^{-1}\} \simeq M_{\mathfrak{q}} \otimes_{B_{\mathfrak{q}}} B\{T^{-1}\}$ (1.10.12) et $M_{\{T\}} \simeq M_{\mathfrak{q}} \otimes_{B_{\mathfrak{q}}} B_{\{T\}}$ (1.10.13) ; donc compte tenu de 1.12.7, les conditions (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes ([12] chap. I §3.2 prop. 4). D'autre part, les conditions (iv) et (v) sont équivalentes en vertu de 1.12.1, 1.12.2, 1.10.2 et 1.9.18(i). Enfin (v) entraîne (i) : comme (ii) est équivalent à (v), $M_{\{T\}}$ est $A_{\{f\}}$-plat, pour tout $f \in S$; d'où l'implication recherchée ([12] chap. I §2.7 prop. 9).

Lemme 1.12.9. *Soient A un anneau, t un élément non diviseur de zéro de A, M un A-module. Pour que M soit A-plat, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies :*

(i) *t n'est pas diviseur de zéro dans M.*
(ii) *M_t est A_t-plat.*
(iii) *M/tM est (A/tA)-plat.*

Il n'y a évidemment que la suffisance des conditions à prouver. Il faut montrer que pour tout A-module N, $\mathrm{Tor}_i^A(M,N) = 0$ pour tout entier $i \geq 1$. Supposons d'abord que $N = N_{(t)\text{-tor}}$. On a $N_{(t)\text{-tor}} = \cup_{n\geq 1} N_n$, où N_n est le noyau de l'homothétie $x \mapsto t^n x$ de N. Comme les foncteurs $\mathrm{Tor}_i^A(M,-)$ commutent aux limites inductives filtrantes ([30] 6.3.6), on peut se réduire au cas où $N = N_n$ pour un entier $n \geq 1$. Considérant la filtration $(t^i N)_{0\leq i\leq n}$ de N, on peut se réduire encore au cas où $tN = 0$. Comme t est non diviseur de zéro dans A et dans M, on a $M \otimes^L_A (A/tA) \simeq M/tM$. Par suite, on a

$$M \otimes^L_A N \simeq M \otimes^L_A (A/tA) \otimes^L_{A/tA} N \simeq (M/tM) \otimes^L_{A/tA} N,$$

et $\mathrm{Tor}_i^A(M,N) = 0$ pour tout $i \geq 1$. Supposons ensuite que $N_{(t)\text{-tor}} = 0$. On a alors une suite exacte de A-modules $0 \to N \to N_t \to C \to 0$ où $C = C_{(t)\text{-tor}}$, d'où l'on déduit pour tout $i \geq 1$,

$$\mathrm{Tor}_i^A(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_i^A(M,N_t) \simeq \mathrm{Tor}_i^{A_t}(M_t,N_t) = 0.$$

Enfin, le cas général se déduit des deux cas précédents grâce à la suite exacte

$$0 \to N_{(t)\text{-tor}} \to N \to N/N_{(t)\text{-tor}} \to 0.$$

Lemme 1.12.10. *Soient R un ordre 1-valuatif, s (resp. η) le point fermé (resp. générique) de $\mathrm{Spec}(R)$, $f\colon X \to \mathrm{Spec}(R)$ un morphisme séparé, plat et localement de type fini, tel que le sous-espace X_s soit non vide, fini et discret, et que le sous-espace X_η soit réduit à un point. Alors f est fini.*

En vertu de 1.11.1.3 et ([31] 18.5.11), X se décompose en somme de deux sous-schémas X_1 et X_2, induits sur des ouverts disjoints de X, tels que la restriction de f à X_1 soit un morphisme fini et que la fibre fermée de X_2 soit vide. Comme X_1 est non vide, fini et plat sur $\mathrm{Spec}(R)$, sa fibre générique est aussi non vide. Donc la fibre générique de X_2 est vide, ce qui implique que $X = X_1$.

Proposition 1.12.11. *Soient R un anneau 1-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de présentation finie, B une A-algèbre de présentation finie, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie (t)-adique ; notons $u\colon A \to B$ et $\varphi\colon B \to \widehat{B}$ les homomorphismes canoniques. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal maximal de $\widehat{B}_t$, $\mathfrak{p} = \varphi_t^{-1}(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{m} = u_t^{-1}(\mathfrak{p})$. Pour tout entier $n \geq 1$, notons $\mathfrak{q}^{(n)}$ (resp. $\mathfrak{p}^{(n)}$, resp. $\mathfrak{m}^{(n)}$) le noyau de l'homomorphisme canonique $\widehat{B} \to \widehat{B}_t/\mathfrak{q}^n$ (resp. $B \to B_t/\mathfrak{p}^n$, resp. $A \to A_t/\mathfrak{m}^n$). Alors :*

(i) $\mathfrak{p}$ (*resp.* $\mathfrak{m}$) *est un idéal maximal de* B_t (*resp.* A_t).
(ii) *Pour tout* $n \geq 1$, *le morphisme canonique* $f_n \colon \mathrm{Spec}(B/\mathfrak{p}^{(n)}) \to \mathrm{Spec}(R)$ *est fini.*
(iii) *Pour tout* $n \geq 1$, *l'homomorphisme* $\psi_n \colon B_t/\mathfrak{p}^n \to \widehat{B}_t/\mathfrak{q}^n$ *déduit de* φ_t *est un isomorphisme.*
(iv) *L'homomorphisme canonique* $B_{\mathfrak{p}^{(1)}} \to \widehat{B}_{\mathfrak{q}^{(1)}}$ *induit un isomorphisme entre les séparés complétés de ces anneaux locaux pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs.*
(v) $\widehat{B}_t$ *est* B_t*-plat.*

On notera que tR est un idéal de définition de R (1.9.10), $K = R_t$ est le corps des fractions de R (1.9.3), $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie sur A (1.10.6), et donc idyllique (1.10.8).

(i) En vertu de 1.11.8, $\mathfrak{q}^{(1)}$ est un $\widehat{B}$-module cohérent et $\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est un ordre 1-valuatif. Donc d'après 1.11.5, $\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est un R-module cohérent, et son corps des fractions est une extension finie de K. Comme $A/\mathfrak{m}^{(1)} \subset B/\mathfrak{p}^{(1)} \subset \widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$, $(A/\mathfrak{m}^{(1)})\otimes_R K$ et $(B/\mathfrak{p}^{(1)})\otimes_R K$ sont des extensions finies de K, d'où la proposition.

(ii) Il suffit de montrer que f_n vérifie les hypothèses de (1.12.10). Il est clair que f_n est séparé et plat, et l'espace sous-jacent à sa fibre générique est un point. La fibre fermée du morphisme $\mathrm{Spec}(\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}) \to \mathrm{Spec}(R)$ est non vide. Il en est alors de même de f_1 et par suite de f_n. D'après (i) et 1.11.8, $\mathfrak{m}^{(1)}$ est un A-module cohérent et $A/\mathfrak{m}^{(1)}$ est un ordre 1-valuatif. Par suite, $A/\mathfrak{m}^{(1)}$ est une R-algèbre finie (1.11.5) ; donc $A/(\mathfrak{m}^{(1)})^n$ et son quotient $A/\mathfrak{m}^{(n)}$ sont des R-algèbres finies. On conclut que f_n est un morphisme de type fini. Reste à montrer que l'espace sous-jacent à la fibre fermée de f_n est fini et discret. Il suffit de montrer qu'il n'a qu'un nombre fini de points fermés ([28] 6.5.4). On se réduit immédiatement au cas $n = 1$ car $(\mathfrak{p}^{(1)})^n \subset \mathfrak{p}^{(n)}$. D'une part, l'homomorphisme $B/\mathfrak{p}^{(1)} \to \widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est injectif et fini car $\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est une R-algèbre finie. D'autre part, $\widehat{B}/\mathfrak{q}^{(1)}$ est un anneau local car c'est un ordre 1-valuatif. On en déduit que la fibre fermée de f_1 n'a qu'un nombre fini de points fermés ([12] chap. V §2.1 prop. 1 et théo. 1).

(iii) Compte tenu de (ii), $B/\mathfrak{p}^{(n)}$ est complet et séparé pour la topologie (t)-adique (1.10.2). Donc la projection $B \to B/\mathfrak{p}^{(n)}$ induit un homomorphisme $\widehat{B} \to B/\mathfrak{p}^{(n)}$. On obtient un homomorphisme canonique $\rho_n \colon \widehat{B}_t \to B_t/\mathfrak{p}^n$ qui rend commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} B_t \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_t"'] & B_t/\mathfrak{p}^n \arrow[r, "\psi_n"] & \widehat{B}_t/\mathfrak{q}^n \\ \widehat{B}_t \arrow[ur, "\rho_n"] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

où les flèches non libellées sont les projections canoniques. Il résulte aussitôt que ψ_n et ρ_n sont surjectifs. Pour achever la preuve de (iii), il suffit de voir que $\rho_n(\mathfrak{q}^n) = 0$.

Comme les $(\rho_n)_{n\geq 1}$ forment un système projectif, on se réduit à voir que $\rho_1(\mathfrak{q}) = 0$, ce qui est évident car ψ_1 est injectif par définition.

(iv) Cela résulte de (iii) car $B_{\mathfrak{p}^{(1)}} = (B_t)_{\mathfrak{p}}$ et $\widehat{B}_{\mathfrak{q}^{(1)}} = (\widehat{B}_t)_{\mathfrak{q}}$.

(v) Comme B_t et $\widehat{B}_t$ sont noethériens (1.9.18), il résulte de (iv) que $(\widehat{B}_t)_{\mathfrak{q}}$ est $(B_t)_{\mathfrak{p}}$-plat ([12] chap. III §5.4 prop. 4). La proposition s'ensuit aussitôt ([12] chap. II §3.4 prop. 15).

Le corollaire suivant, dû à Gabber, sera renforcé dans 1.12.17.

Corollaire 1.12.12. *Sous les hypothèses de* (1.12.11)*, si B est R-plat, alors $\widehat{B}$ est B-plat et $\widehat{B} \times B_t$ est fidèlement plat sur B.*

Comme $\widehat{B}$ est R-plat (1.12.4), la première assertion résulte aussitôt de 1.12.9 et 1.12.11(v). Posons $S = 1 + tB$. Comme $t\widehat{B}$ est contenu dans le radical de $\widehat{B}$ ([12] chap. III §2.13 lem. 3), $\widehat{B}$ est une $B[S^{-1}]$-algèbre plate. D'autre part, $B[S^{-1}]/tB[S^{-1}] \simeq B/tB \simeq \widehat{B}/t\widehat{B}$ et $tB[S^{-1}]$ est contenu dans le radical de $B[S^{-1}]$; donc $\widehat{B}$ est fidèlement plat sur $B[S^{-1}]$. Pour conclure la preuve, il suffit d'observer que $B[S^{-1}] \times B_t$ est fidèlement plat sur B.

Proposition 1.12.13. *Soient R un anneau* 1*-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, B une A-algèbre de type fini, M un B-module de type fini, N un sous-B-module de M tel que M/N soit R-plat. Alors N est de type fini sur B.*

On peut se borner au cas où $A = R\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ et $B = A[X_1, \dots, X_m]$. Soit $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie (t)-préadique, qui est clairement idyllique. Par descente fidèlement plate ([12] chap. I §3.6 prop. 11), compte tenu de 1.12.12, il suffit de montrer que $N \otimes_B \widehat{B}$ est un $\widehat{B}$-module de type fini, et $N \otimes_B B_t$ est un B_t-module de type fini. D'après 1.12.12, la suite

$$0 \to N \otimes_B \widehat{B} \to M \otimes_B \widehat{B} \to (M/N) \otimes_B \widehat{B} \to 0$$

est exacte et $(M/N) \otimes_B \widehat{B}$ est R-plat. Il résulte alors de 1.9.14 que $N \otimes_B \widehat{B}$ est de type fini sur $\widehat{B}$. La seconde assertion est évidente puisque A_t et B_t sont noethériens (1.9.18).

Corollaire 1.12.14. *Soient R un anneau* 1*-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, B une A-algèbre de type fini, M un B-module de type fini. Alors,*

(i) (B, tB) *vérifie* (AR).

(ii) $B/B_{(t)\text{-tor}}$ *est une A-algèbre de présentation finie.*

(iii) $M_{(t)\text{-tor}}$ *est un B-module de type fini et $M/M_{(t)\text{-tor}}$ est un B-module cohérent.*

Cela résulte de 1.12.13 et 1.9.13.

Corollaire 1.12.15. *Un anneau idyllique est universellement cohérent* (1.4.1).

On peut évidemment se borner au cas d'un anneau A topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R, et même au cas où $A = R\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$ (1.4.2). Il résulte alors de 1.12.14(iii) que les anneaux $A[X_1, \dots, X_m]$ sont cohérents ($m \geq 0$).

Proposition 1.12.16. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de type fini, M un B-module de type fini. On note $\widehat{B}$ (resp. $\widehat{M}$) le séparé complété de B (resp. M) pour la topologie J-préadique. Alors :*

(i) *(B, JB) vérifie* (Kr).

(ii) *$B/B_{J\text{-tor}}$ est une A-algèbre de présentation finie.*

(iii) *$M_{J\text{-tor}}$ est un B-module de type fini et $M/M_{J\text{-tor}}$ est un B-module cohérent.*

(iv) *Le morphisme canonique $M \otimes_B \widehat{B} \to \widehat{M}$ est un isomorphisme.*

Les propositions (i)–(iii) résultent de 1.8.25.4 et 1.12.14. Pour un B-module de présentation finie M, la proposition (iv) résulte de (i) et 1.8.26(ii). Montrons (iv) dans le cas général. Compte tenu de (i) et 1.8.26(i), on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & M_{J\text{-tor}} \otimes_B \widehat{B} & \longrightarrow & M \otimes_B \widehat{B} & \longrightarrow & (M/M_{J\text{-tor}}) \otimes_B \widehat{B} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & (M_{J\text{-tor}})^{\wedge} & \longrightarrow & \widehat{M} & \longrightarrow & (M/M_{J\text{-tor}})^{\wedge} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

En vertu de (iii), $M/M_{J\text{-tor}}$ est un B-module de présentation finie et $J^n M_{J\text{-tor}} = 0$ pour un entier $n \geq 1$. On en déduit que α et γ sont des isomorphismes. Donc β est un isomorphisme.

Théorème 1.12.17 (Gabber). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de type fini, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie J-préadique. Alors $\widehat{B}$ est B-plat.*

Compte tenu de ([12] chap. III §3.4 théo. 3), on peut se borner au cas où A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R, et on peut même supposer $A = R\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$. Grâce à 1.12.16(iv), on se réduit au cas où $B = A[X_1, \dots, X_m]$. Le théorème résulte alors de 1.12.12.

Proposition 1.12.18. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de présentation finie, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie J-préadique ; notons $u \colon A \to B$ et $\varphi \colon B \to \widehat{B}$ les homomorphismes canoniques. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\widehat{B}$, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{m} = u^{-1}(\mathfrak{p})$. Supposons $\mathfrak{q}$ fermé dans* $\mathrm{Spec}(\widehat{B}) - \mathrm{V}(J\widehat{B})$ *et $\mathfrak{m}$ fermé dans* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$*. Alors l'homomorphisme canonique $B_{\mathfrak{p}} \to \widehat{B}_{\mathfrak{q}}$ induit un isomorphisme entre les séparés complétés de ces anneaux locaux pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs.*

Rappelons d'abord que $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie sur A (1.10.6), et donc idyllique (1.10.8). Compte tenu de 1.12.11(iv), on peut se borner au cas où A est noethérien, ce qui entraîne que B et $\widehat{B}$ sont noethériens. Il suffit de montrer que pour tout $n \geq 1$, l'homomorphisme canonique $\varphi_n : B/\mathfrak{p}^n \to \widehat{B}/\mathfrak{q}^n$ est bijectif. On sait que $A/\mathfrak{m}$ et $\widehat{B}/\mathfrak{q}$ sont des ordres 1-valuatifs (1.11.8), et $\widehat{B}/\mathfrak{q}$ est un $(A/\mathfrak{m})$-module de type fini (1.11.5). Comme $B/\mathfrak{p} \subset \widehat{B}/\mathfrak{q}$, $B/\mathfrak{p}$ est un A-module de type fini. Par suite $B/\mathfrak{p}^n$ est un A-module de type fini, et il est complet et séparé pour la topologie J-adique. Par conséquent, la projection $B \to B/\mathfrak{p}^n$ induit un homomorphisme $\rho_n : \widehat{B} \to B/\mathfrak{p}^n$ qui s'insère dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & B/\mathfrak{p}^n \arrow[r, "\varphi_n"] & \widehat{B}/\mathfrak{q}^n \\ \widehat{B} \arrow[ur, "\rho_n"] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

où les flèches non libellées sont les projections canoniques. Il résulte aussitôt que φ_n et ρ_n sont surjectifs. Il suffit de montrer que $\rho_n(\mathfrak{q}^n) = 0$. Comme les $(\rho_n)_{n \geq 1}$ forment un système projectif, on se réduit à voir que $\rho_1(\mathfrak{q}) = 0$, ce qui est évident car φ_1 est injectif par définition.

Corollaire 1.12.19. *Les hypothèses étant celles de* (1.12.18)*, de plus soient C une $\widehat{B}$-algèbre topologiquement de type fini, $\mathfrak{r}$ un idéal premier de C au-dessus de $\mathfrak{q}$, M un C-module de type fini. Pour que $M_{\mathfrak{r}}$ soit $\widehat{B}$-plat, il faut et il suffit qu'il soit B-plat.*

On sait que $\widehat{B}$ est B-plat (1.12.17). Donc si $M_{\mathfrak{r}}$ est $\widehat{B}$-plat, il est B-plat. Inversement, les anneaux $B_{\mathfrak{p}}$, $\widehat{B}_{\mathfrak{q}}$ et $C_{\mathfrak{r}}$ sont noethériens (1.10.2) et l'homomorphisme $B_{\mathfrak{p}} \to \widehat{B}_{\mathfrak{q}}$ induit un isomorphisme sur les séparés complétés (1.12.18). Donc si $M_{\mathfrak{r}}$ est $B_{\mathfrak{p}}$-plat, il est $\widehat{B}_{\mathfrak{q}}$-plat ([12] chap. III §5.4 prop. 4).

Corollaire 1.12.20. *Soient R un ordre* 1*-valuatif, I un idéal de définition de R, K le corps des fractions de R, A une R-algèbre topologiquement de présentation finie, B une A-algèbre de présentation finie, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie I-préadique ; notons $u : A \to B$ et $\varphi : B \to \widehat{B}$ les homomorphismes canoniques. Soient $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\widehat{B}$ définissant un point fermé de* $\operatorname{Spec}(\widehat{B} \otimes_R K)$*, $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{m} = u^{-1}(\mathfrak{p})$. Alors :*

(i) $\mathfrak{p}$ (*resp.* $\mathfrak{m}$) *détermine un point fermé de* $\operatorname{Spec}(B \otimes_R K)$ (*resp.* $\operatorname{Spec}(A \otimes_R K)$).

(ii) *L'homomorphisme canonique $B_{\mathfrak{p}} \to \widehat{B}_{\mathfrak{q}}$ induit un isomorphisme entre les séparés complétés de ces anneaux locaux pour les topologies définies par leurs idéaux maximaux respectifs.*

(iii) *On a* $\dim(B_{\mathfrak{p}}) = \dim(\widehat{B}_{\mathfrak{q}})$.

(iv) *On a* $\dim(\widehat{B} \otimes_R K) \leq \dim(B \otimes_R K)$ *et les deux membres sont égaux si $B \otimes_R K$ est biéquidimentionnel* ([31] 0.16.1.4).

On notera que $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie sur A (1.10.6), et donc idyllique (1.10.8).

(i) On sait que $\widehat{B}/\mathfrak{q}$ est un ordre 1-valuatif (1.11.8) ; il est donc fini sur R et son corps des fractions est une extension finie de K (1.11.5). Comme $A/\mathfrak{m} \subset B/\mathfrak{p} \subset \widehat{B}/\mathfrak{q}$, $(A/\mathfrak{m}) \otimes_R K$ et $(B/\mathfrak{p}) \otimes_R K$ sont des extensions finies de K, d'où l'assertion.

(ii) Cela résulte de (i) et 1.12.18.

(iii) Cela résulte de (ii) et ([31] 0.16.2.4) car les anneaux $B_{\mathfrak{p}}$ et $\widehat{B}_{\mathfrak{q}}$ sont noethériens (1.10.2).

(iv) Cela résulte aussitôt de (i) et (iii).

Définition 1.12.21. Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S. On dit que la paire (S,T) est *quasi-idyllique* si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

(a) S est localement noethérien.
(b) S est localement de type fini sur un anneau quasi-idyllique A, et T est défini par un idéal de $\mathscr{O}_S$ de la forme $J\mathscr{O}_S$, où J est un idéal de définition de type fini de A.

Proposition 1.12.22. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S-T$ de S, $f\colon X \to S$ un morphisme localement de type fini. Supposons la paire (S,T) quasi-idyllique et l'ouvert $f^{-1}(U)$ schématiquement dense dans X. Alors f est localement de présentation finie.*

On peut évidemment se borner au cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, A étant un anneau quasi-idyllique, et T est le sous-schéma fermé de S défini par un idéal de définition de type fini J de A ([28] 6.2.6(v)). La proposition résulte alors de 1.8.30.2 et 1.12.16(ii).

Proposition 1.12.23. *Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S-T$ de S, V un U-schéma séparé de type fini. Supposons la paire (S,T) quasi-idyllique. Alors il existe un morphisme propre de présentation finie $f\colon X \to S$ et une immersion ouverte schématiquement dominante $\iota\colon V \to X$ au-dessus de S.*

Par le théorème de plongement de Nagata ([16], [14] 4.1), il existe un morphisme propre $f\colon X \to S$ et une immersion ouverte $\iota\colon V \to X$ au-dessus de S, qui est nécessairement quasi-compacte ([28] 6.1.10). Quitte à remplacer X par l'adhérence schématique de V dans X (qui existe en vertu de [28] 6.10.6), on peut supposer ι schématiquement dominante. Par suite, $f^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans X. Donc f est de présentation finie en vertu de 1.12.22.

Corollaire 1.12.24. *Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S-T$ de S, V un U-schéma propre. Supposons la paire (S,T) quasi-idyllique. Alors il existe un S-schéma propre de présentation finie X tel que X_U soit U-isomorphe à V.*

En effet, en vertu de 1.12.23, il existe un morphisme propre de présentation finie $f\colon X \to S$ et une immersion ouverte schématiquement dominante $\iota\colon V \to X$

au-dessus de S. Donc l'immersion $\iota_U \colon V \to X_U$ est schématiquement dominante. Or il résulte des hypothèses que ι_U est propre. Par suite, ι_U est un isomorphisme.

1.13 Rappels et compléments sur la platification par éclatements

Définition 1.13.1. Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_S$, $\mathscr{M}$ un $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent.

(i) On appelle *éclatement* de T (ou de $\mathscr{I}$) dans S le spectre homogène de la $\mathscr{O}_S$-algèbre graduée $\oplus_{n\in\mathbb{N}}\mathscr{I}^n$ (cf. [29] 8.1.3).

(ii) Notons $f\colon S' \to S$ l'éclatement de T dans S. On appelle *transformé strict* de $\mathscr{M}$ par f le quotient de $f^*(\mathscr{M})$ par le sous-module formé des sections à support dans $f^{-1}(T)$.

On peut faire les remarques suivantes :

1.13.1.1. Il est bien connu que S' est un objet final de la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{/S}$ formée des S-schémas X tels que $\mathscr{I}\mathscr{O}_X$ soit un idéal inversible de $\mathscr{O}_X$.

En particulier, si U est l'ouvert $S - T$ de S, f induit un isomorphisme au-dessus de U.

1.13.1.2. À partir de maintenant on ne considère que des éclatements d'idéaux de type fini. Si $\mathscr{I}$ est de type fini, f est un morphisme projectif et $\mathscr{I}\mathscr{O}_{S'}$ est un $\mathscr{O}_{S'}$-module très ample pour f.

1.13.1.3. Comme $\mathscr{I}\mathscr{O}_{S'}$ est un idéal inversible de $\mathscr{O}_{S'}$, $U' = f^{-1}(U)$ est un ouvert schématiquement dense dans S'.

1.13.1.4. Soit $\mathscr{J}$ un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_S$; notons $g\colon S'' \to S'$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{O}_{S'}$ dans S'. On voit à l'aide de 1.13.1.1 que $f\circ g$ est l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{J}$ dans S.

1.13.1.5. Soient X un S-schéma, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent, X' l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{O}_X$ dans X. On voit à l'aide de 1.13.1.1 que X' est X-isomorphe à l'adhérence schématique de $X \times_S U'$ dans $X \times_S S'$. Par suite, le transformé strict de $\mathscr{F}$ par l'éclatement $X' \to X$ est le quotient de $\mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}$ par le sous-module formé des sections nulles au-dessus de $X \times_S U'$; on l'appelle encore *transformé strict* de $\mathscr{F}$ par f.

Le transformé strict de $\mathscr{O}_X$ par f est $\mathscr{O}_{X'}$. On dit que X' est le *transformé strict* de X par f.

On prendra grade que la notion de "transformé strict par f" dépend à priori de T et pas seulement du morphisme f.

1.13.1.6. Sous les hypothèses de 1.13.1.5, si $\mathscr{F}$ est S-plat, le transformé strict de $\mathscr{F}$ par f est égal à $\mathscr{F} \otimes_S \mathscr{O}_{S'}$ (1.8.32).

Définition 1.13.2 ([42] 5.1.3). Soient S un schéma, U un ouvert de S, $f\colon S' \to S$ un morphisme de type fini. On dit que f est un *éclatement U-admissible* s'il existe un sous-schéma fermé de présentation finie T de S, disjoint de U, tel que f soit isomorphe à l'éclatement de T dans S. On notera que l'isomorphisme est alors unique.

Proposition 1.13.3. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, $f\colon S' \to S$ un éclatement U-admissible de S, $U' = f^{-1}(U)$.*

(i) *Si U est schématiquement dense dans S, U' est schématiquement dense dans S'.*

(ii) *Supposons la paire (S, T) quasi-idyllique* (1.12.21) *et U' schématiquement dense dans S'. Alors f est de présentation finie.*

(i) Soient Y un sous-schéma fermé de présentation finie de S, disjoint de U, tel que f soit isomorphe à l'éclatement de Y dans S, V l'ouvert $S - Y$ de S, $V' = f^{-1}(V)$. Comme $U \subset V$, l'hypothèse entraîne que U' est schématiquement dense dans V' ([28] 6.10.7) ; et comme V' est schématiquement dense dans S', U' est schématiquement dense dans S' ([28] 6.10.3).

(ii) C'est un cas particulier de 1.12.22.

Corollaire 1.13.4. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, $f\colon S' \to S$ un éclatement U-admissible. Supposons la paire (S, T) quasi-idyllique. Alors il existe un éclatement U-admissible de présentation finie $g\colon S'' \to S$ tel que f majore g, i.e., tel que* $\mathrm{Hom}_S(S'', S') \neq \emptyset$.

En effet, si T est défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_S$, et si f est isomorphe à l'éclatement dans S d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_S$, l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{J}$ dans S répond à la question, en vertu de 1.13.3(ii).

Proposition 1.13.5 ([42] 5.1.4). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert de S, $f\colon S' \to S$ un éclatement U-admissible, $g\colon S'' \to S'$ un éclatement $f^{-1}(U)$-admissible. Alors $f \circ g$ est un éclatement U-admissible.*

Remarque 1.13.6. Conservons les hypothèses de 1.13.5. Supposons que f soit l'éclatement dans S d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_S$ définissant un sous-schéma fermé disjoint de U, et que g soit l'éclatement dans S' d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_{S'}$ définissant un sous-schéma fermé disjoint de $f^{-1}(U)$. Posons $\mathscr{I}' = \mathscr{I}\mathscr{O}_{S'}$.

(i) Il ressort de la preuve de ([42] 5.1.4) qu'il existe un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{L}$ de $\mathscr{O}_S$ et un entier $m \geq 1$ tels que $\mathscr{L}\mathscr{O}_{S'} = \mathscr{I}'^m \mathscr{J}^m$. Par suite, $f \circ g$ est isomorphe à l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{L}$ dans S.

(ii) Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_S$-module quasi-cohérent, $\mathscr{F}'$ le transformé strict de $\mathscr{F}$ par f, $\mathscr{F}''$ le transformé strict de $\mathscr{F}'$ par g. Il résulte aussitôt de (i) que le transformé strict de $\mathscr{F}$ par $f \circ g$ est un quotient de $\mathscr{F}''$. Par suite, si $\mathscr{F}''$ est S''-plat, le transformé strict de $\mathscr{F}$ par $f \circ g$ est égal à $\mathscr{F}''$ (1.8.32).

Définition 1.13.7 ([42] 5.2.1). Soient $f\colon X \to S$ un morphisme de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, n un entier. On dit que $\mathscr{F}$ est S-plat en dimension $\geq n$, s'il existe un ouvert rétro-compact V de X ([28] 0.2.3.1) tel que $\dim((X-V)/S) < n$ et que $\mathscr{F}|V$ soit un $\mathscr{O}_V$-module de présentation finie, S-plat.

Théorème 1.13.8 ([42] 5.2.2). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, $f\colon X \to S$ un morphisme de présentation finie, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, n un entier. Supposons que $\mathscr{F}|f^{-1}(U)$ soit U-plat en dimension $\geq n$. Alors il existe un éclatement U-admissible $g\colon S' \to S$, tel que le transformé strict de $\mathscr{F}$ par g soit S'-plat en dimension $\geq n$.*

Remarque 1.13.9. Conservons les hypothèses de 1.13.8. Notons $\mathscr{B}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{/S}$ formée des éclatements dans S d'un sous-schéma fermé de présentation finie T tel que $U = S - T$, et $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{B}$ formée des éclatements $g\colon S' \to S$, tels que le transformé strict de $\mathscr{F}$ par g soit S'-plat en dimension $\geq n$. Alors $\mathscr{C}$ est un crible non vide de $\mathscr{B}$ ([1] I 4.1).

Montrons d'abord que $\mathscr{C}$ est non vide. D'après 1.13.8, il existe un éclatement U-admissible $g\colon S' \to S$, tel que le transformé strict $\mathscr{F}'$ de $\mathscr{F}$ par g soit S'-plat en dimension $\geq n$. D'autre part, il existe un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_S$ tel que $U = S - \mathrm{V}(\mathscr{J})$ ([28] 6.9.7). Soient $g'\colon S'' \to S'$ l'éclatement de $\mathscr{J}\mathscr{O}_{S'}$ dans S', $h = g \circ g'$, $U'' = h^{-1}(U)$. Il est clair que h est un objet de $\mathscr{B}$ (1.13.1.4) ; le transformé strict $\mathscr{F}''$ de $\mathscr{F}$ par h est le quotient de $\mathscr{F}' \otimes_{S'} \mathscr{O}_{S''}$ par le sous-module formé des sections nulles au-dessus de $X \times_S U''$. Il résulte alors de 1.8.32 que $\mathscr{F}''$ est S''-plat en dimension $\geq n$. Donc h est un objet de $\mathscr{C}$.

Montrons ensuite que $\mathscr{C}$ est un crible. Soient $g\colon S' \to S$ un objet de $\mathscr{C}$, $h\colon S'' \to S$ un objet de $\mathscr{B}$, $U'' = h^{-1}(U)$, $\mathscr{F}'$ (resp. $\mathscr{F}''$) le transformé strict de $\mathscr{F}$ par g (resp. h), $k\colon S'' \to S'$ un S-morphisme. Il est clair que $\mathscr{F}''$ est le quotient de $\mathscr{F}' \otimes_{S'} \mathscr{O}_{S''}$ par le sous-module formé des sections nulles au-dessus de $X \times_S U''$. Il résulte alors de 1.8.32 que $\mathscr{F}''$ est S''-plat en dimension $\geq n$. Donc h est un objet de $\mathscr{C}$.

Corollaire 1.13.10. *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, X un S-schéma de type fini, qui est plat et localement de présentation finie au-dessus de U. Alors il existe un éclatement U-admissible $\varphi\colon S' \to S$, tel que le transformé strict de X par φ soit plat et localement de présentation finie au-dessus de S'.*

En effet, il résulte de ([42] 5.3) que l'on peut supposer X et S affines, auquel cas l'assertion est une conséquence immédiate de 1.13.8.

Corollaire 1.13.11 ([42] 5.7.10). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, n un entier, X un S-schéma de type fini, qui au-dessus de U est de dimension relative $\leq n$. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que le transformé strict de X par cet éclatement soit de dimension relative $\leq n$ au-dessus de S'.*

Corollaire 1.13.12. *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, X un S-schéma de type fini, qui au-dessus de U est quasi-fini. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que le transformé strict de X par cet éclatement soit quasi-fini au-dessus de S'.*

Corollaire 1.13.13. *Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, X un S-schéma propre, qui au-dessus de U est fini. Supposons la paire (S, T) quasi-idyllique* (1.12.21). *Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que le transformé strict de X par cet éclatement soit fini et de présentation finie au-dessus de S'.*

En effet, en vertu de 1.13.12, il existe un éclatement U-admissible $\varphi\colon S' \to S$, tel que le transformé strict X' de X par φ soit quasi-fini au-dessus de S'. Quitte à remplacer φ, on peut supposer que φ est l'éclatement dans S d'un fermé de support T (1.13.1.4). Il résulte alors de 1.12.22 que X' est localement de présentation finie sur S'. Comme X' est propre sur S', il est fini sur S' en vertu de ([31] 8.11.1).

Corollaire 1.13.14. *Soient S un schéma cohérent, T un sous-schéma fermé de S, U l'ouvert $S - T$ de S, V un U-schéma fini. Supposons la paire (S, T) quasi-idyllique. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$ et un S'-schéma fini de présentation finie X' tel que X'_U soit U-isomorphe à V.*

En effet, en vertu de 1.12.24, il existe un S-schéma propre de présentation finie X tel que X_U soit U-isomorphe à V. Il suffit de lui appliquer 1.13.13.

Remarque 1.13.15. L'énoncé 1.13.14 sera renforcé dans 2.6.23.

Corollaire 1.13.16 ([42] 5.7.11). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, $f\colon X \to S$ un morphisme séparé de type fini. On suppose que f_U est une immersion ouverte. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que si X' est le transformé strict de X par cet éclatement, le morphisme canonique $X' \to S'$ soit une immersion ouverte.*

Corollaire 1.13.17 ([42] 5.7.12). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, $f\colon X \to S$ un morphisme propre qui est un isomorphisme au-dessus de U. Alors il existe un éclatement U-admissible $S' \to S$, tel que si X' est le transformé strict de X par cet éclatement, le morphisme canonique $X' \to S'$ soit un isomorphisme.*

Proposition 1.13.18. *Soient S un schéma, U un ouvert rétro-compact de S, Y un S-schéma, X un S-schéma propre, $u\colon Y_U \to X_U$ un U-morphisme. Supposons que Y soit un schéma cohérent. Alors il existe un éclatement Y_U-admissible $\varphi\colon Y' \to Y$ et un S-morphisme $u'\colon Y' \to X$ tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} Y_U \arrow[r, "u"] \arrow[d] & X_U \arrow[d] \\ Y' \arrow[r, "u'"] & X \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques soit commutatif.

Notons $j\colon U \to S$ l'injection canonique, $\gamma_0\colon Y_U \to Y_U \times_S X$ le morphisme graphe de $j_X \circ u$ et $\gamma\colon Y_U \to Y \times_S X$ l'immersion composée de γ_0 et de $j_Y \times_S X\colon Y_U \times_S X \to Y \times_S X$. Comme X est séparé sur S, γ_0 est une immersion fermée ; et comme j est quasi-compacte, γ est quasi-compacte. Par suite, l'adhérence schématique Γ de Y_U dans $Y \times_S X$ existe ([28] 6.10.6). Notons $p\colon \Gamma \to Y$ le morphisme induit par la projection canonique $Y \times_S X \to Y$. D'une part, p est propre car X est propre sur S. D'autre part, $\Gamma \cap (Y_U \times_S X)$ s'identifie à l'adhérence schématique de Y_U dans $Y_U \times_S X$ ([28] 6.10.7) ; il est donc égal à Y_U. Par suite la restriction de p au-dessus de Y_U est un isomorphisme. En vertu de 1.13.17, il existe alors un éclatement Y_U-admissible $\varphi\colon Y' \to Y$ tel que, si Γ' est le transformé strict de Γ par cet éclatement, le morphisme canonique $\alpha\colon \Gamma' \to Y'$ soit un isomorphisme. Le morphisme u' composé de α^{-1} et du morphisme canonique $\Gamma' \to X$ répond à la question.

Proposition 1.13.19. *Soient S un schéma, T un sous-schéma fermé de S défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_S$, U l'ouvert $S - T$ de S, $f\colon Y \to X$ un morphisme de S-schémas, Z un sous-schéma fermé de X défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_X$, V l'ouvert $X_U - Z_U$ de X_U. Supposons que Y soit quasi-compact et que l'on ait $f(Y_U) \subset V$. Alors il existe un éclatement X_U-admissible $\varphi\colon X' \to X$ et un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{I}'$ de $\mathscr{O}_{X'}$ tels que si Y' désigne le transformé strict de Y par φ, on ait $\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} \subset \mathscr{I}'$, $\mathscr{I}'|X'_U = \mathscr{I}|X_U$ et $\mathscr{I}'\mathscr{O}_{Y'} = \mathscr{O}_{Y'}$.*

D'après ([28] 6.8.4), il existe un entier $n \geq 1$ tel que l'on ait $\mathscr{J}^n\mathscr{O}_Y \subset \mathscr{I}\mathscr{O}_Y$. Soient $\varphi\colon X' \to X$ l'éclatement de $\mathscr{I} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_X$ dans X, Y' le transformé strict de Y par φ, qu'on identifie à l'éclatement de $\mathscr{I}\mathscr{O}_Y = \mathscr{I}\mathscr{O}_Y + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_Y$ dans Y, $f'\colon Y' \to X'$ le morphisme canonique. Comme l'idéal $\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_{X'}$ est inversible, $\mathscr{I}' = (\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'})(\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_{X'})^{-1}$ s'identifie à un idéal de $\mathscr{O}_{X'}$. On a clairement $\mathscr{I}'|X'_U = \mathscr{I}\mathscr{O}_{X'_U} = \mathscr{I}|X_U$ et $\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} \subset \mathscr{I}'$. D'autre part, l'homomorphisme surjectif canonique

$$f'^*(\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_{X'}) \to \mathscr{I}\mathscr{O}_{Y'} + \mathscr{J}^n\mathscr{O}_{Y'} = \mathscr{I}\mathscr{O}_{Y'}$$

est bijectif puisque sa source et son but sont des modules inversibles. On en déduit que l'on a $\mathscr{I}'\mathscr{O}_{Y'} = \mathscr{O}_{Y'}$.

Lemme 1.13.20. *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, X un S-schéma fidèlement plat et de présentation finie au-dessus de S, $f\colon X' \to X$ un morphisme propre qui est un isomorphisme au-dessus de X_U. Alors il existe un éclatement U-admissible $\psi\colon S' \to S$, tel que le transformé strict de X' par ψ soit fidèlement plat et de présentation finie au-dessus de S'.*

En effet, d'après 1.13.10, il existe un éclatement U-admissible $\psi\colon S' \to S$, tel que le transformé strict X'_1 de X' par ψ soit plat et de présentation finie au-dessus de S'. On peut supposer que ψ est l'éclatement dans S d'un fermé de présentation finie T tel que $U = S - T$ (cf. 1.13.9). Donc $U' = \psi^{-1}(U)$ est schématiquement dense dans S'. Le morphisme $f_1\colon X'_1 \to X \times_S S'$ déduit de f est propre. Comme $X \times_S U'$ est schématiquement dense dans $X \times_S S'$ (1.8.32), f_1 est surjectif. Donc ψ répond à la question.

Théorème 1.13.21 (Gabber). *Soient S un schéma cohérent, U un ouvert quasi-compact de S, $f\colon X \to S$ un morphisme propre et de présentation finie, V un ouvert quasi-compact de X_U qui est fidèlement plat au-dessus de U. Alors il existe un éclatement X_U-admissible $\varphi\colon X' \to X$, un éclatement U-admissible $\psi\colon S' \to S$ et un ouvert quasi-compact W du transformé strict de X' par ψ qui coïncide avec V au-dessus de U et qui est fidèlement plat et de présentation finie au-dessus de S'.*

On désigne par $\mathscr{B}$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Sch}_{/X}$ formée des éclatements X_U-admissibles de X, et par $\mathscr{C}$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{B}$ formée des éclatements X_U-admissibles $\varphi\colon X' \to X$, tels qu'il existe un éclatement U-admissible $\psi\colon S' \to S$ et un ouvert quasi-compact W du transformé strict de X' par ψ qui coïncide avec V au-dessus de U et qui est fidèlement plat et de présentation finie au-dessus de S'. Il est clair que $\mathscr{B}$ est une catégorie cofiltrante. Il résulte de 1.13.20, 1.13.5 et 1.13.6 que $\mathscr{C}$ est un crible de $\mathscr{B}$ ([1] I 4.1). On en déduit par ([42] 5.3) que si $(S_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de S par des ouverts quasi-compacts tel que pour tout $i \in I$, le théorème soit vrai pour la restriction de la situation au-dessus de S_i, alors le théorème est vrai au-dessus de S. On peut donc supposer S affine.

Montrons que l'on peut se réduire encore au cas où S est affine noethérien. Considérons S comme limite projective filtrante de schémas affines noethériens $(S_i)_{i\in I}$. Pour i assez grand, il existe un ouvert U_i de S_i, un S_i-schéma propre X_i et un ouvert V_i de $X_i \times_{S_i} U_i$, fidèlement plat au-dessus de U_i, tels que U, X et V proviennent respectivement de U_i, X_i et V_i par le changement de base $S \to S_i$ ([31] 8.8.2, 8.10.5 et 11.2.6). Supposons qu'il existe un éclatement $(X_i \times_{S_i} U_i)$-admissible $\varphi_i\colon X'_i \to X_i$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{I}_i$ de $\mathscr{O}_{X_i}$, avec $\mathscr{I}_i|(X_i \times_{S_i} U_i) = \mathscr{O}_{X_i \times_{S_i} U_i}$, un éclatement U_i-admissible $\psi_i\colon S'_i \to S_i$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{J}_i$ de $\mathscr{O}_{S_i}$, avec $\mathscr{J}_i|U_i = \mathscr{O}_{U_i}$, et un ouvert W_i du transformé strict $\widetilde{X}'_i$ de X'_i par ψ_i, qui coïncide avec V_i au-dessus de U_i et qui est fidèlement plat au-dessus de S'_i. Quitte à changer ψ_i, on peut supposer $U_i = S_i - \mathrm{V}(\mathscr{J}_i)$ (cf. 1.13.9). Soient $\varphi\colon X' \to X$ l'éclatement X_U-admissible défini par l'idéal $\mathscr{I} = \mathscr{I}_i\mathscr{O}_X$, $\psi\colon S' \to S$ l'éclatement U-admissible défini par l'idéal $\mathscr{J} = \mathscr{J}_i\mathscr{O}_S$, $\widetilde{X}'$ le transformé strict de X' par ψ. Il est clair que $\widetilde{X}'$ est un sous-schéma fermé de $S' \times_{S'_i} \widetilde{X}'_i$, et ces deux schémas coïncident au-dessus de U. Comme $U_i = S_i - \mathrm{V}(\mathscr{J}_i)$, $S' \times_{S'_i} W_i$ s'identifie à un sous-schéma ouvert de $\widetilde{X}'$ (1.8.32). Le triplet $(\varphi, \psi, S' \times_{S'_i} W_i)$ répond donc à la question.

Montrons maintenant le théorème dans le cas où S est noethérien. On notera d'abord que si $\psi\colon S' \to S$ est un éclatement U-admissible, il est loisible de remplacer S par S' et X par son transformé strict par ψ (1.13.5 et 1.13.6). En vertu de ([31] 17.16.4), il existe une famille finie $(U_j)_{j\in J}$ de sous-schémas non vides de U, deux à deux disjoints, de réunion U, et ayant la propriété suivante : pour tout

$j \in J$, il existe un morphisme fini et surjectif $g_j \colon V_j \to U_j$ et un U-morphisme $s_j \colon V_j \to V$. Quitte à raffiner la stratification $(U_j)_{j\in J}$ de U, on peut supposer que, pour tout $j \in J$, l'adhérence de U_j dans U est réunion de strates. De plus, on peut supposer les s_j des immersions. En effet, compte tenu des hypothèses, le morphisme $V_j \to V \times_U U_j$, défini par s_j et g_j, est propre. Notons V'_j son image schématique ([28] 6.10.5). Le morphisme canonique $V'_j \to U_j$ est quasi-fini, surjectif et propre ([29] 5.4.3(ii)). Il est donc fini ([30] 4.4.11), et on peut remplacer V_j par V'_j. On dira dans la suite que $(U_j)_{j\in J}$ est une *stratification adéquate* de U.

On procède par récurrence sur le nombre de strates d'une stratification adéquate de U. Soit n un entier ≥ 1. Supposons le théorème établi lorsque U admet une stratification adéquate ayant au plus $n-1$ strates (cette hypothèses est clairement satisfaite si $n = 1$). Montrons le théorème lorsque U admet une stratification adéquate $(U_j)_{j\in J}$ à n strates. Soit $j \in J$ tel que U_j soit fermé dans U (qui existe d'après les hypothèses). Notons S_j l'adhérence schématique de U_j dans S, X_j l'adhérence schématique de V_j dans X. Par transitivité des images schématiques ([28] 6.9.3), f induit un morphisme propre et surjectif $f_j \colon X_j \to S_j$ qui prolonge g_j. Il résulte des hypothèses que V_j est fermé dans X_U, et par suite, que l'on a $X_j \times_S U = V_j \subset V$. Soit Z un sous-schéma fermé de X défini par un idéal cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_X$, tel que X_U soit la réunion disjointe de Z_U et V. D'après 1.13.19, il existe un éclatement X_U-admissible $\varphi\colon X' \to X$ et un idéal cohérent $\mathscr{I}'$ de $\mathscr{O}_{X'}$ tels que si X'_j désigne le transformé strict de X_j par φ, on ait $\mathscr{I}\mathscr{O}_{X'} \subset \mathscr{I}'$, $\mathscr{I}'|X'_U = \mathscr{I}|X_U$ et $\mathscr{I}'\mathscr{O}_{X'_j} = \mathscr{O}_{X'_j}$. Il est loisible de remplacer X par X' (1.13.5), X_j par X'_j (1.13.3(i)) et Z par $\mathrm{V}(\mathscr{I}')$. On peut donc supposer que l'on a $X_j \cap Z = \emptyset$. Posons $W_j = X - Z$, qui est un ouvert de X contenant X_j, et coïncidant avec V au-dessus de U. En vertu de 1.13.10, il existe un éclatement U-admissible $\psi\colon S' \to S$ tel que le transformé strict de W_j par ψ soit S'-plat. Il est encore loisible de remplacer S par S', et S_j, X, W_j et X_j par leurs transformés stricts par ψ. On peut donc supposer qu'il existe un ouvert W_j de X, S-plat, contenant X_j, et coïncidant avec V au-dessus de U. Par suite $A = f(W_j)$ est un ouvert de S contenant S_j. Notons B l'ouvert $S - S_j$ de S, de sorte que l'on a $S = A \cup B$. Le théorème est clairement vrai pour la restriction de la situation au-dessus de A ; et il est vrai pour la restriction de la situation au-dessus de B d'après l'hypothèse de récurrence. Il est donc vrai au-dessus de S.

1.14 Propriétés différentielles des anneaux idylliques

1.14.1. Soient A un anneau linéairement topologisé, B une A-algèbre topologique, linéairement topologisée. On rappelle que le module des différentielles $\Omega^1_{B/A}$ est muni d'une topologie canonique, qui en fait un B-module topologique ([31] 0.20.4.3). Cette topologie est moins fine que la topologie déduite de celle de B ; si dans B le carré de tout idéal ouvert est ouvert, ces deux topologies sont identiques ([31] 0.20.4.5). On désigne par $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ le séparé complété du B-module topologique

$\Omega^1_{B/A}$ ([31] 0.20.7.14) et par $\hat{d}_{B/A}$ (ou simplement $\hat{d}$) la A-dérivation canonique de B dans $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$.

Proposition 1.14.2. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de type fini.*

(i) *Le B-module $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est de type fini et sa topologie est déduite de celle de B ; il est engendré par les éléments $\hat{d}(x)$, où x parcourt un système de générateurs topologiques de la A-algèbre topologique B.*
(ii) *Si B est topologiquement de présentation finie sur A, $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est un B-module de présentation finie.*
(iii) *Si B est formellement lisse sur A, $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est un B-module projectif.*

En effet, (i) résulte de 1.8.5 et 1.8.7, (ii) de 1.10.11, et (iii) de 1.12.5 et ([31] 0.20.4.10).

1.14.3. Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de type fini, C une B-algèbre topologiquement de type fini. Alors la suite canonique ([31] 0.20.7.17)

$$\widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\hat{u}} \widehat{\Omega}^1_{C/A} \xrightarrow{\hat{v}} \widehat{\Omega}^1_{C/B} \longrightarrow 0 \qquad (1.14.3.1)$$

est exacte. En effet, on sait que $\hat{v}$ est surjectif et que l'image de $\hat{u}$ est dense dans le noyau de $\hat{v}$; donc l'assertion résulte de 1.8.28(c).

1.14.4. Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de type fini, $\mathfrak{I}$ un idéal de type fini de B, $C = B/\mathfrak{I}$ la A-algèbre topologique quotient. Alors la suite canonique ([31] 0.20.7.20)

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \xrightarrow{\widehat{\delta}} \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\hat{u}} \widehat{\Omega}^1_{C/A} \longrightarrow 0 \qquad (1.14.4.1)$$

est exacte. En effet, on sait que $\hat{u}$ est surjectif et que l'image de $\widehat{\delta}$ est dense dans le noyau de $\hat{u}$; donc l'assertion résulte de 1.8.28(c).

Proposition 1.14.5 (Critère jacobien de lissité formelle). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse, $\mathfrak{I}$ un idéal de type fini de B, $C = B/\mathfrak{I}$ la A-algèbre topologique quotient. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *C est une A-algèbre formellement lisse.*
(ii) *L'homomorphisme canonique $\delta\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B C$ est formellement inversible à gauche* ([31] 0.19.1.5).
(iii) *L'homomorphisme $\widehat{\delta}\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C$ déduit de δ par prolongement aux complétés est inversible à gauche.*
(iv) *L'homomorphisme $\delta_0\colon \mathfrak{I} \otimes_B (C/JC) \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B (C/JC)$ déduit de δ par passage aux quotients est inversible à gauche.*

En effet, les conditions (i) et (ii) sont équivalentes par le critère jacobien ([31] 0.22.6.1), les conditions (ii) et (iv) sont équivalentes en vertu de ([31] 0.19.1.9), et les conditions (iii) et (iv) sont équivalentes en vertu de 1.14.2 et ([31] 0.19.1.10).

Proposition 1.14.6. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse, $\mathfrak{I}$ un idéal de type fini de B, $C = B/\mathfrak{I}$ la A-algèbre topologique quotient. Considérons l'homomorphisme canonique*

$$\widehat{\delta}\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \tag{1.14.6.1}$$

et notons U l'ensemble des points $x \in \mathrm{Spec}(C)$ tel que $\widehat{\delta} \otimes_C \kappa(x)$ soit injectif. Alors U est l'ouvert maximal de $\mathrm{Spec}(C)$ où $\widehat{\delta}$ est localement inversible à gauche. De plus, U ne dépend pas du choix de la A-algèbre formellement lisse B.

La première assertion résulte de 1.3.15 et du fait que $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est un B-module projectif de type fini (1.14.2). Appelons provisoirement U l'ouvert jacobien de $\mathfrak{I}$. Soient S une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse, $\varphi\colon S \to C$ un homomorphisme surjectif de A-algèbres, $\mathfrak{J}$ son noyau, qui est un S-module de type fini (1.10.5). Pour montrer que les ouverts jacobiens de $\mathfrak{I}$ et $\mathfrak{J}$ sont égaux, on peut se borner au cas où il existe un homomorphisme surjectif de A-algèbres $\psi\colon S \to B$ induisant φ ; notons $\mathfrak{K}$ son noyau, qui est un S-module de type fini (1.10.5). Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2 \otimes_B C \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2 \otimes_B C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{S/A} \otimes_S C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{1.14.6.2}$$

dont la ligne inférieure est exacte et scindée d'après 1.14.5, montre que les ouverts jacobiens de $\mathfrak{I}$ et de $\mathfrak{J}$ sont égaux.

Définition 1.14.7. Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, C une A-algèbre topologiquement de présentation finie. On appelle ouvert de lissité formelle de C sur A l'ouvert U de $\mathrm{Spec}(C)$ défini dans (1.14.6). On dit que C est une A-algèbre *rig-lisse* (ou *rig-lisse* sur A) si U contient $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$. On dit que C est une A-algèbre *rig-étale* (ou *rig-étale* sur A) si elle est rig-lisse sur A et si le C-module $\widehat{\Omega}^1_{C/A}$ est rig-nul.

Il résulte de la définition (1.14.7) et de la suite exacte (1.14.4.1) que $\widehat{\Omega}^1_{C/A}$ est localement libre de type fini sur l'ouvert de lissité formelle de C sur A.

Proposition 1.14.8. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, C une A-algèbre topologiquement de présentation finie, $B = A\langle\xi_1, \ldots, \xi_n\rangle$ une algèbre de séries formelles restreintes, $\varphi\colon B \to C$ un homomorphisme surjectif de A-algèbres, $\mathfrak{I} = \ker(\varphi)$. Les conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(i) *C est rig-lisse sur A et $\widehat{\Omega}^1_{C/A}$ est localement libre de rang r sur* $\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$.

(ii) *Pour tout point fermé $\mathfrak{q}\in\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$, si l'on pose $\mathfrak{p}=\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, il existe dans $\mathfrak{I}$ un système de $(n-r)$ séries u_i $(r+1\leq i\leq n)$, et $(n-r)$ indices $j_k\in\{1,\dots,n\}$ $(r+1\leq k\leq n)$ tels que les images des u_i dans $\mathfrak{I}_\mathfrak{p}$ engendrent cet idéal et que l'on ait*

$$\det(\partial u_i/\partial\xi_{j_k})\not\in\mathfrak{p}. \tag{1.14.8.1}$$

Cela résulte de la définition, de 1.3.15 et du fait que $\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$ est un schéma de Jacobson (1.11.9).

Proposition 1.14.9 (Critère jacobien de rig-lissité). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse, $\mathfrak{I}$ un idéal de type fini de B, $C=B/\mathfrak{I}$ la A-algèbre topologique quotient. Pour que C soit une A-algèbre rig-lisse, il faut et il suffit que l'homomorphisme canonique*

$$\widehat{\delta}\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2\to\widehat{\Omega}^1_{B/A}\otimes_B C \tag{1.14.9.1}$$

soit localement inversible à gauche sur $\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$.

Soit V l'ensemble des points $x\in\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$ tel que $\widehat{\delta}\otimes_C\kappa(x)$ soit injectif. Il résulte de 1.3.15 et du fait que $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ est localement libre de type fini sur $\mathrm{Spec}(B)-\mathrm{V}(JB)$, que V est l'ouvert maximal de $\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$ où $\widehat{\delta}$ est localement inversible à gauche. Donc tout revient à montrer que C est rig-lisse sur A si et seulement si $V=\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$. Soient S une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse, $\varphi\colon S\to B$ un homomorphisme surjectif, $\mathfrak{K}$ son noyau, $\mathfrak{J}$ l'image réciproque de $\mathfrak{I}$, de sorte que C est isomorphe au quotient de S par $\mathfrak{J}$; alors $\mathfrak{K}$ et $\mathfrak{J}$ sont des S-modules de type fini (1.10.5). Le diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2\otimes_B C \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2\otimes_B C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{S/A}\otimes_S C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{B/A}\otimes_B C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dont la ligne inférieure est exacte et localement scindée sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$ (1.14.6), montre que V est l'intersection de $\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$ et de l'ouvert de lissité formel de C sur A, d'où notre assertion.

Proposition 1.14.10. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse, C une B-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse ; alors C est une A-algèbre rig-lisse.*

Cette proposition sera démontrée dans 6.4.16. Le lecteur vérifiera qu'il n'y a pas de cercle vicieux.

Proposition 1.14.11. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse, A' une A-algèbre adique. Supposons A' un anneau quasi-idyllique. Alors $B\widehat{\otimes}_A A'$ est topologiquement de présentation finie et rig-lisse sur A'.*

Cela résulte facilement de 1.10.10 (cf. 1.16.3).

Proposition 1.14.12. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse, C une B-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse ; alors la suite canonique* (1.14.3.1)

$$0 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \to \widehat{\Omega}^1_{C/A} \to \widehat{\Omega}^1_{C/B} \to 0 \tag{1.14.12.1}$$

est exacte et localement scindée sur $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$.

Soient $D = B\langle \xi_1, \ldots, \xi_n \rangle$ une algèbre de séries formelles restreintes sur B, $\varphi\colon D \to C$ un homomorphisme surjectif de B-algèbres, $\mathfrak{I}$ son noyau. En vertu de 1.14.10, D et C sont rig-lisses sur A. Considérons le diagramme commutatif canonique

$$\begin{tikzcd}
 & & \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[r, equal] \arrow[d, "a"] & \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[d, "b"] & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widehat{\Omega}^1_{D/A} \otimes_D C \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{\Omega}^1_{C/A} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{D/B} \otimes_D C \arrow[r] & \widehat{\Omega}^1_{C/B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'une part, les lignes horizontales sont exactes et localement scindées sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$ en vertu de 1.14.9. D'autre part, la suite

$$0 \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B D \to \widehat{\Omega}^1_{D/A} \to \widehat{\Omega}^1_{D/B} \to 0 \tag{1.14.12.2}$$

est exacte et scindée d'après ([31] 0.20.7.18). Par suite, pour tout $x \in \mathrm{Spec}(C) - \mathrm{V}(JC)$, $b \otimes_C \kappa(x)$ est injectif, et la proposition s'ensuit compte tenu de 1.3.15.

Proposition 1.14.13. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, C une A-algèbre de présentation finie, $\widehat{C}$ le séparé complété de C pour la topologie J-adique. Alors l'ouvert de lissité formelle de $\widehat{C}$ sur A est l'image réciproque de l'ouvert de lissité de C sur A par le morphisme canonique* $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) \to \mathrm{Spec}(C)$.

Notons d'abord que $\widehat{C}$ est topologiquement de présentation finie sur A (1.10.6). Soient B une A-algèbre lisse, $\varphi\colon B \to C$ un A-homomorphisme surjectif, $\mathfrak{I}$ le noyau de φ (qui est de type fini sur B), $\delta\colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \Omega^1_{B/A} \otimes_B C$ l'homomorphisme canonique, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie J-adique, $\widehat{\varphi}\colon \widehat{B} \to \widehat{C}$ le prolongement de φ aux complétés. Alors $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie et formellement lisse sur A (1.10.6) ; $\widehat{\varphi}$ est surjectif (1.8.5) ; $\mathfrak{I}\widehat{B}$ est le noyau de $\widehat{\varphi}$ et on a $\widehat{\Omega}^1_{\widehat{B}/A} \simeq \Omega^1_{B/A} \otimes_B \widehat{B}$ (1.12.16). Comme $\widehat{B}$ est B-plat (1.12.17), on a $\mathfrak{I}\widehat{B} \simeq \mathfrak{I} \otimes_B \widehat{B}$. Par suite, l'homomorphisme canonique

$$\widehat{\delta}\colon (\mathfrak{I}\widehat{B})/(\mathfrak{I}^2\widehat{B}) \to \widehat{\Omega}^1_{\widehat{B}/A} \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C}$$

s'identifie à $\delta \otimes_C \widehat{C}$; d'où la proposition.

Corollaire 1.14.14. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre de type fini, C une B-algèbre de présentation finie, lisse sur* $\mathrm{Spec}(B)$ *en dehors de* $\mathrm{V}(JB)$, *$\widehat{B}$ (resp. $\widehat{C}$) le séparé complété de B (resp. C) pour la topologie déduite de celle de A. Alors $\widehat{C}$ est rig-lisse sur $\widehat{B}$.*

Quitte à remplacer A par $\widehat{B}$ (qui est quasi-idyllique) et C par $C \otimes_B \widehat{B}$, on se ramène au cas où $A = B$ (1.8.7), de sorte que C est une A-algèbre de présentation finie, lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$. La proposition résulte alors de 1.14.13.

Corollaire 1.14.15. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, C une A-algèbre finie et de présentation finie. Alors l'ouvert de lissité formelle de C sur A est égal à l'ouvert de lissité de C sur A ; en particulier, C est rig-étale sur A si et seulement si C est étale sur A en dehors de* $\mathrm{V}(J)$.

On notera que C est une A-algèbre adique (1.10.2), et par suite topologiquement de présentation finie (1.10.6). La proposition résulte alors de 1.14.13 et du fait que $\widehat{\Omega}^1_{C/A} = \Omega^1_{C/A}$ (1.10.2).

Proposition 1.14.16 (Fujiwara). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de type finie, B' une A-algèbre adique qui est un anneau quasi-idyllique, $u\colon B \to B'$ un A-homomorphisme. Supposons $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ rig-nul* (1.8.30.1). *Alors, il existe un entier $n \geq 0$ tel que tout A-homomorphisme $v\colon B \to B'$ congru à u modulo J^n soit égal à u.*

Quitte à remplacer A par B' et B par $B\widehat{\otimes}_A B'$, on peut se borner au cas où $B' = A$, u étant une augmentation de B dans A. On peut évidemment remplacer J par un autre idéal de définition de A. Donc si A n'est pas noethérien, on peut supposer J principal. Pour tout entier $n \geq 0$, posons $A_n = A/J^{n+1}$, $B_n = B \otimes_A A_n$ et soit $u_n\colon B_n \to A_n$ l'augmentation déduite de u. Il existe un entier $c \geq 1$ tel que $J^c\widehat{\Omega}^1_{B/A} = 0$. Soient n et m deux entiers tels que $c \leq n \leq m \leq n+c+1$. L'ensemble des augmentations $v_m\colon B_m \to A_m$ qui relèvent u_n est canoniquement isomorphe (par le choix de u_m) à la source de l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{A_n}(\Omega^1_{B_n/A_n} \otimes_{B_n,u_n} A_n, J^{n+1}/J^{m+1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{A_c}(\Omega^1_{B_c/A_c} \otimes_{B_c,u_c} A_c, J^{n+1}/J^{m+1}),$$

défini par le fait que le A-module J^{n+1}/J^{m+1} est annulé par J^{c+1}. L'application qui à une augmentation $w\colon B_{n+c+1} \to A_{n+c+1}$ associe l'augmentation $w \otimes A_{n+1}$

de B_{n+1} dans A_{n+1}, correspond au morphisme

$$\rho_n \colon \mathrm{Hom}_{A_c}(\Omega^1_{B_c/A_c} \otimes_{u_c} A_c, J^{n+1}/J^{n+c+2}) \to \mathrm{Hom}_{A_c}(\Omega^1_{B_c/A_c} \otimes_{u_c} A_c, J^{n+1}/J^{n+2})$$

déduit du morphisme canonique $J^{n+1}/J^{n+c+2} \to J^{n+1}/J^{n+2}$.

Montrons qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on ait

$$\{x \in J^{n+1} | xJ^c \subset J^{n+c+2}\} = J^{n+2}. \tag{1.14.16.1}$$

Supposons d'abord J principal, engendré par un élément $t \in A$. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $t^{n_0} A_{\mathrm{tor}} = 0$ (1.10.2). Pour tout $n \geq n_0$, si $\alpha, \beta \in A$ sont tels que $t^{n+c+1}\alpha = t^{n+c+2}\beta$, on a $\alpha - t\beta \in A_{\mathrm{tor}}$ et par suite $t^{n+1}(\alpha - t\beta) = 0$; d'où la relation (1.14.16.1) dans ce cas. Supposons ensuite A noethérien. Soient X' l'éclatement de $\widetilde{J}$ dans $\mathrm{Spec}(A)$, $x \in A$ tel que $xJ^c \subset J^{n+c+2}$. Comme $J\mathscr{O}_{X'}$ est inversible, on a $x \in \Gamma(X', J^{n+2}\mathscr{O}_{X'})$. En vertu de ([30] 2.3.1), il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, l'homomorphisme canonique $J^{n+2} \to \Gamma(X', J^{n+2}\mathscr{O}_{X'})$ soit bijectif ; d'où la relation (1.14.16.1) dans ce cas.

Soit $n \geq \sup(n_0, c)$. Il résulte de (1.14.16.1) et du fait que $t^c\Omega^1_{B_c/A_c} = 0$ (1.8.7) que ρ_n est nul. Par suite, toutes les augmentations $w \colon B_{n+c+1} \to A_{n+c+1}$ qui relèvent u_n sont égales modulo J^{n+2}, et donc égales à u_{n+1}.

1.15 Couples henséliens idylliques

Nous rappelons d'abord quelques propriétés des couples henséliens ([40] §XI).

1.15.1. On sous-entend par *couple* la donnée d'un anneau et d'un idéal. Un morphisme u d'un couple (A, J) dans un couple (B, K) est la donnée d'un homomorphisme d'anneaux $u \colon A \to B$ tel que $u(J) \subset K$. Le morphisme u est dit *strict* si $K = u(J)B$.

Définition 1.15.2. Soient A un anneau, J un idéal de A, B une A-algèbre étale. On dit que B est un *voisinage étale élémentaire* de J dans A si l'homomorphisme induit $A/J \to B/JB$ est un isomorphisme.

Proposition 1.15.3. *Soient A un anneau, J un idéal contenu dans le radical de A. Posons $\overline{A} = A/J$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Si B est une A-algèbre finie et si $\overline{e}$ est un idempotent de B/JB, alors $\overline{e}$ se relève en un idempotent de B.*

(ii) *Si P est un polynôme unitaire de $A[t]$, dont l'image $\overline{P}$ dans $\overline{A}[t]$ est de la forme qr, où q et r sont deux polynômes unitaires de $\overline{A}[t]$, fortement étrangers* ([12] III §4.1), *alors P est de la forme QR où Q et R sont deux polynômes unitaires de $A[t]$ qui relèvent respectivement q et r.*

(iii) *Si B est un voisinage étale élémentaire de J dans A, il existe un homomorphisme de A-algèbres de B dans A.*

(iv) *Si B est une A-algèbre étale et si $\overline{\sigma}\colon B \to \overline{A}$ est un homomorphisme de A-algèbres, il existe un et un unique homomorphisme de A-algèbres $\sigma\colon B \to A$ qui relève $\overline{\sigma}$.*

L'équivalence des propositions (i), (ii) et (iii) est démontrée dans ([40] §XI prop. 1). L'implication (i)⇒(iv) résulte de ([31] 18.5.4), et l'implication (iv)⇒(iii) est triviale.

Définition 1.15.4. On dit qu'un couple (A, J) est un couple *hensélien* si J est contenu dans le radical de A et si (A, J) vérifie les conditions équivalentes de (1.15.3).

On peut faire les remarques suivantes :

1.15.4.1. Si A est un anneau séparé et complet pour la topologie définie par un idéal J, alors (A, J) est hensélien.

1.15.4.2. Soient (A, J) un couple hensélien, J' un idéal de A. Si J' est contenu dans J, ou si J' est un idéal de définition de la topologie J-préadique de A, alors (A, J') est hensélien. La première assertion est évidente et la seconde résulte de ([31] 18.1.2).

1.15.4.3. Soient (A, J) un couple hensélien, B une A-algèbre entière. Alors (B, JB) est hensélien.

Définition 1.15.5. Soient A un anneau, J un idéal de A. On appelle *hensélisé* J-préadique de A un couple hensélien $(A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$ muni d'un morphisme de couples

$$i\colon (A, J) \to (A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$$

tel que, pour tout couple hensélien (B, K) et tout morphisme de couples $v\colon (A, J) \to (B, K)$, il existe un unique morphisme de couples $v^{\mathrm{h}}\colon (A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}}) \to (B, K)$ tel que $v = v^{\mathrm{h}} \circ i$.

On notera que le couple $(A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$ et le morphisme i sont uniquement déterminés à un isomorphisme unique près. On peut faire les remarques suivantes :

1.15.5.1. Nous avons préféré le suffixe "préadique" au suffixe "adique" par cohérence avec la terminologie (1.8.4).

1.15.5.2. L'existence du hensélisé est démontrée dans ([40] XI théo. 2). Plus précisément, $(A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$ est une limite inductive filtrante de voisinages étales élémentaires de J dans A. En particulier, $(A^{\mathrm{h}}, J^{\mathrm{h}})$ est aussi le hensélisé J-préadique de tout voisinage étale élémentaire de J dans A.

1.15.5.3. Le morphisme i est strict et induit un isomorphisme entre les séparés complétés pour les topologies J-préadiques de A et de A^{h}. Nous omettrons dans la suite l'idéal J^{h} des notations.

1.15.5.4. Si J est contenu dans le radical de A, alors A^{h} est fidèlement plat sur A ; en particulier, A^{h} est noethérien (resp. réduit, resp. normal) si et seulement s'il en est de même de A.

1.15.5.5. Pour tout idéal de définition J' de la topologie J-préadique de A, le hensélisé J'-préadique de A est canoniquement isomorphe à A^{h}.

1.15.5.6. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, le hensélisé J-préadique de $A/\mathfrak{a}$ est canoniquement isomorphe à $A^{\mathrm{h}}/\mathfrak{a}A^{\mathrm{h}}$.

Définition 1.15.6. Soient $X = \mathrm{Spec}(A)$ un schéma affine, Y un sous-schéma fermé de X défini par un idéal J de A.

(i) On dit qu'un morphisme $f\colon X' \to X$ est un *voisinage étale élémentaire* de Y s'il est étale et si la projection canonique $X' \times_X Y \to Y$ est un isomorphisme. On dit alors aussi que X' est un *voisinage étale élémentaire* de Y dans X.

(ii) On appelle *hensélisé* de X le long de Y, et l'on note X^{h}, le schéma affine d'anneau A^{h} le hensélisé J-préadique de A.

Proposition 1.15.7. *Soient R un anneau 1-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, B une A-algèbre de type fini, B^{h} le hensélisé (t)-préadique de B, $\widehat{B}$ le séparé complété de B pour la topologie (t)-préadique. Alors $\widehat{B}$ est fidèlement plat sur B^{h}.*

Écrivons B^{h} comme limite inductive filtrante $\varinjlim B_\lambda$, où les B_λ sont des voisinages étales élémentaires de tB dans B. En particulier, B_λ est une A-algèbre de type fini, dont le hensélisé (t)-préadique est isomorphe à B^{h} ; donc le séparé complété de B_λ pour la topologie (t)-préadique est isomorphe à $\widehat{B}$. Il résulte alors de 1.12.17 que $\widehat{B}$ est B_λ-plat. Par passage à la limite inductive ([12] chap. I §2.7 prop. 9), on en déduit que $\widehat{B}$ est B^{h}-plat. Pour conclure, il suffit de noter que tB^{h} est contenu dans le radical de B^{h} et $\widehat{B}$ est le séparé complété de B^{h} pour la topologie (t)-préadique.

Corollaire 1.15.8. *Les hypothèses étant celles de* (1.15.7)*, soient de plus M un B^{h}-module de type fini, N un sous-B^{h}-module de M tel que M/N soit R-plat. Alors N est de type fini sur B^{h}.*

En effet, d'après 1.15.7, la suite

$$0 \to N \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B} \to M \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B} \to (M/N) \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B} \to 0$$

est exacte, et $(M/N) \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B}$ est R-plat. Comme $\widehat{B}$ est topologiquement de type fini sur R, il résulte de 1.9.14 que $N \otimes_{B^{\mathrm{h}}} \widehat{B}$ est de type fini sur $\widehat{B}$. On en déduit, par descente fidèlement plate ([12] chap. I §3.6 prop. 11), que N est de type fini sur B^{h} (1.15.7).

Corollaire 1.15.9. *Sous les hypothèses de* (1.15.7)*, pour tout B^{h}-module de type fini M, $M_{(t)\text{-tor}}$ est de type fini et $M/M_{(t)\text{-tor}}$ est cohérent.*

Il suffit de calquer la preuve de 1.9.18(iii) en tenant compte de 1.15.8.

Corollaire 1.15.10. *Sous les hypothèses de* (1.15.7)*, $(B^{\mathrm{h}}, tB^{\mathrm{h}})$ vérifie* (AR) *et $(B^{\mathrm{h}})_t$ est noethérien.*

Cela résulte de 1.15.8 et 1.9.13.

Définition 1.15.11. On dit qu'un couple hensélien (A, J) est *quasi-idyllique* s'il vérifie l'une des conditions suivantes :

(a) A est noethérien.

(b) Il existe un anneau quasi-idyllique A_0, un idéal de définition de type fini I de A_0 et une A_0-algèbre de type fini A_1, tels que A soit un quotient du hensélisé (IA_1)-préadique de A_1 et $J = IA$.

On peut faire les remarques suivantes :

1.15.11.1. Dans le cas (b), si A_0 est noethérien, A est noethérien (1.15.5.4).

1.15.11.2. Si A est un anneau quasi-idyllique et J un idéal de définition de type fini, (A, J) est un couple hensélien quasi-idyllique.

1.15.11.3. Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, B une A-algèbre de type fini, B^{h} le hensélisé (JB)-préadique de B. Alors $(B^{\mathrm{h}}, JB^{\mathrm{h}})$ est un couple hensélien quasi-idyllique (1.15.5.4 et 1.15.5.6).

Proposition 1.15.12. *Soit (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique. Pour tout A-module M, on note $\widehat{M}$ son séparé complété pour la topologie J-préadique. Alors,*

(i) *(A, J) vérifie* (Kr)*, et le schéma* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *est noethérien.*

(ii) *$\widehat{A}$ est fidèlement plat sur A.*

(iii) *Pour tout A-module de type fini M, $M_{J\text{-tor}}$ est de type fini et $M/M_{J\text{-tor}}$ est cohérent.*

(iv) *Pour tout A-module de type fini M, le morphisme canonique $M \otimes_A \widehat{A} \to \widehat{M}$ est un isomorphisme.*

Compte tenu de ([12] chap. III §3.4 théo. 3), on peut se borner au cas 1.15.11(b), où avec les mêmes notations, on fait de plus les deux hypothèses suivantes :

(1) A_0 topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R;

(2) A est le hensélisé (IA_1)-préadique de A_1.

Les propositions (i), (ii) et (iii) résultent alors de 1.15.7 et de ces corollaires. La proposition (iv) résulte de ce qui précède et de 1.8.26, en calquant la démonstration de 1.12.16(iv).

Corollaire 1.15.13. *Si (A, J) est un couple hensélien quasi-idyllique, le séparé complété de A pour la topologie J-préadique est un anneau quasi-idyllique.*

Cela résulte aussitôt de 1.15.12(iv) et 1.15.5.3.

Corollaire 1.15.14. *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, B une A-algèbre de type fini, M un B-module de type fini, $\widehat{B}$ (resp. $\widehat{M}$) le séparé complété de B (resp. M) pour la topologie J-préadique. Alors :*

(i) *$\widehat{B}$ est B-plat.*

(ii) *Le morphisme canonique $M \otimes_B \widehat{B} \to \widehat{M}$ est bijectif.*

En effet, si B^{h} est le hensélisé (JB)-préadique de B, alors $(B^{\mathrm{h}}, JB^{\mathrm{h}})$ est un couple hensélien quasi-idyllique (1.15.11.3) et le séparé complété de $M \otimes_B B^{\mathrm{h}}$ pour la topologie J-préadique est isomorphe à $\widehat{M}$ (1.15.5.3). Les propositions résultent donc de 1.15.12(ii)–(iv).

Corollaire 1.15.15. *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $S = \mathrm{Spec}(A)$, U l'ouvert $S - \mathrm{V}(J)$ de S, X, Y deux S-schémas localement de type fini, $f: X \to Y$ un S-morphisme. Si l'ouvert $X \times_S U$ est schématiquement dense dans X, alors f est localement de présentation finie.*

Soit $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique. On sait que $\widehat{A}$ est un anneau quasi-idyllique (1.15.13) et qu'il est fidèlement plat sur A (1.15.12). La proposition résulte alors de 1.12.22 par descente fidèlement plate ([31] 2.7.1 et 11.10.5).

Proposition 1.15.16 ([18] 4.4). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique ; posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $U = X - \mathrm{V}(J)$, $X' = \mathrm{Spec}(\widehat{A})$ et soient U' l'image réciproque de U dans X', $f: X' \to X$ le morphisme canonique, $g: U' \to U$ sa restriction à U'. Alors, l'application $\mathrm{Of}(U) \to \mathrm{Of}(U')$ qui à une partie ouverte et fermée Z de U associe $g^{-1}(Z)$, est bijective.*

Il suffit de calquer la preuve de ([18] 4.4) en tenant compte de 1.15.12(ii).

Définition 1.15.17. On dit qu'un couple hensélien (A, J) est *idyllique* s'il vérifie l'une des conditions suivantes :

(a) A est noethérien.

(b) Il existe un anneau idyllique A_0, un idéal de définition de type fini I de A_0 et une A_0-algèbre de présentation finie A_1, tels que A soit le hensélisé I-préadique de A_1 et $J = IA$.

On peut faire les remarques suivantes :

1.15.17.1. Dans le cas (b), si A_0 est noethérien, A est noethérien (1.15.5.4).

1.15.17.2. Si A est un anneau idyllique et J un idéal de définition de type fini, (A, J) est un couple hensélien idyllique.

1.15.17.3. Si (A, J) est un couple hensélien idyllique, le séparé complété de A pour la topologie J-préadique est un anneau idyllique.

Lemme 1.15.18. *Soient (A, J) un couple hensélien idyllique, B une A-algèbre de présentation finie, B^{h} le hensélisé (JB)-préadique de B. Alors $(B^{\mathrm{h}}, JB^{\mathrm{h}})$ est un couple hensélien idyllique.*

Compte tenu de 1.15.5.4, on peut se borner au cas 1.15.17(b), dont on reprend les notations. Considérons une présentation finie $B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/(f_1, \dots, f_q)$. Quitte à remplacer A_1 par un voisinage étale élémentaire de IA_1, on peut supposer que l'on a $f_i \in A_1[\xi_1, \dots, \xi_N]$ pour tout $1 \leq i \leq q$. Par suite, d'après 1.15.5.6, B^{h} est isomorphe au hensélisé I-préadique de $A_1[\xi_1, \dots, \xi_N]/(f_1, \dots, f_q)$.

Proposition 1.15.19. *Pour tout couple hensélien idyllique (A, J), l'anneau A est cohérent.*

On peut évidemment se borner au cas 1.15.17(b), et même au cas où il existe un anneau 1-valuatif R, un élément non nul t de l'idéal maximal de R et une algèbre de séries formelles restreintes $A_0 = R\langle \xi_1, \dots, \xi_n \rangle$, tels que A soit le hensélisé (t)-préadique de $A_1 = A_0[X_1, \dots, X_m]$ (1.15.5.6). Donc A est R-plat (1.15.5.4), et il est par suite un anneau cohérent en vertu de 1.15.12(iii).

1.16 Approximation algébrique

Nous étendons au cadre idyllique certains résultats d'Elkik [17] suivant sa remarque 2 page 587.

1.16.1. Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie

$$B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \dots, \xi_N].$$

Pour tout entier $p \geq 0$ et tout multi-indice

$$(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_p), \qquad 1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p \leq q,$$

on désigne par $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ l'idéal de $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ engendré par les f_{α_i} et par $\Delta_{(\alpha)}$ l'idéal de $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ engendré par les mineurs d'ordre p de la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial f_{\alpha_i}}{\partial \xi_j} \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq N}.$$

On note $\mathfrak{k}_{(\alpha)}$ l'idéal de $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ conducteur de $\mathfrak{I}$ dans $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$:

$$\mathfrak{k}_{(\alpha)} = \{ f \in A[\xi_1, \dots, \xi_N] \mid f\mathfrak{I} \subset \mathfrak{I}_{(\alpha)} \}.$$

On a par convention $\mathfrak{I}_\emptyset = 0$ et $\Delta_\emptyset = A[\xi_1, \dots, \xi_N]$. On pose alors

$$\mathscr{D} = \sum_{(\alpha), p} \mathfrak{k}_{(\alpha)} \Delta_{(\alpha)}. \tag{1.16.1.1}$$

On notera que $\mathscr{D}$ ne peut qu'augmenter après extension de la base. On dira qu'un idéal de $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ est *jacobien* relativement à $(f_1, \dots, f_q)$ (ou *jacobien* lorsque il n'y a aucun risque de confusion) s'il est contenu dans $\mathscr{D}$.

1.16.1.2. L'ouvert de lissité de $\operatorname{Spec}(B)$ sur $\operatorname{Spec}(A)$ est égal à $\operatorname{Spec}(B) - \mathrm{V}(\mathscr{D}B)$. En effet, soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathfrak{I})$ et notons

$$\delta \colon \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \Omega^1_{A[\xi_1, \dots, \xi_N]/A} \otimes_{A[\xi_1, \dots, \xi_N]} B$$

l'homomorphisme canonique. On vérifie immédiatement les propriétés suivantes :

(a) Pour que $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$, il faut et il suffit que $\mathfrak{k}_{(\alpha)} \not\subset \mathfrak{p}$.
(b) Si $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$ et $|\alpha| > \mathrm{rang}(\mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$, alors $\Delta_{(\alpha)} \subset \mathfrak{p}$.
(c) Supposons $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$ et $|\alpha| = \mathrm{rang}(\mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$; pour que $\Delta_{(\alpha)} \subset \mathfrak{p}$, il faut et il suffit que $\delta \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ ne soit pas injectif.

Par suite, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathscr{D}$ est contenu dans $\mathfrak{p}$;
(ii) $\Delta_{(\alpha)} \subset \mathfrak{p}$ pour un (tout) multi-indice α tel que $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$ et $|\alpha| = \mathrm{rang}(\mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$;
(iii) $\delta \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ n'est pas injectif.

1.16.1.3. On peut construire des idéaux jacobiens de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ de la façon suivante. Soit

$$\mathrm{L} = (\ell_{i,j})_{1 \le i \le q, 1 \le j \le m}$$

une matrice à coefficients dans $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ telle que $(f_i)\mathrm{L} = 0$, de sorte qu'on a un complexe

$$A[\xi_1, \ldots, \xi_N]^m \xrightarrow{\mathrm{L}} A[\xi_1, \ldots, \xi_N]^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow 0 \,.$$

Pour tout multi-indice

$$(\alpha, \alpha') = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{q-p})$$

tel que α et α' soient des suites croissantes et $\{\alpha, \alpha'\} = \{1, \ldots, q\}$, on désigne par $\mathfrak{d}_{(\alpha')}$ l'idéal de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ engendré par les mineurs d'ordre $(q-p)$ de la matrice

$$\mathrm{L}_{(\alpha')} = (\ell_{\alpha'_i, j})_{1 \le i \le q-p, 1 \le j \le m}.$$

On vérifie aussitôt que $\mathfrak{d}_{(\alpha')} \subset \mathfrak{k}_{(\alpha)}$. Par suite,

$$\mathscr{D}_{\mathrm{L}} = \sum_{(\alpha, \alpha')} \mathfrak{d}_{(\alpha')} \Delta_{(\alpha)} \tag{1.16.1.4}$$

est un idéal jacobien de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$. De plus, si la suite

$$B^m \xrightarrow{\mathrm{L} \otimes B} B^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow 0$$

est exacte au-dessus d'un ouvert U de $\mathrm{Spec}(B)$, alors $\mathrm{V}(\mathscr{D}_L B) \cap U = \mathrm{V}(\mathscr{D} B) \cap U$. En effet, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{V}(\mathfrak{I}) \cap U$ et tout multi-indice (α, α') tel que $\mathfrak{I}_{(\alpha)}$ engendre $\mathfrak{I}$ en $\mathfrak{p}$ et $|\alpha| = \mathrm{rang}(\mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$, la suite exacte

$$\kappa(\mathfrak{p})^m \xrightarrow{\mathrm{L} \otimes \kappa(\mathfrak{p})} \kappa(\mathfrak{p})^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I} \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \longrightarrow 0$$

montre que $\mathfrak{d}_{(\alpha')} \not\subset \mathfrak{p}$. Notre assertion résulte alors de 1.16.1.2.

1.16.2. Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie. On dit qu'un idéal de B est *jacobien* relativement à A s'il est l'image par un homomorphisme surjectif de A-algèbres $\varphi\colon A[\xi_1, \dots, \xi_n] \to B$ d'un idéal jacobien de $A[\xi_1, \dots, \xi_n]$ relativement à un ensemble fini de générateurs de $\ker(\varphi)$.

1.16.3. Les notions introduites dans (1.16.1) s'étendent naturellement au cadre idyllique. Plus précisément, si A est un anneau quasi-idyllique et B est une A-algèbre topologiquement de présentation finie :

$$B = A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle,$$

on peut définir l'idéal $\mathscr{D}$ de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ par la formule (1.16.1.1). On notera que $\mathscr{D}$ ne peut qu'augmenter après extension topologique de la base (1.10.10). On dira qu'un idéal de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$ est *jacobien* relativement à $(f_1, \dots, f_q)$ (ou *jacobien* lorsqu'il n'y a aucun risque de confusion) s'il est contenu dans $\mathscr{D}$. Les paragraphes 1.16.1.2 et 1.16.1.3 se généralisent facilement à ce cadre. En particulier, l'ouvert de lissité formelle de B sur A est égal à $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(\mathscr{D}B)$ (1.14.7).

1.16.4. Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie. On dit qu'un idéal de B est *jacobien* relativement à A s'il est l'image par un homomorphisme surjectif de A-algèbres $\varphi\colon A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle \to B$ d'un idéal jacobien de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_n\rangle$ relativement à un ensemble fini de générateurs de $\ker(\varphi)$ (1.10.5).

1.16.5. Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $\mathscr{A}$ l'un des deux anneaux $\mathscr{A} = A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ ou $\mathscr{A} = A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$,

$$B = \mathscr{A}/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in \mathscr{A},$$

et $\mathfrak{h}$ un idéal jacobien de $\mathscr{A}$ relativement à $(f_1, \dots, f_q)$.

Lemme 1.16.6 ([17] I lem. 1). *Les hypothèses étant celles de* (1.16.5)*, supposons de plus J principal engendré par t. Il existe alors un entier $k \geq 0$ tel que $A_{\mathrm{tor}} \cap (t^k) = 0$* (1.8.30.1)*. Soient h, n deux entiers ≥ 0 tels que $n > \sup(2h, h+k)$, et soit $x \in A^N$ tel que*

$$\mathfrak{h}(x) \supset (t^h) \quad \textit{et} \quad \mathfrak{I}(x) \subset (t^n).$$

Alors, il existe $y \in A^N$ congru à x modulo (t^{n-h}) et tel que $\mathfrak{I}(y) = 0$.

Comme A_{tor} est de type fini sur A (1.10.2), il existe un entier $k \geq 1$ tel que $t^k A_{\mathrm{tor}} = 0$. Si $a = t^k b \in A_{\mathrm{tor}}$, alors $b \in A_{\mathrm{tor}}$; d'où $A_{\mathrm{tor}} \cap (t^k) = 0$. Une fois l'existence de k démontrée, la preuve de ([17] I lem. 1) s'applique intégralement.

Proposition 1.16.7 ([17] I théo. 1). *Les hypothèses étant celles de* (1.16.5)*, supposons de plus A noethérien* (*resp. J principal*)*. Alors, pour tout entier $h \geq 0$, il existe deux entiers $n_0 > r \geq 0$ tels que si n est un entier $\geq n_0$ et si $x \in A^N$ est tel que*

$$\mathfrak{h}(x) \supset J^h \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(x) \subset J^n,$$

il existe $y \in A^N$ congru à x modulo J^{n-r} et tel que $\mathfrak{I}(y) = 0$.

Le cas où A est noethérien est traité dans *loc. cit.*, et le cas où J est principal résulte de 1.16.6.

Remarques 1.16.8.

(i) Un anneau quasi-idyllique qui n'est pas noethérien, admet un idéal de définition principal. Donc les hypothèses supplémentaires de 1.16.7 sont superflues.

(ii) La preuve de ([17] I théo. 1) montre que le couple d'entiers (n_0, r) dans 1.16.7 ne dépend que de (A, J) et h.

Théorème 1.16.9 ([17] II théo. 2 bis). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, B une A-algèbre de présentation finie, $\overline{B} = B \otimes_A \widehat{A}$, V un ouvert de* $\mathrm{Spec}(B)$ *lisse sur* $\mathrm{Spec}(A)$, *$\overline{V}$ son image réciproque dans* $\mathrm{Spec}(\overline{B})$. *Alors, pour tout entier $n \geq 0$ et toute $\widehat{A}$-section $\overline{\varepsilon}$ de* $\mathrm{Spec}(\overline{B})$ *dont la restriction au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$ *se factorise à travers $\overline{V}$, il existe une A-section ε de* $\mathrm{Spec}(B)$, *congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n et dont la restriction au-dessus de* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *se factorise à travers V.*

La preuve sera donnée dans 1.16.15.

Conjuguant 1.16.9 et 1.16.7, on obtient les corollaires suivants :

Corollaire 1.16.10 ([17] II théo. 2). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique tel que A soit noethérien (resp. J soit principal), h un entier ≥ 0. Alors, il existe deux entiers $n_0 > r \geq 0$ tels que si B est une A-algèbre de présentation finie,*

$$B = A[\xi_1, \ldots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \ldots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \ldots, \xi_N],$$

$\mathfrak{h}$ est un idéal jacobien de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$, n est un entier $\geq n_0$ et $x \in A^N$ tel que

$$\mathfrak{h}(x) \supset J^h \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(x) \subset J^n,$$

alors il existe $y \in A^N$ congru à x modulo J^{n-r} et tel que $\mathfrak{I}(y) = 0$.

Corollaire 1.16.11 ([17] II cor. 1). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, T un A-schéma affine, X un T-schéma affine de présentation finie, lisse sur T en dehors du fermé* $\mathrm{V}(J)$. *Pour toute section $\sigma\colon$* $\mathrm{Spec}(A) \to T$, *désignons par X_σ le A-schéma déduit de X par le changement de base σ :*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d] & \\
T \arrow[d] & X_\sigma \arrow[ul] \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(A) & \mathrm{Spec}(A) \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[ul, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

Alors, il existe deux entiers $n_0 > r \geq 0$ tels que pour toute section $\sigma\colon$ $\mathrm{Spec}(A) \to$ *T, tout entier $n > n_0$ et tout A-morphisme $\varepsilon_n\colon$* $\mathrm{Spec}(A/J^n) \to X_\sigma$, *il existe une section $\varepsilon\colon$* $\mathrm{Spec}(A) \to X_\sigma$ *congrue à ε_n modulo J^{n-r}.*

Nous aurons besoin pour la preuve de 1.16.9 du résultat suivant plus précis que 1.16.10, dans un cas particulier.

Lemme 1.16.12 ([17] II lem. 2). *Soient (A, J) un couple hensélien, B une A-algèbre de présentation finie,*

$$B = A[\xi_1, \ldots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \ldots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \ldots, \xi_N],$$

Δ l'idéal de $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ engendré par les mineurs d'ordre q de la matrice jacobienne

$$\mathrm{M} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq N}.$$

Soient n, h deux entiers tels que $n > 2h$, $x \in A^N$ tel que

$$\Delta(x) \supset J^h \quad \text{et} \quad \mathfrak{I}(x) \subset J^n.$$

Alors, il existe $y \in A^N$ congru à x modulo J^{n-h} et tel que $\mathfrak{I}(y) = 0$.

On notera que la preuve de ([17] II lem. 2) utilise le fait que J^h est de type fini, ce qui n'est pas nécessaire. En effet, il existe un idéal de type fini K de A tel que $K \subset J^h$ et $\mathfrak{I}(x) \subset J^{n-2h}K^2$. Il suffit alors de prendre dans *loc. cit.* pour $(t_1, \ldots, t_r)$ un système de générateurs de K (au lieu d'un système de générateurs de J^h).

Montrons ensuite le théorème 1.16.9 sous des hypothèses différentes.

Lemme 1.16.13. *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, B une A-algèbre de type fini, quotient d'une algèbre de polynômes $A[\xi_1, \ldots, \xi_N]$ par un idéal $\mathfrak{I}$, $\overline{B} = B \otimes_A \widehat{A}$, V un ouvert de* $\mathrm{Spec}(B)$, *$\overline{V}$ son image réciproque dans* $\mathrm{Spec}(\overline{B})$. *Supposons les conditions suivantes remplies :*

(i) *J est principal engendré par t.*
(ii) *V est lisse sur* $\mathrm{Spec}(A)$ *de dimension relative constante d.*
(iii) *$\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ est libre de rang $N-d$ sur tout ouvert affine de* $\mathrm{Spec}(B)$ *contenu dans V.*

Alors, pour tout entier $n \geq 0$ et toute $\widehat{A}$-section $\overline{\varepsilon}$ de $\mathrm{Spec}(\overline{B})$ *dont la restriction au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$ *se factorise à travers $\overline{V}$, il existe une A-section ε de* $\mathrm{Spec}(B)$, *congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n et dont la restriction au-dessus de* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$ *se factorise à travers V.*

Nous utiliserons souvent la remarque suivante : soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A, n, α deux entiers tels que $n > \alpha \geq 0$. Si $t^\alpha \in t^n A + \mathfrak{a}$, alors $t^\alpha \in \mathfrak{a}$. En effet, $J = tA$ est contenu dans le radical de A.

Il suffit de montrer que pour tout n, il existe une A-section ε de $\mathrm{Spec}(B)$ congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n. En effet, soit $\mathfrak{b}$ un idéal de B tel que $V = \mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(\mathfrak{b})$. L'hypothèse sur $\overline{\varepsilon}$ signifie qu'il existe un entier α tel que $t^\alpha \in \overline{\varepsilon}^*(\mathfrak{b})$. Alors toute

A-section ε de $\mathrm{Spec}(B)$ congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo (t^n) pour $n > \alpha$, vérifie $t^\alpha \in \varepsilon^*(\mathfrak{b})$ et se factorise donc à travers V au-dessus de $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$.

Notons

$$\begin{array}{rcl} j\colon \mathrm{Spec}(B) & \to & \mathrm{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_N]), \\ \overline{j}\colon \mathrm{Spec}(\overline{B}) & \to & \mathrm{Spec}(\widehat{A}[\xi_1, \dots, \xi_N]), \\ \overline{\varepsilon}\colon \mathrm{Spec}(\widehat{A}) & \to & \mathrm{Spec}(\overline{B}), \end{array}$$

les morphismes donnés. Montrons qu'il existe un ouvert affine de V dont l'image réciproque dans $\overline{V}$ contient $\overline{\varepsilon}(\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A}))$. Soient H un idéal de $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ tel que $V = \mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(HB)$, $\overline{K}$ l'idéal de $\widehat{A}[\xi_1, \dots, \xi_N]$ défini par l'immersion fermée $\overline{j} \circ \overline{\varepsilon}$. Par hypothèse, il existe un entier α tel que

$$H\widehat{A}[\xi_1, \dots, \xi_N] + \overline{K} \supset t^\alpha \widehat{A}[\xi_1, \dots, \xi_N].$$

Écrivons $t^\alpha = \overline{h} + \overline{k}$, où $\overline{h} \in H\widehat{A}[\xi_1, \dots, \xi_N]$ et $\overline{k} \in \overline{K}$. Soit $h \in H$ tel que $h \equiv \overline{h} \mod (t^{\alpha+1})$; alors il existe $\overline{y} \in \widehat{A}[\xi_1, \dots, \xi_N]$ tel que $t^\alpha(1 + t\overline{y}) = h + \overline{k}$. Comme $(\overline{j} \circ \overline{\varepsilon})^*(1 + t\overline{y})$ est inversible dans $\widehat{A}$, l'ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$ où h est inversible, répond à la question.

Comme V est lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ et $\mathrm{Spec}(B_h) \subset V$, B_h est une A-algèbre de présentation finie ; donc $\mathfrak{I}_h$ est de type fini sur $A[\xi_1, \dots, \xi_N]_h$. Soit S le sous-ensemble multiplicatif de $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ des éléments de la forme $h^m + f$, où $m \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathfrak{I}$. Les hypothèses entraînent qu'il existe des éléments f_i $(1 \le i \le N - d)$ de $\mathfrak{I}$, engendrant $\mathfrak{I}$ sur $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_N][S^{-1}])$. Quitte à multiplier h par un nombre fini d'éléments de S, ce qui ne change pas l'ouvert $\mathrm{Spec}(B_h)$ de $\mathrm{Spec}(B)$, on peut supposer que les f_i engendrent $\mathfrak{I}$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_N]_h)$.

Soit Δ l'idéal de $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$ engendré par les mineurs d'ordre $N - d$ de la matrice jacobienne $(\partial f_i / \partial \xi_j)_{1 \le i \le N-d, 1 \le j \le N}$. On peut trouver un entier γ tel que

$$(\overline{j} \circ \overline{\varepsilon})^*(\Delta) \supset t^\gamma \widehat{A}.$$

Soient n un entier $> 2\gamma$, σ_0 une A-section de $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_N])$ congrue à $\overline{j} \circ \overline{\varepsilon}$ modulo J^n. On a encore $\sigma_0^*(\Delta) \supset t^\gamma A$ et $\sigma_0^*(f_1, \dots, f_{N-d}) \subset t^n A$. Par suite, d'après 1.16.12, on peut trouver une A-section σ de $\mathrm{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_N])$, congrue à σ_0 (donc aussi à $\overline{j} \circ \overline{\varepsilon}$) modulo $J^{n-\gamma}$ et telle que

$$\sigma^*(f_1, \dots, f_{N-d}) = 0.$$

D'autre part, il existe un entier α tel que $(\overline{j} \circ \overline{\varepsilon})^*(h) \supset t^\alpha \widehat{A}$. Pour $n > \alpha + \gamma$, on aura encore $\sigma^*(h) \supset t^\alpha A$. Pour tout élément $f \in \mathfrak{I}$, il existe un entier m tel que $h^m f \in (f_1, \dots, f_{N-d})$; donc $\sigma^*(\mathfrak{I}) \subset A_{J\text{-tor}}$. Utilisant encore une fois la congruence $\sigma \equiv \overline{j} \circ \overline{\varepsilon} \mod (t^{n-\gamma})$, on voit que $\sigma^*(\mathfrak{I}) \subset t^{n-\gamma} A$. Il résulte de 1.15.12(iii) que si n est suffisamment grand, $A_{J\text{-tor}} \cap (t^{n-\gamma}) = 0$, d'où $\sigma^*(\mathfrak{I}) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Lemme 1.16.14 ([17] II lem. 3). *Soient A un anneau, B une A-algèbre de présentation finie,*

$$B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \dots, \xi_N],$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, V un ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$ *lisse sur* $\mathrm{Spec}(A)$*, V' l'image réciproque de V dans* $\mathrm{Spec}(C)$*. Alors, V' est lisse sur* $\mathrm{Spec}(A)$ *de dimension relative constante N. Il existe un plongement de* $\mathrm{Spec}(C)$ *dans l'espace affine de dimension $2N+q$ sur A tel que sur tout ouvert affine de* $\mathrm{Spec}(C)$ *contenu dans V', le faisceau conormal de cette immersion soit libre de rang $N+q$.*

On notera que la condition que A est noethérien dans ([17] II lem. 3) est superflue.

1.16.15. Revenons maintenant à la démonstration de 1.16.9. Le cas où A est noethérien est traité dans ([17] II théo. 2 bis) ; on peut donc se borner au cas où J est principal (1.15.5.5). Il suffit de montrer que pour tout n, il existe une A-section ε de $\mathrm{Spec}(B)$ congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n (cf. la preuve de 1.16.13). Considérons une présentation finie

$$B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[\xi_1, \dots, \xi_N],$$

et notons C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ et V' l'image réciproque de V dans $\mathrm{Spec}(C)$. D'après 1.16.14, le couple (C, V') vérifie les conditions d'applications du lemme 1.16.13. D'autre part, le plongement de $\mathrm{Spec}(\overline{B})$ dans $\mathrm{Spec}(C \otimes_A \widehat{A})$ par la section nulle, permet de relever $\overline{\varepsilon}$ en une $\widehat{A}$-section $\overline{\sigma}$ de $\mathrm{Spec}(C \otimes_A \widehat{A})$. Donc en vertu de 1.16.13, il existe une A-section σ de $\mathrm{Spec}(C)$ congrue à $\overline{\sigma}$ modulo J^n. La projection de σ sur $\mathrm{Spec}(B)$ est une A-section de $\mathrm{Spec}(B)$ qui répond à la question.

Signalons la variante suivante de 1.16.9 où l'on ne suppose plus B de présentation finie sur A :

Proposition 1.16.16. *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, M un A-module de présentation finie, localement libre au-dessus de l'ouvert* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$*, B l'algèbre symétrique de M, $\overline{B} = B \otimes_A \widehat{A}$, $\overline{\varepsilon}$ une $\widehat{A}$-section de* $\mathrm{Spec}(\overline{B})$*. Alors, pour tout entier $n \geq 0$, il existe une A-section ε de* $\mathrm{Spec}(B)$*, congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n.*

En effet, on se ramène, comme dans la démonstration de 1.16.9, à appliquer 1.16.13, grâce au lemme suivant :

Lemme 1.16.17. *Soient A un anneau, M un A-module de présentation finie, localement libre sur un ouvert U de* $\mathrm{Spec}(A)$*,*

$$A^q \xrightarrow{u} A^p \xrightarrow{v} M \longrightarrow 0$$

une présentation de M, N le noyau de v, B la A-algèbre symétrique de M, C la B-algèbre symétrique de $N \otimes_A B$, V' l'image réciproque de U dans $\mathrm{Spec}(C)$*.*

Alors, V' est lisse sur $\operatorname{Spec}(A)$ *de dimension relative constante p. Il existe un A-plongement de* $\operatorname{Spec}(C)$ *dans l'espace affine de dimension $2p+q$ sur A tel que sur tout ouvert affine de* $\operatorname{Spec}(C)$ *contenu dans V', le faisceau conormal de cette immersion soit libre de rang $p+q$.*

La première assertion est évidente. Soit W un ouvert affine de $\operatorname{Spec}(C)$ contenu dans V'. On peut écrire au-dessus de W les suites exactes suivantes qui sont des suites exactes de modules localement libres sur un schéma affine, donc scindées :

$$0 \to (N \otimes_A C)^{\sim}|W \to \mathscr{O}_W^p \to (M \otimes_A C)^{\sim}|W \to 0,$$
$$0 \to (\Omega^1_{B/A} \otimes_B C)^{\sim}|W \to (\Omega^1_{C/A})^{\sim}|W \to (\Omega^1_{C/B})^{\sim}|W \to 0.$$

D'autre part, $\Omega^1_{B/A}$ s'identifie à $M \otimes_A B$ et $\Omega^1_{C/B}$ à $N \otimes_A C$. On en déduit que $\Omega^1_{C/A}$ est globalement libre de rang p sur W.

Le morphisme v permet de plonger $\operatorname{Spec}(B)$ dans $\operatorname{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_p])$, et le morphisme u induit un plongement de $\operatorname{Spec}(C)$ dans $\operatorname{Spec}(B[\zeta_1, \dots, \zeta_q])$. Donc on peut aussi considérer $\operatorname{Spec}(C)$ comme plongé dans $\operatorname{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_p, \zeta_1, \dots, \zeta_q])$; soit K/K^2 le faisceau conormal de cette immersion. On a la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to (K/K^2)^{\sim}|W \to (\Omega^1_{A[\xi_1,\dots,\xi_p,\zeta_1,\dots,\zeta_q]/A} \otimes_{A[\xi_1,\dots,\xi_p,\zeta_1,\dots,\zeta_q]} C)^{\sim}|W \\ \to (\Omega^1_{C/A})^{\sim}|W \to 0. \end{aligned}$$

Donc, compte tenu des isomorphismes précédents, on a une suite exacte

$$0 \to (K/K^2)^{\sim}|W \to \mathscr{O}_W^{p+q} \to \mathscr{O}_W^p \to 0. \tag{1.16.17.1}$$

On plonge alors $\operatorname{Spec}(C)$ dans $\operatorname{Spec}(A[\xi_1, \dots, \xi_p, \zeta_1, \dots, \zeta_q, t_1, \dots, t_p])$ dans lequel il est défini par les équations supplémentaires $t_i = 0$ pour $1 \le i \le p$. Soit K'/K'^2 le faisceau conormal de cette nouvelle immersion. On a alors, d'après (1.16.17.1),

$$(K'/K'^2)^{\sim}|W \simeq (K/K^2)^{\sim}|W \oplus \mathscr{O}_W^p \simeq \mathscr{O}_W^{p+q},$$

ce qui achève la preuve.

Théorème 1.16.18 ([17] II). *Soient (A, J) un couple hensélien, B une A-algèbre lisse, n un entier ≥ 1, ε_n*: $\operatorname{Spec}(A/J^n) \to \operatorname{Spec}(B)$ *un A-morphisme. Alors il existe une section ε*: $\operatorname{Spec}(A) \to \operatorname{Spec}(B)$ *relevant ε_n.*

Compte tenu de 1.16.14, on peut se ramener, comme dans la preuve de 1.16.9, au cas où B est globalement une intersection complète relative sur A. Le théorème résulte alors de 1.16.12.

Théorème 1.16.19 ([17] III théo. 3). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, $\widehat{M}$ un $\widehat{A}$-module* *de présentation finie, localement libre au-dessus de* $\mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$,

$$\widehat{A}^p \xrightarrow{\widehat{\mathrm{L}}} \widehat{A}^q \longrightarrow \widehat{M} \longrightarrow 0 \tag{1.16.19.1}$$

une présentation de $\widehat{M}$. *Alors, pour tout entier* n, *on peut trouver une présentation*

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0 \tag{1.16.19.2}$$

d'un A*-module* M, *localement libre au-dessus de* $\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, *telle que l'on ait* $\mathrm{L} \equiv \widehat{\mathrm{L}} \mod (J^n)$, *et un isomorphisme de* $M \otimes_A \widehat{A}$ *sur* $\widehat{M}$ *induit par des automorphismes* $\widehat{A}$*-linéaires de* $\widehat{A}^p$ *et* $\widehat{A}^q$, *congrus à l'identité modulo* J^n.

On dira que (1.16.19.2) est une présentation de M de type (p,q). On peut classifier les A-modules munis d'une présentation de type (p,q) par les matrices (p,q), donc par une algèbre de polynômes à pq variables sur A, soit $A[X] = A[(X_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q}]$; notons aussi $X = (X_{ij})$ la matrice (p,q) universelle.

Soit $\Delta^{(k)}$ l'idéal de $A[X]$ engendré par les mineurs de rang k de la matrice X. Dire qu'un module admettant une présentation de type (p,q), est libre de rang r au voisinage d'un point équivaut à dire que les mineurs d'ordre $q-r+1$ de la matrice associée sont nuls en ce point et qu'un des mineurs d'ordre $q-r$ y est inversible. La première condition traduit que le rang du module en ce point est au moins égal à r.

Posons $U = \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, qui est un schéma noethérien (1.15.12), et soient $U_1, \dots, U_\ell$ les différentes composantes connexes de U. Comme les U_i sont quasi-compacts, il existe des idéaux de type fini $I_1, \dots, I_\ell$ de A tels que $U_i = \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(I_i)$.

Soient U' l'image réciproque de U dans $\mathrm{Spec}(\widehat{A})$, U'_i $(1 \leq i \leq \ell)$ celle de U_i. On sait (1.15.16) que les U'_i forment une décomposition de U' en composantes connexes.

Pour tout $i \in [1,\ell]$, désignons par r'_i le rang de $\widehat{M}$ sur U'_i. Montrons qu'il existe un entier β_i tel que tout élément de $A_{I_i\text{-tor}}$ soit annulé par $I_i^{\beta_i}$ (1.8.30). L'assertion étant évidente si A est noethérien, on peut se borner au cas où J est principal engendré par t. Comme $\mathrm{V}(J) \subset \mathrm{V}(I_i)$, on a la suite exacte

$$0 \to A_{(t)\text{-tor}} \to A_{I_i\text{-tor}} \to (A_t)_{I_i\text{-tor}}.$$

Par ailleurs, $A_{(t)\text{-tor}}$ est un A-module de type fini (1.15.12) ; il est donc annulé par une puissance de I_i, soit $I_i^{\alpha_i}$. Comme A_t est noethérien, $(A_t)_{I_i\text{-tor}}$ est annulé par une puissance de I_i, soit $I_i^{\gamma_i}$. On peut alors prendre $\beta_i = \alpha_i + \gamma_i$. De même, quitte à augmenter β_i, on peut supposer que tout élément de $\widehat{A}_{I_i\text{-tor}}$ est annulé par $I_i^{\beta_i}$.

Soient $(t_{i1}, \dots, t_{ik_i})$ un système de générateurs de $I_i^{\beta_i}$ (pour $1 \leq i \leq \ell$), B le quotient de $A[X]$ par l'idéal

$$\sum_{i,\mu} t_{i\mu} \Delta^{(q-r_i+1)},$$

qui exprime que les mineurs d'ordre $q - r_i + 1$ sont nuls au-dessus de U_i. La A-algèbre B classifie les A-modules munis d'une présentation de type (p, q) et qui sont de rang au moins égale à r_i sur U_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$. La $\widehat{A}$-algèbre $B \otimes_A \widehat{A}$ classifie les $\widehat{A}$-modules munis d'une présentation de type (p, q) et qui sont de rang au moins égale à r_i sur U_i' pour tout $1 \leq i \leq \ell$.

Soient, pour $1 \leq i \leq \ell$, V_i l'ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$ au-dessus de U_i où l'idéal engendré par $\Delta^{(q-r_i)}$ est l'idéal unité, $V = \cup_i V_i$, V' l'image réciproque de V dans $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \widehat{A})$. La matrice $\widehat{\mathrm{L}}$ (1.16.19.1) est définie par une $\widehat{A}$-section $\overline{\varepsilon}$ de $\mathrm{Spec}(B \otimes_A \widehat{A})$ telle que $\overline{\varepsilon}(U') \subset V'$.

On montre facilement que V est lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ (cf. [17] III théo. 3). Donc d'après 1.16.9, pour tout $n \geq 1$, on peut trouver une A-section de $\mathrm{Spec}(B)$, congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n et dont la restriction au-dessus de U se factorise à travers V ; autrement dit, on peut trouver une matrice L de taille (p, q) à coefficients dans A, congrue à $\widehat{\mathrm{L}}$ modulo J^n telle que le module M défini par

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

soit localement libre de rang r_i au-dessus de U_i pour tout $1 \leq i \leq \ell$.

La fin de la démonstration du théorème 1.16.19 est identique à celle de ([17] III théo. 3) ; en effet, le lemme 5 page 570 et le lemme page 572 sont vrais pour un couple hensélien quasi-idyllique ; on notera pour le second que la condition $J^h \cap H = 0$ est satisfaite compte tenu de 1.15.12(i).

Proposition 1.16.20. *Soient (A, J) un couple hensélien, n un entier ≥ 0, $A_n = A/J^{n+1}$, M_n un A_n-module localement libre de type fini,*

$$A_n^p \xrightarrow{\mathrm{L}_n} A_n^q \longrightarrow M_n \longrightarrow 0 \qquad (1.16.20.1)$$

une présentation de M_n. Alors, on peut trouver une présentation

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad (1.16.20.2)$$

d'un A-module localement libre M telle que L *relève* L_n.

Quitte à remplacer A par eA, où e est un idempotent de A, on peut supposer le rang r de M_n sur A_n contant (1.15.4). Reprenons les notations de la preuve de 1.16.19 et notons C le quotient de $A[X]$ par l'idéal $\Delta^{(q-r+1)}$ et W l'ouvert (affine) de $\mathrm{Spec}(C)$ où l'idéal engendré par $\Delta^{(q-r)}$ est l'idéal unité. On montre facilement que W est lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ (cf. [17] III théo. 3). La matrice L_n définit un A-morphisme $\varepsilon_n \colon \mathrm{Spec}(A_n) \to W$, qu'on peut relever en une A-section de W en vertu de 1.16.18, d'où la proposition.

1.16.21. Soient X un schéma,

$$\mathscr{O}_X^p \xrightarrow{\mathrm{L}} \mathscr{O}_X^q \xrightarrow{\pi} \mathscr{F} \longrightarrow 0 \qquad (1.16.21.1)$$

une présentation d'un $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$. Une structure de $\mathscr{O}_X$-algèbre commutative sur $\mathscr{F}$ munie d'une rigidification relativement à la présentation (1.16.21.1) consiste en la donnée des applications $\mathscr{O}_X$-linéaires suivantes :

$$\begin{array}{rcl} m & : & \mathscr{O}_X^q \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{O}_X^q, \\ \varphi & : & \mathscr{O}_X^p \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{O}_X^p, \\ \varepsilon & : & \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_X^q, \\ \psi & : & \mathscr{O}_X^q \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X^q \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{O}_X^p, \\ y & : & \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{O}_X^p, \end{array}$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

(a) m est symétrique et $m(\mathrm{L} \otimes 1) = \mathrm{L} \circ \varphi$. Ces relations expriment le fait que m passe au quotient et permet de définir une application bilinéaire symétrique sur $\mathscr{F}$.
(b) $m(1 \otimes m) - m(m \otimes 1) = \mathrm{L} \circ \psi$ (associativité).
(c) $m(1 \otimes \varepsilon) - \mathrm{id}_{\mathscr{O}_X^q} = \mathrm{L} \otimes y$. Cette relation exprime le fait que $\pi(\varepsilon(1))$ définit sur $\mathscr{F}$ un élément neutre pour la multiplication et $\pi \circ \varepsilon$ munit $\mathscr{F}$ d'une structure de $\mathscr{O}_X$-algèbre.

On désigne par **Sch** la catégorie des schémas (éléments d'un univers fixé). Soit $\mathscr{R}$ le préfaisceau sur $\mathbf{Sch}_{/X}$ défini pour tout X-schéma Y par $\mathscr{R}(Y)$ est l'ensemble des structures de $\mathscr{O}_Y$-algèbres rigidifiées sur $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ relativement à la présentation déduite de (1.16.21.1).

Lemme 1.16.22. *Conservons les hypothèses et notations de* (1.16.21).

(i) *Le préfaisceau $\mathscr{R}$ est représentable par un X-schéma affine de présentation finie Z.*
(ii) *Supposons le $\mathscr{O}_X$-module $\mathscr{F}$ localement libre de type fini, et soit $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_Z$-algèbre universelle sous-jacente à $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Z$. Alors le sous-objet $\mathscr{S}$ de $\mathscr{R}$ qui rend* $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ *étale au-dessus de X est représentable par un ouvert V de Z tel que le morphisme $V \to X$ soit affine et lisse.*

(i) La démonstration est très simple (cf. [17] Lemme page 576).

(ii) Comme $\mathscr{A}$ est une $\mathscr{O}_Z$-algèbre de présentation finie ([28] 6.2.10), $\mathscr{S}$ est représentable par un ouvert V de Z, défini localement en inversant un discriminant ([31] 18.2.4) ; en particulier, l'injection canonique $V \to Z$ est affine. Il reste à montrer que V est formellement lisse sur X, c'est à dire, que pour tout schéma affine Y, tout sous-schéma fermé Y_0 de Y défini par un idéal nilpotent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_Y$, et tout morphisme $Y \to X$, l'application $\mathscr{S}(Y) \to \mathscr{S}(Y_0)$ est surjective. Supposons donnée une structure de $\mathscr{O}_{Y_0}$-algèbre rigidifiée sur $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{Y_0}$ relativement à la présentation déduite de (1.16.21.1), telle que si $\mathscr{B}_0$ est la $\mathscr{O}_{Y_0}$-algèbre sous-jacente à $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{Y_0}$, $\mathrm{Spec}(\mathscr{B}_0)$ soit étale au-dessus de Y_0. D'après ([31] 18.1.2), il existe un morphisme étale $f\colon Y' \to Y$ et un Y_0-isomorphisme $Y' \times_Y Y_0 \simeq \mathrm{Spec}(\mathscr{B}_0)$.

Il est clair que f est propre ([29] 5.4.6). Par suite f est fini ([31] 8.11.1). Posons $\mathscr{B} = f_*(\mathscr{O}_{Y'})$, qui est donc un $\mathscr{O}_Y$-module localement libre de type fini ([31] 18.2.3). Comme Y est affine, $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ et $\mathscr{B}$ sont des facteurs directs de deux $\mathscr{O}_Y$-modules libres de type fini. On en déduit qu'il existe deux morphismes $\mathscr{O}_Y$-linéaires $u\colon \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y \to \mathscr{B}$ et $v\colon \mathscr{B} \to \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ qui relèvent respectivement l'isomorphisme canonique $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{Y_0} \xrightarrow{\sim} \mathscr{B}_0$ et son inverse. Comme $\mathscr{J}$ est nilpotent, $u \circ v$ et $v \circ u$ sont des automorphismes de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$ respectivement. Donc $(\mathscr{B}, u)$ définit une structure de $\mathscr{O}_Y$-algèbre sur $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_Y$, que l'on peut facilement munir d'une rigidification relativement à la présentation déduite de (1.16.21.1), qui relève celle de $\mathscr{B}_0$. Par suite, l'application $\mathscr{S}(Y) \to \mathscr{S}(Y_0)$ est surjective.

Théorème 1.16.23 ([17] II théo. 5). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique. Notons $\mathbf{C}(A)$ la catégorie des A-algèbres finies, de présentation finie et induisant un revêtement étale de $U = \mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J)$, et $\mathbf{C}(\widehat{A})$ la catégorie des $\widehat{A}$-algèbres finies, de présentation finie et induisant un revêtement étale de $\overline{U} = \mathrm{Spec}(\widehat{A}) - \mathrm{V}(J\widehat{A})$. Alors le foncteur $B \mapsto B \otimes_A \widehat{A}$ induit une équivalence de catégories*

$$\mathbf{C}(A) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}(\widehat{A}). \tag{1.16.23.1}$$

On peut évidemment se borner soit au cas où A est noethérien, soit au cas où J est principal (1.16.8). Montrons d'abord que le foncteur (1.16.23.1) est essentiellement surjectif. Soient $\overline{C}$ un objet de $\mathbf{C}(\widehat{A})$, M un A-module de présentation finie tel que M soit localement libre au-dessus de U et $M \otimes_A \widehat{A}$ soit isomorphe à $\overline{C}$ (1.16.19), muni d'une présentation

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \xrightarrow{\pi} M \longrightarrow 0\,. \tag{1.16.23.2}$$

Le préfaisceau des structures d'algèbres rigidifiées sur M est représentable par un A-schéma affine de présentation finie X (1.16.22). Soit $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_X$-algèbre universelle sous-jacente à $M \otimes_A \mathscr{O}_X$; c'est une $\mathscr{O}_X$-algèbre de présentation finie ([28] 6.2.10). D'après 1.16.22(ii), il existe un ouvert maximal V de $X \times_{\mathrm{Spec}(A)} U$ au-dessus duquel le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathscr{A}) \to X$ est étale, et V est lisse sur U. Soit $\overline{V}$ l'image réciproque de V dans $X \otimes_A \widehat{A}$. L'algèbre $\overline{C}$ correspond à une section $\overline{\varepsilon}$ de $X \otimes_A \widehat{A}$ qui se factorise au-dessus de $\overline{U}$ à travers $\overline{V}$. Soit $\mathrm{H}_{\mathscr{A}}$ un idéal jacobien de $\mathscr{A}$ relativement à $\mathscr{O}_X$. Si l'on identifie $\overline{C}$ avec $\overline{\varepsilon}^*(\mathscr{A})$ et l'on note $\mathrm{H}_{\overline{C}}$ l'image inverse de $\mathrm{H}_{\mathscr{A}}$ par $\overline{\varepsilon}$, il existe un entier h tel que $\mathrm{H}_{\overline{C}} \supset J^h\overline{C}$.

L'algèbre $\overline{C}$ munie de la topologie J-adique étant quasi-idyllique, il existe, d'après 1.16.7, deux entiers $n_0 > r \geq 0$ tels que si B est une $\overline{C}$-algèbre de présentation finie et si $\mathfrak{h}$ est un idéal jacobien de B relativement à $\overline{C}$, pour tout $n > \sup(n_0, h)$ et toute section $\sigma_n\colon \mathrm{Spec}(\overline{C}/J^n\overline{C}) \to \mathrm{Spec}(B/J^nB)$ telle que $\sigma_n^*(\mathfrak{h}) \supset (J^h\overline{C}/J^n\overline{C})$, on puisse trouver une section $\sigma\colon \mathrm{Spec}(\overline{C}) \to \mathrm{Spec}(B)$ congrue à σ_n modulo J^{n-r}. On vérifie aisément que les conditions requises impliquent celles de 1.16.7.

Fixons $n > \sup(n_0, h)$. Soit C une A-algèbre définie par une A-section ε de X, congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n et se factorisant à travers V au-dessus de U. Une telle section existe par 1.16.9. Identifions C avec $\varepsilon^*(\mathscr{A})$ et notons H_C l'image inverse de $\mathrm{H}_{\mathscr{A}}$ par ε (qui est un idéal jacobien de C relativement à A). Il résulte du choix de n que $\mathrm{H}_C \supset J^h C$, et par suite, l'isomorphisme de A-algèbres entre C/J^nC et $\overline{C}/J^n\overline{C}$ est congru modulo J^{n-r} à un morphisme de $\widehat{A}$-algèbres

$$\varphi\colon C \otimes_A \widehat{A} \to \overline{C}. \tag{1.16.23.3}$$

Cette application est surjective par le lemme de Nakayama. De plus, l'isomorphisme $C/J^nC \to \overline{C}/J^n\overline{C}$ provient par construction d'un isomorphisme des $\widehat{A}$-modules $C \otimes_A \widehat{A}$ et $\overline{C}$, de sorte que φ, congru modulo J^{n-r} à un isomorphisme de modules, est un isomorphisme de modules et donc d'algèbres. Par suite, le foncteur (1.16.23.1) est essentiellement surjectif.

Montrons ensuite que le foncteur (1.16.23.1) est pleinement fidèle. Cela revient à montrer que pour tous objets B, B' de $\mathbf{C}(A)$, l'application

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(B, B') \to \mathrm{Hom}_{\widehat{A}\text{-Alg}}(B \otimes_A \widehat{A}, B' \otimes_A \widehat{A}) \tag{1.16.23.4}$$

est bijective. Comme $\widehat{A}$ est fidèlement plat sur A (1.15.12), il n'y a que la surjectivité à prouver. Le changement de base $A \to B'$ permet de ramener au cas où $B' = A$. Soient donc B un objet de $\mathbf{C}(A)$, $\overline{\varepsilon}\colon B \otimes_A \widehat{A} \to \widehat{A}$ une section. En vertu de 1.16.9, pour tout entier $n \geq 0$, il existe une A-section $\varepsilon\colon B \to A$ congrue à $\overline{\varepsilon}$ modulo J^n. Mais en vertu de 1.14.16, il existe $n_0 \geq 1$ tel que si $n \geq n_0$, on ait $\overline{\varepsilon} = \varepsilon \otimes_A \widehat{A}$; d'où la surjectivité de (1.16.23.4).

Proposition 1.16.24 (Gabber, [21] lem. 1.1). *Soit (A, J) un couple hensélien. Alors le foncteur $B \mapsto B/JB$ induit une équivalence de la catégorie des A-algèbres finies et étales avec la catégorie des (A/J)-algèbres finies et étales.*

Montrons d'abord que le foncteur en question est pleinement fidèle. Cela revient à montrer que pour toutes A-algèbres finies étales B et B', l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(B, B') \to \mathrm{Hom}_{A\text{-Alg}}(B/JB, B'/JB') \tag{1.16.24.1}$$

est bijective. Le changement de base $A \to B'$ permet de ramener au cas où $B' = A$. Il résulte alors de la définition (1.15.4) que l'application (1.16.24.1) est bijective.

Montrons ensuite que le le foncteur en question est essentiellement surjectif. Soient $\overline{B}$ une (A/J)-algèbre finie et étale,

$$A^p \xrightarrow{\mathrm{L}} A^q \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

une présentation d'un A-module localement libre M tel que M/JM soit A-isomorphe à $\overline{B}$ (qui existe par 1.16.20). Le préfaisceau $\mathscr{R}$ des structures d'algèbres rigidifiées sur M est représentable par un A-schéma affine de présentation finie X (1.16.22). Soit $\mathscr{A}$ la $\mathscr{O}_X$-algèbre universelle sous-jacente à $M \otimes_A \mathscr{O}_X$. D'après 1.16.22(ii), le sous-objet $\mathscr{S}$ de $\mathscr{R}$ qui rend $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$ étale au-dessus de X est représentable par un ouvert V de X tel que le morphisme $V \to \mathrm{Spec}(A)$ soit affine et lisse. On en déduit par 1.16.18 que l'application $\mathscr{S}(\mathrm{Spec}(A)) \to \mathscr{S}(\mathrm{Spec}(A/J))$ est surjective. Il existe donc une A-algèbre finie et étale qui relève $\overline{B}$.

Corollaire 1.16.25. *Soient (A,J) un couple hensélien, $S = \mathrm{Spec}(A)$, $T = \mathrm{Spec}(A/J)$, $i\colon T \to S$ l'injection canonique. Notons $S_{\text{ét}}$ et $T_{\text{ét}}$ les topos étales de S et T respectivement. Soit F un faisceau de groupes ind-finis de $S_{\text{ét}}$. Alors le foncteur $P \mapsto i^*(P)$ induit une équivalence de la catégorie des F-torseurs de $S_{\text{ét}}$ avec la catégorie des $i^*(F)$-torseurs de $T_{\text{ét}}$, et a fortiori, l'application canonique*

$$\mathrm{H}^1(S_{\text{ét}}, F) \to \mathrm{H}^1(T_{\text{ét}}, i^*(F)) \tag{1.16.25.1}$$

est bijective.

En effet, le foncteur $P \mapsto i^*(P)$ est pleinement fidèle d'après 1.15.4 et ([1] XII 6.5(i)). D'autre part, l'application (1.16.25.1) est bijective en vertu de 1.16.24 et ([1] XII 6.5(ii)). Par suite le foncteur $P \mapsto i^*(P)$ est une équivalence de catégories.

Théorème 1.16.26 ([17] III théo. 6). *Soient (A, J) un couple hensélien quasi-idyllique, $A_0 = A/J$, B_0 une A_0-algèbre lisse. Alors, il existe une A-algèbre lisse B tel que $B \otimes_A A_0$ soit A_0-isomorphe à B_0.*

Supposons d'abord B_0 globalement une intersection complète relative, c'est à dire, supposons que B_0 admette une présentation

$$B_0 = A_0[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}_0, \quad \mathfrak{I}_0 = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A_0[\xi_1, \dots, \xi_N],$$

et que l'idéal de B_0 engendré par les mineurs d'ordre q de la matrice jacobienne

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq N}$$

soit l'idéal unité. Dans ce cas, il suffit de relever les f_i en $\widetilde{f_i}$ dans $A[\xi_1, \dots, \xi_N]$. La A-algèbre $B = A[\xi_1, \dots, \xi_N]/(\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_q)$ est lisse au voisinage du fermé $\mathrm{V}(J)$ et un localisé de B répond à la question.

Dans le cas général, soit

$$B_0 = A_0[\xi_1, \dots, \xi_N]/\mathfrak{I}_0, \quad \mathfrak{I}_0 = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A_0[\xi_1, \dots, \xi_N],$$

une présentation de B_0. Le B_0-module $\mathfrak{I}_0/\mathfrak{I}_0^2$ est localement libre. Soient

$$B_0^p \xrightarrow{\mathrm{L}_0} B_0^q \longrightarrow \mathfrak{I}_0/\mathfrak{I}_0^2 \longrightarrow 0 \tag{1.16.26.1}$$

une présentation de ce B_0-module, C_0 son algèbre symétrique. D'après 1.16.14, C_0 est une A_0-algèbre lisse de dimension relative N et globalement intersection complète relative. Il existe donc une A-algèbre lisse C tel que $C \otimes_A A_0$ soit A_0-isomorphe à C_0.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(B_0) \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "\sigma_0"'] & \mathrm{Spec}(C_0) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(B_0) \arrow[d, "\sigma_0"] \\
\mathrm{Spec}(C_0) \arrow[r, "\delta_0"] & \mathrm{Spec}(C_0 \otimes_{B_0} C_0) \arrow[r, "p"] & \mathrm{Spec}(C_0)
\end{tikzcd} \tag{1.16.26.2}$$

où δ_0 est le morphisme diagonal, σ_0 est la section nulle, p est la première projection et le carré de droite est cartésien. Comme le rectangle extérieur est cartésien, le carré de gauche est aussi cartésien.

On désigne par C^{h} le hensélisé J-préadique de C ; donc $(C^{\mathrm{h}}, JC^{\mathrm{h}})$ est un couple hensélien quasi-idyllique (1.15.11.3). D'après 1.16.20, il existe un C^{h}-module localement libre M, muni d'une présentation finie qui relèvent $(\mathfrak{I}_0/\mathfrak{I}_0^2) \otimes_{B_0} C_0$ et sa présentation déduite de (1.16.26.1). Quitte à remplacer C par un voisinage étale élémentaire de J dans C, on peut supposer que M et sa présentation sont définis sur C. Soit alors D l'algèbre symétrique du C-module M, de sorte que $D \otimes_C C_0$ est isomorphe à $C_0 \otimes_{B_0} C_0$. D'après 1.16.18, comme D est lisse sur C, quitte à remplacer encore C par un voisinage étale élémentaire de J dans C, on peut supposer que la section diagonale $\delta_0 \colon \mathrm{Spec}(C_0) \to \mathrm{Spec}(C_0 \otimes_{B_0} C_0)$ se relève en une section

$$\delta \colon \mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(D).$$

Soient $\sigma \colon \mathrm{Spec}(C) \to \mathrm{Spec}(D)$ la section nulle, B le quotient de C défini par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(B) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(C) \arrow[d, "\sigma"] \\
\mathrm{Spec}(C) \arrow[r, "\delta"'] & \mathrm{Spec}(D)
\end{tikzcd}$$

Compte tenu de (1.16.26.2), $B \otimes_A A_0$ est A_0-isomorphe à B_0. D'autre part, δ est transverse à σ au-voisinage de $\mathrm{V}(JB)$ dans $\mathrm{Spec}(B)$ ([31] 17.13.3). En effet, comme C et D sont lisses sur A, il suffit de montrer que $\delta \otimes_A A_0$ est transverse à $\sigma \otimes_A A_0$ ([31] 17.13.4(i)), ce qui résulte du fait que B_0 est lisse sur A_0 de la bonne dimension relative ([31] 17.13.2). On en conclut, de nouveau par ([31] 17.13.2), que B est lisse sur A au voisinage de $\mathrm{V}(JB)$, et un localisé de B répond à la question.

Corollaire 1.16.27. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement étale. Alors, il existe une A-algèbre étale dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est isomorphe à B.*

On peut évidemment supposer J de type fini sur A, de sorte que (A, J) est un couple hensélien quasi-idyllique. Posons $A_0 = A/J$ et $B = B \otimes_A A_0$. D'après

1.16.26, il existe une A-algèbre lisse B' tel que $B' \otimes_A A_0$ soit A_0-isomorphe à B_0. Comme $\Omega^1_{B'/A}$ est un B'-module localement libre de type fini, il est nul sur un ouvert et fermé de $\mathrm{Spec}(B')$ contenant $\mathrm{V}(JB')$. Quitte à changer B', on peut supposer $\Omega^1_{B'/A} = 0$; donc B' est étale sur A. Il résulte alors de ([31] 18.1.2) que le séparé complété de B' pour la topologie J-préadique est isomorphe à B.

Le corollaire suivant est un analogue partiel du “Main Theorem” de Zariski ([31] 8.12.6).

Corollaire 1.16.28. *Soient A un anneau quasi-idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement étale. Alors, le morphisme structural* $\mathrm{Spf}(B) \to \mathrm{Spf}(A)$ *se factorise en*

$$\mathrm{Spf}(B) \xrightarrow{i} \mathrm{Spf}(A') \to \mathrm{Spf}(A),$$

où A' est une A-algèbre finie et topologiquement de présentation finie et i est une immersion ouverte, i.e., i identifie $\mathrm{Spf}(B)$ *à un ouvert formel affine de* $\mathrm{Spf}(A')$.

Soit J un idéal de définition de A. D'après 1.16.27, il existe une A-algèbre étale B' dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est isomorphe à B. En vertu de ([31] 8.12.6 et 8.12.7), le morphisme structural $\mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(A)$ se factorise en

$$\mathrm{Spec}(B') \xrightarrow{j} \mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A),$$

où A' est une A-algèbre finie et de présentation finie et j est une immersion ouverte. Par suite, A' muni de la topologie déduite de celle de A, est séparé et complet (1.10.2), et topologiquement de présentation finie sur A (1.10.4). Il suffit alors de prendre pour i le prolongement de j aux complétés.

Théorème 1.16.29 ([17] III théo. 7). *Soient (A, J) un couple hensélien idyllique tel que J soit principal, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, $\widehat{B}$ une $\widehat{A}$-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse (resp. rig-étale)* (1.14.7),

$$\widehat{B} = \widehat{A}\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle / \mathfrak{J}, \quad \mathfrak{J} = (f_1, \ldots, f_q), \quad f_i \in \widehat{A}\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle,$$

C l'algèbre symétrique du $\widehat{B}$-module $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$. Supposons vérifiée l'une des deux conditions suivantes :

(i) *C est de présentation finie sur $\widehat{B}$;*

(ii) *$\widehat{B}$ est rig-pur* (1.8.30.1).

Alors il existe une A-algèbre de présentation finie B', lisse (resp. étale) sur $\mathrm{Spec}(A)$ *en dehors de* $\mathrm{V}(J)$, *dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$.*

La preuve sera donnée dans 1.16.39. Nous établirons d'abord quelques lemmes préparatoires. Nous utiliserons souvent la remarque suivante :

Lemme 1.16.30. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux idéaux de A tels que $\mathfrak{b}$ soit de type fini. Si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} + J\mathfrak{a}$, alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.*

En effet, on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} + J\mathfrak{b} + \cdots + J^n\mathfrak{b} + J^{n+1}\mathfrak{a}$ pour tout $n \geq 0$, ce qui entraîne l'assertion car A et $\mathfrak{b}$ sont complets et séparés pour les topologies J-adiques (1.10.2).

Lemme 1.16.31. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, h un entier ≥ 0, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie,*

$$B = A\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle / \mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \ldots, f_q), \quad f_i \in A\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle.$$

Supposons A noethérien (resp. J principal). Alors, il existe deux entiers $n_1 > r \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : soient n un entier $\geq n_1$, $\mathfrak{I}'$ un idéal de type fini de $A\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle$, $B' = A\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle / \mathfrak{I}'$. Supposons que $\mathfrak{I}' \equiv \mathfrak{I} \mod (J^n)$ et qu'il existe un idéal $\mathfrak{h}'$ de $A\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle$ jacobien relativement à un ensemble fini de générateurs de $\mathfrak{I}'$ tel que $J^h B \subset \mathfrak{h}' B$. Alors, il existe un automorphisme de la A-algèbre $A\langle \xi_1, \ldots, \xi_N \rangle$, congru à l'identité modulo J^{n-r} et induisant un isomorphisme de B' sur B.

On notera les variables $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ simplement par ξ. On a $B \widehat{\otimes}_A B' \simeq B\langle \xi \rangle / \mathfrak{I}' B\langle \xi \rangle$ (1.10.2). On cherche une section du morphisme

$$\mathrm{Spec}(B \widehat{\otimes}_A B') \to \mathrm{Spec}(B)$$

qui soit congrue à la diagonale modulo J^{n-r}. D'après 1.16.7, il existe deux entiers $n_0 > r \geq 0$, qui ne dépendent que de (A, J) et h, tels que pour tout $n \geq n_0$, on puisse trouver un homomorphisme $\sigma \colon B' \to B$ congru modulo J^{n-r} à l'isomorphisme donné modulo J^n. Il reste à montrer que pour n assez grand, σ est un isomorphisme.

On peut trouver un homomorphisme de A-algèbres $\varphi \colon A\langle \xi \rangle \to A\langle \xi \rangle$ congru à l'identité modulo J^{n-r} et tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{I}' \arrow[r] & A\langle \xi \rangle \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & B' \arrow[r] \arrow[d, "\sigma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{I} \arrow[r] & A\langle \xi \rangle \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Il est clair que φ est surjectif (1.8.5). On voit par réduction modulo les puissances de J, que φ est formellement étale ([31] 17.8.2), et par suite qu'il est un isomorphisme ([31] 17.9.2).

Il reste à montrer que pour n assez grand, $\varphi(\mathfrak{I}') = \mathfrak{I}$. On a évidemment $\varphi(\mathfrak{I}') \subset \mathfrak{I}$ puisque le diagramme commute. Pour tout $g \in \mathfrak{I}$, il existe $g' \in \mathfrak{I}'$ tel que $g \equiv g' \mod (J^n)$; donc $g - \varphi(g') \in \mathfrak{I} \cap (J^{n-r} A\langle \xi \rangle)$. On a alors

$$\mathfrak{I} \subset \varphi(\mathfrak{I}') + \mathfrak{I} \cap (J^{n-r} A\langle \xi \rangle).$$

D'après 1.10.2, il existe un entier $n_1 \geq n_0$, tel que pour $n \geq n_1$, on ait $\mathfrak{I} \cap (J^{n-r}A\langle\xi\rangle) \subset J\mathfrak{I}$. La relation $\mathfrak{I} \subset \varphi(\mathfrak{I}') + J\mathfrak{I}$ entraîne que $\mathfrak{I} \subset \varphi(\mathfrak{I}')$ (1.16.30), d'où l'assertion.

Lemme 1.16.32 ([17] III lem. 6). *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle,$$

L *une matrice (m, q) à coefficients dans $A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$ telle que $(f_i)\mathrm{L} = 0$ et que la suite*

$$B^m \xrightarrow{\mathrm{L}\otimes B} B^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \longrightarrow 0$$

soit exacte sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$. *Supposons A noethérien (resp. J principal). Alors, il existe deux entiers $n_1 > r \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : soient n un entier $\geq n_1$, $\mathfrak{I}' = (f'_1, \dots, f'_q)$ un idéal de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$, $B' = A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}'$. Supposons $f'_i \equiv f_i \mod (J^n)$ pour tout i et $(f'_i)\mathrm{L}' = 0$, où L' est une matrice (m, q) à coefficients dans $A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$, congrue à L modulo J^n. Alors, il existe un automorphisme de la A-algèbre $A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$, congru à l'identité modulo J^{n-r} et induisant un isomorphisme de B' sur B.*

Soit $\mathscr{D}_{\mathrm{L}}$ l'idéal jacobien de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$ relativement à $(f_1, \dots, f_q)$, défini par L (1.16.1.4), et soit $\mathscr{D}'_{\mathrm{L}'}$ l'idéal jacobien de $A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle$ relativement à $(f'_1, \dots, f'_q)$, défini par L'. Compte tenu des congruences imposées, on a

$$\mathscr{D}'_{\mathrm{L}'} \equiv \mathscr{D}_{\mathrm{L}} \mod (J^n).$$

Il résulte de 1.16.1.3 et des hypothèses que $\mathrm{V}(\mathscr{D}_{\mathrm{L}}B) \subset \mathrm{V}(JB)$. Par suite, il existe un entier h tel que $\mathscr{D}_{\mathrm{L}} + \mathfrak{I} \supset J^h A\langle\xi\rangle$ ([28] 6.8.4). Pour $n > h$, on a $\mathscr{D}'_{\mathrm{L}'} + \mathfrak{I} \supset J^h A\langle\xi\rangle$ (1.16.30) et donc $\mathscr{D}'_{\mathrm{L}'}B \supset J^h B$. Il suffit alors d'appliquer 1.16.31.

Lemme 1.16.33. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle,$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, $\widehat{C}$ le séparé complété de C pour la topologie J-préadique,

$$A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle^m \xrightarrow{\mathrm{L}} A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I} \longrightarrow 0 \qquad (1.16.33.1)$$

une présentation de $\mathfrak{I}$ (1.10.3). Supposons C de présentation finie sur B, et l'une des deux conditions suivantes remplie :

(a) *A est noethérien ;*
(b) *A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R et J est engendré par un élément non-nul de l'idéal maximal de R.*

Alors, il existe deux entiers $n_1 > r \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : soient n un entier $\geq n_1$, $\mathfrak{I}' = (f'_1, \ldots, f'_q)$ un idéal de $\widehat{C}$, $B' = \widehat{C}/\mathfrak{I}'$. Supposons $f'_i \equiv f_i \mod (J^n\widehat{C})$ et $(f'_i)\mathrm{L}' = 0$, où L' est une matrice (m, q) à coefficients dans $\widehat{C}$, congrue à L modulo $J^n\widehat{C}$. Alors il existe un A-isomorphisme de B' sur B congru à l'identité modulo J^{n-r}.

La congruence $f'_i \equiv f_i \mod (J^n\widehat{C})$ signifie que f'_i est congru modulo $J^n\widehat{C}$ à l'image de f_i par le composé des morphismes canoniques $\mathfrak{I} \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to C \to \widehat{C}$.

On notera les variables $(\xi_1, \ldots, \xi_N)$ simplement par ξ ; et on se donne un autre système de variables $(\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$, que l'on notera simplement par ζ. On peut considérer naturellement C comme une $A\langle\xi\rangle$-algèbre. Les classes des éléments f_i dans $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ définissent un homomorphisme surjectif de $A\langle\xi\rangle$-algèbres

$$\varphi\colon A\langle\xi, \zeta\rangle \to \widehat{C}.$$

On désigne par $\mathfrak{K}$ le noyau de φ, qui est un idéal de type fini de $A\langle\xi, \zeta\rangle$ (1.10.5). D'après 1.8.25.4 et 1.9.18, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n > n_0$, on ait

$$\mathfrak{K} \cap (J^n A\langle\xi, \zeta\rangle) \subset J^{n-n_0}\mathfrak{K}. \tag{1.16.33.2}$$

La section nulle $\sigma\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(C)$ induit par prolongement aux complétés une section $\widehat{\sigma}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(\widehat{C})$. D'après 1.12.16(iv), le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B) \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\widehat{\sigma}"'] & \mathrm{Spec}(B) \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathrm{Spec}(\widehat{C}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(C) \end{tikzcd} \tag{1.16.33.3}$$

est cartésien. Comme $\widehat{C}$ est C-plat (1.12.17), le faisceau conormal de $\widehat{\sigma}$ s'identifie à $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$.

Soit $\mathfrak{J}$ le noyau de l'homomorphisme $A\langle\xi, \zeta\rangle \to B$ composé de φ et de $\widehat{\sigma}^*$; c'est un idéal de type fini de $A\langle\xi, \zeta\rangle$ (1.10.5). La suite canonique

$$0 \to \mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2 \otimes_{\widehat{C}} B \to \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to 0 \tag{1.16.33.4}$$

est exacte sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$. En effet, $\widehat{C}$ est rig-lisse sur A (1.14.14 et 1.14.10) ; donc les modules de cette suite sont localement libres sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$, et leurs rangs se calculent facilement (1.14.6 et 1.14.9).

Soient $(g_1, \ldots, g_s)$ des générateurs de $\mathfrak{K}$,

$$A\langle\xi, \zeta\rangle^\ell \xrightarrow{\mathrm{M}} A\langle\xi, \zeta\rangle^s \xrightarrow{(g_i)} \mathfrak{K} \longrightarrow 0$$

une présentation de $\mathfrak{K}$ (1.10.3). On a $\mathfrak{J} = (g_1, \dots, g_s, \zeta_1, \dots, \zeta_q)$ (1.16.33.3), et il existe N une matrice (m, s) à coefficients dans $A\langle \xi, \zeta \rangle$ telle que

$$(g_1, \dots, g_s, \zeta_1, \dots, \zeta_q)\mathrm{H} = 0, \quad \text{où} \quad \mathrm{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{N} \\ 0 & \mathrm{L} \end{pmatrix}.$$

Il résulte de (1.16.33.4) que la suite

$$B^{\ell+m} \xrightarrow{\mathrm{H}\otimes B} B^{s+q} \xrightarrow{(g_i, \zeta_j)} \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \longrightarrow 0 \tag{1.16.33.5}$$

est exacte sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$.

Pour tout $1 \leq i \leq q$, soit ζ'_i un élément de $A\langle \xi, \zeta \rangle$ relevant f'_i et tel que $\zeta'_i \equiv \zeta_i \mod (J^n)$, de sorte que B' est isomorphe au quotient de $A\langle \xi, \zeta \rangle$ par l'idéal $\mathfrak{J}' = (g_1, \dots, g_s, \zeta'_1, \dots, \zeta'_q)$. Il existe L'' une matrice (m, q) à coefficients dans $A\langle \xi, \zeta \rangle$ relevant L', et N' une matrice (m, s) à coefficients dans $A\langle \xi, \zeta \rangle$, telles que

$$(g_1, \dots, g_s, \zeta'_1, \dots, \zeta'_q)\mathrm{H}' = 0, \quad \text{où} \quad \mathrm{H}' = \begin{pmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{N}' \\ 0 & \mathrm{L}'' \end{pmatrix}.$$

On peut choisir L'' congrue à L modulo J^n. Posons

$$(a_1, \dots, a_m) = (\zeta_1, \dots, \zeta_q)\mathrm{L} - (\zeta'_1, \dots, \zeta'_q)\mathrm{L}''.$$

Comme $a_i \in \mathfrak{K} \cap (J^n A\langle \xi, \zeta \rangle)$ pour tout $1 \leq i \leq m$, il résulte de (1.16.33.2), que si $n > n_0$, on peut choisir N' congrue à N modulo J^{n-n_0}. Il suffit alors d'appliquer 1.16.32.

Lemme 1.16.34. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle / \mathfrak{J}, \quad \mathfrak{J} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle,$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$, S le quotient de C par $C_{J\text{-tor}}$, $\widehat{S}$ le séparé complété de S pour la topologie J-préadique,

$$A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle^m \xrightarrow{\mathrm{L}} A\langle \xi_1, \dots, \xi_N \rangle^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{J} \longrightarrow 0 \tag{1.16.34.1}$$

une présentation de $\mathfrak{J}$ (1.10.3). *Supposons B rig-pur, et l'une des deux conditions suivantes remplie :*

(a) *A est noethérien ;*
(b) *A est topologiquement de présentation finie sur un anneau* 1*-valuatif R et J est engendré par un élément non-nul de l'idéal maximal de R.*

Alors, il existe deux entiers $n_1 > r \geq 0$ vérifiant la propriété suivante : soient n un entier $\geq n_1$, $\mathfrak{J}' = (f'_1, \dots, f'_q)$ un idéal de $\widehat{S}$, $B' = \widehat{S}/\mathfrak{J}'$. Supposons $f'_i \equiv f_i \mod (J^n\widehat{S})$ et $(f'_i)\mathrm{L}' = 0$, où L' est une matrice (m, q) à coefficients dans $\widehat{S}$, congrue à L *modulo $J^n\widehat{S}$. Alors il existe un A-isomorphisme de B' sur B congru à l'identité modulo J^{n-r}.*

On notera (1.12.16) que S est de présentation finie sur B et $\widehat{S} \simeq S \otimes_C \widehat{C}$, où $\widehat{C}$ est le séparé complété de C pour la topologie J-préadique. Il suffit alors d'adapter la preuve de 1.16.33 en remplaçant $\widehat{C}$ par $\widehat{S}$. Conservons les mêmes notations ; nous indiquerons seulement les modifications nécessaires.

Comme B est rig-pur, la section nulle $\sigma\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(C)$ se factorise à travers une section $\tau\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(S)$, qui induit par prolongement aux complétés une section $\widehat{\tau}\colon \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(\widehat{S})$; soit $\mathscr{L}/\mathscr{L}^2$ le faisceau conormal de $\widehat{\tau}$. L'homomorphisme φ induit un homomorphisme surjectif de $A\langle\xi\rangle$-algèbres $\psi\colon A\langle\xi,\zeta\rangle \to \widehat{S}$; soit $\mathfrak{H}$ son noyau. Par la même preuve que celle de (1.16.33.4), la suite canonique

$$0 \to \mathfrak{H}/\mathfrak{H}^2 \otimes_{\widehat{S}} B \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \mathscr{L}/\mathscr{L}^2 \to 0 \tag{1.16.34.2}$$

est exacte sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$. On conclut alors en calquant la fin de la démonstration de 1.16.33.

Lemme 1.16.35 ([17] III lem. 7). *Soient (A,J) un couple hensélien quasi-idyllique, $\widehat{A}$ le séparé complété de A pour la topologie J-préadique, $\widehat{B}$ une $\widehat{A}$-algèbre topologiquement de type fini, quotient d'une $\widehat{A}$-algèbre de séries formelles restreintes $\widehat{A}\langle\xi_1,\dots,\xi_N\rangle$ par un idéal $\mathfrak{I}$, f_i $(1 \le i \le d)$ des éléments de $\widehat{A}\langle\xi_1,\dots,\xi_N\rangle$, Δ l'idéal de $\widehat{A}\langle\xi_1,\dots,\xi_N\rangle$ engendré par les mineurs d'ordre d de la matrice jacobienne*

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}\right)_{1\le i\le d, 1\le j\le N}.$$

Supposons les conditions suivantes remplies :

(i) *J est principal engendré par t ;*

(ii) *$(f_1,\dots,f_d)$ engendrent $\mathfrak{I}$ au voisinage de* $\mathrm{Spec}(\widehat{B}) - \mathrm{V}(J\widehat{B})$ *dans*

$$\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi_1,\dots,\xi_N\rangle);$$

(iii) $\mathrm{V}(\Delta\widehat{B}) \subset \mathrm{V}(J\widehat{B})$.

Alors, il existe une A-algèbre de type fini B', lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ *en dehors de* $\mathrm{V}(J)$, *dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$.*

On notera les variables $(\xi_1,\dots,\xi_N)$ simplement par ξ. Comme $\mathrm{Spec}(\widehat{B} \otimes_{\widehat{A}} \widehat{A}_t)$ est une partie ouverte et fermée de $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle/(f_1,\dots,f_d) \otimes_{\widehat{A}} \widehat{A}_t)$ ([28] 6.6.4), il lui correspond un idempotent, qu'on relève en un élément e' de $\widehat{A}\langle\xi\rangle \otimes_{\widehat{A}} \widehat{A}_t$ vérifiant la relation :

$$e'(1-e') = \sum_{i=1}^{d} \mu_i f_i.$$

Multipliant e' par une puissance convenable de t, on obtient un élément e de $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ vérifiant la relation :

$$ke = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i f_i,$$

en retenant que l'idéal de $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ engendré par k et e contient une puissance de t, soit t^{h_0}. De plus, $\mathfrak{J}$ coïncide avec l'idéal $(f_1,\ldots,f_d,e)$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle)-\mathrm{V}(J\widehat{A}\langle\xi\rangle)$.

La condition (iii) du lemme entraîne qu'il existe un entier h_1 tel qu'on ait $\Delta+\mathfrak{J}\supset t^{h_1}\widehat{A}\langle\xi\rangle$ ([28] 6.8.4) ; quitte à augmenter h_1, on peut supposer que l'on a

$$\Delta+(f_1,\ldots,f_d,e)\supset t^{h_1}\widehat{A}\langle\xi\rangle.$$

Considérons au-dessus de $\mathscr{A}$, hensélisé J-préadique de $A[\xi_1,\ldots,\xi_N]$, l'algèbre $\mathscr{R}$ définie par

$$\mathscr{R}=\mathscr{A}[F_1,\ldots,F_d,E,K,\Lambda_1,\ldots,\Lambda_d]/\biggl(\sum_{i=1}^{d}\Lambda_iF_i-KE\biggr).$$

On notera que $(\mathscr{A},J\mathscr{A})$ est un couple hensélien quasi-idyllique et que le séparé complété J-préadique de $\mathscr{A}$ est canoniquement isomorphe à $\widehat{A}\langle\xi\rangle$. Soit ε la section

$$\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle)\to\mathrm{Spec}(\mathscr{R}\otimes_{\mathscr{A}}\widehat{A}\langle\xi\rangle)$$

définie par (k,e,f_i,λ_i). Elle se factorise au-dessus de $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle\otimes_{\widehat{A}}\widehat{A}_t)$ à travers l'image réciproque d'un ouvert lisse de $\mathrm{Spec}(\mathscr{R})$ sur $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$, car (k,e) contient une puissance de t. Donc en vertu de 1.16.9, on peut approximer cette section au-dessus de $\mathscr{A}$.

Soient n un entier $>h_0+h_1$, ε' une $\mathscr{A}$-section de $\mathrm{Spec}(\mathscr{R})$, congrue à ε modulo J^n, définie par (k',e',λ'_i,f'_i), C la A-algèbre $\mathscr{A}/(f'_i,e')$ et $\widehat{C}$ son séparé complété pour la topologie J-préadique. Il résulte de 1.15.12(iv) que $\widehat{C}\simeq\widehat{A}\langle\xi\rangle/(f'_i,e')$; donc $\widehat{C}$ est rig-lisse sur $\widehat{A}$. En effet, grâce aux congruences imposées, l'idéal de $\widehat{C}$ engendré par les mineurs d'ordre d de la matrice jacobienne $(\partial f'_i/\partial\xi_j)_{1\leq i\leq d,1\leq j\leq N}$ contient t^{h_1}, l'idéal (k',e') contient t^{h_0}, et les éléments (f'_i) suffisent à engendrer l'idéal (f'_i,e') au voisinage de $\mathrm{Spec}(\widehat{C})-\mathrm{V}(J\widehat{C})$ dans $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle)$; c'est ce qu'assure l'équation

$$k'e'=\sum_{i=1}^{d}\lambda'_if'_i.$$

Comme $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ est fidèlement plat sur $\mathscr{A}$ (1.15.12), on en déduit que $t^{h_0}\in\mathscr{A}k'+\mathscr{A}e'$ et les éléments (f'_i) suffisent à engendrer l'idéal (f'_i,e') au voisinage de $\mathrm{Spec}(C)-\mathrm{V}(JC)$ dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$. Par suite, on peut trouver un voisinage étale élémentaire Λ de J dans $A[\xi_1,\ldots,\xi_N]$, contenant les éléments $(f'_1,\ldots,f'_d,e')$ et tel que $\mathrm{Spec}(\Lambda/(f'_i,e'))$ soit lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$.

D'autre part, l'idéal $\mathfrak{h}$ de $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ engendré par les produits de k' et des mineurs d'ordre d de la matrice jacobienne $(\partial f'_i/\partial\xi_j)_{1\leq i\leq d,1\leq j\leq N}$ est jacobien relativement à (f_i,e) (1.16.1) ; et compte tenu des congruences imposées, $t^{h_0+h_1}$ appartient à $\mathfrak{h}(\widehat{A}\langle\xi\rangle/(f_i,e))$. Donc d'après 1.16.31, il existe deux entiers $n_0>r\geq 0$ tels que si $n > n_0$, il existe un automorphisme φ de la $\widehat{A}$-algèbre $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ congru à l'identité modulo (t^{n-r}) et induisant un isomorphisme de $\widehat{C}$ sur $\widehat{A}\langle\xi\rangle/(f_i, e)$. On a donc

$$\varphi^{-1}((f_1, \dots, f_d, e)) = (f'_1, \dots, f'_d, e'),$$

et $\varphi^{-1}(\mathfrak{I})$ coïncide avec l'idéal $(f'_1, \dots, f'_d, e')$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(\widehat{A}\langle\xi\rangle) - \mathrm{V}(J\widehat{A}\langle\xi\rangle)$.

Posons $S = 1 + J\Lambda$. Comme $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ est fidèlement plat sur $\mathscr{A}$, il est aussi fidèlement plat sur $\Lambda[S^{-1}]$ (1.15.5.4). En vertu de ([18] 4.2), il existe un idéal $\mathfrak{I}_0$ de $\Lambda[S^{-1}]$ coïncidant avec $(f'_1, \dots, f'_d, e')$ sur l'ouvert $\mathrm{Spec}(\Lambda[S^{-1}]) - \mathrm{V}(J\Lambda[S^{-1}])$ et engendrant $\varphi^{-1}(\mathfrak{I})$ dans $\widehat{A}\langle\xi\rangle$. Soit $\mathfrak{I}'$ un idéal de Λ tel que $\mathfrak{I}'[S^{-1}] = \mathfrak{I}_0$. On notera que $\mathfrak{I}'_t$ est de type fini sur Λ_t (1.15.12). Donc quitte à remplacer Λ par Λ_h pour un élément h de S, ce qui ne change pas $\Lambda[S^{-1}]$, on peut supposer que $\mathfrak{I}'$ coïncide avec $(f'_1, \dots, f'_d, e')$ sur $\mathrm{Spec}(\Lambda) - \mathrm{V}(J\Lambda)$.

Le hensélisé J-préadique de $B' = \Lambda/\mathfrak{I}'$ est isomorphe à $\mathscr{A}/\mathfrak{I}_0\mathscr{A}$. Donc en vertu de 1.15.12(iv), le séparé complété de B' pour la topologie J-préadique est isomorphe à $\widehat{B}$. Par conséquent, B' remplit les conditions requises.

Lemme 1.16.36. *Soient (A, J) un couple hensélien idyllique, B une A-algèbre de type fini, $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{B}$) le séparé complété de A (resp. B) pour la topologie J-préadique. Supposons $\widehat{B}$ topologiquement de présentation finie et rig-lisse sur $\widehat{A}$. Alors il existe une A-algèbre de présentation finie B', lisse sur* $\mathrm{Spec}(A)$ *en dehors de* $\mathrm{V}(J)$ *dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$.*

Considérons B comme le quotient d'une A-algèbre de polynômes $A[\xi_1,\dots,\xi_N]$ par un idéal $\mathfrak{I}$. On notera les variables $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ simplement par ξ. Soient $\mathscr{A}$ le hensélisé J-préadique de $A[\xi]$, B^{h} le hensélisé J-préadique de B. On a $B^{\mathrm{h}} \simeq \mathscr{A}/\mathfrak{I}\mathscr{A}$ (1.15.5.6) et $\widehat{B} \simeq \widehat{A}\langle\xi\rangle/\mathfrak{I}\widehat{A}\langle\xi\rangle$ (1.15.14). Comme $\widehat{B}$ est topologiquement de présentation finie sur $\widehat{A}$, $\mathfrak{I}$ engendre un idéal de type fini de $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ (1.10.5). Comme $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ est fidèlement plat sur $\mathscr{A}$ (1.15.12), on en déduit par descente fidèlement plate ([12] chap. I §3.6 prop. 11) que $\mathfrak{I}$ engendre un idéal de type fini de $\mathscr{A}$. Par suite, il existe un voisinage étale élémentaire Λ de $JA[\xi]$ dans $A[\xi]$ et un idéal de type fini $\mathfrak{I}'$ de Λ tels que $\mathfrak{I}'\mathscr{A} = \mathfrak{I}\mathscr{A}$. Le hensélisé J-préadique de $\Lambda/\mathfrak{I}'$ est A-isomorphe à B^{h}. Donc le séparé complété de $\Lambda/\mathfrak{I}'$ pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$. Quitte à remplacer B par $\Lambda/\mathfrak{I}'$, on peut supposer B de présentation finie sur A. Il suffit alors de montrer qu'il existe un voisinage ouvert affine de $\mathrm{V}(JB)$ dans $\mathrm{Spec}(B)$, lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$.

Considérons une présentation finie de B,

$$B = A[\xi]/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A[\xi],$$

où ξ désigne comme plus haut un ensemble fini de variables $(\xi_1, \dots, \xi_N)$, et posons $S = 1 + JA[\xi]$. Il résulte de 1.15.12(ii) que $\widehat{A}\langle\xi\rangle$ est fidèlement plat sur $A[\xi][S^{-1}]$. Par suite, $\mathfrak{I}[S^{-1}]$ est de présentation finie sur $A[\xi][S^{-1}]$ (1.10.3), et on peut trouver un complexe

$$A[\xi]^m \xrightarrow{\mathrm{L}} A[\xi]^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I} \longrightarrow 0$$

qui devient exact après localisation par rapport à S. Soit $\mathscr{D}_{\mathrm{L}}$ l'idéal jacobien de $A[\xi]$ relativement à $(f_1, \dots, f_q)$ défini par L (1.16.1.4). Comme $\widehat{B}$ est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{A}\langle\xi\rangle/\mathfrak{I}\widehat{A}\langle\xi\rangle$ et est rig-lisse sur $\widehat{A}$, on a $\mathrm{V}(\mathscr{D}_{\mathrm{L}}\widehat{B}) \subset \mathrm{V}(J\widehat{B})$ (1.16.1.3 et 1.16.3). Par suite, il existe un entier $r \geq 1$ tel que $J^r\widehat{B} \subset \mathscr{D}_{\mathrm{L}}\widehat{B}$ ([28] 6.8.4). On en déduit par descente fidèlement plate que $J^rB[S^{-1}] \subset \mathscr{D}_{\mathrm{L}}B[S^{-1}]$. Il existe donc $h \in S$ tel que $J^rB_h \subset \mathscr{D}_{\mathrm{L}}B_h$. L'ouvert de $\mathrm{Spec}(B)$ où h est inversible répond alors à la question.

Lemme 1.16.37. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1, \dots, f_q), \quad f_i \in A\langle\xi_1, \dots, \xi_N\rangle,$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, $\widehat{C}$ le séparé complété de C pour la topologie J-préadique. Supposons C de présentation finie sur B. Alors $\widehat{C}$ est une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse. Il existe un A-plongement de $\mathrm{Spec}(\widehat{C})$ *dans le spectre d'une algèbre de séries formelles restreintes à $2N+q$ variables sur A tel que sur tout ouvert affine de* $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) - \mathrm{V}(J\widehat{C})$, *le faisceau conormal de cette immersion soit libre de rang $N+q$.*

On notera les variables $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ simplement par ξ. La suite

$$0 \to \mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \to \widehat{\Omega}^1_{A\langle\xi\rangle/A} \otimes_{A\langle\xi\rangle} B \to \widehat{\Omega}^1_{B/A} \to 0$$

est exacte et localement scindée sur $\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(JB)$ (1.14.6). Donc $\mathrm{Spec}(C)$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(B)$ en dehors de $\mathrm{V}(JB)$, et par suite $\widehat{C}$ est rig-lisse sur A (1.14.14 et 1.14.10). Soit W un ouvert affine de $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) - \mathrm{V}(J\widehat{C})$. On peut écrire au-dessus de W les suites exactes suivantes (1.14.12) qui sont des suites exactes de modules localement libres sur un schéma affine, donc scindées :

$$0 \to (\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \otimes_B \widehat{C})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{A\langle\xi\rangle/A} \otimes_{A\langle\xi\rangle} \widehat{C})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B \widehat{C})^{\sim}|W \to 0,$$
$$0 \to (\widehat{\Omega}^1_{B/A} \otimes_B \widehat{C})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/A})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/B})^{\sim}|W \to 0.$$

On a $\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/B} \simeq \Omega^1_{C/B} \otimes_C \widehat{C}$ (1.12.16) et $\Omega^1_{C/B}$ s'identifie à $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$. Les deux suites ci-dessus montrent alors que $\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/A}$ est globalement libre de rang N sur W.

On se donne un autre ensemble de variables $(\zeta_1, \dots, \zeta_q)$, que l'on notera simplement par ζ. Les (f_i) permettent de plonger $\mathrm{Spec}(\widehat{C})$ dans l'espace affine $\mathrm{Spec}(B\langle\zeta\rangle)$. Donc on peut aussi considérer $\mathrm{Spec}(\widehat{C})$ comme un sous-schéma fermé de $\mathrm{Spec}(A\langle\xi,\zeta\rangle)$; soit $\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2$ le faisceau conormal de cette immersion. D'après 1.14.6, on a la suite exacte

$$0 \to (\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2)^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{A\langle\xi,\zeta\rangle/A} \otimes_{A\langle\xi,\zeta\rangle} \widehat{C})^{\sim}|W \to (\widehat{\Omega}^1_{\widehat{C}/A})^{\sim}|W \to 0.$$

Donc, compte tenu des isomorphismes précédents, on a une suite exacte

$$0 \to (\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2)^{\sim}|W \to \mathscr{O}_W^{N+q} \to \mathscr{O}_W^N \to 0. \tag{1.16.37.1}$$

On plonge alors $\mathrm{Spec}(\widehat{C})$ dans $\mathrm{Spec}(A\langle\xi_1,\ldots,\xi_N,\zeta_1,\ldots,\zeta_q,t_1,\ldots,t_N\rangle)$ dans lequel il est défini par les équations supplémentaires $t_i = 0$ pour $1 \leq i \leq N$. Soit $\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}'^2$ le faisceau conormal de cette nouvelle immersion. On a alors, d'après (1.16.37.1),

$$(\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}'^2)^{\sim}|W \simeq (\mathfrak{K}/\mathfrak{K}^2)^{\sim}|W \oplus \mathscr{O}_W^N \simeq \mathscr{O}_W^{N+q},$$

ce qui achève la preuve.

Lemme 1.16.38. *Soient A un anneau quasi-idyllique, J un idéal de définition de A, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse,*

$$B = A\langle\xi_1,\ldots,\xi_N\rangle/\mathfrak{I}, \quad \mathfrak{I} = (f_1,\ldots,f_q), \quad f_i \in A\langle\xi_1,\ldots,\xi_N\rangle,$$

C l'algèbre symétrique du B-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$, S le quotient de C par $C_{J\text{-tor}}$, $\widehat{S}$ le séparé complété de S pour la topologie J-préadique. Supposons B rig-pur. Alors $\widehat{S}$ est une A-algèbre topologiquement de présentation finie et rig-lisse. Il existe un A-plongement de $\mathrm{Spec}(\widehat{S})$ *dans le spectre d'une algèbre de séries formelles restreintes à $2N+q$ variables sur A tel que sur tout ouvert affine de* $\mathrm{Spec}(\widehat{S}) - \mathrm{V}(J\widehat{S})$*, le faisceau conormal de cette immersion soit libre de rang $N+q$.*

On notera (1.12.16) que S est de présentation finie sur B et $\widehat{S} \simeq S \otimes_C \widehat{C}$, où $\widehat{C}$ est le séparé complété de C pour la topologie J-préadique. Il suffit alors d'adapter la démonstration de 1.16.37 en remplaçant $\widehat{C}$ par $\widehat{S}$ (cf. la preuve de 1.16.34).

1.16.39. Revenons maintenant à la démonstration de 1.16.29. Montrons d'abord comment la proposition non respée entraîne la proposition respée. D'après la première, il existe une A-algèbre de présentation finie B', lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$, dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{B}$. Comme $\widehat{\Omega}^1_{\widehat{B}/\widehat{A}}$ est $\widehat{B}$-isomorphisme à $\Omega^1_{B'/A} \otimes_{B'} \widehat{B}$ (1.10.2), il suffit de montrer que l'on peut choisir B' telle que l'image réciproque de toute composante connexe de $\mathrm{Spec}(B') - \mathrm{V}(JB')$ dans $\mathrm{Spec}(\widehat{B}) - \mathrm{V}(J\widehat{B})$ soit non vide. En effet, cela impliquera que $\Omega^1_{B'/A}$ est nul en dehors de $\mathrm{V}(J)$, et donc que B' est étale en dehors de $\mathrm{V}(J)$. Soit V une composante connexe de $\mathrm{Spec}(B') - \mathrm{V}(JB')$. Comme l'injection canonique $V \to \mathrm{Spec}(B')$ est quasi-compacte ([28] 6.1.5), l'adhérence schématique de V dans $\mathrm{Spec}(B')$ existe ([28] 6.10.6). Si cette dernière ne rencontre pas $\mathrm{V}(JB')$, alors V est fermé (et ouvert) dans $\mathrm{Spec}(B')$. On peut évidemment choisir B' de sorte que ce cas ne se produit pas. Dans le cas contraire, l'image réciproque W de V dans $\mathrm{Spec}(\widehat{B}) - \mathrm{V}(J\widehat{B})$ est non vide. En effet, comme $\widehat{B}$ est B'-plat (1.15.12), il résulte de ([31] 11.10.5(ii)) que l'adhérence schématique de W dans $\mathrm{Spec}(\widehat{B})$ est l'image réciproque de l'adhérence schématique de V dans $\mathrm{Spec}(B')$, et donc non vide.

Montrons ensuite la proposition non respée. On peut évidemment supposer l'une des conditions suivantes remplie :

(a) A est noethérien et J est principal ;
(b) il existe un anneau 1-valuatif R, un élément non nul t de l'idéal maximal de R, une R-algèbre topologiquement de présentation finie A_0 et une A_0-algèbre de présentation finie A_1 tels que A soit le hensélisé (t)-préadique de A_1 et $J = tA$ (1.15.5.5).

En particulier, le couple $(\widehat{A}, J\widehat{A})$ remplit les conditions requises dans les lemmes 1.16.33 et 1.16.34. Soient

$$\widehat{A}\langle\xi_1,\ldots,\xi_N\rangle^m \xrightarrow{\mathrm{L}} \widehat{A}\langle\xi_1,\ldots,\xi_N\rangle^q \xrightarrow{(f_i)} \mathfrak{I} \longrightarrow 0 \qquad (1.16.39.1)$$

une présentation finie de $\mathfrak{I}$ (1.10.3), $\widehat{C}$ le séparé complété de C pour la topologie J-préadique, $\sigma\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(C)$ la section nulle, $\widehat{\sigma}\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{C})$ la section déduite de σ par prolongement aux complétés. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\widehat{B}) \arrow[r, "\widehat{\sigma}"] \arrow[d, "\widehat{\sigma}"'] & \mathrm{Spec}(\widehat{C}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\Box"] & \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \arrow[d, "\sigma"] \\
\mathrm{Spec}(\widehat{C}) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{Spec}(C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(C)
\end{tikzcd} \qquad (1.16.39.2)$$

où δ est le graphe du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) \to \mathrm{Spec}(C)$ et le carré cartésien de droite est défini par le changement de base $\mathrm{Spec}(\widehat{C}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{B})$. Il résulte de 1.12.16(iv) que le rectangle extérieur est cartésien. Par suite, le carré de gauche est aussi cartésien.

(i) Supposons d'abord C de présentation finie sur $\widehat{B}$. D'après 1.16.37, $\widehat{C}$ est un quotient d'une $\widehat{A}$-algèbre de séries formelles restreintes à $2N+q$ variables, vérifiant les conditions d'application du lemme 1.16.35. Soit donc C' une A-algèbre de type fini, lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$, dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{C}$ (on identifie dans la suite ces deux algèbres). On notera que le hensélisé J-préadique de C' est un couple hensélien quasi-idyllique (1.15.11.3).

Le $\widehat{B}$-module $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2$ est localement libre en dehors de $\mathrm{V}(J\widehat{B})$ (1.14.6). Donc en vertu de 1.16.19, pour tout entier $n \geq 0$, quitte à remplacer C' par un voisinage étale élémentaire de JC', on peut trouver un C'-module de présentation finie M', localement libre en dehors de $\mathrm{V}(JC')$, muni d'une présentation

$$C'^m \xrightarrow{\mathrm{L}'} C'^q \longrightarrow M' \longrightarrow 0\,,$$

tels que $M' \otimes_{C'} \widehat{C}$ soit isomorphe à $\mathfrak{I}/\mathfrak{I}^2 \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C}$ et $\mathrm{L}' \equiv \mathrm{L} \mod (J^n\widehat{C})$.

Supposons n fixé (on le précisera dans la suite) et M' ainsi choisi. Soit alors D' l'algèbre symétrique du C'-module M', de sorte que $D' \otimes_{C'} \widehat{C}$ est $\widehat{C}$-isomorphe à $C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C}$. D'après 1.16.16, pour tout entier $r \geq 0$, quitte à remplacer C' par un voisinage étale élémentaire de JC', on peut approximer modulo J^r la section $\delta\colon \mathrm{Spec}(\widehat{C}) \to \mathrm{Spec}(C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{C})$ en une section

$$\delta'\colon \mathrm{Spec}(C') \to \mathrm{Spec}(D').$$

Soit B' le quotient de C' défini par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(C') \arrow[d, "\sigma'"] \\ \mathrm{Spec}(C') \arrow[r, "\delta'"'] & \mathrm{Spec}(D') \end{tikzcd} \tag{1.16.39.3}$$

où σ' est la section nulle, et soit $\widehat{B}'$ le séparé complété de B' pour la topologie J-préadique, qui est isomorphe à $B' \otimes_{C'} \widehat{C}$ (1.15.14). Il résulte alors de 1.16.33, compte tenu de (1.16.39.2) et (1.16.39.3), que si n et r sont suffisamment grands, $\widehat{B}$ et $\widehat{B}'$ sont $\widehat{A}$-isomorphes. On en déduit le théorème 1.16.29 dans le cas (i) en appliquant 1.16.36.

(ii) Supposons ensuite $\widehat{B}$ rig-pur. Soient S le quotient de C par $C_{J\text{-tor}}$, $\widehat{S}$ le séparé complété de S pour la topologie J-préadique. La section nulle $\sigma\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(C)$ se factorise à travers une section $\tau\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(S)$, qui induit par prolongement aux complétés une section $\widehat{\tau}\colon \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{S})$. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \arrow[r, "\widehat{\tau}"] \arrow[d, "\widehat{\tau}"'] & \mathrm{Spec}(\widehat{S}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(\widehat{B}) \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathrm{Spec}(\widehat{S}) \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Spec}(C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{S}) \arrow[r] & \mathrm{Spec}(C) \end{tikzcd} \tag{1.16.39.4}$$

où ρ est le graphe du morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\widehat{S}) \to \mathrm{Spec}(C)$ et le carré cartésien de droite est défini par le changement de base $\mathrm{Spec}(\widehat{S}) \to \mathrm{Spec}(\widehat{B})$. Il résulte de 1.12.16(iv) que le rectangle extérieur est cartésien. Par suite, le carré de gauche est aussi cartésien.

D'après 1.16.38, $\widehat{S}$ est un quotient d'une $\widehat{A}$-algèbre de séries formelles restreintes à $2N+q$ variables, vérifiant les conditions d'application du lemme 1.16.35. Soit donc S' une A-algèbre de type fini, lisse sur $\mathrm{Spec}(A)$ en dehors de $\mathrm{V}(J)$, dont le séparé complété pour la topologie J-préadique est $\widehat{A}$-isomorphe à $\widehat{S}$ (on identifie dans la suite ces deux algèbres). En vertu de 1.16.19, pour tout entier n, quitte à remplacer S' par un voisinage étale élémentaire de JS', on peut trouver un

S'-module de présentation finie M', localement libre en dehors de $\mathrm{V}(JS')$, muni d'une présentation

$$S'^m \xrightarrow{\mathrm{L}'} S'^q \longrightarrow M' \longrightarrow 0\,,$$

tels que $M' \otimes_{S'} \widehat{S}$ soit isomorphe à $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2 \otimes_{\widehat{B}} \widehat{S}$ et $\mathrm{L}' \equiv \mathrm{L} \mod (J^n\widehat{S})$.

Supposons n fixé (on le précisera dans la suite) et M' ainsi choisi. Soit alors D' l'algèbre symétrique du S'-module M', de sorte que $D' \otimes_{S'} \widehat{S}$ est $\widehat{S}$-isomorphe à $C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{S}$. D'après 1.16.16, pour tout entier $r \geq 0$, quitte à remplacer S' par un voisinage étale élémentaire de JS', on peut approximer modulo J^r la section $\rho\colon \mathrm{Spec}(\widehat{S}) \to \mathrm{Spec}(C \otimes_{\widehat{B}} \widehat{S})$ en une section

$$\rho'\colon \mathrm{Spec}(S') \to \mathrm{Spec}(D').$$

Soit B' le quotient de S' défini par le diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(B') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(S') \arrow[d, "\tau'"] \\ \mathrm{Spec}(S') \arrow[r, "\rho'"'] & \mathrm{Spec}(D') \end{tikzcd} \tag{1.16.39.5}$$

où τ' est la section nulle, et soit $\widehat{B}'$ le séparé complété de B' pour la topologie J-préadique, qui est isomorphe à $B' \otimes_{S'} \widehat{S}$ (1.15.14). Il résulte de 1.16.34, compte tenu de (1.16.39.4) et (1.16.39.5), que si n et r sont suffisamment grands, $\widehat{B}$ et $\widehat{B}'$ sont $\widehat{A}$-isomorphes. On en déduit le théorème 1.16.29 dans le cas (ii) en appliquant 1.16.36.

1.17 Compléments d'algèbre homologique

Les résultats de cette section sont dus à Ullrich [44].

1.17.1. Soient A un anneau, (M_n) un système projectif de A-modules indexé par $\mathbb{N}$; on note $u_{mn}\colon M_n \to M_m$ les morphismes de transition (pour $m \leq n$). On dit que

(i) (M_n) est *strict* si les morphismes de transition u_{mn} sont surjectifs.

(ii) (M_n) est *Artin-Rees-nul* (en abrégé AR-nul) s'il existe un entier $r \geq 0$ tel que pour tout n, $u_{n,n+r} = 0$.

(iii) (M_n) vérifie *la condition de Mittag-Leffler*, (en abrégé ML), si pour tout m il existe $n \geq m$ tel que, pour tout $n' \geq n$, $u_{mn'}(M_{n'}) = u_{mn}(M_n)$.

(iv) (M_n) vérifie *la condition d'Artin-Rees-Mittag-Leffler*, (en abrégé ARML), s'il existe un entier $r \geq 0$ tel que, pour tout m et tout $n' \geq m + r$, $u_{mn'}(M_{n'}) = u_{m,m+r}(M_{m+r})$.

On renvoie à ([30] 0.13), ([27] §V) et ([33] 2.5) pour plus de détails sur ces conditions.

1.17.2. Soient A un anneau, $t \in A$, $(\mathrm{C}^\bullet, d^\bullet)$ un complexe de A-modules (à différentielle de degré $+1$) ; posons $A_n = A/t^{n+1}A$ et $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$ pour tout $n \geq 0$. Soient q un entier, $\widehat{\mathrm{H}}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ le séparé complété de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ pour la topologie (t)-préadique. Les flèches naturelles

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \quad \to \quad \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) \tag{1.17.2.1}$$

induisent un homomorphisme topologique

$$\widehat{\mathrm{H}}^q(\mathrm{C}^\bullet) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n), \tag{1.17.2.2}$$

où le premier membre est muni de la topologie (t)-préadique et les $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ de la topologie discrète. On note N_n (resp. Q_n) le noyau (resp. conoyau) de l'homomorphisme (1.17.2.1).

Lemme 1.17.3. *Les hypothèses sont celles de* (1.17.2).

(i) *S'il existe un entier* $r \geq 0$ *tel que* $t^r \mathrm{C}^{q+1}_{(t)\text{-tor}} = 0$*, les* N_n *définissent sur* $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ *une filtration* (t)*-bonne ; plus précisément, on a* $N_{n+1} = tN_n$ *pour tout* $n \geq r$.

(ii) *S'il existe deux entiers* $r, h \geq 0$ *tels que* $t^r \mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ *pour* $i \in \{q, q+1, q+2\}$ *et que* $t^h(\mathrm{H}^{q+1}(t^r\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}} = 0$*, le système projectif* (Q_n) *est AR-nul.*

(iii) *Si le système projectif* (Q_n) *est AR-nul, le système projectif* $(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n))$ *vérifie* (ARML).

(iv) *Si le système projectif* (Q_n) *est AR-nul et si les* N_n *définissent sur* $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ *une filtration* (t)*-bonne,* (1.17.2.2) *est un isomorphisme topologique.*

La démonstration de 1.17.3 est élémentaire, basée sur la remarque suivante.

Lemme 1.17.4. *Soient A un anneau, $t \in A$, M un A-module, N un sous-A-module de M. Posons $P = M/N$, et supposons que $t^r P_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour un entier $r \geq 0$. Alors pour tout $n \geq 0$, on a $(t^{n+r}M) \cap N = t^n((t^rM) \cap N)$.*

En effet, soient $y \in M$, $\overline{y}$ son image dans P. Si $x = t^{n+r}y \in (t^{n+r}M) \cap N$, alors $\overline{y} \in P_{(t)\text{-tor}}$ et $t^r\overline{y} = 0$; donc $x \in t^n((t^rM) \cap N)$.

1.17.5. Revenons à la démonstration de 1.17.3. Les flèches (1.17.2.1) se mettent dans la suite exacte longue de cohomologies

$$\mathrm{H}^q(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) \to \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^{q+1}(\mathrm{C}^\bullet)$$

déduite de la suite exacte courte $0 \to t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet \to \mathrm{C}^\bullet \to \mathrm{C}^\bullet_n \to 0$. On a donc

$$N_n = \mathrm{im}(\mathrm{H}^q(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)),$$

$$Q_n = \mathrm{im}(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) \to \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)) = \ker(\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^{q+1}(\mathrm{C}^\bullet)).$$

(i) Si on note $\pi\colon \ker(d^q) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ la projection canonique, on a $N_n = \pi((t^{n+1}\mathrm{C}^q) \cap \ker(d^q))$; en particulier on a $tN_n \subset N_{n+1}$. D'autre part, en vertu de 1.17.4, on a, pour tout $n \geq 0$,

$$(t^{n+r}\mathrm{C}^q) \cap \ker(d^q) = t^n((t^r\mathrm{C}^q) \cap \ker(d^q)),$$

d'où l'assertion.

(ii) Pour $i \in \{q, q+1, q+2\}$ et tout $p \geq 0$, la flèche $t^r\mathrm{C}^i \to t^{r+p}\mathrm{C}^i$ de multiplication par t^p est un isomorphisme, car $t^r\mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$. Donc la multiplication par t^p induit un isomorphisme $\mathrm{H}^{q+1}(t^r\mathrm{C}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{q+1}(t^{r+p}\mathrm{C}^\bullet)$; en particulier, on a $t^h(\mathrm{H}^{q+1}(t^n\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour tout $n \geq r$. Posons

$$N'_n = \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)/Q_n = \mathrm{im}(\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^{q+1}(\mathrm{C}^\bullet)).$$

Compte tenu de (i) et de l'hypothèse $t^r\mathrm{C}^{q+2}_{(t)\text{-tor}} = 0$, on a $N'_{n+1} = tN'_n$ pour tout $n \geq r$. Considérons alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Q_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet) \arrow[r] \arrow[d] & N'_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Q_{n+1} \arrow[r] & \mathrm{H}^{q+1}(t^{n+2}\mathrm{C}^\bullet) \arrow[r] & N'_{n+1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par la multiplication par t. Pour tout $n \geq r$, deux des flèches verticales sont des isomorphismes ; il en est donc de même de la troisième ; d'où $Q_{n+1} = tQ_n$.

En tant que quotient de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$, Q_n est tué par t^{n+1}, et donc

$$Q_n \subset (\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}}.$$

Il en résulte que $t^hQ_n = 0$ pour tout $n \geq r$. D'autre part, le composé de la multiplication par t^p de $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$ dans $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+p+1}\mathrm{C}^\bullet)$ avec la flèche de transition de $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+p+1}\mathrm{C}^\bullet)$ dans $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$ est la multiplication par t^p dans $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$. Comme $Q_{n+p} = t^pQ_n$ pour $n \geq r$, le morphisme de transition $Q_{n+p} \to Q_n$ est nul pour tout $n \geq r$ et tout $p \geq h$. Donc pour tout n, le morphisme de transition $Q_{n+r+h} \to Q_n$ est nul.

(iii) Considérons la suite exacte de systèmes projectifs

$$0 \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) \to Q_n \to 0, \qquad (1.17.5.1)$$

où celui de gauche est clairement strict. Alors le système projectif $(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n))$ vérifie (ARML), en vertu de ([27] V 2.1.2). On en déduit aussi un isomorphisme topologique

$$\varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n). \qquad (1.17.5.2)$$

(iv) La flèche

$$\widehat{\mathrm{H}}^q(\mathrm{C}^\bullet) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n \tag{1.17.5.3}$$

déduite des surjections $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \otimes_A A_n \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n$ est un isomorphisme topologique. On achève la preuve en observant que le composé de (1.17.5.2) et (1.17.5.3) est (1.17.2.2).

Lemme 1.17.6. *Les hypothèses étant celles de* (1.17.2)*, supposons de plus que les conditions suivantes soient remplies :*

(a) *Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $t^r \mathrm{C}^{q+1}_{(t)\text{-tor}} = 0$.*

(b) *A et C^{q-1} sont complets et C^q est séparé pour les topologies (t)-préadiques.*

Soient $x_1, \ldots, x_m$ des éléments de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ dont les classes engendrent le A-module $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n$ pour un entier $n > r$. Alors $x_1, \ldots, x_m$ engendrent le A-module $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$.

En particulier, si $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n) = 0$ pour un entier $n > r$, $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) = 0$.

En vertu de 1.17.3(i), les classes de $x_1, \ldots, x_m$ engendrent le A_0-module $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \otimes_A A_0$. Soient $y_1, \ldots, y_m \in \ker(d^q)$ des éléments qui relèvent $x_1, \ldots, x_m$. Considérons l'homomorphisme

$$u \colon A^m \oplus \mathrm{C}^{q-1} \quad \to \quad \ker(d^q),$$

défini par $u(z_1, \ldots, z_m, z) = \sum_{i=1}^m z_i y_i + d^{q-1}(z)$. Comme $\mathrm{gr}_0(u) = u \otimes_A A_0$ est surjectif, il résulte de la condition (b) et de 1.8.5 que u est surjectif.

Proposition 1.17.7. *Soient R un anneau 1-valuatif, t un élément non nul de l'idéal maximal de R, A une R-algèbre topologiquement de type fini, $(\mathrm{C}^\bullet, d^\bullet)$ un complexe de A-modules, $A_n = A/t^{n+1}A$, $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$, q un entier. Supposons que les conditions suivantes soient remplies :*

(a) *Il existe un entier $r \geq 1$ tel que $t^r \mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour $i \in \{q, q+1, q+2\}$.*

(b) *C^{q-1} est complet et C^q est séparé pour les topologies (t)-préadiques.*

(c) *Pour tout entier $n \geq 0$, $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ et $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$ sont des A-modules cohérents.*

Alors $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ est un A-module cohérent ; le système projectif $(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n))$ vérifie (ARML) *; si on pose*

$$N_n = \ker(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)), \tag{1.17.7.1}$$

les N_n définissent sur $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ une filtration (t)-bonne ; enfin, l'homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n), \tag{1.17.7.2}$$

est un isomorphisme topologique (*le premier membre étant muni de la topologie (t)-préadique, les $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ de la topologie discrète*)*.*

En vertu de 1.9.18(iii), il existe un entier $h \geq 1$ tel que $t^h(\mathrm{H}^{q+1}(t^r\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}} = 0$. On en déduit par 1.17.3 que les N_n définissent sur $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ une filtration (t)-bonne ; $(\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n))$ vérifie (ARML) ; enfin (1.17.2.2) est un isomorphisme topologique. Reste à montrer que $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ est un A-module cohérent, ce qui impliquera que (1.17.7.2) est un isomorphisme topologique (1.8.29 et 1.9.18). Reprenons les notations de 1.17.2. Pour tout entier $n \geq 0$, Q_n est de type fini en tant que quotient de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$; il est donc de présentation finie car il est contenu dans le A-module cohérent $\mathrm{H}^{q+1}(t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet)$. La suite exacte (1.17.5.1) implique alors que $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/N_n$ est de type fini ; par suite $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ est de type fini (1.17.6). Si on pose $M = \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)_{(t)\text{-tor}}$, alors M est de type fini et $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)/M$ est cohérent (1.9.18). Il existe deux entiers $s, k \geq 0$ tels que $t^kM = 0$ et $N_{n+1} = tN_n$ pour $n \geq s$ (1.17.3). On en déduit aussitôt que $M \cap N_n = 0$ pour n suffisamment grand ; autrement dit la flèche naturelle $M \to \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ est injective. Comme $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ est cohérent, M est cohérent et il en est alors de même de $\mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$.

Chapitre 2

Géométrie formelle

Ce chapitre reprend et complète la théorie des schémas formels d'A. Grothendieck [28, 30]. Nous introduisons les schémas formels *idylliques*. Nous étendons à ces objets certains résultats de Grothendieck initialement établis pour les schémas formels noethériens, entre autres ceux qui portent sur les faisceaux cohérents (2.7.2 et 2.8.5) et sur leur cohomologie (théorème de finitude (2.11.5), comparaison de la théorie "algébrique" à la théorie "formelle" (2.12.2)...). Nous développons la notion de *clôture rigide* d'un module sur un schéma formel idyllique qui jouera un rôle important dans la suite de ce traité. Nous étudions enfin les propriétés différentielles des schémas formels idylliques.

La terminologie de Grothendieck pour les schémas formels est essentiellement adaptée au cadre noethérien, qui n'est pas le cadre exclusif de ce traité. Nous nous en écartons à certains endroits pour mettre l'accent sur les concepts fondamentaux pour la suite. Pour éviter toute confusion, nous reformulons toutes les définitions, même celles que nous conservons identiques à ([28] §10).

2.1 Rappels et compléments sur les schémas formels

2.1.1. Soit A un anneau topologique admissible (1.8.3). Pour tout idéal de définition J de A, $\mathrm{Spec}(A/J)$ s'identifie au sous-espace fermé $\mathrm{V}(J)$ de $\mathrm{Spec}(A)$, ensemble des idéaux premiers *ouverts* de A ; cet espace ne dépend pas de l'idéal de définition J considéré ; notons le $\mathfrak{X}$. Soit (J_λ) un système fondamental de voisinages de 0 dans A, formé d'idéaux de définition, et pour tout λ, soit $\mathscr{O}_\lambda$ le faisceau structural de $\mathrm{Spec}(A/J_\lambda)$; ce faisceau est induit sur $\mathfrak{X}$ par $\widetilde{A}/\widetilde{J}_\lambda$ (lequel est nul hors de $\mathfrak{X}$). Pour $J_\mu \subset J_\lambda$, l'homomorphisme canonique $A/J_\mu \to A/J_\lambda$ définit donc un homomorphisme $u_{\lambda\mu}\colon \mathscr{O}_\mu \to \mathscr{O}_\lambda$ de faisceaux d'anneaux, et $(\mathscr{O}_\lambda)$ est un *système projectif de faisceaux d'anneaux* pour ces homomorphismes. Comme la topologie de $\mathfrak{X}$ admet une base formée d'ouverts quasi-compacts, on peut associer à tout $\mathscr{O}_\lambda$ un faisceau d'anneaux topologiques pseudo-discrets ([28] 0.3.9.1) qui a $\mathscr{O}_\lambda$ comme faisceau d'anneaux (sans topologie) sous-jacent, et que nous notons

A. Abbes, *Éléments de Géométrie Rigide*, Progress in Mathematics 286,
DOI 10.1007/978-3-0348-0012-9_2, © Springer Basel AG 2010

encore $\mathscr{O}_\lambda$; et les $\mathscr{O}_\lambda$ forment un *système projectif de faisceaux d'anneaux topologiques* ([28] 0.3.9.2). Nous désignons par $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ le faisceau d'anneaux topologiques sur $\mathfrak{X}$, limite projective du système $(\mathscr{O}_\lambda)$; pour tout ouvert quasi-compact U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est donc l'anneau topologique limite projective du système d'anneaux discrets $\Gamma(U, \mathscr{O}_\lambda)$.

Définition 2.1.2 ([28] 10.1.2). Étant donné un anneau admissible A, on appelle *spectre formel* de A et on note $\mathrm{Spf}(A)$ le sous-espace fermé $\mathfrak{X}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ formé des idéaux premiers ouverts de A. On dit qu'un espace topologiquement annelé est un *schéma formel affine* s'il est isomorphe à un spectre formel $\mathrm{Spf}(A) = \mathfrak{X}$ muni du faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $(\widetilde{A}/\widetilde{J}_\lambda)|\mathfrak{X}$, où J_λ parcourt l'ensemble filtrant des idéaux de définition de A.

Proposition 2.1.3 ([28] 10.1.3). *Si* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, *où A est un anneau admissible,* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ *est topologiquement isomorphe à A.*

Proposition 2.1.4 ([28] 10.1.4). *Soient A un anneau admissible,* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, *et pour tout $f \in A$, soit* $\mathscr{D}(f) = \mathrm{D}(f) \cap \mathfrak{X}$ *; l'espace topologiquement annelé* $(\mathscr{D}(f), \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|\mathscr{D}(f))$ *est isomorphe au spectre formel affine* $\mathrm{Spf}(A_{\{f\}})$ (1.8.12).

2.1.5. En tant que faisceau d'anneaux *sans topologie*, le faisceau structural $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ de $\mathrm{Spf}(A)$ admet pour tout $x \in \mathfrak{X}$ une fibre qui, en vertu de 2.1.4, s'identifie à la limite inductive $\varinjlim A_{\{f\}}$ pour les $f \notin \mathfrak{p}_x$, où $\mathfrak{p}_x$ est l'idéal premier de A associé à x. Par suite (1.8.13) et (1.8.14) :

Proposition 2.1.6. *Pour tout $x \in \mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, la fibre $\mathscr{O}_x$ est un anneau local dont le corps résiduel est isomorphe à $\kappa(x) = A_x/\mathfrak{p}_x A_x$. Si en outre A est adique et noethérien, $\mathscr{O}_x$ est un anneau noethérien.*

2.1.7. On appelle *schéma formel affine préadique* (resp. *adique*, resp. *noethérien*) un schéma formel affine isomorphe à un spectre formel $\mathrm{Spf}(A)$, où A est préadique complet et séparé (resp. adique, resp. adique et noethérien) (1.8.4).

Nous nous écartons ici de la terminologie de Grothendieck. Notre notion de schéma formel affine préadique correspond à sa notion de schéma formel affine adique.

2.1.8. Soient A un anneau admissible, J un idéal *ouvert* de A, $\mathfrak{X}$ le schéma formel affine $\mathrm{Spf}(A)$. Soit (J_λ) l'ensemble des idéaux de définition de A contenus dans J ; alors $\widetilde{J}/\widetilde{J}_\lambda$ est un faisceau d'idéaux de $\widetilde{A}/\widetilde{J}_\lambda$. Désignons par J^Δ la limite projective des faisceaux induits sur $\mathfrak{X}$ par $\widetilde{J}/\widetilde{J}_\lambda$, qui s'identifie à un *idéal* de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Pour tout $f \in A$, si on note S_f l'ensemble multiplicatif des f^n $(n \geq 0)$, $\Gamma(\mathscr{D}(f), J^\Delta)$ est la limite projective de $S_f^{-1}J/S_f^{-1}J_\lambda$, autrement dit s'identifie à l'idéal ouvert $J_{\{f\}}$ de l'anneau $A_{\{f\}}$ (1.8.9), et en particulier $\Gamma(\mathfrak{X}, J^\Delta) = J$; on en conclut (les $\mathscr{D}(f)$ formant une base de la topologie de $\mathfrak{X}$) que l'on a

$$J^\Delta|\mathscr{D}(f) = (J_{\{f\}})^\Delta. \tag{2.1.8.1}$$

L'application canonique de $A_{\{f\}} = \Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ dans $\Gamma(\mathscr{D}(f), (\widetilde{A}/\widetilde{J})|\mathfrak{X}) = S_f^{-1}A/S_f^{-1}J$ est surjective et a pour noyau $\Gamma(\mathscr{D}(f), J^{\Delta}) = J_{\{f\}}$. Ces applications définissent donc un *épimorphisme* continu, dit *canonique*, du faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ sur le faisceau d'anneaux discrets $(\widetilde{A}/\widetilde{J})|\mathfrak{X}$, dont le noyau est J^{Δ}. On a donc un *isomorphisme canonique*

$$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/J^{\Delta} \xrightarrow{\sim} (\widetilde{A}/\widetilde{J})|\mathfrak{X}. \tag{2.1.8.2}$$

Il est clair (en vertu de $\Gamma(\mathfrak{X}, J^{\Delta}) = J$) que l'application $J \mapsto J^{\Delta}$ est strictement croissante ; d'après ce qui précède, pour $J \subset J'$, le faisceau J'^{Δ}/J^{Δ} est canoniquement isomorphe à $(J'/J)^{\sim}$.

2.1.9. Les hypothèses et notations étant toujours celles de (2.1.8), nous dirons qu'un idéal $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un *idéal ouvert* (resp. un *idéal de définition*) de $\mathfrak{X}$ si, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert de x de la forme $\mathscr{D}(f)$, où $f \in A$, tel que $\mathscr{J}|\mathscr{D}(f)$ soit de la forme $\mathfrak{J}^{\Delta}$, où $\mathfrak{J}$ est un idéal ouvert (resp. un idéal de définition) de $A_{\{f\}}$.

Proposition 2.1.10 ([28] 10.3.5). *Si A est un anneau admissible, tout idéal ouvert* (*resp. tout idéal de définition*) *de $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est de la forme J^{Δ}, où J est un idéal ouvert* (*resp. un idéal de définition*) *de A, uniquement déterminé.*

En effet, soit $\mathscr{J}$ un idéal ouvert de $\mathfrak{X}$; par hypothèse, et puisque $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, il y a un nombre fini d'éléments $f_i \in A$ tels que les $\mathscr{D}(f_i)$ recouvrent $\mathfrak{X}$ et $\mathscr{J}|\mathscr{D}(f_i) = \mathfrak{J}_i^{\Delta}$, où $\mathfrak{J}_i$ est un idéal ouvert de $A_{\{f_i\}}$. Pour tout i, il existe un idéal ouvert $\mathfrak{R}_i$ de A tel que $\mathfrak{J}_i = (\mathfrak{R}_i)_{\{f_i\}}$ (1.8.9). Soit $\mathfrak{R}$ un idéal de définition de A contenu dans tous les $\mathfrak{R}_i$. On a alors $\mathfrak{R}^{\Delta} \subset \mathscr{J}$. L'image canonique de $\mathscr{J}/\mathfrak{R}^{\Delta}$ dans le faisceau structural $(A/\mathfrak{R})^{\sim}$ de $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{R})$ est telle que sa restriction à $\mathscr{D}(f_i)$ soit égale à $(\mathfrak{J}_i/\mathfrak{R}_{\{f_i\}})^{\sim}$; on en conclut que cette image canonique est un idéal quasi-cohérent sur $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{R})$, donc de la forme $(J/\mathfrak{R})^{\sim}$, où J est un idéal de A contenant $\mathfrak{R}$, d'où $\mathscr{J} = J^{\Delta}$ (2.1.8).

Supposons maintenant que $\mathscr{J}$ soit un idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et montrons que J est un idéal de définition de A. On peut supposer que, pour tout i, $\mathfrak{J}_i$ est un idéal de définition de $A_{\{f_i\}}$; donc il existe n_i tel que l'on ait $\mathfrak{J}_i^{n_i} \subset \mathfrak{R}_{\{f_i\}}$. On aura, en désignant par n le plus grand des n_i, $(\mathscr{J}/\mathfrak{R}^{\Delta})^n = 0$, et par suite $((J/\mathfrak{R})^{\sim})^n = 0$, d'où finalement $(J/\mathfrak{R})^n = 0$, ce qui prouve que J est un idéal de définition de A.

Proposition 2.1.11. *Soient A un anneau préadique complet et séparé, J un idéal de définition de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{J} = J^{\Delta}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{J}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de type fini.*
(ii) *$\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est un $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$-module de type fini.*
(iii) *J est un A-module de type fini.*

En outre, quand ces conditions sont vérifiées, on a $\mathscr{J} = J\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathscr{J}^n = (J^n)^{\Delta}$ pour tout $n \geq 0$; en particulier, $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est canoniquement isomorphe à $(J/J^2)^{\sim}$.

D'abord (i) entraîne clairement (ii). Montrons ensuite que (ii) implique (iii). Comme l'idéal $\mathscr{J}/(J^2)^\Delta = (J/J^2)^\sim$ de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}/(J^2)^\Delta$ est de carré nul (2.1.8), on a $\mathscr{J}^2 \subset (J^2)^\Delta$, et $\mathscr{J}/(J^2)^\Delta$ est un quotient de $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$. Par suite, J/J^2 est un A-module de type fini, et J est un A-module de type fini, en vertu de 1.8.6. Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Il résulte de 2.1.8 et 1.8.11 que, pour tout $f \in A$,

$$\Gamma(\mathscr{D}(f), J^\Delta) = J_{\{f\}} = JA_{\{f\}} = J\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{O}_\mathfrak{X}).$$

Comme $J\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est associé au préfaisceau $U \mapsto J\Gamma(U, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$, la relation $\mathscr{J} = J\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ et la condition (i) en résultent, puisque les $\mathscr{D}(f)$ forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$. De même, on a $\mathscr{J}^n = (J^n)^\Delta$ car J^n est un idéal de définition de type fini de A.

Corollaire 2.1.12. *Pour qu'un schéma formel affine préadique soit adique* (2.1.7), *il faut et il suffit qu'il admette un idéal de définition de type fini.*

Proposition 2.1.13. *Soient A un anneau adique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{a}$ un idéal ouvert de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{J} = J^\Delta$, $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^\Delta$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{A}$ est un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module de type fini.*
(ii) *$\mathscr{A}/\mathscr{A}\mathscr{J}$ est un $(\mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J})$-module de type fini.*
(iii) *$\mathfrak{a}$ est un A-module de type fini.*

En outre, quand ces conditions sont vérifiées, on a $\mathscr{A} = \mathfrak{a}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$.

D'abord (i) entraîne clairement (ii). Montrons ensuite que (ii) implique (iii). Comme l'idéal $\mathscr{A}/(\mathfrak{a}J)^\Delta = (\mathfrak{a}/\mathfrak{a}J)^\sim$ de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}/(\mathfrak{a}J)^\Delta$ est annulé par $\mathscr{J}/(\mathfrak{a}J)^\Delta = (J/\mathfrak{a}J)^\sim$ (2.1.8), on a $\mathscr{J}\mathscr{A} \subset (\mathfrak{a}J)^\Delta$, et $\mathscr{A}/(\mathfrak{a}J)^\Delta$ est un quotient de $\mathscr{A}/\mathscr{A}\mathscr{J}$. Par suite, $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}J$ est un A-module de type fini, et $\mathfrak{a}$ est un A-module de type fini, en vertu de 1.8.6. Montrons enfin que (iii) entraîne (i). Il résulte de 2.1.8 et 1.8.11 que, pour tout $f \in A$,

$$\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathfrak{a}^\Delta) = \mathfrak{a}_{\{f\}} = \mathfrak{a}A_{\{f\}} = \mathfrak{a}\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{O}_\mathfrak{X}).$$

Comme $\mathfrak{a}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est associé au préfaisceau $U \mapsto \mathfrak{a}\Gamma(U, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$, la relation $\mathscr{A} = \mathfrak{a}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ et la condition (i) en résultent, puisque les $\mathscr{D}(f)$ forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.

2.1.14. Soit $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine. On dit qu'une famille $(\mathscr{J}_\lambda)$ d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$ est un *système fondamental d'idéaux de définition* si tout idéal de définition de $\mathfrak{X}$ contient un des $\mathscr{J}_\lambda$; comme $\mathscr{J}_\lambda = J_\lambda^\Delta$, il revient au même de dire que les J_λ forment un système fondamental de voisinages de 0 dans A.

Soit (f_α) une famille d'éléments de A tels que les $\mathscr{D}(f_\alpha)$ recouvrent $\mathfrak{X}$. Si $(\mathscr{J}_\lambda)$ est une famille filtrante décroissante d'idéaux de $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ telle que pour tout α, la famille $(\mathscr{J}_\lambda|\mathscr{D}(f_\alpha))$ soit un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathscr{D}(f_\alpha)$, alors $(\mathscr{J}_\lambda)$ est un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$. En effet, pour tout idéal de définition $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$, il y a un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des $\mathscr{D}(f_i)$ tel que, pour tout i, $\mathscr{J}_{\lambda_i}|\mathscr{D}(f_i)$ soit un idéal de définition de $\mathscr{D}(f_i)$ contenu dans $\mathscr{J}|\mathscr{D}(f_i)$. Si μ est un indice tel que $\mathscr{J}_\mu \subset \mathscr{J}_{\lambda_i}$ pour tout i, il résulte de 2.1.9 que $\mathscr{J}_\mu$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$, contenu évidemment dans $\mathscr{J}$, d'où notre assertion.

2.1.15. Etant donné un espace topologiquement annelé $\mathfrak{X}$, on dit qu'un ouvert $U \subset \mathfrak{X}$ est un *ouvert formel affine* (resp. un *ouvert formel affine préadique*, resp. un *ouvert formel affine adique*, resp. un *ouvert formel affine noethérien*) si l'espace topologiquement annelé induit par $\mathfrak{X}$ sur U est un schéma formel affine (resp. un schéma formel affine préadique, resp. un schéma formel affine adique, resp. un schéma formel affine noethérien) (2.1.7).

Définition 2.1.16. On appelle *schéma formel* un espace topologiquement annelé $\mathfrak{X}$ dont tout point admet un voisinage ouvert formel affine. On dit que le schéma formel $\mathfrak{X}$ est *préadique* (resp. *localement noethérien*) si tout point de $\mathfrak{X}$ admet un voisinage ouvert formel affine préadique (resp. noethérien). On dit que $\mathfrak{X}$ est *noethérien* s'il est localement noethérien et si son espace sous-jacent est quasi-compact (donc noethérien).

On peut faire les remarques suivantes :

2.1.16.1. Nous nous écartons ici de la terminologie de Grothendieck. Notre notion de schéma formel préadique correspond à sa notion de schéma formel adique ; notre notion de *schéma formel adique* sera définie dans (2.1.24).

2.1.16.2. Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel (resp. localement noethérien), les ensembles ouverts formels affines (resp. affines noethériens) forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$ ([28] 10.4.3).

2.1.16.3. Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel (resp. un schéma formel localement noethérien, resp. noethérien), l'espace topologiquement annelé induit sur tout ouvert de $\mathfrak{X}$ est encore un schéma formel (resp. un schéma formel localement noethérien, resp. noethérien) ([28] 10.4.4).

2.1.16.4. La notion de schéma formel préadique présente plusieurs inconvénients :

(a) Elle n'est pas stable par restriction à un ouvert.
(b) Un schéma formel affine qui est préadique en tant que schéma formel, n'est pas en général un schéma formel affine préadique dans le sens de (2.1.7).
(c) Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel préadique, les ensembles ouverts formels affines préadiques ne forment pas en général une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.

En effet, si A est un anneau préadique, séparé et complet, et $f \in A$, $A_{\{f\}}$ n'est pas en général préadique. C'est pourquoi nous sommes obligés de renforcer cette notion (2.1.24).

Définition 2.1.17. Étant donnés deux schémas formels $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$, on appelle morphisme (de schémas formels) de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{Y}$ tout morphisme (ψ, θ) d'espaces topologiquement annelés tel que, pour tout $x \in \mathfrak{X}$, $\theta_x^\sharp$ soit un homomorphisme local $\mathscr{O}_{\psi(x)} \to \mathscr{O}_x$.

Il est immédiat que le composé de deux morphismes de schémas formels est encore un tel morphisme ; les schémas formels forment une catégorie.

Proposition 2.1.18 ([28] 10.4.6). *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine. Il existe une correspondance biunivoque canonique entre les morphismes du schéma formel $\mathfrak{X}$ dans le schéma formel $\mathfrak{Y}$ et les homomorphismes continus de l'anneau A dans l'anneau topologique $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$.*

2.1.19. Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel. On dit qu'un idéal $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un *idéal ouvert* (resp. un *idéal de définition*) de $\mathfrak{X}$ si tout $x \in \mathfrak{X}$ possède un voisinage ouvert formel affine U tel que $\mathscr{J}|U$ soit un idéal ouvert (resp. un idéal de définition) du schéma formel affine induit par $\mathfrak{X}$ sur U (2.1.9). Lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine, cette définition coïncide avec celle donnée dans (2.1.9). En vertu de (2.1.8.1), pour tout ouvert $V \subset \mathfrak{X}$, $\mathscr{J}|V$ est un idéal ouvert (resp. un idéal de définition) du schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur V.

On dit qu'une famille $(\mathscr{J}_\lambda)$ d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$ est un *système fondamental d'idéaux de définition* si elle est filtrante décroissante et s'il existe un recouvrement (U_α) de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines de $\mathfrak{X}$ tel que, pour tout α, la famille $(\mathscr{J}_\lambda|U_\alpha)$ soit un système fondamental d'idéaux de définition du schéma formel affine induit par $\mathfrak{X}$ sur U_α. Il résulte de la remarque finale de (2.1.14) que lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine, cette définition coïncide avec celle donnée dans (2.1.14). Pour tout ouvert $V \subset \mathfrak{X}$, les restrictions $\mathscr{J}_\lambda|V$ forment un système fondamental d'idéaux de définition du schéma formel induit sur V, en vertu de (2.1.8.1).

2.1.20. Tout schéma (usuel) X peut être considéré comme un schéma formel, d'une seule manière ([28] 10.1.2) ; c'est un schéma formel préadique ; pour qu'un idéal $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$ soit un idéal de définition de X, il faut et il suffit qu'il soit quasi-cohérent et localement nilpotent ([28] 0.7.1.4). Le foncteur ainsi défini de la catégorie des schémas usuels dans celle des schémas formels est *pleinement fidèle* (2.1.17).

2.1.21. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Alors l'espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ est un schéma (usuel), qui est affine (resp. localement noethérien, resp. noethérien) lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine (resp. un schéma formel localement noethérien, resp. noethérien) ; en outre, si $\theta\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}$ est l'homomorphisme canonique, $u = (1_{\mathfrak{X}}, \theta)$ est un *morphisme* (dit *canonique*) de schémas formels $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$; on est aussitôt ramené au cas affine, et alors les propositions ont déjà été démontrées dans (2.1.8).

2.1.22. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $(\mathscr{J}_\lambda)$ un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$. Alors le faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda$ ([28] 0.3.8.1 et 10.5.3). Pour tout λ, soit f_λ le morphisme canonique $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda) \to \mathfrak{X}$; pour $\mathscr{J}_\mu \subset \mathscr{J}_\lambda$, l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\mu \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda$ définit un morphisme canonique

$$f_{\mu\lambda}\colon (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\lambda) \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}_\mu)$$

de schémas (usuels) tel que l'on ait $f_\lambda = f_\mu \circ f_{\mu\lambda}$. Les schémas $\mathfrak{X}_\lambda = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J}_\lambda)$ et les morphismes $f_{\mu\lambda}$ constituent donc un système inductif dans la catégorie des schémas formels.

Proposition 2.1.23 ([28] 10.6.2). *Sous les hypothèses de* (2.1.22)*, le schéma formel* $\mathfrak{X}$ *et les morphismes* f_λ *constituent une limite inductive du système* $(\mathfrak{X}_\lambda, f_\lambda)$ *dans la catégorie des schémas formels.*

Définition 2.1.24. On dit qu'un schéma formel préadique est *adique* s'il admet un idéal de définition de type fini.

Cette notion de schéma formel adique est plus forte que celle de Grothendieck ; elle correspond à la notion considérée dans ([28] 10.11.1) comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.1.25. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel préadique,* $\mathscr{J}$ *un idéal de définition de* $\mathfrak{X}$*. Pour que* $\mathscr{J}$ *soit de type fini, il faut et il suffit que* $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ *soit un* $(\mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J})$*-module de type fini.*

En effet, la question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine préadique (2.1.7), et la proposition résulte alors de 2.1.10 et 2.1.11.

Proposition 2.1.26. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel adique,* $\mathscr{J}$ *un idéal de définition de type fini de* $\mathfrak{X}$*,* $\mathscr{A}$ *un idéal ouvert de* $\mathfrak{X}$*. Pour que* $\mathscr{A}$ *soit de type fini, il faut et il suffit que* $\mathscr{A}/\mathscr{J}\mathscr{A}$ *soit un* $(\mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J})$*-module de type fini.*

En effet, la question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est un schéma formel affine préadique (2.1.7), et la proposition résulte alors de 2.1.10, 2.1.11 et 2.1.13.

Proposition 2.1.27. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel adique,* $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ *deux idéaux ouverts de type fini de* $\mathfrak{X}$*. Alors* $\mathscr{A}\mathscr{B}$ *est un idéal ouvert de type fini de* $\mathfrak{X}$*.*

En effet, la question étant locale, on peut supposer $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ un schéma formel affine préadique, $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^\Delta$ et $\mathscr{B} = \mathfrak{b}^\Delta$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux ouverts de A (2.1.10). Il résulte de 2.1.11 que A est un anneau adique. Donc en vertu de 2.1.13, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des A-modules de type fini, $\mathscr{A} = \mathfrak{a}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ et $\mathscr{B} = \mathfrak{b}\mathscr{O}_\mathfrak{X}$. Par suite on a $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathscr{O}_\mathfrak{X} = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\Delta$, d'où la proposition.

Proposition 2.1.28 ([28] 10.5.4). *Si* $\mathfrak{X}$ *est un schéma formel localement noethérien, alors* $\mathfrak{X}$ *est adique ; tout idéal de définition de* $\mathfrak{X}$ *est de type fini ; et il existe un plus grand idéal de définition de* $\mathfrak{X}$*.*

Proposition 2.1.29. *Si* $\mathfrak{X}$ *est un schéma formel adique, l'espace topologiquement annelé induit sur tout ouvert de* $\mathfrak{X}$ *est encore un schéma formel adique.*

Le seul point à démontrer est que l'espace topologiquement annelé induit sur un ouvert de $\mathfrak{X}$ est un schéma formel *préadique*. Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, U un ouvert formel affine préadique de $\mathfrak{X}$. Alors $\mathscr{J}|U$ est de la forme J^Δ, où J est un idéal de définition de type fini de $A = \Gamma(U, \mathscr{O}_\mathfrak{X})$ (2.1.10 et

2.1.11). Donc pour tout $f \in A$, $A_{\{f\}}$ est un anneau adique, en vertu de 1.8.11, ce qui implique notre assertion.

Proposition 2.1.30. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. Alors, les puissances $\mathscr{J}^n$ forment un système fondamental d'idéaux de définition de type fini de $\mathfrak{X}$.*

En effet, la question étant locale, on peut se borner au cas d'un schéma formel affine préadique, auquel cas la proposition résulte de 2.1.10 et 2.1.11.

Proposition 2.1.31. *Soit A un anneau admissible. Pour que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ soit adique, il faut et il suffit que A soit adique* (1.8.4).

Si A est adique, $\mathfrak{X}$ est adique en vertu de 2.1.11. Inversement, supposons $\mathfrak{X}$ adique et montrons que A est adique. Compte tenu de 2.1.10 et 2.1.11, il suffit de montrer que A est préadique. Soit $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. D'après 2.1.30, les puissances $\mathscr{J}^n$ forment un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$. Pour tout entier $n \geq 1$, $\mathscr{J}^n$ est de la forme J_n^{Δ}, où les J_n forment un système fondamental d'idéaux de définition de A (2.1.14). Posons $A_i = A/J_{i+1}$ ($i \geq 0$). Soient $u_{ij} \colon A_j \to A_i$ l'homomorphisme canonique, $J_{ij} = \ker(u_{ij}) = J_{i+1}/J_{j+1}$ pour $i \leq j$. Comme $\widetilde{J}_{ij} = \mathscr{J}^{i+1}/\mathscr{J}^{j+1}$ (2.1.8), on a $J_{ij} = J_{0j}^{i+1}$. D'autre part, J_{01} est un module de type fini sur $A_0 = A_1/J_{01}$. On peut donc appliquer ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1), qui montre que A est un anneau préadique.

Corollaire 2.1.32 ([28] 10.6.5). *Soit A un anneau admissible. Pour que $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ soit noethérien, il faut et il suffit que A soit adique et noethérien.*

La condition est évidemment suffisante. Inversement, supposons $\mathfrak{X}$ noethérien. Comme $\mathfrak{X}$ est adique (2.1.28), A est adique, en vertu de 2.1.31. Soit J un idéal de définition de type fini de A. Le schéma (usuel) $\mathrm{Spec}(A/J)$ est noethérien (2.1.21). Par suite, A/J est noethérien, et donc A est noethérien ([12] chap. III §2.11 cor. 2 de prop. 14).

Corollaire 2.1.33. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel adique, les ensembles ouverts formels affines adiques forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.*

Cela résulte de 2.1.29 et 2.1.31.

Remarque 2.1.34. La proposition 2.1.31 (resp. 2.1.32) équivaut à dire qu'un schéma formel affine est adique (resp. noethérien) en tant que schéma formel si et seulement s'il est un schéma formel affine adique (resp. noethérien) dans le sens de (2.1.7).

2.1.35. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. En vertu de 2.1.30, les puissances $\mathscr{J}^n$ forment un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$; on désigne par $\mathfrak{X}_n$ le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. Il résulte alors de 2.1.23 que le schéma formel $\mathfrak{X}$ est limite inductive du système $(\mathfrak{X}_n)$. Inversement, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.36 ([28] 10.6.4). *Soient $\mathfrak{X}$ un espace topologique, $(\mathscr{O}_i, u_{ij})$ un système projectif de faisceaux d'anneaux sur $\mathfrak{X}$, ayant $\mathbb{N}$ pour ensemble d'indices. Pour $i \leq j$, soit $\mathscr{J}_{ij}$ le noyau de l'homomorphisme $u_{ij}\colon \mathscr{O}_j \to \mathscr{O}_i$. On suppose que :*

(i) *L'espace annelé $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_i)$ est un schéma $\mathfrak{X}_i$.*
(ii) *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, u_{ii} est l'application identique de $\mathscr{O}_i$, et pour $i \leq j$, les u_{ij} sont surjectifs.*
(iii) *Pour $i \leq j$, $\mathscr{J}_{ij} = \mathscr{J}_{0j}^{i+1}$; en particulier, $\mathscr{J}_{01}^2 = 0$.*
(iv) *Le module $\mathscr{J}_{01}$ est de type fini sur $\mathscr{O}_0 = \mathscr{O}_1/\mathscr{J}_{01}$.*

Soit $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ le faisceau d'anneaux topologiques limite projective des faisceaux d'anneaux pseudo-discrets $\mathscr{O}_i$, et soit $u_i\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}_i$ l'homomorphisme canonique. Alors :

(a) *L'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un schéma formel adique.*
(b) *Les homomorphismes u_i sont surjectifs ; leurs noyaux $\mathscr{J}^{(i)}$ forment un système fondamental d'idéaux de définition de $\mathfrak{X}$, et $\mathscr{J}^{(0)}$ est la limite projective des faisceaux d'idéaux $\mathscr{J}_{0i}$.*
(c) *L'idéal $\mathscr{J} = \mathscr{J}^{(0)}$ est de type fini ; on a $\mathscr{J}^{(n)} = \mathscr{J}^{n+1}$, et $\mathscr{J}/\mathscr{J}^2$ est isomorphe à $\mathscr{J}_{01}$.*
(d) *Si en outre $\mathfrak{X}_0$ est localement noethérien (resp. noethérien), $\mathfrak{X}$ est localement noethérien (resp. noethérien).*

Pour $i \leq j$, sur chaque fibre, u_{ji} est un homomorphisme surjectif ; donc $v_{ij} = (\mathrm{id}_{\mathfrak{X}}, u_{ji})$ est un morphisme de schémas $\mathfrak{X}_i \to \mathfrak{X}_j$. Il résulte de ([28] 10.6.3) que $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un schéma formel vérifiant (b). Pour démontrer les autres propositions, on reprend la preuve de ([28] 10.6.4). Montrons d'abord que $\mathfrak{X}$ est préadique. Comme les espaces sous-jacents à $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}_0$ sont les mêmes, on peut supposer que chaque $\mathfrak{X}_i$ est un schéma affine d'anneau A_i ([28] 2.3.5). Pour $i \leq j$, il existe un homomorphisme d'anneaux $\varphi_{ij}\colon A_j \to A_i$ tel que $u_{ij} = \widetilde{\varphi}_{ij}$. On voit facilement (comme dans la preuve de 2.1.31) que le système projectif (A_i, φ_{ij}) vérifie les conditions de ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1). Il en résulte que $A = \varprojlim A_i$ est un anneau préadique séparé et complet ; les homomorphismes canoniques $\varphi_i\colon A \to A_i$ sont surjectifs ; le noyau J de φ_0 est un idéal de définition de A ; J^{i+1} est le noyau de φ_i pour tout $i \geq 0$; en particulier, J/J^2 est un (A/J)-module de type fini, et J est un A-module de type fini (1.8.5). Par suite, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est un schéma formel affine adique, $\mathscr{J} = J^{\Delta}$ et $\mathscr{J}^{(n)} = (J^{n+1})^{\Delta} = \mathscr{J}^{n+1}$ (2.1.11). Dans le cas général, on en déduit aussitôt que $\mathfrak{X}$ est préadique et la proposition (c) ; donc $\mathfrak{X}$ est adique. La proposition (d) résulte de ([12] chap. III §2.11 cor. 2 de prop. 14).

Corollaire 2.1.37. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. Pour que $\mathfrak{X}$ soit un schéma formel affine, il faut et il suffit que le schéma usuel $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ soit affine.*

En effet, si $\mathfrak{X}$ est formel affine, $\mathfrak{X}_0$ est évidemment affine. Inversement, si $\mathfrak{X}_0$ est affine, le schéma $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ est affine pour tout $n \geq 0$ ([28] 2.3.5), et il résulte de la preuve de 2.1.36 que $\mathfrak{X}$ est formel affine.

2.1.38. Avec les notations de 2.1.36, soit $\mathscr{F}_i$ un $\mathscr{O}_i$-module, et supposons donnés, pour tout $i \leq j$, un u_{ij}-morphisme $\theta_{ij} \colon \mathscr{F}_j \to \mathscr{F}_i$, de sorte que $\theta_{ki} \circ \theta_{ij} = \theta_{kj}$ pour $k \leq i \leq j$. Soit $\mathscr{F}$ la limite projective du système projectif $(\mathscr{F}_i)$ de faisceaux de groupes abéliens. On peut munir $\mathscr{F}$ d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module par passage à la limite. On dira que $\mathscr{F}$ est la *limite projective* du système de $\mathscr{O}_i$-modules $(\mathscr{F}_i)$.

2.2 Morphismes déployés et morphismes adiques

2.2.1. Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ deux schémas formels adiques, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$), $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$. On a pour tout entier $n > 0$, $f^*(\mathscr{K}^n)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}^n$. En vertu de ([28] 10.5.6), f détermine un morphisme de schémas usuels $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ en posant $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$. Il résulte aussitôt des définitions que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_m \arrow[r, "f_m"] \arrow[d] & \mathfrak{Y}_m \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_n \arrow[r, "f_n"] & \mathfrak{Y}_n \end{tikzcd} \tag{2.2.1.1}$$

est commutatif pour $m \leq n$; autrement dit (f_n) est un système inductif de morphismes.

Proposition 2.2.2. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ deux schémas formels adiques, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$). L'application $f \mapsto (f_n)$ définie dans* (2.2.1) *est une bijection de l'ensemble des morphismes $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, sur l'ensemble des suites (f_n) de morphismes $\mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ rendant commutatifs les diagrammes* (2.2.1.1)*.*

Il suffit de reprendre la preuve de ([28] 10.6.9) en la précisant. Toute suite (f_n) de morphismes rendant commutatifs les diagrammes (2.2.1.1) admet une limite $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, qui est l'unique morphisme de schémas formels rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d] & \mathfrak{Y}_n \arrow[d] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{2.2.2.1}$$

Il faut montrer que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$. La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines adiques (2.1.29 et 2.1.31), $\mathscr{J} = J^\Delta$, $\mathscr{K} = K^\Delta$, où J (resp. K) est un idéal de définition de type fini de A (resp. B) (2.1.10 et 2.1.11). On a alors $\mathfrak{X}_n = \mathrm{Spec}(A_n)$ et $\mathfrak{Y}_n = \mathrm{Spec}(B_n)$, où $A_n = A/J^{n+1}$ et $B_n = B/K^{n+1}$ (2.1.11). Les morphismes f_n sont associés à des homomorphismes $\varphi_n \colon B_n \to A_n$ qui forment un système projectif ; donc f est associé à l'homomorphisme $\varphi = \varprojlim \varphi_n$. La commutativité de (2.2.1.1) pour $m = 0$ implique que $\varphi_n(K/K^{n+1}) \subset J/J^{n+1}$ pour tout n. Donc en passant à la limite projective, on a $\varphi(K) \subset J$, et cela entraîne que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, en vertu de ([28] 10.5.6(ii)). On voit facilement que l'application $f \mapsto (f_n)$ définie dans (2.2.1), et l'application $(f_n) \mapsto f$ définie ci-dessus, sont inverses l'une de l'autre ([28] 10.5.6(i)).

Définition 2.2.3. Soit $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels adiques. On dit que f est *déployé* s'il existe des idéaux de définition de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ et $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$.

Proposition 2.2.4. *Tout morphisme de schémas formels affines adiques est déployé.*

En effet, soient A est un anneau adique, B une A-algèbre topologique qui est un anneau adique (mais pas forcement une A-algèbre adique), J (resp. K) un idéal de définition de type fini de A (resp. B). Comme la topologie de B est moins fine que la topologie déduite de celle de A, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $J^nB \subset K$, et la proposition résulte de 2.1.11 et ([28] 10.5.6(ii)).

Proposition 2.2.5. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement noethérien, $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{J}$ le plus grand idéal de définition de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de $\mathfrak{Y}$. Alors $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$.*

On peut clairement se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines, $\mathscr{J} = J^{\Delta}$, $\mathscr{K} = K^{\Delta}$, où A est adique et noethérien, B est admissible, J est le plus grand idéal de définition de A, et K est un idéal de définition de B. Alors f est défini par un homomorphisme continu $\varphi: B \to A$. Comme les éléments de K sont topologiquement nilpotents ([28] 0.7.1.4), il en est de même de ceux de $\varphi(K)$, donc $\varphi(K) \subset J$ puisque J est l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents de A ([28] 0.7.1.6), d'où la conclusion en vertu de ([28] 10.5.6(ii)).

Proposition 2.2.6. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels préadiques. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$.*
(ii) *Il existe un idéal de définition de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$ et que les diagrammes* (2.2.1.1) *soient cartésiens.*
(iii) *Il existe un idéal de définition de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$ et que le diagramme* (2.2.1.1) *pour $n = 1$ et $m = 0$ soit cartésien.*

De plus, quand ces conditions sont vérifiées, on a $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$.

D'abord (i) implique (ii) en prenant $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. En effet, on a

$$f^{-1}(\mathscr{K}^{n+1})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{J}^{n+1}$$

pour tout $n \geq 0$; donc

$$\mathscr{J}^{m+1}/\mathscr{J}^{n+1} = f^{-1}(\mathscr{K}^{m+1}/\mathscr{K}^{n+1})(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$$

pour $m \leq n$, et cela entraîne que les diagrammes (2.2.1.1) sont cartésiens. Ensuite (ii) implique évidemment (iii). Montrons enfin que (iii) entraîne que $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, et par suite (i). La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines adiques (2.1.29 et 2.1.31), $\mathscr{J} = J^\Delta$, $\mathscr{K} = K^\Delta$, J (resp. K) est un idéal de définition de type fini de A (resp. B) (2.1.10 et 2.1.11), et f est associé à un homomorphisme continu $\varphi\colon B \to A$. En vertu de ([28] 10.5.6(ii)), on a $\varphi(K) \subset J$. La condition (iii) entraîne que $J = J^2 + KA$; donc $J = KA$ par le lemme de Nakayama car J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3). On en déduit que $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ puisque $\mathscr{K} = K\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ et $\mathscr{J} = J\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (2.1.11).

Définition 2.2.7. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *adique* si $\mathfrak{X}$ est adique et s'il existe un idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. On dit alors aussi que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *adique*, ou *adique* sur $\mathfrak{Y}$.

On peut faire les remarques suivantes :

2.2.7.1. Il revient au même de demander que $\mathfrak{X}$ soit préadique (au lieu d'être adique).

2.2.7.2. Il résulte de 2.1.29 que si f est adique, pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ et tout ouvert V de $\mathfrak{Y}$ tels que $f(U) \subset V$, la restriction $U \to V$ de f est un morphisme adique.

Proposition 2.2.8. *Soient B un anneau adique, A un anneau préadique complet et séparé, $\varphi\colon B \to A$ un homomorphisme continu, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ le morphisme correspondant à φ.*

(i) *Pour que φ soit adique* (1.8.4.5), *il faut et il suffit que f soit adique.*

(ii) *Si f est adique, pour tout idéal de définition de type fini K de B, on a $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (KA)^\Delta$.*

(i) Supposons f adique. Il existe alors un idéal de définition de type fini K de B tel que $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. En vertu de 2.1.10 et 2.1.11, $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = J^\Delta$, où J est un idéal de définition de type fini de A. On a $KA \subset J$ d'après ([28] 10.5.6(ii)) et il résulte de la preuve de 2.2.6 que $J = KA$; donc φ est adique. Inversement, supposons φ adique, et soit K un idéal de définition de type fini de B. On a $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset (KA)^\Delta$ d'après ([28] 10.5.6(ii)). D'autre part, les diagrammes (2.2.1.1) en prenant $\mathscr{J} = (KA)^\Delta$ et $\mathscr{K} = K^\Delta$ sont clairement cartésiens ; donc $f^*(K^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (KA)^\Delta$ en vertu de 2.2.6, et f est adique.

(ii) Cela résulte de la preuve (i).

Proposition 2.2.9. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Alors $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, et le diagramme de morphismes de schémas* *formels*

$$\begin{tikzcd}(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}) \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}) \arrow[d] \\ (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \arrow[r, "f"] & (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})\end{tikzcd}$$

déduit de f est cartésien.

Les questions étant locales, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines adiques, et f est associé à un homomorphisme adique $\varphi\colon B \to A$ (2.2.8). Si K est un idéal de définition de type fini de B, KA est un idéal de définition de A, et on a $f^*(K^{\Delta})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (KA)^{\Delta}$ en vertu de (2.2.8), d'où la conclusion.

Corollaire 2.2.10. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un morphisme adique.*

(ii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert V de $f(x)$ et un voisinage ouvert U de x tels que $f(U) \subset V$ et que la restriction $U \to V$ de f soit un morphisme adique.*

Il est clair que (i) entraîne (ii). Montrons l'implication inverse. Il résulte de l'hypothèse que $\mathfrak{X}$ est préadique. D'autre part, si $\mathscr{K}$ est un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, alors $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$; en effet, la question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, l'assertion résulte de 2.2.9.

Corollaire 2.2.11. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de schémas formels adiques.*

(i) *Si f et g sont adiques, il en est de même de $g \circ f$.*

(ii) *Si g et $g \circ f$ sont adiques, il en est de même de f.*

Proposition 2.2.12. *Soient X un schéma, $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon X \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels* (2.1.20). *Alors f est adique.*

En effet, la question étant locale (2.2.10), on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont affines, de sorte que f provient d'un homomorphisme continu d'anneaux $\varphi\colon B \to A$. Comme la topologie discrète de A est moins finie que la topologie déduite de celle de B (1.8.1), elles sont égales, d'où l'assertion.

2.2.13. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel adique, $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$; posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$. On dira qu'un système inductif (X_n) de $\mathscr{S}_n$-schémas (usuels) est un $(\mathscr{S}_n)$-*système inductif adique* si les morphismes structuraux $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ sont tels que, pour $m \leq n$, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r, "f_m"] \arrow[d] & \mathscr{S}_m \arrow[d] \\ X_n \arrow[r, "f_n"] & \mathscr{S}_n \end{tikzcd} \tag{2.2.13.1}$$

soient des carrés cartésiens ([28] 10.12.2). Les systèmes inductifs adiques forment une catégorie : il suffit de définir un morphisme $(X_n) \to (Y_n)$ de tels systèmes comme un système inductif de $\mathscr{S}_n$-morphismes $u_n\colon X_n \to Y_n$ tel que u_m s'identifie à $u_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathrm{id}_{\mathscr{S}_m}$ pour $m \leq n$.

Proposition 2.2.14. *Sous les hypothèses de* (2.2.13)*, il y a équivalence canonique entre la catégorie des $\mathscr{S}$-schémas adiques et la catégorie des $(\mathscr{S}_n)$-systèmes inductifs adiques.*

L'équivalence en question s'obtient de la façon suivante : si $\mathfrak{X}$ est un $\mathscr{S}$-schéma adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ le morphisme structural, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et on fait correspondre à $\mathfrak{X}$ le système inductif des $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, le morphisme structural $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$ correspondant à f (2.2.1). En vertu de 2.2.6, $(\mathfrak{X}_n)$ est un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique. Il est immédiat de vérifier qu'à un $\mathscr{S}$-morphisme $u\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ de $\mathscr{S}$-schémas adiques correspond un morphisme $(\mathfrak{X}_n) \to (\mathfrak{Y}_n)$ de $(\mathscr{S}_n)$-systèmes inductifs adiques, et inversement. Il reste à prouver qu'on a défini ainsi une équivalence. Soit (X_n) un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique. Puisque le système inductif $(\mathscr{S}_n)$ vérifie les conditions de 2.1.36, il en est de même de (X_n). Par suite, il existe un schéma formel adique $\mathfrak{X}$ ayant un idéal de définition de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tels que $X_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. La suite (f_n) de morphismes structuraux $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ définit un morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ vérifiant $f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, en vertu de 2.2.2. Enfin, f est adique compte tenu de 2.2.6 et de l'hypothèse.

2.2.15. Soient $\mathfrak{X}, \mathscr{S}, \mathscr{S}'$ des schémas formels adiques, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme adique, $g\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ un morphisme déployé (2.2.3). Soient $\mathscr{I}$ (resp. $\mathscr{I}'$) un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}'$) tels que $g^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathscr{S}'} \subset \mathscr{I}'$; donc $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$, $\mathscr{S}'_n = (\mathscr{S}', \mathscr{O}_{\mathscr{S}'}/\mathscr{I}'^{n+1})$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et soient $g_n\colon \mathscr{S}'_n \to \mathscr{S}_n$ (resp. $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$) le morphisme correspondant à g (resp. f) (2.2.1). Il résulte alors de ([28] 10.7.4) que $\mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ est la limite inductive des schémas usuels $\mathscr{S}'_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathfrak{X}_n$. Comme $(\mathfrak{X}_n)$ est un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique, $(\mathscr{S}'_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathfrak{X}_n)$ est un $(\mathscr{S}'_n)$-système inductif adique. Donc en vertu de 2.2.14, $\mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ est un $\mathscr{S}'$-schéma formel adique, et il correspond au $(\mathscr{S}'_n)$-système inductif adique $(\mathscr{S}'_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathfrak{X}_n)$.

Proposition 2.2.16. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, $g\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ deux morphismes de schémas formels adiques. Si f est adique, il en est de même du morphisme $\mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathscr{S}'$.*

En effet, la question étant locale sur $\mathscr{S}$ et sur $\mathscr{S}'$ (2.2.10), on peut se borner au cas où g est déployé (2.2.4), auquel cas la conclusion résulte de 2.2.15.

2.3 Conditions de finitude relatives

Définition 2.3.1 ([28] 10.15.1). Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On appelle morphisme diagonal $\Delta_f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$ (noté aussi $\Delta_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$) le morphisme $(1_{\mathfrak{X}}, 1_{\mathfrak{X}})_{\mathfrak{Y}}$.

On dit que f est *séparé* si l'image par Δ_f de l'espace sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est une partie fermée de l'espace sous-jacent à $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$; on dit alors que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *séparé*, ou *séparé* sur $\mathfrak{Y}$.

On dit que f est *quasi-séparé* si Δ_f est quasi-compact ; on dit alors que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *quasi-séparé*, ou *quasi-séparé* sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.3.2. *Soient $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ deux schémas formels, limites inductives de suites de schémas usuels $(X_n), (Y_n)$. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels limite inductive d'une suite de morphismes $f_n\colon X_n \to Y_n$ de schémas usuels. Pour que f soit séparé (resp. quasi-séparé), il faut et il suffit que le morphisme f_0 le soit.*

En effet, Δ_f est alors limite inductive de la suite de morphismes Δ_{f_n} ([28] 10.7.4), et le morphisme d'espaces topologiques sous-jacent est identique à Δ_{f_0}, d'où la conclusion.

Proposition 2.3.3. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels (resp. morphismes de schémas formels) considérés sont limites inductives de suites de schémas usuels (resp. de morphismes de schémas usuels).*

(i) *Le composé de deux morphismes séparés (resp. quasi-séparés) est séparé (resp. quasi-séparé).*

(ii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes. Si f est séparé (resp. quasi-séparé), il en est de même du morphisme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$.*

(iii) *Si le composé $g \circ f$ de deux morphismes est séparé (resp. quasi-séparé), f est séparé (resp. quasi-séparé).*

On sous-entend dans cet énoncé que si un même schéma formel $\mathfrak{Z}$ intervient plusieurs fois dans une même proposition, on le considère comme limite inductive de la même suite (Z_n) de schémas usuels partout où il figure.

Les assertions de 2.3.3 sont conséquences immédiates de 2.3.2 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([28] 5.3.1 et 6.1.9).

Définition 2.3.4. On dit qu'un morphisme de schémas formels $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est *affine* (ou que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *affine*, ou *affine* sur $\mathfrak{Y}$) si $\mathfrak{Y}$ est réunion d'ouverts formels affines V_α tels que, pour tout α, le schéma formel induit sur l'ouvert $f^{-1}(V_\alpha)$ de $\mathfrak{X}$ soit un schéma formel affine.

Si $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}$ sont des schémas formels affines, tout morphisme $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est donc affine. Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme affine de schémas formels, alors, pour tout ouvert $U \subset \mathfrak{Y}$, le morphisme $f^{-1}(U) \to U$, restriction de f, est affine.

Proposition 2.3.5. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme déployé de schémas formels adiques, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ le morphisme de schémas usuels déduit de f. Pour que f soit affine, il faut et il suffit que f_0 soit affine.*

Comme les ouverts formels affines de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) sont exactement les ouverts affines de $\mathfrak{X}_0$ (resp. $\mathfrak{Y}_0$) (2.1.37), la proposition résulte des définitions.

Corollaire 2.3.6. *Sous les hypothèses de* (2.3.5)*, si f est un morphisme affine, il est séparé.*

Corollaire 2.3.7. *Sous les hypothèses de* (2.3.5)*, si f est un morphisme affine, alors, pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{Y}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}$.*

Cela résulte de 2.3.5 et 2.1.37.

Proposition 2.3.8. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels considérés sont adiques.*

(i) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes tels que f soit affine et déployé et que g soit affine. Alors $g \circ f$ est affine.*

(ii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes. Si f est affine, il en est de même du morphisme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$.*

(iii) *Soint $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes, $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$, resp. $\mathscr{L}$) un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$, resp. $\mathfrak{Z}$) tels que $g^*(\mathscr{L})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \subset \mathscr{K}$ et $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{Z}} \subset \mathscr{J}$. Si $g \circ f$ est affine et g est séparé, alors f est affine.*

(i) Cela résulte immédiatement de 2.3.7 et des définitions.

(ii) On peut clairement supposer $\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}$ et $\mathfrak{Y}'$ formels affines, auquel cas $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ est affine.

(iii) Cela résulte de 2.3.2, 2.3.5 et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([28] 9.1.16).

2.3.9. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel adique, $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$; posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$. On dira qu'un système projectif de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes $(\mathscr{A}_n)$ est *adique* si $\mathscr{A}_n \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}} \mathscr{O}_{\mathscr{S}_m} = \mathscr{A}_m$ pour $m \leq n$, les morphismes de transition étant les morphismes canoniques (2.1.38). Les systèmes projectifs adiques de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes forment une catégorie : il suffit de définir un morphisme $(\mathscr{A}_n) \to (\mathscr{B}_n)$ de tels systèmes comme un système projectif d'homomorphismes de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres $\alpha_n\colon \mathscr{A}_n \to \mathscr{B}_n$.

Soient $(\mathscr{A}_n)$ un système projectif adique de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes, $X_n = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}_n)$, $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ le morphisme structural ([28] 9.1.8). En vertu de 2.1.36, il existe un schéma formel adique $\mathfrak{X}$ ayant un idéal de définition de type fini $\mathscr{J}$ tels que $X_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. La suite (f_n) de morphismes structuraux $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ a pour limite un morphisme affine adique $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, en vertu de

2.2.14 et 2.3.5. Si $\mathscr{A}$ est le faisceau d'anneaux topologiques limite projective de la suite d'anneaux topologiques pseudo-discrets $(\mathscr{A}_n)$, on appelle encore *spectre formel* de $\mathscr{A}$ le $\mathscr{S}$-schéma formel $\mathfrak{X}$, et on le note $\mathrm{Spf}(\mathscr{A})$.

Proposition 2.3.10. *Sous les hypothèses de* (2.3.9)*, il y a équivalence canonique entre la catégorie des $\mathscr{S}$-schémas affines adiques et la catégorie opposée à celle des systèmes projectifs adiques de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes.*

L'équivalence en question s'obtient de la façon suivante : si $\mathfrak{X}$ est un $\mathscr{S}$-schéma affine adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ le morphisme structural, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal de définition de $\mathfrak{X}$ et on fait correspondre à $\mathfrak{X}$ le système projectif des $\mathscr{A}_n = f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. En vertu de 2.2.6, 2.3.5 et ([28] 9.3.2), $(\mathscr{A}_n)$ est un système projectif adique de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes, et a évidemment pour limite projective le faisceau d'anneaux topologiques $\mathscr{A} = f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$. Il résulte de 2.2.14, 2.3.5 et ([28] 9.1.4) qu'on a défini ainsi une équivalence.

Définition 2.3.11. Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel adique, $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$, d un entier ≥ 1, $T_1, \dots, T_d$ des indéterminées ; posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$. On appelle *espace affine formel* au-dessus de $\mathscr{S}$, de dimension d et de paramètres $T_1, \dots, T_d$, le $\mathscr{S}$-schéma formel affine adique $\mathscr{D}$ correspondant au système projectif adique de $(\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n})$-algèbres quasi-cohérentes $\mathscr{A}_n = \mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}[T_1, \dots, T_d]$ $(n \geq 0)$ (2.3.10). Lorsque $d = 1$, on dit que $\mathscr{D}$ est la *droite affine formelle* au-dessus de $\mathscr{S}$.

Si $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine, alors $\mathscr{D} = \mathrm{Spf}(A\langle T_1, \dots, T_d\rangle)$ en vertu de (1.8.16.2). En particulier, $\mathscr{D}$ ne dépend pas de $\mathscr{I}$.

Proposition 2.3.12. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un morphisme adique et si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f est localement de type fini.*

(ii) *Pour tout ouvert formel affine V de $\mathfrak{Y}$ et tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est topologiquement de type fini sur $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$* (1.8.18).

(iii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert formel affine V de $f(x)$ et un voisinage ouvert formel affine U de x tels que $f(U) \subset V$ et que l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit topologiquement de type fini sur $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$.*

Montrons d'abord que (i) entraîne (ii). On peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines adiques et f est associé à un homomorphisme adique $\varphi\colon B \to A$ (2.2.8). Soit K un idéal de définition de type fini de B tel que $\mathscr{K} = K^{\Delta}$; on a donc $f^*(K^{\Delta})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (KA)^{\Delta}$ (2.2.8). Comme A/KA est une algèbre de type fini sur B/K, A est topologiquement de type fini sur B, en vertu de 1.8.19. Il est clair que (ii) implique (iii). Enfin, (iii) entraîne (i) en vertu de 2.2.10, 2.2.8 et 1.8.19.

Remarque 2.3.12.1. Lorsque les conditions équivalentes de (2.3.12) sont remplies, la condition (i) ne dépend pas de l'idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ considéré. En particulier, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, le morphisme $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f est localement de type fini.

Définition 2.3.13. Lorsque les conditions équivalentes de (2.3.12) sont vérifiées, on dit que le morphisme f est *localement de type fini*, ou que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *localement de type fini*, ou *localement de type fini* sur $\mathfrak{Y}$. On dit que le morphisme f est *de type fini* s'il est localement de type fini et quasi-compact ; on dit alors que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *de type fini*, ou *de type fini* sur $\mathfrak{Y}$.

Corollaire 2.3.14. *Un schéma formel localement de type fini sur un schéma formel localement noethérien est localement noethérien.*

Cela résulte de 1.8.17(ii) et 2.3.12.

Définition 2.3.15. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *localement de présentation finie*, ou que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *localement de présentation finie*, ou *localement de présentation finie* sur $\mathfrak{Y}$, si les conditions suivantes sont remplies :

(a) f est un morphisme adique.

(b) Pour tout idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0 \colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f est localement de présentation finie.

On dit que le morphisme f est *de présentation finie* s'il est localement de présentation finie, quasi-compact et quasi-séparé ; on dit alors que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *de présentation finie*, ou *de présentation finie* sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.3.16. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Considérons les conditions suivantes :*

(i) *f est un morphisme localement de présentation finie.*

(ii) *f est un morphisme adique et si l'on pose*

$$\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}, \quad \mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1}) \quad \textit{et} \quad \mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1}),$$

le morphisme $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f est localement de présentation finie pour tout $n \geq 0$.

(iii) *Pour tout ouvert formel affine V de $\mathfrak{Y}$ et tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est topologiquement de présentation finie sur* $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ (1.8.18).

(iv) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert formel affine V de $f(x)$ et un voisinage ouvert formel affine U de x tels que $f(U) \subset V$ et que l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit topologiquement de présentation finie sur $\Gamma(V, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$.*

Alors on a (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Il est clair qu'on a (i)⇒(ii) et (iii)⇒(iv). On a (iv)⇒(i) en vertu de 2.2.10, 2.2.8 et 1.8.23. Reste à montrer (ii)⇒(i). Soient $\mathscr{K}'$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{K}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}'_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$, $\mathfrak{Y}'_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}')$. Montrons que le morphisme $f'_0 \colon \mathfrak{X}'_0 \to \mathfrak{Y}'_0$ déduit de f est localement de présentation finie. La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact. Donc $\mathscr{K}^{n+1} \subset \mathscr{K}'$ pour un entier $n \geq 1$, et l'assertion résulte du diagramme cartésien (2.2.9)

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}'_0 \arrow[r, "f'_0"] \arrow[d] & \mathfrak{Y}'_0 \arrow[d] \\ \mathfrak{X}_n \arrow[r, "f_n"] & \mathfrak{Y}_n \end{tikzcd}$$

Proposition 2.3.17. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie*).
(ii) *Pour tout ouvert V de $\mathfrak{Y}$ et tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, la restriction $U \to V$ de f est localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie*).
(iii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert V de $f(x)$ et un voisinage ouvert U de x tels que $f(U) \subset V$ et que la restriction $U \to V$ de f soit localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie*).

Cela résulte aussitôt de 2.2.10, 2.3.12 et 2.3.16.

Proposition 2.3.18. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g \colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de schémas formels adiques.*

(i) *Si f et g sont localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie, resp. de type fini, resp. de présentation finie*)*, il en est de même de $g \circ f$.*
(ii) *Si $g \circ f$ est localement de type fini et si g est adique, alors f est localement de type fini.*
(iii) *Si $g \circ f$ est localement de présentation finie et si g est localement de type fini, alors f est localement de présentation finie.*

Cela résulte de 2.2.11 et des assertions correspondantes pour les morphismes de schémas usuels ([28] 6.2 et 6.3).

Proposition 2.3.19. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, $g \colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ deux morphismes de schémas formels adiques. Si f est localement de type fini* (*resp. localement de présentation finie, resp. de type fini, resp. de présentation finie*)*, il en est de même de la projection canonique $\mathscr{S}' \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathscr{S}'$.*

En effet, la question étant locale sur $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$ (2.3.17), on peut se borner au cas où g est déployé (2.2.4), auquel cas la proposition résulte de 2.2.15 et des assertions correspondantes pour les morphismes de schémas usuels ([28] 6.2 et 6.3).

Définition 2.3.20. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *propre* s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) f est adique.

(ii) Pour tout idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f est propre.

Lorsqu'il en est ainsi, on dit aussi que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *propre*, ou *propre* sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.3.21. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Pour que f soit propre, il faut et il suffit que f soit adique, et que si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f soit propre.*

Il n'y a que la suffisance de la condition à démontrer. Soient $\mathscr{K}'$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{K}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}'_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$, $\mathfrak{Y}'_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}')$. Montrons que le morphisme $f'_0\colon \mathfrak{X}'_0 \to \mathfrak{Y}'_0$ déduit de f est propre. La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact. Si $\mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$, on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{Y}_0 \arrow[d, "j"] \\ \mathfrak{X}'_0 \arrow[r, "f'_0"] & \mathfrak{Y}'_0 \end{tikzcd}$$

où i et j sont des immersions surjectives (2.2.9). Il revient donc au même de dire que f_0 ou f'_0 est propre ([29] 5.4.5), d'où l'assertion.

Corollaire 2.3.22. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est propre.*

(ii) *Pour tout ouvert U de $\mathfrak{Y}$, la restriction de f au-dessus de U est propre.*

(iii) *Pour tout $y \in \mathfrak{Y}$, il existe un voisinage ouvert U de y dans $\mathfrak{Y}$ tel que la restriction de f au-dessus de U soit propre.*

Cela résulte aussitôt de 2.3.21 et 2.2.10.

Proposition 2.3.23. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels considérés sont adiques.*

(i) *Le composé de deux morphismes propres est un morphisme propre.*

(ii) *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme propre, $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$ est propre pour tout morphisme $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$.*

(iii) *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ soit propre et g soit adique et séparé, alors f est propre.*

Les proposition (i) et (iii) résultent de 2.3.21 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([29] 5.4.2 et 5.4.3). Pour (ii), la question étant locale sur $\mathfrak{Y}$ et sur $\mathfrak{Y}'$ (2.3.22), on peut se borner au cas où g est un morphisme déployé (2.2.4) ; la proposition résulte alors de 2.3.21, 2.2.15 et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([29] 5.4.2).

Proposition 2.3.24. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un morphisme adique et si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f est fini.*

(ii) *Pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{Y}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}$, et $\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est une $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-algèbre adique* (1.8.4.5) *et un $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-module de type fini.*

(iii) *Tout point de $\mathfrak{Y}$ possède un voisinage ouvert formel affine U tel que $f^{-1}(U)$ soit un ouvert formel affine de $\mathfrak{X}$, et que $\Gamma(f^{-1}(U), \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit une $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-algèbre adique et un $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-module de type fini.*

Montrons d'abord que (i) entraîne (ii). On peut supposer que l'on a $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathscr{K} = K^{\Delta}$, où B est un anneau adique et K est un idéal de définition de type fini de B. Posons $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ et soit $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ le morphisme déduit de f. Alors $\mathfrak{X}$ est la limite inductive du $(\mathfrak{Y}_n)$-système inductif adique $(\mathfrak{X}_n)$ (2.2.14). Par hypothèse, $\mathfrak{X}_0$ est un schéma affine dont l'anneau A_0 est un (B/K)-module de type fini. Donc chacun des $\mathfrak{X}_n$ est un schéma affine ([28] 2.3.5), et si A_n est son anneau, pour tout $m \leq n$, A_m est isomorphe à $A_n/K^{m+1}A_n$. Par suite, $\mathfrak{X}$ est isomorphe à $\mathrm{Spf}(A)$, où $A = \varprojlim A_n$, et la conclusion résulte de ([12] chap. III §2.11 prop. 14 et cor. 1). Il est claire que (ii) implique (iii). Enfin, (iii) entraîne (i) en vertu de 2.2.8 et 2.2.10.

Définition 2.3.25. Lorsque les conditions équivalentes de (2.3.24) sont vérifiées, on dit que le morphisme f est *fini*, ou encore que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *fini*, ou *fini* sur $\mathfrak{Y}$.

Il est clair que si f est fini, il est affine, et pour tout ouvert $U \subset \mathfrak{Y}$, $f^{-1}(U)$ est fini sur U.

Proposition 2.3.26. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels considérés sont adiques.*

(i) *Le composé de deux morphismes finis est un morphisme fini.*

(ii) *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ est un morphisme fini, $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$ est fini pour tout morphisme $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$.*

(iii) *Si $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ et $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ sont deux morphismes tels que $g \circ f$ soit fini et g soit adique et séparé, alors f est fini.*

Les propositions (i) et (iii) résultent de 2.3.24 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([29] 6.1.5). Pour (ii), la question étant locale sur

$\mathfrak{Y}$ et sur $\mathfrak{Y}'$, on peut se borner au cas où g est un morphisme déployé (2.2.4) ; la proposition résulte alors de 2.3.24, 2.2.15 et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([29] 6.1.5).

2.3.27. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels adiques, y un point de $\mathfrak{Y}$. On note $\mathscr{O}_y$ l'anneau local de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ en y, $\kappa(y)$ son corps résiduel et $i_y\colon \mathrm{Spec}(\kappa(y)) \to \mathfrak{Y}$ le morphisme canonique localisé en y. La fibre de $\mathfrak{X}$ au-dessus de y, c'est à dire le schéma formel $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathrm{Spec}(\kappa(y))$, sera notée $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$.

Soient $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ le morphisme de schémas usuels déduit de f. Il est immédiat de voir que $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{X}_0 \otimes_{\mathfrak{Y}_0} \kappa(y)$ ([28] 10.7.4) ; en particulier, $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ est un schéma (usuel).

Soit x un point de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$. On appelle *dimension relative* de $\mathfrak{X}$ sur $\mathfrak{Y}$ en x, et on note $\dim_x(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})$, la dimension de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ en x ; elle est fini si f est localement de type fini. On appelle *dimension relative* de $\mathfrak{X}$ sur $\mathfrak{Y}$, et on note $\dim(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})$, la borne supérieure des nombres $\dim_x(\mathfrak{X}/\mathfrak{Y})$, lorsque x parcourt les points de $\mathfrak{X}$.

Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, $\mathscr{F}_x$ la fibre de $\mathscr{F}$ en x, $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ l'image réciproque de $\mathscr{F}$ sur $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$. Alors la fibre de $\mathscr{F} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y)$ en x est canoniquement isomorphe à $\mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_y} \kappa(y)$. En effet, il suffit de le montrer pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, auquel cas l'assertion résulte facilement de l'isomorphisme $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(y) \simeq \mathfrak{X}_0 \otimes_{\mathfrak{Y}_0} \kappa(y)$ ([28] 3.4.6).

Définition 2.3.28. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *quasi-fini* s'il vérifie les conditions suivantes :

(i) f est de type fini.

(ii) Tout point $x \in \mathfrak{X}$ est isolé dans sa fibre $\mathfrak{X} \otimes_{\mathfrak{Y}} \kappa(f(x))$.

Lorsqu'il en est ainsi, on dit aussi que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma formel *quasi-fini*, ou *quasi-fini* sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.3.29. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels adiques, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ le morphisme de schémas usuels déduit de f. Pour que f soit quasi-fini, il faut et il suffit que f_0 soit quasi-fini.*

Cela résulte aussitôt de 2.3.27.

Proposition 2.3.30. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre, localement de présentation finie et quasi-fini de schémas formels adiques. Alors f est fini.*

En effet, la proposition se ramène aussitôt à l'assertion correspondante pour les morphismes de schémas usuels ([31] 8.11.1).

2.4 Morphismes lisses, morphismes non ramifiés, morphismes étales

Définition 2.4.1. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est un morphisme *formellement lisse* (resp. *formellement non ramifié*, resp. *formellement étale*) si, pour tout schéma (usuel) affine Y', tout sous-schéma fermé Y'_0 de Y' défini par un idéal nilpotent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_{Y'}$, et tout morphisme de schémas formels $Y' \to \mathfrak{Y}$ (2.1.20), l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(Y', \mathfrak{X}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{Y}}(Y'_0, \mathfrak{X}) \tag{2.4.1.1}$$

déduite de l'injection canonique $Y'_0 \to Y'$, est surjective (resp. injective, resp. bijective).

2.4.2. Supposons $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ affines, de sorte que f provient d'un homomorphisme continu d'anneaux admissibles $\varphi\colon A \to B$. En vertu de ([31] 0.19.3.1 et 0.19.10.2), dire que f est formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale) signifie que B est une A-algèbre formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale).

Proposition 2.4.3.

(i) *Le composé de deux morphismes formellement lisses* (*resp. formellement non ramifiés, resp. formellement étales*) *de schémas formels est formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*).

(ii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes de schémas formels. Si f est formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*), *il en est de même du morphisme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$.*

Cela résultent immédiatement de la définition (2.4.1).

Proposition 2.4.4. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels adiques. Pour que f soit formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*), *il faut et il suffit que pour tout idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme de schémas usuels $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f soit formellement lisse* (*resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale*).

Cela résulte facilement de 2.4.3(ii), 2.2.9 et 2.2.12.

Définition 2.4.5. Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. On dit que f est *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) s'il est localement de présentation finie et formellement lisse (resp. formellement non ramifié, resp. formellement étale). On dit alors aussi que $\mathfrak{X}$ est un $\mathfrak{Y}$-schéma *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*), ou *lisse* (resp. *non ramifié*, resp. *étale*) sur $\mathfrak{Y}$.

Proposition 2.4.6. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Pour que f soit lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*), *il faut* *et il suffit que f soit adique et que pour tout idéal de définition de type fini $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme de schéma usuels $f_0 \colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale).*

Cela résulte de 2.4.4 et des définitions.

Proposition 2.4.7. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Pour que f soit non ramifié, il faut et il suffit que f soit localement de présentation finie, et que si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ et $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$, le morphisme $f_0 \colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ déduit de f soit non ramifié.*

La condition est nécessaire en vertu de 2.4.6. Pour établir sa suffisance, il suffit de montrer que si $\mathscr{K}'$ est un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{K}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}'_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$ et $\mathfrak{Y}'_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}')$, le morphisme $f'_0 \colon \mathfrak{X}'_0 \to \mathfrak{Y}'_0$ déduit de f est non ramifié (2.4.6). On notera que f'_0 est localement de présentation finie. La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact. Si $\mathscr{K}' \subset \mathscr{K}$, on a un diagramme cartésien (2.2.9)

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "i"'] & \mathfrak{Y}_0 \arrow[d, "j"] \\ \mathfrak{X}'_0 \arrow[r, "f'_0"] & \mathfrak{Y}'_0 \end{tikzcd}$$

où i et j sont des immersions surjectives et f_0 et f'_0 sont localement de présentation finie. Il revient donc au même de dire que f_0 ou f'_0 est non ramifié ([31] 17.4.1), d'où l'assertion.

Proposition 2.4.8. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{K}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$. Pour que f soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale), il faut et il suffit que f soit adique, et que si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, le morphisme $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f soit lisse (resp. non ramifié, resp. étale) pour tout $n \geq 0$.*

La condition est nécessaire en vertu de 2.4.6. Pour établir sa suffisance, il suffit de montrer que si $\mathscr{K}'$ est un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J}' = f^*(\mathscr{K}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}'_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}')$ et $\mathfrak{Y}'_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}')$, le morphisme $f'_0 \colon \mathfrak{X}'_0 \to \mathfrak{Y}'_0$ déduit de f est lisse (resp. non ramifié, resp. étale) (2.4.6). Cela se voit immédiatement en calquant la preuve de l'implication (ii)$\Rightarrow$(i) dans 2.3.16.

Proposition 2.4.9. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel adique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est lisse (resp. non ramifié, resp. étale).*

(ii) *Pour tout ouvert V de $\mathfrak{Y}$ et tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ tels que $f(U) \subset V$, la restriction $U \to V$ de f est lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*).

(iii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert V de $f(x)$ et un voisinage ouvert U de x tels que $f(U) \subset V$ et que la restriction $U \to V$ de f soit lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*).

En effet, cela résulte de 2.4.8, 2.2.10 et ([31] 17.1.6).

Proposition 2.4.10. *On suppose dans ce qui suit que tous les schémas formels considérés sont adiques.*

(i) *Le composé de deux morphismes lisses* (*resp. non ramifiés, resp. étales*) *est lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*).

(ii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ deux morphismes. Si f est lisse* (*resp. non ramifié, resp. étale*), *il en est de même du morphisme $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}'$.*

(iii) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit non ramifié et que g soit localement de type fini. Alors f est non ramifié.*

(iv) *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes tels que $g \circ f$ soit lisse* (*resp. étale*) *et que g soit non ramifié. Alors f est lisse* (*resp. étale*).

Les propositions (i) et (ii) résultent de 2.3.18, 2.3.19 et 2.4.3. Les propositions (iii) et (iv) résultent de 2.2.11, 2.4.8 et des assertions correspondantes pour les morphismes de schémas usuels ([31] 17.3.3 et 17.3.4).

Proposition 2.4.11. *Soient $\mathscr{S}$ un schéma formel adique, $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}_0 = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I})$, $f_0\colon X_0 \to \mathscr{S}_0$ un morphisme lisse de schémas. Supposons que X_0 soit affine, ou que f_0 soit étale. Alors il existe un morphisme lisse de schémas formels adiques $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ qui relève f_0 ; c'est à dire, si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, f_0 s'identifie au morphisme $\mathfrak{X}_0 \to \mathscr{S}_0$ déduit de f. Si X_0 est affine, $\mathfrak{X}$ est affine. Si f_0 est étale, f est étale et unique à isomorphisme unique près.*

Posons $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$ pour $n \geq 0$. On construit par récurrence sur n des morphismes lisses $f_n\colon X_n \to \mathscr{S}_n$ tels que f_n soit une déformation de f_{n-1} (pour $n \geq 1$) ([33] 5.9). Si X_0 est affine, X_n est affine ([28] 2.3.5). Si f_0 est étale, f_n est étale et unique à isomorphisme unique près. Les X_n forment un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique (2.2.13), et définissent donc un schéma formel $\mathfrak{X}$ adique sur $\mathscr{S}$ (2.2.14). Le morphisme structural $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ est lisse en vertu de 2.4.8. Si f_0 est étale, f est étale et unique à isomorphisme unique prés. Si X_0 est affine, $\mathfrak{X}$ est affine (2.1.37).

2.4.12. On appelle schéma formel *pointé* (resp. schéma formel adique *pointé*) un couple $(\mathfrak{X}, x)$ formé d'un schéma formel (resp. d'un schéma formel adique) $\mathfrak{X}$ et d'un point $x \in \mathfrak{X}$. Un morphisme de schémas formels pointés $f\colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathfrak{Y}, y)$ est un morphisme de schémas formels $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ tel que $f(x) = y$.

Définition 2.4.13. Soit $(\mathfrak{X}, x)$ un schéma formel adique pointé. Un *voisinage étale élémentaire* de $(\mathfrak{X}, x)$ est un schéma formel pointé $(\mathfrak{Y}, y)$, où $\mathfrak{Y}$ est un $\mathfrak{X}$-schéma formel étale et y est un point de $\mathfrak{Y}$ au-dessus de x, à extension résiduelle triviale, c'est à dire $\kappa(y) \simeq \kappa(x)$.

Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme étale de schémas formels adiques, y un point de $\mathfrak{Y}$, x son image dans $\mathfrak{X}$, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$. Posons $\mathscr{K} = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K})$ et soit $f_0\colon \mathfrak{Y}_0 \to \mathfrak{X}_0$ le morphisme déduit de f. Alors, pour que $(\mathfrak{Y}, y)$ soit un voisinage étale élémentaire de $(\mathfrak{X}, x)$, il faut et il suffit que $(\mathfrak{Y}_0, y)$ soit un voisinage étale élémentaire de $(\mathfrak{X}_0, x)$.

Le théorème suivant est une version formelle renforcée d'un résultat de Raynaud-Gruson, établi initialement dans le cadre algébrique ([42] 1.1.1).

Théorème 2.4.14. *Soit $f\colon (\mathfrak{X}, x) \to (\mathscr{S}, s)$ un morphisme localement de type fini de schémas formels adiques pointés ; posons $n = \dim_x(\mathfrak{X}/\mathscr{S})$ (2.3.27). Alors, il existe un diagramme commutatif de schémas formels adiques pointés*

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{Y}, y) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & (\mathscr{T}, t) \arrow[r, "h"] & (\mathscr{S}', s') \arrow[d, "v"] \\
(\mathfrak{X}, x) \arrow[rr, "f"] & & (\mathscr{S}, s)
\end{tikzcd}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(i) *$\mathfrak{Y}$, $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}'$ sont formels affines ; u et v sont des voisinages étales élémentaires ;*

(ii) *h est lisse à fibres géométriquement intègres de dimension n, et l'adhérence de t dans $\mathscr{T} \otimes_{\mathscr{S}'} \kappa(s')$ est géométriquement irréductible ;*

(iii) *g est fini et y est l'unique point de $\mathfrak{Y}$ au-dessus de t.*

Soient $\mathscr{I}$ un idéal de définition de type fini de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$ et $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$ le morphisme déduit de f. En vertu de ([42] 1.1.1), il existe un diagramme commutatif de schémas pointés

$$\begin{tikzcd}
(Y, y) \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "u_0"'] & (T, t) \arrow[r, "h_0"] & (S', s') \arrow[d, "v_0"] \\
(\mathfrak{X}_0, x) \arrow[rr, "f_0"] & & (\mathscr{S}_0, s)
\end{tikzcd}$$

vérifiant les conditions suivantes :

(a) Y, T et S' sont affines ; u_0 et v_0 sont des voisinages étales élémentaires ;

(b) h_0 est lisse à fibres géométriquement intègres de dimension n ;

(c) g_0 est fini et y est l'unique point de Y au-dessus de t.

De plus, il résulte de la démonstration de *loc. cit.* qu'on peut supposer l'adhérence de t dans $T \otimes_{S'} \kappa(s')$ géométriquement irréductible.

En vertu de 2.4.11, il existe deux morphismes étales $u\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ et $v\colon \mathscr{S}' \to \mathscr{S}$ qui relèvent respectivement $u_0\colon Y \to \mathfrak{X}_0$ et $v_0\colon S' \to \mathscr{S}_0$, où $\mathfrak{Y}$ et $\mathscr{S}$ sont affines. Donc $u\colon (\mathfrak{Y}, y) \to (\mathfrak{X}, x)$ et $v\colon (\mathscr{S}', s') \to (\mathscr{S}, s)$ sont des voisinages étales élémentaires (2.4.13). Utilisons encore une fois 2.4.11 ; il existe alors un morphisme lisse $h\colon \mathscr{T} \to \mathscr{S}'$ qui relève h_0, où $\mathscr{T}$ est affine. On sait (2.2.14) que $\mathfrak{Y}$ (resp. $\mathscr{T}$) est une limite inductive d'un $(\mathscr{S}_n)$-système inductif adique $(\mathfrak{Y}_n)$ (resp. $(\mathscr{T}_n)$ tel que $\mathscr{T}_n \to \mathscr{S}_n$ soit lisse). On peut alors compléter le $\mathscr{S}_0$-morphisme $g_0\colon Y \to T$ en un système inductif de $\mathscr{S}_n$-morphismes $g_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathscr{T}_n$ (pour $n \geq 0$). Il est immédiat de voir que pour $m \leq n$, g_m s'identifie à $g_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathrm{id}_{\mathscr{S}_m}$; donc en vertu de 2.2.14 et 2.3.24, la suite (g_n) définit un $\mathscr{S}$-morphisme fini $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{T}$ qui relève g_0, d'où la proposition.

Proposition 2.4.15. *Soient $\mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme lisse de schémas formels adiques, s un point de $\mathscr{S}$, C une composante connexe de $\mathfrak{X} \otimes_{\mathscr{S}} \kappa(s)$ qui est géométriquement intègre de dimension n. Alors, il existe un voisinage étale élémentaire $(\mathscr{S}', s')$ de $(\mathscr{S}, s)$ et un ouvert U' de $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ tels que U' contienne C et tels que les fibres du morphisme $U' \to \mathscr{S}'$ soient géométriquement intègres de dimension n.*

Cela résulte de 2.4.11 et de l'assertion analogue pour les morphismes de schémas usuels :

Lemme 2.4.16 ([42] 1.1.3). *Soient $X \to S$ un morphisme lisse de schémas, s un point de S, C une composante connexe de $X \otimes_S \kappa(s)$ qui est géométriquement intègre de dimension n. Alors, il existe un voisinage étale élémentaire (S', s') de (S, s) et un ouvert U' de $X' = X \times_S S'$ tels que U' contienne C et tels que les fibres du morphisme $U' \to S'$ soient géométriquement intègres de dimension n.*

Soient $(\widetilde{S}, \widetilde{s})$ un hensélisé strict de (S, s), $\widetilde{X} = X \times_S \widetilde{S}$. Comme $\widetilde{X}$ est lisse sur $\widetilde{S}$ et que $C \otimes_{\kappa(s)} \kappa(\widetilde{s})$ est non vide, le morphisme $\widetilde{X} \to \widetilde{S}$ possède une section $\widetilde{\sigma}$ telle que $\widetilde{\sigma}(\widetilde{s}) \in C \otimes \kappa(\widetilde{s})$ ([31] 17.16.3). Considérons $(\widetilde{S}, \widetilde{s})$ comme limite projective filtrante de schémas finis et étales sur le hensélisé de S en s. Par passage à la limite, on trouve qu'il existe un voisinage étale élémentaire (S', s') de (S, s) et un morphisme fini étale surjectif $S_1 \to S'$, ayant un seul point s_1 au-dessus de s, tels que $X_1 = X \times_S S_1$ possède une section σ_1 au-dessus de S_1 et que $\sigma_1(s_1) \in C \otimes \kappa(s_1)$. La réunion des composantes connexes des fibres de $X_1 \to S_1$ qui rencontrent $\sigma_1(S_1)$ est un ouvert U_1 de X_1 ([31] 15.6.5). Comme $C \otimes \kappa(s_1)$ est connexe par hypothèse, U_1 contient $C \otimes \kappa(s_1)$. Le morphisme lisse $U_1 \to S_1$ admet une section et ses fibres sont connexes, elles sont donc géométriquement intègres ([42] 1.1.2).

Posons $X' = X \times_S S'$ et soit $p\colon X_1 \to X'$ la projection canonique. D'une part, p est fini, donc fermé, et par suite $p(X_1 - U_1)$ est fermé dans X'. D'autre part, $p(X_1 - U_1)$ ne rencontre pas $C = C \otimes \kappa(s')$. Alors $U' = X' - p(X_1 - U_1)$ est un ouvert de X', contenant C, tel que $p^{-1}(U')$ soit contenu dans U_1. A fortiori, les fibres de $U' \to S'$ sont géométriquement intègres ; quitte à restreindre S' à un voisinage ouvert de s', on peut supposer qu'elles sont de dimension n.

2.5 Complété formel d'un schéma le long d'un sous-schéma

2.5.1. Soient X un schéma (usuel), X' un sous-schéma fermé de X défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, Ψ l'injection canonique $X' \to X$ des espaces sous-jacents, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. On appelle *complété de $\mathscr{F}$ le long de X'* et on désigne par $\mathscr{F}_{/X'}$ ou par $\widehat{\mathscr{F}}$ (lorsqu'aucune confusion n'est possible) le faisceau $\varprojlim_n \Psi^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n))$.

On notera que cette définition est équivalente à celle de Grothendieck ([28] 10.8.2) ; plus précisément, le morphisme canonique

$$\Psi^{-1}\varprojlim_n (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \quad\to\quad \varprojlim_n \Psi^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \tag{2.5.1.1}$$

est bijectif. En effet, comme X' est fermé dans X, Ψ_* est pleinement fidèle, et il suffit de voir que $\Psi_*(2.5.1.1)$ est un isomorphisme. Considérons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\Psi_*\Psi^{-1}\varprojlim_n (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \arrow[r, "\Psi_*(2.5.1.1)"] & \Psi_*\varprojlim_n \Psi^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \arrow[d, "v"] \\
\varprojlim_n (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) \arrow[u, "u"] \arrow[r, "w"] & \varprojlim_n \Psi_*\Psi^{-1}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n))
\end{tikzcd}$$

où u et w sont des morphismes d'adjonction, et v est la flèche canonique. Comme v et w sont des isomorphismes, on se réduit à montrer que u est un isomorphisme. Si on note V l'ouvert complémentaire de X' dans X et $j\colon V \to X$ l'injection canonique, le foncteur j^* commute aux limites projectives, car il admet un adjoint à gauche. On en conclut que

$$j^*\varprojlim_n (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)) = 0,$$

et par suite que u est un isomorphisme.

Il est immédiat que pour tout ouvert $U \subset X$, on a

$$(\mathscr{F}|U)_{/(U\cap X')} = (\mathscr{F}_{/X'})|(U \cap X').$$

Par passage à la limite projective, il est clair que $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$ est un faisceau d'anneaux, et que $\mathscr{F}_{/X'}$ peut être considéré comme un $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-module. En outre, comme il existe une base de la topologie de X' formée d'ouverts quasi-compacts, on peut considérer $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$ (resp. $\mathscr{F}_{/X'}$) comme un faisceau d'anneaux topologiques (resp. de groupes topologiques) limite projective des faisceaux d'anneaux (resp. de groupes) pseudo-discrets $\Psi^{-1}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$ (resp. $\Psi^{-1}(\mathscr{F}\otimes_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n))$), et $\mathscr{F}_{/X'}$ devient alors un $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-module topologique ([28] 0.3.9.1 et 0.3.9.2). Pour tout ouvert quasi-compact U de X, $\Gamma(U\cap X',(\mathscr{O}_X)_{/X'})$ (resp. $\Gamma(U\cap X',\mathscr{F}_{/X'})$) est alors limite projective des anneaux (resp. groupes) discrets $\Gamma(U,\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$ (resp. $\Gamma(U,\mathscr{F}/\mathscr{J}^n\mathscr{F})$).

On voit aussitôt que $\mathscr{F}_{/X'}$ est un foncteur additif de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents, à valeurs dans la catégorie des $(\mathscr{O}_X)_{/X'}$-modules topologiques.

On appelle *complété de X le long de X'* et on note $X_{/X'}$ ou $\widehat{X}$ (si aucune confusion n'est à craindre) l'espace topologiquement annelé $(X',(\mathscr{O}_X)_{/X'})$.

Proposition 2.5.2. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$. Alors :*

(i) *$\widehat{X}=X_{/X'}$ est un schéma formel adique ; $\mathscr{J}_{/X'}$ est un idéal de définition de type fini de $\widehat{X}$; on a des isomorphismes canoniques $\mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{J}_{/X'}\simeq\mathscr{O}_{X'}$, $(\mathscr{J}^n)_{/X'}\simeq(\mathscr{J}_{/X'})^n$ $(n\geq 1)$ et $\mathscr{J}_{/X'}/\mathscr{J}^2_{/X'}\simeq(\mathscr{J}/\mathscr{J}^2)|X'$.*

(ii) *Si $X=\mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine, $\mathscr{J}=\widetilde{J}$, où J est un idéal de type fini de A, $\widehat{X}$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{Spf}(\widehat{A})$, où $\widehat{A}$ est le séparé complété de A pour la topologie J-préadique.*

(iii) *Si $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini, alors pour tout entier $n\geq 1$, on a des isomorphismes canoniques $\mathscr{J}^n_{/X'}\mathscr{F}_{/X'}\simeq(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'}$ et $\mathscr{F}_{/X'}/\mathscr{J}^n_{/X'}\mathscr{F}_{/X'}\simeq(\mathscr{F}/\mathscr{J}^n\mathscr{F})|X'$.*

(iv) *Si $\mathscr{A}$ est un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$, contenant localement une puissance de $\mathscr{J}$, alors $\mathscr{A}_{/X'}$ est un idéal ouvert de type fini de $\widehat{X}$, et $(\mathscr{A}_{/X'})^m=(\mathscr{A}^m)_{/X'}$ pour tout entier $m\geq 1$.*

(i) Cela résulte immédiatement de 2.1.36.

(ii) En effet, si $\widehat{J}$ désigne le séparé complété de J pour la topologie J-préadique, alors $\widehat{A}$ est un anneau $\widehat{J}$-adique tel que $\widehat{A}/\widehat{J}^n=A/J^n$ (1.8.7), d'où la conclusion.

(iii) Comme la suite canonique

$$0\to(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'}\to\mathscr{F}_{/X'}\to(\mathscr{F}/\mathscr{J}^n\mathscr{F})|X'\to 0$$

est exacte, il suffit de montrer que $\mathscr{J}^n_{/X'}\mathscr{F}_{/X'}\simeq(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'}$. La question étant locale, on peut se borner au cas affine envisagé dans (ii). On a alors $\mathscr{F}=\widetilde{M}$, où M est un A-module de type fini. Il résulte de 2.5.1 et 1.8.7 que, pour tout $f\in A$,

$$\Gamma(\mathrm{D}(f)\cap X',(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'})=(J^nM)_{\{f\}}=J^nM_{\{f\}}=J^n\Gamma(\mathrm{D}(f)\cap X',\mathscr{F}_{/X'}).$$

Comme $J^n(\mathscr{F}_{/X'})$ est associé au préfaisceau $U\mapsto J^n\Gamma(U,\mathscr{F}_{/X'})$ et que les ouverts $\mathrm{D}(f)\cap X'$ forment une base de la topologie de X', on en déduit que $(\mathscr{J}^n\mathscr{F})_{/X'}=J^n(\mathscr{F}_{/X'})$. Remplaçant $\mathscr{F}$ par $\mathscr{O}_X$, on obtient que $\mathscr{J}^n_{/X'}=J^n\mathscr{O}_{\widehat{X}}$ (2.1.11), d'où notre assertion.

(iv) Les questions étant locales, on peut se borner au cas affine envisagé dans (ii). On a alors $\mathscr{A} = \widetilde{\mathfrak{a}}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini de A, ouvert pour la topologie J-préadique. Soient $\widehat{\mathfrak{a}}$ (resp. $\widehat{J}$) le séparé complété de $\mathfrak{a}$ (resp. J) pour la topologie J-préadique. D'après 1.8.7, $\widehat{\mathfrak{a}}$ est un idéal ouvert de type fini de $\widehat{A}$ tel que $\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\widehat{A}$ et $\widehat{\mathfrak{a}}/\widehat{J}^n\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}/J^n\mathfrak{a}$. On en déduit facilement que $\mathscr{A}_{/X'} = \widehat{\mathfrak{a}}^{\Delta}$, et par suite que $\mathscr{A}_{/X'} = \mathfrak{a}\mathscr{O}_{\widehat{X}}$ en vertu 2.1.13, d'où la conclusion.

2.5.3. Reprenons les notations et hypothèses de 2.5.1. On a un homomorphisme canonique de faisceaux d'anneaux $\theta\colon \mathscr{O}_X \to \Psi_*((\mathscr{O}_X)_{/X'}) = \varprojlim (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)$. On désigne par i_X le morphisme, dit *canonique*, $(\Psi, \theta)\colon X_{/X'} \to X$ d'espaces annelés. Pour tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, on a un homomorphisme canonique fonctoriel $\gamma\colon \mathscr{F} \to \Psi_*(\mathscr{F}_{/X'})$ de $\mathscr{O}_X$-modules.

2.5.4. Soient X', X'' deux sous-schémas fermés d'un schéma X, définis par deux idéaux quasi-cohérents $\mathscr{J}'$, $\mathscr{J}''$ de $\mathscr{O}_X$. Supposons que pour tout ouvert affine U de X, il existe un entier $m > 0$ tel que $(\mathscr{J}'|U)^m \subset \mathscr{J}''|U$ et $(\mathscr{J}''|U)^m \subset \mathscr{J}'|U$. Dans ces conditions, pour tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent $\mathscr{F}$, les faisceaux de groupes topologiques $\mathscr{F}_{/X'}$ et $\mathscr{F}_{/X''}$ sont canoniquement isomorphes. Cette condition sur X' et X'' implique que ces deux sous-schémas ont même espace sous-jacent, et ces deux conditions sont équivalentes si les deux idéaux $\mathscr{J}'$ et $\mathscr{J}''$ sont de type fini ([28] 6.8.4).

Proposition 2.5.5. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $i\colon \widehat{X} \to X$ le morphisme canonique d'espaces annelés* (2.5.3). *Supposons la paire* (X, X') *quasi-idyllique* (1.12.21). *Alors :*

(i) *Pour toute suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ telle que $\mathscr{F}$ soit de type fini, la suite de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules $0 \to \mathscr{F}'_{/X'} \to \mathscr{F}_{/X'} \to \mathscr{F}''_{/X'} \to 0$ est exacte.*

(ii) *Pour tout $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{F}$, l'homomorphisme canonique $\gamma^\sharp\colon i^*(\mathscr{F}) \to \mathscr{F}_{/X'}$ est un isomorphisme ; en particulier, $\mathscr{F}_{/X'}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module de type fini.*

(i) Il suffit de montrer que si $U = \mathrm{Spec}(B)$ est un ouvert affine de X, la suite

$$0 \to \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}'_{/X'}) \to \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}_{/X'}) \to \Gamma(U \cap X', \mathscr{F}''_{/X'}) \to 0$$

est exacte. On a alors $\mathscr{F}|U = \widetilde{M}$, $\mathscr{F}'|U = \widetilde{M}'$, $\mathscr{F}''|U = \widetilde{M}''$, où M, M', M'' sont trois B-modules tels que M soit de type fini et que la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ soit exacte. Soit K l'idéal de B tel que $\mathscr{J}|U = \widetilde{K}$. Par définition, $\Gamma(U \cap X', \mathscr{F}_{/X'}) = \widehat{M}$ est le séparé complété de M pour la topologie K-préadique, et de même $\Gamma(U \cap X', \mathscr{F}'_{/X'}) = \widehat{M}'$ et $\Gamma(U \cap X', \mathscr{F}''_{/X'}) = \widehat{M}''$; notre assertion résulte alors de 1.8.26(i) et 1.12.16(i).

(ii) Il suffit évidemment de montrer la première assertion. La question étant locale, on peut se borner au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ est affine, $\mathscr{J} = \widetilde{K}$ et K est un idéal de B. Supposons d'abord que $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module de présentation finie. On a alors une suite exacte de B-modules $B^p \to B^q \to M \to 0$, qui induit, en vertu de (i), un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
i^*(\mathscr{O}_X^p) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^\sharp"] & i^*(\mathscr{O}_X^q) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^\sharp"] & i^*(\widetilde{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma^\sharp"] & 0 \\
\mathscr{O}_{\widehat{X}}^p \arrow[r] & \mathscr{O}_{\widehat{X}}^q \arrow[r] & \widetilde{M}_{/X'} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Il résulte aussitôt des définitions que $\gamma^\sharp \colon i^*(\mathscr{O}_X) \to \mathscr{O}_{\widehat{X}}$ est l'identité, ce qui entraîne l'assertion.

Supposons ensuite que $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module de type fini, et posons $N = M_{K\text{-tor}}$ (1.8.30). En vertu de (i), on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & i^*(\widetilde{N}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha'"'] & i^*(\widetilde{M}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & i^*((M/N)^\sim) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha''"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \widetilde{N}_{/X'} \arrow[r] & \widetilde{M}_{/X'} \arrow[r] & ((M/N)^\sim)_{/X'} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

D'après 1.12.16(iii), M/N est un B-module de présentation finie, et $K^n N = 0$ pour un entier $n \geq 0$. Par suite α' et α'' sont des isomorphismes ; donc α est un isomorphisme.

Corollaire 2.5.6. *Sous les hypothèses de* (2.5.5), *si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents de type fini, il existe un isomorphisme canonique*

$$(\mathscr{F}_{/X'}) \otimes_{(\mathscr{O}_X)_{/X'}} (\mathscr{G}_{/X'}) \simeq (\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{G})_{/X'}. \tag{2.5.6.1}$$

Proposition 2.5.7. *Soient X un schéma quasi-compact, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X'. Supposons la paire (X, X') quasi-idyllique* (1.12.21). *Pour qu'un idéal $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$ soit ouvert de type fini, il faut et il suffit qu'il soit le complété le long de X' d'un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{C}$ de $\mathscr{O}_X$ contenant une puissance de $\mathscr{J}$. De plus, $\mathscr{C}$ est uniquement déterminé par $\mathscr{A}$.*

Si $\mathscr{C}$ est un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$ contenant une puissance de $\mathscr{J}$, alors $\mathscr{C}_{/X'}$ est un idéal ouvert de type fini de $\widehat{X}$ en vertu de 2.5.2(iv). Inversement, soit $\mathscr{A}$ un idéal ouvert de type fini de $\widehat{X}$. Quitte à remplacer $\mathscr{J}$ par une puissance, on peut supposer $\mathscr{J}_{/X'} \subset \mathscr{A}$. Le quotient $\mathscr{A}/\mathscr{J}_{/X'}$ s'identifie à un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{J}_{/X'} = \mathscr{O}_{X'}$ (2.5.2). Notons $\mathscr{C}$ l'image réciproque de $\mathscr{A}/\mathscr{J}_{/X'}$ dans $\mathscr{O}_X$, qui est un idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$ contenant $\mathscr{J}$. Pour tout entier $n \geq 1$, compte tenu des isomorphismes $\mathscr{O}_{\widehat{X}}/(\mathscr{J}_{/X'})^n \simeq (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^n)|X'$ et $\mathscr{J}_{/X'}/(\mathscr{J}_{/X'})^n \simeq (\mathscr{J}/\mathscr{J}^n)|X'$ (2.5.2), on a

$$\mathscr{A}/(\mathscr{J}_{/X'})^n \simeq (\mathscr{C}/\mathscr{J}^n)|X'.$$

Comme $\mathscr{A}$ est un idéal ouvert de $\widehat{X}$, il est isomorphe à la limite projective des $\mathscr{A}/(\mathscr{J}_{/X'})^n$. On en déduit que l'on a $\mathscr{A} = \mathscr{C}_{/X'}$. Si $\mathscr{C}'$ est un autre idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_X$ contenant $\mathscr{J}^n$ ($n \geq 1$) tel que $\mathscr{A} = \mathscr{C}'_{/X'}$, alors $(\mathscr{C}/\mathscr{J}^n)|X' = (\mathscr{C}'/\mathscr{J}^n)|X'$ en vertu de 2.5.5(i). Par suite on a $\mathscr{C}/\mathscr{J}^n = \mathscr{C}'/\mathscr{J}^n$; d'où $\mathscr{C} = \mathscr{C}'$.

Proposition 2.5.8. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent de type fini. Supposons la paire (X, X') quasi-idyllique* (1.12.21). *Alors, le noyau de l'homomorphisme*

$$\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$$

déduit de $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_{/X'}$, est formé des sections nulles sur un voisinage de X'.

Il résulte de la définition de $\mathscr{F}_{/X'}$ que l'image canonique d'une telle section est nulle. Réciproquement, si $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ a une image nulle dans $\Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$, il suffit de voir que tout $x \in X'$ admet un voisinage dans X dans lequel s est nulle, et on peut donc se ramener au cas où $X = \mathrm{Spec}(B)$ est affine, $X' = \mathrm{V}(K)$, où K est un idéal de type fini de B, et $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, où M est un B-module de type fini. Alors $\Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$ est le séparé complété $\widehat{M}$ de M pour la topologie K-préadique, et l'homomorphisme $\Gamma(X, \mathscr{F}) \to \Gamma(X', \mathscr{F}_{/X'})$ est l'homomorphisme canonique $M \to \widehat{M}$. Le noyau de cet homomorphisme est formé de sections $z \in M$ annulée par un élément de $1 + K$ (1.8.27, 1.8.25.4 et 1.12.14(i)). On a donc $(1 + f)s = 0$ pour un $f \in K$; pour tout $x \in X'$, on en déduit $(1_x + f_x)s_x = 0$, et comme $1 + f_x$ est inversible dans $\mathscr{O}_x$, on a $s_x = 0$, ce qui démontre la proposition.

Corollaire 2.5.9. *Sous les hypothèses de* (2.5.8)*, le support de $\mathscr{F}_{/X'}$ est égal à* $\mathrm{Supp}(\mathscr{F}) \cap X'$.

En effet, comme $\mathscr{F}_{/X'}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module de type fini (2.5.5), son support est fermé ([28] 0.5.2.2), et le corollaire résulte alors de 2.5.8.

2.5.10. Soient $f\colon X \to Y$ un morphisme de schémas, X' (resp. Y') un sous-schéma fermé de X (resp. Y), défini par un idéal quasi-cohérent de type fini $\mathscr{J}$ (resp. $\mathscr{K}$) de $\mathscr{O}_X$ (resp. $\mathscr{O}_Y$), $i\colon X' \to X$ et $j\colon Y' \to Y$ les injections canoniques. Supposons que $f \circ i$ soit majoré par j ; il revient au même de dire que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}$. On a donc pour tout entier $n > 0$, $f^*(\mathscr{K}^n)\mathscr{O}_X \subset \mathscr{J}^n$; par suite, si on pose $X_n = (X', (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{n+1})|X')$ et $Y_n = (Y', (\mathscr{O}_Y/\mathscr{K}^{n+1})|Y')$, on déduit de f

un morphisme $f_n\colon X_n \to Y_n$ et il est immédiat que les f_n forment un système inductif. Nous désignons sa limite par $\hat{f}\colon X_{/X'} \to Y_{/Y'}$ et nous dirons que $\hat{f}$ *est le prolongement de* f *aux complétés de* X *et* Y *le long de* X' *et* Y'. Il résulte aussitôt de la définition précédente que $\hat{f}$ est un morphisme de schémas formels et le diagramme de morphismes d'espaces annelés

$$\begin{tikzcd} X_{/X'} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "i_X"'] & Y_{/Y'} \arrow[d, "i_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{2.5.10.1}$$

est commutatif. On a $\hat{f}^*(\mathscr{K}_{/Y'})\mathscr{O}_{X_{/X'}} \subset \mathscr{J}_{/X'}$, et $f_n : X_n \to Y_n$ est le morphisme déduit de $\hat{f}$, en vertu de 2.2.2 et 2.5.2(i). Si en outre $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X$, alors $\mathscr{J}_{/X'} = \hat{f}^*(\mathscr{K}_{/Y'})\mathscr{O}_{X_{/X'}}$, et $\hat{f}$ est un morphisme adique en vertu de 2.2.6.

Proposition 2.5.11. *Les hypothèses étant celles de* (2.5.10)*, supposons de plus les paires* (X, X') *et* (Y, Y') *quasi-idylliques* (1.12.21)*. Alors, pour tout* $\mathscr{O}_Y$*-module quasi-cohérent de type fini* $\mathscr{G}$*, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel de* $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$*-modules*

$$(f^*(\mathscr{G}))_{/X'} \xrightarrow{\sim} \hat{f}^*(\mathscr{G}_{/Y'}).$$

En effet, en vertu de 2.5.5(ii), $(f^*(\mathscr{G}))_{/X'}$ s'identifie à $i_X^*(f^*(\mathscr{G}))$ et $\hat{f}^*(\mathscr{G}_{/Y'})$ à $\hat{f}^*(i_Y^*\mathscr{G})$; la proposition résulte alors de la commutativité du diagramme (2.5.10.1).

2.6 Schémas formels idylliques

2.6.1. On dit qu'un schéma formel affine est *globalement idyllique* (resp. *globalement quasi-idyllique*, resp. *globalement idyllique rig-pur*) s'il est isomorphe à un spectre formel $\mathrm{Spf}(A)$, où A est un anneau idyllique (resp. quasi-idyllique , resp. idyllique rig-pur) (1.10.1 et 1.8.30.1).

Définition 2.6.2. On dit qu'un schéma formel est *idyllique* (resp. *quasi-idyllique*, resp. *idyllique rig-pur*) s'il est adique et si tout point admet un voisinage ouvert formel affine globalement idyllique (resp. globalement quasi-idyllique, resp. globalement idyllique rig-pur).

On peut faire les remarques suivantes :

2.6.2.1. La notion de schéma formel quasi-idyllique est secondaire.

2.6.2.2. Un schéma formel localement noethérien est idyllique (2.1.28).

2.6.2.3. Un schéma formel affine idyllique (resp. quasi-idyllique, resp. idyllique rig-pur) n'est pas nécessairement globalement idyllique (resp. globalement quasi-idyllique, resp. globalement idyllique rig-pur). On signale toutefois les énoncés 2.6.3, 2.6.12 et 2.10.15.

Proposition 2.6.3. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel affine globalement quasi-idyllique, $\mathfrak{X}$ un $\mathfrak{Y}$-schéma formel localement de type fini. Alors pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un anneau quasi-idyllique.*

Cela est mentionné à titre de rappel (2.3.12).

Corollaire 2.6.4. *Un schéma formel localement de type fini sur un schéma formel quasi-idyllique est quasi-idyllique.*

Corollaire 2.6.5. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel quasi-idyllique, les ouverts formels affines globalement quasi-idylliques forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.*

Proposition 2.6.6. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel quasi-idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de $\mathfrak{X}$. Alors l'espace topologique sous-jacent à $\mathfrak{X}$ est localement noethérien ; en particulier, le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$ est quasi-séparé.*

Il suffit d'établir la première assertion ([28] 6.1.13). La question étant locale, on peut clairement se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine et A est topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R. Soient $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de R, t un élément non nul de $\mathfrak{m}$. Les schémas affines $\mathrm{Spec}(A/tA)$ et $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{m}A)$ ont même espace topologique sous-jacent. Comme A/tA est une algèbre de type finie sur R/tR, $A/\mathfrak{m}A$ est une algèbre de type finie sur $R/\mathfrak{m}$; elle est donc noethérienne, d'où la conclusion.

Corollaire 2.6.7. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels adiques. Alors :*

(i) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-idyllique, f est quasi-séparé.*

(ii) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact et $\mathfrak{Y}$ est quasi-idyllique, f est quasi-compact.*

Cela résulte de 2.3.2, 2.6.6 et ([28] 6.1.10).

Corollaire 2.6.8. *Soient $\mathfrak{Z}$ un schéma formel quasi-idyllique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de schémas formels tels que g soit localement de type fini et que $g \circ f$ soit de présentation finie. Alors f est de présentation finie.*

En effet, $\mathfrak{X}$ est quasi-idyllique (2.6.4) et f est localement de présentation finie (2.3.18). Il résulte alors de 2.6.7(i) que f est quasi-séparé, et de 2.6.6 et ([28] 6.1.5(v)) que f est quasi-compact.

Proposition 2.6.9. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel quasi-idyllique, x un point de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{O}_x$ la fibre de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ en x. Alors :*

(i) *Soient $U = \mathrm{Spf}(A)$ un voisinage ouvert formel affine globalement quasi-idyllique de x dans $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier ouvert de A correspondant à x. Alors $\mathscr{O}_x$ est fidèlement plat sur $A_{\mathfrak{p}}$.*

(ii) *Soient y une spécialisation de x dans $\mathfrak{X}$, $\mathscr{O}_y$ l'anneau local de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ en y. Alors l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_y \to \mathscr{O}_x$ est plat.*

Posons $S = A - \mathfrak{p}$, de sorte que $\mathscr{O}_x = A_{\{S\}}$ (1.8.12). La proposition (i) résulte alors de 1.12.7. Pour établir (ii), il suffit de montrer que, pour tout idéal de type fini I de $\mathscr{O}_y$, l'homomorphisme canonique $\sigma \colon I \otimes_{\mathscr{O}_y} \mathscr{O}_x \to \mathscr{O}_x$ est injectif ([12] chap. I §2.3 rem. 1). En vertu de 2.6.5, il existe un voisinage ouvert formel affine globalement quasi-idyllique $U = \mathrm{Spf}(A)$ de y dans $\mathfrak{X}$ et un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de A tels que $I = \mathfrak{a}\mathscr{O}_y$. On a $I = \mathfrak{a} \otimes_A \mathscr{O}_y$ d'après (i) ; donc σ s'identifie à la flèche canonique $\mathfrak{a} \otimes_A \mathscr{O}_x \to \mathscr{O}_x$, qui est injective en vertu de (i).

Proposition 2.6.10. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel quasi-idyllique et quasi-compact, le foncteur sur le topos de Zariski de $\mathfrak{X}$ défini par $F \mapsto F(\mathfrak{X})$, commute aux limites inductives filtrantes.*

C'est un cas particulier élémentaire de ([1] VI 5.3). Rappelons la preuve. Soit $(F_i)_{i \in I}$ un système inductif filtrant de faisceaux de Zariski sur $\mathfrak{X}$. Sa limite inductive dans la catégorie des préfaisceaux de Zariski est représentable et se calcule terme à terme. En vertu de 2.6.6, toute famille couvrante du site de Zariski de $\mathfrak{X}$ admet une sous-famille couvrante finie. Il en résulte aussitôt que le préfaisceau limite inductive de $(F_i)_{i \in I}$ est un faisceau ([1] I 2.8.1).

Proposition 2.6.11. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel affine globalement quasi-idyllique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est localement de présentation finie.*

(ii) *Pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$, l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est topologiquement de présentation finie sur $\Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$.*

(iii) *Pour tout $x \in \mathfrak{X}$, il existe un voisinage ouvert formel affine U de x tel que l'anneau admissible $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit topologiquement de présentation finie sur $\Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$.*

En effet, en vertu de 2.3.17, 2.2.8 et 1.10.4, (i) implique (ii) et (iii) entraîne (i) ; et il est clair que (ii) implique (iii).

Corollaire 2.6.12. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel affine globalement idyllique, $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de présentation finie. Alors pour tout ouvert formel affine U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un anneau idyllique.*

Cela résulte de 2.6.11 et 1.10.8.

Corollaire 2.6.13. *Un schéma formel localement de présentation finie sur un schéma formel idyllique est idyllique.*

Corollaire 2.6.14. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique (resp. idyllique rig-pur), l'espace topologiquement annelé induit sur tout ouvert de $\mathfrak{X}$ est encore un schéma formel idyllique (resp. idyllique rig-pur).*

Cela résulte de 2.6.13 et 1.12.6.

Corollaire 2.6.15. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique (resp. idyllique rig-pur), les ouverts formels affines globalement idylliques (resp. globalement idylliques rig-purs) forment une base de la topologie de $\mathfrak{X}$.*

Proposition 2.6.16. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique rig-pur, $\mathfrak{Y}$ un schéma formel quasi-idyllique, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de type fini (resp. de type fini). Alors f est localement de présentation finie (resp. de présentation finie).*

Il suffit, d'après 2.6.7, de montrer la première proposition : *si f est localement de type fini, il est localement de présentation finie.* La question étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$ (2.3.17), on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines, A est idyllique rig-pur (2.6.15), B est quasi-idyllique et f est associé à un homomorphisme topologiquement de type fini $\varphi\colon B \to A$ (2.3.12). L'assertion est évidente si B est noethérien (1.8.17). Supposons B topologiquement de type fini sur un anneau 1-valuatif R. Comme A est topologiquement de type fini sur R (1.8.21) et rig-pur, donc R-plat (1.9.12), il est topologiquement de présentation finie sur R (1.9.16). On en déduit que f est localement de présentation finie, en vertu de 2.3.18(iii).

Définition 2.6.17. Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X. On dit que la paire (X, X') est *idyllique* si elle vérifie l'une des conditions suivantes :

(a) X est localement noethérien.

(b) X est localement de présentation finie sur un anneau idyllique A, et X' est défini par un idéal de $\mathscr{O}_X$ de la forme $J\mathscr{O}_X$, où J est un idéal de définition de type fini de A.

Proposition 2.6.18. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X'. Supposons la paire (X, X') idyllique. Alors :*

(i) *Le schéma formel $\widehat{X}$ est idyllique. Si, de plus, l'ouvert $X - X'$ est schématiquement dense dans X, $\widehat{X}$ est rig-pur.*

(ii) *Pour tout ouvert affine U de X, $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ est un anneau universellement cohérent* (1.4.1) *; en particulier $\mathscr{O}_X$ est un faisceau cohérent d'anneaux.*

(i) Reprenons les notations de 2.6.17. Dans le cas (a), $\widehat{X}$ est localement noethérien ([28] 10.8.4). Dans le cas (b), $\widehat{X}$ est localement de présentation finie sur $\mathrm{Spf}(A)$ (2.5.10), donc idyllique en vertu de 2.6.13. La seconde assertion résulte de 1.8.30.2 et 1.12.17.

(ii) Cela résulte de 1.12.15 et 1.4.2.

Corollaire 2.6.19. *Sous les hypothèses de* (2.6.18)*, le morphisme canonique d'espaces annelés $i : \widehat{X} \to X$* (2.5.3) *est plat.*

Notons d'abord que pour tout ouvert U de X, la paire $(U, X' \cap U)$ est idyllique, et le schéma formel complété de U le long de $X' \cap U$ s'identifie au schéma formel induit par $X_{/X'}$ sur l'ouvert $U \cap X'$. En vertu de 1.3.17, comme $\mathscr{O}_X$ est cohérent

(2.6.18), il suffit alors de montrer que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto i^*(\mathscr{F})$ est exact sur la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, ce qui résulte de 2.5.5.

Corollaire 2.6.20. *Sous les hypothèses de* (2.6.18)*, si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, il existe un isomorphisme canonique*

$$(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G}))_{/X'} \simeq \mathscr{H}om_{(\mathscr{O}_X)_{/X'}}(\mathscr{F}_{/X'},\mathscr{G}_{/X'}). \tag{2.6.20.1}$$

Cela résulte en effet de 1.3.5, 2.5.5, 2.6.19 et ([28] 0.5.7.6).

Corollaire 2.6.21. *Les hypothèses étant celles de* (2.6.18)*, soit de plus $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. Pour que $u_{/X'}\colon \mathscr{F}_{/X'} \to \mathscr{G}_{/X'}$ soit nul, il faut et il suffit que u soit nul dans un voisinage de X'.*

D'après 2.5.5(ii), $u_{/X'}$ s'identifie à $i^*(u)$. Donc si on considère u comme une section au-dessus de X du faisceau $\mathscr{H} = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $u_{/X'}$ est la section de $i^*(\mathscr{H}) = \mathscr{H}_{/X'}$ au-dessus de X' qui lui correspond (2.6.20.1). Il suffit alors d'appliquer 2.5.8.

Corollaire 2.6.22. *Les hypothèses étant celles de* (2.6.18)*, soit de plus $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un homomorphisme de $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. Pour que $u_{/X'}$ soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme*)*, il faut et il suffit que u soit un monomorphisme* (*resp. un épimorphisme*) *dans un voisinage de X'.*

Soient $\mathscr{N}$ et $\mathscr{P}$ le noyau et le conoyau de u, de sorte qu'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{N} \xrightarrow{v} \mathscr{F} \xrightarrow{u} \mathscr{G} \xrightarrow{w} \mathscr{P} \longrightarrow 0,$$

et donc (2.5.5(i)) la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{N}_{/X'} \xrightarrow{v_{/X'}} \mathscr{F}_{/X'} \xrightarrow{u_{/X'}} \mathscr{G}_{/X'} \xrightarrow{w_{/X'}} \mathscr{P}_{/X'} \longrightarrow 0.$$

Si $u_{/X'}$ est un monomorphisme (resp. un épimorphisme), on a $v_{/X'} = 0$ (resp. $w_{/X'} = 0$) ; donc il y a un voisinage de X' dans lequel $v = 0$ (resp. $w = 0$) en vertu de 2.6.21.

Proposition 2.6.23. *Soient X un schéma cohérent, X' un sous-schéma fermé de X, U l'ouvert $X - X'$ de X. Supposons la paire (X, X') idyllique.*

(i) *Pour tout $\mathscr{O}_U$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}'$ tel que $\mathscr{F}'|U = \mathscr{F}$.*

(ii) *Pour toute $\mathscr{O}_U$-algèbre cohérente $\mathscr{B}$, il existe une $\mathscr{O}_X$-algèbre cohérente $\mathscr{B}'$ telle que $\mathscr{B}'|U = \mathscr{B}$.*

(iii) *Pour tout U-schéma fini V, il existe un X-schéma fini et de présentation finie Y tel que $Y \times_X U$ soit U-isomorphe à V.*

On notera que le schéma U est noethérien.

(i) D'après ([28] 6.9.11), il existe un $\mathscr{O}_X$-module de présentation finie $\mathscr{F}'$ tel que $\mathscr{F}'|U = \mathscr{F}$, et il est cohérent en vertu de 2.6.18(ii).

(ii) Notons $\phi\colon X_1 \to X$ l'éclatement de X' dans X, qui est un morphisme propre de présentation finie d'après 1.13.3(ii). Supposons qu'il existe une $\mathscr{O}_{X_1}$-algèbre cohérente $\mathscr{B}_1$ telle que $\mathscr{B}_1|\phi^{-1}(U) = \phi_U^*(\mathscr{B})$; alors $\mathscr{B}' = \phi_*(\mathscr{B}_1)$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre cohérente en vertu de 1.4.8 et 2.6.18(ii), qui répond à la question. On se réduit ainsi au cas où X' est défini par un idéal inversible $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, qui est de plus cohérent d'après 2.6.18(ii). Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines tels que, pour tout $i \in I$, $J_i = \Gamma(V_i, \mathscr{J})$ soit un idéal principal de $A_i = \Gamma(V_i, \mathscr{O}_X)$; posons $B_i = \Gamma(V_i \cap U, \mathscr{B})$. D'après (i), il existe un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}|U = \mathscr{B}$. On a $\mathscr{F}|V_i = \widetilde{M}_i$, où M_i est A_i-module cohérent (1.4.3). Quitte à remplacer $\mathscr{F}$ par $\mathscr{J}^n\mathscr{F}$ ($n \geq 0$), on peut supposer que, pour tout $i \in I$, M_i est engendré par un nombre fini de sections de B_i entières sur A_i. Notons $j\colon U \to X$ l'injection canonique (qui est quasi-compacte), $\iota\colon \mathscr{F} \to j_*(\mathscr{B})$ l'homomorphisme d'adjonction et $\mathscr{B}'$ la sous-$\mathscr{O}_X$-algèbre de $j_*(\mathscr{B})$ engendrée par $\iota(\mathscr{F})$. Alors $\mathscr{B}'$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre quasi-cohérente ([28] 6.7.1) telle que $\mathscr{B}'|U = \mathscr{B}$. Montrons que $\mathscr{B}'$ est cohérente. La question étant locale, on peut se borner au cas où X est l'un des V_i. Soient $x_1, \dots, x_r$ des sections de B_i entières sur A_i, qui engendrent le A_i-module M_i. Notons B'_i la sous-A_i-algèbre de B_i engendrée par les x_i. Il est clair que B'_i est une A_i-algèbre finie et que l'on a $\mathscr{B}'|V_i = \widetilde{B}'_i$. Comme B'_i est J-pure, elle est de présentation finie sur A_i en vertu de 1.12.16(ii).

(iii) Cela résulte de (ii) et ([28] 6.2.10).

Remarque 2.6.24. On peut donner une démonstration légèrement différente de 2.6.23(ii). En effet, d'après 1.12.24, il existe un morphisme propre de présentation finie $f\colon Z \to X$ tel que $Z \times_X U$ soit U-isomorphe à $V = \operatorname{Spec}(\mathscr{B})$. Il résulte alors de 1.4.8 et 2.6.18(ii) que $f_*(\mathscr{O}_Z)$ est une $\mathscr{O}_X$-algèbre cohérente, qui répond à la question.

Corollaire 2.6.25. *Soient* (A, J) *un couple hensélien idyllique* (1.15.17)*,* $S = \operatorname{Spec}(A)$*,* U *l'ouvert* $S - \mathrm{V}(J)$ *de* S*,* X *un* S*-schéma de présentation finie,* $V = X \times_S U$*,* W *un* V*-schéma fini. Alors il existe un* X*-schéma fini et de présentation finie* Y *tel que* $Y \times_S U$ *soit* V*-isomorphe à* W*.*

Si A est noethérien, la proposition est un cas particulier de 2.6.23(iii). On peut donc se borner au cas où il existe un anneau idyllique A_0, un idéal de définition de type fini I et une A_0-algèbre de présentation finie A_1 tels que A soit le hensélisé I-préadique de A_1 et $J = IA$ (1.15.17). Posons $S_0 = \operatorname{Spec}(A_0)$, $S_1 = \operatorname{Spec}(A_1)$, et soient U_0 l'ouvert $S_0 - \mathrm{V}(I)$ de S_0, $U_1 = S_1 \times_{S_0} U_0$. Par descente ([31] 8.8.2 et 8.10.5), quitte à remplacer A_1 par un voisinage étale élémentaire de IA_1 (1.15.2), on peut supposer qu'il existe un S_1-schéma de présentation finie X_1 et si l'on pose $V_1 = X_1 \times_{S_1} U_1$, un V_1-schéma fini W_1 tels que X soit S-isomorphe à $X_1 \times_{S_1} S$ et que W soit V-isomorphe à $W_1 \times_{U_1} U$. En vertu de 2.6.23(iii), il existe un X_1-schéma fini et de présentation finie Y_1 tel que $Y_1 \times_{X_1} V_1$ soit V_1-isomorphe à W_1. Le X-schéma $Y = Y_1 \times_{X_1} X$ répond à la question.

2.7 Modules cohérents sur les schémas formels affines globalement idylliques

2.7.1. Dans tout ce paragraphe, A désigne un anneau préadique complet et séparé, J un idéal de définition de A, $X = \operatorname{Spec}(A)$, $\mathfrak{X} = \operatorname{Spf}(A)$. Si $X' = \operatorname{Spec}(A/J)$ est le sous-schéma fermé de X défini par $\widetilde{J}$, il résulte des définitions que $\mathfrak{X}$ est identique à $X_{/X'}$. Pour tout A-module M, $M^{\Delta} = (\widetilde{M})_{/X'}$ est donc un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. En outre, si $u\colon M \to N$ est un homomorphisme de A-modules, il lui correspond naturellement un homomorphisme continu de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules $u^{\Delta}\colon M^{\Delta} \to N^{\Delta}$. On définit ainsi un foncteur additif

$$M \mapsto M^{\Delta} \tag{2.7.1.1}$$

de la catégorie des A-modules dans celle des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules. Cette définition ne dépend pas de l'idéal de définition J choisi (2.5.4).

Soit K un idéal ouvert de A. Comme A est un anneau préadique, les $(J^n K)$ forment un système fondamental d'idéaux de définition de A. Le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module K^{Δ}, suivant la définition précédente, est donc égal à l'idéal de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ déjà désigné par cette notation dans (2.1.8).

Théorème 2.7.2. *Soit A un anneau idyllique. Alors le foncteur* (2.7.1.1) *est une équivalence de catégories, de la catégorie des A-modules cohérents sur celle des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents.*

On établit en premier lieu la proposition suivante :

Proposition 2.7.2.1. *Soit A un anneau idyllique.*

(i) *Pour tout A-module de type fini M, on a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\Gamma(\mathfrak{X}, M^{\Delta}) \xrightarrow{\sim} M. \tag{2.7.2.2}$$

(ii) *Pour toute suite exacte de A-modules* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *telle que M soit de type fini, la suite de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules* $0 \to M'^{\Delta} \to M^{\Delta} \to M''^{\Delta} \to 0$ *est exacte.*

Par définition, $\Gamma(\mathfrak{X}, M^{\Delta})$ est le séparé complété de M pour la topologie J-adique ; mais comme A est idyllique et M de type fini, M est complet et séparé en vertu de 1.10.2, ce qui prouve (i). La proposition (ii) résulte de 2.5.5(i).

Montrons ensuite que, dans la catégorie des A-modules cohérents, le foncteur (2.7.1.1) est pleinement fidèle ; cela résulte de la proposition suivante :

Proposition 2.7.2.3. *Soient A un anneau idyllique, M, N deux A-modules cohérents. Alors il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$(M \otimes_A N)^{\Delta} \xrightarrow{\sim} M^{\Delta} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} N^{\Delta}, \tag{2.7.2.4}$$

$$(\operatorname{Hom}_A(M, N))^{\Delta} \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(M^{\Delta}, N^{\Delta}). \tag{2.7.2.5}$$

De plus, l'application $u \mapsto u^\Delta$ est un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}}(M^\Delta, N^\Delta). \tag{2.7.2.6}$$

Les isomorphismes (2.7.2.4) et (2.7.2.5) sont des cas particuliers de (2.5.6.1) et (2.6.20.1). Comme $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ est un A-module cohérent, on peut lui appliquer (2.7.2.2), qui l'identifie à $\Gamma(\mathfrak{X}, (\mathrm{Hom}_A(M, N))^\Delta)$, et utiliser (2.7.2.5), qui prouve que (2.7.2.6) est un isomorphisme.

Proposition 2.7.2.7. *Si A est un anneau idyllique, $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est un faisceau cohérent d'anneaux.*

Comme pour tout $f \in A$, $A_{\{f\}}$ est un anneau idyllique (2.6.12), on est ramené à prouver que le noyau de tout homomorphisme $v\colon \mathscr{O}_\mathfrak{X}^n \to \mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module de type fini. On a alors $v = u^\Delta$, où u est un A-homomorphisme $A^n \to A$ (2.7.2.6). Le noyau N de u est cohérent (1.10.3). On conclut de 2.7.2.1(ii) que le noyau de v est isomorphe à N^Δ, et qu'il est de type fini.

2.7.2.8. Les notations et hypothèses étant celles de 2.7.1, supposons de plus que J soit de type fini. Posons $\mathscr{J} = J^\Delta$, $A_n = A/J^{n+1}$ et $X_n = \mathrm{Spec}(A_n) = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J}^{n+1})$ pour $n \geq 0$ (2.1.11). Soit u_{mn} le morphisme de schémas $X_m \to X_n$ correspondant à l'homomorphisme canonique $A_n \to A_m$ pour $m \leq n$. Pour achever la démonstration de 2.7.2, il reste à établir la proposition suivante :

Proposition 2.7.2.9. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module cohérent.*
(ii) *$\mathscr{F}$ est isomorphe à une limite projective* (2.1.38) *d'une suite $(\mathscr{F}_n)$ de $\mathscr{O}_{X_n}$-modules cohérents tels que $u_{mn}^*(\mathscr{F}_n) = \mathscr{F}_m$ pour $m \leq n$.*
(iii) *Il existe un A-module cohérent M tel que $\mathscr{F}$ soit isomorphe à M^Δ.*

Le système projectif $(\mathscr{F}_n)$ est alors isomorphe au système des $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{X_n}$.

Montrons d'abord que (iii) implique (i) : en effet, on a une suite exacte $A^p \to A^q \to M \to 0$ de A-modules, d'où l'on déduit (2.7.2.1) la suite exacte $\mathscr{O}_\mathfrak{X}^p \to \mathscr{O}_\mathfrak{X}^q \to M^\Delta \to 0$; donc M^Δ est un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module cohérent en vertu de 2.7.2.7.

Montrons ensuite que (i) implique (ii). Comme $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$ est un faisceau d'anneaux cohérents (2.7.2.7) et que $\mathscr{J}^{n+1} = (J^{n+1})^\Delta$ est un idéal de type fini, donc cohérent, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_\mathfrak{X}} \mathscr{O}_{X_n}$ est un $\mathscr{O}_\mathfrak{X}$-module cohérent (1.3.5), et donc un $\mathscr{O}_{X_n}$-module cohérent (1.3.6). Montrons que l'homomorphisme canonique $w\colon \mathscr{F} \to \varprojlim \mathscr{F}_n$ est bijectif. La question étant locale, remplaçant A par $A_{\{f\}}$ (2.6.12), on peut se borner au cas où $\mathscr{F}$ est conoyau d'un homomorphisme $\mathscr{O}_\mathfrak{X}^p \to \mathscr{O}_\mathfrak{X}^q$; cet homomorphisme est de la forme v^Δ, où v est un homomorphisme $A^p \to A^q$ de A-modules (2.7.2.6). Si on note N le conoyau de v, on a $\mathscr{F} \simeq N^\Delta$ en vertu de 2.7.2.1(ii). Il résulte alors de 2.5.2(iii) et des définitions que w est un isomorphisme.

Montrons enfin que (ii) implique (iii). Il résulte des hypothèses que $\mathscr{F}_n = \widetilde{M_n}$, où M_n est un A_n-module cohérent (1.4.3), et $M_m = M_n \otimes_{A_n} A_m$ pour $m \leq n$. En vertu de 1.10.11, la limite projective M du système projectif (M_n) est un A-module cohérent tel que $M_n = M \otimes_A A_n$ pour tout $n \geq 0$. Par suite, $\mathscr{F}$ est isomorphe à M^Δ, et $\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{X_n}$ est isomorphe à $\mathscr{F}_n = \widetilde{M_n}$ en vertu de 2.5.2(iii).

Proposition 2.7.3. *Soient* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ *un schéma formel affine globalement idyllique,* $\mathscr{F}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module cohérent,* $\mathscr{G}$ *un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module,* $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$*,* $N = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{G})$*. Alors l'application* $u \mapsto \Gamma(\mathfrak{X}, u)$ *est un isomorphisme bifonctoriel*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M, N). \tag{2.7.3.1}$$

En vertu de 2.7.2 et (2.7.2.2), M est un A-module cohérent et on a $\mathscr{F} = M^\Delta$. On a une suite exacte de A-modules $A^p \to A^q \to M \to 0$, d'où l'on déduit la suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^p \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^q \to \mathscr{F} \to 0$ (2.7.2). Appliquant les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(-, N)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(-, \mathscr{G})$, on obtient un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^q, \mathscr{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^p, \mathscr{G}) \arrow[d, "\gamma"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(M, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^q, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(A^p, N)
\end{tikzcd}$$

où les morphismes verticaux sont définis par l'évaluation en $\mathfrak{X}$. Comme β et γ sont clairement des isomorphismes, il en est de même de α.

Proposition 2.7.4. *Soient* $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$*,* $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ *deux schémas formels affines globalement idylliques,* $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme,* N *un* B*-module de type fini. Alors, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-modules*

$$f^*(N^\Delta) \xrightarrow{\sim} (N \otimes_B A)^\Delta.$$

En effet, il existe des idéaux de définition de type fini J (resp. K) de A (resp. B) tels que $KA \subset J$ (2.2.4), et la proposition n'est qu'un cas particulier de 2.5.11.

Corollaire 2.7.5. *Sous les hypothèses de* (2.7.4)*, pour tout idéal de type fini* $\mathfrak{b}$ *de* B*, on a*

$$f^*(\mathfrak{b}^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{b}A)^\Delta.$$

Soit $j \colon \mathfrak{b} \to B$ l'injection canonique. Par définition, $f^*(\mathfrak{b}^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est l'image de l'homomorphisme $f^*(j^\Delta) \colon f^*(\mathfrak{b}^\Delta) \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = f^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$, qui s'identifie à

$$(j \otimes 1)^\Delta \colon (\mathfrak{b} \otimes_B A)^\Delta \to A^\Delta$$

d'après 2.7.4. Il résulte de 2.7.2.1 que l'image de $(j \otimes 1)^\Delta$ est $(\mathfrak{b}A)^\Delta$, d'où la conclusion.

2.7.6. Soient A un anneau idyllique, M un A-module cohérent, $f \in A$; posons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathscr{F} = M^\Delta$. En vertu de 2.5.1 et 1.10.12(iii), on a un isomorphisme fonctoriel de $A_{\{f\}}$-modules topologiques

$$\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{F}) = M_{\{f\}} \simeq M \otimes_A A_{\{f\}}. \tag{2.7.6.1}$$

Soient x un point de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{p}$ l'idéal premier ouvert de A correspondant. Notons $\mathscr{O}_x$ (resp. $\mathscr{F}_x$) la fibre de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathscr{F}$) en x et $\kappa(x)$ le corps résiduel de $\mathscr{O}_x$. On déduit de (2.7.6.1), par passage à la limite inductive, un isomorphisme fonctoriel

$$\mathscr{F}_x \simeq M \otimes_A \mathscr{O}_x. \tag{2.7.6.2}$$

Compte tenu de 1.8.13, ce dernier induit un isomorphisme fonctoriel

$$\mathscr{F}_x \otimes_{\mathscr{O}_x} \kappa(x) \simeq M_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}. \tag{2.7.6.3}$$

2.8 Modules cohérents sur les schémas formels idylliques

Proposition 2.8.1. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique, alors $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un faisceau d'anneaux cohérent*

En effet, le fait que $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit cohérent étant une question locale, on est ramené au cas d'un schéma formel affine globalement idyllique, et donc à 2.7.2.7.

Corollaire 2.8.2. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ un idéal de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Pour que $\mathscr{A}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, il faut et il suffit qu'il soit un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de type fini.*

En effet, tout sous-module de type fini d'un module cohérent est cohérent.

Proposition 2.8.3. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Si $\mathscr{A}$ contient un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, alors $\mathscr{A}$ est un idéal ouvert cohérent.*

En effet, la question étant locale, on peut supposer $\mathfrak{X}$ formel affine globalement idyllique. La proposition résulte alors de 2.7.2.

Proposition 2.8.4. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X tels que la paire (X, X') soit idyllique* (2.6.17), *$\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $\mathscr{F}_{/X'}$ le complété de $\mathscr{F}$ le long de X'. Alors $\mathscr{F}_{/X'}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent.*

En effet, la question étant locale, on peut supposer qu'il existe une suite exacte $\mathscr{O}_X^p \to \mathscr{O}_X^q \to \mathscr{F} \to 0$, ce qui entraîne que $\mathscr{F}_{/X'}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module de présentation finie (2.5.5), et donc cohérent (2.8.1).

Théorème 2.8.5. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_n$ le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. On désigne par $u_{mn}\colon \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_n$ (pour $m \leq n$) et $u_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{X}$ les morphismes canoniques. Pour qu'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à une limite projective d'une suite $(\mathscr{F}_n)$, où $\mathscr{F}_n$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent, tel que $u_{mn}^*(\mathscr{F}_n) = \mathscr{F}_m$ pour $m \leq n$* (2.1.38). *Le système projectif $(\mathscr{F}_n)$ est alors isomorphe au système des $u_n^*(\mathscr{F}) = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$.*

En effet, la question étant locale, on est ramené au cas d'un schéma formel affine globalement idyllique, et le théorème résulte alors de 2.7.2.9.

Proposition 2.8.6. *Sous les hypothèses de* (2.8.5), *si* $\mathscr{F}$ *et* $\mathscr{G}$ *sont deux* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-modules cohérents, l'application* $\theta \mapsto (u_n^*(\theta))$ *est un isomorphisme canonique fonctoriel de* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$*-modules*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}}(\mathscr{F}_n, \mathscr{G}_n). \tag{2.8.6.1}$$

En outre, pour qu'un homomorphisme $\theta \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ *soit un épimorphisme, il faut et il suffit que l'homomorphisme correspondant* $\theta_0 = u_0^*(\theta) \colon \mathscr{F}_0 \to \mathscr{G}_0$ *le soit.*

Il résulte aussitôt de 2.8.5 que (2.8.6.1) est un isomorphisme. La deuxième proposition étant locale, on est ramené au cas d'un schéma formel affine globalement idyllique $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathscr{F} = M^\Delta$, $\mathscr{G} = N^\Delta$, $\theta = u^\Delta$, où M et N sont des A-modules cohérents et u un homomorphisme $M \to N$. Si l'on pose $u_0 = u \otimes_A (A/J)$, alors $\theta_0 = (u_0)^\sim$ en vertu de 2.5.2(iii). Comme θ et u (resp. θ_0 et u_0) sont simultanément surjectifs (2.7.2.1), l'assertion résulte de 1.8.5 et 1.10.2(ii).

Corollaire 2.8.7. *Les hypothèses étant celles de* (2.8.5), *soient de plus* $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ *deux* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-modules cohérents. Alors il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{G} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n (\mathscr{F}_n \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}} \mathscr{G}_n), \tag{2.8.7.1}$$

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_n \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}}(\mathscr{F}_n, \mathscr{G}_n). \tag{2.8.7.2}$$

L'isomorphisme (2.8.7.1) résulte de 2.8.5 et 1.3.5. L'isomorphisme (2.8.7.2) découle de (2.8.6.1) appliqué à des ouverts arbitraires de $\mathfrak{X}$.

2.8.8. On ignore si, lorsque $\mathfrak{X}$ est un schéma formel adique, le théorème 2.8.5 s'étend aux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules *de présentation finie*. Toutefois, nous signalons le résultat suivant :

Proposition 2.8.9 ([28] 10.11.10). *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel adique,* $\mathscr{J}$ *un idéal de définition de type fini de* $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_n$ *le schéma usuel* $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$. *On désigne par* $u_{mn} \colon \mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_n$ *(pour* $m \leq n$*) et* $u_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{X}$ *les morphismes canoniques. Pour qu'un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$*-module* $\mathscr{E}$ *soit localement libre de type fini, il faut et il suffit qu'il soit limite projective d'une suite* $(\mathscr{E}_n)$, *où* $\mathscr{E}_n$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$*-module localement libre de type fini et* $u_{mn}^*(\mathscr{E}_n) = \mathscr{E}_m$ *pour* $m \leq n$. *Le système projectif* $\mathscr{E}_n$ *est alors isomorphe au système des* $u_n^*(\mathscr{E}) = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$.

2.8.10. Le théorème 2.8.5 montre qu'on peut considérer tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ comme un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module topologique, en le considérant comme limite projective des faisceaux de groupes pseudo-discrets $\mathscr{F}_n$ ([28] 0.3.9.1). Il résulte alors de 2.8.6 que tout homomorphisme $u \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules est automatiquement continu ([28] 0.3.9.2).

2.8.11. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels idylliques, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent. Comme $f^*(\mathscr{G})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de présentation finie, il est cohérent (1.3.10 et 2.8.1). Supposons de plus que f soit déployé, c'est à dire qu'il existe des idéaux de définition cohérents $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ et $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tels que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{J}$. Posons $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, $\mathscr{G}_n = \mathscr{G} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$ et soit $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ le morphisme déduit de f. Compte tenu de (2.2.2.1), on a un isomorphisme canonique $f^*(\mathscr{G}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \simeq f_n^*(\mathscr{G}_n)$. Par suite, il résulte de 2.8.5 que $f^*(\mathscr{G})$ est isomorphe à la limite projective de la suite $(f_n^*(\mathscr{G}_n))$.

Proposition 2.8.12. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{A}$ l'annulateur de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Alors $\mathscr{A}$ est cohérent, et les supports de $\mathscr{F}$ et de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ sont égaux.*

En effet, $\mathscr{A}$ est le noyau du morphisme canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F},\mathscr{F})$; il est donc cohérent en vertu de 1.3.5 et 2.8.1. La seconde assertion étant locale, on peut supposer $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ formel affine globalement idyllique et $\mathscr{F} = M^{\Delta}$, où M est un A-module cohérent. On a alors $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$, où $\mathfrak{a}$ est l'annulateur de M dans A, en vertu de 2.7.2. Soit J un idéal de définition de type fini de A. D'après (2.7.6.3) et le lemme de Nakayama, le support de $\mathscr{F}$ est celui du module M/JM ; il est donc égal à $\mathrm{V}(J+\mathfrak{a})$ ([12] chap. II §4.4 cor. de prop. 18), et de même pour $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$, d'où l'assertion.

2.8.13. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, r un entier ≥ 0. Il existe alors un et un seul idéal cohérent $\mathrm{F}_r(\mathscr{F})$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, appelé le r-ième *idéal de Fitting* de $\mathscr{F}$, tel que pour tout ouvert formel affine globalement idyllique U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \mathrm{F}_r(\mathscr{F}))$ soit le r-ième idéal de Fitting du $\Gamma(U,\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module $\Gamma(U,\mathscr{F})$ (1.7.2). Cela résulte par recollement à l'aide de 2.7.2 et (2.7.6.1).

Proposition 2.8.14. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{B}$ un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{Y}$. Alors $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$.*

En effet, $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent en vertu de 2.8.11, 2.8.1 et 1.3.4. Le fait qu'il soit ouvert est une question locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$; on peut donc supposer que $\mathscr{B}$ contient un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$. L'assertion recherchée résulte alors de 2.8.3.

Proposition 2.8.15. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, U un ouvert de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{G}$ un sous-$(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$-module cohérent de $\mathscr{F}|U$ tel que $(\mathscr{J}\mathscr{F})|U \subset \mathscr{G}$. Alors, il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{G}'$ de $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{G}'|U = \mathscr{G}$ et $\mathscr{J}\mathscr{F} \subset \mathscr{G}'$.*

Posons $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathscr{F}_0 = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}$ et $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}/((\mathscr{J}\mathscr{F})|U)$, de sorte que $\mathscr{G}_0$ est un sous-$(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}|U)$-module de $\mathscr{F}_0|U$. L'espace sous-jacent à $\mathfrak{X}_0$ étant localement noethérien (2.6.6), il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}$-module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{G}_0'$ de $\mathscr{F}_0$ tel que $\mathscr{G}_0'|U = \mathscr{G}_0$, en vertu de ([28] 6.9.7). Comme $\mathscr{F}_0$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}$-module cohérent (2.8.1 et 1.3.6), il en est de même de $\mathscr{G}_0'$. Par suite

$\mathscr{G}'_0$ et $\mathscr{F}_0/\mathscr{G}'_0$ sont des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents (1.3.6). Le noyau $\mathscr{G}'$ du morphisme composé $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_0 \to \mathscr{F}_0/\mathscr{G}'_0$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent qui répond à la question.

Corollaire 2.8.16. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, U un ouvert quasi-compact, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert cohérent du schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur U. Il existe alors un idéal ouvert cohérent $\mathscr{A}'$ de $\mathfrak{X}$ tel que $\mathscr{A}'|U = \mathscr{A}$.*

En effet, comme U est quasi-compact, il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $(\mathscr{J}|U) \subset \mathscr{A}$. Appliquant 2.8.15 pour $\mathscr{F} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathscr{G} = \mathscr{A}$, on obtient alors un idéal cohérent $\mathscr{A}'$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ tel que $\mathscr{A}'|U = \mathscr{A}$ et $\mathscr{J} \subset \mathscr{A}'$; donc $\mathscr{A}'$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$ (2.8.3).

2.8.17. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathscr{J}$ un idéal ouvert de $\mathfrak{X}$. Le support de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$ ([28] 0.5.2.2) ; on le note $\mathrm{V}(\mathscr{J})$. Lorsque $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine, $\mathscr{J} = J^{\Delta}$, où J est un idéal ouvert de A (2.1.10), et on a alors $\mathrm{V}(\mathscr{J}) = \mathrm{V}(J)$.

Proposition 2.8.18. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique quasi-compact, $\mathfrak{Y}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert de type fini de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{B}$ un idéal ouvert de $\mathfrak{Y}$ tel que $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$. Alors, il existe un idéal ouvert cohérent $\mathscr{B}'$ de $\mathfrak{Y}$ contenu dans $\mathscr{B}$, tel que $f^*(\mathscr{B}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$ et $\mathrm{V}(\mathscr{B}') = \mathrm{V}(\mathscr{B})$ (2.8.17).*

Soient U l'ouvert complémentaire de $\mathrm{V}(\mathscr{B})$ dans $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$ contenu dans $\mathscr{B}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_0 = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J})$, $\mathfrak{Y}_0 = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{K})$, $f_0\colon \mathfrak{X}_0 \to \mathfrak{Y}_0$ le morphisme déduit de f. L'espace sous-jacent à $\mathfrak{Y}_0$ est noethérien (2.6.6), et $\mathscr{B}/\mathscr{K}$ est un idéal quasi-cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$ (2.1.10). Donc en vertu de ([28] 6.9.7), il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$-module quasi-cohérent de type fini $\mathscr{L}$ de $\mathscr{B}/\mathscr{K}$ tel que $\mathscr{L}|U = \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}|U$. Compte tenu de ([28] 6.9.9), $\mathscr{B}/\mathscr{K}$ est limite inductive de ses sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$-modules quasi-cohérents de type fini contenant $\mathscr{L}$. Un tel sous-module $\mathscr{I}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$ (2.8.1) tel que $\mathrm{V}(\mathscr{I}) = \mathrm{V}(\mathscr{B})$. Par ailleurs, on a $\mathscr{J} \subset \mathscr{A}$ et $f_0^*(\mathscr{B}/\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0} = \mathscr{A}/\mathscr{J}$. Comme f_0^* commute aux limites inductives, on en déduit qu'il existe un idéal cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}$, contenu dans $\mathscr{B}/\mathscr{K}$, tel que $f_0^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0} = \mathscr{A}/\mathscr{J}$ et $\mathrm{V}(\mathscr{I}) = \mathrm{V}(\mathscr{B})$ ([28] 0.5.2.3). Le noyau $\mathscr{B}'$ du morphisme composé $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_0}/\mathscr{I}$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{Y}$ (2.8.3), contenu dans $\mathscr{B}$, tel que $f^*(\mathscr{B}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$ et $\mathrm{V}(\mathscr{B}') = \mathrm{V}(\mathscr{B})$.

Proposition 2.8.19. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme fini et de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ $(n \geq 0)$.*

(i) *Le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $f_*(\mathscr{F})$ est cohérent et, pour tout $n \geq 0$, l'homomorphisme canonique*

$$f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n} \to f_*(\mathscr{F}_n)$$

est bijectif ; en particulier, $f_*(\mathscr{F})$ est isomorphe à la limite projective de la suite $(f_*(\mathscr{F}_n))$.

(ii) *Soit* $g\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme de schémas formels idylliques. On pose* $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$ *et on désigne par* $f'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$ *et* $g'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$ *les projections canoniques. Alors le morphisme de changement de base*

$$g^*(f_*(\mathscr{F})) \to f'_*(g'^*(\mathscr{F}))$$

est bijectif.

(i) L'isomorphisme canonique $\mathscr{F} \simeq \varprojlim \mathscr{F}_n$ (2.8.5) induit un isomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules

$$f_*(\mathscr{F}) \simeq \varprojlim f_*(\mathscr{F}_n).$$

Le morphisme $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f est fini et de présentation finie. Par suite, $f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$-module de présentation finie ([28] 6.2.10), et donc cohérent. Comme f_n est affine, $f_*(\mathscr{F}_n)$ est un $f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n})$-module de présentation finie, et donc un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$-module cohérent (1.3.4). D'autre part, on a $f_*(\mathscr{F}_n) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_m} \simeq f_*(\mathscr{F}_m)$ pour tout $m \leq n$ ([28] 9.3.2). Donc la proposition résulte de 2.8.5.

(ii) Notons d'abord que f' est fini et de présentation finie (2.3.19 et 2.3.26), et $\mathfrak{X}'$ est idyllique (2.6.13). La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$ et sur $\mathfrak{Y}'$, on peut se borner au cas où g est déployé (2.2.4). La proposition résulte alors de (i) et de l'assertion correspondante pour les schémas usuels ([28] 9.3.2) à l'aide de 2.2.15 et 2.8.11.

Corollaire 2.8.20. *Soient* $\mathscr{S}$ *un schéma formel idyllique,* $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ *un morphisme fini et de présentation finie,* $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ *un morphisme adique. Alors on a une bijection canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}\text{-Alg}}(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}), g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})). \tag{2.8.20.1}$$

Soient $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{K} = g^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$. On a un isomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{\mathscr{S}}$-algèbres

$$g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \simeq \varprojlim g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n})$$

qui induit, en vertu de 2.8.19(i), une bijection

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}}\text{-Alg}}(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}), g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})) \simeq \varprojlim_{n} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}\text{-Alg}}(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}), g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n})).$$

D'autre part, $\mathfrak{X}_n$ étant un $\mathscr{S}_n$-schéma affine (2.3.5), l'application canonique

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}_n}(\mathfrak{Y}_n, \mathfrak{X}_n) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{S}_n}\text{-Alg}}(f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}), g_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}))$$

est bijective ([28] 9.1.5). Le corollaire s'ensuit en vertu de 2.2.14.

2.9 Sous-schémas des schémas formels idylliques

Proposition 2.9.1. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{Y}$ le support (fermé) de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$, $\Psi\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique.*

(i) *L'espace topologiquement annelé $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est un schéma formel idyllique.*

(ii) *La flèche canonique $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})) \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est un morphisme de présentation finie.*

(iii) *Si $\mathfrak{X}$ est localement noethérien (resp. noethérien), il en est de même de $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$.*

(iv) *Supposons $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ affine globalement idyllique et $\mathscr{A} = \mathfrak{a}^{\Delta}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal cohérent de A (2.7.2). Alors, l'algèbre topologique quotient $A/\mathfrak{a}$ est adique sur A, et $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$ *au dessus de* $\mathrm{Spf}(A)$.

Notons d'abord que $\mathfrak{Y}$ est fermé ([28] 0.5.2.2). Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}_n$ le schéma usuel $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, v_{mn} le morphisme canonique $\mathfrak{X}_m \to \mathfrak{X}_n$ pour $m \leq n$. En vertu de 2.8.1 et 1.3.6, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1}) = (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent ; il en est donc de même de $(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1})/\mathscr{J}^{n+1}$. Soient Y_n le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}_n$ défini par cet idéal, $i_n\colon Y_n \to \mathfrak{X}_n$ l'injection canonique. Pour $m \leq n$, $v_{mn} \circ i_m$ est majoré par i_n, puisque $v_{mn}^*((\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1})/\mathscr{J}^{n+1})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_m} = (\mathscr{A} + \mathscr{J}^{m+1})/\mathscr{J}^{m+1}$. On en déduit un morphisme canonique $u_{mn}\colon Y_m \to Y_n$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} Y_m \arrow[r, "i_m"] \arrow[d, "u_{mn}"'] & \mathfrak{X}_m \arrow[d, "v_{mn}"] \\ Y_n \arrow[r, "i_n"] & \mathfrak{X}_n \end{tikzcd} \tag{2.9.1.1}$$

En fait, le diagramme (2.9.1.1) est cartésien ([28] 4.3.1) ; donc (Y_n) est un $(\mathfrak{X}_n)$-système inductif adique, et sa limite inductive est un $\mathfrak{X}$-schéma formel adique (2.2.14).

D'autre part, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}$ est limite projective des faisceaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1}) = (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ en vertu de 2.8.5. Il est clair que $\mathfrak{Y}$ contient l'espace sous-jacent à tous les Y_n. Si U désigne l'ouvert complémentaire de ce dernier dans $\mathfrak{X}$, alors $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})|U = 0$; en effet, la restriction à un ouvert commute aux limites projectives, car elle admet un adjoint à gauche, et $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1}))|U = 0$ par hypothèse. On en déduit que $\mathfrak{Y}$ est l'espace sous-jacent à tous les Y_n. Par suite, $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est la limite inductive des Y_n (2.5.1.1), et le morphisme canonique $i\colon (\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A})) \to (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est la limite inductive des i_n ; donc i est un morphisme adique.

L'immersion fermée i_n est de présentation finie car $(\mathscr{A} + \mathscr{J}^{n+1})/\mathscr{J}^{n+1}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$. La proposition (ii) s'ensuit, et entraîne (i) en vertu de 2.6.13, et (iii) en vertu de 2.3.14.

Montrons enfin (iv). La première assertion résulte de 1.10.2. Comme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A} = (A/\mathfrak{a})^{\Delta}$ en vertu de 2.7.2, la seconde assertion résulte de 2.7.2.9 et du fait que $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est la limite inductive des Y_n.

On dira que $(\mathfrak{Y}, \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}))$ est le *sous-schéma* de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal cohérent $\mathscr{A}$.

Définition 2.9.2. On dit qu'un espace topologiquement annelé $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est un *sous-schéma* d'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ si :

(a) $\mathfrak{Y}$ est un sous-espace localement fermé de $\mathfrak{X}$;

(b) si U désigne le plus grand ouvert de $\mathfrak{X}$ contenant $\mathfrak{Y}$ et tel que $\mathfrak{Y}$ soit fermé dans U, $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est un sous-schéma de $(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ défini par un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U$.

On dit que le sous-schéma $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ de $\mathfrak{X}$ est *fermé* si $\mathfrak{Y}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$.

On note $(\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ simplement par $\mathfrak{Y}$ lorsqu'aucune confusion n'est possible. On désigne par Ψ l'injection canonique $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ des espaces sous-jacents. On a donc un homomorphisme surjectif de faisceaux d'anneaux $\theta\colon \Psi^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. On définit ainsi un morphisme de schémas formels $(\Psi, \theta)\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, appelé *morphisme d'injection canonique.*

Définition 2.9.3. Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique. On dit qu'un morphisme de schémas formels $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est une *immersion* (resp. une *immersion fermée*, resp. une *immersion ouverte*) s'il se factorise en

$$\mathfrak{Y} \xrightarrow{g} \mathfrak{Z} \xrightarrow{j} \mathfrak{X}$$

où g est un isomorphisme, $\mathfrak{Z}$ un sous-schéma (resp. un sous-schéma fermé, resp. un schéma formel induit sur un ouvert) de $\mathfrak{X}$ et j le morphisme d'injection canonique.

Proposition 2.9.4. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion. Alors f est de présentation finie ; en particulier, $\mathfrak{Y}$ est idyllique. Si en outre, f est une immersion fermée, alors f est fini.*

On peut évidemment se borner au cas où f est l'injection canonique d'un sous-schéma $\mathfrak{Y}$ de $\mathfrak{X}$. Si $\mathfrak{Y}$ est fermé dans $\mathfrak{X}$, la proposition résulte aussitôt de 2.9.1 et de sa preuve. Si $\mathfrak{Y}$ est le schéma formel induit sur un ouvert U de $\mathfrak{X}$, f est quasi-compact (2.6.6 et [28] 6.1.5(i)), et donc de présentation finie ([28] 6.3.8(i)). Le cas général s'obtient par composition.

Proposition 2.9.5. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ un morphisme de schémas formels, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est une immersion (resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée).*

(ii) *f est localement de présentation finie et, si l'on pose $\mathscr{K} = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$ et $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, le morphisme de schémas usuels*

$f_n \colon \mathfrak{Y}_n \to \mathfrak{X}_n$ *déduit de* f*, est une immersion* (*resp. une immersion ouverte, resp. une immersion fermée*) *pour tout* $n \geq 0$.

D'après la démonstration de 2.9.1, (i) entraîne (ii). Montrons la réciproque. Considérons d'abord le cas où les f_n sont des immersions ouvertes. L'espace sous-jacent à $\mathfrak{Y}$ est homéomorphe à un ouvert U de $\mathfrak{X}$, et f se factorise à travers un morphisme adique $g \colon \mathfrak{Y} \to (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$. Par suite, g est un isomorphisme en vertu de 2.2.14, d'où la proposition dans ce cas. Considérons ensuite le cas général. L'application $\Psi \colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ induite par f sur les espaces sous-jacents est un homéomorphisme sur un sous-espace localement fermé de $\mathfrak{X}$. Soient U le plus grand ouvert de $\mathfrak{X}$ tel que $\Psi(\mathfrak{Y})$ soit fermé dans U, $g \colon \mathfrak{Y} \to (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ le morphisme déduit de f. Comme g vérifie la condition (ii) en vertu de 2.3.18(iii), remplaçant f par g, on se réduit à la proposition suivante :

Proposition 2.9.6. *Sous les hypothèses de* (2.9.5)*, pour que* f *soit une immersion fermée, il faut et il suffit que* f *soit localement de présentation finie et que* f_0 *soit une immersion fermée.*

Il n'y a que la suffisance de la condition à établir. On sait que $\mathfrak{Y}$ est idyllique (2.6.13) et f est un morphisme fini et de présentation finie (2.3.24). Donc $f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent (2.8.19), et l'homomorphisme $\theta \colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ induit par f est surjectif (2.8.6). Par suite, le noyau $\mathscr{A}$ de θ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Soient $\mathfrak{Z}$ le sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal $\mathscr{A}$, $i \colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ le morphisme d'injection canonique. Il clair que $f(\mathfrak{Y}) = \mathfrak{Z}$, et l'isomorphisme $f^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \xrightarrow{\sim} f^{-1}f_*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, composé de la flèche induite par θ et du morphisme d'adjonction, fournit un isomorphisme $h \colon \mathfrak{Y} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{Z}$ tel que $f = i \circ h$.

Corollaire 2.9.7. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel idyllique,* $\mathscr{J}$ *un idéal de définition cohérent de* $\mathfrak{X}$*,* $\mathfrak{X}_n$ *le schéma usuel* $(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$*. Pour qu'un idéal* $\mathscr{A}$ *de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ *soit cohérent, il faut et il suffit qu'il soit limite projective d'une suite* $(\mathscr{A}_n)$*, où* $\mathscr{A}_n$ *est un idéal cohérent de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$*, tel que* $\mathscr{A}_n\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_m} = \mathscr{A}_m$ *pour* $m \leq n$*. On a alors* $\mathscr{A}_n = \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ *pour tout* $n \geq 0$.

Si $\mathscr{A}$ est cohérent, il est limite projective du système des $\mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$, en vertu de 2.8.5 et des suites exactes $0 \to \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \to (\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{A}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} \to 0$. Inversement, soient, pour tout $n \geq 0$, $\mathscr{A}_n$ un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$, tels que $\mathscr{A}_n\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_m} = \mathscr{A}_m$ pour $m \leq n$. On note Y_n le sous-schéma de $\mathfrak{X}_n$ défini par l'idéal $\mathscr{A}_n$. Donc (Y_n) est un $(\mathfrak{X}_n)$-système inductif adique, et sa limite inductive $\mathfrak{Y}$ est un $\mathfrak{X}$-schéma adique (2.2.14). D'après 2.9.5, $\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ est une immersion fermée. Soit $\mathscr{A}$ l'idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ défini par $\mathfrak{Y}$. Il résulte de la démonstration de 2.9.1 que $\mathscr{A}_n = \mathscr{A}\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$, ce qui entraîne que $\mathscr{A}$ est la limite projective des $\mathscr{A}_n$.

Corollaire 2.9.8. *Soient* $\mathfrak{X}$ *un schéma formel idyllique,* $f \colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *un morphisme de schémas formels.*

(i) *Soit* (V_λ) *un recouvrement de* $f(\mathfrak{Y})$ *par des ouverts de* $\mathfrak{X}$*. Pour que* f *soit une immersion* (*resp. une immersion ouverte*)*, il faut et il suffit que pour* *chaque λ, la restriction $f^{-1}(V_\lambda) \to V_\lambda$ de f soit une immersion (resp. une immersion ouverte).*

(ii) *Soit (U_λ) un recouvrement ouvert de $\mathfrak{X}$. Pour que f soit une immersion fermée, il faut et il suffit que pour chaque λ, la restriction $f^{-1}(U_\lambda) \to U_\lambda$ de f soit une immersion fermée.*

En effet, cela résulte de 2.9.5, 2.3.17 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([28] 4.2.4).

Proposition 2.9.9. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels idylliques, $\mathfrak{Y}'$ un sous-schéma (resp. un sous-schéma fermé, resp. un schéma formel induit sur un ouvert) de $\mathfrak{Y}$, $j\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ l'injection canonique. Alors :*

(i) *La projection $p\colon \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}$ est une immersion (resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte), et le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ associé à p (dit image réciproque de $\mathfrak{Y}'$ par f) a pour espace sous-jacent $f^{-1}(\mathfrak{Y}')$.*

(ii) *Si $\mathfrak{Y}'$ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{Y}$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{B}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, alors le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ image réciproque de $\mathfrak{Y}'$ par f est défini par l'idéal cohérent $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$.*

Les assertions étant locales sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$ (2.9.8), on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines globalement idylliques ; donc f est un morphisme déployé (2.2.4), associé à un homomorphisme continu $\varphi\colon B \to A$. La première assertion de (i) résulte de 2.9.5, 2.3.19, 2.2.15 et ([28] 4.3.1). Montrons ensuite (ii). Soient J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{b}$ l'idéal cohérent de B tel que $\mathscr{B} = \mathfrak{b}^\Delta$ (2.7.2). Alors $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}' = \mathrm{Spf}(A \widehat{\otimes}_B (B/\mathfrak{b}))$ et $A \widehat{\otimes}_B (B/\mathfrak{b}) \simeq A/\mathfrak{b}A$ puisque $A/\mathfrak{b}A$ est complet et séparé pour la topologie J-adique (1.8.8 et 1.10.2). Donc le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ image réciproque de $\mathfrak{Y}'$ par f est défini par l'idéal $(\mathfrak{b}A)^\Delta$ (2.9.1). Mais $(\mathfrak{b}A)^\Delta = f^*(\mathfrak{b}^\Delta)\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ en vertu 2.7.5, d'où la proposition (ii). Enfin, (ii) implique la dernière assertion de (i).

Proposition 2.9.10. *Le composé de deux immersions (resp. de deux immersions fermées, resp. de deux immersions ouvertes) de schémas formels idylliques est une immersion (resp. une immersion fermée, resp. une immersion ouverte).*

En effet, cela résulte de 2.9.5, 2.3.18 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([28] 4.3.6).

Proposition 2.9.11. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes de schémas formels idylliques vérifiant l'une des conditions suivantes :*

(i) *g est adique et f est localement de présentation finie.*

(ii) *g est localement de type fini.*

Alors si $g \circ f$ est une immersion (resp. une immersion fermée), f est une immersion (resp. une immersion fermée si g est séparé).

Lorsque $g \circ f$ est une immersion, (ii) implique (i) (2.3.18 et 2.9.4) ; on peut donc se borner au cas (i). La proposition résulte alors de 2.9.5, 2.3.2 et des assertions correspondantes pour les schémas usuels ([28] 4.3.6).

Proposition 2.9.12. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Alors :*

(i) *Le morphisme diagonal $\Delta_f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ est une immersion de schémas formels idylliques.*

(ii) *Pour que f soit séparé* (2.3.1)*, il faut et il suffit que Δ_f soit une immersion fermée.*

Comme la première projection $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ est localement de présentation finie (2.3.19), $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ est idyllique (2.6.13), et la première proposition résulte de 2.9.11. La seconde proposition découle de la première et des définitions.

Proposition 2.9.13. *Soient $\mathfrak{Y}$ un schéma formel idyllique quasi-compact, $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ une immersion, $\mathscr{A}$ un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{X}$. Alors il existe un idéal ouvert cohérent $\mathscr{B}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$.*

On peut évidemment se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est un sous-schéma de $\mathfrak{Y}$, f étant l'injection canonique. Si $\mathfrak{X}$ est le schéma formel induit sur un ouvert de $\mathfrak{Y}$, il est quasi-compact (2.9.4), et la proposition résulte de 2.8.16. Supposons que $\mathfrak{X}$ soit le sous-schéma de $\mathfrak{Y}$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{I}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. Soient $\mathfrak{Z}$ le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal $\mathscr{A}$, $i\colon \mathfrak{Z} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique. Le composé $f \circ i$ étant une immersion fermée (2.9.10), il définit un idéal cohérent $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. On a clairement $\mathscr{I} \subset \mathscr{B}'$ et $f^*(\mathscr{B}')\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = (\mathscr{B}'/\mathscr{I})|\mathfrak{X} = \mathscr{A}$ (2.9.9). D'autre part, il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que $f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \subset \mathscr{A}$. Alors $\mathscr{B} = \mathscr{B}' + \mathscr{K}$ est un idéal ouvert cohérent de $\mathfrak{Y}$ (2.8.3) tel que $f^*(\mathscr{B})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} = \mathscr{A}$. Enfin, le cas d'un sous-schéma quelconque de $\mathfrak{Y}$ se déduit des deux cas précédents.

2.10 Clôture rigide d'un module

2.10.1. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel adique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. On appelle *clôture rigide* de $\mathscr{F}$, et l'on note $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ (cf. [31] 5.9), le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}). \tag{2.10.1.1}$$

Si $\mathscr{J}'$ est un second idéal de définition de type fini de $\mathfrak{X}$, il existe un recouvrement ouvert (U_λ) de $\mathfrak{X}$ et des entiers positifs (n_λ), tels que $\mathscr{J}^{n_\lambda}|U_\lambda \subset \mathscr{J}'|U_\lambda$ et $\mathscr{J}'^{n_\lambda}|U_\lambda \subset \mathscr{J}|U_\lambda$ pour tout λ. Donc les familles filtrantes décroissantes $\mathscr{J}^n|U_\lambda$ et $\mathscr{J}'^n|U_\lambda$ sont cofinales l'une de l'autre, ce qui prouve que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathscr{J}$ à isomorphisme canonique près.

On a un homomorphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire canonique fonctoriel

$$c_{\mathscr{F}}\colon \mathscr{F} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}). \tag{2.10.1.2}$$

On munit $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ d'une structure d'anneau en définissant le produit de deux morphismes $u\colon \mathscr{J}^n \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ et $v\colon \mathscr{J}^m \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ comme étant $u \circ (v|\mathscr{J}^{n+m})$;

l'homomorphisme $c_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}$ fait de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre et non seulement un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. De même, on munit $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ d'une structure canonique de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module, compatible avec sa structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module.

La correspondance $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est un foncteur de la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules dans la catégorie des $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules.

On peut préciser la terminologie et faire les remarques suivantes :

2.10.1.3. Le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est exact à gauche. En effet chacun des foncteurs $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})$ est exact à gauche, et les limites inductives filtrantes commutent aux limites projectives finies.

2.10.1.4. On appelle *sous-module de torsion* (resp. *transformé strict*) de $\mathscr{F}$ et on note $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ (resp. $\overline{\mathscr{F}}$) le noyau (resp. l'image) de l'homomorphisme $c_{\mathscr{F}}$ (2.10.1.2). On dit que $\mathscr{F}$ est *rig-nul* (resp. *rig-pur*) si $\mathscr{F} = \mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ (resp. $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$) (cf. [31] 5.9.9).

2.10.1.5. Pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$, on a des isomorphismes fonctoriels $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})|U \simeq \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}|U)$ et $c_{\mathscr{F}}|U \simeq c_{\mathscr{F}|U}$; par suite, on a $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}|U = (\mathscr{F}|U)_{\mathrm{tor}}$.

2.10.1.6. Soient $u : \mathscr{J} \to \mathscr{F}$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire, $s \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$ la section correspondante. On vérifie immédiatement que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u) \colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{J}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est le morphisme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-linéaire défini par s et l'isomorphisme canonique $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{J}) = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$; en particulier, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \arrow[r, "s"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \\ \mathscr{J} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u"] & \mathscr{F} \arrow[u, "c_{\mathscr{F}}"'] \end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique est commutatif.

Proposition 2.10.2. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, x un point de $\mathfrak{X}$. Alors :*

(i) *On a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))_x \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}}(\mathscr{J}^n_x, \mathscr{F}_x). \tag{2.10.2.1}$$

(ii) *La fibre de $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ en x est le sous-module de $\mathscr{J}_x$-torsion de $\mathscr{F}_x$* (1.8.30).

La proposition (i) résulte de (1.3.12.1) et du fait que les foncteurs fibres commutent aux limites inductives ; et la proposition (ii) s'en déduit aussitôt.

Proposition 2.10.3. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent. Suppo-*

sons la paire (X, X') *idyllique* (2.6.17). *Alors l'homomorphisme canonique*

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{X/X'}(\mathscr{F}) \tag{2.10.3.1}$$

est bijectif ([31] 5.9.1).

Notons U l'ouvert $X - X'$ de X et $j\colon U \to X$ l'injection canonique, de sorte que $\mathscr{H}^0_{X/X'}(\mathscr{F}) = j_*(\mathscr{F}|U)$. Lorsque X est quasi-compact, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}) \to \Gamma(U, \mathscr{F}) \tag{2.10.3.2}$$

est bijectif en vertu de 1.8.34, 1.12.16(i) et 2.6.18.

D'autre part, $\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$V \mapsto \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_V}(\mathscr{J}^n|V, \mathscr{F}|V). \tag{2.10.3.3}$$

Par suite, l'isomorphisme (2.10.3.2), appliqué à la restriction de la situation à des ouverts quasi-compacts de X, montre que (2.10.3.1) est un isomorphisme.

Corollaire 2.10.4. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $i\colon \widehat{X} \to X$ le morphisme canonique d'espaces annelés* (2.5.3). *Supposons la paire (X, X') idyllique. Alors on a un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-morphisme canonique fonctoriel*

$$i^*(\mathscr{H}^0_{X/X'}(\mathscr{F})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'}), \tag{2.10.4.1}$$

qui est un isomorphisme si $\mathscr{F}$ est de type fini.

On a un morphisme canonique fonctoriel de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules

$$i^*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}((\mathscr{J}_{/X'})^n, \mathscr{F}_{/X'}), \tag{2.10.4.2}$$

qui est un isomorphisme si $\mathscr{F}$ est de type fini. En effet, cela résulte de 2.5.5(ii) et ([28] 0.5.7.6), car i est plat (2.6.19) et $\mathscr{J}$ est de présentation finie (2.6.18). D'autre part, on a un isomorphisme canonique (2.10.3.1)

$$i^*(\mathscr{H}^0_{X/X'}(\mathscr{F})) \to i^*(\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})) \tag{2.10.4.3}$$

Il suffit alors de définir le morphisme (2.10.4.1) comme le composé du morphisme (2.10.4.3) et de la limite inductive des morphismes (2.10.4.2), puisque i^* commute aux limites inductives.

Proposition 2.10.5. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, U l'ouvert $X - \mathrm{V}(J)$ de X, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \simeq \Gamma(U, \widetilde{M}), \tag{2.10.5.1}$$

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_{\mathrm{tor}}) = M_{\mathrm{tor}}. \tag{2.10.5.2}$$

En effet, en vertu de 2.6.10 et 2.7.3, on a

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_A(J^n, M).$$

L'isomorphisme (2.10.5.1) résulte alors de 1.8.34, 1.10.2(i) et 1.10.3(i) ; et l'égalité (2.10.5.2) s'en déduit par 1.8.30.2.

Corollaire 2.10.6. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{A}$ une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre. Alors $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{A})$ est une $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbre et non seulement un $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module, et le morphisme $c_{\mathscr{A}}$* (2.10.1.2) *est un homomorphisme d'anneaux.*

Soit $\mathfrak{B}$ la base pour la topologie de $\mathfrak{X}$ formée des ouverts formels affines globalement idylliques (2.6.15). Il résulte de (2.10.5.1) que $U \mapsto \Gamma(U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{A}))$ est un faisceau de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbres sur $\mathfrak{B}$ dans le sens de ([28] 3.2.1). Par suite, le faisceau (ordinaire) correspondant, qui s'identifie canoniquement à $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{A})$, est un faisceau de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbres. D'autre part, $c_{\mathscr{A}}$ est clairement un homomorphisme de faisceaux d'anneaux sur $\mathfrak{B}$, d'où la seconde assertion.

Corollaire 2.10.7. *Soient A un anneau, J un idéal de type fini de A, M un A-module, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A/J)$, U l'ouvert $X - X'$ de X, $\mathscr{F} = \widetilde{M}$, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $\widehat{A}$ (resp. $\widehat{M}$) le séparé complété de A (resp. M) pour la topologie J-préadique, $\mathscr{G}$ le $\mathscr{O}_X$-module quasi-cohérent associé à $\widehat{M}$. Supposons la paire (X, X') idyllique. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$\Gamma(\widehat{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'})) \simeq \Gamma(U, \mathscr{G}), \tag{2.10.7.1}$$

$$\Gamma(\widehat{X}, (\mathscr{F}_{/X'})_{\mathrm{tor}}) = (\widehat{M})_{\mathrm{tor}}. \tag{2.10.7.2}$$

Si, en outre, M est de type fini sur A, on a un isomorphisme canonique

$$\Gamma(U, \mathscr{G}) \simeq \Gamma(U, \mathscr{F}) \otimes_A \widehat{A}. \tag{2.10.7.3}$$

On notera d'abord que $\widehat{A}$ est un anneau idyllique (2.6.12) et que $\Gamma(\widehat{X}, \mathscr{F}_{/X'}) = \widehat{M}$. Donc la première assertion est une conséquence immédiate de 2.10.5. Supposons M de type fini sur A. Soient f_i $(1 \leq i \leq r)$ des éléments de A qui engendrent J, de sorte que $\mathfrak{U} = (\mathrm{D}(f_i))$ est un recouvrement ouvert de U. On a $\Gamma(U, \mathscr{G}) = \mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G})$ et $\Gamma(U, \mathscr{F}) = \mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$, où $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, -)$ désigne la cohomologie de Čech relativement à $\mathfrak{U}$ ([30] 1.4.1). Comme $\widehat{A}$ est A-plat (1.12.17) et que $\widehat{M} \simeq M \otimes_A \widehat{A}$ (1.12.16), on a un isomorphisme canonique $\mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{H}^0(\mathfrak{U}, \mathscr{F}) \otimes_A \widehat{A}$; d'où l'isomorphisme (2.10.7.3).

Corollaire 2.10.8. *Soient X un schéma, X' un sous-schéma fermé de X, défini par un idéal quasi-cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathscr{O}_X$, $\widehat{X} = X_{/X'}$ le schéma formel complété de X le long de X', $0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$ une suite exacte de $\mathscr{O}_X$-modules quasi-cohérents telle que $\mathscr{F}$ soit de type fini. Supposons la paire (X, X') idyllique. Alors la suite*

$$0 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_{/X'}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}''_{/X'}) \tag{2.10.8.1}$$

est exacte.

Si, en outre, $\mathscr{J}$ est localement monogène, la suite

$$0 \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_{/X'}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}''_{/X'}) \to 0 \tag{2.10.8.2}$$

est exacte.

Soit $V = \mathrm{Spec}(A)$ un ouvert affine de X. On a $\mathscr{J}|V = \widetilde{J}$, où J est un idéal de type fini de A, $\mathscr{F}|V = \widetilde{M}$, $\mathscr{F}'|V = \widetilde{M}'$, $\mathscr{F}''|V = \widetilde{M}''$, où M, M', M'' sont trois A-modules tels que M soit de type fini et que la suite $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ soit exacte. On en déduit par complétion J-préadique une suite exacte $0 \to \widehat{M}' \to \widehat{M} \to \widehat{M}'' \to 0$ (1.8.26(i) et 1.12.16(i)). Il résulte alors de (2.10.7.1) que la suite

$$0 \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_{/X'})) \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'})) \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}''_{/X'}))$$

est exacte ; donc la suite (2.10.8.1) est exacte. Si J est monogène, le schéma $V - \mathrm{V}(J)$ est affine et la suite

$$0 \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_{/X'})) \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{/X'})) \to \Gamma(X' \cap V, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}''_{/X'})) \to 0$$

est exacte, d'où la dernière assertion.

Proposition 2.10.9. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}, \mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules, $u \colon \mathscr{F} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})$ un morphisme $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-linéaire.*

(i) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact et si $\mathscr{F}$ est de type fini, il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $u(\mathscr{J}\mathscr{F})$ soit contenu dans l'image du morphisme canonique $c_{\mathscr{G}}$* (2.10.1.2).

(ii) *Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont cohérents, il en est de même de* $\ker(u)$.

(i) La question étant locale, on peut supposer que l'on a un morphisme surjectif $v : \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n \to \mathscr{F}$; le composé uv est défini par n sections $s_1, \dots, s_n \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}))$. D'après 2.6.10, il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ et des homomorphismes $u_i : \mathscr{J} \to \mathscr{G}$ qui définissent les s_i. L'assertion résulte alors de la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n \arrow[r, "v"] & \mathscr{F} \arrow[r, "u"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) \\ \oplus_{i=1}^n \mathscr{J} \arrow[u, "i"] \arrow[rr, "\sum_i u_i"] & & \mathscr{G} \arrow[u, "c_{\mathscr{G}}"'] \end{tikzcd}$$

où i est la flèche canonique (2.10.1.6).

(ii) La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine globalement idyllique, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$ et $\mathscr{G} = N^{\Delta}$, où M et N sont des A-modules cohérents. Soit J un idéal de définition cohérent de A. D'après (2.10.5.1), u induit un morphisme A-linéaire

$$\Gamma(\mathfrak{X}, u)\colon M \to \Gamma(\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J), \widetilde{N}).$$

En vertu de 1.9.14, le noyau P de $\Gamma(\mathfrak{X}, u)$ est un A-module de type fini, donc cohérent (en tant que sous-module de M). Montrons que $\ker(u) \simeq P^{\Delta}$ (ce qui prouvera la proposition). Pour tout $f \in A$, u induit un morphisme $A_{\{f\}}$-linéaire :

$$\Gamma(\mathscr{D}(f), u)\colon M_{\{f\}} \to \Gamma(\mathrm{Spec}(A_{\{f\}}) - \mathrm{V}(JA_{\{f\}}), (N_{\{f\}})^{\sim}).$$

On a $M_{\{f\}} \simeq M \otimes_A A_{\{f\}}$, $N_{\{f\}} \simeq N \otimes_A A_{\{f\}}$ et $P_{\{f\}} \simeq P \otimes_A A_{\{f\}}$ (1.12.16). Comme $A_{\{f\}}$ est A-plat (1.12.6), $\Gamma(\mathscr{D}(f), u)$ s'identifie à $\Gamma(\mathfrak{X}, u) \otimes_A A_{\{f\}}$ ([30] 1.4.1). On en déduit que l'on a $\Gamma(\mathscr{D}(f), \ker(u)) \simeq P_{\{f\}}$, d'où l'assertion.

Proposition 2.10.10. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Considérons les conditions suivantes :*

(i) $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = 0$.

(ii) $\mathscr{F}$ *est rig-nul* (2.10.1.4).

(iii) $\mathscr{J}\mathscr{F} = 0$ *pour un idéal de définition cohérent* $\mathscr{J}$ *de* $\mathfrak{X}$.

Alors (iii)$\Rightarrow$(i)$\Leftrightarrow$(ii). *De plus, si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact et si $\mathscr{F}$ est de type fini, les trois conditions sont équivalentes.*

On a clairement (iii)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(ii). Supposons $\mathscr{F}$ rig-nul. Soient U un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{X}$, $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$. On a alors $M = M_{\mathrm{tor}}$ (2.10.5.2) et par suite $\Gamma(U, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) = 0$ (2.10.5.1) ; d'où l'implication (ii)$\Rightarrow$(i).

Supposons que $\mathfrak{X}$ soit quasi-compact, que $\mathscr{F}$ soit de type fini et que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = 0$. Montrons qu'il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que l'image de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}, \mathscr{F})$ soit nulle (ce qui impliquera que $\mathscr{J}\mathscr{F} = 0$). La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est affine globalement idyllique et $\mathscr{F}$ est engendré par des sections $x_1, \ldots, x_m$ de $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$. Compte tenu de 2.6.10, il existe un idéal de définition de type fini J de A tel que l'image de chacun des x_i dans $\mathrm{Hom}_A(J, M)$ soit nulle, ce qui démontre notre assertion.

Corollaire 2.10.11. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique. Alors tout sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module (resp. tout quotient) d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module rig-nul est rig-nul.*

L'assertion non respée résulte de 2.10.1.3 et 2.10.10. L'assertion respée est une conséquence immédiate de la définition (2.10.1.4).

Corollaire 2.10.12. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Alors :*

(i) *$\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ est le plus grand sous-module rig-nul de $\mathscr{F}$.*

(ii) *Le transformé strict $\overline{\mathscr{F}}$ de $\mathscr{F}$ est le plus grand quotient rig-pur de $\mathscr{F}$.*

(iii) *Pour tout sous-module rig-nul $\mathscr{G}$ de $\mathscr{F}$, le morphisme surjectif canonique $\mathscr{F} \to \mathscr{F}/\mathscr{G}$ induit un isomorphisme entre les transformés stricts.*

Pour (i), il suffit d'observer que $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ est rig-nul en vertu de (2.10.5.2). L'assertion (iii) résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}/\mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \arrow[r] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}/\mathscr{G}) &
\end{tikzcd}$$

dont les lignes sont exactes (2.10.1.3 et 2.10.10). Si on prend $\mathscr{G} = \mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$, le diagramme ci-dessus montre que $\overline{\mathscr{F}}$ est rig-pur, d'où l'assertion (ii).

Proposition 2.10.13. *Soient A un anneau idyllique, M un A-module de type fini, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$; alors $(M^{\Delta})_{\mathrm{tor}} = (M_{\mathrm{tor}})^{\Delta}$.*

Supposons d'abord que M soit rig-pur (resp. rig-nul). Pour tout $f \in A$, on a $\Gamma(\mathscr{D}(f), (M^{\Delta})_{\mathrm{tor}}) = (M_{\{f\}})_{\mathrm{tor}}$ (2.10.5.2). Par ailleurs, on a un isomorphisme $M_{\{f\}} \simeq M \otimes_A A_{\{f\}}$ (1.12.16) et $A_{\{f\}}$ est A-plat (1.12.6). On en déduit que $M_{\{f\}}$ est rig-pur (resp. rig-nul), d'où la proposition.

Considérons ensuite le cas général. On sait que M_{tor} est de type fini (1.10.2) ; posons $\overline{M} = M/M_{\mathrm{tor}}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (M_{\mathrm{tor}})^{\Delta} \arrow[r] \arrow[d] & M^{\Delta} \arrow[r] \arrow[d, "c_{M^{\Delta}}"] & \overline{M}^{\Delta} \arrow[r] \arrow[d, "c_{\overline{M}^{\Delta}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(M^{\Delta}) \arrow[r] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\overline{M}^{\Delta}) &
\end{tikzcd}$$

Compte tenu de ce qui a été vu précédemment, et en vertu de 2.7.2.1(ii), 2.10.1.3 et 2.10.10, les lignes de ce diagramme sont exactes et le morphisme $c_{\overline{M}^{\Delta}}$ est injectif, d'où la proposition.

Corollaire 2.10.14. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ et $\overline{\mathscr{F}}$ sont cohérents.*

En effet, il suffit de montrer que $\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}$ est cohérent (1.3.4), ce qui résulte de 2.10.13 et 1.10.3(iii).

Corollaire 2.10.15. *Pour qu'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ soit rig-pur, il faut et il suffit que $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ soit rig-pur. En particulier, pour qu'un schéma formel affine globalement idyllique $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ soit rig-pur, il faut et il suffit que A soit rig-pur.*

Si $\mathfrak{X}$ est rig-pur, $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})_{\mathrm{tor}} = 0$ en vertu de 2.10.13. Inversement, si $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})_{\mathrm{tor}} = 0$, $\mathfrak{X}$ est rig-pur en vertu de (2.10.5.2).

Définition 2.10.16. On appelle *transformé strict* d'un schéma formel idyllique $\mathfrak{X}$ le sous-schéma fermé défini par l'idéal cohérent $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})_{\mathrm{tor}}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$.

Proposition 2.10.17. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathfrak{Y}'$ le transformé strict de $\mathfrak{Y}$, $j\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ l'injection canonique. Si $\mathfrak{X}$ est rig-pur, f se factorise uniquement en*

$$\mathfrak{X} \xrightarrow{g} \mathfrak{Y}' \xrightarrow{j} \mathfrak{Y},$$

où g est un morphisme adique. De plus, si f est localement de présentation finie (resp. de présentation finie), il en est de même de g.

La première assertion étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ sont formels affines globalement idylliques et f est associé à un homomorphisme adique $\varphi\colon A \to B$. Alors $\mathfrak{Y}'$ est le sous-schéma fermé de $\mathfrak{Y}$ défini par l'idéal cohérent A_{tor} (2.10.13). Comme $B_{\mathrm{tor}} = 0$ (2.10.15), φ induit un homomorphisme adique $\varphi'\colon A/A_{\mathrm{tor}} \to B$, d'où la première assertion. La seconde assertion résulte de 2.3.18 et 2.6.8.

Proposition 2.10.18. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène. Alors le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est exact.*

La question étant locale (2.10.1.5), on peut supposer que $\mathfrak{X}$ admet un idéal de définition localement monogène $\mathscr{J}$. Soient $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, x un point de $\mathfrak{X}$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel (2.10.2.1)

$$(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))_x \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}}(\mathscr{J}_x^n, \mathscr{F}_x).$$

D'autre part, le sous-module de $\mathscr{J}_x$-torsion de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}$ est de type fini d'après 2.10.2(ii) et 2.10.14. Donc en vertu de 1.8.34(a), si t est un générateur de $\mathscr{J}_x$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X},x}}(\mathscr{J}_x^n, \mathscr{F}_x) \xrightarrow{\sim} \mathscr{F}_x[t^{-1}].$$

On en déduit que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto (\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))_x$ est exact ; d'où la proposition.

Corollaire 2.10.19. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène.*

(i) *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, l'homomorphisme*

$$\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \tag{2.10.19.1}$$

déduit de $c_{\mathscr{F}}$ (2.10.1.2) est bijectif.

(ii) *Soient $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, $v : \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})$ un homomorphisme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-linéaire tels que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \arrow[r, "v"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) \\ \mathscr{F} \arrow[u, "c_{\mathscr{F}}"] \arrow[r, "u"] & \mathscr{G} \arrow[u, "c_{\mathscr{G}}"'] \end{tikzcd}$$

soit commutatif; alors $v = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$.

(i) La question étant locale sur $\mathfrak{X}$, on peut supposer que l'on a une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules $\mathscr{O}^q_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{O}^p_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{F} \to 0$, auquel cas la conclusion résulte de 2.10.18.

(ii) Cela résulte aussitôt de (i).

Corollaire 2.10.20. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène. Alors $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est $\mathfrak{X}$-plat.*

En effet, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ étant cohérent (2.8.1), on se ramène à vérifier la condition 1.3.17(ii) pour tout ouvert de $\mathfrak{X}$. Il suffit alors de montrer que le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ est exact en $\mathscr{F}$ dans la catégorie des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents, ce qui résulte de 2.10.18 et 2.10.19(i).

Corollaire 2.10.21. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents. Alors il existe des isomorphismes canoniques fonctoriels*

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}), \tag{2.10.21.1}$$

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}om_{\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}), \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})). \tag{2.10.21.2}$$

En effet, l'isomorphisme (2.10.21.1) résulte de 2.10.19(i), et l'isomorphisme (2.10.21.2) de 2.10.19(i), 2.10.20 et ([28] 0.5.7.6).

Proposition 2.10.22. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $u \colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules.*

(i) *Supposons $\mathscr{G}$ de type fini. Alors si $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ est un isomorphisme, le noyau et le conoyau de u sont rig-nuls.*

(ii) *Supposons que $\mathfrak{X}$ admette localement un idéal de définition monogène. Alors si le noyau et le conoyau de u sont rig-nuls, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ est un isomorphisme.*

(i) On peut clairement se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est quasi-compact. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathscr{F}_{\mathrm{tor}} \arrow[r] \arrow[d, "v"'] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \overline{\mathscr{F}} \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathscr{G}_{\mathrm{tor}} \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] & \overline{\mathscr{G}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où v et w sont déduits de u. Il résulte de 2.10.11 et 2.10.12(i) que $\ker(v)$ et $\operatorname{coker}(v)$ sont rig-nuls. D'autre part, il résulte des hypothèses que w est injectif. Appliquons 2.10.9(i) au morphisme $a = (\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u))^{-1} \circ i \colon \overline{\mathscr{G}} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$, où $i \colon \overline{\mathscr{G}} \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})$ est l'injection canonique. On en déduit qu'il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $a(\mathscr{J}\overline{\mathscr{G}}) \subset c_{\mathscr{F}}(\mathscr{F})$. Par suite, $\mathscr{J}\operatorname{coker}(w) = 0$, d'où la proposition.

(ii) Cela résulte de 2.10.10 et 2.10.18.

Corollaire 2.10.23. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Alors :*

(i) *L'homomorphisme canonique $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{J}\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est bijectif.*

(ii) *Si $\mathfrak{X}$ admet localement un idéal de définition monogène, l'homomorphisme canonique $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\overline{\mathscr{F}})$ est bijectif.*

L'assertion (i) résulte de 2.10.1.3, et l'assertion (ii) de 2.10.12(i) et 2.10.22(ii).

Proposition 2.10.24. *Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique ayant localement un idéal de définition monogène.*

(i) *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module cohérent.*

(ii) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, tout $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module cohérent F est de la forme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$.*

(iii) *Si $\mathfrak{X}$ est quasi-compact, toute suite exacte courte de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules cohérents est la "clôture rigide" d'une suite exacte courte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents.*

(i) Il résulte de 2.10.1.5 et 2.10.18 que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-module de type fini. Il suffit clairement de montrer que pour tout homomorphisme $u \colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})^n \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$, $\ker(u)$ est de type fini. On peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est quasi-compact. Soient $x_i \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}))$ $(1 \le i \le n)$ les sections définies par u. D'après 2.6.10, chaque x_i est défini par un homomorphisme $v_i : \mathscr{J} \to \mathscr{F}$ où $\mathscr{J}$ est un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$. Si l'on pose $v = \sum_{i=1}^n v_i \colon \oplus_{i=1}^n \mathscr{J} \to \mathscr{F}$, on a $u = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(v)$ (2.10.1.6). On en déduit, en vertu de 2.10.18, que $\ker(u) = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\ker(v))$ et qu'il est de type fini.

(ii) Il existe un recouvrement ouvert fini $(U_i)_{i \in I}$ de $\mathfrak{X}$ tel que, pour tout $i \in I$, si l'on pose $\mathfrak{X}_i = (U_i, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U_i)$, on ait une suite exacte

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i})^{n_i} \xrightarrow{u_i} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i})^{m_i} \longrightarrow F|U_i \longrightarrow 0 .$$

D'après la preuve de (i), il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ et, pour tout $i \in I$, un homomorphisme $v_i \colon \oplus_{k=1}^{n_i} (\mathscr{J}|U_i) \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i}^{m_i}$ tel que $u_i = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(v_i)$. Le conoyau $\mathscr{F}_i$ de v_i est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i}$-module cohérent, et en vertu de 2.10.18, on a un isomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_i})$-modules

$$F|U_i \quad \simeq \quad \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_i). \tag{2.10.24.1}$$

Nous allons construire $\mathscr{F}$ par recollement en procédant par récurrence sur le cardinal de I ; on se réduit aussitôt au cas où $I = \{1, 2\}$. Remplaçant $\mathscr{F}_i$ par son transformé strict, on peut le supposer rig-pur (2.10.12, 2.10.14 et 2.10.23). On pose $U = U_1 \cap U_2$, $\mathfrak{Y} = (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$, $\mathscr{F}_{1,2} = \mathscr{F}_1|U$ et $\mathscr{F}_{2,1} = \mathscr{F}_2|U$. On déduit de (2.10.24.1) un isomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$-modules

$$v \colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{1,2}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{2,1}). \tag{2.10.24.2}$$

D'après 2.10.9(i), il existe un entier $n \geq 1$ tel que $v(\mathscr{J}^n\mathscr{F}_{1,2}) \subset \mathscr{F}_{2,1} \subset \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_{2,1})$. Remplaçant $\mathscr{F}_1$ par $\mathscr{J}^n\mathscr{F}_1$, ce qui est permis en vertu de 2.10.23(i), on peut supposer $v(\mathscr{F}_{1,2}) \subset \mathscr{F}_{2,1}$. Par suite, v induit un morphisme injectif $u \colon \mathscr{F}_{1,2} \to \mathscr{F}_{2,1}$. D'après 2.10.9(i), il existe un entier $m \geq 0$ tel que $v^{-1}(\mathscr{J}^m\mathscr{F}_{2,1}) \subset \mathscr{F}_{1,2}$; donc on a $\mathscr{J}^m\mathscr{F}_{2,1} \subset u(\mathscr{F}_{1,2})$. En vertu de 2.8.15, il existe un sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_2}$-module cohérent $\mathscr{F}'_2$ de $\mathscr{F}_2$ tel que $\mathscr{F}'_2|U = u(\mathscr{F}_{1,2})$ et $\mathscr{J}^m\mathscr{F}_2 \subset \mathscr{F}'_2$. Par recollement, il existe un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ tel que $\mathscr{F}|U_1 = \mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}|U_2 = \mathscr{F}'_2$ ([28] 0.3.3.1). Le morphisme canonique $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}'_2) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}_2)$ étant bijectif (2.10.18 et 2.10.10), on déduit de (2.10.24.1) des isomorphismes $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})|U_1 \simeq F|U_1$ et $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})|U_2 \simeq F|U_2$. Ces derniers se recollent en un isomorphisme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) \simeq F$ car $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u) = v$ en vertu de 2.10.19(ii).

(iii) Compte tenu de 2.10.18, il suffit de montrer que si $v : F \to G$ est un monomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules cohérents, il existe un monomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u) = v$. D'après (ii), il existe $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents tels que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = F$ et $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) = G$; on peut supposer $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ rig-purs (2.10.12, 2.10.14 et 2.10.23). D'après 2.10.9(i), il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que $v(\mathscr{J}\mathscr{F}) \subset \mathscr{G}$. Remplaçant $\mathscr{F}$ par $\mathscr{J}\mathscr{F}$, ce qui est permis en vertu de 2.10.23(i), on peut supposer $v(\mathscr{F}) \subset \mathscr{G}$. Par suite, v induit un homomorphisme injectif $u : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, et la relation $v = \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(u)$ résulte de 2.10.19(ii).

Corollaire 2.10.25. *Si $\mathfrak{X}$ est un schéma formel idyllique, quasi-compact et ayant localement un idéal de définition monogène, toute $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbre cohérente B est de la forme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{B})$ pour une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre cohérente $\mathscr{B}$.*

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines tels que pour tout $i \in I$, $A_i = \Gamma(U_i, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$ soit un anneau idyllique ayant un idéal de définition principal J_i engendré par t_i. D'après 2.10.24(ii) et 2.10.23(ii), B est de la forme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ pour un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-pur $\mathscr{F}$. On a $\mathscr{F}|U_i = M_i^{\Delta}$ où M_i est un A_i-module cohérent rig-pur, et $\Gamma(U_i, B) = (M_i)_{t_i}$ (2.10.5.1). Quitte à remplacer $\mathscr{F}$ par $\mathscr{J}\mathscr{F}$ où $\mathscr{J}$ est un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$ (2.10.23), on peut supposer que pour tout $i \in I$, M_i est engendré par un nombre fini de sections de $\Gamma(U_i, B)$ entières sur A_i. Soient $\mathscr{B}$ la sous-$\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre de B engendrée par $\mathscr{F}$, $\iota\colon \mathscr{F} \to \mathscr{B}$ l'homomorphisme canonique.

Montrons d'abord que $\mathscr{B}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X}$ est l'un des ouverts U_i. On a alors un homomorphisme surjectif $u\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}^n \to \mathscr{F}$ défini par des sections $x_1, \dots, x_n \in \Gamma(\mathfrak{X}, B)$ entières sur $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$; chaque x_i vérifie une relation $P_i(x_i) = 0$, où P_i est un polynôme unitaire de degré > 0 à coefficients dans $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$. Par suite, $\mathscr{B}$ est l'image de l'homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres

$$v\colon \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}[\xi_1, \dots, \xi_n]/(P_1(\xi_1), \dots, P_n(\xi_n)) \to B$$

défini par $v(\xi_i) = x_i$, et il résulte de 2.10.9(ii) que $\mathscr{B}$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent.

Montrons ensuite que le morphisme canonique de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-algèbres (2.10.19)

$$\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{B}) = \mathscr{B} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to B \tag{2.10.25.1}$$

est un isomorphisme (ce qui prouvera le corollaire). Comme $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\iota)$ est un inverse à droite de (2.10.25.1), il suffit de montrer que $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\iota)$ est un isomorphisme de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$-modules. D'une part, $\mathscr{F}$ étant rig-pur, ι est injectif, et il en est de même de $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\iota)$ en vertu de 2.10.1.3. D'autre part, d'après 2.10.9(i), il existe un idéal de définition cohérent $\mathscr{J}$ de $\mathfrak{X}$ tel que l'on ait $\mathscr{J}\mathscr{B} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F}) = B$; par suite, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\iota)$ est surjectif en vertu de 2.10.23(i).

Lemme 2.10.26. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Alors le morphisme*

$$\varinjlim_{n \geq 0} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F}) \to \varinjlim_{n \geq 0} \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(f^*(\mathscr{K}^n), \mathscr{F}) \tag{2.10.26.1}$$

déduit des morphismes canoniques $f^*(\mathscr{K}^n) \to \mathscr{J}^n$ est bijectif.

Il suffit de montrer que si $U = \mathrm{Spf}(A)$ est un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{X}$ et $V = \mathrm{Spf}(B)$ est un ouvert formel affine globalement idyllique de $\mathfrak{Y}$ tels que $f(U) \subset V$, l'évaluation du morphisme (2.10.26.1) au-dessus de U est un isomorphisme. Soient $\varphi\colon B \to A$ l'homomorphisme adique déduit de f, $K = \Gamma(V, \mathscr{K})$, $J = KA$, $M = \Gamma(U, \mathscr{F})$, $W = \mathrm{Spec}(A)$, $W_{\mathfrak{g}}$ l'ouvert $W - \mathrm{V}(J)$ de W. D'après 2.6.10, 2.7.3 et 2.7.4, l'évaluation du morphisme (2.10.26.1) au-dessus de U est le morphisme

$$\varinjlim_{n \geq 0} \mathrm{Hom}_A(J^n, M) \to \varinjlim_{n \geq 0} \mathrm{Hom}_A(K^n \otimes_B A, M) \tag{2.10.26.2}$$

déduit des morphismes canoniques $K^n \otimes_B A \to J^n$; c'est un isomorphisme en vertu de 1.8.33(b).

2.10.27. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. On a un morphisme fonctoriel

$$\alpha_f(\mathscr{G})\colon f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) \quad\to\quad \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{G}) \tag{2.10.27.1}$$

défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathscr{K}^n,\mathscr{G})) \arrow[r, "\alpha_f(\mathscr{G})"] & \varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, f^*(\mathscr{G})) \arrow[d, "w"] \\
\varinjlim f^{-1}(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathscr{K}^n,\mathscr{G})) \arrow[u, "v"] \arrow[r, "u"] & \varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(f^*(\mathscr{K}^n), f^*(\mathscr{G}))
\end{tikzcd}$$

où u, v et w sont les morphismes canoniques ; en effet, v et w sont des isomorphismes (2.10.26). On désigne par

$$\beta_f(\mathscr{G})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) \quad\to\quad f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*\mathscr{G})) \tag{2.10.27.2}$$

le morphisme adjoint de $\alpha_f(\mathscr{G})$. Il est clair que $\alpha_f(\mathscr{G})$ et $\beta_f(\mathscr{G})$ ne dépendent pas de l'idéal de définition $\mathscr{K}$ à isomorphisme canonique près, et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathscr{G} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f^{-1}(c_{\mathscr{G}})"'] & f^*(\mathscr{G}) \arrow[d, "c_{f^*(\mathscr{G})}"] \\
f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) \arrow[r, "\alpha_f(\mathscr{G})"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(\mathscr{G}))
\end{tikzcd} \tag{2.10.27.3}$$

où i est le morphisme canonique, est commutatif.

On vérifie aisément que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathscr{K}^n,\mathscr{G}) \arrow[r, "\beta_f(\mathscr{G})"] \arrow[d, "a"'] & f_*(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, f^*(\mathscr{G}))) \arrow[d, "f_*(w)"] \\
\varinjlim f_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(f^*(\mathscr{K}^n), f^*(\mathscr{G}))) \arrow[r, "b"] & f_*(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(f^*(\mathscr{K}^n), f^*(\mathscr{G})))
\end{tikzcd} \tag{2.10.27.4}$$

où a et b sont les morphismes canoniques est commutatif.

2.10.27.5. Si U est un ouvert de $\mathfrak{X}$ et V est un ouvert de $\mathfrak{Y}$ tels que $f(U) \subset V$, et si l'on note $f'\colon U \to V$ la restriction de f, on a $\alpha_f(\mathscr{G})|U = \alpha_{f'}(\mathscr{G}|V)$.

2.10.27.6. Si $\mathscr{B}$ est une $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre, $\alpha_f(\mathscr{B})$ et $\beta_f(\mathscr{B})$ sont des homomorphismes d'anneaux (2.10.6) ; en particulier, $\alpha_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ et $\beta_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ sont des homomorphismes d'anneaux. De plus, $\alpha_f(\mathscr{G})$ et $\beta_f(\mathscr{G})$ sont des di-homomorphismes relatifs à $\alpha_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ et $\beta_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ respectivement.

Pour établir la première assertion, il suffit de montrer que $\alpha_f(\mathscr{B})$ ou $\beta_f(\mathscr{B})$ est un homomorphisme d'anneaux. La question pour $\alpha_f(\mathscr{B})$ étant locale sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines globalement idylliques ; donc f est affine adique. Montrons alors que $\beta_f(\mathscr{B})$ est un homomorphisme d'anneaux. Compte tenu de 2.10.27.5, 2.3.7 et 2.6.12, il suffit encore de montrer que l'évaluation de $\beta_f(\mathscr{B})$ au-dessus de $\mathfrak{Y}$ est un homomorphisme d'anneaux. Soient $\varphi\colon B \to A$ l'homomorphisme adique déduit de f, $K = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{K})$, $J = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{J})$, $S = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathscr{B})$, $T = \Gamma(\mathfrak{X}, f^*(\mathscr{B}))$. On notera que l'on a $J = KA$ (2.2.8), mais en général l'homomorphisme canonique $S \otimes_B A \to T$ n'est pas bijectif (cf. 2.7.4). D'après (2.10.5.1) et la preuve de 2.10.26, l'évaluation de $\beta_f(\mathscr{B})$ au-dessus de $\mathfrak{Y}$ s'identifie au morphisme canonique

$$\Gamma(\mathrm{Spec}(B) - \mathrm{V}(K), \widetilde{S}) \to \Gamma(\mathrm{Spec}(A) - \mathrm{V}(J), \widetilde{T}),$$

qui est clairement un homomorphisme d'anneaux. La seconde assertion se démontre de même.

2.10.28. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes adiques de schémas formels idylliques, $h = g \circ f$, $\mathscr{H}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Z}}$-module. Il résulte de la définition (2.10.27) que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}g^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{H})) \arrow[r, "f^{-1}(\alpha_g(\mathscr{H}))"] \arrow[d, equal] & f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(g^*\mathscr{H})) \arrow[r, "\alpha_f(g^*\mathscr{H})"] & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(g^*\mathscr{H})) \arrow[d, equal] \\
h^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{H})) \arrow[rr, "\alpha_h(\mathscr{H})"] & & \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(h^*\mathscr{H})
\end{tikzcd} \tag{2.10.28.1}$$

est commutatif. Par adjonction, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{H}) \arrow[r, "\beta_h(\mathscr{H})"] \arrow[d, "\beta_g(\mathscr{H})"'] & h_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(h^*\mathscr{H})) \arrow[d, equal] \\
g_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(g^*\mathscr{H})) \arrow[r, "g_*(\beta_f(g^*\mathscr{H}))"] & g_*(f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(g^*\mathscr{H}))))
\end{tikzcd} \tag{2.10.28.2}$$

est aussi commutatif.

2.10.29. Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques. L'homomorphisme d'anneaux $\alpha_f(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})$ définit un morphisme d'espaces annelés

$$f_{\mathsf{g}}\colon (\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})) \to (\mathfrak{Y}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}})). \tag{2.10.29.1}$$

Suivant la convention (1.1.11), nous utilisons pour les modules la notation f_{g}^{-1} (ou f^{-1}) pour désigner l'image inverse au sens des faisceaux abéliens et nous réservons la notation f^*_{g} pour l'image inverse au sens des modules. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathscr{G}$, $\alpha_f(\mathscr{G})$ définit un homomorphisme

$$f^*_{\mathsf{g}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) = f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) \otimes_{f^{-1}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}))} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \ \to \ \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(\mathscr{G})). \tag{2.10.29.2}$$

Proposition 2.10.30. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{Y}$ admette localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{G}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent. Alors l'homomorphisme* (2.10.29.2)

$$f^*_{\mathsf{g}}(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G})) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f^*(\mathscr{G}))$$

est bijectif.

La question étant local sur $\mathfrak{X}$ et sur $\mathfrak{Y}$, on peut supposer que l'on a une suite exacte de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules $\mathscr{O}^q_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{O}^p_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{G} \to 0$, auquel cas la proposition résulte de 2.10.18.

2.10.31. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique et quasi-compact de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module, $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. On a un morphisme fonctoriel

$$\iota_f(\mathscr{F})\colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f_*\mathscr{F}) \to f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \tag{2.10.31.1}$$

défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}}(\mathscr{K}^n, f_*\mathscr{F}) \arrow[r, "\iota_f(\mathscr{F})"] & f_*(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})) \arrow[d, "w"] \\
\varinjlim f_*(\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(f^*(\mathscr{K}^n), \mathscr{F})) \arrow[u, "v"] \arrow[r, "u"] & f_*(\varinjlim \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(f^*(\mathscr{K}^n), \mathscr{F}))
\end{tikzcd}$$

où u et w sont les morphismes canoniques et v est la limite des isomorphismes d'adjonction ; en effet, w est un isomorphisme (2.10.26). Il est clair que $\iota_f(\mathscr{F})$ ne dépend pas de l'idéal de définition $\mathscr{K}$ à isomorphisme canonique près. On peut faire les remarques suivantes :

2.10.31.2. $\iota_f(\mathscr{F})$ est un isomorphisme ; on note

$$\jmath_f(\mathscr{F})\colon f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f_*\mathscr{F}) \tag{2.10.31.3}$$

l'isomorphisme inverse. En effet, comme les topos de Zariski $\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$ et $\mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}$ sont algébriques et que le morphisme $f\colon \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}$ est cohérent (2.6.6), le foncteur f_* commute aux limites inductives filtrantes ([1] VI 5.1).

2.10.31.4. On a $f_*(c_{\mathscr{F}}) = \iota_f(\mathscr{F}) \circ c_{f_*\mathscr{F}}$.

2.10.31.5. Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathscr{G}$, le morphisme composé

$$\jmath_f(f^*\mathscr{G}) \circ \beta_f(\mathscr{G}) \colon \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{G}) \to \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(f_*f^*\mathscr{G})$$

est induit par l'homomorphisme d'adjonction $\mathscr{G} \to f_*f^*\mathscr{G}$. Cela résulte aussitôt des définitions et (2.10.27.4).

Proposition 2.10.32. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique et quasi-compact de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Alors :*

(i) *On a un isomorphisme fonctoriel $f_*(\mathscr{F}_{\mathrm{tor}}) \xrightarrow{\sim} (f_*\mathscr{F})_{\mathrm{tor}}$.*

(ii) *On a un morphisme fonctoriel injectif*

$$\overline{f_*(\mathscr{F})} \to f_*(\overline{\mathscr{F}}) \tag{2.10.32.1}$$

déduit de $\iota_f(\mathscr{F})$ (2.10.31.1). *Il est bijectif si f est fini et de présentation finie et $\mathscr{F}$ est cohérent.*

(i) Cela résulte de 2.10.31.2 et 2.10.31.4.

(ii) Le morphisme (2.10.32.1) résulte de 2.10.31.4. Il est injectif en vertu de 2.10.31.2. La seconde assertion résulte de 2.8.6, 2.8.19 et 2.10.14.

Lemme 2.10.33. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique et quasi-compact de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module injectif. Alors $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est f_*-acyclique.*

Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$. Pour tout entier $n \geq 0$, $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}}(\mathscr{J}^n, \mathscr{F})$ est flasque ([1] V 4.10), et donc f_*-acyclique ([1] V 5.2). Comme les topos de Zariski $\mathfrak{X}_{\mathrm{zar}}$ et $\mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}$ sont algébriques et que le morphisme de topos $f \colon \mathfrak{X}_{\mathrm{zar}} \to \mathfrak{Y}_{\mathrm{zar}}$ est cohérent (2.6.6), les foncteurs dérivés $\mathrm{R}^q f_*$, $q \in \mathbb{N}$, commutent aux limites inductives filtrantes ([1] VI 5.1). Par suite, $\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})$ est f_*-acyclique.

2.10.34. Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme adique et quasi-compact de schémas formels idylliques tel que $\mathfrak{Y}$ admette localement un idéal de définition monogène, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Il résulte de 2.10.18 et 2.10.33 que pour tout entier $q \geq 0$, l'isomorphisme $\jmath_f(\mathscr{F})$ (2.10.31.3) se dérive en un isomorphisme fonctoriel

$$\jmath^q_f(\mathscr{F}) \colon \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathrm{R}^q f_*\mathscr{F}). \tag{2.10.34.1}$$

2.11 Étude cohomologique des faisceaux cohérents

Proposition 2.11.1. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel affine globalement idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; alors on a $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) = 0$ pour tout $q > 0$.*

Soient $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1}$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ $(n \geq 0)$. D'après 2.8.5, $\mathscr{F}_n$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent et $\mathscr{F} = \varprojlim \mathscr{F}_n$; plus précisément, si on pose $A = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, $J = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{J})$, $M = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ et $M_n = M/J^{n+1}M$, alors M est A-module cohérent, $\mathscr{F} = M^{\Delta}$ et $\mathscr{F}_n = \widetilde{M_n}$

(2.7.2.9 et (2.7.2.2)). Pour tout $f \in A$ et tout $n \geq 0$, on a $\Gamma(\mathscr{D}(f), \mathscr{F}_n) = (M_n)_f$ et $\mathrm{H}^i(\mathscr{D}(f), \mathscr{F}_n) = 0$ pour $i > 0$. Par suite, les conditions de ([30] 0.13.3.1) sont remplies, en prenant pour base $\mathfrak{B}$ de la topologie de $\mathfrak{X}$ l'ensemble des ouverts $\mathscr{D}(f)$ pour $f \in A$; le système projectif $(\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_{n \geq 0}$ vérifie évidemment la condition (ML) (1.17.1). La proposition résulte de loc. cit. par récurrence sur q.

Corollaire 2.11.2. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel affine globalement idyllique, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; alors on a* $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{H}^0_{\mathrm{rig}}(\mathscr{F})) = 0$ *pour tout $q > 0$.*

En effet, comme le topos de Zariski de $\mathfrak{X}$ est cohérent (2.6.6), le foncteur $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, -)$ commute aux limites inductives filtrantes de faisceaux abéliens ([1] VI 5.3). L'assertion s'ensuit en vertu de 2.11.1.

2.11.3. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel, $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement ouvert de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module. Nous désignerons par $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ le complexe de Čech des cochaînes alternées relatif au recouvrement $\mathfrak{U}$, à coefficients dans $\mathscr{F}$ ([1] V 2.3.3), et par $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ ses groupes de cohomologie.

Corollaire 2.11.4. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement de $\mathfrak{X}$ par des ouverts affines globalement idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Si toute intersection finie des ensembles U_α est un schéma formel affine globalement idyllique, les modules de cohomologie* $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *et* $\mathrm{H}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (*sur* $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$) *sont canoniquement isomorphes.*

Cela résulte de 2.11.1 et ([1] V 3.3).

Théorème 2.11.5. *Soient $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent. Alors pour tout entier $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module* $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ *est cohérent.*

Soient $\mathscr{K}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{Y}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1}$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$ $(n \geq 0)$; on a alors $\mathscr{F} = \varprojlim \mathscr{F}_n$ (2.8.5). Aux homomorphismes canoniques $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_n$ correspondent canoniquement des homomorphismes $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \to \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)$, donnant à la limite un homomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \quad \to \quad \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n). \tag{2.11.5.1}$$

Il résulte de 2.11.5 que $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$, étant cohérent, est naturellement muni d'une structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module topologique ; on considérera les $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)$ comme des faisceaux de groupes pseudo-discrets ([28] 0.3.9.1). Nous allons montrer en même temps que 2.11.5 le corollaire suivant.

Corollaire 2.11.6. *Chacun des homomorphismes* (2.11.5.1) *est un isomorphisme topologique. En outre, si $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact, le système projectif* $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))_{n \geq 0}$ *satisfait à la condition* (ML) ([30] 0.13.1.1).

Nous commençons par établir 2.11.5 et 2.11.6 lorsque $\mathfrak{Y}$ est un schéma formel affine globalement idyllique.

Corollaire 2.11.7. *Sous les hypothèses de* (2.11.5), *supposons en outre que* $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$, *où* A *est un anneau idyllique. Soit* J *un idéal de définition de type fini de* A, *et posons* $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}/J^{n+1}\mathscr{F}$ *pour* $n \geq 0$. *Alors les* $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *sont des* A*-modules cohérents ; le système projectif* $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_{n\geq 0}$ *satisfait à la condition* (ML) *pour tout* q *; si on pose*

$$\mathrm{N}_{q,n} \quad = \quad \ker(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n)), \tag{2.11.7.1}$$

la topologie sur $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$ *définie par la filtration* $(\mathrm{N}_{q,n})_{n\geq 0}$ *est la topologie* J*-adique ; enfin, l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \quad \to \quad \varprojlim_{n} \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) \tag{2.11.7.2}$$

est un isomorphisme topologique pour tout q (*le premier membre étant muni de la topologie* J*-adique, les* $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n)$ *de la topologie discrète*).

Notons d'abord que si la proposition est vraie, elle le reste quand on remplace J par tout idéal de définition de type fini J' de A. En effet, on a $J'^r \subset J$ et $J^r \subset J'$ pour un entier $r \geq 0$; si l'on pose $\mathscr{F}'_n = \mathscr{F}/J'^{n+1}\mathscr{F}$, on a des homomorphismes canoniques $\mathscr{F}'_{r(n+1)} \to \mathscr{F}_n$ et $\mathscr{F}_{r(n+1)} \to \mathscr{F}'_n$, compatibles aux projections canoniques de $\mathscr{F}$ dans ces modules ; il en résulte un isomorphisme topologique

$$\varprojlim_{n} \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}'_n) \quad \to \quad \varprojlim_{n} \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n)$$

compatible aux flèches (2.11.7.2) ; si $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_{n\geq 0}$ satisfait à la condition (ML), il en est de même de $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}'_n))_{n\geq 0}$; enfin, si l'on pose $\mathrm{N}'_{q,n} = \ker(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}'_n))$, les filtrations $(\mathrm{N}_{q,n})_{n\geq 0}$ et $(\mathrm{N}'_{q,n})_{n\geq 0}$ définissent la même topologie sur $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F})$.

On sait en vertu de ([30] 3.4.4) que la proposition est vraie si A est noethérien. On supposera désormais que A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R et $J = tA$, où t est un élément non nul de l'idéal maximal de R. Il existe alors un entier r tel que $t^r\mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$ (2.10.13 et 1.10.2).

Soient $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines globalement idylliques, $\mathrm{C}^\bullet = \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (2.11.3) ; on pose $A_n = A/t^{n+1}A$ et $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$. Toute intersection des ensembles U_α est un schéma formel affine globalement idyllique (2.6.12). Par suite, pour tout i, C^i est complet et séparé pour la topologie (t)-adique, et $t^r\mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ (2.10.5.2). Par ailleurs, on a, pour tout q et tout $n \geq 0$, des isomorphismes canoniques $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{C}^\bullet_n$ (2.7.2.9 et (2.7.2.2)), $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ et $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ (2.11.4).

Si on pose $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_\mathfrak{X}/\mathscr{J}^{n+1})$, le morphisme $f_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathrm{Spec}(A/J^{n+1})$ déduit de f est propre de présentation finie, et A/J^{n+1} est universellement cohérent (1.12.15 et 1.4.2). On conclut de 1.4.8 que $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) = \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}_n, \mathscr{F}_n)$ est un A-module cohérent pour tout q et tout $n \geq 0$.

On peut maintenant démontrer la proposition 2.11.7 par une récurrence descendante sur q. Il existe un entier q_0 tel que l'énoncé soit vrai par tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent en degré $q \geq q_0$. Supposons l'énoncé vrai par tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent en degré $q+1$, et montrons le en degré q. Compte tenu de l'hypothèse de récurrence et de la relation $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, t^{n+1}\mathscr{F}) = t^{n+1}\mathrm{C}^\bullet$ (2.7.2.1), les conditions de 1.17.7 sont remplies, et la proposition s'ensuit.

Corollaire 2.11.7.3. *Sous les hypothèses de* (2.11.7)*, on a, pour tout $g \in A$, un isomorphisme topologique canonique*

$$\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \otimes_A A_{\{g\}} \quad \overset{\sim}{\to} \quad \varprojlim_n \, ((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g),$$

où le premier membre est muni de la topologie J-adique, et les $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g$ de la topologie discrète.

En vertu de 1.10.12(iii), $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \otimes_A A_{\{g\}}$ est isomorphe au séparé complété de $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))_g$ pour la topologie J-adique ; un système fondamental de voisinages de 0 pour cette topologie est $\mathrm{N}_{q,n} \otimes_A A_g$; ce dernier est le noyau de l'application $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))_g \to (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g$ et par suite le groupe séparé associé à $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))_g$ s'identifie à un sous-groupe G de $\varprojlim_n ((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g)$. Mais le système projectif $((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g)$ vérifie la condition (ML), et l'image de $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))_g$ dans chacun des $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g$ est égale à l'image commune des $(\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_k))_g$ pour $k \geq n$ assez grand. On en déduit aussitôt que G est partout dense dans $\varprojlim_n ((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g)$, et comme ce dernier groupe est complet et séparé, le corollaire est démontré.

2.11.8. Revenons maintenant à la démonstration de 2.11.5 et 2.11.6. Prouvons d'abord ces propositions dans le cas $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$ envisagé dans 2.11.7. Pour tout $g \in A$, appliquons 2.11.7 au schéma formel affine globalement idyllique induit par $\mathfrak{Y}$ sur l'ouvert $\mathfrak{Y}_g = \mathscr{D}(g)$, qui est égal à $\mathrm{Spf}(A_{\{g\}})$, et au schéma formel induit par $\mathfrak{X}$ sur $f^{-1}(\mathfrak{Y}_g)$. Comme $\mathscr{F}_n$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent, on a

$$\mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F}_n) = \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))$$

pour tout $n \geq 0$ ([30] 1.4.11). L'homomorphisme canonique

$$\mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F}) \to \varprojlim_n \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))$$

est un isomorphisme ; mais on a

$$\varprojlim_n \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)) = \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))$$

et comme le faisceau $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est associé au préfaisceau $\mathfrak{Y}_g \mapsto \mathrm{H}^q(f^{-1}(\mathfrak{Y}_g), \mathscr{F})$ sur les $\mathfrak{Y}_g$, on a bien montré que l'homomorphisme (2.11.5.1) est bijectif. Prouvons ensuite que $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent, et de façon plus précise que l'on a

$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) = (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))^\Delta. \tag{2.11.8.1}$$

D'une part, $\mathscr{F}_n$ étant un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module cohérent, on a ([30] 1.4.13)

$$\Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)) = \Gamma(\mathfrak{Y}, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)) \otimes_A A_g = (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g.$$

D'autre part, en vertu de 2.11.7.3, on a

$$\varprojlim_n ((\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))_g) = \mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \otimes_A A_{\{g\}} = \Gamma(\mathfrak{Y}_g, (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}))^{\Delta}).$$

Cela démontre (2.11.8.1) puisque $\Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})) = \varprojlim_n \Gamma(\mathfrak{Y}_g, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))$. On en déduit que (2.11.5.1), qui est continu en vertu de ([28] 0.3.9.2), est un isomorphisme topologique. Enfin, les $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n)$ étant des A-modules cohérents (1.4.8, 1.12.15, 1.4.2), il résulte des relations $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n) = (\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n))^{\Delta}$ que le système projectif $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n))_{n \geq 0}$ vérifie (ML) (2.7.2.1).

Une fois 2.11.5 et 2.11.6 démontrés dans le cas où le schéma formel $\mathfrak{Y}$ est affine globalement idyllique, il est immédiat de passer de là au cas général pour 2.11.5 et la première assertion de 2.11.6, qui sont locales sur $\mathfrak{Y}$, et pour la seconde assertion de 2.11.6 puisque $\mathfrak{Y}$ est quasi-compact.

Lemme 2.11.9. *Soient A un anneau idyllique ayant un idéal de définition monogène $J = tA$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre et de présentation finie de schémas formels, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent ; posons $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}/J^{n+1}\mathscr{F}$. S'il existe deux entiers $n > r \geq 0$ tels que $t^r \mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$ et $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) = 0$, alors $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) = 0$.*

Soient $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement fini de $\mathfrak{X}$ par des ouverts formels affines globalement idylliques, $\mathrm{C}^\bullet = \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (2.11.3) ; on pose $A_n = A/t^{n+1}A$ et $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$. D'une part $t^r \mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour tout i (2.10.5.2). D'autre part on a, pour tout q et tout $n \geq 0$, des isomorphismes canoniques $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ et $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$ (2.11.4). Le lemme résulte alors de 1.17.6.

Proposition 2.11.10. *Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A)$, $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre et de présentation finie de schémas formels. On pose $\mathfrak{Y}_n = \mathrm{Spec}(A/J^{n+1})$, $\mathfrak{X}_n = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}_n$, et pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n} = \mathscr{F}/J^{n+1}\mathscr{F}$. Soit $\mathscr{L}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module inversible tel que $\mathscr{L}_0 = \mathscr{L}/J\mathscr{L}$ soit un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_0}$-module ample ; pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathscr{F}$ et tout entier k, posons $\mathscr{F}(k) = \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^{\otimes k}$.*

(i) *Pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$, les propriétés suivantes aient lieu :*
   (a) *On a $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k)) = 0$ pour tout $q > 0$.*
   (b) *L'homomorphisme canonique $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k)) \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(k))$ est surjectif.*

(ii) *Supposons A noethérien ou J monogène. Alors pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier k_1 tel que, pour tout $k \geq k_1$ et tout $n \geq 0$, l'homomorphisme canonique $\mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k)) \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n(k))$ soit surjectif.*

Observons d'abord que la condition (b) est équivalente à la condition $\mathrm{H}^1(\mathfrak{X}, J\mathscr{F}(k)) = 0$, qui est un cas particulier de (a) pour le faisceau cohérent $J\mathscr{F}$; donc pour (i), il suffit de montrer qu'on peut trouver un entier k_0 satisfaisant à la condition (a). On sait en vertu de ([30] 5.2.3) que la proposition est vraie lorsque A est noethérien.

(i) On peut se borner au cas où A est topologiquement de présentation finie sur un anneau 1-valuatif R, et $J = tA$, où t est un élément non nul de l'idéal maximal de R ([29] 4.5.13). Il existe un entier $r \geq 0$ tel que $t^r\mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$ (2.10.13 et 1.10.2) ; on se donne un entier $n > r$. Le morphisme $f_n : \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ déduit de f est propre de présentation finie, A/J^{n+1} est universellement cohérent (1.12.15 et 1.4.2), et $\mathscr{L}_n$ est ample pour f_n ([29] 4.5.13 et 4.6.6). On conclut de 1.4.10 qu'il existe un entier k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout $q > 0$, on ait $\mathrm{H}^q(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_n(k)) = 0$; comme $t^r(\mathscr{F}(k))_{\mathrm{tor}} = 0$ pour tout k, la propriété (a) en résulte par 2.11.9.

(ii) On peut se borner au cas où $J = tA$ est monogène. Il existe un entier $r \geq 0$ tel que $t^r\mathscr{F}_{\mathrm{tor}} = 0$. D'après (i), il existe un entier k_1 tel que pour tout $k \geq k_1$ et tout $0 \leq m \leq r$, on ait $\mathrm{H}^1(\mathfrak{X}, t^m\mathscr{F}(k)) = 0$. Comme $t^r(\mathscr{F}(k))_{\mathrm{tor}} = 0$ pour tout k, la multiplication par t^p induit un isomorphisme $t^r\mathscr{F}(k) \to t^{r+p}\mathscr{F}(k)$ (2.10.5.2). D'où $\mathrm{H}^1(\mathfrak{X}, t^n\mathscr{F}(k)) = 0$ pour tout $k \geq k_1$ et tout $n \geq 0$, ce qui entraîne la proposition.

Corollaire 2.11.11. *Les hypothèses étant celles de* (2.11.10)*, pour tout $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$, il existe un entier k_0 tel que pour $k \geq k_0$, $\mathscr{F}(k)$ soit engendré par ses sections au-dessus de $\mathfrak{X}$; en d'autre termes, $\mathscr{F}$ est isomorphe au quotient d'un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module de la forme $(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}(-k))^m$.*

Comme $\mathfrak{X}_0$ est quasi-compact et quasi-séparé, il résulte de l'hypothèse sur $\mathscr{L}_0$ et de ([29] 4.5.5) qu'il existe k_0 tel que, pour $k \geq k_0$, $\mathscr{F}_0(k)$ soit engendré pas ses sections au-dessus de $\mathfrak{X}$; par ailleurs, on peut supposer k_0 pris assez grand pour que l'homomorphisme $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k)) \to \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(k))$ soit surjectif pour $k \geq k_0$ (2.11.10). Il existe donc un nombre fini de sections $s_i \in \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}(k))$ dont les images dans $\Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{F}_0(k))$ engendrent $\mathscr{F}_0(k)$ ([28] 0.5.2.3). Comme J est contenu dans l'idéal maximal de l'anneau local en tout point de $\mathfrak{X}$, il résulte du lemme de Nakayama que les s_i engendrent $\mathscr{F}(k)$.

Proposition 2.11.12. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme propre de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent rig-nul. Alors pour tout entier $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est rig-nul.*

La question étant locale sur $\mathfrak{Y}$, on peut le supposer quasi-compact ; donc $\mathfrak{X}$ est quasi-compact. Il existe alors un idéal de définition cohérent $\mathscr{K}$ de $\mathfrak{Y}$ tel que si l'on pose $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, on ait $\mathscr{J}\mathscr{F} = 0$ (2.10.10). Il résulte de 2.11.6 que $\mathscr{K}\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) = 0$, donc $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est rig-nul (2.10.10).

2.12 Théorème de comparaison de la théorie “algébrique” à la théorie “formelle”

2.12.1. Soient (Y, Y') une paire idyllique (2.6.17), $f\colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie, X' l'image réciproque de Y' par f ; donc (X, X') est une paire idyllique. Nous désignons par $\widehat{X}$ et $\widehat{Y}$ les schémas formels complétés de X et Y le long de X' et Y' respectivement, par $\hat{f}$ le prolongement de f à ces complétés, qui est un morphisme propre $\widehat{X} \to \widehat{Y}$ de schémas formels idylliques (2.5.10). Pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, nous désignons par $\widehat{\mathscr{F}}$ son complété $\mathscr{F}_{/X'}$ le long de X', qui est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent (2.8.4).

Soient $\mathscr{K}$ l'idéal quasi-cohérent de type fini de $\mathscr{O}_Y$ qui définit Y', $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_X$, qui est l'idéal de $\mathscr{O}_X$ définissant X' ; on sait alors que $\mathscr{J}$ et $\mathscr{K}$ sont cohérents (2.6.18). Soit $\mathscr{F}$ un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, et considérons pour tout $n \geq 0$ les $\mathscr{O}_X$-modules cohérents $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}/\mathscr{J}^{n+1}\mathscr{F}$. En vertu de 1.4.8 et 2.6.18, les $\mathscr{O}_Y$-modules $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ et $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)$ sont cohérents pour tout q. On a des homomorphismes canoniques

$$\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}) \otimes_{\mathscr{O}_Y} (\mathscr{O}_Y/\mathscr{K}^{n+1}\mathscr{O}_Y) \to \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n) \tag{2.12.1.1}$$

donnant à la limite un homomorphisme fonctoriel

$$\varphi_q\colon (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge \to \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n), \tag{2.12.1.2}$$

où le premier membre désigne le complété $(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))_{/Y'}$ de $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ le long de Y'. D'ailleurs (2.12.1.1) peut être considéré comme un homomorphisme continu de $(\mathscr{O}_Y/\mathscr{K}^{n+1})$-modules pseudo-discrets. Par suite φ_q est un homomorphisme continu de $\mathscr{O}_{\widehat{Y}}$-modules topologiques.

Soit $i\colon \widehat{X} \to X$ le morphisme canonique d'espaces annelés (2.5.3), de sorte que on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "h_n"] \arrow[dr, "i_n"'] & \widehat{X} \arrow[d, "i"] \\ & X \end{tikzcd}$$

où X_n est le sous-schéma de X défini par l'idéal $\mathscr{J}^{n+1}$, i_n l'injection canonique, h_n le morphisme d'espaces annelés correspondant à l'identité sur les espaces sous-jacents et à l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\widehat{X}} \to (\mathscr{O}_X/\mathscr{J}^{n+1})|X'$ (2.5.2). Comme $\widehat{\mathscr{F}} = i^*(\mathscr{F})$ à isomorphisme canonique près (2.5.5), l'homomorphisme canonique $\mathrm{H}^q(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}}) \to \mathrm{H}^q(X_n, h_n^*(\widehat{\mathscr{F}}))$ s'écrit aussi

$$\mathrm{H}^q(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}}) \to \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n); \tag{2.12.1.3}$$

ces homomorphismes forment évidemment un système projectif, d’où par passage à la limite, un homomorphisme canonique

$$\psi_{q,X} \colon \mathrm{H}^q(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n). \tag{2.12.1.4}$$

Remplaçant X par un ouvert de la forme $f^{-1}(V)$, où V est un ouvert affine de Y, on a des homomorphismes canoniques ([30] 1.4.11)

$$\psi_{q,V} \colon \mathrm{H}^q(\widehat{X} \cap f^{-1}(V), \widehat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_n \Gamma(V, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)); \tag{2.12.1.5}$$

ces homomorphismes définissent un homomorphisme canonique de faisceaux

$$\psi_q \colon \mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n). \tag{2.12.1.6}$$

Soit enfin $j \colon \widehat{Y} \to Y$ le morphisme canonique d’espaces annelés ; comme $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent, on a $j^*(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})) = (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge$ à isomorphisme canonique près (2.5.5), et on a donc un homomorphisme canonique

$$\theta_q \colon (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge = j^*(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})) \to \mathrm{R}^q \hat{f}_*(i^*(\mathscr{F})) = \mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}). \tag{2.12.1.7}$$

Il résulte aussitôt que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge \arrow[rr, "\theta_q"] \arrow[dr, "\varphi_q"'] & & \mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}) \arrow[dl, "\psi_q"] \\
& \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n) &
\end{tikzcd} \tag{2.12.1.8}$$

est commutatif.

Théorème 2.12.2. *Soient (Y, Y') une paire idyllique, $f \colon X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie de schémas, X' l’image réciproque de Y' par f. Alors, pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, $\mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}})$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent et les homomorphismes φ_q, ψ_q et θ_q du diagramme* (2.12.1.8) *sont des isomorphismes topologiques.*

On a $(i_n)_*(h_n^*(\widehat{\mathscr{F}})) = \mathscr{F}_n$ et l’homomorphisme (2.12.1.6) n’est autre que l’homomorphisme (2.11.5.1). Par suite, le fait que ψ_q soit un isomorphisme topologique est un cas particulier de 2.11.6. Il suffira donc de prouver que φ_q est un isomorphisme topologique ; comme $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est cohérent (1.4.8 et 2.6.18), il en résultera que $\mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}})$ est cohérent.

Nous commençons par établir la forme affine de 2.12.2 :

Corollaire 2.12.3. *Les hypothèses étant celles de* (2.12.2)*, supposons en outre* $Y = \mathrm{Spec}(B)$*, et* $\mathscr{K} = \widetilde{K}$*, où* K *est un idéal de type fini de* B*, de sorte que* $\mathscr{F}_n = \mathscr{F}/K^{n+1}\mathscr{F}$*. La topologie définie sur* $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ *par les noyaux des homomorphismes canoniques* $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n)$ *est la topologie* K*-préadique ; soit* $(\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}))^\wedge$ *le séparé complété de* $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ *pour cette topologie ; l'homomorphisme canonique*

$$\varphi_q \colon (\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}))^\wedge \to \varprojlim_n \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n) \tag{2.12.3.1}$$

est un isomorphisme topologique ; enfin, l'homomorphisme canonique

$$\psi_q \colon \mathrm{H}^q(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}}) \to \varprojlim_n \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n) \tag{2.12.3.2}$$

est un isomorphisme.

L'isomorphisme (2.12.3.2) est mentionné ici à titre de rappel (2.11.7). En vertu de ([30] 4.1.7), on sait que la proposition est vraie si B est noethérien. On peut donc se borner au cas où il existe un anneau 1-valuatif R et un anneau idyllique A, tels que B soit de présentation finie sur A, A soit topologiquement de présentation finie sur R, et $K = IB$, où I est un idéal de définition de type fini de A. Notons que si la proposition est vraie, elle reste vraie lorsqu'on remplace I par tout idéal de définition de type fini de A (voir la preuve de 2.11.7). On supposera désormais que $K = tB$, où t est un élément non nul de l'idéal maximal de R.

Soient $\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement fini de X par des ouverts affines, $\mathrm{C}^\bullet = \mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F})$ (2.11.3) ; on pose $A_n = A/t^{n+1}A$ et $\mathrm{C}^\bullet_n = \mathrm{C}^\bullet \otimes_A A_n$. On a alors, pour tout q et tout $n \geq 0$, des isomorphismes canoniques $\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{U}, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{C}^\bullet_n$, $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}_n) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet_n)$ et $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) \simeq \mathrm{H}^q(\mathrm{C}^\bullet)$. En vertu de 1.12.14(iii), il existe un entier $r \geq 0$ tel que $t^r \mathrm{C}^i_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour tout i. Il existe un entier $h \geq 0$ tel que $t^h(\mathrm{H}^q(t^r\mathrm{C}^\bullet))_{(t)\text{-tor}} = 0$ pour tout q. En effet, $t^r\mathscr{F}$ étant un $\mathscr{O}_X$-module cohérent, $\mathrm{H}^q(t^r\mathrm{C}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^q(X, t^r\mathscr{F})$ est un B-module cohérent (1.4.8 et 2.6.18), et il suffit de lui appliquer 1.12.14(iii). Les assertions recherchées résultent alors de 1.17.3.

2.12.4. Passons maintenant à la démonstration de 2.12.2. Pour tout ouvert affine V de Y, $\Gamma(V, (\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))^\wedge)$ est le séparé complété de $\Gamma(V, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}))$ pour la topologie K-préadique (si $\mathscr{K}|V = \widetilde{K}$) puisque $\mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F})$ est un $\mathscr{O}_Y$-module cohérent, et

$$\Gamma(V, \varprojlim_n \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n)) = \varprojlim_n \Gamma(V, \mathrm{R}^q f_*(\mathscr{F}_n));$$

le fait que φ_q soit un isomorphisme topologique résulte alors de 2.12.3 et ([30] 1.4.11).

Corollaire 2.12.5. *Sous les hypothèses de* (2.12.2)*, pour tout ouvert affine* $V \subset Y$*, l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^q(\widehat{X} \cap f^{-1}(V), \widehat{\mathscr{F}}) \to \Gamma(\widehat{Y} \cap V, \mathrm{R}^q \hat{f}_*(\widehat{\mathscr{F}}))$$

est bijectif.

2.13 Un théorème d'existence de faisceaux algébriques cohérents

2.13.1. Soient A un anneau idyllique, J un idéal de définition de type fini de A. Si $Y = \mathrm{Spec}(A)$, le schéma formel affine $\mathrm{Spf}(A)$ s'identifie au complété $\widehat{Y}$ de Y le long du sous-schéma fermé Y' défini par l'idéal J. Soient $f : X \to Y$ un morphisme propre de présentation finie, X' l'image réciproque de Y' par f ; donc (X, X') est une paire idyllique (2.6.17). Nous désignons par $\widehat{X}$ le complété de X le long de X' et par $\hat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ le prolongement de f aux complétés. Pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, nous notons $\widehat{\mathscr{F}}$ son complété $\mathscr{F}_{/X'}$ le long de X', qui est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent (2.8.4).

Proposition 2.13.2. *Pour tout $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$, les homomorphismes canoniques* (2.12.1.7)

$$\theta_q : \mathrm{H}^q(X, \mathscr{F}) \to \mathrm{H}^q(\widehat{X}, \widehat{\mathscr{F}})$$

sont des isomorphismes.

Comme $\mathrm{H}^q(X, \mathscr{F})$ est un A-module cohérent (1.4.8 et 2.6.18), donc complet et séparé pour la topologie J-adique (1.10.2), la proposition n'est qu'un cas particulier de 2.12.3.

Proposition 2.13.3. *Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. Alors, pour tout entier $n \geq 0$, on a un isomorphisme canonique de A-modules cohérents*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_X}(X; \mathscr{F}, \mathscr{G}) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{X}; \widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}}). \tag{2.13.3.1}$$

Il existe une suite spectrale birégulière $\mathrm{E}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ dont l'aboutissement est $\mathrm{Ext}_{\mathscr{O}_X}(X; \mathscr{F}, \mathscr{G})$ et dont les termes E_2 sont donnés par $\mathrm{E}_2^{pq} = \mathrm{H}^p(X, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$; on note $\mathrm{E}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$ la suite spectrale analogue relative à $\widehat{\mathscr{F}}$ et $\widehat{\mathscr{G}}$. On sait que $\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent (2.6.18 et [30] 0.12.3.3). On conclut que les E_2^{pq} sont des A-modules cohérents (1.4.8 et 2.6.18), et par suite il en est de même des termes E_r^{pq} de la suite spectrale et de son aboutissement. D'autre part, si $i : \widehat{X} \to X$ est le morphisme canonique (2.5.3), $\widehat{\mathscr{F}}$ et $\widehat{\mathscr{G}}$ s'identifient canoniquement à $i^*(\mathscr{F})$ et $i^*(\mathscr{G})$ (2.5.5) et i est plat (2.6.19). Donc pour tout $q \geq 0$, le $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-homomorphisme canonique $u_q : i^*(\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G})) \to \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$ est un isomorphisme ([30] 0.12.3.5) ; autrement dit, $\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$ s'identifie au complété $(\mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))^\wedge$. On conclut alors de 2.13.2 que pour tout $p \geq 0$, $\mathrm{H}^p(\widehat{X}, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}}))$ s'identifie canoniquement à $\mathrm{H}^p(X, \mathscr{E}xt^q_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$. On voit donc qu'on a, à un isomorphisme canonique près, $\mathrm{E}_2^{pq}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) = \mathrm{E}_2^{pq}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$. Cela étant, on sait que la donné du morphisme plat i définit un homomorphisme canonique de suites spectrales ([30] 0.12.3.4)

$$\varphi : \mathrm{E}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \to \mathrm{E}(\widehat{\mathscr{F}}, \widehat{\mathscr{G}})$$

dont le terme E_2 (resp. l'aboutissement) se réduit à l'homomorphisme

$$\varphi_2^{pq} : \mathrm{H}^p(X, \mathscr{E}xt^q(\mathscr{F},\mathscr{G})) \to \mathrm{H}^p(\widehat{X}, \mathscr{E}xt^q(\widehat{\mathscr{F}},\widehat{\mathscr{G}}))$$
$$(\text{resp. } \varphi^n : \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_X}(X,\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{X},\widehat{\mathscr{F}},\widehat{\mathscr{G}}))$$

déduit de u_q (resp. u_0) par fonctorialité. Comme les φ_2^{pq} sont des isomorphismes, il en est de même des φ^n.

Corollaire 2.13.4. *Soient $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ deux $\mathscr{O}_X$-modules cohérents. Alors l'homomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{F},\mathscr{G}) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}}(\widehat{\mathscr{F}},\widehat{\mathscr{G}}) \tag{2.13.4.1}$$

qui, à tout homomorphisme $u\colon \mathscr{F} \to \mathscr{G}$, fait correspondre son complété $\hat{u} : \widehat{\mathscr{F}} \to \widehat{\mathscr{G}}$, est un isomorphisme. De plus, pour que $\hat{u}$ soit injectif (*resp. surjectif*), *il faut et il suffit que u le soit.*

La première assertion est un cas particulier de 2.13.3. Pour démontrer la seconde, notons en vertu de 2.6.22 que $\hat{u}$ est injectif (resp. surjectif) si et seulement s'il existe un voisinage de X' dans lequel u soit injectif (resp. surjectif). La conclusion résulte donc du lemme suivant :

Lemme 2.13.5. *Tout voisinage de X' dans X est identique à X.*

Si V est un voisinage ouvert de X' dans X, $f(X - V)$ est fermé dans Y, et ne rencontre pas Y' ; mais cela est impossible à moins que $X - V$ ne soit vide, puisque J est contenu dans le radical de A ([12] chap. III §2.13 lem. 3), d'où la conclusion.

2.13.6. Nous dirons provisoirement qu'un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent est algébrisable s'il est isomorphe à un complété $\widehat{\mathscr{F}}$ d'un $\mathscr{O}_X$-module cohérent $\mathscr{F}$.

Lemme 2.13.7. *Soient $\mathscr{F}',\mathscr{G}'$ deux $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules cohérents algébrisables. Pour tout homomorphisme $u : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}'$,* $\ker(u)$, $\mathrm{im}(u)$ *et* $\mathrm{coker}(u)$ *sont algébrisables.*

En effet, on a $\mathscr{F}' = \widehat{\mathscr{F}}$, $\mathscr{G}' = \widehat{\mathscr{G}}$, où $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents, et on a $u = \hat{v}$, où $v : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est un homomorphisme (2.13.4). En vertu de 2.5.5(i), $\ker(\hat{v})$ est isomorphe à $(\ker(v))^\wedge$, donc algébrisable ; démonstration analogue pour $\mathrm{im}(u)$ et $\mathrm{coker}(u)$.

Théorème 2.13.8. *Les hypothèses étant celles de* (2.13.1), *supposons de plus que le morphisme f soit projectif. Alors le foncteur $\mathscr{F} \mapsto \widehat{\mathscr{F}}$ est une équivalence de la catégorie des $\mathscr{O}_X$-modules cohérents et de la catégorie des $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-modules cohérents.*

Notons tout d'abord que sous les hypothèses de (2.13.1), il revient au même de demander que f soit projectif ou qu'il existe un $\mathscr{O}_X$-module inversible ample $\mathscr{L}$ (1.4.8, 1.12.15 et [29] 5.5.4(i)). On pose $Y_n = \mathrm{Spec}(A/J^{n+1})$, $X_n = \widehat{X} \times_{\widehat{Y}} Y_n$, et pour tout $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_n = \mathscr{F} \otimes_{\mathscr{O}_{\widehat{X}}} \mathscr{O}_{X_n} = \mathscr{F}/J^{n+1}\mathscr{F}$. Alors X_n est égal au sous-schéma fermé $X \times_Y Y_n = f^{-1}(Y_n)$ de X ; si $\widehat{\mathscr{L}}$ est le complété de $\mathscr{L}$, on a $\widehat{\mathscr{L}_0} = \mathscr{L}/J\mathscr{L}$ qui est un $\mathscr{O}_{X_0}$-module ample ([29] 4.6.13). On peut donc appliquer à $\widehat{\mathscr{L}}$ et tout $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent $\mathscr{F}$ le corollaire 2.11.11 ; on voit donc que $\mathscr{F}$ est isomorphe à un quotient de $\mathscr{G} = (\widehat{\mathscr{L}}^{\otimes(-k)})^m$ pour des entiers $k > 0$ et $m > 0$ convenables. Or, il est clair que $\mathscr{G}$ est le complété de $(\mathscr{L}^{\otimes(-k)})^m$ (2.5.5), donc est algébrisable. Le noyau $\mathscr{H}$ de l'homomorphisme canonique $\mathscr{G} \to \mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent (1.3.4). On voit de même qu'il existe un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module cohérent algébrisable $\mathscr{K}$ et un homomorphisme $v : \mathscr{K} \to \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{H} = \mathrm{im}(v)$. On a alors $\mathscr{F} = \mathrm{coker}(v)$, et $\mathscr{F}$ est algébrisable en vertu de 2.13.7.

Corollaire 2.13.9. *Sous les hypothèses de* (2.13.8)*, l'application $Z \mapsto Z_{/Z\cap X'}$ est une bijection de l'ensemble des sous-schémas fermés de présentation finie Z de X, sur l'ensemble des sous-schémas fermés de $\widehat{X}$.*

On notera d'abord que pour qu'un sous-schéma fermé de X soit de présentation finie, il faut et il suffit qu'il soit défini par un idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$ (2.6.18). Un sous-schéma fermé de $\widehat{X}$ est de la forme $(T, (\mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{A})|T)$, où $\mathscr{A}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$ (2.9.1). Il résulte de 2.13.8 que $\mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{A}$ est isomorphe à un $\mathscr{O}_{\widehat{X}}$-module de la forme $\widehat{\mathscr{F}}$, où $\mathscr{F}$ est un $\mathscr{O}_X$-module cohérent ; en outre, il résulte de 2.13.4 que l'homomorphisme canonique $\mathscr{O}_{\widehat{X}} \to \mathscr{O}_{\widehat{X}}/\mathscr{A}$ est de la forme $\hat{u}$, où $u\colon \mathscr{O}_X \to \mathscr{F}$ est un homomorphisme surjectif de $\mathscr{O}_X$-modules. Donc $\mathscr{F}$ est de la forme $\mathscr{O}_X/\mathscr{N}$, où $\mathscr{N}$ est un idéal cohérent de $\mathscr{O}_X$, et $\mathscr{A} = \widehat{\mathscr{N}}$ (2.5.5) ; d'où la conclusion.

2.14 Invariants normaux d'une immersion

2.14.1. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f = (\Psi, \theta)\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion. Il résulte aussitôt de la définition (2.9.3) que l'homomorphisme $\theta\colon \Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}) \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ est surjectif, de sorte que $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ s'identifie à un faisceau d'anneaux quotient $\Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_f$. Suivant ([31] 16.1.2), le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-augmenté $\Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_f^{r+1}$ est appelé le r-ième *invariant normal* de f. L'espace annelé $(\mathfrak{Y}, \Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_f^{r+1})$ est appelé *r-ième voisinage infinitésimal* de $\mathfrak{Y}$ dans $\mathfrak{X}$, et noté $\mathfrak{Y}_f^{(r)}$ ou simplement $\mathfrak{Y}^{(r)}$. Le faisceau d'anneaux gradués associé au faisceau d'anneaux filtrés $\Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$

$$\mathrm{Gr}_\bullet(f) = \oplus_{r\geq 0}(\mathscr{A}_f^r/\mathscr{A}_f^{r+1}) \tag{2.14.1.1}$$

est appelé le faisceau d'anneaux gradués associé à f ; c'est un faisceau d'algèbres graduées sur le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} = \mathrm{Gr}_0(f)$. Le faisceau $\mathrm{Gr}_1(f) = \mathscr{A}_f/\mathscr{A}_f^2$ est appelé le *faisceau conormal* de f ; on le note aussi $\mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}}$.

2.14.2. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathfrak{Y}$ un sous-schéma de $\mathfrak{X}$, $j = (\Psi, \theta)\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ l'injection canonique. On désigne par U le plus grand ouvert de $\mathfrak{X}$

contenant $\mathfrak{Y}$ tel que $\mathfrak{Y}$ soit fermé dans U, par $\mathscr{A}$ l'idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U$ qui définit $\mathfrak{Y}$ comme sous-schéma fermé de $(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$, par $j_0 = (\Psi_0, \theta_0)\colon \mathfrak{Y} \to (U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ l'injection canonique. Compte tenu de l'exactitude du foncteur Ψ_0^*, on a $\mathscr{A}_j = \Psi_0^*(\mathscr{A})$, $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}} = \Psi_0^*((\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)/\mathscr{A}^{r+1})$ et $\mathrm{Gr}_r(j) = \Psi_0^*(\mathscr{A}^r/\mathscr{A}^{r+1}) = j_0^*(\mathscr{A}^r/\mathscr{A}^{r+1})$. On en déduit que $\mathfrak{Y}^{(r)}$ est le sous-schéma fermé de $(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U)$ défini par l'idéal cohérent $\mathscr{A}^{r+1}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}|U$, et $\mathrm{Gr}_r(j)$ est un $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module cohérent (2.8.11).

Proposition 2.14.3. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion. Alors :*

(i) *Les $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules $\mathrm{Gr}_r(f)$ sont cohérents.*

(ii) *Les $\mathfrak{Y}^{(r)}$ forment un système inductif de schémas formels idylliques, ayant tous pour espace sous-jacent l'espace $\mathfrak{Y}$. Pour $0 \leq r \leq t$, le morphisme de transition $h_{rt}\colon \mathfrak{Y}^{(r)} \to \mathfrak{Y}^{(t)}$ est une immersion fermée, et le morphisme canonique $h_r\colon \mathfrak{Y}^{(r)} \to \mathfrak{X}$ est une immersion.*

2.14.4. Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ deux schémas formels idylliques, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, $f'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$ deux immersions ; considérons un diagramme commutatif de morphismes de schémas formels

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "u"'] & \mathfrak{X}' \arrow[d, "v"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{X} \end{tikzcd} \tag{2.14.4.1}$$

Posons $u = (\rho, \lambda)$. D'après ([31] 16.2.1), pour tout $r \geq 0$, il existe un morphisme canonique de schémas formels

$$w_r = (\rho, \nu_r)\colon \mathfrak{Y}'^{(r)} \to \mathfrak{Y}^{(r)}, \tag{2.14.4.2}$$

qui pour $n = 0$ n'est autre que u. En outre, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}'^{(r)} \arrow[r, "h'_{rt}"] \arrow[d, "w_r"'] & \mathfrak{Y}'^{(t)} \arrow[r, "h'_t"] \arrow[d, "w_t"'] & \mathfrak{X}' \arrow[d, "v"] \\ \mathfrak{Y}^{(r)} \arrow[r, "h_{rt}"] & \mathfrak{Y}^{(t)} \arrow[r, "h_t"] & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

sont commutatifs pour $r \leq t$.

Par passage aux quotients à partir des homomorphismes ν_r, et en tenant compte de l'exactitude du foncteur ρ^*, on obtient un ρ-morphisme d'algèbres graduées

$$\mathrm{gr}(u)\colon \rho^*(\mathrm{Gr}_\bullet(f)) \to \mathrm{Gr}_\bullet(f'). \tag{2.14.4.3}$$

Il en résulte un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}(u) = \mathrm{gr}(u) \otimes 1\colon u^*(\mathrm{Gr}_\bullet(f)) \to \mathrm{Gr}_\bullet(f'). \tag{2.14.4.4}$$

Proposition 2.14.5. *Les hypothèses étant celles de* (2.14.4), *supposons de plus que* $\mathfrak{Y}' = \mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$, f' *et* u *étant les projections canoniques. Alors* $\mathfrak{Y}'^{(r)} = \mathfrak{Y}^{(r)} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$ *et* $\mathrm{Gr}(u)$ *est surjectif.*

On peut se borner au cas où $\mathfrak{Y}$ est un sous-schéma fermé de $\mathfrak{X}$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, f étant l'injection canonique. Alors $\mathfrak{Y}^{(r)}$ est le sous-schéma de $\mathfrak{X}$ défini par l'idéal $\mathscr{A}^{r+1}$, et la proposition résulte de 2.9.9.

Proposition 2.14.6. *Considérons un diagramme cartésien de morphismes de schémas formels idylliques*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "v"'] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "u"] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "g"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{2.14.6.1}$$

tel que g *et* g' *soient adiques. Soient* $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *une section de* g, $f'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$ *la section de* g' *déduite de* f *par le changement de base* u. *Supposons que* f *soit une immersion* (*donc* f' *est aussi une immersion*). *On note* $\mathfrak{Y}^{(r)}$ (*resp.* $\mathfrak{Y}'^{(r)}$) *le* r*-ième voisinage infinitésimal de* $\mathfrak{Y}$ *dans* $\mathfrak{X}$ (*resp. de* $\mathfrak{Y}'$ *dans* $\mathfrak{X}'$), $h_r\colon \mathfrak{Y}^{(r)} \to \mathfrak{X}$, $h'_r\colon \mathfrak{Y}'^{(r)} \to \mathfrak{X}'$ *et* $w_r\colon \mathfrak{Y}'^{(r)} \to \mathfrak{Y}^{(r)}$ *les morphismes canoniques. On munit* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ (*resp.* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'^{(r)}}$) *de la structure de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$*-algèbre définie par* g (*resp. de la structure de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$*-algèbre définie par* g'). *Alors :*

(i) *On a* $\mathfrak{Y}'^{(r)} = \mathfrak{Y}^{(r)} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$.

(ii) *La* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$*-algèbre* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ *est cohérente ; le morphisme* $g \circ h_r$ *est fini et de présentation finie.*

(iii) *L'homomorphisme de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$*-algèbres*

$$u^{-1}(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'^{(r)}} \tag{2.14.6.2}$$

déduit de w_r *est bijectif. En outre, le morphisme de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$*-modules* (2.14.4.4)

$$\mathrm{Gr}_1(u)\colon u^*(\mathrm{Gr}_1(f)) \to \mathrm{Gr}_1(f') \tag{2.14.6.3}$$

est bijectif.

(i) Notons d'abord que les morphismes f' et u identifient $\mathfrak{Y}'$ au produit $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{X}} \mathfrak{X}'$ (pour les morphismes structuraux $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ et $v\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{X}$). Par suite, f' est une immersion (2.9.9) et la conclusion de (i) résulte de 2.14.5.

(ii) La $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ est munie d'une augmentation canonique $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. L'algèbre graduée associée à la filtration de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ définie par l'idéal d'augmentation s'identifie à $\oplus_{0 \le i \le r} \mathrm{Gr}_i(f)$. Par suite, la $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-algèbre $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ est cohérent, et le morphisme $g \circ h_r$ est fini et de présentation finie (car il est adique et affine).

(iii) D'après (i), le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}'^{(r)} \arrow[r, "h'_r"] \arrow[d, "w_r"'] & \mathfrak{X}' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "v"] & \mathfrak{Y}' \arrow[d, "u"] \\ \mathfrak{Y}^{(r)} \arrow[r, "h_r"] & \mathfrak{X} \arrow[r, "g"] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd}$$

identifie $\mathfrak{Y}'^{(r)}$ au produit $\mathfrak{Y}^{(r)} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$. On en déduit, en vertu de (ii) et 2.8.19(ii), que l'homomorphisme (2.14.6.2) est bijectif. D'autre part, l'homomorphisme (2.14.6.2) est compatible avec les augmentations canoniques. Comme $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}^{(r)}}$ est somme directe (en tant que $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-module) de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ et de l'idéal d'augmentation $\mathscr{A}_f/\mathscr{A}_f^{r+1}$, on voit donc que l'homomorphisme (2.14.6.2) restreint à $(\mathscr{A}_f/\mathscr{A}_f^{r+1}) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ est une bijection de ce dernier sur $\mathscr{A}_{f'}/\mathscr{A}_{f'}^{r+1}$. Pour $r = 1$, cela montre que $\mathrm{Gr}_1(u)$ est bijectif.

Remarque 2.14.7. Soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Y}'$ des schémas formels idylliques, $g\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme localement de présentation finie, $u\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ un morphisme, $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{Y}'$, $g'\colon \mathfrak{X}' \to \mathfrak{Y}'$ la projection canonique. Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une section de g (donc une immersion) et $f'\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{X}'$ la section de g' déduite de f par le changement de base u. Alors g' est localement de présentation finie (2.3.19), $\mathfrak{X}'$ est idyllique (2.6.13) et la proposition 2.14.6 s'applique dans ce cas.

2.14.8. Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathscr{J}$ un idéal de définition cohérent de $\mathfrak{X}$, $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion fermée. On déduit de f des immersions de schémas usuels $f_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathfrak{X}_n$ en posant $\mathscr{K} = f^*(\mathscr{J})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ (2.9.5). Le diagramme de morphismes de schémas formels

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{Y}_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "u_n"'] & \mathfrak{X}_n \arrow[d, "v_n"] \\ \mathfrak{Y} \arrow[r, "f"] & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les morphismes canoniques est cartésien (2.2.9). Appliquant (2.14.4.4), on obtient un homomorphisme surjectif (2.14.5) de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}(u_n)\colon u_n^*(\mathrm{Gr}_\bullet(f)) \to \mathrm{Gr}_\bullet(f_n). \tag{2.14.8.1}$$

En vertu de 2.14.3(i) et 2.8.5, ces homomorphismes donnent à la limite, en chaque degré r, un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules topologiques

$$\mathrm{Gr}_r(f) \to \varprojlim_n \mathrm{Gr}_r(f_n). \tag{2.14.8.2}$$

Proposition 2.14.9. *Les hypothèses étant celles de* (2.14.8)*, supposons de plus que les* (f_n) *soient des immersions régulières de même codimension. Alors l'homomorphisme* $\mathrm{Gr}(u_n)$ (2.14.8.1) *est bijectif pour tout* $n \geq 0$*, et l'homomorphisme* (2.14.8.2) *est un isomorphisme topologique de* $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$*-modules localement libres de type fini.*

La seconde assertion résulte immédiatement de la première à l'aide de 2.8.9. Pour la première assertion, la question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ est formel affine globalement idyllique, $\mathfrak{Y}$ est un sous-schéma de $\mathfrak{X}$ défini par un idéal cohérent $\mathscr{A}$ de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. Il existe un entier $N \geq 0$ tel que $\mathscr{A} \cap \mathscr{J}^{N+1} \subset \mathscr{J}\mathscr{A}$ (1.10.2, 2.7.2.1 et (2.7.2.4)). Montrons d'abord que $\mathrm{Gr}(u_n)$ (2.14.8.1) est un isomorphisme pour tout $n \geq N$ Posons $\mathfrak{a} = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{A})$ et $J = \Gamma(\mathfrak{X}, \mathscr{J})$. Quitte à se localiser un peu plus sur $\mathfrak{X}$, on peut supposer les conditions suivantes remplies :

(i) Il existe une suite d'éléments $(a_i)_{1 \leq i \leq t}$ de A qui est (A/J^{n+1})-régulière et qui engendre $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap J^{n+1})$;

(ii) $\mathfrak{a} \cap J^{n+1} \subset J\mathfrak{a}$ (toujours en vertu de 2.7.2.1 et (2.7.2.4)).

Par suite, les a_i engendrent $\mathfrak{a}/J\mathfrak{a}$, et donc aussi $\mathfrak{a}$ (1.8.5). En vertu de ([31] 16.9.13.2), on a, pour tout $r \geq 0$,

$$\mathfrak{a}^r \cap J^{n+1} = \mathfrak{a}^r J^{n+1} + \mathfrak{a}^{r+1} \cap J^{n+1}. \tag{2.14.9.1}$$

L'homomorphisme $\mathrm{Gr}(u_n)$ en degré r est associé au morphisme surjectif de (A/J^{n+1})-modules

$$(\mathfrak{a}^r/\mathfrak{a}^{r+1}) \otimes_A (A/J^{n+1}) \to (\mathfrak{a}^r + J^{n+1})/(\mathfrak{a}^{r+1} + J^{n+1}).$$

Ce dernier a pour noyau

$$\frac{\mathfrak{a}^r \cap (\mathfrak{a}^{r+1} + J^{n+1})}{\mathfrak{a}^{r+1} + \mathfrak{a}^r J^{n+1}} = \frac{\mathfrak{a}^{r+1} + \mathfrak{a}^r \cap J^{n+1}}{\mathfrak{a}^{r+1} + \mathfrak{a}^r J^{n+1}},$$

qui est nul d'après (2.14.9.1). Par suite, $\mathrm{Gr}(u_n)$ est un isomorphisme pour tout $n \geq N$. Pour achever la preuve, il suffit d'observer que, pour tout entier $r \geq 0$ et tout couple d'entiers (m, n) tel que $0 \leq m \leq n$, l'homomorphisme canonique surjectif $\mathrm{Gr}_r(f_n) \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_n}} \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_m} \to \mathrm{Gr}_r(f_m)$ est bijectif, puisque les deux membres sont des $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}_m}$-modules localement libres de même rang.

Proposition 2.14.10. *Soient* $g \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ *un morphisme localement de type fini de schémas formels idylliques,* $\mathscr{K}$ *un idéal de définition cohérent de* $\mathfrak{Y}$*,* $\mathscr{J} = g^*(\mathscr{K})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ *; posons* $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$*,* $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$ $(n \geq 0)$ *et soit* $g_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}_n$ *le morphisme déduit de* g*. Soient* $f \colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ *une section de* g*, donc une immersion* (2.9.11)*,* $f_n \colon \mathfrak{Y}_n \to \mathfrak{X}_n$ *la section de* g_n *déduite de* f*. Alors la composante de degré* 1 *de l'homomorphisme* (2.14.8.1) *est bijective, et l'homomorphisme* (2.14.8.2) *pour* $r = 1$ *est un isomorphisme topologique.*

Cela résulte de 2.14.7 et 2.8.5.

2.14.11. Considérons le cas particulier du diagramme (2.14.4.1) où $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X}$, v étant l'identité, $\mathfrak{Y}$ est un sous-schéma de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}'$ est un sous-schéma de $\mathfrak{Y}$, f, u et $f' = f \circ u$ les injections canoniques. Comme ρ^* est un foncteur exact, on a $\rho^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}) = \rho^*(\Psi^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_f) = \Psi'^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\rho^*(\mathscr{A}_f)$, et comme $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$ s'identifie à $\Psi'^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{X}})/\mathscr{A}_{f'}$, on voit que l'on a $\mathscr{A}_u = \mathscr{A}_{f'}/\rho^*(\mathscr{A}_f)$. On en déduit un homomorphisme canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}'}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}_\bullet(f') \to \mathrm{Gr}_\bullet(u). \qquad (2.14.11.1)$$

Proposition 2.14.12. *Soient $\mathfrak{X}$ un schéma formel idyllique, $\mathfrak{Y}$ un sous-schéma de $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}'$ un sous-schéma de $\mathfrak{Y}$, $j\colon \mathfrak{Y}' \to \mathfrak{Y}$ l'injection canonique. On a alors une suite exacte canonique de faisceaux conormaux*

$$j^*(\mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}}) \to \mathscr{N}_{\mathfrak{Y}'/\mathfrak{X}} \to \mathscr{N}_{\mathfrak{Y}'/\mathfrak{Y}} \to 0,$$

où les flèches sont les composantes de degré 1 *des homomorphismes canoniques* (2.14.4.4) *et* (2.14.11.1).

La question étant locale, on peut se borner au cas où $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{a})$, $\mathfrak{Y}' = \mathrm{Spf}(A/\mathfrak{b})$, A étant un anneau idyllique, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant deux idéaux cohérents de A tels que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$. Compte tenu de 2.7.2.1 et 2.7.4, tout revient à voir que la suite canonique $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \to \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2 \to (\mathfrak{b}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{b}/\mathfrak{a})^2 \to 0$ est exacte, ce qui est immédiat.

2.15 Invariants différentiels fondamentaux d'un morphisme

2.15.1. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\Delta_f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$ le morphisme diagonal correspondant, qui est une immersion de schémas formels idylliques (2.9.12). On désigne par $\mathscr{P}^r_f$ ou $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, et l'on appelle *faisceau des parties principales d'ordre r de f*, le faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-augmentés, r-ième invariant normal de Δ_f (2.14.1). On pose $\mathscr{P}^\infty_f = \mathscr{P}^\infty_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} = \varprojlim \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, $\mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_f) = \mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) = \mathrm{Gr}_r(\Delta_f)$; le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathrm{Gr}_1(\Delta_f)$, idéal d'augmentation de $\mathscr{P}^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, est aussi noté Ω^1_f ou $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, et appelé le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module des 1-*différentielles* de f, ou de $\mathfrak{X}$ par rapport à $\mathscr{S}$, ou du $\mathscr{S}$-schéma formel $\mathfrak{X}$.

Il résulte de cette définition que les $\mathrm{Gr}_n(\mathscr{P}_f)$ sont des $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents (2.14.3), et pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$, on a $\mathscr{P}^r_f|U = \mathscr{P}^r_{f|U}$, $\mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_f)|U = \mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_{f|U})$ et $\Omega^1_f|U = \Omega^1_{f|U}$.

2.15.2. Notons p_1, p_2 les deux projections canoniques du produit $\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}$. Chacun de ces morphismes définit, pour tout r, un homomorphisme d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ inverse à droite de l'augmentation $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \to \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$. La structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre sur $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ déduite de p_1 (resp. p_2) sera nommée gauche (resp. droite), et quand on regardera $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ comme une $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre sans préciser, il sera sous-entendu qu'il s'agit de la structure gauche. On désigne par d^r_f, ou $d^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$, ou simplement d^r, l'homomorphisme d'anneaux $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ déduit de p_2. Pour tout ouvert U de $\mathfrak{X}$ et tout $t \in \Gamma(U, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}})$, on pose $dt = d^1 t - t$, et on dit que dt est la *différentielle* de t (élément de $\Gamma(U, \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$, aussi noté $d_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}(t)$).

2.15.3. Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$, $f'\colon \mathfrak{X}' \to \mathscr{S}'$ deux morphismes localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f'"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ \mathscr{S}' \arrow[r, "w"] & \mathscr{S} \end{tikzcd} \tag{2.15.3.1}$$

On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Delta_{f'}"'] & \mathfrak{X} \arrow[d, "\Delta_f"] \\ \mathfrak{X}' \times_{\mathscr{S}'} \mathfrak{X}' \arrow[r, "v"] & \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

où v est induit par u et w. Comme il a été expliqué dans 2.14.4, il en résulte des homomorphismes de faisceaux d'anneaux augmentés

$$\nu_r\colon \rho^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}'} \tag{2.15.3.2}$$

où l'on a posé $u = (\rho, \lambda)$. On vérifie aussitôt que ν_r est un ρ-morphisme d'algèbres quand on munit $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ (resp. $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}'}$) de la structure de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$ (resp. $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$) algèbre choisie dans (2.15.2). On en déduit donc un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-algèbres augmentées

$$\mathrm{P}^r(u)\colon u^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) = \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}'} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}'}. \tag{2.15.3.3}$$

Il en résulte un homomorphisme de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}'}$-algèbres graduées

$$\mathrm{Gr}(u) = \mathrm{gr}(u) \otimes 1\colon u^*(\mathrm{Gr}_\bullet(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})) \to \mathrm{Gr}_\bullet(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}'/\mathscr{S}'}). \tag{2.15.3.4}$$

Proposition 2.15.4. *Les hypothèses étant celles de* (2.15.3)*, supposons de plus que* $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$*,* f' *et* u *étant les projections canoniques. Alors les homomorphismes canoniques* $\mathrm{P}^r(u)$ (2.15.3.3) *et* $\mathrm{Gr}_1(u)$ (2.15.3.4) *sont bijectifs.*

En effet, on a alors $\mathfrak{X}' \times_{\mathscr{S}'} \mathfrak{X}' = (\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}) \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}'$ et compte tenu de 2.14.7, on peut appliquer 2.14.6(iii) en remplaçant g par la première projection $p_1\colon \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ et f par la diagonale Δ_f.

Proposition 2.15.5. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$, $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$ le morphisme déduit de f. Alors le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$-module $\Omega^1_{\mathfrak{X}_n/\mathscr{S}_n}$ est canoniquement isomorphisme à $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}} \mathscr{O}_{\mathfrak{X}_n}$; en particulier, le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est limite projective de la suite $(\Omega^1_{\mathfrak{X}_n/\mathscr{S}_n})$.*

En effet, on a alors $\mathfrak{X}_n \times_{\mathscr{S}_n} \mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X}) \times_{\mathscr{S}} \mathscr{S}_n$ et on peut appliquer 2.14.10 en remplaçant g par la première projection $p_1\colon \mathfrak{X} \times_{\mathscr{S}} \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ et f par la diagonale Δ_f.

2.15.6. Soient A un anneau idyllique, B une A-algèbre topologiquement de présentation finie, $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$. Alors $\Delta_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ correspond à l'homomorphisme surjectif $\varpi\colon B\widehat{\otimes}_A B \to B$ tel que $\varpi(b\widehat{\otimes}b') = bb'$, de noyau $\mathfrak{J}$ cohérent ; $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est le faisceau structural du schéma formel $\mathrm{Spf}((B\widehat{\otimes}_A B)/\mathfrak{J}^{r+1})$; $\mathrm{Gr}_r(\mathscr{P}_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})$ est le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent correspondant au B-module $\mathfrak{J}^r/\mathfrak{J}^{r+1}$. Il résulte de 2.15.5 et 1.8.7(ii) que $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}$ est le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent associé au séparé complété $\widehat{\Omega}^1_{B/A}$ du B-module topologique $\Omega^1_{B/A}$ (1.14.1).

Proposition 2.15.7. *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$, $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ deux morphismes localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Considérons les homomorphismes canoniques de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres augmentées* (2.15.3.3)

$$g_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}\colon \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \tag{2.15.7.1}$$
$$f_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}\colon f^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}) \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}. \tag{2.15.7.2}$$

Alors $g_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ est surjectif, et son noyau est l'image par $f_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ de l'idéal d'augmentation de $f^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}})$.

Il suffit de calquer la démonstration de ([31] 16.4.18), en utilisant 2.9.9 au lieu de (EGA I 4.4.5).

Corollaire 2.15.8. *Avec les notations de* (2.15.7), *on a une suite exacte canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents*

$$f^*(\Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}) \to \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}} \to \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0.$$

Proposition 2.15.9. *Soient $f\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $j\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ une immersion fermée, $\mathscr{A}$ l'idéal cohérent de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$ correspondant à j. Alors on a $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} = \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, l'homomorphisme canonique $j_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}\colon j^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}) \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}$ est surjectif, et son noyau est l'idéal de $j^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}})$ engendré par $j^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}.d^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}(\mathscr{A}))$.*

La première assertion résulte du fait que la diagonale $\Delta_j\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$ est un isomorphisme. Soient ϖ_1, ϖ_2 les deux homomorphismes d'algèbres $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}} \to \mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ correspondant respectivement aux deux projections canoniques p_1, p_2 de $\mathfrak{Y} \times_{\mathfrak{Z}} \mathfrak{Y}$

sur $\mathfrak{Y}$. La $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbre $j^*(\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}})$ s'identifie donc à $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}/\varpi_1(\mathscr{A})\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ et son quotient par l'idéal engendré par $j^*(\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}.d^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}(\mathscr{A}))$ à $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}/(\varpi_1(\mathscr{A})+\varpi_2(\mathscr{A}))\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\Delta_{f\circ j}"'] & \mathfrak{Y} \arrow[d, "\Delta_f"] \\
\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X} \arrow[r, "j\times_{\mathfrak{Z}} j"] & \mathfrak{Y}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

est cartésien car Δ_j est un isomorphisme. Soit $\Delta^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}$ (resp. $\Delta^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$) le voisinage infinitésimal d'ordre r de $\mathfrak{X}$ (resp. $\mathfrak{Y}$) pour l'immersion $\Delta_{f\circ j}$ (resp. Δ_f). D'après 2.14.5, on a un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
\Delta^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_{f\circ j}"'] & \Delta^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}} \arrow[d, "\Delta_f"] \\
\mathfrak{X}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{X} \arrow[r, "j\times_{\mathfrak{Z}} j"] & \mathfrak{Y}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Y}
\end{tikzcd}$$

Or $j\times_{\mathfrak{Z}} j$ est une immersion fermée et le sous-schéma de $\mathfrak{Y}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Y}$ qui lui est associé est défini par l'idéal cohérent $(p_1^*(\mathscr{A})+p_2^*(\mathscr{A}))\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}\times_{\mathfrak{Z}}\mathfrak{Y}}$ (2.9.9). Donc $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}$ s'identifie au quotient de $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ par l'idéal engendré par l'image dans $\mathscr{P}^r_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}}$ de $p_1^*(\mathscr{A})+p_2^*(\mathscr{A})$, qui n'est rien d'autre que l'idéal engendré par $\varpi_1^*(\mathscr{A})+\varpi_2^*(\mathscr{A})$.

Corollaire 2.15.10. *Soient $f\colon \mathfrak{Y}\to\mathfrak{Z}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $j\colon\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ une immersion. On a une suite exacte canonique de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules cohérents*

$$\mathscr{N}_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}\to j^*(\Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Z}})\to\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Z}}\to 0.$$

Proposition 2.15.11. *Soient $\mathfrak{X}\to\mathscr{S}$, $\mathfrak{Y}\to\mathscr{S}$ deux morphismes localement de présentation finie de schémas formels idylliques, $\mathfrak{Z}=\mathfrak{X}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{Y}$, $p\colon\mathfrak{X}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{Y}\to\mathfrak{X}$ et $q\colon\mathfrak{X}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{Y}\to\mathfrak{Y}$ les projections canoniques. Alors l'homomorphisme canonique*

$$p_{\mathfrak{Z}/\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}\oplus q_{\mathfrak{Z}/\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}\colon p^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})\oplus q^*(\Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathscr{S}})\to\Omega^1_{(\mathfrak{X}\times_{\mathscr{S}}\mathfrak{Y})/\mathscr{S}}$$

est bijectif.

Il suffit de calquer la démonstration de ([31] 16.4.23), en utilisant 2.15.4 et 2.15.7 au lieu de ([31] 16.4.5 et 16.4.18).

Proposition 2.15.12. *Soit $f\colon\mathfrak{X}\to\mathfrak{Y}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Pour que f soit non ramifié, il faut et il suffit que $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}=0$.*

La proposition se ramène à l'assertion correspondante pour les morphismes de schémas usuels ([31] 17.4.1) à l'aide de 2.4.7 et 2.15.5.

Proposition 2.15.13. *Soit $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ un morphisme lisse de schémas formels idylliques.*

(i) *Le $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-module $\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}}$ est localement libre de type fini.*

(ii) *Soit $g\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$ un morphisme localement de présentation finie de schémas formels idylliques. Alors la suite de $\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$-modules* (2.15.7)

$$0 \to f^*(\Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathscr{S}}) \to \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}} \to \Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathfrak{Y}} \to 0 \tag{2.15.13.1}$$

est exacte et localement scindée.

Le proposition (i) et l'exactitude de (2.15.13.1) se ramènent aux assertions correspondantes pour les morphismes de schémas usuels ([31] 17.2.3) à l'aide de 2.8.9, 2.8.11 et 2.15.5. La dernière assertion de (ii) se déduit de (i).

Proposition 2.15.14 (Critère jacobien). *Soient $f\colon \mathfrak{X} \to \mathscr{S}$ un morphisme lisse de schémas formels idylliques, $j\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$ une immersion, $h = f \circ j\colon \mathfrak{Y} \to \mathscr{S}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *h est lisse.*

(ii) *La suite de $\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$-modules* (2.15.10)

$$0 \to \mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}} \to j^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}) \to \Omega^1_{\mathfrak{Y}/\mathscr{S}} \to 0 \tag{2.15.14.1}$$

est exacte et localement scindée.

(iii) *Pour tout $y \in \mathfrak{Y}$, l'homomorphisme canonique*

$$(\mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}})_y \to (j^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}}))_y$$

est inversible à gauche.

(iv) *Pour tout $y \in \mathfrak{Y}$, l'homomorphisme canonique*

$$\mathscr{N}_{\mathfrak{Y}/\mathfrak{X}} \otimes \kappa(y) \to (j^*(\Omega^1_{\mathfrak{X}/\mathscr{S}})) \otimes \kappa(y)$$

est injectif.

Notons d'abord que les conditions (ii), (iii) et (iv) sont équivalentes (2.15.10, 2.15.13(i) et 1.3.15). Montrons ensuite que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes. On peut se borner au cas où $\mathscr{S} = \mathrm{Spf}(A)$ et $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(B)$ sont formels affines globalement idylliques, avec $\mathfrak{Y} = \mathrm{Spf}(B/\mathfrak{I})$, où $\mathfrak{I}$ est un idéal cohérent de B, et B est une A-algèbre topologiquement de présentation finie et formellement lisse (2.4.2). Compte tenu de 2.15.6, il suffit alors d'appliquer le critère jacobien (1.14.5).

2.15.15. Conservons les hypothèses de (2.15.14), supposons de plus h lisse. Soient $\mathscr{I}$ un idéal de définition cohérent de $\mathscr{S}$, $\mathscr{J} = f^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{X}}$, $\mathscr{K} = h^*(\mathscr{I})\mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}$. Posons $\mathfrak{X}_n = (\mathfrak{X}, \mathscr{O}_{\mathfrak{X}}/\mathscr{J}^{n+1})$, $\mathfrak{Y}_n = (\mathfrak{Y}, \mathscr{O}_{\mathfrak{Y}}/\mathscr{K}^{n+1})$, $\mathscr{S}_n = (\mathscr{S}, \mathscr{O}_{\mathscr{S}}/\mathscr{I}^{n+1})$ ($n \geq 0$) et soient $f_n\colon \mathfrak{X}_n \to \mathscr{S}_n$, $h_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathscr{S}_n$, $j_n\colon \mathfrak{Y}_n \to \mathfrak{X}_n$ les morphismes déduits de f, h