JEUX MATHÉMATIQUES

Les jeux de dés

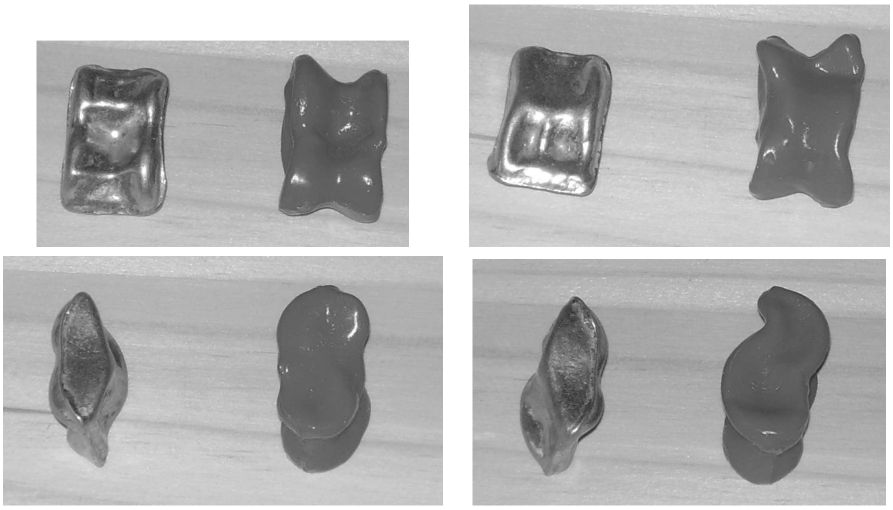
Michel Criton[1]

Les jeux remontent aux origines de l'humanité, et beaucoup de ces jeux font intervenir le hasard. C'est pourquoi l'homme a très tôt voulu simuler le hasard. Il a commencé par utiliser des objets naturels, qu'il a ensuite façonnés et épurés de façon à éliminer autant que possible tout biais éventuel. De ces essais et de ces perfectionnements est né le dé cubique que nous connaissons. Les mathématiciens se sont alors naturellement intéressés à ce générateur de hasard et ont progressivement dégagé les bases de ce qui allait devenir le calcul des probabilités.

De deux à quatre puis à six faces : la préhistoire du dé

Les premiers générateurs de hasard ont été des objets plus ou moins plats présentant deux faces principales et permettant de pratiquer des jeux de type « pile ou face ». Des coquillages, tels les cauris par exemple, ou des tiges de roseau fendues en deux, ont longtemps pu jouer ce rôle. Mais ce sont les premiers éleveurs qui sont passés d'objets à deux faces à des objets à quatre faces avec les astragales de mouton ou de chèvre. Ces os, situés dans l'articulation des pattes arrière des animaux et que nous connaissons sous le nom d'« osselets », présentent en effet une forme à peu près parallélépipédique. Un osselet lancé en l'air n'a quasiment aucune chance de retomber sur une de ses extrémités (les plus petites faces du parallélépipède), celles-ci étant très arrondies. On peut donc grossièrement considérer cet objet comme un dé à quatre faces, ces quatre faces n'ayant d'ailleurs pas la même probabilité d'occurrence en raison de leurs surfaces différentes. Si l'usage des ces osselets a souvent été à des fins autant divinatoires que ludiques, l'homme a très vite essayé de fabriquer des objets similaires dans divers matériaux. C'est ainsi qu'on a trouvé en Europe Orientale ou en Anatolie des répliques d'osselets de métal datant de plus de six millénaires. De nombreux jeux comme le « jeu du vizir » et ses innombrables variantes, pratiquées en Anatolie et dans les Balkans, utilisent les osselets comme des dés à quatre faces. Dans le jeu du vizir par exemple, la grande face creuse correspond au voleur, la grande face bombée au boulanger, la face étroite plate au vizir et la face étroite sinueuse au sultan.

[1] Président de la Fédération Française des Jeux Mathématiques.



Les quatre faces de deux osselets modernes, l'un en métal et l'autre en matière plastique, correspondant dans l'ordre au voleur, au boulanger, au vizir et au sultan. (Photos M. Criton)

On sait aussi que les Indiens de la vallée de l'Indus utilisaient des dés en bois de forme parallélépipédique très allongée, donc à quatre faces utilisables, bien avant notre ère.

L'avènement du dé cubique

Si le premier dé cubique connu apparaît en Syrie, quatre millénaires avant notre ère, il faudra attendre la civilisation grecque, puis les celle des Étrusques et des Romains, pour qu'il devienne un élément de jeu universel. Les dés de l'Antiquité, souvent fabriqués en terre cuite, sont d'abord grossiers, mais leur fabrication s'affine afin que les occurrences des différentes faces deviennent réellement équiprobables. Des dés cubiques, s'il sont fabriqués dans un matériau homogène, sont dits « équitables » (*fair dice* en anglais). Ceci suppose également que les points marqués sur les faces ne soit pas creusés dans la matière du dé et qu'il n'y ait ni enlèvement ni ajout de matière pour marquer ces points. Dès la période grecque, la règle de numérotation par laquelle la somme des points portés par deux faces opposées d'un dé doit toujours être égale à 7, se fixe et cette règle demeure inchangée jusqu'à nos jours.

Durant le Moyen-Âge, les jeux d'argent en général et les jeux de dés furent combattus par l'Eglise catholique qui les considérait comme immoraux et pensait qu'elle détournait les individus de la religion. C'est pourquoi l'Eglise tenta d'en limiter la progression, voire de les interdire à certaines classes de la population. C'est ainsi que le très pieux Louis IX (1214 ; 1270), plus connu sous le nom de Saint-Louis, édicta en 1254 une ordonnance réglementant très sévèrement les jeux de hasard et d'argent. En 1258, le prévôt de Paris Étienne Boileau codifia et encadra la profession de « déicier » (fabricant de dés) de façon à interdire les dés « plombés » utilisés par les tricheurs ou les dés portant un même nombre de points sur deux ou plusieurs faces.

La naissance de la théorie des probabilités

Luca Pacioli

Luca Pacioli (vers 1445 ; 1517) est un mathématicien italien de la fin du 15e siècle. Dans son ouvrage *Summa de Arithmetica Geometria Proportio et Proportionalità*, imprimé à Venise en 1494, il s'intéresse à un problème connu sous le nom de « problème des partis ». À l'époque, de nombreux jeux, qu'il s'agisse de jeux d'adresse ou de jeux de dés, donnaient lieu à des paris. Les joueurs misaient une somme convenue et le gagnant empochait les mises. Quel que soit le type de jeu pratiqué, une partie se déroulait en un nombre donné de manches, chaque manche rapportait un nombre donné de points et les deux joueurs en présence devaient s'efforcer d'atteindre un total fixé. Le premier joueur ayant atteint ou dépassé ce total récupérait les mises. Lorsqu'une partie entamée s'interrompait pour une raison quelconque avant qu'un des joueurs ait atteint le total visé, comment les mises de départ devaient-elles être réparties entre les deux joueurs ?

Pacioli prend l'exemple suivant : *une brigade joue à la paume. Il faut 60 pour gagner, et chaque coup vaut 10. L'enjeu est de dix ducats. Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 et le second 20. On demande quelle part de l'enjeu revient à chaque camp ?* [2] Luca Pacioli propose plusieurs modes de répartition tous basés sur le nombre de points déjà acquis par les deux équipes. Deux de ces solutions intègrent dans le calcul le nombre total de manches possibles : au total, onze manches peuvent être jouées, au maximum, avant qu'une des équipes n'atteigne le total de 60 points. La première équipe a déjà obtenu 5/11 des points possibles, et la seconde 2/11, ce qui fait 7/11 au total. La première équipe récupérera donc les 5/7 des mises, soit 7 ducats et 1/7, et la seconde 2/7 des mises, soit 2 ducats et 6/7. Les différents raisonnements de Pacioli, qui ne tiennent compte que des points acquis, parviennent tous au même résultat.

Jérome Cardan

Gerolamo Cardano, connu sous le nom de Jérôme Cardan (1501 ; 1576) revient sur le problème des partis dans deux ouvrages, *Liber de ludo alea*, écrit vers 1525 mais qui ne sera publié qu'en 1564, et *Practica arithmetice et mesurandi singularis* qu'il publie en 1539. Cardan juge la solution de Pacioli non équitable et affirme que le calcul doit être fait non pas à partir des points déjà obtenus, mais des points que les deux équipes devraient encore obtenir pour gagner la partie : « Si la division une fois faite, le jeu recommençait à nouveau, les parties en présence devraient miser la même somme que celle qu'elles ont reçue en s'arrêtant de jouer ». Cardan propose donc la solution suivante sans argumentation : Il reste une seule manche à gagner au premier joueur pour atteindre le total de 60, alors que le second doit

[2] *« Une brigata gioca a palla a 60, el gioco e 10 per caccia, e fanno posta ducati 10 ; acade per certi accidenti che non possono fornire e l'una parte a 50 e l'altra a 20 : se dimanda che tocca per parte de la posta. »* in *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Guglielmo Bruto, I. T. Libri, Carucci della Sommaia, 1840).

en gagner quatre pour atteindre le même but. La progression[3] de 1 est 1, celle de 4 est $1+2+3+4$, soit 10. Le premier joueur recevra donc 10/11 des dix ducats, soit 9 ducats et 1/11 et le second 1/11 des 10 ducats, soit 10/11 de ducat.

Tartaglia

Un autre mathématicien italien Niccolo Fontana, dit « Tartaglia » qui signifie « le bègue » (1499 ; 1557) reprend le problème dans un ouvrage publié en 1556, *La Prima parte del general trattato di numeri et misure*. Tartaglia modifie l'exemple de Pacioli afin de critiquer sa solution : il suppose qu'une équipe a marqué 10 points, tandis que l'autre n'en a encore marqué aucun. Dans ce cas, selon le calcul de Pacioli, la totalité de la mise irait intégralement à la première équipe. Une telle répartition n'est visiblement pas raisonnable, dans la mesure où l'équipe adverse a encore des chances non nulles de gagner la partie.

Tartaglia propose la solution suivante : si l'un des joueurs a obtenu 10 points et l'autre 0 et que chacun des deux joueurs a misé 22 ducats, le premier joueur a déjà obtenu le sixième des points nécessaires pour emporter la partie. Il devra donc récupérer, outre ses 22 ducats, le sixième de ceux de son adversaire, soit au total 25 ducats 2/3.

Dans un autre exemple où l'un des joueurs a obtenu 50 points et l'autre 30, Tartaglia propose une autre méthode : la différence entre les deux scores est de 20 ducats, soit un tiers du nombre de points à obtenir. Le premier joueur récupérera donc ses 22 ducats plus le tiers de ceux de son adversaire, soit au total 29 ducats 1/3.

Mais le mathématicien pense finalement que « la résolution d'une telle question est davantage d'ordre judiciaire que rationnel, et de quelques manière qu'on veuille la résoudre, on y trouvera sujet à litiges » (... la risolutione di una tal questione è più presto giudicale, che per ragione, tal che in qual si volia modo la sarà risolta visi trovare da litigare).

Galilée

En 1620, Galileo Galilei, dit « Galilée » (1554 ; 1642) est Premier Mathématicien à l'Université de Pise et Premier Philosophe au service du Grand Duc de Toscane Cosme II. Le grand-duc, qui est un amateur de jeux de dés, lui pose la question suivante : « On lance trois dés. Le cas où la somme est 10 est-il plus favorable que celui où la somme est 9 ? »

La question n'est pas anodine : l'expérience semble montrer que la somme 10 est obtenue avec une fréquence légèrement supérieure à celle de la somme 9. Pourtant, la somme 10 peut s'obtenir de 6 façons, comme la somme 9.

$9 = 6+2+1 = 5+3+1 = 5+2+2 = 4+4+1 = 4+3+2 = 3+3+3$

$10 = 6+3+1 = 6+2+2 = 5+4+1 = 5+3+2 = 4+4+2 = 4+3+3.$

Le paradoxe est seulement apparent. En effet, en écrivant les sommes comme ci-dessus, on ne différencie pas les dés. Or si l'on différencie les trois dés, en supposant qu'ils sont par exemple de couleurs différentes, on constate que la somme 9 ne s'obtient que de 25 façons tandis que la somme 10 s'obtient de 27 façons.

[3] Cardan désigne par progression de n la somme des entiers de 1 à n. Il considère que s'il restait p points à gagner au premier joueur et q points au second pour emporter la partie interrompue, le premier doit recevoir $(1+2+\ldots+q)/(1+2+\ldots+p+1+2+\ldots+q)$ et le second $(1+2+\ldots p)/(1+2+\ldots p+1+2+\ldots+q)$.

Galilée rédigea un petit mémoire en réponse à la Question du Grand Duc de Toscane où il expliqua le paradoxe. Ce texte ne sera publié que dans une réédition de ses œuvres en 1718.

Le problème de Galilée n'était pas nouveau. Il apparaît dès le 13^{e} siècle dans un poème médiéval, *De Vetula*, qui relate la vie d'Ovide. Ce poème en latin, attribué à Richard de Fournival , chanoine et chancelier du Chapitre de Notre-Dame d'Amiens (1201-1260), sera traduit en français au 14^{e} siècle par Jean Lefèvre, procureur au Parlement de Paris. Dans ce poème, on trouve une évocation du jeu des tables, ancêtre du backgammon, et du lancer de trois dés, qui y est complètement et correctement analysé.

3	18	*1 punctatura*	*1 cadencia*
4	7	*1 punctatura*	*3 cadencia*
5	16	*2 punctatura*	*6 cadencia*
6	15	*3 punctatura*	*10 cadencia*
7	14	*4 punctatura*	*15 cadencia*
8	13	*5 punctatura*	*21 cadencia*
9	12	*6 punctatura*	*25 cadencia*
10	11	*6 punctatura*	*27 cadencia*

Table figurant dans le poème De Vetula. Le nombre de « punctatura » correspond au nombre de façons d'obtenir un total sans distinguer les dés et sans tenir compte de l'ordre tandis que le nombre de « cadencia » correspond au nombre de façons d'obtenir un total en tenant compte de l'ordre.

Pascal et les problèmes du Chevalier de Méré

Antoine Gombault, Chevalier de Méré (1607 ; 1684) est un gentilhomme et homme de lettres de la cour de Louis XIV. Son nom est lié à plusieurs des problèmes précédemment cités. Le chevalier de Méré a échangé une correspondance au sujet de ces problèmes avec Blaise Pascal (1623 ; 1662) qui a lui-même débattu de ces questions avec Pierre Fermat (1601 ; 1665). Selon Pascal, le Chevalier de Méré *« a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre »* . Le premier problème évoqué par le Chevalier de Méré est le suivant :

« Si l'on jette 4 fois un dé à 6 faces, il y a plus de chance d'obtenir au moins un 6 que d'en obtenir aucun ; si l'on jette 24 fois deux dés à 6 faces, il y a plus de chance d'obtenir au moins un double 6 que d'en obtenir aucun. »

Le raisonnement incorrect de Méré était le suivant : dans le premier cas, on a six possibilités (les six faces du dé) et 4 lancers, donc les chances sont de 4/6 ; dans le second cas, les chances sont de 24/36 (24 lancers pour 36 combinaisons possibles des faces des deux dés), ce qui correspond à la même probabilité. Dans une lettre à Fermat datée du 29 juillet 1654, Pascal écrit à ce sujet :

« Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625. Si on entreprend de faire Sonnez (i.e. double-six) avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24. »

Pour le lancer d'un dé, l'affirmation de Méré était juste, bien que son raisonnement soit incorrect, puisque $(5/6)^4 = 625/1296$ et $1-(5/6)^4 = 671/1296$. Pour le lancer de deux dés, le résultat lui-même était faux, puisque $1-(35/36)^{24} < 0,5$.

Méré s'intéresse aussi au problème des partis. Il propose la version suivante à Pascal qui en débattra avec Fermat et en fournira la première solution correcte, faisant appel sans le dire à la notion d'espérance mathématique :

« Deux joueurs jouent à un jeu de hasard où le but est de gagner trois manches, chacun ayant misé 32 pistoles au départ. La partie doit s'interrompre alors que le premier joueur a gagné 2 manches et le second une seule. Comment les 64 pistoles doivent-elles être réparties entre les deux joueurs ? »

Citons la solution de Pascal[4] : *« Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu. Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.*

Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 : s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : "Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres". Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : "Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi". Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles. Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : "Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez en 12, et moi 12, qui, avec 32, font 44". »

Roberval objectera à Pascal *qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendait de faire le pari juste sur une condition feinte*[5]... La même année, Pascal rédigea son *Traité du triangle arithmétique* qui ne paraîtra qu'en 1665 et dans lequel il reviendra sur ce problème.

4 Lettre à Fermat du 29 juillet 1654.
5 *Acta Eruditorum*, Wilhelm Gottfried Leibniz.

Combinatoire du dé cubique

Lorsqu'on observe des dés cubiques, à première vue, ils semblent tous fabriqués sur le même modèle. Mais en observant la façon dont leurs faces sont numérotées, on réalise que ce n'est pas vraiment le cas.

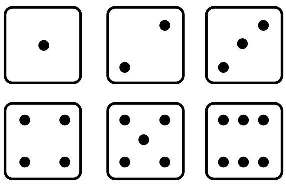
Si l'on numérotait les faces d'un dé cubique de 1 à 6 sans respecter aucune règle particulière, on pourrait fabriquer 6!/24, soit 30 dés différents. En effet, on a six choix possibles pour numéroter la face du dessus, cinq choix pour celle de gauche, quatre choix pour la face du dessous, trois choix pour celle de droite et deux pour la face avant (il ne reste plus alors qu'une possibilité pour la face arrière). Mais un dé donné peut être posé sur n'importe laquelle de ses six faces, et lorsqu'il est posé sur une face fixée, il peut être tourné selon quatre orientations.

Depuis l'Antiquité grecque, la numérotation des faces d'un dé respecte systématiquement la règle suivante : la somme des points portés par deux faces opposées est toujours égale à 7. Mais cette règle ne suffit pas à assurer l'unicité. Même sans tenir compte du graphisme et de son orientation, il existe un dé « droit » et un dé « gauche » et on trouve les deux types de dés dans le commerce. Sur un dé « gauche », les nombres 1, 2 et 3 sont disposés autour d'un sommet dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, alors que sur un dé « droit », les mêmes nombres sont disposés dans le sens des aiguilles d'une montre (voir photo). Traditionnellement, les dés occidentaux étaient des dés « gauches » et les dés japonais des dés « droits », mais les dés fabriqués industriellement de nos jours peuvent être indifféremment de l'un ou de l'autre type.

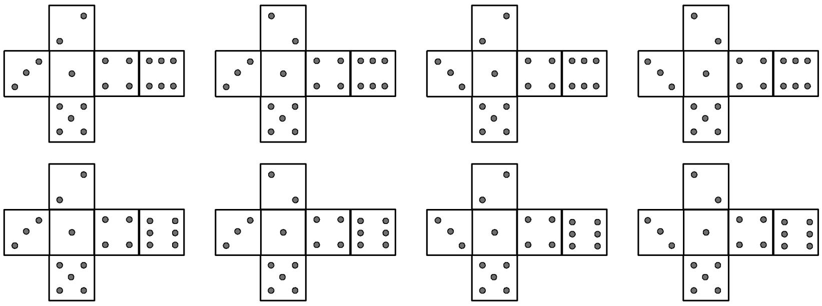
Un dé gauche et un dé droit. *(Photos M. Criton)*

Les seize dés possibles

En faisant le décompte précédent, on ne prend absolument pas en compte le graphisme de la numérotation des dés. Les « nombres » apparaissant sur les faces des dés sont figurés par des points (qu'on appelle des « ocelles »). Ces points sont traditionnellement disposés comme sur la figure ci-dessous.

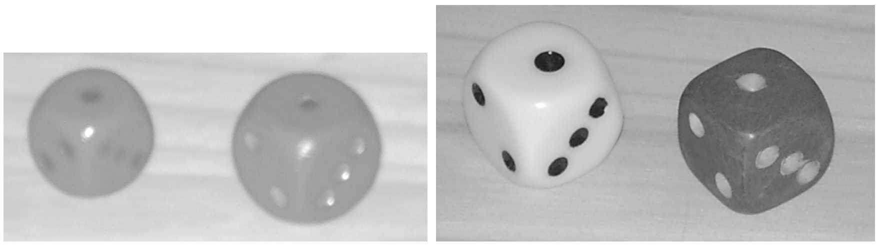


On remarque que chacun des « chiffres » 2, 3 et 6 peut prendre deux orientations possibles. Cela porte le nombre de dés différents à $2 \times 2 \times 2 \times 2$, soit à seize.

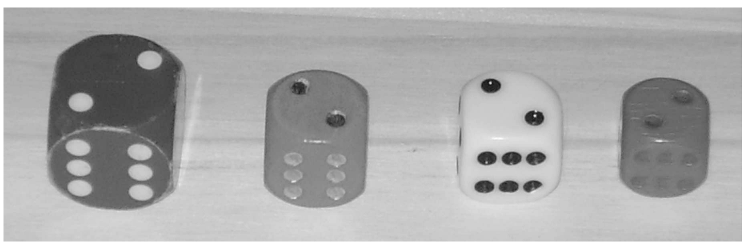


Les huit dés gauches possibles.

En effet, pour une même orientation des faces 1, 2 et 3, si l'on prend en compte l'orientation des points figurant les chiffres 2, 3 et 6, chacun des deux dés « classiques » peut être décliné en huit variantes (voir la figure ci-dessous). On a donc théoriquement 16 dés différents possibles. On trouve dans le commerce la plupart de ces variantes (voir les photos ci-dessous).



Dans ces quatre dés gauches, le 2 prend les deux orientations possibles, de même que le 3. (Photos M. Criton)



Sur ces quatre dés, on observe les quatre dispositions relatives possibles du 2 et du 6.(Photos M. Criton)

Curiosités mathématiques autour des dés

Les dés de Sicherman

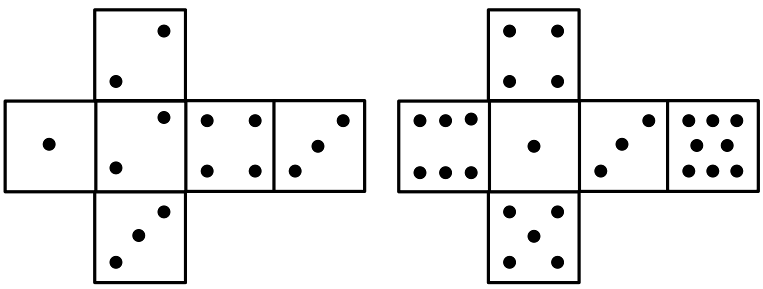
Lorsqu'on lance deux dés ordinaires, les différentes occurrences possibles, au nombre de 36, sont celles du tableau ci-dessous.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

Ce tableau conduit aux probabilités suivantes d'obtenir chacun des totaux possibles de 2 à 12.

total	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
probabilité	1/36	1/18	1/12	1/9	5/36	1/6	5/36	1/9	1/12	1/18	1/36

Est-il possible d'obtenir la même loi de probabilité avec deux dés numérotés d'une façon différente de la numérotation classique ? Ce problème a été posé et résolu par un colonel américain de Buffalo, George Sicherman, et diffusé par le ludologue américain Martin Gardner (1914 ; 2010) dans une de ses chroniques du *Scientific American* de 1978. Il existe une solution unique à ce problème. Cette solution est représentée par les deux patrons ci-dessous, dans lesquels l'égalité des nombres de points portés par deux faces opposées a été respectée.



Ces deux dés $(1;2;2;3;3;4)$ et $(1;3;4;5;6;8)$ permettent les occurrences suivantes.

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

On vérifie que le nombre d'occurrences de chaque total est bien le même qu'avec deux dés classiques. On peut démontrer l'unicité de cette solution différente de la disposition classique en la construisant pas à pas à partir des plus petits totaux. La seule façon d'obtenir un seul total égal à 2 est d'avoir 1 sur chaque dé. Il y a deux façons d'obtenir deux totaux égaux à 3 : avoir 2 sur chaque dé, ou bien avoir deux 2 sur un même dé et aucun sur l'autre. On construit ainsi, de proche en proche, deux et seulement deux solutions : la solution « classique » avec deux dés identiques et la solution de Sicherman avec deux dés différents.

Avec des dés cubiques, on a également cherché des solutions pour trois dés. Sicherman a démontré que pour trois dés, la seule solution non classique était celle comprenant les deux dés de Sicherman et un dé classique.

Une généralisation

Le problème de Sicherman a été généralisé à des dés ayant d'autres formes que le cube. On a ainsi trouvé qu'il existe une paire unique de dés tétraédraux de Sicherman : $(1;2;2;3)$ et $(1;3;3;5)$.

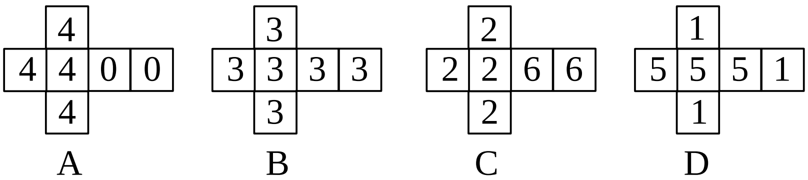
Il existe trois paires de dés octaédraux de Sicherman :
$(1;2;2;3;3;4;4;5)$ et $(1;3;5;5;7;7;9;11)$,
$(1;2;2;3;5;6;6;7)$ et $(1;3;3;5;5;7;7;9)$,
$(1;2;3;3;4;4;5;6)$ et $(1;2;5;5;6;6;9;10)$;
sept paires de dés dodécahédraux de Sicherman :
$(1;2;2;3;3;3;3;3;5;5;6)$ et $(1;4;5;7;8;9;10;11;12;14;15;18)$,
$(1;2;2;3;3;4;7;8;8;9;9;10)$ et $(1;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;14)$,
$(1;2;3;3;4;4;5;5;6;6;7;8)$ et $(1;2;5;6;7;8;9;10;11;12;15;16)$,
$(1;2;3;3;4;5;7;8;9;9;10;11)$ et $(1;2;4;5;5;6;8;9;9;10;12;13)$,
$(1;2;3;7;7;8;8;9;9;13;14;15)$ et $(1;2;3;4;4;5;5;6;6;7;8;9)$,
$(1;3;3;5;5;7;7;9;9;11;11;13)$ et $(1;2;2;3;5;6;6;7;9;10;10;11)$,
$(1;3;5;7;7;9;9;11;11;13;13;17)$ et $(1;2;2;3;3;4;4;5;5;6;6;7)$;

et sept paires de dés icosaédraux de Sicherman :

$(1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 6; 6; 6; 7; 7; 8)$
et $(1; 5; 6; 9; 10; 11; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 22; 23; 24; 27; 28; 32)$,
$(1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 11; 12; 12; 13; 13; 14; 14; 15; 15; 16)$
et $(1; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 22; 24)$,
$(1; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 10; 10; 11; 12)$
et $(1; 2; 5; 6; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 23; 24; 27; 28)$,
$(1; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 7; 11; 12; 13; 13; 14; 14; 15; 15; 16; 17)$
et $(1; 2; 5; 6; 6; 7; 9; 10; 10; 11; 13; 14; 14; 15; 17; 18; 18; 19; 22; 23)$,
$(1; 2; 3; 4; 5; 11; 11; 12; 12; 13; 13; 14; 14; 15; 15; 21; 22; 23; 24; 25)$
et $(1; 2; 3; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 10; 10; 11; 12; 13; 14; 15)$,
$(1; 3; 3; 5; 5; 7; 7; 9; 9; 11; 11; 13; 13; 15; 15; 17; 17; 19; 19; 21)$
et $(1; 2; 2; 3; 5; 6; 6; 7; 9; 10; 10; 11; 13; 14; 14; 15; 17; 18; 18; 19)$,
$(1; 3; 5; 7; 9; 11; 11; 13; 13; 15; 15; 17; 17; 19; 19; 21; 23; 25; 27; 29)$
et $(1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 6; 6; 7; 7; 8; 8; 9; 9; 10; 10; 11)$,

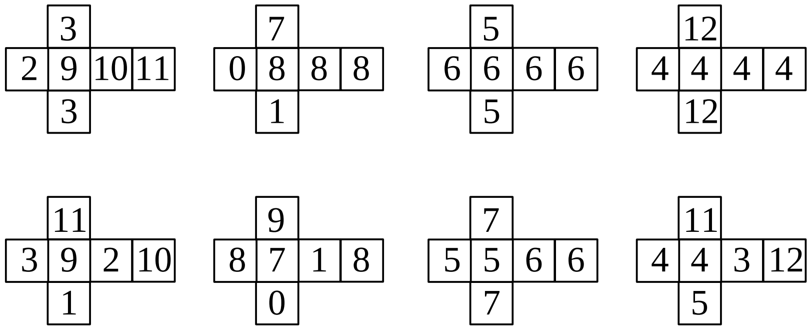
Les dés non transitifs d'Efron

Bradley Efron est un statisticien américain de l'Université Stanford. Il fut le premier à trouver un ensemble de quatre dés qui violent le principe de transitivité. Supposons en effet que quatre joueurs A, B, C, D disposent chacun d'un des dés représentés ci-dessous, chaque lettre correspondant au joueur utilisant le dé en question.



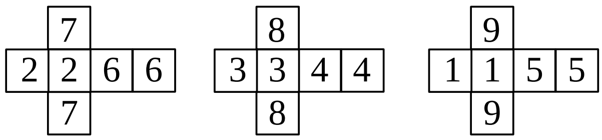
On constate que le joueur A gagnera contre le joueur B avec une probabilité de 2/3 : quatre faces sur les six faces du dé A portent un nombre supérieur à ceux des six faces du dé B. Pour la même raison, le joueur B l'emportera sur le joueur C avec une probabilité égale à 2/3. Le joueur C obtient un 6 dans 1/3 des cas, et lorsqu'il obtient un 2, il l'emporte dans la moitié des cas sur le dé D, d'où une probabilité de gain encore égale à 2/3. Enfin le joueur D l'emporte sur le joueur A avec une probabilité à nouveau égale à 2/3 (il obtient un 5 dans la moitié des cas, et dans l'autre moitié des cas, il l'emporte une fois sur trois). Efron a démontré que 2/3 est la probabilité maximale pour un tel ensemble de quatre dés A ; B ; C ; D où $A > B > C > D > A$ (« > » signifiant ici que le dé précédent bat le dé suivant avec une probabilité égale à 2/3).

Efron a trouvé d'autres ensembles de dés présentant la même propriété.



Dans la seconde série de dés, la probabilité de gain d'un dé sur le suivant est également égale à 2/3. Dans la troisième série, on a la possibilité d'obtenir des nombres égaux. On suppose alors que l'on doit rejouer jusqu'à l'obtention de nombres inégaux. La probabilité de gain d'un dé sur le suivant est alors égale à 11/17.

En 1976, dans un article de la revue américaine *Mathematics Magazine*, Richard L. Tenney et Caxton C. Foster décrivent un ensemble de trois dés non transitifs (voir la figure).



A B C

En analysant les couples possibles dans chaque duel, on constate que A gagne contre B, B contre C et C contre A, avec une probabilité à chaque fois égale à 5/9.

Les dés équitables

Les dés cubiques sont universellement utilisés et considérés comme « équitables », ce qui signifie que les occurrences des différentes faces sont équiprobables. Quelles sont les autres formes géométriques permettant d'obtenir des dés équitables ?

Les polyèdres réguliers

Pour des raisons de symétrie, les cinq polyèdres réguliers convexes (dits de Platon) constituent évidemment des dés équitables. Rappelons qu'un polyèdre régulier est constitué de faces qui sont des polygones réguliers et que chaque sommet est l'intersection du même nombre de faces. On ne rencontre que rarement des dés tétraédriques, car ceux-ci « roulent » difficilement, mais les jeux de société et les jeux de rôle ne se sont pas privés d'utiliser les dés octaédriques, dodécaédriques ou icosaédriques, bien que le dé cubique reste très largement majoritaire en raison de la facilité de sa fabrication et de sa grande stabilité.

Les polyèdres semi-réguliers

Les polyèdres semi-réguliers ou archimédiens sont composés de deux ou plusieurs types de polygones réguliers, les sommets présentant toujours le même assemblage de faces. Ils sont au nombre de treize : le tétraèdre tronqué ; le cube tronqué ; l'octaèdre tronqué ; le dodécaèdre tronqué ; l'icosaèdre tronqué ; le cuboctaèdre ; le cube adouci ; l'icosidodécaèdre ; le dodécaèdre adouci ; le petit rhombicuboctaèdre ; le grand rhombicuboctaèdre ; le petit rhombicosi-dodécaèdre ; le grand rhombicosidodécaèdre. À ces polyèdres, il faut ajouter les prismes et les antiprismes semi-réguliers (à l'exception du cube et de l'octaèdre régulier, qui sont un prisme et un antiprisme particuliers). Pour chaque polyèdre semi-régulier, les faces de même type sont équiprobables (ce qui n'est pas le cas pour des faces de types différents). Des prismes ou antiprismes très allongés peuvent ainsi être considérés comme des dés équitables dans la mesure ou la probabilité qu'ils tombent sur une base est suffisamment faible.

Les isoèdres

Il existe d'autres dés équitables constitués de polyèdres ayant des faces toutes identiques ainsi que des sommets présentant le même arrangement de faces, mais dont les faces ne sont pas obligatoirement des polygones réguliers. On peut citer les duaux des prismes et des antiprismes qui constituent des suites infinies de polyèdres (l'octaèdre et le cube pouvant être considérés comme des cas particuliers de ces suites). Tous ces isoèdres possèdent un nombre pair de faces.

Ces deux dés à dix faces en forme de bi-pyramides,
sont des duaux d'antiprismes. *(Photos M. Criton)*

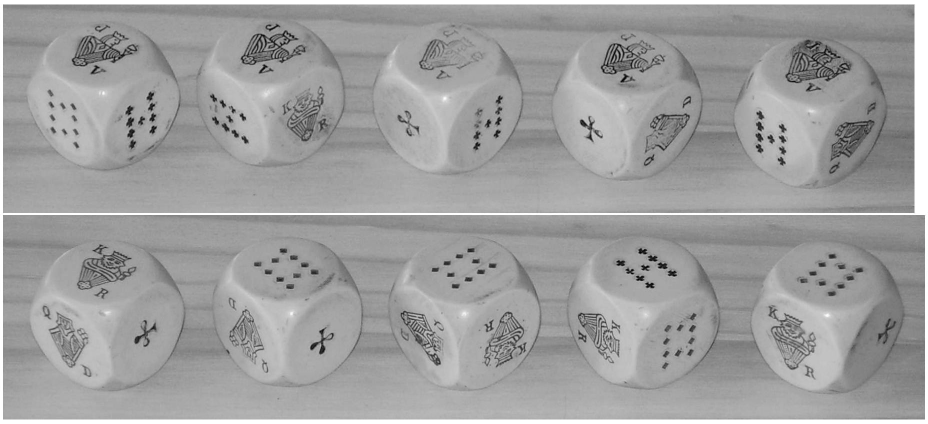
Quelques exemples de jeux de dés

Les dés sont des accessoires d'un très grand nombre de jeux utilisant par ailleurs d'autres matériels (plateaux, pions, figurines, cartes, etc...). Nous n'évoquerons donc ici que des jeux utilisant uniquement des dés et éventuellement une feuille de papier et un crayon pour marquer les points et des jetons qui peuvent servir à matérialiser la mise ou le pot.

La plupart des jeux de dés se jouent en famille ou entre amis, mais quelques-uns sont aussi des jeux de casino dans lesquels les joueurs jouent contre la banque. Il existe donc pour chacun d'eux de nombreuses variantes selon la zone géographique et le cadre dans lequel le jeu est pratiqué. Dans la plupart de ces jeux, le but est de réaliser certaines combinaisons en lançant deux ou plusieurs dés. Le craps, le six ou as, utilisent deux dés ; le 421, le marinetti, le jeu de couronne et ancre, utilisent trois dés ; le poker d'as, le jeu des dés indiens, le yam ou yam's utilisent cinq dés ; le dixmille et le jeu du cochon utilisent six dés ; le vingt-six utilise dix dés.

Le poker d'as

Le poker d'as doit son appellation à une déformation du nom anglais *poker dice*. Il apparaît en France au début des années 1920. Il s'agit d'une adaptation du jeu de poker qui se joue avec des dés au lieu de cartes à jouer. Les dés ne sont pas des dés classiques, mais portent chacun six marques correspondant aux valeurs : as, roi, dame, valet, dix et neuf.



Cinq dés d'un jeu de poker d'as datant du début du XX^{e} siècle. On remarque que la disposition des marques sur les faces n'est absolument pas standardisée.

(Photos M. Criton)

Le but du jeu est de gagner des jetons en réalisant certaines combinaisons (voir tableau). Lorsque deux joueurs réalisent une même combinaison, ils peuvent être départagés par sa hauteur. Par exemple, une séquence dame-valet-dix l'emporte sur une séquence valet-dix-neuf ou un brelan d'as l'emporte sur un brelan de dames. Le lancer de cinq dés offre 6^5, soit 7776 possibilités (les dés étant différenciés). Pour chaque combinaison on obtient les probabilités ci-dessous.

combinaison	description	gain	probabilité
paire simple	2 faces identiques	1 jeton	25/54
double paire	deux fois 2 faces identiques	1 jeton	25/108
séquence	5 faces qui se suivent	1 jeton	5/162
brelan	3 faces identiques	2 jetons	25/162
full	un brelan + une paire	3 jetons	50/1296
carré	4 faces identiques	4 jetons	25/1296
poker	5 faces identiques	5 jetons	1/1296
aucune		aucun	5/81

Le 421

Ce jeu est un jeu de comptoir. Jusque dans les années 1960, on le trouvait au comptoir de nombreux cafés français. Il est un dérivé d'un jeu plus ancien, le zanzibar, appelé aussi zanzi. Il se joue avec trois dés classiques (numérotés de 1 à 6), en un, deux ou trois coups. Après un premier lancer des trois dés, on peut relancer un dé, deux dés ou les trois dés, en gardant éventuellement les nombres obtenus avec un dé ou deux dés, pour tenter d'améliorer son score. Les combinaisons à réaliser sont les suivantes.

combinaison	description	gain	probabilité
paire as - as - *n*	deux as et un autre nombre *n*	*n* jetons	5/72
autre paire	2 faces identiques autres que « 1 »	1 jeton	25/72
tierce	3 faces qui se suivent	2 jetons	1/9
brelan ou zanzi	3 faces identiques *n*	*n* jetons	1/36
brelan d'as	3 as	7 jetons	1/216
421	un « 4 » un « 2 » et un « 1 »	6 jetons	1/36
autres		1 jeton	5/12

Références

BROLINE D.M., *Renumbering of the faces of dice*, Mathematics Magazine, volume 52, 1979.
CAZEAUX J.-L. & CRITON M., *Les jeux de dés*, Éditions Pole, 2007.
DERRIENNIC Y., *Pascal et les problèmes du Chevalier de Méré*, Gazette des mathématiciens n° 97, Société Mathématique de France, 2003.
DIACONIS P. & KELLER J., *Fair dices*, American Mathematical Monthly (1989).
GARDNER M., *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, 1989.
GODFROY-GENIN A.-S., *De la doctrine des probabilités à la théorie des probabilités*, thèse de doctorat, 2004.
GRANDJOUAN J.-O., *L'astragale et le pari*, Éditions G.-P. Maisonneuve et Larose, 1969.
LAURENT C.-M., *Tous les jeux de dés et leurs règles*, Borneman, 1967.
Mathématiques : approche par les textes historiques, IREM Paris VII, brochure 61, 1986.
TEMAM D., *Une obscure affaire de partage*, Tangente n° 47, Éditions Pole, 1995.
TENNEY R.L. & FOSTER C.C., *Non transitive Dominance*, Mathematics Magazine, volume 49, 1976.
Site internet d'Ed Pegg : `http://www.mathpuzzle.com/Fairdice.htm`
Site internet de Klaus Æ Mogensen : `http://hjem.get2net.dk/Klaudius/Dice.htm`