mathématiques

Bernard
Gostiaux

Cours de mathématiques spéciales

4. Géométrie affine et métrique

puf

Cours de mathématiques spéciales

Tome 4

Géométrie affine et métrique

COLLECTION DIRIGÉE PAR PAUL DEHEUVELS

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

TOME 4

Géométrie affine et métrique

BERNARD GOSTIAUX

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

ISBN 2 13 047027 0
ISSN 0246-3822

Dépôt légal — 1re édition : 1995, juillet

© Presses Universitaires de France, 1995
108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

Sommaire

Avant-propos VII

Chapitre 1. — Espaces affines 1

1. Définitions 1
2. Sous-espaces affines 9
3. Parallélisme, intersection de sous-espaces affines 16
4. Applications affines 21
5. Et l'analytique dans tout cela? 38

Chapitre 2. — Théorème fondamental 49

1. Introduction 49
2. Première approche du Théorème fondamental 50
3. Renforcement du Théorème 58

Chapitre 3. — Convexité 71

1. Orientation des espaces vectoriels et affines réels de dimension finie 71
2. Convexité 75
3. Exemples de convexes : les polytopes 89

Chapitre 4. — Espaces affines euclidiens 109

1. Structure métrique des espaces affines réels 109
2. Espaces affines préhilbertiens réels et euclidiens 116
3. Espaces affines euclidiens de dimension trois 131
4. Groupe des isométries 138
5. L'inversion 149
6. Distance de Hausdorff 159

Chapitre 5. — Géométrie plane euclidienne 179

1. Angles orientés 179
2. Nombres complexes et géométrie plane 191
3. Relations métriques dans le triangle 197
4. Problèmes sur les cercles 203
5. Quelques théorèmes glanés au fil des siècles 212

Lexique 233

Avant-propos

Je pensais bien ne pas reprendre la plume après la rédaction des trois premiers tomes de ce cours de mathématiques spéciales.

Mais mon ami Marcel Berger me fit remarquer qu'une fois de plus, la géométrie était le parent pauvre.

Par ailleurs, comme tout enseignant, je peux constater les difficultés des étudiants qui ne disposent pas de définitions claires des outils géométriques, prenant en compte la topologie et le calcul différentiel.

C'est pourquoi je me suis pris au jeu, et, aidé de mes fils, j'ai rédigé ces quelques notes. Il y manque encore bien des choses, en particulier les notions d'aires, de volumes, de formes différentielles... Mais là, sans Lebesgue, pas de salut.

Notations

$\mathrm{aff}(B)$	1.25
$D(a,b)$	1.69
$//$	1.69
$[a,b]$	3.9
$\mathcal{E}(X)$	3.6

CHAPITRE 1

Espaces affines

Les espaces affines sont le cadre de la « géométrie usuelle ». L'ambiguité de leur étude vient de ce qu'on s'empresse d'en faire des espaces vectoriels, et qu'on munit les espaces vectoriels d'une structure affine. Mais cette dualité des points de vue, ainsi que la notion de barycentre, en fait leur richesse.

1. Définitions

DÉFINITION 1.1. — *Soit un espace vectoriel E sur un corps commutatif K. On appelle espace affine de direction E, tout ensemble A sur lequel le groupe additif E opère simplement et transitivement.*

C'est le type de définition à tiroir : allez voir ailleurs pour comprendre ! Il me faut donc rappeler du vocabulaire défini dans le Tome 1 en 4.63, 4.67 et 4.68.

On dit que E, (groupe additif) *opère sur* A si et seulement si il existe une loi de composition externe sur A, notée $+$, qui au couple $(\vec{x}, a)$ de $E \times A$ associe un point de A, noté $(a + \vec{x})$, cette loi vérifiant :

1.2. $\forall (\vec{x}, \vec{y}, a) \in E \times E \times A,\ a + (\vec{x} + \vec{y}) = (a + \vec{x}) + \vec{y}$,
et $\forall a \in A,\ a + \vec{0} = a$.

Les éléments de l'espace affine sont appelés *points* et pour l'instant les vecteurs de E se voient coiffés d'une flèche pour faciliter la distinction entre éléments de l'espace affine et de l'espace vectoriel.

Dire que E opère *simplement et transitivement* sur A signifie que :

1.3. $\forall (a, b) \in A^2,\ \exists ! \vec{x} \in E,\ a + \vec{x} = b$.

(L'existence de $\vec{x}$ se traduit par E opère transitivement sur A, l'unicité se qualifiant par simplement.)

On peut alors vérifier, (voir tome 1, 4.64) que, pour $\vec{x}$ fixé dans E, l'application $\tau_{\vec{x}}$ de A dans A définie par :

1.4 $\forall a \in A$, $\tau_{\vec{x}}(a) = a + \vec{x}$, est une bijection, appelée *translation de vecteur* $\vec{x}$, de bijection réciproque $\tau_{-\vec{x}}$.

On peut également formuler différemment la définition 1.1.

THÉORÈME 1.5. — *Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K. On appelle espace affine de direction E, tout ensemble A tel qu'il existe une application θ de $A \times A$ dans E vérifiant :*

(i) $\forall (a, b, c) \in A^3$, $\theta(a, c) = \theta(a, b) + \theta(b, c)$,

(ii) $\forall (a, \vec{x}) \in A \times E$, $\exists! b \in A$, $\theta(a, b) = \vec{x}$.

Si A est un espace affine, on a, d'après 1.3, l'existence d'un seul $\vec{x}$ de E tel que $a + \vec{x} = b$, on pose $\theta(a, b) = \vec{x}$, et on définit ainsi une application θ de $A \times A$ dans E.

Soient a, b et c dans A, $\vec{x} = \theta(a, b)$ et $\vec{y} = \theta(b, c)$, c'est que $a + \vec{x} = b$ et $b + \vec{y} = c$, soit encore $(a + \vec{x}) + \vec{y} = c$, soit, d'après 1.2, $a + (\vec{x} + \vec{y}) = c$: $\vec{x} + \vec{y}$ est le seul vecteur $\vec{z}$ de E tel que $a + \vec{z} = c$, on a donc $\vec{x} + \vec{y} = \theta(a, c)$ soit encore :

$\theta(a, b) + \theta(b, c) = \theta(a, c)$. C'est le *(i)* du théorème.

Quand au *(ii)*, puisque le groupe additif E opère sur A, au couple $(a, \vec{x})$ de $A \times E$ on associe $a + \vec{x} = b$, et ce point b vérifie $\theta(a, b) = \vec{x}$.

Réciproquement, si on dispose de l'application θ du théorème, on fait agir E sur A en définissant $+$ par :

1.6. $a + \vec{x}$ est le seul b de A tel que $\theta(a, b) = \vec{x}$.

On a alors, pour $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans E et a dans A, $(a + \vec{x}) + \vec{y} = b + \vec{y}$ si $\theta(a, b) = \vec{x}$, et, si c est tel que $\theta(b, c) = \vec{y}$, on a encore $(a + \vec{x}) + \vec{y} = c$.

Or, d'après *(i)*, $\vec{x} + \vec{y} = \theta(a, b) + \theta(b, c) = \theta(a, c)$ donc c est aussi le seul point de A tel que $a + (\vec{x} + \vec{y}) = c$, d'où l'égalité $(a + \vec{x}) + \vec{y} = a + (\vec{x} + \vec{y})$.

Comme dans *(i)*, avec $c = b$, on a $\theta(a, b) = \theta(a, b) + \theta(b, b)$, c'est que, pour tout b de A, on a $\theta(b, b) = \vec{0}$, donc d'après 1.6 , on aura :

$\forall a \in A$, $a + \vec{0}$ est le seul m de A tel que $\theta(a, m) = \vec{0}$, or $\theta(a, a) = \vec{0}$, donc $m = a$, soit $a + \vec{0} = a$.

Le groupe additif E opère donc sur A.

Il opère simplement transitivement, car si on se donne le couple (a, b) de A^2, à ce couple on associe un seul vecteur $\vec{x} = \theta(a, b)$, (ici c'est θ qui est connue), et par la définition 1.6, ce vecteur $\vec{x}$ vérifie $a + \vec{x} = b$. ■

EXEMPLE 1.7. — *Tout espace vectoriel E est un espace affine de direction E.*

En effet à tout couple $(a, \vec{x})$ de $E \times E$, on associe le point $b = a + \vec{x}$, (addition prise dans E), il est clair que 1.2 est vérifiée, (associativité de l'addition dans E), ainsi que 1.3, car $\forall (a, b) \in E^2$, $\vec{x} = b - a$, (structure de groupe additif sur E), vérifie $a + \vec{x} = b$, et c'est le seul vecteur de E vérifiant cette égalité.

Donc, les espaces affines existent. En fait on va vérifier que tout espace affine peut être muni d'une structure vectorielle :

THÉORÈME 1.8. — *Tout espace affine A de direction E peut être muni d'une structure d'espace vectoriel isomorphe à E.*

Soit A affine de direction E, on considère l'application θ de $A \times A$ dans E du Théorème 1.5, et on fixe un point a de A. Pour tout b de A, on note $\theta_a(b)$ le vecteur $\theta(a, b)$: il est facile de vérifier que θ_a est une bijection de A sur E, c'est le *(ii)* du Théorème 1.5. On définit alors une addition sur A par :

1.9. $\qquad \forall (m, n) \in A^2,\ m + n = \theta_a^{-1}(\theta_a(m) + \theta_a(n)),$

et le produit du scalaire λ de K par m de A, par :

1.10. $\qquad \forall (\lambda, m) \in K \times A,\ \lambda \cdot m = \theta_a^{-1}(\lambda \cdot \theta_a(m)).$

Il est facile de vérifier que A est alors un espace vectoriel sur le corps K.

Par exemple, on a, pour m, n et r dans A,

$$(m + n) + r = \theta_a^{-1}\left(\theta_a(m + n) + \theta_a(r)\right).$$

Or, vu 1.9, on a $\theta_a(m + n) = \theta_a(m) + \theta_a(n)$, donc

$$\begin{aligned}(m + n) + r &= \theta_a^{-1}\left((\theta_a(m) + \theta_a(n)) + \theta_a(r)\right)\\ &= \theta_a^{-1}\left(\theta_a(m) + (\theta_a(n) + \theta_a(r))\right),\end{aligned}$$

(associativité de l'addition dans E), et comme on a aussi $\theta_a(n) + \theta_a(r) = \theta_a(n + r)$, (d'après 1.9), il vient :

$$\begin{aligned}(m + n) + r &= \theta_a^{-1}\left(\theta_a(m) + \theta_a(n + r)\right)\\ &= m + (n + r).\end{aligned}$$

On vérifierait de même toutes les conditions de la structure vectorielle.

La bijection θ_a, de A sur E est alors un *isomorphisme* puisque 1.9. donne $\theta_a(m + n) = \theta_a(m) + \theta_a(n)$ et 1.10 donne $\theta_a(\lambda \cdot m) = \lambda \cdot \theta_a(m)$. ■

1.11. On dit encore que A affine est muni de la structure vectorielle *d'origine* a.

Pour l'instant, ce que nous avons vu ne dépasse pas le stade de l'aimable plaisanterie, du jeu d'écriture. Mais avec la notion de *barycentre*, liée à l'existence du produit par un scalaire sur le domaine des opérateurs, les choses sérieuses vont commencer. Mais avant, introduisons *une notation fort utile*.

1.12. *Pour tout* (a,b) *de* A^2, *on note* $\overrightarrow{ab}$ *le seul vecteur* $\vec{x}$ *de* E *tel que* $a+\vec{x}=b$, *(voir 1.3), ou encore* $\overrightarrow{ab}=\theta(a,b)$, *(voir Théorème 1.5).*

Soient alors des points de A, en nombre fini, $(a_i)_{i\leqslant i\leqslant n}$, et des scalaires $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ du corps K.

Si $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$, le vecteur $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{aa_i}$ est indépendant du choix de a dans A, car avec a' dans A, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{a'a_i}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\overrightarrow{a'a}+\overrightarrow{aa_i})=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{a'a}+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{aa_i},$$

et comme la somme des λ_i est nulle, on a :

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{a'a_i}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{aa_i}.$$

Par contre, si $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\neq 0$, ce vecteur dépend de a, mais si on introduit le point g vérifiant l'égalité :

1.13. $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{ag}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{aa_i}$, ce point g est indépendant de a.

D'abord, comme $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\neq 0$, le vecteur $\vec{x}=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{aa_i}$ existe, et alors il existe un seul g de A tel que $\overrightarrow{ag}=\vec{x}$, puis, pour a' dans A, on serait conduit à définir g' par $\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\overrightarrow{a'g'}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{a'a_i}$, mais comme

$\overrightarrow{a'g'} = \overrightarrow{a'a} + \overrightarrow{ag'}$ et $\overrightarrow{a'a_i} = \overrightarrow{a'a} + \overrightarrow{aa_i}$, on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)(\overrightarrow{a'a} + \overrightarrow{ag'}) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overrightarrow{a'a} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{aa_i},$$

soit :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overrightarrow{ag'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{aa_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overrightarrow{ag},$$

et comme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, il vient $\overrightarrow{ag'} = \overrightarrow{ag}$ d'où $g' = g$. On a donc :

THÉORÈME 1.14. — *Soient des points $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, en nombre fini, dans A affine, et des scalaires $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$. Alors, le point g de A défini par la relation :*

1.15. $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overrightarrow{ag} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{aa_i}$, *est indépendant du choix de a. Ce point s'appelle le barycentre des a_i affectés des coefficients λ_i.*

Cette notion de *barycentre* est fondamentale dans les espaces affines : *une propriété vraiment affine se traduit par des barycentres.*

REMARQUE 1.16. — *On a aussi g barycentre des $(a_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ avec : $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ si et seulement si g vérifie la relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ga_i} = 0$.*

En effet, 1.15 s'écrit encore

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)\overrightarrow{ag} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ag} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ga_i}$$

d'où

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{ga_i}.$$

Donnons quelques propriétés des barycentres.

THÉORÈME 1.17. — *Le barycentre de n points $a_1, \dots, a_n$ affectés des coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme non nulle, ne change pas si on remplace les λ_i par les scalaires $\lambda \cdot \lambda_i$, avec $\lambda \neq 0$.*

En effet, si on multiplie la relation 1.15 par λ, on obtient, vu les règles de calcul dans un espace vectoriel, $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i\right) \overrightarrow{ag} = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\lambda_i)\overrightarrow{aa_i}$, et comme $\sum_{i=1}^{n} \lambda\lambda_i \neq 0$, cette égalité prouve que g est le barycentre des a_i affectés des coefficients $\lambda\lambda_i$.

Ce théorème, (grandeur et décadence!) est à la base de la richesse, et de la difficulté de la notion de barycentre.

Difficulté, car quand on parlera de coordonnées barycentriques, elles ne seront définies qu'à un facteur multiplicatif près, *richesse*, car c'est le choix convenable d'un tel facteur de proportionnalité qui donnera des résultats.

THÉORÈME 1.18. — *(Associativité des barycentres). Soit I un ensemble fini d'indices et $(I_k)_{1 \leqslant k \leqslant q}$ une partition de I. Soient des points $(a_i)_{i \in I}$ de A affine, affectés de coefficients $(\lambda_i)_{i \in I}$.*

Si $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$, et si pour chaque k compris entre 1 et q, $\sum_{i \in I_k} \lambda_i = \alpha_k$ est non nul, en notant g_k le barycentre des $(a_i, \lambda_i)_{i \in I_k}$, on a g barycentre des $(a_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est aussi le barycentre des $(g_k, \alpha_k)_{k \in \{1,2,\dots,q\}}$.

L'énoncé est long parce qu'il faut bien fixer les notations, mais la justification est courte!

Soit $\Lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{i \in I_k} \lambda_i \right) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k$, par commutativité et associativité de l'addition dans le corps K. Comme $\Lambda \neq 0$, le barycentre g des $(a_i, \lambda_i)_{i \in I}$ vérifie, avec a quelconque de A,

$$\Lambda \overrightarrow{ag} = \sum_{i \in I} \lambda_i \overrightarrow{aa_i} = \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{i \in I_k} \lambda_i \overrightarrow{aa_i} \right),$$

par associativité et commutativité de l'addition de E.

Comme $\sum_{i\in I_k} \lambda_i \overrightarrow{aa_i} = \alpha_k \overrightarrow{ag_k}$, on a encore

$$\left(\sum_{k=1}^{q} \alpha_k\right) \overrightarrow{ag} = \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \overrightarrow{ag_k}$$

ce qui prouve bien que g est barycentre des (g_k, α_k). ■

L'utilisation de ce Théorème est très facile. Par exemple, justifions que les médianes d'un triangle sont concourantes, en introduisant d'abord la notion d'*équibarycentre*.

DÉFINITION 1.19. — *Soit A un espace affine de direction E espace vectoriel sur un corps commutatif K de caractéristique différente de $n \in \mathbb{N}^*$, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n points de A. On appelle équibarycentre des a_i le barycentre de ces points affectés de coefficients égaux, (non nuls).*

Car, si λ est non nul dans K, $\lambda+\lambda+\ldots+\lambda$, ($n$ fois) soit encore $(n\cdot 1_K)\lambda$ est non nul dans K, donc le barycentre des $(a_i, \lambda)_{1\leqslant i\leqslant n}$ existera.

On peut évidemment prendre $\lambda = 1$, (Théorème 1.17), pour définir l'équibarycentre.

Il faut remarquer qu'en caractéristique n, l'équibarycentre de n points n'existe pas. (Voir Tome 1, 5.29 pour la définition de la caractéristique).

1.20. Si $n = 2$, on parlera *du milieu du bipoint* (a, b) pour l'équibarycentre de a et b.

Pourquoi milieu? Et bien parce que si m est l'équibarycentre de a et b, on a $\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{mb} = 0$, soit encore $\overrightarrow{ma} + (\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{ab}) = 0$, d'où

$$2\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{ab} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{am} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}.$$

Pour faire ce calcul, on a utilisé **la relation dite de Chasles** :

1.21. *Soient a, b, c dans A affine, on a :* $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ac}$.

En effet, (voir 1.12), avec $\overrightarrow{ab} = \theta(a, b)$ et $\overrightarrow{bc} = \theta(b, c)$, cette égalité est la condition *(i)* du Théorème 1.5.

Il convient de remarquer que ce milieu ne fait pas intervenir de notion de longueur, mais, lorsqu'on supposera E normé, on retrouvera la notion intuitive de milieu, c'est-à-dire de point m à «égale distance» de a et b.

Venons-en à notre *triangle* (a, b, c) de A affine en caractéristique différente de 2 et 3. Soit g l'équibarycentre de a, b et c. *Par associativité*, on

peut considérer l'équibarycentre m de b et c, et g devient le barycentre de $(a,1)$ et $(m,2)$.

En anticipant sur le paragraphe 2 où nous parlerons de sous-espace affine, et de droite affine, (voir 1.23), on sait alors que m est dans le sous-espace affine $D_{b,c}$ engendré par b et c, qui est une droite si $b \neq c$; puis que g est de même sur le sous-espace affine $D_{a,m}$ engendré par a et m, qui sera aussi une droite si $a \notin D_{b,c}$ c'est-à-dire si a, b et c sont affinement libres (voir 1.29), ou encore si on a un vrai triangle. La droite $D_{a,m}$ est la médiane issue de a, et par symétrie des rôles joués par a, b et c, g est sur chaque médiane du triangle : *elles sont concourantes*, (voir figure 1.19).

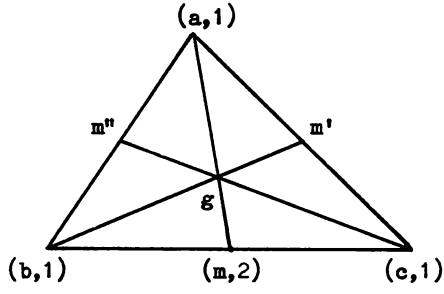


Fig. 1.19

Vous savez comme moi que *g est le centre de gravité du triangle*, que si on a de même un tétraèdre vrai, (a,b,c,d), en caractéristique différente de 2 et 3, les droites joignant les milieux des arêtes opposées sont concourantes en g, équibarycentre de a,b,c,d; et que les droites joignant les sommets aux centres de gravité des faces opposées passent par g, (figure 1.21).

En effet, g est barycentre de $(m,2)$ et $(n,2)$, avec m et n équibarycentres de (b,c) d'une part et (a,d) d'autre part donc $g \in D_{m,n}$; mais on a aussi g barycentre de $(b,1)$ et de $(g_b,3)$, avec g_b équibarycentre de (a,c,d), toujours par associativité, (voir Théorème 1.18), donc g est sur la droite $D_{b,\,g_b}$.

1.22. *Une remarque s'impose.* Sur les schémas précédents j'ai placé m, équibarycentre de deux points «entre» ces deux points, et même au... milieu. C'est parce qu'inconsciemment, je me place dans le cadre des espaces affines réels, (et même euclidiens).

Si $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, le milieu n'est pas... au milieu, (figure 1.22).

Si on schématise le *plan* affine K^2, le milieu de $a = (\overline{1},\overline{1})$ et $b = (\overline{2},\overline{1})$ est le point $m = (\overline{0},\overline{1})$ (on a bien $2\cdot(\overline{0},\overline{1}) = (\overline{0},\overline{2}) = 1\cdot(\overline{1},\overline{1}) + 1\cdot(\overline{2}\cdot\overline{1})$, et il est difficile de dire que m est «au milieu» de a et b.

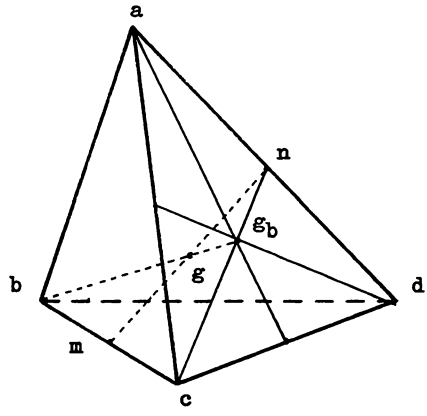


Fig. 1.21

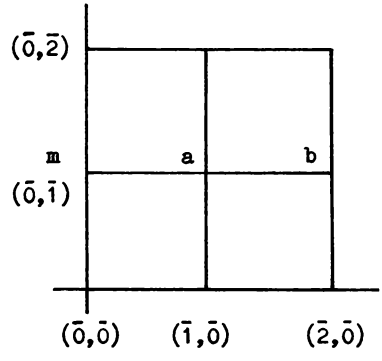


Fig. 1.22

2. Sous-espaces affines

DÉFINITION 1.23. — *Soit A un espace affine de direction E espace vectoriel sur le corps commutatif K. On appelle sous-espace affine de A, toute partie B de A stable par passage aux barycentres des familles finies de points de A.*

Donc B est sous-espace affine de A si et seulement si,

1.24. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, \ldots, a_n) \in B^n$, $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in K^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, le barycentre des $(a_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est dans B.

Il est immédiat de vérifier que $\varnothing$ et A sont des sous-espaces affines de A, et qu'une intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine,

donc les sous-espaces affines forment une *famille de Moore* de parties de A, (voir Tome 2, 1.16), et si B est une partie quelconque de A, il existera un plus petit (pour l'inclusion) sous-espace affine contenant B, ce sera l'intersection de tous les sous-espaces affines de A contenant B. On peut noter

1.25. $\mathrm{aff}(B)$

le sous-espace affine engendré par B, par analogie à $\mathrm{vect}(B)$ pour le sous-espace vectoriel engendré par une partie B d'un espace vectoriel.

On peut encore caractériser $\mathrm{aff}(B)$, «élément par élément», (faire le lien avec fermeture et adhérence en topologie, Tome 2, 1.15 et 1.17 ou bien avec $\mathrm{vect}(B)$, Tome 1, 6.17 et 6.19). On a :

THÉORÈME 1.26. – *Le sous-espace aff(B) engendré par une partie B de l'espace affine A est l'ensemble des barycentres formés à partir des familles finies de points de B.*

On note $\widetilde{B}$ cet ensemble. On a $B \subset \widetilde{B}$ car $\forall b \in B$, b est barycentre de la famille réduite à b, de coefficient 1.

Puis $\widetilde{B}$ est *stable par passage aux barycentres* : si $a_1, \ldots, a_n$ sont dans $\widetilde{B}$, en nombre fini, et si on se donne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires de somme non nulle, chaque a_i étant barycentre d'un nombre fini de points de B, notés sous la forme des $(b_{k_i})_{k_i \in K_i}$, avec $\mathrm{card}\, K_i$ fini, pour des coefficients $(\beta_{k_i})_{k_i \in K_i}$ de somme β_i non nulle, on peut supposer les K_i disjoints deux à deux, (quitte à remplacer formellement K_i par $\{i\} \times K_i$), alors les K_i forment une partition de $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ et le barycentre des $(a_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est encore celui des b_{k_i} affectés des coefficients $\beta_{k_i} \times \dfrac{\lambda_i}{\beta_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et $k_i \in K_i$, vu le Théorème 1.18 d'associativité, (si on associe les points $(b_{k_i})_{k_i \in K_i}$, pour les coefficients $\beta_{k_i} \dfrac{\lambda_i}{\beta_i}$ proportionnels aux β_{k_i}, on les remplace par leur barycentre qui est a_i, (Théorème 1.17), de coefficient $\dfrac{\lambda_i}{\beta_i} \sum_{k_i \in K_i} \beta_{k_i}$ donc de coefficient λ_i). Le barycentre des $(a_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est donc dans $\widetilde{B}$.

Mais alors $\widetilde{B}$ est un sous-espace affine, (définition 1.23), contenant B, on a $\mathrm{aff}(B) \subset \widetilde{B}$.

Enfin, comme B est contenu dans le sous-espace affine $\mathrm{aff}(B)$ qui est stable par passage aux barycentres, on a $\widetilde{B} \subset \mathrm{aff}(B)$, d'où l'égalité $\mathrm{aff}(B) = \widetilde{B}$. ■

En fait, la définition 1.23 a le mérite d'insister sur la notion de barycentre, mais elle n'est pas logique car on ne voit pas apparaître la structure d'espace affine d'un sous-espace affine. Cet aspect des choses va se voir grâce au

THÉORÈME 1.27. — *Une partie non vide B d'un espace affine A est un sous-espace affine si et seulement si, en fixant b dans B, l'ensemble $F_b = \{\theta(b,m); m \in B\}$ est un sous-espace vectoriel de E, direction de A. De plus F_b est indépendant de b dans B, et B est un espace affine de direction F_b.*

Rappelons qu'avec l'application θ définie au Théorème 1.5, on note $\overrightarrow{bm}$ au lieu de $\theta(b,m)$, le seul vecteur $\vec{x}$ de E tel que $m = b + \vec{x}$, (voir 1.12).

On suppose que B est un sous-espace affine non vide, alors $F_b = \{\overrightarrow{bm}, m \in B\}$ est non vide car $\vec{0} = \overrightarrow{bb} \in F_b$, et c'est stable par combinaisons linéaires : si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ sont dans F_b, c'est que m_1 et m_2 de A tels que $\overrightarrow{bm}_1 = \vec{x}_1$ et $\overrightarrow{bm}_2 = \vec{x}_2$ sont dans B, mais alors pour λ_1 et λ_2 scalaires du corps K, si m de A est tel que $\overrightarrow{bm} = \lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \lambda_1\overrightarrow{bm}_1 + \lambda_2\overrightarrow{bm}_2$, c'est encore, (astuce pour faire apparaître m comme barycentre),

$$(1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{bm} = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)\,\overrightarrow{bb} + \lambda_1\overrightarrow{bm}_1 + \lambda_2\overrightarrow{bm}_2,$$

donc m est barycentre des points b, m_1 et m_2 de B, de coefficients, (peu importe), $1 - \lambda_1 - \lambda_2$, λ_1 et λ_2. On a m dans B, (stable par passage aux barycentres) donc $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 = \overrightarrow{bm} \in F_b$ qui est bien sous-espace vectoriel de E.

Si $b' \in B$, on a :

$F_{b'} = \{\overrightarrow{b'm}; m \in B\} = \{\overrightarrow{b'b} + \overrightarrow{bm}; m \in B\} = \{\overrightarrow{bm} - \overrightarrow{bb'}; m \in B\} \subset F_b$, (stable par soustraction) et par symétrie des rôles de b et de b' on a aussi $F_b \subset F_{b'}$ d'où l'égalité et l'indépendance de F_b par rapport à b dans B.

Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de E, direction de A, et $B = \{m; \overrightarrow{bm} \in F\}$. Alors $b \in B$, (car $\vec{0} = \overrightarrow{bb} \in F$), et B est sous-espace affine de A, c'est-à-dire B stable par passage aux barycentres, car si les $(m_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont dans B et les scalaires $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont de somme non nulle, le barycentre m des (m_i, λ_i) vérifie l'égalité $\overrightarrow{bm} = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\overrightarrow{bm}_i$: le vecteur $\overrightarrow{bm}$ est dans F, (combinaison linéaire des $\overrightarrow{bm}_i$ de F) donc $m \in B$. Il est clair que $F_b = F$. Enfin la restriction à $B \times B$ de θ, application de

$A \times A$ dans E qui définit la structure affine sur A, (voir 1.5) est telle que

$$\forall (m, m') \in B \times B, \quad \theta(m, m') = \theta(m, b) + \theta(b, m') = \overrightarrow{bm'} - \overrightarrow{bm} \in F_b$$

et $\forall (m, \vec{x}) \in B \times F_b$, on sait qu'il existe un seul m' de A tel que $\theta(m, m') = \vec{x} = \overrightarrow{mm'}$, avec $\vec{x} \in F_m$, (indépendance de F_b par rapport à b : on prend m), donc $m' \in B$ en fait et les conditions *(i)* et *(ii)* du Théorème 1.5 sont vérifiées. ■

1.28 *Du vocabulaire :* si la direction F du sous-espace affine non vide B est le sous-espace $\{0\}$, B est un *point*, si $\dim(F) = 1$, B est une *droite affine*, si $\dim(F) = 2$ on parle de *plan affine*, et si $\operatorname{codim}(F) = 1$ on parlera d'*hyperplan* affine pour B, (voir Tome 1, 6.91 pour la définition de la codimension). On appelle *dimension* du sous-espace affine B, la dimension de sa direction.

DÉFINITION 1.29. — *Une famille finie de $n+1$ points de A espace affine est dite affinement libre si et seulement si le sous-espace affine qu'elle engendre est de dimension n.*

THÉORÈME 1.30. — *La famille $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ de points de A affine est affinement libre si et seulement si pour chaque i_0 de $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, les vecteurs $\overrightarrow{a_{i_0}a_i}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\} \setminus \{i_0\}$ sont libres.*

En effet, si $B = \operatorname{aff}(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$, chaque m de B est un barycentre des a_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$, (Théorème 1.26), donc il existe des scalaires α_i de somme non nulle tels que m soit barycentre des $(a_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$.

D'après le Théorème 1.27, la direction de $\operatorname{aff}(a_1, \ldots, a_{n+1})$ est en particulier $F_{a_{i_0}} = \{\overrightarrow{a_{i_0}m}; m \in \operatorname{aff}(a_1, \ldots, a_{n+1})\}$, mais en écrivant que m est barycentre des (a_i, α_i) on a $\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i\right) \overrightarrow{a_{i_0}m} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \overrightarrow{a_{i_0}a_i}$, et comme $\overrightarrow{a_{i_0}a_{i_0}} = 0$, il vient, avec $\alpha = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i$, non nul :

$$\overrightarrow{a_{i_0}m} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n+1} \frac{\alpha_i}{\alpha} \overrightarrow{a_{i_0}a_i},$$

d'où $F_{a_{i_0}} = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{a_{i_0}a_i}, i \in \{1, \ldots, n+1\} - \{i_0\})$: on a bien $F_{a_{i_0}}$ de dimension n si et seulement si les $\overrightarrow{a_{i_0}a_i}$, pour $i \neq i_0$, sont libres. Et ceci se fait pour chaque i_0. ■

DÉFINITION 1.31. — *Si A est un espace affine de dimension n, on appelle repère $\mathcal{R}$ de A toute famille affinement libre de $n+1$ points de A.*

Si $\mathcal{R} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est un tel repère de A, espace affine de dimension n, en particulier la famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{a_0 a_i}, i = 1, \ldots, n\}$ est une base de E, direction de A, mais réciproquement, si on se donne un point a_0 de A, et une base $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ de E, en introduisant les a_i de A tels que $\overrightarrow{a_0 a_i} = \overrightarrow{e_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la famille $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ est un repère de A. On a donc justifié la

REMARQUE 1.32. — *Un repère $\mathcal{R}$ de A affine de dimension n est un couple $(a, \mathcal{B})$ avec a point de A, (appelé origine) et $\mathcal{B}$ base de la direction de A.*

On retrouve les notations classiques de la *géométrie analytique* de sa jeunesse, soit le repère $(o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'un espace affine de dimension trois.

En fait, si $\mathcal{R} = (o; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est un repère de l'espace affine A de dimension n, un point m de A est caractérisé par la donnée de $\overrightarrow{om}$ qui se décompose de *manière unique* dans la base des $\overrightarrow{e_i}$, et si $\overrightarrow{om} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$, *les x_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, sont les coordonnées de m.*

On a ainsi identifié l'espace affine A avec sa direction E en choisissant o pour origine, (voir Théorème 1.8, et 1.11) mais... on a perdu l'aspect barycentrique, que l'on va retrouver en parlant de *coordonnées barycentriques*. Mais avant, utilisons ce repère tout neuf pour définir les **équations des hyperplans**.

Soit donc un espace affine A de dimension n, rapporté à un repère $\mathcal{R} = (o, \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ base de E direction de A.

Si on se donne n points $a_1, \ldots, a_n$ de A, affinement libres, ils engendrent un sous-espace affine H de A, de dimension $n-1$, (voir Théorème 1.30), donc un hyperplan.

Un point m de A sera dans H si et seulement si $\overrightarrow{a_1 m}$ est dans la direction de H, qui est le sous-espace vectoriel de base $\{\overrightarrow{a_1 a_j}; 2 \leqslant j \leqslant n\}$, donc si et seulement si la famille des vecteurs $\overrightarrow{a_1 m}$ et les $\overrightarrow{a_1 a_j}$ pour $j = 2, \ldots, n$ est liée.

En appelant alors $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de m dans le repère $\mathcal{R}$, et $(\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})$ celles de a_j, (penser à la $j^{ème}$ colonne d'une matrice) on aura, pour $2 \leqslant j \leqslant n$:

$$\overrightarrow{a_1 a_j} = \overrightarrow{a_1 o} + \overrightarrow{o a_j} = \overrightarrow{o a_j} - \overrightarrow{o a_1} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ij} - \alpha_{i1}) \overrightarrow{e_i}$$

alors que :

$$\overrightarrow{a_1m} = \overrightarrow{om} - \overrightarrow{oa_1} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha_{i1})\overrightarrow{e_i}.$$

La condition de dépendance des vecteurs se traduira par la nullité du déterminant de leurs coordonnées dans la base des $\overrightarrow{e_i}$, soit par :

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - \alpha_{11} & \alpha_{12} - \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} - \alpha_{11} \\ x_2 - \alpha_{21} & \alpha_{22} - \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} - \alpha_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - \alpha_{n1} & \alpha_{n2} - \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} - \alpha_{n1} \end{vmatrix} = 0.$$

Or si dans le déterminant Δ défini par :

1.33.
$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ x_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ x_n & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \end{vmatrix}$$

on retranche la 2^e colonne aux autres, on obtiendra un déterminant Δ' égal à Δ, dans lequel la dernière ligne vaut 0 1 0 ... 0, donc en développant Δ' par rapport à la dernière ligne, (après la combinaison indiquée), on trouve $\Delta = \Delta' = (-1)^{n+1+2}D$, (il y a $n+1$ lignes), et l'appartenance de m à H se traduit par la nullité de Δ qui est donc une équation de l'hyperplan H.

Venons-en aux coordonnées barycentriques.

THÉORÈME 1.34. — *Soit $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ une famille de $n+1$ points affinement libres dans A espace affine de dimension n. A tout point x de A, on associe une famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ de scalaires, de somme non nulle, définis à un facteur multiplicatif non nul près, telle que x soit barycentre des (a_i, λ_i), $i = 1, \dots, n+1$.*

DÉFINITION 1.35. — *Les λ_i sont des coordonnées barycentriques de x dans le repère $\mathcal{R}$ des a_i.*

En effet, d'après le Théorème 1.30, les vecteurs $\overrightarrow{a_1a_i}$, $i = 2, \dots, n+1$ sont libres dans E, direction de A, qui est un espace vectoriel de dimension n, donc à x de A on associe *une et une seule* famille $(\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$ de scalaires du corps K tels que

1.36. $\overrightarrow{a_1x} = \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i \overrightarrow{a_1a_i}$, soit encore, avec $\alpha_1 = 1 - \sum_{i=2}^{n+1} \alpha_i$, et $\alpha_1 \overrightarrow{a_1a_1} = \overrightarrow{0}$,

1.37. $\overrightarrow{a_1x} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \overrightarrow{a_1a_i}$, ce qui, compte tenu de l'égalité $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$, prouve que x est barycentre des (a_i, α_i) pour $i = 1, \ldots, n+1$, les α_i étant de somme non nulle.

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$ est une autre famille de coefficients de somme λ non nulle, telle que x soit barycentre des (a_i, λ_i), on aura la relation :

$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i\right) \overrightarrow{a_1x} = \lambda \overrightarrow{a_1x} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \overrightarrow{a_1a_i},$$

or $\overrightarrow{a_1a_1} = \overrightarrow{0}$; et en divisant par λ non nul on obtient :

$$\overrightarrow{a_1x} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{\lambda_i}{\lambda} \overrightarrow{a_1a_i},$$

ce qui, compte tenu de 1.36, prouve que $\alpha_i = \dfrac{\lambda_i}{\lambda}$ pour $i = 2, \ldots, n+1$, puisque les $\overrightarrow{a_1a_i}$ pour $i = 2, \ldots, n+1$ forment une base de E.

Mais alors $\alpha_1 = 1 - \dfrac{1}{\lambda} \sum_{i=2}^{n+1} \lambda_i = 1 - \dfrac{1}{\lambda}(\lambda - \lambda_1) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda}$, et finalement on obtient bien $\lambda_i = \lambda \alpha_i$, ceci pour tout i.

Comme réciproquement le barycentre des $(a_i, \lambda\alpha_i)$ pour $\lambda \neq 0$ est le même que celui des (a_i, α_i), (voir Théorème 1.17), on a bien le résultat. ■

REMARQUE 1.38. — On peut introduire la notion de famille $(a_i)_{i \in I}$ de points affinement libres dans A espace affine de dimension infinie : ce serait une famille $(a_i)_{i \in I}$ telle que toute sous-famille finie soit affinement libre, (ce qui suppose l'indexation injective), ou encore telle que pour chaque i_0 de I, la famille des $(\overrightarrow{a_{i_0}a_i})_{i \in I - \{i_0\}}$ soit libre dans E direction de A.

Si de plus cette famille $(\overrightarrow{a_{i_0}a_i})_{i \in I - \{i_0\}}$ est une base de E, les $(a_i)_{i \in I}$ forment un repère de A et à chaque x de A on associerait une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de scalaires *presque tous nuls*, (i.e. telle que le cardinal de $\{i, \lambda_i \neq 0\}$ soit fini) de somme non nulle, définis à un facteur multiplicatif non nul près, tel que x soit barycentre des $(a_i, \lambda_i)_{i \in I}$.

3. Parallélisme, intersection de sous-espaces affines

DÉFINITION 1.39. — *Soit A un espace affine de direction l'espace vectoriel E. Le sous-espace affine B' de direction F' est dit parallèle au sous-espace B'' de direction F'' si et seulement si $F' \subset F''$ ou $F'' \subset F'$.*

C'est en ce sens qu'on parlera d'une droite parallèle à un plan, (ou d'un plan parallèle à une droite), terminologie déjà connue, (figure 1.39).

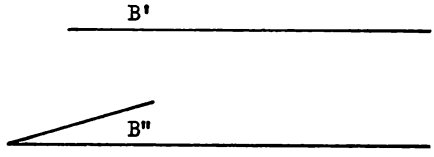


Fig. 1.39

1.40. Si $F' = F''$, on dira que les sous-espaces affines B et B' sont *strictement parallèles*, ou encore parallèles entre eux, mais il faut bien avouer que le langage est un peu flou! Personnellement je préfère le parallèlisme strict.

THÉORÈME 1.41. — *(Postulat d'Euclide pour les nostalgiques)*
Soit B' un sous-espace affine non vide de l'espace affine A et soit m dans A. Il existe un et un seul sous-espace affine B'' contenant m et strictement parallèle à B'.

En effet, B' admet une direction F', (Théorème 1.27) et B'' devant «passer par m», (comme on disait dans le bon vieux temps où la France s'appelait la Gaule et ses habitants les gaulois), et avoir F' pour direction, on a : $B'' = \{x; x \in A, \overrightarrow{mx} \in F'\}$, ce qui le détermine de manière unique. ■

Envisageons maintenant les problèmes d'*intersection de sous-espaces affines.*

THÉORÈME 1.42. — *Soient A' et A'' deux sous-espaces affines, de directions respectives F et F', dans l'espace affine A de direction E. On a $A' \cap A''$ non vide si et seulement si l'une des deux conditions suivantes équivalentes, est vérifiée :*

1) $\exists (a', a'') \in A' \times A'', \quad \overrightarrow{a'a''} \in F' + F'';$

2) $\forall (a', a'') \in A' \times A'', \quad \overrightarrow{a'a''} \in F' + F''.$

Si $A' \cap A'' \neq \varnothing$, *c'est un sous-espace affine de direction* $F' \cap F''$.

On a vu en 1.23 qu'une intersection de sous-espaces affines est un sous-espace affine. Il s'agit ici de préciser quand $A' \cap A''$ est non vide.

Supposons d'abord $A' \cap A'' \neq \varnothing$ et soit $b \in A' \cap A''$.

Alors, $\forall (a', a'') \in A' \times A''$ on a $\overrightarrow{a'b} \in F'$ et $\overrightarrow{ba''} \in F''$ donc $\overrightarrow{a'a''} = \overrightarrow{a'b} + \overrightarrow{ba''}$ (relation de Chasles, voir 1.21) est dans $F' + F''$: on a la condition 2.

Il est évident que 2) $\Longrightarrow$ 1).

Si on suppose 1) vérifiée, on peut décomposer $\overrightarrow{a'a''}$ dans la somme $F'+F''$ en $\overrightarrow{a'a''} = \overrightarrow{x'} + \overrightarrow{x''}$, et vu la définition de la direction d'un sous-espace affine, (Théorème 1.27), puisque $a' \in A'$ et $\overrightarrow{x'} \in F'$, le point b tel que $\overrightarrow{a'b} = \overrightarrow{x'}$ est dans A'; puis $\overrightarrow{x''} = \overrightarrow{a'a''} - \overrightarrow{x'} = \overrightarrow{a'a''} - \overrightarrow{a'b} = \overrightarrow{ba'} + \overrightarrow{a'a''} = \overrightarrow{ba''}$, donc a'' étant dans A'', et $-\overrightarrow{x''} = \overrightarrow{a''b}$ dans F'', direction de A'', c'est que b est dans A'' d'où $b \in A' \cap A''$ qui est non vide.

Enfin si $A' \cap A''$ *est non vide*, si $b \in A' \cap A''$, pour tout m de $A' \cap A''$ on a $\overrightarrow{bm} \in F' \cap F''$, et réciproquement, si $\vec{x} \in F' \cap F''$, m tel que $\overrightarrow{bm} = \overrightarrow{x}$ sera bien dans A' et A'', donc la direction de $A' \cap A''$ est $F' \cap F''$. ■

COROLLAIRE 1.43. — *Si* A' *et* A'' *sont deux sous-espaces affines de* A, *de directions respectives* F' *et* F'' *telles que* $F' + F'' = E$ *direction de* A, *on a* $A' \cap A'' \neq \varnothing$. *Si de plus* F' *et* F'' *sont supplémentaires,* $A' \cap A''$ *est un singleton.*

L'énoncé suppose A' et A'' non vides puisqu'ils ont une direction. Il est alors évident que si $(a', a'') \in A' \times A''$, on a bien $\overrightarrow{a'a''} \in F' + F''$, d'où le 1) du Théorème 1.4.2 vérifié. ■

COROLLAIRE 1.44. — *Dans un espace affine* A, *si* A' *et* A'' *sont deux sous-espaces affines parallèles, ils sont disjoints ou alors l'un contient l'autre.*

Si $A' \cap A'' \neq \varnothing$, avec $b \in A' \cap A''$, et si on suppose $F' \subset F''$, (parallélisme) on aura $A' \cap A''$ est le sous-espace affine passant par b, de direction $F' \cap F'' = F'$, c'est donc que $A' \cap A'' = A'$, ce qui équivaut à $A' \subset A''$.

En fait ce corollaire est conséquence immédiate aussi de la définition du parallélisme. ■

COROLLAIRE 1.45. — *Dans un plan affine, deux droites D et D' sont parallèles ou sécantes.*

Dans un espace affine de dimension 3, un plan P et une droite D sont parallèles ou sécants.

Dans ce corollaire, *sécant* signifie que l'intersection est de cardinal 1.

En effet si F et F' sont les droites vectorielles directions de D et D' respectivement, on a :

soit $\dim(F+F') = 2 = \dim F + \dim F' - \dim(F \cap F')$
$= 2 - \dim(F \cap F')$,

et dans ce cas $F \cap F' = \{0\} : D \cap D'$ est un singleton;

soit $\dim(F+F') = 1 \iff F = F'$ et alors D et D' sont strictement parallèles, ce qui n'exclut pas la possibilité d'avoir $D = D'$.

Dans le deuxième cas si F est la direction du plan P, et G la direction de la droite, on a encore :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$
$$= 3 - \dim(F \cap G).$$

Donc si $F+G = E$, de dimension 3, l'intersection est non vide, et comme $F \cap G = \{0\}$, $D \cap P$ est un singleton, (corollaire 1.43).

Si $F+G \neq E$, comme F de dimension 2 est contenu dans $F+G$ c'est que $F = F+G$, donc que $G \subset F$, donc la droite D est parallèle au plan P. ■

On peut relier ces questions d'intersection de deux sous-espaces affines, avec le sous-espace affine engendré par leur réunion pour obtenir le Théorème dit d'incidence.

THÉORÈME D'INCIDENCE 1.46. — *Soient B et C deux sous-espaces affines de directions F et G, d'un espace affine A de direction E. Si $B \cap C = \varnothing$, la direction de* $\mathrm{aff}(B \cup C)$ *est* $(F+G) \oplus K \cdot \overrightarrow{bc}$, *pour* $(b,c) \in B \times C$; *et si $B \cap C \neq \varnothing$, la direction de* $\mathrm{aff}(B \cup C)$ *est* $F+G$.

Rappelons que $\mathrm{aff}(B \cup C)$ est le sous-espace affine engendré par $B \cup C$.

Si $B \cap C = \varnothing$, on sait que $F+G \subsetneqq E$, (voir corollaire 1.43). Soit (b,c) fixé dans $B \times C$, on sait que $\overrightarrow{bc} \notin F+G$, (Théorème 1.42), donc la somme de $F+G$ et de la droite vectorielle $K \cdot \overrightarrow{bc}$ est bien directe.

Soit D le sous-espace affine de A, contenant b, de direction :

$(F+G) \oplus K\ \overrightarrow{bc} = H$.

On a $b \in B$, $F \subset H$, donc B, de direction F et contenant b est contenu dans D.

De même $\overrightarrow{bc} \in H$ et $b \in D \Longrightarrow c \in D$. Mais alors, le sous-espace C de direction $G \subset H$, passant par $c \in D$, est contenu dans D, donc $B \cup C \subset D$, a fortiori le sous-espace affine engendré vérifie $\text{aff}(B \cup C) \subset D$.

Puis $\text{aff}(B \cup C)$ contient b et B, donc $F = \{\overrightarrow{bm}, m \in B\}$ est dans sa direction; mais de même $c \in C$ donc $c \in \text{aff}(B \cup C)$, et $C \subset \text{aff}(B \cup C)$, d'où $G = \{\overrightarrow{cp}, p \in C\}$ contenu dans la direction de $\text{aff}(B \cup C)$. Enfin comme $\overrightarrow{bc}$ est dans cette direction, la somme directe $(F+G) \oplus K \cdot \overrightarrow{bc}$ est dans la direction de $\text{aff}(B \cup C)$; comme $b \in \text{aff}(B \cup C)$ il en résulte que D, sous-espace affine passant par b, de direction $(F+G) \oplus K \cdot \overrightarrow{bc}$ est dans $\text{aff}(B \cup C)$, d'où l'égalité $\text{aff}(B \cup C) = D$, et l'égalité cherchée de la direction.

Si $B \cap C \neq \varnothing$, soit $b \in B \cap C$ et D le sous-espace affine passant par b, de direction $F+G$, on a $D = \{b + \overrightarrow{z}; \overrightarrow{z} \in F+G\}$, or $B = \{b + \overrightarrow{x}; \overrightarrow{x} \in F\}$ avec $F \subset F+G$ d'où $B \subset D$; de même $C \subset D$, d'où $\text{aff}(B \cup C) \subset D$, donc $\text{direction}(\text{aff}(B \cup C)) \subset F+G$; puis $B \subset \text{aff}(B \cup C) \Longrightarrow F \subset \text{direction}(\text{aff}(B \cup C))$; de même on a $G \subset \text{direction}(\text{aff}(B \cup C))$ d'où $F+G \subset \text{direction}(\text{aff}(B \cup C))$ et l'égalité. ■

COROLLAIRE 1.47. — *Soient B et C deux sous-espaces affines de dimensions finies, de directions respectives F et G, d'un espace affine A.*

Si $B \cap C = \varnothing$, $\dim(\text{aff}(B \cup C)) = 1 + \dim(F+G)$, *et*

si $B \cap C \neq \varnothing$, $\dim(\text{aff}(B \cup C)) = \dim(F+G)$.

REMARQUE 1.48. — *Dans A affine de dimension 3, deux droites affines non parallèles et non sécantes engendrent A.*

En effet, si F et G sont les directions des droites B et C, on a $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$, (droites non parallèles) donc $F \subsetneq F \cup G \Longrightarrow \dim(F+G) = 2$; et comme $B \cap C$ est vide, on a :

$\dim(\text{aff}(B \cup C)) = 1 + \dim(F+G) = 3 = \dim A$, d'où $\text{aff}(B \cup C) = A$. ■

L'utilisation des barycentres permet de résoudre de façon élégante des problèmes d'intersection. Voyons à titre d'exemple, une justification du **Théorème de Céva**, que nous retrouverons aussi au paragraphe suivant comme conséquence du **Théorème de Ménélaüs**. On peut dire

que Céva, Ménélaüs c'est un de ces couples célèbres qui parsèment l'histoire de l'humanité, comme Castor et Pollux, Roméo et Juliette, Laurel et Hardy, mais... il n'en est rien puisque Ménélaüs vivait au premier siècle à Alexandrie, et Céva Giovanni en Italie (1648-1734). C'est l'analogie de leurs Théorèmes qui les a rapprochés.

THÉORÈME 1.49. — *Dit de Céva. Soit un triangle de sommets* a_1, a_2, a_3, *et des points* b_1, b_2, b_3 *définis par* $\overrightarrow{b_i a_i} = \lambda_i \overrightarrow{b_i a_{i+1}}$, *avec* $\lambda_i < 0$ *et* $a_4 = a_1$. *Les droites* $\mathrm{aff}(a_1, b_2)$, $\mathrm{aff}(a_2, b_3)$ *et* $\mathrm{aff}(a_3, b_1)$ *sont concourantes si et seulement si* $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.

Un schéma facilite la compréhension, (figure 1.49).

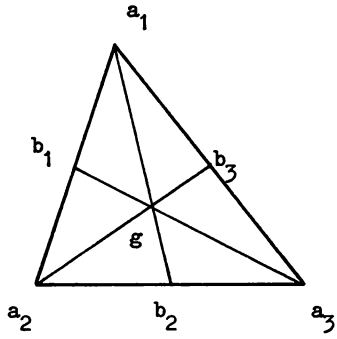


Fig. 1.49

Dans cet énoncé, chaque b_i est sur le côté $[a_i, a_{i+1}]$ du triangle, donc est barycentre de a_i et a_{i+1} avec des coefficients α_i, α_{i+1} positifs, (voir définition 3.9) : on a donc l'égalité $\alpha_i \overrightarrow{b_i a_i} + \alpha_{i+1} \overrightarrow{b_i a_{i+1}} = 0$, mais les b_i sont différents des sommets, donc $\alpha_i \neq 0$, (sinon $\alpha_i + \alpha_{i+1} \neq 0 \Longrightarrow \alpha_{i+1} \neq 0$ et $b_i = a_{i+1}$) et $\alpha_{i+1} \neq 0$, d'où l'égalité :

$$\overrightarrow{b_i a_i} = -\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} \overrightarrow{b_i a_{i+1}} = \lambda_i \overrightarrow{b_i a_{i+1}} \quad \text{avec} \quad \lambda_i < 0.$$

Venons-en à la justification du Théorème.

Soient b_1, b_2, b_3 définis par l'énoncé, avec $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.

L'égalité $\overrightarrow{b_1 a_1} = \lambda_1 \overrightarrow{b_1 a_2}$ s'écrit $\overrightarrow{b_1 a_1} - \lambda_1 \overrightarrow{b_1 a_2} = 0$ et comme $1 - \lambda_1 \neq 0$, (car $\lambda_1 < 0$), elle prouve que b_1 est barycentre de $(a_1, 1)$ et $(a_2, -\lambda_1)$.

De même, b_2 est barycentre de $(a_2, 1)$ et $(a_3, -\lambda_2)$ donc aussi, (pour «faire le lien» avec b_1), b_2 est barycentre de $(a_2, -\lambda_1)$ et $(a_3, \lambda_1\lambda_2)$. (On multiplie les coefficients par $-\lambda_1 \neq 0$: Théorème 1.17).

Enfin b_3 est barycentre de $(a_3, 1)$ et $(a_1, -\lambda_3)$ donc aussi de $(a_3, \lambda_1\lambda_2)$ et $(a_1, -\lambda_1\lambda_2\lambda_3)$.

Or $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$: on retrouve a_1 affecté du coefficient 1. Mais alors, si on considère les points a_1, a_2, a_3, affectés des coefficients 1, $-\lambda_1$, $\lambda_1\lambda_2$, de somme $1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 > 1$, (on a les $\lambda_i < 0$), leur barycentre g existe, et, par associativité, (Théorème 1.18), g est barycentre de : $(a_3, \lambda_1\lambda_2)$ et de b_1, barycentre de $(a_1, 1)$ et $(a_2, -\lambda_1)$, affecté du coefficient $1 - \lambda_1$; donc $g \in \text{aff}(a_3, b_1)$. De même g est sur les droites $\text{aff}(a_1, b_2)$ et $\text{aff}(a_2, b_3)$: ces trois droites sont concourantes.

La justification est longue car je l'ai détaillée, mais le raisonnement est très rapide.

Réciproquement, si les trois droites $\text{aff}(a_1, b_2)$, $\text{aff}(a_2, b_3)$ et $\text{aff}(a_3, b_1)$ sont concourantes en g, (les b_i étant toujours définis par les conditions du Théorème), si α_1, α_2, α_3 sont des coordonnées barycentriques de g, (voir 1.35), on vérifie d'abord que les α_i sont non nuls, ($\alpha_1 = 0$ donnerait g sur la droite $\text{aff}(a_2, a_3)$, mais $g \in \text{aff}(a_3, b_1)$, donc ces droites seraient confondues, d'où $b_1 \in \text{aff}(a_2, a_3) \cap \text{aff}(a_2, a_1)$ soit $b_1 = a_2$, ce qui est exclu).

Puis $g \in \text{aff}(a_1, b_2)$ est barycentre de (a_1, α) et (b_2, β), mais b_2 étant barycentre de $(a_2, 1)$ et $(a_3, -\lambda_2)$, g est barycentre de (a_1, α) et de $\left(a_2, \dfrac{\beta}{1-\lambda_2}\right)$ et $\left(a_3, \dfrac{-\lambda_2\beta}{1-\lambda_2}\right)$. Mais alors, l'unicité des coordonnées barycentriques à un facteur multiplicatif près, (Théorème 1.34) donne la proportionnalité des couples (α_2, α_3) et $\left(\dfrac{\beta}{1-\lambda_2}, \dfrac{-\lambda_2\beta}{1-\lambda_2}\right)$ d'où $\beta \neq 0$ et $\lambda_2 = -\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}$. On obtient de même $\lambda_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ et $\lambda_3 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_3}$ d'où $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.

Encore une fois, la longueur de la justification vient de ma maladresse à la rédiger, elle même causée par le manque de pratique du à la désaffection dans laquelle se trouve l'étude de la géométrie.

On retrouvera en 1.77 une justification plus rapide.

4. Applications affines

DÉFINITION 1.50. — *Soient deux espaces affines A et A' de directions respectives les espaces vectoriels E et E' sur le même corps commutatif K. Une application u de A dans A' est dite affine, si et seulement si l'image d'un barycentre (quelconque dans A) est le barycentre des images, avec les mêmes coefficients.*

Cela signifie donc que : $\forall n \in N^*, \forall (a_1, \ldots, a_n) \in A^n, \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de K^n tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$, le barycentre des $u(a_i)$, affectés des coefficients λ_i est l'image par u du barycentre des $(a_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

THÉORÈME 1.51. — *La composée de deux applications affines est une application affine; l'image d'un sous-espace affine B de A par u affine de A dans A' est sous-espace affine de A'; il en est de même pour l'image réciproque $u^{-1}(B')$ d'un sous-espace affine de A', qui est sous-espace affine de A.*

Les vérifications sont évidentes. Par exemple, si B' est sous-espace affine de A', on veut vérifier que $u^{-1}(B')$ en est un de A, donc qu'il s'agit d'une partie de A stable par passage aux barycentres (définition 1.23).

Or, si $m_1, \ldots, m_p$ sont dans $u^{-1}(B')$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ dans K, des scalaires de somme non nulle, on a les $m'_i = u(m_i)$ dans B', stable par passage aux barycentres, donc avec m barycentre des (m_i, λ_i), on aura, u étant affine, $u(m) =$ le barycentre des (m'_i, λ_i), soit $u(m)$ dans B' d'où m dans $u^{-1}(B')$. ■

En fait on va relier les applications affines de A dans A' aux applications linéaires de E dans E'.

THÉORÈME 1.52. — *Soient A et A', espaces affines de directions E et E'. Une application u de A dans A' est affine si et seulement si l'application f de E dans E' définie par $f(\overrightarrow{am}) = \overrightarrow{u(a)u(m)}$, est linéaire. De plus f est indépendante du choix de a.*

En reprenant l'application θ de $A \times A$ dans E du Théorème 1.5, et les notation introduites en 1.9, on note θ_a l'application de A dans E définie par $\theta_a(m) = \overrightarrow{am}$, c'est une bijection de A sur E et $\theta_a^{-1}(\vec{x})$ est le point m tel que $\overrightarrow{am} = \vec{x}$. On introduit de même $\theta_{u(a)}$, bijection de A' sur E'.

Soit alors u affine de A dans A', et f_a de E dans E' qui à $\vec{x}$ associe $\overrightarrow{u(a)u(m)}$, m étant tel que $\overrightarrow{am} = \vec{x}$. On remarque que l'on a :

1.53. $f_a = \theta_{u(a)} \circ u \circ \theta_a^{-1}$.

Cette application est linéaire, car soient $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ dans E et λ_1, λ_2 deux scalaires, et $\vec{x} = \lambda_1 \vec{x_1} + \lambda_2 \vec{x_2}$. Avec $m = \theta_a^{-1}(\vec{x})$, $m_1 = \theta_a^{-1}(\vec{x}_1)$ et $m_2 = \theta_a^{-1}(\vec{x}_2)$ on a $\overrightarrow{am} = \lambda_1 \overrightarrow{am_1} + \lambda_2 \overrightarrow{am_2}$. C'est presque une écriture barycentrique, à ceci près que la somme des coefficients, $\lambda_1 + \lambda_2$ n'est pas 1.

Mais, en ajoutant $1-\lambda_1-\lambda_2\ldots$. On a $\overrightarrow{aa}=\overrightarrow{0}$, donc (astuce!) :

$$\overrightarrow{am}=(1-\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{aa}+\lambda_1\overrightarrow{am_1}+\lambda_2\overrightarrow{am_2},$$

et m devenant le barycentre de $(a,1-\lambda_1-\lambda_2)$, (m_1,λ_1) et (m_2,λ_2), on obtient $u(m)$ barycentre de $(u(a),1-\lambda_1-\lambda_2)$, $(u(m_1),\lambda_1)$ et $(u(m_2),\lambda_2)$ d'où l'égalité :

$$\overrightarrow{u(a)u(m)}=(1-\lambda_1-\lambda_2)\overrightarrow{u(a)u(a)}+\lambda_1\overrightarrow{u(a)u(m_1)}+\lambda_2\overrightarrow{u(a)u(m_2)}$$

d'où l'on tire

$$f_a(\overrightarrow{x})=\lambda_1 f_a(\overrightarrow{x_1})+\lambda_2 f_a(\overrightarrow{x_2})=f_a(\lambda_1\overrightarrow{x_1}+\lambda_2\overrightarrow{x_2}),$$

puisque $\overrightarrow{u(a)u(a)}=\overrightarrow{0}$. *On a bien f_a linéaire.*

En fait, f_a ne dépend pas de a, car, à partir de b, on définirait f_b telle que, pour tout m de A, $f_b(\overrightarrow{bm})=\overrightarrow{u(b)u(m)}$, soit en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}f_b(\overrightarrow{bm})&=\overrightarrow{u(a)u(m)}-\overrightarrow{u(a)u(b)}=f_a(\overrightarrow{am})-f_a(\overrightarrow{ab})\\&=f_a(\overrightarrow{am}-\overrightarrow{ab})\quad\text{par linéarité de } f_a,\\&=f_a(\overrightarrow{bm}),\end{aligned}$$

d'où $f_b=f_a$, m étant quelconque, donc $\overrightarrow{bm}$ décrivant E.

Réciproquement, soit $f\in L(E,F)$ et, (voir 1.53), l'application $u=\theta_{a'}^{-1}\circ f\circ\theta_a$, où a' est choisi dans A'.

Cette application envoie a sur a', ($\theta_a(a)=\overrightarrow{0}$, puis $f(\overrightarrow{0})=\overrightarrow{0}$ et enfin $\theta_{a'}^{-1}(\overrightarrow{0})$ est m' tel que $\overrightarrow{a'm'}=\overrightarrow{0}$: c'est a').

Elle est affine, car soient des $(m_i,\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, avec $\lambda=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\neq 0$, si m est le barycentre des (m_i,λ_i), on a en particulier $\overrightarrow{am}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda}\overrightarrow{am_i}$, donc

$$u(m)=\theta_{a'}^{-1}\left(f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda}\overrightarrow{am_i}\right)\right)=\theta_{a'}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda}f(\overrightarrow{am_i})\right).$$

On a donc encore $$\overrightarrow{a'u(m)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda}f(\overrightarrow{am_i}).$$

Or $u(m_i)$ est tel que $\overrightarrow{a'u(m_i)} = f(\overrightarrow{am_i})$, on a donc $\overrightarrow{a'u(m)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \overrightarrow{a'u(m_i)}$, soit encore :

$$\lambda\overrightarrow{a'u(m)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) \overrightarrow{a'u(m)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{a'u(m_i)},$$

ce qui prouve bien que $u(m)$ est le barycentre des $(u(m_i), \lambda_i)$. ■

1.54. *L'application f du Théorème 1.52 est appelée application linéaire associée à u.*

Il est utile de se rappeler les formules faisant passer de f à u et réciproquement, à savoir :

1.55. $f = \theta_{u(a)} \circ u \circ \theta_a^{-1}$ et $u = \theta_{u(a)}^{-1} \circ f \circ \theta_a$.

REMARQUE 1.56. — *Il résulte de la formule 1.55, que :*

1) si u est affine de A dans A' et v de A' dans A'', d'applications linéaires associées respectives f et g, $v \circ u$ est affine de A dans A'', d'application linéaire associée $g \circ f$;

2) u est bijective si et seulement si f l'est.

Le 2e est évident. Pour le 1er, à $v \circ u$ on associe $h = \theta_{v(u(a))} \circ v \circ u \circ \theta_a^{-1}$, et on peut intercaler entre v et u le produit $\theta_{u(a)}^{-1} \circ \theta_{u(a)}$, puis utiliser l'associativité du produit de composition pour obtenir :

$$h = \left(\theta_{v(u(a))} \circ v \circ \theta_{u(a)}^{-1}\right) \circ \left(\theta_{u(a)} \circ u \circ \theta_a^{-1}\right) = g \circ f.$$

Soit alors l'ensemble des bijections affines de A dans A, c'est l'ensemble des $\theta_{a'}^{-1} \circ f \circ \theta_a$, pour tout couple (a, a') de A^2, et tout f de $\mathrm{GL}(E)$.

Cet ensemble, noté $\mathcal{G}$, est visiblement un groupe pour le produit de composition, et l'application φ de $\mathcal{G}$ dans $\mathrm{GL}(E)$ qui à u bijection affine associe son application linéaire est un morphisme de groupe (remarque 1.56), donc son noyau, $\mathrm{Ker}\,\varphi$, est un sous-groupe distingué de $\mathcal{G}$, (Tome 1, Théorème 4.19). Il est formé des applications du genre $\theta_{a'}^{-1} \circ \theta_a$ qui à m de A associent m' tel que :

$$\theta_{a'}^{-1}(\theta_a(m)) = m' \iff \overrightarrow{a'm'} = \theta_a(m) = \overrightarrow{am},$$

soit, avec la relation de Chasles, m' tel que :

$$\overrightarrow{a'm'} = \overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{a'm} \iff \overrightarrow{a'm'} - \overrightarrow{a'm} = \overrightarrow{aa'}$$
$$\iff \overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{aa'},$$

vecteur constant par rapport à m : *il s'agit des translations*, (voir 1.4).

THÉORÈME 1.57. — *L'ensemble $\mathcal{T}$ des translations de A espace affine est un sous-groupe distingué du groupe $\mathcal{G}$ des bijections affines de A.*

C'est ce qui vient d'être justifié. ■

L'application linéaire associée à u affine sert également à déterminer l'image d'un sous-espace affine. On a :

THÉORÈME 1.58. — *Soient A et A' affines de directions E et E', et u une application affine de A dans A' d'application linéaire associée f. Si B est un sous-espace affine de A de direction F, l'image $u(B)$ a pour direction $f(F)$.*

En effet, si u envoie b de B sur $u(b) = b'$ dans $u(B)$, on a l'égalité $u = \theta_{b'}^{-1} \circ f \circ \theta_b$, et, en fixant b' dans $u(B)$, la direction de $u(B)$ est le sous-espace vectoriel de E' formé des $\overrightarrow{b'u(m)}$, pour tout m de B.

Or $\overrightarrow{b'u(m)} = \theta_{b'}(u(m)) = f(\theta_b(m)) = f(\overrightarrow{bm})$, avec $\overrightarrow{bm}$ qui parcourt F direction de B, lorsque m varie dans B : c'est le résultat. ■

THÉORÈME 1.59. — *Soit un espace affine A, u une application affine de A dans A et a un point fixé de A. Il existe v_a affine laissant a invariant, de même application linéaire associée que celle de u, et une translation t telles que $u = t \circ v_a$. De plus, si u est surjective, il existe une translation t' telle que $u = v_a \circ t'$.*

Soit $u(a) = a'$ et f l'application linéaire associée à u.
D'après 1.55 on a :

$$u = \theta_{a'}^{-1} \circ f \circ \theta_a = \theta_{a'}^{-1} \circ \theta_a \circ (\theta_a^{-1} \circ f \circ \theta_a).$$

Mais alors $v_a = \theta_a^{-1} \circ f \circ \theta_a$ est affine envoyant a sur a, d'application linéaire associée f, et $\theta_{a'}^{-1} \circ \theta_a$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{aa'}$, comme on l'a vu en 1.57.

Par ailleurs, si on a une décomposition du type $u = t \circ v_a$, l'application linéaire associée à t étant l'identité, celle de u est bien celle de v_a d'après la remarque 1.56.

Enfin, si *u est surjective*, il existe a'' dans A tel que $u(a'') = a$, et comme on peut écrire $u = \theta_{u(a'')}^{-1} \circ f \circ \theta_{a''}$, on a encore $u = \theta_a^{-1} \circ f \circ \theta_a \circ (\theta_a^{-1} \circ \theta_{a''})$, et avec t' translation de vecteur $\overrightarrow{a''a}$, soit $t' = \theta_a^{-1} \circ \theta_{a''}$, on obtient bien la décomposition $u = v_a \circ t'$. ■

Nous commençons à être assez outillés pour faire enfin de la *géométrie*, et retrouver ces résultats qui firent les délices, si ce n'est de notre jeunesse, du moins de bien des générations : Thalès, Ménélaüs, Papus... Pour cela il me faut introduire les homothéties.

DÉFINITION 1.60. — *On appelle homothétie de A espace affine de direction E, toute application affine u, d'application linéaire associée, une homothétie vectorielle.*

Si l'homothétie vectorielle est l'application $h_\lambda : \overrightarrow{x} \rightsquigarrow \lambda\overrightarrow{x}$, ($\lambda$ dans le corps K), on dira que :

1.61 *λ est le rapport de l'homothétie affine u.*

THÉORÈME 1.62. — *Si u est une homothétie de A affine, de rapport $\lambda \neq 1$, elle admet un et un seul point fixe, a, appelé centre de l'homothétie, et u est alors définie par $m \rightsquigarrow u(m) = m'$ tel que $\overrightarrow{am'} = \lambda\overrightarrow{am}$.*

En effet, soit u une homothétie envoyant le point b sur $b' = u(b)$, d'application linéaire associée h_λ qui à $\overrightarrow{x}$ associe $\lambda\overrightarrow{x}$. On a, (1.55), $u = \theta_{b'}^{-1} \circ h_\lambda \circ \theta_b$, et a', image de a est donc tel que $\overrightarrow{b'a'} = h_\lambda(\overrightarrow{ba})$, soit $\overrightarrow{b'a'} = \lambda\overrightarrow{ba}$. Ce sera un point fixe, (donc $a' = a$), si et seulement si $\overrightarrow{b'b} + \overrightarrow{ba} = \lambda\overrightarrow{ba}$ soit encore $(\lambda - 1)\overrightarrow{ba} = \overrightarrow{b'b}$: comme $\lambda \neq 1$, cette équation admet une et une seule solution.

Avec $u(a) = a$, on a encore $u = \theta_a^{-1} \circ h_\lambda \circ \theta_a$, donc à m de A, u associe m' tel que $\overrightarrow{am'} = h_\lambda(\overrightarrow{am}) = \lambda\overrightarrow{am}$. ■

REMARQUE 1.62 bis. — *Si u est l'homothétie de centre a,* de rapport λ, en identifiant l'espace affine A et sa direction E, en prenant une origine en a, (voir 1.11), on identifie u et l'homothétie vectorielle h_λ. C'est pourquoi il arrivera de noter h_λ l'homothétie affine de centre a et de rapport λ.

THÉORÈME 1.63. — *L'ensemble $\mathcal{G}'$ formé des homothéties de rapport non nul, et des translations, est un sous-groupe du groupe $\mathcal{G}$ des bijections affines. La composée des homothéties h, de centre a de rapport λ, et h' de centre a' de rapport λ' est, une homothétie h'', si $\lambda'\lambda \neq 1$, de centre $a'' \in \mathrm{aff}(a, a')$, et une translation de vecteur parallèle à $\overrightarrow{aa'}$ si $\lambda\lambda' = 1$.*

En effet, en reprenant les notations de la remarque 1.56, on a $\mathcal{G}'$ image réciproque par φ du sous-groupe des homothéties vectorielles dans $GL(E)$, d'où le premier point.

Comme l'application linéaire associée à $h' \circ h$ est le produit des homothéties vectorielles de rapports λ et λ', (remarque 1.56), c'est l'identité si et seulement si $\lambda\lambda' = 1$, d'où $h' \circ h$ translation si et seulement si $\lambda\lambda' = 1$.

Si $\lambda\lambda' \neq 1$, le centre a'' de l'homothétie $h' \circ h$ est tel que $h' \circ h(a'') = a''$, soit $\overrightarrow{a'a''} = \lambda'\overrightarrow{a'h(a'')}$, avec $\overrightarrow{ah(a'')} = \overrightarrow{aa''}$, d'où :
$\overrightarrow{a'a''} = \overrightarrow{a'a} + \overrightarrow{aa''} = \lambda'(\overrightarrow{a'a} + \overrightarrow{aa''})$, soit encore :
$(1 - \lambda'\lambda)\overrightarrow{aa''} = (\lambda' - 1)\overrightarrow{a'a}$, et l'appartenance de a'' à $\mathrm{aff}(a, a')$.

Si $\lambda\lambda' = 1$, $h' \circ h$ est une translation de vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{ah' \circ h(a)}$, avec $h'(h(a)) = h'(a)$ tel que $\overrightarrow{a'h'(a)} = \lambda'\overrightarrow{a'a}$, d'où :
$\vec{V} = \overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{a'h'(a)} = (1 - \lambda')\overrightarrow{aa'}$. ■

THÉORÈME 1.64. — *L'image par une homothétie non nulle, d'un sous-espace affine B de A, est un sous-espace affine qui lui est strictement parallèle.*

C'est évident puisque, si F est la direction du sous-espace B, et si h_λ est l'homothétie vectorielle associée à l'homothétie affine u, la direction de $u(B)$ est $h_\lambda(F)$, (Théorème 1.58), or $h_\lambda(F) = \{\lambda\vec{x}\,;\, x \in F\} = F$ si $\lambda \neq 0$, d'où ce parallélisme strict, (voir 1.40). ■

Une notation, et une définition.

Soient a et b deux points distincts de A affine, ils déterminent une droite affine, notée $D(a, b)$, ensemble des barycentres des points a et b.

Si m de $D(a, b)$ est barycentre de (a, α) et (b, β), avec $\alpha + \beta \neq 0$, on a l'égalité $\alpha\overrightarrow{ma} + \beta\overrightarrow{mb} = 0$, α et β étant définis à un facteur multiplicatif non nul près, (Théorème 1.34).

Soit par ailleurs $\vec{i}$ un vecteur tel que $\{\vec{i}\}$ soit une base de la direction de la droite $D(a, b)$. On dit encore que :

1.65. $\vec{i}$ est un *vecteur directeur* de $D(a, b)$.

DÉFINITION 1.66. — *Soit une droite affine D, de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$, et a et b deux points de D. La coordonnée x de $\overrightarrow{ab}$ suivant $\overrightarrow{i}$ s'appelle la mesure algébrique de $\overrightarrow{ab}$, suivant $\overrightarrow{i}$, et on la note $\overline{ab}$.*

C'est donc une notion attachée à la droite D orientée par le choix de la base $\{\overrightarrow{i}\}$ de sa direction, (on parlera abusivement de base de la droite).

Soit alors $\{\overrightarrow{i}\}$ une base de $D(a,b)$, avec $\overrightarrow{ma} = \overline{ma}\ \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{mb} = \overline{mb} \cdot \overrightarrow{i}$, si m est barycentre des points (a,α) et (b,β) on aura l'égalité $(\alpha\overline{ma} + \beta\overline{mb})\overrightarrow{i} = 0$, et la relation $\alpha\overrightarrow{ma} + \beta\overrightarrow{mb} = 0$ est indépendante du choix de $\overrightarrow{i}$. Si $m \neq a$, ($\Longleftrightarrow \beta \neq 0$), et $m \neq b$, ($\Longleftrightarrow \alpha \neq 0$), le rapport $\dfrac{\overline{ma}}{\overline{mb}}$ est constant par rapport au couple (α,β) et vaut $-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

1.66 bis. — *Réciproquement*, si m est un point de $D(a,b)$, $m \neq b$, tel que pour une détermination des mesures algébriques on ait : $\dfrac{\overline{ma}}{\overline{mb}} = \lambda = -\dfrac{(-\lambda)}{1}$, c'est que m est barycentre de $(a,1)$ et $(b,-\lambda)$.

Nous pouvons maintenant *faire de la géométrie*.

THÉORÈME 1.67. — *Dit de Thalès. Soient trois hyperplans parallèles H, H' et H'' d'un espace affine A, et $(D_i)_{i\in I}$ une famille de droites dont aucune n'est parallèle aux hyperplans. En notant m_i, m_i' et m_i'' les intersections de D_i avec H, H' et H'' respectivement on a $\dfrac{\overline{m_im_i''}}{\overline{m_im_i'}}$ indépendant de i. De plus, si pour un indice $j \in I$ on a un point p de D_j tel que $\dfrac{\overline{m_jp}}{\overline{m_jm_j'}} =$ cette valeur commune, $\{p\} = D_j \cap H''$.*

Faisons un schéma en «dimension» trois, avec deux droites D_1 et D_2, (figure 1.67).

Comme D_i, de direction F_i, n'est pas parallèle aux hyperplans H, H', H'', de direction commune F, on a $F_i \not\subset F$, donc $E = F \oplus F_i$, (E direction de l'espace affine A), mais alors $D_i \cap H$ est un singleton, ainsi que $D_i \cap H'$ et $D_i \cap H''$, (voir 1.39, et le Corollaire 1.43), d'où l'existence des points m_i, m_i' et m_i''.

On travaille pour D_1 et D_2.

Soit Δ la droite parallèle à D_2 passant par m_1, et m, m', m'' ses intersections avec H, H', H'' respectivement. On a $m = m_1$ et la translation

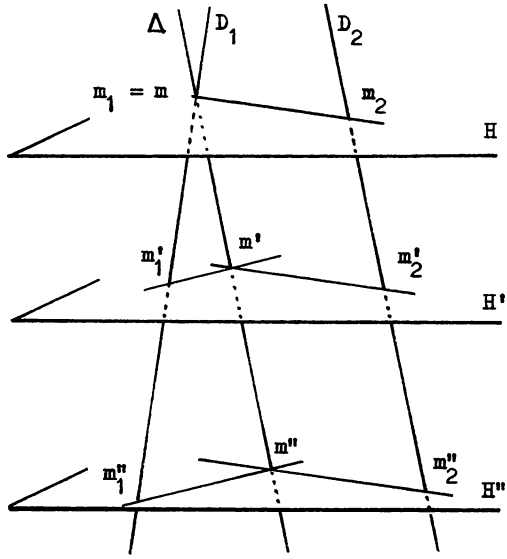


Fig. 1.67

$\mathcal{T}$ de vecteur $\overrightarrow{m_2m_1}$ donne Δ comme image de D_2. De plus $\overrightarrow{m_2m_1} \in F$, direction des hyperplans, donc le translaté de m_2' est sur $\Delta = \mathcal{T}(D_2)$ et dans H' invariant par $\mathcal{T}$: on a $\mathcal{T}(m_2') = m'$ et $\mathcal{T}(m_2'') = m''$ pour la même raison.

La translation, application affine, «conserve les barycentres» donc le rapport des coordonnées barycentriques de m_2 dans le repère $\{m_2', m_2''\}$ de D_2 est celui des coordonnées barycentriques de m dans le repère $\{m', m''\}$ de Δ.

En utilisant les mesures algébriques (voir 1.66), on a donc :

$$\frac{\overline{m_2m_2''}}{\overline{m_2m_2'}} = \frac{\overline{mm''}}{\overline{mm'}}.$$

Mais de même, l'homothétie h de centre m, de rapport $\lambda = \dfrac{\overline{mm''}}{\overline{mm'}}$ est telle que $h(m') = m''$; dans cette homothétie, D_1 passant par $m = m_1$ est invariante et H' a pour image un hyperplan parallèle à H', passant par $m'' = h(m')$: c'est H'', donc $h(m_1') = m_1''$. Mais là encore, l'homothétie «conservant les barycentres», $\dfrac{\overline{m_1m_1''}}{\overline{m_1m_1'}} = \dfrac{\overline{mm''}}{\overline{mm'}}$ donc c'est bien $\dfrac{\overline{m_2m_2''}}{\overline{m_2m_2'}}$.

La deuxième partie vient de ce que si $\dfrac{\overline{m_j p}}{\overline{m_j m'_j}} = \dfrac{\overline{m_j m''_j}}{\overline{m_j m'_j}}$ on a $\overline{m_j p} = \overline{m_j m''_j}$, d'où, avec $\overrightarrow{e_j}$ vecteur servant à définir les mesures algébriques sur D_j, l'égalité vectorielle $\overrightarrow{m_j p} = \overrightarrow{m_j m''_j} = \overline{m_j p}\,\overrightarrow{e_j}$: donc le point $p = m''_j$ est bien l'intersection de D_j et de H''. ■

Cette utilisation des homothéties et des translations est fondamentales en géométrie affine. Jointe à celle des mesures algébriques, elle donne beaucoup de justifications rapides.

Par exemple, on a le :

THÉORÈME 1.68. (de Pappus) — *Soient deux droites distinctes D et D' de A, plan affine, a, b, c et a', b', c' des points distincts de D et D' respectivement, (et distincts du point d'intersection éventuel de D et D'). Si $D(a,b')//D(b,a')$ et $D(b,c')//D(c,b')$ alors $D(a,c')//D(c,a')$.*

1.69. On note $D(a,b')$ la droite affine engendrée par a et b', et $//$ pour parallèle à.

Faisons deux figures suivant que les droites D et D' sont parallèles, (figure 1.68.1), ou non (figure 1.68.2).

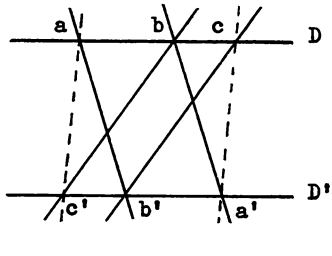


Fig. 1.68.1

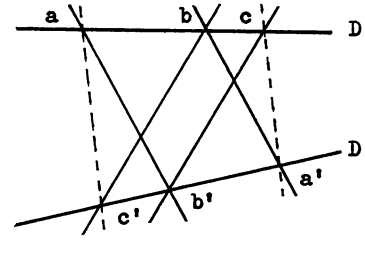


Fig. 1.68.2

Si les droites D et D' du plan affine A ne sont pas parallèles, elle sont sécantes, (Corollaire 1.45).

Si elles sont sécantes en o, soit h l'homothétie de centre o, de rapport $\dfrac{\overline{ob}}{\overline{oa}}$, on a $h(a) = b$, donc ($h(D') = D'$ et $h(D(a,b')) = D(b,a')$ par parallélisme), $h(b') = a'$.

Si g est l'homothétie de centre o et de rapport $\frac{\overline{ob'}}{\overline{oc'}}$ on aura $g(c') = b'$ et $g(b) = c$, (car $g(D) = D$, et $g(D(b,c'))$ est $D(b',c)$, là encore par parallélisme).

Or h et g, homothéties de même centre, commutent, donc $g \circ h = h \circ g$. Comme $(g \circ h)(a) = g(b) = c$ et $(g \circ h)(c') = (h \circ g)(c') = h(b') = a'$, les droites $D(a,c')$ et $D(c,a')$ *sont bien parallèles.*

Dans le cas des droites D et D' parallèles, on introduit les translations $\mathcal{T}$ de vecteur $\overrightarrow{ab}$ et δ de vecteur $\overrightarrow{c'b'}$, (voir figure 1.68.1).

On a $\mathcal{T}(D') = D'$, (droite parallèle au vecteur de la translation) et $\mathcal{T}(D(a,b'))$ est la droite parallèle à $D(a,b')$ passant par $\mathcal{T}(a) = b$: c'est $D(b,a')$ vu les hypothèses.

Donc $\mathcal{T}(b') = \mathcal{T}(D' \cap D(a,b')) = D' \cap D(a',b) = a'$.

On a donc $\mathcal{T}(a) = b$ et $\mathcal{T}(b') = a'$.

De même, pour la translation δ de vecteur $\overrightarrow{c'b'}$ on aura $\delta(c') = b'$ et $\delta(b) = c$.

Or les translations commutent, donc $\mathcal{T} \circ \delta = \delta \circ \mathcal{T}$.

Comme $\delta \circ \mathcal{T}(a) = \delta(b) = c$ et $(\mathcal{T} \circ \delta)(c') = \mathcal{T}(b') = a'$, les droites $D(a,c')$ et $D(c,a')$ *soit bien parallèles.* ■

1.70. THÉORÈME DE DESARGUES. — *Soient a,b,c et a',b',c' six points distincts d'un espace affine A, de dimension deux au moins, tels que les triangles a,b,c et a',b',c' aient leurs côtés deux à deux parallèles : $(a,b)//(a',b')$; $(b,c)//(b',c')$ et $(a,c)//(a',c')$.*

Alors les trois droites $D(a,a')$, $D(b,b')$ et $D(c,c')$ sont parallèles ou concourantes.

(On suppose les points a,b,c non alignés, ainsi que a',b',c'.)

Les droites $D(a,b)$ et $D(a',b')$ étant parallèles sont confondues, ou déterminent un plan, passant par a, de direction $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{aa'})$. Il est facile de voir que l'on ne peut pas avoir $D(a,b) = D(a',b')$ et $D(b,c) = D(b',c')$, sinon $b' = b$.

On suppose donc $D(a,b)$ et $D(a',b')$ parallèles distinctes donc coplanaires. Dans leur plan, les droites $D(a,a')$ et $D(b,b')$ sont sécantes ou parallèles, (Corollaire 1.45). Traitons le cas des droites sécantes en o, (figure 1.70).

Soit h l'homothétie de centre o, de rapport $\frac{\overline{oa'}}{\overline{oa}}$, on a $h(a) = a'$ et $h(b) = b'$ puisque $D(a,b)//D(a',b')$ et o,b,b' alignés.

L'image par h de $D(b,c)$ est $D(b',c')$, droite parallèle à $D(b,c)$ passant par $h(b) = b'$. De même $h(D(a,c)) = D(a',c')$ donc l'image par h de c,

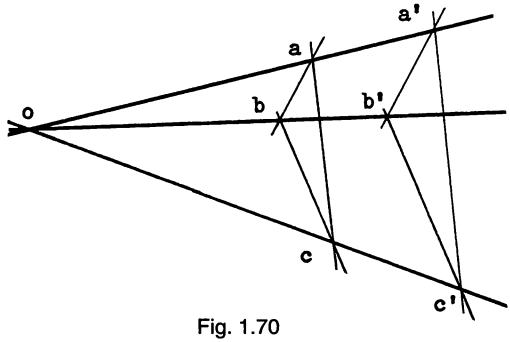


Fig. 1.70

intersection de $D(b,c)$ et $D(a,c)$ est c' d'où o, c, c' alignés : $D(c,c')$ *contient l'intersection de* $D(a,a')$ *et* $D(b,b')$.

Si $D(a,a')//D(b,b')$, on remplace l'homothétie h par la translation $\mathcal{T}$ de vecteur $\overrightarrow{aa'}$ et on conclut à $\mathcal{T}(c) = c'$ d'où $D(c,c')//D(a,a')//D(b,b')$. ■

REMARQUE 1.71. — Ce type de conclusion, «parallèles ou sécantes» est un peu agaçant car on a l'impression qu'il s'agit de la même chose. Effectivement, dans le cadre des *espaces projectifs*, que je n'aborderai pas, le parallélisme n'apparaît pas comme un cas particulier.

REMARQUE 1.72. — Contrairement aux calculs d'analytique, on conclut ici à l'alignement de points, parce qu'ils sont images de points alignés par une application affine, ou centre d'homothétie, un point et son image, ..., toutes raisons sans calculs. Par ailleurs, cela fait deux justifications où interviennent une homothétie ou une translation : ce rôle commun se comprend, puisque les homothéties et les translations forment un sous-groupe du groupe $\mathcal{G}$ des bijections affines (Théorème 1.63).

Un autre type d'application affine, rend de grands services, en liaison avec le Théorème de Thalès. Il s'agit des **projections affines.**

DÉFINITION 1.73. — *Soit un espace affine A de direction E et deux sous-espaces affines B et C de directions respectives F et G telles que $E = F \oplus G$. On appelle projection sur B, parallèlement à C, l'application π qui à m de A associe l'intersection de B et du sous-espace affine parallèle à C contenant m.*

Notons $C(m)$, le sous-espace affine de direction G, (donc parallèle à C), contenant m. Comme $E = F \oplus G$, avec F direction de B, $B \cap C(m)$ est un singleton $\{m'\}$, (Corollaire 1.43), donc l'application π est parfaitement déterminée.

THÉORÈME 1.74. — *La projection π sur B parallèlement à C est une application affine de A sur le sous-espace affine B, d'application linéaire associée p, projection vectorielle sur F parallèlement à G, (avec F et G directions de B et C).*

Soit en effet b dans B, avec $C(b)$ sous-espace affine de direction G, celle de C, contenant b, on a $B \cap C(b) = \{b\}$ donc $\pi(b) = b$.

Considérons alors l'application $f = \theta_{\pi(b)} \circ \pi \circ \theta_b^{-1}$, (voir 1.55). A $\overrightarrow{x}$ de E, on associe m tel que $\overrightarrow{bm} = \overrightarrow{x}$. Si on décompose $\overrightarrow{x}$ en $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dans la somme directe $F \oplus G$, en notant m' le point de A tel que $\overrightarrow{bm'} = \overrightarrow{u} \in F$, direction de B, on a $m' \in B$ car $b \in B$.

On a $\overrightarrow{m'm} = \overrightarrow{bm} - \overrightarrow{bm'}$, (relation de Chasles), soit $\overrightarrow{m'm} = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \in G$, direction de $C(m)$ sous-espace affine parallèle strictement à C et contenant m, d'où $m' \in C(m)$ et finalement $B \cap C(m) = \{m'\}$ donc $\pi(m) = m'$.

Mais alors $f(\overrightarrow{x}) = \theta_{\pi(b)} \circ \pi(m) = \theta_{\pi(b)}(m') = \overrightarrow{bm'}$ puisque $\pi(b) = b$, soit encore $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u}$, avec $\overrightarrow{x}$ décomposé en $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dans la somme directe $F \oplus G$. On a bien f linéaire, d'où π affine, (Théorème 1.52), d'application linéaire associée la projection vectorielle sur F parallèlement à G. (Voir Tome 1, Théorème 6.48). ■

COROLLAIRE 1.75. — *Une projection affine π vérifie l'égalité $\pi \circ \pi = \pi$. Réciproquement, si π, affine, vérifie l'égalité $\pi \circ \pi = \pi$, c'est une projection affine sur le sous-espace affine $B = \pi(A)$, parallèlement à tout sous-espace affine de direction* $\operatorname{Ker} p$ *si p est linéaire associée à π.*

D'abord, si π est projection affine sur B parallèlement à C, on a vu au début de la justification du Théorème 1.74, que tout point b de B est invariant. Si p est le projecteur vectoriel associé à π, pour b dans B, on a : $\pi = \theta_b^{-1} \circ p \circ \theta_b$, d'où $\pi \circ \pi = \theta_b^{-1} \circ p \circ \theta_b \circ \theta_b^{-1} \circ p \circ \theta_p$, et comme $p \circ p = p$, (projecteur, voir Tome 1, 6.47), il reste $\pi \circ \pi = \theta_b^{-1} \circ p \circ \theta_b = \pi$.

Réciproquement, soit π affine vérifiant $\pi \circ \pi = \pi$, son application linéaire associée f est aussi associée à $\pi \circ \pi$, c'est donc $f \circ f$, (remarque 1.56), c'est donc un projecteur. Puis, pour tout a de A, $\pi(\pi(a)) = \pi(a)$, donc les éléments du sous-espace affine image $B = \pi(A)$ sont invariants.

Soit alors $b \in \pi(A)$, comme $\pi(b) = b$, on aura $\pi = \theta_b^{-1} \circ f \circ \theta_b$, avec f projecteur d'image F direction de $\pi(A) = B$, et de noyau noté G.

Soit $m \in A$, $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{bm}$ décomposé en $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dans $F \oplus G$ et m' de A tel que $\overrightarrow{bm'} = \overrightarrow{u} \in F$: le point m' est dans $\pi(A)$, et comme $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{u} =$

$\overrightarrow{bm} - \overrightarrow{bm'} = \overrightarrow{m'm}$, avec $\overrightarrow{v} \in G = \operatorname{Ker} f$, le point m' est aussi dans le sous-espace affine de direction $\operatorname{Ker} f$ contenant m, donc m' est le projeté de m sur $\pi(A)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$. Or $\pi(m) = \theta_b^{-1}(f(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})) = \theta_b^{-1}(\overrightarrow{u})$ est le point tel que $\overrightarrow{b\pi(m)} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{bm'}$: on a $m' = \pi(m)$ d'où le résultat.■

Nous allons utiliser ces projections, toutes neuves, pour justifier le *Théorème de Ménélaüs*.

THÉORÈME 1.76. — *Soit trois points a, b, c affinement libres dans un espace affine A, et a', b', c' des points situés respectivement sur les droites $D(b,c)$, $D(c,a)$ et $D(a,b)$, distincts de a, b, c. On a a', b, c' alignés si et seulement si :*

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1.$$

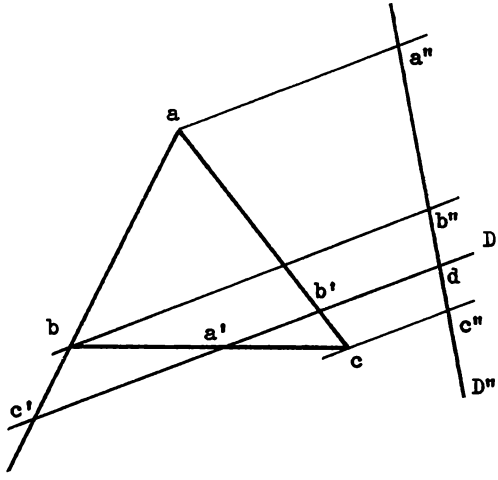


Fig. 1.76.

(Voir en 1.66 la définition de la mesure algébrique $\overline{a'b}$.)

Les points a, b, c sont les sommets d'un triangle, et engendrent un plan affine P.

Supposons d'abord a', b' et c' alignés sur une droite D de P, et soit D'' une droite de P non parallèle à D. La projection π sur D'', parallèlement à D, donnera des trois points a', b', c' la même image d, et soit $a'' = \pi(a)$, $b'' = \pi(b)$ et $c'' = \pi(c)$, (figure 1.76).

Par Thalès (voir 1.67) on a :

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} = \frac{\overline{db''}}{\overline{dc''}}; \quad \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} = \frac{\overline{dc''}}{\overline{da''}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = \frac{\overline{da''}}{\overline{db''}},$$

d'où par produit, la relation $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1$.

Réciproquement, soient a', b', c' situés sur $D(b,c)$, $D(c,a)$ et $D(a,b)$ respectivement et vérifiant la relation $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1$, les points étant différents de a, b et c.

La droite $D = \mathrm{aff}(a', b')$ coupe $D(a,b)$, sinon elle lui serait parallèle, (on est dans le plan P, voir 1.45), et par Thalès on aurait $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} = \frac{\overline{b'a}}{\overline{b'c}}$ d'où $\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} = 1$, ce qui implique $\frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1$, soit $\overline{c'a} = \overline{c'b}$ ce qui est absurde car $a \neq b$.

Si c_1 est l'intersection de D et $D(a,b)$, par la partie directe on a

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c_1a}}{\overline{c_1b}} = 1 = \frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}},$$

donc $\frac{\overline{c_1a}}{\overline{c_1b}} = \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$, notons λ cette valeur. Comme on l'a vu dans la remarque 1.66 bis, le point c', mais aussi le point c_1, est le barycentre de a et b affectés des coefficients 1 et $-\lambda$, d'où $c' = c_1$, donc a', b' et c' sont alignés. ■

On peut alors améliorer la justification donnée du Théorème de Céva. Si on reprend la justification donnée en 1.49, où on définissait sur les côtés du triangle a_1, a_2, a_3 les points b_1, b_2, b_3 par les relations $\overrightarrow{b_ia_i} = \lambda_i\overrightarrow{b_ia_{i+1}}$, (et la convention $a_4 = a_1$) on a utilisé les conditions $\lambda_i \neq 1$, ce qui est évident si les a_i sont distincts, et la condition $1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 \neq 0$, pour introduire un barycentre. Si donc $1 - \lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = 0$, avec des λ_i plus nécessairement < 0, c'est que les droites $D(a_i, b_i)$ ne sont peut-être pas concourantes. En fait, on a :

THÉORÈME 1.77. (De Céva) — *Soient trois points a, b, c affinement libres dans un espace affine A, et a', b', c' des points sur les droites $D(b,c)$, $D(c,a)$ et $D(a,b)$, distincts de a, b et c. Les droites $D(a,a')$, $D(b,b')$ et $D(c,c')$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si :*

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -1.$$

Si $D(a,a')$, $D(b,b')$ et $D(c,c')$ sont concourantes en p, (figure 1.77.1), on considère le triangle aba' et la droite $(D) = \mathrm{aff}(c,p,c')$. Par Ménélaüs, on a : $\dfrac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} \cdot \dfrac{\overline{cb}}{\overline{ca'}} \cdot \dfrac{\overline{pa'}}{\overline{pa}} = 1.$

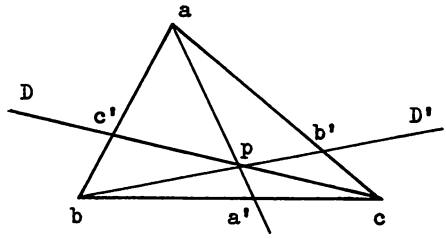


Fig. 1.77.1

Puis, avec le triangle $aa'c$ et les points alignés b, p et b', sur D', toujours par Ménélaüs on a $\dfrac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \dfrac{\overline{pa}}{\overline{pa'}} \cdot \dfrac{\overline{ba'}}{\overline{bc}} = 1$, d'où par produit, après simplification par $\overline{cb} = -\overline{bc}$, et compte tenu de $\dfrac{\overline{pa'}}{\overline{pa}} \cdot \dfrac{\overline{pa}}{\overline{pa'}} = 1$, il reste $\dfrac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} \cdot \dfrac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \dfrac{\overline{ba'}}{\overline{ca'}} = -1$, ce qui est la relation voulue, puisque $\overline{a'b} = -\overline{ba'}$ et $\overline{a'c} = -\overline{ca'}$.

Réciproquement, si la relation du théorème est vérifiée, et si $D(a,a')$ et $D(b,b')$ se coupent en p, on a $p \neq c$, sinon $a' \in \mathrm{aff}(a,p) = \mathrm{aff}(a,c)$ et $a' \in \mathrm{aff}(b,c) \Longrightarrow a' = c$ ce qui est exclu. On considère alors la droite $D(p,c)$ et son... intersection avec $D(a,b)$.

Si la droite $D(c,p)$ était parallèle à $D(a,b)$, (après tout, pourquoi pas!) on serait bien embêté. Comme il neige ce matin, je vais aller faire un peu de marche à pied pour m'éclaircir les idées et voir pourquoi le cas est exclu.

Brrr... Le froid m'ayant éclairci les idées, considérons la figure 1.77.2, où l'on suppose $D(c,p)//D(a,b)$.

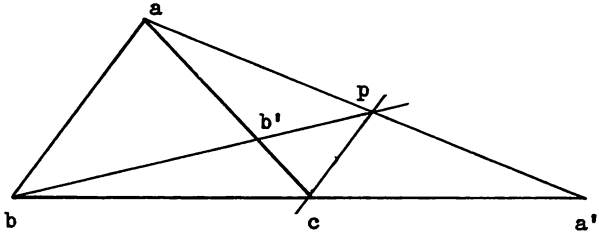


Fig. 1.77.2

Soit g l'homothétie de centre a' envoyant p sur a et λ son rapport, on a aussi $g(c) = b$, d'où $\overrightarrow{a'b} = \lambda\overrightarrow{a'c}$ et $\overrightarrow{ba} = \lambda\overrightarrow{cp}$.

Si h est l'homothétie de centre b', telle que $h(c) = a$, on aura aussi $h(p) = b$, et si μ est son rapport, on a $\overrightarrow{b'a} = \mu\overrightarrow{b'c}$ et $\overrightarrow{ba} = \mu\overrightarrow{pc}$. Mais alors, comme $\overrightarrow{cp} = -\overrightarrow{pc}$, $\lambda = -\mu$, et on a $\dfrac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} = \lambda = -\mu = -\dfrac{\overline{b'a}}{\overline{b'c}}$ d'où $\dfrac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \dfrac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} = -1$, ce qui compte-tenu de la relation supposée vérifée, (voir 1.77), implique $\dfrac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1$, soit $\overrightarrow{c'a} = \overrightarrow{c'b}$, exclu car $a \neq b$. Mais alors, la droite $D(c,p)$ coupe $D(a,b)$ en c_1, et par la partie directe déjà justifiée, on a :

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c_1a}}{\overline{c_1b}} = -1 = \frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$$

d'où $\dfrac{\overline{c_1a}}{\overline{c_1b}} = \dfrac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$ d'où $c_1 = c'$ comme on l'a justifié à la fin de la démonstration du Théorème de Ménélaüs, (voir 1.76).

Il reste à traiter le cas du parallélisme : c'est-à-dire le cas où $D(a,a')$ et $D(b,b')$ seraient parallèles, (figure 1.77.3).

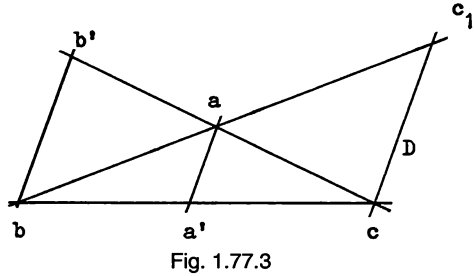


Fig. 1.77.3

Comme $a' \neq b$, on a $D(a,a')$ non parallèle à $D(a,b)$, donc la parallèle D à $D(a,a')$ passant par c coupe $D(a,b)$ en c_1. En appliquant alors la partie directe du théorème, dans le cas des droites $D(a,a')$, $D(b,b')$ et $D(c,c_1)$ parallèles, (partie non encore justifiée, ce sera fait ensuite), on a $\dfrac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \dfrac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \dfrac{\overline{c_1a}}{\overline{c_1b}} = -1$, ce qui joint à l'hypothèse $\dfrac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \dfrac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \dfrac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -1$, donne $\dfrac{\overline{c_1a}}{\overline{c_1b}} = \dfrac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$, d'où là encore $c_1 = c'$.

Enfin, justifions que si sur les côtés du triangle a, b, c on a les points a', b', et c' distincts de a, b et c, tels que $D(a,a')//D(b,b')//D(c,c')$, on a la relation. Par Thalès, (voir la figure 1.77.3 où c' est noté c_1), sur les droites $D(b,c)$ et $D(a,b)$, on a : $\dfrac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} = \dfrac{\overline{ab}}{\overline{ac'}}$, puis sur les droites $D(a,c)$ et $D(a,b)$, on obtient $\dfrac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} = \dfrac{\overline{bc'}}{\overline{ba}}$, d'où par produit :

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} = \frac{\overline{bc'}}{\overline{ac'}} \cdot \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{\overline{c'b}}{\overline{c'a}}(-1)$$

et finalement l'égalité $\dfrac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \cdot \dfrac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \cdot \dfrac{\overline{ca'}}{\overline{c'b}} = -1.$ ■

Je ne saurai terminer ce long paragraphe consacré aux applications affines sans justifier le :

THÉORÈME 1.78. — *Soient A et B deux espaces affines, A étant de dimension finie, q. Une application affine u de A dans B est parfaitement déterminée par la donnée des images de $q+1$ points affinement libres.*

Ce résultat est à rapprocher du Théorème 6.77 du Tome 1 d'algèbre, sur la détermination d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base.

En effet, si on se donne $(a_0, a_1, \ldots, a_q)$ affinement libres dans A, et des points b_0, b_1, ..., b_q de B, alors les vecteurs $\overrightarrow{a_0a_i}$ pour $1 \leqslant i \leqslant q$, forment une base de E direction de A, et, avec F direction de B, il existe une et seule application linéaire f de E dans F telle $f(\overrightarrow{a_0a_i}) = \overrightarrow{b_0b_i}$, (Tome 1, Théorème 6.77). Mais alors, si on veut que u, affine de A dans B soit telle que, $\forall i$ avec $0 \leqslant i \leqslant q$ on ait $u(a_i) = b_i$, son application linéaire associée est f, (unique) et $u = \theta_{b_0}^{-1} \circ f \circ u_{a_0}$ est parfaitement déterminée, (voir 1.55) ■

5. Et l'analytique dans tout cela ?

On se contentera, dans ce paragraphe, des espaces affines de dimension finie, mais les notions se généralisent.

DÉFINITION 1.79. — *Soit un repère* $\mathcal{R} = (O; (\overrightarrow{e_i}), 1 \leqslant i \leqslant n)$ *de* A *espace affine de dimension* n. *On appelle coordonnées de* $m \in A$ *dans ce repère les scalaires* $x_1, \ldots, x_n$ *tels que* $\overrightarrow{Om} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e_i}$.
(Voir en 1.32 la définition de repère).

Le n-uplet des coordonnées de m dans le repère $\mathcal{R}$ est donc déterminé de manière unique, les composantes de $\overrightarrow{Om}$ dans la base $\mathcal{B}$ de E direction de A l'étant.

Si a et b sont les points de coordonnées respectives les $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et les $(\beta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ dans le repère $\mathcal{R}$, le vecteur $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{Ob} - \overrightarrow{Oa}$, (relation de Chasles) admet les $\beta_i - \alpha_i$ comme composantes dans la base $\mathcal{B}$.

1.80. Equation d'un hyperplan

Soit alors B un hyperplan de A, c'est que sa direction H est un hyperplan vectoriel de E, donc le noyau d'une forme linéaire φ non nulle sur E, (voir Tome 1, 6.90). Dans la base duale des $e_i^*, 1 \leqslant i \leqslant n$, φ se décompose en $\varphi = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i^*$, (voir Tome 1, 6.108), et si b, de coordonnées $\beta_1, \ldots, \beta_n$ dans le repère $\mathcal{R}$ est dans B, le point m de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ sera dans B si et seulement si $\varphi(\overrightarrow{bm}) = 0$, soit comme $\overrightarrow{bm} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \beta_i) \overrightarrow{e_i}$ et que $e_j^*(\overrightarrow{e_i}) = 1$ si $i = j$ et 0 sinon, il reste :

1.81. $(m \in B) \iff \left(\sum_{i=1}^{m} u_i x_i = h \right)$, avec $h = \sum_{i=1}^{n} u_i \beta_i$.

L'application qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i - h$ s'appelle parfois *fonction affine des* x_i, et 1.81 signifie que m de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans un repère $\mathcal{R}$ est dans un hyperplan affine si et seulement si ses coordonnées annulent une fonction affine non constante.

1.82. *Une équation* $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i - h = 0$ *s'appelle encore équation d'un hyperplan, si les* u_i *ne sont pas tous nuls.*

Soit maintenant un sous-espace affine C, contenant le point c de coordonnées $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ dans le repère $\mathcal{R}$, et de direction F sous espace de dimension q de E direction de A.

Si $\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \ldots, \overrightarrow{V_q}\}$ est une base de F, on aura m dans C si et seulement si $\overrightarrow{cm} \in \mathrm{Vect}(V_1, \ldots, V_q)$ donc si et seulement si il existe :

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_q) \in K^q$, ($K$ corps de base), tel que $\overrightarrow{cm} = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \overrightarrow{V_j}$.

Si on décompose chaque $\overrightarrow{V_j}$ dans la base $\mathcal{B}$ des $\overrightarrow{e_i}$ de E en :

$\overrightarrow{V_j} = \sum_{i=1}^{n} v_{ij} \overrightarrow{e_i}$, avec $x_1, \ldots, x_n$ coordonnées de m, l'égalité précédente équivaut aux relations :

1.83. $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, $x_i - \gamma_i = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j v_{ij}$, ou $x_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j v_{ij}$, qui montrent que $x_1, \ldots, x_n$ dépendent affinement de q paramètres, la matrice $\mathcal{V}$ des $(v_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ des coefficients étant de rang q.

Mais réciproquement, avec $\mathcal{V}$ de rang q, les relations 1.83 définissent C sous-espace affine contenant c, de direction $V = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{V_1}, \ldots, \overrightarrow{V_q})$ d'où le :

THÉORÈME 1.84. — *Un point m de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans un repère $\mathcal{R}$ de A affine de dimension n, décrit un sous-espace affine de dimension q si et seulement si $x_1, \ldots, x_n$ sont fonctions affines de q paramètres indépendants.*

C'est une autre façon de dire que la matrice $\mathcal{V}$ des v_{ij} des relations 1.83 est de rang q. ■

Mais si on part des relations 1.83, écrites sous la forme :

$$(I) \quad \begin{cases} x_1 = \gamma_1 + \lambda_1 v_{11} + \ldots + \lambda_q v_{1q} \\ x_2 = \gamma_2 + \lambda_1 v_{21} + \ldots + \lambda_q v_{2q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \gamma_n + \lambda_1 v_{n1} + \ldots + \lambda_q v_{nq}, \end{cases}$$

on obtient un système de n équations linéaires par rapport aux q inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$, système de rang q, rang de la matrice $\mathcal{V}$ des $v_{i,j}$, et système qui a des solutions lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées d'un point du sous-espace affine C.

L'étude faite en algèbre, des systèmes linéaires, permet alors de dire que ceci équivaut à la nullité des $n - q$ caractéristiques du système, (Tome 1, Théorème 9.51). Or la façon d'obtenir ces caractéristiques montre que l'on

obtient ainsi $n-q$ fonctions affines de $x_1, \ldots, x_n$, qui sont indépendantes en tant que fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ car dans chaque caractéristique figure un et un seul des x_i d'indice i associé à une équation non principale (Tome 1, 9.50).

Si réciproquement on se donne $n-q$ hyperplans affines $H_1, \ldots, H_{n-q}$ d'équations :

1.85. $u_{i1}x_1 + \ldots + u_{in}x_n = h_i$, associées à des formes $\varphi_i = \sum_{i=1}^{n} u_{ij}e_j^*$ indépendantes, le système des $n-q$ équations $u_{i1}x_1 + \ldots + u_{in}x_n = h_i$ est de rang $n-q$, donc admet des solutions qui seront fonctions affines des q inconnues non principales, (toujours le Théorème 9.51 du Tome 1), d'où finalement le :

THÉORÈME 1.86. — *Un sous-espace affine de dimension q de A espace affine de dimension n est encore l'intersection de $n-q$ hyperplans affines associés à des formes linéaires indépendantes.* ■

Les équations d'hyperplan vont nous permettre de donner une généralisation du Théorème de Ménélaüs.

THÉORÈME 1.87. — *Soient dans A affine des points distincts $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $(m \geqslant 3)$, et les points b_i tels que $\overrightarrow{b_ia_i} = \lambda_i\overrightarrow{b_ia_{i+1}}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des scalaires donnés non nuls, (et $a_{m+1} = a_1$).*

S'il existe un hyperplan affine H contenant les b_i et ne contenant aucun a_i, on a $\prod_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Si A est affine de dimension $m-1$, si les a_i sont affinement libres et si $\prod_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, alors il existe un hyperplan H contenant les b_i.

Soit g une fonction affine de p, équation de l'hyperplan H contenant les b_i. Si φ est la forme linéaire associée à g, on a, $\forall p \in H$, $0 = g(p) = \varphi(\overrightarrow{b_ip})$ puisque $b_i \in H$, (traduit $p \in H \iff \overrightarrow{b_ip} \in \operatorname{Ker}\varphi$).

Comme les a_i ne sont pas dans H, on aura $g(a_i) = \varphi(\overrightarrow{b_ia_i})$ non nul, ainsi que $g(a_{i+1}) = \varphi(\overrightarrow{b_ia_{i+1}})$. Or, φ est linéaire et $\overrightarrow{b_ia_i} = \lambda_i\overrightarrow{b_ia_{i+1}}$, donc

$g(a_i) = \lambda_i g(a_{i+1})$, et finalement $\lambda_i = \dfrac{g(a_i)}{g(a_{i+1})}$ d'où :

$$\prod_{i=1}^{m} \lambda_i = \frac{g(a_1)}{g(a_2)} \cdot \frac{g(a_2)}{g(a_3)} \cdot \ldots \cdot \frac{g(a_{m-1})}{g(a_m)} \cdot \frac{g(a_m)}{g(a_{m+1})}$$

avec $a_{m+1} = a_1$: il reste un produit égal à 1.

Soit réciproquement les points $b_1, \ldots, b_m$ définis par les relations données.

On a $\overrightarrow{b_m a_m} = \lambda_m \overrightarrow{b_m a_1} = \lambda_m \overrightarrow{b_m b_1} + \lambda_m \overrightarrow{b_1 a_1}$.

Or $\overrightarrow{b_1 a_1} = \lambda_1 \overrightarrow{b_1 a_2}$ d'où $\overrightarrow{b_m a_m} = \lambda_m \overrightarrow{b_m b_1} + \lambda_m \lambda_1 \overrightarrow{b_1 a_2}$.

On remplace $\overrightarrow{b_1 a_2}$ par $\overrightarrow{b_1 b_2} + \overrightarrow{b_2 a_2}$, et $\overrightarrow{b_2 a_2} = \lambda_2 \overrightarrow{b_2 a_3}$, d'où :
$\overrightarrow{b_m a_m} = \lambda_m \overrightarrow{b_m b_1} + \lambda_m \lambda_1 \overrightarrow{b_1 b_2} + \lambda_m \lambda_1 \lambda_2 \overrightarrow{b_2 a_3}$ et on continue pour obtenir :

$$\overrightarrow{b_m a_m} = \lambda_m \overrightarrow{b_m b_1} + \lambda_m \lambda_1 \overrightarrow{b_1 b_2} + \lambda_m \overrightarrow{\lambda_1 \lambda_2} \overrightarrow{b_2 b_3} + \ldots + \lambda_m \lambda_1 \ldots \lambda_{m-1} \overrightarrow{b_{m-1} a_m},$$

avec $\overrightarrow{b_{m-1} a_m} = \overrightarrow{b_{m-1} b_m} + \overrightarrow{b_m a_m}$,
et compte-tenu de l'égalité $\lambda_m \lambda_1 \ldots \lambda_{m-1} = 1$, on obtient

$$0 = \lambda_m \overrightarrow{b_m b_1} + \lambda_m \lambda_1 \overrightarrow{b_1 b_2} + \ldots + \lambda_m \lambda_1 \ldots \lambda_{m-2} \overrightarrow{b_{m-2} b_{m-1}} + \overrightarrow{b_{m-1} b_m}.$$

Si H est alors un hyperplan contenant $b_1, \ldots, b_{m-1}$, (il y en a car on a $m-1$ points dans A affine de dimension $m-1$), la direction F de H contiendra $\overrightarrow{b_1 b_2}$, $\overrightarrow{b_2 b_3}$, ... et $\overrightarrow{b_{m-2} b_{m-1}}$, donc aussi, vu l'égalité précédente, le vecteur $\lambda_m \overrightarrow{b_m b_1} + \overrightarrow{b_{m-1} b_m} = \lambda_m \overrightarrow{b_m b_1} + \overrightarrow{b_{m-1} b_1} + \overrightarrow{b_1 b_m}$. Or $\overrightarrow{b_{m-1} b_1} \in F$, d'où $(\lambda_m - 1)\overrightarrow{b_m b_1} \in F$.

Comme $\lambda_m \neq 1$, (sinon $\overrightarrow{b_m a_m} = \overrightarrow{b_m a_1} \Longrightarrow a_m = a_1$), on a $b_1 \in H$, $\overrightarrow{b_1 b_m} \in F$ direction de H, d'où $b_m \in H$: l'hyperplan H contient les b_i pour $1 \leqslant i \leqslant m$. ■

EXERCICES

1. Soient $n+1$ points $a_1, \ldots, a_{n+1}$, affinement libres dans A affine de dimension n. On définit les points p et p_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$ par les relations $\overrightarrow{p_i a_i} = \lambda_i \overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ et par $\overrightarrow{p a_{n+1}} = \lambda \overrightarrow{a_1 a_{n+1}}$. Montrer que p et les p_i sont dans un hyperplan si et seulement si $(\lambda - 1) \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i) = \lambda \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

2. Soient a, b, c trois points non alignés de A, espace affine réel de dimension 3, P le plan $\mathrm{aff}(a, b, c)$, o un point non dans P et Q un plan parallèle à P ne contenant pas o. On note a', b', c' les équibarycentres de (b, c), (c, a) et (a, b), puis a'', b'' et c'' les intersections de Q et des droites $\mathrm{aff}(o, a)$, $\mathrm{aff}(o, b)$, $\mathrm{aff}(o, c)$. Montrer que les droites $\mathrm{aff}(a', a'')$, $\mathrm{aff}(b', b'')$ et $\mathrm{aff}(c', c'')$ sont parallèles, ou concourantes.

3. Soit A un espace affine réel et G un sous-groupe fini du groupe des bijections affines de A sur A. Montrer qu'il existe au moins un point de A, invariant par les g de G.

4. Démontrer qu'un hyperplan est parallèle à tout sous-espace affine qu'il ne rencontre pas.

5. Démontrer que par deux sous-espaces affines non sécants, on peut faire passer deux sous-espaces affines strictement parallèles.

6. Soient A' et A'' des sous-espaces affines non sécants, de dimensions respectives p' et p'', de A. Démontrer que ces sous-espaces sont parallèles si et seulement si ils sont contenus dans un sous-espace affine de dimension $1 + \sup(p', p'')$.

7. Soient $n+1$ points affinement libres dans A affine de dimension n, notés a_i, $1 \leqslant i \leqslant n+1$. On note H_i l'hyperplan affine engendré par les a_j pour $j \neq i$.
Soit D une droite parallèle à aucun H_i, $\{b_i\} = H_i \cap D$, c_i milieu de $a_i b_i$. Montrer qu'il existe un hyperplan contenant tous les c_i.

SOLUTIONS

1. Les points p et p_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ sont dans un même hyperplan si et seulement si ils sont affinement liés, donc (Théorème 1.30) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{pp_i}$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, sont liés.

Dans le repère d'origine a_{n+1}, de base formée des $\overrightarrow{a_{n+1}a_i}$, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{a_{n+1}p_i} &= \overrightarrow{a_{n+1}a_i} + \overrightarrow{a_ip_i} = \overrightarrow{a_{n+1}a_i} - \lambda_i\overrightarrow{a_ia_{i+1}} \\ &= \overrightarrow{a_{n+1}a_i} - \lambda_i(\overrightarrow{a_ia_{n+1}} + \overrightarrow{a_{n+1}a_{i+1}}) \\ &= (1+\lambda_i)\overrightarrow{a_{n+1}a_i} - \lambda_i\overrightarrow{a_{n+1}a_{i+1}}.\end{aligned}$$

Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les coordonnées de p_i sont donc $(0,\dots,0,1+\lambda_i,-\lambda_i,0,\dots,0)$, $(1+\lambda_i$ étant la $i^{ème}$ coordonnée) et celles de p_n sont $(0,\dots,0,1+\lambda_n)$. Le point p tel que $\overrightarrow{pa_{n+1}} = \lambda\overrightarrow{a_1a_{n+1}}$ lui a pour coordonnées $(\lambda,0,\dots,0)$, donc p et les p_i sont affinement liés si et seulement si l'égalité :

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & 0 & 0 & & 0 & \lambda \\ -\lambda_1 & 1+\lambda_2 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & 1+\lambda_3 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1+\lambda n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

est vérifiée, (voir 1.33).

En appelant D le déterminant, si on le développe par rapport à la dernière colonne on obtient $D = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) + (-1)^{n+2}\lambda\Delta$, où Δ est le déterminant d'ordre n :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda_1 & 1+\lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1+\lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & & -\lambda_{n-1} & 1+\lambda_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

que l'on développe par rapport à la dernière ligne, en :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}(-\lambda_1)\dots(-\lambda_{j-1})(1+\lambda_{j+1})\dots(1+\lambda_n);$$

(on obtient des matrices d'ordre $n-1$ avec des blocs diagonaux triangulaires). Or $(-1)^{n+2+n+j+j-1} = -1$, d'où :

$$D = \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) - \lambda\sum_{j=1}^{n}\lambda_1\dots\lambda_{j-1}(1+\lambda_{j+1})\dots(1+\lambda_n).$$

Mais $\lambda_1 \dots \lambda_{j-1} \cdot 1 \cdot (1+\lambda_{j+1}) \dots (1+\lambda_n)$, avec $1 = 1 + \lambda_j - \lambda_j$ s'écrit $\lambda_1 \dots \lambda_{j-1}(1+\lambda_j)(1+\lambda_{j+1}) \dots (1+\lambda_n) - \lambda_1 \dots \lambda_j (1+\lambda_{j+1}) \dots (1+\lambda_n)$ donc la somme s'écrit encore :

$$\sum_{j=1}^{n} \left[(\lambda_1 \dots \lambda_{j-1})(1+\lambda_j) \dots (1+\lambda_n) - \lambda_1 \dots \lambda_j (1+\lambda_{j+1}) \dots (1+\lambda_n)\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) - \prod_{i=1}^{n} \lambda_i,$$

après élimination des termes se retrouvant avec des signes opposés, et avec les conventions usuelles dans ces expressions, à savoir :
pour $j = 1$ le terme $(\lambda_1 \dots \lambda_0)(1+\lambda_1) \dots (1+\lambda_n) = (1+\lambda_1) \dots (1+\lambda_n)$
en fait, et si $j = n$, $\lambda_1 \dots \lambda_n (1+\lambda_{n+1}) \dots (1+\lambda_n) = \lambda_1 \dots \lambda_n$. On a donc :

$$(\Delta = 0) \iff (1-\lambda) \prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i) + \lambda \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

2. On suppose $Q \neq P$, d'où $a' \neq a''$, ($b' \neq b''$ et $c' \neq c''$) donc les droites $\mathrm{aff}(a', a'')$, $\mathrm{aff}(b', b'')$ et $\mathrm{aff}(c', c'')$ existent. (Comme $a \in P$ et $o \notin P$, $\mathrm{aff}(o, a) \cap P$ est un singleton, donc $\mathrm{aff}(o, a) \cap Q$ aussi, d'où l'existence de a'', et de même pour b'' et c''.)

Si on prend le repère d'origine o, de vecteurs de bases $\overrightarrow{oa}$, $\overrightarrow{ob}$ et $\overrightarrow{oc}$, une équation de P passant par $a : (1,0,0)$, $b : (0,1,0)$ et $c : (0,0,1)$ est $x + y + z = 1$.
Le plan Q a donc une équation du type $x + y + z = k$, $k \notin \{0,1\}$, et les coordonnées de a'', b'' et c'' sont : $a'' : (k,0,0)$, $b'' : (0,k,0)$, $c'' : (0,0,k)$.

En fait, on a $\overrightarrow{oa''} = k\overrightarrow{oa}$ soit encore $\overrightarrow{oa''} = (1-k)\overrightarrow{oo} + k\overrightarrow{oa}$: donc
a'' est barycentre de $(o, 1-k)$ et (a, k) ; de même
b'' est barycentre de $(o, 1-k)$ et (b, k) et enfin
c'' est barycentre de $(o, 1-k)$ et (c, k).
Soit d barycentre de $(o, 1-k)$, (a, k), (b, k) et (c, k), qui existe si $1 - k + 3k = 1 + 2k \neq 0$ soit pour $k \neq -\dfrac{1}{2}$. Par associativité, d est barycentre du barycentre de $(o, 1-k)$ et de (a, k), affecté du coefficient 1, et du barycentre de (b, k) et (c, k) affecté du coefficient $2k$, soit encore d barycentre de $(a'', 1)$ et $(a', 2k)$, donc $d \in \mathrm{aff}(a', a'')$. Par symétrie des rôles joués, d est sur la droite $\mathrm{aff}(b', b'')$ et aussi sur $\mathrm{aff}(c', c'')$: *ces droites sont concourantes.*
Si $k = -\dfrac{1}{2}$, les coordonnées de a'', b'' et c'' sont $\left(-\dfrac{1}{2}, 0, 0\right)$; $\left(0, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et $\left(0, 0, -\dfrac{1}{2}\right)$; celles de a', (équibarycentre de b et c) sont $\left(0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, de même on obtient $b' : \left(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ et $c' : \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 0\right)$ d'où
$\overrightarrow{a''a'} : \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$,
$\overrightarrow{b''b'} : \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$,

$\overrightarrow{c''c'} : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

les trois vecteurs sont égaux d'où le parallélisme des droites $\mathrm{aff}(a', a'')$, $\mathrm{aff}(b', b'')$ et $\mathrm{aff}(c', c'')$.

3. Soit $G = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un sous-groupe de n éléments du groupe des bijections affines de A.
Soit $a \in A$, si $\varphi \in G$, l'ensemble des $\varphi\varphi_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, est encore G, (stable par produit et $\varphi\varphi_k = \varphi\varphi_l \Longrightarrow \varphi_k = \varphi_l$ en multipliant par φ^{-1}), donc l'ensemble des points $\{\varphi_k(a); 1 \leqslant k \leqslant n\}$ est stable par φ : l'équibarycentre de ces points sera conservé par φ, (affine) car ce sera l'équibarycentre des $\varphi\varphi_k(a)$; donc des mêmes points. L'équibarycentre existe car $1 + 1 + \ldots + 1 = n \cdot 1 \neq 0$ dans $\mathbb{R}$. Le résultat demeure si le corps K est de caractéristique différente de n = cardinal de G.

4. Soit H un hyperplan de direction F et B un sous-espace affine de direction G. On sait que $F + G = E$, (direction de l'espace affine) implique $H \cap B$ non vide, donc si H ne rencontre pas B, on a $F \subset F + G \subsetneqq E$, et comme F est de codimension 1, c'est que $F = F + G$, d'où $G \subset F$ et H parallèle à B.

5. Soit, dans A affine de direction E, les sous-espaces affines non sécantes A' et A'' de directions respectives F' et F''. On a $F' + F'' \subsetneqq E$, (sinon $A' \cap A'' \neq \varnothing$, corollaire 1.43).
Soit $a' \in A'$ et $a'' \in A''$, et les sous-espaces B' et B'' passant par a' et a'' respectivement, et de direction $F' + F''$: ils sont strictement parallèles, on a $A' \subset B'$ et $A'' \subset B''$; enfin $B' \cap B'' = \varnothing$ (car si on avait un b dans $B' \cap B''$, on aurait $\overrightarrow{a'b} \in F' + F''$ et $\overrightarrow{a''b} \in F' + F''$ d'où $\overrightarrow{a'a''} = \overrightarrow{a'b} - \overrightarrow{a''b} \in F' + F''$ et alors, (Théorème 1.42), $A' \cap A''$ serait non vide.

6. On suppose $p' \leqslant p''$ et soient F' et F'' les directions de A' et A''. Soit a' dans A' et a'' dans A''.
On suppose A' et A'' parallèles, d'où ici $F' \subset F''$. Comme $A' \cap A'' = \varnothing$, $\overrightarrow{a'a''} \notin (F' + F'')$, (Théorème 1.42), donc $G = F'' + K \cdot \overrightarrow{a'a''}$, ($K$ corps de base) est de dimension $1 + \sup(p', p'')$ et, si B est le sous-espace passant par a' de direction G, comme $F' \subset F'' \subset G$ on a $A' \subset B$; puis $\overrightarrow{a'a''} \in G \Longrightarrow a'' \in B$, et $F'' \subset G \Longrightarrow A'' \subset B$.

Réciproquement, avec $\dim A' = p' \leqslant \dim A'' = p''$, on suppose $A' \subset B$, $A'' \subset B$, $A' \cap A'' = \varnothing$ et B sous-espace de dimension $1 + p''$. Soit F', F'' et G les directions de A', A'' et B.

Soit $a' \in A'$ et $a'' \in A''$, on a $\overrightarrow{a'a''} \notin (F' + F'')$, car $A' \cap A'' = \varnothing$, et $\overrightarrow{a'a''} \in G$, (car $a' \in B$ et $a'' \in B$).
Puis $a' \in B$ et $A' \subset B \Longrightarrow F' \subset G$, de même $F'' \subset G$, donc $F' + F'' \subsetneqq G$, inclusion stricte car $\overrightarrow{a'a''} \in G \setminus (F' + F'')$.
Or $p'' = \dim F'' \leqslant \dim(F' + F'') \leqslant (\dim G) - 1 = p''$, vu l'inclusion stricte précédente, soit encore $\dim F'' = \dim(F' + F'')$: c'est que $F'' = F' + F''$, d'où $F' \subset F''$, et finalement A' parallèle à A''.

7. On se place dans un repère d'origine $o = a_{n+1}$, les vecteurs de base étant les $\overrightarrow{a_{n+1}a_k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. L'hyperplan H_k, $(k \leqslant n)$ contenant o et tous les a_j, pour $j \neq k$, a pour équation $x_k = 0$.
Les a_j sont les points de coordonnées $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, 1 en $j^{ème}$ position, pour $1 \leqslant j \leqslant n$.
L'hyperplan H_{n+1} a pour équation $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Si $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \overrightarrow{a_{n+1}a_k}$ est vecteur directeur de la droite D, on a D non parallèle à H_k, $(k \leqslant n)$ si et seulement si $\vec{v} \notin \mathrm{Ker}(e_k^*)$, (en notant $e_k = \overrightarrow{a_{n+1}a_k}$, les vecteurs de la base $\mathcal{B}$, et les e_k^* formes duales). Donc D non parallèle à H_k équivaut à $v_k \neq 0$.
Et D non parallèle à H_{n+1} équivaut à $v_1 + v_2 + \ldots + v_n \neq 0$. Comme $\vec{v}$ est défini à un facteur près on impose $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 1$.
La droite D est alors définie par la donnée d'un point, par exemple de :
$b_{n+1} = H_{n+1} \cap D$, dont les coordonnées, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ vérifient la relation $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n = 1$.
Le point b_k tel que $\overrightarrow{ob_k} = \overrightarrow{ob_{n+1}} + t_k \vec{v}$ sera donc dans H_k d'équation $x_k = 0$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$ si et seulement si $\beta_k + t_k v_k = 0$, d'où, $(v_k \neq 0)$, $t_k = -\dfrac{\beta_k}{v_k}$.
Enfin c_k, milieu de $a_k b_k$ est tel que :

$$2\overrightarrow{oc_k} = \overrightarrow{oa_k} + \overrightarrow{ob_k} = \overrightarrow{oa_k} + \overrightarrow{ob_{n+1}} - \frac{\beta_k}{v_k}\vec{v};$$

d'où $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n} v_k \overrightarrow{oc_k} = \sum_{k=1}^{n} v_k \overrightarrow{oa_k} + \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) \overrightarrow{ob_{n+1}} - \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k\right) \vec{v}.$

Mais $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \overrightarrow{oa_k}$ puisque $o = a_{n+1}$, on a $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1$ et on a imposé $\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$: il reste l'égalité $2\sum_{k=1}^{n} v_k \overrightarrow{oc_k} = \overrightarrow{ob_{n+1}}$, soit, avec c_{n+1} milieu de $a_{n+1}b_{n+1} = ob_{n+1}$, comme $\overrightarrow{a_{n+1}b_{n+1}} = \overrightarrow{ob_{n+1}} = 2\overrightarrow{oc_{n+1}}$, on obtient l'égalité $\sum_{k=1}^{n} v_k \overrightarrow{oc_k} = \overrightarrow{oc_{n+1}}$, ce qui, compte-tenu de $\sum_{k=1}^{n} v_k = 1$, prouve que c_{n+1} est le barycentre des c_k affectés des coefficients v_k, $(1 \leqslant k \leqslant n)$: tout hyperplan contenant $c_1, c_2, \ldots, c_n$, (et il y en a car on a n points de A affine de dimension n), contiendra c_{n+1}.

CHAPITRE 2

Théorème fondamental des espaces affines

1. Introduction

Soient deux espaces affines A et A' de directions respectives les espaces vectoriels E et E', sur un corps commutatif K. Si u est une application affine de A dans A', d'application linéaire associée f, et si D est une droite de A, $u(D)$ est un sous-espace affine de A', de dimension 1 au plus, donc c'est une droite ou un point. Si de plus Δ est une autre droite de A, parallèle à D, donc de même direction vectorielle F sous-espace de E, (voir Définition 1.39), $u(\Delta)$ est un point si $u(D)$ en est un, ou une droite parallèle à $u(D)$ quand $f(F)$ est de dimension 1 (voir Théorème 1.58).

On peut alors se demander si une application u de A dans A' telle que :

2.1. l'image d'une droite de A soit une droite de A', et
2.2. l'image de deux droites parallèles soit formée de deux droites parallèles,

est affine.

Il n'en est rien en général, mais avec des hypothèses restrictives, on va obtenir ce résultat.

Vérifions d'abord que 2.1 et 2.2 ne suffisent pas à caractériser u affine.

EXEMPLE 2.3. — Soit $A = A' = K$, le corps K étant considéré ici comme une droite affine. Comme K est la seule droite affine de K, toute bijection u de K sur K vérifie les conditions 2.1 et 2.2, or... il existe des bijections non affines de K sur K, le plus souvent.

Par exemple, si $K = \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ non affine.

On doit donc s'attendre à une condition sur la dimension des espaces affines, et aussi sur le corps K, car si $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, il n'y a que deux bijections de K sur K, u et v définies par $u(0) = 0$, $u(1) = 1$ d'une part et $v(0) = 1$, $v(1) = 0$ d'autre part. Or il est immédiat de vérifier que u et v sont affines. (On a, $\forall x \in K$, $u(x) = x$ et $v(x) = x + 1$.)

Ces difficultés liées au corps, on les retrouve différemment.

EXEMPLE 2.4. — Soit cette fois $A = A' = E = E' = \mathbb{C}^2$, espace vectoriel considéré comme espace affine, (voir exemple 1.7).

L'application $u : (z_1, z_2) \rightsquigarrow (\overline{z_1}, \overline{z_2})$ est une bijection de A sur A, qui envoie toute droite de A sur une droite de A et qui donne de deux droites parallèles des images parallèles.

En effet, si D est la droite affine passant par $a = (\alpha, \beta)$, point de $\mathbb{C}^2$, de direction $F = \text{Vect}(\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{v} = (r, s)$, on a

$$D = \{(\alpha, \beta) + \lambda(r, s); \lambda \in \mathbb{C}\}$$

et

$$u(D) = \{(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) + \overline{\lambda}(\overline{r}, \overline{s}); \overline{\lambda} \in \mathbb{C}\}$$

et, en posant $\mu = \overline{\lambda}$, on a μ qui parcourt $\mathbb{C}$ quand λ varie dans $\mathbb{C}$ donc

$$u(D) = \{(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) + \mu(\overline{r}, \overline{s}); \mu \in \mathbb{C}\}$$

est bien une droite, (image bijective de D), de direction $G = \mathbb{C} \cdot (\overline{r}, \overline{s})$.

Si donc Δ est parallèle à D, (donc de direction $\mathbb{C} \cdot (r, s)$), on aura bien $u(\Delta)$ parallèle à $u(D)$, (droites de même direction).

Or u n'est pas affine, c'est-à-dire linéaire ici puisque $u((0,0)) = (0,0)$, car $u(\lambda \cdot (z_1, z_2)) = \overline{\lambda} u((z_1, z_2))$ et non $\lambda\, u((z_1, z_2))$.

Cet exemple va nous conduire à parler de semi-linéarité, notion rencontrée dans l'étude des formes sesquilinéaires, (voir Tome 1, Définition 12.1).

2. Première approche du Théorème fondamental

DÉFINITION 2.5. — *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K, et σ un isomorphisme de corps de K sur K. Une application f de E dans F est dite semi-linéaire relativement à σ si et seulement si*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$$

et

$$\forall (\lambda, x) \in K \times E,\ f(\lambda x) = \sigma(\lambda) f(x).$$

Comme pour les applications linéaires, (voir Tome 1, 6.31 et 6.32) on peut parler de l'image de E par f semi-linéaire, $f(E) = \{f(x), x \in E\}$, et de son noyau, $\text{Ker}\, f = \{x; x \in E, f(x) = 0\}$. Ce sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement, tout comme, avec G et H sous-espaces de E et F respectivement, le seraient les parties $f(G) = \{f(x); x \in G\}$ et $f^{-1}(H) = \{x; x \in E, f(x) \in H\}$.

DÉFINITION 2.6. — *Soient A et A' deux espaces affines de directions respectives E et E' espaces vectoriels sur le corps commutatif K, et σ un isomorphisme de K sur lui-même. Une application u de A dans A' est dite semi-affine relativement à σ si et seulement si pour toute famille finie de points $m_1, \ldots, m_p$, $(p \in \mathbb{N})$ de A, et de scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ de somme non nulle, l'image par u du barycentre des (m_i, λ_i) est le barycentre des $\big(u(m_i), \sigma(\lambda_i)\big)$.*

Il est de ces définitions longues, longues... c'est l'ennui du formalisme. On vérifie facilement que :

THÉORÈME 2.7. — *Une application de A dans A' est semi-affine si et seulement si l'application de E dans E' : $f_a = \theta_{u(a)} \circ u \circ \theta_a^{-1}$ est semi-linéaire. De plus f_a est indépendante du choix de a, on la note f.*

La notation θ_a est introduite en 1.8, 1.9. Ce théorème est la copie du Théorème 1.52, les seules modifications consistant à associer à des scalaires $\lambda_1 \ldots \lambda_p$ de K, leurs images $\sigma(\lambda_1) \ldots \sigma(\lambda_p)$ par l'isomorphisme σ. ■

Entrons maintenant dans le vif du sujet de ce chapitre. Une fois pour toutes, les corps sont commutatifs.

THÉORÈME 2.8. — *Soient A et A' deux espaces affines de directions respectives E et E', A étant de dimension deux au moins. Soit une application u de A dans A' telle que :*

1) pour toute droite D de A, u induit une bijection de D sur une droite $u(D)$ de A', et,

2) si D et Δ sont deux droites parallèles de A, leurs images $u(D)$ et $u(\Delta)$ sont deux droites parallèles de A'.

Alors u est semi-affine injective.

On a facilement u injective, car soient a et b distincts dans A et $D = \mathrm{aff}(a, b)$ la droite affine engendrée par a et b, la restriction de u à D étant bijective de D sur $u(D)$, on a bien $u(a) \neq u(b)$. Mais alors, A étant de dimension deux au moins, il contient au moins deux droites distinctes D et Δ, d'images par u distinctes, (si $u(D) = u(\Delta)$, chaque m' de $u(D) = u(\Delta)$ serait image d'un point $m \in D \cap \Delta$, et on aurait $D \cap \Delta$ qui est vide ou un singleton d'image une droite, curieux non?). Finalement A' aussi est de dimension deux au moins.

Pour justifier le caractère semi-affine de u, on utilise le Théorème 2.7. Soit donc a fixé dans A, et considérons l'application :

2.9. $$f = \theta_{u(a)} \circ u \circ \theta_a^{-1},$$

on va justifier sa semi-linéarité.

On a d'abord $f(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})=f(\overrightarrow{x})+f(\overrightarrow{y})$, *avec* $\overrightarrow{x}$ *et* $\overrightarrow{y}$ *dans* E.

Supposons $\overrightarrow{x}$ *et* $\overrightarrow{y}$ *indépendants*, et soient m et n dans A tels que $\overrightarrow{am}=\theta(a,m)=\overrightarrow{x}=\theta_a(m)$ et $\overrightarrow{an}=\theta(a,n)=\overrightarrow{y}=\theta_a(n)$.

Soit p tel que $\overrightarrow{ap}=\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}=\theta_a(p)$.

On a $\overrightarrow{np}=\overrightarrow{ap}-\overrightarrow{an}=(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})-\overrightarrow{y}=\overrightarrow{x}=\overrightarrow{am}$, donc les droites $D_{a,m}$ et $D_{n,p}$ sont parallèles. Il en est de même des droites $D_{a,n}$ et $D_{m,p}$, car :

$$\overrightarrow{mp}=\overrightarrow{ap}-\overrightarrow{am}=(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})-\overrightarrow{x}=\overrightarrow{y}=\overrightarrow{an}.$$

En fait, *ampn* est un parallélogramme, voir figure 2.8.1.

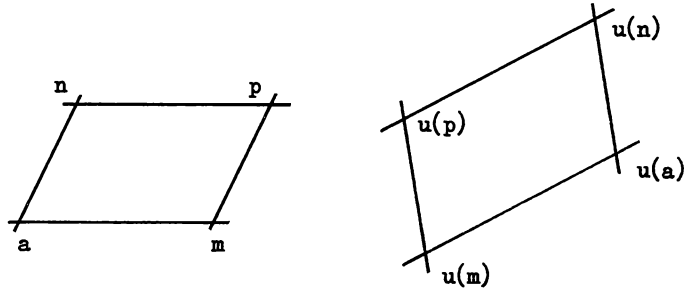


Fig. 2.8.1

Les images $u(D_{a,m})$ et $u(D_{n,p})$ sont alors deux droites strictement parallèles, ($D_{a,m}$ et $D_{n,p}$ l'étant car $\overrightarrow{y}\neq 0 \Longrightarrow n\notin D_{a,m}$), il en est de même des droites $u(D_{a,n})$ et $u(D_{m,p})$. Mais, u étant injective et comme a, m, n et p sont distincts, ($\overrightarrow{x}\neq 0$, $\overrightarrow{y}\neq 0$ et $\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\neq 0$) on a $u(a)\neq u(n)$ d'où en fait $u(D_{a,n})=D_{u(a),u(n)}$ est parallèle à $u(D_{m,p})=D_{u(m),u(p)}$, de même les droites $D_{u(a),u(m)}$ et $D_{u(n),u(p)}$ sont parallèles : le quadrilatère $(u(a),u(m),u(n),u(p))$ est un parallélogramme : on a $\overrightarrow{u(m)u(p)}=\overrightarrow{u(a)u(n)}$.

Comme par la relation de Chasles, (1.21), on a :

$$\overrightarrow{u(a)u(p)}=\overrightarrow{u(a)u(m)}+\overrightarrow{u(m)u(p)},$$

c'est encore :

2.10. $\overrightarrow{u(a)u(p)}=\overrightarrow{u(a)u(m)}+\overrightarrow{u(a)u(n)}$.

Il suffit alors d'appliquer 2.9 pour constater que :

$$f(\overrightarrow{x})=\theta_{u(a)}\circ u(\theta_a^{-1}(\theta_a(m)))=\theta_{u(a)}(u(m))=\overrightarrow{u(a)u(m)},$$

puisque $\overrightarrow{x}=\theta_a(m)$.

De même, on a $f(\overrightarrow{y}) = \overrightarrow{u(a)u(n)}$ et $f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{u(a)u(p)}$, donc l'égalité 2.10 s'écrit encore $f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y})$.

Supposons maintenant $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ dépendants.

D'abord, $f(\overrightarrow{0}) = \theta_{u(a)} \circ u(\theta_a^{-1}(\overrightarrow{0}))$, (voir 2.9), avec $\theta_a^{-1}(\overrightarrow{0}) = a$, donc $f(\overrightarrow{0}) = \theta_{u(a)}(u(a)) = \overrightarrow{u(a)u(a)} = \overrightarrow{0}$.

Si donc $\overrightarrow{x}$ ou $\overrightarrow{y}$ est nul, l'égalité $f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y})$ est vérifiée. On suppose donc $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ non nuls, et comme $\dim(E) \geqslant 2$, on introduit $\overrightarrow{z}$ tel que $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}\}$ soit une famille libre.

Soient alors les points m, n et p tels que $\overrightarrow{x} = \theta_a(m)$, $\overrightarrow{y} = \theta_a(n)$ et $\overrightarrow{z} = \theta_a(p)$. On a a, m et n alignés puisque $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont liés.

Soient enfin r tel que $\overrightarrow{ar} = \theta_a(r) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z}$, et s tel que $\overrightarrow{ns} = \overrightarrow{x}$, (voir figure 2.8.2).

On a $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{ar} - \overrightarrow{ap} = \theta_a(r) - \theta_a(p) = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{z} - \overrightarrow{z} = \overrightarrow{x}$, donc $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{ns} = \overrightarrow{am}$: on a cette fois deux parallélogrammes, (a, m, r, p) d'une part et (p, r, s, n) d'autre part dont les images seront des parallélogrammes car la justification pour des vecteurs indépendants s'applique au cas de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{z}$ indépendants, et de $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$ indépendants aussi, ($\overrightarrow{y}$ proportionnel à $\overrightarrow{x}$). Voir figure 2.8.2.

En utilisant les parallélogrammes images, on a donc :

$$\overrightarrow{u(a)u(m)} = \overrightarrow{u(p)u(r)} = \overrightarrow{u(n)u(s)}.$$

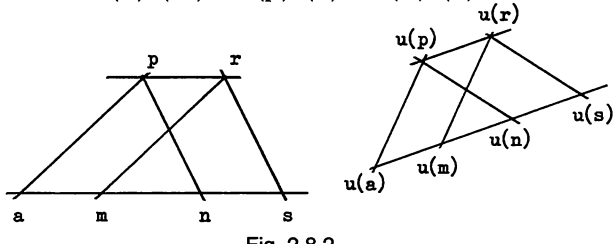


Fig. 2.8.2

Mais alors, en se promenant dans ces parallélogrammes, grâce à Chasles, on a :

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = \overrightarrow{am} + \overrightarrow{an} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{an} = \overrightarrow{ns} + \overrightarrow{an} = \overrightarrow{as},$$

donc, (voir 2.9 pour la définition de f) :

$$f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{u(a)u(s)} = \overrightarrow{u(a)u(n)} + \overrightarrow{u(n)u(s)} = \overrightarrow{u(a)u(n)} + \overrightarrow{u(a)u(m)}$$
$$= f(\overrightarrow{y}) + f(\overrightarrow{x}) \qquad \text{et c'est gagné : } f \textit{ est additive!}$$

Il nous faut maintenant justifier la semi-linéarité, et considérer les scalaires. Mais je vous dois un aveu : c'est le jour de Noël, il y a les vins à choisir, la famille à recevoir, alors nous verrons cela demain.

Bonjour. J'espère que vous êtes frais et dispos, prêts à attaquer cette semi-linéarité de f, et d'abord à définir l'isomorphisme σ de corps.

Si on analyse la situation, les hypothèses portent sur des droites affines, qui sont en bijection avec le corps K, et on cherche une bijection de K sur lui-même... La démarche s'impose.

Si on note $D_{a,\vec{x}}$ la droite affine de A passant par a, de vecteur directeur $\vec{x}$ non nul, (voir 1.65), pour tout λ de K, il existe un seul q de $D_{a,\vec{x}}$ tel que $\overrightarrow{aq} = \lambda\overrightarrow{x}$, c'est $q = \theta_a^{-1}(\lambda\overrightarrow{x})$, ce point q a une image $u(q)$ qui est sur la droite $u(D)$.

En posant $p = \theta_a^{-1}(\overrightarrow{x}), p \in D, p \neq a$, (car $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0}$) donc $u(p) \neq u(a)$, (u induit une bijection de D sur $u(D)$, ne l'oublions pas), donc $u(D)$ est la droite affine de A', passant par $u(a)$, et il semble indiqué de prendre $\overrightarrow{u(a)u(p)}$ pour vecteur directeur de $u(D)$.

Dans ce cas, à $u(q)$ on associe un et un seul scalaire λ' dans K tel que $\overrightarrow{u(a)u(q)} = \lambda'\overrightarrow{u(a)u(p)}$. Avec le point a fixé au départ, et f définie en 2.9, on a encore :

2.11. $\overrightarrow{u(a)u(p)} = \theta_{u(a)}\big(u(\theta_a^{-1}(\overrightarrow{x}))\big) = f(\overrightarrow{x})$, et de même : $\overrightarrow{u(a)u(q)} = f(\lambda\overrightarrow{x})$, si bien que finalement, au scalaire λ de K on associe un scalaire λ' tel que $f(\lambda\overrightarrow{x}) = \lambda' f(\overrightarrow{x})$. Comme ce procédé dépend du choix de $\overrightarrow{x}$, on note $\sigma_{\overrightarrow{x}}$ cette application de K dans K définie par :

2.12. $f(\lambda\overrightarrow{x}) = \sigma_{\overrightarrow{x}}(\lambda) f(\overrightarrow{x})$,

et on va vérifier que $\sigma_{\overrightarrow{x}}$ est une bijection, indépendante de $\overrightarrow{x}$, semi-linéaire.

Comme $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u(a)u(p)}$, dirige $u(D)$, image bijective de D, (de vecteur directeur $\overrightarrow{x}$) par u, pour tout λ' de K, il existe un et un seul q' de $u(D)$ tel que $\overrightarrow{u(a)q'} = \lambda' f(\overrightarrow{x})$, et q' admet un et un seul antécédent q sur D, lui-même associé à un unique λ de K tel que $\overrightarrow{aq} = \lambda\overrightarrow{x}$.

On a finalement $\overrightarrow{u(a)q'} = \overrightarrow{u(a)u(q)} = \lambda' f(\overrightarrow{x})$, d'où l'existence d'un et un seul λ de K tel que $\lambda' f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{u(a)u(q)} = f(\lambda\overrightarrow{x})$, (voir 2.11), **ce qui justifie le *côté bijectif*** de $\sigma_{\overrightarrow{x}}$ définie par 2.12.

Voyons maintenant l'indépendance de $\sigma_{\overrightarrow{x}}$ par rapport au choix de $\overrightarrow{x}$ non nul, en commençant par choisir $\overrightarrow{y}$ indépendant de $\overrightarrow{x}$.

En introduisant $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, on a $\overrightarrow{z} \neq \overrightarrow{0}$, ($\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\}$ libre), et on se retrouve à la tête de trois bijections $\sigma_{\overrightarrow{x}}$, $\sigma_{\overrightarrow{y}}$ et $\sigma_{\overrightarrow{z}}$ de K dans K, ce qui permettra de justifier l'égalité de $\sigma_{\overrightarrow{x}}$ et $\sigma_{\overrightarrow{y}}$ car elles seront égales à $\sigma_{\overrightarrow{z}}$.

Il est fréquent en mathématiques de démontrer l'égalité de deux choses en passant par une troisième construite à partir des deux premières. Voyez par exemple le Théorème du prolongement d'une application uniformément continue (Tome 2, Théorème 4.107), ou l'unicité locale d'une solution d'une équation différentielle vérifiant les hypothèses de Cauchy-Lipschitz, (Tome 3, corollaire 18.17).

J'achève cette aparté en remarquant que l'intérêt des justifications rigoureuses en mathématiques consiste en partie dans le dégagement des idées générales, et dans les liens établis entre diverses parties de l'édifice.

Retour à nos moutons.

Pour tout λ de K on a : $f(\lambda\overrightarrow{z}) = \sigma_{\overrightarrow{z}}(\lambda)f(\overrightarrow{z})$ soit encore :

$f(\lambda\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y}) = \sigma_{\overrightarrow{z}}(\lambda)f(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y})$.

Comme f est additive, on a :

$$f(\lambda\overrightarrow{x}) + f(\lambda\overrightarrow{y}) = \sigma_{\overrightarrow{z}}(\lambda)f(\overrightarrow{x}) + \sigma_{\overrightarrow{z}}(\lambda)f(\overrightarrow{y}),$$

ce qui conduit, en utilisant les applications $\sigma_{\overrightarrow{x}}$ et $\sigma_{\overrightarrow{y}}$ définies en 2.12, à l'égalité.

2.13. $\big(\sigma_{\overrightarrow{x}}(\lambda) - \sigma_{\overrightarrow{z}}(\lambda)\big)f(\overrightarrow{x}) = \big(\sigma_{\overrightarrow{z}}(\lambda) - \sigma_{\overrightarrow{y}}(\lambda)\big)f(\overrightarrow{y})$.

Cette relation va fournir $\sigma_{\overrightarrow{x}}(\lambda) = \sigma_{\overrightarrow{z}}(\lambda)$ et $\sigma_{\overrightarrow{z}}(\lambda) = \sigma_{\overrightarrow{y}}(\lambda)$ si on prouve l'indépendance de $f(\overrightarrow{x})$ et de $f(\overrightarrow{y})$.

Comme $f(\overrightarrow{x})$ dirige la droite $u(D_{a,\vec{x}})$ et $f(\overrightarrow{y})$ la droite $u(D_{a,\vec{y}})$, en cas de dépendance ces droites, passant par $u(a)$, de vecteurs directeurs respectifs liés seraient confondues, et u ne serait pas bijective puisque $D_{a,\vec{x}} \neq D_{a,\vec{y}}$.

On a bien $\sigma_{\vec{x}}(\lambda) = \sigma_{\vec{y}}(\lambda)$, pour tout λ de K, si $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\}$ libre.

Si $\{\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\}$ est une famille liée, en choisissant $\overrightarrow{t}$ non nul dans E et indépendant de $\vec{x}$, donc aussi de $\overrightarrow{y}$, (possible car $\dim(E) \geqslant 2$), on a $\sigma_{\overrightarrow{x}} = \sigma_{\overrightarrow{t}}$ et $\sigma_{\overrightarrow{t}} = \sigma_{\overrightarrow{y}}$ d'où en fait $\sigma_{\overrightarrow{x}} = \sigma_{\overrightarrow{y}}$ et **finalement il y a indépendance de $\sigma_{\overrightarrow{x}}$ par rapport au choix de $\overrightarrow{x}$.**

On note donc σ cette bijection de K dans K, définie par la condition :

2.14. $\forall \lambda \in K, \forall \overrightarrow{x} \in E - \{\overrightarrow{0}\}, f(\lambda \overrightarrow{x}) = \sigma(\lambda) f(\overrightarrow{x})$,
(où f est définie en 2.9, et... dépend quand même de a, pour l'instant).

On a enfin σ isomorphisme de corps. En effet, f étant additive,

$$f\big((\lambda+\mu)\overrightarrow{x}\big) = f(\lambda\overrightarrow{x}) + f(\mu\overrightarrow{x}), \text{ d'où :}$$
$$\sigma(\lambda+\mu) f(\overrightarrow{x}) = \sigma(\lambda) f(\overrightarrow{x}) + \sigma(\mu) f(\overrightarrow{x}),$$

et la non-nullité de $f(\overrightarrow{x})$, (vecteur directeur d'une droite image, ne l'oublions pas), donne $\sigma(\lambda+\mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$.

De même, en utilisant 2.14, on a :

$$f(\lambda(\mu\overrightarrow{x})) = \sigma(\lambda) f(\mu\overrightarrow{x}) = \sigma(\lambda)\big(\sigma(\mu) f(\overrightarrow{x})\big)$$
$$= \sigma(\lambda)\sigma(\mu) f(\overrightarrow{x}),$$

mais c'est aussi $f\big((\lambda\mu)\overrightarrow{x}\big) = \sigma(\lambda\mu) f(\overrightarrow{x})$, d'où là encore, $\big(f(\overrightarrow{x}) \neq \overrightarrow{0}\big)$, $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$, et finalement σ est un isomorphisme de corps. Puis $f = \theta_{u(a)} \circ u \circ \theta_a^{-1}$ étant additive et vérifiant 2.14 est bien semi-linéaire, (car $f(\lambda\overrightarrow{0}) = f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, a été vu dans la justification de f additive, donc $\forall \lambda \in K, f(\lambda\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0} = \sigma(\lambda)\overrightarrow{0} = \sigma(\lambda) f(\overrightarrow{0})$).

Il en résulte que $u = \theta_{u(a)}^{-1} \circ f \circ \theta_a$ est... semi-affine, à ceci près, que l'on n'a pas justifié l'indépendance de σ par rapport au choix de a, car pour appliquer le Théorème 2.7, il faut partir d'une application semi-linéaire ou semi-affine donnée, donc disposer d'un isomorphisme σ de K sur K, alors que nous, nous avons construit σ en 2.14, grâce à f définie en 2.9, mais avec un a fixé, donc f dépend de a.

Soient a et b distincts dans A, et $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{ab}$, on va se promener le long de la droite $D = \mathrm{aff}(a,b)$ pour définir σ à partir de $f = \theta_{u(a)} \circ u \circ \theta_a^{-1}$ et τ à partir de $g = \theta_{u(b)} \circ u \circ \theta_b^{-1}$, (voir 2.9 et 2.14).

Pour $\lambda \in K$, soient les points p et q de D tels que $\overrightarrow{ap} = \lambda\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{bq} = \lambda\overrightarrow{ba}$. On a :

$$f(\overrightarrow{ap}) = \overrightarrow{u(a)u(p)} = \sigma(\lambda) f(\overrightarrow{ab}) = \sigma(\lambda)\overrightarrow{u(a)u(b)}$$

et

$$g(\overrightarrow{bq}) = \overrightarrow{u(b)u(q)} = \tau(\lambda) g(\overrightarrow{ba}) = \tau(\lambda)\overrightarrow{u(b)u(a)},$$

d'où, avec la relation de Chasles, comme $\overrightarrow{aq} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bq} = (1-\lambda)\overrightarrow{ab}$, et aussi $\overrightarrow{u(a)u(q)} = \overrightarrow{u(a)u(b)} + \overrightarrow{u(b)u(q)}$, on obtient $f(\overrightarrow{aq}) = \sigma(1-\lambda)f(\overrightarrow{ab}) = \sigma(1-\lambda)\overrightarrow{u(a)u(b)} = \overrightarrow{u(a)u(q)}$, d'où

$$\sigma(1-\lambda)\overrightarrow{u(a)u(b)} = \sigma(1)\overrightarrow{u(a)u(b)} + \tau(\lambda)\overrightarrow{u(b)u(a)}.$$

Comme σ est un isomorphisme de corps, et que u injective donne $\overrightarrow{u(a)u(b)} \neq \overrightarrow{0}$, on a finalement $\sigma(1) - \sigma(\lambda) = \sigma(1) - \tau(\lambda)$ d'où $\sigma = \tau$.

La justification de ce Théorème est enfin achevée. ■

Nous allons maintenant procéder à des modifications en renforçant de ci de là les hypothèses.

Déjà, dans le cas réel une simplification existe car σ est forcément l'identité.

THÉORÈME 2.15. — *Le corps des réels n'admet pas d'autre automorphisme de corps que l'identité.*

C'est lié à la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, donc de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, un et zéro : cela repose donc sur l'ensemble vide ! Est-ce bien sérieux?

Si σ est un automorphisme de corps, on aura $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(1) = 1$, (images des éléments neutres des lois, voir Tome 1, 4.15), d'où par addition, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sigma(n) = \sigma(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ fois}}) = \underbrace{\sigma(1)+\ldots+\sigma(1)}_{n \text{ fois}} = \underbrace{1+\ldots+1}_{n \text{ fois}} = n\,;$$

puis, (toujours σ morphisme de groupe additif), si $n \in \mathbb{N}$ on aura $\sigma(n-n) = \sigma(0) = 0 = \sigma(n) + \sigma(-n)$ donc $\sigma(-n) = -\sigma(n) = -n$ et finalement $\sigma(x) = x$ pour tout x de $\mathbb{Z}$.

Si $q \in \mathbb{N}^*$, $q \cdot \dfrac{1}{q} = 1$, donc $1 = \sigma\left(q \cdot \dfrac{1}{q}\right) = q\sigma\left(\dfrac{1}{q}\right)$ et on obtient $\sigma\left(\dfrac{1}{q}\right) = \dfrac{1}{q}$, d'où l'on déduit que pour tout rationnel $r = \dfrac{p}{q}$ avec q dans $\mathbb{N}^*$, on aura $\sigma(r) = p \cdot \sigma\left(\dfrac{1}{q}\right)$, ($\sigma$ morphisme additif), soit encore $\sigma(r) = p \cdot \dfrac{1}{q} = r$: σ agit comme l'identité sur $\mathbb{Q}$.

Pour passer de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ on va utiliser la structure de corps ordonné sur $\mathbb{R}$, et le fait que tout réel est limite de deux suites de rationnels, l'une croissante, l'autre décroissante, (voir Tome 2, Chapitre 5).

Commençons par justifier que σ est croissante car si $x \geqslant 0$, $x = (\sqrt{x})^2$ donc $\sigma(x) = (\sigma(\sqrt{x}))^2$ est positif. Mais alors si $x \leqslant y$, c'est-à-dire si $y - x \geqslant 0$ on aura $\sigma(y - x) \geqslant 0$ d'où, (σ additive), $\sigma(x) \leqslant \sigma(y)$.

Si alors x est réel, avec deux suites monotones de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_n \leqslant x \leqslant s_n \leqslant \ldots \leqslant s_0$ et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n - r_n = 0$, on aura par monotonie, $r_0 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_n \leqslant \sigma(x) \leqslant s_n \leqslant \ldots \leqslant s_0$ puisque $\sigma(r_i) = r_i$ et $\sigma(s_i) = s_i$.

Mais alors $\sigma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = x$, (voir Tome 2, chapitre 5 pour la construction de $\mathbb{R}$).

On obtient finalement $\sigma(x) = x$ pour tout x réel. ■

COROLLAIRE 2.16. — *Soient deux espaces affines réels A et A', avec $\dim(A) \geqslant 2$, et u une application de A dans A' qui envoie bijectivement chaque droite de A sur une droite de A', et qui conserve le parallélisme. Alors u est affine injective.*

C'est une conséquence immédiate des Théorèmes 2.8 et 2.15. ■

3. Renforcement du Théorème

On se propose de faire le lien entre le caractère semi-affine d'une application et le fait qu'elle préserve l'alignement, c'est-à-dire que l'image de trois points alignés soit formée de trois points alignés. Ceci n'a de sens que si les droites de l'espace affine ont au moins trois points, c'est-à-dire pour un corps $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, hypothèse faite tout au long de ce paragraphe.

THÉORÈME 2.17. — *Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $n+1$ points de l'espace affine A, sur un corps $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On a $m \in \mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ si et seulement si il existe a dans $\mathrm{aff}(a_0, a_1)$ et b dans $\mathrm{aff}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, tels que $m \in \mathrm{aff}(a, b)$.*

On a noté, (en 1.25), $\mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ le sous-espace affine engendré par $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Il est évident que si, avec a dans $\mathrm{aff}(a_0, a_1)$ et b dans $\mathrm{aff}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on a $m \in \mathrm{aff}(a, b)$, comme a et b sont tous deux dans $\mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, a fortiori $m \in \mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Justifions l'autre implication.

Soit m dans $Y = \mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

Si $a_0 \in \mathrm{aff}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, on peut prendre $a = a_0$ dans $\mathrm{aff}(a_0, a_1)$, et comme alors $\mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{aff}(a_1, \ldots, a_n)$, le choix de $b = m$ dans $\mathrm{aff}(a_1, \ldots, a_n)$ s'impose et conduit à $m = b \in \mathrm{aff}(a, b)$.

Supposons maintenant que $a_0 \notin \text{aff}(a_1, \ldots, a_n) = Z$. C'est que Z est un hyperplan de $Y = \text{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$. Si $m = a_0$, on peut choisir $a = m$ dans $\text{aff}(a_0, a_1)$, b quelconque dans $\text{aff}(a_1, \ldots, a_n)$ et conclure $m = a \in \text{aff}(a, b)$. On suppose donc $m \neq a_0$ donc $D = \text{aff}(a_0, m)$ est une droite qui est soit sécante avec l'hyperplan Z, (figure 2.17.1) soit parallèle, (figure 2.17.2) car si $\overrightarrow{a_0 m} \notin \text{direction}(Z)$, on a, avec E direction de Y, $E = K\overrightarrow{a_0 m} \oplus \text{direction}(Z)$ et dans ce cas $D \cap Z$ est un singleton, (Corollaire 1.43). Si $D \cap Z$ non vide, soit b tel que $\{b\} = D \cap Z$, on a b dans $Z = \text{aff}(a_1 \ldots, a_n)$, on choisit $a = a_0$ dans $\text{aff}(a_0, a_1)$, et comme $b \in D = \text{aff}(a_0, m)$, avec $b \neq a_0$, ($a_0 \notin Z$ et $b \in Z$), les points affinements libres a_0 et b engendrent D qui contient m donc $m \in \text{aff}(a_0, b) = \text{aff}(a, b)$, (figure 2.17.1).

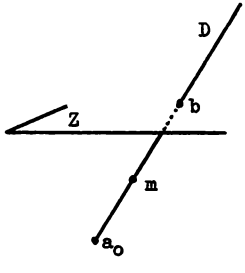


Fig. 2.17.1

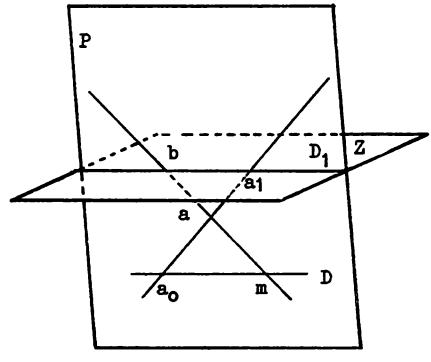


Fig. 2.17.2

Si $D \cap Z = \varnothing$, (figure 2.17.2), on prend a_1 dans Z. Comme $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, (il était temps que cela serve, c'est quasiment fini), la droite $\Delta = \text{aff}(a_0, a_1)$ contient un point a différent de a_0 et de a_1. En particulier a n'est pas dans Z, sinon $\text{aff}(a, a_1) = \Delta \subset Z$ et on aurait a_0 dans Z.

Dans le plan $P = \text{aff}(a_0, m, a_1)$, (plan car $a_1 \notin D$), la droite $\text{aff}(a, m)$, sécante avec D, l'est aussi avec D_1, parallèle à D passant par a_1, soit b le point d'intersection de D_1 et de $\text{aff}(a, m)$.

Mais comme $a_1 \in Z$, et que $\overrightarrow{a_0 m}$ est dans la direction de Z, $(D//Z)$, on a $D_1 \subset Z$, donc $b \in Z$, d'où $b \neq a$ car $a \notin Z$, et comme m, a et b sont alignés, c'est que m est dans $\text{aff}(a, b)$. ■

COROLLAIRE 2.18. — *Soient A et A' deux espaces affines sur un corps $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et u une application de A dans A' telle que :*

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad u(\text{aff}(a, b)) \subset \text{aff}(u(a), u(b)),$$

(resp. $u(\text{aff}(a, b)) \supset \text{aff}(u(a), u(b))$, ou $=$).

Alors, pour tout ensemble $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ *de points de* A, *on a* $u(\mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n)) \subset \mathrm{aff}(u(a_0), \ldots, u(a_n))$, *(resp.* $\supset$, *ou* $=$*).*

Ce résultat se justifie par récurrence sur $n \geqslant 1$, en utilisant le Théorème 2.17 pour passer de n à $n+1$. En effet, c'est vrai si $n = 1$, (c'est l'hypothèse). On suppose l'inclusion $u(\mathrm{aff}(a_0, \ldots, a_n)) \subset \mathrm{aff}(u(a_0), \ldots, u(a_n))$ vérifiée.

Soit $m \in \mathrm{aff}(a_0, \ldots, a_{n+1})$, d'après 2.17 on a $m \in \mathrm{aff}(a, b)$ avec $a \in \mathrm{aff}(a_0, a_1)$ et $b \in \mathrm{aff}(a_1, \ldots, a_{n+1})$, mais alors :
$u(m) \in u(\mathrm{aff}(a, b)) \subset \mathrm{aff}(u(a), u(b))$,
avec $u(a) \in u(\mathrm{aff}(a_0, a_1)) \subset \mathrm{aff}(u(a_0), u(a_1))$
et $u(b) \in u(\mathrm{aff}(a_1, \ldots, a_{n+1})) \subset \mathrm{aff}(u(a_1), \ldots, u(a_{n+1}))$,
par hypothèse de récurrence et finalement, les deux points $u(a)$ et $u(b)$,
étant a fortiori dans le sous-espace $\mathrm{aff}(u(a_0), u(a_1), \ldots, u(a_{n+1}))$,
on a finalement $u(m) \in \mathrm{aff}(u(a), u(b)) \subset \mathrm{aff}(u(a_0), u(a_1), \ldots, u(a_{n+1}))$,
d'où l'inclusion voulue au rang $n + 1$.
On procède de même pour l'autre inclusion d'où le résultat pour l'égalité.■

COROLLAIRE 2.19. — *Soit* A *un espace affine sur un corps* $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. *Une partie* X *non vide de* A *est un sous-espace affine si et seulement si* X *contient toute droite engendrée par deux éléments de* X.

On a, sans restriction sur K, l'implication directe : si X est sous-espace affine de A, et si a et b sont distincts dans X, la droite affine engendrée par a et b, ensemble des barycentres de a et b est dans X, stable par passage aux barycentres.

Réciproquement, si X vérifie la propriété, on a X stable par passage aux barycentres. On doit prouver que si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont dans X on a $\mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n) \subset X$, ce qui se justifie par récurrence sur n, en supposant $\mathrm{card}(X) \geqslant 2$, (si $\mathrm{card}(X) = 1$, X est un singleton, sous-espace affine).

Pour $n = 1$, on a $\mathrm{aff}(a_0, a_1) \subset X$ si a_0 et a_1 sont distincts dans X.

On suppose le résultat vrai à l'ordre $n - 1$, et si $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont dans X, d'après 2.17, pour $m \in \mathrm{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, on peut trouver a dans $\mathrm{aff}(a_0, a_1)$ et b dans $\mathrm{aff}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donc a et b dans X vu l'hypothèse de récurrence, tels que $m \in \mathrm{aff}(a, b) \subset X$ vu l'hypothèse : c'est gagné! ■

REMARQUE 2.20. – Si $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, toute paire de points est une droite affine, donc toute partie X de A espace affine sur K vérifie les hypothèses, mais si $\mathrm{card}(X) = 3$ ou 5, 6, 7, 9... ce n'est pas un sous-espace affine, car un espace affine de dimension n sur K aurait 2^n éléments.

Nous voici arrivés au Théorème fondamental des espaces affines.

THÉORÈME 2.21. — ***Théorème fondamental.*** *Soient deux espaces affines* A *et* A' *sur un corps* $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, *et* u *une application de* A *dans* A' *telle*

que $u(A)$ engendre un sous-espace affine de dimension deux au moins de A'. Si, pour tout (a,b) de A^2, $u(\mathrm{aff}(a,b)) = \mathrm{aff}(u(a),u(b))$, alors il existe un σ automorphisme de K tel que u soit semi-affine pour σ.

REMARQUE 2.22. — Si $K = \mathbb{R}$, la conclusion devient : *alors u est affine*, (puisque $\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est le seul automorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, voir Théorème 2.15).

Nous allons procéder par étapes, *en supposant d'abord u injective.*

LEMME 2.23. — *Soit u injective de A dans A' telle que $\forall (a,b) \in A^2$, $u(\mathrm{aff}(a,b)) = \mathrm{aff}(u(a),u(b))$. Alors u transforme tout système de points affinement libre en un système affinement libre.*

On peut appliquer le Corollaire 2.18.

Soit une famille $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de points de A, affinement libre. Si la famille des images, $\{u(a_1), \ldots, u(a_n)\}$ n'est pas affinement libre, l'un des points est dans l'espace affine engendré par les autres : par exemple $u(a_n) \in \mathrm{aff}(u(a_1), \ldots, u(a_{n-1}))$, soit $u(a_n) \in u(\mathrm{aff}(a_1, \ldots, a_{n-1}))$ d'après le Corollaire 2.18, donc il existe b dans $\mathrm{aff}(a_1, \ldots, a_{n-1})$ tel que $u(a_n) = u(b)$.

Comme u est injective, on devrait avoir $a_n = b \in \mathrm{aff}(a_1, \ldots, a_{n-1})$, ce qui contredit l'hypothèse $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ famille affinement libre.

Donc l'image de toute famille finie de points affinement libres est formée de points affinement libres. Le passage aux familles quelconques s'en déduit facilement, (voir remarque 1.38), d'où le lemme. ∎

Justifions le théorème, avec l'hypothèse u injective. On va essayer de se ramener au Théorème 2.8. D'abord $\dim(A) \geqslant 2$, sinon A est une droite ou un point, si $A = \mathrm{aff}(a,b)$ est une droite, $u(A) = u(\mathrm{aff}(a,b)) = \mathrm{aff}(u(a),u(b))$ est une droite et aura bien du mal à engendrer un sous-espace de A' de dimension deux au moins. Et encore, cela n'est rien par rapport au cas où $u(A)$ serait un point. C'est pire que la grenouille de La Fontaine, qui voulait se faire plus grosse que le bœuf!

Revenons à nos moutons, (c'est champêtre, non?) : on a $\dim(A) \geqslant 2$.

Si $D = \mathrm{aff}(a,b)$ est une droite, $u(D) = \mathrm{aff}(u(a),u(b))$ par hypothèse, avec $u(a) \neq u(b)$, (u est supposée injective) donc $u(D)$ est une droite et u induit bien une bijection de toute droite D de A sur son image $u(D)$.

Enfin u conserve le parallélisme, car soit D et Δ deux droites parallèles, et les points a, b, c et d tels que $D = \mathrm{aff}(a,b)$, $c \in \Delta$ et $\overrightarrow{cd} = \overrightarrow{ab}$, (voir figure 2.21.1). On veut prouver que $u(D)$ et $u(\Delta)$ sont des droites parallèles ce qui est vrai si $D = \Delta$. On suppose $D \neq \Delta$, donc $c \notin D$, les points a, b et c

sont affinement libres, leurs images $u(a)$, $u(b)$ et $u(c)$ le sont aussi, (lemme 2.23).

Mais comme $c \in \mathrm{aff}(a,b,c)$ et que $\overrightarrow{cd} = \overrightarrow{ab}$, vecteur qui engendre D, est dans la direction du plan $\mathrm{aff}(a,b,c)$, ce plan contient D et Δ donc les droites $u(D)$ et $u(\Delta)$ sont dans le plan, $\mathrm{aff}\big(u(a),u(b),u(c)\big) = u\big(\mathrm{aff}(a,b,c)\big)$, (corollaire 2.18).

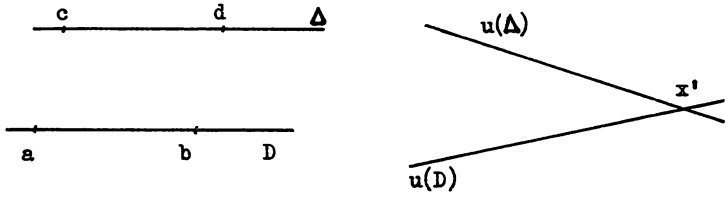


Fig. 2.21.1

Dans un plan, deux droites sont sécantes ou parallèles, (corollaire 1.45) or si $u(D) \cap u(\Delta) \neq \varnothing$, avec x' dans l'intersection, il existe x_1 et x_2 sur D et Δ respectivement tels que $u(x_1) = x' = u(x_2)$ d'où $x_1 = x_2$, (u injective) ce qui est absurde puisque D et Δ sont strictement parallèles, distinctes.

On a donc $u(D)//u(\Delta)$, les hypothèses du Théorème 2.8. sont vérifiées et u est bien semi-affine.

Il nous faut maintenant justifier le théorème *sans l'hypothèse u injective.*

LEMME 2.24. — *Avec les hypothèses et notations du Théorème 2.21, pour tout x' de A', $u^{-1}(\{x'\})$ est un sous-espace affine de A.*

(Rappelons que si un sous-espace vectoriel ne peut pas être vide car, en tant que sous-espace vectoriel il admet un élément neutre, les sous-espaces affines eux peuvent être vides.)

Si $\mathrm{card}\big(u^{-1}(\{x'\})\big) = 0$ ou 1, on a un sous-espace affine.

Supposons $\mathrm{card}\big(u^{-1}(\{x'\})\big) > 1$, soient a et b distincts dans $u^{-1}(\{x'\})$, pour tout point m de la droite $D = \mathrm{aff}(a,b)$, on a :

$$u(m) \in u\big(\mathrm{aff}(a,b)\big) = \mathrm{aff}\big(u(a),u(b)\big) = \mathrm{aff}(x') = \{x'\},$$

d'après le corollaire 2.19 la partie $u^{-1}(\{x'\})$ est bien un sous-espace affine de A. ■

LEMME 2.25. — *Avec les hypothèses et notations du Théorème 2.21, si pour a' et b' de A' les sous-espaces affines $u^{-1}(\{a'\})$ et $u^{-1}(\{b'\})$ sont non vides, ils sont strictement parallèles.*

On va justifier que F, direction de $u^{-1}(\{a'\})$ est contenu dans la direction de $u^{-1}(\{b'\})$. La symétrie en a' et b' donnera l'égalité des directions.

Soit donc $a \in u^{-1}(\{a'\})$, $\overrightarrow{v} \in F$: le point a_1 tel que $\overrightarrow{aa_1} = \overrightarrow{v}$ est alors dans $u^{-1}(\{a'\})$, (figure 2.21.2).

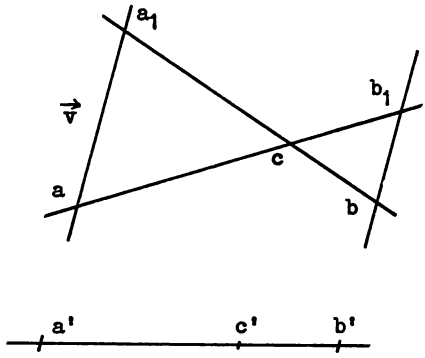


Fig. 2.21.2

Soit alors $b \in u^{-1}(\{b'\})$. On suppose $b' \neq a'$, sinon il n'y a rien à justifier, donc $b \neq a_1$, et sur la droite $\mathrm{aff}(a_1, b)$, il existe au moins un point c distinct de a_1 et de b, (car $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Comme $c \in \mathrm{aff}(a_1, b)$ on a $u(c) \in u\big(\mathrm{aff}(a_1, b)\big)$ donc $u(c) \in \mathrm{aff}\big(u(a_1), u(b)\big) = \mathrm{aff}(a', b')$, vu les hypothèses sur u. On note c' le point $u(c)$ qui est donc sur la droite $\mathrm{aff}(a', b')$ de A', (voir figure 2.21.2).

Si $c' = a'$, on aurait a_1 et c dans $u^{-1}(\{a'\})$, sous-espace affine, donc également b, point de la droite $\mathrm{aff}(a_1, c)$ serait dans $u^{-1}(\{a'\})$ et alors b' serait a' : exclu. On a donc $c' \neq a'$, et (pas de jaloux) $b' \neq c'$.

Puis, $c' \neq a'$ donne $c \neq a$, la droite $\mathrm{aff}(a, c)$ existe, son image par u est

$$u\big(\mathrm{aff}(a, c)\big) = \mathrm{aff}\big(u(a), u(c)\big) = \mathrm{aff}(a', c'),$$

c'est une droite qui contient b', il existe donc b_1 dans $\mathrm{aff}(a, c)$ tel que $u(b_1) = b'$. De plus $b_1 = b$ conduirait à $b_1 = b$, point de $\mathrm{aff}(a, c)$, d'où $b \in \mathrm{aff}(a, c) \cap \mathrm{aff}(a_1, c) = \{c\}$, (les droites $\mathrm{aff}(a, c)$ et $\mathrm{aff}(a_1, c)$, non disjointes sont sécantes ou confondues, or $c \notin \mathrm{aff}(a_1, a)$ vu les images par u, le cas confondues est exclu), mais $b = c$ est exclu au départ.

Mais les points b et b_1 sont dans le plan $\mathrm{aff}(a, a_1, c)$ et dans ce plan, les droites $\mathrm{aff}(a, a_1)$ et $\mathrm{aff}(b, b_1)$ sont non sécantes, car un x dans $\mathrm{aff}(a, a_1)$ et dans $\mathrm{aff}(b, b_1)$ conduirait à :

$$u(x) \in u\big(\mathrm{aff}(a, a_1)\big) = \mathrm{aff}\big(u(a), u(a_1)\big) = \mathrm{aff}(a') = \{a'\},$$

et à :

$$u(x) \in u\big(\mathrm{aff}(b, b_1)\big) = \mathrm{aff}\big(u(b), u(b_1)\big) = \mathrm{aff}(b') = \{b'\}$$

d'où $a' = b'$: exclu.

C'est donc que $\mathrm{aff}(a, a_1)$ et $\mathrm{aff}(b, b_1)$ sont deux droites parallèles, d'où l'existence d'un scalaire λ tel que $\overrightarrow{bb_1} = \lambda\overrightarrow{aa_1} = \lambda\overrightarrow{v}$, avec $\lambda \neq 0$ car $b \neq b_1$ et comme b et b_1 sont dans $u^{-1}(b')$, finalement $\overrightarrow{v}$ est dans la direction de $u^{-1}(b')$, d'où le lemme. ■

Le Théorème 2.21 est justifié dans le cas de u injective. Dans le cas de u non injective, l'idée est de mettre «dans le même sac» les points de A donnant même image, et de travailler... «sur les sacs» : c'est le mécanisme du passage au quotient pour une relation d'équivalence qui est là, et le lemme 2.25 nous fournit le sous-espace vectoriel de E, direction de A, qui va nous fournir un espace affine quotient, structure que nous allons étudier.

2.26. *Espace affine quotient*

Soit A un espace affine de direction E et F un sous-espace vectoriel de E. On définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur A par :

2.27 $\forall (a, b) \in A^2, \quad (a\,\mathcal{R}\,b) \iff \overrightarrow{ab} \in F).$

C'est *réflexif* car $\overrightarrow{aa} = \overrightarrow{0} \in F$, *symétrique* puisque $\overrightarrow{ba} = -\overrightarrow{ab}$ est dans F si $\overrightarrow{ab}$ y est, et *transitif*, F étant stable par addition.

On considère l'ensemble quotient $B = A/\mathcal{R}$, il est muni d'une structure d'espace affine de direction l'espace vectoriel E/F.

En effet, avec les notations du Théorème 1.5, soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ dans $A/\mathcal{R}$, représentés d'une part par x et y, mais aussi par x' et y'.

On a $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{xx'} + \overrightarrow{x'y'} + \overrightarrow{y'y}$, avec $\overrightarrow{xx'}$ et $\overrightarrow{y'y}$ dans F, donc les vecteurs $\overrightarrow{xy}$ et $\overrightarrow{x'y'}$ de E ont la même image dans E/F : on définit une application θ de $B \times B$ dans E/F par :

2.28. $\theta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) =$ classe de $\overrightarrow{xy}$ dans E/F, avec $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$,

puisque ceci est indépendant du choix de x dans $\mathcal{X}$ et de y dans $\mathcal{Y}$.

On a alors une structure affine sur $B = A/\mathcal{R}$, (voir Théorème 1.25). En effet, soit $\mathcal{Z}$ de B représenté par z, on aura, en notant $\mathrm{cl}(\overrightarrow{xy})$ la classe de $\overrightarrow{xy}$ dans E/F,

$$\theta(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) + \theta(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = \mathrm{cl}(\overrightarrow{xy}) + \mathrm{cl}(\overrightarrow{yz}) = \mathrm{cl}(\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz})$$

d'après les propriétés d'espace vectoriel quotient, voir Tome 2, chapitre 6, §4. Par Chasles, on a encore :

$$\theta(\mathcal{X},\mathcal{Y}) + \theta(\mathcal{Y},\mathcal{Z}) = \mathrm{cl}(\overrightarrow{xz}) = \theta(\mathcal{X},\mathcal{Z}).$$

Puis, si on se donne $\mathcal{X}$ dans $A/\mathcal{R}$, représenté par x, et $\overrightarrow{V}$ de E/F représenté par $\overrightarrow{v}$ vecteur de E, avec $y = x + \overrightarrow{v}$ dans l'espace affine A et $\mathcal{Y}$ classe de y, on aura $\theta(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathrm{cl}(\overrightarrow{xy}) = \mathrm{cl}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{V}$, et si $\mathcal{Z}$ représenté par z est un autre élément de B vérifiant aussi $\theta(\mathcal{X},\mathcal{Z}) = \overrightarrow{V}$, c'est que $\overrightarrow{xz}$ et $\overrightarrow{xy}$ ont même classe d'équivalence dans E/F, donc que $\overrightarrow{xy} - \overrightarrow{xz} = \overrightarrow{zy} \in F$; on a $y\,\mathcal{R}\,z$ d'où $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}$: on a trouvé un et un seul élément $\mathcal{Y}$ de $B = A/\mathcal{R}$ tel que $\theta(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \overrightarrow{V}$.

Les deux conditions du Théorème 1.5 sont vérifiées, donc $B = A/\mathcal{R}$ est espace affine de direction l'espace vectoriel quotient E/F.

De plus, l'application canonique π de A sur $B = A/\mathcal{R}$ définie par :

2.29. $\forall x \in A,\ \pi(x) = \mathcal{X} =$ la classe de x dans $A/\mathcal{R}$ *est affine.*

En effet, avec les notations du Théorème 1.52, on a :

$$\overrightarrow{\pi(x)\pi(y)} = \overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}} = \theta(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = \mathrm{cl}(\overrightarrow{xy}), \quad \text{(voir 2.28)},$$

et ceci dépend linéairement de $\overrightarrow{xy}$ d'après la structure d'espace vectoriel quotient.

On peut maintenant terminer la justification du Théorème 2.21 avec u a priori non injective.

Soit a dans A, $a' = u(a)$, alors $u^{-1}(\{a'\})$ est non vide, c'est un sous-espace affine, (lemme 2.24) de direction F, qui est aussi direction de tous les sous-espaces affines $u^{-1}(\{x'\})$ non vides, avec $x' \in A'$, (lemme 2.25).

Soit B l'espace affine quotient de direction E/F, (E direction de A) associé, (voir 2.26), on définit une application v de B dans A' par :

2.30. $v(\mathcal{X}) = u(x)$ si $x \in \mathcal{X}$, pour $\mathcal{X}$ dans B.

Avec la projection canonique, (voir 2.29.), de A sur B, on a $u = v \circ \pi$.

Or les hypothèses du Théorème 2.21 sont vérifiées pour v allant de B dans A', avec cette fois v injective.

En effet $v(B) = u(A)$ engendre un sous-espace affine de dimension deux au moins de A'.

On doit vérifier que $v\big(\mathrm{aff}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\big) = \mathrm{aff}\big(v(\mathcal{X}),v(\mathcal{Y})\big)$ pour $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ de $B = A/\mathcal{R}$ représentés par x et y.

Tout d'abord, si $\mathcal{Z}$ est représenté par z, on a :

2.31. $\mathcal{Z} \in \mathrm{aff}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \iff z \in \mathrm{aff}(x,y)$, car $\mathcal{Z} \in \mathrm{aff}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \iff \exists \lambda \in K$ tel que $\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Z}} = \lambda\overrightarrow{\mathcal{X}\mathcal{Y}}$, soit encore d'après 2.28, $\iff \overrightarrow{xz} = \lambda\overrightarrow{xy}$, ce qui est bien la traduction de z dans $\mathrm{aff}(x,y)$.

Mais alors, si $\mathcal{Z} \in \mathrm{aff}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$, on aura, avec z dans $\mathcal{Z}$:
$v(\mathcal{Z}) = u(z) \in u\big(\mathrm{aff}(x,y)\big) = \mathrm{aff}\big(u(x),u(y)\big)$ par hypothèse, soit encore $v(\mathcal{Z}) \in \mathrm{aff}\big(v(\mathcal{X}),v(\mathcal{Y})\big)$ d'où l'inclusion $v\big(\mathrm{aff}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\big) \subset \mathrm{aff}\big(v(\mathcal{X}),v(\mathcal{Y})\big)$.

Puis, si dans l'espace affine A', z' est dans $\mathrm{aff}\big(v(\mathcal{X}),v(\mathcal{Y})\big)$, avec λ scalaire de K tel que $\overrightarrow{v(\mathcal{X})z'} = \lambda\overrightarrow{v(\mathcal{X})v(\mathcal{Y})}$, c'est encore, vu la définition de v, (voir 2.30), $\overrightarrow{u(x)z'} = \lambda\overrightarrow{u(x)u(y)}$, ce qui traduit l'appartenance de z' à $\mathrm{aff}\big(u(x),u(y)\big)$ soit $z' \in u\big(\mathrm{aff}(x,y)\big)$, donc il existe z de $\mathrm{aff}(x,y)$ tel que $z' = u(z) = v(\mathrm{cl}(z))$: on a trouvé $\mathcal{Z} = \mathrm{cl}(z)$ dans $\mathrm{aff}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ puisque $z \in \mathrm{aff}(x,y)$, (voir 2.31), tel que $z' = v(\mathcal{Z})$ d'où l'inclusion $\mathrm{aff}\big(v(\mathcal{X}),v(\mathcal{Y})\big) \subset v\big(\mathrm{aff}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\big)$ et l'égalité.

Enfin v est injective, car $v(\mathcal{X}) = v(\mathcal{Y})$ se traduit, avec $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$, par l'égalité $u(x) = u(y)$: donc x et y donnant même image par u on a x et y dans $u^{-1}(\{u(x)\})$, d'après le lemme 2.24 c'est que $\overrightarrow{yx}$ est dans le sous-espace vectoriel F qui définit l'équivalence 2.27. On a $x\,\mathcal{R}\,y$ donc $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

Mais alors la justification du Théorème fondamental, faite dans le cas injectif s'applique à v qui est semi-affine. Comme $u = v \circ \pi$, (voir 2.30), avec π affine, c'est que u est semi-affine. ■

COROLLAIRE 2.32. — *Soient A et A' espaces affines de dimension finie sur un corps $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec $\dim A' \geqslant \dim A \geqslant 2$, et u une surjection de A sur A' telle que trois points alignés distincts aient pour images trois points alignés distincts, alors u est une bijection semi-affine de A sur A', (affine si $K = \mathbb{R}$).*

En effet, soit (a,b) dans A^2.

Si $a = b$, $\mathrm{aff}(a,b) = \{a\}$ et $u\big(\mathrm{aff}(a,b)\big) = \{u(a)\}$, c'est bien $\mathrm{aff}\big(u(a),u(b)\big)$ dans ce cas.

Si $a \neq b$, si $c \in \mathrm{aff}(a,b)$, avec $c \neq a$ et $c \neq b$, d'après l'hypothèse, $u(a)$, $u(b)$ et $u(c)$ sont trois points alignés, (distincts puisqu'en nombre trois) d'où $u(c) \in \mathrm{aff}\big(u(a),u(b)\big)$ et $u\big(\mathrm{aff}(a,b)\big) \subset \mathrm{aff}\big(u(a),u(b)\big)$.

D'après le corollaire 2.18, on a plus généralement :
$u\big(\mathrm{aff}(a_0,a_1,\ldots,a_n)\big) \subset \mathrm{aff}\big(u(a_0),\ldots,u(a_n)\big)$.

On suppose alors que $p' = \dim A' \geqslant p = \dim A$.

Soit $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, un système affinement libre de points de A, complété en $\{a_0, a_1, \ldots, a_n; a_{n+1}, \ldots, a_p\}$ repère affine de A.

Alors
$$A' = u(A), \quad \text{(car } u \text{ surjective)},$$
$$= u\big(\text{aff}(a_0, a_1, \ldots, a_p)\big),$$

d'où $A' \subset \text{aff}\big(u(a_0), \ldots, u(a_p)\big)$: la famille de points $u(a_0), \ldots, u(a_p)$ engendre A' qui est donc de dimension $p' \leqslant p$. Vu l'hypothèse $p' \geqslant p$, c'est que $p' = p$ et que $\{u(a_0), \ldots, u(a_p)\}$ est affinement libre, mais a fortiori $\{u(a_0), \ldots, u(a_n)\}$ est aussi affinement libre.

En faisant cela pour $n = 1$, on en déduit qu'avec $a \neq b$, on aura $u(a) \neq u(b)$ et l'inclusion $u\big(\text{aff}(a, b)\big) \subset \text{aff}\big(u(a), u(b)\big)$ devient une égalité, car avec $x' \in \text{aff}\big(u(a), u(b)\big)$, (qui est une droite) et x de A tel que $u(x) = x'$, (existe car u est surjective), si $x \notin \text{aff}(a, b)$, on aurait a, b et x affinement libres qui devraient avoir des images affinement libres alors que $x' \in \text{aff}\big(u(a), u(b)\big)$. C'est exclu, donc $x \in \text{aff}(a, b)$ et finalement $\text{aff}\big(u(a), u(b)\big) \subset u\big(\text{aff}(a, b)\big)$ d'où l'égalité. On a donc $u(A) = A'$ qui engendre un sous-espace affine de dimension 2 au moins, et $\forall (a, b) \in A^2$, $u\big(\text{aff}(a, b)\big) = \text{aff}\big(u(a), u(b)\big)$, le Théorème 2.21. s'applique donc u est semi-affine, bijective en fait car si $a \neq b$, on a vu que $u(a) \neq u(b)$. ■

COROLLAIRE 2.33. — *Soit un espace affine A de dimension deux au moins sur un corps $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et u une application de A dans A qui transforme bijectivement toute droite D en une droite $u(D)$ parallèle à D. Alors u est une homothétie ou une translation.*

D'abord, u est semi-affine.

En effet A étant de dimension deux au moins, soit a et b distincts dans A, D_a une droite affine passant par a, non par b, (figure 2.33), et D_b parallèle à D_a passant par b.

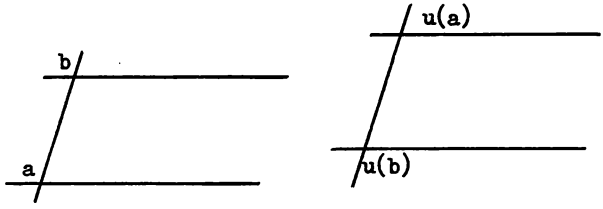


Fig. 2.33

Soit $\Delta = \text{aff}(a, b)$, on a $u(a) \neq u(b)$, (u est bijective sur Δ), et $u(D_a)$ et $u(D_b)$ sont deux droites parallèles à D_a et D_b, donc parallèles entre-elles,

passant par $u(a)$ et $u(b)$, avec $u(b) \notin u(D_a)$, sinon $u(\Delta)$, droite passant par $u(a)$ et $u(b)$ serait $u(D_a)$ et ne serait pas parallèle à Δ.

L'image $u(A)$ contient deux droites parallèles strictement, donc elle engendre un espace affine de dimension deux au moins.

Puis, avec a et b distincts dans A, u envoie bijectivement $\mathrm{aff}(a,b)$ sur la droite $\mathrm{aff}\big(u(a),u(b)\big)$, (qui lui est parallèle) : on a $u\big(\mathrm{aff}(a,b)\big) = \mathrm{aff}\big(u(a),u(b)\big)$. Cette égalité étant évidente si $a = b$, *le Théorème 2.21 s'applique et donne u semi-affine.*

Soit alors f l'application semi-linéaire associée à u. Soit a fixé dans A, $\vec{x}$ dans E direction de A, $\vec{x} \neq \vec{0}$, avec $b = a + \vec{x}$, comme $u\big(\mathrm{aff}(a,b)\big)$ est une droite parallèle à $\mathrm{aff}(a,b)$, de vecteur directeur $\overrightarrow{u(a)u(b)} = f(\overrightarrow{x})$, c'est que $f(\overrightarrow{x})$ est proportionnel à $\overrightarrow{x}$: il existe $\lambda(\overrightarrow{x}) \in K$ tel que $f(\overrightarrow{x}) = \lambda(\overrightarrow{x})\,\overrightarrow{x}$.

Avec $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ indépendants, comme f est additive, on obtient :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) &= \lambda(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\,\overrightarrow{x} + \lambda(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\,\overrightarrow{y}, \quad \text{et aussi :} \\ &= f(\overrightarrow{x}) + f(\overrightarrow{y}), \\ &= \lambda(\overrightarrow{x})\,\overrightarrow{x} + \lambda(\overrightarrow{y})\,\overrightarrow{y}, \end{aligned}$$

donc $\big(\lambda(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) - \lambda(\overrightarrow{x})\big)\,\overrightarrow{x} = \big(\lambda(\overrightarrow{y}) - \lambda(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\big)\,\overrightarrow{y}$ et vu l'indépendance des vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$, c'est que $\lambda(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = \lambda(\overrightarrow{x}) = \lambda(\overrightarrow{y})$: le scalaire λ est en fait indépendant de $\overrightarrow{x}$, le cas de $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{x}'$ dépendants se traitant en introduisant $\overrightarrow{y}$ indépendant de $\overrightarrow{x}$, (possible car $\dim(E) \geqslant 2$), donc de $\overrightarrow{x}'$.

Mais alors f est une homothétie de rapport λ.

Si $\lambda = 1$, il en résulte que u est une translation.

Si $\lambda \neq 1$, u admet un (et un seul) point fixe, car en fixant a dans A, si on cherche b de A tel que $u(b) = b$, on aura

$$\overrightarrow{u(b)u(a)} = f(\overrightarrow{ba}) = \lambda\overrightarrow{ba},$$

soit encore $$\overrightarrow{bu(a)} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{au(a)} = \lambda\overrightarrow{ba},$$

ce qui équivaut à $$(\lambda - 1)\overrightarrow{ba} = \overrightarrow{au(a)}.$$

Avec $\lambda \neq 1$, ceci fournit un (et un seul) point fixe b pour u, alors, m quelconque de A a pour image $u(m)$ tel que

$$\overrightarrow{bu(m)} = \overrightarrow{u(b)u(m)} = f(\overrightarrow{bm}) = \lambda\overrightarrow{bm},$$

et u est bien l'homothétie de centre b, de rapport λ. ■

Il résulte de ce corollaire, que le sous-groupe $\mathcal{G}'$ formé des *homothéties de rapport non nul et des translations*, (voir Théorème 1.63), du groupe $\mathcal{G}$ des bijections affines sur A espace affine de dimension deux au moins, sur un corps $K \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, se caractérise comme l'ensemble des bijections de A sur A telles que *toute droite a pour image une droite qui lui est parallèle.*

CHAPITRE 3

Convexité

La notion de convexité est attachée aux espaces affines réels, et en fait à la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$ qui en fait un corps ordonné valué complet, (voir Tome 2, Théorème 5.49, où l'on voit que cette propriété caractérise $\mathbb{R}$). Avant de parler de convexité proprement dit on abordera les propriétés d'orientation des espaces affines réels.

1. Orientation des espaces vectoriels et affines réels de dimension finie

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie n, et une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ fixée. Si $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ est une autre base de E, la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est régulière, donc $\det P \neq 0$, soit $\det(P) \in \mathbb{R}^*$ qui a... deux composantes connexes, $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et tout vient de là. (Voir Tome 1, 8.19 pour les changements de base, et Tome 2, chapitre 3 pour la connexité et les composantes connexes.)

On définit alors une relation d'équivalence entre bases en disant que $\mathcal{B}\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}'$ si et seulement si le déterminant de P, matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est > 0.

Comme on passe alors de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ par P^{-1}, et que $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det P}$, si $\mathcal{B}\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}'$ on aura $\mathcal{B}'\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}$ d'où la *symétrie* de $\mathcal{R}$, qui par ailleurs est réflexive, I_n de déterminant 1 faisant passer de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}$. Enfin, si $\mathcal{B}\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}''$, on passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$ par la matrice PP', si on passe de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ par P et de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$ par P', (utiliser les formules de changement de coordonnées pour le justifier), et $\det(PP') = (\det P)(\det P')$ sera alors > 0, d'où la *transitivité*.

Il y a exactement deux classes d'équivalence, car si $\mathcal{B}$ est une base de E, en changeant $\overrightarrow{e_1}$ en $-\overrightarrow{e_1}$ on obtient une base $\mathcal{B}'$ non équivalente à $\mathcal{B}$, la matrice de passage Δ de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ étant $\Delta = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$. Si $\mathcal{B}''$ est une base quelconque avec P'' matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}''$, si $\det P'' > 0$, on a $\mathcal{B}\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}''$, et si $\det P'' < 0$, la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}''$ étant

$\Delta^{-1}P''$, elle est de déterminant > 0, (c'est $\det \Delta^{-1} \det P'' = -\det P''$), donc $\mathcal{B}' \mathcal{R} \mathcal{B}''$.

DÉFINITION 3.1. — *Orienter un espace vectoriel réel de dimension finie, E, c'est choisir l'une des classes d'équivalence de la relation d'équivalence entre bases définie par $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{B}' \iff \det P > 0$, si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.*

Une base $\mathcal{B}_0$ de E étant choisie, on appellera *bases directes* celles de la même classe d'équivalence (et *indirectes* les autres). *Orienter A espace affine réel de direction E, c'est orienter E* : on est donc en dimension finie.

On sent bien que cette orientation est liée à des composantes connexes, celles de $\mathbb{R}^*$. Mais qu'en est-il dans le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices régulières? Et bien, on a :

THÉORÈME 3.2. — *Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices régulières réelles d'ordre n admet deux composantes connexes, qui sont connexes par arcs, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^-$ formées respectivement des matrices de déterminant > 0 et < 0.*

L'application déterminant étant continue, car polynômiale par rapport aux coefficients, il est clair que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe, son image par det, $\mathbb{R}^*$, ne l'étant pas, (voir Tome 2, Théorèmes 3.8 et 3.6.).

Pour justifier le résultat, on va passer par le groupe orthogonal, et justifier-le

LEMME 3.3. — *Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ admet deux composantes connexes, qui sont connexes par arcs, les parties $O_n(\mathbb{R})^+$ et $O_n(\mathbb{R})^-$ formées respectivement des matrices orthogonales de déterminant > 0 et < 0.*

Vous avez reconnu dans $O_n(\mathbb{R})^+$ le sous-groupe $SO_n(\mathbb{R})$.

On a vu dans l'étude des espaces vectoriels préhilbertiens réels, que A de $O_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice de la forme :

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

r fois -1, s fois $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

(voir Tome 3, Théorème 14.83), la matrice de passage étant orthogonale.

Par ailleurs, la matrice bloc $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ s'écrit encore $\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$, donc, moyennant une permutation des premiers vecteurs, et ce regroupement en blocs $(2,2)$ des -1, on obtient deux formes possibles pour A' :

$$A'^{+} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

et

$$A'^{-} = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

On définit alors, pour t réel dans $[0,1]$, la matrice orthogonale $\Gamma_+(t)$ par :

$$\Gamma_+(t) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \begin{pmatrix} \cos t\theta & -\sin t\theta \\ \sin t\theta & \cos t\theta \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Avec P orthogonale telle que $P^{-1}AP = A'^{+}$, si on définit $f(t)$ par $f(t) = P\Gamma_+(t)P^{-1}$, on a une fonction continue de $[0,1]$ dans $O_n(\mathbb{R})^+$, (le déterminant de $\Gamma_+(t)$ est positif), telle que $f(0) = PI_nP^{-1} = I_n$ et $f(1) = PA'^{+}P^{-1} = A$: il existe un arc continu entre A de $O_n(\mathbb{R})^+$ et I_n, d'où un arc continu entre A et B quelconques de $O_n(\mathbb{R})^+$ *qui est ainsi connexe par arcs*, (voir définition 3.28, Tome 2), *donc connexe*.

Soit $\Delta = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, \ldots, 1)$, elle est orthogonale de déterminant -1, et l'application $\varphi : P \rightsquigarrow \Delta P$ est une bijection continue de $O_n(\mathbb{R})^+$ sur $O_n(\mathbb{R})^-$, (si $Q \in O_n(\mathbb{R})^-$, $\exists! P = \Delta^{-1}Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(P) = Q$ et $\det(P) = \det(\Delta^{-1})\det(Q) = (-1)^2 = 1$). Si A et B sont deux éléments de $O_n(\mathbb{R})^-$ et si l'application $f : [0,1] \longmapsto O_n(\mathbb{R})^+$ est un arc continu entre $f(0) = \Delta^{-1}A$ et $f(1) = \Delta^{-1}B$, l'application $g : [0,1] \longmapsto O_n(\mathbb{R})^-$ qui à t associe $\Delta f(t)$ est à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})^-$, avec $g(0) = A$ et $g(1) = B$. Donc $O_n(\mathbb{R})^-$ aussi est connexe par arcs, donc connexe. Or si $A \in O_n(\mathbb{R})^+$, si $\mathcal{C}(A)$ est sa composante connexe, $\det(\mathcal{C}(A))$ est un intervalle, contenant $\det A > 0$; il ne contient pas d'éléments de $O_n(\mathbb{R})^-$, on a donc $\mathcal{C}(A) \subset O_n(\mathbb{R})^+$, qui est connexe : c'est la composante connexe de A. On procède de même pour $A \in O_n(\mathbb{R})^-$ et finalement $O_n(\mathbb{R})^+$ et $O_n(\mathbb{R})^-$ sont bien les composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$. ■

Venons-en au Théorème 3.2. Pour construire un chemin entre A et B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ on va devoir... cheminer.

D'abord on remarque qu'avec $\mathcal{C}(A)$ composante connexe de A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $\det(A) > 0$ et $\det(\mathcal{C}(A))$ est un intervalle de $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$: c'est donc un intervalle inclus dans $]0, +\infty[$, d'où $\mathcal{C}(A) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$, et de même, si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^-$, on aura sa composante connexe $\mathcal{C}(B) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^-$. Si on montre que ces parties sont connexes on aura les composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On introduit alors $E = \mathbb{R}^n$, euclidien canonique orienté.
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$, et $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée directe de E, A est la matrice d'un automorphisme f dans la base $\mathcal{B}$ et la famille $\mathcal{C} = \{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ est une base directe de E, (car $\det A > 0$).

On l'orthonormalise par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, (on ne recule devant rien). On sait qu'il existe une matrice triangulaire T, telle qu'avec $\varepsilon_j = \sum_{r=1}^{j} t_{rj} f(e_r) = \sum_{r=1}^{n} t_{rj} f(e_r)$ car $t_{rj} = 0$ si $r > j$, on aura $\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ orthonormée. De plus, on peut imposer le signe des t_{jj} : on les choisit tous > 0, si bien que la base $\mathcal{D} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ est orthonormée directe. (Voir Tome 3, Théorème 14.8 pour l'orthonormalisation de Schmidt.)

Mais, avec $f(e_r) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ir} e_i$ on aura :

$$\varepsilon_j = \sum_{r=1}^{n} t_{r_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ir} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} t_{rj} \right) e_i,$$

donc la matrice P, de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{D}$ a pour terme général :

$$p_{ij} = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir} t_{rj},$$

d'où $P = AT$, avec P orthogonale directe car $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ sont orthonormées directes.

Patience, on y est presque !

On peut construire, dans $\mathbb{R}$, une application continue γ_i telle que $\gamma_i(0) = 1$ et $\gamma_i(1) = t_{ii}$, avec $\gamma_i(t) > 0$ sur $[0, +\infty]$, (1 et t_{ii} sont dans $]0, +\infty[$ connexe, ouvert de $\mathbb{R}$, donc connexe par arcs).

On définit une matrice $R(t)$, triangulaire supérieure, par $r_{ii}(t) = \gamma_i(t)$ et, si $j > i$, $r_{ij}(t) = t \cdot t_{ij}$. On a $R(t)$ inversible, $\det(R(t)) > 0$, $R(0) = I_n$, $r(1) = T$, d'où un arc, (enfin) continu :

$$t \rightsquigarrow AR(t) = \Gamma(t),$$

tel que $\Gamma(0) = A$, $\Gamma(1) = AT = P$, et $\Gamma(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$. On joint donc A de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ à P orthogonale directe par un arc continu Γ_1, à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$.

Mais de même, il existerait un arc continu Γ_2 à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ entre B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ et une matrice orthogonale directe Q.

Or, (lemme 3.3), il existe un arc Γ_3 continu entre P et Q, à valeurs dans $O_n(\mathbb{R})^+$ donc dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$.

On prend des ciseaux, de la colle ou de la ficelle et on remet bout à bout les trois arcs continus d'où un arc continu entre A et B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$, restant à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$. Finalement, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ est connexe par arcs, donc connexe.

On procède comme dans le lemme 3.3 pour justifier que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^-$ est lui aussi connexe par arcs : avec $\Delta = \mathrm{diag}(-1, 1, \ldots, 1)$, si A et B sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^-$, ΔA et ΔB sont dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$, donc il existe un arc : $t \rightsquigarrow \Gamma(t)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ tel que $\Gamma(0) = \Delta A$ et $\Gamma(1) = \Delta B$, mais alors l'application $t \rightsquigarrow \Delta^{-1}\Gamma(t)$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^-$ et prend les valeurs A et B en 0 et 1, d'où un arc entre A et B, restant à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^-$. ■

2. Convexité

DÉFINITION 3.5. — *Une partie C de A affine réel est dite convexe si et seulement si elle est stable par passage aux barycentres à coefficients positifs.*

Il est donc évident qu'une intersection de convexes est un convexe, donc si X est une partie de A affine, si on considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des convexes

contenant X, il est non vide, A lui-même étant convexe, et l'intersection des C de $\mathcal{C}$ sera un convexe, contenant X, et c'est le plus petit convexe contenant X puisque tout convexe contenant X est dans $\mathcal{C}$.

DÉFINITION 3.6. — *Soit X une partie de A espace affine réel. On appelle enveloppe convexe de X, le plus petit convexe contenant X, (plus petit pour l'inclusion).*

On vient de voir que cette enveloppe convexe, notée $\mathcal{E}(X)$, est l'intersection de tous les convexes contenant X.

THÉORÈME 3.7. — *L'enveloppe convexe $\mathcal{E}(X)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de toutes les familles finies de points de X.*

Il suffit de reprendre la justification du Théorème 1.26 en ajoutant la condition «à coefficients positifs», chaque fois que les scalaires interviennent. ■

Les applications affines «conservant le barycentre», (voir définition 1.50), on obtient facilement le :

THÉORÈME 3.8. — *Soient A et B deux espaces affines réels et u une application affine de A dans B. Alors si C est un convexe de A, $u(C)$ est un convexe de B et si D est un convexe de B, $u^{-1}(D)$ est un convexe de A.*

Là encore, c'est une reprise du Théorème 1.51, avec la précision : «à coefficients positifs». Par exemple, si on se donne $a_1, \ldots, a_n$ dans $u^{-1}(D)$, et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positifs de somme Λ non nulle, on a $d_1 = u(a_1), \ldots, d_n = u(a_n)$ dans D convexe, donc d barycentre des (d_i, λ_i) est dans D. Or g, barycentre des (a_i, λ_i) est tel que $u(g) = d$, (conservation du barycentre par u, affine) donc $g \in u^{-1}(D)$ qui, étant stable par passage aux barycentres à coefficients positifs est bien convexe.

On procéderait facilement à la vérification pour l'image directe. ■

L'associativité des barycentres (voir 1.18) va faire jouer un rôle important aux segments dans un espace affine réel.

DÉFINITION 3.9. — *Soient a et b deux éléments de A affine réel. On appelle segment d'extrémités a et b l'ensemble noté $[a, b]$ des barycentres à coefficients positifs de a et b.*

C'est donc l'enveloppe convexe de $\{a, b\}$.

Si α et β sont deux coefficients positifs de somme λ non nulle, on peut les remplacer par $\frac{\alpha}{\lambda} = t$ et $\frac{\beta}{\lambda} = \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} = 1 - \frac{\alpha}{\lambda} = 1 - t$ pour prendre le barycentre de a et b, et on retrouve cette caractérisation bien connue du segment :

3.10. $[a, b] = \{ta + (1-t)b, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$

qui signifie qu'avec o origine fixée dans A, le segment $[a, b]$ est l'ensemble des points m tels que $\overrightarrow{om} = t\overrightarrow{oa} + (1-t)\overrightarrow{ob}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. C'est encore l'ensemble des m tels que

3.11 $\overrightarrow{om} = \overrightarrow{ob} + t(\overrightarrow{ba})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

on a une partie de la droite $D_{a,b}$ engendrée par a et b s'ils sont distincts.

THÉORÈME 3.12. — *Une partie C de A affine réel est convexe si et seulement si, $\forall (a, b) \in C^2$, $[a, b] \subset C$.*

Si C est convexe, et si a et b sont dans C, le segment $[a, b]$ étant l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de a et b est bien dans C.

Réciproquement, si on a la propriété sur les segments, soit des points $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de C, affectés des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, > 0$, (un point affecté d'un coefficient nul n'intervient pas dans la recherche du barycentre). Alors m barycentre des (a_i, α_i) est barycentre de $(a'_1, \alpha_1 + \alpha_2)$; $(a_3, \alpha_3), \ldots, (a_n, \alpha_n)$, avec a'_1 barycentre de (a_1, α_1) et (a_2, α_2), donc $a'_1 \in [a_1, a_2] \subset C$ par hypothèse. Comme $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, pour justifier l'appartenance de m à C, on est ramené du cas de n points à celui de $n-1$, (si $n \geqslant 3$), donc on obtient le résultat par récurrence sur n.

Comme, pour $n = 2$, le barycentre de (a_1, α_1) et (a_2, α_2) avec $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ est dans le segment $[a_1, a_2]$ inclus dans C par hypothèse, la stabilité de C par passage aux barycentres à coefficients positifs est obtenue. ■

COROLLAIRE 3.13. — *Toute partie convexe d'un espace affine réel A associé à E espace vectoriel normé est connexe.*

Si E est un e.v.n., on verra au chapitre 4 que A est espace topologique métrique avec la distance $d(a, b) = ||\overrightarrow{ab}||$.

Soient a et b dans A, et o origine dans A.

L'application $\varphi : t \rightsquigarrow m(t)$ tel que : $\overrightarrow{om(t)} = t\overrightarrow{oa} + (1-t)\overrightarrow{ob}$, est continue car :

$$d(\varphi(t), \varphi(t')) = ||\overrightarrow{om(t')} - \overrightarrow{om(t)}|| = ||(t'-t)\overrightarrow{oa} - (t'-t)\overrightarrow{ob}||$$
$$= ||(t'-t)\overrightarrow{ba}|| = |t'-t|\,||\overrightarrow{ba}||,$$

donc $\lim_{t' \to t} d(\varphi(t), \varphi(t')) = 0$.

Mais alors le segment $[a, b]$, image continue par φ de l'intervalle réel $I = \{t; 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, connexe, est connexe, et C, réunion des segments $[a, b]$, pour a fixé dans C et b variant dans C est connexe comme union de connexes d'intersection non vide. (Voir Tome 2, Théorèmes 3.8 et 3.7).

Lorsque l'espace affine est de dimension finie, on peut préciser la structure de l'enveloppe convexe d'une partie, par le Théorème de Carathéodory.

THÉORÈME 3.14, *(de Carathéodory). — Soit A espace affine réel de dimension d. Pour toute partie non vide X de A, l'enveloppe convexe de X est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de $d+1$ points au plus de X.*

Vu le Théorème 3.7, il suffit de justifier que si m de l'enveloppe convexe, $\mathcal{E}(X)$, de X, est barycentre de k points $(m_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$, avec des $\lambda_i > 0$, et $k > d+1$, on peut se ramener à $d+1$ points de X.

Pour cela, on va justifier que si $k > d+1$, on peut se ramener à $k-1$ points. En itérant le procédé on parviendra à $d+1$ points de X.

On fixe l'origine en o, A est alors identifié à $\mathbb{R}^d$, muni de sa topologie d'espace produit, qui est aussi celle d'espace vectoriel normé, (voir Tome 2, 1.86 et 6.12). On suppose que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$,

alors m est tel que $\overrightarrow{om} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{om_i}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{m_1 m_i}$, pour $2 \leqslant i \leqslant k$, en nombre $k-1 > d$ dans E espace vectoriel de dimension d, sont liés. Il existe donc des scalaires α_i, pour $2 \leqslant i \leqslant k$, non tous nuls, tels que $\sum_{i=2}^{k} \alpha_i \overrightarrow{m_1 m_i} = \overrightarrow{0}$.

Avec $\overrightarrow{m_1 m_i} = \overrightarrow{om_i} - \overrightarrow{om_1}$, et en posant $\alpha_1 = -\sum_{i=2}^{n} \alpha_i$, on a des α_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, non tous nuls, de somme nulle, tels que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{om_i} = \overrightarrow{0}$.

Les t réels tels que $t\alpha_i + \lambda_i \geqslant 0$ sont dans un intervalle L_i, (si $\alpha_i = 0$, comme $\lambda_i > 0$, on a $\mathbb{R}$, si $\alpha_i > 0$, $L_i = \left[-\frac{\lambda_i}{\alpha_i}, +\infty\right[$, et si $\alpha_i < 0$, on a $L_i = \left]-\infty, -\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right]$); et L_i est un fermé de $\mathbb{R}$. Par ailleurs, pour $t = 0$, $0\alpha_i + \lambda_i \geqslant 0$, donc :

$$\mathcal{L} = \{t; t \in \mathbb{R}; \quad \forall i = 1, \ldots, k,\ t\alpha_i + \lambda_i \geqslant 0\} = \bigcap_{i=1}^{k} L_i$$

est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, car une intersection d'intervalles est un intervalle, éventuellement vide, car (I intervalle) $\Longleftrightarrow$ ($\forall (x, y) \in I^2$, le segment d'extrémités x et y est dans I), et cette caractérisation est stable par intersection (voir Tome 2, Théorème 3.5 cette caractérisation).

Comme 0 est dans chaque L_i, $\mathcal{L}$ est non vide. Comme par ailleurs l'un au moins des α_i est non nul, l'un des L_i est différent de $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{L} \neq \mathbb{R}$.

Soit τ un point frontière de $\mathcal{L}$, il lui correspond un indice j tel que $\tau\alpha_j + \lambda_j = 0$, (si $\forall j$, $\tau\alpha_j + \lambda_j > 0$, τ serait intérieur à chaque intervalle L_j, donc intérieur à $\mathcal{L}$).

On a alors, comme $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{om_i} = 0$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{om} &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{om_i} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{om_i} + \tau \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{om_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \tau\alpha_i) \overrightarrow{om_i}.\end{aligned}$$

Les $\lambda_i + \tau\alpha_i$ sont des scalaires positifs, de somme :

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i + \tau \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

car les α_i sont de somme nulle, donc m est barycentre des m_i affectés des coefficients $\lambda_i + \tau\alpha_i$, avec $\lambda_j + \tau\alpha_i = 0$: il reste au plus $k - 1$ points de la famille initiale. ■

COROLLAIRE 3.15. — *Si X est un compact de A espace affine réel de dimension d, son enveloppe convexe est un compact de A.*

Une origine étant fixée dans A, on a sur A la topologie canonique de $\mathbb{R}^d$. Si X est un compact de A, X^{d+1} est un compact de A^{d+1}, (Tome 2, Théorème 2.21).

Par ailleurs $K = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}, \lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j = 1\}$ est un fermé borné de $\mathbb{R}^{d+1}$, borné car on a $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$ pour $j = 1, \ldots, d+1$, fermé car les applications p_j; $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1}) \rightsquigarrow \lambda_j$ sont des projections, donc continues, et $p_j^{-1}([0, +\infty[)$ est alors un fermé de $\mathbb{R}^{d+1}$; de même $\theta : (\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1}) \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{d+1} \lambda_j$ est continue car polynômiale et $\theta^{-1}(\{1\})$ est un fermé. Alors $K = \theta^{-1}(\{1\}) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{d+1} p_j^{-1}([0, +\infty[) \right)$ est fermé!

Mais alors K est compact, (Tome 2, Corollaire 6.30), donc $X^{d+1} \times K$ est compact, (Tome 2, Théorème 2.21) et l'application :

$$\phi : (x_1, \ldots, x_{d+1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1}) \rightsquigarrow \overrightarrow{om} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \overrightarrow{ox_i}$$

étant continue, (multilinéaire par rapport aux λ_i et aux $\overrightarrow{ox_i}$, en dimension finie), on a finalement $\mathcal{E}(X) = \phi(X^{d+1} \times K)$ est un compact de A (identifié à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^d$ par le choix de l'origine o). ■

Toujours avec cette topologie sur A affine réel, associée à une structure d'espace vectoriel normé sur sa direction E, on peut justifier le théorème suivant :

THÉORÈME 3.16. — *Soit A un espace affine réel métrique, et C une partie convexe de A. Alors $\overset{\circ}{C}$ est convexe ainsi que $\overline{C}$.*

On fixe une origine o dans A, la topologie métrique de A devient celle d'espace vectoriel normé.

Soient a et b dans $\overset{\circ}{C}$, et $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_0(a, r) \subset C$ et $\mathcal{B}_0(b, r) \subset C$. Si d est un point du segment $[a, b]$, avec t réel compris entre 0 et 1 tel que $\overrightarrow{od} = t\overrightarrow{oa} + (1-t)\overrightarrow{ob}$, et $m \in \mathcal{B}_0(d, r)$, avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{dm}$, on a $||\overrightarrow{u}|| < r$, donc les points a' et b' tels que $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{bb'} = \overrightarrow{u}$ sont dans $\mathcal{B}_0(a, r)$ et $\mathcal{B}_0(b, r)$ respectivement, donc dans C, avec C convexe (voir figure 3.16).

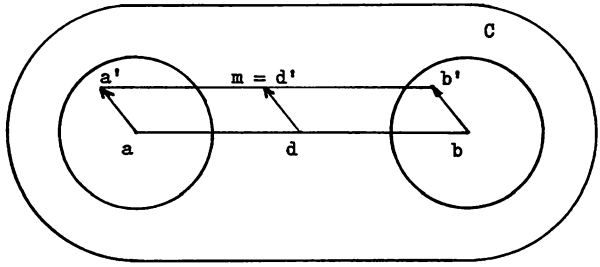


Fig. 3.16

Mais alors, d', barycentre de a' (coefficient t) et b', (coefficient $1-t$) est dans C, et comme $\overrightarrow{od'} = t\overrightarrow{oa'} + (1-t)\overrightarrow{ob'}$, on aura :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dd'} &= \overrightarrow{od'} - \overrightarrow{od} = t(\overrightarrow{oa'} - \overrightarrow{od}) + (1-t)(\overrightarrow{ob'} - \overrightarrow{ob}) \\ &= t\overrightarrow{aa'} + (1-t)\overrightarrow{bb'} = (t+1-t)\,\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{dm}\end{aligned}$$

d'où $m = d'$ dans C : on a $\mathcal{B}_0(d,r) \subset C$ donc $d \in \overset{\circ}{C}$, ce qui *justifie* $\overset{\circ}{C}$ *convexe.*

Pour l'adhérence de C, la justification est plus rapide.

Si x et y sont dans $\overline{C}$, il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de C qui convergent vers x et y, (traduction de l'adhérence dans un métrique, Tome 2, Théorème 4.27), donc pour tout z du segment d'extrémités x et y avec t réel entre 0 et 1 tel que $\overrightarrow{oz} = t\overrightarrow{ox} + (1-t)\overrightarrow{oy}$, il est clair que $\lim_{n\to+\infty}(t\overrightarrow{ox_n} + (1-t)\overrightarrow{oy_n}) = \overrightarrow{oz}$ puisque :

$$\begin{aligned}||\overrightarrow{oz} - (t\overrightarrow{ox_n} + (1-t)\overrightarrow{oy_n})|| &= ||t\overrightarrow{x_nx} + (1-t)\overrightarrow{y_ny}|| \\ &\leqslant t||\overrightarrow{xx_n}|| + (1-t)||\overrightarrow{yy_n}||\end{aligned}$$

et que le majorant tend vers 0 si n tend vers l'infini. Mais par convexité, le point z_n de A tel que $\overrightarrow{oz_n} = t\overrightarrow{ox_n} + (1-t)\overrightarrow{oy_n}$ est dans C convexe, d'où $z \in \overline{C}$. Il résulte du Théorème 3.12 que $\overline{C}$ est convexe. ■

En fait, on peut préciser ces résultats grâce au résultat suivant :

THÉORÈME 3.17. — *Soit C une partie convexe de A affine réel métrique, $x_0 \in \overset{\circ}{C}$ et $x \in \overline{C}$ alors on a $[x_0, x[\subset \overset{\circ}{C}$, (en notant $[x_0, x[$ l'ensemble des m tels que $\overrightarrow{om} = t\overrightarrow{ox_0} + (1-t)\overrightarrow{ox}$, $0 < t \leqslant 1$).*

Le point x_0, (obtenu pour $t = 1$) est évidemment dans $\overset{\circ}{C}$. On considère donc y associé à un t de $]0,1[$, ce que l'on note $y \in]x_0, x[$.

Il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_0(x_0, r) \subset C$. Soit par ailleurs f l'homothétie de centre y donnant de x_0 l'image x. Son rapport λ est < 0, (y entre x_0 et x), et l'image par f de la boule $\mathcal{B}_0(x_0, r)$ est $\mathcal{B}_0(x, |\lambda| r)$. Comme $x \in \overline{C}$, on a $\mathcal{B}_0(x, |\lambda| r) \cap C \neq \varnothing$, donc il existe z dans $\mathcal{B}(x_0, r)$ tel que $f(z) \in C \cap \mathcal{B}_0(x, |\lambda| r)$, (figure 3.17).

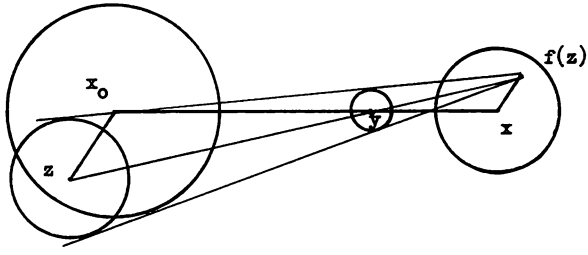


Fig. 3.17

On a $\overrightarrow{yf(z)} = \lambda \overrightarrow{yz} = \lambda \overrightarrow{yf(z)} + \lambda \overrightarrow{f(z)z}$ donc $(1-\lambda)\overrightarrow{yf(z)} = \lambda \overrightarrow{f(z)z}$ soit encore $\overrightarrow{f(z)y} = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} \overrightarrow{f(z)z}$, relation qui montre que y est l'homothétique de z par g, homothétie de centre $f(z) \in C$, de rapport $\mu = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}$, on a $\mu > 0$, (car $\lambda < 0$) et $\mu < 1$.

Mais $z \in \mathcal{B}_0(x_0, r) \subset \overset{\circ}{C} : \exists \rho > 0$, $\mathcal{B}_0(z, \rho) \subset C$, et par connexité, les images $g(t)$ des t de $\mathcal{B}_0(z, \rho)$ étant dans les segments $[f(z), t] \subset C$, on aura $\mathcal{B}_0(y, \mu\rho) \subset C$: finalement $y \in \overset{\circ}{C}$. ■

COROLLAIRE 3.18. — *Soit C un convexe de A affine réel métrique, si $\overset{\circ}{C} \neq \varnothing$ on a $\overline{C} = \overline{\overset{\circ}{C}}$ et $\overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{\overline{C}}$.*

On a $\overline{\overset{\circ}{C}} \subset C$ donc $\overline{\overset{\circ}{C}} \subset \overline{C}$ est évident. Soit alors $x_0 \in \overset{\circ}{C}$ supposé non vide, et $x \in \overline{C}$, on a $]x_0, x[\subset \overset{\circ}{C}$, (Théorème 3.17) et les $x_n = \dfrac{1}{n} x_0 + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) x$ de $]x_0, x[$, donc de $\overset{\circ}{C}$, ont pour limite x si n tend vers l'infini, d'où $x \in \overline{\overset{\circ}{C}}$: on a $\overline{C} \subset \overline{\overset{\circ}{C}}$ d'où l'égalité $\overline{C} = \overline{\overset{\circ}{C}}$.

Puis $C \subset \overline{C} \Longrightarrow \overset{\circ}{C} \subset \overset{\circ}{\overline{C}}$.

Soit $x \in \overset{\circ}{\overline{C}}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_0(x,r) \subset \overline{C}$, or $\overline{C} = \overline{\overset{\circ}{C}}$. En particulier x est adhérent à $\overset{\circ}{C}$, donc $\mathcal{B}_0(x,r) \cap \overset{\circ}{C} \neq \varnothing$. Soit $y \in \overset{\circ}{C} \cap \mathcal{B}_0(x,r)$, le symétrique y' de y par rapport à x est dans la boule $\mathcal{B}_0(x,r)$ contenue dans $\overline{C}$.

Mais alors, soit $y = x$, (et dans ce cas $x \in \overset{\circ}{C}$), soit $y \neq x$ et on a $y \in \overset{\circ}{C}$, $y' \in \overline{C}$, et x, milieu de $[y,y']$ avec $y \neq y'$ donc $x \in]y,y'[$, d'après 3.17 dans ce cas $x \in \overset{\circ}{C}$. On conclut dans les deux cas à $x \in \overset{\circ}{C}$ d'où $\overline{C} \subset \overset{\circ}{C}$ et l'égalité. ■

En complément à ces propriétés topologiques, et en particulier au Corollaire 3.15, il convient de noter que :

REMARQUE 3.19. — *Si B est une partie fermée de A espace affine réel, son enveloppe convexe n'est pas forcément un fermé.*

Dans $A = \mathbb{R}^2$ considéré comme espace affine, $B = \{(0,0)\} \cup C$ avec $C = \{(x,y); x \geqslant 0, xy \geqslant 1\}$ est un fermé, union de deux fermés, et il est facile de vérifier que son enveloppe convexe :
$\mathcal{E}(B) = \{(x,y); x > 0 \text{ et } y > 0\} \cup \{(0,0)\}$,
n'est pas fermée, l'adhérence de $\mathcal{E}(B)$ contenant les $(0,y)$, $\forall y \geqslant 0$ et les $(x,0)$, $\forall x \geqslant 0$; (figure 3.19).

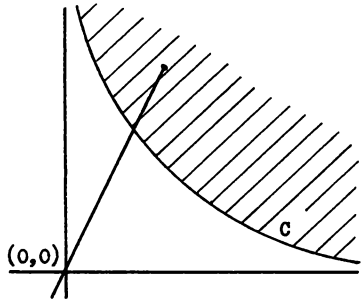


Fig. 3.19

Cette constatation conduit à parler d'enveloppe fermée convexe.

DÉFINITION 3.20. — *Soit B une partie de A espace affine réel.*
On appelle enveloppe fermée convexe de B le plus petit fermé convexe de A, contenant B.

C'est donc l'intersection de tous les convexes fermés de A qui contiennent B.

THÉORÈME 3.21. — *L'enveloppe fermée convexe de B est l'adhérence de son enveloppe convexe.*

Si on note $\mathcal{F}(B)$ l'enveloppe fermée convexe et $\mathcal{E}(B)$ son enveloppe convexe, comme $B \subset \mathcal{E}(B) \subset \overline{\mathcal{E}(B)}$ qui est convexe, (Théorème 3.16), fermé, on a $\mathcal{F}(B) \subset \overline{\mathcal{E}(B)}$; puis $\mathcal{F}(B)$ étant convexe et contenant B, a fortiori on a $\mathcal{E}(B) \subset \mathcal{F}(B)$, d'où en passant aux adhérences $\overline{\mathcal{E}(B)} \subset \overline{\mathcal{F}(B)} = \mathcal{F}(B)$ puisque $\mathcal{F}(B)$ est fermé; (Tome 2, Théorèmes 1.21 et 1.19). Finalement $\mathcal{F}(B) = \overline{\mathcal{E}(B)}$. ■

L'enveloppe convexe peut encore servir pour obtenir le résultat suivant :

THÉORÈME 3.22. — *Soit C un convexe compact de A affine réel métrique, C est l'enveloppe convexe de sa frontière.*

Si $C = \varnothing$ tout est vide, donc $\varnothing = \varnothing$: c'est beau!

Soit $x \in C$, (supposé non vide, mais cette hypothèse est formellement inutile, tout ce qui suit un $\forall x \in \varnothing$ étant vrai).

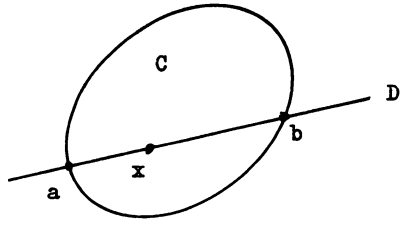


Fig. 3.22

Soit donc $x \in C$, D une droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, passant par x. Comme D et C sont convexes, $D \cap C$ est convexe de $D = \{m; \overrightarrow{xm} = t\overrightarrow{u}, t \in \mathbb{R}\}$. Mais C compact est un fermé borné de A, (qui topologiquement se comporte comme un espace vectoriel normé, dès qu'une origine est fixée), donc I, ensemble des réels t tels que m vérifiant $\overrightarrow{xm} = t\overrightarrow{u}$ soit dans $D \cap C$ est une partie fermée bornée convexe donc connexe de $\mathbb{R}$: c'est un segment $[\alpha, \beta]$ contenant 0. Avec a tel que $\overrightarrow{xa} = \alpha\overrightarrow{u}$ et b tel que $\overrightarrow{xb} = \beta\overrightarrow{u}$, (figure 3.22), le point x est dans le segment $[a, b]$. Or a et b sont dans $\mathrm{Fr}(C) = C \backslash \overset{\circ}{C}$, ($C$ compact $\Longrightarrow C = \overline{C}$), car si par exemple $a \in \overset{\circ}{C}$, $\exists r > 0$, $\mathcal{B}_0(a, r) \subset C$, mais les $t \in \left]\alpha - \dfrac{r}{||\overrightarrow{u}||}, \alpha\right]$ seraient dans $I = [\alpha, \beta]$ car pour de tels t, si

$$\overrightarrow{xm} = t\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{u} + (t - \alpha)\overrightarrow{u} = \overrightarrow{xa} + (t - \alpha)\overrightarrow{u},$$

on aurait :

$$d(a,m) = ||\overrightarrow{am}|| = ||\overrightarrow{xm} - \overrightarrow{xa}|| = |t-\alpha|\ ||\overrightarrow{u}|| < \frac{r}{||\overrightarrow{u}||}\ ||\overrightarrow{u}||$$

donc $m \in \mathcal{B}_0(a,r) \subset C \Longrightarrow m \in D \cap C$.

Ceci est absurde, donc a et b sont dans $\mathrm{Fr}(C) \subset \mathcal{E}(\mathrm{Fr}(C))$, par connexité $x \in [a,b] \subset \mathcal{E}(\mathrm{Fr}(C))$ d'où $C \subset \mathcal{E}(\mathrm{Fr}(C))$. Comme $\mathrm{Fr}(C) \subset \overline{C} = C$, avec C convexe, on a $\mathcal{E}(\mathrm{Fr}(C)) \subset C$ d'où l'égalité. ■

On a parlé de l'intérieur d'un convexe, or on sait que dans un espace vectoriel normé une boule ouverte non vide engendre l'espace vectoriel (Tome 2, Théorème 6.3). Ceci amène à introduire la dimension d'un convexe.

DÉFINITION 3.23. — *On appelle dimension d'un convexe C non vide de A espace affine, la dimension du sous-espace affine* $\mathrm{aff}(C)$ *engendré par C.*

THÉORÈME 3.24. — *Soit C un convexe non vide de A espace affine réel de dimension finie. On a* $\dim(C) = \dim(A)$ *si et seulement si* $\overset{\circ}{C} \neq \varnothing$.

Si $\overset{\circ}{C} \neq \varnothing$, soit $a \in \overset{\circ}{C}$, il existe $r > 0$, $\mathcal{B}_0(a,r) \subset C$. Mais alors, dans E direction vectorielle de A, pour tout $\overrightarrow{x}$ de norme $< r$, le point m tel que $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{x}$ est dans $\mathcal{B}_0(a,r)$ donc dans $\mathrm{aff}(C)$, ainsi que a, d'où $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{am} \in F$ direction de $\mathrm{aff}(C)$. Mais alors F contenant une boule ouverte de rayon $r > 0$ est E entier (Tome 2, Théorème 6.3) et $\dim(C) = \dim(A)$.

Réciproquement, si $\dim(C) = \dim(A) = n$, il existe dans C, $n+1$ points $a_0, a_1, \ldots, a_n$ affinement libres, (si le nombre maximum de points affinement libres de C était $p+1$, avec $p < n$, soit $b_0, \ldots, b_p$ une telle famille, pour tout m de C, la famille $b_0, b_1, \ldots, b_p, m$ étant affinement liée, on aurait $\overrightarrow{b_0m} \in \mathrm{Vect}\{\overrightarrow{b_0b_i}, 1 \leqslant i \leqslant p\} = G$, (voir Théorème 1.30); mais alors tout point x de $\mathrm{aff}(C)$ étant barycentre d'une famille finie de points m de C, on aurait aussi $\overrightarrow{b_0x} \in G$ par combinaison linéaire, donc la direction de $\mathrm{aff}(C)$ serait dans G, de dimension $p < n$, c'est absurde).

Partant donc de $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ affinement libres dans C, dans le repère $\mathcal{R}$ d'origine a_0, de vecteurs de base les $\overrightarrow{a_0a_i}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, l'isobarycentre g des $(a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ a pour coordonnées $x_i = \dfrac{1}{n+1}$, $i = 1, \ldots, n$ puisque :

$$\overrightarrow{a_0g} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n+1}\ \overrightarrow{a_0a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1}\ \overrightarrow{a_0a_i}.$$

Sur E direction de A on prend la norme $||\ \ ||_\infty$ associée à la base des $\overrightarrow{a_0a_i}$, si m de A est tel que $d(g,m) < \alpha$, c'est que les coordonnées de m sont du type $x_i = \dfrac{1}{n+1} + y_i$ avec $|y_i| < \alpha$, mais alors on aura :

$$\overrightarrow{a_0m} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n+1} + y_i \right) \overrightarrow{a_0a_i},$$

ou encore :

3.25. $\overrightarrow{a_0m} = \left(\dfrac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i \right) \overrightarrow{a_0a_0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\dfrac{1}{n+1} + y_i \right) \overrightarrow{a_0a_i}$, et si α est assez petit, on aura les $\dfrac{1}{n+1} + y_i > 0$ ainsi que $\dfrac{1}{n+1} - \sum_{i=1}^{n} y_i$, (disons si $\alpha < \dfrac{1}{(n+1)^2}$), et 3.25. montre alors que m est barycentre de $a_0, \ldots, a_n$ avec des coefficients positifs, donc $m \in C$. Finalement $\mathcal{B}_0(g,\alpha) \subset C$, d'où $\overset{\circ}{C} \neq \varnothing$, car $g \in \overset{\circ}{C}$ ■

Ces considérations topologiques sur les convexes, ne sont que le point de départ de résultats beaucoup plus riches. En particulier on peut justifier qu'un convexe C de dimension n de A espace affine de dimension n est tel que $\overset{\circ}{C}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, et que si C est un convexe compact de dimension n dans A affine de dimension n, il est en fait homéomorphe à la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

De même, nous avons vu lors de l'étude des *préhilbertiens réels*, que si K est une partie convexe complète de A affine métrique, (pour une norme sur sa direction associée à une forme quadratique définie positive), pour tout x de A il existe un et un seul y de K tel que $||\overrightarrow{xy}|| = d(y,K)$, (Théorème de Riesz, Tome 3, 14.30).

De plus ce point y est caractérisé par la condition :

$$\forall z \in K, \quad < x-y, z-y > \leqslant 0, \quad \text{(Tome 3, 14.32)}.$$

3.25.bis En fait, dans les espaces euclidiens A, on peut démontrer que si S est tel que, pour tout x de A, il existe au plus un y de S tel que $||\overrightarrow{xy}|| = d(x,S)$, alors S est convexe : c'est le *Théorème de Motzkin* que je me contente de citer. C'est dire la richesse de cette notion de convexité. Le lecteur curieux tirera profit des ouvrages de géométrie de Marcel Berger, (CEDIC/FERNAND NATHAN).

Un dernier résultat concernant la convexité en général avant d'étudier les polytopes.

THÉORÈME 3.26. *(de Helly). — Soient dans A espace affine réel de dimension n, une famille de $n+2$ parties C_i, convexes, telles que toute intersection de $n+1$ de ces parties soit non vide. Alors $C = \bigcap_{i=1}^{n+2} C_i$ est non vide.*

Analysons les données. Prendre une intersection de $n+1$ parties choisies dans $n+2$ c'est... en éliminer une.

Pour tout i, avec $1 \leqslant i \leqslant n+2$, il existe donc $a_i \in \bigcap_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n+2} C_j$.

Vous êtes ainsi à la tête de $n+2$ points dans A affine de dimension n, ils sont donc affinement liés, ou encore les vecteurs $\overrightarrow{a_1a_j}$, pour $2 \leqslant j \leqslant n+2$ sont liés. Il existe donc des scalaires, λ_j, $2 \leqslant j \leqslant n+2$, non tous nuls, tels que $\sum_{j=2}^{n+2} \lambda_j \overrightarrow{a_1a_j} = 0$, relation que l'on peut encore écrire, avec $\lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 - \ldots - \lambda_{n+2}$, et $\overrightarrow{a_1a_1} = 0$, sous la forme $\sum_{j=1}^{n+2} \lambda_j \overrightarrow{a_1a_j} = 0$ avec $\sum_{j=1}^{n+2} \lambda_j = 0$, et des λ_j non tous nuls. Mais alors si $I = \{j; \lambda_j > 0\}$ est non vide, comme $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 0$, il y aussi des $\lambda_i < 0$, (et si on en a des < 0, on en a des > 0, tiens, des signes, la convexité approche).

Soit donc $I = \{j; \lambda_j > 0\}$ et $J = \{j, \lambda_j \leqslant 0\}$, on a une partition de $\{1, 2, \ldots, n+2\}$ en $I \cup J$ et, avec $\alpha = \sum_{i\in I} \lambda_i$ et $\beta = \sum_{j\in J} \lambda_j$, on a $\alpha > 0$, $\beta < 0$ et $\alpha + \beta = 0$, (d'où $\beta = -\alpha$).

La relation $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i \overrightarrow{a_1a_i} = 0$ peut encore s'écrire sous la forme :

3.27. $\sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{a_1a_i} = \sum_{i\in J} (-\lambda_i) \overrightarrow{a_1a_i}$ et là, c'est gagné !

En effet, soit g le barycentre des (a_i, λ_i) pour $i \in I$ et g' celui des $(a_i, -\lambda_i)$, pour i dans J.

On a :

$$\alpha \overrightarrow{a_1g} = \left(\sum_{i\in I} \lambda_i\right) \overrightarrow{a_1g} = \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{a_1a_i},$$

et

$$(-\beta)\overrightarrow{a_1g'} = \left(\sum_{j\in J} -\lambda_j\right)\overrightarrow{a_1g'} = \sum_{j\in J}(-\lambda_j)\overrightarrow{a_1a_j},$$

d'où $\alpha\overrightarrow{a_1g} = (-\beta)\overrightarrow{a_1g'}$, (voir 3.27) et comme $-\beta = \alpha > 0$, on a $\overrightarrow{a_1g} = \overrightarrow{a_1g'}$ donc $g = g'$.

Enfin, pour $j_0 \in J$, pour chaque $i \in I$, on a $i \neq j_0$, donc C_{j_0} figure parmi les convexes pris pour définir a_i : c'est que $a_i \in C_{j_0}$, vrai $\forall i \in I$ et C_{j_0} convexe donc g est dans C_{j_0}, (stable par passage aux barycentres à coefficients positifs). Mais alors $g \in \bigcap_{j\in J} C_j$.

De même g' est dans chaque C_i pour i dans I, et comme $g = g'$, ce point est finalement dans tous les C_i du départ. ■

Des intersections non vides... tiens, tiens, j'ai déjà entendu cela dans l'étude des compacts. Dans ce cadre on peut améliorer ce résultat.

COROLLAIRE 3.28. — *Soit A un espace affine de dimension n, réel, et $\mathcal{C}$ une famille de cardinal $\geqslant n+2$, de parties convexes de A telle que toute sous-famille de $n+1$ éléments de $\mathcal{C}$ soit d'intersection non vide. Alors, si* $\operatorname{card}\mathcal{C}$ *fini, ou si tous les éléments de $\mathcal{C}$ sont compacts, la famille $\mathcal{C}$ est d'intersection non vide.*

Supposons d'abord que $k = \operatorname{card}\mathcal{C}$ soit fini, avec $k \geqslant n+2$, et notons C_i les éléments de $\mathcal{C}$, pour $1 \leqslant i \leqslant k$. Si $k = n+2$, $\bigcap_{i=1}^{n+2} C_i \neq \varnothing$: c'est le Théorème de Helly. On va ensuite procéder par récurrence sur k, le résultat est vrai si $k = n+2$, on le suppose vrai à l'ordre $k-1$; et soit k parties $C_1, C_2, \ldots, C_k$ telles que toute famille de $n+1$ de ces parties soit d'intersection non vide. Pour $i = 1, \ldots, k-1$, on pose $D_i = C_i \cap C_k$, on a $k-1$ convexes de A.

Une famille de $n+1$ parties D_{i_r}, pour $i_r \in \{1, \ldots, k-1\}$ est telle que $\bigcap_{r=1}^{n+1} D_{i_r} = C_k \cap (C_{i_1} \cap \ldots \cap C_{i_{n+1}})$: d'après le Théorème de Helly pour $k = n+2$, l'intersection est non vide.

L'hypothèse de récurrence s'applique et donne $\bigcap_{i=1}^{k-1} D_i = \bigcap_{j=1}^{k} C_j$ non vide, d'où le résultat pour tout $k \geqslant n+2$.

On suppose maintenant que $\mathrm{card}(\mathcal{C})$ est infini, mais qu'alors les C_i tels que $\mathcal{C} = (C_i)_{i\in I}$ soient convexes compacts, tels que toute famille de $n+1$ éléments de $\mathcal{C}$ soit d'intersection non vide. Alors toute intersection d'un nombre fini, k, d'éléments de $\mathcal{C}$ est non vide. C'est la première partie du corollaire si $k \geqslant n+2$, et si $k \leqslant n+1$, une telle intersection en contient une, non vide, de $n+1$ des C_i. Mais alors supposons que $C_{i_0} \cap \left(\bigcap_{i\in I-\{i_0\}} C_i \right) = \bigcap_{i\in I} C_i = \varnothing$, c'est que, $\forall x \in C_{i_0}$, $\exists i(x) \in I - \{i_0\}$, $x \notin C_{i(x)}$, donc $x \in \Omega_{i(x)} = A - C_{i(x)}$, ouvert, ($C_{i(x)}$ compact est fermé dans A affine métrique donc séparé, Tome 2, Théorème 2.15).

On a $C_{i_0} \subset \bigcup_{x\in C_{i_0}} \Omega_{i(x)}$, de ce recouvrement ouvert de C_{i_0} compact, on extrait un recouvrement fini : il existe $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans C_{i_0}, ($k \in \mathbb{N}^*$) tels que $C_{i_0} \subset \bigcup_{r=1}^{k} \Omega_{i(x_r)}$, (Tome 2, définition 2.1), mais alors :

$$C_{i_0} \cap \left(\bigcap_{r=1}^{k} C_{i(x_r)} \right) = C_{i_0} \cap \left(\bigcap_{r=1}^{k} (A \setminus \Omega_{i(x_r)} \right)$$
$$= C_{i_0} \cap \left(A \setminus \bigcup_{r=1}^{k} \Omega_{i(x_r)} \right)$$

est vide, ce qui contredit la première partie du corollaire. ■

3. Exemples de convexes : les polytopes

Avant de donner des exemples de convexes, et d'étudier plus particulièrement les polyèdres convexes et les polytopes, donnons deux procédés fournissant des convexes à partir de convexes connus.

THÉORÈME 3.29. — *Soient S et T deux convexes de A espace affine réel, et λ, μ deux scalaires réels, alors*
$C_o = \lambda S + \mu T = \{m, m \in A; \overrightarrow{om} = \lambda\overrightarrow{op} + \mu\overrightarrow{oq}, (p,q) \in S \times T\}$ *est un convexe de A, o origine fixée dans A.*

En effet, si $m_1, \ldots, m_k$ sont dans C_o, associés aux couples (p_i, q_i) de $S \times T$, si on se donne des $\alpha_i \geqslant 0$, de somme 1, le barycentre des (m_i, α_i)

vérifié :

$$\overrightarrow{om} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(\lambda\overrightarrow{op_i} + \mu\overrightarrow{oq_i}) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{op_i}\right) + \mu\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{oq_i},$$

mais S et T étant convexes, le barycentre p des (p_i, α_i) est dans S et celui q, des (q_i, α_i) est dans T, et avec $\overrightarrow{op} = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{op_i}$ et $\overrightarrow{oq} = \sum_{i=1}^{k}\alpha_i\overrightarrow{oq_i}$, on retrouve $\overrightarrow{om} = \lambda\overrightarrow{op} + \mu\overrightarrow{oq}$, avec $(p, q) \in S \times T$, donc m est dans C_0 qui est stable par passage aux barycentres à coefficients positifs, donc convexe. ■

REMARQUE 3.30. — L'indice de C_0 est là pour rappeler que ce convexe dépend du choix de l'origine. Comment? Et bien par translation, sauf si $\lambda + \mu = 1$, auquel cas C_o est indépendant de o.

En effet, soit o' une autre origine. A chaque couple (p, q) de $S \times T$, on associe d'une part m tel que $\overrightarrow{om} = \lambda\overrightarrow{op} + \mu\overrightarrow{oq}$ et d'autre part m' tel que $\overrightarrow{o'm'} = \lambda\overrightarrow{o'p} + \mu\overrightarrow{o'q}$, soit encore tel que $\overrightarrow{o'm'} = \lambda(\overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{op}) + \mu(\overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{oq})$, soit :

$$\overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{om'} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{o'o} + \lambda\overrightarrow{op} + \mu\overrightarrow{oq} = (\lambda + \mu)\overrightarrow{o'o} + \overrightarrow{om},$$

c'est donc que $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{om'} - \overrightarrow{om} = (\lambda + \mu - 1)\overrightarrow{o'o}$.

Donc, si $\lambda + \mu = 1$, $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{0}$, $m = m'$, les ensembles C_o et $C_{o'}$ sont les mêmes, et si $\lambda + \mu \neq 1$, on passe de C_o à $C_{o'}$ par la translation de vecteur $(\lambda + \mu - 1)\overrightarrow{o'o}$. ■

THÉORÈME 3.31. — *Soit E un espace vectoriel réel normé, direction de A espace affine réel métrique. Si C est un convexe de A, pour tout $\varepsilon > 0$, $V(C, \varepsilon) = \{x; x \in A, d(x, C) < \varepsilon\}$ est un convexe; si K est un convexe compact de A, $W(K, \varepsilon) = \{x; x \in A, d(x, K) \leqslant \varepsilon\}$ est convexe.*

Soit o une origine fixée dans A, on a x dans $V(C, \varepsilon)$ si et seulement si il existe $y \in C$ tel que $d(x, y) = ||\overrightarrow{xy}|| < \varepsilon$. Si on introduit alors $m \in \mathcal{B}_0(o, \varepsilon)$ tel que $\overrightarrow{om} = \overrightarrow{yx}$, on a :

$$\overrightarrow{ox} = \overrightarrow{oy} + \overrightarrow{yx} = \overrightarrow{oy} + \overrightarrow{om} \text{ donc } m \text{ est dans } C + \mathcal{B}_0(o, \varepsilon);$$

mais réciproquement, si pour un y de C et un m de $\mathcal{B}_0(o,\varepsilon)$ on considère x tel que $\overrightarrow{ox} = \overrightarrow{oy} + \overrightarrow{om}$ on aura :

$$d(y,x) = ||\overrightarrow{yx}|| = ||\overrightarrow{ox} - \overrightarrow{oy}|| = ||\overrightarrow{om}|| < \varepsilon,$$

donc x sera dans $V(C,\varepsilon)$ qui est donc $C + \mathcal{B}_0(o,\varepsilon)$, donc convexe, d'après le Théorème 3.29, les boules ouvertes ou fermées étant convexes, (Tome 2, Théorème 6.3).

De la même façon, soit K un compact, et $x \in A$ affine métrique, *la distance de x à K est atteinte* car soit $\delta = d(x,K) = \inf\big(d(x,y); y \in K\big)$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe y_n de K tel que $\delta \leqslant d(x,y_n) \leqslant \delta + \dfrac{1}{n+1}$, de la suite des $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on extrait une suite partielle convergente (Tome 2, Théorème 4.65), $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = y \in K$, et par continuité de la distance, on a $\delta = d(x,y)$.

On a $x \in W(K,\varepsilon) \iff \exists y \in K,\ ||\overrightarrow{yx}|| \leqslant \varepsilon,$

$\iff \exists y \in K,\ \exists m \in \mathcal{B}_f(o,\varepsilon)$ tel que $\overrightarrow{yx} = \overrightarrow{om},$

$\iff \exists y \in K,\ \exists m \in \mathcal{B}_f(o,\varepsilon),\ \overrightarrow{ox} = \overrightarrow{oy} + \overrightarrow{om},$

$\iff x \in K + \mathcal{B}_f(o,\varepsilon)$

avec les notations du Théorème 3.29, donc $W(K,\varepsilon)$ est convexe. ■

Une autre façon d'obtenir des convexes dans les espaces préhilbertiens réels est d'utiliser le produit scalaire.

DÉFINITION 3.32. – *Soit un espace affine réel A de direction E, espace vectoriel préhilbertien pour le produit scalaire noté $<,>$. On appelle sous-ensemble polaire de B partie de A, l'ensemble défini par :*

$$B^* = \{m; m \in A; < \overrightarrow{om}, \overrightarrow{op} > \leqslant 1,\ \forall p \in B\}.$$

THÉORÈME 3.33. — *Le sous-ensemble polaire B^* d'une partie B quelconque de A affine préhilbertien réel est convexe.*

On peut le vérifier directement : si m_1 et m_2 sont dans B^*, si m est un point du segment $[m_1,m_2]$, barycentre de (m_1,t) et $(m_2,1-t)$, avec $0 \leqslant t \leqslant 1$, soit $p \in B$, on a :
$t\ < \overrightarrow{om_1}, \overrightarrow{op} > \leqslant t$ et $(1-t)\ < \overrightarrow{om_2}, \overrightarrow{op} > \leqslant 1-t$, donc, en ajoutant, compte-tenu de la bilinéarité du produit scalaire, on a

$$< t\,\overrightarrow{om_1} + (1-t)\overrightarrow{om_2}, \overrightarrow{op} > = < \overrightarrow{om}, \overrightarrow{op} > \leqslant 1,$$

donc $m \in B^*$ qui est bien convexe. ■

On aurait pu aussi remarquer que l'application $u : A \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $u(m) = < \overrightarrow{om}, \overrightarrow{op} >$ est affine car :

$$\overrightarrow{u(m)u(n)} = u(n) - u(m) = < \overrightarrow{on} - \overrightarrow{om}, \overrightarrow{op} > = < \overrightarrow{mn}, \overrightarrow{op} >,$$

donc $\overrightarrow{u(m)u(n)}$ dépend linéairement de $\overrightarrow{mn}$, d'où u affine, (Théorème 1.52).

Mais alors, $]-\infty, 1]$ étant un convexe de $\mathbb{R}$,

$$u^{-1}(]-\infty, 1]) = \{m; m \in A, < \overrightarrow{om}, \overrightarrow{op} > \leqslant 1\}$$

est un convexe D_p de A, (Théorème 3.8) donc $B^* = \bigcap_{p \in B} D_p$ est un convexe de A.

Ces parties du type D_p vont nous conduire aux *polyèdres et polytopes.*

DÉFINITION 3.34. — *Soit A un espace affine de direction E. On appelle forme affine sur A, toute application affine u d'application linéaire associée une forme linéaire f élément du dual E^*.*

DÉFINITION 3.35. — *Soit u une forme affine non nulle sur l'espace affine réel A. On appelle hyperplan d'équation $u = 0$, l'ensemble :*
$H = \{m; m \in A; u(m) = 0\}$.
C'est un convexe qui détermine deux demi-espaces, les parties convexes :

$$R_+ = \{m; m \in A; u(m) \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad R_- = \{m; m \in A; u(m) \leqslant 0\}.$$

REMARQUE 3.36. — On pourrait définir aussi des demi-espaces par des inégalités strictes. Toutes ces parties sont convexes, images réciproques par u affine, d'intervalles de $\mathbb{R}$, donc de convexes.

Si *u est continue*, ce qui suppose E espace vectoriel normé et A métrique associé, les demi-espaces R_+ et R_- ainsi que l'hyperplan H sont fermés,

$$\text{et} \quad S_+ = \{m; m \in A; u(m) > 0\} \quad \text{et} \quad S_- = \{m; m \in A; u(m) < 0\}$$

sont ouverts. En particulier, si A est de dimension finie, u est toujours continue, (Tome 2, Corollaire 6.31), mais pour A de dimension infinie et u non continue, H ne sera pas fermé, (ni R_+ et R_- : voir Tome 2, chapitre 6, exercice 18); c'est pourquoi il peut être délicat de parler de demi-espaces ouverts ou fermés, ailleurs qu'en dimension finie.

EXEMPLE 3.37. — Dans un espace affine A de dimension finie n, si $\mathcal{R} = (o; \overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$ est un repère de A, un hyperplan H admet *une équation* du type :

3.38. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n - \beta_n = 0,$

les α_i n'étant pas tous nuls, et un demi-espace fermé est défini par une *inéquation* du type :

3.39. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \leqslant \beta_n$, (ou $\geqslant \beta_n$),

les inégalités étant strictes, pour des demi-espaces ouverts.

En effet, dans E^*, dual de E, un élément f se décompose dans la base duale $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$, (Tome 1, 6.108), en $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*$; soit la forme affine u définie sur A par $m \rightsquigarrow u(m) = f(\overrightarrow{om}) + u(o)$, en posant $u(o) = -\beta_n$, si $x_1, \ldots, x_n$ sont les coordonnées de m dans le repère $\mathcal{R}$, on aura m dans l'hyperplan H d'équation $u(m) = 0$ si et seulement si :

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(\overrightarrow{om}) - \beta_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i - \beta_n.$$

L'application $u : (x_1, \ldots, x_n) \rightsquigarrow \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n - \beta_n$ étant continue, (car polynomiale), H ainsi que :

$$R_+ = \{m; \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \geqslant \beta_n\} \text{ et } R_- = \{m; \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n \leqslant \beta_n\}$$

sont des fermés, $(u^{-1}(\{0\}), u^{-1}([0; +\infty[)$ et $u^{-1}(]-\infty, 0])$ respectivement). Les inégalités strictes définissent des demi-espaces ouverts. On considère évidemment la topologie de $\mathbb{R}^n$ espace produit, sur A affine réel de dimension n. (Voir 4.1).

DÉFINITION 3.40. — *On appelle polyèdre convexe de A espace affine réel toute intersection d'un nombre fini de demi-espaces «fermés» de A.*

Voir en 3.36 le pourquoi des « ».

DÉFINITION 3.41. — *On appelle polytope de A espace affine réel de dimension finie, tout polyèdre convexe compact et d'intérieur non vide.*

Si $\dim A = 2$, on parle de *polygone* au lieu de polytope.

Si $P = \bigcap_{i=1}^{n} R_i$ est un polyèdre convexe, avec les R_i qui sont des demi-espaces, on dira que l'on a une *écriture minimale* de P s'il n'existe aucune

façon d'écrire $P = \bigcap_{j=1}^{q} S_j$, avec $q < n$, (et les S_j demi-espaces).

Par exemple le segment $[a, b]$ de la figure 3.41, supposé dans un plan affine, est un polyèdre avec en 3.41.1. une écriture minimale, mais non en 3.41.2.

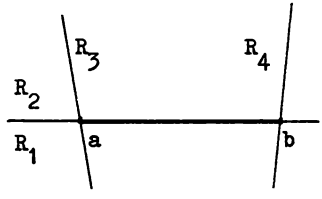


Fig. 3.41.1

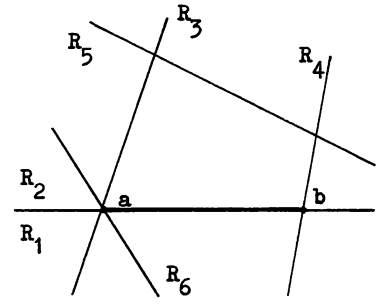


Fig. 3.41.2

THÉORÈME 3.42. — *Soit P un polyèdre convexe d'intérieur non vide de A espace affine réel de dimension finie, et $P = \bigcap_{i=1}^{n} R_i$ une écriture minimale de P. On note H_i l'hyperplan frontière de R_i.*

Alors $H_i \cap P$ est un polyèdre convexe d'intérieur non vide dans l'hyperplan H_i; et on a la frontière de P qui est la réunion des $H_i \cap P$.

3.43. — Dans ce cas $H_i \cap P$ est appelée $i^{ème}$ face de P, (on parlera de côté si A est de dimension 2).

Pour tout i compris entre 1 et n, avec $P' = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} R_j$, on a $P = P' \cap R_i$, et $P \neq P'$, (sinon, écriture non minimale) donc $P' \not\subseteq R_i$: soit $x \in P' \setminus R_i$, et soit a dans $\overset{\circ}{P}$, on sait qu'alors $a \in \overset{\circ}{P'}$, donc (Théorème 3.17) $[a, x[\subset \overset{\circ}{P'}$.

Mais, si u_i est une forme affine telle que R_i soit l'ensemble des m tels que $u_i(m) \geqslant 0$ on a $u_i(a) \geqslant 0$ et $u_i(x) < 0$: la fonction continue u_i s'annule sur «l'intervalle $[a, x[$», (intervalle quand on paramètre) : il existe $y \in [a, x[\subset \overset{\circ}{P'}$ tel que $u_i(y) = 0$, donc tel que $y \in H_i$.

Mais alors $H_i \cap P = (H_i \cap R_i) \cap \left(\bigcap_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} R_j \right) = H_i \cap P'$ est un polyèdre convexe de l'hyperplan H_i, (si u_j est une «équation» de H_j dans l'espace affine A, les solutions du système affine $u_i(m) = 0$, $u_j(m) = 0$ forment

un sous-espace de dimension $\dim A - 2$, (u_i et u_j indépendantes sinon l'écriture de P n'est pas minimale), sous-espace de l'hyperplan H_i, donc en fait $H_i \cap H_j$ est un hyperplan de H_i et les m de H_i tels que $u_j(m) \geqslant 0$ (ie. $m \in R_j$) sont dans un demi-espace de H_i); et avec O ouvert de A tel que $y \in O \subset P'$, (puisque $y \in \overset{\circ}{P'}$), on aura $y \in H_i \cap O \subset (H_i \cap P')$, et comme $H_i \cap O$ est un ouvert de H_i, on a finalement y dans l'intérieur de $H_i \cap P = H_i \cap P'$: on a bien $H_i \cap P$ polyèdre convexe d'intérieur non vide dans l'hyperplan H_i.

Puis, avec $P = \bigcap_{i=1}^{n} R_i$, fermé, et $\overset{\circ}{P} = \overset{\circ}{\bigcap_{i=1}^{n}} R_i = \bigcap_{i=1}^{n} \overset{\circ}{R}_i$, (Tome 2, Théorème 1.27), on a $\mathrm{Fr}(P) = P \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} \overset{\circ}{R}_i \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (P \setminus \overset{\circ}{R}_i)$;

puis :

$$\begin{aligned} P \setminus \overset{\circ}{R}_i &= \left(\bigcap_{j=1}^{n} R_j \right) \setminus \overset{\circ}{R}_i \\ &= \{x; \forall j = 1, \ldots, n,\ x \in R_j ; x \notin \overset{\circ}{R}_i\} \\ &= \left(\bigcap_{j=1}^{n} R_j \right) \cap \left(R_i \setminus \overset{\circ}{R}_i \right), \quad \text{avec } R_i \setminus \overset{\circ}{R}_i = H_i \end{aligned}$$

donc $P \setminus \overset{\circ}{R}_i = H_i \cap P$, (c'est aussi $H_i \cap P'$), et finalement :

$$\mathrm{Fr}(P) = \bigcup_{i=1}^{n} (H_i \cap P). \qquad \blacksquare$$

REMARQUE 3.44. — La frontière de P et donc, (si $P = \bigcap_{i=1}^{n} R_i$ est une écriture minimale), une réunion de n polyèdres convexes d'intérieur non vide, dans des hyperplans de A. Comme dans un espace vectoriel normé un ouvert non vide engendre l'espace, (Tome 2, Théorème 6.3), ces faces, notées $\mathrm{Face}_i(P) = P \cap H_i$, engendrent chacune l'hyperplan H_i la contenant, donc les hyperplans H_i (et les régions R_i) sont déterminés de manière unique, (à la numérotation près) dans une écriture minimale, à partir de la frontière de P.

REMARQUE 3.45. — Si P est un polyèdre convexe d'intérieur non vide de A espace affine de dimension finie d sur $\mathbb{R}$, ses faces sont des polyèdres convexes d'intérieur non vide dans des espaces affines de dimension $d-1$: on les appelle $(d-1)\cdot$ faces de P.

À leur tour, elles ont des faces qui sont des polyèdres convexes d'intérieur non vide dans des espaces de dimension $d-2$: ce sont les $(d-2)\cdot$ faces de P, et on continue ainsi jusqu'aux $1\cdot$ faces, (appelés arêtes) de P, et les $0\cdot$ faces qui seront... les sommets de P.

REMARQUE 3.46. — Tout ce qui précède s'applique aux polytopes, (on rajoute le mot compact) et conduit aux faces qui sont des polytopes, les arêtes devenant des segments, les $2\cdot$ faces étant des polygones.

Par exemple un cube de A affine réel de dimension trois aura six $2\cdot$faces, (qui sont des carrés), douze arêtes et huit sommets.

On peut alors vérifier que les sommets d'un polytope sont en nombre fini, et que P en est l'enveloppe convexe.

Je terminerai cet aperçu sur les polytopes par la justification de la **formule d'Euler**.

THÉORÈME 3.47. — *Soit un polytope de A affine réel de dimension trois ayant φ faces, α arêtes et σ sommets, on a* $\sigma - \alpha + \varphi = 2$.

Soit $P = \bigcap_{i=1}^{n} R_i$ une écriture minimale du polytope P, (voir Théorème 3.42) et la face $F_1 = P \cap H_1$, avec H_1 hyperplan frontière de R_1, F_1 est un polygone d'intérieur non vide dans le plan H_1, (on est en dimension 3).

Soit $b \in \overset{\circ}{F}_1$, (intérieur pris dans la topologie du plan H_1). On suppose en fait l'espace affine euclidien, et soit D la perpendiculaire à H_1 passant par b.

Si le polytope P est dans le demi-espace R_1 de frontière H_1, on va choisir, sur la demi-droite portée par D, qui n'est pas dans R_1, un point a tel que :

1) a soit dans chaque $\overset{\circ}{R}_i$, pour $i \geqslant 2$;

2) si p et q sont deux sommets de P, a, p et q ne soient pas alignés, (voir figure 3.47).

On va justifier qu'un tel choix est possible, et pour cela considérons un repère $\mathcal{R} = (b, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ orthonormé tel que $H_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et que $\overset{\circ}{R}_1$ ait pour inéquation $x_3 < 0$.

On cherche a de coordonnées $(0,0,x_3)$, avec $x_3 > 0$; de plus, si pour $i \geqslant 2$, $\overset{\circ}{R}_i$ a une inéquation du type $\alpha_i x_1 + \beta_i x_2 + \gamma_i x_3 + h_i > 0$, on a $h_i > 0$, (inéquation vérifiée en b de coordonnées $(0,0,0)$ qui est intérieur à la face F_1), et les points de D dans $\overset{\circ}{R}_i$ vérifient $\gamma_i x_3 + h_i > 0$, donc :

soit $\gamma_i = 0$: tout D convient;

soit $\gamma_i > 0$: on a $x_3 > -\dfrac{h_i}{\gamma_i}$;

soit $\gamma_i < 0$: on a $x_3 < -\dfrac{h_i}{\gamma_i}$.

Comme on veut un $x_3 > 0$, il reste comme condition :

$$0 < x_3 < \inf\left\{-\frac{h_i}{\gamma_i}, i \geqslant 2, \gamma_i < 0\right\} : \text{ il y a beaucoup de tels } x_3 !$$

Comme chaque droite $D_{p,q}$, avec p et q sommets distincts de P, coupe D en au plus un point, il existe finalement de tels points a sur D.

Soit H_1' un plan parallèle à H_1, (donc d'équation $x_3 = k_3 = \text{cte}$, avec $k_3 < 0$).

On effectue la projection stéréographique de centre a sur H_1', c'est-à-dire qu'à tout point de x de A n'appartenant pas au plan parallèle à H_1 passant par a, on associe $x' = H_1' \cap D_{a,x}$, ($D_{a,x}$ droite affine engendrée par a et x).

La face F_1 donne pour image un polygone F_1' du plan H_1', homothétique de H_1 en fait. Les sommets de P qui ne sont pas sur la face F_1 donnent des images dans l'intérieur $\overset{\circ}{F}_1'$.

En effet, si q est un tel sommet, $[q,b]$ ne coupe aucune arête de la face F_1, donc le segment image $[q',b']$ ne coupe pas la frontière de F_1', or b' homothétique de b intérieur à F_1 est intérieur à F_1'. Deux sommets distincts de P donnent des points distincts de H_1', (c'est la condition a,p,q non alignés). On compte alors la somme de tous les angles obtenus sur la figure projetée.

Soit k le nombre de sommets de la face F_1, on a un polygone F_1' ayant k sommets, et il y a $\sigma - k$ points intérieurs.

Les angles associés à un point intérieur ont une somme de 2π, d'où pour ces points une somme de $2\pi(\sigma - k)$.

La somme des angles d'un polygone ayant k côtés étant de $(k-2)\pi$, (récurrence sur k, avec pour le triangle, $(k=3)$, une somme de π), on a finalement une somme d'angles égale à $\pi(2\sigma - 2k + k - 2)$, ou encore à $\pi(2\sigma - k - 2)$.

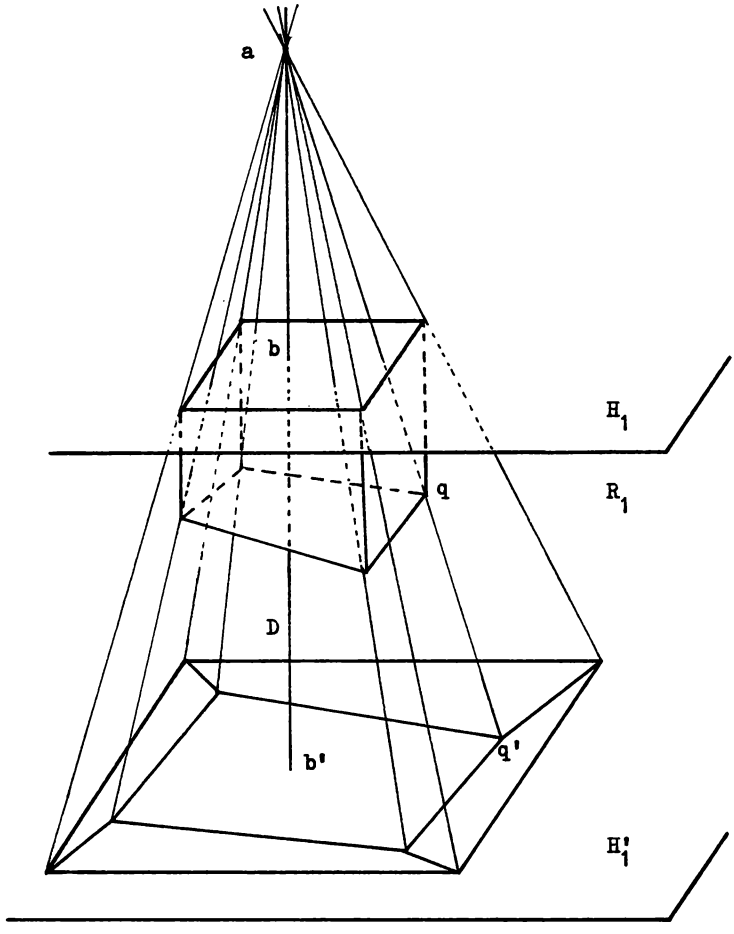


Fig. 3.47

Autre calcul

Soit φ'_i le nombres de faces de P, autres que F_1, ayant i côtés.

Une telle face se projette en un polygone ayant i côtés, donc la somme des angles du polygone projeté est $\pi(i-2)$, ces φ'_i polygones donnent des angles de somme $\sum_i \varphi'_i \pi(i-2)$. Or tout angle de la figure projetée appartient à l'image d'un et d'un seul polygone de la frontière de P, autre que F_1, donc $\sum_i \pi\varphi'_i(i-2) = \pi(2\sigma - k - 2)$.

On a $\sum_i \varphi'_i = \varphi - 1$, (toutes les faces, sauf F_1); puis on a φ'_i faces (autres que F_1) ayant i arêtes, mais chaque arête est commune à deux faces. Quand on ajoute les k arêtes de la face F_1, (qui sont communes à F_1 et à l'une des faces autres que F_1), on a $\sum_i i\varphi'_i + k = 2\alpha$. On a donc :

$2\alpha - k - 2(\varphi - 1) = 2\sigma - k - 2,$

soit $2\alpha - 2\varphi = 2\sigma - 4 \iff \sigma - \alpha + \varphi = 2.$ ■

On va déduire de la formule d'Euler, le nombre de types de polytopes réguliers de A espace affine réel de dimension trois.

THÉORÈME 3.48. — *Soit A espace affine réel de dimension 3 et P un polytope tel que chaque sommet soit commun à r faces et chaque face admette s sommets. Alors le couple (r, s) ne peut prendre que 5 valeurs : (3, 3); (3, 4); (3, 5); (4, 3) et (5, 3).*

On a φ faces, chacune ayant s arêtes, donc, chaque arête étant commune à deux faces, on a $2\alpha = s\varphi$.

Chaque arête a deux sommets, donc 2α représente le nombre de sommets, chacun étant compté r fois puisque par chaque sommet il passe r arêtes, (pour donner r faces). Donc $2\alpha = r\sigma = s\varphi$, d'où $\frac{2\alpha}{r} = \sigma$ et $\frac{2\alpha}{s} = \varphi$. La formule d'Euler donne :

$\frac{2\alpha}{r} - \alpha + \frac{2\alpha}{s} = 2$ donc, en simplifiant par 2α, on a :

3.49. $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}.$

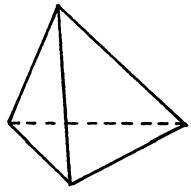
Si $r \geqslant 4$ *et* $s \geqslant 4$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{2}$, on devrait avoir $\alpha \leqslant 0$: c'est exclu.

Comme P est un polytope, les faces étant des polygones, on a $s \geqslant 3$, et par chaque sommet il passe au moins 3 faces donc $r \geqslant 3$.

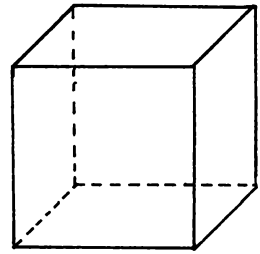
Si $r = 3$, on a $\frac{1}{3} + \frac{1}{s} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}$, or $s \geqslant 6$ est exclu, sinon :

$\frac{1}{3} + \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$: on aurait $\alpha \leqslant 0$ donc $s \leqslant 5$: a priori on peut avoir les couples (3, 3); (3, 4) et (3, 5).

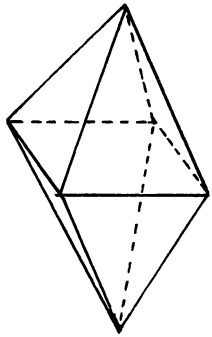
Si $s = 3$, la symétrie des rôles joués par r et s dans la formule 3.49 donne $r = 3$, 4 ou 5.



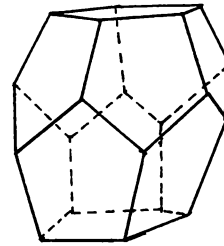
tétraèdre



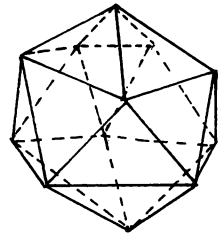
hexaèdre



octoèdre



dodécaèdre



icosaèdre

On a finalement les polytopes suivants :

(r, s)	(3, 3)	(3, 4)	(4, 3)	(3, 5)	(5, 3)
σ	4	8	6	20	12
α	6	12	12	30	30
φ	4	6	8	12	20
Type	Tétraèdre	Hexaèdre	Octaèdre	Dodécaèdre	Icosaèdre

Le nom, tiré du grec, fait référence au nombre de faces. Il est à remarquer que ces formes géométriques existent dans les squelettes du plancton, ainsi que dans les œuvres d'art, les dés par exemple.

Voici une figuration de ces polytopes qui, malheureusement, n'est pas une œuvre d'art!

EXERCICES

1. Soit, dans un plan affine réel P, une famille finie $\mathcal{S}$ de segments disjoints parallèles, ayant 3 à 3 une sécante commune. Montrer que tous les segments de $\mathcal{S}$ ont une sécante commune.

2. Soit C convexe compact de A espace affine réel de dimension finie d, non réduit à un singleton.
Soit x dans C, D une droite contenant x, montrer que $D \cap C$ est un segment, (appelé corde).
Montrer qu'il existe $z \in C$ tel que toute corde $[u, v]$ de C contenant z vérifie $\dfrac{1}{d} \leqslant \dfrac{\overline{zu}}{\overline{vz}} \leqslant d$.

3. Soit E un espace hermitien, $u \in L(E)$.
On pose $H(u) = \{< x, u(x) >; ||x|| = 1\}$.
Montrer que $H(u)$ est un compact convexe. Ce compact convexe est le haussdorfien de u.

4. Montrer que tout fermé borné convexe de A espace affine métrique réel est enveloppe convexe de sa frontière.

5. Soit E un espace vectoriel réel, normé, de dimension finie et f convexe de E dans $\mathbb{R}$, montrer que f est continue.

SOLUTIONS

1. On suppose $\text{card}(\mathcal{S}) > 3$, le résultat étant obtenu sinon. Notons $(S_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, les éléments de $\mathcal{S}$.
Si deux segments S_i et S_j ont même support D, tout autre segment S_k est contenu dans D, sinon une sécante Δ à S_i et S_k n'étant pas parallèle à D, (on suppose $S_k \not\subset D$) coupe S_i, en a et $(D) \cap \Delta = \{a\}$, avec $a \notin S_j$, $(S_i \cap S_j = \varnothing)$, donc il n'y a pas de sécante commune à S_k, S_i et S_j, (figure 1).

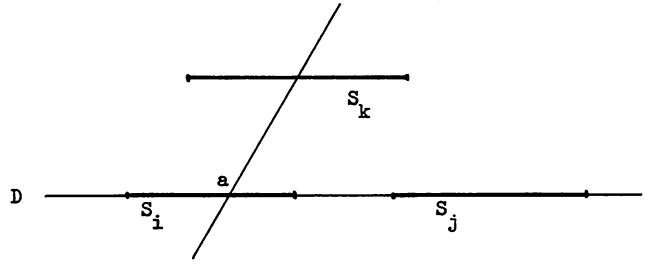


Fig. 1.

Donc, soit tous les S_i sont sur une même droite D, qui est sécante commune, soit ils sont des supports parallèles disjoints et dans ce cas une sécante commune à 3 d'entre eux n'est pas parallèle à cette direction commune, D. On prend un repère d'axe $0y$ parallèle aux segments.
Si $S_i = \{m; (x, y); x = x_i, \alpha_i \leqslant y \leqslant \beta_i\}$, on considère l'ensemble C_i des couples (α, β) tels que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ coupe le segment S_i, ce qui équivaut à la double inégalité :

$$\alpha_i \leqslant \alpha x_i + \beta \leqslant \beta_i,$$

donc C_i est l'ensemble de $\mathbb{R}^2$, des couples (α, β), tels que :

$$\alpha x_i + \beta - \alpha_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \alpha x_i + \beta - \beta_i \leqslant 0.$$

C'est une intersection de deux demi-plans fermés, donc c'est un convexe du plan $\mathbb{R}^2$, (voir définition 3.40). Or 3 à 3, les C_i sont d'intersection non vide, (si on se donne i, j, k distincts, il existe une sécante aux trois segments S_i, S_j et S_k, sécante non parallèle à $0y$, donc ayant une équation du type $y = \alpha x + \beta$ avec (α, β) dans C_i, C_j et C_k).
Mais alors, (Corollaire 3.28), tous les C_i sont d'intersection non vide, et pour $(\alpha, \beta) \in \bigcap_{i=1}^{n} C_i$, la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est sécante commune à tous les segments S_i.

2. Une droite D étant convexe, $D \cap C$ est un convexe, fermé borné de D, avec D homéomorphe à $\mathbb{R}$, donc $D \cap C$ est un compact convexe donc connexe de $\mathbb{R}$: c'est un segment.
Soit o une origine de A, pour tout x de C on note :

$$C_x = \left\{ m; \overrightarrow{om} = \frac{1}{d+1}\,\overrightarrow{ox} + \frac{d}{d+1}\,\overrightarrow{oq},\ q \text{ parcourant } C \right\}.$$

En fait C_x est le translaté de l'homothétique de C par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{ox}}{d+1}$, donc C_x est compact et convexe, translation et homothétie étant continues (compacité conservée) et affine, (convexité conservée, voir Théorème 3.8).
Ces convexes compacts $(C_x)_{x\in C}$ vérifient les hypothèses du corollaire 3.28. du Théorème de Helly.
En effet, soient $d+1$ parties C_{x_i}, $1 \leqslant i \leqslant d+1$, et soit y l'équibarycentre des x_i, on a :

$$\overrightarrow{oy} = \frac{1}{d+1}\sum_{i=1}^{d+1}\overrightarrow{ox_i} = \frac{\overrightarrow{ox_i}}{d+1} + \frac{1}{d+1}\cdot\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d+1}\overrightarrow{ox_j}.$$

Si z est l'isobarycentre des (x_j), pour $1 \leqslant j \leqslant d+1$, avec $j \neq i$, on a z dans C, convexe contenant les x_j, et $\displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d+1}\overrightarrow{ox_j} = d\,\overrightarrow{oz}$, donc y est tel que $\overrightarrow{oy} = \dfrac{1}{d+1}\,\overrightarrow{ox_i} + \dfrac{d}{d+1}\,\overrightarrow{oz}$ avec $z \in C$: on a bien y dans C_{x_i}, et ce pour tout i entre 1 et $d+1$, d'où $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{d+1} C_{x_i} \neq \varnothing$.
On applique le Théorème de Helly, il existe donc t dans $\displaystyle\bigcap_{x\in C} C_x$.
Soit $[u,v]$ une corde passant par t, avec $u \neq v$. Une telle corde existe, sinon pour toute droite D contenant t, $D \cap C = [u,v]$ avec $u = v = t$, d'où $C = \{t\}$, ce qui est exclu.
Comme $t \in C_u$, il existe m dans C tel que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ot} &= \frac{\overrightarrow{ou}}{d+1} + \frac{d}{d+1}\,\overrightarrow{om} = \frac{d+1-d}{d+1}\,\overrightarrow{ou} + \frac{d}{d+1}\,\overrightarrow{om}\\ &= \overrightarrow{ou} + \frac{d}{d+1}\,(\overrightarrow{om} - \overrightarrow{ou}),\end{aligned}$$

soit encore tel que :

$$\overrightarrow{ot} - \overrightarrow{ou} = \overrightarrow{ut} = \frac{d}{d+1}\,\overrightarrow{um}.$$

Si $t \neq u$, $\overrightarrow{um}$ est colinéaire à $\overrightarrow{ut}$, donc à $\overrightarrow{uv}$, avec $m \neq u$, et comme la corde $[u,v]$ est $C \cap D_{u,v}$, c'est que m est entre u et v, d'où $\overrightarrow{um} = \lambda\overrightarrow{uv}$ avec $\lambda \in]0,1]$ et $\overrightarrow{ut} = \dfrac{d}{d+1}\,\lambda\,\overrightarrow{uv} = \dfrac{d\lambda}{d+1}\,(\overrightarrow{ut} + \overrightarrow{tv})$, donc :

$$\left(1 - \frac{d\lambda}{d+1}\right)\overrightarrow{ut} = \frac{d\lambda}{d+1}\,\overrightarrow{tv} \quad\text{et}\quad \frac{\overrightarrow{ut}}{\overrightarrow{tv}} = \frac{\dfrac{d\lambda}{d+1}}{1 - \dfrac{d\lambda}{d+1}}.$$

Comme $\lambda \in]0,1]$, $1 - \dfrac{d\lambda}{d+1} \geqslant 1 - \dfrac{d}{d+1} = \dfrac{1}{d+1}$, d'où :

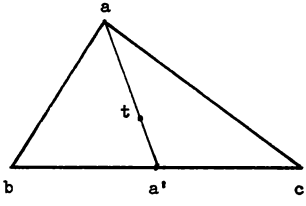
$$\frac{\overline{ut}}{\overline{tv}} \leqslant \frac{\dfrac{d\lambda}{d+1}}{\dfrac{1}{d+1}} = d\lambda \leqslant d.$$

Si $u = t$, $\overrightarrow{ut} = 0$, on a encore $\dfrac{\overline{ut}}{\overline{tv}} \leqslant d$.

Le point t est donc tel que $\overrightarrow{ut} = \alpha \overrightarrow{tv}$ avec $\alpha \leqslant d$.

En traduisant l'appartenance de t à C_v, on obtiendrait une relation en $\overrightarrow{vt} = \beta \overrightarrow{tu}$ avec $\beta \leqslant d$. Mais alors $t = v$ est exclu, car $\overrightarrow{uv} = \alpha \overrightarrow{vv}$ serait nul, ainsi que $t = u$ exclu, car on aurait $\overrightarrow{vu} = \beta \overrightarrow{uu} = 0$. Il en résulte que si $C \neq \{t\}$, $t \in \overset{\circ}{C}$, (si t est sur la frontière, en prenant $u = t$, $v \neq u$ sur la frontière, on aurait une corde avec $u \neq v$ et $t = u$), donc on peut écrire $\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\overline{tu}}{\overline{vt}} = \alpha$ avec $\alpha \leqslant d$ et $\beta \leqslant d$, soit encore $\dfrac{1}{d} \leqslant \dfrac{\overline{tu}}{\overline{vt}} \leqslant d$, pour toute corde $[u, v]$ passant par t.

On peut remarquer que d est la meilleure borne possible. Par exemple, pour un triangle (plein) T de sommets (a, b, c) dans un plan affine, le point t centre de gravité est tel que pour la corde $[a', a]$ passant par a, (médiane), on a $\dfrac{\overline{ta'}}{\overline{at}} = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{\overline{ta}}{\overline{a't}} = 2$.



3. L'application u, linéaire en dimension finie est continue, et le produit scalaire étant continu de E^2 dans $\mathbb{C}$, l'application $x \rightsquigarrow < x, u(x) >$ est continue de E dans $\mathbb{C}$ donc, $H(u)$, image continue de la sphère unité, compacte, est un compact de $\mathbb{C}$.

Pour justifier la convexité de $H(u)$, on part de deux éléments $< x, u(x) >$ et $< y, u(y) >$ de $H(u)$, avec x et y sur S_1, sphère unité de E, et il s'agit de montrer que pour tout t réel dans $[0, 1]$, $t < x, u(x) > +(1-t) < y, u(y) >$ est dans $H(u)$, donc il nous faut trouver z de S_1 tel que $< z, u(z) >= t < x, u(x) > +(1-t) < y, u(y) >$.

Premier cas : x et y sont liés, par exemple il existe λ complexe tel que $x = \lambda y$. Alors, on a

$$t < x, u(x) > +(1-t) < y, u(y) > = (t|\lambda|^2 + (1-t)) < y, u(y) >,$$

et comme $||x|| = ||y|| = 1$, on a $|\lambda|^2 = 1$, donc $t|\lambda|^2 + 1 - t = 1$, l'élément y convient comme valeur de z.

Deuxième cas : x et y sont indépendants.
Posons $a = < x, u(x) >$ et $b = < y, u(y) >$. Si $a = b$, on a
$t < x, u(x) > +(1-t) < y, u(y) >= (t+1-t)a = a = < x, u(x) >$, donc $z = x$ convient.
On écarte ce cas, et avec $a \neq b$, on considère l'application $u' = \dfrac{1}{a-b}\, u - \dfrac{b}{a-b}\, I$, I désignant l'identité de E dans E. On a donc $u = (a-b)u' + bI$, donc

$$\begin{aligned} H(u) &= \{< x, (a-b)u'(x) + bx >; ||x|| = 1\} \\ &= \{(a-b)\ < x, u'(x) > +b; ||x|| = 1\} \\ &= \{(a-b)\tau + b; \tau \in H(u')\} : \end{aligned}$$

$H(u)$ est l'image de $H(u')$ par la composée d'une similitude et d'une translation. La connaissance de $H(u')$ renseignera sur $H(u)$.

On a $$< x, u'(x) > = \frac{1}{a-b}\ (< x, u(x) > \ - b < x, x >)$$
$$= \frac{1}{a-b}(a-b) = 1, \quad (\text{car } ||x|| = 1),$$

et $$< y, u'(y) > = \frac{1}{a-b}\ (< y, u(y) > -b < y, y >)$$
$$= \frac{1}{a-b}(b-b) = 0, \quad (\text{car } ||y|| = 1).$$

On cherche alors un nombre complexe ρ, de module 1, tel qu'en posant $\psi(t) = t\rho x + (1-t)y$, l'image de $[0,1]$ par $t \rightsquigarrow < \psi(t), u'(\psi(t)) >$ soit contenue dans $\mathbb{R}$. Notons φ cette application, on a

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= < t\rho x + (1-t)y, u'(t\rho x + (1-t)y) > \\ &= < t\rho x + (1-t)y, t\rho u'(x) + (1-t)u'(y) > \\ &= t^2|\rho|^2\ < x, u'(x) > +(1-t)^2\ < y, u'(y) > \\ &\quad + t(1-t)(\overline{\rho} < x, u'(y) > +\rho < y, u'(x) >). \end{aligned}$$

Comme $< x, u'(x) > = 1$ et $< y, u'(y) > = 0$, avec $|\rho| = 1$, il vient :

$$\varphi(t) = t^2 + t(1-t)(\overline{\rho} < x, u'(y) > \ + \rho < y, u'(x) >),$$

et ces valeurs seront réelles, si et seulement si le coefficient de $t(1-t)$ est réel, donc égal à son conjugué, ce qui se traduit par l'égalité :

$$\overline{\rho} < x, u'(y) > \ + \rho < y, u'(x) > = \ \rho < u'(y), x > \ + \overline{\rho} < u'(x), y >,$$

ou encore :

$$\overline{\rho}(< x, u'(y) > \ - \ < u'(x), y >) \ = \ \rho(< u'(y), x > \ - \ < y, u'(x) >).$$

On peut remarque que les coefficients de ρ et $\overline{\rho}$ sont conjugués l'un de l'autre. On a donc, si $< x, u'(y) > \ - \ < u'(x), y > = 0$, une équation réduite à $0 \cdot \overline{\rho} = 0 \cdot \rho$: tout ρ de module 1 convient, et si $\omega = < x, u'(y) > \ - \ < u'(x), y > \neq 0$,

une équation qui s'écrit $\dfrac{\overline{\rho}}{\rho} = \dfrac{\overline{\omega}}{\omega} = e^{-2i\theta}$ si $\omega = re^{i\theta}$. Le nombre complexe $\rho = e^{i\theta}$ convient. Ce choix de ρ ne dépend que de x et y, pas de t dans $[0,1]$, et pour ce choix de ρ on a, pour tout t de $[0,1]$,

$$\varphi(t) = < t\rho x + (1-t)y, u'(t\rho x + (1-t)y) > \text{ réel.}$$

Pour revenir à $H(u')$, il faut considérer des vecteurs de la sphère unité. Or $t\rho x + (1-t)y = 0$ est impossible car $t\rho$ et $1-t$ n'étant pas nuls en même temps, x et y seraient dépendant, ce qui est exclu.
Mais alors, l'application v, continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$$v(t) = \langle \frac{t\rho x + (1-t)y}{||t\rho x + (1-t)y||}, u'\left(\frac{t\rho x + (1-t)y}{||t\rho x + (1-t)y||}\right)\rangle$$

est en fait à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\left(v(t) = \dfrac{\varphi(t)}{||t\rho x + (1-t)y||^2}\right)$, on a :

$$\begin{aligned} v(0) &= < y, u'(y) > = 0, \\ v(1) &= \langle \frac{\rho x}{||\rho x||}, \frac{u'(\rho x)}{||\rho x||}\rangle = \overline{\rho}\rho < x, u'(x) > \\ &= 1, \text{ puisque } |\rho| = 1 \text{ et } ||x|| = 1, \end{aligned}$$

donc, par le Théorème des valeurs intermédiaires, (Tome 2, corollaire 7.7), $v([0,1])$ contient $[0,1]$. Comme $H(u')$ contient $v([0,1])$, finalement le segment $[0,1]$ est contenu dans $H(u')$, et l'image de $[0,1]$ par l'application :
$\tau \rightsquigarrow \tau(a-b) + b$, c'est-à-dire le segment d'extrémités b et a est dans $H(u)$.
En revenant au départ du deuxième cas, on a justifié que, pour a et b dans $H(u)$, le segment d'extrémités a et b est dans $H(u)$, *d'où $H(u)$ convexe.*

4. Soit B un fermé borné convexe de A.
Comme $\mathrm{Fr}(B) \subset B$, en passant aux enveloppes convexes, notées $\mathcal{E}(\mathrm{Fr}(B))$ et $\mathcal{E}(B)$, on a $\mathcal{E}(\mathrm{Fr}(B)) \subset \mathcal{E}(B) = B$, puisque B est convexe.

Puis, si $b \in B$, et si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire de E direction de A, la droite $D = \{b + t\overrightarrow{u}\,; t \in \mathbb{R}\}$ est un convexe de A, $D \cap B$ est un convexe de A. De plus, la droite affine, translatée d'une droite vectorielle, sous-espace de dimension finie de E, est un fermé de A, (voir Tome 2, Corollaire 6.32), donc $D \cap B$ est un convexe fermé, borné, (car B est borné) de la droite D, homéomorphe à $\mathbb{R}$: c'est un segment $[m,n]$, puisque convexe implique connexe, donc $D \cap B$ est intervalle, fermé, borné.

Si $m \notin \mathrm{Fr}(B)$, $m \in \overset{\circ}{B}$, alors $\exists r > 0$ tel que la boule ouverte $\mathcal{B}_0(m,r) \subset B$, mais alors il y aurait des points du type $m + t\overrightarrow{u}$, avec $|t| < r$, qui seraient dans $D \cap B$ et hors du segment $[m,n]$: c'est exclu. De même $n \in \mathrm{Fr}(B)$ et b, point du segment $[m,n]$, est bien alors dans l'enveloppe convexe de la frontière de B.

REMARQUE. — Si A est de dimension finie, B est compact convexe, et on a rejustifié le Théorème 3.22, mais si A est de dimension infinie B n'est pas forcément compact. D'ailleurs, si B est compact en dimension infinie, $\overset{\circ}{B} = \varnothing$,

(donc $B = \operatorname{Fr} B$ dans ce cas), sinon l'existence d'une boule ouverte de rayon non nul, $\mathcal{B}_0(b,r)$ dans B compact, nous donnerait une boule fermée, $\mathcal{B}_f(b,r)$, avec $r > 0$, compacte car fermée dans B, par translation et homothétie la boule fermée $\mathcal{B}_f(0,1)$ serait compacte, ce qui est exclu par le Théorème de Riesz, (Tome 2, Théorème 6.36).

5. On a vu, (Tome 3, Corollaire 16.82), que dans le cas d'une variable réelle, une fonction convexe est continue. Il s'agit d'étendre ce résultat.

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E, (supposé de dimension n) et $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$ un vecteur de E. On pose $h_i^+ = \sup(h_i, 0)$ et $h_i^- = \sup(-h_i, 0)$, (donc $h_i = h_i^+ - h_i$ et $|h_i| = h_i^+ + h_i^-$).
On veut comparer $f(x+h)$ et $f(x)$, l'outil étant l'inégalité de convexité, donc on essaye de faire apparaître $x+h$ comme un barycentre à coefficients positifs, de x et de...

On a $x + h = x + \sum_{i=1}^{n} h_i^+ e_i - \sum_{i=1}^{n} h_i^- e_i$, comme les $-h_i^-$ sont négatifs, on écrit $h_i^-(-e_i)$, d'où :

$$x + h = x + \sum_{i=1}^{n} h_i^+ e_i + \sum_{i=1}^{n} h_i^- (-e_i).$$

La somme des coefficients vaut $1 + \sum_{i=1}^{n} (h_i^+ + h_i^-)$ soit $1 + ||h||$, si on choisit pour norme, $||h|| = \sum_{i=1}^{n} |h_i|$, (elles sont toutes équivalentes en dimension finie).
Pour avoir un barycentre, on réintroduit $||h||x - ||h||x$, en écrivant $||h||x = \sum_{i=1}^{n} h_i^+ x + \sum_{i=1}^{n} h_i^- x$, d'où :

$$x + h = (1 - ||h||)x + \sum_{i=1}^{n} h_i^+ (x + e_i) + \sum_{i=1}^{n} h_i^- (x - e_i),$$

et cette fois, $x+h$ est barycentre de x, coefficient $1 - ||h||$, des $x + e_i$, coefficient h_i^+, des $x - e_i$, coefficient h_i^-. On impose $||h|| < 1$, on a donc des coefficients positifs, de somme $1 - ||h|| + ||h|| = 1$: par convexité de f, on a :

$$f(x+h) \leqslant (1 - ||h||) f(x) + \sum_{i=1}^{n} h_i^+ f(x + e_i) + \sum_{i=1}^{n} h_i^- f(x - e_i),$$

d'où l'on tire :

$$f(x+h) - f(x) \leqslant -||h|| f(x) + \sum_{i=1}^{n} h_i^+ f(x + e_i) + \sum_{i=1}^{n} h_i^- f(x - e_i).$$

Comme le majorant tend vers 0 si $||h||$ tend vers 0, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in]0,1[,\quad ||h|| \leqslant \alpha \Longrightarrow f(x+h) - f(x) \leqslant \varepsilon.$$

Pour l'autre inégalité, $\big(f(x) - f(x+h) \leqslant \varepsilon\big)$, on part de l'écriture $x + h = (1 - ||h||)x + \ldots$, où l'on remplace h par $-h$, d'où en fait :

$$x - h = (1 - ||h||)x + \sum_{i=1}^{n} h_i^-(x + e_i) + \sum_{i=1}^{n} h_i^+(x - e_i),$$

donc, on obtient :

$$(1 + ||h||)x = (x + h) + \sum_{i=1}^{n} h_i^-(x + e_i) + \sum_{i=1}^{n} h_i^+(x - e_i),$$

et comme $1 + \sum_{i=1}^{n} h_i^- + \sum_{i=1}^{n} h_i^+ = 1 + \sum_{i=1}^{n} |h_i| = 1 + ||h||$, on a x barycentre de $x + h$, des $x + e_i$ et des $x - e_i$, avec des coefficients positifs. Donc, par convexité de f, on a :

$$(1 + ||h||)f(x) \leqslant f(x + h) + \sum_{i=1}^{n} h_i^- f(x + e_i) + \sum_{i=1}^{n} h_i^+ f(x - e_i),$$

d'où l'on tire :

$$f(x) - f(x+h) \leqslant \left(\frac{1}{1+||h||} - 1\right) f(x+h) + \frac{1}{1+||h||} \sum_{i=1}^{n} h_i^- f(x + e_i) + \frac{1}{1+||h||} \sum_{i=1}^{n} h_i^+ f(x - e_i).$$

Comme, d'après la première partie, pour $||h|| \leqslant \alpha$, on a $f(x+h) \leqslant f(x) + \varepsilon$, on peut voir que le majorant tend vers 0 si $||h||$ tend vers 0, donc au même $\varepsilon > 0$, on associe $\alpha' \in]0,1[$ tel que $||h|| \leqslant \alpha'$ entraîne $f(x) - f(x+h) \leqslant \varepsilon$, et finalement :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha'' = \inf(\alpha, \alpha', 1)$, tel que $||h|| \leqslant \alpha''$ donne

$$-\varepsilon \leqslant f(x+h) - f(x) \leqslant \varepsilon,$$

d'où la continuité de f.

CHAPITRE 4

Espaces affines euclidiens

Dans les trois premiers chapitres, nous n'avons considéré que les propriétés algébriques des espaces affines, liées aux barycentres et à la structure vectorielle de leurs directions.

Lorsque le corps est réel, en liaison avec la structure de corps ordonné, nous avons considéré la convexité, propriété algébrique mais aussi topologique puisque les convexes sont connexes. C'est cet aspect topologique des espaces affines réels qui va nous intéresser, et même, pour les bipèdes que nous sommes, une structure mettant en évidence l'orthogonalité et la notion d'angle, structure développée dans le cadre des espaces affines préhilbertiens réels, nous sera très utile.

1. Structure métrique des espaces affines réels

THÉORÈME 4.1. — *Soit A un espace affine de direction E, espace vectoriel réel normé. L'application $d : A \times A \longmapsto \mathbb{R}$ définie par $d(m,n) = ||\overrightarrow{mn}||$, est une distance sur A, et A est appelé espace affine métrique.*

La définition d'une norme, (Tome 2, définition 6.1) va nous permettre de vérifier les propriétés d'une distance, (Tome 2, définition 4.1).

Pour tout (m,n) de A^2, $d(m,n) \geqslant 0$, puisqu'une norme est à valeurs positives, et si $||\overrightarrow{mn}|| = 0$, c'est que le vecteur $\overrightarrow{mn}$ est nul, donc $n = m + \overrightarrow{mn} = m + \overrightarrow{0} = m$, (voir la définition 1.1).

Comme $\overrightarrow{nm} = -\overrightarrow{mn}$, (c'est $\overrightarrow{nm} + \overrightarrow{mn} = \overrightarrow{nn} = \overrightarrow{0}$),
et que $|| - \overrightarrow{mn}|| = ||\overrightarrow{mn}||$, on a $d(n,m) = d(m,n)$.

Enfin, avec m, n, p dans A, la relation de Chasles des espaces affines, (voir 1.21), donne $\overrightarrow{mp} = \overrightarrow{mn} + \overrightarrow{np}$, d'où $||\overrightarrow{mp}|| \leqslant ||\overrightarrow{mn}|| + ||\overrightarrow{np}||$, et l'inégalité triangulaire $d(m,p) \leqslant d(m,n) + d(n,p)$ vérifiée par d qui est bien une distance. ■

REMARQUE 4.2. — Si on fixe une origine o, dans l'espace affine A, et que l'on identifie les points m de A aux vecteurs $\overrightarrow{om}$ de E, la distance $d(m,n)$ devient la distance sur E espace métrique, associée à la norme de E, (Voir Tome 2, 6.2.) car :

$$\begin{aligned} d(m,n) &= ||\overrightarrow{mn}|| = ||\overrightarrow{mo} + \overrightarrow{on}|| = ||\overrightarrow{on} - \overrightarrow{om}|| \\ &= ||\overrightarrow{m} - \overrightarrow{n}||, \quad \text{vu l'identification faite.} \end{aligned}$$

Mais alors on récupère les propriétés topologiques des espaces vectoriels normés, propriétés que je vais rappeler, (avant d'aller faire de l'aviron car ce matin il fait beau), et dont vous trouverez les justifications aux chapitres 4 et 6 du Tome 2.

Propriétés des espaces affines réels métriques.

La topologie est séparée.

Si l'espace affine A est de dimension finie, il est complet, et une partie B de A est complète si et seulement si elle est fermée, (Tome 2, corollaire 6.29, Théorèmes 4.91 et 4.92).

Toujours avec A affine réel de dimension finie, une partie K de A est compacte si et seulement si elle est fermée bornée, (la topologie étant métrique associée à une norme bien sûr), Tome 2, corollaire 6.30).

Sur A affine réel de dimension finie, toutes les distances associées à des normes sont équivalentes (Tome 2, Théorème 6.28).

Il peut être bon de rappeler qu'une distance sur A affine réel n'est pas forcément associée à une norme, (voir Tome 2, exemple 6.9). Par contre, pour une distance associée à une norme, il y a invariance par translation :

THÉORÈME 4.3. — *Soit un espace affine métrique. La distance est invariante par translation.*

En effet, si $t_{\overrightarrow{V}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$, avec $m' = t_{\overrightarrow{V}}(m)$ et $n' = t_{\overrightarrow{V}}(n)$, on a $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{nn'} = \overrightarrow{V}$, d'où :

$$\overrightarrow{m'n'} = \overrightarrow{m'm} + \overrightarrow{mn} + \overrightarrow{nn'} = -\overrightarrow{V} + \overrightarrow{mn} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{mn},$$

et $d(m',n') = ||\overrightarrow{m'n'}|| = ||\overrightarrow{mn}|| = d(m,n)$. ■

COROLLAIRE 4.4. — *Les translations, sur A affine métrique, sont des isométries. Elles forment un sous-groupe du groupe des isométries de A.*

Il nous faut définir les isométries et, comme pour l'instant nous sommes dans les généralités topologiques, on a :

DÉFINITION 4.5. — *Soit A, affine métrique, on appelle isométrie toute bijection φ de A sur A qui conserve la distance, donc telle que* $\forall (m,n) \in A^2$, $d(\varphi(m),\varphi(n)) = d(m,n)$.

Nous verrons, que dans le cas métrique euclidien, ceci implique que φ est affine, mais pour l'instant cet aspect est laissé de côté, (voir 4.60).

Avec cette définition, il est clair que l'ensemble des isométries est non vide, stable par composition et passage à l'inverse, et l'ensemble des translations est formé d'isométries, de plus $t_{\overrightarrow{V}} \circ t_{\overrightarrow{W}} = t_{\overrightarrow{V}+\overrightarrow{W}}$: on a un sous-groupe du groupe des isométries.

COROLLAIRE 4.6. — *Les translations, sur A affine métrique sont des homéomorphismes uniformément continus.*

En effet, $t_{\overrightarrow{V}}$ est 1.Lipschitzienne, donc uniformément continue, (Tome 2, définition 4.55), et $(t_{\overrightarrow{V}})^{-1} = t_{-\overrightarrow{V}}$. ■

COROLLAIRE 4.7. — *Dans A, espace affine métrique, les sous-espaces de dimension finie de A sont des fermés de A.*

En effet, soit E la direction de A, B un sous-espace de dimension finie, de direction F. On sait que F est un fermé de E métrique (Tome 2, Corollaire 6.32), et A étant homéomorphe à E lorsqu'une origine o est fixée dans A, le sous-espace affine de direction F, passant par o, noté B_o est homéomorphe à F, donc est fermé de A, puis B devient image du fermé B_o par une translation qui est un homéomorphisme. ■

Le fait de savoir que les sous-espaces affines de dimension finie sont des fermés, va nous servir dans l'étude des problèmes de distance d'un point à une partie, ou de distance de deux parties.

4.8. Rappelons que, si B et une partie de A espace métrique, et si a est un élément de A, *on appelle distance de a à B* le scalaire :

$$d(a,B) = \inf\{d(a,x), x \in B\},$$

et *distance de deux parties B et C* de A, le scalaire :

$$d(B,C) = \inf\{d(x,y), x \in B, y \in C\},$$

(on parle encore de *meilleure approximation de B par C*), et que l'un des problèmes de la topologie métrique est de savoir dans quel cas cette distance

est atteinte, et éventuellement de savoir caractériser les éléments pour lesquels cette distance est atteinte.

Voici d'abord des résultats généraux.

THÉORÈME 4.9. — *Soit L un fermé de l'espace affine métrique A, et m un élément de A.*

1) Si $d(m, L) = 0$, cette distance est atteinte en $m \in L$.

2) Si $d(m, L) > 0$ et si A est de dimension finie, la distance est atteinte. En dimension infinie, elle n'est pas forcément atteinte.

En effet, dans le premier cas, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in L$ tel que : $d(m, x_n) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puisque $\dfrac{1}{n+1}$ ne minore pas l'ensemble des $d(m, x)$, pour x dans L.

Mais alors la suite des x_n, éléments de L fermé, converge vers m, d'où m dans l'adhérence L, de L.

Dans le deuxième cas, avec x_0 dans L, les éléments y de L tels que $d(m, y) > d(m, x_0)$ n'interviennent pas pour déterminer la borne inférieure des $d(m, x)$, $x \in L$, donc $d(m, L) = d(m, L \cap \mathcal{B}_f(m, d(m, x_0)))$ et comme $L \cap \mathcal{B}_f(m, d(m, x_0))$ est un fermé borné de A, espace affine de dimension finie, donc est un compact, la borne inférieure de l'application d, continue, est atteinte sur le compact $\{m\} \times (L \cap \mathcal{B}_f(m, d(m, x_0)))$ (compact car produit de deux compacts, voir Tome 2, Théorème 2.21 et Corollaire 2.19).

Pour la dimension infinie, un contre-exemple.

Soit E espace vectoriel réel de dimension dénombrable stricte, ($E = \mathbb{R}[X]$ par exemple), de base $\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, normé par : $||x||_\infty = \sup\{|x_i|; i \in \mathbb{N}\}$, si $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i e_i$, les x_i étant presque tous nuls.

Pour ne pas sortir du cadre de ce chapitre, on considère E comme affine.

Soit $L = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) e_n; n \in \mathbb{N} \right\}$. *Cet ensemble est fermé*, car 0 n'est pas adhérent à L, tout point de L étant à une distance supérieure à 1 de 0, puis si x non nul est adhérent à L, comme x de E admet une écriture unique $x = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i e_i$, avec les x_i presque tous nuls, soit $\alpha = \inf\{|x_i|; x_i \neq 0\}$, on a $\alpha > 0$, (c'est l'un de ces $|x_i|$ non nuls, qui sont en nombre fini). A cet $\alpha > 0$, on associe un élément de L, noté $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right) e_n$, tel que

$\left\| x - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) e_n \right\|_\infty \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Mais alors, $\forall i \neq n$, $|x_i - 0| \leqslant \frac{\alpha}{2}$, donc $x_i = 0$ vu la définition de α.

Il en résulte que x adhérent à L est du type $x_{n_0} e_{n_0}$. L'existence d'une suite $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$, d'éléments de L, qui converge vers $x_{n_0} e_{n_0}$, jointe au fait que, pour un indice $i \neq 0$, on a :

$$\left\| x_{n_0} e_{n_0} - \left(1 + \frac{1}{i+1}\right) e_i \right\|_\infty \geqslant 1 + \frac{1}{i+1} \geqslant 1,$$

montre que la seule suite convenant est la suite qui devient stationnaire et égale à $\left(1 + \frac{1}{n_0+1}\right) e_{n_0}$, d'où $x = \left(1 + \frac{1}{n_0+1}\right) e_{n_0} \in L$.

Mais alors $d(0, L) = \inf \left\{ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right), n \in \mathbb{N} \right\} = 1$, et cette distance n'est atteinte en aucun élément de ce fermé L puisque :

$$d\left(0, \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) e_{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{n+1} > 1. \qquad \blacksquare$$

REMARQUE 4.10. — Cet ensemble L donne un exemple de fermé borné non compact, la suite des $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) e_n$ n'ayant pas de suite extraite convergente, puisque, pour deux indices n et m distincts :

$$d\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) e_n, \left(1 + \frac{1}{m+1}\right) e_m\right) = \sup\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right), \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)\right) \geqslant 1.$$

Passons maintenant au cas de la distance de deux parties B et C de A affine métrique. On peut dire que :

THÉORÈME 4.11. — *Soient B et C deux parties de l'espace affine métrique A.*

1) Si B et C sont des compacts de A, $d(B, C)$ est atteinte.

2) Si B est un compact de A et C un fermé de A qui est supposé de dimension finie, la distance est atteinte.

Mais la distance de deux fermés en dimension finie n'est pas forcément atteinte. Ni celle d'un compact et d'un fermé en dimension infinie.

Le premier point est évident car $B \times C$, produit de deux compacts est compact, (Tome 2, Théorème 2.21), et la distance, continue de $B \times C$ compact dans $\mathbb{R}$ atteint sa borne inférieure, (Tome 2, Corollaire 2.19).

Le deuxième point s'y ramène : en fixant b_0 dans B et c_0 dans C, les c de C tels que $d(b_0, c) > d(b_0, c_0)$ sont «hors concours» pour la borne inférieure, donc

$$d(B, C) = d[B, (C \cap \mathcal{B}_f(b_0, d(b_0, c_0)))],$$

avec $C \cap \mathcal{B}_f(b_0, d(b_0, c_0))$ compact comme fermé borné dans A affine métrique de dimension finie. ■

Le contre exemple du Théorème 4.9 nous montre que la distance d'un compact, $(\{0\})$, à un fermé, (L), en dimension infinie, n'est pas forcément atteinte.

Pour le cas deux fermés, prenons dans le plan affine A, une hyperbole $H = \{(x, y); xy = 1\}$, tout ce qu'il y a plus fermée car image réciproque de 0 par $f : (x, y) \rightsquigarrow xy - 1$, continue car polynômiale, et son asymptote $D = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$. On a $d(H, D) = 0$, et cette distance n'est pas atteinte.

REMARQUE 4.12. — Cet exemple nous montre que les deux Théorèmes précédents ne sont pas éloignés des préoccupations de la géométrie. En effet les cercles, disques, triangles, coniques, quadriques, réseaux et autres objets de la géométrie seront le plus souvent des fermés, certains compacts d'autres non, et ces problèmes de distance atteinte ou non se poseront tout naturellement.

Au paragraphe suivant, dans le cas d'existence d'un produit scalaire, nous préciserons le calcul éventuel de ces distances. Pour l'instant, abordons la continuité des applications affines.

THÉORÈME 4.13. — *Soient A et A' deux espaces affines métriques de directions associées les espaces vectoriels normés E et E'. Une application affine u de A dans A' est continue, si et seulement si son application linéaire associée est continue de E dans E'.*

Rappelons, (voir Théorème 1.52), que f est telle que, pour tout couple (m, n) de A^2, on ait $f(\overrightarrow{mn}) = \overrightarrow{u(m)u(n)}$. Mais alors :

$$d(u(m), u(n)) = ||\overrightarrow{u(m)u(n)}|| = ||f(\overrightarrow{mn})||.$$

Si on suppose f continue, donc continue en $\overrightarrow{0}$, on sait que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall \overrightarrow{X} \in E, \quad ||\overrightarrow{X}|| \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(\overrightarrow{X})|| \leqslant \varepsilon,$$

mais alors u est *uniformément continue* car :

$$\forall (m,n) \in A^2, \quad d(m,n) = ||\overrightarrow{mn}|| \leqslant \alpha \Longrightarrow d(u(m),u(n)) \leqslant \varepsilon,$$

d'après ce qui précède.

Si on suppose u *continue en* m_0,
soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $d(m_0,n) \leqslant \alpha \Longrightarrow d(u(m_0),u(n)) \leqslant \varepsilon$;
soit $\overrightarrow{X} \in E$ avec $||\overrightarrow{X}|| \leqslant \alpha$, et $n = m_0 + \overrightarrow{X}$, on a :

$$d(m_0,n) = ||\overrightarrow{m_0n}|| = ||\overrightarrow{X}|| \leqslant \alpha,$$

donc on a :

$$d(u(m_0),u(n)) = ||\overrightarrow{u(m_0)u(n)}|| = ||f(\overrightarrow{m_0n})|| = ||f(\overrightarrow{X})|| \leqslant \varepsilon,$$

et finalement on a obtenu le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall \overrightarrow{X} \in E, \quad ||\overrightarrow{X}|| \leqslant \alpha \Longrightarrow ||f(\overrightarrow{X})|| \leqslant \varepsilon,$$

qui traduit la continuité de f en $\overrightarrow{0}$, donc sa continuité, même... uniforme, (voir Tome 2, Théorème 6.18). ■

Mais alors, f étant continue, en appliquant le premier point, u est en fait uniformément continue. On a donc :

COROLLAIRE 4.14. — *Si une application affine est continue, elle l'est uniformément.* ■

De même, si l'espace vectoriel de départ est de dimension finie, une application linéaire est continue, (voir Tome 2, Corollaire 6.31), il en résulte que :

COROLLAIRE 4.15. — *Soient A et A' deux espaces affines métriques, A étant de dimension finie. Toute application affine de A dans A' est continue.*

En effet, son application linéaire associée est continue d'après le rappel précédent. ■

COROLLAIRE 4.16. — *Soient A un espace affine métrique. Toute homothétie affine de A et continue.*

En effet, si u est une homothétie affine de centre a et de rapport λ, son application linéaire associée est l'homothétie vectorielle h_λ, de rapport λ, (voir 1.60), et h_λ est visiblement $|\lambda|$-Lipschitzienne, donc continue, (Tome 2, Théorème 6.18), d'où la continuité de u, et ceci quelque soit la dimension de A.

De plus, si $\lambda \neq 0$, u est bijective et u^{-1} est l'homothétie de centre a de rapport λ^{-1}, donc u^{-1} est continue et en fait *u est un homéomorphisme uniformément continu.* ■

2. Espaces affines préhilbertiens réels et euclidiens

DÉFINITION 4.17. — *Un espace affine A est dit préhilbertien réel, si sa direction E est un espace vectoriel préhilbertien réel, donc muni d'une forme quadratique définie positive ϕ, et de la norme associée* $||X|| = (\phi(X))^{1/2}$.

La forme bilinéaire symétrique associée, φ, est le produit scalaire sur E, noté $< \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y} >$ ou $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{Y}$.

4.17.bis. Si A, (et E) est de dimension finie, *l'espace sera dit euclidien.*

Les propriétés vectorielles que nous utiliserons sont justifiées dans le Tome 3, chapitre 14.

D'abord un classique plein de nostalgie :

THÉORÈME 4.18. — *Dans A, espace affine préhilbertien réel, un triangle (a, b, c) est rectangle en a si et seulement si le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.*

(C'est bien lui, c'est Pythagore que vos parents et les parents de vos parents ont aussi connu, et dont vous parlerez à vos enfants et petits enfants.)

On a $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac}$, donc :

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{bc}||^2 &= < \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{ac} > \\ &= < \overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ba} > + 2 < \overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac} > + < \overrightarrow{ac}, \overrightarrow{ac} > \\ &= ||\overrightarrow{ab}||^2 + ||\overrightarrow{ac}||^2 + 2 < \overrightarrow{ba}, \overrightarrow{ac} >, \end{aligned}$$

donc l'orthogonalité de $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ac}$ est bien équivalente à l'égalité :

$||\overrightarrow{bc}||^2 = ||\overrightarrow{ab}||^2 + ||\overrightarrow{ac}||^2$. ■

Moins connu, mais très utile en géométrie, le petit résultat suivant :

THÉORÈME 4.19. — *Dans A, espace affine préhilbertien réel, un point m est dans le segment $[a,b]$ si et seulement si $d(a,b) = d(a,m) + d(m,b)$.*

En effet, si m est dans le segment $[a,b]$, il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $\overrightarrow{am} = \lambda\overrightarrow{ab}$, d'où $\overrightarrow{mb} = (1-\lambda)\overrightarrow{ab}$, (il revient au même de dire que m est barycentre de a et b, avec des coefficients positifs de somme 1, qui seraient ici $1-\lambda$ et λ). Mais alors :

$$d(a,m) + d(m,b) = ||\overrightarrow{am}|| + ||\overrightarrow{mb}|| = \lambda||\overrightarrow{ab}|| + (1-\lambda)||\overrightarrow{ab}||$$
$$= ||\overrightarrow{ab}|| = d(a,b).$$

Réciproquement, si $d(a,b) = d(a,m)+d(m,b)$, on a égalité dans l'inégalité triangulaire, $(||\overrightarrow{ab}|| \leqslant ||\overrightarrow{am}|| + ||\overrightarrow{mb}||)$, qui provient de l'inégalité de Minkowski pour la forme quadratique définie positive qui définit la norme, donc, (Tome 1, Remarque 11.62), les vecteurs $\overrightarrow{am}$ et $\overrightarrow{mb}$ sont positivement liés : il existe $t \geqslant 0$ tel que $\overrightarrow{am} = t\overrightarrow{mb}$ par exemple, (on suppose $a \neq b$, d'où $\overrightarrow{am}$ et $\overrightarrow{mb}$ non tous deux nuls; si $a = b$, l'égalité $d(a,b) = 0 = d(a,m) + d(m,b)$ équivaut à $m = a = b$).

On a donc $\overrightarrow{am} = t\overrightarrow{ma} + t\overrightarrow{ab}$ d'où $(1+t)\overrightarrow{am} = t\overrightarrow{ab}$, ce qui donne $\overrightarrow{am} = \dfrac{t}{1+t}\ \overrightarrow{ab}$, avec $0 \leqslant \dfrac{t}{1+t} \leqslant 1$, donc m est dans le segment d'extrémités a et b. ■

Nous avons vu l'importance des projections orthogonales dans les espaces préhilbertiens réels, (Tome 3, Chapitre 14), et nous allons retrouver cette notion dans le cadre des espaces affines.

DÉFINITION 4.20. — *Soient B et C deux sous-espaces affines non vides, de directions F et G, dans l'espace affine préhilbertien réel A, de direction E. On dira que B et C sont orthogonaux si $F \subset G^\perp$, (et donc $G \subset F^\perp$), et on précisera B et C sont supplémentaires orthogonaux si $E = F \oplus G$ avec $F = G^\perp$, (et donc $G = F^\perp$).*

Remarquons que $F \subset G^\perp$ se traduit par :

$$\forall \overrightarrow{x} \in F,\ \forall \overrightarrow{y} \in G, \quad < \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} > \ 0,$$

ce qui est aussi la traduction de $G \subset F^\perp$.

On est obligé de faire attention au langage pour distinguer l'orthogonalité de deux droites B et C dans un espace affine de dimension trois par exemple, (et alors $B \cap C$ peut être vide), de la notion, toujours en dimension trois, de la perpendiculaire à un plan passant par un point.

4.21. — Toujours à propos de la précision du langage, il peut être bon de réserver le terme de sous-espaces affines B et C *perpendiculaires lorsque l'espace affine est euclidien* (donc de dimension finie), *et que les directions* F *et* G *de* B *et* C *vérifient l'inclusion* $F^\perp \subset G$, (d'où, aussi $G^\perp \subset F^{\perp\perp} = F$ car on est en dimension finie, voir Tome 1, Corollaire 11.36 où l'orthogonal est noté F°).

Avec cette définition de sous-espaces affines perpendiculaires, et avec les mêmes notations, on a $F + G$ qui contient $E = F + F^\perp$ donc les sous-espaces affines B et C sont d'intersection non vide, et leur intersection est un sous-espaces affine de direction $F \cap G$, (Théorème 1.42 et Corollaire 1.43). En fait on a :

THÉORÈME 4.22. — *Soient B et C deux sous-espaces affines perpendiculaires de l'espace affine euclidien A. Alors $B \cap C$ est un sous-espace affine de dimension :*

$$\dim(B \cap C) = \dim B + \dim C - \dim A.$$

Il ne reste à justifier que cette égalité sur les dimensions, or c'est la formule $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$, (voir Tome 1, Corollaire 6.87), jointe ici au fait que $F + G = E$, direction de A. ■

4.23. PROJECTIONS ORTHOGONALES.

Supposons maintenant que les sous-espaces affines B et C de directions F et G soient supplémentaires orthogonaux. On a $G = F^\perp$, avec $E = F \oplus F^\perp$, donc, (Corollaire 1.43), l'intersection $B \cap C$ est un singleton.

Plus généralement, si m est un point quelconque de l'espace affine A, le sous-espace affine C_m, parallèle à C et passant par m a pour direction $G = F^\perp$, donc là encore $B \cap C_m = \{m'\}$ est un singleton, et l'application π qui à m associe m' est *la projection orthogonale sur* F, (voir en 1.73 la définition d'une projection). Cette projection orthogonale, dans le cadre préhilbertien réel n'existe que si F admet dans E un supplémentaire orthogonal, ce qui est toujours vérifié en dimension finie, (donc dans le cadre euclidien), F devenant sous-espace vectoriel non isotrope de dimension finie.

THÉORÈME 4.24. — *Soit B un sous-espace affine de A affine euclidien, et m un point de A. Le projeté orthogonal m' de m sur B est le seul point de B en lequel la distance de m à B est atteinte.*

En effet, si m'' est quelconque dans B, $\overrightarrow{m'm''} \in F$, direction de B, et $\overrightarrow{mm'} \in F^{\perp}$, par définition de la projection orthogonale, donc par Pythagore on a :

$$||\overrightarrow{mm''}||^2 = ||\overrightarrow{mm'}||^2 + ||\overrightarrow{m'm''}||^2 \geqslant ||\overrightarrow{mm'}||^2$$

d'où la borne inférieure atteinte lorsque $m' = m''$. ■

REMARQUE 4.25. — Ce résultat s'étend aux espaces préhilbertiens réels, dans le cas d'un sous-espace affine B ayant un supplémentaire orthogonal, ce qui est en particulier vérifié si B est de dimension finie, (voir Tome 3, Théorème 14.27).

Si de plus on se donne B, de dimension finie, par un point b et une base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p})$ de sa direction F, le projeté orthogonal m' de m quelconque dans A est tel que :

$$\textbf{4.26.} \quad \overrightarrow{bm'} = \sum_{i=1}^{p} < \overrightarrow{bm}, \overrightarrow{e_i} > \overrightarrow{e_i},$$

et la distance de m au sous-espace affine B, atteinte en m', est telle que :

$$\textbf{4.27.} \quad (d(m,B))^2 = ||\overrightarrow{mm'}||^2 = ||\overrightarrow{bm}||^2 - \sum_{i=1}^{p} (< \overrightarrow{bm}, \overrightarrow{e_i} >)^2.$$

(Voir Tome 3, conséquence 14.28).

En dimension finie, ces formules 4.26 et 4.27 s'exploitent en introduisant les coordonnées dans un repère orthonormé. Si vous avez l'esprit de synthèse, vous aurez remarqué l'analogie entre 4.27 et les calculs conduisant à l'égalité de Bessel, (Tome 3, formule précédant 14.38).

4.28. *Dans le cas d'un hyperplan d'un espace affine euclidien*, on n'utilise pas ces formules 4.26 et 4.27, car il y a plus simple.

Soit donc A, espace affine euclidien de dimension n, muni de :
$\mathcal{R} = (o; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$, repère orthonormé.

Un hyperplan B de A est donné par un point b de B, de coordonnées $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dans le repère $\mathcal{R}$, et par sa direction H, hyperplan vectoriel de E, donc noyau d'une forme linéaire φ, non nulle, que l'on peut décomposer dans la base duale $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ du dual E^* de E. (Voir Tome 1, 6.90 et 6.108).

Un point m, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dans le repère $\mathcal{R}$, est dans l'hyperplan B si et seulement si $\overrightarrow{bm} \in \operatorname{Ker} \varphi$, donc, avec $\varphi = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i^*$, ceci se traduit par l'équation :

4.29. $\sum_{i=1}^{n} u_i(x_i - \beta_i) = 0$, ou encore :

4.30. $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i + h = 0$, avec $h = -\sum_{i=1}^{n} u_i \beta_i$.

Mais, si on introduit le vecteur $\overrightarrow{U} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{e_i}$, l'expression 4.29 s'interprète encore comme étant le produit scalaire $< \overrightarrow{U}, \overrightarrow{bm} >$, qui est nul lorsque m est dans l'hyperplan B.

Si on part de 4.30, avec des u_i non tous nuls, par exemple $u_{i_0} \neq 0$, on peut trouver b, de coordonnées les β_i nuls si $i \neq i_0$, et $\beta_{i_0} = -h u_{i_0}^{-1}$, point dans l'ensemble défini par 4.30, ensemble qui est alors formé des points m tels que $\overrightarrow{bm}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{U}$. On a donc :

THÉORÈME 4.31. — *Si un hyperplan a une équation du type* $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n + h = 0$, *dans un repère orthonormé de A espace affine euclidien, cet hyperplan est orthogonal à toutes les droites de vecteur directeur* $\overrightarrow{V} = u_1 \overrightarrow{e_1} + u_2 \overrightarrow{e_2} + \ldots + u_n \overrightarrow{e_n}$, *les* $\overrightarrow{e_i}$ *étant les vecteurs de la base du repère.* ■

REMARQUE 4.32. — Avec l'isomorphisme canonique δ entre E, espace vectoriel euclidien, et son dual, ce vecteur $\overrightarrow{U}$ est tel que $\delta(\overrightarrow{U}) = \varphi$, (voir en Tome 1, 11.2 la définition de δ).

En effet, $\delta(\overrightarrow{e_i})$ est la formule linéaire qui a $\overrightarrow{X}$ associe $< \overrightarrow{X}, \overrightarrow{e_i} >$, et la base étant orthonormée, ceci envoie $\overrightarrow{e_i}$ sur 1 et les $\overrightarrow{e_j}$ sur 0, pour $j \neq i$: c'est ce que fait e_i^*. La linéarité de δ donne alors l'égalité

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{e_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i^*.$$

REMARQUE 4.33. — Lorsque, dans un espace affine euclidien de dimension trois, on étudie une nappe d'équation implicite $f(x, y, z) = 0$, f de classe

C^1, et que l'on a un plan tangent d'équation :

$$(X - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (Y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (Z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

(voir Théorème 9.31), c'est tout naturellement que le vecteur $\overrightarrow{U}$ de composantes $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(m_0)$ apparaît comme vecteur normal à la nappe en m_0. Ce vecteur est le gradient de f en m_0, noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$, (ou ∇f pour les physiciens) et on retrouve cette notion physique du gradient, qui est orthogonal aux équipotentielles définies par les relations $f(x, y, z) =$ constante.

REMARQUE 4.34. — Ces remarques, outre qu'elles donnent l'impression de faire sérieux, permettent de construire des connaissances «en béton», en établissant des liens entre des pans apparemment distincts de vos connaissances, un peu comme ce «mur gaulois» décrit par César dans la Guerre des Gaules, mur où les madriers et la terre se mélangent, la terre résistant au feu et les madriers permettant de résister aux ébranlements dus aux coups de béliers. Allez voir les fouilles du mont Beuvray où on a retrouvé de tels vestiges!

4.35. *Retour à notre époque, et à la distance d'un point à un hyperplan d'un espace affine euclidien.*

Soit l'hyperplan affine B, d'équation $\sum_{i=1}^{n} u_i x_i + h = 0$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n})$.

La droite D_a, passant par a, de coordonnées $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, perpendiculaire à B admet le vecteur $\overrightarrow{U} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{e_i}$ pour vecteur directeur.

Un point m est donc sur D_a si et seulement si il existe t réel tel que $\overrightarrow{am} = t\overrightarrow{U}$, et la valeur t' associée à la projection orthogonale a' de a sur B est déterminée par l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(\alpha_i + t' u_i) + h = 0,$$

soit encore

$$t'\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) + \sum_{i=1}^{n} u_i \alpha_i + h = 0.$$

DÉFINITION 4.36. — *Soit un hyperplan B d'équation $u_1x_1 + \ldots + u_nx_n + h = 0$ dans un repère $\mathcal{R}$ d'un espace affine euclidien, et a un point de coordonnées $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On appelle puissance analytique de a par rapport à B, l'expression $u_1\alpha_1 + \ldots + u_n\alpha_n + h = 0$, encore notée $\mathcal{P}_B(a)$.*

Avec cette définition, l'équation précédente s'écrit encore :
$t'||\overrightarrow{U}||^2 + \mathcal{P}_B(a) = 0$, et elle détermine $t' = -\dfrac{\mathcal{P}_B(a)}{||\overrightarrow{U}||^2}$.

Comme la distance de a à l'hyperplan B est $||\overrightarrow{aa'}||$, (voir 4.27), a' étant le projeté orthogonal de a sur B, et que $\overrightarrow{aa'} = t'\overrightarrow{U}$, on obtient :

$$d(a,b) = ||\overrightarrow{aa'}|| = |t'|\,||\overrightarrow{U}|| = \frac{|\mathcal{P}_B(a)|}{||\overrightarrow{U}||}.$$

D'où le :

THÉORÈME 4.37. — *Soit l'hyperplan B, d'équation $u_1x_1+\ldots+u_nx_n+h=0$ dans un repère orthonormé de A espace affine euclidien, et a un point de A. La distance de a à B est égale à :*

$$\frac{|\textit{puissance analytique de a par rapport à } B|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}}.$$

C'est ce qui vient d'être justifié. ■

Cette formule montre l'intérêt qu'il y a à choisir un vecteur $\overrightarrow{U} = u_1\overrightarrow{e}_1 + \ldots + u_n\overrightarrow{e}_n$ unitaire, l'équation étant alors appelée *normale*. C'est particulièrement utile dans le cas des droites, et de la recherche des enveloppes (voir Tome 5, Théorème 7.16).

REMARQUE 4.38. — En notant $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} u_ix_i + h$, la fonction affine f telle que le plan B ait pour équation $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, l'expression $f(x_1, \ldots, x_n)$ pour un point m quelconque, est la puissance analytique de m par rapport à B. La nullité de cette puissance caractérise l'appartenance de m à B, et B régionne l'espace en deux demi-espaces fermés, respectivement définis par :

$$R_+ = \{m; f(m) \geqslant 0\} \quad \text{et} \quad R_- = \{m; f(m) \leqslant 0\},$$

et il est facile de vérifier que ces régions sont convexes.

4.39. — Plus généralement, *si un ensemble S est défini par une équation implicite $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, on appelle puissance analytique de m, (de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$) par rapport à S, l'expression $f(x_1, \ldots, x_n)$, encore notée $\mathcal{P}_S(m)$.*

La nullité de $\mathcal{P}_S(m)$ traduit l'appartenance de m à S, et là encore l'espace est régionné par S en R_+ et R_- comme précédemment, ce qui se traduit parfois par la notion de l'intérieur ou de l'extérieur de S.

Examinons plus particulièrement le cas des sphères.

THÉORÈME 4.40. — *Soit dans A, espace affine euclidien de dimension n rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R}$, la sphère S de centre a, (de coordonnées $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$), et de rayon r.*

Une équation cartésienne de S est $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_i)^2 = r^2$, ce qui se met encore sous la forme :

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 - 2\alpha_1 x_1 - 2\alpha_2 x_2 - \ldots - 2\alpha_n x_n + h = 0.$$

Avec cette équation la puissance analytique de m par rapport à S est $\mathcal{P}_S(m) = ma^2 - r^2$.

Si une sécante passant par m coupe S en m' et m'', on a $\mathcal{P}_S(m) = \overline{mm'} \cdot \overline{mm''}$.

Comme m est sur S si et seulement si $||\overrightarrow{ma}|| = r$, en traduisant cette égalité mise au carré on obtient bien la relation $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \alpha_i)^2 = r^2$, qui se développe en $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + h = 0$.

Sous cette forme, les coordonnées du centre sont en évidence, le rayon se calcule par l'égalité $r^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 - h$, et la sphère est réelle si et seulement si cette différence est positive.

Il est clair que, pour cette équation de S, où les coefficients des x_i^2 sont tous égaux à 1, la puissance analytique vaut $ma^2 - r^2$.

Dans ce cas particulier, $(\mathcal{P}_S(m) < 0) \iff (ma < r)$: on caractérise ainsi la boule ouverte de centre a de rayon r, dont la frontière est S.

Soit alors une sécante passant par m, qui coupe la sphère S en deux points m' et m''. Pourquoi deux?

En fait, si on se donne un point b de coordonnées $\beta_1, \ldots, \beta_n$, une droite D passant par b, de vecteur directeur unitaire $\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \overrightarrow{e_i}$, paramétrée par $p \in D \iff \exists t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{bp} = t\overrightarrow{u}$, d'où des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de p définies par $x_i = \beta_i + tu_i$, on aura $p \in D \cap S \iff t$ vérifie l'équation :

$$\sum_{i=1}^{n}(tu_i + \beta_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(tu_i + \beta_i) + h = 0,$$

équation du second degré qui s'écrit encore :

$$t^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}u_i(\alpha_i - \beta_i) + \sum_{i=1}^{n}(\beta_i^2 - 2\alpha_i\beta_i) + h = 0,$$

soit $t^2 - 2t\,\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{ba} + \mathcal{P}_S(b) = 0$.

Cette équation du second degré admet 0, une double, ou deux racines réelles, (voilà pourquoi deux), selon le signe de $\delta = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{ba})^2 - \mathcal{P}_S(b)$.

Si a' est le projeté orthogonal de a, centre de la sphère, sur D, en posant $\overrightarrow{ba} = \overrightarrow{ba'} + \overrightarrow{a'a}$, on aura $\overrightarrow{a'a} \cdot \overrightarrow{u} = 0$ et $\overrightarrow{ba'} = \pm||\overrightarrow{ba'}||\overrightarrow{u}$, d'où $\delta = ||\overrightarrow{ba'}||^2 - (d^2 - r^2)$, d représentant la distance de a et b. Mais alors, (voir figure 4.40.1), $\delta = r^2 - (||\overrightarrow{ba}||^2 - ||ba'||^2) = r^2 - ||aa'||^2$, par Pythagore, avec $||aa'||$ distance du centre a de la sphère à la droite D.

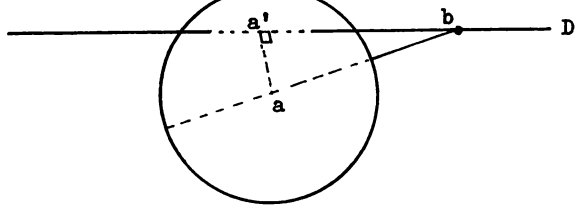


Fig. 4.40.1

On a $(\delta > 0) \iff (r > ||\overrightarrow{aa'}||)$, d'où :

la droite D coupe la sphère S de centre a de rayon r en deux points distincts si et seulement si la distance de D au centre de la sphère est strictement inférieure à r. Il y a une racine double en t lorsque cette distance est égale à r.

Dans le cas d'une racine double, a' est sur la sphère, et la droite D est dans l'hyperplan orthogonal en a' de S, au «rayon» $[a, a']$ puisque a' est projeté orthogonal de a sur D.

Or, la remarque 4.33, étendu au cas des variétés de dimension $n-1$ plongées dans $\mathbb{R}^n$, (voir 9.156), montre que l'hyperplan tangent à la sphère en a' est cet hyperplan orthogonal et la droite D est alors tangente en a' à S : on retrouve un résultat bien connu des cercles et des sphères en dimension trois.

Revenons donc à une sécante D passant par m, coupant S en m' et m'', et soit m''', diamétralement opposé à m'' sur S, (figure 4.40.2).

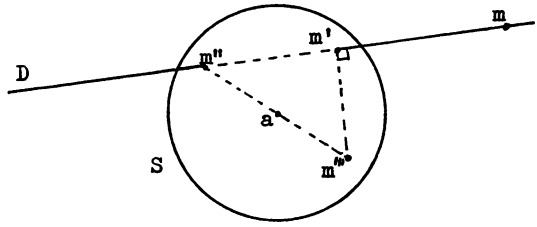


Fig. 4.40.2

Le triangle $m'm''m'''$ est donc rectangle en m', (si $m' \neq m''$) et $\overrightarrow{mm'} \cdot \overrightarrow{mm''} = \overrightarrow{mm''} \cdot (\overrightarrow{mm'} + \overrightarrow{m'm'''})$ d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{mm'} \cdot \overrightarrow{mm''} &= \overrightarrow{mm''} \cdot \overrightarrow{mm'''} \\ &= (\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{am''}) \cdot (\overrightarrow{ma} - \overrightarrow{am''}) \\ &= \overrightarrow{ma}^2 - \overrightarrow{am''}^2 \\ &= \overrightarrow{ma}^2 - r^2 = \mathcal{P}_S(m),\end{aligned}$$

ce qui achève la justification du Théorème 4.40. ■

COROLLAIRE 4.41. — *Soient deux sphères S et S', de centres respectifs distincts a et a', de rayons r et r'. L'ensemble des points m ayant même puissance analytique pour S et S' est un hyperplan orthogonal à la droite* $\mathrm{aff}(a, a')$, *appelé hyperplan radical des deux sphères.*

En effet, l'égalité $\overrightarrow{ma}^2 - r^2 = \overrightarrow{ma'}^2 - r'^2$, s'écrit encore :

$$\overrightarrow{ma}^2 - \overrightarrow{ma'}^2 = (\overrightarrow{ma} - \overrightarrow{ma'}) \cdot (\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{ma'}) = r^2 - r'^2,$$

soit, comme $\overrightarrow{ma} - \overrightarrow{ma'} = \overrightarrow{ma} + \overrightarrow{a'm} = \overrightarrow{a'a}$:

$$\overrightarrow{a'a} \cdot (\overrightarrow{ma} + \overrightarrow{ma'}) = r^2 - r'^2.$$

Le flair, (ou l'intuition) vient en mathématique lorsque l'on sait choisir l'outillage adapté à la situation. Cela dépend du cadre où l'on est, (ici, un espace euclidien où l'orthogonalité est fondamentale), et des données, (ici, un produit scalaire où $\overrightarrow{aa'}$ intervient.

Il semble donc normal de décomposer E, direction de l'espace affine A, en somme directe orthogonale, $E = \mathbb{R}\overrightarrow{aa'} \oplus F$, avec $F = \{\overrightarrow{aa'}\}^\perp$, d'où, si m' est la projection orthogonale de m sur $\mathrm{aff}(a, a')$,

$$\overrightarrow{ma} = \overrightarrow{mm'} + \overrightarrow{m'a},$$
$$\overrightarrow{ma'} = \overrightarrow{mm'} + \overrightarrow{m'a'},$$

et comme $\overrightarrow{a'a} \cdot \overrightarrow{mm'} = 0$, l'égalité des puissances analytiques se traduit par :

$$\overrightarrow{a'a} \cdot (\overrightarrow{m'a} + \overrightarrow{m'a} + \overrightarrow{aa'}) = r^2 - r'^2,$$

ou encore :

$$2\overrightarrow{a'a} \cdot \overrightarrow{m'a} = r^2 - r'^2 + \overrightarrow{aa'^2},$$

puisque a, a' et m' sont alignés.

Ceci détermine m' de manière unique, et l'ensemble cherché est formé des points m qui se projettent orthogonalement en ce point m', sur la droite $\mathrm{aff}(a, a')$, d'où cet hyperplan radical. ■

Toutes ces notions seront plus particulièrement exploitées pour les cercles, (où on parlera d'axe radical), au chapitre suivant, voir 5.52 par exemple.

On pourrait obtenir l'hyperplan médiateur de deux points comme hyperplan radical de deux sphères «point», mais c'est un peu ridicule. On a

THÉORÈME 4.42. — *Dans un espace affine euclidien, (et même préhilbertien réel), l'ensemble des points équidistants de deux points a et b est l'hyperplan affine passant par m, milieu du segment $[a, b]$, de direction l'orthogonal de $\mathbb{R}\overrightarrow{ab}$. Cet ensemble s'appelle hyperplan médiateur de a et b.*

Le flair..., l'idée de ne pas faire de jaloux entre a et b, les mathématiques sont vivantes, mettons-y du sentiment), conduit à introduire m, milieu de $[a, b]$ et à décomposer, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{pa}$ en $\overrightarrow{pm} + \overrightarrow{ma}$ et $\overrightarrow{pb}$ en $\overrightarrow{pm} + \overrightarrow{mb} = \overrightarrow{pm} - \overrightarrow{ma}$, pour p quelconque. L'égalité $\overrightarrow{pa}^2 = \overrightarrow{pb}^2$ conduit

alors, après simplification, à l'égalité $4\overrightarrow{pm} \cdot \overrightarrow{ma} = 2\overrightarrow{pm} \cdot \overrightarrow{ba} = 0$, donc p est à égale distance de a et b si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{pm}$ est orthogonal à $\overrightarrow{ab}$, soit p dans l'hyperplan passant par m, milieu de $[a, b]$, et orthogonal à la droite $\mathrm{aff}(a, b)$. ■

Contrairement aux hyperplans médiateurs, qui peuvent s'introduire en dimension infinie, pour les *hyperplans bissecteurs*, on revient à la dimension finie.

THÉORÈME 4.43. — *Soient deux hyperplans distincts, H_1 et H_2, dans A espace affine euclidien. L'ensemble des points m de A, équidistants de H_1 et H_2 est formé de deux hyperplans perpendiculaires passant par $H_1 \cap H_2$ si $H_1 \cap H_2$ est non vide, et d'un hyperplan parallèle à H_1 et H_2 si H_1 est parallèle à H_2.*

Dans le cas de $H_1 \cap H_2$, non vide, ces deux hyperplans sont les *hyperplans bissecteurs* de H_1 et H_2, en dimension deux *on parlera de droites bissectrices.*

On se donne H_1 et H_2 par des équations normales dans un repère orthonormé, notées respectivement :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = u_1x_1 + \ldots + u_nx_n + h = 0$$

et

$$g(x_1, \ldots, x_n) = v_1x_1 + \ldots + v_nx_n + k = 0,$$

les vecteurs de composantes respectives les u_i et les v_i étant unitaires, (voir Théorème 4.37). On les note $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$. La distance de m à H_1 vaut alors $|f(x_1, \ldots, x_n)|$ et celle de m à H_2 est égale à $|g(x_1, \ldots, x_n)|$ donc m sera équidistant de H_1 et de H_2 si et seulement si $f^2(x_1, \ldots, x_n) - g^2(x_1, \ldots, x_n) = 0$, soit encore

$$\big(f(x_1, \ldots, x_n) - g(x_1, \ldots, x_n)\big)\big(f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n)\big) = 0,$$

ce qui équivaut à :

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i - v_i)x_i + h - k = 0;$$

ou à :

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)x_i + h + k = 0.$$

Si $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} \neq 0$, on a deux équations d'hyperplans respectivement orthogonaux à $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$, (voir Théorème 4.31),

or :

$$(\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}) \cdot (\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}) = ||\overrightarrow{U}||^2 - ||\overrightarrow{V}||^2 = 1 - 1 = 0,$$

donc ces hyperplans sont perpendiculaires, (voir 4.21).

Tout ceci a lieu lorsque $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, unitaires, sont non liés donc lorsque les hyperplans H_1 et H_2 sont non parallèles, mais alors ils sont sécants, car en appelant F_1 et F_2 leurs directions on a :

$$\begin{aligned}\dim(F_1 + F_2) &= \dim F_1 + \dim F_2 - \dim F_1 \cap F_2 \\ &= n - 1 + (\dim F_2 - \dim F_1 \cap F_2), \text{ et}\end{aligned}$$

$\dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2) = 0$ impliquerait $F_1 \cap F_2 = F_2$, d'où $F_2 \subset F_1$ et en fait, $F_2 = F_1$ car ce sont des hyperplans vectoriels : on aurait $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ égaux ou opposés.

Mais alors $\dim(F_1 + F_2) \geqslant n - 1 + 1 = n$, dimension de l'espace affine, donc l'intersection est non vide, (voir Corollaire 1.43). Comme tout point de $H_1 \cap H_2$ est équidistant de H_1 et de H_2, (distance nulle), l'inclusion de $H_1 \cap H_2$ dans les hyperplans bissecteurs et alors évidente.

Dans le cas de H_1 et H_2 parallèles, leurs directions $F_1 = \{\overrightarrow{U}\}^\perp$ et $F_2 = \{\overrightarrow{V}\}^\perp$ étant égales, $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ sont liés, (car $\mathbb{R}\,\overrightarrow{U} = F_1^\perp = F_2^\perp = (\mathbb{R}\,\overrightarrow{V})^{\perp\perp} = \mathbb{R}\,\overrightarrow{V}$) et comme ils sont unitaires, $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$ ou $\overrightarrow{U} = -\overrightarrow{V}$.

L'une des deux équations des « hyperplans médiateurs » devient constante. Par exemple, supposons que $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{V}$, il reste :

$$(h - k)\left(\sum_{i=1}^{n}(u_i + v_i)x_i + h + k\right) = 0,$$

et comme on a supposé H_1 et H_2 distincts, $h - k \neq 0$, il reste un hyperplan, orthogonal à $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{U}$, donc parallèle à H_1, (et H_2 dans ce cas). ■

REMARQUE 4.44. — *Pourquoi ce résultat ne s'étend pas, tel quel, au cas préhilbertien ?*

C'est parce qu'un hyperplan H de A affine préhilbertien n'admet pas forcément une droite comme orthogonal, (voir Tome 3, remarque 14.37 où l'on construit un tel hyperplan).

Par contre, si on part de deux hyperplans H_1 et H_2 dont les directions sont les orthogonaux de deux vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$, (que l'on peut choisir unitaires), tout ce qui précède s'applique, à commencer par le calcul de la distance d'un point à ces hyperplans comme en 4.37.

Pour terminer ce paragraphe, il serait bon de dire ce que donne la notion de barycentre, (fondamentale en géométrie affine), dans le cas préhilbertien, ce qui nous conduit à la *relation de Liebnitz*.

DÉFINITION 4.45. — *Soient $a_1, \ldots, a_n$ des points de A espace affine préhilbertien réel, affectés des coefficients α_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. On appelle fonction numérique de Liebnitz, l'application φ de A dans $\mathbb{R}$ définie par* $\varphi(m) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{ma_i}^2$.

Cette expression rappelle la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{ma_i}$, (appelée d'ailleurs *fonction vectorielle de Liebnitz*), qui sert à introduire le barycentre des (a_i, α_i) lorsqu'il existe. C'est pourquoi on est incité à comparer $\varphi(m)$ et $\varphi(g)$, (lorsque le barycentre g existe), ou plus généralement $\varphi(m)$ et $\varphi(m')$, pour deux points quelconques de A.

En écrivant : $\overrightarrow{m'a_i}^2 = (\overrightarrow{m'm} + \overrightarrow{ma_i})^2$,

$= \overrightarrow{m'm}^2 + 2\overrightarrow{m'm} \cdot \overrightarrow{ma_i} + \overrightarrow{ma_i}^2$,

en multipliant par α_i et en sommant, on obtient l'égalité :

4.46. $\varphi(m') = \varphi(m) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{m'm}^2 + 2\overrightarrow{m'm} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{ma_i}\right)$.

Cette relation se simplifie de deux façons, suivant la nullité ou non de $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Si le barycentre des (a_i, α_i) n'existe pas, donc si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, on a :

4.47 $\varphi(m') = \varphi(m) + 2\overrightarrow{m'm} \cdot \overrightarrow{V}$, avec $\overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{ma_i}$ vecteur constant par rapport à m, car :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{m'a_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{m'm} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{ma_i}, \text{ avec } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0.$$

Si le barycentre g, des (a_i, α_i) existe, la relation jointe au fait que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = 0$, conduit à :

4.48 $\varphi(m) = \varphi(g) + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \overrightarrow{mg}^2.$

Ces deux expressions permettent, entre autre, de trouver les «nappes de niveau» de cette fonction φ, c'est-à-dire l'ensemble des points m tels que $\varphi(m) = k$, k scalaire fixé.

En dimension deux, on a des courbes, en dimension trois des vraies nappes, en dimension quelconque n, il s'agirait de variétés d'ordre $n-1$, (voir Tome 5, Théorème 9.157), d'où les guillemets.

THÉORÈME 4.49. — *Soit une famille finie $(a_i, \alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de points de A, espace affine préhilbertien réel, et φ la fonction de Liebnitz numérique associée. Soit k un réel fixé. L'ensemble des points m de A tels que $\varphi(m) = k$ est vide, ou c'est une sphère, si $\sum \alpha_i \neq 0$; et il est vide ou égal à l'espace entier ou à un hyperplan si $\sum \alpha_i = 0$.*

En effet, si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$ est non nul, le barycentre g existe, et on cherche m tel que $\alpha \overrightarrow{mg}^2 = k - \varphi(g)$, (d'après 4.48), soit encore les m tels que $\overrightarrow{mg}^2 = \dfrac{k - \varphi(g)}{\alpha}$. Cet ensemble est *vide* si $\dfrac{k - \varphi(g)}{\alpha} < 0$, et c'est *la sphère* de centre g, de rayon $\sqrt{\dfrac{k - \varphi(g)}{\alpha}}$ sinon, (sphère éventuellement réduite à un point).

Par contre, si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$, en notant $\overrightarrow{V}$ le vecteur, constant par rapport à m, défini par $\overrightarrow{V} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{ma_i}$, on cherche les points m tels que, si a est fixé dans l'espace, on ait $\varphi(a) + 2\overrightarrow{ma} \cdot \overrightarrow{V} = k$, soit $2\overrightarrow{ma} \cdot \overrightarrow{V} = k - \varphi(a)$.

Si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ et $k - \varphi(a) \neq 0$, cet ensemble est *vide*;

si $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ et $k - \varphi(a) = 0$, on a *l'espace entier*;

si $\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$, l'égalité $\overrightarrow{am} \cdot \overrightarrow{V} = \dfrac{\varphi(a) - k}{2}$ définit un *hyperplan* de direction le noyau de la forme linéaire $\overrightarrow{X}$ donne $\overrightarrow{X} \cdot \overrightarrow{V}$. ■

COROLLAIRE 4.49. bis. — *Soient a et b deux points de l'espace affine préhilbertien réel A. L'ensemble des points m de l'espace tels que le rapport des longueurs $||\overrightarrow{ma}||$ et $||\overrightarrow{mb}||$ soit constant, égal à k, est*

l'hyperplan médiateur de a et b si $k = 1$,
une sphère centrée en g barycentre de $(a, 1)$ et $(b, -k^2)$ si $k \neq 1$, de rayon $\dfrac{k}{|1-k^2|}\,||\overrightarrow{ab}||$.

En effet, on cherche les points m tels que $\overrightarrow{ma^2} - k^2\overrightarrow{mb^2} = 0$, et le Théorème 4.49 s'applique pour les points $(a, 1)$ et $(b, -k^2)$.

Pour $k = 1$, le barycentre de ces points massiques n'existe pas, et on reconnait hyperplan médiateur; et

si $k \neq 1$, on est conduit ici, avec g barycentre de $(a, 1)$ et $(b, -k^2)$, à l'égalité $(1-k^2)\overrightarrow{mg^2} = -\varphi(g)$.

Or $\varphi(g) = \overrightarrow{ga^2} - k^2\overrightarrow{gb^2}$.

Comme $\overrightarrow{ga} - k^2\overrightarrow{gb} = 0$, on a encore $\overrightarrow{ga} - k^2\overrightarrow{ga} = k^2\overrightarrow{ab}$ donc $\overrightarrow{ga} = \dfrac{k^2}{1-k^2}\,\overrightarrow{ab}$, et $\overrightarrow{gb} = \dfrac{1}{k^2}\,\overrightarrow{ga} = \dfrac{1}{1-k^2}\,\overrightarrow{ab}$, donc

$$\varphi(g) = \left(\left(\frac{k^2}{1-k^2}\right)^2 - \frac{k^2}{(1-k^2)^2}\right)\overrightarrow{ab^2} = \frac{-k^2}{1-k^2}\,\overrightarrow{ab^2},$$

d'où l'égalité $\overrightarrow{mg^2} = \dfrac{k^2}{(1-k^2)^2}\,\overrightarrow{ab^2}$, et le rayon de la sphère. ■

3. Espaces affines euclidiens de dimension trois

Les pieds sur terre, la tête dans les étoiles, c'est tout un programme. S'il est intéressant d'obtenir des résultats généraux, il est quand même bon de préciser ce qui se passe dans l'espace qui nous entoure, modélisé par $\mathbb{R}^3$ euclidien, et même sur un plan, tel cette feuille de papier. D'autant que trois, (resp. quatre) points affinement libres du préhilbertien le plus abstrait possible vous placeront dans un plan, (resp. sous-espace euclidien de dimension trois).

La géométrie plane fera l'objet du chapitre suivant, je me bornerai ici à quelques compléments, liés à l'emploi du produit vectoriel.

Rappelons que, dans E euclidien de dimension n, le produit vectoriel : $(\overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}}) \rightsquigarrow \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} \wedge \ldots \wedge \overrightarrow{v_{n-1}}$ est une application $n-1$-linéaire alternée de E^{n-1} dans E, et que $\overrightarrow{v_1} \wedge \ldots \wedge \overrightarrow{v_{n-1}}$ est un vecteur orthogonal à chaque $\overrightarrow{v_j}$, nul si et seulement si la famille $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_{n-1}}\}$ est liée; (voir Tome 3, 14.54).

4.50. *Vecteur directeur d'une droite intersection de deux plans.*

Soit A affine euclidien de dimension trois rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, et deux plans affines P et P' d'équations respectives $ux + vy + wz = h$ et $u'x + v'y + w'z = h'$, plans non parallèles.

Si F et F' sont les directions des plans, comme $F \not\subseteq F'$, (et $F' \not\subseteq F$) on a $\dim F \cap F' \leqslant 1$, donc :

$$\begin{aligned}\dim(F + F') &= \dim F + \dim F' - \dim(F \cap F'),\\ &= 4 - \dim F \cap F'.\end{aligned}$$

Or $\dim(F + F') \leqslant 3 \Longrightarrow \dim F \cap F' \geqslant 1$, d'où en fait $\dim F \cap F' = 1$ et $\dim(F + F') = 3$. Mais alors, (Corollaire 1.43) $P \cap P'$ est non vide, c'est un sous-espace affine de direction $F \cap F'$, droite vectorielle : c'est donc une droite affine.

De plus, si $\overrightarrow{U} = u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j} + w\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{U'} = u'\overrightarrow{i} + v'\overrightarrow{j} + w'\overrightarrow{k}$, ces vecteurs sont tels que $F = \{\overrightarrow{U}\}^{\perp}$ et $F' = \{\overrightarrow{U'}\}^{\perp}$, donc le vecteur $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{U'}$ sera orthogonal à $\overrightarrow{U}$, (donc dans F) et à $\overrightarrow{U'}$, (donc dans F') : il dirige $F \cap F'$ s'il est non nul. Or la colinéarité de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{U'}$ donnerait $\{\overrightarrow{U}\}^{\perp} = \{U'\}^{\perp}$ soit $F = F'$ et P parallèle à P' ce qui est exclu. On a bien $\{\overrightarrow{U}, \overrightarrow{U'}\}$ famille libre et $\overrightarrow{V}$ qui dirige $D = P \cap P'$.

THÉORÈME 4.51. — *Soient deux plans P et P' d'équations respectives $ux + vy + wz + h = 0$ et $u'x + v'y + w'z + h' = 0$ dans un repère orthonormé de A, affine euclidien de dimension trois. Si $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{U'}$ sont les vecteurs de composantes scalaires respectives u, v, w et u', v', w', on a $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{U'}$ qui dirige la droite $D = P \cap P'$ lorsque ces deux plans sont non parallèles, (et $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{U'} = \overrightarrow{0}$ sinon).* ■

Ce produit vectoriel est un outil important en analytique, et les questions que nous allons traiter vont le montrer. Parlons d'abord des faisceaux de plans.

DÉFINITION 4.52. — *Soient deux plans P et P' distincts, d'équations $f(x, y, z) = 0$ et $f'(x, y, z) = 0$, dans un repère $\mathcal{R}$ de l'espace affine, (de dimension trois) A, f et f' étant des formes affines non nulles. On appelle faisceau de plans engendrés par P et P', l'ensemble des plans d'équations $\lambda f + \lambda' f' = 0$, pour tout (λ, λ') de $\mathbb{R}^2$ tel que la forme affine $\lambda f + \lambda' f'$ soit non constante.*

THÉORÈME 4.53. — *Si les plans P et P' sont parallèles, les plans du faisceau qu'ils engendrent sont tous les plans qui leur sont parallèles. Si P et P' sont sécants les plans du faisceau sont tous les plans contenant la droite $D = P \cap P'$.*

Supposons le repère $\mathcal{R} = (0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, et soit :

$$f(x,y,z) = ux + vy + wz + h = 0,$$

et

$$f'(x,y,z) = u'x + v'y + w'z + h' = 0,$$

les équations des deux plans P et P'.

En cas de parallélisme, les deux formes linéaires de noyaux la direction commune de ces plans sont proportionnelles, et par exemple, il existe α réel non nul tel que :

$$(u', v', w') = \alpha(u, v, w),$$

d'où la forme affine $\lambda f + \lambda' f'$ qui s'écrit :

$$(\lambda + \alpha\lambda')(ux + vy + wz) + \lambda h + \lambda' h'.$$

Elle est non constante pour $\lambda + \alpha\lambda' \neq 0$, et dans ce cas l'équation $\lambda f + \lambda' f' = 0$ est bien l'équation d'un plan, de direction $\{u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}\}^{\perp}$, donc parallèle à P et P'.

Réciproquement, si Q est un plan parallèle à P, (donc à P'), en introduisant $f'' = \dfrac{1}{\alpha} f'$, les équations de P et P' sont respectivement :

$$ux + vy + wz + \quad h = 0,$$

et

$$ux + vy + wz + \frac{h'}{\alpha} = 0.$$

La direction de Q étant $(u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k})^{\perp}$, une équation possible de Q est $ux + vy + wz + h'' = 0$.

On cherche alors λ et λ' réels tels que $\begin{cases} \lambda + \lambda' = 1 \\ \lambda h + \lambda' \dfrac{h'}{\alpha} = h'', \end{cases}$ ce qui est possible si $\dfrac{h'}{\alpha} - h \neq 0$, c'est-à-dire si les plans P et P' sont distincts, ce qui est le cas par définition du terme faisceau. Mais alors, la forme affine $\lambda f + \lambda' \dfrac{1}{\alpha} f'$ s'écrit :

$$(\lambda + \lambda')(ux + vy + wz) + \lambda h + \lambda' \frac{h'}{\alpha} = ux + vy + wz + h''$$

le plan Q est un plan du faisceau engendré par P et P'.

Si maintenant $P \cap P' = D$ est une droite, tout plan Q du faisceau, d'équation $\lambda f(x,y,z) + \lambda' f'(x,y,z) = 0$ contient les points de D, dont les coordonnées annulent f et f', et si Q est un plan contenant D, comme D est dirigée par $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{U'}$, (voir Théorème 4.51), avec :

$$\overrightarrow{U} = u\overrightarrow{i} + v\overrightarrow{j} + w\overrightarrow{k},$$

et

$$\overrightarrow{U'} = u'\overrightarrow{i} + v'\overrightarrow{j} + w'\overrightarrow{k},$$

un vecteur $\overrightarrow{W}$ orthogonal à la direction de Q sera orthogonal à $\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{U'}$ donc appartiendra à $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{U'})$.

Si une équation de Q est $ax + by + cz + d = 0$, c'est que $\overrightarrow{W} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{U'})$, donc il existe α et α' réels tels que $\overrightarrow{W} = \alpha\overrightarrow{U} + \alpha'\overrightarrow{U'}$, et l'équation de Q s'écrit, ($a = \alpha u + \alpha' u'$, $b = \alpha v + \alpha' v'$, $c = \alpha w + \alpha' w'$) :

$$\alpha(ux + vy + wz) + \alpha'(u'x + v'y + w'z) + d = 0.$$

En prenant $m_0(x_0, y_0, z_0)$ sur $D = P \cap P'$, avec $D \subset Q$, on aura $ux_0 + vy_0 + wz_0 = -h$, $u'x_0 + v'y_0 + w'z_0 = -h'$, et $-\alpha h - \alpha' h' + d = 0$, donc $d = \alpha h + \alpha' h'$ et finalement l'équation de départ de Q est bien du type $\alpha f + \alpha' f' = 0$, donc Q est plan du faisceau. ■

Cette façon de prendre les plans contenant une droite donnée, dans un espace affine de dimension trois, facilite beaucoup les calculs comme vont le montrer les exemples suivant. Quelles remarques avant.

REMARQUE 4.54. — Il n'y a pas bijection entre les couples (λ, λ') de $\mathbb{R}^2$ et les plans d'équation $\lambda f + \lambda' f' = 0$, puisque les couples proportionnels (λ, λ') et $(\mu\lambda, \mu\lambda')$, (avec $\mu \neq 0$), conduisent à la même équation après simplification.

C'est pourquoi on prend parfois les équations des plans du faisceau sous la forme $f + \lambda'' f' = 0$, ce qui correspond à tous les couples (λ, λ') avec $\lambda \neq 0$, avec $\lambda'' = \dfrac{\lambda'}{\lambda}$), en notant $(P_{\lambda''})_{\lambda'' \in \mathbb{R}}$ les plans associés, et en n'oubliant pas le plan d'équation $f' = 0$, qui ne peut pas être obtenu de cette façon. On le note P_∞ car, avec λ'' non nul, en divisant $f + \lambda'' f'$ par λ'' et en faisant tendre λ'' vers l'infini, on obtient l'équation $f' = 0$.

C'est ce qui est fait au tome 5, en 10.24 pour l'étude des droites qui sont sur un hyperboloïde à une nappe.

REMARQUE 4.55. — L'étude faite à partir de 4.52 pour les faisceaux de plans, s'étend aux faisceaux d'hyperplans, engendrés par deux hyperplans distincts d'équations respectives $f = 0$ et $f' = 0$, ensemble des hyperplans d'équations $\lambda f + \lambda' f' = 0$, avec f et f' formes affines et λ, λ' réels tels que la forme $\lambda f + \lambda' f'$ soit non constante. On obtient ainsi, soit une famille d'hyperplans parallèles, soit tous les hyperplans contenant le sous-espace affine de dimension $n - 2$, intersection des deux hyperplans d'équations $f = 0$ et $f' = 0$. En particulier, pour $n = 2$, *on obtient les faisceaux de droites.*

Passons à quelques exemples en dimensions trois.

EXEMPLE 4.56. — *Plan parallèle à une droite Δ, contenant une droite D.*

On se donne une droite D comme intersection des plans P et P' d'équations $f = 0$ et $f' = 0$, et une autre droite Δ.

D'après le Théorème 4.53, tout plan contenant D a une équation du type $f + \lambda f' = 0$, ou bien $f' = 0$; on note P_λ ou P_∞ ces plans.

Avec $f(x, y, z) = ux + vy + wz + h$ et $f' = u'x + v'y + w'z + h'$, le vecteur $\overrightarrow{V}_\lambda = \overrightarrow{U} + \lambda\overrightarrow{U'}$, de composantes $u + \lambda u'$, $v + \lambda v'$, $w + \lambda w'$ est orthogonal à la direction de P_λ, donc si $\overrightarrow{W}$ est un vecteur directeur de Δ, cette droite sera parallèle à P_λ si et seulement si $\overrightarrow{W} \in \{\overrightarrow{V}_\lambda\}^\perp$, soit si et seulement si $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{W} + \lambda \overrightarrow{U}' \cdot \overrightarrow{W} = 0$; ce qui donne λ sauf si $\overrightarrow{U'} \cdot \overrightarrow{W} = 0$ avec $\overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{W} \neq 0$, mais dans ce cas $\overrightarrow{W} \in \{\overrightarrow{U'}\}^\perp$, donc le plan P_∞ est parallèle à Δ; enfin si $\overrightarrow{U'} \cdot \overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \cdot \overrightarrow{W} = 0$, tout plan du faisceau convient, mais dans ce cas $D // \Delta$.

EXEMPLE 4.57. — *Perpendiculaire commune à deux droites.*

Etudions le problème suivant : étant données deux droites D_1 et D_2, existe-t-il une droite Δ qui rencontre D_1 et D_2 en étant orthogonale à ces deux droites? Si oui, on dira que Δ est la (ou une?) *perpendiculaire commune* à D_1 et D_2.

On se donne D_1 par un vecteur directeur $\overrightarrow{V_1}$ et un point a_1, ou par deux équations de plans, $f_1 = 0$ et $f_1' = 0$, d'où deux vecteurs orthogonaux $\overrightarrow{U_1}$ et $\overrightarrow{U_1'}$ à ces plans, et un choix possible de $\overrightarrow{V_1} = \overrightarrow{U_1} \wedge \overrightarrow{U_1'}$ pour vecteur directeur de D_1. De même on suppose donnée D_2 par deux plans la contenant, d'équations $f_2 = 0$, $f_2' = 0$ et avec $\overrightarrow{U_2}$ et $\overrightarrow{U_2'}$ orthogonaux à ces plans, $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{U_2} \wedge \overrightarrow{U_2'}$ dirige D_2.

S'il existe une droite Δ solution du problème, un vecteur directeur $\overrightarrow{W}$ de Δ est orthogonal à $\overrightarrow{V_1}$ et à $\overrightarrow{V_2}$, donc $\overrightarrow{W}$ est parallèle à $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$, si ce vecteur est non nul!

Or $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{0}$ *équivaut à* D_1 *et* D_2 *parallèles*, donc coplanaires, (on les suppose distinctes), et dans le plan P de ces deux droites, toute droite Δ perpendiculaire à l'une l'est aux deux : notre problème a une infinité de solutions.

Si $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{W}$ *est non nul*, une solution Δ devant couper D_1, détermine un plan $Q_1 = \text{aff}(D_1, \Delta)$ passant par D_1 et parallèle à Δ, (plan car $\overrightarrow{W}$ est non lié à $\overrightarrow{V_1}$).

L'exemple 4.56 nous donne l'existence et l'unicité d'un tel plan. Mais on a de même existence (et unicité) d'un plan Q_2, passant par D_2 et parallèle à Δ. Comme Δ n'est pas connue, en fait Q_1 et Q_2 contiennent respectivement D_1 et D_2 et sont parallèles à D quelconque de direction $\overrightarrow{W}$.

Si ces deux plans Q_1 et Q_2 étaient parallèles, leur direction contiendrait $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ non nul, c'est trop pour un plan car alors $\{\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donc Q_1 et Q_2 sont sécantes et déterminent la perpendiculaire commune à D_1 et D_2 dans ce cas. (Voir figure 4.57.)

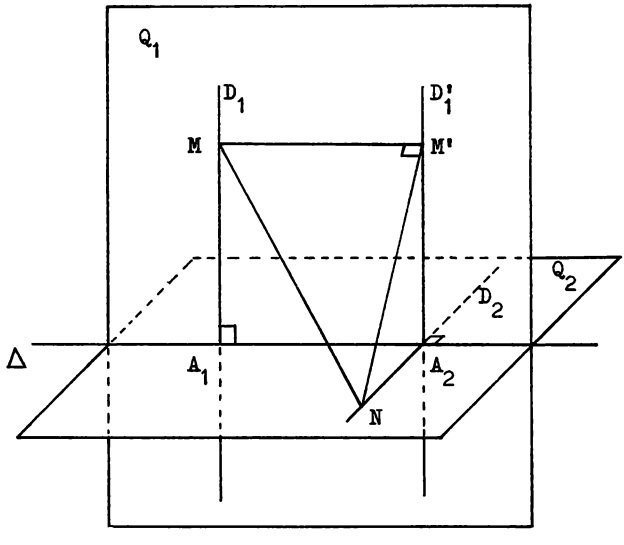


Fig. 4.57.

Nous venons de justifier la première partie du

THÉORÈME 4.58. — *Soient deux droites D_1 et D_2 non parallèles. Il existe une et une seule droite Δ qui rencontre D_1 en A_1, D_2 en A_2 en leur étant orthogonale. Les points A_1 et A_2, appelés pieds de la perpendiculaire commune, sont tels que $||\overrightarrow{A_1A_2}|| = d(D_1, D_2)$, quantité appelée la plus courte distance de D_1 et D_2.*

Soient M sur D_1 et N sur D_2, et D_1', parallèle à D_1 passant par A_2. Comme la droite Δ est perpendiculaire à D_1 et D_2, elle l'est au plan affine engendré par D_2 et D_1', donc le projeté orthogonal M' de M sur D_1' est tel que $||\overrightarrow{MM'}|| = ||\overrightarrow{A_1A_2}||$, et $\overrightarrow{M'N}$ perpendiculaire à MM'. Par Pythagore on a alors :

$$\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{MM'}^2 + \overrightarrow{M'N}^2 = ||\overrightarrow{A_1A_2}||^2 + ||\overrightarrow{M'N}||^2 \geqslant ||A_1A_2||^2,$$

et cette borne inférieure est atteinte lorsque $M' = N = A_2$, (intersection de D_2 et D_1') ce qui équivaut à M en A_1 et N en A_2.

On a donc $d(D_1, D_2) = \inf\{||\overrightarrow{MN}||, M \in D_1, N \in D_2\}$ qui est atteinte pour $M = A_1$ et $N = A_2$. ■

REMARQUE 4.59. — *Lorsque les droites D_1 et D_2 sont connues par des paramétrisations*, on peut trouver rapidement la perpendiculaire commune.

En effet, si D_1 est connue par un point a_1 et un vecteur directeur $\overrightarrow{U_1}$, et D_2 par a_2 et $\overrightarrow{U_2}$, on paramètre ces droites par :

$$(m \in D_1) \Longleftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{a_1m} = t\overrightarrow{U_1});$$

puis
$$(n \in D_2) \Longleftrightarrow (\exists s \in \mathbb{R}, \overrightarrow{a_2n} = s\overrightarrow{U_2});$$

donc les coordonnées de m sont fonctions affines de t, celles de n fonctions affines de s, ce qui fait que $\overrightarrow{mn}^2$ est fonction polynomiale de degré deux en s et t, notons-la $\varphi(s,t)$, et φ, à valeurs positives admet une borne inférieure atteinte pour les paramètres s_0 et t_0 des pieds de la perpendiculaire commune, d'après le Théorème 4.58. Mais alors le point (s_0, t_0) est critique pour φ, (Tome 3, Théorème 16.61) donc s_0 et t_0 sont obtenus en résolvant le système $\begin{cases} \varphi_s'(s_0,t_0) = 0 \\ \varphi_t'(s_0,t_0) = 0 \end{cases}$ et ce système admet soit une seule solution si D_1 et D_2 sont non parallèles, soit tout couple (s,t) lorsque D_1 et D_2 sont parallèles.

EXEMPLE 4.59.bis. — Distance d'un point à une droite en dimension trois. Si on considère $D = \mathrm{aff}(a,b)$, la distance de c à D est $d(c,D) = \dfrac{||\overrightarrow{ca} \wedge \overrightarrow{ab}||}{||\overrightarrow{ab}||}$.

C'est évident si $c \in D$, les deux membres de l'égalité étant nuls. Si $c \notin D$, on projette c en h sur D, orthogonalement. On a $\overrightarrow{ca} = \overrightarrow{ch} + \overrightarrow{ha}$ avec $\overrightarrow{ha}$ lié à $\overrightarrow{ab}$ donc $\overrightarrow{ca} \wedge \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ch} \wedge \overrightarrow{ab}$.

C'est encore $||\overrightarrow{ch}||\ ||\overrightarrow{ab}||\ \dfrac{\overrightarrow{ch}}{||\overrightarrow{ch}||} \wedge \dfrac{\overrightarrow{ab}}{||\overrightarrow{ab}||}$. Mais $\dfrac{\overrightarrow{ch}}{||\overrightarrow{ch}||}$ et $\dfrac{\overrightarrow{ab}}{||\overrightarrow{ab}||}$ étant unitaires orthogonaux, leur produit vectoriel est un vecteur unitaire qui les complète en une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$, (voir Tome 3, 14.55), donc $||\overrightarrow{ca} \wedge \overrightarrow{ab}|| = ||\overrightarrow{ch}||\ ||\overrightarrow{ab}|| = d(c,D)||\overrightarrow{ab}||$ d'où le résultat. ■

4. Groupe des isométries

Nous avons vu en 4.5 une première définition des isométries, trop restrictive a priori car elle ne fait intervenir que l'aspect espace métrique d'un espace affine métrique, sans s'occuper de la structure affine. En fait, cette définition convient dans le cas affine euclidien car elle va impliquer le caractère affine de l'application.

THÉORÈME 4.60. — *Soient A et A' deux espaces préhilbertiens réels et u une application de A dans A' qui conserve les distances. Alors u est affine injective.*

D'abord, $u(a) = u(b)$ implique $d(a,b) = d\big(u(a),u(b)\big) = 0$ donc $a = b$, et u est injective.

Puis, pour tout couple (m,n) de A^2, on a $||\overrightarrow{u(m)u(n)}||^2 = ||\overrightarrow{mn}||^2$, soit, en fixant une origine a dans A, et en prenant $u(a)$ pour origine dans A', on a encore :

$$||\overrightarrow{u(a)u(n)} - \overrightarrow{u(a)u(m)}||^2 = ||\overrightarrow{an} - \overrightarrow{am}||^2,$$

ce qui, en développant, et en tenant compte de $||\overrightarrow{u(a)u(n)}|| = ||\overrightarrow{an}||$ et de $||\overrightarrow{u(a)u(m)}|| = ||\overrightarrow{am}||$, conduit à :

$$-4 < \overrightarrow{u(a)u(n)}, \overrightarrow{u(a)u(m)} > = -4 < \overrightarrow{an}, \overrightarrow{am} > .$$

Considérons alors l'application f de E, direction de A, dans E', direction de A' définie par :

$$f(\overrightarrow{am}) = \overrightarrow{u(a)u(m)},$$

l'égalité précédente implique l'égalité :

$$< f(\overrightarrow{an}), f(\overrightarrow{am} > = < \overrightarrow{an}, \overrightarrow{am} >,$$

qui implique la linéarité de f, (voir Tome 3, Théorème 14.44), ce qui à son tour, justifie le caractère affine de u, (Théorème 1.52). ■

COROLLAIRE 4.61. — *Une application u de A affine euclidien dans lui-même qui conserve la distance est une bijection affine, donc une isométrie.*

En effet, u est affine injective d'après le Théorème 4.60, donc son application linéaire associée, f, devient injective en dimension finie, donc surjective, mais alors u est aussi bijective, puisque $u = \theta_{u(a)}^{-1} \circ f \circ \theta_a$ devient composée de bijections. (Voir 1.55). ■

Ceci justifie la définition donnée en 4.5. Par contre, si la norme n'est pas euclidienne, il faudrait appeler *isométrie, les surjections affines qui conservent la distance*, et dans le cadre des préhilbertiens, *les isométries sont les surjections qui conservent la distance*, le Théorème 4.60 donnant l'aspect affine et l'injectivité.

Nous avons vu, (Théorème 1.57) que les bijections affines de A, espace affine, dans lui-même forment un groupe $\mathcal{G}$ pour le produit de composition, ayant l'ensemble des translations, $\mathcal{T}$, pour sous-groupe distingué.

Les isométries forment un sous-groupe de $\mathcal{G}$, ayant également $\mathcal{T}$ comme sous-groupe distingué. On peut le vérifier directement, ou, en utilisant les notations du Théorème 1.57, avec φ morphisme du groupe $\mathcal{G}$ des bijections affines, sur le groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$ des isomorphismes de E, direction de A, on vérifie que l'ensemble $\mathcal{I}s(A)$ des isométries de A est $\varphi^{-1}(O(E))$, c'est donc un sous-groupe comme image réciproque d'un sous-groupe.

4.62. *En dimension finie*, le groupe orthogonal admet un sous-groupe distingué, le groupe orthogonal spécial, $SO(E)$.
L'image réciproque $\varphi^{-1}(SO(E))$, notée $\mathrm{Dep}(A)$ est formée des *déplacements* de A affine euclidien : il s'agit donc des isométries affines associées aux isométries vectorielles directes. Les autres sont appelés *anti-déplacements*.

Nous allons étudier d'un peu plus près les éléments de $\mathcal{I}s(A)$. D'abord, si u est une bijection affine d'isométrie vectorielle f, et si a est un point fixé de A, on a vu, (Théorème 1.59) qu'il existe deux translations t et

t', telles que l'on ait $u = t \circ v_a = v_a \circ t'$, avec v_a application affine laissant a fixé, d'application linéaire associée f. Mais alors, dans l'espace affine A considéré comme vectoriel en fixant l'origine en a, v_a n'est autre que l'application f, et nous savons que sur E, vectoriel euclidien de dimension n, f se décompose en un produit d'au plus n symétries orthogonales par rapport à des hyperplans, (Tome 3, Théorème 14.89).

Ceci va nous permettre de décomposer u en un produit de symétries orthogonales (affines) par rapport à des hyperplans, dans le cadre euclidien, mais avant, un peu de vocabulaire.

DÉFINITION 4.63. — *Soit B un sous-espace affine de A, préhilbertien réel. Si B admet des supplémentaires orthogonaux, C par exemple, et si $\{a\} = B \cap C$, on appelle symétrie orthogonale par rapport à B l'application s qui au point m associe m' tel que $\overrightarrow{am'} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, si $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{u}$ dans la direction de B et $\overrightarrow{v}$ dans celle de C.*

REMARQUE 4.64. — Si l'espace affine A est euclidien, il existe des symétries orthogonales par rapport à tout sous-espace affine B. Ceci est caduc pour les préhilbertiens réels, mais vrai dans ce cas pour les sous-espaces affines B de dimension finie.

REMARQUE 4.65. — La définition de la symétrie orthogonale semble dépendre du choix du sous-espace affine supplémentaire orthogonal. Il n'en est rien. Soit en fait B de direction F, a et b deux points de B, et C_a et C_b les sous-espaces affines de direction $F^\perp$, (qui existe), passant par a et b respectivement. Soit m dans A, on décompose $\overrightarrow{am}$ en $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{u}$ dans F et $\overrightarrow{v}$ dans $F^\perp$, on aura alors $\overrightarrow{bm} = \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{am} = (\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{u}$ dans F. Mais alors, la symétrie $s_a(m)$ est m' tel que $\overrightarrow{am'} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, alors que le symétrique $s_b(m)$ est a priori m'' tel que $\overrightarrow{bm''} = (\overrightarrow{ba} + \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{v}$, d'où $\overrightarrow{am''} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bm''} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ba} + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ donc $\overrightarrow{am''} = \overrightarrow{am'}$: on a bien $m' = m''$.

THÉORÈME 4.66. — *Une isométrie affine est une symétrie orthogonale si et seulement si elle est involutive.*

D'abord, si s est symétrie orthogonale par rapport au sous-espace affine B, avec C, sous-espace affine supplémentaire orthogonal de B, et $\{a\} = B \cap C$, au point m de A tel que $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, ($\overrightarrow{u}$ dans F direction de B et $\overrightarrow{v}$ dans $F^\perp$ direction de C), on associe $s(m) = m'$ tel que $\overrightarrow{am'} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, mais alors $s^2(m) = s(m') = m''$ est tel que

$\overrightarrow{am''} = \vec{u} - (-\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{am}$, donc $s^2(m) = m$, et *s est involutive.* Puis, si s est involutive, son application linéaire associée f l'est aussi, (remarque 1.56).

Mais l'égalité $f^2 = \mathrm{id}_E$, prouve que f, qui annule un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable, (Tome 1, Théorème 10.49), donc $E = E_1 \oplus E_{-1}$ avec :

$E_1 = \{\vec{x} \in E; f(\vec{x}) = \vec{x}\}$ et $E_{-1} = \{\vec{x} \in E; f(\vec{x}) = -\vec{x}\}$. Comme f est une isométrie vectorielle, si $\vec{x} \in E_1$ et $\vec{y} \in E_{-1}$, on a $< f(\vec{x}), f(\vec{y}) > = < \vec{x}, \vec{y} >$, (conservation du produit scalaire), mais aussi $= < \vec{x}, -\vec{y} >$, d'où $2 < \vec{x}, \vec{y} > = 0$, ce qui prouve les inclusions $E_1 \subset E_{-1}^{\perp}$, et $E_{-1} \subset E_1^{\perp}$. On a des égalités car si $\vec{u}$ est dans $E_{-1}^{\perp}$, en décomposant $\vec{u}$ en $\vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x}$ dans E_1 et $\vec{y}$ dans E_{-1}, on a $< \vec{u}, \vec{y} > = 0$, soit $< \vec{x}, \vec{y} > + ||\vec{y}||^2 = 0$ avec $< \vec{x}, \vec{y} > = 0$, d'où $\vec{y} = 0$ et $\vec{u} \in E_1$: *la somme directe $E = E_1 \oplus E_{-1}$ est orthogonale.*

Enfin s admet des points fixes : soit a quelconque de A, l'isobarycentre g de a et de $s(a)$ est tel que $s(g)$ est isobarycentre de $s(a)$ et de $s^2(a) = a$, donc c'est g. Mais alors, en fixant l'origine en g, s s'identifie avec la symétrie orthogonale vectorielle f.

Ou bien, soit B_g et C_g deux sous-espaces affines passant par g, point fixe pour s, de direction respectives E_1 et $E_{-1} = E_1^{\perp}$, le point m de A a pour image m' tel que $\overrightarrow{gm'} = \overrightarrow{s(g)s(m)} = f(\overrightarrow{gm})$, et si on décompose $\overrightarrow{gm}$ en $\vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u}$ dans E_1, $\vec{v}$ dans E_{-1}, on a $\overrightarrow{gm'} = f(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$: on retrouve la définition de m' image de m dans la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace affine B_g. ■

En cours de route, on a rencontré un petit résultat amusant, susceptible de généralisation.

REMARQUE 4.67. — *Soit A un espace affine réel et u une bijection affine vérifiant l'égalité $u^p = \mathrm{id}_A$, avec p entier non nul. Alors u admet au moins un point fixe.*

Si $p = 1$, tous les points de A sont fixes, et si $p > 1$, avec a point de A et g isobarycentre de $a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a)$, on obtient, (conservation du barycentre par u affine), $u(g)$ isobarycentre de $u(a), u^2(a), \ldots, u^p(a)$ avec $u^p(a) = a$, donc des mêmes points d'où $u(g) = g$. ■

L'existence d'un point fixe permettant d'identifier une application affine et son application linéaire associée, il est bon de connaître un certain nombre de cas d'existence d'un tel point fixe. En voici un autre.

THÉORÈME 4.68. — *Soit u une surjection affine de A espace affine de dimension finie sur lui-même, d'application linéaire associée f. Si f n'admet pas 1 pour valeur propre, u admet un (et un seul), point fixe.*

Le Théorème 1.59 nous permet de décomposer u sous la forme $u = u_a \cdot t_{\overrightarrow{V}}$, avec u_a application affine d'application linéaire associée f, laissant a fixe, et $t_{\overrightarrow{V}}$ translation de vecteur $\overrightarrow{V}$, (c'est la surjectivité de u qui intervient en 1.59).

Un point m a donc pour image par $t_{\overrightarrow{V}}$ le point m' tel que $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{V}$, puis $u_a(m') = u(m) = m''$ est tel que $\overrightarrow{u_a(a)u_a(m')} = f(\overrightarrow{am'}) = \overrightarrow{am''}$ puisque $u_a(a) = a$.

Le point m est fixe pour u si on a l'égalité $m = m''$, soit :

$\overrightarrow{am} = f(\overrightarrow{am} + \overrightarrow{mm'}) = f(\overrightarrow{am} + \overrightarrow{V}) = f(\overrightarrow{am}) + f(\overrightarrow{V})$, soit encore :

$$(\mathrm{id}_E - f)(\overrightarrow{am}) = f(\overrightarrow{V}).$$

Comme 1 n'est pas valeur propre de f, $f - \mathrm{id}_E$ est injective, en dimension finie, donc bijective : il existe un et un seul $\overrightarrow{am}$ vérifiant l'égalité précédente, d'où un et un seul point fixe m pour u. ■

Cette valeur propre 1 joue un autre rôle en ce qui concerne les points fixes de u affine. On a :

THÉORÈME 4.69. — *Soit un espace affine A et u une application affine de A dans lui-même, d'application linéaire associée f. Les points fixes de A forment un sous-espace affine de A qui est vide, où s'il est non vide, qui a* $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$ *pour direction.*

En effet, s'il y a des points fixes pour u, avec a point fixe, on aura m point fixe de u si et seulement si $\overrightarrow{am} = \overrightarrow{u(a)u(m)} = f(\overrightarrow{am})$, soit encore $\overrightarrow{am} \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, et ceci caractérise bien l'appartenance de m au sous-espace affine passant par a, de direction $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$. ■

Nous allons utiliser tous ces résultats pour étudier des décompositions des isométries. On a d'abord :

THÉORÈME 4.70. — *Soit A un espace affine préhilbertien réel, B un sous-espace affine ayant des supplémentaires orthogonaux de direction G, et $\overrightarrow{V}$*

un vecteur de G. Si B' est l'image de B par la translation $t_{\frac{\overrightarrow{V}}{2}}$, (de vecteur $\frac{\overrightarrow{V}}{2}$), la translation $t_{\overrightarrow{V}}$, (de vecteur $\overrightarrow{V}$) se décompose en $s_{B'} \circ s_B$, en notant s_B et $s_{B'}$ les symétries orthogonales par rapport à B et B'.

Soit $b \in B$ et $b' = t_{\frac{\overrightarrow{V}}{2}}(b)$ son image dans B'.

Si F est la direction de B, on a $G = F^{\perp}$. Pour trouver l'image $s_B(m)$, on décompose $\overrightarrow{bm}$ dans la somme directe $E = F \oplus F^{\perp}$ en $\overrightarrow{bm} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u} \in F$, $\overrightarrow{w} \in F^{\perp}$, et $s_B(m) = m'$ est tel que $\overrightarrow{bm'} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$.

On a alors $\overrightarrow{b'm'} = \overrightarrow{b'b} + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$, avec $\overrightarrow{b'b} = -\dfrac{\overrightarrow{V}}{2} \in F^{\perp}$ donc : $\overrightarrow{b'm'} = \overrightarrow{u} - \left(\overrightarrow{w} + \dfrac{\overrightarrow{V}}{2}\right)$, et $s_{B'}(m') = m''$ est tel que :

$$\overrightarrow{b'm''} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} + \frac{\overrightarrow{V}}{2} = \overrightarrow{bm} + \frac{\overrightarrow{V}}{2},$$

d'où :
$$\overrightarrow{mm''} = \overrightarrow{mb'} + \overrightarrow{b'm''} = \overrightarrow{mb'} + \overrightarrow{bm} + \frac{\overrightarrow{V}}{2};$$

$$= \overrightarrow{bb'} + \frac{\overrightarrow{V}}{2} = \frac{\overrightarrow{V}}{2} + \frac{\overrightarrow{V}}{2} = \overrightarrow{V};$$

le point m'' est l'image de m par la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ et on a bien $s_{B'} \circ s_B = t_{\overrightarrow{V}}$. ■

REMARQUE 4.71. — *La structure préhilbertienne n'est pas intervenue. En associant les «symétries obliques» associées à des sommes directes $E = F \oplus G$, on aurait le même résultat.*

COROLLAIRE 4.72. — *Dans A espace affine préhilbertien réel, toute translation $t_{\overrightarrow{V}}$, (de vecteur $\overrightarrow{V}$ non nul), se décompose en un produit de deux symétries orthogonales par rapport à deux hyperplans de direction $\{\overrightarrow{V}\}^{\perp}$, déduits l'un de l'autre par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{V}}{2}$.*

C'est un cas particulier du Théorème 4.70. ■

THÉORÈME 4.73. — *Soit A affine euclidien de dimension n, toute isométrie est produit d'au plus $n+1$ symétries orthogonales par rapport à des hyperplans.*

En effet, soit u une isométrie de A, d'application linéaire associée f, et a un point fixé dans A. Il existe un vecteur $\overrightarrow{V}$ tel que u se décompose en $u = u_a \circ t_{\overrightarrow{V}}$, avec u_a application affine laissant a fixe, d'application linéaire associée f, (d'après le Théorème 1.59).

Soit b tel que $\overrightarrow{ab} = -\dfrac{\overrightarrow{V}}{2}$, et B l'hyperplan affine orthogonal à $\overrightarrow{V}$, passant par b. Comme $t_{\frac{\overrightarrow{V}}{2}}(b) = b'$ est tel que $\overrightarrow{bb'} = \dfrac{\overrightarrow{V}}{2} = \overrightarrow{ba}$, b' est le point a et l'image B' de B par $t_{\frac{\overrightarrow{V}}{2}}$ est l'hyperplan affine de direction $\{\overrightarrow{V}\}^{\perp}$, passant par a.

D'après le corollaire 4.72, on a $t_{\overrightarrow{V}} = s_{B'} \circ s_B$, donc $u = (u_a \circ s_{B'}) \circ s_B$.

Mais $v = u_a \circ s_{B'}$ est une isométrie affine laissant le point a fixe, elle s'identifie à une isométrie vectorielle qui se décompose en un produit d'au plus n symétries orthogonales par rapport à des hyperplans, (Tome 3, Théorème 14.89), dans A considéré comme vectoriel euclidien en fixant l'origine en a. D'un point de vue affine, ces symétries sont aussi des symétries orthogonales de A, d'où le résultat. ■

L'étude des cas particuliers ($n = 2, 3$) faite en 4.78 et 4.80 montrera qu'on ne peut pas faire mieux.

On peut encore décomposer autrement les isométries. D'abord un petit résultat :

THÉORÈME 4.74. — *Soit un espace affine A et u une application affine de A dans A ayant pour points fixes les éléments d'un sous-espace affine non vide B, de direction F. Si $\overrightarrow{V}$ est un vecteur de F, la translation $t_{\overrightarrow{V}}$ commute avec u.*

En effet, soit m dans A, $m' = t_{\overrightarrow{V}}(m)$ est tel que $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{V}$. On aura, avec b point fixe pour u, $u \circ t_{\overrightarrow{V}}(m) = u(m') = m''$ tel que $\overrightarrow{u(b)u(m')} = \overrightarrow{bm''} = f(\overrightarrow{bm'})$, f étant l'application linéaire associée à u.

Soit $t_{\overrightarrow{V}} \circ u(m)$. On a $u(m) = m'_1$ tel que $\overrightarrow{bm'}_1 = \overrightarrow{u(b)u(m)} = f(\overrightarrow{bm})$, puis $t_{\overrightarrow{V}}(m'_1) = m''_1$ avec $\overrightarrow{m'_1 m''_1} = \overrightarrow{V} = f(\overrightarrow{V})$ puisque $\overrightarrow{V}$ est dans $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, (d'après le Théorème 4.69).

Mais alors : $\overrightarrow{bm_1''} = \overrightarrow{bm_1'} + \overrightarrow{m_1'm_1''}$

$= f(\overrightarrow{bm}) + f(\overrightarrow{V}) = f(\overrightarrow{bm} + \overrightarrow{V})$

$= f(\overrightarrow{bm} + \overrightarrow{mm'})$ car $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{mm'}$,

donc : $= f(\overrightarrow{bm'}) = \overrightarrow{bm''}$,

et $m_1'' = t_{\overrightarrow{V}} \circ u(m) = m'' = u \circ t_{\overrightarrow{V}}(m)$. ■

THÉORÈME 4.75. — *Si u est une isométrie de A préhilbertien réel ayant pour points fixes les éléments d'un sous-espace affine B de direction F, tout sous-espace affine supplémentaire orthogonal de B est globalement invariant par u.*

(Cet énoncé suppose que F admet un supplémentaire orthogonal dans E, ce qui est toujours vrai si E est de dimension finie ou si F est de dimension finie).

En effet, si C est un sous-espace affine supplémentaire orthogonal, donc de direction $F^\perp$, comme $E = F \oplus F^\perp$, on sait que $B \cap C$ est un singleton, $\{a\}$, (Corollaire 1.43), ce point a est fixe, et si m est dans C, $m' = u(m)$ est tel que $\overrightarrow{am'} = \overrightarrow{u(a)u(m)} = f(\overrightarrow{am})$, avec f isométrie vectorielle associée à u. Comme $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, (Théorème 4.69); et que f conserve l'orthogonalité, pour tout $\overrightarrow{X}$ de F on a :

$$< \overrightarrow{am}, \overrightarrow{X} > = < f(\overrightarrow{am}), f(\overrightarrow{X}) > = < \overrightarrow{am'}, \overrightarrow{X} > = 0,$$

car a et m sont dans C donc $\overrightarrow{am}$ est dans $F^\perp$. Mais alors $\overrightarrow{am'}$ est dans $F^\perp$: le point m' est dans le sous-espace affine passant par a, de direction $F^\perp$, c'est-à-dire dans le sous-espace affine supplémentaire orthogonal à B, passant par a, donc dans C, d'où la stabilité de C. ■

Nous pouvons maintenant justifier le théorème de structure suivant :

THÉORÈME 4.76. — *Soit une isométrie u de A, espace affine euclidien, d'application linéaire associée f ayant 1 pour valeur propre. Il existe un couple unique (v, t) avec v isométrie ayant un sous-espace affine de points fixes, de direction $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, et t translation de vecteur $\overrightarrow{W}$ dans F, tel que $u = v \circ t = t \circ v$.*

D'abord, si un tel couple existe, d'après le Théorème 4.74, t et v commutent.

Existence. On fixe a dans A, on peut décomposer u en $u = u_a \circ t_{\overrightarrow{V}}$, avec u_a affine d'application linéaire associée f, laissant a fixe, (Théorème 1.59), et on peut décomposer $\overrightarrow{V}$ dans la somme directe $F \oplus F^\perp$ en $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}$, avec $\overrightarrow{V_1}$ dans F et $\overrightarrow{V_2}$ dans $F^\perp$.

On a alors $u = (u_a \circ t_{\overrightarrow{V_2}}) \circ t_{\overrightarrow{V_1}}$.

Soit C, le sous-espace affine de direction $F^\perp$, passant par a. Comme $\overrightarrow{V_2} \in F^\perp$, direction de C, ce sous-espace est stable par $t_{\overrightarrow{V_2}}$. Puis $u_a(C)$ est le sous-espace affine passant par $u_a(a) = a$, de direction $f(F^\perp) = F^\perp$, car F, sous-espace propre de f est stable par f, donc $F^\perp$ est stable par l'adjoint $f^* = f^{-1}$ de l'isométrie f, et, en dimension finie, l'inclusion $f^{-1}(F^\perp) \subset F^\perp$ se traduit par une égalité, (égalité des dimensions) : $f^{-1}(F^\perp) = F^\perp$, qui à son tour implique $F^\perp = f(F^\perp)$. Tout ceci a été vu au Tome 3, chapitre 14, paragraphe 6. Donc $u_a(C) = C$.

Comme $u_a(C) = C$, avec $v = u_a \circ t_{\overrightarrow{V_2}}$ on a $v(C) = C$, et l'isométrie v_1, induite par v sur C, admet pour application linéaire l'application f_1 induite par f sur $F^\perp$. Mais alors f_1 n'admet pas 1 pour valeur propre, (le moindre soupçon de vecteur propre $\overrightarrow{\varepsilon}$, pour f_1 et pour la valeur propre 1 serait dans $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ donc dans $F \cap F^\perp$, d'où $\overrightarrow{\varepsilon} = 0$). Il résulte du Théorème 4.68 que v_1 admet un point fixe b, et comme v_1 est induite par v, on a également $v(b) = b$.

Mais alors $u = v \circ t_{\overrightarrow{V_1}}$, avec v, isométrie ayant pour points fixes les éléments du sous-groupe affine passant par b, et de direction $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, (Théorème 4.69), et $t_{\overrightarrow{V_1}}$ est une translation de vecteur $\overrightarrow{V_1}$ dans F : on a une décomposition du type voulu.

Unicité. Supposons que $u = v \circ t = t \circ v$ soit une décomposition du type voulu, soit C un sous-espace affine de direction $F^\perp$, et $C' = u(C)$, son image par l'isométrie u. On a justifié la stabilité de $F^\perp$ par f, (dans l'existence d'une décomposition), donc C' est un sous-espace affine parallèle à C. De plus, les points fixes de v formant un sous-espace affine B, de direction F, et C étant sous-espace affine orthogonal supplémentaire de B, C est stable par v, (Théorème 4.75).

On a donc $C' = u(C) = (t \circ v)(C) = t(v(C)) = t(C)$: la translation t fait passer de C au sous-espace affine parallèle $C' = u(C)$, *donc elle est unique, si on l'écrit* $t_{\overrightarrow{W}}$ *avec* $\overrightarrow{W}$ *orthogonal à* $F^\perp$.

En effet, $\overrightarrow{W}$ existe : il suffit de prendre $\{b\} = B \cap C$ et $\{b'\} = B \cap C'$: ce sont des singletons car on a affaire à des sous-espaces supplémentaire

orthogonaux, et $\overrightarrow{bb'} \in F$ direction de B. En posant $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{bb'}$, la transaltion $t_{\overrightarrow{W}}$ fait passer de C à C', avec $\overrightarrow{W}$ orthogonal à $F^{\perp}$.

Si on a $\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{W'}$ dans F, tel que $t_{\overrightarrow{W}}(C) = t_{\overrightarrow{W'}}(C) = C'$, on aura $(t_{\overrightarrow{W'}})^{-1} \circ t_{\overrightarrow{W}}(C) = C = t_{\overrightarrow{W}-\overrightarrow{W'}}(C)$, donc $\overrightarrow{W} - \overrightarrow{W'}$ est dans la direction $F^{\perp}$ de C. Comme $\overrightarrow{W}$ et $\overrightarrow{W'}$ sont dans F, on a $\overrightarrow{W} - \overrightarrow{W'} \in F \cap F^{\perp} = \{0\}$, d'où $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W'}$ et l'unicité de t tel que $u = v \circ t$. En simplifiant par t, on a $v = u \circ t^{-1}$ qui est alors unique. ■

REMARQUE 4.77. — Si f n'admet pas 1 pour valeur propre, u admet un seul point fixe, $F = \{\overrightarrow{0}\}$, et en convenant de prendre $t = t_{\overrightarrow{0}} =$ l'identité sur A, on a la décomposition $u = u \circ \mathrm{id}_A$, valable dans ce cas.

Il y a bien d'autres décompositions possibles des isométries, mais je n'ai pas la prétention d'écrire un ouvrage complet de géométrie. De plus, en ce jour de juin, il est 7 h du matin, les oiseaux pépient, et j'ai envie d'aller faire de l'aviron avant les chaleurs. Aussi me contenterai-je de terminer ce paragraphe par une classification des isométries en dimension deux et trois.

4.78. ISOMÉTRIES EN DIMENSION DEUX.

Ce sont des produits d'au plus trois symétries par rapport à des droites, (Théorème 4.73).

Soit f l'isométrie vectorielle associée à u, ses valeurs propres sont des nombres complexes de module 1.

Si u est un antidéplacement, -1 est valeur propre simple, et 1 simple, (sinon, comment avoir déterminant$(f) = -1$). Alors soit $u = v \circ t$ une décomposition du type 4.76, v est une symétrie droite, (par rapport à une droite D), et t une translation de vecteur $\overrightarrow{W}$, parallèle à D, donc, si $\overrightarrow{W} \neq \overrightarrow{0}$, on décompose t en un produit de deux symétries par rapport à deux droites Δ et Δ', orthogonales à D, déduites l'une de l'autre par la translation de vecteur $\dfrac{\overrightarrow{W}}{2}$, (Théorème 4.70).

On a donc *soit une symétrie droite,*

soit la composée d'une symétrie droite et d'une translation parallèle à l'axe de symétrie.

Si u est un déplacement, on a soit 1 non valeur propre, soit 1 valeur propre double.

Si 1 est non valeur propre de f, u admet un seul point fixe, (Théorème 4.68) et s'identifie alors à une isométrie vectorielle en dimension 2, donc à une rotation, (voir Tome 3, Théorème 14.83).

Si a est point fixe, si u est la rotation d'angle θ, si D est une droite passant par a et D' déduite de D par la rotation de centre a d'angle $\frac{\theta}{2}$, on vérifie que $s_{D'} \circ s_D = u$ est la rotation de sommet a, d'angle θ, (figure 4.78.)

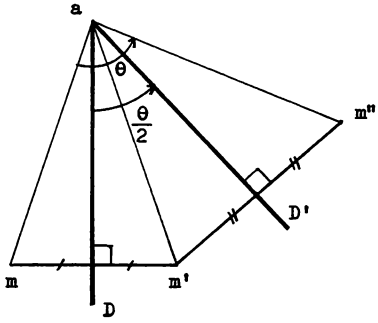


Fig. 4.78

Si 1 est valeur propre double, la décomposition $u = v \circ t$ du Théorème 4.76 conduit à l'identité pour v, (affine ayant tout le plan pour points fixes) et u est une translation.

En résumé, on a les *translations et rotations, qui sont des déplacements, et les symétries droites ou les composées d'une symétrie droite et d'une translation parallèle à l'axe de symétrie, qui sont les antidéplacements.*

REMARQUE 4.79. — On a effectivement un cas de décomposition en $2 + 1 = 3$ symétries droites, comme on l'a signalé en fin de démonstration du Théorème 4.73.
La symétrie par rapport à un point a est une rotation d'angle π.

4.80. ISOMÉTRIES EN DIMENSION TROIS.

Ce sont des produits de 1, 2, 3 ou 4 symétries orthogonales par rapport à des plans. On a donc déjà les symétries plans, les translations, (produit de deux symétries plans par rapport à des plans parallèles), et les rotations d'axe Δ, produit de deux symétries orthogonales par rapport à des plans sécants le long de Δ.

Considérons les isométries u en partant de leur isométrie vectorielle f, qui admet une ou trois valeur propres réelles.

Si u est un antidéplacement, -1 est valeur propre simple ou triple.

Si -1 est valeur propre triple, 1 est non valeur propre, donc u admet un point fixe a, et s'identifie alors à une isométrie vectorielle de matrice $-I_3$ dans une base orthonormée : *c'est la symétrie point.*

Si -1 est valeur propre simple, et 1 non valeur propre de f, alors u admet un point fixe a, et dans un repère convenable d'origine a, la matrice de u sera du type :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\theta \neq 0 \text{ modulo } \pi),$$

(voir Tome 3, Théorème 14.83), donc u est la composée d'une *rotation d'axe Δ et d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan orthogonal à Δ.*

Si -1 est valeur propre simple et 1 double, le Théorème 4.76 permet de décomposer u en $u = v \circ t$, avec v symétrie orthogonale par rapport à un plan P, (car on a un plan de points fixes), et t translation de vecteur $\overrightarrow{W}$ parallèle à P. Si $\overrightarrow{W} = 0$, on a une symétrie orthogonale.

Dans les trois cas, on peut mettre en évidence des décompositions en trois symétries orthogonales, (ou une seule à la fin).

Si u est un déplacement, 1 est forcément valeur propre d'ordre 1 ou 3, (Tome 3, remarque 14.91).

Si 1 est valeur propre d'ordre 1, le Théorème 4.76 conduit à $u = v \circ t$, avec v isométrie ayant une droite Δ de points fixes. Avec une origine a sur Δ, v s'identifie à une rotation vectorielle. Si la translation t est de vecteur nul, *u est une rotation*, sinon, avec $\overrightarrow{W}$ non nul parallèle à Δ, on a :

4.81. *un vissage.*

Si 1 est valeur propre d'ordre 3, le Théorème 4.76 donne une décomposition $u = v \circ t$ avec $v =$ l'identité, (espace de dimension trois de points fixes), donc *u est une translation.* J'espère ne rien avoir oublié ! Maintenant je vais faire du bateau.

À la relecture, je m'aperçois que j'ai oublié de signaler que dans le cas du vissage on a une décomposition en un produit de quatre symétries plan, et on ne peut pas faire mieux.

5. L'inversion

DÉFINITION 4.82. — *Soit un espace affine préhilbertien réel A, et a un point de A. On appelle inversion de pôle a et de puissance k, (k réel non nul), l'application φ, de $A - \{a\}$ dans $A - \{a\}$, qui à m associe m' aligné avec a et m, et tel que $\overline{am} \cdot \overline{am'} = k$.*

On parle encore de *centre de l'inversion*, (au lieu de pôle) et on notera $\mathcal{I}(a,k)$ cette inversion de pôle a, de puissance k.

THÉORÈME 4.83. — *L'inversion $\mathcal{I}(a,k)$ est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $\Omega = A - \{a\}$ sur lui-même, involutif, de différentielle, en tout point, une similitude.*

Il y a beaucoup de choses dans cet énoncé.

Notons φ cette inversion. D'abord φ est une bijection de Ω sur lui-même, car si on se donne m' dans Ω, la droite affine $\mathrm{aff}(a,m') = D$ existe, et en orientant D, il existe un seul m de D tel que $\overline{am} = \dfrac{k}{\overline{am'}}$, avec $m \neq a$ puisque le réel k est non nul, donc chaque m' de Ω admet un antécédent unique dans Ω, *d'où l'aspect bijectif*. La symétrie des rôles joués par m et m' pour dire d'une part que a, m, m' sont alignés, et d'autre part que $\overline{am} \cdot \overline{am'} = k$, montre que l'image de m' est m, donc φ^2 est l'identité sur Ω, d'où φ *involutive*.

Si on justifie la classe C^1 pour φ, on l'aura pour $\varphi^{-1} = \varphi$, et φ sera alors un C^1-difféomorphisme de Ω sur lui-même. Pour cela, on va modifier un peu l'expression de φ.

Si $\varphi(m) = m'$, le vecteur $\overrightarrow{am'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{am}$, et sa mesure algébrique étant $\dfrac{k}{\overline{am}}$, si on oriente la droite $\mathrm{aff}(a,m)$ en prenant $\dfrac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||}$ comme vecteur unitaire, $\overline{am} = ||\overrightarrow{am}||$, donc $\overrightarrow{am'} = \dfrac{k}{||\overrightarrow{am}||} \dfrac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||}$.

La définition de φ étant indépendante de l'orientation choisie sur $\mathrm{aff}(a,m)$, on a finalement :

4.84. $\varphi(\overrightarrow{am}) = \dfrac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}\,\overrightarrow{am}$.

Pour étudier la différentiabilité de φ, on considère A comme vectoriel, en fixant l'origine en a. Si on donne à la variable, $(\overrightarrow{am})$, un accroissement $\overrightarrow{H}$, (assez petit pour que $\overrightarrow{am} + \overrightarrow{H}$ reste non nul, soit tel que $||\overrightarrow{H}|| < ||\overrightarrow{am}||$), on a : $\varphi(\overrightarrow{am} + \overrightarrow{H}) = \dfrac{k}{||\overrightarrow{am}||^2 + 2 < \overrightarrow{am}, \overrightarrow{H} > + ||\overrightarrow{H}||^2} \cdot (\overrightarrow{am} + \overrightarrow{H})$, car la norme est associée à un produit scalaire.

Posons $w(\overrightarrow{H}) = \dfrac{1}{||\overrightarrow{am}||^2 + 2 < \overrightarrow{am}, \overrightarrow{H} > + ||\overrightarrow{H}||^2}$.

On a, par développement limité,

$$w(\overrightarrow{H}) = \frac{1}{||\overrightarrow{am}||^2\left(1+\dfrac{2<\overrightarrow{am},\overrightarrow{H}>}{||\overrightarrow{am}||^2}+\dfrac{||\overrightarrow{H}||^2}{||\overrightarrow{am}||^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{||\overrightarrow{am}||^2}\left(1-\frac{2<\overrightarrow{am},\overrightarrow{H}>}{||\overrightarrow{am}||^2}+O(||\overrightarrow{H}||^2)\right).$$

On a donc

$$\varphi(\overrightarrow{am}+\overrightarrow{H}) = \frac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}\left(1-2\frac{<\overrightarrow{am},\overrightarrow{H}>}{||\overrightarrow{am}||^2}+O(||H||^2)\right)(\overrightarrow{am}+\overrightarrow{H})$$

$$= \frac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}\overrightarrow{am}+\frac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}\left(\overrightarrow{H}-2(\frac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||},\overrightarrow{H})\frac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||}\right)$$

$$+O(||\overrightarrow{H}||^2).$$

En posant $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||}$, vecteur unitaire, on obtient donc la relation

4.85. $\varphi(\overrightarrow{am}+\overrightarrow{H})-\varphi(\overrightarrow{am}) = \dfrac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}(\overrightarrow{H}-2<\overrightarrow{u},\overrightarrow{H}>\overrightarrow{u})+O(||H^2||)$,

et, comme l'application qui à $\overrightarrow{H}$ associe le vecteur $\dfrac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}(\overrightarrow{H}-2<\overrightarrow{u},\overrightarrow{H}>\overrightarrow{u})$ est linéaire, continue, (le produit scalaire est continu sur un préhilbertien), cette relation 4.85 prouve la différentiabilité de φ en $\overrightarrow{am}$, avec de plus l'égalité :

4.86. $d\varphi(\overrightarrow{am})(\overrightarrow{H}) = \dfrac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}(\overrightarrow{H}-2<\overrightarrow{u},\overrightarrow{H}>\overrightarrow{u})$, avec $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||}$, vecteur unitaire.

Mais, $\overrightarrow{H} \rightsquigarrow \overrightarrow{H}-2<\overrightarrow{u},\overrightarrow{H}>\overrightarrow{u}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\{\overrightarrow{u}\}^\perp$, (Tome 3, exemple 14.88), et on multiplie ce vecteur par $\dfrac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}$, donc on effectue ensuite une homothétie, si bien que

4.87. *$d\varphi(\overrightarrow{am})$ est la composée de l'homothétie de centre a, de rapport $\dfrac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}$, et de la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $\{\overrightarrow{am}\}^\perp$.*

C'est donc une similitude de rapport $\dfrac{|k|}{||\overrightarrow{am}||^2}$, mais il serait peut être bon de rappeler ce qu'est une similitude.

DÉFINITION 4.88. — *Soit E un espace vectoriel euclidien, on appelle similitude de rapport $\lambda > 0$, tout endomorphisme f de E tel que, $\forall x \in E$, $||f(x)|| = \lambda ||x||$.*

C'est la définition donnée en 14.92 dans le Tome 3, où l'on a vu également, qu'en notant $h_{\lambda^{-1}}$ l'homothétie de rapport λ^{-1}, l'endomorphisme $f \circ h_{\lambda^{-1}}$ conserve la norme.

Si E est *euclidien*, $u = f \circ h_{\lambda^{-1}}$ est donc une isométrie, (linéaire injective donc bijective car la dimension est finie), et $f = u \circ h_\lambda = h_\lambda \circ u$ devient la composée d'une homothétie et d'une isométrie, le rapport d'homothétie étant strictement positif.

Sur E préhilbertien réel, on n'aurait pas forcément l'aspect surjectif de u. C'est pourquoi on peut aussi poser la :

DÉFINITION 4.89. — *Soit E préhilbertien réel. On appelle similitude la composée d'une homothétie et d'une isométrie, le rapport d'homothétie étant non nul.*

Avec cette définition, si $f = h_\lambda \circ u$, avec $\lambda < 0$ et u isométrie, on a aussi $f = h_{(-\lambda)} \circ (-u)$, et $-u$ est aussi une isométrie, et pour tout x de E, $||f(x)|| = |\lambda|\ ||x||$: on dira que $|\lambda|$ est le rapport de la similitude, d'où le vocabulaire introduit en 4.87.

Pour achever la justification du Théorème 4.83, il nous faut justifier la continuité de l'application $\overrightarrow{am} \rightsquigarrow d\varphi(\overrightarrow{am})$ de E dans $\mathcal{L}_C(E, E)$.

Vu l'expression 4.86, ou plutôt la forme :

$$d\varphi(\overrightarrow{am})(\overrightarrow{H}) = \frac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}\ \overrightarrow{H} - 2\ \frac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}\ \langle \frac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||}, \overrightarrow{H} \rangle\ \frac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||},$$

si on est en dimension finie, la matrice de $d\varphi(\overrightarrow{am})$ aurait des coefficients s'exprimant à l'aide de fractions rationnelles par rapport aux composantes de $\overrightarrow{am}$, le dénominateur valant $||\overrightarrow{am}||^2$ ou $||\overrightarrow{am}||^4$, donc ne s'annulant pas sur $\Omega = A - \{a\}$, (si m est la variable), d'où en fait une application $\overrightarrow{am} \rightsquigarrow d\varphi(\overrightarrow{am})$ de classe C^∞.

Par une autre méthode, on va justifier que $d\varphi$ est continue, en dimension infinie, de Ω dans $\mathcal{L}_C(E, E)$ normé par la norme d'application linéaire continue, (voir Tome 2, Théorème 6.21), notée $|||\ \ |||$. Pour cela on peut

remarquer que $d\varphi(\overrightarrow{am})$ est la composée de l'homothétie $h(\overrightarrow{am})$, de rapport $\dfrac{k}{||am||^2}$, et de la symétrie notée $s(\overrightarrow{am})$, définie par :

$$\overrightarrow{H} \rightsquigarrow \overrightarrow{H} - 2\,\langle \frac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||}, \overrightarrow{H}\rangle\, \frac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||}.$$

Comme le produit de composition : $(u,v) \rightsquigarrow u \circ v$ est continu de $(\mathcal{L}_C(E,E))^2$ dans $\mathcal{L}_C(E,E)$, car bilinéaire et $|||u \circ v||| \leqslant |||u|||\ |||v|||$, (voir Tome 2, Théorème 6.45), il nous suffit de justifier la continuité des applications $\overrightarrow{am} \rightsquigarrow h(\overrightarrow{am})$ et $\overrightarrow{am} \rightsquigarrow s(\overrightarrow{am})$.

Pour la première, comme la différence des homothéties de rapports $\dfrac{k}{||\overrightarrow{am}||^2}$ et $\dfrac{k}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2}$ est l'homothétie de rapport $k\left(\dfrac{1}{||am||^2} - \dfrac{1}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2}\right)$, on a :

$$|||h(\overrightarrow{am}) - h(\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X})||| = |k|\ \left|\frac{1}{||am||^2} - \frac{1}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2}\right|,$$

quantité qui tend vers zéro si $||\overrightarrow{X}||$ tend vers 0.

Pour la deuxième, on va considérer la différence $s(\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X})(\overrightarrow{H}) - s(\overrightarrow{am})(\overrightarrow{H})$, notée $d(\overrightarrow{H})$, qu'on majorera en norme, pour $||\overrightarrow{H}|| \leqslant 1$, de façon à évaluer la norme d'application linéaire continue $|||s(\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}) - s(\overrightarrow{am})|||$. On a :

$$\begin{aligned} d(\overrightarrow{H}) &= 2\left(\langle\frac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||}, \overrightarrow{H}\rangle\ \frac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||} - \langle\frac{\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||}, \overrightarrow{H}\rangle\ \frac{\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||}\right) \\ &= 2\left(< \overrightarrow{am}, \overrightarrow{H} >\ \frac{\overrightarrow{am}}{||\overrightarrow{am}||^2} - < \overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}, \overrightarrow{H} >\ \frac{\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2}\right) \\ &= 2 < \overrightarrow{am}, \overrightarrow{H} >\left(\frac{\overrightarrow{am}}{||am||^2} - \frac{\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2}\right) \\ &\qquad - 2 < \overrightarrow{X}, \overrightarrow{H} >\ \frac{\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2} \end{aligned}$$

et comme on calcule, dans le but de factorise $||\overrightarrow{H}||$ et d'avoir en facteur quelque chose qui tendra vers 0 si $\overrightarrow{X}$ tend vers zéro, on peut encore grouper en :

$$d(\overrightarrow{H}) = 2 < \overrightarrow{am}, \overrightarrow{H} > \overrightarrow{am}\left(\frac{1}{||\overrightarrow{am}||^2} - \frac{1}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2}\right)$$
$$- 2 < \overrightarrow{am}, \overrightarrow{H} > \frac{\overrightarrow{X}}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2} - 2 < \overrightarrow{X}, \overrightarrow{H} > \frac{\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2}.$$

On passe aux normes, d'où :

$$||d(\overrightarrow{H})|| \leqslant 2||\overrightarrow{am}||^2||\overrightarrow{H}|| \left|\frac{1}{||am||^2} - \frac{1}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2}\right|$$
$$+\frac{2||\overrightarrow{am}||\,||\overrightarrow{H}||\,||\overrightarrow{X}||}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2} + \frac{2||\overrightarrow{X}||\,||\overrightarrow{H}||}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||},$$

et, en majorant pour $||\overrightarrow{H}|| \leqslant 1$, on a finalement :

$$|||s(\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}) - s(\overrightarrow{am})||| \leqslant 2\left|1 - \frac{||\overrightarrow{am}||^2}{||am+X||^2}\right| + \frac{2||\overrightarrow{am}||\,||\overrightarrow{X}||}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||^2}$$
$$+\frac{2||\overrightarrow{X}||}{||\overrightarrow{am}+\overrightarrow{X}||},$$

majorant qui tend vers zéro si $\overrightarrow{X}$ tend vers zéro, ce qui donne la continuité de s et achève la justification de la continuité de la différentielle $d\varphi$. ■

Vous pouvez vous demander pourquoi, dans ce chapitre de géométrie euclidienne, on s'est intéressé à cet aspect difféomorphisme de l'inversion. En fait, c'est parce qu'il y a des prolongements importants en ce qui concerne les *transformations conformes*.

DÉFINITION 4.90. — *Etant donné deux ouverts U et V de A espace affine euclidien, on appelle transformation conforme de U sur V tout difféomorphisme φ de U sur V dont la différentielle en tout point est une similitude.*

Il résulte du Théorème 4.83, qu'une inversion φ de pôle a est une C^1 transformation conforme de $\Omega = A - \{a\}$ sur lui-même.

Inversement, on peut démontrer que pour A affine euclidien de dimension $n \geqslant 3$, toute transformation conforme de classe C^1 d'un ouvert de A sur un autre ouvert de A, est le produit d'un nombre fini d'inversions et de symétries orthogonales par rapport à des hyperplans.

L'intérêt pour les transformations conformes vient de ce que les similitudes vectorielles sont les endomorphismes qui conservent les angles dans un espace vectoriel euclidien, ce qui permettra de conserver les « angles des variétés » quand on prend leurs images par une transformation conforme.

Signalons que pour $n = 2$, comme on a vu, (Tome 3, Théorème 13.68), qu'une fonction de variable complexe dérivable par rapport à cette variable, correspond à une fonction de deux variables réelles, à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, différentiable et de différentielle une similitude directe, en dimension deux, toute bijection bicontinue holomorphe sera une transformation conforme, donc il y a d'autres transformations conformes que des produits d'inversions et de symétries orthogonales par rapport à des droites dans ce cas.

Revenons à des notions plus simples, et plus «géométriques», en considérant l'inverse d'un hyperplan ou d'une sphère de A euclidien de dimension n.

THÉORÈME 4.91. — *Soit un espace affine euclidien A de dimension $n \geqslant 2$ et l'inversion $\mathcal{I}(a, k)$, de pôle a, de puissance k. L'inverse d'un hyperplan H contenant a est H, l'inverse d'un hyperplan ne contenant pas a est une sphère S passant par a.*

Notons φ l'inversion $\mathcal{I}(a, k)$.

Soit un hyperplan H contenant a. Pour tout m de $H - \{a\}$, la droite $D = \text{aff}(a, m)$ est contenue dans H, donc $m' = \varphi(m)$ étant sur D est dans H, d'où $\varphi(H - \{a\}) \subset H - \{a\}$. Puis, tout m' de $H - \{a\}$ est tel que $D' = \text{aff}(a, m') \subset H$, et φ étant involutive, $m = \varphi(m')$ est un point de H tel que $\varphi(m) = \varphi^2(m') = m'$, donc $H - \{a\} \subset \varphi(H - \{a\})$, et finalement $\varphi(H - \{a\}) = H - \{a\}$.

Il est à remarquer que l'énoncé est incorrect, car le pôle a n'a pas d'image, et il faudrait préciser : « l'image de l'hyperplan H privé de a est H privé de a ».

De même, soit H un hyperplan ne contenant pas a, on va voir que $\varphi(H)$ est une sphère S passant par a, mais privée de a.

Soit b le projeté orthogonal de a sur H, (on est en dimension finie : il existe), et b' l'inverse de b.

Soit m dans H, d'inverse m'.

Comme $\overline{am} \cdot \overline{am'} = \overline{ab} \cdot \overline{ab'} = k$, puissance d'inversion, dans le plan affine $P = \text{aff}(a, b, m)$, les points b, b', m et m' sont cocycliques puisque, en notant Γ le cercle de diamètre $b'm$, qui passe par b car $\widehat{b'bm} = \dfrac{\pi}{2}$, la

sécante $\mathrm{aff}(a,m)$ recoupe Γ en m_1 tel que $\overline{am_1}\cdot\overline{am}$ soit la puissance de a par rapport à Γ, donc soit égale à $\overline{ab}\cdot\overline{ab'}$ d'où $\overline{am_1}=\overline{am'}$ et $m_1=m'$. (Voir figure 4.91 et Théorème 4.40).

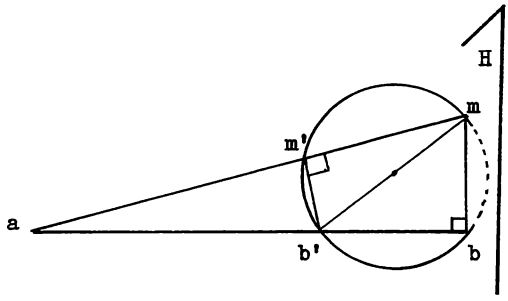


Fig. 4.91

Mais alors m' est sur le cercle de diamètre $b'm$, dans le plan P, donc $\widehat{b'm'm}=\dfrac{\pi}{2}=\widehat{b'm'a}$ et m' est sur la sphère de diamètre $[a,b']$, notée S.

Comme tout point m_1' de $S-\{a\}$ est tel que la droite $D=\mathrm{aff}(a,m_1')$ est une sécante pour S, donc n'est pas orthogonale en a à ab', (D n'est pas dans le plan tangent en a à la sphère), D est non parallèle à H donc $m_1=D\cap H$ existe et la première partie de la justification montre que $\varphi(m_1)$ est aligné avec a et m_1 donc est sur D, et sur S : c'est m_1'. On obtient finalement $\varphi(H)=S-\{a\}$. ■

REMARQUE 4.92. — Le fait que a, pôle d'inversion, n'ait pas d'inverse est gênant. Aussi peut-on munir chaque sous-espace affine d'un point ω qui serait l'inverse de a, et dont l'inverse serait a. La relation $\overline{am}\cdot\overline{am'}=k$, montre que si m tend vers a, la mesure algébrique $\overline{am'}$ a une limite infinie en valeur absolue. Pour cette raison, ω est appelé le *point à l'infini du sous-espace affine*. Si on considère les sous-espaces affines, (et l'espace entier), munis d'un point à l'infini, l'énoncé 4.91 devient correct. Si vous connaissez bien votre cours, l'adjonction d'un point à l'infini doit vous rappeler les... compactifiés. C'est le cas car si A est sous-espace affine de dimension finie, il est localement compact, et $A'=A\cup\{\omega\}$ n'est autre qu'un compactifié d'Alexandroff qui rend continue l'inversion lorsque m tend vers a. (Voir Tome 2, Théorème 2.32). Il faut cependant admettre qu'adjoindre un point à l'infini aux droites, plans, hyperplans, ou à tout autre sous-espace affine n'est pas très géométrique (et pour cause, c'est un problème de nature topologique). Tranquilisez-vous, on peut faire mieux. Dans le cadre de la *géométrie projective*, (la grande absente de cet ouvrage, mais il faut laisser du travail aux autres), on sera raisonnable, et les droites auront un point

à l'infini, les plans une droite à l'infini qui sera l'ensemble des points à l'infini des droites du plan... Si en plus on considère les complexifiés, on se retrouvera avec des points imaginaires à l'infini, et après, certains prétendent que les mathématiciens manquent d'imagination ! Qu'ils aillent donc faire un tour, non pas « côté de chez Swann », mais « du côté des points cycliques ».

COROLLAIRE 4.93. — *Soit S une sphère passant par a, pôle de l'inversion $\mathcal{I}(a,k)$. L'inverse de S est un hyperplan H, (muni de son point à l'infini), orthogonal à la droite $D = \mathrm{aff}(a,o)$, si o est le centre de S.*

Soit en effet b' diamétralement opposé au point a sur S, $b = \varphi(b')$ son inverse, (d'où $b' = \varphi(b)$ puisque φ est involutive), et H l'hyperplan orthogonal à $[a,b]$ en b. Le Théorème 4.91 nous dit que $\varphi(H \cup \{\omega\}) = S$, d'où $\varphi(S) = \varphi^2(H \cup \{\omega\}) = H \cup \{\omega\}$ et le tour est joué. ■

On peut, plus généralement, se demander ce qu'est l'inverse d'une sphère ne passant pas par a. On a :

THÉORÈME 4.94. — *Soit une sphère S, de centre b, de rayon R, dans A affine euclidien de dimension $n \geqslant 2$, un point $a \notin S$, et l'inversion $\mathcal{I}(a,k)$. L'inverse de S est une sphère S', de centre $b_1 \in \mathrm{aff}(a,b)$, de rayon R' tel que $R' = \left|\dfrac{k}{p}\right| R$, avec p puissance de a par rapport à S.*

ATTENTION, *le centre b_1 de S' n'est pas l'inverse de b.*

Soit $\varphi = \mathcal{I}(a,k)$, on note p la puissance analytique de a par rapport à S. Soit $m \in S$, la droite $D = \mathrm{aff}(a,m)$ existe, $(a \notin S)$, et D recoupe S en m_1, éventuellement confondu avec m.

On a $\overline{am} \cdot \overline{am_1} = p$, et avec $m' = \varphi(m)$, on a aussi $\overline{am} \cdot \overline{am'} = k$, d'où, comme $m_1 \neq a$,

$$\frac{\overline{am'}}{\overline{am_1}} = \frac{k}{p},$$

ce qui montre qu'en fait m' est l'homothétique de m_1 dans l'homothétie, h, de centre a et de rapport $\dfrac{k}{p}$.

Mais, comme m_1 parcourt S quand m parcourt S, l'image $\varphi(S)$ est l'image $h(S)$: c'est donc la sphère S', de rayon $R' = \left|\dfrac{k}{p}\right| R$, de centre b_1 tel que $\overrightarrow{ab_1} = \dfrac{k}{p}\,\overrightarrow{ab}$.

L'inverse b' de b est aligné avec a, b et b_1. Comme $\overline{ab'} = \dfrac{k}{\overline{ab}}$ et $\overline{ab_1} = \dfrac{k}{p}\,\overline{ab}$, l'égalité $b_1 = b'$ ne peut avoir lieu que si $p = ab^2 = ab^2 - R^2$, donc que pour une sphère de rayon nul! ■

Il y aurait bien d'autres propriétés géométriques des inversions, on en verra certaines au chapitre V en géométrie plane.

Pour l'instant, un mot sur les similitudes affines.

DÉFINITION 4.95. — *Dans A affine préhilbertien réel d'espace vectoriel associé E, on appelle similitude toute application affine d'application linéaire associée une similitude vectorielle.*

Si A est euclidien, on parlera de similitude directe ou indirecte, (l'espace étant orienté), si en décomposant l'application linéaire f en $h_\lambda \circ u$, avec h_λ homothétie de rapport positif, l'isométrie u est directe ou non.

Voici une caractérisation des similitudes affines, qui utilise celle des isométries vue en 4.60.

THÉORÈME 4.96. — *Soit A un espace préhilbertien réel et s une surjection de A sur A. C'est une similitude si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout couple (m, n) de A^2, on ait :*

$$||\overrightarrow{s(m)s(n)}|| = \lambda ||\overrightarrow{mn}||.$$

Si s est une simitude de rapport positif λ, d'application linéaire associée $f = h_\lambda \circ u$ avec u isométrie vectorielle, d'abord s est bijective puisque f l'est, puis, $\forall (m, n) \in A^2$, on a :

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{s(m)s(n)}|| &= ||f(\overrightarrow{mn})|| = ||\lambda u(\overrightarrow{mn})|| \\ &= \lambda ||\overrightarrow{mn}||, \text{ puisque } u \text{ est une isométrie.} \end{aligned}$$

Réciproquement, si la surjection s vérifie la relation : $||\overrightarrow{s(m)s(n)}|| = \lambda ||\overrightarrow{mn}||$, soit g une homothétie, (affine) de rapport λ^{-1}, et $h = g \circ s$.

Pour tout couple (m, n) de A^2, on a

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{h(m)h(n)}|| &= ||\overrightarrow{g(s(m))g(s(n))}|| \\ &= \frac{1}{\lambda}\, ||\overrightarrow{s(m)s(n)}||, \end{aligned}$$

puisque g est l'homothétie de rapport $\frac{1}{\lambda}$, donc, vu l'hypothèse sur s, on a $||\overrightarrow{h(m)h(n)}|| = ||\overrightarrow{mn}||$: le Théorème 4.60 nous dit alors que h est affine injective. Comme on l'a supposée surjective, elle est affine bijective et son application linéaire associée k étant telle que :

$$k(\overrightarrow{mn}) = \overrightarrow{h(m)h(n)}, \text{ on a } ||k(\overrightarrow{mn})|| = ||\overrightarrow{mn}||,$$

donc k est une isométrie vectorielle, d'où h isométrie affine, et $s = g^{-1} \circ h$ similitude. ■

COROLLAIRE 4.97. — *Sur A euclidien, une application s de A dans A est une similitude, si et seulement si il existe $\lambda > 0$ tel que, pour tout couple (m, n) de A^2 on ait $||\overrightarrow{s(m)s(n)}|| = \lambda||\overrightarrow{mn}||$.*

En effet, il manque l'hypothèse surjective, mais en dimension finie une application linéaire injective est surjective, donc le raisonnement précédent s'applique. ■

THÉORÈME 4.98. — *Sur A euclidien, une similitude s de rapport $\lambda \neq 1$ admet un et un seul point fixe appelé centre de la similitude.*

En effet, l'application linéaire associée, f, se décomposant en $h_\lambda \circ u$, avec u isométrie et h_λ homothétie de rapport λ, les valeurs propres éventuelles de f dans $\mathbb{R}$ sont λ et $-\lambda$, donc 1 n'est pas valeur propre (on a $\lambda > 0$, donc $\lambda \neq -1$ aussi). Le Théorème 4.68 nous donne l'existence de cet unique point fixe. ■

En choisissant le centre de la similitude pour origine dans l'espace affine, on identifie s avec une similitude vectorielle.

REMARQUE 4.99. — *Les similitudes de rapport 1 sont les isométries, parmi lesquelles figurent les translations qui n'ont pas de point fixe.*

6. Distance de Hausdorff

Jusque maintenant nous avons eu une vision essentiellement ponctuelle des espaces affines, en prenant des points et leurs images par des applications affines.

La topologie métrique des espaces affines préhilbertiens réels permet alors de parler de limite d'un point fonction d'un paramètre, et nous permettra d'étudier les arcs paramétrés, (chapitre 6), les nappes paramétrées (chapitre 9), mais là encore on considèrera des points, fonctions d'un ou de deux paramètres.

Mais on peut considérer dans un espace affine des ensembles de points, des sphères par exemple, des triangles, des tétraèdres, des droites, plans,..., qui peuvent être fonction d'un ou de plusieurs paramètres, et avoir besoin de formuler une notion de limite pour ces nouveaux objets.

C'est ainsi que pour dégager la notion de tangente à un arc, de plan osculateur à un arc gauche, d'asymptote, on sera amené au chapitre 6 à parler de limites de sous-espaces vectoriels et de sous-espaces affines, (voir 6.25).

Dans ce paragraphe, nous allons munir les parties compactes d'un espace affine métrique d'une distance, qui permettra de prendre en compte le phénomène d'un ballon que l'on gonfle ou d'un arc de courbe en fil de fer que l'on déforme.

Pour commencer, il nous faut préciser le cadre de cette étude, et fixer les notations.

4.100. *Soit E un espace topologique, on note $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des parties compactes non vides de E.*

Si on est dans un espace métrique, traduire que des parties $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, «ont pour limite» une partie X, ceci peut se faire en disant que pour un $\varepsilon > 0$, en «agrandissant de ε» la partie X, il existe un n_0 tel que, $\forall n \geqslant n_0$, X_n soit contenu dans ce «X agrandi», mais attention, il ne faudrait pas que X_n rétrécisse, donc peut-être faudrait-il aussi que X soit dans X_n, agrandi lui aussi d'une couche d'éléments!

C'est pourquoi on va introduire des «voisinages tubulaires» des parties de E espace métrique.

DÉFINITION 4.101. — *Soit X une partie de E topologique métrique.*
On appelle voisinage tubulaire ouvert de rayon ε de X l'ensemble noté $U(X,\varepsilon) = \{y \in E, d(y,X) < \varepsilon\}$, et voisinage tubulaire fermé de rayon ε de X, l'ensemble noté $B(X,\varepsilon) = \{y \in E; d(y,X) \leqslant \varepsilon\}$.

THÉORÈME 4.102. — *Avec les notations de 4.101, on a :*

$$U(X,\varepsilon) = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_0(x,\varepsilon)$$

et, si X est compact,

$$B(X,\varepsilon) = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_f(x,\varepsilon).$$

En effet, si $y \in U(X,\varepsilon)$, $d(y,X) < \varepsilon$, donc il existe x_0 dans X tel que $d(y,x_0) < \varepsilon$:

$$y \in \mathcal{B}_0(x_0,\varepsilon) \subset \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_0(x,\varepsilon),$$

d'où l'inclusion $U(X,\varepsilon) \subset \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_0(x,\varepsilon)$.

Puis, si $z \in \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_0(x,\varepsilon)$, il existe x_0 dans X tel que $z \in \mathcal{B}_0(x_0,\varepsilon)$ donc $d(z,X) \leqslant d(z,x_0) < \varepsilon$, et $z \in U(X,\varepsilon)$ d'où l'égalité :
$U(X,\varepsilon) = \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_0(x,\varepsilon)$.

De même, si z est alors dans $\bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_f(x,\varepsilon)$, on a un x_0 de X tel que $d(x_0,z) \leqslant \varepsilon$, a fortiori $d(z,X) \leqslant d(x_0,z) \leqslant \varepsilon$ et z est dans $B(X,\varepsilon)$, d'où l'inclusion $\bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_f(x,\varepsilon) \subset B(X,\varepsilon)$. Puis, si $z \in B(X,\varepsilon)$, comme la distance des deux compacts $\{z\}$ et X est atteinte, il existe x_0 dans X tel que

$$d(x_0,z) = d(z,X) \leqslant \varepsilon, \quad \text{donc} \quad z \in \mathcal{B}_f(x_0,\varepsilon) \subset \bigcup_{x\in X} \mathcal{B}_f(x,\varepsilon)$$

d'où l'égalité. ■

La définition 4.101 précise mathématiquement cette notion de «X agrandit à ε près», et le Théorème 4.102 permet de comprendre la terminologie de voisinage tubulaire déjà rencontrée lors de l'étude de la convergence uniforme d'une suite de fonctions (voir Tome 3, remarque 12.19).

DÉFINITION 4.103. — *Soient X et Y deux parties de E métrique. On appelle distance de Hausdorff entre X et Y, le réel :*
$\delta(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0; X \subset B(Y,\varepsilon)$ *et* $Y \subset B(X,\varepsilon)\}$, *s'il existe.*

Le s'il existe n'est pas ridicule. En effet si X est une partie bornée, mais pas Y, les $B(X,\varepsilon)$ seront toujours des parties bornées, donc ne contiendront jamais Y, l'ensemble des ε est vide, donc $\delta(X,Y)$ n'existe pas, à moins de poser $\delta(X,Y) = +\infty$.

REMARQUE 4.104. — Ne pas confondre $d(X,Y)$ et $\delta(X,Y)$. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, si $X = \{(0,1)\}$ et $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$, $d(X,Y) = 1$ et

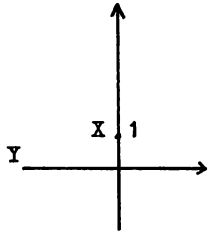


Fig. 4.104.1

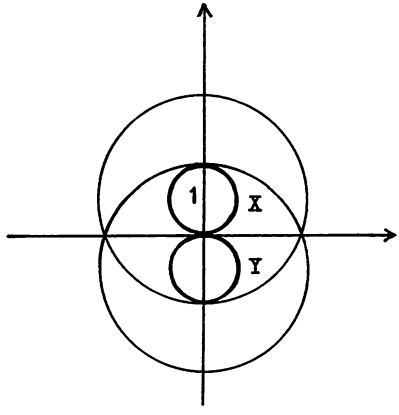


Fig. 4.104.2

$\delta(X,Y) = +\infty$, (figure 4.104.1). Ou bien X est le disque de centre $(0,1)$, de rayon 1, (fermé), et Y le disque fermé de centre $(0,-1)$, de rayon 1. Alors $d(X,Y) = 0$ et $\delta(X,Y) = 2$, (figure 4.104.2).

Il se peut enfin que $d(X,Y) = \delta(X,Y)$. Prenons deux droites parallèles du plan euclidien, ce sera le cas.

THÉORÈME 4.105. — *La distance de Hausdorff munit l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des compacts non vides de E, d'une structure d'espace métrique.*

Rappelons que X, compact de E métrique donc séparé, est fermé, (Tome 2, Théorème 2.15), mais aussi borné, puisqu'en fixant a dans E, du recouvrement ouvert $X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_0(a,n)$, on extrait un recouvrement fini de X, d'où X contenu dans la boule associée au plus grand n intervenant. En reprenant ce raisonnement avec a fixé dans Y non vide, on a un ε_0 dans $\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \quad X \subset \mathcal{B}_0(a,\varepsilon) \subset \mathcal{B}_f(a,\varepsilon) \subset B(Y,\varepsilon)$$

vu 4.102; de même il existe ε_1 tel que $\forall \varepsilon \geqslant \varepsilon_1$, $Y \subset B(X,\varepsilon)$; l'ensemble des $\varepsilon > 0$ dont $\delta(X,Y)$ est borne inférieure est non vide, donc *pour X et Y dans $\mathcal{K}(E)$, $\delta(X,Y)$ existe.*

On a visiblement $\delta(X,Y) \geqslant 0$ et $\delta(X,Y) = \delta(X,Y)$, vu les rôles symétriques de X et Y dans la définition 4.103. Si $\delta(X,Y) = 0$, soit x dans X. Pour tout entier $n > 0$, il existe ε_n, avec $0 < \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{n}$, tel que $X \subset B(Y,\varepsilon_n)$ et $Y \subset B(X,\varepsilon_n)$, (sinon $\delta(X,Y) \geqslant \dfrac{1}{n}$).

En particulier $x \in B(Y, \varepsilon_n)$, donc il existe un élément y_n de Y tel que $d(x, y_n) \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{n}$: finalement x est limite d'une suite d'éléments de Y, d'où $x \in \overline{Y}$, (adhérence de Y). Or Y est fermé, donc $\overline{Y} = Y$ et on a justifié $X \subset Y$.

La symétrie des rôles joués donne $Y \subset X$ et finalement $\delta(X, Y) = 0 \iff X = Y$, (équivalence car $X = Y \Longrightarrow X \subset B(Y, \varepsilon)$ et $Y \subset B(X, \varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où une borne inférieure nulle).

Il nous reste à justifier l'inégalité triangulaire, et pour cela, commençons par un lemme.

LEMME 4.106. — *Soient Y et Z deux compacts de E. Si $Y \subset B(Z, \varepsilon)$ on a $B(Y, \eta) \subset B(Z, \varepsilon + \eta)$, (avec $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$).*

En effet, si $t \in B(Y, \eta) = \bigcup_{y \in Y} B_f(y, \eta)$, il existe y_0 dans Y tel que $t \in \mathcal{B}_f(y_0, \eta)$.

Comme $Y \subset B(Z, \varepsilon) = \bigcup_{z \in Z} \mathcal{B}_f(z, \varepsilon)$, il existe z_0 dans Z tel que $y_0 \in \mathcal{B}_f(z_0, \varepsilon)$, et finalement

$$d(t, z_0) \leqslant d(t, y_0) + d(y_0, z_0) \leqslant \eta + \varepsilon,$$

donc :

$$t \in \mathcal{B}_f(z_0, \varepsilon + \eta) \subset \bigcup_{z \in Z} \mathcal{B}_f(z, \varepsilon + \eta) = B(Z, \varepsilon + \eta),$$

d'où l'inclusion $B(Y, \eta) \subset B(Z, \varepsilon + \eta)$ et le lemme, justifié en utilisant abondamment le Théorème 4.102. ■

Venons-en à l'inégalité triangulaire.

Soient X, Y et Z trois parties compactes non vides de E, si on a :

$$X \subset B(Y, \varepsilon) \quad \text{et} \quad Y \subset B(X, \varepsilon),$$

ainsi que :

$$Y \subset B(Z, \varepsilon') \quad \text{et} \quad Z \subset B(Y, \varepsilon'),$$

en appliquant le lemme 4.106 à l'inclusion $Y \subset B(Z, \varepsilon')$, on en déduit $B(Y, \varepsilon) \subset B(Z, \varepsilon + \varepsilon')$; et de l'inclusion $Y \subset B(X, \varepsilon)$, on déduit $B(Y, \varepsilon') \subset B(X, \varepsilon + \varepsilon')$; mais alors on a :

$$X \subset B(Y, \varepsilon) \subset B(Z, \varepsilon + \varepsilon')$$

et aussi :

$$Z \subset B(Y, \varepsilon') \subset B(X, \varepsilon + \varepsilon').$$

Mais alors, pour un tel couple $(\varepsilon, \varepsilon')$, qui existe, on a $\delta(X, Z) \leqslant \varepsilon + \varepsilon'$; en fixant ε et en passant à la borne inférieure par rapport à ε' tel que $Y \subset B(Z, \varepsilon')$ et $Z \subset B(Y, \varepsilon')$, on en déduit $\delta(X, Z) \leqslant \varepsilon + \delta(Y, Z)$, il suffit de passer à la borne inférieure en ε pour conclure à l'inégalité triangulaire :

$$\delta(X, Z) \leqslant \delta(X, Y) + \delta(Y, Z). \qquad \blacksquare$$

THÉORÈME 4.107. — *Soient X et Y deux compacts non vides de E, espace métrique. La distance de Hausdorff $\delta(X, Y)$ est telle que :*

$$\delta(X, Y) = \max\left(\sup_{y \in Y} d(y, X), \sup_{x \in X} d(x, Y)\right).$$

La distance étant continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ et $\{y\}$ et X étant des compacts, $d(y, X)$ existe et est atteinte, de plus $y \rightsquigarrow d(y, X)$ est à son tour continue. En effet, soient y et y' dans Y, pour tout x de X on a :

$$d(y, x) \leqslant d(y, y') + d(y', x),$$

d'où a fortiori :

$$d(y, X) \leqslant d(y, x) \leqslant d(y, y') + d(y', x),$$

donc $d(y, X) - d(y, y')$ minore l'ensemble des $d(y', x)$, pour x dans X, donc $d(y, X) - d(y, y') \leqslant d(y', X)$, soit encore $d(y, X) - d(y', X) \leqslant d(y, y')$.

De même on a $d(y', X) - d(y, X) \leqslant d(y', y)$, soit encore :

$$-d(y, y') \leqslant d(y, X) - d(y', X),$$

donc :

$$|d(y, X) - d(y', X)| \leqslant d(y, y').$$

Mais alors, à son tour $\sup\{d(y, X), y \in Y\}$ existe et est atteint, (borne supérieure d'une fonction continue sur un compact) et finalement $r = \max\left(\sup_{y \in Y} d(y, X); \sup_{x \in X} d(x, Y)\right)$ existe.

De plus, pour tout y de Y, $d(y, X) \leqslant r$, donc $y \in B(X, r)$, d'où $Y \subset B(X, r)$ et aussi $X \subset B(Y, r)$, donc $\delta(X, Y) \leqslant r$.

Puis, si $\varepsilon > 0$ est tel que $X \subset B(Y, \varepsilon)$ et $Y \subset B(X, \varepsilon)$, pour tout x de X, $d(x, Y) \leqslant \varepsilon$ et pour tout y de Y on a aussi $d(y, X) \leqslant \varepsilon$, donc $r \leqslant \varepsilon$, et ceci est vrai pour tous les ε de l'ensemble ayant $\delta(X, Y)$ pour minorant. Comme r minore cet ensemble, on a $r \leqslant \delta(X, Y)$, d'où l'égalité. $\blacksquare$

REMARQUE 4.108. — *Si* $r = \delta(X, Y)$, *on a* $X \subset B(Y, r)$ *et* $Y \subset B(X, r)$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $r + \varepsilon$ n'est plus minorant de l'ensemble des $\alpha > 0$ tels que $X \subset B(Y, \alpha)$ et $Y \subset B(X, \alpha)$ donc il existe ρ vérifiant $r \leqslant \rho \leqslant r + \varepsilon$, tel que :

$$X \subset B(Y, \rho) \subset B(Y, r + \varepsilon)$$

et

$$Y \subset B(X, \rho) \subset B(X, r + \varepsilon).$$

Mais alors, chaque x de X est tel que $d(x, Y) \leqslant r + \varepsilon$, et ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $d(x, Y) \leqslant r$, donc $x \in B(Y, r)$, d'où l'inclusion $X \subset B(Y, r)$, et de même $Y \subset B(X, r)$. ■

Si la distance de Hausdorff n'est d'aucune utilité pour introduire la notion de limite d'un sous-espace affine, (voir 6.34), utilisée pour parler de tangente, (6.36), de plan osculateur, (6.41), et plus généralement de p-espace osculateur, (voir 6.46), il n'en est pas de même pour celle de limite de cercles dans un plan euclidien, notion utilisée en 6.123 pour parler de cercle osculateur.

4.109. Limite de cercles.

Soit, dans un plan affine euclidien A rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (o; \vec{i}, \vec{j})$, un cercle $C(t)$, dépendant de t, nombre réel variant dans un intervalle I, de centre $\omega(t)$ et de rayon $r(t)$. Si $a(t)$ et $b(t)$ sont les coordonnées du centre $\omega(t)$, le cercle $C(t)$ est encore l'ensemble des points m de coordonnées x et y dans $\mathcal{R}$, vérifiant l'équation :

4.110. $x^2+y^2-2a(t)x-2b(t)y+c(t) = 0$, avec $c(t) = a^2(t)+b^2(t)-r^2(t)$.

Réciproquement, l'équation 4.110 définit un cercle à condition que :

4.111. $a^2(t) + b^2(t) - c(t) \geqslant 0$.

Les cercles du plan A sont donc caractérisés par les éléments du cône $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, d'inéquation $a^2 + b^2 - c \geqslant 0$, (dans un repère où les coordonnées seraient notées a, b et c). On utilise alors comme topologie sur les cercles de A, celle induite par la topologie de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{C}$, et c'est ce qui est fait pour parler de cercle osculateur en 6.123.

Nous allons voir que des cercles ont une limite pour cette topologie, si et seulement si ils ont cette limite, pour la distance de Hausdorff, si on les considère comme des compacts de A.

THÉORÈME 4.112. — *Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ muni d'un filtre $\mathcal{F}$, et des cercles $C(t)$, pour t dans I, d'équations $x^2+y^2-2a(t)x-2b(t)y+c(t)=0$ dans un repère orthonormé du plan euclidien A.*

Si les fonctions a, b et c ont des limites pour le filtre $\mathcal{F}$, notées α, β et γ, le cercle Γ de centre ω, (de coordonnées α et β), et de rayon $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-\gamma}$ est limite des $C(t)$, suivant le filtre $\mathcal{F}$ et pour la distance de Hausdorff.

D'abord, l'inégalité $a^2(t)+b^2(t)-c(t)\geqslant 0$, vérifiée pour t dans I, donne à la limite, $\alpha^2+\beta^2-\gamma\geqslant 0$, (continuité du produit et de l'addition sur $\mathbb{R}$), donc r existe.

Justifions ensuite un lemme :

LEMME 4.113. — *Soient deux cercles C_1 et C_2, de centres respectifs ω_1 et ω_2, de rayons r_1 et r_2, avec $||\overrightarrow{\omega_1\omega_2}||\leqslant\varepsilon$ et $|r_1-r_2|\leqslant\varepsilon$. Leur distance de Hausdorff vérifie $\delta(C_1,C_2)\leqslant 2\varepsilon$.*

Soit m_2 sur C_2, on a :

$$||\overrightarrow{\omega_2 m_2}||-||\overrightarrow{\omega_1\omega_2}||\leqslant||\overrightarrow{\omega_1 m_2}||\leqslant||\overrightarrow{\omega_1\omega_2}||+||\overrightarrow{\omega_2 m_2}||,$$

soit encore :

$$r_2-||\overrightarrow{\omega_1\omega_2}||\leqslant||\overrightarrow{\omega_1 m_2}||\leqslant\varepsilon+r_2\leqslant\varepsilon+(r_1+\varepsilon).$$

Comme par ailleurs $r_2\geqslant r_1-\varepsilon$ et $-||\overrightarrow{\omega_1\omega_2}||\geqslant-\varepsilon$, on a finalement $r_1-2\varepsilon\leqslant||\overrightarrow{\omega_1 m_2}||\leqslant r_1+2\varepsilon$, donc m_2 est dans la « couronne » de centre ω_1, de rayons $r_1-2\varepsilon$ et $r_1+2\varepsilon$ qui est le voisinage tubulaire fermé $B(C_1,2\varepsilon)$, (voir 4.101), les guillemets sont là parce que si $r_1-2\varepsilon<0$, on a un disque).

Mais alors $C_2\subset B(C_1,2\varepsilon)$ et, par symétrie des rôles joués par les deux cercles, $C_1\subset B(C_2,2\varepsilon)$ donc $\delta(C_1,C_2)\leqslant 2\varepsilon$, vu la définition de la distance de Hausdorff, (voir 4.103). ■

Revenons à la justification du Théorème 4.112.

Si $\omega(t)$ est le centre du cercle $C(t)$, et $r(t)$ son rayon, en notant ω le point de coordonnées α et β, par hypothèse on a $\lim\limits_{\mathcal{F}}\omega(t)=\omega$ et $\lim\limits_{\mathcal{F}}r(t)=r$, donc :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists F\in\mathcal{F},\ \forall t\in F,\quad ||\overrightarrow{\omega(t)\omega}||\leqslant\varepsilon\text{ et }|r(t)-r|\leqslant\varepsilon$$

d'où, (d'après le lemme 4.113), $\delta(C(t),\Gamma)\leqslant 2\varepsilon$:
ceci traduit $\lim\limits_{\mathcal{F}}\delta(C(t),\Gamma)=0$, donc le cercle Γ est bien limite des $C(t)$, pour la topologie de Hausdorff, (et le filtre $\mathcal{F}$). ■

Ce Théorème 4.112 a une réciproque : si des cercles $C(t)$ ont une limite Γ pour la distance de Hausdorff, d'abord Γ est un cercle, puis cette limite est obtenue au sens «limite du centre et du rayon».

THÉORÈME 4.114. — *Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$ muni d'un filtre $\mathcal{F}$ et une famille de cercles $(C(t))_{t\in I}$ du plan affine euclidien A, telle que la limite des $C(t)$ existe, pour le filtre $\mathcal{F}$ et la distance de Hausdorff δ sur les compacts de A. Alors, cette limite Γ est un cercle de A, et en notant ω le centre de Γ, r son rayon, ainsi que $\omega(t)$ le centre de $C(t)$ et $r(t)$ son rayon, on a $\lim\limits_{\mathcal{F}} \omega(t) = \omega$ et $\lim\limits_{\mathcal{F}} r(t) = r$.*

La difficulté va consister ici à justifier d'abord que Γ est un cercle.

C'est évident si Γ est un singleton, cas que l'on pourrait écarter. En fait, Γ, compact du plan euclidien A, admet un diamètre d atteint : soient a et b de Γ tels que $||\overrightarrow{ab}|| = d$, puis ω le milieu du segment $[a, b]$ et $r = \dfrac{d}{2}$.

Comme $\lim\limits_{\mathcal{F}} \delta(\Gamma, C(t)) = 0$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists F \in \mathcal{F},\ \forall t \in F,\ \delta(\Gamma, C(t)) \leqslant \varepsilon,$$

donc d'après la remarque 4.108, on a :

4.115. $\Gamma \subset B(C(t), \varepsilon)$ et

4.116. $C(t) \subset B(\Gamma, \varepsilon)$.

Mais alors, a et b, de Γ, sont dans $B(C(t), \varepsilon)$, qui est la «couronne» de centre $\omega(t)$, de rayons $r(t) - \varepsilon$ et $r(t) + \varepsilon$ d'où $||\overrightarrow{ab}|| = d \leqslant 2r(t) + 2\varepsilon$; et $C(t) \subset B(\Gamma, \varepsilon)$, d'où en passant aux diamètres de ces parties, l'inégalité $2r(t) \leqslant d + 2\varepsilon$, et finalement on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists F \in \mathcal{F},\ \forall t \in F, \quad d - 2\varepsilon \leqslant 2r(t) \leqslant d + 2\varepsilon,$$

ce qui traduit $\lim\limits_{\mathcal{F}} r(t) = \dfrac{d}{2} = r$.

Puis, on peut dire que les centres $\omega(t)$, pour t dans F, sont dans un compact du plan, car les $C(t)$ sont contenus dans $B(\Gamma, \varepsilon)$, compact, donc borné et contenu dans une boule fermée, convexe, contenant les $C(t)$.

Soit alors $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I qui converge pour les filtres de Fréchet sur $\mathbb{N}$, et $\mathcal{F}$ sur I, (donc à F on associe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_0$, $t_n \in F$, d'où $\omega(t_n)$ dans un compact... : il existe une suite extraite $\left(\omega(t_{\varphi(n)})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point ω.

Comme $\lim_{\mathcal{F}} r(t) = r$, par composition des limites, on a $\lim_{n\to+\infty} r(t_{\varphi(n)}) = r$, mais alors, d'après le lemme 4.113, on vérifie que $\lim_{n\to+\infty} \delta\big(\Gamma_0, C(t_{\varphi(n)})\big) = 0$, en notant Γ_0 le cercle de rayon r et de centre ω.

Comme par ailleurs $\lim_{\mathcal{F}} \delta(\Gamma, C(t)) = 0$ et que la suite $\big(t_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour les filtres de Fréchet et $\mathcal{F}$, on a aussi $\lim_{n\to+\infty} \delta\big(\Gamma, C(t_{\varphi(n)})\big) = 0$, donc, δ étant une distance, $\Gamma = \Gamma_0$ d'où Γ est le cercle de centre ω milieu de $[a, b]$, de diamètre $[a, b]$. De plus, le cercle Γ ne dépendant pas de la suite extraite $(\omega(t_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergeait vers ω, ce point ω n'en dépend pas non plus.

Comme toute suite extraire convergente $\big(\omega(t_{\varphi(n)})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ a la même limite ω, finalement $\lim_{n\to+\infty} \omega(t_n) = \omega$, et ce pour toute suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans I métrique, qui converge pour les filtres $\mathcal{F}$ et de Fréchet : finalement $\lim_{\mathcal{F}} \omega(t) = \omega$ et le Théorème est justifié. ■

REMARQUE 4.117. — La même justification s'applique à des sphères. Il y aurait bien d'autres propriétés des distances de Hausdorff. Mais comme il se fait tard et qu'il faut savoir être raisonnable, je me contenterai de citer deux résultats pour terminer ce chapitre.

D'abord, si l'espace métrique E est tel que (compact) $\Longleftrightarrow$ (fermé borné), on démontre que $\mathcal{K}(E)$ est complet pour la distance de Hausdorff.

Ensuite, on peut démontrer que, pour la distance de Hausdorff, l'ensemble des zéros d'un polynôme à coefficients complexe est fonction continue de l'ensemble des coefficients.

Enfin, porte ouverte sur l'avenir, la distance de Hausdorff permet une première approche des fractales en considérant les termes d'une suite convergente de compacts bien choisis.

EXERCICES

1. Dans un espace affine euclidien de dimension trois, soient deux droites orthogonales D_1 et D_2 et O un point de D_1. Ensemble des centres des cercles tangents en O à D_1 et rencontrant D_2.

2. Dans E espace euclidien de dimension trois orienté, existe-t-il, pour a et b vecteurs donnés, des vecteurs x et y non nuls tels que $a \wedge x = b \wedge y$, $a \wedge y = b \wedge x$, $a \cdot x = b \cdot y$ et $a \cdot y = b \cdot x$.

3. Dans $\mathbb{R}^3$ affine euclidien de dimension trois orienté, soient deux repères orthonormés directs $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ et $(O; \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'})$. Montrer que les droites AA', BB' et CC', (si on suppose $A \neq A'$, $B \neq B'$ et $C \neq C'$) sont parallèles à un même plan.

4. Dans $\mathbb{R}^3$ affine euclidien orienté on se donne trois points A, B et C. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{0}$.

5. Déterminer l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \inf\{|x \cos\theta + y \sin\theta - z|, \theta \in \mathbb{R}\} = 0\}.$$

6. Dans l'espace affine euclidien de dimension trois on donne un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et π un plan variable contenant 0.
Soit $\mathcal{E}$ la projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur π. Lieu des extrémités du petit axe de l'ellipse $\mathcal{E}$ lorsque π varie.

7. Soient A, B, C sur une sphère de centre O tels que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ soient deux à deux orthogonaux. Calculer la somme des carrés des projections de ces vecteurs sur un plan quelconque.

8. Dans l'espace affine euclidien de dimension trois, on se donne une sphère $\mathcal{S}$ et on note $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ les régions fermées de l'espace, respectivement extérieure et intérieure à la sphère. A tout point A de $\mathcal{E}$, on associe le centre $f(A)$ du cercle de contact de $\mathcal{S}$ et du cône circonscrit à $\mathcal{S}$ de sommet A.
Continuité de f, image d'une droite, image d'un plan.

9. Soit un espace vectoriel euclidien de dimension n, et u un endomorphisme symétrique de E.
On pose $C = \{x \in E;\ < u(x) | x > = 0\}$.
Montrer que C contient une base orthonormée si et seulement si $\text{trace}(u) = 0$.
Soit la parabole $\mathcal{P}$ d'équations $z = 0$, $y^2 = 2px$. Trouver les points M de l'espace par lesquels il passe trois droites orthogonales s'appuyant sur $\mathcal{P}$.

SOLUTIONS

1. Prenons un repère $\mathcal{R}$ d'origine 0, d'axe $0z$ porté par D_1, la droite ayant pour équations $x = a$, $z = b$, (donc D_2 parallèle à Oy).
Un cercle C, tangent en 0 à D_1 est centré dans le plan $x0y$ en I de coordonnées $(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, 0)$, et son rayon est alors (ρ).
Les équations de C sont alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\rho \cos\theta x - 2\rho \sin\theta\, y = 0 \\ x \sin\theta - y \cos\theta = 0. \end{cases}$$

Ce cercle rencontre D_2 si et seulement si il existe y tel que :

$$\begin{cases} a^2 + y^2 + b^2 - 2a\rho \cos\theta - 2\rho y \sin\theta = 0 \\ a \sin\theta - y \cos\theta = 0. \end{cases}$$

Discussion. On note L l'ensemble des solutions.
Si $a \neq 0$, forcément $\cos\theta \neq 0$, et $y = a \operatorname{tg}\theta$, doit être tel que :

$$a^2(1 + \operatorname{tg}^2\theta) + b^2 - 2a\rho \cos\theta - 2\rho a \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = 0$$

soit encore :

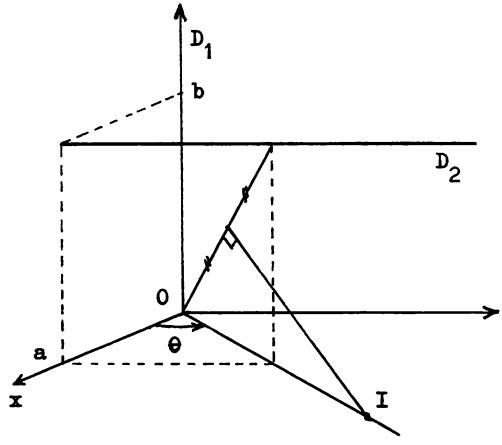
$$\frac{a^2}{\cos^2\theta} + b^2 - \frac{2a\rho}{\cos\theta} = 0$$

d'où l'on tire l'équation polaire :

$$\rho = \frac{b^2}{2a} \cos\theta + \frac{a}{2\cos\theta}.$$

(Pour $b = 0$, L est la droite homothétique de D_2 dans l'homothétie de centre 0, de rapport $\frac{1}{2}$, pour $b \neq 0$ on a une courbe cissoïdale.)
Si $a = 0$, on doit avoir $y \cos\theta = 0$ et $y^2 + b^2 - 2\rho y \sin\theta = 0$.

Si on a des solutions telles que $\cos\theta \neq 0$, on doit avoir $y = 0$ et aussi $b^2 = 0$ d'où en fait :
si $b = 0, y = 0$ convient, on n'a pas de condition sur ρ et θ, dans ce cas l'ensemble L des centres est le plan orthogonal en 0 à D_1 ;
si $b \neq 0$, on doit avoir $\cos\theta = 0$, d'où $\sin\theta = 1$ ou -1, et on doit trouver des solutions à l'équation du second degré $y^2 \pm 2\rho y + b^2 = 0$, de discriminant réduit $\rho^2 - b^2$, ce qui n'est possible que si $|\rho| \geqslant |b|$: dans ce cas L est la parallèle à D_2 passant par 0, privée du segment centré en 0, de longueur $2|b|$.



2. On discute suivant le rang de (a, b).

1) *Si* $rang(a, b) = 0$, a et b sont nuls, tout couple (x, y) est solution.

2) *Si rang* $(a, b) = 1$, avec par exemple $a \neq 0$ et $b = \lambda a$, (λ réel), les conditions deviennent :

$$a \wedge x = \lambda a \wedge y ; a \wedge y = \lambda\, a \wedge x ; a \cdot x = \lambda\, a \cdot y \text{ et } a \cdot y = \lambda\, a \cdot x.$$

Si on a une solution, on doit avoir $(a \wedge x)(1 - \lambda^2) = 0$ et $a \cdot x(1 - \lambda^2) = 0$, donc si $\lambda^2 \neq 1$, on doit avoir $a \wedge x = 0$ et $a \cdot x = 0$ d'où $x = 0$ (car x parallèle et orthogonal à $a \neq 0$), mais alors $a \wedge y = 0$ et $a \cdot y = 0$ d'où $y = 0$.
Finalement, si $\lambda^2 \neq 1$, *seule solution* $(0, 0)$.
Si $\lambda^2 = 1$, soit $\lambda = \varepsilon \in \{-1, 1\}$, on doit avoir x et y tels que $a \wedge (x - \varepsilon y) = 0$ et $a \cdot (x - \varepsilon y) = 0$, d'où $x - \varepsilon y = 0$: *les solutions sont les couples* $(x, \varepsilon x)$.

3) *Si* $rang(a, b) = 2$, et si (x, y) est solution avec $x = 0$, on a $a \wedge y = 0$ et $a \cdot y = 0$ d'où aussi $y = 0$. (De même $y = 0 \Longrightarrow x = 0$). On a donc la solution $(0, 0)$, et on cherche s'il y a des solutions (x, y) différentes.
Avec $x \neq 0$, $a \wedge x = 0$ et $b \wedge x = 0 \Longrightarrow a$ et b liés, car parallèles à x donc l'un des deux est non nul.
Par exemple $v = a \wedge x = b \wedge y \neq 0$, et v est perpendiculaire à a et b, d'où $\mathbb{R}v = \{a, b\}^\perp \Longrightarrow x$ et y sont dans $\{v\}^\perp = \text{Vect}(a, b)$.
Si on pose $x = \lambda a + \mu b$ et $y = \lambda' a + \mu' b$, les conditions s'écrivent :

$$\mu a \wedge b = \lambda' b \wedge a = -\lambda' a \wedge b \quad \text{d'où} \quad \lambda' = -\mu ;$$

$$\mu' a \wedge b = \lambda b \wedge a = -\lambda a \wedge b \quad \text{d'où} \quad \mu' = -\lambda ;$$

$$\lambda||a||^2 + \mu a \cdot b = -\mu a \cdot b - \lambda||b||^2$$
$$-\mu||a||^2 - \lambda a \cdot b = \lambda a \cdot b + \mu||b||^2.$$

Ces deux dernières équations s'écrivent encore :

$$\begin{cases} \lambda(||a||^2 + ||b||^2) + 2\mu a \cdot b = 0 \\ 2\lambda a \cdot b + \mu(||a||^2 + ||b||^2) = 0, \end{cases}$$

système homogène de déterminant :

$$\begin{aligned}(||a||^2 + ||b||^2)^2 - 4(a \cdot b)^2 &= (||a||^2 + ||b||^2 - 2a \cdot b)(||a||^2 + ||b||^2 + 2a \cdot b) \\ &= ||a+b||^2||a-b||^2 \neq 0 \\ &\text{car } \{a, b\} \text{ est de rang deux.}\end{aligned}$$

Donc la seule solution est $\lambda = \mu = 0$, d'où le seul couple (x, y) solution dans ce cas qui est $(0, 0)$.

3. Il s'agit de justifier que les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont liés. Or l'application linéaire u qui envoie $\overrightarrow{OA}$ sur $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB}$ sur $\overrightarrow{OB'}$ et $\overrightarrow{OC}$ sur $\overrightarrow{OC'}$ est une isométrie directe, dont elle admet 1 pour valeur propre. Le rang de $u - \mathrm{id}_E$, (avec $E = \mathbb{R}^3$, vectoriel) est 2 au plus, or $(u - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OB}$ soit $(u - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{BB'}$, et de même $(u - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{AA'}$ et $(u - \mathrm{id}_E)(\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{CC'}$: finalement $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont trois vecteurs de l'image de $u - \mathrm{id}_E$, de dimension $\leqslant 2$, ils sont donc liés.

4. D'après la formule de Gibbs, (que vous pouvez rejustifier),

$$\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC})\overrightarrow{MB} - (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})\overrightarrow{MC}$$

et la nullité de ce vecteur va s'exprimer de façon différente suivant que $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ seront liés ou non.

Si $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont liés, $\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}$ est nul sans autre forme de procès, donc tout point de la droite $\mathrm{aff}(B, C)$ est solution, (avec, si $B = C$, tout point de l'espace qui est solution).

Supposons alors $B \neq C$ et $M \notin \mathrm{aff}(B, C)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC}$ indépendantes, on aura M solution si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$, soit si et seulement si M appartient aux sphères de diamètre AC et AB, (ce qui, si $A = C \neq B$ ne donne que le point A, et de même si $A = B \neq C$ on retrouve B). Donc si A, B et C sont distincts, l'ensemble des solutions est formé de la droite BC et du cercle intersection des deux sphères de diamètres respectifs $[A, B]$ et $[A, C]$.

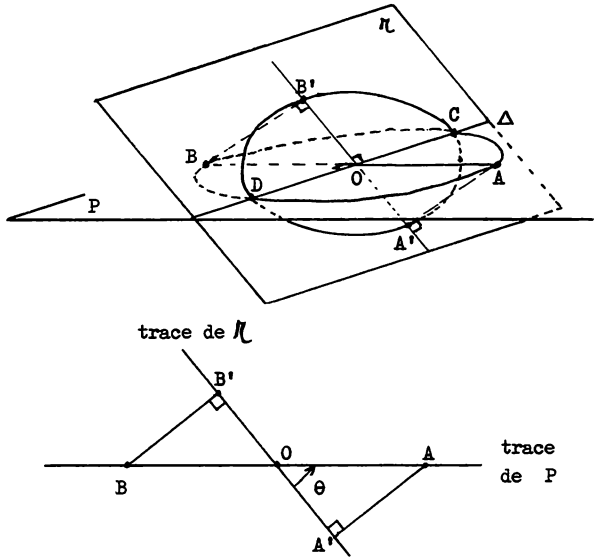
5. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, comme la fonction $\theta \rightsquigarrow |x \cos\theta + y \sin\theta - z|$ est continue, 2π périodique, on peut l'étudier sur le compact $[0, 2\pi]$, donc elle est bornée et

atteint ses bornes. Mais alors sa borne inférieure est nulle si et seulement il existe θ tel que $x\cos\theta + y\sin\theta - z = 0$, ce qui signifie, ($z$ paramètre) que la droite $D(\theta)$, du plan $x0y$, d'équation $x\cos\theta + y\sin\theta - z = 0$ est tangente au cercle de centre 0, de rayon $|z|$.
Mais alors, dans $\mathbb{R}^3$, le point $M(x,y,z)$ est dans S si et seulement si il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que M soit sur la droite $\Delta(\theta, z)$, dans le plan $Z = \text{constante} = z$, tangente en $P(\theta) : (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$ au cercle de rayon $|z|$, d'axe $0Z$, dans le plan $Z = z$.
Comme pour z fixé, θ est quelconque, la droite $\Delta(\theta, z)$ est finalement extérieure au disque $Z = z$, $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, et en faisant varier z, on obtient l'ensemble cherché,

$$S = \{M(x,y,z), 0 \leqslant x^2 + y^2 - z^2\},$$

extérieur du cône de révolution d'axe $0z$, de demi-angle au sommet $\pi/4$.

6. Soit P le plan du cercle $\mathcal{C}$, le plan π coupe P suivant une droite Δ qui coupe le cercle en C et D. Soient A et B intersections du cercle $\mathcal{C}$ et du diamètre perpendiculaire à $[DC]$.



L'ellipse $\mathcal{E}$, projection orthogonale de $\mathcal{C}$ sur π a pour grand axe CD et petit axe $A'B'$, projection orthogonale de AB sur π.
Dans le plan Q, orthogonal à Δ en 0, les points A' et B' décrivant les deux cercles de diamètres OA et OB, tangents en 0, ceci lorsque pour Δ fixé, l'angle θ du dièdre (P, π) varie.
Lorsque Δ pivote autour de 0, ces cercles engendrent donc un tore de collier nul.

Si on veut y mettre de l'analytique, les deux cercles de diamètres R, tangents en 0 à $0z$, dans un plan rOz, ont pour équation :

$$\left(r^2 + z^2 - r\frac{R}{2}\right)\left(r^2 + z^2 + r\frac{R}{2}\right) = 0,$$

d'où, avec $r^2 = x^2 + y^2$, l'équation du tore :

$$4(x^2 + y^2 + z^2)^2 - R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

7. Par homothétie de rapport le rayon de la sphère, on peut traiter d'abord le cas d'un rayon 1.
Si on prend un repère orthonormé tel que le plan π soit parallèle à $x0y$, la matrice des composantes des vecteurs $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$ et $\overrightarrow{0C}$ dans ce repère est orthogonale, et si elle s'écrit :

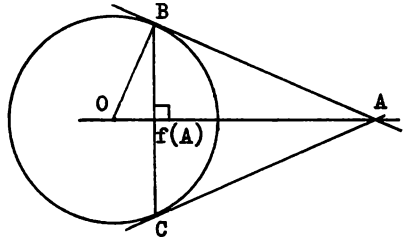
$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

la somme des carrés des projections de ces trois vecteurs sur le plan $x0y$ est

$$(\alpha^2 + \alpha'^2) + (\beta^2 + \beta'^2) + (\gamma^2 + \gamma'^2) = 2, \ (P \text{ matrice orthogonale}).$$

Dans le cas général, on a donc $2R^2$, R rayon de la sphère.

8. Soit un repère d'origine 0, centre de la sphère $\mathcal{S}$ de rayon R. Dans un plan contenant $0A$, plan de symétrie pour la sphère et le cône, la section de $\mathcal{S}$ est un cercle de centre 0 de rayon R, la section du cône est formé des deux tangentes issues de A à ce cercle, tangentes en B et C, et le centre du cercle de contact de $\mathcal{S}$ et du cône est le milieu de BC.



On a $\overrightarrow{0f(A)} \cdot \overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0A} \cdot \overrightarrow{0B}$, (on projette orthogonalement $\overrightarrow{0B}$ sur $\overrightarrow{0A}$) mais c'est aussi $(\overrightarrow{0B} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{0B} = \overrightarrow{0B}^2 = R^2$, donc f est la restriction à $\mathcal{E}$ de l'inversion de pôle 0 et de puissance R^2.
L'égalité vectorielle $\overrightarrow{0f(A)} = \dfrac{R^2}{||\overrightarrow{0A}||^2}\ \overrightarrow{0A}$ donne alors, pour fonctions composantes de f, les applications $(x, y, z) \rightsquigarrow \dfrac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}$,

$(x,y,z) \rightsquigarrow \dfrac{R^2 y}{x^2+y^2+z^2}$ et $(x,y,z) \rightsquigarrow \dfrac{R^2 z}{x^2+y^2+z^2}$, qui sont continue sur $\mathcal{E}$.

Image d'une droite D, ou plutôt de la partie de D qui est dans $\mathcal{E}$.
On prend un plan P contenant D et 0, et un repère tel que P ait pour équation $z=0$.
Dans ce repère les équations de D sont $z=0$ et $ux+uy+w=0$, et $M(x,y,0)$ de D donne pour image $f(M)$ de coordonnées $X = x\dfrac{R^2}{x^2+y^2}$, $Y = y\dfrac{R^2}{x^2+y^2}$ et $Z=0$.
On a donc $uX+vY = (ux+vy)\dfrac{R^2}{x^2+y^2} = -w\dfrac{R^2}{x^2+y^2}$.
Or $X^2+Y^2 = \dfrac{R^4}{x^2+y^2}$, donc X et Y vérifient la relation :

$$uX+vY = -\frac{w}{R^2}(X^2+Y^2),$$

et de plus $X^2+Y^2 \leqslant R^2$, (pour tenir compte de la condition $x^2+y^2 \geqslant R^2$).
Si $w=0$, c'est-à-dire si D passe par 0, l'image $f(D)$ est le diamètre de la sphère porté par D, ($uX+vY=0$ et $X^2+Y^2 \leqslant R^2$).
Si $w \neq 0$, $f(D)$ est la portion du cercle d'équation :
$X^2+Y^2+\dfrac{R^2}{w}(uX+vY)=0$, intérieure à $\mathcal{S}$.

Image d'un plan P, d'équation $ux+vy+wz+h=0$.
Avec $X = x\dfrac{R^2}{x^2+y^2+z^2}$, $Y = y\dfrac{R^2}{x^2+y^2+z^2}$ et $Z = z\dfrac{R^2}{x^2+y^2+z^2}$, on a $X^2+Y^2+Z^2 \leqslant R^2$ et $uX+vY+wZ = -h\dfrac{R^2}{x^2+y^2+z^2}$. Comme $X^2+Y^2+Z^2 = \dfrac{R^4}{x^2+y^2+z^2}$, on obtient encore la relation :
$uX+vY+wZ = -\dfrac{h}{R^2}(X^2+Y^2+Z^2)$ qui lie les coordonnées de $f(M)$.
Donc si 0 *est dans le plan*, ($h=0$), l'image de la partie de P extérieure à $\mathcal{S}$ devient le disque $P \cap \mathcal{E}'$;
si $0 \notin P$, on obtient la portion de la sphère d'équation :
$X^2+Y^2+Z^2+\dfrac{R^2}{h}(uX+vY+wZ)=0$, intérieure à $\mathcal{S}$.

9. Soit A matrice symétrique de u dans une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. L'application $x \rightsquigarrow q(x) = <u(x)|x>$ est une forme quadratique, et avec X matrice colonne des composantes de x dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$q(x) = {}^t(AX)X = {}^tX\,{}^tAX = {}^tXAX$$

vu la symétrie de A, donc A est aussi la matrice de q dans la base $\mathcal{B}$.

Si on suppose en particulier $\mathcal{B}$ orthonormée, formée de vecteurs propres pour u, pour les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, la matrice A est la matrice diagonale formée de $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et si $(e_1, \ldots, e_n)$ sont les éléments de la base, on a :

$$\begin{aligned} < u(e_1 + \ldots + e_n), e_1 + \ldots + e_n > &= q(e_1 + \ldots + e_n) \\ &= q(e_1) + \ldots + q(e_n), \quad \text{(base conjuguée)} \\ &= \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \text{trace}(u). \end{aligned}$$

On suppose alors $\text{trace}(u) = 0$, $b_n = \dfrac{e_1 + e_2 + \ldots + e_n}{\sqrt{n}}$ est de norme 1 et $q(b_n) = 0$, donc b_n est dans C.
Soit $E' = \{b_n\}^{\perp}$, et q' la restriction de q à E', de matrice A' dans une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de E'. La matrice de q dans la base orthonormée $\mathcal{B}' \cup \{b_n\}$ de E est du type :

$$A'' = \left(\begin{array}{c|c} A' & \\ \hline \text{peu importe} & \begin{array}{c} \\ \hline q(b_n) \end{array} \end{array} \right),$$

avec $q(b_n) = 0$, et elle est semblable à A, (changement de base orthonormée) donc $\text{trace}(A'') = \text{trace}A = \text{trace}A' = 0$.
Le raisonnement fait sur E, lié à la nullité de la trace, se refait sur E', pour q', d'où une justification par récurrence de l'existence d'une base orthonormée $\{b_1, \ldots, b_n\}$ de E, contenue dans C.
Réciproquement, s'il existe une base orthonormée $\{b_1, \ldots, b_n\}$ telle que pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on ait $< u(b_i), b_i > = 0$, comme $< u(b_i), b_j >$ est l'élément de la $i^{ème}$ colonne, $j^{ème}$ ligne de la matrice A de u dans cette base, en particulier les $< u(b_i), b_i >$ sont les éléments diagonaux, donc :

$$\text{trace}(u) = \sum_{i=1}^{n} < u(b_i), b_i > = 0.$$

Soit alors $M : (x, y, z)$, un point de l'espace. Si par M il passe trois droites orthogonales s'appuyant sur la parabole $\mathcal{P}$, ces droites sont sur le cône de sommet M de courbe directrice $\mathcal{P}$ d'équations $z = 0$ et $y^2 = 2px$, et ce cône de sommet M est le cône isotrope d'une forme quadratique q. Si A est la matrice symétrique de q dans une base orthonormée, et si u est l'endomorphisme symétrique de matrice A dans la même base, avec X matrice colonne des coordonnées d'un vecteur V de E, on a :
$q(V) = {}^tXAX = {}^t(AX)X = < u(V), V >$: on retrouve la situation de départ, et finalement M soit être tel que la trace de A soit nulle.
Equation du cône : on paramètre la parabole par $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$, $z = 0$, puis le point de coordonnées $X = x + \lambda\left(x - \dfrac{t^2}{2p}\right)$, $Y = y + \lambda(y - t)$, $Z = z + \lambda z$, pour λ dans $\mathbb{R}$, décrit la droite générique du cône. Pour $\lambda \neq 0$, on a $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{z}{Z - z}$, et

$$\frac{X - x}{\lambda} - x = \frac{z(X - x)}{Z - z} - x = -\frac{t^2}{2p}; \quad \frac{Y - y}{\lambda} - y = \frac{z(Y - y)}{Z - z} - y = -t,$$

ce qui conduit à l'élimination de t, $(t^2 = t^2)$, par :

$$\frac{-2pz(X-x)+2px(Z-z)}{Z-z} = \left(\frac{z(Y-y)-y(Z-z)}{(Z-z)}\right)^2,$$

ou encore :

$$z^2(Y-y)^2+(Z-z)^2(y^2-2px)+2pz(X-x)(Z-z) \\ -2yz(Y-y)(Z-z)=0.$$

La matrice de la forme quadratique, (en $X-x$, $Y-y$, $Z-z$), est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & pz \\ 0 & z^2 & -yz \\ pz & -yz & y^2-2px \end{pmatrix},$$

de trace y^2+z^2-2px : l'ensemble cherché est le paraboloïde elliptique de révolution autour de l'axe $0x$, d'équation $2px = y^2+z^2$.

CHAPITRE 5

Géométrie plane euclidienne

Pourquoi ce chapitre, ce favoritisme pour la dimension deux? Peut-être parce que l'aspect livresque de notre culture a accentué l'importance du support plan. Pensez à la mise en place de la perspective en peinture, qui permet au cerveau de concevoir l'espace à partir d'une figuration plane.

C'est aussi pour justifier des résultats utilisés de ci, de là, les centres d'homothétie de deux ou trois cercles par exemple, et enfin pour parler de la géométrie du triangle, si riche qu'elle peut faire l'objet de livres entiers.

La difficulté de ce chapitre sera de savoir jusqu'où ne pas aller trop loin! Son cadre est celui des plans affines euclidiens.

1. Angles orientés

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'un espace préhilbertien réel, non nuls. Le réel $\dfrac{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >}{||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||}$ est dans $[-1, 1]$, et il existe un seul θ dans $[0, \pi]$ tel que $\cos\theta = \dfrac{< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >}{||\overrightarrow{u}||\,||\overrightarrow{v}||}$.

Ce θ est une mesure, (en radians), de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, improprement appelé encore *angle des deux vecteurs*.

Dans cette définition $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ jouent des rôles symétriques, (ils interviennent par le produit scalaire) donc l'angle de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le même que celui de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$.

Dans ce cadre, on appellerait angle de deux droites, l'angle de deux vecteurs directeurs de ces droites, et on s'aperçoit rapidement que θ et $\pi - \theta$, pour θ dans $[0, \pi]$, conviennent car si $\overrightarrow{u}$ dirige D, $-\overrightarrow{u}$ la dirige aussi.

Dans *le cadre des plans euclidiens orientés* on va considérer des angles de vecteurs, ou de droites, orientés et là, les deux vecteurs ne joueront plus le même rôle.

Soit donc un *plan vectoriel euclidien* E, orienté, et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une base orthonormée directe (voir la définition 3.1).

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire, il se décompose dans la base $\mathcal{B}$ en $\overrightarrow{u} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j}$ avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, donc il existe un seul réel θ, défini modulo 2π, tel que $\alpha = \cos\theta$ et $\beta = \sin\theta$. (Voir Tome 3, Théorème 13.53).

Il en résulte que la rotation r_θ de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, dans la base $\mathcal{B}$ envoie $\overrightarrow{i}$ sur $\overrightarrow{u}$.

Si $\overrightarrow{v}$ est également unitaire, avec $\overrightarrow{v} = \cos\theta' \overrightarrow{i} + \sin\theta' \overrightarrow{j}$, la rotation $r_{\theta'}$, de matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix}$, sera telle que $r_{\theta'}(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{v}$, donc $r_{\theta'} \circ r_{-\theta} = r_{\theta'-\theta}$ envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$. Si on note $\varphi = \theta' - \theta$ et r_φ la rotation d'angle φ, on a donc trouvé une rotation r_φ qui envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$. C'est la seule, car si r_φ et $r_{\varphi'}$ sont deux rotations telles que $r_\varphi(\overrightarrow{u}) = r_{\varphi'}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ on aura $r_{\varphi-\varphi'}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$, donc la rotation $r_{\varphi-\varphi'}$ admet 1 pour valeur propre, $\overrightarrow{v}$ pour vecteur propre associé. Mais alors 1 est valeur propre double, (1 et -1 seules valeurs propres réelles possibles et déterminant 1) et $r_{\varphi-\varphi'}$ est l'identité, donc $r_\varphi = r_{\varphi'}$.

THÉORÈME 5.1. — *Soient deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ d'un plan vectoriel euclidien orienté E. Il existe une et une seule rotation r tel que $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$.*

C'est ce que nous venons de justifier. ■

Si la matrice de r dans *une base orthonormée directe* s'écrit : $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, θ est une mesure (en radians) de l'angle de vecteurs orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, et on parlera de manière impropre de *l'angle orienté de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$, qui est noté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, comme un couple* ! On peut remarquer que cette notion *dépend de l'orientation du plan*, car changer $\overrightarrow{i}$ en $-\overrightarrow{i}$ par exemple, a pour effet de remplacer M par la matrice semblable :

$$M' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

donc remplacerait θ par l'opposé.

De plus, si $r(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$, on a $r^{-1}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}$, donc si θ est l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, l'angle $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ sera $-\theta$: cette fois l'ordre dans lequel les vecteurs interviennent joue un rôle.

5.2. RELATION DE CHASLES. — *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs unitaires du plan euclidien orienté E.*

On a $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.

En effet, si les rotations r_θ et r_φ, d'angles θ et φ sont telles que $r_\theta(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ et $r_\varphi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$, on aura $r_{\varphi+\theta}(\overrightarrow{u}) = r_\varphi \circ r_\theta(\overrightarrow{u}) = r_\varphi(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{w}$, donc $\varphi + \theta$ est bien une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$. ■

Il y a dans ce qui précède un abus de langage : θ et φ sont des mesures en radians d'angles...

5.3. LIEN AVEC LA PRATIQUE. — La définition donnée est très théorique car avez-vous déjà rencontré des matrices orthogonales directes dans la vie? Quand à obtenir $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ par des séries entières, n'en parlons pas!

Par contre, attacher une chèvre à un piquet, voilà du concret! Vous allez me dire que vous ne l'avez peut-être jamais fait ni vu! Bon, faisons tourner les aiguilles d'une montre ou d'un réveil (affichage digital exclu), voilà quelque chose que l'on rencontre.

On considère donc dans le plan affine euclidien muni d'une origine 0, le cercle C de centre 0 de rayon 1, d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Une fois le vecteur $\overrightarrow{i}$ fixé, on a le choix entre deux vecteurs opposés, $\overrightarrow{j}$ et $-\overrightarrow{j}$, unitaires, pour diriger $\{\overrightarrow{i}\}^\perp$, et le choix de l'un d'entre eux oriente le plan.

Conventionnellement, avec le mode d'écriture occidentale, on dirige $\overrightarrow{i}$, horizontalement, de gauche à droite, et $\overrightarrow{j}$ vers le haut. Le cercle C se paramètre alors en $x = \cos\theta, y = \sin\theta$, θ étant l'angle de la rotation qui fait passer de $\overrightarrow{i}$ à $\overrightarrow{u} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$. Le cercle est dit orienté dans le *sens trigonométrique*, ou direct, qui est le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre, et l'angle de deux vecteurs unitaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ devient en fait la différence des abscisses curvilignes sur ce cercle trigonométrique, des extrémités de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, (figure 5.3); (ou plutôt, une mesure en radians de l'angle!).

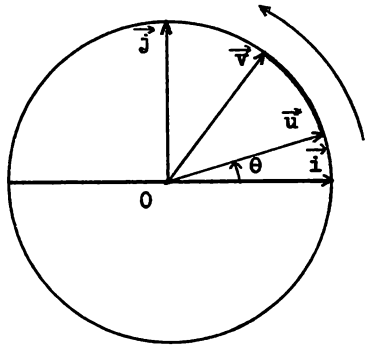


Fig. 5.3.

5.4. ANGLE DE DEUX AXES DU PLAN ORIENTÉ. — Soit une droite D du plan affine, de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Le vecteur $-\overrightarrow{u}$ dirige aussi D, et plus généralement tout vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $\lambda > 0$, on dira que $\lambda\overrightarrow{u}$, définit la même orientation de D que $\overrightarrow{u}$, et si $\lambda < 0$ on a l'orientation opposée : on définit donc une relation d'équivalence entre vecteurs directeurs de D : $(\overrightarrow{u}\mathcal{R}\overrightarrow{v}) \iff (\exists\lambda > 0, \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u})$, relation qui donne deux classes d'équivalence, celle de $\overrightarrow{u}$ et celle de $-\overrightarrow{u}$, et orienter la droite c'est choisir une de ces classes d'équivalence. On parle d'axe au lieu de droite orientée. Si on impose au vecteur directeur d'être unitaire, *un axe admet un et un seul vecteur unitaire directeur.*

DÉFINITION 5.5. — *On appelle angle de deux axes δ et δ' du plan euclidien orienté, l'angle de vecteurs de leurs vecteurs unitaires directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$.*

C'est donc un angle défini modulo 2π, (toujours cette assimilation entre angle et «mesure»de l'angle).

DÉFINITION 5.6. — *Soient deux droites affines D et D' du plan euclidien orienté. On appelle angle orienté des droites D et D', l'angle de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$, vecteurs unitaires de D et D'. Il est défini modulo π.*

Un mot d'explication s'impose. Si $\overrightarrow{u}$ dirige D, il en est de même de $-\overrightarrow{u}$; et pour D' on dispose de $\overrightarrow{u}'$ et de $-\overrightarrow{u}'$, d'où quatre cas de figure; on peut prendre $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}')$; $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}')$; $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}')$ ou $(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u}')$!

Si $\alpha = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}')$, comme $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = \pi = (\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{u})$ et plus généralement, c'est l'angle de deux vecteurs opposés, on aura par la relation

de Chasles :

$$(-\vec{u}, \vec{u}') = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}') \quad = \pi + \alpha,$$
$$(\vec{u}, -\vec{u}') = (\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}', -\vec{u}') = \alpha + \pi \quad \text{et}$$
$$(-\vec{u}, -\vec{u}') = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{u}') + (\vec{u}', -\vec{u}') = \alpha + 2\pi,$$

donc toutes ces valeurs n'en font qu'une, modulo π.

On notera (D, D') cet angle de droites, et les angles de droites vérifient eux aussi la relation de Chasles.

Pour finir, qu'appelle t-on angle de deux vecteurs non nuls?

DÉFINITION 5.7. — *Soient $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls du plan vectoriel euclidien orienté E. On appelle angle orienté de $\vec{U}$ et de $\vec{V}$, l'angle des vecteurs unitaires* $\vec{u} = \dfrac{\vec{U}}{||\vec{V}||}$ et $\vec{v} = \dfrac{\vec{V}}{||\vec{V}||}$.

DÉFINITION 5.8. — *Le plan affine euclidien orienté étant muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle angle polaire d'un vecteur unitaire $\vec{u}$, l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \vec{u})$.*

Cette notion d'angle polaire s'étend aux axes et aux droites et sera très utile, comme dans la définition des bissectrices par exemple.

DÉFINITION 5.9. — *Soient deux axes δ et δ' du plan affine euclidien orienté. On appelle bissectrice des deux axes, tout axe δ'' tel que $(\delta, \delta'') = (\delta'', \delta')$, δ'' passant par l'intersection de δ et δ' supposés sécants.*

THÉORÈME 5.10. — *Il existe deux axes de même support, bissectrices de deux axes sécants δ et δ'. L'angle polaire de la droite bissectrice est la demi-somme des angles polaires des deux axes.*

Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, d'angles polaires θ et θ', vecteurs unitaires orientant les axes δ et δ'.

Si $\vec{u}''$ est unitaire et dirige un axe bissectrice, on doit avoir son angle polaire θ'' tel que :

$$\theta'' - \theta = (\delta, \delta'') = (\delta'', \delta') = \theta' - \theta'',$$

donc :

$$2\theta'' = \theta' + \theta, \quad \text{soit :} \quad \theta'' = \frac{\theta + \theta'}{2}.$$

Mais comme θ et θ' sont définis modulo 2π, $\theta + \theta'$ est aussi connu modulo 2π donc θ'' l'est modulo π, d'où deux vecteurs solutions : $\overrightarrow{u}''$ et $-\overrightarrow{u}''$. *Ils définissent la même droite*, que l'on peut orienter de deux façons. ■

DÉFINITION 5.11. — *On appelle bissectrice de deux droites D et D' sécantes du plan euclidien orienté toute droite D'' passant par le point d'intersection de D et D', et telle que $(D, D'') = (D'', D')$.*

THÉORÈME 5.12. — *Soient deux droites sécantes en a, D et D'. Il existe deux bissectrices Δ et Δ' pour ces deux droites, elles sont orthogonales en a et ce sont les ensembles de points équidistants de D et de D'.*

Comme en 5.10, si θ, θ' et θ'' sont les angles polaires des droites D, D' et d'une bissectrice D'', on doit avoir :

$$\theta'' - \theta = \theta' - \theta'' \quad \text{soit} \quad 2\theta'' = \theta + \theta' \quad \text{donc} \quad \theta'' = \frac{\theta + \theta'}{2},$$

mais cette fois, θ et θ' étant définis modulo π, θ'' le devient modulo $\frac{\pi}{2}$, d'où deux droites perpendiculaires solutions.

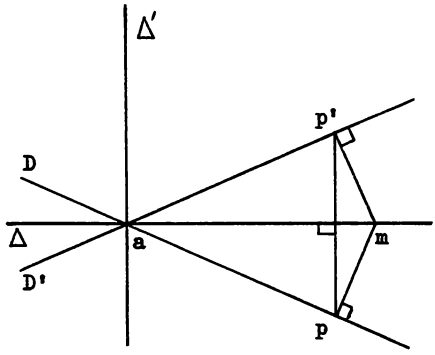


Fig. 5.12.

Soit s, (resp s') la symétrie d'axe Δ, (resp Δ'). La droite $s(D)$, symétrique de D passe par a, et la symétrie conservant le produit scalaire, donc les angles, (sans orientation ici) l'angle des droites Δ et $s(D)$ est celui de D et de Δ, donc $s(D)$ est D ou D', mais $s(D) = D$ n'est possible que si $D = \Delta$, axe de la symétrie. On suppose $D \neq D'$, donc ce cas est exclu et alors $s(D) = D'$.

Soit alors $m \in \Delta$, p sa projection orthogonale sur D, p' sa projection orthogonale sur D', $s(p)$ est sur D', et comme la symétrie conserve les angles $s(\text{aff}(m,p)) = \text{aff}(m,p')$ car $s(m) = m$, donc $s(p) = p'$. Mais alors $||\overrightarrow{mp}|| = ||\overrightarrow{mp'}||$; (voir figure 5.12).

Réciproquement, si m est tel que $mp' = mp$, avec p et p' projections orthogonales de m sur D et D', par Pythagore dans les triangles rectangles amp et amp' on a $ap = ap'$, donc la droite $\text{aff}(a,m)$ est médiatrice du segment $[p,p']$ donc les points p et p' sont symétriques l'un de l'autre dans la symétrie orthogonale σ, d'axe $\delta = \text{aff}(a,m)$. Mais alors, (conservation déjà signalée des angles par les isométries) la droite δ fait des angles égaux avec D et D' car $\sigma(a) = a$, $\sigma(p) = p'$ donc $\sigma(D) = D'$. Il en résulte que δ est l'une des bissectrices Δ ou Δ', et que m est sur Δ ou sur Δ'. ■

Ce résultat avait été justifié, analytiquement en 4.43. Il est heureux de le retrouver.

5.13. POINTS COCYCLIQUES. — Soient deux points fixes a et b d'un cercle C de centre 0 et un point m variable sur C, distinct de a et de b.

On a $(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb}) = (\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{m0}) + (\overrightarrow{m0}, \overrightarrow{mb})$.

Soient α, β, γ les milieux des segments $[a,m]$, $[m,b]$ et $[a,b]$, (voir figure 5.13). Les médiatrices 0α de $[a,m]$ et 0β de $[m,b]$ sont axes de symétrie des triangles isocèles $m0a$ et $m0b$, donc on a les égalités d'angles de vecteurs :

$$(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{m0}) = -(\overrightarrow{am}, \overrightarrow{a0}) = (\overrightarrow{a0}, \overrightarrow{am}) \quad \text{et}$$
$$(\overrightarrow{m0}, \overrightarrow{mb}) = -(\overrightarrow{b0}, \overrightarrow{bm}) = (\overrightarrow{bm}, \overrightarrow{b0}) \quad \text{donc, (Chasles),}$$
$$(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb}) = (\overrightarrow{a0}, \overrightarrow{am}) + (\overrightarrow{bm}, \overrightarrow{b0})$$
$$= (\overrightarrow{a0}, \overrightarrow{b0}) + (\overrightarrow{b0}, \overrightarrow{am}) + (\overrightarrow{bm}, \overrightarrow{b0})$$
$$= (\overrightarrow{a0}, \overrightarrow{b0}) + (\overrightarrow{bm}, \overrightarrow{am}).$$

Or, pour $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ unitaires, la rotation qui envoie $\overrightarrow{u}$ sur $\overrightarrow{v}$ envoie aussi $-\overrightarrow{u}$ sur $-\overrightarrow{v}$, donc $(-\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Ici on en déduit que $(\overrightarrow{bm}, \overrightarrow{am}) = (\overrightarrow{mb}, \overrightarrow{ma}) = -(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb})$ et finalement, on a l'égalité :

5.14. $2(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb}) = (\overrightarrow{0a}, \overrightarrow{0b})$.

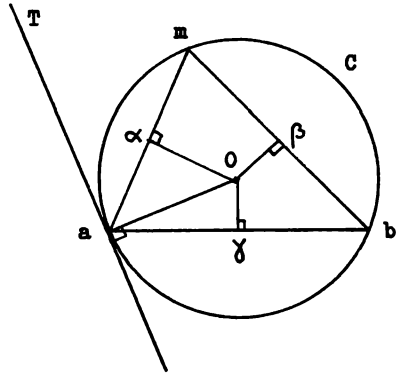


Fig. 5.13.

Comme $\frac{1}{2}(\overrightarrow{0a}, \overrightarrow{0b})$ est alors défini modulo π, la relation 5.14 définit un angle de droites. On a donc :

THÉORÈME 5.15. — *Si m décrit un cercle de centre 0, et si a et b sont deux points de C l'angle de droites (ma, mb) vérifie* $(ma, mb) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0a}, \overrightarrow{0b})$.

C'est le célèbre «l'angle inscrit» est la moitié de l'angle au centre. ■

REMARQUE 5.16. — *Si T est la tangente en a au cercle, on a également* $(T, ab) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0a}, \overrightarrow{0b})$.

Comme la tangente T en a au cercle C est perpendiculaire au rayon $0a$, on a :

$$\begin{aligned}(T, ab) &= (T, 0a) + (0a, 0\gamma) + (0\gamma, ab)\\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{0a}, \overrightarrow{0b}) + \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

puisque 0γ est axe de symétrie du triangle isocèle $a0b$, et finalement on a bien, modulo π,

$$(T, ab) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0a}, \overrightarrow{0b}).$$ ■

On peut alors établir le :

THÉORÈME 5.17. — *L'ensemble des points m du plan affine euclidien orienté tels que $(ma, mb) = \alpha$, a et b étant deux points donnés distincts, est la droite* $\mathrm{aff}(a, b)$ *si* $\alpha = 0$, *modulo* π ;
le cercle passant par a et b, et dont la tangente T en a vérifié $(T, ab) = \alpha$, si $\alpha \neq 0$, modulo π.

On suppose a et b distincts.

Pour m distinct de a et de b, avoir $(ma, mb) = 0$, (angle de droites) c'est avoir les vecteurs $\overrightarrow{ma}$ et $\overrightarrow{mb}$ liés, donc traduire l'appartenance de m à la droite $\mathrm{aff}(a, b)$. On peut convenir que pour a et b, on a encore $(aa, ab) = \alpha$ ou $(ba, bb) = \alpha$, bien que ces angles n'existent pas.

Pour $\alpha \neq 0$, soit T la droite passant par a, telle que $(T, ab) = \alpha$. La perpendiculaire en a à la droite T n'est pas parallèle à la médiatrice du segment $[a, b]$: soit 0 leur intersection : le cercle C de centre 0, passant par a et b admet T pour tangente en a, (voir figure 5.17).

Soit par ailleurs m tel que $(ma, mb) = \alpha, \alpha \neq 0(\pi)$. Les points a, b et m n'étant pas alignés, les médiatrices de $[m, a]$ et $[m, b]$ sont sécantes en $0'$, donc il existe un cercle C' circonscrit au triangle mab, ce cercle a une tangente T', en a, telle que $(T', ab) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{0'a}, \overrightarrow{0'b}) = (ma, mb) = \alpha$ d'après le Théorème 5.15 et la Remarque 5.16. Donc les droites T' et T sont confondues, et $0'$ qui est l'intersection de la perpendiculaire en a, à $T = T'$, et de la médiatrice de $[a, b]$, est en O, donc $C' = C$: le point m est donc sur C. Comme d'après 5.15, pour tout m de C on a $(ma, mb) = \alpha$, le Théorème 5.17 est justifié. ■

Là aussi, on peut convenir d'adjoindre ou non, les points a et b à l'ensemble cherché.

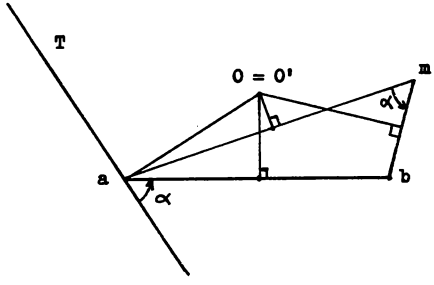


Fig. 5.17.

COROLLAIRE 5.18. — *Soient trois points non alignés du plan affine euclidien orienté, a, b, et c. Une condition nécessaire et suffisante pour que a, b, c, m soient cocycliques est que $(ma, mb) = (ca, cb)$.*

C'est évident, m étant sur le cercle circonscrit au triangle abc. ■

A partir du Théorème 5.17, on peut introduire la notion *d'arc-capable*, liée à la recherche des points m tels que $(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb}) = \theta$. On justifie que, si le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ est tel que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{ab}) = \theta$, (angle de vecteurs), l'ensemble des points m tels que l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{ma}, \overrightarrow{mb}) = \theta$ est l'arc du cercle, passant par a et b, de tangente en a dirigée par $\overrightarrow{u}$, situé dans le demi-plan ne contenant pas $\overrightarrow{u}$, (figure 5.18), justification laissée au lecteur.

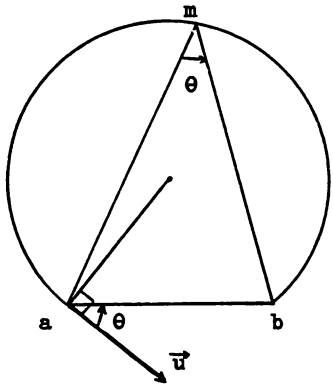


Fig. 5.18.

Voici d'autres résultats liés à ces mesures d'angles.

THÉORÈME 5.19. — *Les symétriques de l'orthocentre h d'un triangle abc, par rapport aux côtés sont sur le cercle circonscrit au triangle.*

Vous souvenez-vous de ce qu'est l'orthocentre d'un triangle? C'est le point d'intersection des trois hauteurs, et nous justifierons en 5.20 qu'elles se coupent. Pour l'instant on l'admet.

Soit ici h l'orthocentre du triangle abc inscrit dans le cercle C, (voir figure 5.19), et h' symétrique de h par rapport au côté bc :
on a $(hb, hc) = -(h'b, h'c)$ vu l'action d'une symétrie sur les angles.

Mais $(hb, hc) = (ac, ab)$, *angles à côtés perpendiculaires* : on justifie en décomposant en

$$\begin{aligned}(hb, hc) &= (hb, ac) + (ac, ab) + (ab, hc)\\ &= \frac{\pi}{2} + (ac, ab) + \frac{\pi}{2} = (ac, ab), \text{modulo } \pi.\end{aligned}$$

Donc $(h'b, h'c) = -(ac, ab) = (ab, ac)$: les points h', a, b, et c sont cocycliques d'après 5.18. ■

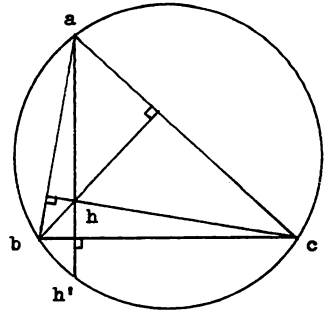


Fig. 5.19.

THÉORÈME 5.20. — *Soit un triangle abc du plan affine euclidien. Les trois hauteurs issues de a, b et c sont concourantes en un point appelé orthocentre du triangle.*

Soit g le centre de gravité du triangle, isobarycentre des sommets. Si m est le milieu de $[a, b]$, g est aussi le barycentre de $(m, 2)$ et $(a, 1)$ donc on a $2\overrightarrow{gm} + \overrightarrow{ga} = 0$, ou $\overrightarrow{ga} = -2\overrightarrow{gm}$.

Considérons l'homothétie de centre g, de rapport -2, notée φ. On a $\varphi(m) = a$, donc l'image par φ de la droite $\mathrm{aff}(b, c)$ est la parallèle à $\mathrm{aff}(b, c)$ passant par a. On obtient de même les images des droites $\mathrm{aff}(a, b)$ et $\mathrm{aff}(a, c)$, d'où leurs intersections, images de a, b et c, notées a', b', c', (voir figure 5.20).

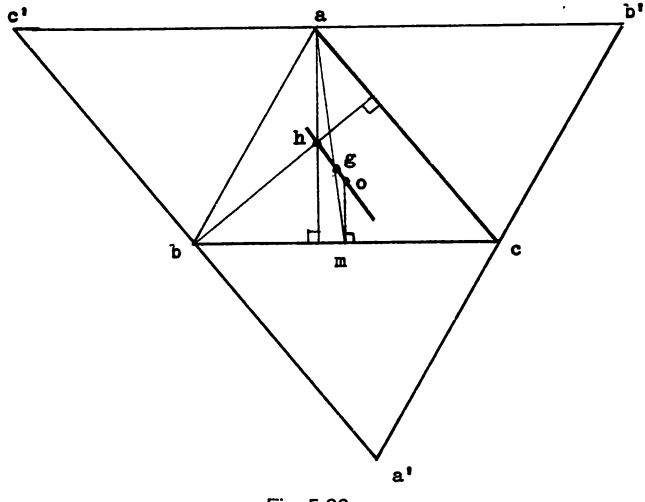


Fig. 5.20

Dans l'homothétie φ, la perpendiculaire en a à $b'c'$, (donc la hauteur issue de a pour le triangle abc), est l'image par φ de la perpendiculaire en m à bc, c'est-à-dire de la médiatrice de $[b, c]$.

Les images par φ des trois médiatrices du triangle abc sont donc ses trois hauteurs. Or les médiatrices se coupent en 0, centre du cercle circonscrit au triangle, (si 0 est l'intersection des médiatrices de $[a, b]$ et $[b, c]$ on a $0a = 0b$ et $0b = 0c$ d'où $0a = 0c$; donc 0 est sur la troisième médiatrice). Il en résulte que $\varphi(0)$ est sur les trois hauteurs, d'où l'existence de h, mais aussi la relation $\overrightarrow{gh} = -2\overrightarrow{g0}$. ■

On a donc :

COROLLAIRE 5.21. — *Dans ce triangle abc , l'orthocentre h, le centre de gravité g et le centre du cercle circonscrit* 0 *sont alignés et on a* $\overrightarrow{gh} = -2\overrightarrow{g0}$, *(autrement dit g est entre h et* 0, *aux deux tiers à partir de h.* ■

THÉORÈME 5.22. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point m soit sur le cercle C circonscrit à un triangle abc est que les projetés a', b' et c' de m sur bc, ca et ab soient alignés. Si c'est le cas, la droite* $D = \mathrm{aff}(a', b', c')$ *est appelée droite de Simson de triangle abc pour le point m.*

Si on projette un point m du plan en a' sur bc, b' sur ca et c' sur ab, comme $(c'a, c'm) = \dfrac{\pi}{2} = (b'a, b'm)$, les points a, m, c', b' sont cocycliques, donc on a également $(b'a, b'c') = (ma, mc')$, (voir figure 5.22).

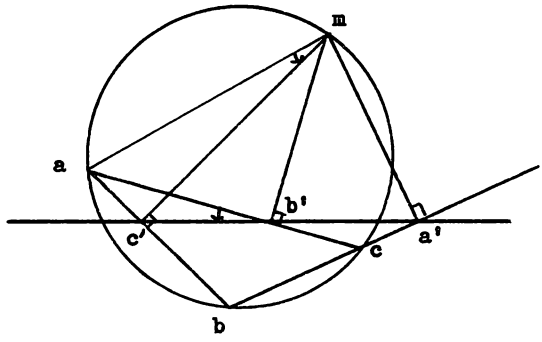


Fig. 5.22.

On a de même :

$$(b'c, b'a') = (mc, ma').$$

Or
$$(ma, mc') = (ma, ma') + (ma', mc')$$

et
$$(mc, ma') = (mc, ma) + (ma, ma').$$

Comme enfin les points m, b, c', a' sont cocycliques, (toujours $(c'b, c'm) = \frac{\pi}{2} = (a'm, a'b)$), on a l'égalité des angles de droites $(ma', mc') = (ba', bc') = (bc, ba)$ car il s'agit des mêmes droites. On en déduit donc que :

5.23. $\begin{cases} (b'a, b'c') = (ma, ma') + (ma', mc') = (ma, ma') + (bc, ba) \\ (b'c, b'a') = (mc, ma) + (ma, ma'). \end{cases}$ et

Si on suppose m sur le cercle C, $(mc, ma) = (bc, ba)$, d'où : $(b'a, b'c') = (b'c, b'a')$.

Mais alors, par Chasles, on a :

$$\begin{aligned}(b'c', b'a') &= (b'c', b'a) + (b'a, b'c) + (b'c, b'a') \\ &= (b'c', b'a) + 0 + (b'a, b'c') = (b'c', b'c') = 0\end{aligned}$$

car a, c et b' sont alignés. On a donc a', b' et c' alignés.

Si réciproquement a', b' et c' sont alignés, $b'c'$ et $b'a'$ définissent la même droite, ainsi que $b'a$ et $b'c$, (b' projeté orthogonal de b sur ac), donc $(b'a, b'c') = (b'c, b'a')$ et vu les égalités 5.23, on en déduit que $(mc, ma) = (bc, ba)$, donc que m est sur le cercle circonscrit au triangle a, b, c.

REMARQUE 5.24. — Cette justification suppose que les angles de droites considérés existent donc que m est distinct de a', b', c', c'est-à-dire que m n'est pas sur un des côtés des triangles, mais aussi, ($b' \neq a$ par exemple), que m n'est pas sur la perpendiculaire en a au côté ac. Il y aurait donc des cas particuliers à examiner, et c'est en cela que la géométrie traditionnelle est soit insatisfaisante si on ne les examine pas, soit alourdie. Par contre, si on remarque que le résultat est établi sur un ensemble partout dense du plan, et que la condition d'alignement des projetés sera continue par rapport aux coordonnées de m, alors la justification est valable sans restrictions. On évite la lourdeur des calculs analytiques pour traduire l'alignement pour m quelconque, mais l'existence de ces calculs, et leur côté continu permet d'étendre les résultats aux cas particulier.

Le paragraphe suivant va nous doter d'un autre outil analytique.

2. Nombres complexes et géométrie plane.

***5.25** Vocabulaire et notations*

Soit le plan affine P rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0; \vec{i}, \vec{j})$. Au point m de coordonnées x et y dans ce repère, on associe le nombre

complexe $z = x + iy$, appelé *affixe de* m et on établit ainsi une bijection entre P et $\mathbb{C}$.

La quantité $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ est le *module* de z, elle représente la longueur $0m$, et si $r \neq 0$, il existe un et un seul réel θ défini modulo 2π, qui soit tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$: d'après 5.7 et 5.1, θ est une mesure en radians de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{0m})$. On dit encore que θ est *l'argument* de z, et on note :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$, (voir tome 3, 13.52).

Voyons en quoi les affixes permettent de traduire les transformations usuelles.

THÉORÈME 5.26. — *Il existe un isomorphisme du groupe additif* $\mathbb{C}$ *sur le groupe* $\mathcal{T}$ *des translations du plan affine.*

Soit $a = \alpha + i\beta$ un nombre complexe, on lui associe la translation notée $t(a)$ qui à m de coordonnées x et y associe le point m' de coordonnées $x' = x + \alpha$ et $y' = y + \beta$.

Il est facile de vérifier que $a \rightsquigarrow t(a)$ est l'isomorphisme cherché, car si on a une translation $\tau_{\overrightarrow{V}}$ de vecteur $\overrightarrow{V} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$, il existe un et un seul nombre complexe $a = \alpha + i\beta$ tel que $\tau_{\overrightarrow{V}} = t(a)$, d'où l'aspect bijectif de t, et il est facile de vérifier que $t(a + b) = t(a) \circ t(b) = t(b) \circ t(a)$.

REMARQUE 5.27. — Du point de vue des affixes, $z \rightsquigarrow z + a$, (avec $a \in \mathbb{C}$) *représente une translation.*

THÉORÈME 5.28. — *Il existe un isomorphisme du groupe multiplicatif des nombres complexes de modules* 1, U, *sur le groupe des rotations de centre* 0.

En effet soit r_θ la rotation de centre 0, d'angle θ.

Si $m \neq 0$ a pour affixe $z = \rho e^{i\varphi}$, son image m' sera tel que $0m' = 0m = \rho$, et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{0m'}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{0m}) + (\overrightarrow{0m}, \overrightarrow{0m'}) = \varphi + \theta$,
d'où l'affixe $z' = \rho e^{i(\varphi+\theta)} = e^{i\theta}z$ de m', formule valable aussi si $z = 0$ car $r_\theta(0) = 0$, point d'affixe nulle.

5.29. Pour toute rotation, r_θ, il existe un et un seul nombre complexe de module 1, $e^{i\theta}$, tel que, pour les affixes, *la rotation se représente par* $z \rightsquigarrow e^{i\theta}z$.

Si on note f l'application de U dans le groupe des rotations de centre 0, qui à $e^{i\theta}$ associe la rotation r_θ d'angle θ, on vient de voir que f est bijective.

De plus $f(e^{i\theta}e^{i\theta'}) = f(e^{i(\theta+\theta')})$ est la rotation d'angle $\theta + \theta'$, donc la composée des rotations d'angles respectifs θ et θ' d'où l'aspect morphisme de f. ■

COROLLAIRE 5.30. — *La rotation de centre Ω d'affixe $a = \alpha + i\beta$, et d'angle θ, se représente par l'application $z \rightsquigarrow z' = a + e^{i\theta}(z - a)$, en ce qui concerne les affixes.*

Car $Z = z - a$ et $Z' = z' - a$ sont les affixes des points dans le repère orthonormé d'origine Ω déduit du précédent par translation.

Il n'y aucune raison de s'arrêter : passons aux similitudes directes. ■

THÉORÈME 5.31. — *Il y a un isomorphisme entre le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls, et celui des similitudes directes de centre* 0.

Une similitude directe de centre 0, de rapport positif λ étant le produit de l'homothétie de rapport λ, de centre 0, et d'une isométrie directe, donc d'une rotation, (voir 4.78), au point m d'affixe z, elle associe le point m' d'affixe $z' = \lambda e^{i\theta}z$, si θ est l'angle de la rotation, et il est immédiat de vérifier que l'application $g : \lambda e^{i\theta} \rightsquigarrow$ la similitude de rapport $\lambda > 0$, de rotation la rotation de centre 0 d'angle θ, est l'isomorphisme cherché. ■

COROLLAIRE 5.32. — *La similitude directe de centre Ω d'affixe $a = \alpha + i\beta$ de rapport $\lambda > 0$, de rotation d'angle θ, se représente par l'application $z \rightsquigarrow a + \lambda e^{i\theta}(z - a)$.* ■

Et les similitudes indirectes? Pour les avoir il nous faut caractériser les isométries indirectes, c'est-à-dire, (dimension 2, voir 4.78) les symétries droites.

THÉORÈME 5.33. — *La symétrie orthogonale par rapport à la droite D passant par* 0, *faisant l'angle de droite α avec la droite support de l'axe des abscisses se représente par $z \rightsquigarrow e^{2i\alpha}\overline{z}$.*

En effet si le point m d'affixe z donne le point m' d'affixe z', on a $||\overrightarrow{0m}|| = ||\overrightarrow{0m'}||$, et D est la bissectrice des vecteurs $\overrightarrow{0m}$ et $\overrightarrow{0m'}$, (figure 5.33), donc son angle polaire α, (défini modulo π) vérifie l'égalité $\alpha = \dfrac{\theta + \theta'}{2}$, (voir Théorème 5.10), d'où $\theta' = 2\alpha - \theta$ et $z' = |z|e^{2i\alpha}e^{-i\theta} = e^{2i\alpha}\overline{z}$. ■

COROLLAIRE 5.34. — *La symétrie orthogonale par rapport à une droite D passant par Ω d'affixe a, d'angle de droite α avec le support de l'axe des x se représente par $z \rightsquigarrow a + e^{2i\alpha}(\overline{z} - \overline{a})$.* ■

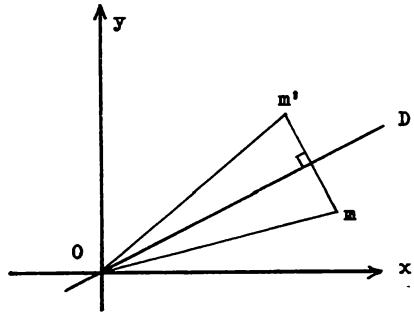


Fig. 5.33

Il en résulte qu'une similitude indirecte de centre Ω aura une représentation du type $z \rightsquigarrow a + \lambda e^{2i\alpha}(\overline{z} - \overline{a})$.

CONSÉQUENCE 5.35. — *Une transformation du type $z \rightsquigarrow az + b$, avec a et b complexes, $a \neq 0$, est une translation si $a = 1$, une similitude directe si $a \neq 1$; de même $z \rightsquigarrow a\overline{z} + b$ est une similitude indirecte si $a \neq 0$ et $|a| \neq 1$ ou la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation parallèle à l'axe de la symétrie si $|a| = 1$.*

Dans le premier cas, si $a = 1, f(z) = z + b$ représente la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe b, alors que pour a non nul et différent de 1, $f(z) = a(z + \frac{b}{a})$ est composée d'une translation et d'une similitude : c'est donc une similitude de rapport $|a|$, d'angle argument (a) de centre Ω d'affixe ω tel que $\omega = a\omega + b$ soit $\omega = \frac{b}{1-a}$.

Dans le deuxième cas, on a $f(z) = a(\overline{z} + \frac{b}{a}) = \overline{a(z + \frac{\overline{b}}{\overline{a}})}$, donc f est composée d'une translation, d'une symétrie et si $a \neq 1$, d'une similitude directe : il reste une similitude indirecte qui peut se réduire en fait à une symétrie orthogonale lorsque $|a| = 1$. En effet dans ce cas la similitude directe est une rotation de centre 0, donc un produit de deux symétries orthogonales $s_d \circ s_{d'}$ et on peut alors choisir pour d' la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

On retrouve cela en cherchant l'affixe ω du centre Ω de l'éventuelle similitude indirecte. On doit avoir $\omega = a\overline{\omega} + b$ donc aussi $\overline{\omega} = \overline{a}\omega + \overline{b}$, (n'oublions pas qu'une égalité complexe c'est deux égalités réelles, d'où le système : $\begin{cases} \omega - a\overline{\omega} = b \\ -\overline{a}\omega + \overline{\omega} = \overline{b} \end{cases}$

de déterminant $1 - |a|^2$. Pour $|a| \neq 1$, on a un et un seul point fixe, *d'où une similitude indirecte.* Si $|a| = 1$, en passant aux parties réelles et imaginaires, (en posant $\omega = x + iy$, $a = \cos\theta + i\sin\theta$ et $b = u + iv$), on a *soit une droite de points fixes* et dans ce cas on a une symétrie orthogonale, *soit pas de points fixes* et on a la composée d'une symétrie orthogonale et d'une translation de vecteur parallèle à l'axe de la symétrie.

Il est à remarquer que, dans les deux cas, pour $|a| = 1$, on retrouve les déplacements ou antidéplacements étudiés en 4.78. ■

L'utilisation des affixes se prête très bien à la **traduction analytique de l'inversion.** Commençons par une inversion de pôle 0 et de puissance k.

Le point m d'affixe $z \neq 0$, a pour image m', d'affixe z', tel que 0, m, m' soient alignés et $\overline{0m} \cdot \overline{0m'} = k$.

Pour $k > 0$, m et m' auront même argument, θ, et des modules r et r' tels que $r' = \dfrac{k}{r}$, d'où $z' = \dfrac{k}{r}e^{i\theta} = \dfrac{k}{re^{-i\theta}}$ soit $z' = \dfrac{k}{\overline{z}}$.

Pour $k < 0$, l'argument de m' est $\theta + \pi$ et le module $r' = \dfrac{|k|}{r}$, d'où $z' = \dfrac{|k|}{r}e^{i\theta}e^{i\pi} = \dfrac{-|k|}{re^{-i\theta}} = \dfrac{k}{\overline{z}}$ encore. D'où :

THÉORÈME 5.36. — *L'inversion de pôle* 0, *de puissance* k *se représente par l'application* $z \rightsquigarrow \dfrac{k}{\overline{z}}$, k *réel non nul.*

(Elle n'est définie que pour $z \neq 0$.) ■

COROLLAIRE 5.37. — *Soient* m'_1 *et* m'_2 *les images de* m_1 *et* m_2 *dans une inversion de pôle* 0 *et de puissance* k, *on a :*

$$m'_1m'_2 = \frac{|k|m_1m_2}{0m_1.0m_2}.$$

Ceci est valable dans n'importe quel espace préhilbertien réel, car en se plaçant dans un plan affine P contenant 0, m_1 et m_2, on pourra utiliser les affixes des points.

D'après 5.36, on a $z'_1 = \dfrac{k}{\overline{z}_1}$ et $z'_2 = \dfrac{k}{\overline{z}_2}$ d'où

$$\begin{aligned} m'_1m'_2 = |z'_1 - z'_2| &= |k||\frac{1}{\overline{z}_1} - \frac{1}{\overline{z}_2}| \\ &= |k||\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}| = \frac{|k||z_2 - z_1|}{|z_1||z_2|} = \frac{|k|m_1m_2}{0m_1.0m_2}. \end{aligned}$$ ■

Comme application de ce corollaire, je justifierai le Théorème de Ptolémée.

THÉORÈME 5.38. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère plan convexe abcd soit inscriptible dans un cercle est que le produit des diagonales soit égal à la somme des produits des côtés opposés.*

Le quadrilatère étant convexe, on appelle a, b, c, et d les sommets consécutifs donc le segment $[a, c]$ est dans le polytope (et oui, voir 3.41), $abcd$.

Soit C le cercle circonscrit au triangle abd et $\mathcal{I}$ une inversion de pôle a, de puissance $k > 0$. Elle transforme le cercle C en une droite D, (voir figure 5.38 et Corollaire 4.93), contenant b' et d', les inverses de b et d.

L'inversion étant involutive, le point c sera sur le cercle si et seulement si son inverse c' est sur la droite D, et la demi-droite dirigée par $\overrightarrow{ac}$ étant entre celles dirigées par $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ad}$, ce sera le cas si et seulement si c' est dans le segment $[b', d']$.

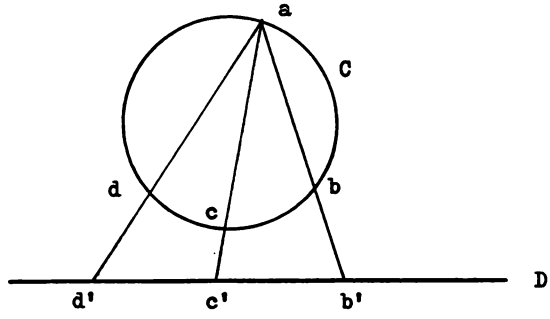


Fig. 5.38.

Mais ceci équivaut à l'égalité entre longueurs : $b'd' = b'c' + c'd'$,
soit, d'après le corollaire 5.37, à l'égalité $\dfrac{|k|bd}{ab.ad} = \dfrac{|k|bc}{ab.ac} + \dfrac{|k|cd}{ac.ad}$,
soit après simplification par $\dfrac{|k|}{ab.ac.ad}$ à $bd.ac = bc.ad + cd.ab$,
ce qui est bien l'égalité voulue. ■

5.39. *Pour achever ce paragraphe sur l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane, voyons à quoi correspond une application homographique* $f : z \rightsquigarrow \dfrac{az+b}{cz+d}$, *avec a, b, c, d complexes,* $c \neq 0$, $bc - ad \neq 0$.

Elle est définie pour $z \neq -\dfrac{d}{c}$, et donne une bijection de $\mathbb{C} - \{-\dfrac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{C} - \{\dfrac{a}{c}\}$ comme le montre la résolution de l'équation $\dfrac{az+b}{cz+d} = Z$, donc de $z(a - cZ) = dZ - b$.

On peut mettre $\dfrac{az+b}{cz+d}$ sous forme canonique, en écrivant :

$$f(z) = \frac{\frac{a}{c}(cz+d)+b-\frac{ad}{c}}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{c}},$$

et f est composée, sur son ensemble de définition de :

$z \rightsquigarrow z_1 = z + \dfrac{d}{c}$ qui est une translation t;

$z_1 \rightsquigarrow z_2 = \dfrac{1}{z_1} = \overline{(\dfrac{1}{\overline{z}_1})}$ qui est composée d'une inversion,

$(z_1 \rightsquigarrow \dfrac{1}{\overline{z}_1} = z_1')$

suivie d'une symétrie par rapport à $0x$, $z_1' \rightsquigarrow z_2 = \overline{z_1'}$, on note donc $s \circ i$ cette application;

puis $z_2 \rightsquigarrow z_3 = \dfrac{bc-ad}{c^2} z_2$ est une similitude directe σ;

et enfin $z_3 \rightsquigarrow f(z) = \dfrac{a}{c} + z_3$ correspond à une translation τ.

Cette décomposition $f = \tau \circ \sigma \circ s \circ i \circ t$, permet alors de suivre le cheminement d'une figure géométrique à travers toutes ces étapes, pour déterminer son image finale.

3. Relations métriques dans le triangle

La géométrie du triangle est très riche, non seulement parce qu'elle est très vieille, mais aussi parce qu'elle est fondamentale dans les plans affines qui sont précisément déterminés par des triangles, c'est-à-dire par la donnée de trois points affinement libres. Dans tout ce qui suit *on supposera les triangles «vrais», c'est-à-dire de sommets affinement libres*, donnés dans un plan affine euclidien.

5.40. *Premières relations métriques, ou applications du produit scalaire.* Soit dans le plan affine un triangle ABC, on note a, b et c les longueurs des côtés BC, CA et AB et α, β, γ les mesures (en radians, et appartenant à $[0, \pi]$) des angles en A, B, C du triangle, mesures définies à l'aide du produit scalaire. On a :

5.41.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

En écrivant $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et en calculant le carré scalaire de $\overrightarrow{BC}$ on a $\overrightarrow{BC^2} = \overrightarrow{AC^2} - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB^2}$ et, compte tenu de la définition de α, réel dans $[0, \pi]$ tel que $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}}{||\overrightarrow{AC}||||\overrightarrow{AB}||}$, on obtient :
$a^2 = b^2 - 2bc\cos\alpha + c^2$, c'est-à-dire la première relation, les autres s'en déduisant par permutation circulaire.

REMARQUE 5.42. — Si H est le projeté orthogonal de C sur $\mathrm{aff}(A, B)$, c'est-à-dire le pied de la hauteur issue de C, (voir figure 5.42), on a :

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overline{AH}.\overline{AB} = AH.AB \quad \text{si} \quad 0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$
$$= -AH.AB \quad \text{si} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \alpha < \pi$$

et la première relation s'écrit encore :

$$\boxed{CB^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overline{AB}.\overline{AH}}.$$

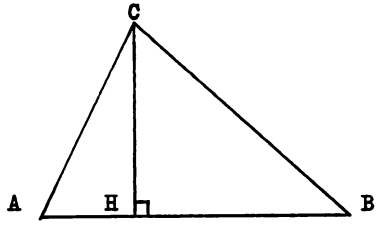


Fig. 5.42.

5.43. *Rayon du cercle circonscrit à un triangle.*

Soit Γ, le cercle de centre 0 circonscrit à un triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de A et D le point de Γ diamétralement opposé à A. Si le triangle n'est pas rectangle en B ou C, H est distinct de B et C, (figure 5.43.1 ou 5.43.2), si le triangle est rectangle en C par exemple, $H = C$ et $B = D$, (figure 5.43.3).

Dans les deux premiers cas, (triangle non rectangle en B ou C), les deux triangles rectangles ABD et AHC sont tels que les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{ACH}$ sont égaux, (A, B, C, D cocycliques) donc ont même sinus, d'où l'égalité

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} \text{ ou } AB.AC = AD.AH.$$

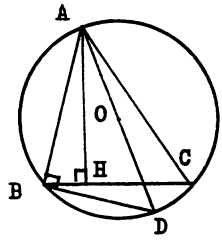


Fig. 5.43.1

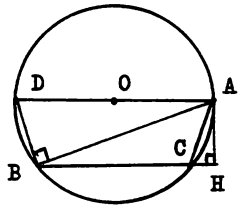


Fig. 5.43.2.

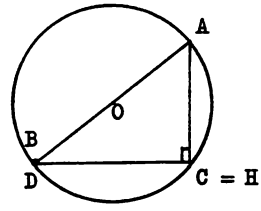


Fig. 5.43.3.

En notant R le rayon du cercle circonscrit, h la longueur AH, et a, b, c les longueurs des trois côtés, et en multipliant par $BC = a$ pour rétablir une symétrie entre les trois côtés, il vient $abc = 2Rha$, or l'aire S du triangle est $\frac{1}{2}ah$, d'où finalement :

5.44 $\boxed{R = \dfrac{abc}{4S}}$, avec S aire du triangle.

5.45 *Rayon du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits.*

Soit toujours un triangle ABC, les bissectrices intérieures, (demi-axes) Bz et Cz' sont sécantes car, en angle de droites orienté, on a, (modulo π),

$$\begin{aligned}(Bz, Cz') &= (Bz, BC) + (BC, CB) + (CB, Cz') \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (BC, CB) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) \neq 0.\end{aligned}$$

De plus, le point d'intersection I est dans l'intersection des deux secteurs angulaires (Bx, By) et (Cx', Cy'), donc dans le triangle ABC, (voir figure 5.45.1). Comme ce point I est alors équidistant de AB et BC et de BC et CA, il l'est de AB et de AC, il est donc sur la bissectrice intérieure At issue de A.

Nous venons de justifier que *les trois bissectrices intérieures sont concourantes en un point I intérieur au triangle, centre du cercle inscrit dans le triangle, c'est-à-dire tangent aux trois côtés.*

Soit alors la bissectrice extérieure issue de C, c'est-à-dire la droite D_c perpendiculaire à Cz' en C, (voir figure 5.45.1).

Cette droite D_c est parallèle à Bz si et seulement si Cz' est perpendiculaire à Bz, donc si et seulement si :

$(Bz, Cz') = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$, ce qui supposerait B, A et C alignés.

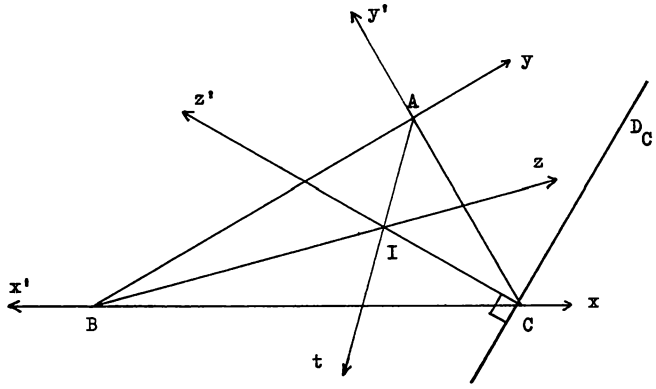


Fig. 5.45.1.

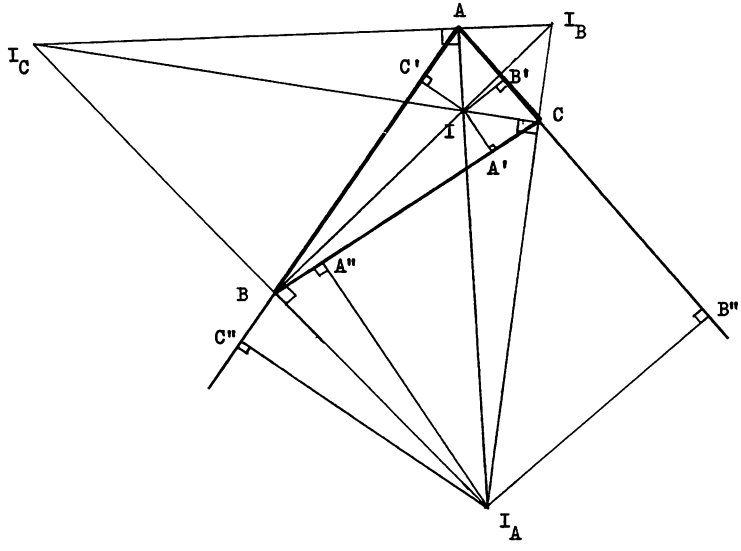


Fig. 5.45.2.

Ce n'est pas le cas donc *la bissectrice extérieure en C coupe les bissectrices intérieures issues de A et B en deux points notés I_A et I_B qui sont les centres de deux cercles, tangents aux trois côtés du triangle, extérieurs aux triangle. Ces cercles sont dits ex-inscrits au triangle, (voir figure 5.45.2).*

On a justifié l'existence de I_B, celle de I_C et I_A s'en déduit par symétrie des rôles joués.

Puis I_B étant sur la bissectrice (intérieure) issue de B et sur la bissectrice (extérieure) issue de C, il est équidistant de AB et BC d'une part, de BC et AC d'autre part donc il l'est de AB et de AC. Il est sur une des bissectrices issues de A. Si c'était la bissectrice intérieure de A, il serait en I, donc aussi sur la bissectrice intérieure de C, c'est exclu.

Finalement I_B est point de concours d'une bissectrice intérieure et de deux extérieures.

Et les relations métriques dans tout cela? J'y viens, j'y viens...

Appelons A', B' et C' les points de contact du cercle inscrit, γ et des côtés BC, CA et AB.

Comme on a $0 < (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) < \pi$, (on prend les déterminations des angles de vecteurs dans $[0, 2\pi]$ et celles des angles de droites dans $[0, \pi]$, le plan étant orienté dans le sens trigonométrique), vu la figure 5.45.2, on a $0 < (BC, BI) < \dfrac{\pi}{2}$, donc le projeté A' de I sur $\text{aff}(B, C)$ est sur la demi-droite orientée par $\overrightarrow{BC}$ issue de B. Mais il est aussi sur la demi-droite issue de C, orientée par $\overrightarrow{CB}$ car $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \in]0, \pi[$ aussi donc $(CI, CB) \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$.

Finalement, A' est entre B et C, de même B' est dans le segment $[C, A]$ et C' dans $[A, B]$.

Si on note $2p$ le périmètre du triangle ABC, on a alors :

$$\begin{aligned} 2p &= CB' + B'A + AC' + C'B + BA' + A'C, \\ &= 2(CA' + BC' + AC'), \end{aligned}$$

car $AB' = AC'$, $BA' = BC'$ et $CB' = CA'$.

Comme $BC' + C'A = BA = c$, on en déduit l'égalité :

5.46. *$CA' = p - c$, donc la distance d'un sommet au point de contact d'un côté issu de ce sommet et du cercle inscrit est égale au demi-périmètre diminué de la longueur du côté opposé.*

On appelle aussi A'', B'' et C'' les projetés de I_A, centre du cercle ex-inscrit dans l'angle A, sur BC, CA et AB respectivement.

Des considérations d'angles permettent de justifier que A'' est entre B et C, B'' et C'' étant extérieurs aux segments $[A, B]$ et $[A, C]$.

En effet, (toujours figure 5.45.2), on a :

$(BI_A, BC) = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$, donc A'' est sur la demi-droite issue de B, orientée par $\overrightarrow{BC}$, et de même sur la demi-droite issue de C, orientée par $\overrightarrow{CB}$, donc $A'' \in [B, C]$.

Puis $(BI_A, BA) = (BI_A, BI) + (BI, BA) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$

donc $(BI_A, BA) \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, d'où C'' extérieur au segment $[A, B]$.
De même B'' est extérieur au segment $[AC]$.

Mais alors, on a $AC'' = AB + BC'' = AB + BA''$, or $AC'' = AB''$
avec $AB'' = AC + CB'' = AC + CA''$. En ajoutant
on obtient $2AC'' = AB + AC + (BA'' + A''C) = 2p$,
d'où $AC'' = p = AB + BC'' = c + BA''$, donc

5.47. $BA'' = p - c = CA'$ *et dans la foulée* $AC'' = p$.
On en déduit que BC et $A''A'$ ont même milieu, d'où le :

THÉORÈME 5.48. — *La distance d'un sommet au point de contact d'un côté issu de ce sommet et du cercle ex-inscrit associé à ce sommet est égale au demi-périmètre. De plus chaque côté à même milieu que le segment d'extrémités les points de contact du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit associé au sommet opposé.* ■

Passons au calcul des rayons.
Si S est l'aire du triangle ABC, comme on a justifié que I est intérieur au triangle, on a :
$S = \text{aire}(IBC) + \text{aire}(ICA) + \text{aire}(IAB)$, d'où, avec r rayon du cercle inscrit,
$S = \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb + \frac{1}{2}rc$, et si $2p = a + b + c$, on a :

5.49. $\boxed{r = \frac{S}{p}}$,

Pour le cercle ex-inscrit associé au sommet A, on a de même :
$S = \text{aire}(I_ABA) + \text{aire}(I_ACA) - \text{aire}(I_ABC)$
$= \frac{1}{2}I_AC''.BA + \frac{1}{2}I_AB''.CA - \frac{1}{2}I_AA''.BC$,
donc, avec r_A, rayon du cercle ex-inscrit on a :
$S = \frac{1}{2}r_A(c + b - a) = \frac{1}{2}r_A(a + b + c - 2a) = r_A(p - a)$, d'où :

5.50. $\boxed{r_A = \frac{S}{p-a}, \text{ et de même } r_B = \frac{S}{p-b} \text{ et } \frac{S}{p-c}}$.

REMARQUE 5.51. — On justifiera, au corollaire 5.77, que les milieux de II_A, II_B, et II_C sont sur le cercle circonscrit a ABC, ainsi que les milieux de I_AI_B, I_BI_C, I_CI_A.

4. Problèmes sur les cercles

Nous venons de considérer les cercles inscrits, ex-inscrits, en 4.40 nous avons rencontré la notion de puissance d'un point par rapport à une sphère, et en 4.41 celle d'hyperplan radical, ce qui donnera, en dimension deux, l'axe radical de deux cercles, mais il y a encore du vocabulaire à préciser.

D'abord, rappelons que si C est un cercle du plan affine euclidien P, de centre a et de rayon r, d'équation $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma = 0$ dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$, pour un point m, de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$, l'expression $\mathcal{P}_C(m) = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma$ est la *puissance de m par rapport à C*, on a $\mathcal{P}_C(m) = d^2 - r^2$, avec $d = ||\overrightarrow{am}||$, et si une sécante issue de m coupe le cercle C en p et p' on a encore $\mathcal{P}_C(m) = \overline{mp} \,.\, \overline{mp'}$, (voir 4.40).

5.52. Soit C' un deuxième cercle de centre $a' \neq a$, de rayon r', l'ensemble des points m tels que $\mathcal{P}_C(m) = \mathcal{P}_{C'}(m)$ est une droite Δ, perpendiculaire à la droite $\mathrm{aff}(a, a')$, appelée *axe radical des deux cercles*, (voir 4.41).

Si les deux cercles sont distincts et concentriques, leurs rayons r et r' sont distincts donc $d^2 - r^2 \neq d'^2 - r'^2 = d^2 - r'^2$: il n'y a pas de points ayant même puissance par rapport aux deux cercles.

THÉORÈME 5.53. — *Soient trois cercles de centres non alignés dans le plan P, il existe un et un seul point ω ayant même puissance par rapport aux trois cercles, appelé centre radical des trois cercles.*

En effet, si a, a' et a'' sont les trois centres des trois cercles C, C et C'', les axes radicaux Δ de C et C' et Δ' de C' et C'' existent car les points a, a' et a'' sont deux à deux distincts, (sinon les trois sont alignés) et les droites $D = \mathrm{aff}(a, a')$ et $D' = \mathrm{aff}(a', a'')$ étant distinctes, Δ et Δ' qui leur sont orthogonales ne sont pas parallèles, et se coupent en ω.

Comme $\mathcal{P}_C(\omega) = \mathcal{P}_{C'}(\omega)$ et $\mathcal{P}_{C'}(\omega) = \mathcal{P}_{C''}(\omega)$, ce point ω a même puissance par rapport aux trois cercles, et Δ'', axe radical de C et C'' passe par ω .

Si un autre point ω' avait même puissance par rapport aux trois cercles, la droite $\mathrm{aff}(\omega, \omega')$ serait égale à Δ, Δ' et Δ'' ce qui est absurde, ces droites n'ayant pas même direction. ■

DÉFINITION 5.54. — *Deux cercles C et C' du plan affine euclidien P sont dits orthogonaux, s'ils sont sécants et si leurs tangentes en m, point d'intersection, sont perpendiculaires.*

Si a et a' sont les centres des cercles, la droite $\mathrm{aff}(a, a')$ est axe de symétrie pour les deux cercles qui sont alors sécants en deux points m et m' symétriques l'un de l'autre, et la propriété d'orthogonalité des tangentes est valable en m et en m', (figure 5.54).

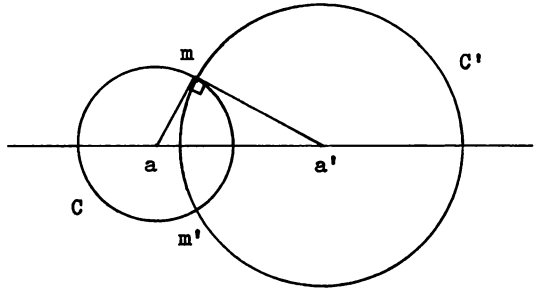


Fig. 5.54

De plus, avec m point commun aux deux cercles, les tangentes aux cercles étant les perpendiculaires aux rayons, les cercles sont orthogonaux si et seulement si les rayons am et am' le sont, ce qui par Pythagore, équivaut à $d^2 = r^2 + r'^2$ avec $d = ||\overrightarrow{aa'}||$.

Comme $d^2 - r^2$ est la puissance de a' par rapport à C, (et $d^2 - r'^2$ celle de a par rapport à C') on a le :

THÉORÈME 5.55. — *Deux cercles C et C' du plan affine euclidien P, de centres respectifs a et a', de rayons respectifs r et r' sont orthogonaux si et seulement si la puissance du centre d'un cercle par rapport à l'autre, est le carré de son rayon.* ■

Passons maintenant aux *faisceaux de cercles.*

DÉFINITION 5.56. — *Dans un plan affine euclidien, on appelle faisceau de cercles, tout ensemble de cercles ayant, deux à deux, le même axe radical, Δ, constant par rapport au couple de cercles.*

Comme nous avons rappelé (voir 5.52) que l'axe radical Δ de deux cercles de centres a et a' distincts est perpendiculaire à la droite $\mathrm{aff}(a, a')$, il en résulte que si un faisceau $\mathcal{F}$ de cercles existe, en fixant un cercle C de centre a, tout autre cercle C' de $\mathcal{F}$ est centré sur D, perpendiculaire à Δ passant par a, cette droite *est alors la ligne des centres du faisceau.*

C'est bien beau de définir une notion, encore faut-il que les êtres définis existent. C'est ce que nous allons voir en étudiant les types de faisceaux de cercles.

***5.57** Faisceau à points de base.*

Considérons deux cercles C et C' sécants en m et m' distincts. Ces deux points ayant une puissance nulle par rapport à C et C', l'axe radical de C et de C' est la droite $\Delta = \mathrm{aff}(m, m')$. Tout cercle C'' d'un faisceau $\mathcal{F}$ contenant C et C', aura Δ pour axe radical avec C. Comme $m \in C \cap \Delta$, $\mathcal{P}_C(m) = 0$, on doit donc avoir $\mathcal{P}_{C''}(m) = 0$ soit $m \in C''$, et de même m' sur C'', d'où C'' passe par m et m'. Mais réciproquement, deux cercles passant par m et m'ont $\Delta = \mathrm{aff}(m, m')$ pour axe radical. On a donc justifié le :

THÉORÈME 5.58. — *Soient deux points fixes m et m' du plan affine euclidien. L'ensemble $\mathcal{F}$ des cercles passant par m et m' est un faisceau de cercles dit à points de base, m et m'. L'axe radical du faisceau est $\Delta = \mathrm{aff}(m, m')$, et tout point a de la médiatrice D de $[m, m']$ est centre d'un cercle du faisceau : cette médiatrice est la ligne des centres.*

Seul le dernier point est à justifier, or tout cercle passant par m et m' est centré sur la médiatrice de $[m, m']$, notée D, et si a est sur D, le cercle de centre a de rayon $||\overrightarrow{am}||$ convient. ■

***5.59** Faisceau à points limites, ou de Poncelet.*

Soient deux cercles C et C' du plan euclidien, de centres a et a' distincts, de rayons r et r', d'axe radical Δ ne coupant pas C, (donc pas C' non plus, un point de $\Delta \cap C'$ ayant une puissance nulle pour C', serait aussi de puissance nulle pour C, donc sur C). On note D la droite $\mathrm{aff}(a, a')$ qui est perpendiculaire à Δ.

Soit h l'intersection de l'axe radical Δ et de la droite $D = \mathrm{aff}(a, a')$. Comme h est extérieur à C, on peut mener deux tangentes à C, issus de h, ht et ht', (voir figure 5.59), avec $ht^2 = ht'^2 =$ puissance de h par rapport à C.

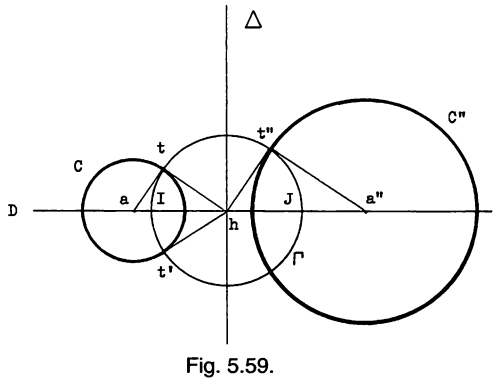


Fig. 5.59.

Mais alors, si un cercle C'', admet Δ pour axe radical avec C, il sera centré sur D, h sera extérieur à C'', et la puissance de h pour C'' valant ht^2, les points de contact des tangentes à C'' issues de h seront sur le cercle Γ de centre h, de rayon ht. De plus $\mathcal{P}_{C''}(h)$ étant le carré du rayon de Γ, les deux cercles Γ et C'' sont orthogonaux, d'après le Théorème 5.55.

Réciproquement, un cercle C_1 orthogonal à Γ, centré sur D admet pour axe radical avec C la perpendiculaire à D passant par h puisque $\mathcal{P}_C(h) = ht^2 = \mathcal{P}_{C_1}(h)$, toujours d'après le Théorème 5.55. Cet axe radical est Δ donc C_1 est dans le faisceau déterminé par C et C'. De plus, par a'' centre d'un cercle C'' du faisceau, on peut mener deux tangentes au cercle Γ.

Comme les points de D par lesquels on peut mener deux tangentes à Γ sont les points extérieurs au diamètre IJ, les points I et J sont appelés *points limites*, ou *points de Poncelet* du faisceau qui s'appelle *faisceau à points de Poncelet*, ou à *points limites*. On a donc :

THÉORÈME 5.60. — *Soient deux cercles C et C' non sécants non concentriques. Ils déterminent un faisceau de cercles, orthogonaux à un cercle fixe Γ et centrés sur la droite D joignant les centres de C et de C'. Si Δ est l'axe radical du faisceau et $h = D \cap \Delta$, Γ est centré en h, et coupe D en I et J, points limites du faisceau.*

***5.61** Faisceau de cercles tangents.*

Si deux cercles de centres distincts a et a', sont tangents en h, ce point est de puissance nulle pour les deux cercles C et C' qui ont donc pour axe radical la tangente commune Δ en h, (voir figure 5.61), puisque c'est la perpendiculaire en h à $\mathrm{aff}(a, a')$.

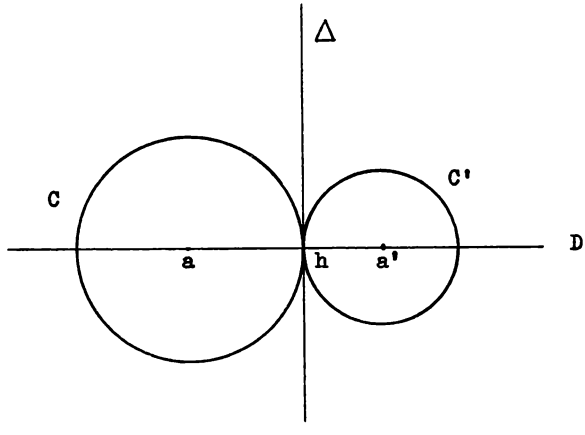


Fig. 5.61.

THÉORÈME 5.62. — *On appelle faisceau de cercles tangents l'ensemble de tous les cercles tangents deux à deux en un point fixe h donné. L'axe radical du faisceau est la tangente commune Δ en h à tous ces cercles, et l'ensemble des centres la droite D, perpendiculaire en h à Δ.*

En effet, tout cercle C'', tangent en h à C, (et à C') est centré sur $D = \text{aff}(a, a')$, et le point h est de puissance nulle pour C'' aussi, donc la tangente commune Δ à C et C', en h, est axe radical de C et C'', d'où C'' dans un faisceau de cercles, et tout cercle C_1 ayant Δ pour axe radical avec C passe par h, ($\mathcal{P}_{C_1}(h) = \mathcal{P}_C(h) = 0$ donc $h \in C_1$), et C_1 est centré sur la perpendiculaire en h à Δ, donc C_1 est tangent en h à C.

Comme tout point b de $D = \text{aff}(a, a')$ est centre du cercle de rayon $||\overrightarrow{bh}||$ du faisceau, la suite du théorème en découle. ■

Examinons maintenant ce qu'on appelle *des faisceaux conjugués*.

Soit un faisceau $\mathcal{F}$, de ligne des centres D et d'axe radical Δ, et cherchons s'il y a des cercles Γ orthogonaux à tous les cercles C de $\mathcal{F}$.

Si Γ est un tel cercle, de centre ω de rayon ρ, d'après le Théorème 5.55, la puissance de ω par rapport à un cercle C de $\mathcal{F}$ est ρ^2, elle est indépendante de C, donc ω est sur l'axe radical Δ de $\mathcal{F}$.

Or si ω est un point de Δ, extérieur à tous les cercles de $\mathcal{F}$, ce qui est toujours vrai si $\mathcal{F}$ est à points limites, ou ce qui correspond à ω extérieur au segment déterminé par les points de base, la puissance de ω par rapport à chaque cercle C de $\mathcal{F}$ est constante, positive, et si on la note ρ^2, le Théorème 5.55 nous permet de savoir que le cercle Γ de centre ω de rayon ρ est orthogonal à tout cercle de $\mathcal{F}$. On a donc :

THÉORÈME 5.63. — *Les cercles Γ orthogonaux à tous les cercles d'un faisceau $\mathcal{F}$ existent et forment un faisceau $\mathcal{G}$. La ligne des centres de l'un des faisceaux est l'axe radical de l'autre.*

Pour l'instant nous n'avons justifié que l'existence. Or, en prenant C, de centre a, dans le faisceau $\mathcal{F}$, comme C est à son tour orthogonal à tous les cercles Γ de la famille $\mathcal{G}$, la puissance de a pour chaque cercle Γ est constante et égale à r^2, r rayon de C. Mais alors a est sur l'axe radical de toute paire de cercles de $\mathcal{G}$, et ceci pour tout a centre d'un cercle C de $\mathcal{F}$: on a bien un axe radical commun pour toutes les paires de cercles de $\mathcal{G}$, et c'est la droite des centres de $\mathcal{F}$.

La symétrie de la notion de cercles orthogonaux, montre que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ jouent le même rôle l'un par rapport à l'autre. *Les deux faisceaux sont dits conjugués.* ■

COROLLAIRE 5.64. — *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux de cercles conjugués. Si $\mathcal{F}$ est à points limites u et v, $\mathcal{G}$ est à points de base u et v; si $\mathcal{F}$ est à points de base a et b, $\mathcal{G}$ est à points limites, a et b; enfin si $\mathcal{F}$ est formé de cercles tangents en a à la droite Δ, $\mathcal{G}$ est formé de cercles tangents en a à la perpendiculaire D à Δ.*

En effet, si $\mathcal{F}$ est à points limites u et v, les «cercles points» u et v, (cercles de centres u et v, de rayons nuls) sont dans le faisceau $\mathcal{F}$, donc les cercles de $\mathcal{G}$ étant orthogonaux à ceux de $\mathcal{F}$, la puissance de u, (et de v) par rapport aux cercles de $\mathcal{G}$ est égale à $0^2 = 0$, (toujours 5.55), ce qui prouve que les cercles de $\mathcal{G}$ passent par u et v d'où la nature du faisceau $\mathcal{G}$, à points de base, u et v.

Comme le faisceau conjugué de $\mathcal{G}$ est $\mathcal{F}$, le deuxième point du Théorème est vérifié.

Enfin si $\mathcal{F}$ est formé de cercles tangents en a à leur axe radical commun Δ, et de droite des centres D, le faisceau conjugué $\mathcal{G}$ aura pour axe radical D, pour droite des centres Δ et n'étant ni à points de base ni à points limites puisque $\mathcal{F}$ n'est ni à points limites, ni à points de base, on n'a pas le choix, $\mathcal{G}$ est formé de cercles tangents. ■

REMARQUE 5.65. — Si deux faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont conjugués, les cercles de l'un sont les trajectoires orthogonales des cercles de l'autre, (voir exemple 7.29).

DÉFINITION 5.66. — *On appelle réseau de cercles, dans un plan affine euclidien, toute famille $\mathcal{R}$ de cercles ayant trois à trois même centre radical, appelé centre radical du réseau.*

Cette définition nécessite l'extension de la définition de centre radical pour trois cercles C, C' et C'' de centres a, a' et a'' alignés, mais distincts.

Si alors il existe un point ω ayant même puissance pour les trois cercles, ω est sur les trois axes radicaux, Δ de C et C', Δ' de C' et C'' et Δ'' de C'' et C. Comme ces trois droites sont perpendiculaires à $D = \mathrm{aff}(a, a', a'')$ et ont un point commun ω, elles sont confondues et en fait C, C' et C'' sont trois cercles d'un faisceau $\mathcal{F}$ d'axe radical Δ. Dans ce cas, tout point de Δ joue le rôle de centre radical de trois cercles du faisceau. La condition a, a', a'' distincts est à imposer car, avec $a = a'$ par exemple et $\mathcal{P}_C(\omega) = \mathcal{P}_{C'}(\omega)$, avec r et r' rayons des cercles C et C', on a $\omega a^2 - r^2 = \omega a^2 - r'^2$ donc $r = r'$ et $C = C'$ en fait. On a donc :

THÉORÈME 5.67. — *Si trois cercles distincts sont à centres alignés, ils ont un centre radical si et seulement si ils appartiennent à un faisceau de cercles, et dans ce cas tout point ω de l'axe radical du faisceau est centre radical de trois cercles quelconques du faisceau.* ■

Avec cette extension de la définition de centre radical, on peut justifier le théorème suivant.

THÉORÈME 5.68. — *Un réseau de cercles est de l'un des trois types suivants :*
soit tous les cercles orthogonaux à un cercle fixe;
soit tous les cercles passant par un point fixe;
soit tous les cercles coupant un cercle fixe Γ *en deux points diamétralement opposés sur* Γ, *(ces cercles sont alors dits pseudo-orthogonaux à* Γ*).*

Supposons que $\mathcal{R}$ soit un réseau de centre radical ω. Ce point ω a même puissance pour tous les cercles C du réseau $\mathcal{R}$.

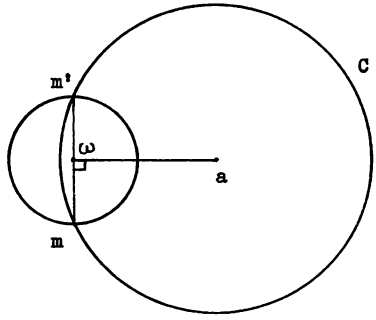


Fig. 5.68.

Si cette puissance p est strictement positive, avec $p = r^2$ et Γ cercle de centre ω de rayon r, les cercles C sont orthogonaux à Γ, (Théorème 5.55), et tous les cercles orthogonaux à Γ sont tels que, deux à deux, leur axe radical passe par ω qui a même puissance pour tous, donc trois à trois ils admettent ω pour centre radical : on a un réseau du premier type.

Dans ce cas on dit parfois que $\mathcal{R}$ *est un réseau à cercle directeur, le cercle* Γ.

Si $p = 0$, le point ω est sur chaque cercle C du réseau $\mathcal{R}$; et comme réciproquement tous les cercles passant par ω sont tels que, trois à trois, ω étant de puissance nulle pour ces trois cercles, il peut être considéré comme centre radical de ces trois cercles, on a bien un réseau du deuxième type, parfois appelé *réseau singulier*.

Enfin, si $p < 0$, posons $p = -r^2$ et soit le cercle Γ de centre ω de rayon r.

Soit C un cercle du réseau de centre a de rayon R, avec a et ω distincts, et soient m et m' les points d'intersection de Γ et du diamètre de Γ perpendiculaire à la droite $\mathrm{aff}(\omega, a)$ (voir figure 5.68).

On a $\mathcal{P}_C(\omega) = -r^2 = -\omega m^2$, mais dans le triangle rectangle en ω, $a\omega m$, on a aussi $\omega m^2 = am^2 - a\omega^2$.

Comme $\mathcal{P}_C(\omega) = \omega a^2 - R^2$, on en déduit finalement l'égalité $\omega a^2 - R^2 = \omega a^2 - am^2$, d'où $am = R$, et les points m et m' sont sur C qui coupe donc Γ en deux points diamétralement opposés sur Γ.

Comme réciproquement, si C coupe Γ en m et m' diamétralement opposés on aura $\mathcal{P}_C(\omega) = \overline{\omega m} \cdot \overline{\omega m'} = -r^2 = p$, dans ce cas le réseau $\mathcal{R}$ est formé de tous les cercles coupant Γ en deux points diamétralement opposés, ainsi que du cercle Γ puisque la puissance de ω pour Γ est aussi $-r^2 = p$. D'ailleurs ceci permet de considérer le cas de C dans le réseau $\mathcal{R}$ de centre $a = \omega$. ■

REMARQUE 5.69. — La pseudo-orthogonalité n'est pas, comme l'orthogonalité, une notion symétrique.

REMARQUE 5.70. — On pourrait parler de *faisceau de sphères*, en dimension $n \geqslant 3$, pour toute famille de sphères ayant deux à deux même hyperplan radical; *puis en dimension trois* de *réseau de sphères* pour les familles de sphères ayant trois à trois même axe radical; et de *complexe de sphères* pour les familles de sphères ayant quatre à quatre un même centre radical : il y a là matière à généralisation.

5.71. Revenons à des notions plus simples en étudiant les *homothétiques des cercles dans un plan.*

Soit un cercle C de rayon r, de centre a, et h_λ une homothétie (affine) de centre $\omega \neq a$, de rapport λ non nul, ω étant dans le plan du cercle C. Si a' est l'homothétique de a, et m' l'homothétique de m variant sur C, on a

$$||\overrightarrow{a'm'}|| = |\lambda| \, ||\overrightarrow{am}||$$

donc m' appartient au cercle C' de centre a', (aligné avec a et ω), de rayon $r' = |\lambda| r$.

Comme $(h_\lambda)^{-1} = h_{\lambda^{-1}}$, on vérifie que tout point m' de C' est l'homothétique, par h_λ de $m = h_{\lambda^{-1}}(m')$ qui est sur C; donc l'homothétique de C est C'.

Si $\omega = a$, $h_\lambda(C) = C'$ est le cercle de centre a, de rayon $|\lambda| r$.

Etudions maintenant le problème suivant, étant donnés deux cercles coplanaires C et C', de centres a et a', de rayons r et r', existe-t-il des homothéties donnant l'un des cercles comme image de l'autre?

D'abord un cas particulier : celui de C *et* C' *concentriques.*

Si a est le centre commun de C et de C', de rayons r et r', et si h_λ est une homothétie de centre ω, de rapport λ, telle que $h_\lambda(C) = C'$, il résulte de 5.71 que :

1) $h_\lambda(a) = a$, donc $a = \omega$ est centre de l'homothétie, et
2) $|\lambda| = \dfrac{r'}{r}$, d'où $\lambda = \dfrac{r'}{r}$ ou $-\dfrac{r'}{r}$. On a donc :

5.72. *Soient deux cercles C et C' de rayons r et r', de même centre a, il existe deux, (et deux seulement) homothéties telles que C' soit l'image de C, ce sont les homothéties de centre a et de rapport $\pm\dfrac{r'}{r}$.*

Considérons le cas général de deux cercles C et C', *non concentriques*, de centres a et a', de rayons r et r'.

Toujours d'après 5.71, une homothétie h_λ de centre ω de rapport λ, telle que $h_\lambda(C) = C'$, est telle que $\lambda = \pm\dfrac{r'}{r}$, et ω, aligné avec a et a' doit être tel que $\overrightarrow{\omega a'} = \lambda\overrightarrow{\omega a}$.

En considérant un axe de support $D = \mathrm{aff}(a, a')$, et avec x, α, α' abscisses de ω, a, a', ceci équivaut à avoir x tel que $\alpha' - x = \lambda(\alpha - x)$ soit $x(\lambda - 1) = \lambda\alpha - \alpha'$, d'où l'existence d'un et d'un seul x si $\lambda \neq 1$.

Si $|\lambda| = 1$, ce qui ne se produit que pour des cercles de même rayon, on a un centre d'homothétie négative, (pour $\lambda = -1$), avec $-2x = -\alpha - \alpha'$ soit $x = \dfrac{\alpha + \alpha'}{2}$, abscisse du milieu de $[a, a']$, mais pas de centre d'homothétie positive. Dans ce cas en fait, la translation de vecteur $\overrightarrow{aa'}$ envoie C sur C'.

Finalement, on a :

THÉORÈME 5.73. — *Soient deux cercles coplanaires C et C' de centres distincts a et a' et de rayons r et r'. Si $r \neq r'$, il existe deux homothéties de centres alignés avec a et a', de rapport $\dfrac{r'}{r}$ et $-\dfrac{r'}{r}$ envoyant C sur C'. Si $r = r'$, il ne reste que l'homothétie de rapport -1, de centre le milieu de $[a, a']$, (c'est une symétrie point en fait), ainsi que la translation de vecteur $\overrightarrow{aa'}$.* ■

REMARQUE : Si les cercles C et C' sont tangents en I, l'un des centres d'homothétie est en I.

5.74. *Etude des centres d'homothéties de trois cercles coplanaires pris deux à deux.*

On se donne trois cercles C_1, C_2, C_3, de centres distincts a_1, a_2 et a_3, de rayons distincts r_1, r_2, r_3.

Il existe deux homothéties envoyant C_1 sur C_2, l'une de rapport positif $\dfrac{r_2}{r_1}$, de centre noté p_3, et l'autre de rapport négatif $-\dfrac{r_2}{r_1}$, de centre noté n_3.

On note h_3^+ et h_3^- ces deux homothéties, on sait que n_3 et p_3 sont alignés avec a_1 et a_2, (Théorème 5.73).

De même on aura deux homothéties, h_1^+ et h_1^- envoyant C_2 sur C_3, leurs centres p_1 et n_1 sont alignés avec a_2 et a_3.

Enfin, on a deux homothéties h_2^+ et h_2^- envoyant C_3 sur C_1.

Comme $h_2^+ \circ h_1^-$, $h_2^+ \circ h_1^+$, $h_2^- \circ h_1^-$ et $h_2^- \circ h_1^+$ sont des homothéties envoyant C_2 sur C_1, ce sont les homothéties réciproques de h_3^+ ou de h_3^- donc elles ont pour centre n_3 ou p_3. Comme le centre de la composée de deux homothéties est aligné avec les deux centres, et que le rapport est le produit des rapports, on en déduit que

n_3 est aligné avec p_2 et n_1, et aussi n_2 et p_1 ; et

p_3 est aligné avec p_2 et p_1, et aussi n_1 et n_2, (voir figure 5.74).

On en déduit donc que

THÉORÈME 5.75. — *Soient trois cercles de centres et de rayons distincts. Les six centres d'homothéties de ces cercles pris deux à deux sont alignés trois à trois de façon que pour chaque triplet aligné il y ait zéro ou deux centres d'homothétie négative.*

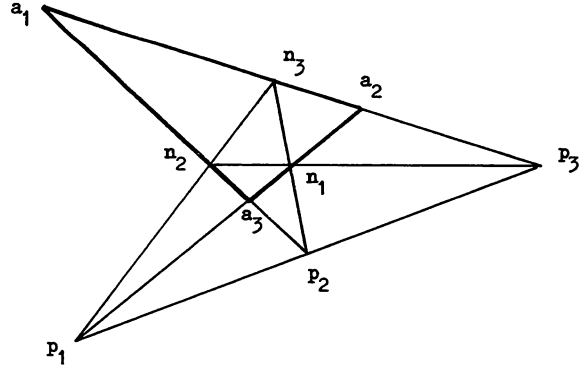


Fig. 5.74.

5. Quelques théorèmes glanés au fil des siècles

Cercle d'Euler d'un triangle, ou cercle des neuf points.

THÉORÈME 5.76. — *Dans un triangle, les trois milieux des côtés, les trois pieds des hauteurs, les trois milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets sont sur un même cercle appelé cercle d'Euler, (ou des neuf points) du triangle, centré au milieu du segment joignant l'orthocentre au*

centre du cercle circonscrit au triangle, de rayon la moitié du rayon du cercle circonscrit.

Le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle d'Euler, le centre de gravité et l'orthocentre sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler du triangle.

Soit un triangle abc inscrit sur le cercle C de centre o de rayon R, a', b', c' les milieux des côtés bc, ca et ab, g le centre de gravité, h l'orthocentre du triangle, h_a, h_b et h_c les pieds des hauteurs issues de a, b, c respectivement, (figure 5.76).

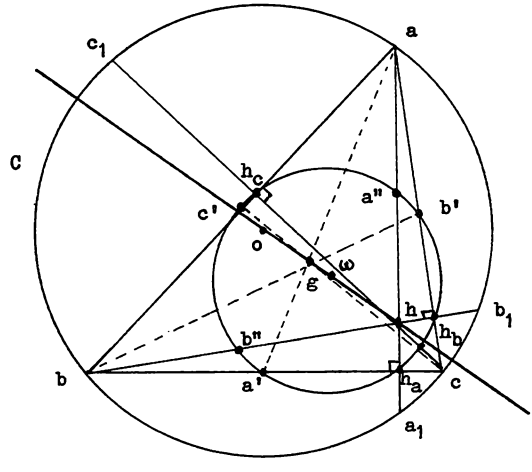


Fig. 5.76

Par l'homothétie de centre le centre de gravité g, et de rapport $-\frac{1}{2}$, le triangle abc donne le triangle $a'b'c'$, et la hauteur ah issue de a donne la perpendiculaire en a' au côté bc puisque l'homothétique d'une droite lui est parallèle, donc l'orthocentre de abc a pour homothétique le point de concours des médiatrices de ce triangle, c'est-à-dire le centre o du cercle circonscrit, d'où l'égalité $\overrightarrow{go} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{gh}$, et l'alignement de g, o et h.

Par cette homothétie, le cercle circonscrit, C donne un cercle Γ, centré en ω tel que $\overrightarrow{g\omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{go}$, (donc g, o, ω sont alignés), et de rayon $\frac{R}{2}$.

De plus
$$\overrightarrow{h\omega} = \overrightarrow{hg} + \overrightarrow{g\omega} = 2\overrightarrow{go} - \frac{1}{2}\overrightarrow{go} = \frac{3}{2}\overrightarrow{go}, \text{ et}$$
$$\overrightarrow{ho} = \overrightarrow{hg} + \overrightarrow{go} = 2\overrightarrow{go} + \overrightarrow{go} = 3\overrightarrow{go}$$

donc
$$\overrightarrow{h\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ho} :$$

ω est le milieu de $[h, o]$, et les points h, ω, g, o sont alignés, (car affinement liés).

Le cercle C passe par a, b, c donc Γ passe par a', b', c', les milieux des côtés.

Comme $\overrightarrow{h\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ho}$, dans l'homothétie de centre h et de rapport positif $\frac{1}{2}$ cette fois, le cercle C donne encore Γ, (en fait g et h sont les deux centres des homothéties envoyant C sur Γ, voir Théorème 5.73).

Dans cette homothétie, les points a, b, c de C donnent les milieux a'', b'' et c'' des segments $[h, a]$, $[h, b]$, et $[h, c]$, qui sont sur Γ.

Enfin, comme les symétries a_1, b_1 et c_1, de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle sont sur C, (Théorème 5.19), les milieux h_a, h_b et h_c de $[h, a_1]$, $[h, b_1]$ et $[h, c_1]$, c'est-à-dire les pieds des hauteurs, sont également sur Γ d'où nos neuf points sur Γ. ■

COROLLAIRE 5.77. — *Dans un triangle, les milieux des segments joignant les centres des cercles tangents aux trois côtés sont sur le cercle circonscrit au triangle.*

Reprenons les notations introduites en 5.45. Soit un triangle abc inscrit dans le cercle C de centre o, i le centre du cercle inscrit et i_a, i_b, i_c les centres des cercles ex-inscrits. Comme les bissectrices intérieure et extérieure en a sont perpendiculaires, $i_a i$ est la hauteur issue de i_a dans le triangle i_a, i_b, i_c donc i est l'orthocentre de i_a, i_b, i_c et a, b, c sont les pieds des hauteurs, il en résulte que C est le cercle d'Euler de i_a, i_b, i_c, il passe donc par les milieux des côtés $[i_a, i_b]$, $[i_b, i_c]$ et $[i_c, i_a]$ de ce triangle, mais aussi par les milieux des segments $[i, i_a]$, $[i, i_b]$ et $[i, i_c]$, (voir figure 5.77), d'où le corollaire. ■

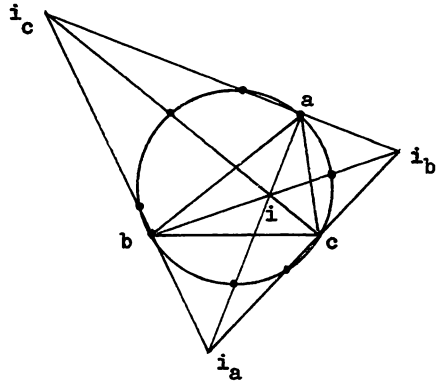


Fig. 5.77.

Il n'est pas facile de terminer un livre, car aussi bizarre que cela paraisse, c'est par ce chapitre que s'achève la rédaction de ce livre de géométrie. Et ce matin, je me suis dit, je vais leur faire le Théorème de Feuerbach pour montrer comment l'inversion donne des résultats. Et au moment de rédiger, patatrac! Il me manque des résultats intermédiaires, de ceux qui s'établissaient sans problème dans le temps jadis où on faisait de la géométrie. Alors, je dois les établir. Mais au préalable, comme chaque matin de vacances une marche avec mon épouse s'impose.

J'ai eu raison de faire une pause. Nous avons trouvé des girolles, et comme légume d'accompagnement du sauté de veau c'est très bon.

Revenons à Feuerbach, et commençons par établir un «*cas de similitude*» des triangles. Vos parents et grands parents ont connu cela, même si on n'en parle plus beaucoup.

THÉORÈME 5.78. — *Soient deux triangles abc et $a'b'c'$ du plan affine euclidien orienté tels que les angles de triangles $\hat{a}$ et $\hat{a}'$ soient égaux, ainsi que $\hat{b}$ et $\hat{b}'$ puis $\hat{c}$ et $\hat{c}'$. Alors les triangles sont semblables.*

Ce qu'on appelle l'angle du triangle $\hat{a}$ est la valeur absolue de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$.

Rappelons que parmi les similitudes, figurent les translations et les isométries affines, (voir remarque 4.99). Soit donc la translation t qui envoie a' sur a, puis la rotation r d'angle $(\overrightarrow{a'b'}, \overrightarrow{ab})$, de centre a. Si $\sigma = r \circ t$, et si on note a_1, b_1 et c_1 les images de a', b' et c' par σ, on aura $a_1 = a$, et $\overrightarrow{a_1b_1}$ et $\overrightarrow{ab}$ positivement liés.

Comme $\hat{a} = \hat{a}' = \hat{a}_1$, on aura alors :

soit $(\overrightarrow{ab_1}, \overrightarrow{ac_1}) = (\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ et $\overrightarrow{ac_1}$ sera positivement lié à $\overrightarrow{ac}$, (figure 5.78.1);

soit $(\overrightarrow{ab_1}, \overrightarrow{ac_1}) = -(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$, (figure 5.78.2), mais alors, le symétrique du triangle $a_1b_1c_1$ par rapport à la droite $\mathrm{aff}(a_1, b_1)$ donne un triangle $a_1b_1c_1'$, semblable à $a'b'c'$ car la symétrie est une similitude, avec :

$(\overrightarrow{ab_1}, \overrightarrow{ac'_1}) = (\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac})$ et on est ramené au premier cas.

On achève la justification sur la figure 5.78.1.

L'égalité $\hat{b} = \hat{b}' = \hat{b}_1$ se traduit alors par l'égalité d'angles de vecteurs $(\overrightarrow{bc}, \overrightarrow{ba}) = (\overrightarrow{b_1c_1}, \overrightarrow{b_1a_1}) = (\overrightarrow{b_1c_1}, \overrightarrow{ba})$ puisque $\overrightarrow{ba}$ et $\overrightarrow{b_1a_1}$ sont positivement liés, donc les droites $\mathrm{aff}(b, c)$ et $\mathrm{aff}(b_1, c_1)$ sont parallèles, et par Thalès, on a $\dfrac{\overline{ab}}{\overline{ab_1}} = \dfrac{\overline{ac}}{\overline{ac_1}} = \lambda$.

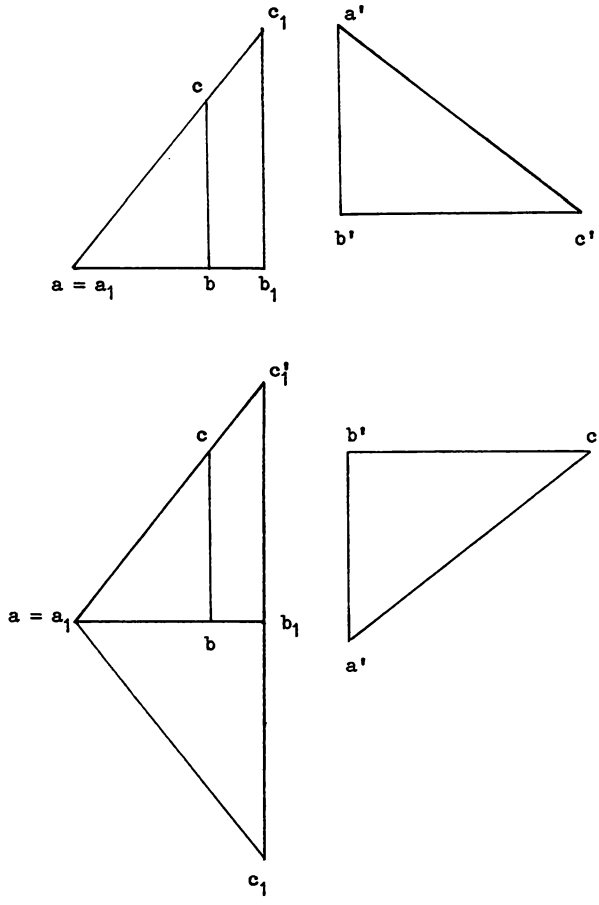


Fig. 5.78.1. et Fig. 5.78.2.

Mais alors, l'application linéaire définie par $\overrightarrow{ab_1}$ donne $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{ac_1}$ donne $\overrightarrow{ac}$ est telle que $\overrightarrow{ab} = \lambda \overrightarrow{ab_1}$ et $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{ac_1}$: c'est une homothétie, donc finalement on est passé de $a'b'c'$ au triangle abc par la composée d'une translation, d'une rotation, (peut-être d'une symétrie droite) et d'une homothétie, donc par une similitude. ■

COROLLAIRE 5.79. — *Si deux triangles abc et $a'b'c'$ du plan affine euclidien sont tels que* $\hat{a} = \hat{a}', \hat{b} = \hat{b}'$, *alors* $\dfrac{a'b'}{ab} = \dfrac{a'c'}{ac} = \dfrac{b'c'}{bc}$.

D'abord $\hat{c} = \pi - (\hat{a} + \hat{b}) = \pi - (\hat{a}' + \hat{b}') = \hat{c}'$.

D'après le Théorème 5.78, les triangles sont semblables, si λ est le rapport de la similitude, on a alors, (voir Théorème 4.96),

$$\frac{a'b'}{ab} = \frac{a'c'}{ac} = \frac{b'c'}{bc} = |\lambda|.$$

■

COROLLAIRE 5.80. — *Soit un triangle abc, i le pied de la bissectrice intérieure issue de a, on a* $\dfrac{ib}{ic} = \dfrac{ab}{ac}$.

Soit C le cercle circonscrit au triangle abc, et i' le milieu de l'arc de C limité par b et c, ne contenant pas a, (figure 5.80) : i' est l'intersection de cet arc et de la médiatrice du segment $[b, c]$, axe de symétrie pour le cercle et pour $[b, c]$.

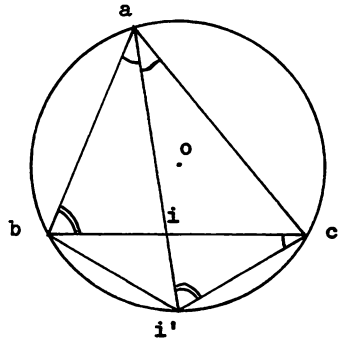


Fig. 5.80.

Les propriétés d'angles inscrits donnent :

$(\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ai'}) = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{ob}, \overrightarrow{oc}) = (\overrightarrow{ai'}, \overrightarrow{ac})$, donc ai' est la bissectrice issue de a.

Les triangles abi et $ci'i$ sont semblables, ($\hat{a} = \hat{c}$ et $\hat{b} = \hat{i}'$ comme angles inscrits), donc

$$\frac{ab}{ci'} = \frac{bi}{i'i} \quad \text{et} \quad ib = \frac{ii'}{ci'} \cdot ab.$$

De la même façon les triangles aci et $bi'i$ sont semblables et

$$\frac{ac}{bi'} = \frac{ci}{i'i} \quad \text{donc} \quad ic = \frac{i'i}{bi'} \cdot ac.$$

Comme $bi' = ci'$, en faisant le rapport on obtient bien l'égalité $\dfrac{ib}{ic} = \dfrac{ab}{ac}$. ■

COROLLAIRE 5.81. — *Soit un triangle abc non isocèle en a. Le pied, i_a, de la bissectrice extérieure issue de a est tel que* $\dfrac{i_a b}{i_a c} = \dfrac{ab}{ac}$.

Accrochez-vous bien, (figure 5.81). D'abord i_a existe car la bissectrice extérieure n'est pas parallèle à $\mathrm{aff}(b,c)$, le triangle étant non isocèle en a.

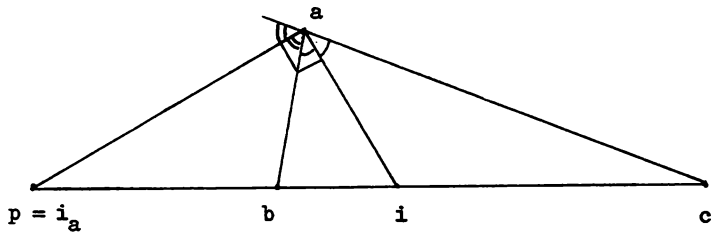


Fig. 5.81.

Le cercle de diamètre ii_a passe par a, car les bissectrices intérieures et extérieures en a sont perpendiculaires.

Le rapport $\dfrac{ib}{ic}$ vaut $\dfrac{ab}{ac}$, (corollaire 5.80). Or on a vu, (corollaire 4.49 bis), que l'ensemble des points m du plan tels que $\dfrac{mb}{mc} = cte \neq 1$ est un cercle centré sur $\mathrm{aff}(b,c)$.

Ici, le cercle Γ, ensemble des points m tels que $\dfrac{mb}{mc} = \dfrac{ab}{ac}$ passe par a, par i et admet la droite $\mathrm{aff}(b,c)$ comme droite passant par son centre : si elle coupe Γ en p, on aura $\widehat{pai} = \dfrac{\pi}{2}$, donc $...p = i_a$, et $\dfrac{i_a b}{i_a c} = \dfrac{ab}{ac}$. ■

REMARQUE 5.82. — Nous avons justifié, en 5.45, que la bissectrice intérieure coupe le segment $[b,c]$, donc i est entre b et c. Or, en prenant un axe δ de support $\mathrm{aff}(b,c)$, et en appelant β et γ les abscisses de b et c, si on cherche les points m d'abscisse x sur δ, tels que $\dfrac{mb}{mc} = \lambda = \dfrac{ab}{ac}$, on doit résoudre l'équation du second degré

$$(\beta - x)^2 - \lambda^2(\gamma - x)^2 = 0,$$

soit
$$(1-\lambda^2)x^2 - 2(\beta - \lambda^2\gamma)x + \beta^2 - \lambda^2\gamma^2 = 0.$$

En notant $T(x)$ ce trinôme, (on suppose $\lambda \neq 1$ car le triangle n'est pas isocèle en a), on a $T(\beta) = -\lambda^2(\gamma - \beta)^2 < 0$ et $T(\gamma) = (\beta - \gamma)^2 > 0$: les deux valeurs β et γ sont l'une à l'extérieur et l'autre à l'intérieur des

racines, x' et x'' abscisses de i et i_a, ce qui revient ici à dire que i_a est à l'extérieur du segment $[b, c]$. On a donc

$\frac{\overline{i_a b}}{\overline{i_a c}} = -\frac{\overline{ib}}{\overline{ic}} = \frac{ab}{ac}$: on disait jadis que les points b, c, i et i_a *sont en division harmonique.*

Nous pouvons maintenant justifier le *Théorème de Feuerbach.*

THÉORÈME 5.83. (de Feuerbach) — *Le cercle d'Euler d'un triangle est tangent au cercle inscrit et aux trois cercles ex-inscrits de ce triangle.*

Soit donc un triangle abc, de cercle circonscrit C de centre o, T la tangente en a au cercle C. Soient par ailleurs i et i_a les centres des cercles inscrit et ex-inscrit dans l'angle $\hat{a}$, situés sur la bissectrice intérieure issue de a qui coupe $[b, c]$ en i', (figure 5.83). Soient enfin α et α' les points de contact de aff(b, c) et du cercle inscrit et ex-inscrit respectivement, on a vu, (Théorème 5.48), que $[b, c]$ et $[\alpha, \alpha']$ ont même milieu, m.

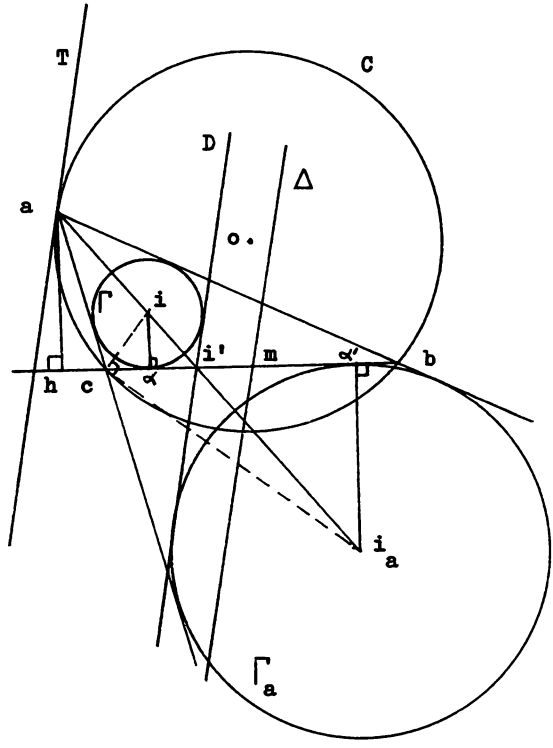


Fig. 5.83.

Les cercles inscrit, Γ, et ex-inscrit Γ_a, ont une tangente commune, $\mathrm{aff}(b,c)$, donc ils en ont une deuxième, D, symétrique de $\mathrm{aff}(b,c)$ par rapport à leur ligne des centres $\mathrm{aff}(i,i_a)$.

Un peu d'angles pour commencer.

On a $(T,ac) = (ba,bc)$, (tangente en a et angle inscrit pour le cercle C, voir Théorème 5.17); puis :

$(ac,ai) = (ai,ab)$, (une bissectrice, cela fait des angles égaux, non?); enfin $(i'i,i'b) = (D,i'i)$, puisque $i'i$ est axe de symétrie pour les deux tangentes à Γ issues de i'.

Finalement, on a :

$$\begin{aligned}(T,D) &= (T,ac) + (ac,ai) + (ai,D);\\ &= (ba,bc) + (ai,ab) + (i'i,D);\\ &= (ai,ab) + (ba,ab) + (ab,bc) + (i'b,i'i);\\ &= (ai,bc) + \pi + (bc,ai) = 0 \quad \text{modulo} \quad \pi;\end{aligned}$$

donc *les droites T et D sont parallèles.*

Un peu de métrique maintenant.

Les droites ci et ci_a sont bissectrices intérieures et extérieures en C, donc, dans le triangle aci', on a $\dfrac{\overline{i_a a}}{\overline{i_a i'}} = -\dfrac{\overline{ia}}{\overline{ii'}} = k$ avec $k = \dfrac{ca}{ci'}$, (remarque 5.82).

Si on projette orthogonalement les points a, i', i et i_a sur $\mathrm{aff}(b,c)$ en h, i', α et α' en fait, par Thalès, on a encore :

$$\frac{\overline{\alpha' h}}{\overline{\alpha' i'}} = -\frac{\overline{\alpha h}}{\overline{\alpha i'}}.$$

Traduisons cette égalité, en prenant un axe de support $\mathrm{aff}(b,c)$, d'origine m, et en notant x et y les abscisses de h et i' respectivement, t celle de α, (donc $-t$ celle de α'). On a $(x+t)(y-t) = -(x-t)(y+t) = (t-x)(y+t)$, ce qui après développement et simplification, conduit à $xy = t^2$, soit à l'égalité :

$$\boxed{\overline{mi'} \cdot \overline{mh} = m\alpha^2 = m\alpha'^2}.$$

Concluons. En supposant d'abord le triangle non isocèle en a, la médiane issue de a n'est pas bissectrice, ce qui équivaut à $m \neq i'$.

Soit $\mathcal{I}$ l'inversion de pôle m, de puissance $m\alpha^2$.

Les cercles Γ et Γ_a sont invariants par $\mathcal{I}$.

La tangente commune D à Γ et Γ_a va donner un cercle, passant par m, pôle d'inversion, de tangente en m la parallèle Δ à D passant par m; ce cercle passera aussi par h inverse de i'. Or le cercle d'Euler, passe par h et m, et comme il est homothétique du cercle circonscrit C au triangle par l'homothétie de centre le centre de gravité et de rapport $-\dfrac{1}{2}$, (voir Théorème

5.76), sa tangente en m homothétique de a, est l'homothétique de T, c'est donc la parallèle à T passant par m : c'est Δ.

Mais le cercle d'Euler d'une part, et le cercle inverse de D d'autre part passent tous les deux par h et m, et ayant même tangente en m sont confondus.

Comme D est tangente à Γ et Γ', $\mathcal{I}(D)$ est tangent à $\mathcal{I}(\Gamma)$ et $\mathcal{I}(\Gamma_a)$, *soit le cercle d'Euler tangent à* Γ *et* Γ_a.

Justifions pourquoi l'inversion «conserve le contact». Si on a un arc de courbe, localement paramétré par $\overrightarrow{om}(t) = \overrightarrow{F(t)} = (x(t), y(t))$, et si $\mathcal{I}$ est une inversion de pôle o, l'arc image est paramétré par $\mathcal{I}(F(t))$; si F est dérivable, $\mathcal{I} \circ F$ l'est et

$(\mathcal{I} \circ F)'(t) = d\mathcal{I}(F(t))(\overrightarrow{F'(t)})$; avec $d\mathcal{I}(F(t))$ qui est une similitude, (Théorème 4.83), application linéaire qui conserve les angles. Si deux arcs ont un point commun, et des vecteurs dérivés non nuls en ce point, leurs arcs images auront, au point image, des vecteurs tangents faisant le même angle.

En particulier si les arcs sont tangents, et si leur point de contact est régulier sur chacun d'eux, les arcs images seront aussi tangents.

Il nous reste à considérer le cas de abc isocèle en a. Mais alors le cercle d'Euler est centré sur la médiane (et bissectrice) issue de a, et il passe par $i' = m = \alpha = \alpha'$, avec les notations de la figure 5.83. Les trois cercles, inscrit, ex-inscrit dans l'angle $\hat{a}$ et d'Euler sont tangents car tangents en m à $\mathrm{aff}(b, c)$. ■

Pour finir, une relation métrique dans le triangle, qui nous donnera le Théorème de Morley.

THÉORÈME 5.84. — *Soit un triangle abc de cercle circonscrit C, de rayon R. On a :*

$$\frac{\alpha}{\sin \hat{a}} = \frac{\beta}{\sin \hat{b}} = \frac{\gamma}{\sin \hat{c}} = 2R,$$

en notant α, β, γ *les longueurs des côtés bc, ac, et ab.*

Soit C le cercle circonscrit, de centre o, (figure 5.84).

Comme avec m, milieu de $[b, c]$, on a

$(ab, ac) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{ob}, \overrightarrow{oc}) = (ob, om)$, dans le triangle rectangle bom on a

$\sin \hat{a} = \frac{bm}{bo} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{R}$ d'où $\frac{\alpha}{\sin \hat{a}} = 2R$, et la relation voulue. ■

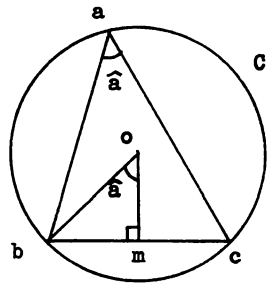


Fig. 5.84.

THÉORÈME 5.85, (de Morley) — *Soit un triangle abc. On coupe en trois les angles* $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ *et on considère le triangle pqr obtenu en considérant les intersections des trissectrices issues de deux sommets, les plus proches du côté qu'ils déterminent, (voir figure 5.85.1). Ce triangle pqr est équilatéral.*

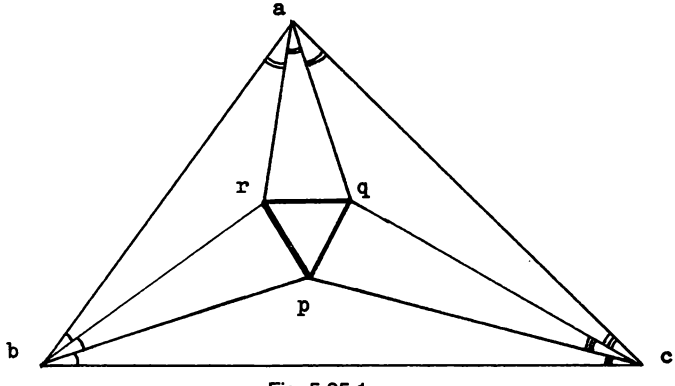


Fig. 5.85.1

Appliquons le Théorème 5.84 aux triangles *abc* et *abr*, en notant R le rayon du cercle circonscrit au triangle *abc*.

On a $\dfrac{ab}{\sin\hat{c}} = 2R, \quad$ donc $\quad ab = 2R\sin\hat{c},$

puis, $$\frac{ar}{\sin\dfrac{\hat{b}}{3}} = \frac{ab}{\sin(\pi - \dfrac{\hat{a}}{3} - \dfrac{\hat{b}}{3})} = \frac{ab}{\sin\dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{3}} = \frac{ab}{\sin(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\hat{c}}{3})}$$

donc $$ar = 2R\sin\frac{\hat{b}}{3}\frac{\sin\hat{c}}{\sin(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\hat{c}}{3})}.$$

Un peu de trigo et d'astuce. C'est encore :

$$ar = 2R\sin\frac{\hat b}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat c}{3}\right)\cdot\frac{\sin\hat c}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\hat c}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat c}{3}\right)}.$$

Or $\sin 3\theta = \mathcal{I}m(e^{i\theta})^3 = \mathcal{I}m(\cos\theta + i\sin\theta)^3$

$= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)$, d'où ici

$$\sin\hat c = \sin\frac{\hat c}{3}\left(4\cos^2\frac{\hat c}{3} - 1\right).$$

Puis
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\hat c}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat c}{3}\right) &= \frac12\left(\cos\frac{2\hat c}{3} - \cos\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= \frac12\left(2\cos^2\frac{\hat c}{3} - 1 + \frac12\right)\\ &= \frac12\left(2\cos^2\frac{\hat c}{3} - \frac12\right)\\ &= \frac14\left(4\cos^2\frac{\hat c}{3} - 1\right),\end{aligned}$$

donc $\dfrac{\sin\hat c}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\hat c}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat c}{3}\right)} = 4\sin\dfrac{\hat c}{3}$, et finalement

$$\boxed{ar = 8R\sin\frac{\hat b}{3}\sin\frac{\hat c}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat c}{3}\right)}.$$

De la même façon, on obtient, (b et c changent de rôles)

$$aq = 8R\sin\frac{\hat b}{3}\sin\frac{\hat c}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat b}{3}\right), \quad \text{d'où l'égalité,}$$

$$\frac{ar}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat c}{3}\right)} = \frac{aq}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat b}{3}\right)} = 8R\sin\frac{\hat b}{3}\sin\frac{\hat c}{3}.$$

Or $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat{c}}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat{b}}{3}\right)=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi-\hat{a}}{3}=\pi-\frac{\hat{a}}{3}$, donc, si on considère un triangle ayant pour côté ar, pour angle en a, $\frac{\hat{a}}{3}$ et pour angle en r, $\frac{\pi}{3}+\frac{\hat{b}}{3}$, comme

$\frac{\hat{a}}{3}+(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat{b}}{3})=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi-\hat{c}}{3}=\pi-(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat{c}}{3})\in]0,\pi[$, ces deux droites se coupent en m, (voir figure 5.85.2), l'angle en m vaut $\frac{\pi}{3}+\frac{\hat{c}}{3}$, et on a, (toujours Théorème 5.84),

$$\frac{ar}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat{c}}{3}\right)}=\frac{am}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\hat{b}}{3}\right)}=\frac{mr}{\sin\frac{\hat{a}}{3}}=8R\sin\frac{\hat{b}}{3}\sin\frac{\hat{c}}{3},$$

donc forcément la longueur am est égale à la longueur aq et si on fait la construction à partir des points a et r, telle que $(\overrightarrow{ar},\overrightarrow{am})=(\overrightarrow{ar},\overrightarrow{aq})$, m sera en q, d'où $mr=rq$,

et l'égalité $\boxed{rq=8R\sin\frac{\hat{a}}{3}\sin\frac{\hat{b}}{3}\sin\frac{\hat{c}}{3}}$.

La manière symétrique dont interviennent les angles dans cette formule, montre que $rq=qp=pr$ d'où le triangle pqr équilatéral. ■

Ainsi s'achève la rédaction de ce chapitre et de ce quatrième tome de ce cours de mathématiques. Puisse cette tentative de synthèse entre une géométrie dite traditionnelle, et une présentation prenant plus en compte la topologie et la géométrie différentielle rendre service.

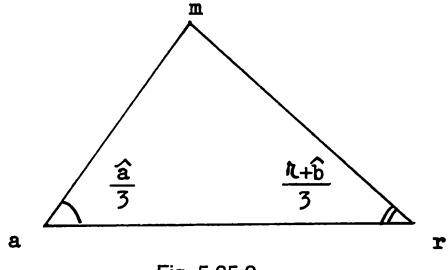


Fig. 5.85.2

EXERCICES

1. Soit un plan euclidien P rapporté à un repère orthonormé $x0y$, un point m_0 de P, et C_0 le cercle de centre m_0, passant par 0. On note p_0 et q_0 les intersections de C_0 et de $x'x$ et $y'y$ respectivement, et m_1 le projeté orhogonal de 0 sur p_0q_0. On pose $f(m_0) = m_1$. Montrer que la suite des points $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $m_{k+1} = f(m_k)$, $(\forall k \in \mathbb{N})$ converge, sauf pour certains choix de m_0 à préciser.

2. Soit $f : \mathbb{C}^* \longmapsto \mathbb{C}^*$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$.
Trouver l'image de la couronne circulaire $1 \leqslant |z| \leqslant 2$.

3. Images du cercle et du disque unité par l'application $z \rightsquigarrow \dfrac{1}{(1-z)^2}$.

4. Quels sont les z complexes tels que les points d'affixes z, i et iz soient alignés.

5. Soit C le cercle de diamètre $[A, B]$, (A et B points distincts d'un plan affine euclidien). Lien du centre du cercle inscrit dans le triangle AMB lorsque M décrit C.

6. Soit un cercle Γ d'un plan affine euclidien P, A un point de P non situé sur Γ, Δ une droite variable passant par A et qui coupe Γ en M et N. Montrer que $\overline{AM} \cdot \overline{AN} =$ constante.

7. Soient a et b des nombres complexes distincts, et t un réel différent de 1. Nature de $\Gamma_t = \{z \in \mathbb{C}, \left|\dfrac{z-a}{z-b}\right| = t\}$.
La courbe $\Gamma(t)$ admet un centre de symétrie noté $\Omega(t)$.
Courbe décrite par $\Omega(t)$ quand t varie.

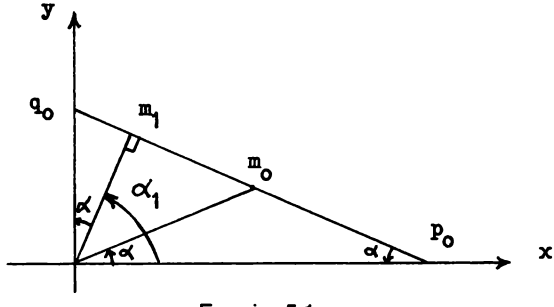
8. Soient A et B deux points fixes du plan. Ensemble des points M tels que $\widehat{ABM} = 2\,\widehat{BAM}$.

SOLUTIONS

1. Soient x_0 et y_0 les coordonnées de m_0.

Supposons d'abord $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, et posons $\alpha = (\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0m_0})$, on a $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Un peu de géométrie nous montre que, dans le triangle $0m_1q_0$, rectangle en m_1 on a $0m_1 = 0q_0 \cos\alpha$, puis que dans $0p_0q_0$ rectangle en 0, $0q_0 = p_0q_0 \sin\alpha$, soit, comme m_0 est centre du cercle de diamètre p_0q_0, passant par 0, $0q_0 = 20m_0 \sin\alpha$. On a donc $0m_1 = 20m_0 \sin\alpha \cos\alpha = 0m_0 \sin 2\alpha$.



Exercice 5.1

Le point m_1 est tel que $(\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0m_1}) = \alpha_1 = (\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0y}) + (\overrightarrow{0y}, \overrightarrow{0m_1})$ soit $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et $0m_1 = 0m_0 \sin 2\alpha$. Il conduit au point $m_2 = f(m_1)$ tel que $(\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0m_2}) = \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 = \alpha$ et $0m_2 = 0m_1 \sin 2\alpha_1$, or $\sin 2\alpha_1 = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha$, d'où $0m_2 = 0m_0 (\sin 2\alpha)^2$.

Par une récurrence immédiate, on a donc
$(\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0m_{2k}}) = \alpha$, $(\overrightarrow{0x}, \overrightarrow{0m_{2k+1}}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et $0m_k = 0m_0(\sin 2\alpha)^k$.

Il en résulte que si $\alpha \in]0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$, $\lim_{k \to +\infty} m_k = 0$, car $0 < \sin 2\alpha < 1$ dans ce cas, et que pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, la suite des m_k est stationnaire en m_0.

Par contre si $m_0 \in 0x$ ou $m_0 \in 0y$, m_1 est en 0 et $f(m_1)$ n'est plus défini. Les cas x_0 et y_0 de signes quelconques se déduisent du premier cas par des symétries par rapport aux axes, d'où finalement :

1) si m_0 est sur l'un des deux axes de coordonnées, la suite n'est pas définie;
2) si m_0 est sur l'une des deux bissectrices, (pas en 0), la suite est stationnaire;
3) sinon, la suite converge vers 0.

2. Avec $z = re^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ et $1 \leqslant r \leqslant 2$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2}(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\theta + \frac{i}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\theta.$$

Pour r fixe, si $1 < r \leqslant 2$, les points de coordonnées $x = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\theta$, $y = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\theta$, décrivent l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{\frac{1}{4}(r+\frac{1}{r})^2} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}(r-\frac{1}{r})^2} = 1$, ellipse de demi-axes $\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})$ et $\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})$ et de foyers F et F' de coordonnées $(c,0)$ et $(-c,0)$, avec $c^2 = \frac{1}{4}(r+\frac{1}{r})^2 - \frac{1}{4}(r-\frac{1}{r})^2$ soit $c^2 = 1$. Cette ellipse E_r est encore l'ensemble des points M du plan tels que $MF + MF' = r + \dfrac{1}{r}$, et il nous reste à étudier entre quelles bornes varie la fonction $\varphi : r \rightsquigarrow r + \dfrac{1}{r}$. On a $\varphi'(r) = 1 - \dfrac{1}{r^2} > 0$ si $r > 1$, donc φ croît de 2 à $\dfrac{5}{2}$, et finalement l'image cherchée, comme $MF + MF' \geqslant FF'$ qui vaut 2, est formée des points M tels que $MF + MF' \leqslant \dfrac{5}{2}$: c'est l'ellipse E_2 et son intérieur. On peut remarquer que pour $r = 1$, E_1 est réduite au segment $[F, F']$.

3. Soit M d'affixe $e^{i\theta}$, $\theta \in]0, 2\pi[$, et A le point du cercle unité d'affixe 1. Tout point N du segment $[AM]$ a pour affixe z tel que, pour $0 \leqslant t \leqslant 1$
$z - 1 = t(e^{i\theta} - 1)$ soit $z = 1 + t(e^{i\theta} - 1)$.
On a alors $1 - z = t(1 - e^{i\theta})$ donc, pour $0 < t \leqslant 1$,

$$f(z) = \frac{1}{t^2(1-e^{i\theta})^2} = \frac{e^{-i\theta}}{t^2(-2i\sin\frac{\theta}{2})^2} = \frac{-(\cos\theta - i\sin\theta)}{4t^2\sin^2\frac{\theta}{2}}.$$

Si on pose $f(z) = Z = X + iY$, on obtient donc

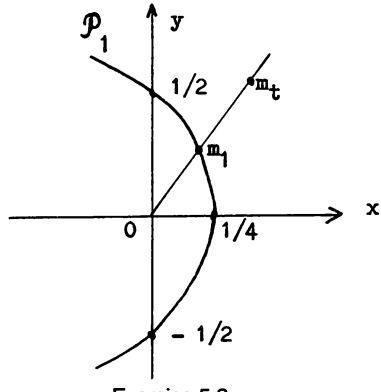
$$X = -\frac{\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}{4t^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{4t^2}(1 - \operatorname{cotg}^2\frac{\theta}{2}) \text{ et}$$

$$Y = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{4t^2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2t^2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}.$$

Comme $\dfrac{\theta}{2} \in]0, \pi[$, $s = \operatorname{cotg}\dfrac{\theta}{2}$ décrit $\mathbb{R}$ et on a encore, pour $t \in]0, 1]$ fixé, le point $f(M)$ de coordonnées $X = \dfrac{1}{4t^2}(1 - s^2)$ et $Y = \dfrac{1}{2t^2}s$ qui décrit la parabole d'équation $X = \dfrac{1}{4t^2} - t^2Y^2$.
Pour $t = 1$, M décrit le cercle unité privé de A, qui a donc pour image la parabole d'équation $x = \dfrac{1}{4} - y^2$.

On peut remarquer que pour un t de $]0, 1]$ fixé, en posant $x_1 = \dfrac{1}{4}(1 - s^2)$ et $y_1 = \dfrac{s}{2}$, on a $x = \dfrac{1}{t^2}x_1$, $y = \dfrac{1}{t^2}y_1$ donc on passe de m_1 décrivant la parabole

d'équation $x = \frac{1}{4} - y^2$ à m décrivant la parabole $\mathcal{P}(t)$ d'équation $x = \frac{1}{4t^2} - t^2y^2$ par l'homothétie de centre 0, de rapport $\frac{1}{t^2} \in [1, +\infty[$: finalement l'image du disque privé de A est l'extérieur de la parabole d'équation $x = \frac{1}{4} - y^2$.



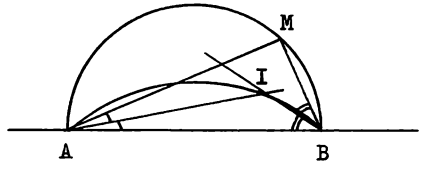
Exercice 5.3

4. Si deux des points sont confondus, les trois points sont alignés. C'est donc le cas pour $z = i$, $z = iz$ soit $z = 0$ et $i = iz$ soit $z = 1$.
Pour $iz \neq i$, (soit $z \neq 1$), les points A, B, C d'affixes respectives z, i et iz sont alignés si et seulement si il existe λ réel tel que $\overrightarrow{BA} = \lambda\overrightarrow{BC}$, donc si et seulement si $\frac{z-i}{iz-i}$ est réel.
En posant $z = x + iy$, on traduit donc que :
$\frac{x + i(y-1)}{-y + i(x-1)} = \frac{(x + i(y-1))(-y - i(x-1))}{y^2 + (x-1)^2}$ est réel, donc que
$-x(x-1) - y(y-1) = 0$ soit encore que $x^2 + y^2 - x - y = 0$.
L'ensemble cherché est donc l'ensemble des affixes des points du cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (qui contient les points d'affixe 0, i et 1).

5. Un peu de géométrie comme «dans le temps».
D'abord on se contente d'étudier le cas de M sur un demi-cercle de diamètre AB, puis de faire une symétrie par rapport à AB.
Alors, I, intersection des bissectrices des angles A et B du triangle est tel que

$$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \pi - \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}))$$
$$= \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}, \text{donc...}$$

I est sur «l'arc capable», (et oui) passant par A et B, d'angle $\frac{3\pi}{4}$, (et sur le symétrique par rapport à AB).



Exercice 5.5

On peut aussi faire des calculs!

6. Ici encore on peut retrouver la géométrie d'antan.

Soit M' diamétralement opposé à M sur Γ, on a $\overrightarrow{M'N} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$, ($M' = N$ ou $M'NM$ triangle rectangle en N), donc

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{AM}\,(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM'}) = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$

puisque AM est perpendiculaire à $\overrightarrow{NM'}$.

On a donc $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM'})$

$= (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OM})$

$= \overrightarrow{AO^2} - \overrightarrow{OM^2} = d^2 - r^2$

si d est la distance de A au centre du cercle, et R le rayon de Γ. C'est encore la puissance analytique du point A par rapport à Γ.

Voulez-vous de l'analytique ?

Si dans un repère orthonormé, l'équation de Γ est $x^2 + y^2 - R^2 = 0$, et si $\overrightarrow{u}(\cos\theta, \sin\theta)$ est unitaire directeur de la sécante Δ, elle sera paramétrée en $x = \alpha + t\cos\theta$, $y = \beta + t\sin\theta$, (si α et β sont les coordonnées de A), d'où les paramètres des points d'intersection M et N, solutions de
$(\alpha + t\cos\theta)^2 + (\beta + t\sin\theta)^2 - R^2 = 0$, qui s'ordonne en :
$t^2 + 2t(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0$.
Si t_1 et t_2 sont les racines, (ne les calculons pas), on aura
$\overrightarrow{AM} = t_1\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AN} = t_2\overrightarrow{u}$ d'où $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = t_1t_2 = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$,
on retrouve bien $OA^2 - R^2$, expression indépendante de la sécante.

7. La courbe Γ_t est définie, pour $t \geqslant 0$, $t \neq 1$, par la condition
$|z - a|^2 - t^2|z - b|^2 = 0$, donc avec $z = x + iy$, $a = \alpha + i\alpha'$ et $b = \beta + i\beta'$, par la condition
$(x - \alpha)^2 + (y - \alpha')^2 - t^2((x - \beta)^2 + (y - \beta')^2) = 0$, qui se développe en
$(1 - t^2)(x^2 + y^2) - 2x(\alpha - \beta t^2) - 2y(\alpha' - \beta' t^2) + \alpha^2 + \alpha'^2 - t^2\beta^2 - t^2\beta'^2 = 0$.
Comme $1 - t^2 \neq 0$, c'est encore

$$x^2 + y^2 - \frac{2(\alpha - \beta t^2)}{1 - t^2}x - \frac{2(\alpha' - \beta' t^2)}{1 - t^2}y + \frac{\alpha^2 + \alpha'^2 - t^2\beta^2 - t^2\beta'^2}{1 - t^2} = 0.$$

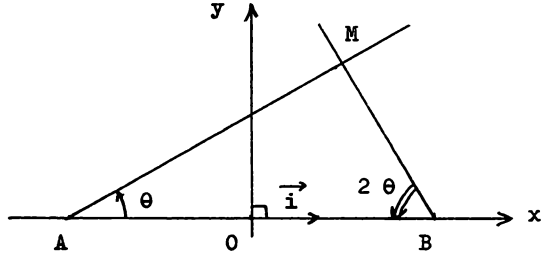
C'est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(t)$ point de coordonnées $X = \dfrac{\alpha - \beta t^2}{1 - t^2}$,

$Y = \dfrac{\alpha' - \beta' t^2}{1 - t^2}$, car si on a la patience, (je l'ai eue), de calculer la quantité

$\left(\frac{\alpha-\beta t^2}{1-t^2}\right)^2+\left(\frac{\alpha'-\beta' t^2}{1-t^2}\right)^2-\frac{\alpha^2+\alpha'^2-t^2\beta^2-t^2\beta'^2}{1-t^2}$, elle se développe puis se réduit en $\frac{(\alpha t-\beta t)^2+(\alpha' t-\beta' t)^2}{(1-t^2)^2}$ donc elle est positive.

Les coordonnées de $\Omega(t)$ font apparaître ce point comme barycentre de A coefficient 1 et B coefficient $-t^2$, donc des coefficients de signes contraires : le point $\Omega(t)$ décrit la droite AB privée du segment $[A, B]$.

8. Prenons un repère orthonormé d'origine le milieu du segment $[A, B]$, l'axe $0x$ contenant A et B, de coordonnées $(-a, 0)$ et $(0, a)$ avec $a > 0$.
Le problème posé par l'énoncé est celui de la nature des angles intervenant.
Si on prend des angles de triangles, on doit avoir :
$\widehat{ABM}+\widehat{BAM}=3\widehat{BAM}\leqslant\pi$, d'où $\widehat{BAM}\leqslant\frac{\pi}{3}$.
Passons à des angles de vecteurs pour étudier ce problème.



Exercice 5.8

On doit avoir $2(\vec{i},\overrightarrow{AM})=(\overrightarrow{BM},-\vec{i})=(\overrightarrow{BM},\vec{i})+(\vec{i},-\vec{i})$,

$$=\pi-(\vec{i},\overrightarrow{BM})$$

soit la condition $2(\vec{i},\overrightarrow{AM})+(\vec{i},\overrightarrow{BM})=\pi$.
En passant aux nombres complexes, ceci se traduit par :
$\operatorname{Arg}(z+a)^2+\operatorname{Arg}(z-a)=\operatorname{Arg}(z+a)^2(z-a)=\pi$, donc par la condition $(z+a)^2(z-a)$ réel négatif.
Avec $z=x+iy$, on a :
$(z+a)^2(z-a)=(x+a+iy)^2(x-a+iy)$

$$=[(x+a)^2+2iy(x+a)-y^2](x-a+iy)$$

$=((x+a)^2-y^2)(x-a)-2y^2(x+a)+iy[(x+a)^2-y^2+2(x^2-a^2)]$.
La nullité de la partie imaginaire est équivalente à la condition $y=0$ au $(x+a)^2+2x^2-2a^2-y^2=0$.
Si $y=0$, la partie réelle vaut $(x+a)^2(x-a)$: elle est négative pour $x\leqslant a$.
Si $y^2=(x+a)^2+2(x^2-a^2)$, la partie réelle vaut
$-2(x^2-a^2)(x-a)-2[(x+a)^2+2(x^2-a^2)](x+a)$, soit encore
$-2(x+a)[(x-a)^2+(x+a)^2+2(x^2-a^2)]=-8x^2(x+a)$ et elle sera négative pour $x\geqslant -a$.

L'équation $(x+a)^2+2x^2-y^2-2a^2=0$ s'écrit encore

$3x^2+2ax-y^2-a^2=3(x+\frac{a}{3})^2-y^2-\frac{4a^2}{3}=0,$

ou $\frac{(3x+a)^2}{4a^2}-\frac{y^2}{\frac{4a^2}{3}}=1$, équation d'une hyperbole d'axe focal $x'x$ et de sommets les points d'abscisse $-a$ et $\frac{a}{3}$. L'ensemble cherché est donc la branche d'hyperbole obtenue pour $x \geqslant \frac{a}{3}$ en fait, et l'ensemble des points d'abscisse inférieure à a sur $0x$.

Lexique

abscisse curviligne, 6.99
admissible (paramétrage), 6.9; 9.3
affine (application), 1.50
affine (espace), 1.1
affine (espace métrique), 4.1
affinement libres, 1.29
affixe, 5.25
angle de deux axes, 5.5
angle de droites, 5.6
angle de vecteurs, 5.7
angle de vecteurs unitaires, 5.1
angle polaire, 5.8
anti-déplacement, 4.62
arc géométrique, 6.7
arc paramétré, 6.1
arête de rebroussement, 9.59
argument, 5.25
asymptote (droite), 6.70
asymptote (plan) 9.50
asymptotiques (courbes), 9.104
asymptotique (direction), 6.67
atlas, 9.160
axe focal, 8.16; 8.32
axe radical, 5.52

barycentre, 1.14
bi-normal, 6.105; 6.131
bi-régulier, 6.52
bissecteur (hyperplan), 4.43
bissectrice, 4.43; 5.9; 5.11
branche infinie, 6.64
branche parabolique, 6.78

caractéristique (droite), 6.139
caractéristique (entier, sous-espace), 6.18
Carathéodory (Théorème de), 3.14
carte, 9.161; 9.163
cartésienne (équation), 6.73
central (point, plan), 9.51
centre de courbure, 6.114; 6.139
centre de courbure normale, 9.115
centre d'homothétie, 1.62
centre radical, 5.53; 5.67
cercle de courbure, 6.124
cercle de Meusnier, 9.115
cercle de Monge, exercice 8.2
cercle directeur, 8.12; 8.25
cercle osculateur, 6.123
Céva (Théorème de), 1.49; 1.77
Chasles (relation de), 1.21
cocycliques, 5.13; 5.18
cône circonscrit, 9.77
conforme (transformation), 4.90
conique (courbe), 8.1
conique, (nappe), 9.70
conjugués (faisceaux), 5.63
conoïde, nappe conoïdale, 9.84
contact (d'ordre p), 6.57
contour apparent de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$, 9.74
contour apparent de point de vue a, 9.77
convexe, 3.5
coordonnées, 1.79
coordonnées barycentriques, 1.35

courbes de niveau, 9.149
courbure, 6.104
courbure géodésique, courbure normale, 9.96
courbure (lignes de), 9.104
courbure moyenne, 9.124; 9.133
courbures principales, 9.131
courbure totale, 9.133
curviligne (abscisse), 6.99
cylindre circonscrit, 9.74
cylindrique (nappe), 9.66

Darboux-Ribeaucourt (trièdre de), 9.94
demi-espace, 3.35
déplacement, 4.62
Desargues (Théorème de), 1.70
développable (nappe), 9.56
développante, 6.143; 6.128
développée, 6.114; 6.142
dimension d'un sous-espace affine, 1.28
dimension d'un convexe, 3.23
directe (base), 3.1
directeur (cercle), 8.12; 8.25
directeur (vecteur), 1.65
direction (d'un sous-espace affine), 1.1; 1.27
direction asymptotique, 6.67
directions principales, 9.129
directrice, 8.2; 8.23; 8.36
distribution (paramètre de), 9.53
domaine, 9.2
domaine d'une carte, 9.161
droite affine, 1.28

ellipse, 8.12
ellipsoïde, 10.13
enveloppe (d'une famille de droites), 7.2
enveloppe convexe, 3.6
enveloppe convexe fermée, 3.20
équibarycentre, 1.19
équation d'un hyperplan, 1.33; 1.80
équation cartésienne, 6.73
étale, 9.159
étoilé, 9.28
Euclide (postulat d'), 1.41
euclidien, 4.17 bis
Euler (cercle d'), 5.76
Euler (équation d'), 7.16
Euler (formule d'), 3.47
excentricité, 8.23; 8.36

face, 3.43
faisceau de cercles, 5.56
faisceau de plans, 4.52
Feuerbach (Théorème de), 5.83
fondamentaux (sous-espaces), 6.15
forme affine, 3.34
foyer, 8.2; 8.12; 8.25
Frenet (repère, trièdre), 6.131
géodésique (courbure), 9.96
géodésique (ligne), 9.104
géodésique (torsion), 9.98
géodésique (vecteur normal), 9.94
géométrique (arc), 6.7
géométrique (notion), 6.9
Hausdorff (distance de), 4.103
hausdorfien, exercice 3.3
hélice, 6.144; 6.145
Helly (Théorème de), 3.26
homothétie, 1.60
hyperbole, 8.25
hyperboloïde à deux nappes, 10.15
hyperboloïde à une nappe, 10.17
hyperplan affine, 1.28; 3.35
hyperplan (équation d'), 1.33; 4.29; 1.80
hyperplan médiateur, 4.42
hyperplan radical de deux sphères, 4.41

immersion, 9.159
incidence (Théorème d'), 1.46
indirecte (base), 3.1
inflexion analytique, 6.61
inflexion géométrique, 6.61

intrinsèque (équation), 6.152
inversion, 4.82
isogonales (trajectoires), 7.28
isométrie, 4.5

lacet, 6.3
Liebnitz (fonction numérique de), 4.45
ligne de courbure, 9.104
ligne de plus grande pente, 9.148
ligne de striction, 9.51
limite de sous-espaces affines, 6.34
limite de sous-espaces vectoriels, 6.30
loxodromies, 9.153

médiateur (hyperplan), 4.42
Ménélaüss (Théorème de), 1.76; 1.87
méplat (point), 6.61
méridienne, 9.83
mesure algébrique, 1.66
métrique (espace affine), 4.1

Meusnier (cercle de), 9.115
Meusnier (Théorème de), 9.111
milieu, 1.20
module, 5.25
Monge (cercle de), exercice 8.2
Morley (Théorème de), 5.85
Motzkin (Théorème de), 3.25 bis
multiple (point), 6.5

nappe géométrique, 9.3
nappe paramétrée, 9.1
niveau (courbe de), 9.149
normal (plan), 6.137
normal (vecteur normal principal), 6.131
normal (vecteur normal géodésique), 9.94
normale (vecteur normal sortant), 9.19
normale (courbure), 9.96
normale (équation d'un hyperplan), 4.37; 7.14

ombilic, 9.127
ordre (d'un point multiple), 6.5
orientation (d'une nappe), 9.5
orienté (arc), 6.10
orienter un espace, 3.1
origine, 1.11
orthocentre, 5.20
orthogonales (trajectoires), 7.21
orthogonaux (cercles), 5.54
orthogonaux (supplémentaires orthogonaux), 4.20
osculateur (cercle), 6.123
osculateur (k-espace), 6.46
osculateur (plan), 6.41; 6.137
osculatrice (sphère), 6.140

Pappus (Théorème de), 1.68
parabole, 8.2
parabolique (branche), 6.78
paraboloïde elliptique, 10.37
paraboloïde hyperbolique, 9.87; 10.37
parallèle à, 1.39
parallélisme strict, 1.40
paramètre de distribution, 9.54
paramètre (arc), 6.1
paramétrisation d'un sous-espace affine, 1.84
Péano (courbe de), 6.11
perpendiculaire, 4.21
perpendiculaire commune à deux droites, 4.57
plan affine, 1.28
plan osculateur, 6.41; 6.137
plan tangent à un arc, 6.40
plan tangent à une nappe, 9.10
Plücker (conoïde de), 9.86
points de base (faisceau à), 5.57
points limites (faisceau à), 5.59
polaire (sous-ensemble), 3.32
polyèdre convexe, 3.40
polygonale (ligne), 6.90

polygone, 3.41
polytope, 3.41
Poncelet (points de), 5.59
préhilbertien (espace affine), 4.17
principal (repère pour une quadratique), 10.14
principales (courbures), 9.131
principales (directions), 9.129
projection affine, 1.73
projection orthogonale, 4.23
pseudo-orthogonal, 5.68
Ptolémée (Théorème de), 5.38
puissance analytique, 4.36; 4.39; 6.126 bis; 6.138
Pythagore (Théorème de), 4.18

quadratique, 10.30
quadratique à centre, 10.1
quadratique à centre non dégénérée, 10.6
quotient (espace affine), 2.26
radical (axe), 5.52
radical (hyperplan), 4.41
rapport d'homothétie, 1.61
rayon de courbure, 6.114
rayon de torsion, 6.132
rebroussement (point de), 6.61
rectifiable (arc), 6.91
rectifiant (plan), 6.137
régionnantes (courbes), 9.16
réglée (nappe), 9.43
régulier, 6.51; 6.52; 9.6
repère, 1.31; 1.32
réseau de cercles, 5.66
révolution (nappe de), 9.80
rotation instantané (vecteur), 6.133

sécante, 6.45
segment, 3.9
semi-affine, 2.6
semi-linéaire, 2.5
similitude, 4.88
Simson, (droite de), 5.22
sommet d'une ellipse, 8.16
sommet d'une hyperbole, 8.32
sommet d'une parabole, 8.3
sous-espace affine, 1.23
sous-variété de $\mathbb{R}^n$, 9.156
sphérique (courbe), 6.148
spirale, 6.80.5
stationnaire (ou singulier), 6.51; 9.6
striction (ligne de), 9.51
submersion, 9.159
support, 6.4
sur-osculatrice (sphère), 6.140
symétrie orthogonale, 4.63
tangent (plan tangent à une nappe), 9.10
tangent (plan tangent à un arc), 6.40
tangente (à un arc), 6.36
Thalès (Théorème de), 1.67
torsion, 6.110; 6.132
torsion géodésique, 9.98
transformation conforme, 4.90
translation, 1.4; 1.57

variété (abstraite), 9.163
variété (plongée dans $\mathbb{R}^n$), 9.156
voisinage tubulaire, 4.101

Imprimé en France
Imprimerie des Presses Universitaires de France
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme
Juillet 1995 — N° 41 795

COLLECTION *MATHÉMATIQUES*

Jean-Pierre AUBIN. *Analyse fonctionnelle appliquée. 1 et 2*

Marcel BERGER et Bernard GOSTIAUX. *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces* (2e éd. corrigée)

Josette CALAIS. *Eléments de théorie des groupes*

Bernard CHARLES et Denis ALLOUCH. *Algèbre générale*

Jean COMBES. *Suites et séries*

Paul DEHEUVELS. *L'intégrale*

René DEHEUVELS. *Formes quadratiques et groupes classiques*

René DEHEUVELS. *Tenseurs et spineurs*

Roger DESCOMBES. *Eléments de théorie des nombres*

Jacques DIXMIER. *Topologie générale*

Jean GEFFROY. *Equations différentielles*

Bernard GOSTIAUX. *Cours de mathématiques spéciales*
T. 1 : Algèbre
T. 2 : Topologie, analyse réelle
T. 3 : Analyse fonctionnelle et calcul différentiel
T. 4 : Géométrie affine et métrique
T. 5 : Géométrie : arcs et nappes

Michel HERVÉ. *Les fonctions analytiques*

Michel HERVÉ. *Transformation de Fourier et distributions*

Daniel LEBORGNE. *Calcul différentiel et géométrie*

Daniel LEHMANN et Carlos SACRÉ. *Géométrie et topologie des surfaces*

Daniel LEHMANN et Rudolphe BKOUCHE. *Initiation à la géométrie*

Jacqueline LELONG-FERRAND. *Les fondements de la géométrie*

Henri MASCART et Marius STOKA. *Algèbre linéaire et applications. 1 et 2 : Exercices et corrigés*

Henri MASCART et Marius STOKA. *Fonctions d'une variable réelle. 1, 2, 3, 4 et 5 : Exercices et corrigés*

Pierre MEUNIER. *Analyse*

Pierre MEUNIER. *Algèbre et analyse*

Pierre MEUNIER. *Exercices d'algèbre et d'analyse*

Alain MÉZARD et Charles DELORME. *Cours de mathématiques supérieures. T. 1*

Maurice MIGNOTTE. *Algèbre appliquée à l'informatique*

Maurice MIGNOTTE. *Mathématiques pour le calcul formel*

Georges PUPION. *Exercices d'algèbre avec solutions et cours résumé*

Georges PUPION. *Exercices d'analyse avec solutions et cours résumé*

Paulo RIBENBOIM. *Nombres premiers*

Pierre SAMUEL. *Géométrie projective*

Paul VER EECKE. *Fondements du calcul différentiel*

Paul VER EECKE. *Applications du calcul différentiel*

La géométrie est devenue le « parent pauvre » de notre enseignement, et la source de malentendus entre générations.

Les vieux (dont je fais partie) et qui ont fait de la géométrie dans leur jeunesse, sont persuadés que les jeunes en font toujours autant, et ont tendance à exiger des étudiants des connaissances qu'ils n'ont plus.

Il m'a semblé utile de rédiger un cours donnant les définitions et propriétés de base des espaces affines, et permettant de retrouver des raisonnements rapides, intuitifs, propres à la géométrie pure, où les notions de barycentre, sous-espaces affines et convexité, reprennent leur place.

Par ailleurs, l'utilisation de la topologie (et des structures euclidiennes) permet de traiter, par des raisonnements de passage à la limite, les cas particuliers qui étaient si fastidieux en géométrie traditionnelle.

Puisse cette tentative de fusion entre les modernes et les anciens rendre service.

198 FF 22411010/7/95

Didier Thimonier