

m a t h

è m a t i q u e s

Bernard
Gostiaux

Cours de mathématiques spéciales

5. Géométrie :
arcs et nappes

puf

Cours de mathématiques spéciales

Tome 5

Géométrie : cours et nappes

COLLECTION DIRIGÉE PAR PAUL DEHEUVELS

COURS
DE MATHÉMATIQUES
SPÉCIALES

TOME 5

Géométrie :
arcs et nappes

BERNARD GOSTIAUX



PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

ISBN 2 13 047131 5
ISSN 0246-3822

Dépôt légal — 1^{re} édition : 1995, août

© Presses Universitaires de France, 1995
108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

Sommaire

<i>Avant-propos</i>	VII
Chapitre 6. — Arcs paramétrés	1
1. Arcs paramétrés, arcs géométriques	1
2. Etude locale des arcs paramétrés	8
3. Branches infinies	26
4. Rectification d'un arc paramétré	39
5. Courbures d'un arc paramétré	45
6. Courbure des arcs plans	50
7. Courbure et torsion des arcs gauches	59
8. Deux exemples de courbes gauches	70
9. Equation intrinsèque	75
Chapitre 7. — Enveloppes, trajectoires orthogonales	103
1. Enveloppe d'une famille de droites d'un plan affine	103
2. Trajectoires orthogonales à une famille de courbes planes	110
3. Détermination d'une courbe gauche par ses plans osculateurs	118
Chapitre 8. — Les coniques	139
1. Les paraboles	139
2. Les ellipses	144
3. Les hyperboles	154
4. Les coniques et l'analytique	163
5. Pourquoi coniques?	170
Chapitre 9. — Nappes paramétrées	189
1. Nappes paramétrées, nappes géométriques	189
2. Cas des nappes en dimension trois	194
3. Nappes réglées	212
4. Quelques types de nappes en dimension trois	222
5. Arcs sur les nappes d'un espace affine de dimension trois	235
6. Recherche de quelques types d'arcs sur les nappes	262
7. Notion de variété	265

Chapitre 10. — Les quadriques	295
1. Quadriques à centres	295
2. Nappes du second degré	311
3. Quadriques et coniques	322
<i>Lexique</i>	347

Avant-propos

Il fut un temps où, disposant des outils «topologie» et «calcul différentiel», on pouvait, par l'étude des arcs paramétrés, puis des nappes paramétrées, donner une idée de la notion de variété et faire comprendre en quoi l'utilisation des représentations locales permettait de faciliter les choses, malgré une complication apparente.

C'est cela que j'ai voulu exposer, avec un petit passage dans le temps pour retrouver les coniques.

Arcs paramétrés

L'étude que nous allons faire des arcs paramétrés est une première approche d'une notion féconde de Géométrie Différentielle, celle des variétés. Cette approche sera renforcée par l'étude des nappes paramétrées, (Chapitre 9) et le lecteur curieux sera à même d'étudier cette notion par la suite.

Toute notre étude va se dérouler dans le cadre d'un espace affine A , de direction un espace vectoriel réel E , normé. Certaines définitions sont valables indépendamment de la dimension de E , mais je me contenterai des espaces de dimension finie, (avec l'âge, on devient plus sage, du moins c'est ce que disent... les vieux), en m'efforçant de donner des justifications indépendantes de la dimension lorsque cela sera possible.

Enfin, comme cette notion d'arc paramétré est géométrique, bien que sur \mathbb{R}^n toutes les normes soient équivalentes, (Tome 2, Théorème 6.28), on se placera dans le cadre des espaces vectoriels euclidiens, pour récupérer les angles, (Tome 3, voir 14.6, et Tome 4, voir chapitre 5, §1).

L'étude locale des arcs paramétrés utilisera les résultats de calcul différentiel, la rectification s'exprimera avec des intégrales : cet aperçu succinct montre la richesse du chapitre qui nous attend.

1. Arcs paramétrés, arcs géométriques

DÉFINITION 6.1. — *Soit un espace vectoriel euclidien E . On appelle arc paramétré de E , tout couple (I, f) avec I intervalle de \mathbb{R} et f application de I dans E .*

6.2. L'arc sera dit de classe C^k si f est de classe C^k , et par la suite nous n'étudierons que des arcs de classe C^0 au moins, et on dira alors que l'arc est continu.

6.3. Si l'arc est continu, et si I est ouvert on parle d'arc ouvert; si $I = [a, b]$ et si $f(a) = f(b)$ on a un lacet.

DÉFINITION 6.4. — Soit A un espace affine euclidien de direction l'espace vectoriel euclidien E , et $\mathcal{R} = (0; \mathcal{B})$ un repère de A . On appelle support de l'arc paramétré (I, f) l'ensemble $\Gamma = \{m; m \in A; \exists t \in I, \overrightarrow{0m} = f(t)\}$.

(Voir Tome 4, 1.31 la définition d'un repère de A .)

6.5. On dira qu'un point m du support Γ d'un arc paramétré (I, f) est multiple lorsque le cardinal de $\{t; t \in I, \overrightarrow{0m} = f(t)\}$ est > 1 , et si ce cardinal est fini, égal à $p > 1$, on dira que m est multiple d'ordre p , mais si pour $t_1 \neq t_2$ dans I , on a $f(t_1) = f(t_2)$, les éléments $(t_1, f(t_1))$ et $(t_2, f(t_2))$ de l'arc paramétré sont distincts, (les premières composantes le sont).

Si on admet, (pétition de principe qui nous paraît tellement évidente) que t représente le temps, un point m_0 du support est multiple parce qu'à plusieurs instants distincts le point $m(t)$ est en m_0 , mais, (gare aux collisions) c'est heureusement à des instants différents.

DÉFINITION 6.6. — Deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) , de classe C^k , de E euclidien, sont dits C^k équivalents si et seulement si il existe un C^k difféomorphisme θ de I sur J tel que $f = g \circ \theta$.

(Voir la définition 17.6 du Tome 3, pour les difféomorphismes.)

THÉORÈME 6.7. — La relation $\mathcal{E}q : (I, f) \mathcal{E}q (J, g)$ définie, entre arcs paramétrés de classe C^k , par le fait d'être C^k équivalents est une relation d'équivalence, dont les classes d'équivalence sont appelées arcs géométriques.

Il y a réflexivité, l'identité $t \rightsquigarrow t$ de I sur I étant un C^∞ difféomorphisme; symétrie puisque θ^{-1} est un C^k difféomorphisme de J sur I si θ en est un de I sur J , (Tome 3, Théorèmes 17.1, 17.7) et transitivité puisque si θ et φ sont des C^k difféomorphismes de I sur J et de J sur K respectivement, (I, J, K intervalles de \mathbb{R}), alors $\varphi \circ \theta$ est bijective, bicontinue, différentiable (Tome 3, Théorème 16.17) avec $d(\varphi \circ \theta) = d\varphi(\theta) \circ d\theta$ de classe C^k , ainsi que $d((\varphi \circ \theta)^{-1}) = d(\theta^{-1} \circ \varphi^{-1})$. ■

REMARQUE 6.8. — Il peut sembler inutilement pédant d'aller chercher de gros théorèmes de calcul différentiel pour une application θ de variable réelle, à qui on pourrait se contenter d'appliquer le Théorème 7.25 du Tome 2, de dérivation d'une fonction réciproque.

Si j'ai procédé ainsi, c'est pour avoir une présentation commune avec celle des nappes paramétrées, où les intervalles I seront remplacés par des ouverts connexes de \mathbb{R}^2 , et où il faudra utiliser la différentiabilité, (voir chapitre 9).

Remarquez enfin qu'on n'impose pas à I d'être ouvert, parce que sur \mathbb{R} on peut parler de dérivées à droite ou à gauche, et traiter ainsi le cas où les bornes de I sont dans I , démarche à abandonner sur E e.v.n. de dimension deux au moins, où nous imposerons la condition Ω ouvert.

DÉFINITION 6.9. — *On appelle paramétrages admissibles d'un arc géométrique C , tout élément (I, f) de la classe d'équivalence C , et notion géométrique, toute notion indépendante du paramétrage admissible.*

Il en est ainsi de la notion de point multiple et d'ordre d'un point multiple, vu le côté bijectif de θ , (voir 6.5).

Il en sera de même de la notion de *longueur d'un arc paramétré*, étudiée au §4.

Mais il n'en est pas de même de celle d'*orientation*. De quoi s'agit-il? Et bien, si θ est une bijection continue de I sur J , elle est forcément strictement monotone, sinon il existerait a, b, c dans I , avec $a < b < c$ et $\theta(b) \leq \theta(a) \leq \theta(c)$ par exemple, ou $\theta(a) \leq \theta(c) \leq \theta(b)$, ceci si $\theta(a) \leq \theta(c)$, ou deux autres cas analogues si $\theta(a) \geq \theta(c)$.

Mais l'existence d'une égalité est exclue, (θ injective) et si on avait $\theta(b) < \theta(a) < \theta(c)$, avec $\gamma \in]\theta(b), \theta(a)[$, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires (Tome 2, Corollaire 7.7) il existerait x_1 dans $]a, b[$ et x_2 dans $]b, c[$ tels que $\theta(x_1) = \theta(x_2)$ ce qui contredit θ homéomorphisme de I sur J .

Mais alors θ est soit strictement croissante, soit strictement décroissante et deux paramétrages admissibles (I, f) et (J, g) d'un arc géométrique C de classe C^0 au moins définissent la même orientation si et seulement si le C^0 difféomorphisme θ de I sur J est strictement croissant, d'où une partition en deux des paramétrages admissibles et l'introduction de :

6.10. deux arcs géométriques orientés, C^+ et C^- ,

associés à C par le choix d'un paramétrage admissible et des changements de paramétrages associés uniquement à des θ croissantes.

Vous allez alors vous dire : en quoi est-ce que cette notion se généralisera aux nappes? Comment parler de difféomorphisme «croissant» sur \mathbb{R}^2 ? Et bien en supposant les nappes, (ou les variétés...) de classe C^1 au moins, et alors la matrice jacobienne de $d\theta(x)$ étant régulière, son déterminant ne s'annulera pas et (continuité oblige), restera soit toujours positif, (et les paramétrages définiront la même orientation) soit toujours négatif. Mais, patientez, ou allez voir au chapitre 9 en 9.4.

Avant d'aborder l'étude locale, la « forme » d'un arc, voyons un exemple curieux qui montrera que le support d'un arc paramétré continu n'est pas ce que « trace un crayon qui ne se soulève pas du papier ».

THÉORÈME 6.11 (Courbe de Peano). — *Il existe un arc paramétré continu $([0, 1], f)$ du plan affine A , de support $[0, 1] \times [0, 1]$.*

(C'est donc un arc qui n'aura pas de longueur, mais qui aura une aire. Et allez donc le construire...)

6.12. PREMIÈRE ÉTAPE

On divise $[0, 1]$ en quatre segments égaux, $\left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]$, pour $0 \leq i \leq 3$, et le pavé $[0, 1] \times [0, 1]$ en quatre pavés égaux, numérotés de 1 à 4, mais de façon que $(0, 0)$ soit dans le pavé numéro 1, et que deux pavés de numéros consécutifs aient une arête commune. Il y a deux cas de figure, comme le montrent les schémas 6.12.1 et 6.12.2 :

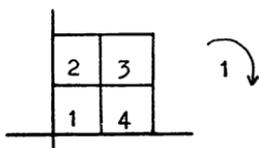


Fig. 6.12.1

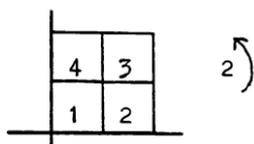


Fig. 6.12.2

On choisit un des deux cas, le premier par exemple, en remarquant qu'alors on a numéroté les quatre quarts de $[0, 1]^2$ en « tournant dans le sens des aiguilles d'une montre », (mais avez-vous une montre à aiguilles?)

A chaque intervalle $\left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]$ de $[0, 1]$, (pour $i = 0, 1, 2, 3$) on associe le carré de numéro $i + 1$.

6.13. DEUXIÈME ÉTAPE

On refractionne chaque $\left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]$ en quatre d'où 4^2 intervalles $\left[\frac{i}{4^2}, \frac{i+1}{4^2}\right]$ pour $0 \leq i < 4^2$; et on fractionne chaque quart de $[0, 1]^2$ en quatre, d'où 4^2 carrés de côté $\frac{1}{2^2}$, que l'on va numéroter de 1 à 4^2 comme suit.

On prendra d'abord les quatre quarts du carré n° 1 de la première étape, puis les quatre du carré n° 2, après du n° 3 et enfin du n° 4.

De plus le carré numéro 1 doit contenir $(0, 0)$, et deux carrés, (de côté $\frac{1}{2^2}$) de numéros consécutifs doivent avoir une arête commune.

Il n'y a qu'une façon de procéder pour les 13 premiers. En effet, les quatre premiers carrés de cette étape peuvent a priori se numéroter en tournant dans le sens 1, (celui de la première étape) : voir figure 6.13.1, ou dans le sens 2, voir figure 6.13.2.

Si on choisit le sens 1, on se retrouve avec le carré numéro 4 sans arête commune avec le carré n° 2 de la première étape, (voir figure 6.12.1), or le carré numéro 5 doit provenir de celui-là. On doit donc partir de 6.13.2.

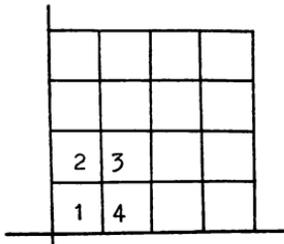


Fig. 6.13.1

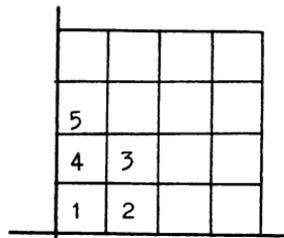


Fig. 6.13.2

Le carré numéro 5 étant imposé, on a encore deux choix pour les numéros 6, 7 et 8, mais le carré 8 doit avoir un côté commun avec l'ancien numéro 3, (voir figure 6.12.1), donc il n'y a qu'un choix possible, (voir figures 6.13.3 et 6.13.4)

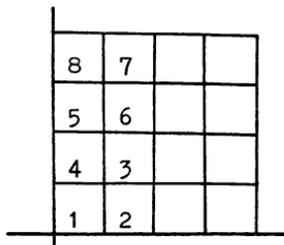


Fig. 6.13.3 : non

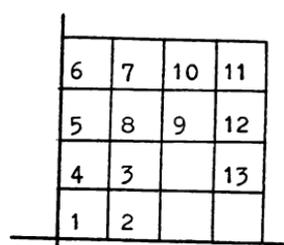


Fig. 6.13.4 : oui

On vérifie alors que le carré numéro 9 est imposé, d'où les numéros 10, 11 et 12 aussi, (voir figure 6.13.4), d'où 13 imposé et par contre, pour le dernier carré le choix du sens 1 : \odot ou 2 : \ominus est libre.

On associe alors à chaque segment $\left[\frac{i}{4^2}, \frac{i+1}{4^2} \right]$, le carré numéro $i+1$.

On continue ainsi en passant de la p ième étape à la $(p+1)$ ième étape en :

1) fractionnant $[0, 1]$ en 4^{p+1} intervalles égaux;

2) fractionnant chaque carré de côté de longueur $\frac{1}{2^p}$ en quatre carrés égaux, d'où 4^{p+1} carrés égaux que...

3) l'on numérote de façon que $(0, 0)$ soit dans le carré numéro 1, que l'on prenne successivement les quatre carrés venant de celui du numéro 1 de la $p^{\text{ième}}$ étape, puis de numéro 2, 3, 4 et ainsi de suite en croissant, et de façon que deux carrés de numéros consécutifs à cette étape, aient une arête commune.

Au segment $\left[\frac{i}{4^{p+1}}, \frac{i+1}{4^{p+1}} \right]$ on associe le carré de numéro $i+1$ de cette $(p+1)^{\text{ième}}$ étape.

L'étude de l'étape numéro 2 montre que ce processus est possible avec des sens de parcours imposés sauf dans le dernier carré coupé en quatre en fait.

6.14. Définition de l'arc paramétré f .

Soit $t \in [0, 1]$.

A la $n^{\text{ième}}$ étape, comme on a coupé $[0, 1]$ en 4^n segments égaux, t est dans un, (ou deux) segments de longueur $\frac{1}{4^n}$, (deux si t est du type $\frac{p}{4^n}$ avec $1 \leq p \leq 4^n - 1$).

Si t est dans un seul intervalle, on note C_n le carré de numéro $i+1$ si $t \in \left[\frac{i}{4^n}, \frac{i+1}{4^n} \right]$, et si t est dans deux intervalles, forcément consécutifs C_n désignera la réunion des deux carrés de numéros associés aux deux intervalles, réunion de deux carrés ayant une arête commune vu la numérotation, donc dans ce cas C_n est un rectangle de côtés ayant pour longueurs $\frac{1}{2^n}$ et $\frac{2}{2^n}$.

Supposons d'abord $t \neq \frac{p}{4^n}, \forall p = 1, \dots, 4^n - 1$.

A l'étape suivante, on fractionne $\left[\frac{i}{4^n}, \frac{i+1}{4^n} \right]$ en quatre intervalles qui seront du type $\left[\frac{j}{4^{n+1}}, \frac{j+1}{4^{n+1}} \right]$ avec $j = 4i+0$, (ou $+1$, ou $+2$ ou $+3$) puisque $\frac{i}{4^n} = \frac{4i}{4^{n+1}}$ et $\frac{i+1}{4^n} = \frac{4i+4}{4^{n+1}}$.

Comme t est dans un ou deux de ces nouveaux intervalles $\left[\frac{j}{4^{n+1}}, \frac{j+1}{4^{n+1}} \right]$ le C_{n+1} qui lui sera associé sera l'un des quatre quarts de C_n , (ou la réunion de deux) puisque la numérotation de ces carrés, (à l'étape $n+1$) respecte celle des intervalles, donc $C_{n+1} \subset C_n$.

Si $t = \frac{p}{4^n}$, t est commun aux deux intervalles de numéros p , et $p + 1$,

or $t = \frac{4p}{4^{n+1}}$ est alors commun aux intervalles de numéros $4p$ et $4p + 1$ de la $(n + 1)$ ième étape.

Donc C_{n+1} est la réunion des carrés de numéro $4p$ et $4p + 1$ de la $(n + 1)$ ième étape; qui sont respectivement contenus dans les carrés de numéro p et $p + 1$ de la n ième étape.

Or C_n était précisément la réunion de ces carrés de numéros p et $p + 1$ de la n ième étape, d'où $C_{n+1} \subset C_n$.

Mais alors les C_n sont des fermés emboîtés, de diamètre $\frac{1}{2^n}$ (ou $2 \cdot \frac{1}{2^n}$) qui tend vers 0, (pour $\| \cdot \|_\infty$), dans \mathbb{R}^2 complet, donc le Théorème des fermés emboîtés (Tome 2, Théorème 4.101) s'applique et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ est un singleton.

Comme ce singleton dépend de t , en notant $f(t) = (x(t), y(t))$ l'élément unique de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, on définit une application f de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$.

L'application f est surjective. Soit $m_0 = (x_0, y_0) \in [0, 1]^2$. Supposons d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$, $4^n x_0 \notin \mathbb{N}$ et $4^n y_0 \notin \mathbb{N}$. A la n ième étape (x_0, y_0) est dans un seul carré, (de côté $\frac{1}{4^n}$) de numéro i , soit alors I_n le segment de numéro i de la division de $[0, 1]$ en 4^n segments égaux, (en fait $I_n = \left[\frac{i-1}{4^n}, \frac{i}{4^n} \right]$).

A la $(n + 1)$ ième étape, m_0 sera dans l'un (et un seulement) des quatre quarts du carré de numéro i de la n ième étape; l'intervalle de longueur $\frac{1}{4^{n+1}}$ que l'on lui associera, noté I_{n+1} , sera l'un des quatre quarts de I_n , d'où $I_{n+1} \subset I_n$.

Dans ce cas les I_n sont des segments emboîtés de longueur qui tend vers 0 donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{t\}$ est un singleton, et vu la définition de f , on a $f(t)$ dans chaque carré contenant m_0 et, comme l'intersection de ces carrés est le singleton $f(t)$, on a $f(t) = m_0$.

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 = \frac{p}{4^{n_0}}$, ($p \in \mathbb{N}$), alors $x_0 = \frac{4p}{4^{n_0+1}} = \frac{4^r p}{4^{n_0+r}}$, et à partir du rang n_0 , m_0 sera dans deux carrés de côté $\frac{1}{2^n}$, donc on lui associera deux intervalles I_n et J_n , de la n ième étape, d'où cette fois deux suites de segments emboîtés de longueurs tendant vers 0, d'où deux t tels que $f(t) = m_0$. Il en est de même si y_0 est du type $\frac{q}{4^{n_0}}$, et si x_0

et y_0 sont tous les deux de ce type on aura quatre valeurs de t telles que $f(t) = m_0$. Finalement $f([0, 1]) = [0, 1]^2$.

Enfin f est continue, car si $|t - t'| < \frac{1}{4^{n_0}}$, $\forall n \geq n_0$, on a $|t - t'| < \frac{1}{4^n}$ donc t et t' sont soit dans un seul intervalle de longueur $\frac{1}{4^n}$, soit au plus dans deux consécutifs : les points $f(t)$ et $f(t')$ sont dans un carré de la $n^{\text{ième}}$ étape, ou deux de numéros consécutifs, là encore on a D_n carré ou rectangle, de diamètre $\frac{1}{4^n}$ ou $\frac{2}{4^n}$ contenant $f(t)$ et $f(t')$ donc $\|f(t) - f(t')\|_\infty \leq 2 \cdot \frac{1}{4^n} \leq \frac{2}{4^{n_0}}$. Donc $\forall \varepsilon > 0$, avec $\alpha = \frac{1}{4^{n_0}}$ et n_0 tel que $\frac{2}{4^{n_0}} < \varepsilon$, pour $|t - t'| < \alpha$ on aura $\|f(t) - f(t')\|_\infty \leq \varepsilon$ d'où la continuité de f , ce qui achève la justification du Théorème. ■

2. Etude locale des arcs paramétrés

DÉFINITION 6.15. — Soit un arc paramétré (I, f) de classe C^k , $k \geq 1$, dans A espace affine de direction E , espace vectoriel normé. On appelle sous-espaces fondamentaux de l'arc, en m de paramètre t , les sous-espaces vectoriels $S_i = \text{Vect}(f'(t), \dots, f^{(i)}(t))$, pour i compris entre 1 et k .

REMARQUE. — On pourrait aussi prendre les sous-espaces affines passant par $m(t)$ et de directions les S_i .

Soit (J, g) un autre paramétrage admissible de l'arc géométrique C défini par l'arc paramétré (I, f) . Il existe un C^k difféomorphisme θ de I sur J tel que $f = g \circ \theta$, (voir 6.9 et 6.6).

On a donc :

$$\begin{aligned} f'(t) &= g'(\theta(t))\theta'(t); \\ f''(t) &= g''(\theta(t))\theta'^2 + (g' \circ \theta)\theta'', \end{aligned}$$

et on vérifie par récurrence, que, pour tout entier p compris entre 2 et k , on a :

6.16. $f^{(p)}(t) = g^{(p)}(\theta(t))(\theta')^p + h_p(t)$, le vecteur $h_p(t)$ étant dans le sous-espace vectoriel $\text{vect}(g'(\theta(t)), g''(\theta(t)), \dots, g^{(p-1)}(\theta(t)))$ engendré par $g'(\theta(t)), g''(\theta(t)), \dots, g^{(p-1)}(\theta(t))$.

Mais alors, la matrice de passage de la famille des vecteurs $g'(u), g''(u), \dots, g^{(i)}(u)$, avec $u = \theta(t)$, à la famille $\{f'(t), f''(t), \dots, f^{(i)}(t)\}$ est

triangulaire, d'éléments diagonaux $\theta'(t)$, $(\theta'(t))^2$, ..., $(\theta'(t))^i$, donc de déterminant $(\theta'(t))^{\frac{i(i+1)}{2}} \neq 0$ puisque θ est un C^k difféomorphisme, $k \geq 1$.

Ces familles ont le même rang et engendrent le même espace vectoriel, donc les sous-espaces fondamentaux sont indépendants du paramétrage admissible choisi.

Nous venons de justifier que :

THÉORÈME 6.17. — *Les sous-espaces fondamentaux d'un arc paramétré sont indépendants du paramétrage C^k équivalent : c'est une notion géométrique attachée à l'arc géométrique défini par l'arc paramétré.* ■

Vu leur définition, les directions S_i des sous-espaces fondamentaux vérifient les relations d'inclusion :

$$\{0\} \subset S_1(t) \subset S_2(t) \subset \dots \subset S_i(t) \subset S_{i+1}(t) \subset \dots \subset S_k(t),$$

(k classe de l'arc), mais il se peut qu'il y ait des égalités. Aussi considérera-t-on les entiers associés aux inclusions strictes.

DÉFINITION 6.18. — *Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, de classe C^k , $k \geq 1$, et C l'arc géométrique qu'il définit. On appelle $q^{\text{ième}}$ entier caractéristique de Γ , (ou de C), en m de paramètre t , le plus petit entier i , s'il existe, tel que $\dim(S_i) = q$, et dans ce cas, S_i est le $q^{\text{ième}}$ sous-espace caractéristique.*

Donc le premier entier caractéristique p_1 est tel que $f^{(p_1)}(t) \neq 0$ et $f^{(p)}(t) = 0$ pour $p < p_1$; le deuxième entier caractéristique, p_2 , est tel que $\{f^{(p_1)}(t), f^{(p_2)}(t)\}$ libre, et que pour $p_1 \leq p < p_2$, $f^{(p)}(t)$ est colinéaire à $f^{(p_1)}(t)$.

Nous allons voir que cette suite d'entiers, « caractérise » de plus en plus de notions attachées à l'arc.

Et d'abord :

THÉORÈME 6.19. — *Soit un arc géométrique C de classe C^k , $k \geq 1$, représenté par l'arc paramétré (I, f) . S'il existe un sous-intervalle J de I tel que, pour tout t de J , on ait $\{f'(t), f''(t), \dots, f^{(i)}(t)\}$ libre et $\{f'(t), f''(t), \dots, f^{(i)}(t), f^{(i+1)}(t)\}$ famille liée, le sous-arc D associé à $(J, f|_J)$ est dans un sous-espace affine de dimension i de A affine euclidien.*

Bien que l'on travaille sur des arcs paramétrés, il est facile de voir que la notion est géométrique.

Les hypothèses permettent de dire qu'il existe i fonctions de J dans \mathbb{R} , $\varphi_1, \dots, \varphi_i$, telles que :

6.20. $\forall t \in J, f^{(i+1)}(t) = \varphi_1(t)f'(t) + \varphi_2(t)f''(t) + \dots + \varphi_i(t)f^{(i)}(t)$,
ou encore, qu'en posant $g(t) = f'(t)$, on a

6.21. $\forall t \in J, g^{(i)}(t) = \varphi_1(t)g(t) + \varphi_2(t)g'(t) + \dots + \varphi_i(t)g^{(i-1)}(t)$.

Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , (direction de A), euclidien de dimension n , en projetant 6.21 sur chaque e_k on obtient n équations linéaires du type :

$$g_k^{(i)}(t) = \varphi_1(t)g_k(t) + \varphi_2(t)g_k'(t) + \dots + \varphi_i(t)g_k^{(i-1)}(t),$$

soit un système de rang i , permettant de calculer $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i$ sous forme de fractions rationnelles par rapport aux fonctions $g_k^{(r)}(t)$, ($0 \leq r \leq i$), qui sont fonctions continues de t ; le dénominateur des fractions rationnelles ne s'annule pas. (C'est toujours ce fameux Théorème de Rouché, qui, pour moi, «l'emporte aux points» dans son combat contre le pivot de Gauss. Voir Tome 1, Théorème 9.51 et formules 9.55). Le système est de rang i , rang de la famille $\{g(t), g'(t), \dots, g^{(i-1)}(t)\}$.

Donc les fonctions φ_j sont continues.

Soit alors $t_0 \in J$, $F = \text{Vect}(f'(t_0), \dots, f^{(i)}(t_0))$ et G un supplémentaire de F dans E , p la projection de E sur G . C'est une application linéaire de E dans E , donc différentiable partout, de différentielle constante égale à p , et comme f est dérivable, l'application $h = p \circ f$ est dérivable, de dérivée $h'(t) = dp(f(t))(f'(t)) = p(f'(t))$, d'où $h' = p \circ f'$, (voir Tome 3, exemples 16.20 et 16.24 pour ces rappels de calcul différentiel).

Mais f étant de classe C^k , on peut dériver k fois h , et pour $1 \leq i \leq k$ on aura $h^{(i)} = p \circ f^{(i)}$, d'où en faisant agir p , linéaire, sur l'égalité 6.20, la relation

6.22. $h^{(i+1)}(t) = \varphi_1(t)h'(t) + \varphi_2(t)h''(t) + \dots + \varphi_i(t)h^{(i)}(t)$,

qui montre que dans le Banach G , la fonction h' est solution d'une équation linéaire, de donnée initiale $h'(t_0) = h''(t_0) = \dots = h^{(i)}(t_0) = 0$ puisqu'en t_0 , les vecteurs $f'(t_0), f''(t_0), \dots, f^{(i)}(t_0)$ ont une projection nulle sur G .

L'étude des équations différentielles linéaires, (Tome 3, chapitre 18, §3), nous permet de savoir qu'alors h' est nulle sur J , donc $h(t) = h(t_0)$ est un vecteur constant de G et la décomposition du vecteur $f(t)$ en $f(t) = k(t) + h(t)$, dans $E = F \oplus G$, avec $k(t) \in F$ et $h(t) \in G$, nous permet de dire que $f(t) = h(t_0) + k(t)$ avec $k(t)$ dans F , est un vecteur du sous-espace affine de direction $F = \text{Vect}\{f'(t_0), \dots, f^{(i)}(t_0)\}$, de dimension i . ■

COROLLAIRE 6.23. — *Si un arc paramétré (I, f) , de classe C^2 au moins, est tel que sur I , $f'(t) \neq 0$ et $f''(t)$ est colinéaire à $f'(t)$, son support est un intervalle d'une droite.*

Car d'après le Théorème 6.19, son support est dans une droite affine, et le paramétrage étant continu, l'image de I , intervalle donc connexe est connexe donc est un intervalle. ■

COROLLAIRE 6.24. — *Si un arc paramétré (I, f) , de classe C^3 au moins, est tel que sur I , la famille $\{f'(t), f''(t)\}$ est libre avec $f^{(3)}(t) \in \text{Vect}\{f'(t), f''(t)\}$ l'arc est plan.*

Nous retrouverons ces deux corollaires, en liaison avec courbure et torsion, aux paragraphes 6 et 7. Pour l'instant revenons à nos entiers caractéristiques pour voir en quoi ils caractérisent l'allure locale de la courbe. Ah oui, on parle aussi de courbe, d'arc de courbe au lieu d'arc paramétré.

Mais avant je vais devoir parler de la limite d'un sous-espace affine, tout au moins dans un cas particulier.

6.25. LIMITE DE SOUS-ESPACES VECTORIELS ET DE SOUS-ESPACES AFFINES.

Soit E espace vectoriel réel de dimension n , normé.

On suppose donnés, pour t dans $V(t_0) - \{t_0\}$, $V(t_0)$ voisinage de t_0 dans \mathbb{R} , p vecteurs $u_1(t), \dots, u_p(t)$, indépendants, les fonctions u_1, \dots, u_p ayant des limites, $a_i = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} u_i(t)$, et la famille $\{a_1, \dots, a_p\}$ étant libre.

Si par ailleurs $\{v_1(t), \dots, v_p(t)\}$, pour $t \in V(t_0) - \{t_0\}$, est une autre base de $F(t) = \text{Vect}(u_1(t), \dots, u_p(t))$, telle que pour $i = 1, \dots, p$, $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} v_i(t) = b_i$ existe, avec $\{b_1, \dots, b_p\}$ libre, alors on a :

$$\text{Vect}(a_1, \dots, a_p) = \text{Vect}(b_1, \dots, b_p).$$

En effet, pour tout i, j compris entre 1 et p , et tout t de $V(t_0) - \{t_0\}$ on a des scalaires $\varphi_{ij}(t)$ tels que :

$$6.26. \quad u_j(t) = \sum_{i=1}^p \varphi_{ij}(t)v_i(t).$$

LEMME 6.27. *Les p^2 fonctions φ_{ij} définies par 6.26 ont une limite si t tend vers t_0 , $t \neq t_0$.*

En effet, soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base fixée de E . Les formes duales, (Tome 1, 6.108) linéaires de $E \simeq \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} sont continues, (Tome 2, Corollaire 6.31), et on fait agir les e_k^* sur 6.26. On a, pour $k = 1, \dots, n$,

$$6.28. \quad \sum_{i=1}^p \varphi_{ij}(t) e_k^*(v_i(t)) = e_k^*(u_j(t)), \text{ soit un système de } n \text{ équations,}$$

à p inconnues, $\varphi_{1j}(t), \dots, \varphi_{pj}(t)$, j étant supposé fixé. La matrice $\mathcal{M}(t)$ des $(e_k^*(v_i(t)))_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq p}}$ est définie pour $t \in V(t_0) - \{t_0\}$, avec des e_k^* continues et

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} v_i(t) = b_i \text{ donc } \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \mathcal{M}(t) = (e_k^*(b_i))_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq i \leq p}} = \mathcal{M}_0 \text{ existe, (composition}$$

de limites), avec \mathcal{M}_0 de rang p puisque $\{b_1, \dots, b_p\}$ est libre. Donc il existe un mineur de \mathcal{M}_0 d'ordre p non nul, et \mathcal{M}_0 étant obtenue par une limite, ce mineur reste localement non nul, d'où un voisinage $W(t_0)$, (non privé de t_0 cette fois) et p indices k_1, \dots, k_p tels que les équations extraites de 6.28 pour $k = k_1, \dots, k_p$ soient indépendantes sur $W(t_0) - \{t_0\}$, (attention les $v_i(t_0)$ n'existent pas a priori).

Les formules de Cramer, (Tome 1, 9.55) montrent alors que les $\varphi_{ij}(t)$ sont des fractions rationnelles, à dénominateur ne s'annulant pas sur $W(t_0) - \{t_0\}$, par rapport aux $e_{k_r}^*(u_j(t))$ et $e_{k_r}^*(v_i(t))$.

Le dénominateur de $\varphi_{ij}(t)$ est le déterminant de la matrice des

$$(e_{k_r}^*(v_i(t)))_{\substack{1 \leq r \leq p \\ 1 \leq i \leq p}}$$

déterminant non nul ayant pour limite $\det(e_{k_r}^*(b_i))_{\substack{1 \leq r \leq p \\ 1 \leq i \leq p}} \neq 0$, donc, les $e_{k_r}^*$ étant continues et les u_i ayant une limite en t_0 , finalement $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \varphi_{ij}(t)$

existe. ■

CONSÉQUENCE 6.29. — Avec les hypothèses faites en 6.25, on a :

$$\text{Vect}(a_1, \dots, a_p) = \text{Vect}(b_1, \dots, b_p).$$

En effet, on passe à la limite dans 6.26 en notant $\lambda_{ij} = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \varphi_{ij}(t)$.

Alors on a les relations $a_j = \sum_{i=1}^p \lambda_{ij} b_i$, valables pour $j = 1, \dots, p$, d'où

$$\text{Vect}(a_1, \dots, a_p) \subset \text{Vect}(b_1, \dots, b_p).$$

En inversant les rôles, on aurait aussi

$$\text{Vect}(b_1, \dots, b_p) \subset \text{Vect}(a_1, \dots, a_p),$$

d'où l'égalité. ■

Ce résultat va nous servir pour parler de tangente, plan osculateur, trois espace osculateur ..., en permettant de donner un sens à la notion de limite d'un sous-espace vectoriel, ou d'un sous-espace affine.

DÉFINITION 6.30. — Soit $E = \mathbb{R}^n$, normé. On dira qu'un sous-espace vectoriel $F(t)$, de dimension p , défini pour t dans $V(t_0) - \{t_0\}$, ($V(t_0)$ voisinage de t_0), admet une limite F_0 si t tend vers t_0 , s'il existe une base $\mathcal{B}(t) = \{u_1(t), \dots, u_p(t)\}$ de $F(t)$ pour $t \in V(t_0) - \{t_0\}$, telle que pour chaque i entre 1 et p , $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} u_i(t) = a_i$ existe et que la famille $\{a_1, \dots, a_p\}$

soit libre. Dans ce cas $F_0 = \text{Vect}\{a_1, \dots, a_p\}$.

Cette définition a un sens, le calcul 6.29 justifiant que toute autre base $\mathcal{C}(t)$ de $F(t)$ vérifiant les mêmes hypothèses conduit au même F_0 .

6.31. CAS D'UN SOUS-ESPACE AFFINE

Si, dans A espace affine de direction $E = \mathbb{R}^n$ normé, d'origine o , on considère un sous-espace affine $B(t)$, défini pour t dans $V(t_0) - \{t_0\}$, ($V(t_0)$ voisinage de t_0), par la donnée d'un point et de sa direction $F(t)$, qu'appelera-t-on limite de $B(t)$?

D'abord, si le point b de $B(t)$ est indépendant de t , et si $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F_0$, au sens de la définition 6.30, existe, il est tout naturel d'appeler $\lim_{t \rightarrow t_0} B(t) = B_0$, le sous-espace affine passant par b , et de direction F_0 .

Supposons ensuite qu'il existe, pour chaque t de $V(t_0) - \{t_0\}$ deux points $b(t)$ et $c(t)$ dans $B(t)$ tels que $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} b(t) = b_0$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} c(t) = c_0$ existent,

(c'est-à-dire tels que dans E vectoriel normé, avec o origine de A , on ait

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \overrightarrow{ob(t)} = \overrightarrow{ob_0} \text{ et } \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \overrightarrow{oc(t)} = \overrightarrow{oc_0}.$$

Nous allons montrer, qu'avec $F_0 = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} F(t)$, (limite que l'on suppose exister), les sous-espaces affines de direction F_0 et passant respectivement par b_0 et c_0 sont confondus, c'est-à-dire que $\overrightarrow{b_0c_0} \in F_0$.

En effet, comme $b(t)$ et $c(t)$ sont dans $F(t)$, de base $\{u_1(t), \dots, u_p(t)\}$, pour tout t de $V(t_0) - \{t_0\}$ il existe p scalaires notés $\lambda_1(t), \dots, \lambda_p(t)$ tels que :

$$\mathbf{6.32.} \quad \overrightarrow{b(t)c(t)} = \sum_{j=1}^p \lambda_j(t) \overrightarrow{u_j(t)}.$$

Si $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base constante de E , on fait agir sur **6.32** les formes duales e_k^* , d'où un système de n équations à p inconnues, $\lambda_1(t), \dots, \lambda_p(t)$:

$$\mathbf{6.33.} \quad \sum_{j=1}^p e_k^*(\overrightarrow{u_j(t)}) \lambda_j(t) = e_k^*(\overrightarrow{b(t)c(t)}),$$

obtenues pour $k = 1, \dots, n$.

Le raisonnement du lemme 6.27 s'applique alors et permet de dire que les fonctions λ_j , définies sur $V(t_0) - \{t_0\}$ ont une limite, μ_j si t tend vers t_0 , mais alors on peut passer à la limite dans 6.32 et obtenir l'égalité

$$\overrightarrow{b_0 c_0} = \sum_{j=1}^p \mu_j a_j, \text{ avec } a_j = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} u_j(t), \text{ et } F_0 = \text{Vect}(a_1, \dots, a_p), \text{ ce qui}$$

était le résultat voulu. ■

On peut donc poser la définition suivante :

DÉFINITION 6.34. — Soit dans A affine de direction $E = \mathbb{R}^n$, normé, un sous-espace affine $B(t)$, défini pour t dans $V(t_0) - \{t_0\}$ par la donnée d'un point $b(t)$ et de sa direction $F(t)$, tels que $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} b(t) = b_0$ existe, ainsi que

$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} F(t) = F_0$ au sens de la définition 6.30. Alors, le sous-espace affine B_0

passant par b_0 et de direction F_0 est indépendant du choix de $b(t)$ vérifiant l'hypothèse. On l'appelle limite de $B(t)$ quand t tend vers t_0 .

Cette définition nous servira au §3, pour l'étude des branches infinies.

Je vous dois un aveu. Depuis que j'enseigne, jamais je n'avais rédigé ce passage, (et je ne l'ai jamais vu rédigé, mais je ne suis pas très curieux) et je me contentais, pour parler de tangentes, plan osculateurs ... de faire comme tout le monde, de parler de « position limite » d'une droite ou d'un plan, sans m'étendre davantage.

Il est bon, de temps en temps, de faire un effort de rigueur, et ce d'autant plus que l'emploi de calculatrices et d'ordinateurs, certes performants, affaiblit encore le souci de rigueur dans le domaine de l'étude des arcs paramétrés. Je vous ennuie peut-être avec cette étude, mais je me suis fait plaisir ! D'autant qu'en ce mois de Février, dans le Morvan, il pleut, alors autant rédiger au coin du feu !

REMARQUE 6.35. — Dans ce qui précède, on peut remplacer $V(t_0) - \{t_0\}$ par un intervalle $]a, a + \alpha[$, $\alpha > 0$ pour étudier $\lim_{t \rightarrow a^+}$, ou par $]a - \alpha, a[$

pour $\lim_{t \rightarrow a^-}$ ou par $[A, +\infty[$ pour $\lim_{t \rightarrow +\infty}$: les raisonnements, résultats et définitions sont les mêmes.

DÉFINITION 6.36. — Soit un arc paramétré (I, f) de support Γ et m_0 le point de Γ de paramètre t_0 . On dira que Γ admet en m_0 une tangente D_0 si et seulement si la droite $D(t_0, t)$ passant par m_0 , de direction $\overrightarrow{\text{Vect}\{m_0 m(t)\}}$ admet une limite lorsque t tend vers t_0 .

Ceci suppose donc qu'il existe un voisinage $V(t_0)$ tel que pour t dans $I \cap (V(t_0) - \{t_0\})$ on ait $m(t) \neq m_0$, sinon la droite affine $D(t_0, t)$ n'existerait pas; puis qu'il existe un vecteur directeur de cette droite, donc du type $\lambda(t)\overrightarrow{m_0 m(t)}$ (avec $\lambda(t)$ réel non nul) ayant une limite $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ si t tend vers t_0 . Le point m_0 étant constant, d'après la définition 6.34 la limite de $D(t_0, t)$ existera, sera indépendante du choix de $\lambda(t)$ tel que $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \lambda(t)\overrightarrow{m_0 m(t)}$ existe. Ce sera la droite affine D_0 passant par m_0 , de direction $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$.

THÉORÈME 6.37. — Soit un arc paramétré (I, f) de support Γ de classe C^k , $k \geq 1$. Si en $m_0(t_0)$ le premier entier caractéristique, p_1 , existe, la tangente en m_0 existe et c'est la droite affine passant par m_0 , de direction S_{p_1} , premier sous-espace caractéristique.

Puisque p_1 existe, (voir définition 6.18), c'est que $k \geq p_1$ et que pour $1 \leq i < p_1$, (s'il y en a), $f^{(i)}(t_0) = 0$.

En prenant un développement de Taylor-Young en t_0 à l'ordre p_1 , (voir Tome 2, Théorème 7.46, où f pourrait être à valeurs dans E e.v.n de dimension finie, ou Tome 3, Théorème 16.54, où, là, l'outil est trop puissant), on a :

$$\overrightarrow{m_0 m(t)} = f(t) - f(t_0) = \frac{(t - t_0)^{p_1}}{p_1!} (f^{(p_1)}(t_0) + \varepsilon(t)),$$

avec $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon(t) = 0$, et $f^{(p_1)}(t_0) \neq 0$, donc il existe un voisinage $V(t_0)$ tel

que sur $I \cap (V(t_0) - \{t_0\})$ on ait $f^{(p_1)}(t_0) + \varepsilon(t) \neq 0$, d'où l'existence de la sécante $D(t_0, t)$, et avec $\lambda(t) = \frac{p_1!}{(t - t_0)^{p_1}}$, un vecteur directeur $f^{(p_1)}(t_0) + \varepsilon(t)$ de cette sécante qui a une limite non nulle. Il résulte de la définition 6.36, que la tangente existe, et qu'il s'agit de la droite

affine D_0 passant par m_0 , de vecteur directeur $f^{(p_1)}(t_0)$, donc de direction $S_{p_1} = \mathbb{R}f^{(p_1)}(t_0)$. ■

REMARQUE 6.38. — Dans le Théorème 6.37 on énonce une condition suffisante d'existence d'une tangente, mais elle n'est pas nécessaire comme le montre l'exemple suivant.

On définit un arc du plan affine \mathbb{R}^2 , en posant, pour t réel, $x(0) = 0$, $x(t) = e^{-\frac{1}{t^2}}$ si $t > 0$ et $x(t) = -e^{-\frac{1}{t^2}}$ si $t < 0$, puis $y(t) = 0$ pour tout t .

L'arc (\mathbb{R}, f) avec $f(t) = (x(t), y(t))$ est C^∞ sur \mathbb{R}^* , or un calcul classique montre que pour $t > 0$, et p entier, $x^{(p)}(t) = \frac{Q_p(t)}{t^{\alpha_p}} e^{-\frac{1}{t^2}}$, avec $\alpha_p \in \mathbb{N}^*$, Q_p polynôme en t , donc $\lim_{t \rightarrow 0^+} x^{(p)}(t) = 0$. Comme la fonction x est impaire, on a aussi $\lim_{t \rightarrow 0^-} x^{(p)}(t) = 0$, d'où en fait $x^{(p)}(0)$ existe pour tout p de \mathbb{N}^* , et $x^{(p)}(0) = 0$. Comme $y^{(p)} \equiv 0$, on a $f^{(p)}(0) = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, donc l'arc Γ , de classe C^∞ , n'a aucun entier caractéristique en 0. En particulier p_1 , premier entier caractéristique n'existe pas.

Et pourtant, si $t \neq 0$, $m(t) = (x(t), 0)$ avec $x(t) \neq 0$ donc la droite $D_{t,0}$ existe, c'est l'axe des abscisses, constant par rapport à t , donc de limite lui-même : en 0 l'arc Γ admet une tangente, sans avoir de premier entier caractéristique, (voir figure 6.38).

EXEMPLE 6.39. — Balayons une autre idée préconçue : est-il concevable qu'un arc C^∞ ait des points «anguleux»? Non n'est-ce pas... Et bien si!

Le graphe de l'arc de l'exemple 6.38 est en fait, (voir 6.38), $\Gamma =]-1, 1[\times \{0\}$. On va faire basculer la branche $] -1, 0[\times \{0\}$ d'un angle $\theta - \pi$, en posant :

$g(0) = (0, 0)$; $g(t) = (e^{-1/t^2}, 0)$ si $t > 0$ et $g(t) = ((\cos \theta)e^{-1/t^2}, (\sin \theta)e^{-1/t^2})$ si $t < 0$.

Vous n'aurez aucun mal à vérifier que (\mathbb{R}, g) est un arc de classe C^∞ , de graphe Γ_1 figuré en, 6.39, qui, pour $\theta \neq 0(\pi)$ présente un point anguleux.

Bien sûr, en 0, les entiers caractéristiques n'existent pas.

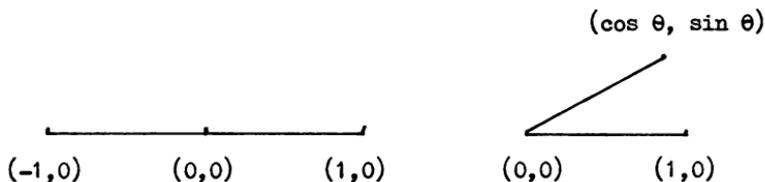


Fig. 6.38

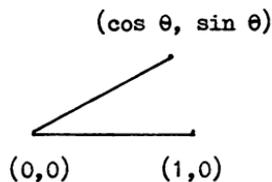


Fig. 6.39

Poursuivons maintenant l'étude locale des arcs paramétrés.

DÉFINITION 6.40. — Soit un arc paramétré (I, f) de support Γ et $m_0(t_0)$ un point de Γ ayant une tangente D_0 . On appelle plan tangent à Γ en m_0 tout plan affine contenant D_0 .

DÉFINITION 6.41. — Soit un arc paramétré (I, f) de support Γ , et $m_0(t_0)$ un point de Γ ayant une tangente D_0 . On appelle plan osculateur à l'arc en m_0 , la limite, si elle existe, d'un plan tangent à Γ en m_0 , contenant $m(t)$ pour t voisin de t_0 , lorsque t tend vers t_0 .

Ceci suppose donc l'existence d'un voisinage $V(t_0)$ tel que pour t dans $I \cap (V(t_0) - \{t_0\})$ le vecteur $\overrightarrow{m_0 m(t)}$ ne soit pas colinéaire au vecteur \vec{u} directeur de la tangente.

THÉORÈME 6.42. — Soit un arc paramétré (I, f) de support Γ et de classe C^k . Si en m_0 de Γ , de paramètre t_0 , les deux premiers entiers caractéristiques existent, le plan osculateur en m_0 existe. C'est le plan affine passant par m_0 , de direction S_{p_2} deuxième espace caractéristique.

Puisque p_2 existe, p_1 , premier entier caractéristique existe aussi, d'où une tangente D_0 de direction S_{p_1} , vu le Théorème 6.37.

Le plan tangent contenant $m(t)$, pour t voisin de t_0 , existera si $\overrightarrow{m_0 m(t)} \notin S_{p_1}$.

Or $\overrightarrow{m_0 m(t)} = f(t) - f(t_0)$, se développe à l'ordre p_2 par la formule de Taylor-Young en :

$$\overrightarrow{m_0 m(t)} = \sum_{p=p_1}^{p_2} \frac{(t-t_0)^p}{p!} f^{(p)}(t_0) + (t-t_0)^{p_2} \varepsilon(t) \text{ avec } \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon(t) = 0.$$

Mais vu la définition des entiers caractéristiques, (voir 6.18) pour $p_1 < p < p_2$, si de tels p existent, $f^{(p)}(t_0)$ est proportionnel à $f^{(p_1)}(t_0)$, par exemple $f^{(p)} = \alpha_p f^{(p_1)}(t_0)$ d'où, en posant :

$$\lambda(t) = \sum_{p=p_1+1}^{p_2-1} (t-t_0)^{p-p_1} \frac{p_1!}{p!} \alpha_p,$$

si $p_2 - p_1 > 1$, (et $\lambda(t) = 0$ sinon), une relation

$$6.43. \quad \overrightarrow{m_0 m(t)} = \frac{(t-t_0)^{p_1}}{p_1!} (1 + \lambda(t)) f^{(p_1)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^{p_2}}{p_2!} f^{(p_2)}(t_0) \\ + \frac{(t-t_0)^{p_2}}{p_2!} \varepsilon(t), \text{ avec } \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0.$$

(J'espère que vous n'êtes pas gênés par l'absence ou la présence des flèches sur les vecteurs, il faut un peu de fantaisie dans la vie.)

Comme $f^{(p_1)}(t_0) \in S_{p_1}$, on aura :

$$\overrightarrow{m_0 m(t)} \notin S_{p_1} \iff \left(\frac{(t-t_0)^{p_2}}{p_2!} (f^{(p_2)}(t_0) + \varepsilon(t)) \notin S_{p_1} \right),$$

soit, pour $t \neq t_0$,

$$\iff f^{(p_2)}(t_0) + \varepsilon(t) \notin S_{p_1}.$$

La famille $\{f^{(p_1)}(t_0), f^{(p_2)}(t_0)\}$ étant libre, si on note \mathcal{M} la matrice $(n, 2)$ de ses composantes dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ fixée de E , il existe un mineur 2×2 non nul, noté Δ_{ij} , calculé à partir des lignes de numéros i et j , ($1 \leq i < j \leq n$) de \mathcal{M} . Mais le mineur calculé à partir des mêmes lignes de la matrice $\mathcal{N}(t)$ des composantes de $f^{(p_1)}(t_0)$ et $f^{(p_2)}(t_0) + \varepsilon(t)$ aura pour limite Δ_{ij} si t tend vers t_0 , donc reste localement non nul : il existe $V(t_0)$ voisinage de t_0 tel que pour tout t de $V(t_0) - \{t_0\}$ la famille $\{f^{(p_1)}(t_0), (f^{(p_2)}(t_0) + \varepsilon(t))\}$ soit libre. De ce fait le plan tangent en m_0 , passant par $m(t)$ existe pour tout t de $V(t_0) - \{t_0\}$.

Ce plan, noté $P(t)$, passe par m_0 fixe, et a pour base particulière $\{f^{(p_1)}(t_0), f^{(p_2)}(t_0) + \varepsilon(t)\}$, ces vecteurs ayant pour limites si t tend vers t_0 , $f^{(p_1)}(t_0)$ et $f^{(p_2)}(t_0)$ respectivement. Comme ces vecteurs sont indépendants, la définition 6.34 s'applique et nous « dit », (avec quelle parole), que $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} P(t)$ existe, et c'est le plan passant par m_0 , de direction

S_{p_2} . ■

REMARQUE 6.44. — Là encore, on a une condition suffisante d'existence du plan osculateur, mais pas nécessaire.

REMARQUE 6.45. — En appelant *sécante* en m_0 à l'arc $\Gamma = (I, f)$, toute droite D passant par m_0 , la tangente est en quelque sorte la sécante osculatrice en m_0 à Γ , si elle existe.

REMARQUE 6.46. — Si la dimension n de E est supérieure ou égale à 4, on continue. On parlerait de *3-espace tangent* en m_0 à Γ ayant un plan osculateur P_0 , pour tout sous-espace affine de dimension 3, contenant P_0 , et de *3-espace osculateur* en m_0 à Γ , si le 3-espace affine tangent en m_0 à

Γ et passant par $m(t)$, pour t voisin de t_0 , existe, et si, en le notant $B(t)$, on a $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} B(t) = B_0$ existe, B_0 étant alors ce 3-espace osculateur.

On établirait également que, si le troisième entier caractéristique p_3 existe en $m_0(t_0)$, alors l'arc admet un 3-espace osculateur B_0 , sous-espace affine de direction S_{p_3} contenant m_0 .

Et on continue ainsi, avec, si p_k , $k^{\text{ième}}$ entier caractéristique existe, l'existence d'un k -espace osculateur à Γ en m_0 , espace affine passant par m_0 , de direction S_{p_k} , $k^{\text{ième}}$ sous-espace caractéristique.

Intuitivement, la tangente en m_0 est la sécante qui « colle » le plus à la courbe; le plan osculateur est le plan tangent qui « colle » le plus à la courbe et ainsi de suite.

6.47. Paramétrisations du plan osculateur et de la tangente.

Soit $\Gamma = (I, f)$ un arc de classe C^k de A affine sur E vectoriel normé de dimension n et $\mathcal{R} = (0; e_1, \dots, e_n)$ un repère de A , (voir Tome 4, 1.32).

Si $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \cdot e_i$, le point $m(t)$ du support Γ a pour coordonnées dans le repère \mathcal{R} les $f_i(t)$.

Si le premier entier caractéristique p_1 existe, la tangente est paramétrée par : p de coordonnées (x_1, \dots, x_n) est sur la tangente en $m(t)$ à Γ si et seulement si il existe λ réel tel que $\overrightarrow{m(t)p} = \lambda \overrightarrow{f^{(p_1)}(t)}$ donc si et seulement si

$$6.48. \quad \forall i = 1, \dots, n, x_i = f_i(t) + \lambda f_i^{(p_1)}(t).$$

De même, (voir Tome 4, 1.84), si le deuxième entier caractéristique, p_2 , existe, le point p sera dans le plan osculateur en $m(t)$ à Γ si et seulement si $\overrightarrow{m(t)p}$ est dans $S_{p_2} = \text{Vect}(f^{(p_1)}(t), f^{(p_2)}(t))$, direction du plan osculateur, donc si et seulement si il existe λ et μ réels tels que $\overrightarrow{m(t)p} = \lambda f^{(p_1)}(t) + \mu f^{(p_2)}(t)$, d'où la paramétrisation du plan osculateur :

$$6.49. \quad \forall i = 1, \dots, n, x_i = f_i(t) + \lambda f_i^{(p_1)}(t) + \mu f_i^{(p_2)}(t),$$

valable pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Dans le cas où ils existeraient, on paramétriserait de façon analogue le 3-espace osculateur, ou le k -espace osculateur.

Cas particulier de E de dimension 3.

La recherche s'arrête à celle du plan osculateur qui est un hyperplan de A affine, et qui a donc une équation (voir Tome 4, 1.33) : le point p de coordonnées x, y, z sera dans le plan osculateur si et seulement si on a :

$$6.50. \quad \begin{vmatrix} x - f_1(t) & y - f_2(t) & z - f_3(t) \\ f_1^{(p_1)}(t) & f_2^{(p_1)}(t) & f_3^{(p_1)}(t) \\ f_1^{(p_2)}(t) & f_2^{(p_2)}(t) & f_3^{(p_2)}(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Un peu de vocabulaire.

DÉFINITION 6.51. — *Un point $m(t)$ d'un arc paramétré (I, f) est dit régulier si et seulement si le premier entier caractéristique est 1, il est stationnaire si $p_1 > 1$.*

Ceci suppose l'arc de classe suffisante. On dira plus généralement que :

DÉFINITION 6.52. — *Soit un arc paramétré (I, f) de classe C^k , $k \geq 1$. On dit que $m(t)$ est p -régulier si et seulement si les p premiers entiers caractéristiques sont $1, 2, \dots, p$.*

(Ceci suppose $k \geq p$).

REMARQUE 6.53. — Soit un arc paramétré (I, f) de classe C^k , $k \geq 1$ de A affine sur E vectoriel normé de dimension n . Si un point $m(t)$ est p -régulier, les vecteurs $f'(t), f''(t), \dots, f^{(p)}(t)$ sont libres, donc ceci se traduit par l'existence d'un mineur d'ordre p , de la matrice (n, p) des coordonnées des $f^{(j)}(t)$ dans une base \mathcal{B} fixée de E , non nul, et par continuité de l'application déterminant, ce mineur reste localement non nul.

Soit donc $\Omega_p = \{t; t \in I, m(t) \text{ } p\text{-régulier}\}$, si $t \in \Omega_p$ il existe un voisinage de t dans Ω_p qui est donc ouvert comme voisinage de chacun de ses points (Tome 2, Théorème 1.8). Mais alors Ω_p est réunion de ses composantes connexes qui sont donc des intervalles, (forme des connexes de \mathbb{R} , Tome 2, Théorèmes 3.6 et 4.77), ouverts de I , (Tome 2, Théorème 3.24).

En particulier, on se placera sur les composantes connexes :

de Ω_1 pour étudier l'abscisse curviligne,

de Ω_2 pour étudier la première courbure,

de Ω_3 pour introduire la deuxième courbure... et ainsi de suite, comme on le verra au paragraphe 5.

Que se passe-t-il sur $I - \Omega_p$?

Si $I - \Omega_p$ est de cardinal fini, alors l'arc est fractionné en un nombre fini d'arcs p -réguliers dont on peut étudier les raccordements.

Si $I - \Omega_p$ contient un sous-intervalle J d'intérieur non vide, le Théorème 6.19 nous montre que le sous-arc $(J, f|_J)$ est contenu dans un sous-espace affine de dimension p , et dans ce cas la recherche du $(p + 1)$ ième entier caractéristique ne se pose plus.

Il en est de même de toute composante connexe éventuelle de $(I - \overset{\circ}{\Omega}_p)$, intervalle ouvert associé à un sous-arc p -régulier d'un sous-espace affine de dimension p .

Mais si t_0 est un point d'accumulation de $I - \overset{\circ}{\Omega}_p$, non dans $(I - \overset{\circ}{\Omega}_p)$, on peut se retrouver avec des composantes connexes de $I - \overset{\circ}{\Omega}_p$ en quantité dénombrable, non ordonnables, et être bien embêté alors pour représenter graphiquement la chose.

6.54. Revenons à des notions plus simples en étudiant la place (locale) de l'arc paramétré par rapport à un hyperplan.

Nous avons vu en 3.35, qu'étant donné un hyperplan H d'équation $u(m) = 0$ dans un repère \mathcal{R} de A affine réel de direction E , H détermine deux demi-espaces,

$$R_+ = \{m; m \in A; u(m) \geq 0\} \quad \text{et} \quad R_- = \{m; m \in A; u(m) \leq 0\},$$

H , R_+ et R_- étant convexes.

De plus, si F , direction de l'hyperplan affine H est le noyau de la forme linéaire continue φ , et si $m_0 \in H$ on aura $(m \in H) \iff (\overrightarrow{m_0 m} \in \text{Ker } \varphi)$, d'où comme φ est linéaire et $\overrightarrow{m_0 m} = \overrightarrow{om} - \overrightarrow{om_0}$, l'équation de H mise sous forme :

$$\mathbf{6.55.} \quad u(m) = 0 \iff \varphi(\overrightarrow{om}) = \varphi(\overrightarrow{om_0}).$$

Comme φ est continue, (linéaire en dimension finie, voir Tome 2, Corollaire 6.31), il en résulte que H , R_+ et R_- sont des fermés de A , les intérieurs de R_+ et R_- étant :

$$\overset{\circ}{R}_+ = \{m; u(m) > 0\} \quad \text{et} \quad \overset{\circ}{R}_- = \{m; u(m) < 0\},$$

donc H , $\overset{\circ}{R}_+$ et $\overset{\circ}{R}_-$ formant une partition de A .

Si $\Gamma = (I, f)$ est un arc-paramétré de classe C^k , et si $m_0(t_0) \in H$, nous voulons savoir dans quelle partie de cette partition se trouve $m(t)$, pour t voisin (et distinct) de t_0 .

THÉORÈME 6.56. — Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de classe C^k , $m_0(t_0)$ un point de Γ et H un hyperplan de A d'équation $u(m) = 0$, de direction $F = \text{Ker } \varphi$, (φ forme linéaire).

Si p_i , le plus petit entier caractéristique tel que $S_{p_i} \not\subset F$ existe, il existe un voisinage $V(t_0)$ dans I tel que :

1) si p_i est pair $m(t)$ reste dans le même demi-espace ouvert pour $t \in V(t_0) - \{t_0\}$;

2) si p_i est impair, $m(t)$ est dans l'un des demi-espaces ouverts pour $t \in V(t_0) - \{t_0\}$, $t > t_0$ et dans l'autre pour $t \in V(t_0) - \{t_0\}$, $t < t_0$. Dans ce cas on dit que l'arc traverse l'hyperplan H en m_0 .

6.57. On dit que l'arc a un contact d'ordre p_i avec l'hyperplan H , et ce, que p_i soit pair ou impair.

Comme pour tout $p < p_i$, $f^{(p)}(t_0) \in S_{p_{i-1}} \subset F$, si on prend un développement de Taylor-Young à l'ordre p_i en t_0 on aura

$$\overrightarrow{m_0 m(t)} = v(t) + \frac{(t - t_0)^{p_i}}{p_i!} (f^{(p_i)}(t_0) + \varepsilon(t)),$$

avec $v(t) \in F = \text{Ker } \varphi$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \varepsilon(t) = 0$.

$$\text{Le signe de } u(m(t)) = \varphi(\overrightarrow{m_0 m(t)}) = \frac{(t - t_0)^{p_i}}{p_i!} (\varphi(f^{(p_i)}(t_0)) + \varphi(\varepsilon(t)))$$

va donc dépendre de la parité de p_i .

On a $\varphi(f^{(p_i)}(t_0)) \neq 0$, ($S_{p_{i-1}} \subset \text{Ker } \varphi$, $S_{p_i} \not\subset \text{Ker } \varphi$ et $S_{p_i} = S_{p_{i-1}} \oplus \mathbb{R}f^{(p_i)}(t_0)$ vu la définition des sous-espaces caractéristiques, voir 6.18), et φ étant continue, (E de dimension finie), $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(\varepsilon(t)) = 0$, donc

localement $\varphi(f^{(p_i)}(t_0) + \varepsilon(t))$ reste du signe de $\varphi(f^{(p_i)}(t_0))$, d'où l'existence de $V(t_0)$ tel que, pour tout t de $V(t_0) - \{t_0\}$ le signe de $u(m(t))$ soit celui de $(t - t_0)^{p_i} \varphi(f^{(p_i)}(t_0))$ donc change en t_0 si et seulement si p_i est impair, d'où le Théorème. ■

6.58. Ceci va nous permettre de préciser l'allure locale d'un arc paramétré plan.

On considère donc $\Gamma = (I, f)$ arc plan, de classe C^k , et pour t_0 dans $\overset{\circ}{I}$, le point m_0 de paramètre t_0 . On suppose qu'en m_0 les deux entiers caractéristiques $p_1 = p$ et $p_2 = q$ existent.

Une sécante D passant par m_0 , de vecteur directeur \vec{v} , distincte de la tangente dirigée par $f^{(p)}(t_0)$ est donc telle que $S_p \not\subset \mathbb{R} \cdot \vec{v}$, directeur de l'hyperplan D , donc *l'arc traverse une sécante non tangente si et seulement si p est impair*.

Quand à la tangente, on a $S_p \subset \mathbb{R} \cdot f^{(p)}(t_0)$, mais S_q , de dimension 2, n'est pas contenu dans $\mathbb{R} \cdot f^{(p)}(t_0)$, donc *l'arc traverse localement sa tangente si et seulement si q est impair*.

On va le retrouver sur des schémas, (figure 6.58).

En effet, on peut donner un développement de Taylor-Young à l'ordre q en t_0 , qui sera du type :

$$\mathbf{6.59.} \quad \overrightarrow{m_0 m(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!} (1 + \lambda(t)) f^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} (f^{(q)}(t_0) + \varepsilon(t))$$

avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} \varepsilon(t) = 0$, vu la proportionnalité des $f^{(r)}(t_0)$ et de $f^{(p)}(t_0)$ pour $p \leq r < q$, (voir le calcul 6.43). La fonction λ est à valeurs scalaires, et ε à valeurs vectorielles.

En notant $\xi(t)$ et $\eta(t)$ les coordonnées de $m(t)$ dans le repère $(m_0; f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$ du plan affine A , on a :

$$\mathbf{6.60.} \quad \xi(t) = \frac{(t-t_0)^p}{p!} (1 + \lambda(t) + \frac{p!}{q!} (t-t_0)^{q-p} \varepsilon_1(t)) \text{ et,}$$

$$\eta(t) = \frac{(t-t_0)^q}{q!} (1 + \varepsilon_2(t)),$$

avec $\varepsilon_1(t)$ et $\varepsilon_2(t)$ composantes de $\varepsilon(t)$ dans la base $(f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0))$.

Donc $\xi(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^p}{p!}$, et change de signe en t_0 si p est impair, alors que

$\eta(t) \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} \frac{(t-t_0)^q}{q!}$, change de signe pour q impair.

Il en résulte que $\xi(t)$ et $\eta(t)$, localement positifs pour $t > t_0$, changeront de signe ou non suivant les parités respectives de p et q . La figure 6.58 précise les différences allures locales, et permet de définir

6.61. les termes de : *point d'inflexion géométrique, point de rebroussement de première espèce et point de rebroussement de deuxième espèce*.

Encore du vocabulaire. On dit qu'il y a *inflexion analytique* lorsque $q \geq 3$, (donc lorsque f' et f'' sont colinéaires) parce que cette condition est facile à traduire. Mais elle ne précise en rien l'allure de la courbe, les quatre cas de figure pouvant être obtenus.

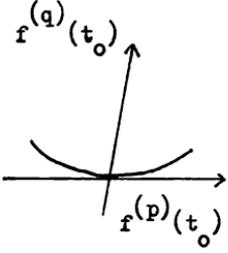
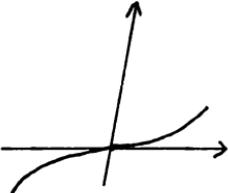
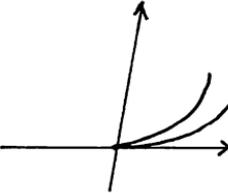
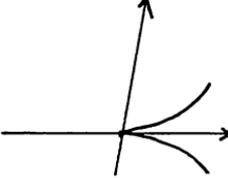
	q pair	q impair
p impair		 <p>inflexion géométrique</p>
p pair	 <p>rebroussement de deuxième espèce</p>	 <p>rebroussement de première espèce</p>

Fig. 6.58

Un point est dit *méplat* si p impair et q pair avec $q \geq 4$.

6.62. Essayons aussi de préciser l'allure locale d'un arc paramétré de A affine de dimension 3.

Soit donc $m_0(t_0)$ un point de l'arc $\Gamma = (I, f)$, arc de classe C^k tel qu'en t_0 les trois premiers entiers caractéristiques p, q et r existent, d'où une base $\{f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0), f^{(r)}(t_0)\} = \mathcal{B}(t_0)$, de l'espace vectoriel E direction de A . D'après les Théorèmes 6.37 et 6.42 on sait que $\mathbb{R}f^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente en m_0 à Γ et $\text{Vect}\{f^{(p)}(t_0), f^{(q)}(t_0)\}$ le plan osculateur.

		p impair	p pair
r impair	q pair		
	q impair		
r pair	q pair		
	q impair		

Fig. 6.62

En prenant un développement limite à l'ordre r en t_0 de $\overrightarrow{m_0 m(t)}$ on obtient, par une justification analogue à celle donnant la formule 6.59, l'égalité :

$$6.63. \quad \overrightarrow{m_0 m(t)} = \frac{(t-t_0)^p}{p!} (1+\lambda(t))f^{(p)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^q}{q!} (1+\mu(t))f^{(q)}(t_0) + \frac{(t-t_0)^r}{r!} (f^{(r)}(t_0) + \varepsilon(t))$$

où les fonctions λ et μ , à valeurs réelles, et ε , à valeurs vectorielles tendent vers 0 en t_0 .

Si $(\xi(t), \eta(t), \zeta(t))$ sont les coordonnées de $m(t)$ dans la base $\mathcal{B}(t_0)$ on a donc

$$\xi(t) \sim \frac{(t-t_0)^p}{p!}, \eta(t) \sim \frac{(t-t_0)^q}{q!} \quad \text{et} \quad \zeta(t) \sim \frac{(t-t_0)^r}{r!},$$

(équivalents lorsque t tend vers t_0) d'où l'étude des changements de signe de ces coordonnées.

Le point $m(t)$ traversera le plan osculateur en m_0 si et seulement si r est impair; il traversera le plan π_1 passant par m_0 , de direction $\text{Vect}(f^{(p)}(t_0), f^{(r)}(t_0))$ pour q impair, et le plan π_2 passant par m_0 de direction $\text{Vect}(f^{(a)}(t_0), f^{(r)}(t_0))$ pour p impair.

Le schéma 6.62 s'efforce de matérialiser les 8 cas de figure.

3. Branches infinies

DÉFINITION 6.64. — Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de A affine de direction E espace vectoriel normé, et t_0 une borne de I . On dira que l'arc Γ admet une branche infinie, lorsque t tend vers t_0 si $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \|f(t)\| = +\infty$.

Il est facile de vérifier que la notion est géométrique, c'est-à-dire indépendante du paramétrage admissible choisi. D'autre part t_0 peut être $+\infty$ ou $-\infty$.

REMARQUE 6.65. — L'arc Γ présente en t_0 une branche infinie si et seulement si, pour a fixé dans l'espace affine, on a $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \|\overrightarrow{am(t)}\| = +\infty$, avec $m(t)$

tel que $\overrightarrow{om(t)} = f(t)$.

En effet, avec o origine du repère, par inégalité triangulaire appliquée à $\overrightarrow{am(t)} = \overrightarrow{ao} + \overrightarrow{om(t)} = \overrightarrow{ao} + f(t)$, on a :

$$6.66. \quad \|f(t)\| - \|\overrightarrow{ao}\| \leq \| \|f(t)\| - \|\overrightarrow{ao}\| \| \leq \|\overrightarrow{am(t)}\| \leq \|\overrightarrow{ao}\| + \|f(t)\|,$$

double inégalité qui montre que $\|f(t)\|$ tend vers $+\infty$ si et seulement si il en est de même de $\|\overrightarrow{am(t)}\|$.

Considérons alors la droite affine $D_{a,m(t)}$ déterminée par a fixé et $m(t)$. Comme $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \|\overrightarrow{am(t)}\| = +\infty$, cette droite existe pour t dans un «voisinage» de t_0 , (privé de t_0), les guillemets parce que t_0 peut être $+\infty$, (ou $-\infty$), et on prendra alors ce voisinage sous la forme $[\alpha, +\infty[$, (ou $]-\infty, \beta]$.

THÉORÈME 6.67. — Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de classe C^0 au moins, t_0 une borne de I telle que Γ admette en t_0 une branche infinie. Si pour a fixé dans A , la droite affine $D_{a,m(t)}$ engendrée par a et $m(t)$ admet une position limite Δ_a lorsque t tend vers t_0 , (dans I), sa direction δ est indépendante de a et s'appelle la direction asymptotique de la branche infinie.

On travaille dans A affine de dimension finie n , et sur $V(t_0) - \{t_0\}$, $V(t_0)$, voisinage de t_0 tel que pour $t \in V(t_0) - \{t_0\}$ on ait $m(t) \neq a$.

D'après l'étude faite en 6.29 et 6.30, de la limite d'un sous-espace vectoriel, (ici la direction de $D_{a,m(t)}$), on sait que s'il existe une fonction λ de $V(t_0) - \{t_0\}$ dans \mathbb{R} telle que

$$6.68. \quad \lambda(t) \neq 0 \text{ et } \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \lambda(t) \overrightarrow{am(t)} = \overrightarrow{u} \neq 0, \text{ pour tout autre fonction}$$

convenant et conduisant à une limite \overrightarrow{v} non nulle, on aura \overrightarrow{u} et \overrightarrow{v} proportionnels.

Quitte à restreindre $V(t_0)$, on peut supposer $\lambda(t) \neq 0$ pour tout t de $V(t_0) - \{t_0\}$, puisque la limite étant non nulle, avec une boule ouverte de

centre \overrightarrow{u} de rayon $\frac{\|\overrightarrow{u}\|}{2}$ par exemple, $\exists W(t_0)$ voisinage de t_0 tel que :

$$t \in W(t_0) - \{t_0\} \implies \|\overrightarrow{u} - \lambda(t) \overrightarrow{am(t)}\| < \frac{\|\overrightarrow{u}\|}{2},$$

d'où $\lambda(t) = 0$ exclu.

Par le même raisonnement, si $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ est une base fixée de $E = \mathbb{R}^n$, et si, (formes duales) $e_k^*(\overrightarrow{u}) = u_k \neq 0$, localement en t_0 on aura,

(image de 6.68 par e_k^*) :

$$\lambda(t)e_k^*(\overrightarrow{am(t)}) = \lambda(t)e_k^*(f(t) - \overrightarrow{oa}),$$

de signe constant, et comme f est continue, que $t \rightsquigarrow e_k^*(f(t) - \overrightarrow{oa})$ est continue ne s'annulant pas, donc de signe constant, finalement $\lambda(t)$ est *localement de signe constant*.

Mais alors, par continuité de la norme, 6.68 donne

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} |\lambda(t)| \|\overrightarrow{am(t)}\| = \|\vec{u}\| \neq 0,$$

donc aussi

$$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} \frac{\overrightarrow{am(t)}}{\|\overrightarrow{am(t)}\|} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \vec{v}, \text{ unitaire,}$$

et comme on a soit $\frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|} = 1$ localement, auquel cas $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \frac{am(t)}{\|\overrightarrow{am(t)}\|} = \vec{v}$;

soit $\frac{\lambda(t)}{|\lambda(t)|}$ qui reste localement égal à -1 et conduit à $-\vec{v}$ comme limite, peu importe, la direction $\mathbb{R}\vec{u} = \mathbb{R}(-\vec{v}) = \mathbb{R} \cdot \vec{v}$.

Enfin, si on change a en b , on aura pour t dans un voisinage de t_0 , privé de t_0 , tel que $\overrightarrow{am(t)}$ et $\overrightarrow{bm(t)}$ soient non nuls,

$$\frac{\overrightarrow{bm(t)}}{\|\overrightarrow{bm(t)}\|} = \frac{\vec{ba}}{\|\overrightarrow{bm(t)}\|} + \frac{\overrightarrow{am(t)}}{\|\overrightarrow{am(t)}\|} \cdot \frac{\|\overrightarrow{am(t)}\|}{\|\overrightarrow{bm(t)}\|},$$

avec $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \|\overrightarrow{bm(t)}\| = +\infty$ et $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \frac{\|\overrightarrow{am(t)}\|}{\|\overrightarrow{bm(t)}\|} = 1$ vu la double inégalité

6.66 appliquée avec $o = b$ et $f(t) = \overrightarrow{bm(t)}$.

Mais alors $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \frac{\overrightarrow{bm(t)}}{\|\overrightarrow{bm(t)}\|} = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \frac{\overrightarrow{am(t)}}{\|\overrightarrow{am(t)}\|}$, d'où l'indépendance de

cette limite par rapport au choix de a et l'existence de la direction asymptotique δ . ■

REMARQUE 6.69. — L'essentiel de la justification a consisté à faire le lien entre la définition de la limite d'un sous-espace vectoriel, (voir 6.29 et 6.30)

et celle que l'on donne généralement pour la recherche de la direction asymptotique où l'on part directement de $\frac{\overrightarrow{am(t)}}{\|am(t)\|}$ sans autre forme de procès.

PASSONS ALORS AUX ASYMPTOTES.

DÉFINITION 6.70. — Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, t_0 une borne de I telle que Γ présente en t_0 une branche infinie ayant une direction asymptotique δ . On appelle asymptote à Γ lorsque t tend vers t_0 , la limite D , si elle existe, de la droite affine $D(t)$ de direction δ , passant par $m(t)$, lorsque t tend vers t_0 dans I .

Il résulte de la définition 6.34, que si $b(t)$ est un point de $D(t)$, ayant une limite b_0 lorsque t tend vers t_0 , alors l'asymptote D existe, et c'est la droite passant par b_0 , de direction δ , direction indépendante de t de $D(t)$.

Mais alors, soit H un hyperplan affine de A , de direction F avec $F \cap \delta = \{0\}$, (les directions sont des sous-espaces vectoriels), on a $E = F \oplus \delta$, (Tome 1, 6.92), et δ étant direction de $D(t)$, $H \cap D(t)$ est un singleton $c(t)$, (Tome 4, Corollaire 1.43), qui est en fait le projeté de $b(t)$ sur H , parallèlement à $D(t)$, (Tome 4, définition 1.73), (voir figure 6.70).

Mais cette projection π est en fait attachée à la projection vectorielle p de E sur F parallèlement à δ , (Tome 4, Théorème 1.74), et comme p , linéaire en dimension finie est continue, π est continue, donc :

$\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} \pi(b(t)) = \pi(b_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} c(t)$ existe, et l'asymptote D est la droite affine de direction δ passant par $\pi(b_0)$.

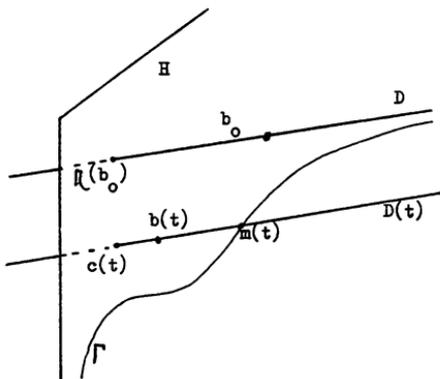


Fig. 6.70

Nous venons en fait de commencer la justification du :

THÉORÈME 6.71. — Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, t_0 une borne de I telle que l'arc présente en t_0 une branche infinie de direction asymptotique δ . Alors Γ admet en t_0 une asymptote D si et seulement si, avec H sous-espace affine de direction F telle que $E = F \oplus \delta$, le projeté $c(t)$ de $m(t)$ sur H parallèlement à δ admet une limite c_0 . L'asymptote D est alors la droite passant par c_0 , de direction δ .

Nous avons vu que si D existe, $\lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \in I}} c(t) = c_0$ existe, mais réciproquement, si cette limite existe, comme $c(t)$ est sur la droite $D(t)$ de direction δ passant par $m(t)$, l'asymptote existe (définitions 6.70 et 6.34). ■

Nous allons voir dans le cas particulier des arcs plans, comment étudier les branches infinies, en considérant pour cela les différents modes de représentation des arcs, notion déjà abordée dans la recherche des « courbes intégrales » d'une équation différentielle, (Tome 3, début du §7 du chapitre 18).

6.72. Dans tout ce qui suit, le plan affine est rapporté à un repère $\mathcal{R} = (o, \vec{i}, \vec{j})$ et on note x et y les coordonnées d'un point m du plan.

6.73. CAS D'UN ARC D'ÉQUATION CARTÉSIENNE $y = f(x)$.

On suppose f définie continue sur I intervalle de \mathbb{R} , et toutes les normes étant équivalentes sur \mathbb{R}^2 , (dimension finie) on considère la norme euclidienne. Alors $\|\overrightarrow{om}\|^2 = x^2 + f^2(x)$ ne peut tendre vers $+\infty$ si x tend vers x_0 borne de I , que si $x_0 = +\infty$ ou $-\infty$, ou, si $x_0 \in \mathbb{R}$, que si $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in I}} |f(x)| = +\infty$.

6.74. PREMIER CAS; x_0 EST DANS \mathbb{R} : par exemple $x_0 = b$ et $I = (a, b[$.

Si $\lim_{x \rightarrow b^-} |f(x)| = +\infty$, $f(x)$ ne s'annule pas localement et le vecteur $\overrightarrow{V(x)} = \frac{x}{f(x)} \vec{i} + \vec{j}$ dirige $D_{0, m(x)}$ et a pour limite \vec{j} , donc $\mathbb{R} \vec{j}$ est direction asymptotique.

Comme l'axe des abscisses est un supplémentaire H de $\mathbb{R} \vec{j}$ et que le projeté $c(x)$ de $m(x)$ sur H est le point $(x, 0)$ de limite $(b, 0)$, on a une asymptote Δ , (figures 6.74.1 et 6.74.2), suivant que $f(x)$, continue et ne s'annulant pas, donc de signe constant localement, tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

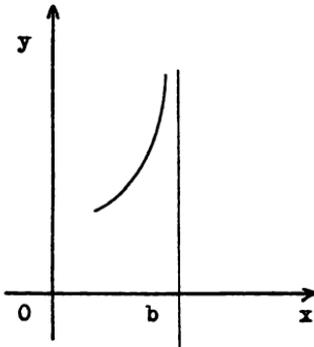


Fig. 6.74.1

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$$

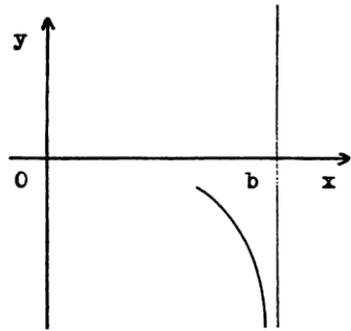


Fig. 6.74.2

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$$

REMARQUE 6.75. — Il se peut que $\lim_{x \rightarrow b^-} \overrightarrow{om(x)}$ n'existe pas, ce qui n'entre pas dans le cas de la définition 6.64. C'est le cas d'un arc figure en 6.75 (du type $f(x) = \frac{1}{(b-x)^2} \sin \frac{1}{b-x}$ par exemple).

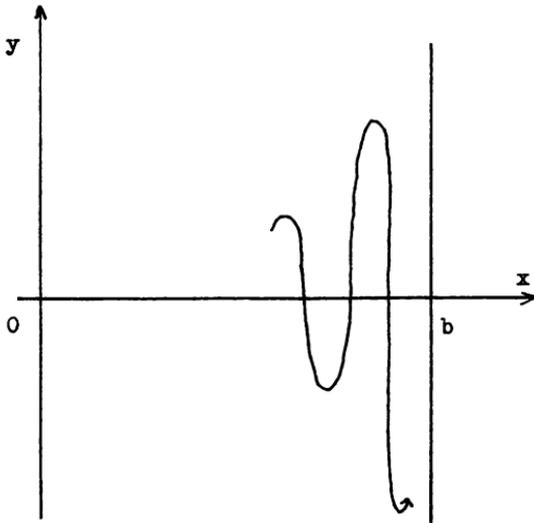


Fig. 6.75

REMARQUE 6.76. — On traite de même le cas de $I =]a, b)$ avec $\lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = +\infty$.

6.77. DEUXIÈME CAS, $x_0 = +\infty$ OU $-\infty$, PAR EXEMPLE $x_0 = +\infty$.

Là encore la fonction f peut ne pas avoir de limite (par exemple $f(x) = x^2 \sin x$).

Mais si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ existe, on vérifierait que la théorie s'applique et conduit à l'existence d'une asymptote, la droite d'équation $y = a$, la place de l'arc par rapport à l'asymptote dépendant du signe de $f(x) - a$.

Voir les figures 6.77.1, 6.77.2 et 6.77.3, qui représentent respectivement les cas de $f(x) - a$ qui reste positif (6.77.1), ou négatif (6.77.2), ou non de signe constant, (6.77.3) dans un voisinage de $+\infty$.

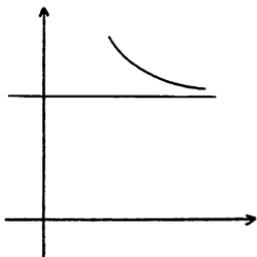


Fig. 6.77.1

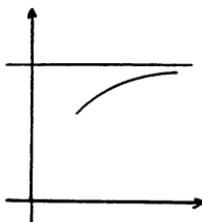


Fig. 6.77.2

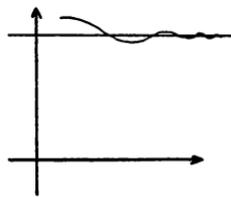


Fig. 6.77.3

On peut enfin avoir $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Traitons le premier cas, (le passage de f à $-f$ donnant le deuxième).

Recherche d'une direction asymptotique, (voir Théorème 6.67). La droite $D_{o,m}$ a pour vecteur directeur $x \vec{i} + y \vec{j}$, et si $\mathcal{R} = (o, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé, comme x tend vers $+\infty$, x est non nul, donc l'angle θ que fait $D_{o,m}$ avec l'axe des x est tel que $\operatorname{tg} \theta = \frac{f(x)}{x}$ existe.

On a vu en 6.67, que si $\vec{V}(x)$ est un vecteur directeur de $D_{o,m}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \vec{V}(x) = \vec{V}_0$ non nul, tout autre vecteur directeur de $D_{o,m}$ ayant une limite \vec{U}_0 non nulle conduira à un \vec{U}_0 du type $\lambda \vec{V}_0$, avec $\lambda \neq 0$.

Si $\vec{V}(x) = \alpha(x) \vec{i} + \beta(x) \vec{j}$ et $\vec{V}_0 = \alpha_0 \vec{i} + \beta_0 \vec{j}$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = \alpha_0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \beta(x) = \beta_0$, avec $\alpha^2(x) + \beta^2(x)$ et $\alpha_0^2 + \beta_0^2$ non nuls, donc le

vecteur $\vec{U}(x) = \frac{\overrightarrow{V(x)}}{\|\overrightarrow{V(x)}\|}$ a pour limite $\vec{U}_0 = \frac{\alpha_0 \vec{i} + \beta_0 \vec{j}}{\sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2}}$ puisque

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^2(x) + \beta^2(x) = \alpha_0^2 + \beta_0^2$ non nul. Mais, $\vec{U}_0 \neq 0 \implies \alpha_0$ et β_0 non nuls en même temps : si $\alpha_0 \neq 0$ par exemple, $\alpha(x)$ reste localement du signe de α_0 . Il en résulte qu'avec l'angle θ introduit, on a soit $\vec{U}(x) = \cos \theta(x) \vec{i} + \sin \theta(x) \vec{j}$, (soit l'opposé), le choix restant le même pour x « assez grand », (disons $x \geq A$ fixé), et l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \vec{U}(x) = \vec{U}_0 = (\cos \theta_0) \vec{i} + (\sin \theta_0) \vec{j}$ se traduira par $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \theta(x) = \cos \theta_0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \theta(x) = \sin \theta_0$. Mais alors, si $\cos \theta_0 \neq 0$, on aura $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \theta(x) = \operatorname{tg} \theta_0$ et le vecteur $\overrightarrow{W(x)} = \vec{i} + \operatorname{tg} \theta(x) \vec{j} = \vec{i} + \frac{y}{x} \vec{j}$ aura une position limite qui donne, pour direction asymptotique dans ce cas, la direction de la droite D_l d'équation $y = lx$ avec $l = \operatorname{tg} \theta_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x}$. Par contre si $\cos \theta_0 = 0$, la direction asymptotique est $\mathbb{R} \vec{j}$, mais dans ce cas $\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \theta(x)$ tend vers $+\infty$, (cas $x > 0$ et $y > 0$ ici).

RÈGLE PRATIQUE : si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = +\infty$, ou $-\infty$, on a pour direction asymptotique « l'axe des ordonnées », donc $\mathbb{R} \vec{j}$, alors que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = l$ existe dans \mathbb{R} , la droite d'équation $y = lx$ est direction asymptotique.

RECHERCHE D'UNE ASYMPTOTE

Si la direction asymptotique est $\mathbb{R} \vec{j}$, un hyperplan de direction un supplémentaire de $\mathbb{R} \vec{j}$ est tout indiqué, Ox , mais la parallèle à Oy passant par $m(x, y)$ coupe Ox en c de coordonnées $(x, 0)$, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, il n'y a pas d'asymptote et on parle de *branche parabolique* dans ce cas, (car c'est le comportement d'une parabole, d'équation $y = x^2$ par exemple).

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = l$ existe dans \mathbb{R} , $\mathbb{R} \vec{j}$ est un supplémentaire de la direction de D_l , droite d'équation $y = lx$, et Oy convient comme hyperplan H .

La droite Δ_l parallèle à D_l passant par $m(x, y)$ a pour équation $Y - y = l(X - x)$: elle coupe Oy en $C(x)$ de coordonnées $(0, y - lx)$ et on étudie alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} y - lx$, (avec $y = f(x)$ bien sûr).

On a alors :

soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - lx) = m$, et la droite d'équation $y = lx + m$ est asymptote, l'étude du signe de $y - lx - m$ donnant la place de la courbe par rapport à l'asymptote;

soit $\lim_{x \rightarrow +\infty} y - lx = +\infty$, (ou $-\infty$), et on dira que la courbe admet une *branche parabolique* dans la direction $y = lx$;

soit la limite n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$, et on peut avoir n'importe quel comportement.

DÉFINITION 6.78. — On dit qu'un arc plan Γ admet une *branche parabolique de direction δ* , s'il admet une *direction asymptotique δ* et si l'intersection d'un hyperplan H de direction supplémentaire de δ , et de la droite D_m de direction δ passant par m de Γ a une limite infinie sur la droite H .

6.79. CAS DES ARCS PARAMÉTRÉS DU TYPE $\Gamma = (I, f)$.

Par exemple $I = (a, b[)$, avec $f(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j}$, ($\mathcal{R} = (o; \vec{i}, \vec{j})$ repère du plan qui aura la gentillesse d'être orthonormé quand on le lui demandera), x et y étant des fonctions continues telles que $\lim_{t \rightarrow b^-} (x^2 + y^2) = +\infty$ et que l'une au moins des fonctions x^2 ou y^2 tend vers $+\infty$. Voici une liste de résultats dont les justifications précises s'inspirent de celles faites en 6.74 et 6.77.

6.79.1. Si $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = x_0$ existe dans \mathbb{R} , et si $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t) = +\infty$ (ou $-\infty$), la droite D_{x_0} d'équation $x = x_0$ est asymptote, (l'étude du signe de $x_0 - x(t)$ ou de $x(t) - x_0$ donne la place par rapport à l'asymptote).

Il en est de même en inversant les rôles de x et y :

6.79.2. si $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t) = +\infty$, (ou $-\infty$) et si $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t) = y_0$, la droite D_{y_0} d'équation $y = y_0$ est asymptote.

Enfin, on peut avoir x et y qui ont chacun une limite infinie :

6.79.3. Si $\lim_{t \rightarrow b^-} x(t)$ existe dans $\{+\infty, -\infty\}$, ainsi que $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t)$, alors :

1) si $\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{y(t)}{x(t)} = +\infty$, (ou $-\infty$), il y a direction asymptotique Oy et *branche parabolique de direction Oy* ;

2) si $\lim_{t \rightarrow b^-} \frac{y(t)}{x(t)} = l$ existe dans \mathbb{R} , la direction de la droite d'équation $y = lx$ est direction asymptotique; on a alors :

α) si $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t) - lx(t) = m$, Δ d'équation $y = lx + m$ est asymptote, (et l'étude du signe de $y(t) - lx(t) - m$ donne la place par rapport à l'asymptote);

β) si $\lim_{t \rightarrow b^-} y(t) - lx(t) = +\infty$, (ou $-\infty$) on a une *branche parabolique* de direction $y = lx$;

γ) mais il se peut que $y(t) - lx(t)$ n'ait pas de limite dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$;

3) ne pas oublier que $\frac{y(t)}{x(t)}$ peut ne pas avoir de limite dans la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. J'ai l'impression d'avoir déjà écrit cela quelque part. Mais si vous saviez le nombre de fois qu'on rencontre la négation suivante :

«le contraire de $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t) = l$, (tout se passant dans \mathbb{R}) est... $\lim_{t \rightarrow b^-} f(t) = +\infty$ ou $-\infty$ », vous comprendriez pourquoi certaines répétitions sont utiles.

Ne pas oublier enfin, que $x^2 + y^2$ peut tendre vers l'infini sans que x^2 et y^2 ne le fasse : penser aux spirales, (voir 6.80.5).

6.80. UN MOT DES ARCS PLANS EN POLAIRES

Il s'agit d'un mode particulier de paramétrage des arcs d'un plan euclidien, en fonction de $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$ avec $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$.

Si $\overrightarrow{om}(\theta) = r(\theta) \vec{u} = r(\theta) \cos \theta \vec{i} + r(\theta) \sin \theta \vec{j}$, on a $\|\overrightarrow{om}(\theta)\| = |r(\theta)|$ et on suppose que $|r(\theta)|$ tend vers l'infini si θ tend vers θ_0 , borne de l'intervalle de définition de r . Là encore on suppose r fonction continue de θ , qui devient donc de signe constant si θ tend vers θ_0 , (sinon, les zéros de r fournis par le Théorème des valeurs intermédiaires seraient gênants), et quitte à changer r en $-r$, (symétrie par rapport à l'origine), on suppose que r tend vers $+\infty$.

6.80.1. On suppose r définie sur $(\theta_0, \theta_0 + \pi[$, $\theta_0 \in \mathbb{R}$, avec $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0^+} r(\theta) = +\infty$.

On a donc une branche infinie, et $\overrightarrow{om}(\theta)$ ayant pour vecteur directeur $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, de limite $\vec{u}_0 = \cos \theta_0 \vec{i} + \sin \theta_0 \vec{j}$ si θ tend vers θ_0 , il n'y a pas beaucoup de travail à fournir pour trouver la direction asymptotique δ engendrée par \vec{u}_0 .

On prend alors pour hyperplan H , de direction supplémentaire de δ , la perpendiculaire en o à \vec{u}_0 . Le point $m(r, \theta)$ se projette sur H en $p(\theta)$ tel que $\overline{op(\theta)} = r(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$, (voir figure 6.80.2) et la recherche d'une asymptote éventuelle est reliée à la recherche d'une limite de $r(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$.

1) Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = l$, la droite d'équation $Y = l$ dans le repère $(o; \vec{u}_0, \vec{v}_0)$, avec \vec{v}_0 directement perpendiculaire à \vec{u}_0 , est *asymptote*, (figure 6.80.3).

2) Si $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) = +\infty$, (ou $-\infty$) on a une *branche parabolique* de direction $\delta = \mathbb{R}\vec{u}_0$.

3) Il se peut que la limite de $r(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$ n'existe pas dans $\overline{\mathbb{R}}$.

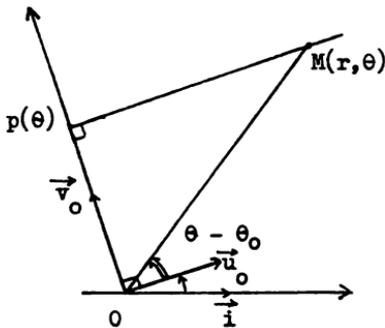


Fig. 6.80.2.

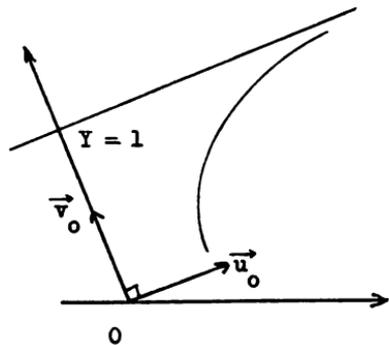


Fig. 6.80.3.

6.80.4. Dans le cas où l'asymptote existe, la connaissance du signe de $r(\theta) \sin(\theta - \theta_0) - l$ permet de placer l'arc par rapport à l'asymptote.

6.80.5. Si $I = (a, +\infty[$ ou $] -\infty, b)$, ou \mathbb{R} , et si $\theta_0 = +\infty$, (ou $-\infty$), et si, par exemple $\lim_{\theta \rightarrow +\infty} r(\theta) = +\infty$, on a une *branche infinie spirale* (qui s'enroule dans le sens trigonométrique).

REMARQUE 6.81. — Dans toutes les recherches précédentes, l'utilisation des développements limités est du plus grand intérêt car elle fournit rapidement l'asymptote quand elle existe, et la place de l'arc par rapport à l'asymptote.

REMARQUE 6.82. — Dans le cas particulier des asymptotes « en polaires », ne pas oublier que $l = \lim_{\theta \rightarrow \theta_0} r \sin(\theta - \theta_0)$ représente une ordonnée dans

un repère mobile, déduit du repère initial $(0; \vec{i}, \vec{j})$ par la rotation d'angle θ_0 .

Attention en particulier au cas $\theta_0 = \pi$, voir figure 6.82, avec :

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} r = -\infty \text{ et } \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} r \sin(\theta - \pi) = 2^- \text{ par exemple.}$$

Je profite de cet exemple pour montrer en quoi la présence d'une droite d'angle polaire $\theta < \pi$, (un axe en fait) permet de figurer l'endroit où se trouve la branche infinie, compte tenu ici du signe $-$ de la limite de r . En fait, on sait alors que $r \sin(\theta - \pi)$ sera positif donc on connaît le signe de la limite éventuelle de $r \sin(\theta - \pi)$, ce qui donne un élément de contrôle.

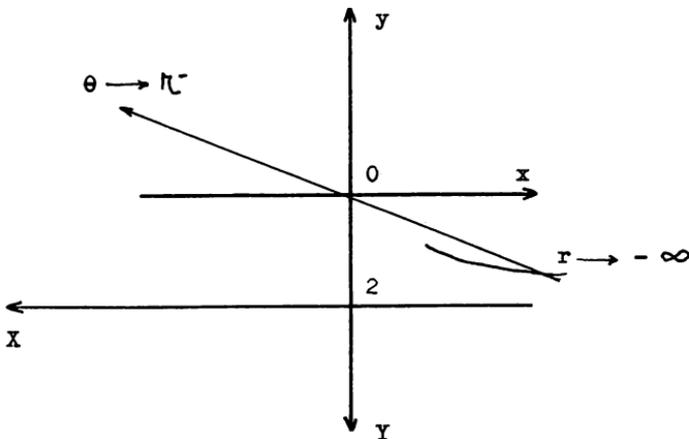


Fig. 6.82

6.83. CAS DES ARCS D'ÉQUATION IMPLICITE $f(x, y) = 0$

On a vu en calcul différentiel, (Tome 3, 17.13) que si f est une application de classe C^1 de Ω ouvert de \mathbb{R}^2 , dans \mathbb{R} , au voisinage de $m_0, (x_0, y_0)$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $df(x_0, y_0) \neq 0$, l'équation $f(x, y) = 0$ équivaut à une équation du type $y = \varphi(x)$, (ou du type $x = \psi(y)$ si $\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, y_0) \neq 0$), donc localement, l'équation $f(x, y) = 0$ définit un arc paramétré régulier, la tangente en m_0 ayant pour équation :

$$(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Que peut-on dire en ce qui concerne les branches infinies? Pas grand chose quoi que...

6.84. Supposons la courbe implicite *algébrique*, c'est-à-dire d'équation $f(x, y) = 0$ où f est un polynôme en x et y .

Ce polynôme peut s'ordonner par rapport à ses parties homogènes en

$$6.85. \quad f(x, y) = \sum_{k=0}^q f_k(x, y),$$

avec f_k polynôme homogène de degré k en x et y .

Supposons que la « courbe Γ » d'équation $f(x, y) = 0$ admette une direction asymptotique δ , de direction celle de la droite d'équation $y = t_0x$.

Si on reprend l'étude faite en 6.67, en supposant la branche infinie paramétrée en fonction de... de quoi au fait, u que personne ne connaît, ou x , ou y , disons u qui tend vers u_0 , c'est que le vecteur $(1, t)$ qui dirige $\vec{0m}$ tend vers $(1, t_0)$ lorsque u tend vers u_0 , (t fonction de u bien sûr).

Mais dans cette hypothèse, (existence d'une branche infinie), si on coupe Γ par la droite D_t d'équation $y = tx$, l'équation dite *aux abscisses des points d'intersections*,

$$6.86. \quad f(x, tx) = \sum_{k=0}^q x^k f_k(1, t) = 0,$$

est en particulier vérifiée par l'abscisse $x(t(u))$ censée tendre vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque u tend vers u_0 . En simplifiant par x^q , non nul pour u dans un voisinage de u_0 , on a donc

$$6.87. \quad f_q(1, t) + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{x(t(u))^{q-k}} f_k(1, t) = 0.$$

Or, si u tend vers u_0 , $t(u)$ tend vers t_0 , les f_k étant des fonctions polynômes on a $\lim_{u \rightarrow u_0} f_k(1, t) = f_k(1, t_0)$, et les $\frac{1}{x(t(u))^{q-k}}$ tendent vers 0, donc finalement, à la limite dans 6.87 on a $f_q(1, t_0) = 0$.

Comme parmi les droites d'équation $y = tx$, $t \in \mathbb{R}$, ne figurent pas les parallèles à l'axe des ordonnées il en résulte que les *directions asymptotiques δ éventuelles* sont : l'axe des y , et les *directions des droites d'équation $y = t_0x$ avec t_0 zéro de $f_q(1, t) = 0$* .

Comment savoir s'il y a alors asymptote, branche parabolique, ou rien...

Soit t_0 zéro de $f_q(1, t) = 0$.

On coupe (Γ) par une droite d'équation $y = t_0x + h$, d'où une équation aux abscisses des points d'intersection :

$$6.88. \quad \sum_{k=0}^q f_k(x, t_0x + h) = 0,$$

que l'on ordonne en x , en :

$$6.89. \quad \sum_{r=0}^n x^r g_r(h) = 0,$$

les g_r étant des polynômes en h , que l'on suppose premiers entre eux dans leur ensemble, ou que l'on rend tels car la présence d'un facteur $h - h_1$ commun dans tous les $g_r(h)$ signifierait que pour $h = h_1$, 6.88 est vérifiée pour tout x , donc que la droite d'équation $y = t_0x + h_1$ fait partie de Γ . Dans ce cas on «débarasse» Γ de cette droite.

Soit h_0 un zéro de g_n , il existe un $r < n$ tel que $g_r(h_0) \neq 0$, d'où une fonction symétrique des racines de 6.89. qui tend vers l'infini si h tend vers h_0 , ce qui n'est possible que si l'une des racines de 6.89. tend vers l'infini lorsque h tend vers h_0 mais... a priori ce peut être dans \mathbb{C} . Les renseignements ainsi trouvés ont besoin d'être confirmés par d'autres. Par exemple, si le hasard, (qui fait souvent bien les choses), fait que, lorsque x tend $+\infty$, l'équation en $y : f(x, y) = 0$, admet toujours trois racines, et que l'on a trouvé trois asymptotes éventuelles, alors... c'est tout bon!

Dans l'étude des arcs en implicite, il faut savoir faire flèche de tout bois!

4. Rectification d'un arc paramétré

DÉFINITION 6.90. — Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de A espace affine. On appelle subdivision de I toute suite finie strictement croissante, $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, de points de I , et ligne polygonale associée $\mathcal{P}(d)$ la suite finie des points m_i de paramètres t_i .

On appellera alors longueur de la ligne polygonale $\mathcal{P}(d)$, le scalaire

$$l(\mathcal{P}(d)) = \sum_{i=1}^{n-1} \|\overrightarrow{m_i m_{i+1}}\|.$$

DÉFINITION 6.91. — L'arc $\Gamma = (I, f)$ est dit rectifiable de longueur L si et seulement si l'ensemble \mathcal{L} des $l(\mathcal{P}(d))$, pour toute subdivision d de I est majoré, et si L en est la borne supérieure.

REMARQUE 6.92. — Le fait d'être rectifiable est une propriété géométrique pour les arcs de classe C^0 au moins.

En effet, si (I, f) et (J, g) sont deux paramétrages admissibles d'un arc géométrique \mathcal{C} , avec θ bijection continue strictement monotone de I sur J telle que $f = g \circ \theta$, (voir 6.9, 6.6), on voit qu'il y a bijection entre les subdivisions de I et celles de J . ■

Voici quelques propriétés évidentes qui nous conduiront à des hypothèses impliquant la rectifiabilité.

PROPRIÉTÉ 6.93. — Si l'arc $\Gamma = (I, f)$ est rectifiable de longueur L , et si $I_1 \subset I$, le sous-arc $\Gamma_1 = (I_1, f|_{I_1})$ est rectifiable de longueur $L_1 \leq L$.

En effet, toute subdivision d_1 de I_1 en est une de I , d'où l'inclusion $\{l(\mathcal{P}(d_1)); d_1 \text{ subdivision de } I_1\} \subset \{l(\mathcal{P}(d)); d \text{ subdivision de } I\}$ et il ne reste plus qu'à passer aux bornes supérieures.

PROPRIÉTÉ 6.94. — Si $I = [a, b]$, et si on note d^* les subdivisions de premier terme a et de dernier terme b , les ensembles $\{l(\mathcal{P}(d)); d \text{ subdivision de } [a, b]\}$ et $\{l(\mathcal{P}(d^*)); d^* \text{ subdivision de } [a, b] \text{ passant par } a \text{ et } b\}$ sont simultanément bornés, et ont même borne quand ils le sont.

On a d'abord :

$\{l(\mathcal{P}(d^*)); d^* \text{ passant par } a \text{ et } b\} \subset \{l(\mathcal{P}(d)); d \text{ subdivision quelconque}\}$, donc si Γ est rectifiable de longueur L , on a :

$$L^* = \sup\{l(\mathcal{P}(d^*)); d^* \text{ passant par } a \text{ et } b\} \leq L;$$

et si L^* existe, soit d une subdivision $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ de I , on lui adjoint $t_0 = a$ et $t_{n+1} = b$ d'où d^* , et visiblement $l(\mathcal{P}(d^*)) = l(\mathcal{P}(d)) + \|\overrightarrow{m_0 m_1}\| + \|\overrightarrow{m_n m_{n+1}}\|$ donc $l(\mathcal{P}(d)) \leq L^*$: l'arc est rectifiable de longueur $L \leq L^*$ d'où le résultat. ■

Désormais on ne considérera que des intervalles du type segment $[a, b]$, et les subdivisions passeront par a et b , sans qu'on leur mette d'étoile!

PROPRIÉTÉ 6.95. — Soit un arc $\Gamma = ([a, b], f)$, $c \in]a, b[$, $I_1 = [a, c]$, $I_2 = [c, b]$, $f_1 = f|_{I_1}$ et $f_2 = f|_{I_2}$. Alors $\Gamma = (I, f)$ est rectifiable de longueur L si et seulement si $\Gamma_1 = (I_1, f_1)$ et $\Gamma_2 = (I_2, f_2)$ le sont, et les longueurs L_1 et L_2 sont telles que $L = L_1 + L_2$.

D'après 6.93, si Γ est rectifiable, Γ_1 et Γ_2 le sont. De plus si \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont deux lignes polygonales de Γ_1 et Γ_2 , \mathcal{P}_1 finissant en $m(c)$ et \mathcal{P}_2 commençant

en $m(c)$, on les met « bout à bout » d'où $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ ligne polygonale de Γ telle que $l(\mathcal{P}) = l(\mathcal{P}_1) + l(\mathcal{P}_2) \leq L$.

Pour \mathcal{P}_2 fixée, on a donc $l(\mathcal{P}_1) \leq L - l(\mathcal{P}_2)$, pour toute ligne polygonale de Γ_1 , d'où $L_1 \leq L - l(\mathcal{P}_2)$, et l'inégalité $l(\mathcal{P}_2) \leq L - L_1$ donne à son tour $L_2 \leq L - L_1$ d'où $L_1 + L_2 \leq L$.

Puis, en supposant Γ_1 et Γ_2 rectifiables, avec \mathcal{P} ligne polygonale associée à la subdivision

$$d : t_1 = a < t_2 < \dots < t_n = b,$$

il existe un et un seul i tel que $t_i \leq c < t_{i+1}$.

En définissant d^* par les éléments

$$d^* : t_1 = a < t_2 < \dots < t_i \leq c < t_{i+1} < \dots < t_n = b,$$

on a une ligne polygonale $\mathcal{P}^*(d^*)$ telle que

$$\mathbf{6.96.} \quad l(\mathcal{P}^*(d^*)) - l(\mathcal{P}(d)) = \|\overrightarrow{m(t_{i+1})m(c)}\| + \|\overrightarrow{m(c)m(t_i)}\| - \|\overrightarrow{m(t_{i+1})m(t_i)}\|, \\ \geq 0, \text{ par inégalité triangulaire.}$$

De plus $d^* = d_1 \cup d_2$ avec d_1 subdivision de I_1 et d_2 subdivision de d_2 , d'où

$$l(\mathcal{P}(d)) \leq l(\mathcal{P}^*(d^*)) = l(\mathcal{P}_1(d_1)) + l(\mathcal{P}_2(d_2)) \\ \leq L_1 + L_2,$$

et ce pour toute subdivision d de I , d'où Γ rectifiable de longueur L avec $L \leq L_1 + L_2$ et le résultat. ■

Nous sommes à même de justifier le théorème fondamental de ce paragraphe.

THÉORÈME 6.97. — Soit un arc paramétré $\Gamma = ([a, b], f)$ de classe C^1 au moins, il est rectifiable, de longueur $L = \int_a^b \|f'(t)\| dt$.

Si d est la subdivision $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$, du segment $[a, b]$ et \mathcal{P} la ligne polygonale associée, on a :

$$l(\mathcal{P}) = \sum_{i=0}^{n-1} \|\overrightarrow{m(t_{i+1})m(t_i)}\| = \sum_{i=0}^{n-1} \|f(t_{i+1}) - f(t_i)\| \\ = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} f'(t) dt \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|f'(t)\| dt,$$

donc $l(\mathcal{P}) \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$, intégrale qui existe puisque $t \rightsquigarrow \|f'(t)\|$ est continue. Mais alors $\{l(\mathcal{P}); \mathcal{P} \text{ ligne polygonale}\}$ est majoré, donc Γ est rectifiable de longueur $L \leq \int_a^b \|f'(t)\| dt$. Soient alors t et t' avec $a \leq t < t' \leq b$, le sous-arc $\Gamma_t = ([a, t], f|_{[a, t]})$ est rectifiable, (Propriété 6.93), et en notant $\varphi(t)$ sa longueur, on définit une fonction φ croissante telle que $\varphi(t') - \varphi(t)$ soit la longueur de l'arc $([t, t'], f|_{[t, t']})$, d'où

$$\varphi(t') - \varphi(t) \leq \int_t^{t'} \|f'(s)\| ds.$$

Par ailleurs $t_0 = t < t_1 = t'$ est une subdivision de $[t, t']$ donc :

$$\overrightarrow{m(t')m(t)} = \|f(t') - f(t)\| \leq \varphi(t') - \varphi(t) \leq \int_t^{t'} \|f'(s)\| ds,$$

d'où, puisque $t' - t > 0$, la double inégalité

$$\mathbf{6.98.} \quad \left\| \frac{f(t') - f(t)}{t' - t} \right\| \leq \frac{\varphi(t') - \varphi(t)}{t' - t} \leq \frac{1}{t' - t} \int_t^{t'} \|f'(s)\| ds.$$

Si dans 6.98, t' tend vers t^+ le majorant et le minorant ont pour limite $\|f'(t)\|$, (on utilise la formule de la moyenne dans l'intégrale), d'où φ dérivable à droite sur $[a, b[$, avec $\varphi'_d(t) = \|f'(t)\|$, et si dans 6.98, t tend vers t^- , on obtient de même φ dérivable à gauche sur $]a, b]$, avec $\varphi'_g(t) = \|f'(t)\|$.

Finalement φ est dérivable sur $[a, b]$, et $\varphi'(t) = \|f'(t)\|$, d'où

$$L = \varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t) dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt. \quad \blacksquare$$

Soit alors un arc géométrique \mathcal{C} , de représentant l'arc paramétré (I, f) , de classe C^k , $k \geq 1$.

On peut fixer t_0 dans I , et définir, pour $t \in I$, la fonction s par

$$\mathbf{6.99.} \quad s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| du.$$

On dit que s est l'abscisse curviligne de l'arc Γ , (ou \mathcal{C} géométrique) orienté suivant les t croissants, ayant le point $m_0(t_0)$ pour origine des abscisses curvilignes.

La fonction $t \rightsquigarrow s(t)$ est alors dérivable, de dérivée $s'(t) = \|f'(t)\| \geq 0$, donc s est fonction croissante de t , et si on a $[a, b] \subset I$, la longueur de l'arc

$\Gamma_1 = ([a, b], f|_{[a, b]})$ est :

$$L_1 = s(b) - s(a) = \int_a^b \|f'(u)\| du = \int_a^b s'(u) du.$$

De plus, sur toute composante connexe de $\Omega = \{t, t \in I, f'(t) \neq 0\}$, la fonction s est strictement croissante et si J est une telle composante connexe, s donne un C^k difféomorphisme de J sur l'intervalle $K = s(J)$, et le sous-arc $(J, f|_J)$ de Γ , qui est sans point stationnaire, peut être paramétré par $(K, f \circ s^{-1})$: **on dira qu'il est paramétré en fonction de l'abscisse curviligne**, et c'est ce que nous ferons au paragraphe suivant pour parler de courbure.

6.100. EXPRESSIONS DE L'ABSCISSE CURVILIGNE

Si la direction E de l'espace affine A est euclidienne, de base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, et si $f(t) = \sum_{j=1}^n x_j(t)e_j$, on a :

$$\frac{ds}{dt} = \|f'(t)\| = \left(\sum_{j=1}^n (x'_j(t))^2 \right)^{1/2},$$

expression que l'on écrit plus souvent sous la forme :

$$6.100.1. \quad ds^2 = (x_1'^2 + \dots + x_n'^2) dt^2.$$

Dans le cas des arcs plans en *coordonnées polaires*, si on note :

$\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, le vecteur unitaire d'angle polaire θ , on a :

$$0m(\vec{\theta}) = r(\theta) \vec{u}, \text{ donc } \overrightarrow{f'(\theta)} = r' \vec{u} + r \frac{d\vec{u}}{d\theta}.$$

Or, $\frac{d\vec{u}}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{v}$, est le vecteur déduit de \vec{u} par

la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc la décomposition $\overrightarrow{f'(\theta)} = r' \vec{u} + r \vec{v}$ est obtenu dans une base orthonormée d'où :

$$6.100.2. \quad ds^2 = \left(r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right) d\theta^2 = (r^2 + r'^2) d\theta^2.$$

Voyons, pour clore ce paragraphe, qu'il ne suffit pas qu'un arc paramétré soit continu pour qu'il soit rectifiable.

EXEMPLE 6.101. — (Voir Tome 3, exemple 12.28).

On définit f sur $[0, 1]$ par $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ sur $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$ et f affine par morceaux valant $\frac{1}{n}$ en $\frac{1}{n}$, 0 en $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$ pour $n \geq 1$.

Vu sa définition, f est continue sur $]0, 1]$ et en 0 aussi car sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, on a $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{n}$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

Cet arc de classe C^0 n'est pas rectifiable car en prenant la ligne polygonale \mathcal{P}_n joignant les points d'abscisses :

$$0, \frac{1}{n}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right), \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{k}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1}\right), \frac{1}{k-1}, \dots, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1,$$

(voir figure 6.101), on a :

$$\begin{aligned} l(\mathcal{P}_n) &= \frac{\sqrt{2}}{n} + \frac{1 + \sqrt{5}}{4} + \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\quad + \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

(C'est horrible, mais je pense que, grâce en soit rendue à Pythagore, c'est correct).

Si on note u_k le terme général de cette somme, on a :

$$u_k = \left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{4k^2(k-1)^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{(k-1)^2} + \frac{1}{4(k-1)^2k^2} \right)^{1/2} \simeq \frac{2}{k}$$

donc $l(\mathcal{P}_n)$ est somme partielle d'une série divergente : l'ensemble des longueurs des lignes polygonales de cet arc n'est pas majoré donc cet arc de classe C^0 n'est pas rectifiable.

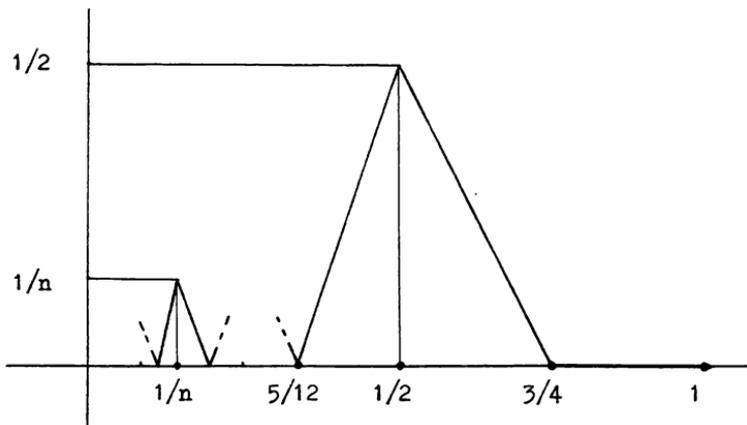


Fig. 6.101

5. Courbures d'un arc paramétré

Dans tout ce paragraphe on supposera l'espace affine A euclidien, donc de direction $E = \mathbb{R}^n$, muni d'une structure euclidienne. Par ailleurs, soit $\Gamma = (I, f)$ un arc de A , de classe C^1 au moins, régulier. Comme il est de classe C^1 , il est rectifiable et on peut définir une abscisse curviligne s avec $\frac{ds}{dt} = \|f'(t)\|$ qui ne s'annule pas sur I , (arc régulier), voir Théorème 6.97.

Si K est l'intervalle image de I par s , ici strictement croissante, s réalise un homéomorphisme de I sur K , de classe celle de f en fait puisque

$$s'(t) = \left(\sum_{j=1}^n x_j'^2(t) \right)^{1/2} \quad \text{est de classe } k-1 \text{ si } f \text{ est de classe } k, \text{ les } x_j(t)$$

étant les composantes de $f(t)$ dans une base orthonormée de E .

6.102. Mais alors $(K, f \circ s^{-1})$ est un *paramétrage admissible* de l'arc géométrique C ayant Γ pour représentant, *paramétrage en fonction de l'abscisse curviligne*, et dans tout ce paragraphe nous supposons les arcs réguliers paramétrés en fonction d'une abscisse curviligne notée s .

On a alors, avec $\vec{om} = f(t) = g(s)$, o origine du repère,

$$\frac{\vec{dm}}{ds} = \frac{\vec{dm}}{dt} \frac{dt}{ds} = f'(t) \frac{dt}{ds}, \quad \text{donc } \left\| \frac{\vec{dm}}{ds} \right\| = \|f'(t)\| \cdot \frac{1}{\|f'(t)\|} = 1,$$

d'où :

6.103. $\frac{\overrightarrow{dm}}{ds}$ est un vecteur unitaire, conventionnellement noté \overrightarrow{T} , appelé vecteur tangent unitaire orienté.

Supposons maintenant l'arc bi-régulier, (voir 6.52). On sait que, pour tout t de I , (ou tout s de K) le plan osculateur existe, et qu'il a pour direction $S_2 = \text{Vect}(f'(t), f''(t))$, (Théorème 6.42).

On a aussi $S_2 = \text{Vect}\left(\frac{\overrightarrow{dm}}{ds}, \frac{d^2m}{ds^2}\right)$, or $\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{dm}}{ds}$ est unitaire, donc

$\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{T} = 1$, ce qui donne, en dérivant, $2\overrightarrow{T} \cdot \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = 0$, (voir Tome 3, exemple 16.21 pour la différentiabilité des applications multilinéaires continues).

Mais alors, dans S_2 , $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}$ est orthogonal à \overrightarrow{T} . Or dans le plan vectoriel S_2 , on peut choisir un vecteur \overrightarrow{N}_1 orthogonal à \overrightarrow{T} , unitaire, et il n'y a alors que deux choix opposés \overrightarrow{N}_1 et $-\overrightarrow{N}_1$. Ce choix étant fait, il existera un scalaire $\gamma_1(s)$ tel que :

6.104. $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma_1(s)\overrightarrow{N}_1$, $\gamma_1(s)$ est la première courbure de l'arc en $m(s)$, et \overrightarrow{N}_1 le vecteur normal.

Supposons l'arc tri-régulier, (et $n \geq 4$, n dimension de A). Le 3-espace osculateur existe, (remarque 6.46), et il est dirigé par S_3 . De plus S_2 est un plan de S_3 qui est de dimension 3, donc l'orthogonal de S_2 dans S_3 est de dimension 1 : il existe deux vecteurs unitaires opposés qui dirigent cet orthogonal, on peut donc choisir \overrightarrow{N}_2 unitaire tel que $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2)$ soit une base orthonormée de S_3 :

6.105. \overrightarrow{N}_2 est le vecteur bi-normal à la courbe.

Le paramétrage admissible en fonction de l'abscisse curviligne conduit à dire que S_3 est aussi engendré par $\frac{\overrightarrow{dm}}{ds}$, $\frac{d^2m}{ds^2}$ et $\frac{d^3m}{ds^3}$, avec $\frac{\overrightarrow{dm}}{ds} = \overrightarrow{T}$,

$\frac{\overrightarrow{d^2 m}}{ds^2} = \gamma_1 \overrightarrow{N}_1$ et $\frac{\overrightarrow{d^3 m}}{ds^3} = \frac{d\gamma_1}{ds} \overrightarrow{N}_1 + \gamma_1 \frac{d\overrightarrow{N}_1}{ds}$, d'où la nécessité de connaître $\frac{d\overrightarrow{N}_1}{ds}$. On le décompose dans la base $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}_1, \overrightarrow{N}_2)$ en :

$$\frac{d\overrightarrow{N}_1}{ds} = \alpha \overrightarrow{T} + \beta \overrightarrow{N}_1 + \gamma \overrightarrow{N}_2.$$

Comme $\overrightarrow{N}_1^2 = 1$, on a $2\overrightarrow{N}_1 \cdot \frac{d\overrightarrow{N}_1}{ds} = 0$ d'où $\beta = 0$.

Comme $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{N}_1 = 0$, on a $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} \cdot \overrightarrow{N}_1 + \frac{d\overrightarrow{N}_1}{ds} \cdot \overrightarrow{T} = 0$, soit $\gamma_1(s) + \alpha = 0$, donc $\alpha = -\gamma_1(s)$.

Dans un souci de symétrie, on décide de noter $\gamma_2(s)$ la composante γ , et de l'appeler deuxième courbure. On a donc :

6.106. $\frac{d\overrightarrow{N}_1}{ds} = -\gamma_1(s)\overrightarrow{T} + \gamma_2(s)\overrightarrow{N}_2$, avec $\gamma_2(s)$ deuxième courbure de l'arc en $m(s)$, et \overrightarrow{N}_2 vecteur bi-normal.

On comprend alors que si l'arc est 4-régulier, 5-régulier... et n assez grand, on peut poursuivre ces calculs et introduire les vecteurs tri-normal, quadri-normal, ..., p -normal, avec

6.107. \overrightarrow{N}_p vecteur p -normal qui est unitaire et dirige l'orthogonal de S_p dans S_{p+1} .

On aura alors $\frac{d\overrightarrow{N}_{p-1}}{ds} \in \text{Vect}(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}_1, \dots, \overrightarrow{N}_p)$, donc on peut poser :

$$\frac{d\overrightarrow{N}_{p-1}}{ds} = \alpha \overrightarrow{T} + \sum_{k=1}^p \alpha_k \overrightarrow{N}_k.$$

Comme $\overrightarrow{N}_{p-1}^2 = 1$, on aura $2\overrightarrow{N}_{p-1} \cdot \frac{d\overrightarrow{N}_{p-1}}{ds} = 0$ d'où $\alpha_{p-1} = 0$. Puis les relations $\overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{N}_{p-1} = 0$ et $\overrightarrow{N}_k \cdot \overrightarrow{N}_{p-1} = 0$ pour $1 \leq k \leq p-2$ permettent de calculer α et les α_k en fonction des composantes des $\frac{d\overrightarrow{N}_k}{ds}$ et de $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}$, déjà trouvées. En fait, il y a peu de calculs car supposons par récurrence,

que pour $1 \leq k \leq p-2$, on ait $\frac{d\vec{N}_k}{ds} = -\gamma_k \vec{N}_{k-1} + \gamma_{k+1} \vec{N}_{k+1}$, avec la convention $\vec{T} = N_0$, la relation 6.106 montre que ceci est vrai au rang $k=1$. On cherche α_k pour $k \leq p-2$.

On a $\frac{d\vec{N}_k}{ds} \cdot \vec{N}_{p-1} + \vec{N}_k \cdot \frac{d\vec{N}_{p-1}}{ds} = 0$, or $\frac{d\vec{N}_k}{ds} \cdot \vec{N}_{p-1}$ est nul sauf si $p-1 = k-1$, (exclu ici pour $k \leq p-2$) ou si $p-1 = k+1$, soit si $k = p-2$.

On a donc $\alpha_{p-2} = -\gamma_{p-1}$, $\alpha_{p-1} = 0$, (déjà vu) et aussi $\alpha_k = 0$ si $k < p-2$.

On pose alors, et c'est une définition, $\alpha_k = \gamma_p$, d'où l'égalité :

6.108. $\frac{d\vec{N}_{p-1}}{ds} = -\gamma_{p-1} \vec{N}_{p-2} + \gamma_p \vec{N}_p$, où N_p est le vecteur p -normal, (voir 6.107) et où γ_p est la $p^{\text{ième}}$ courbure.

On s'aperçoit donc que l'hypothèse de récurrence est correcte.

Comment tout cela se termine-t-il ?

Dans A affine de dimension n , la recherche d'un n -espace osculateur est inutile, le seul candidat à ce poste est A .

On suppose l'arc n -régulier, et on suppose trouvés \vec{T} , ainsi que les vecteurs normaux $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \dots, \vec{N}_{n-2}$, ainsi que les courbures $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-2}$.

Pour appliquer la même démarche, on devrait choisir un vecteur unitaire \vec{N}_{n-1} qui dirige l'orthogonal de S_{n-1} dans E . Or, si on suppose l'espace euclidien E orienté, un candidat naturel s'impose, c'est :

6.109. $\vec{N}_{n-1} = \vec{T} \wedge \vec{N}_1 \wedge \dots \wedge \vec{N}_{n-2}$.

(Voir en Tome 3, 14.52 et 14.54 la définition du produit mixte et du produit vectoriel.)

La connaissance de \vec{N}_{n-1} permet d'introduire la $(n-1)$ ième courbure, γ_{n-1} , encore appelée torsion de la courbe (et qui sera notée τ dans les courbes gauches), définie par

6.110. $\frac{d\vec{N}_{n-2}}{ds} = -\gamma_{n-2} \vec{N}_{n-3} + \gamma_{n-1} \vec{N}_{n-1}$.

On peut alors se demander ce que vaut $\frac{d\vec{N}_{n-1}}{ds}$, si on peut encore dériver une fois.

En notant $\vec{T} = \vec{N}_0$, et en dérivant \vec{N}_{n-1} défini par 6.109, il vient :

$$\frac{d\vec{N}_{n-1}}{ds} = \sum_{k=0}^{n-2} \vec{N}_0 \wedge \dots \wedge \vec{N}_{k-1} \wedge \frac{d\vec{N}_k}{ds} \wedge \vec{N}_{k+1} \wedge \dots \wedge \vec{N}_{n-2}.$$

Comme $\frac{d\vec{N}_k}{ds} \in \text{Vect}(\vec{N}_{k-1}, \vec{N}_{k+1})$, si $k \leq n-3$ le terme d'ordre k de cette somme est nul, et il reste :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{N}_{n-1}}{ds} &= \vec{N}_0 \wedge \vec{N}_1 \wedge \dots \wedge \vec{N}_{n-3} \wedge \frac{d\vec{N}_{n-2}}{ds} \\ &= \vec{N}_0 \wedge \vec{N}_1 \wedge \dots \wedge \vec{N}_{n-3} \wedge (-\gamma_{n-2}\vec{N}_{n-3} + \gamma_{n-1}\vec{N}_{n-1}) \\ &= \gamma_{n-1}\vec{N}_0 \wedge \vec{N}_1 \wedge \dots \wedge \vec{N}_{n-3} \wedge \vec{N}_{n-1}. \end{aligned}$$

Comme la base $(\vec{N}_0, \vec{N}_1, \dots, \vec{N}_{n-2}, \vec{N}_{n-1})$ est orthonormée directe, la composante suivant \vec{N}_j de $\vec{N}_0 \wedge \vec{N}_1 \wedge \dots \wedge \vec{N}_{n-3} \wedge \vec{N}_{n-1}$, est :

$$w_j = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (j+1)\text{ième ligne, (voir Tome 3, 14.54).}$$

Les w_j sont donc tous nuls, sauf si $j+1 = n-1$, soit $j = n-2$, et

$$w_{n-2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \text{ (calcul par blocs),}$$

donc :

$$6.111. \quad \frac{\overrightarrow{dN_{n-1}}}{ds} = -\gamma_{n-1} \overrightarrow{N_{n-2}}.$$

REMARQUE 6.112. — Si on décompose les vecteurs $\frac{\overrightarrow{dN_k}}{ds}$, pour $0 \leq k \leq n-1$, dans la base des $(\overrightarrow{N_j})$, $0 \leq j \leq n-1$, la matrice A des composantes est antisymétrique et on a, matriciellement,

$$\begin{pmatrix} \frac{\overrightarrow{dT}}{ds} & \frac{\overrightarrow{dN_1}}{ds} & \dots & \frac{\overrightarrow{dN_{n-2}}}{ds} & \frac{\overrightarrow{dN_{n-1}}}{ds} \\ 0 & -\gamma_1 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\gamma_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & -\gamma_{n-1} \\ 0 & 0 & & \gamma_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N_1} \\ \overrightarrow{N_2} \\ \vdots \\ \overrightarrow{N_{n-3}} \\ \overrightarrow{N_{n-2}} \\ \overrightarrow{N_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant exploiter ces résultats généraux dans le cas des courbes planes, ($n = 2$) et des courbes gauches, (en dimension trois).

6. Courbure des arcs plans

Soit $\Gamma = (I, f)$ un arc paramétré plan, de classe C^2 au moins, bi-régulier, d'abscisse curviligne notée s , dans A espace affine orienté de dimension 2.

Le vecteur tangent unitaire \overrightarrow{T} est $\frac{\overrightarrow{dm}}{ds}$, avec $\frac{ds}{dt} = \|f'(t)\|$.

On introduit \overrightarrow{N} vecteur directement perpendiculaire à \overrightarrow{T} , unitaire, et $\frac{\overrightarrow{dT}}{ds}$ est proportionnel à \overrightarrow{N} , (voir 6.104), on note $\frac{\overrightarrow{dT}}{ds} = \gamma(s)\overrightarrow{N}$, $\gamma(s)$ étant la courbure en $m(s)$.

DÉFINITION 6.114. — En $m(s)$ point bi-régulier d'un arc plan, la courbure $\gamma(s)$ est non nulle, $\mathcal{R}(s) = \frac{1}{\gamma(s)}$ est le rayon de courbure. Le point $c(s)$ tel que $\overrightarrow{m(s)c(s)} = \mathcal{R}(s)\vec{N}$ est le centre de courbure, et l'ensemble des centres de courbure est la développée de l'arc paramétré.

Détermination de $\mathcal{R}(s)$.

Si $\mathcal{R} = (o; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct du plan affine A , on peut introduire l'angle $\varphi = (\vec{i}, \vec{T})$, (figure 6.114).

On a $\vec{T} = (\cos \varphi) \vec{i} + (\sin \varphi) \vec{j}$, et \vec{T} étant dérivable en s , l'utilisation d'un Arccos ou d'un Arcsin montre que φ est dérivable en s aussi. Mais

alors $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds}$ d'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= (-\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}) \frac{d\varphi}{ds} \\ &= \left(\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} \right) \frac{d\varphi}{ds}. \end{aligned}$$

Comme \vec{N} , directement perpendiculaire à \vec{T} , est déduit de \vec{T} par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, on a $\vec{N} = \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j}$, d'où :

$$6.115 \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} \vec{N}, \quad \gamma(s) = \frac{d\varphi}{ds} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(s) = \frac{ds}{d\varphi},$$

expressions qui vont nous servir.

Arc paramétré : x et y fonction de t . On a soit $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y'}{x'}$, soit $\operatorname{cot} \varphi = \frac{x'}{y'}$, expressions qui conduisent à $\frac{d\varphi}{dt}$. Supposons $\varphi \neq \frac{\pi}{2}(\pi)$, localement vérifié, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\operatorname{tg} \varphi) &= (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2} \\ &= \left(1 + \frac{y'^2}{x'^2} \right) \frac{d\varphi}{dt}, \end{aligned}$$

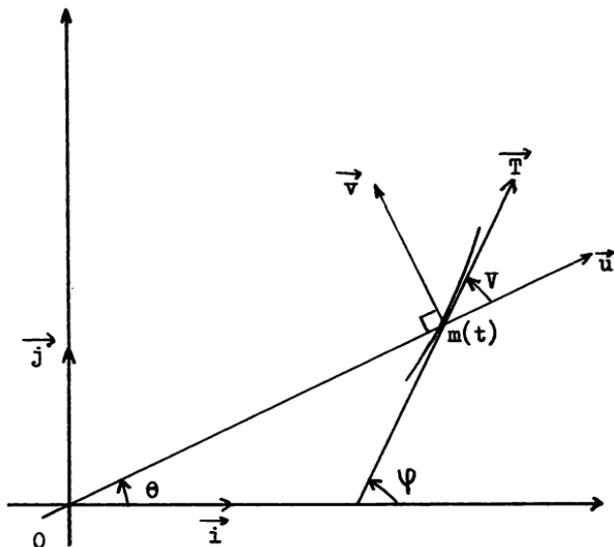


Fig. 6.114

ce qui conduit à
$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Comme $\frac{ds}{dt} = (x'^2 + y'^2)^{1/2}$, si l'arc est orienté suivant les t croissants on a :

$$6.115.1. \quad \mathcal{R} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{y''x' - x''y'}.$$

En particulier, un arc bi-régulier d'équation cartésienne $y = f(x)$ conduira à :

$$6.115.2. \quad \mathcal{R} = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

En polaires, en introduisant le vecteur $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, et \vec{v} directement perpendiculaire, on a $\vec{om} = r(\theta) \vec{u}$ d'où $\frac{d\vec{m}}{d\theta} = r' \vec{u} + r \vec{v}$, ce qui conduit, pour $r' \neq 0$ et avec V angle de \vec{u} et \vec{T} , à $\text{tg } V = \frac{r}{r'}$ et à

$$(1 + \text{tg}^2 V) \frac{dV}{d\theta} = \frac{r'^2 - r r''}{r'^2} = \left(1 + \frac{r^2}{r'^2}\right) \frac{dV}{d\theta},$$

d'où $dV = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} d\theta$, expression que l'on obtiendrait aussi, pour

$V = \frac{\pi}{2}$, à partir de $\cotg V = \frac{r'}{r}$, (voir figure 6.114).

Comme $\varphi = (\vec{i}, \vec{T}) = (\vec{i}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{T}) = \theta + V$, on a :

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = 1 + \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2}.$$

Comme $\frac{ds}{d\theta} = (r^2 + r'^2)^{1/2}$, (6.100.2), on obtient :

$$6.115.3. \quad \mathcal{R} = \frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

expression où les dérivations sont prises en fonction de θ , l'arc étant orienté suivant les θ croissants.

THÉORÈME 6.116. — *Soit un arc plan de classe C^3 au moins, bi-régulier. La tangente en $c(s)$, centre de courbure, à la développée, est la normale à Γ en $m(s)$, (si cette tangente existe).*

En effet, la développée est paramétrée, avec s abscisse curviligne de Γ , par $\vec{oc}(s) = \vec{om}(s) + \mathcal{R}(s)\vec{N}$, donc

$$\frac{d\vec{c}}{ds} = \vec{T} + \mathcal{R}'(s)\vec{N} + \mathcal{R}(s)\frac{d\vec{N}}{ds},$$

avec $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma(s)\vec{T}$, $\gamma(s)$ courbure en $m(s)$, (voir 6.111 avec $n = 2$), donc

$$\frac{d\vec{c}}{ds} = \vec{T} + \mathcal{R}'(s)\vec{N} + \mathcal{R}(s)\left(-\frac{1}{\mathcal{R}(s)}\vec{T}\right) = \mathcal{R}'(s)\vec{N}.$$

Si $\mathcal{R}'(s) \neq 0$, $c(s)$ est régulier sur la développée, la tangente en $c(s)$ existe et elle est dirigée par \vec{N} .

Si s_0 est zéro isolé de \mathcal{R}' , et si on peut redériver, avec $\mathcal{R}''(s_0) \neq 0$

on aura $\frac{d^2\vec{c}}{ds^2}(s_0) = \mathcal{R}''(s_0)\vec{N} + \underbrace{\mathcal{R}'(s_0)}_{=0}\frac{d\vec{N}}{ds}$, dirigé par \vec{N} , et en fait, dans

le cas où il existe p , entier, tel que

$$\mathcal{R}'(s_0) = \mathcal{R}''(s_0) = \dots = \mathcal{R}^{(p-1)}(s_0) = 0 \text{ et } \mathcal{R}^{(p)}(s_0) \neq 0,$$

on serait conduit de même à $\frac{d^p c}{ds^p}(s_0)$ non nul, colinéaire à \vec{N} , vecteur qui dirige la tangente en $c(s_0)$ à la développée. ■

REMARQUE 6.117. — Sur une composante connexe de l'ouvert $\Omega = \{s; \mathcal{R}'(s) \neq 0\}$ on a donc la tangente à la développée connue, et sur un intervalle sur lequel \mathcal{R}' serait nul, l'étude de l'équation intrinsèque, (voir 6.159) permettra de voir que l'arc Γ est alors un arc de cercle, et la développée réduite à un point, ($\frac{dc}{ds} = 0$ sur un intervalle conduit à $c(s) = \text{constant}$).

La justification de 6.116 permet dans certains cas de raccorder deux composantes connexes consécutives de Ω , (en un zéro isolé de Ω), mais ne dit rien d'éventuels zéros non isolés de Ω .

6.118. CERCLE OSCULATEUR À UN ARC PLAN

Nous avons vu en 6.41 la définition d'un plan osculateur à un arc paramétré, définition généralisée en 6.46 à celle de k -espace osculateur. En s'inspirant de ces définitions on peut chercher si un cercle $\mathcal{C}(t)$ tangent à $\Gamma = (I, f)$ en $m_0(t_0)$, et passant par un point $m(t)$ pour t voisin de t_0 , aura «une limite» lorsque t tend vers t_0 . Cette recherche suppose que ce cercle existe pour $t \neq t_0$, t dans un voisinage de t_0 et que l'on dispose d'une topologie sur les cercles.

Nous formulerons cette topologie de la façon suivante. Dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (o; \vec{i}, \vec{j})$ un cercle $\mathcal{C}(t)$ de centre $\omega(t) = (a(t), b(t))$ et de rayon $r(t)$ a une équation du type

$$(x - a(t))^2 + (y - b(t))^2 = r^2(t) \quad \text{ou}$$

$$6.119. \quad x^2 + y^2 - 2a(t)x - 2b(t)y + c(t) = 0,$$

avec $c(t) = a^2(t) + b^2(t) - r^2(t)$, les coefficients $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ vérifiant donc l'inégalité

$$6.120. \quad a^2(t) + b^2(t) - c(t) \geq 0.$$

DÉFINITION 6.121. — On dira que le cercle $\mathcal{C}(t)$ d'équation 6.119 a pour limite le cercle \mathcal{C}_0 d'équation $x^2 + y^2 - 2a_0x - 2b_0y + c_0 = 0$ lorsque t tend vers t_0 , si et seulement si les fonctions a , b et c ont pour limites a_0 , b_0 et c_0 .

Il est à remarquer alors que C_0 est un cercle, car 6.120 donne à la limite la condition $a_0^2 + b_0^2 - c_0 \geq 0$, et que si $C(t)$ est un cercle de centre $\omega(t) = (a(t), b(t))$ et de rayon $r(t)$, avec $\lim_{t \rightarrow t_0} \omega(t) = \omega_0 = (a_0, b_0)$ et $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r_0$, le cercle limite C_0 est le cercle centré en ω_0 et de rayon r_0 .

Soit donc un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de classe C^2 au moins, d'abscisse curviligne s et le point m_0 de paramètre s_0 . On considère le repère $\mathcal{R}_0(m_0; \vec{T}_0, \vec{N}_0)$, l'arc étant supposé bi-régulier en m_0 , (donc localement par continuité).

Un développement de Taylor-Young à l'ordre 2 en m_0 donnera :

$$\overrightarrow{m_0 m} = (s - s_0) \vec{T}_0 + \frac{(s - s_0)^2}{2} \left(\frac{\vec{N}_0}{R_0} + \varepsilon(s) \right)$$

avec $\lim_{s \rightarrow s_0} \varepsilon(s) = 0$, et l'étude locale d'un arc nous permet de savoir qu'il existe $V(s_0)$ voisinage de s_0 tel que pour tout s de $V(s_0) - \{s_0\}$, $m(s)$ soit dans le même demi-plan ouvert limité par la tangente, (voir 6.58, ici $q = 2$ est pair). Mais alors la médiatrice de $m_0 m(s)$ coupe la normale à Γ en m_0 , d'où l'existence de $d(s)$ centre d'un cercle $C(s)$ tangent à Γ en m_0 et passant par $m(s)$, (voir figure 6.121).

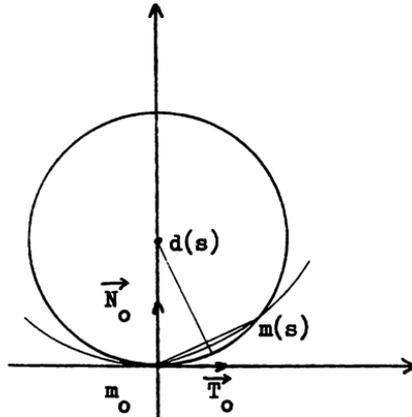


Fig. 6.121

Dans le repère \mathcal{R}_0 , ce cercle a une équation du type $X^2 + Y^2 - 2bY = 0$, (centré en $d(s)$ de coordonnées $(0, b(s))$ et passant par l'origine m_0), et il passe par $m(s)$ de coordonnées :

$$6.122. \quad \begin{cases} X(s) = (s - s_0) + (s - s_0)^2 \varepsilon_1(s) \\ Y(s) = \frac{(s - s_0)^2}{2\mathcal{R}_0} (1 + \varepsilon_2(s)) \end{cases},$$

avec $\lim_{s \rightarrow s_0} \varepsilon_1(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} \varepsilon_2(s) = 0$, vu le développement de Taylor à l'ordre

2, $2\varepsilon_1(s)$ et $\mathcal{R}_0^{-1}\varepsilon_2(s)$ étant les composantes scalaires de $\overrightarrow{\varepsilon(s)}$.

Mais alors, pour $s \neq s_0$, dans un voisinage de s_0 , $Y(s)$ est non nul et

$\lim_{s \rightarrow s_0} \frac{X^2(s)}{2Y(s)} = \mathcal{R}_0$, et comme en divisant l'équation du cercle par $2Y(s)$,

on a $b(s) = \frac{X^2(s)}{2Y(s)} + \frac{Y(s)}{2}$, il en résulte que $\lim_{s \rightarrow s_0} b(s) = \mathcal{R}_0$: le cercle $\mathcal{C}(s)$ admet pour limite lorsque s tend vers s_0 , le cercle de centre le centre de courbure, de rayon le rayon de courbure.

DÉFINITION 6.123. — *On appelle cercle osculateur en $m_0(s_0)$ à un arc plan Γ , la position limite, si elle existe, d'un cercle tangent en m_0 à Γ , passant par $m(s)$ pour $s \neq s_0$, lorsque s tend vers s_0 .*

DÉFINITION 6.124. — *Soit un arc Γ bi-régulier et $m_0(s_0)$ un point de Γ . On appelle cercle de courbure en m_0 pour Γ , le cercle de centre le centre de courbure en m_0 , de rayon le rayon de courbure.*

THÉORÈME 6.125. — *En tout point bi-régulier d'un arc Γ , le cercle osculateur existe et c'est le cercle de courbure.*

C'est ce que nous avons justifié après la définition 6.121. ■

Ce cercle de courbure va nous servir aussi dans l'étude de la position locale de l'arc par rapport à un cercle tangent. Soit donc l'arc supposé de classe \mathcal{C}^2 , bi-régulier en m_0 et un cercle C tangent à Γ en m_0 . Dans le repère \mathcal{R}_0 introduit après 6.121, ce cercle a une équation du type :

$$6.126. \quad X^2 + Y^2 - 2\beta Y = 0,$$

β étant l'ordonnée du centre b de ce cercle.

Comme tout cercle qui se respecte, C a un intérieur, ensemble des points m tels que $\|\overrightarrow{bm}\| < R$, R rayon du cercle, et un extérieur, défini par $\|\overrightarrow{bm}\| > R$, et on vérifie rapidement que $m(X, Y)$ est intérieur, (resp. extérieur) au cercle si et seulement si la

6.126bis. *puissance analytique* de m par rapport à C , c'est-à-dire $\mathcal{P}(m) = X^2 + Y^2 - 2\beta Y$ est < 0 , (resp. > 0).

En utilisant les coordonnées de $m(s)$ vues en 6.122, on a :

$$\mathcal{P}(m(s)) = (s - s_0)^2 \left(1 - \frac{\beta}{\mathcal{R}_0} + o(1) \right), \text{ donc si } \beta \neq \mathcal{R}_0,$$

$\mathcal{P}(m(s))$ est localement du signe de $1 - \frac{\beta}{\mathcal{R}_0}$.

6.127. *On a donc :*

pour $\frac{\beta}{\mathcal{R}_0} > 1$, l'arc est localement, à l'intérieur de C ;

pour $\frac{\beta}{\mathcal{R}_0} < 1$, il est localement à l'extérieur de C , et dans ces deux cas le contact est d'ordre 2;

pour $\beta = \mathcal{R}_0$, (cercle osculateur) le contact est d'ordre supérieur à 2 et seul un développement limité à un ordre plus élevé, s'il existe, permettra de préciser la nature de ce contact.

Terminons ce paragraphe par un mot sur les *développantes* d'une courbe plane. L'idée est la suivante. Partant d'un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ de classe C^3 au moins et bi-régulier, on lui a associé sa développée \mathcal{C} , ensemble de ses centres de courbure, (définition 6.114) et on a vu, (Théorème 6.116) que cette développée avait pour tangente en $c(s)$ centre de courbure de Γ en $m(s)$, la normale en $m(s)$ à Γ .

Peut-on alors, partant d'une courbe C , chercher une (ou des) courbes Γ ayant C «pour développée», mais au sens du Théorème 6.116, c'est-à-dire des courbes Γ telles que les tangentes de C soient des normales pour Γ .

THÉORÈME 6.128. — *Soit un arc C de classe C^3 au moins, bi-régulier, d'abscisse curviligne σ , de vecteur unitaire tangent orienté noté \vec{T}_1 . Il existe des courbes Γ de classe C^2 au moins telles que les tangentes de C soient des normales de Γ . Ces courbes Γ sont bi-régulières et ont pour développée C , (au sens de la définition 6.114). Elles sont paramétrées par $\vec{op} = \vec{om}(\sigma) + (k - \sigma)\vec{T}_1$, k constante, et elles sont appelées développantes de C , (o origine d'un repère fixe).*

On note donc $m(\sigma)$ le point générique de C , $\vec{T}_1 = \frac{\vec{dm}_1}{d\sigma}$, $\mathcal{R}_1(\sigma)$ rayon de courbure de C en $m(\sigma)$ et \vec{N}_1 le vecteur directement perpendiculaire.

On cherche s'il existe sur la tangente en m à \mathcal{C} , un point p qui, lorsque σ variera, décrira une courbe Γ ayant en p une tangente perpendiculaire à \vec{T}_1 .

On pose donc $\overrightarrow{mp(\sigma)} = f(\sigma)\vec{T}_1$, d'où une paramétrisation de Γ en :

6.129. $\overrightarrow{op(\sigma)} = \overrightarrow{om(\sigma)} + f(\sigma)\vec{T}_1(\sigma)$,
et on suppose f de classe C^1 au moins.

On aura $\frac{d\vec{p}}{d\sigma} = \vec{T}_1 + f'(\sigma)\vec{T}_1 + f(\sigma)\frac{\vec{N}_1}{\mathcal{R}_1}$, (car \mathcal{C} bi-régulier donc \mathcal{R}_1

existe), donc, si $f'(\sigma) = -1$, il reste $\frac{d\vec{p}}{d\sigma} = \frac{f(\sigma)}{\mathcal{R}_1}\vec{N}_1$.

Comme alors $f(\sigma) = -\sigma + k$, k constante par rapport à σ , on a $\frac{d\vec{p}}{d\sigma} = \frac{k - \sigma}{\mathcal{R}_1}\vec{N}_1$, donc pour $\sigma \neq k$, la tangente en $p(\sigma)$ à Γ est bien dirigée par \vec{N}_1 , perpendiculaire à \vec{T}_1 . Pour la valeur isolée k , l'arc \mathcal{C} étant de classe C^3 , \vec{N}_1 est dérivable et \mathcal{R}_1 aussi, donc

$$\frac{d^2\vec{p}}{d\sigma^2} = -\frac{\vec{N}_1}{\mathcal{R}_1} + (k - \sigma) \frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\vec{N}_1}{\mathcal{R}_1} \right),$$

et en $k = \sigma$ il reste un vecteur non nul, $-\frac{\vec{N}_1}{\mathcal{R}_1}$, qui dirige la tangente.

Les courbes Γ_k , paramétrées par :

6.130. $\overrightarrow{op}(\sigma) = \overrightarrow{om}(\sigma) + (k - \sigma)\vec{T}_1(\sigma)$,

sont des développantes de \mathcal{C} , au sens du Théorème 6.128.

Cherchons-en les développées. Pour cela, il nous faut d'abord déterminer l'abscisse curviligne de Γ_k , notée s .

On a $\frac{d\vec{p}}{d\sigma} = \frac{k - \sigma}{\mathcal{R}_1}\vec{N}_1$, ce qui conduit à poser $\vec{T} = \frac{d\vec{p}}{ds} = \vec{N}_1$, et alors

comme $\frac{d\vec{p}}{d\sigma} = \frac{d\vec{p}}{ds} \frac{ds}{d\sigma}$, on aura $\frac{ds}{d\sigma} = \frac{k - \sigma}{\mathcal{R}_1}$.

Alors $\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{\mathcal{R}} = \frac{dN_1}{ds} = \frac{dN_1}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds}$, avec $\frac{dN_1}{d\sigma} = -\frac{\vec{T}_1}{\mathcal{R}_1}$, (c'est la

formule 6.111 pour $n = 2$ et $\vec{N}_0 = \vec{T}_1$, mais on peut le déduire de la dérivation de $\vec{N}_1^2 = 1$ et $\vec{N}_1 \cdot \vec{T}_1 = 0$).

On a donc $\frac{\vec{N}}{\mathcal{R}} = -\frac{\vec{T}_1}{\mathcal{R}_1} \times \frac{\mathcal{R}_1}{k - \sigma} = -\frac{\vec{T}_1}{k - \sigma}$, et comme \vec{N} est directement

perpendiculaire à $\vec{T} = \vec{N}_1$, on a $\vec{N} = -\vec{T}_1$ et $\mathcal{R} = k - \sigma$. Mais alors, le centre de courbure de Γ en $p(\sigma)$ associé à $m(\sigma)$ sur C , par l'égalité $\vec{mp} = (k - \sigma)\vec{T}_1$ est le point c tel que $\vec{p(\sigma)c} = \mathcal{R}\vec{N} = (k - \sigma)(-\vec{T}_1) = \vec{pm}$, donc c est en $m(\sigma)$ et la développée de chaque courbe Γ_k est bien la courbe C de départ. ■

7. Courbure et torsion des arcs gauches

On se place dans ce paragraphe, dans un espace affine euclidien A de dimension 3, et les arcs seront supposés tri-réguliers. Un mot d'explication s'impose donc pour les arcs paramétrés présentant des points singuliers isolés.

Soit un arc paramétré (I, f) , de classe C^1 au moins, et t_0 intérieur à I tel que $f'(t_0) = 0$, et $f'(t) \neq 0$ sur un voisinage $V(t_0)$ privé de t_0 . On dispose de a et b dans I tels que $a < t_0 < b$, et $f'(t) \neq 0$ sur $[a, t_0[\cup]t_0, b]$. On dispose donc d'une abscisse curviligne $s(t)$ définie sur

$[a, b]$ par $s(t) = \int_{t_1}^t \|f'(u)\| du$, (t_1 fixé dans I), si l'arc est orienté suivant

les t croissants, et $s'(t) = \|f'(u)\|$ s'annule en t_0 . Supposons que t_0 soit zéro d'ordre impair de $s'(t)$, par exemple $s'(t) = |t - t_0|\alpha(t)$, la fonction α étant localement > 0 en t_0 .

Si on respecte l'orientation de l'arc, on est amené à poser :

$s'(t) = (t - t_0)\alpha(t)$ si $t > t_0$ et $s'(t) = -(t - t_0)\alpha(t)$ pour $t < t_0$. Mais

alors, pour le vecteur tangent $\vec{T} = \frac{d\vec{m}}{ds} = \frac{d\vec{m}}{dt} \frac{dt}{ds}$, ceci conduit à prendre deux expressions de signes opposés pour $t > t_0$ ou $t < t_0$, et, dans le

cas d'existence des limites quand t tend vers t_0 de \vec{T} , on aura des limites à droite et à gauche opposées, d'où une détermination discontinue de \vec{T} , (donc de la courbure et de tout ce qui s'en déduit).

Aussi choisira-t-on de préférence une détermination continue de \vec{T} , (puis du vecteur normal \vec{N}) lorsqu'il y a des zéros isolés de $f'(t)$, quitte à changer d'orientation sur l'arc en traversant ces valeurs.

Revenons aux arcs paramétrés tri-réguliers de classe C^3 au moins en dimension 3.

L'étude du paragraphe 5 s'applique. L'abscisse curviligne s existe, le vecteur unitaire tangent orienté \vec{T} aussi, puis le plan osculateur de direction $\text{Vect}(f'(t), f''(t))$ existe. On choisit \vec{N} vecteur unitaire normal à \vec{T} dans cette direction et on a $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}$, γ étant la courbure de l'arc en $m(s)$. (Voir 6.104). On ne met pas d'indice car le seul espace de dimension 3 étant l'espace entier, on introduit $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$, (voir 6.109), on sait alors que $\frac{d\vec{N}}{ds} \in \text{Vect}(\vec{T}, \vec{B})$ et on note τ la composante de $\frac{d\vec{N}}{ds}$ suivant \vec{B} : c'est la torsion de l'arc paramétré, (au lieu de la deuxième courbure) et on a : $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T} + \tau\vec{B}$.

Enfin $\frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N}$, (c'est 6.111 dans ce cas particulier de $n = 3$, mais on peut dériver $\vec{T} \wedge \vec{N}$).

Du vocabulaire :

DÉFINITION 6.131. — *Le vecteur \vec{N} est le vecteur normal principal, le vecteur \vec{B} est appelé vecteur binormal, et le trièdre $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est le trièdre de Frenet en m , pour l'arc Γ , le repère $\mathcal{R}(m; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ étant le repère de Frenet.*

On a les formules de dérivations suivantes :

$$6.132. \quad \begin{cases} \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N} \\ \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T} + \tau\vec{B} \\ \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau\vec{N} \end{cases},$$

dites *formules de Frenet*, où γ est la *courbure*, et τ la *torsion*. Lorsque γ et τ sont non nuls, ce qui est le cas pour un arc tri-régulier, $\mathcal{R} = \frac{1}{\gamma}$ est le *rayon de courbure*, et $\mathcal{T} = \frac{1}{\tau}$ le *rayon de torsion*.

Vecteur rotation instantané.

Si on considère l'application linéaire $\theta : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ qui à \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} associe $\frac{d\vec{T}}{ds}$, $\frac{d\vec{N}}{ds}$ et $\frac{d\vec{B}}{ds}$, elle est associée à une matrice antisymétrique,

celle de θ dans la base \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} , qui est $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$.

Par ailleurs, si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 , si θ est linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 , la matrice de θ dans la base \mathcal{B} a pour coefficient en $i^{\text{ième}}$ ligne, $j^{\text{ième}}$ colonne le scalaire $\theta(e_j) \cdot e_i$.

Si $\vec{\Omega}$ est un vecteur fixé de \mathbb{R}^3 , et si on définit θ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 par :

$$\theta(\vec{V}) = \vec{\Omega} \wedge \vec{V},$$

on a une application linéaire, et on aura :

$$\begin{aligned} \theta(e_j) \cdot e_i &= (\vec{\Omega} \wedge e_j) \cdot e_i = (\Omega, e_j, e_i), \text{ (produit mixte),} \\ &= -(\vec{\Omega}, e_i, e_j) = -(\vec{\Omega} \wedge e_i) \cdot e_j = -\theta(e_i) \cdot e_j, \end{aligned}$$

donc θ aura une matrice antisymétrique dans la base \mathcal{B} . C'est pourquoi on cherche un vecteur $\vec{\Omega} = a\vec{T} + b\vec{N} + c\vec{B}$, tel que :

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{T} = b\vec{N} \wedge \vec{T} + c\vec{B} \wedge \vec{T} = \frac{d\vec{T}}{ds},$$

soit $\gamma\vec{N} = -b\vec{B} + c\vec{N}$, d'où $b = 0$ et $c = \gamma$;

puis $\vec{\Omega} \wedge \vec{N} = -\gamma\vec{T} + \tau\vec{B} = a\vec{T} \wedge \vec{N} + c\vec{B} \wedge \vec{N}$,
 $= a\vec{B} - c\vec{T}$,

qui redonne $c = \gamma$, et aussi $a = \tau$.

DÉFINITION 6.133. — *Le vecteur $\vec{\Omega} = \tau\vec{T} + \gamma\vec{B}$ est le vecteur rotation instantané du trièdre de Frenet. Il est tel que :*

tout vecteur $\overrightarrow{V}(s) = u\overrightarrow{T}(s) + v\overrightarrow{N}(s) + w\overrightarrow{B}(s)$, (u, v et w constants) a pour dérivée $\frac{d\overrightarrow{V}}{ds} = \overrightarrow{\Omega}(s) \wedge \overrightarrow{V}(s)$.

6.134. DÉTERMINATION PRATIQUE DE LA COURBURE ET DE LA TORSION

On part d'un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, supposé tri-régulier et de classe suffisante, on note t la variable de I et s l'abscisse curviligne, et $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée fixée de $E = \mathbb{R}^3$, dans laquelle $f(t)$ est connu.

En fait, il y a deux démarches suivant que l'expression de $\frac{ds}{dt}$ est commode à manipuler ou non.

PREMIER CAS : $\frac{ds}{dt} = \|f'(t)\|$ a la gentillesse de s'exprimer sans racine carrée, et entraîne des simplifications.

On peut effectuer les calculs dans l'ordre de l'exposé :

$$\overrightarrow{T} = \frac{d\overrightarrow{m}}{dt} \frac{dt}{ds} = \begin{vmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{vmatrix}$$

est facile à exprimer; puis $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{T}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|f'(t)\|} \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}$, se calcule aisément, toujours sans radicaux, on norme ce vecteur, d'où la connaissance de $\gamma(t)$ et de $\overrightarrow{N} \begin{vmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{vmatrix}$;

puis le calcul de $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N}$, et de $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{B}}{dt} \frac{dt}{ds} = -\tau \overrightarrow{N}$; ce qui fournira τ , et un contrôle des calculs car $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds}$ doit être colinéaire à \overrightarrow{N} .

DEUXIÈME CAS : $\frac{ds}{dt}$ est désagréable et s'exprime sous la forme $\sqrt{\text{quelque chose}}$, disons $\sqrt{u(t)}$.

Si $\overrightarrow{f}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, on aura :

$$\overrightarrow{T} = \frac{1}{\sqrt{u(t)}} (x'(t)\overrightarrow{i} + y'(t)\overrightarrow{j} + z'(t)\overrightarrow{k}),$$

d'où des expressions des composantes de \vec{T} difficiles à dériver. On a alors intérêt à effectuer un calcul littéral le plus longtemps possible.

$$\text{On a } \boxed{\vec{T} = \frac{\overrightarrow{dm}}{dt} \frac{dt}{ds}}, \quad \gamma \vec{N} = \frac{\overrightarrow{dT}}{ds} = \frac{\overrightarrow{dT}}{dt} \frac{dt}{ds}, \text{ donc :}$$

$$\boxed{\gamma \vec{N} = \frac{\overrightarrow{d^2m}}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \text{un vecteur de Vect}(\vec{T})},$$

puis :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{ds} \vec{N} + \gamma \frac{d\vec{N}}{ds} &= \frac{d\gamma}{ds} \vec{N} + \gamma(-\gamma \vec{T} + \tau \vec{B}), \\ &= \frac{\overrightarrow{d^3m}}{dt^3} \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 + \text{vecteur de Vect}(\vec{T}, \vec{N}), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'égalité :

$$\boxed{\gamma \tau \vec{B} = \frac{\overrightarrow{d^3m}}{dt^3} \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 + \text{un vecteur de Vect}(\vec{T}, \vec{N})}.$$

Il résulte de ce calcul littéral, et des propriétés du produit vectoriel et du produit mixte, que :

$$\mathbf{6.134.1.} \quad \boxed{\gamma \vec{T} \wedge \vec{N} = \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \frac{\overrightarrow{dm}}{dt} \wedge \frac{\overrightarrow{d^2m}}{dt^2} = \gamma \vec{B}}$$

et que $\gamma^2 \tau (\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}) = \left(\frac{dt}{ds} \right)^6 \left(\frac{\overrightarrow{dm}}{dt}, \frac{\overrightarrow{d^2m}}{dt^2}, \frac{\overrightarrow{d^3m}}{dt^3} \right)$, or le produit mixte $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ vaut 1, d'où :

$$\mathbf{6.134.2.} \quad \boxed{\gamma^2 \tau = \left(\frac{dt}{ds} \right)^6 \left(\frac{\overrightarrow{dm}}{dt}, \frac{\overrightarrow{d^2m}}{dt^2}, \frac{\overrightarrow{d^3m}}{dt^3} \right)}.$$

Partant alors du paramétrage $\overrightarrow{f(t)} = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} + z(t)\overrightarrow{k}$, on effectue trois dérivations, on norme $\overrightarrow{f'(t)}$ d'où la connaissance de \overrightarrow{T} et de $\frac{dt}{ds}$; on norme $\overrightarrow{f'(t)} \wedge \overrightarrow{f''(t)}$, d'où dans 6.134.1, la connaissance de \overrightarrow{B} et de γ , mais alors on aura $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{T}$, et τ sera connu grâce à la formule 6.134.2.

6.135. ALLURE LOCALE D'UN ARC PARAMÉTRÉ TRI-RÉGULIER

On se place en m_0 de paramètre s_0 (abscisse curviligne), puis pour $s = s_0 + h$, dans un voisinage de s_0 , on considère le point $m(s)$ de l'arc, connu par ses coordonnées dans le repère de Frenet $\mathcal{R}_0 = (m_0; \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ en m_0 . Un développement de Taylor-Young à l'ordre trois nous donne, avec $s - s_0 = h$,

$$\overrightarrow{m_0 m} = h\overrightarrow{T} + \frac{h^2}{2!} \gamma \overrightarrow{N} + \frac{h^3}{3!} \left(\frac{d\gamma}{ds} \overrightarrow{N} + \gamma(-\gamma\overrightarrow{T} + \tau\overrightarrow{B}) + \varepsilon(h) \right)$$

$\gamma, \tau, \frac{d\gamma}{ds}$ étant calculés en s_0 , et le vecteur $\varepsilon(h)$ tendant vers 0 si h tend vers 0.

On décompose $\varepsilon(h)$ en $\varepsilon(h) = \varepsilon_1(h)\overrightarrow{T} + \varepsilon_2(h)\overrightarrow{N} + \varepsilon_3(h)\overrightarrow{B}$ et il vient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{m_0 m} = & \left(h - \gamma^2 \frac{h^3}{6} + \frac{h^3}{6} \varepsilon_1(h) \right) \overrightarrow{T} + \left(\frac{h^2}{2} \gamma + \frac{h^3}{6} \frac{d\gamma}{ds} + \frac{h^3}{6} \varepsilon_2(h) \right) \overrightarrow{N} \\ & + \frac{h^3}{6} (\gamma\tau + \varepsilon_3(h)) \overrightarrow{B}. \end{aligned}$$

Si on note $\overrightarrow{m_0 m} = \xi \overrightarrow{T} + \eta \overrightarrow{N} + \zeta \overrightarrow{B}$, on a donc en m_0 tri-régulier :

$$6.136. \quad \begin{cases} \xi = h - \frac{\gamma^2 h^3}{6} + \frac{h^3}{6} \varepsilon_1(h) \simeq h & \text{si } h \text{ tend vers } 0, \\ \eta = \frac{h^2 \gamma}{2} + \frac{h^3}{6} \frac{d\gamma}{ds} + \frac{h^3}{6} \varepsilon_2(h) \simeq \frac{h^2 \gamma}{2} & \text{si } h \text{ tend vers } 0, \\ \zeta = \frac{h^3}{6} \gamma\tau + \frac{h^3}{6} \varepsilon_3(h) \simeq \frac{h^3 \gamma\tau}{6} & \text{si } h \text{ tend vers } 0; \end{cases}$$

formules que nous allons utiliser pour étudier l'allure locale de l'arc, et sa place par rapport à une sphère tangente à Γ en m_0 , point tri-régulier sur Γ .

D'ABORD L'ALLURE LOCALE

On étudie les projections de Γ sur les trois plans du trièdre de Frenet, à savoir :

- 6.137. le plan osculateur : $(m_0; \vec{T}, \vec{N})$,
 le plan normal : $(m_0; \vec{N}, \vec{B})$ et
 le plan rectifiant : $(m_0; \vec{T}, \vec{B})$.

Sur le plan osculateur, on a $\xi \sim h$ et $\eta \sim h^2 \frac{\gamma}{2} \sim \frac{\gamma}{2} \xi^2$: on a une allure de parabole tangente à l'axe des ξ , (figure 6.137.1).

Sur le plan normal : $\eta \sim h^2 \frac{\gamma}{2}$ ne change pas de signe, alors que $\zeta \sim h^3 \frac{\gamma\tau}{6}$ change de signe : les deux premiers entiers caractéristiques de la projection sont $p = 2, q = 3$: on a un rebroussement de première espèce (voir 6.61), de tangente l'axe des η , (figure 6.137.2).

Enfin, sur le plan rectifiant, $\xi \sim h$ et $\zeta \sim h^3 \frac{\gamma\delta}{6}$, on a pour entiers caractéristiques 1 et 3, d'où une inflexion géométrique (voir 6.61) de tangente l'axe des ξ , (figure 6.137.3).

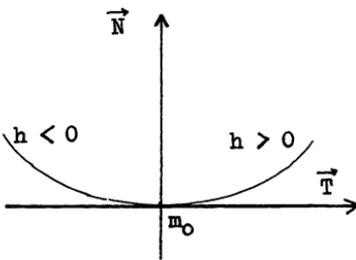


Fig. 6.137.1

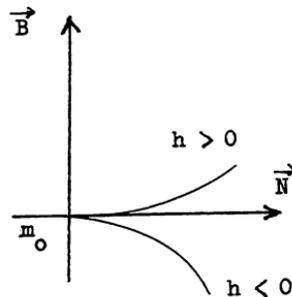


Fig. 6.137.2

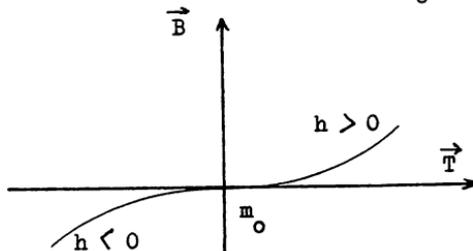


Fig. 6.137.3

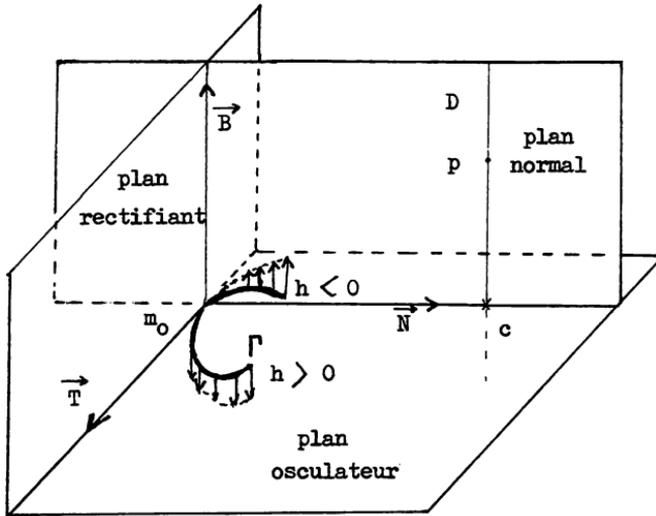


Fig. 6.137.4

Je vais essayer, mais sans aucun espoir de réussite car mes qualités de dessinateur sont douteuses, de réunir ces trois schémas sur un seul : figure 6.137.4.

En un point tri-régulier, le repère étant tel que $\gamma > 0$ et $\tau > 0$, Γ , pour $h > 0$, arrive en m_0 dans la zone $\xi > 0, \eta > 0, \zeta > 0$, et repart, ($h < 0$) dans la zone $\xi < 0, \eta > 0, \zeta < 0$, donc on traverse le plan osculateur et le plan normal, mais pas le plan rectifiant.

Étudions maintenant la place, (localement) de $m(s)$ par rapport à une sphère tangente en m_0 à Γ , lorsque $s = s_0 + h$ tend vers s_0 .

Une telle sphère (Σ) , de centre ω doit être telle que la tangente (m_0, \vec{T}) à Γ soit dans le plan tangent en m_0 à Σ , c'est-à-dire dans le plan perpendiculaire à $m_0\omega$ en m_0 . Le centre ω de Σ est donc dans le plan normal à Γ en m_0 , donc les coordonnées de ω sont du type $(0, a, b)$ dans le repère de Frenet \mathcal{R}_0 .

Dans ce repère, l'équation de (Σ) est $X^2 + Y^2 + Z^2 - 2aY - 2bZ = 0$, et le signe de la

6.138. puissance analytique $\mathcal{P}(m) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2a\eta - 2b\zeta$ de $m(s)$

par rapport à (Σ) donnera la place de m par rapport à (Σ) .

Les formules 6.136. permettent de donner un développement limité à l'ordre 3 de $\mathcal{P}(m)$ on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(m) = & \left(h - \frac{\gamma^2 h^3}{6} \right)^2 + \left(\frac{h^2 \gamma}{2} + \frac{h^3}{6} \frac{d\gamma}{ds} \right)^2 + \left(\frac{h^3}{6} \gamma \tau \right)^2 \\ & - 2a \left(\frac{h^2 \gamma}{2} + \frac{h^3}{6} \frac{d\gamma}{ds} \right) - 2b \left(\frac{h^3 \gamma \tau}{6} \right) + o(h^3), \end{aligned}$$

soit, en se débarrassant des termes superflus,

$$\mathcal{P}(m) = h^2(1 - a\gamma) + \frac{h^3}{3} \left(-b\gamma\tau - a \frac{d\gamma}{ds} \right) + o(h^3).$$

Avec $\mathcal{R} = \frac{1}{\gamma}$ et $\mathcal{T} = \frac{1}{\tau}$, rayons de courbure et de torsion, c'est encore, comme $\frac{d\gamma}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \right) = -\frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}^2}$,

$$\boxed{\mathcal{P}(m) = h^2 \left(1 - \frac{a}{\mathcal{R}} \right) - \frac{h^3}{3} \left(\frac{b}{\mathcal{R}\mathcal{T}} - \frac{a\mathcal{R}'}{\mathcal{R}^2} \right) + o(h^3)}.$$

Si $a \neq \mathcal{R}$, $\mathcal{P}(m) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \left(1 - \frac{a}{\mathcal{R}} \right) h^2$, le contact est d'ordre 2 et la courbe est localement à l'extérieur de (Σ) si $1 - \frac{a}{\mathcal{R}} > 0$, localement intérieure si $1 - \frac{a}{\mathcal{R}} < 0$.

DÉFINITION 6.139. — Le point c tel que $\overrightarrow{m_0 c} = \mathcal{R} \vec{N}$ est le centre de courbure de l'arc Γ en m_0 , et la droite D passant par c , de vecteur directeur \vec{B} s'appelle la droite caractéristique, (du plan normal).

On peut alors vérifier que l'arc est localement extérieur à la sphère (Σ) si et seulement si le centre de (Σ) est dans le demi-plan limité par D , dans le plan normal, qui contient m_0 , et donc qui contient la binormale.

Si maintenant $a = \mathcal{R}$, c'est-à-dire si la sphère (Σ) est centrée sur la droite caractéristique, on a

$$\mathcal{P}(m) = -\frac{h^3}{3} \left(\frac{b}{\mathcal{R}\mathcal{T}} - \frac{\mathcal{R}\mathcal{R}'}{\mathcal{R}^2} \right) + o(h^3).$$

Si alors $b \neq TR'$, le contact est d'ordre 3, et de telles sphères sont dites

6.140. *osculatrices* à Γ , alors que si de plus $b = TR'$, le contact est d'ordre > 3 ,

il faudrait un développement limité d'ordre plus élevé pour le préciser, et la sphère (Σ_0) , tangente à Γ en m_0 , centrée en p associé à $a = \mathcal{R}$ et $b = TR'$ est appelée sphère *sur-osculatrice* à Γ , le point p étant le point caractéristique de D , ou le centre de la sphère sur-osculatrice. (Voir figure 6.137.4 pour D , c et p).

REMARQUE 6.141. — La droite D engendre une nappe réglée (S) développable, d'arête de rebroussement l'ensemble des centres des sphères sur-osculatrices (voir exemple 9.61).

REMARQUE 6.142. — On appelle encore *développée* de Γ , (supposée tri-régulière), l'ensemble de ses centres de courbure, (voir 6.114).

Si $c(s)$ est le centre de courbure de Γ en $m(s)$, la tangente à la développée C de Γ en $c(s)$ est dans le plan normal à Γ en $m(s)$, mais ce n'est pas la normale principale.

En effet, $\overrightarrow{oc(s)} = \overrightarrow{om(s)} + \mathcal{R}(s)\overrightarrow{N}$, conduit à :

$$\frac{d\vec{c}}{ds} = \vec{T} + \mathcal{R}'(s)\overrightarrow{N} + \mathcal{R}(s) \frac{d\overrightarrow{N}}{ds},$$

avec
$$\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\frac{1}{\mathcal{R}(s)} \vec{T} + \tau(s)\overrightarrow{B}, \text{ donc :}$$

$$\frac{d\vec{c}}{ds} = \mathcal{R}'(s)\overrightarrow{N} + \mathcal{R}(s)\tau(s)\overrightarrow{B},$$

est non nul, $(\mathcal{R}(s)\tau(s) \neq 0$ si l'arc est tri-régulier, voir 6.134.2), il dirige la tangente à la développée, c'est un vecteur du plan normal à Γ en $m(s)$, non colinéaire à \overrightarrow{N} .

Si on veut définir comme en 6.128 la notion de développante d'un arc paramétré, on posera :

DÉFINITION 6.143. — On appelle *développante* d'un arc C , de classe C^3 au moins, tri-régulier, tout arc Γ tel que les tangentes de C soient des normales pour Γ .

Si σ est l'abscisse curviligne sur \mathcal{C} , on associe au point $c(\sigma)$ de \mathcal{C} , un point p tel que $\overrightarrow{c(\sigma)p} = f(\sigma)\overrightarrow{T_1}$, avec $(\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{B_1})$ trièdre de Frenet de \mathcal{C} en $c(\sigma)$, et on cherche des conditions sur f , supposée dérivable, pour que la courbe Γ paramétrée par $\overrightarrow{op(\sigma)} = \overrightarrow{oc(\sigma)} + f(\sigma)\overrightarrow{T_1}$, ait pour tangente en $p(\sigma)$ un vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{T_1}$. On a $\frac{d\overrightarrow{p(\sigma)}}{d\sigma} = \overrightarrow{T_1} + f'(\sigma)\overrightarrow{T_1} + f(\sigma)\gamma_1\overrightarrow{N_1}$, (γ_1 courbure de \mathcal{C} en $c(\sigma)$) donc si $f'(\sigma) = -1$, soit si $f(\sigma) = k - \sigma$, avec k constante, on a :

$$\mathbf{6.143.bis.} \quad \frac{d\overrightarrow{p(\sigma)}}{d\sigma} = (k - \sigma)\gamma_1\overrightarrow{N_1},$$

ce qui, pour $\sigma \neq k$, prouve que la tangente à Γ est dirigée par $\overrightarrow{N_1}$, donc que la tangente en $c(\sigma)$ à \mathcal{C} , dirigée par $\overrightarrow{T_1}$ sera une normale pour Γ .

$$(\text{Si } \sigma = k, \text{ valeur isolée, on a } \frac{d^2\overrightarrow{p}}{d\sigma^2} = (k - \sigma) \frac{d}{d\sigma}(\gamma_1\overrightarrow{N_1}) - \gamma_1\overrightarrow{N_1},$$

en k il reste $\frac{d^2\overrightarrow{p}}{d\sigma^2} = -\gamma_1\overrightarrow{N_1}$: on a la même conclusion.)

Mais contrairement aux développantes des courbes planes, si dans l'espace on cherche les développées des développantes de \mathcal{C} , on ne retrouve pas \mathcal{C} .

En effet, si on note s l'abscisse curviligne sur la développante Γ_k paramétrée par $\overrightarrow{op(\sigma)} = \overrightarrow{oc(\sigma)} + (k - \sigma)\overrightarrow{T_1}$, la formule 6.143.bis donne $\frac{d\overrightarrow{p}}{d\sigma} = \frac{(k - \sigma)}{\mathcal{R}_1} \overrightarrow{N_1} = \frac{d\overrightarrow{p}}{ds} \cdot \frac{ds}{d\sigma}$.

On peut donc poser $\overrightarrow{T} = \overrightarrow{N_1}$ et $\frac{ds}{d\sigma} = \frac{k - \sigma}{\mathcal{R}_1}$, comme pour les courbes planes. Mais alors :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{N_1}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{N_1}}{d\sigma} \frac{d\sigma}{ds} = \left(-\frac{\overrightarrow{T_1}}{\mathcal{R}_1} + \frac{\overrightarrow{B_1}}{T_1} \right) \frac{\mathcal{R}_1}{k - \sigma}, \quad (\text{pour } \sigma \neq k),$$

donc le vecteur \overrightarrow{N} obtenu en normant $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}$ ne sera pas colinéaire à $\overrightarrow{T_1}$, et le centre de courbure q , de Γ en $p(s)$, défini par $\overrightarrow{pq} = \mathcal{R}\overrightarrow{N}$ ne pourra pas être en $c(s)$. Ceci explique le choix de la définition de la notion de développante d'une courbe plane fait en 6.128.

8. Deux exemples de courbes gauches

A. Les hélices

DÉFINITION 6.144. — On appelle *hélice* dans l'espace affine euclidien de dimension 3, A , tout arc Γ tri-régulier de classe C^4 au moins, tel que la tangente en tout point de Γ fasse un angle constant avec une direction fixe.

La définition est restrictive, (tri-régulier, classe C^4), mais elle permet d'obtenir des propriétés des hélices.

THÉORÈME 6.145. — Soit une hélice Γ , tri-régulière de classe C^4 au moins. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- C_1 La tangente fait un angle constant avec une direction fixe, $\mathbb{R} \vec{k}$.
- C_2 La normale principale est orthogonale à $\mathbb{R} \vec{k}$.
- C_3 La binormale fait un angle constant avec $\mathbb{R} \vec{k}$.
- C_4 Le rapport des rayons de courbure et de torsion est constant.
- C_5 Le vecteur rotation instantané du trièdre de Frenet a une direction constante.

On note s l'abscisse curviligne en m de Γ et $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ le trièdre de Frenet associé, \mathcal{R} et \mathcal{T} les rayons de courbure et de torsion, qui existent et sont non nuls, l'arc étant tri-régulier. On a :

$$C_1 \iff (\vec{T} \cdot \vec{k} = \cos V),$$

constant par rapport à s , \vec{k} vecteur unitaire dirigeant la direction fixe de la définition d'une hélice.

En utilisant les formules de dérivation, (6.132), sur l'intervalle (connexe) de définition de l'arc, on a

$$C_1 \iff \left(\frac{d}{ds} (\vec{T} \cdot \vec{k}) = 0 \right) \iff \frac{\vec{N}}{\mathcal{R}} \cdot \vec{k} = 0 \iff (C_2).$$

Mais alors $(C_2) \iff \vec{k} \in \text{Vect}(\vec{T}, \vec{B})$, donc c'est encore équivalent à l'existence de V tel que $\vec{k} = (\cos V) \vec{T} + (\sin V) \vec{B}$ avec, a priori, $\cos V$

fonction de s , mais comme $(C_2) \implies (C_1)$, on a $\vec{k} \cdot \vec{T} = \text{constant}$, d'où $\vec{k} \cdot \vec{B} = \sin V$ est aussi constant, et $(C_2) \implies (C_3)$.

A son tour :

$$(C_3) \iff \left(\frac{d}{ds} (\vec{k} \cdot \vec{B}) = 0 \right)$$

$$\iff -\frac{1}{\mathcal{T}} k \cdot \vec{N} = 0,$$

puisque la torsion est non nulle, l'arc étant tri-régulier. On retrouve (C_2) .

On a donc pour l'instant $(C_1) \iff (C_2) \iff (C_3)$, ces trois conditions étant encore équivalentes à l'existence d'un angle constant V , tel que :

6.146. $\vec{k} = (\cos V) \vec{T} + (\sin V) \vec{B}$.

Mais 6.146, (avec V constant) équivaut à $\frac{d}{ds} (\cos V \vec{T} + \sin V \vec{B}) = 0$, soit à $\vec{N} \left(\frac{1}{\mathcal{R}} \cos V - \frac{1}{\mathcal{T}} \sin V \right) = 0$, ou encore à $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} = \cotg V$: c'est constant par rapport à s . (Il est à remarquer que $\sin V = 0$ impliquerait $\frac{1}{\mathcal{R}} \cos V = 0$, avec $\cos V = 1$ ou -1 et $\frac{1}{\mathcal{R}} \neq 0$: (c'est difficile).

On a donc l'équivalence avec (C_4) .

Quand au vecteur rotation instantané $\vec{\Omega}$, on a $\vec{\Omega} = \frac{\vec{T}}{\mathcal{T}} + \frac{\vec{B}}{\mathcal{R}}$, (voir 6.133), il est égal à $\frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} \vec{T} + \vec{B} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} (\cotg V \cdot \vec{T} + \vec{B})$ d'après (C_4) , soit :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{\mathcal{R} \sin V} (\cos V \cdot \vec{T} + \sin V \cdot \vec{B}) = \frac{\vec{k}}{\mathcal{R} \sin V} \text{ d'après 6.146,}$$

donc $\vec{\Omega}$ a une direction fixe, d'où $(C_1) \implies (C_5)$.

Si on a (C_5) , $\frac{d\Omega}{ds} \wedge \vec{\Omega} = 0$, soit :

$$\left(-\frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}^2} \vec{T} + \frac{\vec{N}}{\mathcal{R}\mathcal{T}} - \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}^2} \vec{B} - \frac{\vec{N}}{\mathcal{R}\mathcal{T}} \right) \wedge \left(\frac{\vec{T}}{\mathcal{T}} + \frac{\vec{B}}{\mathcal{R}} \right) = 0,$$

ce qui donne :

$$\left(\frac{-T'}{\mathcal{R}T^2} + \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}^2T} \right) \vec{T} \wedge \vec{B} = 0,$$

ou encore :

$$\frac{1}{\mathcal{R}^2} \left(\frac{\mathcal{R}'T - T'\mathcal{R}}{T^2} \right) = 0,$$

d'où $\frac{\mathcal{R}}{T} = \text{constante}$, donc $(C_5) \implies (C_4)$ et le Théorème est justifié. ■

REMARQUE. 6.147.1. — On peut ne pas imposer à l'arc d'être tri-régulier, mais alors le Théorème 6.145 s'effondre : il ne reste que des implications, la nullité de la courbure ou de la torsion posant problème.

EXEMPLE 6.147.2. — Soit $\mathcal{R} = (o; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace affine A , et γ un arc de classe C^4 , bi-régulier, du plan π de repère $(o; \vec{i}, \vec{j})$. Si σ est l'abscisse curviligne de m de γ , on paramètre Γ par :

$$\vec{op}(\sigma) = \overline{om(\sigma)} + (a\sigma + b)\vec{k}, \quad (a \text{ et } b \text{ constantes}).$$

En notant $\vec{t} = \frac{\vec{dm}}{d\sigma}$, vecteur tangent unitaire à γ , on a $\frac{\vec{dp}}{d\sigma} = \vec{t} + a\vec{k}$, d'où :

$$\frac{\vec{dp}}{d\sigma} \cdot \vec{k} = a = \left\| \frac{\vec{dp}}{d\sigma} \right\| \cos \left(\frac{\vec{dp}}{d\sigma}, \vec{k} \right),$$

d'où $\cos \left(\frac{\vec{dp}}{d\sigma}, \vec{k} \right) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ est constant par rapport à σ . L'arc Γ est

une hélice, car $\frac{d^2p}{d\sigma^2} = \frac{\vec{n}}{r}$, \vec{n} directement perpendiculaire à \vec{t} dans $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$, r rayon de courbure de γ en m , et, en notant $\theta = (\vec{i}, \vec{t})$, (angle dans le plan π), on a (voir 6.115) :

$$\frac{d^3p}{d\sigma^3} = -\frac{r'}{r^2} \vec{n} + \frac{1}{r} \frac{d\vec{n}}{d\theta} \frac{d\theta}{d\sigma} = -\frac{r'}{r^2} \vec{n} - \frac{\vec{t}}{r^2},$$

d'où une matrice de passage de $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{k})$ à $(\frac{\vec{d}p}{d\sigma}, \frac{\vec{d}^2p}{d\sigma^2}, \frac{\vec{d}^3p}{d\sigma^3})$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{r^2} \\ 0 & \frac{1}{r} & -\frac{r'}{r^2} \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de déterminant $\frac{a}{r^3} \neq 0$.

L'arc Γ est tri-régulier, on a donc une hélice au sens de la définition 6.144.

REMARQUE 6.147.3. — Si vous aimez la randonnée en montagne, quand vous suivez un sentier de pente constante, vous suivez une hélice du type précédent, et je suis certain que le fait de le savoir vous soulage d'un grand poids, (d'où un sac à dos plus léger).

Si vous montez un escalier «à vis», (tour de château, ou de cathédrale) ayant une rampe, celle-ci est une hélice, les normales principales, perpendiculaires à l'axe de la tour, engendrent en quelque sorte la voute que vous avez au dessus de la tête, qui est une nappe conoïdale, (voir exemple 9.88).

B. Courbes sphériques

DÉFINITION 6.148. — *Un arc paramétré Γ est dit sphérique, si son support est situé sur une sphère.*

Si Γ est un arc de support situé sur la sphère Σ de centre a , de rayon r constant, dans A espace affine euclidien de dimension 3, le contact de (Γ) et de Σ doit être très intime, (ou d'ordre très élevé) donc intuitivement, Σ doit être sphère sur-osculatrice à Γ , en tout point, ce qui, compte-tenu de la connaissance du centre $p(s)$ de la sphère sur-osculatrice en $m(s)$, donné par :

$$\overrightarrow{mp(s)} = \mathcal{R}\vec{N} + T\mathcal{R}'\vec{B}, \quad (\text{voir 6.140}),$$

doit entraîner $\mathcal{R}^2 + T^2\mathcal{R}'^2 = \text{constante}$. En fait on a bien :

THÉORÈME 6.149. — *Un arc Γ tri-régulier et de classe C^4 au moins est sphérique, si et seulement si les fonctions rayon de courbure, $\mathcal{R}(s)$, et de*

torsion, $T(s)$, vérifient la relation $\mathcal{R}^2 + T^2\mathcal{R}'^2 = \text{constante}$, sur tout intervalle où $\frac{d\mathcal{R}}{ds}$ ne s'annule pas.

Le point m de Γ est sur la sphère de centre a et de rayon r si et seulement si on a $\overrightarrow{am}^2 = r^2$, ou encore si et seulement si $\overrightarrow{am} \cdot \frac{d\overrightarrow{m}}{ds} = \overrightarrow{am} \cdot \vec{T} = 0$.

En dérivant, ceci implique $\vec{T} \cdot \vec{T} + \overrightarrow{am} \cdot \frac{\vec{N}}{\mathcal{R}} = 0$, d'où $\overrightarrow{am} \cdot \vec{N} = -\mathcal{R}$, d'où en redérivant, la relation

$$\vec{T} \cdot \vec{N} + \overrightarrow{am} \left(-\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}} + \frac{\vec{B}}{T} \right) = -\mathcal{R}',$$

qui donne, puisque $\overrightarrow{am} \cdot \vec{T} = 0$, l'égalité $\overrightarrow{am} \cdot \vec{B} = -\mathcal{R}'T$. Mais alors, le vecteur \overrightarrow{am} de $\text{Vect}(\vec{N}, \vec{B})$, (il est orthogonal à \vec{T}), se décompose en $\overrightarrow{am} = -\mathcal{R}\vec{N} - \mathcal{R}'T\vec{B}$, et comme $\overrightarrow{am}^2 = r^2$, on a bien la relation $\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}'^2T^2 = r^2 = \text{constante}$.

Réciproquement, si l'arc paramétré Γ vérifie la relation, on considère le point a défini par :

$$\vec{oa} = \overrightarrow{om(s)} + \mathcal{R}\vec{N} + T\mathcal{R}'\vec{B}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{a}}{ds} &= \vec{T} + \mathcal{R}'\vec{N} + \mathcal{R} \left(-\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}} + \frac{\vec{B}}{T} \right) + T'\mathcal{R}'\vec{B} \\ &\quad + T\mathcal{R}''\vec{B} + T\mathcal{R}' \left(-\frac{\vec{N}}{T} \right), \\ &= \left(\frac{\mathcal{R}}{T} + T'\mathcal{R}' + T\mathcal{R}'' \right) \vec{B}. \end{aligned}$$

Or l'égalité $\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}'^2T^2 = \text{constante}$ implique, (classe C^4 : on peut encore dériver) :

$$2(\mathcal{R}\mathcal{R}' + \mathcal{R}'\mathcal{R}''T^2 + TT'\mathcal{R}'^2) = 0,$$

soit encore :

$$2T\mathcal{R}' \left(\frac{\mathcal{R}}{T} + \mathcal{R}''T + T'\mathcal{R}' \right) = 0.$$

En utilisant alors l'hypothèse : \mathcal{R}' ne s'annule pas sur l'intervalle d'étude, on a bien $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} + \mathcal{R}''\mathcal{T} + \mathcal{T}'\mathcal{R}' = 0$ donc a est fixe. Comme alors $\overrightarrow{m(s)a}^2 = \mathcal{R}^2 + \mathcal{R}'^2\mathcal{T}^2$ est constant, le point $m(s)$ est sur une sphère centrée en a . ■

REMARQUE 6.150. — Si \mathcal{R}' s'annule en des zéros isolés, par continuité on conserve l'égalité $\frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} + \mathcal{R}''\mathcal{T} + \mathcal{T}'\mathcal{R}' = 0$ et la conclusion demeure vraie.

9. Equation intrinsèque

Les deux exemples du §8 nous montrent qu'une relation entre courbure et torsion peut déterminer une famille de courbes. En fait, on a mieux que cela. La connaissance de la courbure fonction de l'abscisse curviligne détermine une courbe plane à un déplacement près; la donnée de \mathcal{R} et \mathcal{T} fonction de s déterminent de même une courbe gauche à un déplacement près, et ceci se généraliserait en dimension n , si on se donne les $n - 1$ courbures.

Commençons par $n = 3$.

THÉORÈME 6.151. — Soient deux fonctions de classe C^1 , définies sur I , intervalle de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathbb{R}^* , γ et τ . Il existe des arcs paramétrés $\Gamma = (I, f)$, tri-réguliers, de classe C^3 , dans A affine euclidien orienté de dimension trois, ayant γ et τ pour courbure et torsion, ($s \in I$ étant l'abscisse curviligne). Si Γ_1 et Γ_2 sont deux tels arcs, il existe un déplacement de l'espace affine orienté envoyant Γ_1 sur Γ_2 .

DÉFINITION 6.152. — On dit que les arcs Γ ayant γ et τ pour courbure et torsion sont d'équations intrinsèques γ et τ .

Si $\Gamma = (I, f)$ est un arc tri-régulier, de classe C^3 , de courbure et torsion γ et τ , son trièdre de Frenet existe pour tout s , et les vecteurs $\overrightarrow{T(s)}$, $\overrightarrow{N(s)}$ et $\overrightarrow{B(s)}$ vérifient les relations :

$$6.153. \quad \begin{cases} \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma\overrightarrow{N}, \\ \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma\overrightarrow{T} + \tau\overrightarrow{B}, \\ \frac{d\overrightarrow{B}}{ds} = -\tau\overrightarrow{N}, \end{cases} \text{ établies en 6.132.}$$

Mais réciproquement, si on donne un s_0 de I , fixé, et une base orthonormée directe de $E = \mathbb{R}^3$ euclidien, $(\vec{T}_0, \vec{N}_0, \vec{B}_0)$, l'étude des équations différentielles linéaires nous permet de savoir qu'il existe une et une seule solution de 6.153, de donnée initiale $(\vec{T}_0, \vec{N}_0, \vec{B}_0)$. Mais pour l'instant $(\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)) \in (\mathbb{R}^3)^3 \simeq \mathbb{R}^9$: il nous reste à justifier que pour tout s de I , $(\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s))$ est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 .

Soit alors $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe fixée dans \mathbb{R}^3 et $P(s)$ la matrice des composantes des vecteurs $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$ et $\vec{B}(s)$ dans la base \mathcal{B} .

Si $P(s) = (\alpha_{ij}(s))_{1 \leq i, j \leq n}$, on a par exemple :

$$\vec{N}(s) = \alpha_{12}(s) \vec{i} + \alpha_{22}(s) \vec{j} + \alpha_{32}(s) \vec{k}, \text{ (2}^{i\text{ème}} \text{ colonne de } P(s)),$$

donc :

$$\vec{N}'(s) = \alpha'_{12}(s) \vec{i} + \alpha'_{22}(s) \vec{j} + \alpha'_{32}(s) \vec{k} :$$

on justifie ainsi que $P'(s)$ est la matrice des composantes de $\frac{d\vec{T}}{ds}$, $\frac{d\vec{N}}{ds}$ et $\frac{d\vec{B}}{ds}$ dans la base \mathcal{B} .

$$\text{Mais } \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma(s) \vec{N}(s) = \begin{pmatrix} \gamma \alpha_{12} \\ \gamma \alpha_{22} \\ \gamma \alpha_{32} \end{pmatrix};$$

$$\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T} + \tau \vec{B} = \begin{pmatrix} -\gamma \alpha_{11} + \tau \alpha_{13} \\ -\gamma \alpha_{21} + \tau \alpha_{23} \\ -\gamma \alpha_{31} + \tau \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N} = \begin{pmatrix} -\tau \alpha_{12} \\ -\tau \alpha_{22} \\ -\tau \alpha_{32} \end{pmatrix},$$

les vecteurs colonnes représentant les composantes des vecteurs dans la base \mathcal{B} . C'est donc que :

$$\begin{aligned}
 P'(s) &= \begin{pmatrix} \alpha_{12}\gamma & -\alpha_{11}\gamma + \alpha_{13}\tau & -\alpha_{12}\tau \\ \alpha_{22}\gamma & -\alpha_{21}\gamma + \alpha_{23}\tau & -\alpha_{22}\tau \\ \alpha_{32}\gamma & -\alpha_{31}\gamma + \alpha_{33}\tau & -\alpha_{32}\tau \end{pmatrix}, \\
 &= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

En notant $A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & 0 \\ \gamma & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$, matrice antisymétrique, on a donc

$$P'(s) = P(s)A(s).$$

Or, prouver que pour tout s de I , la base $(\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{B(s)})$ est orthonormée directe, c'est prouver que la matrice $P(s)$ est orthogonale directe, donc que $P(s) {}^tP(s) = I_3$ et que $\det(P(s)) = 1$.

Comme I est connexe et que $P(s_0) {}^tP(s_0) = I_3$, avec $\det(P(s_0)) = 1$, (car pour s_0 on a une base orthonormée directe) il suffit de justifier que $\frac{d}{ds}(P(s) {}^tP(s)) = 0$, on aura alors $P(s) {}^tP(s) = \text{cte} = I_3$, donc $\det(P(s)) = \pm 1$, mais l'image de I , connexe, par $s \rightsquigarrow \det(P(s))$ étant un connexe contenant 1, inclus dans $\{-1, 1\}$, ce sera 1.

Or $\frac{d}{ds}(P(s) {}^tP(s)) = P'(s) {}^tP(s) + P(s)({}^tP(s))'$, avec :

$$\begin{aligned}
 P'(s) &= P(s)A(s) \text{ donc } ({}^tP(s))' = {}^t(P'(s)) = {}^tA(s) {}^tP(s) \\
 &= -A(s) {}^tP(s)
 \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{d}{ds}(P(s) {}^tP(s)) = P(s)A(s) {}^tP(s) + P(s)(-A(s) {}^tP(s)) = 0.$$

Finalement, pour tout s de I , la solution de 6.153 de donnée initiale $(\overrightarrow{T_0}, \overrightarrow{N_0}, \overrightarrow{B_0})$ est $(\overrightarrow{T(s)}, \overrightarrow{N(s)}, \overrightarrow{B(s)})$, famille qui reste base orthonormée directe de \mathbb{R}^3 euclidien orienté.

Mais alors, si on se donne m_0 fixé dans l'espace affine A , la relation $\frac{d\overrightarrow{m(s)}}{ds} = \overrightarrow{T(s)}$, conduit à :

$$\overrightarrow{m_0 m(s)} = \int_{s_0}^s \overrightarrow{T(u)} du,$$

et le paramétrage

$$\overrightarrow{om}(s) = \overrightarrow{om}_0 + \int_{s_0}^s \overrightarrow{T}(u) du,$$

définit un arc paramétré, Γ d'abscisse curviligne s car $\frac{d\overrightarrow{m}}{ds} = \overrightarrow{T}(s)$ est unitaire, arc de classe C^3 car a priori, \overrightarrow{T} , \overrightarrow{N} et \overrightarrow{B} solutions de 6.153 sont de classe C^1 , mais γ et τ étant supposées de classe C^1 , $\frac{d\overrightarrow{T}}{ds}$, $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds}$ et $\frac{d\overrightarrow{B}}{ds}$ sont de classe C^1 , vu les relations 6.153, donc \overrightarrow{T} , \overrightarrow{N} et \overrightarrow{B} sont de classe C^2 , et $\int_{s_0}^s \overrightarrow{T}(u) du$ est de classe C^3 .

Enfin les formules 6.153 prouvent que Γ admet pour trièdre de Frenet $(\overrightarrow{T}(s), \overrightarrow{N}(s), \overrightarrow{B}(s))$, et pour courbure $\gamma(s)$ et $\tau(s)$, qui, ne s'annulant pas par hypothèse, donnent bien un arc tri-régulier.

Comparaison de deux solutions

Soient $(\overrightarrow{T}_1(s), \overrightarrow{N}_1(s), \overrightarrow{B}_1(s))$ et $(\overrightarrow{T}_2(s), \overrightarrow{N}_2(s), \overrightarrow{B}_2(s))$ les trièdres de Frenet de deux arcs paramétrés, $\Gamma_1 = (I, f_1)$ et $\Gamma_2 = (I, f_2)$ solutions du problème posé.

Si $s_0 \in I$ est fixé, et si $f_1(s_0) = \overrightarrow{om}_1$ et $f_2(s_0) = \overrightarrow{om}_2$, on considère l'application affine h , qui envoie m_1 sur m_2 , et d'application linéaire u qui envoie la base $\mathcal{B}_1 = (\overrightarrow{T}_1(s_0), \overrightarrow{N}_1(s_0), \overrightarrow{B}_1(s_0))$ sur la base $\mathcal{B}_2 = (\overrightarrow{T}_2(s_0), \overrightarrow{N}_2(s_0), \overrightarrow{B}_2(s_0))$, (voir Tome 4, Théorème 1.52).

Comme \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 sont des bases orthonormées directes de \mathbb{R}^3 euclidien, u est en fait une rotation, (Tome 3, remarques 14.49 et 14.51), indépendante de s .

L'arc paramétré $(I, u \circ f_1)$ est tel que

$$(u \circ f_1)' = du(f_1(s))(f_1'(s)) = u(f_1'(s)) = u(\overrightarrow{T}_1(s)),$$

vu les règles de calcul différentiel, (u linéaire est différentiable partout, de différentielle en tout point égale à u , voir Tome 3, exemple 16.20 et Corollaire 16.24).

Comme $\overrightarrow{T}_1(s)$ est unitaire, et que u est une isométrie on peut poser $u \circ f_1 = f_3$ et $\frac{df_3}{ds} = u(\overrightarrow{T}_1(s)) = \overrightarrow{T}_3(s)$ est unitaire.

Mais alors,

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{T}_3}{ds} &= u(\overrightarrow{T_1(s)})' = du(\overrightarrow{T_1(s)})(\overrightarrow{T_1'(s)}) \\ &= u(\overrightarrow{T_1'(s)}) = u(\gamma(s)\overrightarrow{N_1(s)}) \\ &= \gamma(s)u(\overrightarrow{N_1(s)}),\end{aligned}$$

par linéarité de u , et le vecteur $\overrightarrow{N_3(s)} = u(\overrightarrow{N_1(s)})$ est unitaire orthogonal à $\overrightarrow{T_3(s)} = u(\overrightarrow{T_1(s)})$, (u isométrie).

Mais alors $\overrightarrow{B_3(s)} = \overrightarrow{T_3(s)} \wedge \overrightarrow{N_3(s)}$ est l'image par l'isométrie u de $\overrightarrow{B_1(s)} = \overrightarrow{T_1(s)} \wedge \overrightarrow{N_1(s)}$, et on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d\overrightarrow{N_3(s)}}{ds} &= u(\overrightarrow{N_1'(s)}) = u(-\gamma\overrightarrow{T_1} + \tau\overrightarrow{B_1}) \\ &= -\gamma u(\overrightarrow{T_1}) + \tau u(\overrightarrow{B_1}) = -\gamma\overrightarrow{T_3(s)} + \tau\overrightarrow{B_3(s)},\end{aligned}$$

puis $\frac{d\overrightarrow{B_3}}{ds} = \frac{d\overrightarrow{T_3}}{ds} \wedge \overrightarrow{N_3(s)} + \overrightarrow{T_3(s)} \wedge \frac{d\overrightarrow{N_3(s)}}{ds} = -\tau\overrightarrow{N_3(s)}$ par calcul,

si bien que les images par u de $\overrightarrow{T_1(s)}$, $\overrightarrow{N_1(s)}$, $\overrightarrow{B_1(s)}$ vérifient l'équation différentielle 6.153.

De plus $(u \circ \overrightarrow{T_1})(s_0) = \overrightarrow{T_2}(s_0)$, $(u \circ \overrightarrow{N_1})(s_0) = \overrightarrow{N_2}(s_0)$ et $(u \circ \overrightarrow{B_1})(s_0) = \overrightarrow{B_2}(s_0)$, donc les fonctions $u \circ \overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$, $u \circ \overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ ainsi que $u \circ \overrightarrow{B_1}$ et $\overrightarrow{B_2}$ coïncident sur l'intervalle I , par unicité d'une solution de 6.153 de donnée initiale fixée : on a $\overrightarrow{T_3} = u \circ \overrightarrow{T_1} = \overrightarrow{T_2}$, et de même $\overrightarrow{N_3} = \overrightarrow{N_2}$ et $\overrightarrow{B_3} = \overrightarrow{B_2}$.

Mais alors :

$$f_3(s) = u(f_1(s)) = u(\overrightarrow{om_1}) + \int_{s_0}^s u \circ \overrightarrow{T_1}(t) dt, \text{ (par linéarité de } u),$$

est encore tel que :

$$\begin{aligned}f_3(s) &= u(\overrightarrow{om_1}) + \int_{s_0}^s \overrightarrow{T_2}(t) dt = u(\overrightarrow{om_1}) + f_2(s) - \overrightarrow{om_2} \\ &= u(\overrightarrow{om_1}) - \overrightarrow{om_2} + f_2(s),\end{aligned}$$

avec le vecteur $\overrightarrow{v} = u(\overrightarrow{om_1}) - \overrightarrow{om_2}$ constant.

Il résulte donc de l'égalité $f_2(s) = -\vec{v} + u \circ f_1(s)$, que l'on passe de Γ_1 à Γ_2 par une isométrie affine d'application linéaire associée u . ■

REMARQUE 6.154. — La technique de démonstration s'applique à un arc de A affine euclidien de dimension n dont on se donne les $n - 1$ fonctions courbures, puisqu'on a justifié en 6.112, que la matrice donnant les dérivées de $\vec{T}(s)$ et des vecteurs normaux est antisymétrique.

REMARQUE 6.155. — Dans la justification du Théorème 6.151 on a utilisé le fait que la courbure ne s'annule pas mais la torsion elle pourrait s'annuler, simplement on obtient dans ce cas des arcs bi-réguliers.

REMARQUE 6.156. — Si la courbure γ est de classe C^k et la torsion de classe C^{k-1} , le système 6.153 fournit a priori \vec{T} , \vec{N} , \vec{B} de classe C^{k-1} , (résultat concernant les équations différentielles).

Mais $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T} + \tau\vec{B}$ donne $\frac{d\vec{N}}{ds}$ de classe C^{k-1} d'où \vec{N} de classe C^k , et la relation $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}$ fournit alors $\frac{d\vec{T}}{ds}$ de classe C^k , donc \vec{T} de classe C^{k+1} , et l'arc finalement de classe C^{k+2} : la torsion peut être d'une classe inférieure.

6.157. CAS PARTICULIER DES ARCS PLANS

Le plan vectoriel étant orienté, on a vu que la courbure γ est donnée par $\gamma = \frac{d\varphi}{ds}$, φ angle du vecteur tangent unitaire \vec{T} et d'une direction fixe,

(voir 6.115). Mais alors on a $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}$ et $\frac{d\vec{N}}{ds} = \frac{d\vec{N}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds}$, soit comme

$\frac{d\vec{N}}{d\varphi} = -\vec{T}$, (rotation de $\frac{\pi}{2}$ pour passer de \vec{N} à $\frac{d\vec{N}}{d\varphi}$, donc de π pour passer

de \vec{T} à $\frac{d\vec{N}}{d\varphi}$), on a $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma\vec{N}$ et $\frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma\vec{T}$: le système 6.153 conduit

à la matrice antisymétrique (2,2), $A = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$, et tout ce qui précède s'applique. Mais en fait, il y a une technique plus simple.

Les composantes de \vec{T} sont $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$, mais aussi $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$.

Si on se donne la courbure $\gamma(s) = \frac{d\varphi}{ds}$, on a $\varphi - \varphi_0 = \int_{s_0}^s \gamma(t) dt = \Gamma(s)$,

fonction de s .

Puis $dx = \cos \varphi ds = \cos(\Gamma(s) + \varphi_0) ds$ et $dy = \sin(\Gamma(s) + \varphi_0) ds$, conduisent à la paramétrisation :

$$6.158. \quad \begin{cases} x = x_0 + \left(\int_{s_0}^s \cos \Gamma(t) dt \right) \cos \varphi_0 - \left(\int_{s_0}^s \sin \Gamma(t) dt \right) \sin \varphi_0 \\ y = y_0 + \left(\int_{s_0}^s \sin \Gamma(t) dt \right) \cos \varphi_0 + \left(\int_{s_0}^s \cos \Gamma(t) dt \right) \sin \varphi_0 \end{cases}$$

qui met bien en évidence le déplacement lié au choix de φ_0 et de (x_0, y_0) .

6.159. UN CAS PARTICULIER : si la courbure γ est constante, on trouve des cercles, car $\gamma = \frac{1}{r}$ avec $r > 0$ conduit à $\Gamma(s) = \frac{s - s_0}{r}$. Si on choisit $s_0 = \varphi_0 = x_0 = y_0 = 0$, il vient :

$$x = \int_0^s \cos \frac{t}{r} dt = r \sin \frac{s}{r} \quad \text{et} \quad y = \int_0^s \sin \frac{t}{r} dt = r \left(1 - \cos \frac{s}{r} \right) :$$

c'est bien un cercle de rayon $|r|$, la théorie fait bien les choses.

EXERCICES

- Déterminer une courbe plane bi-régulière Γ , telle que, si R est le rayon de courbure en m de Γ , \vec{T} le vecteur tangent unitaire orienté, V l'angle (\vec{om}, \vec{T}) et $\rho = \|\vec{om}\|$, on ait la relation $\rho = R \sin^3 V$.
- Soit un arc plan bi-régulier Γ , de développée \mathcal{C} supposée régulière. Disposition relative de deux cercles de courbure en deux points m_1 et m_2 de Γ .
- Soit un arc bi-régulier \mathcal{C} , M un point de \mathcal{C} et I le centre de courbure en M , J le centre de courbure en I à la développée de \mathcal{C} . Le milieu P de MI décrit un arc \mathcal{C}' . Montrer que la tangente en P à \mathcal{C}' est orthogonale à MJ .
- Trouver les droites à la fois tangentes et normales à l'arc paramétré $\Gamma : t \rightsquigarrow (2t^3, 3t^2)$.
- Soit une courbe plane \mathcal{C} , de classe C^3 , bi-régulière. A tout point M de \mathcal{C} on associe les points P_1 et P_2 de la tangente en M à \mathcal{C} , tels que $P_1M = P_2M = a$, ($a > 0$ fixé). Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les arcs décrits par P_1 et P_2 , \mathcal{C} , \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les centres de courbure de \mathcal{C} , \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 en M , P_1 et P_2 . Montrer que M , \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont alignés.
- Soit Γ un arc plan bi-régulier rapporté à un repère orthonormé xyo . Soit T l'intersection de oy et de la tangente en M , N l'intersection de la normale en M avec ox et P l'intersection de la parallèle à la normale en M , passant par T , avec ox . Déterminer Γ pour o soit le milieu de NP .
- Trouver les arcs Γ de \mathbb{R}^2 , bi-réguliers, tels qu'en tout point M de Γ , si N est le symétrique par rapport à M du centre de courbure I en M , le triangle OMN soit rectangle en O . Trouver les développées de ces courbes.
- Déterminer les courbes planes Γ , régulières telles que, si c est la courbure en M d'abscisse curviligne s , on ait $a^2 c^2 (e^{2s/a} - 1) = 1$, avec a réel > 0 fixé.

9. La tangente en M , point d'un arc bi-régulier Γ , coupe une droite fixe D en T , la normale en M à Γ et la perpendiculaire en T à D se coupent en N . Déterminer Γ de façon que N soit le centre de courbure en M à Γ .
10. Soit Γ un arc bi-régulier, deux points M_0 et M de Γ d'abscisses curvilignes s_0 et s . Les tangentes en M_0 et M à Γ se coupent en T . Limite, quand s tend vers s_0 , du centre du cercle circonscrit au triangle M_0MT .
11. Soit l'arc paramétré $\Gamma : t \rightsquigarrow (t, t^2, t^3)$, t réel. Montrer que par M passent, outre la normale en M , quatre normales en M_1, M_2, M_3 et M_4 .
Lieu des centres des sphères contenant M_1, M_2, M_3, M_4 lorsque M varie.
Une telle sphère rencontre Γ en deux points P et Q autres que M_1, M_2, M_3 et M_4 . Surface engendrée par les droites PQ .
12. Soit une droite D du plan, un point A du plan non sur D . Déterminer les arcs γ de classe C^1 , tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AT} = 0$, avec T intersection de D et de la tangente à γ en M . On supposera que A n'est pas sur γ .
13. Soit M un point de la cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos \theta)$, C le centre de courbure en M , I le projeté orthogonal de C sur la droite OM . Quelle est la courbe décrite par I ?
Quelle sont les courbes C , d'équation polaire $\rho = f(\theta)$ telles que la courbe décrite par le point I construit comme précédemment se déduise de C par homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$?
14. Etude des podaires d'un cercle.
15. Nature de la courbe Γ paramétrée par :

$$x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad y = \frac{-t\sqrt{2}}{1+t^2}, \quad z = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

puis de la nappe S engendrée par la rotation de Γ autour de Oz .

16. Soit $a > 0$, on considère la courbe Γ d'équation $ay^2 = x^3$. Ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes à Γ orthogonales.

17. Soit une droite fixe D du plan, et Γ une courbe plane de classe C^1 telle que la tangente et la normale en M à Γ coupent D en T et N respectivement. Quelles sont les courbes Γ telles que le milieu de NT reste fixe quand M varie.
18. Soit O un point donné du plan euclidien et Γ un arc de ce plan. Soit M sur Γ . La perpendiculaire en O à (OM) coupe la tangente en M à Γ en T . Déterminer Γ de telle sorte que $\|\overrightarrow{MT}\| = 1$. Abscisse curviligne?

SOLUTIONS

1. L'utilisation du mode de représentation en polaires s'impose. On peut remarquer que V n'est défini que pour $m \neq 0$, (donc ρ ne s'annule pas). Faisons les calculs vectoriels, dans le repère mobile $\vec{u}(\cos \theta, \sin \theta)$ et $\vec{v}(-\sin \theta, \cos \theta)$ avec $\vec{0m} = \rho \vec{u}$.

Si s désigne l'abscisse curviligne, et $\varphi = (\vec{i}, \vec{T}) = \theta + V$, l'angle de la tangente orientée et de l'axe des abscisses, on a :

$$\frac{d\vec{m}}{ds} = \cos V \vec{u} + \sin V \vec{v} = \frac{d\rho}{ds} \vec{u} + \rho \frac{d\theta}{ds} \vec{v},$$

donc $\rho \frac{d\theta}{ds} = \sin V$, d'où $R = \frac{\rho}{\sin V} \cdot \frac{1}{\sin^2 V}$ d'après la relation, ce qui donne, comme $\frac{\rho}{\sin V} = \frac{ds}{d\theta}$, $R = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 V}$. On a aussi $R = \frac{ds}{d\varphi}$, d'où $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{1}{\sin^2 V}$ et finalement :

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \sin^2 V = \frac{d(\theta + V)}{d\theta} = 1 + \frac{dV}{d\theta},$$

donc $\frac{dV}{d\theta} = -\cos^2 V$. Mais $\frac{d\theta}{dV} = -\frac{1}{\cos^2 V}$ conduit à $-\theta + \theta_0 = \operatorname{tg} V$, or,

en reprenant les deux expressions de $\frac{d\vec{m}}{ds}$ dans le repère mobile on a $\operatorname{tg} V = \frac{\rho d\theta}{d\rho} = \theta_0 - \theta$, d'où une équation différentielle liant ρ et θ : $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\theta}{\theta_0 - \theta}$ qui s'intègre en $\operatorname{Log}|\rho| = -\operatorname{Log}|\theta_0 - \theta| + \text{constante}$, ce qui conduit aux solutions en $\rho = \frac{k}{\theta - \theta_0}$: on a des spirales. Il convient de remarquer combien l'utilisation du repère mobile a facilité les calculs.

2. On note s l'abscisse curviligne en m de Γ , \vec{T} le vecteur tangent unitaire orienté et \vec{N} directement perpendiculaire, l'arc étant supposé orienté tel que \mathcal{R} soit positif.

Le centre de courbure c en m est tel que $\vec{0c} = \vec{0m} + \mathcal{R}\vec{N}$, d'où :

$$\frac{d\vec{c}}{ds} = \vec{T} + \mathcal{R}'\vec{N} + \mathcal{R} \left(-\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}} \right) = \mathcal{R}'\vec{N},$$

et comme la développée est supposée régulière, \mathcal{R}' ne s'annule pas.

Si on note σ l'abscisse curviligne de la développée, et $\vec{T}_1 = \frac{\vec{dc}}{d\sigma}$, on peut choisir $\vec{T}_1 = \vec{N}$, et dans ce cas

$$\vec{T}_1 = \vec{N} = \frac{\vec{dc}}{d\sigma} = \frac{\vec{dc}}{ds} \frac{ds}{d\sigma} = \mathcal{R}' \frac{ds}{d\sigma} \vec{N},$$

conduit à l'expression $\frac{d\sigma}{ds} = \mathcal{R}'$.

Soient c_1 et c_2 les centres de courbures en m_1 et m_2 points d'abscisses curvilignes respectives s_1 et s_2 sur Γ , la longueur de l'arc joignant c_1 et c_2 sur C est, si $s_1 < s_2$:

$$\int_{s_1}^{s_2} d\sigma = \int_{s_1}^{s_2} \mathcal{R}'(s) ds = R_2 - R_1,$$

(on suppose ici que \mathcal{R}' , de signe constant, reste positive). Mais alors la corde c_1c_2 a une longueur $\|\vec{c}_1\vec{c}_2\| \leq R_2 - R_1$. Soit alors P un point du cercle de courbure en m_1 . On a :

$$\|\vec{Pc}_2\| \leq \|\vec{Pc}_1\| + \|\vec{c}_1\vec{c}_2\| \leq R_1 + R_2 - R_1 = R_2,$$

donc P est intérieur au cercle de courbure en m_2 . Finalement deux cercles de courbure sont alors tels que l'un soit intérieur à l'autre.

3. L'arc étant bi-régulier, on peut le paramétrer en fonction de l'abscisse curviligne s , et utiliser le repère mobile (M, \vec{T}, \vec{N}) pour exprimer les données.

On a $\vec{OI} = \vec{OM} + \mathcal{R}\vec{N}$, d'où $\frac{d\vec{I}}{ds} = \vec{T} + \mathcal{R}'\vec{N} + \mathcal{R} \left(-\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}} \right)$ soit $\frac{d\vec{I}}{ds} = \mathcal{R}'\vec{N}$.

En fait pour avoir le centre de courbure J en I sur la développée on suppose

l'arc de classe C^4 au moins, et la développée bi-régulière d'où $\frac{d\vec{I}}{ds}$ non nul.

Si on note σ l'abscisse curviligne sur la développée \mathcal{D} de C , on peut prendre

$$\frac{d\vec{I}}{d\sigma} = \vec{N} = \frac{d\vec{I}}{ds} \frac{ds}{d\sigma} \text{ d'où } \frac{d\sigma}{ds} = \mathcal{R}'.$$

Avec $\vec{T}_1 = \vec{N}$ et $\vec{N}_1 = -\vec{T}$, vecteurs associés à la développée, on a alors

$$\frac{d\vec{T}_1}{d\sigma} = \frac{\vec{N}_1}{\mathcal{R}_1}, \text{ (}\mathcal{R}_1 \text{ rayon de courbure en } I, \text{ pour } \mathcal{D}\text{),}$$

soit $\frac{d\vec{N}}{ds} \frac{ds}{d\sigma} = \frac{\vec{N}_1}{\mathcal{R}_1} = -\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}\mathcal{R}'}$, d'où $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}\mathcal{R}'$. Le point J est alors tel que

$$\vec{MJ} = \vec{MI} + \mathcal{R}_1\vec{N}_1, \text{ d'où } \vec{MJ} = \mathcal{R}\vec{N} - \mathcal{R}\mathcal{R}'\vec{T}.$$

Le point P , milieu de MI est tel que $2\vec{OP} = \vec{OI} + \vec{OM}$ soit $2\vec{OP} = 2\vec{OM} + \mathcal{R}\vec{N}$ et on a sa tangente dirigée par

$$2 \frac{d\vec{P}}{ds} = 2\vec{T} + \mathcal{R}'\vec{N} + \mathcal{R} \left(-\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}} \right) = \vec{T} + \mathcal{R}'\vec{N}.$$

On a alors $\overrightarrow{MJ} \cdot 2 \frac{d\vec{P}}{ds} = -\mathcal{R}\mathcal{R}' + \mathcal{R}\mathcal{R}' = 0$: c'est gagné!

4. Le paramétrage est bijectif de \mathbb{R} sur Γ , (côté bijectif de $t \rightsquigarrow 2t^3$), le vecteur tangent en $M(t)$ étant, pour $t \neq 0$, le vecteur $\frac{d\vec{M}}{dt} = (6t^2, 6t)$ parallèle au vecteur $(t, 1)$ et, pour $t = 0$, c'est $\frac{d^2\vec{M}}{dt^2} = (0, 6)$ parallèle à $(0, 1)$, on a finalement, pour tout t , la tangente de vecteur directeur $\overrightarrow{V}(t) : (t, 1)$, et la normale en $M(\theta)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{W}(\theta) : (-1, \theta)$.
La droite aff($M(t), M(\theta)$), pour $t \neq \theta$, sera à la fois tangente à Γ en $M(t)$ et normale en $M(\theta)$, si on a $\overrightarrow{V}(t) // \overrightarrow{W}(\theta)$ et $\overrightarrow{V}(t) // \overrightarrow{M}(t)M(\theta)$, ce qui équivaut à la nullité de deux déterminants :

$$\begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & \theta \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} t & 2(t^3 - \theta^3) \\ 1 & 3(t^2 - \theta^2) \end{vmatrix} = 0,$$

le deuxième déterminant se simplifie par $t - \theta$ car on suppose $t \neq \theta$, (la tangente en t n'étant pas normale en t).
C'est donc équivalent à $t\theta = -1$

$$\text{et} \quad 3t(\theta + \theta) - 2(t^2 + t\theta + \theta^2) = 0$$

$$\text{ou encore à} \quad 3t(t + \theta) - 2(t + \theta)^2 + 2t\theta = 0.$$

Comme $\theta = 0$ n'est pas solution, on a $t = -\frac{1}{\theta}$

$$\text{et} \quad -\frac{3}{\theta} \left(\theta - \frac{1}{\theta} \right) - 2 \left(\theta - \frac{1}{\theta} \right)^2 - 2 = 0 \text{ soit } -2\theta^4 - \theta^2 + 1 = 0.$$

Le polynôme $2u^2 + u - 1 = 0$ s'annule pour $u = -1$ et $u = \frac{1}{2}$, d'où les racines $\theta = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$ associées à $t = \mp \sqrt{2}$. Il reste encore à déterminer en quel point est la tangente et en quel autre la normale!

On trouve qu'en A , ($t = \sqrt{2}$) de coordonnées $4\sqrt{2}$ et 6 , le vecteur tangent est parallèle à $\overrightarrow{V}(\sqrt{2}) : (\sqrt{2}, 1)$, et qu'en A' , ($t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$), de coordonnées $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{2}$, le vecteur normal est $\overrightarrow{W}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) : \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Comme $\overrightarrow{A'A}$ a pour composantes $4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ et $6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$, on a $\overrightarrow{A'A}$ parallèle à $\overrightarrow{V}(\sqrt{2})$: c'est la tangente en A qui est normale en A' .

On trouverait de même que la tangente en B , ($t = -\sqrt{2}$) est normale en B' , ($t = \frac{1}{\sqrt{2}}$), les points B et B' étant respectivement symétriques de A et A' par rapport à Oy .

5. On note s , s_1 et s_2 les abscisses curvilignes sur C , C_1 et C_2 , \vec{T} , \vec{T}_1 et \vec{T}_2 les vecteurs tangents unitaires orientés, d'où \vec{N} , \vec{N}_1 et \vec{N}_2 respectivement directement perpendiculaires à \vec{T} , \vec{T}_1 et \vec{T}_2 . On posera $\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OM} + a\vec{T}$ et $\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OM} - a\vec{T}$, et les calculs vectoriels se feront dans le repère mobile (\vec{T}, \vec{N}) .

On a $\frac{d\vec{P}_1}{ds} = \vec{T} + \frac{a}{\mathcal{R}} \vec{N}$. On pose alors $\vec{T}_1 = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}} \left(\vec{T} + \frac{a}{\mathcal{R}} \vec{N} \right)$

$$\text{et } \frac{ds_1}{ds} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}^2 + a^2}}{\mathcal{R}}.$$

(L'arc étant bi-régulier, \mathcal{R} est une fonction de s continue qui ne s'annule pas, donc elle est de signe constant.)

On aura de même $\frac{d\vec{P}_2}{ds} = \vec{T} - \frac{a}{\mathcal{R}} \vec{N}$, ce qui permet alors de choisir

$$\vec{T}_2 = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}} \left(\vec{T} - \frac{a}{\mathcal{R}} \vec{N} \right) \text{ et } \frac{ds_2}{ds} = \frac{\sqrt{\mathcal{R}^2 + a^2}}{\mathcal{R}}.$$

On a alors $\vec{N}_1 = \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}} \left(-\frac{a}{\mathcal{R}} \vec{T} + \vec{N} \right)$, (directement perpendiculaire),

et C_1 sera tel que $\overrightarrow{MC_1} = \mathcal{R}_1 \vec{N}_1$, avec $\mathcal{R}_1 = \frac{ds_1}{d\varphi_1}$, φ_1 désignant l'angle

$(\vec{i}, T_1) = (\vec{i}, \vec{T}) + (\vec{T}, \vec{T}_1) = \varphi + \theta_1$, en posant $\theta_1 = (\vec{T}, \vec{T}_1)$.

Mais alors, $\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{a}{\mathcal{R}}$ d'où $\frac{d\theta_1}{ds} \left(1 + \frac{a^2}{\mathcal{R}^2} \right) = -\frac{a\mathcal{R}'}{\mathcal{R}^2}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{R}_1} &= \frac{d\varphi_1}{ds_1} = \frac{d(\varphi + \theta_1)}{ds} \frac{ds}{ds_1} = \left(\frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\theta_1}{ds} \right) \frac{ds}{ds_1} \\ &= \left(\frac{1}{\mathcal{R}} - \frac{a\mathcal{R}'}{a^2 + \mathcal{R}^2} \right) \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}}. \end{aligned}$$

On aurait de même $\frac{1}{\mathcal{R}_2} = \left(\frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{a\mathcal{R}'}{a^2 + \mathcal{R}^2} \right) \frac{\mathcal{R}}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}}$.

Afin d'éviter des calculs inutiles voyons comment traduire l'alignement de M , C_1 et C_2 , c'est-à-dire la colinéarité de $\overrightarrow{MC_1}$ et de $\overrightarrow{MC_2}$, (pas de jalousie entre C_1 et C_2).

On a :

$$\overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MP_1} + \mathcal{R}_1 \vec{N}_1 = a\vec{T} + \mathcal{R}_1 \vec{N}_1 = a\vec{T} + \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}} \left(-\frac{a}{\mathcal{R}} \vec{T} + \vec{N} \right),$$

donc :

$$\overrightarrow{MC_1} = a \left(1 - \frac{\mathcal{R}_1}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}} \right) \overrightarrow{T} + \frac{\mathcal{R}_1 \mathcal{R}}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}} \overrightarrow{N};$$

et on trouverait, (a donne $-a$),

$$\overrightarrow{MC_2} = a \left(-1 + \frac{\mathcal{R}_2}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}} \right) \overrightarrow{T} + \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}}{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2}} \overrightarrow{N}.$$

Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2} - \mathcal{R}_1}{-\sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2} + \mathcal{R}_2} &= \frac{\mathcal{R}_1}{\mathcal{R}_2} \\ \Leftrightarrow (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) \sqrt{a^2 + \mathcal{R}^2} &= 2\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} &= \frac{2}{\sqrt{\mathcal{R}^2 + a^2}}, \end{aligned}$$

or les expressions trouvées de $\frac{1}{\mathcal{R}_1}$ et $\frac{1}{\mathcal{R}_2}$ donnent bien cette relation.

6. On se donne Γ comme enveloppe de ses tangentes, d'équation normale : $x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0$. Alors la normale en M aura pour équation : $-x \sin \theta + y \cos \theta - p'(\theta) = 0$, (voir 7.16). Les coordonnées de T sont donc $\left(0, \frac{p(\theta)}{\sin \theta} \right)$ et celles de N sont $\left(-\frac{p'}{\sin \theta}, 0 \right)$.

La parallèle à la normale, passant par T a pour équation :

$$-x \sin \theta + \left(y - \frac{p}{\sin \theta} \right) \cos \theta = 0,$$

(elle est perpendiculaire à $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$) d'où les coordonnées de P qui sont $\left(-p \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, 0 \right)$.

On a donc 0 milieu de NP si et seulement si :

$$\frac{p'}{\sin \theta} + \frac{p \cos \theta}{\sin^2 \theta} = 0, \text{ soit } p' = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} p,$$

d'où $p(\theta) = \frac{\lambda}{\sin \theta}$.

Si on veut vraiment paramétrer Γ , on prend l'intersection de :

$$D_\theta : x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{\lambda}{\sin \theta}$$

et de

$$D'_\theta : -x \sin \theta + y \cos \theta = -\lambda \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

d'où l'on tire :

$$x = 2\lambda \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{et} \quad y = \lambda \left(1 - \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \right),$$

donc Γ_λ est la parabole d'équation $y = \lambda - \frac{x^2}{4\lambda}$, (entière car x décrit \mathbb{R}).

7. Avec $\vec{t} = \frac{d\vec{M}}{ds} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$ et $\vec{n} = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$, on a pour rayon de courbure $R = \frac{ds}{d\varphi}$, et le point N est tel que $\vec{0N} = \vec{0M} - R\vec{n}$.

On a donc $\vec{0M} \cdot \vec{0N} = \vec{0M}^2 - R \vec{0M} \cdot \vec{n}$, et si x et y sont les coordonnées de M , la condition d'orthogonalité s'écrit

$$(x^2 + y^2) - R(-x \sin \varphi + y \cos \varphi) = 0.$$

Comme $\cos \varphi = \frac{dx}{ds}$ et $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$, $R \cos \varphi = \frac{dx}{d\varphi}$ et $R \sin \varphi = \frac{dy}{d\varphi}$, d'où une autre expression traduisant l'orthogonalité :

$$x^2 + y^2 + x \frac{dy}{d\varphi} - y \frac{dx}{d\varphi} = x^2 + y^2 + x^2 \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{d\varphi} = 0.$$

Cette forme incite à passer en polaires en posant $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, d'où la relation :

$$r^2 + r^2 \cos^2 \theta \frac{d(\operatorname{tg} \theta)}{d\theta} \frac{d\theta}{d\varphi} = r^2 \left(1 + \frac{d\theta}{d\varphi} \right) = 0$$

qui conduit à $\theta = \theta_0 - \varphi$.

La constante d'intégration θ_0 correspond à l'invariance par rotation de centre 0 de l'ensemble des solutions.

On continue avec $\theta_0 = 0$, d'où $\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = -\operatorname{tg} \varphi = -\frac{dy}{dx}$, (car $\cos \varphi = \frac{dx}{ds}$

et $\sin \varphi = \frac{dy}{ds}$), soit encore la relation $y dx + x dy = 0$ qui s'intègre en $xy = k$.

La constante $k = 0$ conduit à une hyperbole dégénérée, (les deux axes de coordonnées) à écarter car non bi-régulière, il reste donc comme solutions toutes les hyperboles équilatères de sommet 0, quand on réintroduit le paramètre θ_0 .

Recherche des développées. Là aussi il suffit de chercher la développée de l'hyperbole $xy = k$, les autres étant obtenues par rotation de centre 0, d'angle θ_0 quelconque.

On a $\frac{d\vec{M}}{dx} = \vec{i} - \frac{k}{x^2} \vec{j}$ d'où l'équation de la normale :

$$D_x : (X - x) + \left(Y - \frac{k}{x} \right) \left(-\frac{k}{x^2} \right) = 0, \text{ ou plutôt}$$

$D_x : x^3 X - kxY + k^2 - x^4 = 0$; on dérive pour avoir l'enveloppe :

$D'_x : 3x^2 X - kY - 4x^3 = 0$;

d'où un système qui se résout en $X = \frac{k^2 + 3x^4}{2x^3}$, $Y = \frac{3k^2 + x^4}{2kx}$,

paramétrisation qui donne la développée de l'hyperbole Γ_k d'équation $xy = k$, comme enveloppe des normales.

8. Voilà un travail de tout repos puisqu'il s'agit de la détermination d'un arc par son abscisse curviligne, sachant que :

$$\left(\frac{1}{a} \frac{ds}{d\varphi} \right)^2 = e^{\frac{2s}{a}} - 1, \text{ ce qui impose } s \geq 0.$$

Si on effectue le changement de paramètre défini par $e^{\frac{s}{a}} = \text{ch } u$, pour $u \geq 0$, on obtient $\frac{1}{a} \frac{ds}{d\varphi} = \varepsilon \text{ sh } u$, avec $\varepsilon = 1$ ou -1 .

On a : $\frac{1}{a} e^{\frac{s}{a}} ds = \frac{1}{a} \text{ch } u ds = \text{sh } u du$, d'où $\frac{1}{a} \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\text{sh } u}{\text{ch } u} \frac{du}{d\varphi} = \varepsilon \text{ sh } u$ d'où

$d\varphi = \varepsilon \frac{du}{\text{ch } u}$, (on a dérivé $e^{\frac{s}{a}} = \text{ch } u$).

Le choix de $\varepsilon = -1$, par rapport à $\varepsilon = 1$, conduisant à une symétrie orthogonale par rapport à une droite, et les courbes cherchées étant définies à un déplacement près, on continue avec $\varepsilon = 1$, d'où $\varphi - \varphi_0 = 2 \text{ Arctan } e^u$.

Le choix de φ_0 quelconque consistant à effectuer une rotation de centre 0, on poursuit avec $\varphi_0 = 0$, soit avec :

$$\varphi = 2 \text{ Arctan } e^u \iff e^u = \text{tg } \frac{\varphi}{2} \text{ pour } \varphi \in]0, \pi[.$$

On a alors $dx = ds \cos \varphi = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \frac{ds}{du} du$,

soit $dx = \frac{1 - e^{2u}}{1 + e^{2u}} a \text{ th } u du = -a \text{ th}^2 u du$,

et $dy = ds \sin \varphi = \frac{2 \text{tg } \frac{\varphi}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} \frac{ds}{du} du$

$$= \frac{2 e^u}{1 + e^{2u}} a \text{ th } u du = a \frac{\text{sh } u}{\text{ch}^2 u} du,$$

d'où $x - x_0 = a(\text{th } u - u)$ et $y - y_0 = -\frac{a}{\text{ch } u}$. Les courbes solutions s'en déduisent par isométrie.

9. Si on se donne Γ par son équation d'Euler :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0, \text{ avec } \vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j},$$

on sait que le centre de courbure C est tel que $\overrightarrow{MC} = -(p+p'')\vec{u}$, (voir 7.17). On prend alors un repère tel que la droite D soit l'axe des x , les coordonnées de T sont $\left(\frac{p}{\cos\theta}, 0\right)$, (T n'existe que si $\cos\theta \neq 0$), et $C = N$ équivaut à abscisse de $C = \frac{p}{\cos\theta}$, soit $x_M - (p+p'')\cos\theta = \frac{p}{\cos\theta}$, avec x_M abscisse de M . Comme M est l'intersection des droites D_θ et D'_θ avec :

$$D_\theta : x \cos\theta + y \sin\theta - p = 0, \text{ et}$$

$$D'_\theta : -x \sin\theta + y \cos\theta - p' = 0, \text{ on en déduit que :}$$

$$x_M = p \cos\theta - p' \sin\theta,$$

et finalement Γ sera solution si et seulement si

$$p \cos\theta - p' \sin\theta - p \cos\theta - p'' \cos\theta = \frac{p}{\cos\theta},$$

$$\text{soit encore } p'' \cos\theta + p' \sin\theta + \frac{p}{\cos\theta} = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du deuxième ordre qui s'intègre sur tout intervalle du type $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ modulo π . On a une solution particulière $p(\theta) = \cos\theta$, on cherche donc la solution générale en $p(\theta) = \lambda(\theta) \cos\theta$ d'où

$$\lambda(\theta) \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + (\lambda' \cos\theta - \lambda \sin\theta) \sin\theta + (\lambda'' \cos\theta - 2\lambda' \sin\theta - \lambda \cos\theta) \cos\theta = 0$$

$$\text{soit } \lambda'' \cos^2\theta - \lambda' \cos\theta \sin\theta = 0 \iff \lambda'' \cos\theta - \lambda' \sin\theta = 0,$$

$$\text{ou encore } (\lambda' \cos\theta)' = 0, \text{ ce qui conduit à } \lambda' = \frac{k}{\cos\theta} \text{ d'où l'on déduit :}$$

$$\lambda = k \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \mu \text{ et finalement}$$

$$p(\theta) = \left(k \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \mu \right) \cos\theta,$$

ce qui joint à $x_M = p \cos\theta - p' \sin\theta$ et $y_M = p \sin\theta + p' \cos\theta$, permet, pour les amateurs, de déterminer explicitement un paramétrage admissible des arcs solutions.

10. On prend pour repère \mathcal{R}_0 le repère d'origine M_0 , de vecteurs unitaires \vec{t} , (tangent à Γ en M_0) et \vec{n} directement perpendiculaire. Si on pose $s = s_0 + h$, un développement de Taylor-Young à l'ordre 2 en M_0 donne :

$$\overrightarrow{M_0M} = h \vec{t} + \frac{h^2}{2} \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}} + o(h^2),$$

avec \mathcal{R} rayon de courbure en M_0 , d'où des coordonnées x et y de M avec $x = h + o(h^2)$ et $y = \frac{h^2}{2\mathcal{R}} + o(h^2)$.

La tangente en M est dirigée par $\frac{d\vec{M}}{ds}(s_0 + h)$, avec

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{M}}{ds}(s_0 + h) &= \frac{d\vec{M}}{ds}(s_0) + h \frac{d^2\vec{M}}{ds^2}(s_0) + o(h) \\ &= \vec{t} + h \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}} + o(h), \\ &= (1 + o(h)) \vec{t} + (h + o(h)) \frac{\vec{n}}{\mathcal{R}},\end{aligned}$$

et une équation de la tangente en M qui devient :

$$(X - x)(h + o(h)) \frac{1}{\mathcal{R}} - (Y - y)(1 + o(h)) = 0,$$

d'où l'abscisse de T qui vaut $x - \frac{y(1 + o(h))\mathcal{R}}{h(1 + o(1))} = \xi$, soit :

$$h + o(h^2) - \frac{h^2}{2\mathcal{R}} \frac{\mathcal{R}}{h} (1 + o(1)) = \frac{h}{2} + o(h) = \xi.$$

L'équation du cercle circonscrit au triangle M_0, M, T est alors :

$$\begin{vmatrix} X^2 + Y^2 & X & Y & 1 \\ x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ \xi^2 & \xi & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

car si on développe par rapport à la première ligne, on obtient une expression du type $\alpha(X^2 + Y^2) + \beta X + \gamma Y + \delta = 0$, vérifiée par les coordonnées de M , de T et de M_0 .

Sous cette forme, les coordonnées du centre sont $-\frac{\beta}{2\alpha}$ et $-\frac{\gamma}{2\alpha}$.

On a

$$\begin{aligned}\alpha &= -\xi y \sim \frac{-h^3}{4\mathcal{R}}, \\ \beta &= - \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & y & 1 \\ \xi^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y\xi^2 \sim \frac{h^4}{8\mathcal{R}},\end{aligned}$$

donc $-\frac{\beta}{2\alpha} \sim \frac{h}{4}$, ce qui tend vers 0; enfin :

$$\begin{aligned}\gamma &= \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & 1 \\ \xi^2 & \xi & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (x^2 + y^2)\xi - x\xi^2 \\ &= h^2(1 + o(1)) \frac{h}{2} - h(1 + o(1)) \frac{h^2}{4} = \frac{h^3}{4}(1 + o(1)),\end{aligned}$$

donc $-\frac{\gamma}{2\alpha} = \frac{h^3}{8} \frac{4\mathcal{R}}{h^3}(1 + o(1))$ qui tend vers $\frac{\mathcal{R}}{2}$: la limite cherchée est le milieu de M_0C_0 , si C_0 est le centre de courbure de Γ en M_0 .

11. Le paramétrage est bijectif car $x(t) = x(t') \implies t = t'$.
Soit M de paramètre t , et R de paramètre $\theta \neq t$, on a $R \neq M$ et MR est normale en R à $\Gamma \iff \overrightarrow{MR} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt}(\theta) = 0$, soit si et seulement si, $\theta \neq t$ est solution de

$$\theta - t + 2\theta(\theta^2 - t^2) + 3\theta^2(\theta^3 - t^3) = 0,$$

ce qui est équivalent, en simplifiant par $\theta - t \neq 0$, à $\theta \neq t$, solution de

$$3\theta^4 + 3\theta^3t + \theta^2(3t^2 + 2) + 2\theta t + 1 = \varphi(\theta) = 0,$$

d'où en général, 4 solutions t_1, t_2, t_3 et t_4 . Le en général n'est pas ridicule, car pour $t = 0$ par exemple l'équation $3\theta^4 + 2\theta^2 + 1 = 0$ n'a aucune racine réelle.

Soit S la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0,$$

θ est paramètre de $S \cap \Gamma$ si et seulement si θ est solution de

$$\theta^2 + \theta^4 + \theta^6 - 2\alpha\theta - 2\beta\theta^2 - 2\gamma\theta^3 + \delta = 0,$$

donc de

$$\theta^6 + \theta^4 - 2\gamma\theta^3 + (1 - 2\beta)\theta^2 - 2\alpha\theta + \delta = \psi(\theta) = 0,$$

et la sphère S « passera », (si j'ose dire) par les points M_i , ($1 \leq i \leq 4$), réels ou imaginaires si et seulement si φ divise ψ .

En effectuant la division de 3ψ par φ , on trouve, (mais sans garantie, de toutes façons, si vous trouvez autre chose, continuez avec vos résultats),

$$3\psi(\theta) = \varphi(\theta) \left(\theta^2 - t\theta + \frac{1}{3} \right) + (3t^3 - t - 6\gamma)\theta^3 + \left(t^2 + \frac{4}{3} - 6\beta \right) \theta^2 + \left(\frac{t}{3} - 6\alpha \right) \theta + 3\delta - \frac{1}{3}.$$

Les coordonnées du centre de la sphère sont donc réelles : on a $\alpha = \frac{t}{18}$, $\beta = \frac{t^2}{6} + \frac{2}{9}$, $\gamma = \frac{t^3}{2} - \frac{t}{6}$, ce qui est une paramétrisation de l'ensemble des centres des sphères.

De plus, les paramètres des points P et Q sont les θ solutions de $\theta^2 - t\theta + \frac{1}{3} = 0$, (ils ne seront réels que pour $t^2 - \frac{4}{3} \geq 0$, mais passons). Si on les note t_5 et t_6 , on aura $t_5 + t_6 = t$ et $t_5t_6 = \frac{1}{3}$.

Le vecteur \overrightarrow{PQ} a pour composantes $t_6 - t_5$, $t_6^2 - t_5^2$ et $t_6^3 - t_5^3$, ou encore $t_6 - t_5$, $(t_6 - t_5)(t_6 + t_5)$, $(t_6 - t_5)(t_6^2 + t_5^2 + t_6t_5)$, ce qui, pour $t_6 \neq t_5$, (donc $t^2 > \frac{4}{3}$ pour avoir des racines réelles), donne un vecteur parallèle à \overrightarrow{V} de composantes 1 , $t_6 + t_5 = t$ et $(t_6 + t_5)^2 - t_6t_5 = t^2 - \frac{1}{3}$.

Une paramétrisation de la nappe engendrée par (P, Q) est donc $x = t_5 + \lambda$, $y = t_5^2 + \lambda t$, $z = t_5^3 + \lambda \left(t^2 - \frac{1}{3}\right)$, où les paramètres sont t et λ , et où on a : $t_5 = t - t_6$, d'où

$$t_5^2 = tt_5 - \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad t_5^3 = tt_5^2 - \frac{t_5}{3} = t \left(tt_5 - \frac{1}{3} \right) - \frac{t_5}{3}$$

soit, $t_5^3 = \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) t_5 - \frac{t}{3}$, ce qui conduit à :

$$x = t_5 + \lambda, \quad y = t(t_5 + \lambda) - \frac{1}{3} = tx - \frac{1}{3},$$

$$\text{et} \quad z = \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) (t_5 + \lambda) - \frac{t}{3} = \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) x - \frac{t}{3},$$

d'où une élimination de t :

$$zx = t^2x^2 - \frac{x^2}{3} - \frac{tx}{3} = \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3} \left(y + \frac{1}{3}\right),$$

ce qui conduit à la nappe d'équation $3zx = 3y^2 + y - x^2$, ou encore : $x^2 - 3y^2 + 3zx - y = 0$. C'est une quadrique, non vide, (elle passe par 0), réglée, la forme quadratique de degré 2 s'écrit $\left(x + \frac{3}{2}z\right)^2 - \frac{9}{4}z^2 - 3y^2$, donc on a un hyperboloïde à une nappe, (voir chapitre 10) qui contient les droites (P, Q) . Autre chose est de dire si toute droite de l'hyperboloïde convient!

12. Soit un repère orthonormé (A, \vec{i}, \vec{j}) tel que D ait pour équation $x = \alpha$, ($\alpha > 0$). Comme on suppose que γ ne passe pas par A , on peut chercher γ par son équation polaire.

Avec $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$, on pose donc $\overrightarrow{AM} = r(\theta) \vec{u}$.

L'intersection, T , de la perpendiculaire en A à AM , et de la droite $x = \alpha$ est donc telle que $\overrightarrow{AT} = \rho \vec{v}$, avec $-\rho \sin \theta = \alpha$, donc $\rho = -\frac{\alpha}{\sin \theta}$, et ceci pour $\theta \neq 0, (\pi)$. On doit donc exprimer que le point T tel que $\overrightarrow{AT} = -\frac{\alpha}{\sin \theta} \vec{v}$ est

sur la tangente en M à γ , donc que \overrightarrow{MT} est parallèle à $\frac{d\vec{M}}{d\theta} = r' \vec{u} + r \vec{v}$.

Comme $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AM} = -r\vec{u} - \frac{\alpha}{\sin\theta}\vec{v}$, on a la condition :

$$\begin{vmatrix} r' & r \\ r & \frac{\alpha}{\sin\theta} \end{vmatrix} = \frac{\alpha r'}{\sin\theta} - r^2 = 0,$$

ou $\frac{r'}{r^2} = \frac{\sin\theta}{\alpha}$, qui s'intègre en $\frac{\alpha}{r} = \lambda + \cos\theta$, (λ constante) et conduit aux courbes C_λ d'équation polaire $r = \frac{\alpha}{\lambda + \cos\theta}$. Pour $\lambda = 0$, on trouve la droite D qui ne convient pas, (T n'est pas défini) et pour $\lambda \neq 0$, on a une conique de foyer A , de directrice D , d'excentricité $\frac{1}{|\lambda|}$, (voir 8.39, 8.40 et 8.41).

13. On a $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}$ avec $\vec{u} = \cos\theta\vec{i} + \sin\theta\vec{j}$.
Si I est la projection orthogonale de C sur OM , on a :

$$\overrightarrow{OI} = (\overrightarrow{OC} \cdot \vec{u})\vec{u} = [(\overrightarrow{OM} + \mathcal{R}\vec{N}) \cdot \vec{u}]\vec{u},$$

avec \mathcal{R} rayon de courbure en M à la courbe et \vec{N} vecteur unitaire normal orienté. En posant $\varphi = (\vec{i}, \vec{T}) = (\vec{i}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{T}) = \theta + V$ avec les notations usuelles, on a $(\vec{u}, \vec{N}) = V + \frac{\pi}{2}$, donc :

$$\vec{N} \cdot \vec{u} = \cos\left(V + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin V \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OI} = (\rho - \mathcal{R}\sin V)\vec{u}.$$

Si M décrit la cardioïde.

On a $\mathcal{R} = \frac{ds}{d\varphi}$ avec $\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \rho'\vec{u} + \rho\vec{v}$, donc :

$$\begin{aligned} ds^2 &= (a^2 \sin^2\theta + a^2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta))d\theta^2 = 2a^2(1 + \cos\theta)d\theta^2 \\ &= 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta^2. \end{aligned}$$

On choisit l'expression $ds = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta$, puis on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{ds} &= \frac{d\vec{M}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = \frac{-a \sin\theta}{2a \cos \frac{\theta}{2}} \vec{u} + \frac{2a \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2a \cos \frac{\theta}{2}} \vec{v} \\ &= -\sin \frac{\theta}{2} \vec{u} + \cos \frac{\theta}{2} \vec{v}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à prendre $V = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$, $\sin V = \cos \frac{\theta}{2}$ et $\varphi = \theta + V = 3\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$

d'où $d\varphi = \frac{3}{2} d\theta$ et $\mathcal{R} = \frac{4a}{3} \cos \frac{\theta}{2}$. On obtient alors $\overrightarrow{OI} = \left(\rho - \frac{4a}{3} \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \vec{u}$,
 or $\rho = 2a \cos^2 \frac{\theta}{2}$, donc $\overrightarrow{OI} = \left(\rho - \frac{2}{3} \rho \right) \vec{u} = \frac{1}{3} \rho \vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{3}$: I décrit l'image
 de la cardioïde par l'homothétie de centre O de rapport $\frac{1}{3}$.

Réciproquement, si I est tel que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OM}$, on a :

$$\rho - \mathcal{R} \sin V = \frac{1}{3} \rho \iff \frac{2}{3} \rho = \mathcal{R} \sin V = \frac{ds}{d\varphi} \sin V.$$

Mais $\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{v}$, donc $\frac{d\vec{M}}{ds} = \frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \vec{u} + \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}} \vec{v}$, on a

$\sin V = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}$, et comme $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$, on est conduit à la relation

$$\frac{2}{3} \rho = \frac{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta}{d\varphi} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \theta - \theta_0 = \frac{2}{3} \varphi.$$

La présence de θ_0 non nul revient à effectuer une rotation de centre O . On poursuit l'étude avec la relation $\theta = \frac{2}{3} \varphi$ d'où l'angle V qui vaut :

$V = (\vec{u}, \vec{T}) = \varphi - \theta = \frac{3}{2} \theta - \theta = \frac{\theta}{2}$ et $\frac{\rho'}{\rho} = \cotg V = \cotg \frac{\theta}{2}$, ce qui conduit

en intégrant à $\rho = \lambda \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\lambda}{2} (1 - \cos \theta) = \frac{\lambda}{2} (1 + \cos(\theta + \pi))$.

Les courbes cherchées sont celles d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos(\theta - \theta_0))$, cardioïdes déduites de l'une d'entre elles par similitude de centre O .

14. Qu'est-ce à dire? On ne saurait tout à la fois parler de podaires, cycloïdes plus ou moins épi- ou hypo- et d'espaces de Hilbert... Restons raisonnables Mesdames et Messieurs les examinateurs et, sans utiliser de langage d'initié, parlons des projections d'un point donné sur les tangentes à une courbe, qui décrivent une podaire.

Dans un repère orthonormé d'origine le centre O du cercle \mathcal{C} , celui-ci se paramètre en $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, et la tangente en M de paramètre t au cercle a pour équation $x \cos t + y \sin t - R = 0$, (penser à son équation normale).

Si A a pour coordonnées $(a, 0)$, ($a \geq 0$, pourquoi pas), la normale en A à la tangente ayant pour vecteur directeur $\vec{u} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, elle se paramètre en $x = a + \lambda \cos t$, $y = \lambda \sin t$ avec λ tel que $a \cos t + \lambda = R$, d'où les coordonnées du point cherché :

$$x = a + (R - a \cos t) \cos t = \frac{a}{2} + R \cos t + \frac{a}{2} (1 - 2 \cos^2 t),$$

$$y = (R - a \cos t) \sin t,$$

ou encore :

$$\begin{cases} x - \frac{a}{2} = R \cos t - \frac{a}{2} \cos 2t \\ y = R \sin t - \frac{a}{2} \sin 2t, \end{cases}$$

ce qui permet de reconnaître une... cycloïde.

15. Comme on sait reconnaître surtout des courbes planes, le mieux est déjà de chercher une relation affine entre x , y et z . Il est clair ici que $x + \sqrt{2}y = 0$, donc Γ est plane.

En changeant de paramétrage, avec $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = t$, on obtient $x = \sin \theta$ et $\sqrt{\frac{2}{3}} z = \cos \theta$, donc Γ est sur le cylindre d'équation $x^2 + \frac{2}{3} z^2 = 1$, cylindre elliptique. Le plan d'équation $x + \sqrt{2}y = 0$ n'étant pas parallèle aux génératrices rectilignes, Γ est une ellipse.

Les points de paramètres t et $-t$, de Γ , sont symétriques par rapport à Oz . Un point $M(X, Y, Z)$ sera sur la nappe S cherchée si et seulement si il existe

t tel que $X^2 + Y^2 = x^2(t) + y^2(t) = \frac{6t^2}{(1+t^2)^2}$ avec en même temps

$$Z = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Mais alors $Z^2 = \frac{3}{2} \frac{1-2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}$, et on aura la relation :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{3}{2(1+t^2)^2} (1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2) = \frac{3}{2}.$$

En fait l'arc Γ est sur la sphère S de centre O de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$, et sur un plan passant par O : c'est un cercle de rayon $\sqrt{\frac{3}{2}}$, et la nappe S est cette sphère.

16. L'abscisse d'un point de Γ devant être positive, ($x^3 = ay^2 \geq 0$), on pose $x = at^2$, d'où $y^2 = a^2 t^6$ et une paramétrisation possible de Γ devient $x = at^2$, $y = at^3$. La tangente en $M(t)$ a pour équation, pour $t \neq 0$

$$\begin{vmatrix} x - at^2 & y - at^3 \\ 2t & 3t^2 \end{vmatrix} = 0,$$

soit encore, après simplification par t non nul : $3tx - 2y - at^3 = 0$.

(Pour $t = 0$, M est à l'origine, $\frac{d^2M}{dt^2} = 2a \vec{i}$, la tangente est l'axe des x , d'équation $y = 0$: la relation précédente reste valable).

Les tangentes en $M(t)$ et $M(\theta)$ seront perpendiculaires si et seulement si les

vecteurs $\frac{d\vec{M}}{dt}$ et $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$ sont orthogonaux, ce qui se traduit par $4t\theta + 9(t\theta)^2 = 0$.

Pour $t = 0$, on a la tangente en 0 qui est l'axe des abscisses, or il n'existe pas de θ associé à un $\frac{d\vec{M}}{d\theta}$ dirigeant l'axe des ordonnées, donc cette valeur t , (ou θ) nulle est écartée, et on a orthogonalité si et seulement si $t\theta = -\frac{4}{9}$.

Intersection des deux tangentes : on résoud le système :

$$\begin{cases} 3tx - 2y = at^3 : \textcircled{1} \\ 3\theta x - 2y = a\theta^3 : \textcircled{2}, \text{ avec } t\theta = -\frac{4}{9}. \end{cases}$$

Il conduit à $3(t - \theta)x = a(t^3 - \theta^3) = a(t - \theta)(t^2 + t\theta + \theta^2)$ d'où :
 $x = \frac{a}{3}(t^2 + t\theta + \theta^2)$, puis, $(\theta \times \textcircled{1}) - t \times \textcircled{2}$ donne :

$$2(t - \theta)y = at\theta(t^2 - \theta^2) = at\theta(t - \theta)(t + \theta),$$

donc $y = \frac{a}{2}t\theta(t + \theta)$.

Si on pose $u = t + \theta$, comme $t^2 + \theta^2 = (t + \theta)^2 - 2t\theta$, on aura :
 $t^2 + t\theta + \theta^2 = (t + \theta)^2 - t\theta$, et un paramétrage de l'ensemble recherché par :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{3} \left(u^2 + \frac{4}{9} \right) \\ y = -\frac{2a}{9} u \end{cases},$$

pour tout u tel qu'il existe t et θ vérifiant $t + \theta = u$ et $t\theta = -\frac{4}{9}$, donc tel que

l'équation $t^2 - ut - \frac{4}{9} = 0$ ait des racines réelles, ce qui est toujours le cas.

L'ensemble recherché est donc la *parabole* d'équation $x = \frac{27}{4a}y^2 + \frac{4a}{27}$, d'axe Ox .

17. Γ n'étant supposé que de classe C^1 , on ne peut pas se donner la courbe par son équation d'Euler. Prenons un repère orthonormé tel que D soit l'axe des abscisses et l'origine 0 soit le milieu des segments $[N, T]$.

On se donne l'arc Γ par une équation cartésienne, $y = f(x)$, (c'est localement valable, sauf points particuliers).

Equation de la tangente : $Y - f(x) - f'(x)(X - x) = 0$ d'où $x_T = x - \frac{f}{f'}$;

équation de la normale : $f'(x)(Y - f(x)) + (X - x) = 0$, donc $x_N = x + f f'$;

la condition vérifiée par f est donc $x_T + x_N = 0$, soit $2x + y y' - \frac{y}{y'} = 0$.

Il s'agit d'une équation différentielle homogène en x et y .

On la résoud en posant $y' = t$, d'où, pour $t \neq 0$, $dx = \frac{1}{t} dy$, et comme

$2x = \frac{y}{t} - ty$, on a aussi $2 dx = \left(\frac{1}{t} - t\right) dy - \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) y dt$, d'où y ,

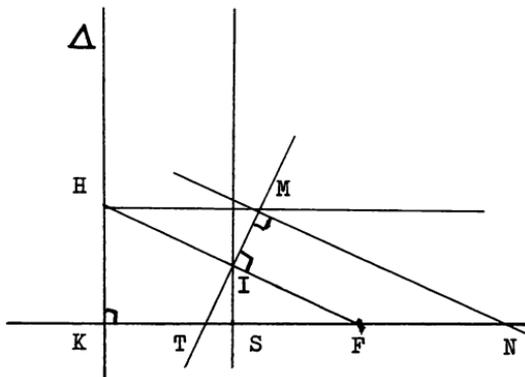
fonction de t , vérifiant l'égalité $\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) y dt = -\left(t + \frac{1}{t}\right) dy$, soit après

simplification, $y dt = -t dy$, qui conduit à $y = \frac{k}{t}$, d'où, comme $2x = \frac{y}{t} - ty$,

on a $2x = \frac{k}{t^2} - k = \frac{y^2}{k} - k$: les courbes Γ sont les paraboles d'équation $y^2 = 2kx + k^2$.

Elles ont l'axe des abscisses, (donc D) pour axe, pour sommet les points S_k : $\left(-\frac{k}{2}, 0\right)$ et pour foyer l'origine. On retrouve une propriété de la parabole.

En effet, soit une parabole P de foyer F , de directrice Δ . La construction de la tangente en M à la parabole, (voir 8.9), montre que c'est la médiatrice de FH , H étant la projection de M sur Δ .



Soit S le sommet de la parabole, c'est le milieu de $[F, K]$, (K , projection de F sur la directrice), et par du Thalès en veux-tu en voilà, (ou droite des milieux dans un triangle), S milieu de $[K, F]$ donne I milieu de $[F, H]$, donc aussi de $[T, M]$, mais alors F est milieu de $[T, N]$ et le tour est joué!

18. On prend un repère orthonormé d'origine O , et on va se donner la courbe par une représentation polaire.

Avec $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, on pose $\vec{OM} = \rho(\theta) \vec{u}$, la fonction ρ étant supposée de classe C^1 au moins, (on parle de tangente) et ne s'annulant pas, (perpendiculaire à (OM) : cela suppose $0 \neq M$).

Avec $\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$, on a $\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \rho' \vec{u} + \rho \vec{v}$, et dans le repère $(0; \vec{u}, \vec{v})$ on a :
coordonnées de M : $(\rho, 0)$;

équation de la tangente en M à Γ : $Y = \frac{\rho}{\rho'} (X - \rho)$, donc,

coordonnée de T : $\left(0, -\frac{\rho^2}{\rho'}\right)$, et la relation voulue, $\|\vec{MT}\|^2 = 1$ se traduit par

l'équation différentielle $\rho^2 + \frac{\rho^4}{\rho'^2} = 1$.

On constate que $\rho^2 \leq 1$, ce qui justifie le changement de fonction $\rho = \cos \varphi$, (ou $\varphi = \text{Arccos } \rho$) avec φ dans $[0, \pi]$.

Alors $\frac{\rho^4}{\rho'^2} = 1 - \rho^2 = \sin^2 \varphi$, donc $\frac{\rho^2}{\rho'} = \varepsilon \sin \varphi$, avec $\varepsilon = 1$ ou -1 .

C'est encore $\rho' = \frac{d\rho}{d\theta} = \varepsilon \frac{\rho^2}{\sin \varphi} = \varepsilon \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$, soit $d\theta = \varepsilon \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} d\rho$.

Or $d\rho = -\sin \varphi d\varphi$, on a $d\theta = -\varepsilon \text{tg}^2 \varphi d\varphi$, donc $\theta - \theta_0 = -\varepsilon(\tan \varphi - \varphi)$, et les courbes cherchées sont obtenues en polaires paramétriques, par

$$\begin{cases} \theta = \theta_0 - \varepsilon(\tan \varphi - \varphi) \\ \rho = \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi], \end{cases}$$

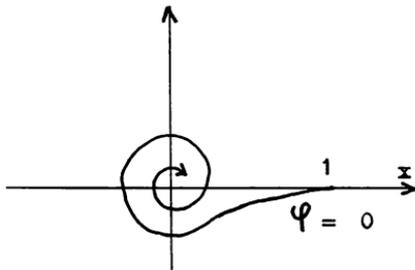
($\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ correspond à ρ qui ne s'annule pas).

A une rotation près (θ_0) et une symétrie par rapport à une droite, ($\varepsilon = 1$ ou -1), on étudie la courbe particulière $\begin{cases} \theta = \varphi - \tan \varphi \\ \rho = \cos \varphi. \end{cases}$

Si φ tend vers $\frac{\pi^-}{2}$, ρ tend vers 0 et θ vers $-\infty$: on a une branche spirale qui

s'enroule autour de 0, et pour $\varphi = 0, \theta = 0, \rho = 1$. De plus, $\frac{d\vec{M}}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \vec{i} + 1 \vec{j}$ avec $\frac{d\theta}{d\rho} = \varepsilon \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$, nul si $\varphi = 0$, la tangente étant colinéaire à $\vec{i} + \frac{d\theta}{d\rho} \vec{j}$ est alors dirigée par \vec{i} .

On peut remarquer que si φ donne $\pi - \varphi$, ρ donne $-\rho$ et θ donne $\pi - \theta$: il y a symétrie par rapport à Ox pour φ variant entre $\frac{\pi}{2}$ et π , de l'arc obtenu pour φ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.



Allure de Γ pour $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Pour l'abscisse curviligne, l'égalité obtenue à partir de l'équation différentielle

$$\rho^2(\rho^2 + \rho'^2) = \rho'^2, \quad \text{où } \rho' = \frac{d\rho}{d\theta},$$

conduit à $\frac{ds}{d\theta} = \varepsilon(\rho^2 + \rho'^2)^{1/2} = \varepsilon \frac{\rho'}{\rho} = \varepsilon \frac{d\rho}{\rho d\theta}$ d'où $ds = \varepsilon \frac{d\rho}{\rho}$, donc $s - s_0 = \varepsilon \ln|\rho|$.

Si on oriente suivant θ décroissant (d'où $\varepsilon = -1$), et si on se contente de la partie de courbe Γ associée à φ dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\rho > 0$, et l'égalité $\rho = C e^{-s}$, avec C constante.

Enveloppes, trajectoires orthogonales

L'étude des arcs paramétrés, faite au chapitre VI, nous a montré que si (I, f) est un paramétrage admissible d'un arc géométrique \mathcal{C} , de classe C^1 au moins, et régulier, pour tout t de I , le point $m(t)$ de l'arc admet une tangente $D(t)$, qui est la droite affine de vecteur directeur $f'(t)$, passant par le point $m(t)$.

Inversement, si on se donne une famille de droites $D(t)$, fonctions d'un paramètre t variant dans un intervalle, existe-t-il un arc paramétré ayant ces droites pour tangentes, arc qui serait alors appelé *enveloppe de la famille de droites*. C'est ce problème que nous allons étudier dans le cas particulier des courbes planes.

1. Enveloppe d'une famille de droites d'un plan affine

On considère un plan affine euclidien P , muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

Si on reprend l'exemple du préambule de la famille des tangentes $D(t)$ à l'arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, régulier et de classe C^1 au moins, si $f(t) = \alpha(t)\vec{i} + \beta(t)\vec{j}$, l'équation de $D(t)$ dans le repère sera :

$$(X - \alpha(t))\beta'(t) - (Y - \beta(t))\alpha'(t) = 0,$$

soit encore :

$$7.1 \quad X\beta'(t) - Y\alpha'(t) + \beta(t)\alpha'(t) - \alpha(t)\beta'(t) = 0,$$

relation traduisant la dépendance des vecteurs $f'(t)$ et $\overrightarrow{m(t)p}$, p de coordonnées X et Y .

L'arc étant régulier, on a la condition $\beta'^2 + \alpha'^2 \neq 0$.

Si on suppose de plus l'arc bi-régulier, les vecteurs $f'(t)$ et $f''(t)$ sont indépendants, ce qui se traduit par la condition $\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' \neq 0$, et ce pour tout t de I .

Nous allons voir que ces conditions vont suffire pour trouver une enveloppe.

DÉFINITION 7.2. — Soit une famille de droites $D(t)$, $t \in I$, I intervalle de \mathbb{R} . On appelle enveloppe de cette famille tout arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ tel que pour tout $t \in I$, $m(t) \in D(t)$ et Γ ait pour tangente en $m(t)$ la droite $D(t)$.

THÉORÈME 7.3. — Soit une famille de droites $D(t)$, $t \in I$, d'un plan affine euclidien P , d'équation $a(t)x + b(t)y + c(t) = 0$ dans un repère orthonormé de P , a , b et c étant de classe C^2 au moins sur I . Si pour tout t de I on a $a^2 + b^2 \neq 0$ et $ab' - ba' \neq 0$, alors il existe un et un seul arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, de classe C^1 , tel que pour tout t de I , $m(t) \in D(t)$, Γ ayant $D(t)$ en $m(t)$ pour tangente, si $m(t)$ n'est pas stationnaire sur Γ .

On cherche donc deux fonctions $t \rightsquigarrow x(t)$ et $t \rightsquigarrow y(t)$, de classe C^1 de I dans \mathbb{R} , telles que, pour tout t de I ,

- 1) $m(t)$ de coordonnées $x(t)$, $y(t)$ soit sur $D(t)$,
- 2) en $m(t)$, $D(t)$ soit la tangente à Γ ensemble des $m(t)$.

La première condition se traduit par la relation :

$$7.4. \quad a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t) = 0,$$

et la deuxième par :

$$7.5. \quad a(t)x'(t) + b(t)y'(t) = 0,$$

qui traduit l'orthogonalité de $V(t) = a(t)\vec{i} + b(t)\vec{j}$, vecteur perpendiculaire à $D(t)$, et de $f'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}$ vecteur directeur de la tangente à Γ , à condition que ce vecteur soit non nul, condition à ne pas négliger. Or, si on suppose x et y de classe C^1 , on peut dériver la relation 7.4 qui implique alors l'égalité :

$$7.6. \quad a(t)x'(t) + b(t)y'(t) + a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0,$$

et on peut remarquer que les relations 7.6 et 7.5 donnent, par soustraction :

$$7.7. \quad a'(t)x(t) + b'(t)y(t) + c'(t) = 0.$$

Faisons le point. Résoudre notre problème équivaut à trouver $x(t)$ et $y(t)$ vérifiant 7.4 et 7.5 avec la condition $x'^2 + y'^2 \neq 0$.

On a (7.4 et 7.5) \Rightarrow (7.4, 7.6 et 7.5) \Rightarrow (7.4 et 7.7), mais réciproquement, (7.4 et 7.7) \Rightarrow (7.4, 7.6 et 7.7), d'où par soustraction, comme (7.6) - (7.7) redonne 7.5, on a (7.4 et 7.7) \Rightarrow (7.4 et 7.5).

On considère donc le système :

$$7.8. \quad \begin{cases} a(t)x(t) + b(t)y(t) = -c(t), \\ a'(t)x(t) + b'(t)y(t) = -c'(t), \end{cases}$$

qui, compte tenu de l'hypothèse $a(t)b'(t) - a'(t)b(t) \neq 0$ pour tout t de I , admet une et une seule solution, et l'arc paramétré (I, f) avec $f(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, aura en $m(t)$, de coordonnées $x(t)$ et $y(t)$, la droite $D(t)$ pour tangente, si $f'(t) \neq 0$, d'où le Théorème 7.3. ■

REMARQUE 7.9. — Les enveloppes c'est donc facile, c'est pas cher, et cela peut rapporter gros. On considère le système 7.8 parfois encore noté

$$\begin{cases} D(t) = 0 \\ D'(t) = 0, \end{cases}$$

parce que l'on dérive les fonction de t , on le résoud et on a l'enveloppe, tout au moins pour les points réguliers.

Que se passe-t-il en un point singulier? D'abord si a , b et c sont de classe C^k , les formules de Cramer donnant la solution de 7.8, montrent que x et y sont de classe C^{k-1} , donc si $k > 2$, et si $f'(t_0) = 0$, on peut encore dériver.

Or la relation 7.5, vérifiée par le paramétrage trouvé, donne en dérivant,

$$7.10. \quad a'(t)x'(t) + b'(t)y'(t) + a(t)x''(t) + b(t)y''(t) = 0,$$

donc si $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$, il reste $a(t_0)x''(t_0) + b(t_0)y''(t_0) = 0$, et, si $f''(t_0) \neq 0$, comme alors $f''(t_0)$ dirige la tangente à $\Gamma = (I, f)$ en $m(t_0)$, on a $f''(t_0)$ orthogonal à $\vec{V}(t_0) = a(t_0)\vec{i} + b(t_0)\vec{j}$, lui même orthogonal à $D(t_0)$: finalement $D(t_0)$ est encore la tangente à Γ en $m(t_0)$.

Si $f''(t_0)$, mais que l'on peut encore dériver, on dérive 7.10, et finalement on obtient la

REMARQUE 7.11. — *Si pour t_0 dans I , le point $m(t_0)$ de l'enveloppe Γ , admet un premier entier caractéristique, la tangente à Γ en $m(t_0)$ est bien la droite $D(t_0)$.*

REMARQUE 7.12. — La définition 7.2 est plus générale que le Théorème 7.3 qui ne peut, le pauvre, que donner des conditions suffisantes d'existence de l'enveloppe.

En effet, relierons deux arcs de courbes, ($y = (x - a)^4$ pour $x \leq a$) et ($y = (x - b)^4$ pour $x \geq b$) avec $a < b$, par le segment ($a \leq x \leq b, y = 0$), (voir figure 7.12). L'arc paramétré $\Gamma : (\mathbb{R}, f)$, avec $f(x) = (x, y(x))$ et $y(x) = (x - a)^4$ si $x \leq a$, $y(x) = 0$ pour $a \leq x \leq b$ et $y(x) = (x - b)^4$ pour $x \geq b$ est de classe C^3 .

La famille des tangentes $(D(x))_{x \in \mathbb{R}}$ existe, ces tangentes ont pour équations :

$$\begin{aligned} Y - (x - a)^4 &= 4(x - a)^3(X - x) && \text{si } x \leq a, \\ Y &= 0 && \text{si } a \leq x \leq b, \\ Y - (x - b)^4 &= 4(x - b)^3(X - x) && \text{si } x \geq b, \end{aligned}$$

donc on peut encore les écrire sous la forme :

$$D(x) : \alpha(x)X + \beta(x)Y + \gamma(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{avec } \alpha(x) &= -4(x - a)^3 && \text{si } x \leq a, \\ &= 0 && \text{si } a \leq x \leq b, \\ &= -4(x - b)^3 && \text{si } x \geq b; \end{aligned}$$

$$\beta(x) = 1 \text{ pour tout } x;$$

$$\begin{aligned} \text{et } \gamma(x) &= -(x - a)^4 + 4x(x - a)^3 && \text{si } x \leq a, \\ &= 0 && \text{si } a \leq x \leq b, \\ &= -(x - b)^4 + 4x(x - b)^3 && \text{si } x \geq b. \end{aligned}$$

Ces expressions α, β, γ sont bien de classe C^2 , (raccord continu en a et b des fonctions et des dérivées premières et seconde), mais sur $[a, b]$, $\alpha\beta' - \beta\alpha' = 0$, puisqu'alors α et β sont constantes, donc le Théorème 7.3 ne s'appliquera pas.

En fait on doit partir du Théorème 7.3 pour étudier un problème donné, puis réfléchir pour traiter les valeurs particulières. N'espérez pas trouver dans un Cours de Mathématiques la collection de toutes les recettes permettant de tout traiter, il faut y mettre du vôtre!

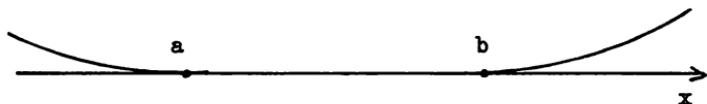


Fig. 7.12

7.13. Un cas particulier important : l'équation d'Euler d'un arc plan.

On suppose que l'équation des droites intervenant est « normalisée » au sens suivant.

Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'un plan affine P , on considère un vecteur unitaire $\vec{u}(\theta) = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$, et D_θ est la droite, orthogonale à $\vec{u}(\theta)$, passant par le point $h(\theta)$ tel que $\overrightarrow{Oh(\theta)} = p(\theta) \vec{u}(\theta)$, (p , fonction de θ).

Le point m , de coordonnées x et y , est donc sur D_θ si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{h(\theta)m} \cdot \vec{u}(\theta) = 0$, soit si :
 $(x - p(\theta) \cos \theta) \cos \theta + (y - p(\theta) \sin \theta) \sin \theta = 0$, ou encore si :

$$7.14 \quad x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta).$$

Si on suppose alors la fonction p de classe C^2 , on peut chercher si la famille des droites D_θ , pour θ dans I intervalle de \mathbb{R} , admet une enveloppe.

On a vu pour cela, qu'on résoud le système ($D_\theta = 0$, $D'_\theta = 0$), (on dérive l'équation des droites par rapport au paramètre), soit ici, le système :

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta) \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = p'(\theta) \end{cases}, \quad \times \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}, \quad \times \begin{vmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{vmatrix},$$

ce qui donne, avec les multiplicateurs indiqués, une unique solution :

$$7.15 \quad \begin{cases} x(\theta) = p(\theta) \cos \theta - p'(\theta) \sin \theta, \\ y(\theta) = p(\theta) \sin \theta + p'(\theta) \cos \theta. \end{cases}$$

Avec $a(\theta) = \cos \theta$ et $b(\theta) = \sin \theta$, les conditions du Théorème 7.3 sont vérifiées car $a^2 + b^2 = 1$ et $ab' - ba' = \cos^2 \theta - (-\sin^2 \theta) = 1$ aussi.

Il reste à voir si le paramétrage 7.15 donne ou non des points stationnaires.

On a :

$$\begin{aligned} x' &= -p \sin \theta - p'' \sin \theta = -(p + p'') \sin \theta, \\ y' &= p \cos \theta + p'' \cos \theta = (p + p'') \cos \theta, \end{aligned}$$

donc $x'^2 + y'^2 = (p + p'')^2$.

On obtient donc :

THÉORÈME 7.16. — Soit une famille de droites D_θ d'équations :
 $D_\theta : x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta)$, avec p fonction de classe C^2 . Sur tout intervalle I où $p + p''$ ne s'annule pas, les droites (D_θ) ont une enveloppe Γ et l'équation D_θ s'appelle équation d'Euler de Γ .

Nous allons voir d'un peu plus près à quoi correspond cette condition $p + p'' \neq 0$, mais auparavant, un petit schéma s'impose.

En fait, si sur I , $p + p''$ ne s'annule pas, donc si l'enveloppe Γ existe, l'équation $D'_\theta = 0$ s'écrit encore :

$$x \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) + y \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = p'(\theta),$$

et avec $\vec{v}(\theta) = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j}$, vecteur directement perpendiculaire à $\vec{u}(\theta)$, et le point $k(\theta)$ tel que $\vec{Ok}(\theta) = p'(\theta)\vec{v}(\theta)$, la droite D'_θ est perpendiculaire à $\vec{v}(\theta)$, elle passe par $k(\theta)$, et le point $m(\theta)$ de l'enveloppe est l'intersection de D_θ et de D'_θ .

Mais alors, D_θ étant tangente à Γ en $m(\theta)$, la droite D'_θ est la normale en $m(\theta)$ à Γ , (voir figure 7.16), et vu l'étude de la courbure des courbes planes faite au chapitre 6, § 6, le centre de courbure $C(\theta)$ de Γ en $m(\theta)$ devrait décrire la développée \mathcal{C} de Γ , courbe ayant pour tangentes les normales à Γ , (Théorème 6. 116), donc \mathcal{C} devrait apparaître comme l'enveloppe des droites D'_θ .

On suppose p de classe C^3 , on a alors, en introduisant le vecteur :

$$-\vec{u}(\theta) = \cos(\theta + \pi) \vec{i} + \sin(\theta + \pi) \vec{j},$$

et $l(\theta)$ le point tel que $\vec{Ol}(\theta) = -p''\vec{u}(\theta)$, le point $C(\theta)$ est l'intersection de D'_θ et de D''_θ , droite perpendiculaire à $-\vec{u}(\theta)$ passant par $l(\theta)$, (figure 7.16).

Mais alors, en choisissant $\vec{v}(\theta)$ pour vecteur tangent unitaire $\vec{T} = \frac{d\vec{m}}{ds}$

pour Γ , on aura $\vec{N} = -\vec{u}(\theta)$, (voir le début du paragraphe 6, chapitre 6), et si la courbure en m n'est pas nulle, le rayon de courbure \mathcal{R} sera tel que $\vec{mC} = \mathcal{R}\vec{N} = -\mathcal{R}\vec{u}(\theta)$.

Or ici :

$$\begin{aligned} \vec{mC} &= \vec{h(\theta)l(\theta)} = \vec{Ol(\theta)} - \vec{Oh(\theta)} \\ &= -p''\vec{u}(\theta) - p\vec{u}(\theta) \\ &= (p(\theta) + p''(\theta))(-\vec{u}(\theta)), \end{aligned}$$

7.17. d'où un rayon de courbure $\mathcal{R}(\theta) = p(\theta) + p''(\theta)$ pour la courbe Γ d'équation d'Euler $x \cos \theta + y \sin \theta = p(\theta)$, si $p + p''$ ne s'annule pas.

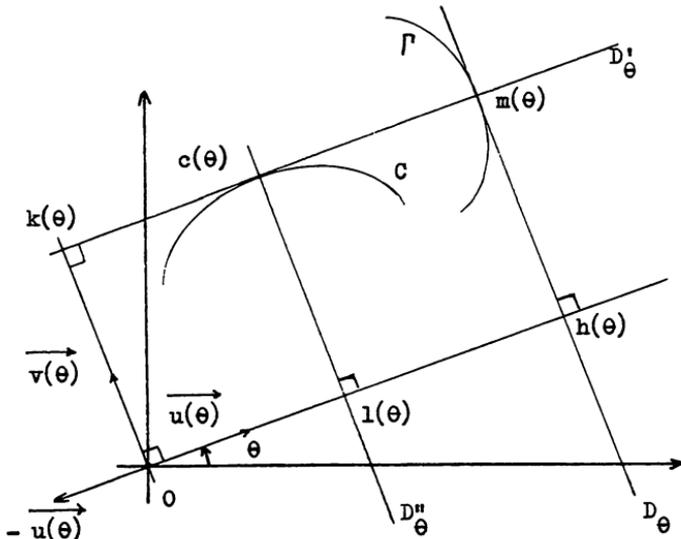


Fig. 7.16.

7.18. *A quoi correspond l'hypothèse $p + p'' = 0$ sur un intervalle I de \mathbb{R} ?*

Dans ce cas $p(\theta) = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta$, α et β constantes, et l'équation D_θ s'écrit :

$$(x - \alpha) \cos \theta + (y - \beta) \sin \theta = 0,$$

lorsque θ varie, les droites D_θ pivotent autour d'un point fixe a de coordonnées α et β : il est difficile de trouver une enveloppe à ces droites !

Par contre si θ_0 est zéro isolé de $p + p''$, dans la mesure où on a $\frac{d\vec{m}}{d\theta} = (p + p'')(\theta)\vec{v}(\theta)$, on peut par des dérivations successives, (si elles sont possibles) vérifier que s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(p + p'')^{(k)}(\theta_0) \neq 0$ et $(p + p'')^{(r)}(\theta_0) = 0$ pour tout entier $r < k$, on aura :

$$\frac{d^k \vec{m}}{d\theta^k}(\theta_0) = (p + p'')^{(k)}(\theta_0)\vec{v}(\theta_0),$$

donc en $m(\theta_0)$, l'arc Γ aura une tangente dirigée par $\vec{v}(\theta_0)$, c'est-à-dire la droite D_{θ_0} , donc ce point $m(\theta_0)$, singulier sur Γ , fait partie de l'enveloppe.

EXEMPLE 7.19. — Nous avons vu, (Théorème 6. 116), que si un arc plan Γ est de classe C^3 au moins, bi-régulier, tel que $\frac{d\mathcal{R}}{ds}$ ne s'annule pas ou n'a que des zéros isolés, l'enveloppe de ses normales est la développée de Γ .

EXEMPLE 7.20. — On a vu que, pour l'équation différentielle de Clairault, (Tome 3, 18.88), $y = xy' + g(y')$, les droites D_t d'équation $y = tx + g(t)$ sont des solutions, et qu'il y a une autre solution, (Γ), paramétrée par :

$$7.20.1 \quad \begin{cases} x = -g'(t) \\ y = -g'(t)t + g(t). \end{cases}$$

Cherchons l'enveloppe des droites D_t , g étant supposée de classe C^2 .
On a :

$$\begin{aligned} D_t : \quad -tx + y &= g(t) \\ D'_t : \quad -x &= g'(t), \end{aligned}$$

système ayant pour solution $\begin{cases} x = -g'(t) \\ y = g(t) - tg'(t) \end{cases}$, c'est-à-dire le paramétrage de Γ , et on sait que c'est l'enveloppe des droites D_t , sous réserve que la tangente à (Γ) existe.

On a $x' = -g''$, $y' = -tg''$, et $x'^2 + y'^2 = (1 + t^2)g''^2$, donc sur tout intervalle où g'' ne s'annule pas, les droites D_t solutions de l'équation de Clairault ont pour enveloppe l'intégrale particulière (Γ).

Que se passe-t-il si $g''(t) = 0$ sur l'intervalle I ? Et bien, l'équation de Clairault est en fait ... linéaire, car $g(t) = \alpha t + \beta$ d'où l'équation différentielle qui devient :

$$y = xy' + \alpha y' + \beta, \quad \text{ou} \quad (x + \alpha)y' - y + \beta = 0,$$

dont les solutions sont les fonctions $x \rightsquigarrow y(x) = \lambda(x + \alpha) + \beta$, qui pivotent autour du point $A(x = -\alpha, y = \beta)$, or le paramétrage 7.20.1 donne alors $x = -\alpha$, $y = \beta$, donc Γ est réduit au point A , qui n'est pas une enveloppe au sens de la définition 7.2, mais il n'est pas rare qu'un point apparaisse comme une « enveloppe » d'une famille de droites.

2. Trajectoires orthogonales à une famille de courbes planes

Dans la suite de ce chapitre, je me contenterai de donner des indications pour traiter un problème posé, tout simplement parce qu'il devient très

difficile de formuler des conditions théoriques d'existence des notions introduites.

Commençons d'abord par parler d'une *famille de courbes*, et vous aller comprendre en quoi c'est flou.

On peut dire que cette notion se rencontre lorsque l'on considère les courbes intégrales d'une équation différentielle $f(x, y, y') = 0$, voir tome 3, chapitre 18 où, au paragraphe 7, on a vu que, suivant la nature de l'équation, (incomplète, homogène, à variables séparées...) on obtenait des courbes intégrales (C_k) , k étant un paramètre réel, qui pouvaient être paramétrées, ou en équation implicite.

On peut donc avoir ces courbes par une équation du type $g(x, y, k) = 0$, ou des paramétrisations en $x = \varphi(t, k)$; $y = \Psi(t, k)$, chaque valeur de k dans une partie K de \mathbb{R} fournissant une courbe C_k .

DÉFINITION 7.21. — *Soit une famille de courbes $(C_k)_{k \in K}$, courbes intégrales d'une équation différentielle $f(x, y, y') = 0$. On appelle trajectoires orthogonales aux $(C_k)_{k \in K}$ toute famille de courbes $(\Gamma_l)_{l \in L}$, telle que, en chaque point m d'une Γ_l , il passe une courbe C_k , les tangentes en m à C_k et Γ_l étant orthogonales.*

Que peut-on dire de précis? On suppose f de classe suffisante. Si on suppose que $f(a, b, y'_0) = 0$, avec $\frac{\partial f}{\partial y'}(a, b, y'_0) \neq 0$, par le Théorème des fonctions implicites, (Tome 3, Théorème 17.10), il existera un voisinage W de (a, b, y'_0) dans \mathbb{R}^3 , un voisinage V de (a, b) dans \mathbb{R}^2 et une fonction φ de classe C^1 , (si f de classe C^1), telle que :

$$((x, y, y') \in W \text{ et } f(x, y, y') = 0) \Leftrightarrow ((x, y) \in V \text{ et } y' = \varphi(x, y)).$$

On se restreint donc aux «portions des courbes C_k » telles que (x, y, y') soit dans W , qui vérifient donc l'équation différentielle :

$$7.22. \quad y' = \varphi(x, y).$$

Si on considère les courbes intégrales de l'équation :

$$7.23 \quad y' = -\frac{1}{\varphi(x, y)},$$

en se restreignant au besoin sur Ω ouvert de V sur lequel $\varphi(x, y) \neq 0$, on pourra dire qu'en chaque point Ω , il passe une et une seule courbe intégrale de chaque équation différentielle 7.22 et 7.23 car φ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont alors de classe C^1 et le Théorème de Cauchy Lipschitz s'applique (Tome 3, Théorème

18.12 et Corollaire 18.17), et de plus en m_0 de coordonnées (x_0, y_0) dans Ω , les pentes des tangentes aux courbes C_k et Γ_l étant respectivement $\varphi(x_0, y_0)$ et $-\frac{1}{\varphi(x_0, y_0)}$, de produit -1 , ces tangentes sont orthogonales.

On a donc, avec des conditions restrictives, résolu localement le problème posé.

On ne peut guère en dire plus de façon générale. En particulier, en dehors des ouverts de \mathbb{R}^2 sur lesquels, par chaque point $m_0(x_0, y_0)$ il ne passe qu'une courbe intégrale de l'équation de départ $f(x, y, y') = 0$, il peut passer par m_1 de coordonnées (x_1, y_1) plusieurs courbes C_k de tangentes différentes. Chacune d'elle a-t-elle « sa trajectoire orthogonale », seule une étude précise peut donner la réponse, dans chaque cas particulier. De même si dans 7.22, on a un point m_0 de coordonnées (x_0, y_0) tel que $y'_0 = \varphi(x_0, y_0) = 0$, y a-t-il une courbe intégrale de 7.23 qui « arrive » en m_0 , avec une dérivée de limite infinie, là aussi c'est à examiner sur chaque cas particulier.

7.24. DÉMARCHE PRATIQUE

Si les (C_k) sont les courbes intégrales de l'équation différentielle $f(x, y, y') = 0$, on considère l'équation différentielle :

$g(x, y, y') = f(x, y, -\frac{1}{y'}) = 0$, qui admet des courbes intégrales (Γ_l) .

Mais ce n'est que dans le cas où (a, b, y'_0) de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$ est tel que :

$\frac{\partial f}{\partial y'_0}(a, b, y'_0) \neq 0$, que la seule (C_k) vérifiant $y(a) = b$ et $y'(a) = y'_0$, est orthogonale en $m_0(a, b)$ à la seule courbe Γ_l d'équation $z = h(x)$, z solution de $g(x, z, z') = 0$ de donnée initiale (a, b) , car localement, $f(x, y, y') = 0$ équivaut à $y' = \varphi(x, y)$, donc l'équation différentielle vérifiée par g s'écrit $z' = -\frac{1}{\varphi(x, y)}$ et en particulier $z'(a) = -\frac{1}{y'(a)}$.

ÉTUDE EN POLAIRE

Si on suppose (C) connue par une équation polaire $r = \varphi(\theta)$, et (Γ) par une équation $\rho = \Psi(\theta)$, en appelant V l'angle de $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et de $\frac{d\vec{m}}{d\theta} = r' \vec{u} + r \vec{v}$, avec $\vec{v} = \frac{d\vec{u}}{d\theta}$ déduit de \vec{u} par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, (voir figure 7.24), on a $\text{tg} V = \frac{r}{r'}$.

L'arc (Γ) sera une trajectoire orthogonale à C , si l'angle W , (pour Γ) est $V + \frac{\pi}{2}$, d'où $\text{tg} W = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{r'}{r}$, ou encore, avec $\rho(\theta) = r(\theta)$, si $\rho'(\theta) =$

$-\frac{r^2}{r'}$, donc si les (C_k) sont courbes intégrales de l'équation différentielle $f(\theta, r, r') = 0$, on considère l'équation différentielle $f\left(\theta, r, -\frac{r^2}{r'}\right) = 0$ pour étudier les trajectoires orthogonales des C_k . Mais là aussi, une étude rigoureuse des conditions d'existence s'impose.

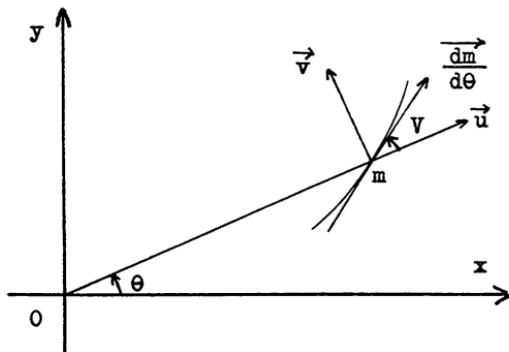


Fig. 7.24

REMARQUE 7.25. — La rédaction de ce paragraphe laisse à désirer. En fait c'est parce qu'on considère pour l'instant les courbes globalement, voulant qu'elles soient définies par une paramétrisation, ou par une équation implicite, ou cartésienne, alors qu'il s'agit de notions locales et qu'une même courbe peut être paramétrée par endroits, en équation implicite ailleurs ... et que ce qui importe, c'est de définir les changements de mode de représentation d'une partie de la courbe. C'est l'étude des variétés qui apporte une réponse à cette question; (voir chapitre IX, paragraphe 7).

REMARQUE 7.26. — Dans la définition 7.21, on part d'une famille de courbes C_k qui sont les courbes intégrales d'une équation différentielle.

Indiquons comment, parmi de courbes (C_k) dépendant d'un paramètre on peut retrouver une équation différentielle ayant les C_k parmi ses courbes intégrales.

7.26.1. PREMIER CAS : on part de courbes (C_k) d'équations implicites $F(x, y, k) = 0$, F étant supposée de classe C^1 en x, y, k , sur Ω ouvert, avec $\frac{\partial F}{\partial x}$ ou $\frac{\partial F}{\partial y}$ non nulle.

On obtient donc localement y fonction de x ou x fonction de y ; par exemple y fonction de x , avec $\frac{dy}{dx}$ vérifiant l'égalité $F'_x(x, y, k) + F'_y(x, y, k) \frac{dy}{dx} = 0$.

Mais alors, en «éliminant» k entre :

$$\textcircled{1} \quad F(x, y, k) = 0 \quad \text{et}$$

$$\textcircled{2} \quad F'_x(x, y, k) + y' F'_y(x, y, k) = 0,$$

on obtient une relation $G(x, y, y')$ liant x, y fonction de x et la dérivée y' , pour la portion de C_k obtenue sous la forme y fonction de x .

Mais il faut comprendre que l'équation $G(x, y, y') = 0$, peut avoir d'autres courbes que les (C_k) parmi ses solutions.

Qu'appelle-t-on éliminer k ?

Si par exemple dans $\textcircled{1}$, on a $\frac{\partial F}{\partial k}(x, y, k) \neq 0$, localement $\textcircled{1}$ équivaut à une expression du type $k = \varphi(x, y)$ et alors $\textcircled{2}$ est «localement» équivalente à :

$$F'_x(x, y, \varphi(x, y)) + y' F'_y(x, y, \varphi(x, y)) = G(x, y, y') = 0.$$

On procède de même, si dans $\textcircled{2}$ mis sous forme $H(x, y, y', k) = 0$, on est au voisinage d'un point où $\frac{\partial H}{\partial k}(x, y, y', k) \neq 0$, alors localement $\textcircled{2}$ équivaut à une relation du type $k = \Psi(x, y, y')$ que l'on injecte dans $\textcircled{1}$. Mais tout ceci reste théorique, pour obtenir $G(x, y, y') = 0$ il faut *vraiment* calculer k ...

7.26.2. DEUXIÈME CAS : on part d'arcs C_k d'équation polaire sous la forme :

$$\textcircled{1} \quad F(r, \theta, k) = 0,$$

F étant encore supposée définie sur un ouvert de \mathbb{R}^3 , à valeurs dans \mathbb{R} , de classe C^1 .

Là encore, au voisinage d'un point où $\frac{\partial F}{\partial r} \neq 0$, pour k fixé, (C_k) aura une équation du type $r = \varphi(\theta)$, dérivable et $\frac{dr}{d\theta} = \varphi'(\theta) = r'$ sera telle que :

$$\textcircled{2} \quad r' F'_r(r, \theta, k) + F'_\theta(r, \theta, k) = 0,$$

et en éliminant k entre $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$ on obtient une équation différentielle $G(r, \theta, r') = 0$ ayant les morceaux considérés des C_k parmi ses courbes intégrales. En toute rigueur, comme en 7.26.1, il faudrait l'intégrer pour voir ce que l'on a en plus!

REMARQUE 7.27. — Si on se donne des arcs paramétrés (C_λ) par une paramétrisation du type $x = f(t, \lambda)$ et $y = g(t, \lambda)$, (t, λ) dans Ω ouvert de \mathbb{R}^2 , f et g étant de classe C^1 , on peut avoir une autre démarche. En effet si, pour λ fixé, $(f'_t)^2 + (g'_t)^2 \neq 0$, le vecteur tangent à C_λ en $m(t)$ est $f'_t(t, \lambda) \vec{i} + g'_t(t, \lambda) \vec{j}$, (\vec{i}, \vec{j}) base orthonormée de \mathbb{R}^2 , et si on peut trouver λ fonction dérivable de t , telle que le vecteur $(f'_t + f'_\lambda \lambda') \vec{i} + (g'_t + g'_\lambda \lambda') \vec{j}$ soit non nul, et orthogonal au précédent, l'arc paramétré $\Gamma : t \rightsquigarrow f(t, \lambda(t)) \vec{i} + g(t, \lambda(t)) \vec{j}$ sera trajectoire orthogonale aux (C_λ) .

La condition d'orthogonalité s'écrit :

$$7.27.1. \quad (f'_t)^2 + (g'_t)^2 + \lambda' (f'_t f'_\lambda + g'_t g'_\lambda) = 0,$$

et si les dieux sont avec vous, et si le ciel ne vous tombe pas sur la tête, (par Toutatis, Zeus et Zorn réunis), cette équation 7.27.1. vous donnera des relations du type $\lambda = h(t, \mu)$, et il restera à voir si toutes les courbes Γ_μ obtenues en paramétrant par $x = f(t, h(t, \mu))$ et $y = g(t, h(t, \mu))$ sont les trajectoires orthogonales cherchées.

Un mot pour terminer, sur les trajectoires isogonales.

DÉFINITION 7.28. — Soit une famille de courbes $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, Λ intervalle de \mathbb{R} , on appelle trajectoires isogonales d'angle α , toute famille de courbes $(\Gamma_\mu)_{\mu \in M}$ du plan affine des (C_λ) telles qu'en tout m de $C_\lambda \cap \Gamma_\mu$, les tangentes D_λ et Δ_μ à ces deux courbes soient telles que l'angle de droites, orienté, $(D_\lambda, \Delta_\mu) = \alpha$.

Sans entrer dans des difficultés existentielles, si C_λ admet une équation cartésienne y fonction de x et Γ_μ une équation y_1 fonction de x , avec y et y_1 dérivables, si φ est l'angle des droites (x', x) et D_λ et φ_1 celui de (x', x) et Δ_μ , on a $\text{tg } \varphi = y'$ et $\text{tg } \varphi_1 = y'_1$, (si ces tangentes existent, je sais, je sais ...) mais alors la condition, $\varphi_1 = \varphi + \alpha$ ou $\varphi = \varphi_1 - \alpha$ se traduit par

$$y' = \text{tg}(\varphi_1 - \alpha) = \frac{\text{tg } \varphi_1 - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \alpha \text{tg } \varphi_1} = \frac{y'_1 - \text{tg } \alpha}{1 + y'_1 \text{tg } \alpha}.$$

Donc si $f(x, y, y') = 0$ est une équation différentielle des $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, (ne me demandez pas d'où elle vient), c'est parmi les solutions de l'équation différentielle :

$$f\left(x, y, \frac{y' - \text{tg } \alpha}{1 + y' \text{tg } \alpha}\right) = 0,$$

qu'il faudra chercher les trajectoires isogonales d'angle α .

De même, en polaires, en reprenant les notations de la figure 7.24, en notant V et V_1 les angles des tangentes D_λ et Δ_μ à C_λ et Γ_μ , avec la droite (O, m) la relation $V = V_1 - \alpha$ se traduira par :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} V &= \frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{tg} V_1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} V_1 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\frac{r_1}{r'_1} - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{r_1}{r'_1} \operatorname{tg} \alpha} \\ &= \frac{r_1 - r'_1 \operatorname{tg} \alpha}{r'_1 + r_1 \operatorname{tg} \alpha}, \end{aligned}$$

d'où, compte tenu de $r_1 = r$, (en m commun à C_λ et Γ_μ) :

$$r' = \frac{r(r'_1 + r \operatorname{tg} \alpha)}{r - r'_1 \operatorname{tg} \alpha},$$

et si $g(\theta, r, r') = 0$ est l'équation différentielle des (C_λ) , on considère l'équation différentielle :

$$g\left(\theta, r, \frac{r(r' + r \operatorname{tg} \alpha)}{r - r' \operatorname{tg} \alpha}\right) = 0,$$

pour les trajectoires isogonales.

Voici un exemple, (facile, évidemment), illustrant cette démarche.

EXEMPLE 7.29 — Trajectoires orthogonales aux cercles (C_λ) d'équation $x^2 + y^2 - \lambda x + a = 0$.

Les cercles, d'équation $\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^2}{4} - a$ existent si $|\lambda| \geq 2\sqrt{a}$, pour $a > 0$, et pour tout λ si $a \leq 0$.

Supposons $a > 0$. En dérivant l'équation des C_λ , on obtient la relation $2x + 2yy' - \lambda = 0$, d'où un calcul explicite, (ouf!) de λ que l'on remplace dans l'équation des cercles, et on a la relation $x^2 + y^2 - (2x + 2yy')x + a = 0$, soit encore :

$$\textcircled{1} \quad 2xyy' + x^2 - y^2 - a = 0, \text{ liant } x, y \text{ et } y' \text{ le long des } C_\lambda.$$

On peut vérifier que, pour $x \neq 0$, donc sur $] -\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, $\textcircled{1}$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre en y^2 , on a :

$$x(y^2)' - y^2 = a - x^2.$$

L'équation sans second membre a pour solution $y^2 = kx$, la méthode de variation des constantes donne :

$$x(k'x + k) - kx = a - x^2, \quad \text{soit } k' = \frac{a}{x^2} - 1,$$

donc $k(x) = -\frac{a}{x} - x + \lambda$, et (1) a pour solutions, (pour $x \neq 0$) des fonctions y telles que $y^2 = -a - x^2 + \lambda x$, on retombe pile sur les C_λ ! Vous ne pensez pas que j'allais me compliquer l'existence quand même !

(Au fait, sur C_λ avec $a > 0$, $x = 0$ conduit à $y^2 + a = 0$, c'est exclu.)

Cette vérification étant faite, on considère l'équation différentielle :

$$(2) \quad 2xy - y'(x^2 - y^2 - a) = 0,$$

(obtenue en remplaçant y' par $-\frac{1}{y'}$ dans (1)) qui aura, parmi ses solutions, les trajectoires orthogonales des (C_λ) .

Elle s'écrit encore :

$$2yx \frac{dx}{dy} + y^2 - x^2 + a = 0,$$

et elle est alors linéaire du premier ordre en x^2 fonction de y . L'équation sans second membre, $y \frac{d(x^2)}{dy} - x^2 = 0$ a pour solution, (sur \mathbb{R}^*) les fonctions, (de y), $x^2 = ky$, qui conduisent, pour l'équation avec second membre, à $y(k'y + k) - ky = -y^2 - a$, soit à $k'y^2 = -y^2 - a$, d'où $k(y) = -y + \frac{a}{y} + \mu$, et finalement, on obtient les courbes Γ_μ d'équation $x^2 = y(-y + \frac{a}{y} + \mu)$, ou $x^2 + y^2 - \mu y - a = 0$.

On constate alors que les Γ_μ sont les cercles du faisceau à points de base $A : (x = -\sqrt{a}, y = 0)$ et $B : (x = \sqrt{a}, y = 0)$, alors que les C_λ étaient les cercles du faisceau à point limites A et B : ce sont des cercles orthogonaux, (figure 7.29), voir Tome 4, 5.57 et 5.59 pour les faisceaux de cercles.

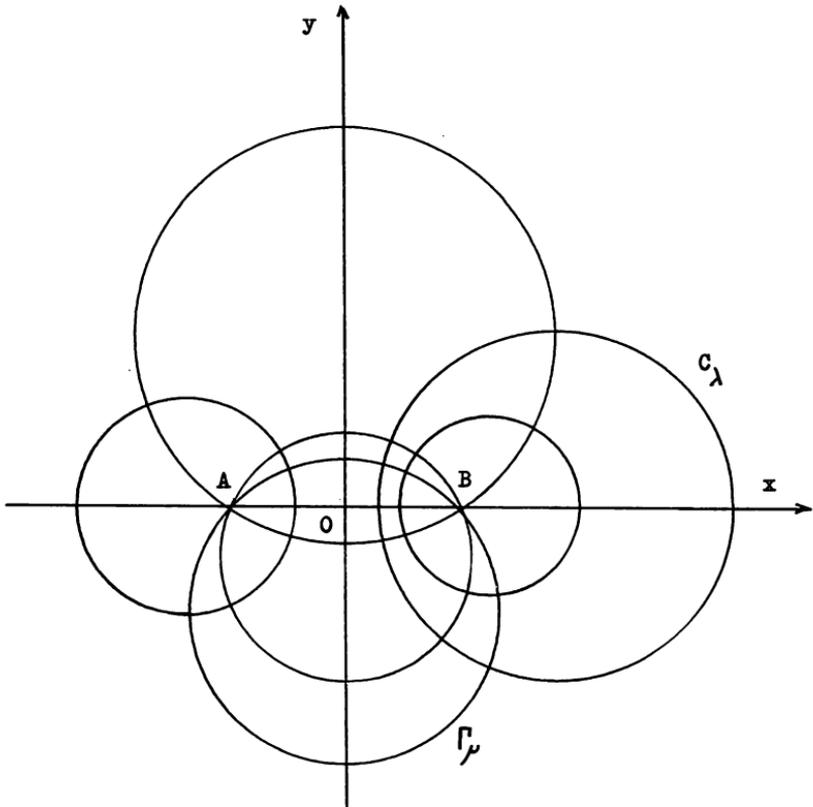


Fig. 7.29

3. Détermination d'une courbe gauche par ses plans osculateurs.

Trouver l'enveloppe \mathcal{C} d'une famille de droites $(D(t))_{t \in I}$, I intervalle de \mathbb{R} , c'est se donner \mathcal{C} par la famille de ses tangentes, c'est-à-dire de ses sécantes osculatrices. Peut-on déplacer le problème « d'un cran » et se donner une courbe gauche Γ par ses plans osculateurs $(P(t))_{t \in I}$? Supposons donc donnée, dans \mathcal{A} espace affine euclidien de dimension trois une famille de plans $(P(t))_{t \in I}$, d'équations :

7.30.
$$A(t) \cdot \overrightarrow{Om} = b(t),$$

les fonctions $t \rightsquigarrow A(t)$ et $t \rightsquigarrow b(t)$ étant de classe C^4 de I intervalle de \mathbb{R} dans E , (direction de \mathcal{A}) et \mathbb{R} respectivement.

On suppose en outre $A(t) \neq 0$ pour tout t , (c'est la moindre des choses pour avoir un plan). Nous allons étudier à quelles conditions on peut trouver un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$ ayant les $P(t)$ pour plans osculateurs.

On veut que $m(t)$, défini par $\overrightarrow{Om(t)} = f(t)$ soit dans $P(t)$, donc on doit avoir :

$$\textcircled{1} : \quad f(t) \cdot A(t) = b(t).$$

En supposant l'arc bi-régulier, son plan osculateur aura pour direction vect($f'(t), f''(t)$), donc ce sera $P(t)$ si et seulement si on a en outre les égalités :

$$\textcircled{2} : \quad f'(t) \cdot A(t) = 0 \quad \text{et}$$

$$\textcircled{3} : \quad f''(t) \cdot A(t) = 0.$$

On doit donc résoudre ce système $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ qui semble nous conduire à des équations différentielles, mais il n'en est rien. En dérivant $\textcircled{2}$ on obtient :

$$\textcircled{2}' : \quad f' \cdot A' + f'' \cdot A = 0,$$

et comme $\textcircled{2}' - \textcircled{3}$ est la relation $\textcircled{4} : f' \cdot A' = 0$, on a :

$$(\textcircled{2} \text{ et } \textcircled{3}) \Leftrightarrow (\textcircled{2} \text{ et } \textcircled{4}).$$

Mais alors, en dérivant $\textcircled{1}$, on obtient la relation :

$$\textcircled{1}' : \quad f' \cdot A + f \cdot A' = b'.$$

Si au départ on a $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ et $\textcircled{3}$, cela implique $\textcircled{1}'$, d'où aussi $\textcircled{1}' - \textcircled{2}$ notée

$$\textcircled{5} : \quad f \cdot A' = b'.$$

En dérivant $\textcircled{5}$, on obtient :

$$\textcircled{6} : \quad f' \cdot A' + f \cdot A'' = b'',$$

ce qui compte tenu de $\textcircled{4}$, conséquence de $\textcircled{2}$ et $\textcircled{3}$, conduit à la relation

$$\textcircled{7} : \quad f \cdot A'' = b''.$$

Finalement le système $(\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3})$ implique le système $(\textcircled{1}, \textcircled{5}, \textcircled{7})$.

Réciproquement, ayant $\textcircled{1}, \textcircled{5}$ et $\textcircled{7}$, on a $\textcircled{1}'$, (en dérivant $\textcircled{1}$), donc aussi $\textcircled{1}' - \textcircled{5} = \textcircled{2}$.

Par dérivation (5) donne (6), et (6) - (7) donne $f' \cdot A' = 0$ soit (4). Mais alors, (2) obtenue en dérivant (2), (un peu de patience, on arrive) donne (2') - (4) soit encore $f'' \cdot A = 0$, soit (3), et finalement le système ((1), (5), (7)), implique les conditions (1), (2) et (3).

Or ce système ((1), (5), (7)) est en fait un système de trois équations à trois inconnues, les composantes de $f(t)$ dans une base orthonormée de $E = \mathbb{R}^3$, système de rang celui des vecteurs $A(t)$, $A'(t)$, $A''(t)$.

Si on suppose ce système de rang 3, on peut trouver une fonction vectorielle $f(t)$ solution, d'où un arc paramétré $\Gamma : (I, f)$, mais il reste à vérifier si $f'(t) \wedge f''(t)$ est non nul, pour que l'arc Γ , de classe C^2 soit birégulier.

THÉORÈME 7.31. — *Soit une famille de plans $(P(t))_{t \in I}$, I intervalle de \mathbb{R} , de l'espace affine euclidien \mathcal{A} de dimensions trois, d'équations $A(t) \cdot \overrightarrow{Om} = b(t)$, les fonctions A et b étant de classe C^4 au moins. Alors, si le produit mixte $(A(t), A'(t), A''(t))$ est non nul pour tout t de I , l'arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, de classe C^2 , avec f solution du système :*

$$\begin{cases} f(t) \cdot A(t) = b(t), \\ f(t) \cdot A'(t) = b'(t), \\ f(t) \cdot A''(t) = b''(t), \end{cases}$$

admet les plans $P(t)$ pour plans osculateurs en tout point $m(t)$ tel que $f'(t) \wedge f''(t) \neq 0$.

C'est le résultat établi par notre étude. ■

On peut remarquer qu'il généralise le Théorème 7.3 sur les enveloppes des courbes planes, car dans ce Théorème 7.3, en notant $u(t) \cdot \overrightarrow{Om} = b(t)$ l'équation de $D(t)$, on trouvait l'enveloppe $\Gamma : (I, f)$, en résolvant le système :

$$\begin{cases} f(t) \cdot u(t) = b(t) \\ f(t) \cdot u'(t) = b'(t), \end{cases}$$

avec une condition traduisant l'indépendance des vecteurs $u(t)$ et $u'(t)$, et on concluait pour les points non stationnaires de Γ , c'est-à-dire les points réguliers. Ici nous concluons pour les points bi-réguliers.

On comprend que l'on pourrait généraliser cette présentation, et déterminer ainsi un arc de \mathcal{A} affine euclidien de dimension n , par la donnée de ses $n - 1$ espaces osculateurs, qui seraient des hyperplans $(H(t))_{t \in I}$ d'équation $A(t) \cdot \overrightarrow{Om} = b(t)$.

A condition que le produit mixte $(A(t), A'(t), \dots, A^{(n-1)}(t))$ soit non nul, (A et b étant supposées de classe C^{2n-2}) on trouverait un arc paramétré $\Gamma : (I, f)$, la fonction f , à valeurs vectorielles étant solution du système :

$$\begin{cases} f(t) \cdot A(t) = b(t), \\ f(t) \cdot A'(t) = b'(t), \\ \dots\dots\dots \\ f(t) \cdot A^{(n-1)}(t) = b^{(n-1)}(t), \end{cases}$$

donc f étant de classe $2n - 2 - (n - 1) = n - 1$, et en tout point $n - 1$. régulier de Γ , $H(t)$ serait bien hyperplan osculateur à Γ .

Avec cette généralisation se termine ce chapitre consacré aux enveloppes de droites.

EXERCICES

1. Enveloppe des droites sur lesquelles deux cercles donnés découpent des segments de même longueur.
2. Enveloppe de la corde Δ interceptée sur une ellipse E par un angle de mesure constante, 2α , de sommet l'un des foyers F de l'ellipse.
3. Soit un rectangle $ABCD$. Enveloppe des droites Δ coupant le rectangle en deux régions d'aires respectives kS et $(1-k)S$, avec k fixé dans $]0; \frac{1}{2}[$ et S aire du rectangle.
4. Enveloppe des cordes d'une parabole, telles que l'aire du domaine limité par la corde et la parabole soit constante.
5. Soit la parabole P d'équation $y^2 = 2px$. Le cercle osculateur en M à la parabole P , recoupe en général la parabole en un autre point N . Enveloppe des cordes MN .
6. Soient A et F deux points distincts du plan. Déterminer le lieu des centres de courbures en A des paraboles de foyer F , passant par A . Quelle est l'enveloppe des directrices de ces paraboles?
7. Soit la droite D_θ du plan affine euclidien, d'équation $x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0$, avec p de classe C^2 sur un intervalle. Soit Γ l'enveloppe de D_θ , M le point caractéristique de D_θ , N l'intersection de Ox et de D_θ , et P le point de la perpendiculaire en N à D_θ de même abscisse que M .
Soit C le centre de courbure de Γ en M , condition pour que O , P et C soient alignés.
8. Dans un repère Oxy du plan affine, soient A et B les points de coordonnées $(1,0)$ et $(0,1)$. Les points P et Q varient sur $x'x$ et $y'y$ respectivement, de façon que $\overline{AP} + \overline{BQ} = 1$. Enveloppe de la droite PQ .
9. Soit la courbe plane Γ paramétrée par $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$.
Montrer que pour tout t d'un ensemble à préciser, on peut mener par

$M(t)$ deux tangentes en $M(t_1)$ et $M(t_2)$ à Γ . Enveloppe de la droite $M(t_1)M(t_2)$.

10. Soient A et B deux points d'un plan affine euclidien tels que $AB = 2a$. Trouver l'enveloppe des droites Δ telles que $d(A, \Delta)^2 - d(B, \Delta)^2 = 4b^2$.
11. Soit P un point du plan rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . Lieu des foyers F des paraboles dont l'axe passe par P et qui sont tangentes en O à la droite (O, \vec{i}) .
Enveloppe des tangentes aux sommets de ces paraboles.

SOLUTIONS

1. Si les cercles C et C' ont pour centres A et A' et pour rayons R et R' , on prendra un repère d'origine le milieu O du segment AA' , d'axe Ox portant A et A' . D'abord $A = A'$ et $R \neq R'$ est exclu, les cordes n'étant pas de même longueur, et $A = A'$ avec $R = R'$ conduirait à des cordes de mêmes longueurs pour toute sécante, (car confondues) c'est sans intérêt.

On suppose donc $A \neq A'$, prenons $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$. Si la droite D_θ a pour équation normale $x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0$, la distance de A à D_θ est d telle que $d^2 = (a \cos \theta - p(\theta))^2$, et si $d^2 < R^2$, D_θ coupe C suivant une corde MN

telle que, (un peu de Pythagore) $\frac{MN^2}{4} + d^2 = R^2$.

On doit donc traduire l'égalité de $R^2 - d^2$ et de $R'^2 - d'^2$, avec les conditions d'existence des cordes.

Ceci donne :

$$\begin{cases} (a \cos \theta - p(\theta))^2 < R^2; & (-a \cos \theta - p(\theta))^2 < R'^2; \\ R^2 - (a \cos \theta - p(\theta))^2 = R'^2 - (a \cos \theta + p(\theta))^2. \end{cases}$$

L'égalité donne $4a \cos \theta p(\theta) = R'^2 - R^2$, qui donnera $p(\theta)$ pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ (2π), or,

si $\theta = \frac{\pi}{2}$, D_θ est parallèle à Ox , donc si $R \neq R'$, les cordes sont de longueurs différentes : p n'existe pas; et si $R = R'$, les deux cercles sont symétriques par rapport à Oy : les cordes sont égales.

Avec $p(\theta) = \frac{R'^2 - R^2}{4a \cos \theta}$, l'équation normale de D_θ est :

$$\begin{aligned} D_\theta : & x \cos \theta + y \sin \theta + \frac{R^2 - R'^2}{4a \cos \theta} = 0 \quad \text{d'où} \\ D'_\theta : & -x \sin \theta + y \cos \theta + \frac{(R^2 - R'^2) \sin \theta}{4a \cos^2 \theta} = 0, \end{aligned}$$

ce qui conduit en résolvant, à :

$$x = \frac{R'^2 - R^2}{4a} (1 - \operatorname{tg}^2 \theta) \quad \text{et} \quad y = \frac{R'^2 - R^2}{4a} (2 \operatorname{tg} \theta),$$

ce qui est une paramétrisation de l'enveloppe, associée à θ tel que :

$$(a \cos \theta - p(\theta))^2 = \left(a \cos \theta - \frac{R'^2 - R^2}{4a \cos \theta} \right)^2 < R^2$$

et $(a \cos \theta + p(\theta))^2 = \left(a \cos \theta + \frac{R'^2 - R^2}{4a \cos \theta} \right)^2 < R'^2$. On obtient un arc de parabole.

2. Si on prend une équation polaire de foyer F pour l'ellipse, les points M et M' d'angles polaires θ et θ' de l'ellipse correspondront à une corde Δ si et seulement

si $\theta' = \theta \pm 2\alpha$, et même $\theta' = \theta + 2\alpha$ vu le rôle symétrique de M et M' pour définir la corde Δ ; d'où une équation de Δ en fonction d'un paramètre. Allons y. Equation polaire de l'ellipse : $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, avec $0 < e < 1$, e excentricité. Les coordonnées de $M(\theta)$ et de $M(\theta + 2\alpha)$ sont $(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta)$ et $(r(\theta + 2\alpha) \cos(\theta + 2\alpha), r(\theta + 2\alpha) \sin(\theta + 2\alpha))$, d'où, sous forme de déterminant, l'équation de la corde $\Delta(\theta)$:

$$\Delta(\theta) : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p \cos \theta & p \sin \theta & 1 + e \cos \theta \\ p \cos(\theta + 2\alpha) & p \sin(\theta + 2\alpha) & 1 + e \cos(\theta + 2\alpha) \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore :

$$\begin{aligned} x[p(\sin \theta - \sin(\theta + 2\alpha)) + pe(\sin \theta \cos(\theta + 2\alpha) - \cos \theta \sin(\theta + 2\alpha))] \\ - y[p(\cos \theta - \cos(\theta + 2\alpha)) + pe(\cos \theta \cos(\theta + 2\alpha) - \cos \theta \cos(\theta + 2\alpha))] \\ + p^2(\cos \theta \sin(\theta + 2\alpha) - \sin \theta \cos(\theta + 2\alpha)) = 0, \end{aligned}$$

ce qui se réduit, après simplification par p , en :

$$x(-2 \sin \alpha \cos(\theta + \alpha) - e \sin 2\alpha) - y(-2 \sin(\theta + \alpha) \sin(-\alpha)) + p \sin 2\alpha = 0,$$

ou encore en :

$$-2 \sin \alpha [x \cos(\theta + \alpha) + e \cos \alpha] + y \sin(\theta + \alpha) - p \cos \alpha = 0.$$

Le cas $\alpha = 0(\pi)$ correspond à $M(\theta + 2\alpha) = M(\theta)$ en fait, la corde Δ n'existe pas, (à moins de prendre la tangente à l'ellipse, et dans ce cas l'enveloppe serait E). On a donc l'équation cherchée de la corde, que l'on peut dériver en θ . On a :

$$\begin{aligned} \Delta(\theta) : & x \cos(\theta + \alpha) + y \sin(\theta + \alpha) + xe \cos \alpha - p \cos \alpha = 0 \\ \Delta'(\theta) : & -x \sin(\theta + \alpha) + y \cos(\theta + \alpha) = 0, \end{aligned}$$

d'où un calcul de x et y , qui conduit à :

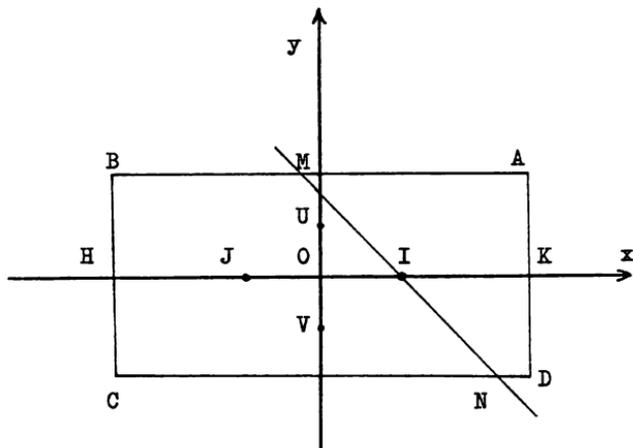
$$x = \frac{p \cos \alpha \cos(\theta + \alpha)}{1 + e \cos \alpha \cos(\theta + \alpha)} \quad \text{et} \quad y = \frac{p \cos \alpha \sin(\theta + \alpha)}{1 + e \cos \alpha \cos(\theta + \alpha)},$$

soit, en polaires, $\rho = \frac{p \cos \alpha}{1 + e \cos \alpha \cos \theta}$: on trouve une ellipse de foyer F' et d'excentricité $e \cos \alpha$. On peut remarquer que $\alpha = 0$ ou π redonne l'ellipse de départ.

3. On a deux cas de figure suivant que la droite Δ coupe deux côtés parallèles, ou deux côtés consécutifs du rectangle.

Prenons un repère orthonormé de centre le centre de symétrie du rectangle, tel que A ait pour coordonnées a et b , (positifs).

PREMIER CAS : Δ coupe les côtés AB et CD , (parallèles à Ox) en M et N . Si Δ coupe l'axe des x en I , les aires des trapèzes $MBCN$ et $MNDA$ sont



Exercice 7.3. Premier cas

respectivement $\frac{MB + CN}{2} \cdot BC$ et $\frac{AM + ND}{2} \cdot BC$, soit en fait $HI \cdot BC$ et $IK \cdot BC$, ou encore $2bHI$ et $2bKI$.

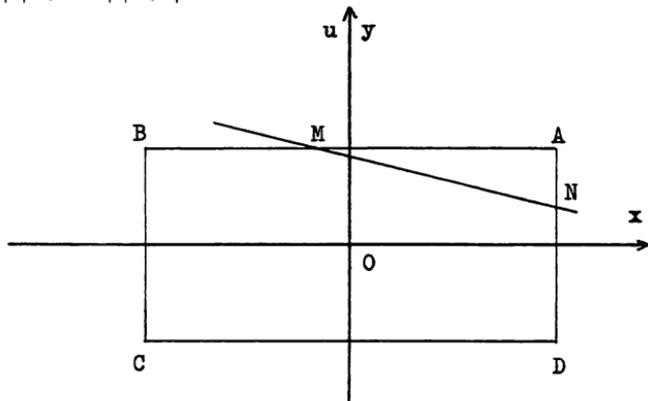
Ces aires seront égales à $4abk$ et $4ab(1 - k)$, (ou $4ab(1 - k)$ et $4abk$) si et seulement si $HI = 2ak$ ou $HI = 2a(1 - k)$.

Soient donc les deux points I et J sur Ox , symétriques par rapport à O , et tels que $HJ = 2ak$ et $HI = 2a(1 - k)$, les droites qui pivotent autour de I et J en rencontrant les deux côtés parallèles à Ox conviennent.

De même, les droites pivotant autour de U et V avec $U(0, (1 - 2k)b)$ et $V(0, (2k - 1)b)$ et qui rencontrent les deux côtés parallèles à Oy conviennent.

DEUXIÈME CAS : Δ coupe deux côtés consécutifs, par exemple AB et AD , en $M(s, b)$ et $N(a, t)$ respectivement.

On a $|s| \leq a$ et $|t| \leq b$.



Exercice 7.3. Deuxième cas

Aire du triangle AMN : $\frac{1}{2}(b-t)(a-s)$, la droite MN conviendra si $\frac{1}{2}(b-t)(a-s) = 4kab$, (c'est la plus petite aire) d'où une relation liant s et t .

L'équation de MN est, sous forme de déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ s & b & 1 \\ a & t & 1 \end{vmatrix} = x(b-t) + y(a-s) + st - ab = 0;$$

donc, compte tenu de $b-t = \frac{8kab}{a-s}$, ($s = a$ est exclu car M en A donnerait une aire nulle), l'équation s'écrit encore :

$$D(s) : \frac{8kab}{a-s}x + y(a-s) + s\left(b - \frac{8kab}{a-s}\right) - ab = 0,$$

équation qui s'ordonne en s , après multiplication par $a-s$, en :

$$D(s) : s^2(y-b) + s(2a(b-y) - 8kab) + a^2(y-b) + 8kabx = 0.$$

Dériver en s , ce trinôme du second degré, et dire que $D(s) = 0$ et $D'(s) = 0$, c'est équivalent à dire que le trinôme a une racine double, d'où une relation implicite liant x et y , qui s'écrit :

$$(a(b-y) - 4kab)^2 - (y-b)(a^2(y-b) + 8kabx) = 0,$$

soit $-8kab(ab - ay + xy - bx - 2kab) = 0$, soit $(x-a)(y-b) = 2kab$: on a un arc d'hyperbole. Pour le limiter, il faut savoir entre quelles limites varie x ou y , donc en fait calculer s . Je ne vous ai rien fait gagner!

$$D'(s) : 2s(y-b) + 2a(b-y) - 8kab = 0,$$

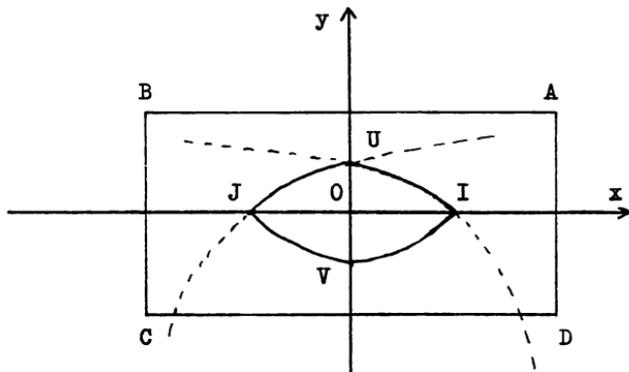
donc on a :

$$2(s-a)(y-b) = 8kab \text{ d'où } y-b = \frac{4kab}{s-a},$$

et alors :

$$x-a = \frac{2kab}{y-b} = \frac{s-a}{2}.$$

Comme $s \in [-a; a]$, $x-a \in [-a; 0[$ donc $x \in [0, a[$. Mais on a également $s-a = \frac{-8kab}{b-t}$ donc $y-b = \frac{t-b}{2}$, avec en fait $t \in [-b, b[$, d'où $y-b \in [-b, 0[$, donc $y \in [0, b]$: on ne doit garder de l'hyperbole que l'arc tel que $0 \leq x < a$ et $0 \leq y < b$. Les choses sont bien faites car pour $x = 0$ on a $y = b - 2kb$: c'est le point U déjà trouvé, et si $y = 0$, $x = a - 2ka$: c'est le point I du premier cas. l'enveloppe est donc formée de quatre arcs d'hyperboles, joignant I, U, J, V .



Exercice 7.3.

4. Prenons un repère orthonormé tel que la parabole ait pour équation $y = \alpha x^2$. Une corde $M'M''$ passant par $M'(x', \alpha x'^2)$ et $M''(x'', \alpha x''^2)$ sur la parabole, avec $x' < x''$, détermine avec la parabole, un domaine d'aire :

$$S = \frac{1}{2}(x'' - x')\alpha(x'^2 + x''^2) - \int_{x'}^{x''} \alpha t^2 dt,$$

(aire du trapèze – aire limitée par $x'x$ et la parabole), soit :

$$S = \frac{\alpha}{2}(x'' - x')(x'^2 + x''^2) - \frac{\alpha}{3}(x'' - x')(x''^2 + x'x'' + x'^2).$$

C'est encore :

$$S = \frac{\alpha}{6}(x'' - x')(x'^2 + x''^2 - 2x'x'') = \frac{\alpha}{6}(x'' - x')^3.$$

Si on impose la condition S constante, on a donc $x'' - x' = \left(\frac{6S}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$. Posons

$\beta = \left(\frac{6S}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}$, les points M' et M'' ont alors des coordonnées du type $(t, \alpha t^2)$ et $(t + \beta, \alpha(t + \beta)^2)$, d'où une équation $D(t)$ de la corde MN :

$$D(t) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ t & \alpha t^2 & 1 \\ t + \beta & \alpha(t + \beta)^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

soit encore :

$$D(t) = \alpha x(-\beta^2 - 2\beta t) + \beta y + \alpha t((t + \beta)^2 - t(t + \beta))$$

d'où, en simplifiant par $-\beta$,

$$D(t) : \alpha(\beta + 2t)x - y - \alpha t^2 - \alpha t\beta = 0.$$

On dérive : $D'(t) : 2\alpha x - 2\alpha t - \alpha\beta = 0$,

d'où $x = t + \frac{\beta}{2}$ et $y = \alpha(\beta + 2t) \left(t + \frac{\beta}{2} \right) - \alpha t(t + \beta)$,

ce qui est une paramétrisation de l'enveloppe, avec t dans \mathbb{R} . On peut éliminer $t = x - \frac{\beta}{2}$, on a $y = \alpha(2x)x - \alpha \left(x - \frac{\beta}{2} \right) \left(x + \frac{\beta}{2} \right)$ soit :

$$y = 2\alpha x^2 - \alpha \left(x^2 - \frac{\beta^2}{4} \right) = \alpha x^2 + \alpha \frac{\beta^2}{4} :$$

l'enveloppe est une parabole déduite de la précédente par une translation parallèlement à Oy .

5. La parabole se paramètre en $x = \frac{t^2}{2p}$, $y = t$. En M de paramètre t , le vecteur tangent est parallèle à $\frac{d\vec{M}}{dt}$ de composante $\left(\frac{t}{p}, 1 \right)$. On a donc, avec $p > 0$,

$$\vec{T} = \frac{t}{(p^2 + t^2)^{1/2}} \vec{i} + \frac{p}{(p^2 + t^2)^{1/2}} \vec{j}$$

$$\text{et } \vec{N} = \frac{-p}{(p^2 + t^2)^{1/2}} \vec{i} + \frac{t}{(p^2 + t^2)^{1/2}} \vec{j}.$$

Le rayon de courbure, $\mathcal{R} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{y''x' - x''y'}$, (voir 6.115.1), vaut ici :

$$\mathcal{R} = \frac{\left(\frac{t^2 + p^2}{p^2} \right)^{3/2}}{-\frac{1}{p}} = -\frac{(t^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}, \text{ d'où les coordonnées du centre de}$$

courbure Ω en $M(t)$, point tel que $\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{OM}(t) + \mathcal{R}\vec{N}$: on a :

$$x = \frac{t^2}{2p} + \frac{t^2 + p^2}{p}, \quad y = t - \frac{t(t^2 + p^2)}{p^2},$$

soit encore : $x = p + \frac{3t^2}{2p}$ et $y = -\frac{t^3}{p^2}$.

Le cercle osculateur (C) en $M(t)$ a donc pour équation :

$$\left(x - p - \frac{3t^2}{2p} \right)^2 + \left(y + \frac{t^3}{p^2} \right)^2 = \frac{(t^2 + p^2)^3}{p^4}.$$

Si dans cette équation, on remplace x par $\frac{\theta^2}{2p}$ et y par θ , on obtient une équation du 4^{ième} degré en θ , correspondant aux paramètres des points d'intersection de la parabole P et du cercle (C) , équation ayant déjà t pour racine triple. Si t_0 est le paramètre du point N , le produit des racines sera particulier $t_0 t^3$. L'équation en θ s'écrit :

$$\left(\frac{\theta^2}{2p} - p - \frac{3t^2}{2p}\right)^2 + \left(\theta + \frac{t^3}{p^2}\right)^2 - \frac{(t^2 + p^2)^3}{p^4} = 0.$$

Le coefficient de θ^4 est $\frac{1}{4p^2}$, et le terme constant vaut :

$$\begin{aligned} & \frac{(2p^2 + 3t^2)^2}{4p^2} + \frac{t^6}{p^4} - \frac{t^6 + 3t^4 p^2 + 3t^2 p^4 + p^6}{p^4} \\ &= p^2 + 3t^2 + \frac{9t^4}{4p^2} - \frac{3t^4}{p^2} - 3t^2 - p^2 = -\frac{3t^4}{4p^2}, \end{aligned}$$

d'où un produit des racines qui vaut $-3t^4$, et l'égalité $t_0 t^3 = -3t^4$ qui conduit à $t_0 = -3t$ pour $t \neq 0$, (d'où le « en général » du texte : si $t = 0$, M est en O et on trouve comme équation en θ , $\frac{\theta^4}{4p^2} = 0$: contact d'ordre 4 et $N = M$).

la droite (M, N) existe pour $t \neq 0$ et a pour équation :

$$D(t) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \frac{t^2}{2p} & t & 1 \\ \frac{9t^2}{2p} & -3t & 1 \end{vmatrix} = 4tx + \frac{4t^2}{p}y - 6\frac{t^3}{p} = 0,$$

soit encore, comme $t \neq 0$, en simplifiant par $\frac{2t}{p}$:

$$D(t) : 2px + 2ty - 3t^2 = 0. \text{ On dérive :}$$

$$D'(t) : 2y - 6t = 0,$$

d'où $y = 3t$ et $2px = -3t^2$: l'enveloppe est la parabole d'équation $6px + y^2 = 0$, privée du point $(0, 0)$.

6. On prend un repère orthonormé d'origine F , le point A ayant pour coordonnées $(a, 0)$ avec $a > 0$. Soit D la directrice d'une parabole de foyer F , donnée par son équation d'Euler :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0.$$

Cette parabole passe par $A(a, 0)$ si et seulement si AF est égal à la distance de A à D soit si et seulement si $a = |a \cos \theta - p(\theta)|$ ce qui conduit à $p(\theta) = a(\cos \theta \pm 1)$.

En fait, quitte à changer θ en $\pi + \theta$, on peut imposer $p(\theta) \geq 0$ ce qui donne alors la condition $p(\theta) = a(1 + \cos \theta)$.

Les directrices des paraboles cherchées ont donc pour équation :

$$D_\theta : x \cos \theta + y \sin \theta = a(1 + \cos \theta),$$

d'où $D'_\theta : -x \sin \theta + y \cos \theta = -a \sin \theta,$

et l'enveloppe de ces directrices est paramétrée par :

$$x = a(1 + \cos \theta), \quad y = a \sin \theta,$$

c'est donc le cercle de centre A de rayon a , d'équation $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

Il reste à trouver le lieu des centres de courbure en A des paraboles, et pour cela on se placera en polaires.

L'équation de la parabole de foyer $O = F$, de directrice la droite D d'équation $x \cos \theta + y \sin \theta - a(1 + \cos \theta) = 0$ est, en notant r et φ les coordonnées polaires d'un point de la parabole, $r = \frac{a(1 + \cos \theta)}{1 + \cos(\varphi - \theta)}$, (attention, θ est le paramètre qui détermine la parabole).

On introduit les vecteurs unitaires \vec{u} et \vec{v} d'angles polaires respectifs φ et $\varphi + \frac{\pi}{2}$. On a $\frac{d\vec{u}}{d\varphi} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OM} = r(\varphi) \vec{u}$.

Posons $p = a(1 + \cos \theta)$, constant en φ .
on a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{d\varphi} &= \frac{p \sin(\varphi - \theta)}{(1 + \cos(\varphi - \theta))^2} \vec{u} + \frac{p}{1 + \cos(\varphi - \theta)} \vec{v}, \\ &= \frac{p}{(1 + \cos(\varphi - \theta))^2} (\sin(\varphi - \theta) \vec{u} + (1 + \cos(\varphi - \theta)) \vec{v}) \end{aligned}$$

soit $\frac{d\vec{M}}{d\varphi} = \frac{2p \cos \frac{\varphi - \theta}{2}}{(1 + \cos(\varphi - \theta))^2} \left(\sin \frac{\varphi - \theta}{2} \vec{u} + \cos \frac{\varphi - \theta}{2} \vec{v} \right)$, ce qui nous donne le vecteur tangent unitaire :

$$\vec{t} = \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \vec{u} + \cos \frac{\varphi - \theta}{2} \vec{v} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{d\varphi} = \frac{2p \cos \frac{\varphi - \theta}{2}}{(1 + \cos(\varphi - \theta))^2}.$$

En notant V l'angle (\vec{u}, \vec{t}) et Ψ l'angle (\vec{i}, \vec{t}) , on aura :

$$V = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi - \theta}{2} = \frac{\pi - \varphi + \theta}{2},$$

d'où $\Psi = \varphi + V = \frac{\pi + \theta + \varphi}{2},$

et $\mathcal{R} = \frac{ds}{d\Psi} = 2 \frac{ds}{d\varphi} = \frac{4p \cos \frac{\varphi - \theta}{2}}{(1 + \cos(\varphi - \theta))^2}.$

Avec $\vec{n} = -\cos \frac{\varphi - \theta}{2} \vec{u} + \sin \frac{\varphi - \theta}{2} \vec{v}$, le centre de courbure, C (on y arrive)

de la parabole, en A qui correspond à $\varphi = 0$ va être tel que $\overrightarrow{AC} = \mathcal{R} \vec{n}$.

$$\text{Pour } \varphi = 0, \mathcal{R} = \frac{4a(1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2}}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{4a \cos \frac{\theta}{2}}{(1 + \cos \theta)},$$

$$\vec{n} = -\cos \frac{\theta}{2} \vec{u}(0) - \sin \frac{\theta}{2} \vec{v}(0) = -\cos \frac{\theta}{2} \vec{i} - \sin \frac{\theta}{2} \vec{j},$$

d'où les coordonnées de C :

$$X = a - \frac{4a \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = -a \text{ et } Y = \frac{-4a \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = -2a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \text{ qui varie dans}$$

\mathbb{R} , donc le lieu cherché est la droite d'équation $X = -a$, mais je suis le premier étonné par la simplicité du résultat que je ne garantis pas!

7. Soit $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$, le vecteur unitaire directement perpendiculaire.

Le point M est l'intersection des droites d'équations $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ et $-x \sin \theta + y \cos \theta = p'$, d'où ses coordonnées :

$$x_M = p \cos \theta - p' \sin \theta \quad \text{et} \quad y_M = p \sin \theta + p' \cos \theta.$$

De même, le centre de courbure C de Γ en M est l'intersection des droites d'équations :

$$\begin{cases} -x \sin \theta + y \cos \theta = p' \\ -x \cos \theta - y \sin \theta = p'' \end{cases}$$

d'où ses coordonnées $x_c = -p' \sin \theta - p'' \cos \theta$ et $y_c = p' \cos \theta - p'' \sin \theta$.

les coordonnées de N sont $\left(\frac{p}{\cos \theta}, 0 \right)$, ce qui suppose $\cos \theta \neq 0$, donc une

équation de la perpendiculaire en N à D_θ est $\left(x - \frac{p}{\cos \theta} \right) (-\sin \theta) + y \cos \theta =$

0, donc le point P , d'abscisse $p \cos \theta - p' \sin \theta = x_p$ a pour ordonnée :

$$y_p = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \left(p \cos \theta - p' \sin \theta - \frac{p}{\cos \theta} \right) = -\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} (p \sin \theta + p' \cos \theta).$$

La condition d'alignement de C , P et O est donc :

$$\begin{vmatrix} -p' \sin \theta - p'' \cos \theta & p' \cos \theta - p'' \sin \theta & 1 \\ p \cos \theta - p' \sin \theta & -\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} (p \sin \theta + p' \cos \theta) & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

soit encore :

$$(p' \sin \theta + p'' \cos \theta)(p \sin \theta + p' \cos \theta) \sin^2 \theta - \cos^2 \theta (p \cos \theta - p' \sin \theta)(p' \cos \theta - p'' \sin \theta) = 0,$$

ce qui s'ordonne en :

$$pp''(\cos\theta\sin^3\theta + \sin\theta\cos^3\theta) + p''p'(\cos^2\theta\sin^2\theta - \cos^2\theta\sin^2\theta) \\ + pp'(\sin^4\theta - \cos^4\theta) + p'^2(\cos\theta\sin^3\theta + \sin\theta\cos^3\theta) = 0$$

soit $\frac{1}{2}pp''\sin 2\theta - pp'\cos 2\theta + \frac{1}{2}p'^2\sin 2\theta = 0$ ou :

$(pp'' + p'^2)\sin 2\theta - 2pp'\cos 2\theta = 0$, (ouf! mais en fait, les calculs trigonométriques ont tendance à s'arranger).

Comme $(pp')' = p'^2 + pp''$, l'équation différentielle $(pp')'\sin 2\theta - 2pp'\cos 2\theta = 0$ s'intègre en $pp' = \lambda \sin 2\theta$, d'où la condition cherchée, $p^2(\theta) = \mu - \lambda \cos 2\theta$, avec λ et μ constantes.

8. Si on prend comme paramètre l'abscisse t de P , et si y est l'ordonnée de Q , on aura $\overline{AP} + \overline{BQ} = (t-1) + (y-1) = 1$ d'où $y = 3 - t$. Les coordonnées de P et Q sont donc $(t, 0)$ et $(0, 3 - t)$, donc pour $t \neq 0$ et $t \neq 3$, une équation de PQ sera $\frac{x}{t} + \frac{y}{3-t} - 1 = 0$, ou encore :

$$D_t : (3-t)x + ty - 3t + t^2 = 0.$$

Cette forme convient pour $t = 0$ car alors $P = O$, Q a pour coordonnées $(0, 3)$, la droite PQ est l'axe Oy , or D_0 s'écrit $3x = 0$. Elle convient aussi pour $t = 3$. On a alors $D'_t : -x + y - 3 + 2t = 0$, et l'enveloppe se paramètre en :

$$x = \frac{t^2}{3}, \quad y = \frac{t^2}{3} - 2t + 3 = \frac{(t-3)^2}{3}.$$

L'enveloppe est une parabole car on peut éliminer t en écrivant que :

$$y - \frac{t^2}{3} - 3 = (y - x - 3) = -2t,$$

donc que $(y - x - 3)^2 = 4t^2 = 12x$.

Cette parabole est contenue dans la partie $x \geq 0$ et $y \geq 0$ du plan, elle est tangente à Ox en $U(3, 0)$, pour $t = 3$, et à Oy en $V(0, 3)$ obtenu pour $t = 0$.

9. La fonction $\varphi : s \rightsquigarrow \frac{1-s}{1+s}$ est définie sur $[0, +\infty[$, strictement décroissante,

$$\left(\varphi'(s) = \frac{-2}{(1+s)^2} \right) \text{ donc } x(t_1) = x(t_2) \Leftrightarrow t_1^2 = t_2^2.$$

On aura de plus, $y(t_1) = y(t_2)$ si et seulement si $t_1(1-t_1^2) = t_2(1-t_2^2)$ ce qui, pour tout $t_1^2 \neq 1$, équivaut à $t_1 = t_2$. L'arc Γ admet un seul point double obtenue pour $t_1 = 1$ et $t_2 = -1$.

On aura alors l'alignement de trois points paramètres t_1, t_2, t_3 sur la droite d'équation $ax + by + c = 0$, si et seulement si t_1, t_2 et t_3 sont racines de l'équation $a(1-t^2) + b(t-t^3) + c(1+t^2) = 0$, qui s'ordonne en $-bt^3 + t^2(c-a) + bt + c + a = 0$.

Comme cet alignement ne peut pas se faire sur une droite d'équation $x = \text{cte}$, (seuls $\pm t$ donnent la même abscisse sur Γ), si on a un alignement, b est non nul, et alors la fonction symétrique $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -1$.

Réciproquement, si $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = -1$, en résolvant le système

$$\begin{cases} \gamma - \alpha = t_1 + t_2 + t_3 \\ \gamma + \alpha = t_1 t_2 t_3, \end{cases}$$

on aura t_1, t_2, t_3 solutions de l'équation :

$$t^3 - t^2(\gamma - \alpha) - t - (\gamma + \alpha) = 0,$$

ce qui traduit l'alignement des trois points sur la droite d'équation :

$$\alpha x + y + \gamma = 0.$$

La condition $t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 + 1 = 0$ est donc équivalente à l'alignement des trois points de paramètres t_1, t_2 et t_3 . Mais alors, pour $M(t)$, si t' est tel qu'avec $t_1 = t_2 = t'$ et $t_3 = t$, la condition est vérifiée, la droite associée coupe Γ en $M(t)$ en étant tangente en $M'(t')$.

Les tangentes à Γ , issues de $M(t)$, tangentes en $M'(t')$ avec $t' \neq t$ correspondent donc aux t' réels solutions de l'équation $t'^2 + 2tt' + 1 = 0$.

Ils existeront si et seulement si $t^2 - 1 \geq 0$, soit $|t| \geq 1$. Les points, associés à t_1 et t_2 donnent une sécante $M_1 M_2$ si $t_1 \neq t_2$, donc si $|t| > 1$, car alors $\{t_1, t_2\} = \{1, -1\}$ est exclu. Cette sécante aura pour équation, sous forme de déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 - t_1^2 & t_1 - t_1^3 & 1 + t_1^2 \\ 1 - t_2^2 & t_2 - t_2^3 & 1 + t_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

et pour faire intervenir les fonctions symétriques de t_1 et t_2 , on remplace les deux dernières lignes L_2 et L_3 par $L_2 + L_3$ et $L_3 - L_2$ respectivement, (ce qui revient à multiplier par 2 le déterminant, comme on le voit en utilisant la multilinéarité par rapport aux lignes), d'où une équation :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 - (t_1^2 + t_2^2) & (t_1 + t_2) - (t_1^3 + t_2^3) & 2 + (t_1^2 + t_2^2) \\ t_1^2 - t_2^2 & t_2 - t_1 + t_1^3 - t_2^3 & t_2^2 - t_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Or $t_1 + t_2 = -2t$ et $t_1 t_2 = 1$, donc $t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2$ donne encore $t_1^2 + t_2^2 = 4t^2 - 2$. Comme $t_1^3 = -1 - 2tt_1$ on a $t_1^3 = -t_1 - 2tt_1^2$ d'où

$$t_1^3 + t_2^3 = -(t_1 + t_2) - 2t(t_1^2 + t_2^2) = 2t - 2t(4t^2 - 2) = -8t^3 + 6t.$$

Puis $t_1^3 - t_2^3 = (t_1 - t_2)(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) = (t_1 - t_2)(4t^2 - 1)$. Après simplification par $t_1 - t_2$, l'équation devient :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4(1 - t^2) & 8t^3 - 8t & 4t^2 \\ -2t & 4t^2 - 2 & 2t \end{vmatrix} = 0$$

soit finalement $-t^2x - ty + t^2 - 1 = 0$, d'où $D(t) : tx + y - t + \frac{1}{t} = 0$,
 équation de la droite dont on cherche l'enveloppe, (n'oublions pas que $|t| > 1$).

On a $D'(t) : x - 1 - \frac{1}{t^2} = 0$ d'où une paramétrisation de l'enveloppe :

$$x = 1 + \frac{1}{t^2}, \quad y = t - \frac{1}{t} - t - \frac{1}{t} = -\frac{2}{t}.$$

Comme $t^2 \geq 1$, on a $1 \leq x \leq 2$ et on se promène sur la parabole d'équation
 $x = 1 + \frac{y^2}{4}$, donc sur l'arc de parabole obtenu pour y compris entre 2 et -2 .

10. Si on prend la droite Δ par son équation normale $x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0$,
 les points A et B ayant, dans un repère orthonormé convenable les coordonnées
 respectives $(-a, 0)$ et $(a, 0)$, la droite Δ doit vérifier la condition :

$$(-a \cos \theta - p(\theta))^2 - (a \cos \theta - p(\theta))^2 = 4b^2, \text{ soit } 4ap \cos(\theta) = 4b^2.$$

On a donc, pour $\cos \theta \neq 0$, l'équation :

$$D_\theta : x \cos \theta + y \sin \theta = \frac{b^2}{a \cos \theta}$$

d'où
$$D'_\theta : -x \sin \theta + y \cos \theta = \frac{b^2 \sin \theta}{a \cos^2 \theta},$$

et une paramétrisation de l'enveloppe :

$$\begin{cases} x = \frac{b^2}{a} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{b^2}{a} (1 - \operatorname{tg}^2 \theta) \\ y = \frac{b^2}{a} (\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \theta) = \frac{2b^2}{a} \operatorname{tg} \theta, \end{cases}$$

ce qui est une paramétrisation de la parabole P d'équation :

$$x = \frac{b^2}{a} - \frac{a}{4b^2} y^2.$$

11. Soient (a, b) les coordonnées de P , et $x \cos \alpha + y \sin \alpha - h = 0$ l'équation
 normale de la directrice. On note X et Y les coordonnées du foyer. L'axe PF est
 perpendiculaire à la directrice, qui est dirigée par $\vec{v} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}$
 d'où la relation $-(X - a) \sin \alpha + (Y - b) \cos \alpha = 0$, avec $\sin \alpha \neq 0$ car l'axe
 n'est pas parallèle à la tangente Ox .

Un point $M(x, y)$ est sur la parabole si et seulement si $MF^2 = d^2$, avec d
 distance de M à la directrice D , d'où l'équation de la parabole :

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - h)^2.$$

Cette parabole est tangente en O à Ox si l'équation aux abscisses des points
 d'intersection avec Ox admet 0 pour racine double.

Cette équation s'écrit $(x - X)^2 + Y^2 - (x \cos \alpha - h)^2 = 0$, soit en ordonnant : $x^2 \sin^2 \alpha - 2x(X - h \cos \alpha) + X^2 + Y^2 - h^2 = 0$.

On doit donc avoir X et Y tels que :

$$\begin{cases} X - h \cos \alpha = 0, \\ X^2 + Y^2 - h^2 = 0, \\ -(X - a) \sin \alpha + (Y - b) \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

D'où $X = h \cos \alpha$, $Y^2 = h^2 \sin^2 \alpha$, d'où $Y = -h \sin \alpha$ car le choix de $Y = h \sin \alpha$ conduit à $F \in D$. Comme O , point de la parabole, n'est pas sur la directrice D , on a $h \neq 0$, donc la nullité de la dernière expression est équivalente à

$$-(X - a)h \sin \alpha + (Y - b)h \cos \alpha = 0,$$

donc à $(X - a)Y + (Y - b)X = 0$, soit à $2XY - aY - bX = 0$, équation qui s'écrit encore $\left(X - \frac{a}{2}\right) \left(Y - \frac{b}{2}\right) = \frac{ab}{4}$, c'est donc celle d'une hyperbole si $ab \neq 0$, de deux droites si $a = 0$ ou $b = 0$. Il convient de remarquer que les points d'ordonnée nulle sont à éliminer, ce qui correspond à $\sin \alpha \neq 0$.

ENVELOPPE DE LA TANGENTE AU SOMMET Δ .

Cette droite, Δ_α , est perpendiculaire à l'axe, elle passe par le milieu S de FK si K est le projeté du foyer F sur la directrice.

On a $F \begin{vmatrix} h \cos \alpha \\ -h \sin \alpha \end{vmatrix}$, si $\overrightarrow{FK} = \lambda(\cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j})$, les coordonnées de K seront $(h + \lambda) \cos \alpha$ et $(-h + \lambda) \sin \alpha$, avec λ tel que : $(h + \lambda) \cos^2 \alpha + (\lambda - h) \sin^2 \alpha - h = 0$, (K sur la directrice) soit encore : $\lambda = 2h \sin^2 \alpha$, d'où les coordonnées :

$$K \begin{vmatrix} h(1 + 2 \sin^2 \alpha) \cos \alpha \\ h(-1 + 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha \end{vmatrix}, \text{ et celle de } S \begin{vmatrix} h(1 + \sin^2 \alpha) \cos \alpha \\ h(-1 + \sin^2 \alpha) \sin \alpha \end{vmatrix},$$

et l'équation de Δ_α , perpendiculaire en S à $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$:

$$(x - h(1 + \sin^2 \alpha) \cos \alpha) \cos \alpha + (y - h(-\cos^2 \alpha) \sin \alpha) \sin \alpha = 0,$$

soit $x \cos \alpha + y \sin \alpha - h \cos^2 \alpha = 0$, où h est à éliminer, ce que l'on fait en traduisant que le foyer $F(h \cos \alpha, -h \sin \alpha)$ est sur l'axe, d'où l'égalité :

$$(a - h \cos \alpha) \sin \alpha + (-h \sin \alpha - b) \cos \alpha = 0,$$

donc $2h \cos \alpha \sin \alpha = a \sin \alpha - b \cos \alpha$, d'où l'on tire, puisque $\sin \alpha \neq 0$,

$$h \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \left(a \cos \alpha - b \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right).$$

On a finalement :

$$\begin{cases} \Delta_\alpha : x \cos \alpha + y \sin \alpha - \frac{1}{2} \left(a \cos \alpha - b \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) = 0, \\ \Delta'_\alpha : -x \sin \alpha + y \cos \alpha - \frac{1}{2} \left(-a \sin \alpha + 2b \cos \alpha + \frac{b \cos^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = 0, \end{cases}$$

ou $\Delta'_\alpha : -x \sin \alpha + y \cos \alpha - \frac{1}{2} \left(-a \sin \alpha + b \cos \alpha + \frac{b \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = 0$.

On en déduit une paramétrisation de l'enveloppe, (associée à la condition $\sin \alpha \neq 0$) :

$$x = \frac{1}{2} \left(a \cos^2 \alpha - b \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} + a \sin^2 \alpha - 2b \cos \alpha \sin \alpha - b \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} \right), \text{ soit :}$$

$$x = \frac{1}{2} \left(a - 2b \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\cos^2 + \sin^2 \alpha) \right) = \frac{1}{2} (a - 2b \cotg \alpha), \text{ et}$$

$$y = \frac{1}{2} \left(a \cos \alpha \sin \alpha - b \cos^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha + 2b \cos^2 \alpha + b \frac{\cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right), \text{ ou}$$

$$y = \frac{1}{2} b \cos^2 \alpha \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{2} b \cotg^2 \alpha.$$

Ce paramétrage, $x = \frac{1}{2} (a - 2b \cotg \alpha)$, $y = \frac{1}{2} b \cotg^2 \alpha$ correspond à la parabole d'équation $\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 = 2by$, pour $b \neq 0$, et si $b = 0$, la droite Δ_α pivote autour du point fixe $\left(\frac{a}{2}, 0 \right)$.

Les coniques

Parmi les arcs paramétrés, et les enveloppes, il est une famille d'arcs que l'on connaît depuis l'antiquité : les coniques. Sans vouloir vous parler de tout ce que des générations leur ont mis sur le dos, je vais m'efforcer de rédiger un compromis entre un minimum de propriétés géométriques dites « pures », (par les puristes?) et de propriétés analytiques. Avec ce point de vue raisonnable, je suis certain de mécontenter tout le monde.

DÉFINITION 8.1. — *Soit \mathcal{A} un plan affine euclidien. On appelle conique, l'ensemble des centres des cercles Γ , passant par un point fixe F , et tangents soit à une droite D ne contenant pas F , soit à un cercle C ne contenant pas F .*

Cette définition va nous donner les trois types de coniques non dégénérées, paraboles, ellipses et hyperboles, que nous allons étudier.

Une fois pour toutes, \mathcal{A} est un plan affine euclidien.

1. Les paraboles

DÉFINITION 8.2. — *On appelle parabole P de foyer F et de directrice la droite D , l'ensemble des centres des cercles Γ passant par F , tangents à D , dans le plan \mathcal{A} défini par D et F , (avec $F \notin D$).*

ÉTUDE DE LA PARABOLE

Soit Δ une droite perpendiculaire à D . Un point M de Δ sera centre d'un cercle Γ passant par F et tangent à D en H , intersection de Δ et de D , si et seulement si $MF = MH$, soit si et seulement si M est sur la médiatrice de FH et sur Δ , (voir figure 8.2).

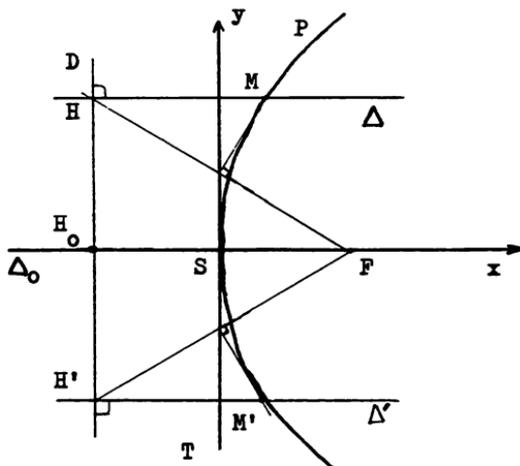


Fig. 8.2

Comme F n'est pas sur D , la droite FH n'est jamais parallèle à D , donc la médiatrice de FH n'est jamais parallèle à Δ : elle coupe Δ en un point unique, et la figure 8.2 donne la construction du point M de la parabole P qui se trouve sur Δ .

8.3. Lorsque Δ est la perpendiculaire à D passant par F , notée Δ_0 , le point M est en S , milieu de FH_0 . Ce point S est encore le *sommet de la parabole*.

Si Δ' est la droite symétrique de Δ par rapport à Δ_0 et H' l'intersection de Δ' et D , on a FH' symétrique de FH , d'où les médiatrices symétriques par rapport à Δ_0 , et la parabole P passe par M' , symétrique de M par rapport à Δ_0 , donc *une parabole P admet un axe de symétrie, la perpendiculaire à la directrice, passant par le foyer*, (figure 8.2).

8.4. ÉQUATION CARTÉSIENNE DE LA PARABOLE

Soit le repère \mathcal{R} d'origine S , sommet de la parabole, orthonormé, de base (\vec{i}, \vec{j}) avec $\vec{i} = \frac{\vec{SF}}{\|\vec{SF}\|}$ et \vec{j} unitaire perpendiculaire à \vec{i} . Un point $M(x, y)$ sera sur la parabole P de foyer $F : \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ de directrice D ,

d'équation $x = -\frac{p}{2}$, si et seulement si $MF^2 = MH^2$ donc si on a :

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

ou encore si x et y vérifient l'équation $y^2 = 2px$.

On constate bien que l'axe des abscisses est axe de symétrie.

Attention à l'erreur : avec $y^2 = 2px$, $|p|$ est la distance séparant le foyer de la directrice.

Comme le fait que M soit centre d'un cercle passant par F , et tangent en H à la directrice D revient à dire que la distance de M à D , atteinte en H , est telle que $MF = MH$, on obtient une autre définition de la parabole :

THÉORÈME 8.5. — *La parabole P de foyer F et de directrice D est l'ensemble des points M équidistants de F et de D , (avec $F \notin D$).*

L'intérêt de ce point de vue apparaîtra lorsque l'on parlera d'excentricité des ellipses et des hyperboles, (voir 8.22 et 8.36). ■

8.6. *Considérons maintenant l'étude de l'intersection d'une parabole P , de foyer F , de directrice D , et d'une droite Δ non perpendiculaire à la directrice.*

S'il existe un point M de P sur Δ , il sera centre d'un cercle Γ passant par F , (et tangent à D en φ), donc Γ passe aussi par F_1 , symétrique de F par rapport à Δ , (F_1 peut être confondu avec F si F est sur Δ).

Ce cercle Γ est donc cercle du faisceau \mathcal{F} à points de base F et F_1 , (voir Tome 4, 5.58) et tous les cercles de ce faisceau ont pour axe radical la perpendiculaire à Δ passant par F . Si $F = F_1$ est sur Δ , \mathcal{F} est le faisceau de cercles tangents en F à la perpendiculaire en F à Δ , qui est encore l'axe radical de ce faisceau, (voir Tome 4, 5.62).

Comme Δ n'est pas perpendiculaire à D , l'axe radical est non parallèle à D , donc coupe la directrice en I , (voir figure 8.6).

Si C est un cercle quelconque passant par F et F_1 , (ou, si $F = F_1$, C est centré sur Δ , et passe par F), la puissance analytique (voir Tome 4, 4.40) de I pour C est $\overline{IF} \cdot \overline{IF_1}$, et si I est extérieur au segment $[F F_1]$, c'est aussi IT^2 , T point de contact d'une tangente à C issue de I .

Comme M , point de la parabole sur Δ , s'il existe, est tel qu'un cercle Γ du faisceau \mathcal{F} , centré en M , est tangent à D en φ , cette puissance analytique de I doit aussi être $I\varphi^2$. Donc φ existe si et seulement si I est extérieur au segment $[F, F_1]$, et φ est l'un des deux points d'intersection de la directrice D et du cercle de centre I de rayon IT .

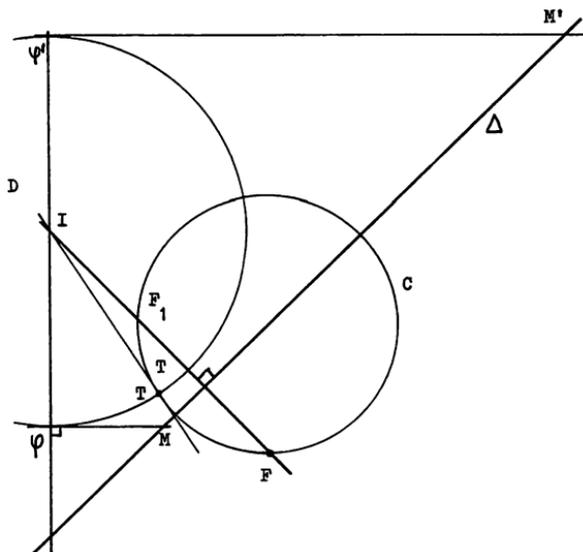


Fig. 8.6

8.7. EN RÉSUMÉ, si Δ est une droite du plan non perpendiculaire à la directrice, on considère l'intersection I de la directrice D et de la perpendiculaire à Δ passant par F , un cercle C centré sur Δ , passant par F , et si I est extérieur à C , les points de la parabole sur Δ sont les intersections de Δ et des perpendiculaires à D en φ et φ' , intersections de D et du cercle de centre I , de rayon IT , T point de contact de C et d'une tangente à C issue de I , (voir figure 8.6).

Cette construction géométrique va nous permettre de donner une construction géométrique de la tangente en un point de la parabole

THÉORÈME 8.8. — *Soit une parabole P de foyer F , de directrice D . Si M est un point de P qui se projette en φ sur D , la tangente en M à la parabole est la médiatrice de $F\varphi$, (voir figure 8.8.2).*

On utilise l'étude faite en 8.6, mais en prenant pour droite Δ , une droite passant par M et M' sur la parabole.

Si φ et φ' sont les projections de M et M' sur la directrice on sait alors que I , milieu de $\varphi\varphi'$, est sur la perpendiculaire à Δ passant par F , (figure 8.8.1).

On suppose alors M fixe sur la parabole P , et que M' , distinct de M , tend vers M , (l'équation cartésienne vue en 8.4, prouve que la parabole est paramétrée avec y comme paramètre, en un arc de classe C^1 , donc

REMARQUE 8.10. — N'allez pas croire que la justification du Théorème 8.8 est une escroquerie. Quand on parle de la limite de la droite affine engendrée par F , fixe, et le point I , variable avec M' , le vecteur \overrightarrow{FI} constituant une base de la direction de $\text{aff}(I, F)$ ayant pour limite le vecteur $\overrightarrow{F\varphi}$, on retrouve la définition 6.34 pour la limite d'un sous-espace affine dépendant d'un paramètre. Il en est de même pour la droite $\text{aff}(M, M')$ qui passe par M fixe, et qui admet pour vecteur directeur un vecteur unitaire perpendiculaire à \overrightarrow{FI} par exemple.

COROLLAIRE 8.11. — Une parabole P est l'enveloppe du second côté d'un angle droit dont le sommet décrit une droite D_1 , et dont le premier côté passe par un point fixe F non sur D_1 .

En effet, en reprenant la figure 8.8.2 et les notations de la construction 8.9, le milieu N de $F\varphi$ décrit la droite D_1 , homothétique de D dans l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$, et l'angle \widehat{FNM} étant droit, la tangente NM en M à la parabole est bien le second côté d'un angle droit, le premier passant par le foyer F , et le sommet N décrivant toute la droite D_1 , lorsque φ décrit D , donc lorsque M décrit la parabole P .

En particulier, pour φ_0 pied de la perpendiculaire à la directrice passant par F , le milieu M_0 du segment $[\varphi_0, F]$ est sur la parabole, et la tangente en M_0 à la parabole est devenue la droite D_1 , encore appelée *tangente au sommet à la parabole*, M_0 étant le sommet, (voir 8.3). ■

2. Les ellipses

DÉFINITION 8.12. — Soient, dans un plan affine \mathcal{A} , un cercle C' de centre F' et un point F , distinct de F' , intérieur au cercle. On appelle ellipse de foyers F et F' , l'ensemble des centres des cercles Γ passant par F et tangents à C' . Le cercle C' est dit cercle directeur associé à F .

Posons $\|\overrightarrow{FF'}\| = 2c$, et notons $2a$ le rayon du cercle C' , on a donc $0 < c < a$.

Soit φ un point de C' , on cherche s'il existe un cercle Γ de centre M , tangent à C' en φ et passant par F .

Ceci équivaut à trouver M sur la droite $\text{aff}(F', \varphi)$ tel que $M\varphi = MF$, (figure 8.12), donc à trouver M sur $\text{aff}(F', \varphi)$ et sur la médiatrice du

segment $[F, \varphi]$. Or ces deux droites sont parallèles si et seulement si $\text{aff}(F, \varphi)$ est perpendiculaire à $\text{aff}(F', \varphi)$, c'est-à-dire si et seulement si φ est sur le cercle γ de diamètre $[F, F']$, mais γ est intérieur à C' , donc cette condition n'est jamais vérifiée.

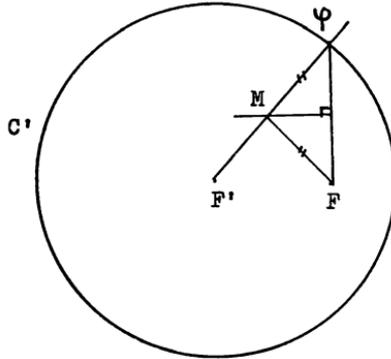


Fig. 8.12

Par ailleurs, le cercle Γ de centre M tangent à C' en φ est soit extérieur à C' , soit intérieur, et comme il passe par F , ($M\varphi = MF$), F intérieur à C' , c'est qu'il est intérieur à C' , donc M est entre F' et φ , et il y a bijection entre les points φ du cercle C' et les points M de E , du segment $[F', \varphi]$.

$$\text{Mais alors, } MF' + MF = MF' + M\varphi = F'\varphi = 2a.$$

Réciproquement, soit un point M du plan tel que

$$MF + MF' = 2a.$$

D'abord M est distinct de F et de F' (dans le cas $M = F$ par exemple, on aurait $0 + FF' = 2a$ soit $2c = 2a$, ce qui est exclu).

Puis $MF' = 2a - MF < 2a$, donc M est intérieur à C' , distinct de F' , la demi-droite $[F', M)$ existe, elle coupe C' en un point φ , puis comme $M\varphi = F'\varphi - MF' = 2a - MF' = MF$, le cercle de centre M , tangent à C' en φ passe par F donc M est sur l'ellipse.

Nous venons de voir que :

THÉORÈME 8.13. — *L'ellipse E de foyers F et F' , de cercle directeur C' de rayon $2a$ et de centre F' , est encore l'ensemble des points M du plan \mathcal{A} de C' tels que $MF + MF' = 2a$.* ■

de l'équation de l'ellipse E de foyers $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ avec

$$c^2 = a^2 - b^2, \quad (0 < b < a),$$

qui convient car alors :

$$x^2 + y^2 < x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2 < 2a^2 - c^2 :$$

l'inéquation rencontrée en condition est vérifiée.

CONSÉQUENCE 8.16. — Une ellipse E admet deux axes de symétrie orthogonale, perpendiculaires entre eux, d'où un centre de symétrie.

C'est évident, vu la forme 8.15 de l'équation, les axes de coordonnées sont axes de symétrie, l'origine centre de symétrie.

Les points $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$, sont appelés les *sommets de l'ellipse*, (voir figure 8.16), l'axe des abscisses est encore appelée *axe focal*, (il porte les foyers), on dit encore parfois que AA' est « grand axe » de symétrie et BB' « petit axe » de symétrie, en référence à l'inégalité $b < a$.

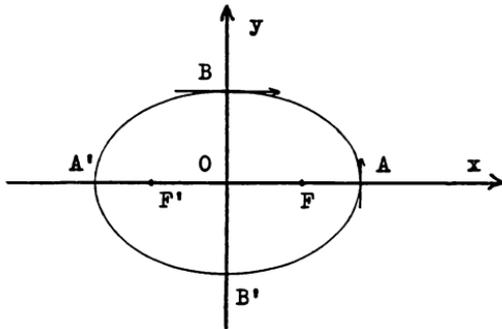


Fig. 8.16

8.17 ÉTUDE DE LA TANGENTE EN UN POINT DE L'ELLIPSE

L'équation implicite 8.15 :

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

jointe au fait que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$ ne sont jamais simultanément nulles sur E , (qui ne passe pas par l'origine),

nous permet de savoir qu'en $m_0(x_0, y_0)$, l'ellipse E admet une tangente d'équation.

$$8.18. \quad \frac{2x_0}{a^2}(X - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(Y - y_0) = 0,$$

(voir 6.83, ou Tome 3 : 17.4).

Maintenant que nous sommes rassurés quand à l'existence des tangentes, nous allons en donner une étude plus ... géométrique.

Soient M_0 et M deux points de l'ellipse E de foyers F et F' , de cercle directeur C' centre en F' , associés à φ_0 et φ sur C' , (voir figure 8.17, où l'on reprend les notations de la figure 8.12).

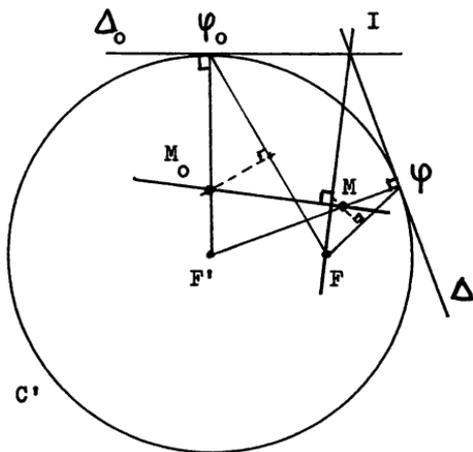


Fig. 8.17

Le cercle C' et le cercle Γ_0 tangent en φ_0 à C' , passant par F , (donc de centre M_0), ont pour axe radical, (voir Tome 4, 5.62) la tangente commune Δ_0 aux deux cercles.

De même le cercle C' et le cercle Γ tangent en φ à C' et passant par F , ont pour axe radical la tangente commune en φ à ces deux cercles, notée Δ .

Ces deux droites Δ et Δ_0 , perpendiculaire en φ et φ_0 à $F'\varphi$ et $F'\varphi_0$ seront sécantes sauf si φ , F' et φ_0 sont alignés.

Comme on veut «faire tendre M vers M_0 sur l'ellipse», comment cela au fait? Et bien, la bijection vue en 8.12, 8.13 entre les points φ du cercle C' et ceux, M , de l'ellipse, montre que l'on peut paramétrer l'ellipse en fonction de l'angle de vecteurs $\theta = (\overrightarrow{F'F}, \overrightarrow{F'\varphi})$ par exemple, on aura alors, avec $\theta_0 = (\overrightarrow{F'F}, \overrightarrow{F'\varphi_0})$, l'égalité $(\overrightarrow{F'\varphi_0}, \overrightarrow{F'\varphi}) = \theta - \theta_0$, et le passage de φ

à M étant bijectif continu, (on a les coordonnées de M par intersection de droites dont les coefficients sont fonctions continues de θ , et l'intersection existant), finalement « M tend vers M_0 sur l'ellipse» équivaut à θ tend vers θ_0 , donc les tangentes Δ et Δ_0 se coupent, (si $|\theta - \theta_0| < \pi$) en I et la puissance analytique de I par rapport au cercle Γ , notée $\mathcal{P}(I, \Gamma)$ vérifie

$$\mathcal{P}(I, \Gamma) = \mathcal{P}(I, C') = \mathcal{P}(I, \Gamma_0),$$

donc I est sur l'axe radical des cercles Γ et Γ_0 .

Comme ces cercles passent par F , on a :

$$\mathcal{P}(F, \Gamma) = \mathcal{P}(F, \Gamma_0) = 0,$$

et finalement la droite IF est axe radical de ces deux cercles, donc perpendiculaire à la ligne des centres, aff(M_0, M).

Comme :

$$\begin{aligned} I\varphi_0 &= F'\varphi_0 |\operatorname{tg}(\overrightarrow{F'\varphi_0}, \overrightarrow{F'I})|, \\ &= F'\varphi_0 \left| \operatorname{tg} \frac{\theta - \theta_0}{2} \right|, \end{aligned}$$

si M «tend vers M_0 », donc si θ tend vers θ_0 , on a $\lim_{M \rightarrow M_0} I = \varphi_0$, la droite aff(F, I) a pour limite la droite aff(F, φ_0), et la sécante aff(M_0, M) a pour limite la perpendiculaire en M_0 à $F\varphi_0$, c'est-à-dire la médiatrice de $[F, \varphi_0]$, qui est donc tangente en M_0 à l'ellipse. On a donc :

8.19. Soit l'ellipse E de foyers F et F' , de cercle directeur C' associé en F . La tangente en M_0 à l'ellipse E est la médiatrice de $[F, \varphi_0]$, avec φ_0 intersection de C' et de la droite aff(M_0, F'), (voir figure 8.19).

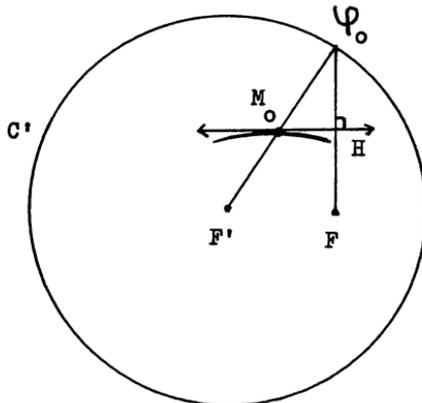


Fig. 8.19

De cette construction va découler le théorème suivant :

THÉORÈME 8.20. — Une ellipse E est l'enveloppe du second côté d'un angle droit dont le sommet décrit un cercle et dont le premier côté passe par un point fixe intérieur à ce cercle.

En utilisant la figure 8.19, on remarque que H , sommet de l'angle droit \widehat{FHM}_0 , décrit le cercle C_1 , homothétique de C' dans l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{1}{2}$, lorsque φ_0 décrit C' , donc lorsque M_0 décrit l'ellipse, puisque H est le pied de la médiatrice du segment $[F, \varphi_0]$. Le Théorème en résulte. ■

8.21. ET L'EXCENTRICITÉ DANS TOUT CELA? Alors là, il va y avoir du travail ! Cet aspect des coniques, utile pour les équations polaires, va être plus délicat à obtenir que dans le cas des paraboles. Attachez vos ceintures, on y va.

Soit E l'ellipse de foyers F et F' , le cercle directeur de centre F' , associé à F étant noté C' . Soit par ailleurs A le sommet de l'ellipse, sur l'axe focal, tel que F soit entre A et F' . Soit M sur l'ellipse, et φ et φ_A les points de C' tels que F', M, φ d'une part et F', A, φ_A d'autre part, soient alignés dans cet ordre, et les cercles Γ et Γ_A , centrés en M et A respectivement, passant par F , et donc tangents à C' en φ et φ_A respectivement (voir figure 8.21).

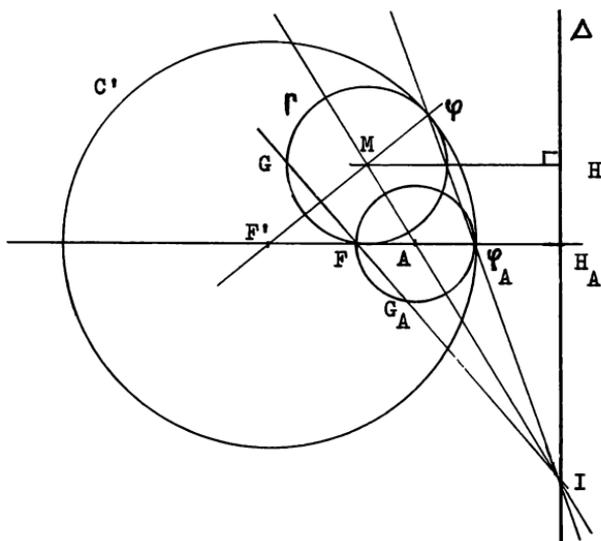


Fig. 8.21

On a noté $2a$ le rayon du cercle directeur C' , soit r et r_A les rayons, (non nuls) des cercles Γ et Γ_A .

Comme Γ et C' sont tangents en φ , l'homothétie h de centre φ de rapport $\frac{r}{2a}$ transforme C' en Γ , et l'homothétie h_A de centre φ_A de rapport $\frac{r_A}{2a}$ transforme de même C' en Γ_A , (voir Tome 4, 5.73).

Mais alors, la composée $h' = h_A \cdot h^{-1}$ est une homothétie, ou une translation si :

$$\frac{r_A}{2a} \times \frac{2a}{r} = \frac{r_A}{r} = 1,$$

(voir Tome 4, Théorème 1.63), et h' transforme Γ en Γ_A .

Il nous faut voir si h' est une translation ou pas. Or le rayon r , (un peu d'analytique : on utilise les notations de 8.14), est tel que $r^2 = (x-c)^2 + y^2$ avec $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donc $y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, donc l'égalité $r = r_A$ équivaut à x tel que :

$$(x-c)^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = (a-c)^2.$$

C'est une équation du second degré, qui admet la racine évidente $x = a$, l'autre valant $x_1 = \frac{a(2a-c)}{c}$ si mes calculs sont corrects mais peu importe.

On suppose donc M différent de A , et de M_1, M'_1 points de l'ellipse d'abscisse x_1 , c'est-à-dire qu'on a éliminé trois points de E , et même, ne reculant devant rien, on élimine aussi A' , autre sommet de l'axe focal, (soyez patient, on verra pourquoi).

Pour tout M de $E' = E - \{A, A', M_1, M'_1\}$, h' est une homothétie de centre I , aligné avec les centres A et M des cercles Γ_A et Γ , mais aussi avec φ et φ_A , centres des homothéties h et h_A telles que $h' = h_A \cdot h^{-1}$, (voir Tome 3, 1.63 pour la composée de deux homothéties).

L'étude faite au Théorème 4.94 du Tome 4, de l'inverse d'un cercle nous permet alors de savoir que I est centre d'une inversion \mathcal{I} échangeant Γ et Γ_A , puisque ces deux cercles, sécants en F non aligné avec leurs centres M et A , ne sont pas tangents; donc I n'est pas sur Γ et pas sur Γ_A , (et voilà pourquoi A' s'est fait éliminer, car il conduit à $\Gamma_{A'}$ tangent à Γ_A).

Comme l'inversion « conserve le contact », (voir Tome 4, Théorème 4.83), si \mathcal{I} est l'inversion de pôle I , de puissance $k = \overrightarrow{I\varphi_A} \cdot \overrightarrow{I\varphi}$, elle est telle que $\mathcal{I}(\varphi_A) = \varphi, \mathcal{I}(C') = C'$ car k est la puissance de I par rapport au cercle C' , donc l'inverse de Γ_A est un cercle tangent en φ à C' , de centre aligné avec I et A , (voir Tome 4, Théorème 4.94) : il n'y a pas le choix, on a $\mathcal{I}(\Gamma_A) = \Gamma$.

Mais alors, si la sécante $\text{aff}(I, F)$ recoupe Γ_A et Γ en G_A et G respectivement, on a soit $\mathcal{I}(F) = G$ et alors $\mathcal{I}(G_A) = F$, soit $\mathcal{I}(F) = F$ et $\mathcal{I}(G_A) = G$.

La disposition relative des points, montre que le premier cas est à écarter car il conduit à $IF \cdot IG = IF \cdot IG_A$ avec $IG \neq IG_A$, c'est donc que :

$$\overrightarrow{IF}^2 = \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{IG_A} = \overrightarrow{IF} \cdot \overrightarrow{IF_A}$$

donc la puissance de I par rapport au cercle point F est égale à la puissance de I par rapport à C' , donc I est sur l'axe radical du faisceau de cercles déterminé par C' et le cercle point F , faisceau à points limites, F en étant un (voir Tome 4, 5.59). Soit Δ cet axe.

Soient alors H_A et H les projections de A et M sur Δ .

Dans l'homothétie h' , de centre I , qui envoie M sur A , (centres des cercles Γ et Γ_A , avec $h'(\Gamma) = \Gamma_A$), l'image de Δ est Δ , et la perpendiculaire $\text{aff}(M, H)$ à Δ à pour image la perpendiculaire $\text{aff}(A, H_A)$ à Δ passant par A , donc :

$$h'(H) = H_A \quad \text{et} \quad h'(M) = A.$$

Mais alors :

$$AH_A = \frac{r_A}{r} MH,$$

donc :

$$\frac{AH_A}{r_A} = \frac{AH_A}{AF} = \frac{MH}{r} = \frac{MH}{MF},$$

le rapport $\frac{MH}{MF}$ est constant lorsque M décrit E' , et MF ne s'annulant pas, par raison de continuité ce rapport est constant si M décrit E , (on n'exclut plus les quatre points).

En fait, on écrit plutôt le rapport inverse $\frac{MF}{MH}$, qui vaut donc :

$$\frac{r_A}{AH_A} = \frac{A\varphi_A}{AH_A} = e < 1,$$

puisque Δ , axe radical de deux cercles non sécants, C' et $\{F\}$ est extérieur aux cercles, donc en particulier à C' .

Nous avons donc justifié que tout point de l'ellipse E est tel que le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant : en fait ceci caractérise les ellipses, lorsque le rapport e est inférieur à 1. On a :

THÉORÈME 8.22. — Soit une droite Δ d'un plan affine \mathcal{A} , et un point F n'appartenant pas à Δ . Une ellipse est l'ensemble des points M dont le rapport des distances de M à F et de M à Δ est constant, égal à e avec $e < 1$.

8.23. Ce scalaire e est l'excentricité de l'ellipse, la droite Δ est la directrice associée au foyer F .

Nous avons vu que les points d'une ellipse vérifient cette propriété. Justifions la réciproque par l'analytique.

Soit un repère \mathcal{R} d'origine F , tel que la droite Δ ait pour équation $x = d$, (repère orthonormé bien sûr).

Un point M de coordonnées x et y se projetant orthogonalement en $H : (d, y)$ sur Δ , on aura :

$$MF = e MH \iff x^2 + y^2 = e^2(x - d)^2,$$

soit encore :

$$(1 - e^2)x^2 + 2e^2dx + y^2 = e^2d^2,$$

ce qui se met sous forme « canonique » :

$$(1 - e^2) \left(x + \frac{de^2}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = e^2d^2 + \frac{d^2e^4}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

et finalement, avoir le rapport $\frac{MF}{MH} = e$, équivaut à avoir :

$$\mathbf{8.24.} \quad \frac{\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2} \right)^2}{\frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2d^2}{1 - e^2}} = 1,$$

ce qui est bien l'équation cartésienne d'une ellipse, la comparaison avec l'équation 8.15 permettant de retrouver les valeurs $a = \frac{ed}{1 - e^2}$, (si $d > 0$, ce que je suppose) et $b = \frac{ed}{\sqrt{1 - e^2}}$, des demi-axes. ■

REMARQUE

Si je vous ai dégoûté par la longueur du raisonnement commencé en 8.21, j'en suis profondément désolé. Il n'est pas facile de rédiger actuellement des raisonnements dits de « géométrie pure » parce que l'on n'en fait

plus suffisamment, et que sans arrêt, on doit rejustifier des résultats qui, lorsqu'ils étaient acquis, permettaient de concevoir rapidement les raisonnements. La rapidité de la justification du Théorème 8.22 semble précher un faveur de l'analytique, mais ..., si on ne dispose que de l'équation 8.15 comme point de départ pour définir les ellipses, comment diable concevoir cette notion d'excentricité et de directrice? En fait c'est dans la diversité des points de vue que réside la richesse, ce que notre époque a un peu trop tendance à oublier, au nom d'une fausse conception, étriquée et niveleuse, (vers le bas!) de la démocratie.

3. Les hyperboles

DÉFINITION 8.25. — Soit un cercle C' dans un plan affine euclidien \mathcal{A} , et un point F extérieur à C' , (de centre F'). On appelle hyperbole de foyers F et F' , de cercle directeur C' associé à F , l'ensemble des centres M des cercles Γ tangents à C' et passant par F .

Comme F est extérieur à C' , le cercle Γ est extérieur à C' et lui est donc tangent extérieurement.

8.26. Construction point par point de l'hyperbole.

Soit φ un point du cercle C' , nous allons chercher s'il y a un point M de l'hyperbole H aligné avec F' et φ : ce sera le cas si et seulement si $M\varphi = MF$, donc si et seulement si M est intersection de la médiatrice du segment $[F, \varphi]$ et de la droite $\text{aff}(F', \varphi)$, et ces deux droites sont sécantes sauf si $\text{aff}(F', \varphi)$ et $\text{aff}(\varphi, F)$ sont perpendiculaires, ce qui correspond à φ en T_1 et T_2 , points de contact des tangentes à C' issues de F , (voir figure 8.26).

Lorsque φ varie sur C' , on établit ainsi une bijection entre les points de l'hyperbole H et ceux de $C' - \{T_1, T_2\}$ puisque la droite $\text{aff}(F', \varphi)$ « balaye » le plan, et que les points diamétralement opposés φ et φ' conduisent à deux points M et M' distincts car $M = M'$ conduirait à $M\varphi = M\varphi' = MF$, d'où M milieu de $[\varphi, \varphi']$, c'est-à-dire $M = F'$ et alors $F'\varphi = F'F$ est difficile à obtenir, avec F extérieur au cercle (C'), (voir figure 8.26).

Cette construction va nous permettre de justifier le

THÉORÈME 8.27. — Une hyperbole H de foyers F et F' est l'ensemble des points M du plan \mathcal{A} tels que $|MF - MF'| = 2a$.

On note $2a$ le rayon du cercle directeur C' et on pose $FF' = 2c$. (Au fait, on c'est vous ou moi, il serait plus seyant d'écrire je ou nous ...).

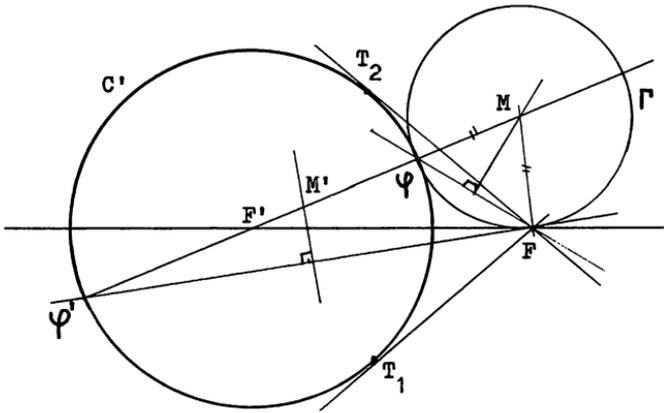


Fig. 8.26

On a $c > a$, (F extérieur à C'), et l'examen de la figure 8.26 montre que les deux cercles Γ et Γ' tangents à C' en φ et φ' diamétralement opposés sur C' sont tels que C' est extérieur à l'un, intérieur à l'autre, et que l'on a :

$$MF' - MF = MF' - M\varphi = F'\varphi = 2a,$$

alors que, pour M' centre du cercle Γ' ayant C' pour cercle intérieur, on a

$$M'F - M'F' = M'\varphi' - M'F' = F'\varphi' = 2a,$$

donc que dans l'un et l'autre cas, on a bien :

$$|MF - MF'| = 2a.$$

Etudions la réciproque.

Soient donc F et F' deux points tels que $FF' = 2c$, et M tel que $|MF - MF'| = 2a$, avec $c > a$.

Si $MF' \geq MF$, on a $MF' = 2a + MF \geq 2a$, ($M = F$ ne convient pas car alors $|FF - FF'| = 2c$ n'est pas $2a$), donc M est extérieur à C' et le segment $[F', M]$ coupe C' en φ , (voir figure 8.27.1), tel que :

$$M\varphi = MF' - F'\varphi = MF' - 2a, \quad \text{or}$$

$$|MF - MF'| = MF' - MF = 2a, \quad \text{donc} \quad MF' - 2a = MF :$$

le point M est bien centre d'un cercle tangent extérieurement en φ à C' , et passant par F .

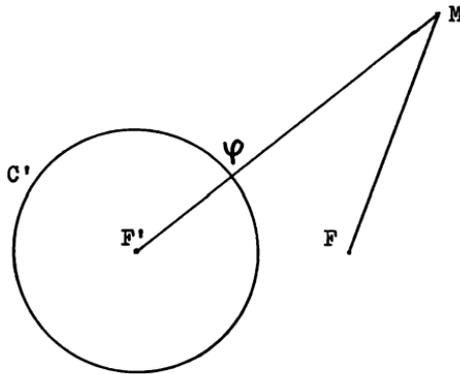


Fig. 8.27.1

Si $MF \geq MF'$, on a $MF - MF' = 2a$, donc $MF = MF' + 2a$: dans le prolongement, (à partir de F'), de MF' on porte $F'\varphi = 2a$, donc φ est sur C' , et $M\varphi = MF' + 2a = MF$: là encore M est centre d'un cercle Γ tangent à C' en φ , passant par F , cette fois C' étant intérieur à Γ , (voir figure 8.27.2). ■

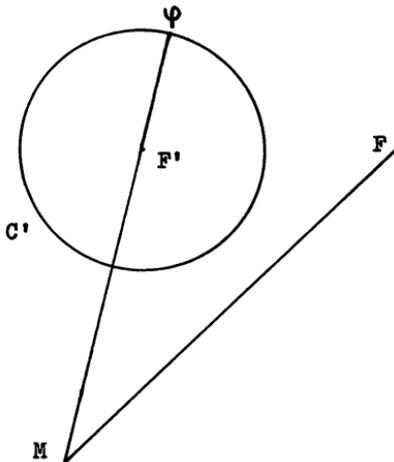


Fig. 8.27.2

REMARQUE 8.28. — Comme en 8.13. bis, les points F et F' jouant des rôles symétriques lorsque l'on exprime la condition $|MF - MF'| = 2a$, il est clair que l'hyperbole est aussi l'ensemble des centres des cercles passant par F' et tangents extérieurement au cercle C de centre F et de rayon $2a$.

8.29 ÉQUATION CARTÉSIENNE DE L'HYPERBOLE.

Comme pour l'ellipse, prenons un repère orthonormé d'origine O milieu de $[F, F']$, l'axe focal, $\text{aff}(F, F')$ étant axe des abscisses.

Si les coordonnées de F et F' sont respectivement $(c, 0)$ et $(-c, 0)$, un point $M(x, y)$ sera l'hyperbole H si et seulement si :

$$(\|\overrightarrow{MF}\| - \|\overrightarrow{MF'}\|)^2 = 4a^2, \quad \text{soit si et seulement si :}$$

$$(x - c)^2 + y^2 + (x + c)^2 + y^2 - 4a^2 = 2((x - c)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}((x + c)^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

soit, après simplification par 2, et en élevant au carré,

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 \geq 0 & \text{et} \\ (x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2 = (x^2 + y^2 + c^2 - 2cx)(x^2 + y^2 + c^2 + 2cx). \end{cases}$$

L'égalité, après développement et simplification par $(x^2 + y^2 + c^2)^2$ se ramène à :

$$-4a^2(x^2 + y^2 + c^2) + 4a^4 = -4c^2x^2,$$

soit encore à :

$$x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Posons alors $b^2 = c^2 - a^2$, ($c > a$), avec $b > 0$, en divisant par a^2b^2 cette égalité, elle s'écrit encore :

$$\mathbf{8.30.} \quad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

et l'inégalité $x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 \geq 0$ est alors vérifiée puisqu'avec $x^2 = a^2 + a^2\frac{y^2}{b^2}$, elle se réduit à :

$$a^2\frac{y^2}{b^2} + y^2 + c^2 - a^2 \geq 0, \quad \text{avec } b^2 = c^2 - a^2 > 0.$$

C'est donc que l'équation 8.30 caractérise l'hyperbole H . Nous allons exploiter cette équation pour justifier que :

THÉORÈME 8.31. — Une hyperbole H admet deux axes de symétrie orthogonale, d'où un centre de symétrie, et deux asymptotes.

L'équation 8.30 montre que les axes de coordonnées sont axes de symétrie et que l'origine est centre de symétrie.

De plus, en l'écrivant $y = \pm b \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}$, soit encore :

$$\begin{aligned} y &= \pm \frac{b}{a} |x| \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{pour } x \neq 0), \quad \text{ou} \\ &= \pm \frac{b}{a} |x| \left(1 - \frac{a^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right), \end{aligned}$$

on voit que les deux droites d'équation $y = \pm \frac{b}{a}x$ sont asymptotes à l'hyperbole. ■

REMARQUE 8.32. — *L'axe focal*, ($\text{aff}(F, F')$) est coupé par l'hyperbole en ses deux *sommets* $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$, alors que l'axe non focal, lui, ne rencontre pas H .

On peut aussi remarquer que sur H , courbe d'équation implicite :

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2}$$

ne sont jamais simultanément nulles, donc l'hyperbole admet en tout point une tangente, ce que nous allons retrouver géométriquement.

8.33. Construction géométrique de la tangente à l'hyperbole

On reprend, brièvement le raisonnement fait 8.17.

Soit l'hyperbole H de foyers F et F' , de cercle directeur associé à F noté C' , T_1 et T_2 les deux points de contact de C' et des tangentes à C' issues de F . On prend un point M_0 de H , associé à un point φ_0 de $C' - \{T_1, T_2\}$, et l'étude faite en 8.26 montre que l'on peut paramétrer H en fonction de θ , angle des vecteurs $\overrightarrow{F'F}$ et $\overrightarrow{F'\varphi}$, φ parcourant $C' - \{T_1, T_2\}$.

«Faire tendre» M , sur H , vers M_0 , revient à supposer que θ tend vers $\theta_0 = (\overrightarrow{F'F}, \overrightarrow{F'\varphi_0})$, donc à supposer que φ est pris sur l'arc de cercle limité par T_1 et T_2 , qui contient φ_0 , ce que nous ferons. De plus on suppose $|\theta - \theta_0| < \pi$, donc φ et φ_0 non diamétralement opposés sur C' , ce qui justifie le non parallélisme des tangentes en φ et φ_0 à C' , et l'existence de leur point d'intersection I , (voir figure 8.33.1).

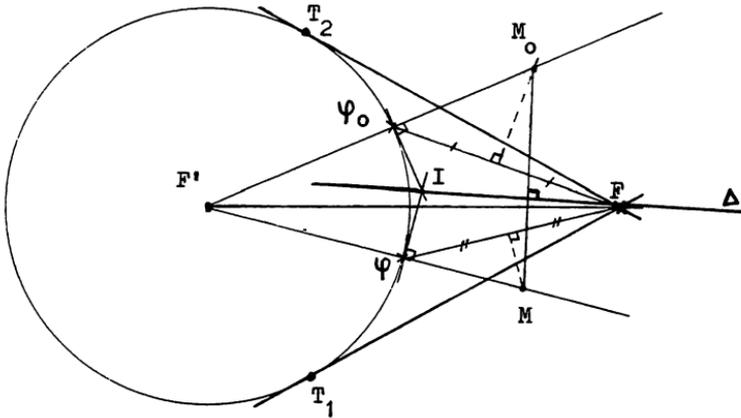


Fig. 8.33.1

On a $I\varphi_0^2 = I\varphi^2$, et c'est la puissance de I par rapport aux cercles C' , Γ_0 et Γ , tangents à C' en φ_0 et φ respectivement, donc I est sur l'axe radical Δ de Γ et Γ_0 , Δ étant perpendiculaire à $\text{aff}(M_0, M)$, ligne des centres, et Δ passe par F , point commun à Γ et Γ_0 .

Par ailleurs, un peu de trigonométrie dans le triangle rectangle $IF'\varphi_0$, d'angle en F' égal à $\left| \frac{\theta - \theta_0}{2} \right|$, nous donne :

$$I\varphi_0 = F'\varphi_0 \operatorname{tg} \left| \frac{\theta - \theta_0}{2} \right| = 2a \operatorname{tg} \left| \frac{\theta - \theta_0}{2} \right|,$$

donc : $\lim_{\theta \rightarrow \theta_0} I\varphi_0 = 0$.

Il en résulte que, si M tend vers M_0 sur l'hyperbole H , φ tend vers φ_0 sur C' , le point I a pour limite φ_0 , et la droite M_0M , perpendiculaire à $\text{aff}(I, F)$, a pour limite la perpendiculaire à $\text{aff}(\varphi_0, F)$ passant par M_0 , c'est-à-dire la médiatrice de $[\varphi_0, F]$ qui est la tangente en M_0 à l'hyperbole, ce qui est rappelé sur le schéma 8.33.2.

THÉORÈME 8.34. — Une hyperbole H est l'enveloppe du second côté d'un angle droit, dont le sommet décrit un cercle et dont le premier côté passe par un point fixe F , extérieur au cercle.

Car, si C'' est le cercle homothétique de C' dans l'homothétie, h , de centre F' et de rapport $\frac{1}{2}$, on a $h(\varphi) = S$, pied de la médiatrice du segment $[F, \varphi]$, (voir figure 8.34), donc S décrit C'' , privé des deux points $h(T_1)$ et $h(T_2)$ en fait, avec T_1 et T_2 points de contact des tangentes à C' issues

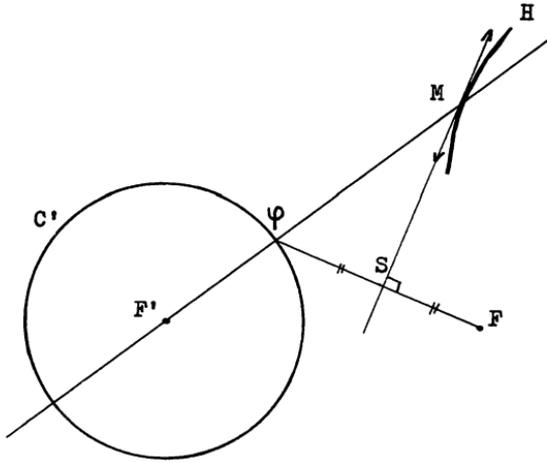


Fig. 8.33.2

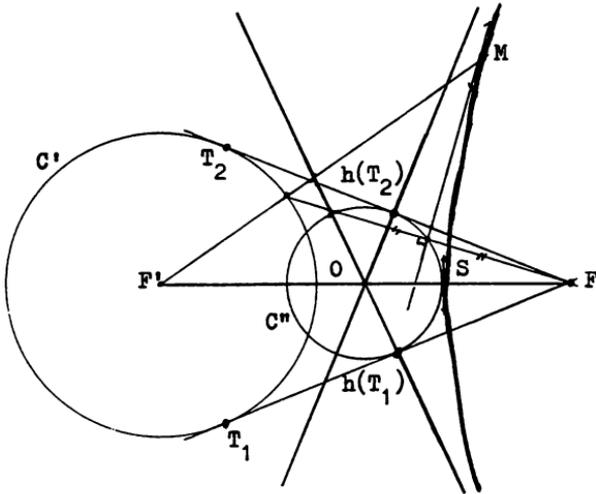


Fig. 8.34

de F , et il y a bijection entre les points de $C' - \{T_1, T_2\}$ et ceux de $C'' - \{h(T_1), h(T_2)\}$.

Les tangentes à H sont exactement les second côtés des angles droits de sommet S , de premier côté passant par F , de plus, les asymptotes de H sont associées aux points $h(T_1)$ et $h(T_2)$, qui, de ce fait peuvent ne pas être éliminés. ■

8.35. Un peu d'excentricité pour terminer?

Rassurez vous, grâce au travail fait en 8.21, cela sera plus rapide.

Soit φ sur l'un des deux arcs de C' limités par T_1 et T_2 , ($\varphi \neq T_1$ et $\varphi \neq T_2$), et soit φ_A l'intersection de cet arc et de $\text{aff}(F', F)$, voir figure 8.34 puis 8.35).

Le cercle C' , de rayon $2a$, et le cercle Γ , tangent extérieurement à C' en φ sont homothétiques l'un de l'autre par une homothétie de centre φ . Si r est le rayon de Γ , l'homothétie h de centre φ , de rapport $-\frac{r}{2a}$ est telle que $h(C') = \Gamma$.

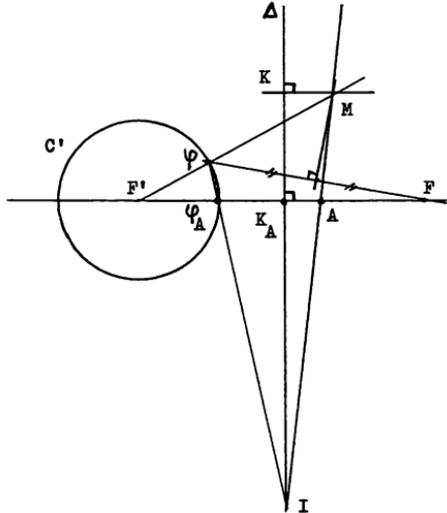


Fig. 8.35

De même, l'homothétie h_A de centre φ_A , de rapport $-\frac{r_A}{2a}$ transforme C' en Γ_A , cercle centré en A , tangent au cercle C' en φ_A , de rayon r_A , tangent extérieurement, donc l'application $h' = h_A \circ h^{-1}$ transforme Γ en Γ_A . Or h' est une translation, ou une homothétie, suivant que $r = r_A$ ou non, (voir Tome 4, Théorème 1.63).

Comme en 8.21, l'utilisation de l'équation de l'hyperbole montre qu'éliminer de H les points M tels que $r = r_A$ revient à éliminer au plus trois points de H , (A et deux symétriques par rapport à l'axe focal), ce que nous faisons sans scrupule, un passage à la limite nous permettant d'étendre à ces points tout résultat dépendant continuellement de M variant sur H . Pendant qu'on y est, éliminons aussi l'autre sommet A' .

On sait alors que h' est une homothétie de centre I aligné avec φ et φ_A , (voir Tome 4, en 1.63 l'étude de la composée de deux homothéties), mais aussi avec les centres M et A des cercles Γ et Γ_A .

On sait aussi (Tome 4, Théorème 4.94), que I est centre (ou plutôt pôle) d'une inversion \mathcal{I} échangeant Γ et Γ_A , car ces deux cercles, sécants en F non aligné avec M et A (puisque $M \neq A'$, autre sommet de l'hyperbole) sont non tangents, donc I n'est pas sur Γ ni sur Γ_A .

Comme en 8.21, en considérant l'inversion \mathcal{I} de pôle I , de puissance $k = \overrightarrow{I\varphi} \cdot \overrightarrow{I\varphi_A}$, on a $\mathcal{I}(\varphi_A) = \varphi$, k est la puissance de I par rapport au cercle C' donc $\mathcal{I}(C') = C'$, et l'inverse de Γ_A est un cercle passant par φ , tangent à C' : c'est Γ . Comme Γ et Γ_A se coupent en F , on justifie encore que $\overrightarrow{IF}^2 = k = \overrightarrow{I\varphi} \cdot \overrightarrow{I\varphi_A}$ donc I appartient à l'axe radical Δ du faisceau de cercles déterminé par C' et le cercle point F .

L'homothétie h' , de centre I sur Δ , de rapport $\frac{r_A}{r}$ est telle que $h'(\Delta) = \Delta$, $h'(M) = A$, (centres des cercles Γ et Γ_A , avec $h'(\Gamma) = \Gamma_A$), donc en projetant M et A en K et K_A sur Δ , on aura $h'(K) = K_A$, et, pour les longueurs, $AK_A = \frac{r_A}{r} MK$, d'où, puisque $MF = r$, l'égalité :

$$\frac{MK}{MF} = \frac{AK_A}{r_A} = \text{constante par rapport à } M.$$

Comme pour l'ellipse, on écrit le rapport dans l'ordre :

$$\frac{MF}{MK} = \frac{r_A}{AK_A} = \frac{A\varphi_A}{AK_A} = e > 1,$$

puisque, F étant extérieur à C' , le pied de l'axe radical Δ est entre F et φ_A .

On peut alors vérifier que :

THÉOREME 8.36. — Soit une droite Δ d'un plan affine euclidien \mathcal{A} , un point F non sur Δ et un réel $e > 1$. Une hyperbole est caractérisée comme ensemble des points M dont le rapport des distances à F et Δ respectivement est constant, égal à e , qui s'appelle l'excentricité de l'hyperbole, Δ étant la directrice associée au foyer F .

Nous venons d'établir ce résultat pour M variant sur une branche de l'hyperbole.

Pour M sur l'autre branche, on est conduit à un rapport $\frac{MF}{MK} = \frac{A'\varphi_{A'}}{A'K_{A'}} = e' > 1$, avec e' pouvant être différent de e . Mais les calculs faits dans la réciproque montreront que $e = e'$.

La réciproque nous sera, comme pour les ellipses, fournie par l'analytique.

Les calculs faits pour justifier le Théorème 8.22 sont valables ici, et, si dans un repère orthonormé \mathcal{R} , la droite Δ a pour équation $x = d$, F étant origine de \mathcal{R} , le point M de coordonnées x et y sera tel que $MF = eMH$, (H projection orthogonale de M sur Δ) si et seulement si, (voir 8.24)

$$8.37. \quad \frac{\left(x + \frac{de^2}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{e^2 d^2}{(1 - e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{e^2 d^2}{e^2 - 1}} = 1,$$

ce qui est bien une équation d'hyperbole, (voir 8.30) puisque $e^2 - 1 > 0$.

En posant $a = \frac{ed}{e^2 - 1}$, $b = \frac{ed}{\sqrt{e^2 - 1}}$, d étant supposé positif, et avec $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{e^4 d^2}{(1 - e^2)^2}$, on retrouve l'abscisse $-\frac{de^2}{1 - e^2}$ du centre de l'hyperbole et les valeurs des paramètres a , b et c .

De plus $\frac{b}{a} = (e^2 - 1)^{1/2}$. Or, (voir 8.31), $\frac{b}{a}$ et $-\frac{b}{a}$ sont les pentes des asymptotes de l'hyperbole, donc e^2 est parfaitement déterminé, ainsi que $e > 0$, ce qui achève la justification de la partie directe. ■

L'introduction de l'excentricité a permis de donner dans les Théorèmes 8.5, 8.22 et 8.36, une caractérisation de chaque type de conique de même nature, caractérisation très utile si on étudie les coniques «en polaires». De plus, la justification de ces théorèmes a montré l'importance de l'équation implicite, (dans un repère convenable) de chacune de ces coniques, équation qui est du second degré en x et en y .

Le paragraphe suivant va nous permettre de mieux utiliser ces renseignements.

4. Les coniques et l'analytique

Et commençons par la représentation des coniques «en polaires», en cherchant l'ensemble des points M du plan tels que le rapport des distances de M à un point fixe F , et à une droite fixe Δ ne contenant pas F soit constant, égal à $e > 0$.

On considère un repère orthonormé \mathcal{R} , ayant pour origine F , dans lequel la droite Δ a pour équation $x = d$, avec $d > 0$. Le point M de coordonnées (x, y) se projette orthogonalement en H , (d, y) , sur Δ .

Comme F n'est pas sur l'ensemble cherché, on peut caractériser M par ses coordonnées polaires (r, θ) , avec $r = FM$, (longueur, donc $r > 0$), et la longueur MH est alors $|d - r \cos \theta|$, (voir figure 8.38).

Par ailleurs la droite Δ régénère le plan en deux demi-plans, l'un contenant F , et si $e \leq 1$, les points du demi-plan ne contenant pas F étant plus éloignés de F que de Δ ne peuvent pas convenir, donc dans ce cas $d - r \cos \theta \geq 0$ et la conique est caractérisée par la condition :

$$8.38. \quad r = e(d - r \cos \theta) \quad \text{ou encore} \quad r(1 + e \cos \theta) = ed.$$

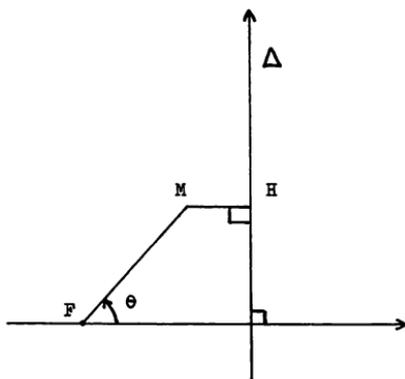


Fig. 8.38

Pour $e < 1$, (cas de l'ellipse), $1 + e \cos \theta$ reste toujours positif et l'équation

$$8.39. \quad r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}.$$

est l'équation polaire d'une ellipse E de foyer l'origine, d'excentricité e , de directrice la droite Δ , ($x = d$).

Pour $e = 1$, 8.38 a un sens sauf si $\theta = \pi(2\pi)$, et l'équation :

$$8.40. \quad r = \frac{d}{1 + \cos \theta}$$

est l'équation polaire d'une parabole de foyer l'origine et de directrice la droite d'équation $x = d$.

Si $e > 1$, (cas de l'hyperbole), l'hyperbole a deux branches situées de part et d'autre de la directrice Δ , et la relation $MF = rMH$ se traduira par :

$$\begin{aligned} r &= e(d - r \cos \theta) \quad \text{si} \quad d - r \cos \theta > 0, \\ \text{et par} \quad r &= -e(d - r \cos \theta) \quad \text{si} \quad d - r \cos \theta < 0, \end{aligned}$$

en imposant $r > 0$ dans les deux cas.

La première égalité s'écrit encore :

$$r(1 + e \cos \theta) = ed,$$

et si $\theta_0 = \text{Arccos} \left(-\frac{1}{e} \right)$, on a $1 + e \cos \theta > 0$ pour $-\theta_0 < \theta < \theta_0$:

l'équation polaire $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$ avec $\theta \in]-\theta_0, \theta_0[$, est celle de la branche d'hyperbole dans le demi-plan limité par Δ et contenant F .

L'égalité $r = -e(d - r \cos \theta)$ conduira à la relation $r = \frac{-ed}{1 - e \cos \theta}$, elle donne des valeurs positives de r si $-\text{Arccos} \frac{1}{e} < \theta < \text{Arccos} \frac{1}{e}$, avec $\text{Arccos} \frac{1}{e} = \pi - \theta_0$, et pour θ dans $]\theta_0 - \pi, \pi - \theta_0[$, l'équation $r = \frac{-ed}{1 - e \cos \theta}$ donne la deuxième branche d'hyperbole.

Si on pose $t = \pi - \theta$, t varie entre θ_0 et $2\pi - \theta_0$ quand θ varie de $\theta_0 - \pi$ à $\pi - \theta_0$, et avec $\rho = -r$, la relation $r = \frac{-ed}{1 - e \cos \theta}$ devient $\rho = \frac{ed}{1 + e \cos t}$, avec cette fois $\rho < 0$. Comme le passage de $m(r, \theta)$ à $m'(\rho, t)$ est une symétrie par rapport à l'axe focal de l'hyperbole, finalement

8.41. $r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$, avec $e > 1$,

est l'équation polaire de l'hyperbole de foyer l'origine de directrice la droite Δ d'équation $x = d$, les deux branches d'hyperbole correspondant respectivement aux valeurs positives et négatives de r .

Les schémas 8.41.1; 8.41.2 et 8.41.3 représentent respectivement le cas de l'ellipse, ($e < 1$), de la parabole ($e = 1$) et de l'hyperbole, ($e > 1$).

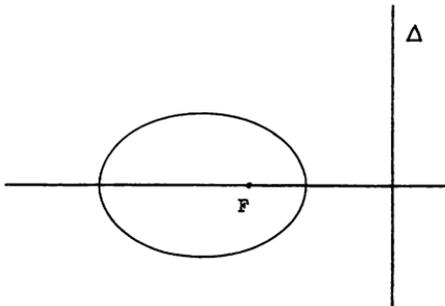


Fig. 8.41.1

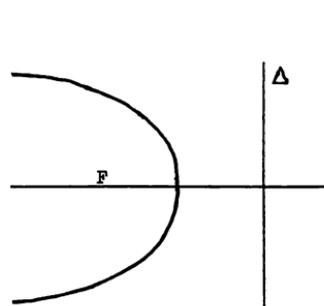


Fig. 8.41.2

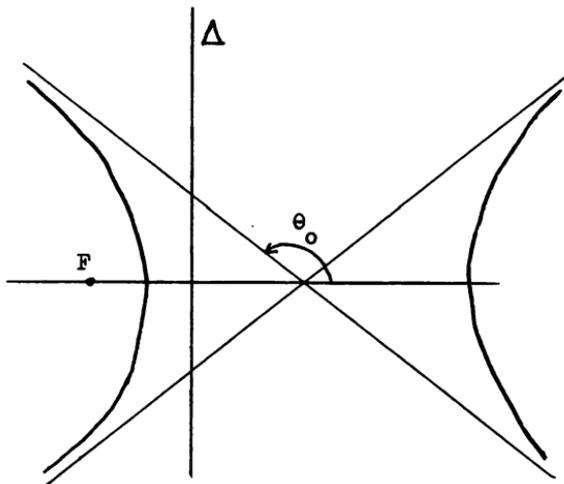


Fig. 8.41.3

Comme on peut faire « basculer » l'axe focal, on obtient plus généralement le théorème suivant :

THÉORÈME 8.42. — Soit le plan affine euclidien \mathcal{A} rapporté à un repère orthonormé \mathcal{R} , d'origine O , et la droite Δ d'équation d'Euler $x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0$. La conique de foyer O , de directrice associée Δ , d'excentricité e , a pour équation polaire l'équation :

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}$$

Le résultat découle immédiatement de 8.39, 8.40 et 8.41. ■

VENONS-EN MAINTENANT À LA CLASSIFICATION DES COURBES DU SECOND DEGRÉ.

DÉFINITION 8.43. — On appelle courbe du second degré, du plan affine \mathcal{A} , l'ensemble des points M du plan, de coordonnées x, y dans un repère \mathcal{R} , liées par une relation du type $P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, avec a, b, c non tous nuls.

Le fait, pour M , d'avoir ses coordonnées qui annulent un polynôme du second degré est indépendant du repère \mathcal{R} , un changement de repère se traduisant par des formules en $x = \alpha X + \beta Y, y = \gamma X + \delta Y$ qui conduisent à un polynôme $Q(X, Y)$, également du second degré.

La discussion sur la nature de cet ensemble de points va porter sur la forme quadratique $\phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, et, comme on est sur \mathbb{R} , sur la signature de ϕ .

Rappelons, (voir Tome 3, Corollaire 14.69), qu'à toute forme quadratique ϕ de \mathbb{R}^2 , on peut associer une base orthonormée pour la structure euclidienne de \mathbb{R}^2 , et conjuguée pour ϕ , ce que nous ferons : soit \mathcal{B} une telle base de \mathbb{R}^2 et \mathcal{S} le repère obtenu en remplaçant la base de \mathcal{R} par \mathcal{B} , sans changer d'origine.

Si X et Y sont les nouvelles coordonnées, la relation $P(x, y) = 0$ s'écrit, dans le repère \mathcal{S} , sous la forme $Q(X, Y) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma X + \delta Y + \varepsilon = 0$.

8.43.1 PREMIER CAS : LA FORME ϕ EST DE RANG DEUX.

Après décomposition en carrés, on obtient α et β non nuls, d'où une « mise sous forme canonique » de Q en :

$$\alpha \left(X + \frac{\gamma}{2\alpha} \right)^2 + \beta \left(Y + \frac{\delta}{2\beta} \right)^2 = \frac{\gamma^2}{4\alpha} + \frac{\delta^2}{4\beta} - \varepsilon,$$

soit, en posant :

$$X' = X + \frac{\gamma}{2\alpha}, \quad Y' = Y + \frac{\delta}{2\beta}, \quad \lambda = \frac{\gamma^2}{4\alpha} + \frac{\delta^2}{4\beta} - \varepsilon; \text{ l'équation :}$$

$$8.44. \quad \alpha X'^2 + \beta Y'^2 = \lambda.$$

Si $\lambda = 0$, et si $\alpha\beta > 0$, l'ensemble est réduit au point de coordonnées $X' = Y' = 0$; alors que $\alpha\beta < 0$ conduit à deux droites d'équations :

$$Y' = \pm \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} X'.$$

Si $\lambda \neq 0$ et si α, β étant de même signe, on a λ de signe contraire, l'ensemble est vide.

On écarte ce cas, et en divisant par λ non nul, l'équation 8.44 devient

$$\frac{X'^2}{\frac{\lambda}{\alpha}} + \frac{Y'^2}{\frac{\lambda}{\beta}} = 1,$$

et pour $\frac{\lambda}{\alpha}$ et $\frac{\lambda}{\beta}$ de même signe, positif ici puisque l'ensemble vide est écarté, on a une ellipse, (voir 8.15), alors que α et β de signes contraires conduit à l'hyperbole, (voir 8.30).

8.43.2. DEUXIÈME CAS : LA FORME ϕ EST DE RANG UN.

On est conduit à un seul carré, donc à une expression :

$$Q(X, Y) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma Y + \delta = 0, \quad \text{avec } \alpha \neq 0,$$

qui s'écrit encore sous la forme :

$$\alpha \left(X + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \gamma Y + \delta - \frac{\beta^2}{4\alpha} = 0.$$

Si $\gamma = 0$, on a l'ensemble d'équation :

$$\alpha \left(X + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 = \frac{\beta^2}{4\alpha} - \delta;$$

donc si α et $\frac{\beta^2}{4\alpha} - \delta$ sont de signes contraires, c'est l'ensemble vide; alors que α et $\frac{\beta^2}{4\alpha} - \delta$ de même signe nous conduit à deux droites parallèles, d'équations

$$X = -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \left(\frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{2}},$$

(le cas $\frac{\beta^2}{4\alpha} - \delta = 0$ donnant une droite, dite double).

Si $\gamma \neq 0$, l'équation s'écrit encore :

$$\alpha \left(X + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \gamma \left(Y + \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta^2}{4\alpha\gamma} \right) = 0,$$

et en posant :

$$X + \frac{\beta}{2\alpha} = X', \quad Y + \frac{\delta}{\gamma} - \frac{\beta^2}{4\alpha\gamma} = Y' \quad \text{et} \quad 2p = -\frac{\gamma}{\alpha},$$

on obtient finalement l'équation $X'^2 = 2pY'$ d'une parabole, (voir 8.4).

8.45. CONCLUSIONS.

En convenant d'appeler *hyperbole dégénérée* un couple de droites sécantes, *parabole dégénérée* une droite ou deux droites parallèles, et *ellipse dégénérée* un point, on peut finalement dire qu'une courbe du second degré est soit l'ensemble vide, soit une hyperbole si la forme quadratique ϕ

est de signature (1,1), une ellipse si la signature est (2,0) ou (0,2), et enfin une parabole si la signature est (1,0) ou (0,1).

Nous retrouverons, au chapitre X sur les quadriques, ce type de classification, (voir 10.33).

REMARQUE 8.46. — Si on s'inspire de l'étude faite en 6.83, des branches infinies d'une courbe Γ d'équation implicite $P(x, y) = 0$ avec P fonction polynôme, on a vu que les directions asymptotiques étaient parmi les directions de droites annulant la partie homogène de plus haut degré de P , c'est-à-dire ici $ax^2 + bxy + cy^2$, en reprenant l'équation dans le repère orthonormé initial, (voir 8.43).

Mais nous savons ici que Γ est vide, ou bien une ellipse, (pas de branche infinie), une parabole, (une seule branche infinie) ou une hyperbole, (deux asymptotes).

La factorisation de $ax^2 + bxy + cy^2$ conduira donc au type de la conique, si elle est non vide, d'où :

$$\begin{array}{ll} b^2 - 4ac < 0, & \text{on a le type ellipse,} \\ b^2 - 4ac = 0, & \text{on a le type parabole,} \\ b^2 - 4ac > 0, & \text{on a le type hyperbole.} \end{array}$$

Dans ce cas particulier l'hyperbole est équilatère lorsque le « produit des pentes » des asymptotes est -1 , donc lorsque « $\frac{a}{c} = -1$ ou $\frac{c}{a} = -1$ » soit $a + c = 0$, les guillemets pour tenir compte des cas particuliers associés à a ou c nul, mais aussi pour signaler que ceci n'est valable que si le repère initial est orthonormé. On a :

REMARQUE 8.47. — Une courbe du second degré non vide, d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, dans un repère orthonormé est une hyperbole équilatère si et seulement si $a + c = 0$.

Car alors $b^2 - 4ac = b^2 + 4a^2$ avec a et b non tous deux nuls, (où serait le second degré sinon?) donc $b^2 - 4ac > 0$: on a une hyperbole, et si $c \neq 0$, les pentes des asymptotes, t_1 et t_2 vérifient $t_1 t_2 = \frac{a}{c} = -1$, alors que $c = 0$ implique $a = 0$, d'où une équation en $bxy + dx + ey + f = 0$, équation d'une hyperbole d'asymptotes parallèles aux axes de coordonnées qui sont ici perpendiculaires. ■

5. Pourquoi coniques ?

C'est vrai quoi, d'où vient cette appellation ? Et bien de ce que les coniques, connues depuis la plus haute antiquité, (demandez donc à Apollonius de Perge, 3^e et 2^e siècle av. J.C., comment il faisait, sans ordinateur ...) se sont introduites comme *sections d'un cône de révolution et d'un plan*. Et, avec cette façon de les aborder, on obtient directement la notion de foyer, directrice associée et excentricité.

Alors, si vous le voulez bien, un petit peu de cette géométrie dite « pure » va nous permettre de retrouver ces résultats.

Soit un cône de révolution C , de sommet S , d'axe Δ et de demi-angle au sommet θ , avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, dans un espace affine euclidien de dimension trois, et soit un plan P . Tout plan perpendiculaire à P , et contenant Δ , est plan de symétrie, (orthogonale) pour P et pour C .

Mais alors, si Δ est perpendiculaire à P , le cône étant de révolution d'axe Δ , $P \cap C$ est un cercle d'axe Δ si S n'est pas dans P , et $P \cap C = \{S\}$ dans le cas particulier de P perpendiculaire en S à Δ .

On suppose désormais le plan P et l'axe Δ non orthogonaux, et soit π le plan orthogonal à P , contenant Δ , plan de symétrie pour la figure, et d l'intersection des deux plans π et P .

8.48. Cas particulier de P passant par S , sommet du cône.

On note φ l'angle de Δ et du plan P , c'est-à-dire l'angle de Δ et de sa projection orthogonale, d , sur P , ou plus exactement la mesure en radian, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, de cet angle de droites.

Comme le montre la figure 8.48, on a :

- si $0 \leq \varphi < \theta$, $P \cap C$ est formé de deux génératrices;
- si $\varphi = \theta$, P est tangent au cône C et $P \cap C$ est une génératrice;
- si $\theta < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $P \cap C = \{S\}$.

8.49. Cas général : nous supposons désormais P non perpendiculaire à Δ , et ne passant pas par S .

Considérons encore le plan de symétrie π , la droite $d = \pi \cap P$ est soit parallèle à une génératrice, (figure 8.49.1), soit sécante à deux génératrices, (figure 8.49.2), mais dans les deux cas de figures, vous n'aurez pas de mal à vous persuader de l'existence d'un cercle tangent à d en F , et tangent aux deux génératrices, sections du cône et du plan π . (Et même, dans le

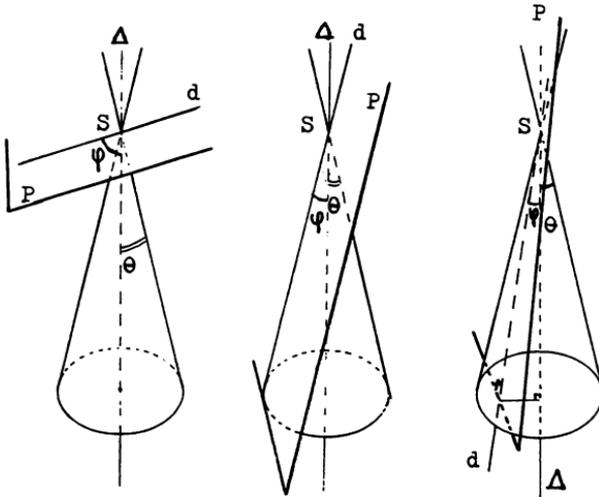


Fig.8.48

deuxième cas, il y a deux cercles solutions, inscrit et exinscrit pour renouer avec le vocabulaire passé ...).

Soit σ ce cercle, (ou l'un de ces cercles), par rotation autour de Δ , σ engendre une sphère Σ tangente au cône C le long d'un cercle noté γ , situé dans un plan P_0 perpendiculaire à Δ , et aussi tangente en F au plan P , puisque, si Ω est le centre de σ , ΩF est perpendiculaire au plan P , (voir figure 8.49.3, qui correspond au cas de la figure 8.49.2).

Soit M un point de $\Gamma = P \cap C$, que l'on projette orthogonalement en m sur le plan P_0 . Comme $S \notin P$, on a $M \neq S$, la génératrice aff(S, M) existe et coupe le cercle γ en point noté α .

Les plans P_0 et P ne sont pas parallèles, (l'un est perpendiculaire à Δ , l'autre pas) donc $D = P \cap P_0$ existe. Soit H la projection orthogonale de M sur D , (figure 8.49.3), il va me falloir justifier que M est distinct de m et de H .

Pour cela, dans le plan de symétrie π , soit $d_0 = \pi \cap P_0$: c'est la droite aff(N, N'), avec N et N' points de contacts du cercle σ et des deux génératrices du cône qui sont dans π , (voir figures 8.49.1 et 8.49.2), et $K = d \cap d_0$ est aussi $D \cap \pi$, c'est un point de la tangente en F à σ , donc un point tel que $KF^2 = \overline{KN} \cdot \overline{KN'}$, (puissance de K par rapport à σ), c'est positif non nul, sinon $F = K = N'$ et la droite d serait une génératrice du cône, donc S serait dans P , ce qui est exclu. Donc K est extérieur à $[N, N']$ et la droite D , perpendiculaire en K au plan π , est extérieure au cône.

Comme M est sur le cône et H sur D , on a $M \neq H$. Mais alors, si on avait $M = m$, le plan P contiendrait $M = m$ qui est dans P_0 , non sur D ,

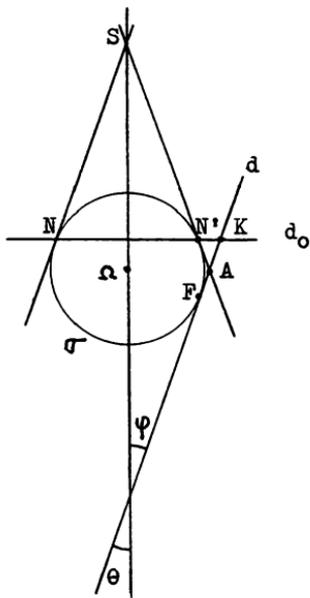


Fig. 8.49.1

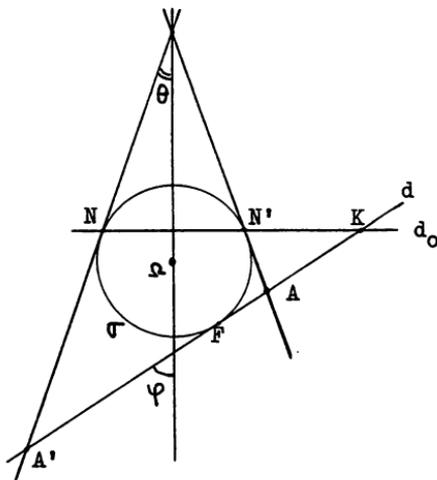


Fig. 8.49.2

donc P serait $\text{aff}(D, m) = P_0$: c'est exclu, P n'étant pas perpendiculaire à Δ .

On a bien $M \neq m$ et $M \neq H$.

Mais alors, dans le triangle $Mm\alpha$, rectangle en m , on a :

$$\widehat{mM\alpha} = \widehat{MS\Delta} = \theta, \text{ (} Mm \text{ et } \Delta \text{ parallèles ...) , d'où : } \cos \theta = \frac{mM}{M\alpha}.$$

Mais MmH est aussi rectangle en m , et mM étant parallèle à Δ , on a $\widehat{mMH} = \varphi$, angle du plan P et de Δ , d'où $\cos \varphi = \frac{mM}{MH}$.

Mais alors, $mM = MH \cos \varphi = M\alpha \cos \theta$, et comme $M\alpha = MF$, (deux tangentes à la sphère Σ issues de M , vous pensez bien), on a $MH \cos \varphi = MF \cos \theta$, donc $\frac{MF}{MH} = \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}$ est une constante par rapport à M , et MH est la distance du point M à la droite D .

Nous pouvons alors justifier le :

THÉORÈME 8.50. — Soit un cône de révolution C de sommet S , d'axe Δ , de demi-angle au sommet $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, et un plan P ne contenant pas S , d'angle φ avec Δ . Alors $P \cap C$ est une conique d'excentricité $e = \frac{\cos \varphi}{\cos \theta}$.

EXERCICES

1. Etudier les courbes planes C_λ d'équation :

$$(x + \lambda y) + (x - \lambda y)^2 = 0.$$

Lieu de leurs centres de courbure en 0.

2. Rectangles d'aire maximale circonscrits à une ellipse.
3. Soit l'ellipse E de grand axe $[A, A']$, M un point de $[A, A']$ et Δ la droite orthogonale à $[A, A']$ en M .
Deux points P et Q de l'ellipse sont tels que I milieu de $[P, Q]$ est sur Δ . Enveloppe des droites (P, Q) .
4. Soit un cône de révolution S de demi-angle au sommet α .
Caractériser les plans coupant S suivant une hyperbole équilatérale.
5. Soit l'arc paramétré Γ : $x = \frac{a + bt}{1 + t^2}$, $y = t \frac{a + bt}{1 + t^2}$ et $z = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$.
Montrer que l'arc est plan. Quel en est la nature.
6. Ensemble des centres des hyperboles équilatérales tangentes en un point donné à une droite donnée, dans un plan affine euclidien.
7. Soit la parabole \mathcal{P} d'équation $y^2 = 2px$, une droite variable Δ passant par le foyer F recoupe \mathcal{P} en A et B . Ensemble des centres des cercles circonscrits au triangle OAB .
8. Etudier l'ensemble des points M du plan par où passent deux tangentes perpendiculaires à une parabole \mathcal{P} donnée.
9. Et dans la foulée, ensemble des points M du plan d'une ellipse par où on peut mener deux tangentes à l'ellipse, perpendiculaires.
10. Nature des courbes planes d'équations :

$$(A) : b^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2by = 0, \quad \text{et}$$

$$(B) : (bx + ay)^2 - 4a^2by = 0,$$

dans un repère orthonormé, avec $a > 0$, $b > 0$. Intersections de (A) et (B) . Rayons de courbures de (A) et (B) en $(0,0)$.

11. Soit (H) l'hyperbole d'équation $xy = k^2$, soit $a > 0$ et les points $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$. Trouver le lieu des centres des hyperboles isométriques à (H) qui passent par A et A' .
12. Soit deux cercles C_1 et C_2 du plan euclidien, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$d(M, C_1) + d(M, C_2) = a.$$

Discussion selon a .

SOLUTIONS

1. Les courbes sont des coniques, (équation du second degré).

Pour $\lambda = 0$, C_0 a pour équation $x + x^2 = x(x+1) = 0$: c'est une parabole dégénérée formée des deux droites parallèles d'équations $x = 0$ et $x = -1$.

Pour $\lambda \neq 0$, si on pose $X = x - \lambda y$ et $Y = x + \lambda y$, dans le repère $(O; I, J)$ tel que la matrice de passage P vérifie l'égalité $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, d'où

$P = \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, C_λ est la parabole d'équation $Y = -X^2$. Elle passe par O

et admet pour tangente en O la droite $Y = 0$, ou encore d'équation $y = -\frac{1}{\lambda}x$ dans l'ancien repère.

CENTRES DE COURBURE. Si λ donne $-\lambda$, x inchangé et y donne $-y$, l'équation est conservée donc $C_{-\lambda}$ est symétrique de C_λ par rapport à $0x$: on suppose donc $\lambda > 0$.

On peut paramétrer la parabole C_λ en posant $x - \lambda y = t$, d'où $x + \lambda y = -t^2$, système qui se résout en :

$$x = \frac{1}{2}(t - t^2), \quad y = -\frac{1}{2\lambda}(t + t^2),$$

l'origine étant associée à $t = 0$. On a :

$$x' = \frac{1}{2}(1 - 2t); \quad x'' = -1; \quad y' = -\frac{1}{2\lambda}(1 + 2t); \quad y'' = -\frac{1}{\lambda}.$$

On suppose la parabole orientée par les t croissant, le vecteur $\overrightarrow{T(0)}$ est obtenu en normant le vecteur $\overrightarrow{V} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\lambda} \right)$:

on a $\overrightarrow{T(0)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \overrightarrow{i} - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \overrightarrow{j}$, d'où

$\overrightarrow{N(0)}$, directement perpendiculaire :

$$\overrightarrow{N(0)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \overrightarrow{i} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \overrightarrow{j}.$$

On a pour rayon de courbure $\mathcal{R}(0) = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''x' - x''y'}$, calculé en 0, d'où :

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\left(\frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{2\lambda}} = -\frac{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}{8\lambda^2}$$

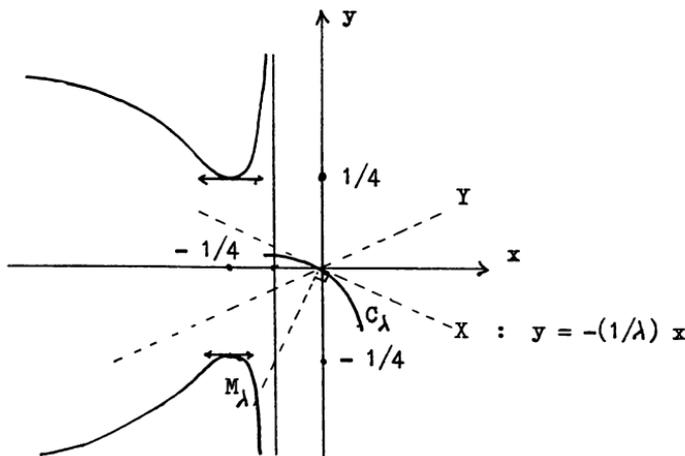
et le centre de courbure M_λ de C_λ en 0 a pour coordonnées, $\lambda > 0$,

$$x = -\frac{1+\lambda^2}{8\lambda^2} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8\lambda^2} \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{8} \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right).$$

On a $x' = \frac{1}{4\lambda^3}$, $y' = -\frac{1}{8}(1 - \frac{1}{\lambda^2})$, d'où les variations.

λ	0		1		$+\infty$
x'			+		
x	$-\infty$		\nearrow		$-\frac{1}{8}$
y	$-\infty$	\nearrow	$-\frac{1}{4}$	\searrow	$-\infty$
y'		+	0	-	

Comme $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda = 0$, cette courbe admet une branche parabolique dans la direction Ox .



Exercice 8.1

2. On prend l'ellipse E d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ dans un repère orthonormé, avec $0 < b < a$.

Les tangentes à l'ellipse vont être prises par des équations normales : D_θ d'équation $x \cos \theta + y \sin \theta - p(\theta) = 0$, c'est encore la droite passant par $H(\theta)$ de coordonnées $(p \cos \theta, p \sin \theta)$ de vecteur directeur $\vec{v}(\theta)$:

$$\left(\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Une telle droite est paramétrée en :

$$x = p \cos \theta - \lambda \sin \theta, \quad y = p \sin \theta + \lambda \cos \theta,$$

et elle est tangente à E si l'équation du second degré en λ , paramètre d'un point d'intersection, a une racine double.

Cette équation s'écrit :

$$\frac{(\lambda \sin \theta - p \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{(\lambda \cos \theta + p \sin \theta)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

soit encore :

$$\lambda^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{b^2} \right) + 2\lambda p \cos \theta \sin \theta \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + p^2 \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + p^2 \frac{\sin^2 \theta}{b^2} - 1 = 0,$$

et elle a une racine double si et seulement si :

$$p^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4 b^4} - \frac{(b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta)}{a^4 b^4} (p^2 (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) - a^2 b^2) = 0,$$

soit si (pourvu que cela s'arrange) :

$$p^2 (a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + b^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 2a^2 b^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - a^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - b^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - a^2 b^2 \sin^4 \theta - a^2 b^2 \cos^4 \theta) + a^2 b^2 (b^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta) = 0,$$

et comme la grande parenthèse, facteur de p^2 , ne vaut finalement que $-a^2 b^2$, (on croit rêver), D_θ est finalement tangente si et seulement si :

$$p^2(\theta) = a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta.$$

La distance entre deux tangentes parallèles à l'ellipse, obtenues pour θ et $\theta + \pi$, est donc :

$$2\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta},$$

et pour deux autres tangentes, perpendiculaires aux précédentes, (d'où un rectangle), associées à $\theta + \frac{\pi}{2}$ et $\theta + \frac{3\pi}{2}$, elle sera de :

$$2\sqrt{a^2 \cos^2(\theta + \frac{\pi}{2}) + b^2 \sin^2(\theta + \frac{\pi}{2})} = 2\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}.$$

L'aire d'un rectangle circonscrit à l'ellipse est donc :

$$S = 4((a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta))^{\frac{1}{2}}, \\ = 4((a^4 + b^4) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + a^2 b^2 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta))^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\cos^4 \theta + \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 - 2\cos^2 \theta \sin^2 \theta$, on a :

$$S = 4 \left((a^4 + b^4) \frac{(\sin 2\theta)^2}{4} + a^2 b^2 - \frac{a^2 b^2}{2} \sin^2 2\theta \right)^{\frac{1}{2}},$$

ou
$$S = 4 \left(a^2 b^2 + \frac{1}{4} (a^2 - b^2)^2 (\sin 2\theta)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On voit donc que S est minimale pour $\sin 2\theta = 0$, soit $\theta = 0(\frac{\pi}{2})$: côtés parallèles aux axes, et maximale pour $\theta = \frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2})$: côtés parallèles aux bissectrices.

Dans ce cas, $\cos^2\theta = \sin^2\theta = \frac{1}{2}$ donc $|p(\theta)| = |p(\theta + \frac{\pi}{2})|$: le rectangle est un carré.

On peut aussi remarquer que, pour θ quelconque, les sommets d'un rectangle circonscrits sont à une distance d du centre telle que :

$$d^2 = p^2(\theta) + p^2(\theta + \frac{\pi}{2}) = a^2 + b^2 :$$

ils sont sur le cercle de centre 0, de rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$, *cercle de Monge de l'ellipse*.

3. On prend un repère orthonormé associé aux axes de l'ellipse qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

On se donne le point $M(d, 0)$ avec $|d| \leq a$, et même, (symétrie en Oy), $0 \leq d \leq a$.

On cherche si par $I(d, t)$, avec $\frac{t^2}{b^2} \leq 1 - \frac{d^2}{a^2}$, point de Δ intérieur à l'ellipse, il passe une corde $[P, Q]$ solution du problème. Pour cela, en prenant une droite d'équation $y - t = \lambda(x - d)$, (qui pivote autour de I), on cherche λ fonction de t , pour que les abscisses x' et x'' des points d'intersection vérifient la relation $x' + x'' = 2d$.

Tout se jouera donc sur l'équation de second degré :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(t + \lambda x - \lambda d)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

soit encore :

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} \right) + \frac{2\lambda}{b^2}(t - \lambda d)x + \frac{(t - \lambda d)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et λ doit être tel que :

$$\frac{2\lambda(\lambda d - t)}{\frac{b^2}{b^2 + a^2\lambda^2}} = 2d, \quad \text{ou} \quad \frac{(\lambda^2 d - \lambda t)a^2}{b^2 + a^2\lambda^2} = d,$$

soit : $\lambda = -\frac{db^2}{a^2t}$, pour $t \neq 0$.

Cette condition a un sens, si $t = 0$, I est en M , et la corde (P, Q) est alors portée par Δ d'équation $x = d$, ce qui correspondrait à λ infini.

L'équation de D_t devient :

$$y - t = -\frac{db^2}{a^2t}(x - d),$$

soit :

$$D_t : db^2x + a^2ty - a^2t^2 - d^2b^2 = 0,$$

d'où en dérivant en t : $D'_t a^2y - 2a^2t = 0$, ce qui conduit à une paramétrisation

$$y = 2t, \quad x = d - \frac{a^2}{db^2} t^2,$$

avec $|t| \leq b \left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, de l'enveloppe. C'est donc l'arc de la parabole d'équa-

tion $x = d - \frac{a^2}{4db^2} y^2$, limité par la condition $|y| \leq 2b \left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. On suppose que le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est tel que le cône S ait pour équation :

$$x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

(avec $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) ou encore $x^2 + y^2 + z^2 = z^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$.

Le plan P est supposé orthogonal au vecteur unitaire \vec{K} de coordonnées a, b, c telles que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

On prend un nouveau repère orthonormé $\mathcal{R}' = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

Les nouvelles coordonnées vérifieront la relation $x^2 + y^2 + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$, et une relation du type $z = uX + vY + wZ$, avec $u^2 + v^2 + w^2 = 1$,

(u, v, w sont les composantes de la troisième ligne de la matrice de passage, P , matrice orthogonale directe, de $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ à $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$; donc en fait on a $\vec{k} = u\vec{I} + v\vec{J} + w\vec{K}$, car $P^{-1} = {}^tP$ devient matrice de passage de $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ à $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, d'où la troisième colonne de tP qui donne les coordonnées de \vec{k}).

La nouvelle équation du cône est donc :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = (uX + vY + wZ)^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{(uX + vY + wZ)^2}{\cos^2 \alpha},$$

et la conique $P \cap S$ a pour équations dans ce repère, $Z = h$, et :

$$X^2 \left(1 - \frac{u^2}{\cos^2 \alpha}\right) + Y^2 \left(1 - \frac{v^2}{\cos^2 \alpha}\right) - \frac{2uvXY}{\cos^2 \alpha} + \alpha X + \beta Y + \gamma = 0,$$

les valeurs exactes de α, β et γ n'intervenant pas pour déterminer la nature de la conique, (on a évidemment remplacé Z par h).

Ce sera une hyperbole équilatérale si et seulement si :

$$1 - \frac{u^2}{\cos^2 \alpha} + 1 - \frac{v^2}{\cos^2 \alpha} = 0,$$

(dans l'équation aux pentes des directions asymptotiques, le produit des racines vaut -1 , voir 8.47), soit si et seulement si $2 \cos^2 \alpha = u^2 + v^2 = 1 - w^2$.

Or $w = \vec{k} \cdot \vec{K}$ puisque $\vec{k} = u \vec{I} + v \vec{J} + w \vec{K}$, c'est donc aussi $\vec{k} \cdot (a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}) = c$, et finalement, le plan P coupe S suivant une hyperbole équilatérale si et seulement si il est orthogonal à un vecteur $\vec{K} = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$ avec $c^2 = 1 - 2 \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha$, \vec{K} unitaire.

Ceci n'est possible que si $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$, et alors on a :

$$c = \vec{k} \cdot \vec{K} = \cos \theta = \pm \sqrt{-\cos 2\alpha},$$

d'où l'angle des droites supports de \vec{k} et \vec{K} :

$$\theta = \text{Arccos} \sqrt{-\cos 2\alpha} \quad \text{ou} \quad \pi - \text{Arccos} \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

5. Le paramétrage incite à poser $t = \text{tg} \frac{\varphi}{2}$, ce qui établit un C^∞ difféomorphisme de $] -\pi, \pi[$ sur \mathbb{R} . On alors :

$$\begin{aligned} x &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} (a + b \text{tg} \frac{\varphi}{2}) = a \cos^2 \frac{\varphi}{2} + b \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}, \\ &= \frac{a}{2} (1 + \cos \varphi) + \frac{b}{2} \sin \varphi, \\ y &= \cos^2 \frac{\varphi}{2} (a \text{tg} \frac{\varphi}{2} + b \text{tg}^2 \frac{\varphi}{2}) = a \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + b \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ &= \frac{a}{2} \sin \varphi + \frac{b}{2} (1 - \cos \varphi), \\ z &= \cos \varphi, \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} x - \frac{a}{2} &= \frac{a}{2} \cos \varphi + \frac{b}{2} \sin \varphi = \frac{a}{2} z + \frac{b}{2} \sin \varphi, \\ y - \frac{b}{2} &= -\frac{b}{2} \cos \varphi + \frac{a}{2} \sin \varphi = -\frac{b}{2} z + \frac{a}{2} \sin \varphi, \\ z &= \cos \varphi. \end{aligned}$$

L'élimination de $\sin \varphi$ entre les deux premières relations prouve que les coordonnées x , y et z vérifient la relation :

$$\begin{aligned} a(x - \frac{a}{2}z - \frac{a}{2}) &= b(y + \frac{b}{2}z - \frac{b}{2}), \quad \text{ou encore :} \\ ax - by - \frac{1}{2}(a^2 + b^2)z + \frac{b^2 - a^2}{2} &= 0, \end{aligned}$$

équation d'un plan, sauf si $a = b = 0$, mais dans ce cas l'arc est paramétré par $x = y = 0$ et $z = \cos \varphi \in [-1, 1]$: on a un segment de droite donc un arc plan.

Pour $(a, b) \neq (0, 0)$, par exemple $a \neq 0$, si on pose $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$, on a encore :

$$x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\cos \varphi + \operatorname{tg} \alpha \sin \varphi) = \frac{a}{2 \cos \alpha} \cos(\varphi - \alpha)$$

et
$$y - \frac{b}{2} = \frac{a}{2}(\sin \varphi - \operatorname{tg} \alpha \cos \varphi) = \frac{a}{2 \cos \alpha} \sin(\varphi - \alpha),$$

d'où la relation :

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4 \cos^2 \alpha} :$$

la courbe est sur un cylindre de révolution, et sur un plan non parallèle aux génératrices, (coefficient de z non nul) : c'est une ellipse.

6. On prend un repère orthonormé du plan, d'origine O , l'axe des x étant la droite donnée, et O le point donné.

Une conique, (équation polynomiale du second degré), passant par O sera une hyperbole équilatère si les coefficients de x^2 et y^2 sont opposés, (l'équation des pentes des directions asymptotiques ayant deux racines de produit -1). On a donc une équation du type :

$$x^2 + bxy - y^2 + cx + dy = 0.$$

Elle sera tangente en O à Ox si pour $y = 0$ on a une racine double, donc $c = 0$, et l'équation des hyperboles devient du type :

$$x^2 + bxy - y^2 + dy = 0.$$

On a cependant imposé aux directions asymptotiques d'avoir une pente (et oui), donc les hyperboles équilatères d'asymptotes parallèles aux axes nous échappent.

Mais une telle hyperbole, passant par O , tangente en O à Ox , d'asymptotes parallèles aux axes est dégénérée et contient Ox . Elle a une équation du genre $(x - \alpha)y = 0$ et son centre est alors le point $\omega(\alpha, 0)$ qui décrit $x'Ox$.

Retour au cas général. Le centre, $\omega(x_0, y_0)$, est tel qu'en prenant l'origine en ω l'équation devient paire en X et Y , donc, avec $x = x_0 + X$ et $y = y_0 + Y$, on doit annuler les coefficients des termes en X et en Y dans :

$$(x_0 + X)^2 + b(x_0 + X)(y_0 + Y) - (y_0 + Y)^2 + d(y_0 + Y) = 0,$$

d'où le système :

$$\begin{cases} 2x_0 + by_0 = 0 \\ bx_0 - 2y_0 = -d, \end{cases}$$

de déterminant $-(4 + b^2)$ qui se résoud en

$$x_0 = \frac{-db}{4 + b^2} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{2d}{4 + b^2}.$$

Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, on aura donc $b = -2\frac{x_0}{y_0}$, puis $d = \frac{1}{2}y_0 \left(4 + 4\frac{x_0^2}{y_0^2}\right)$, non nul car $y_0 \neq 0$, d'où une hyperbole solution.

L'ensemble cherché est donc le plan, l'axe des x , (c'est-à-dire la droite donnée) étant l'ensemble des centres des hyperboles dégénérées.

7. Le foyer F a pour coordonnées $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Comme Δ coupe \mathcal{P} en deux points si et seulement si $\Delta \neq OF$, on prend l'équation de Δ sous la forme $x - \frac{p}{2} - ty = 0$, d'où les ordonnées y_1 et y_2 des points A et B solutions de l'équation :

$$y^2 = 2p \left(\frac{p}{2} + ty\right) \quad \text{soit} \quad y^2 - 2pty - p^2 = 0.$$

On aura le centre Ω du cercle circonscrit à OAB en cherchant l'intersection des médiatrices de OA et OB et, vu la symétrie des rôles joués, ces coordonnées doivent s'exprimer à l'aide des fonctions symétriques de y_1 et y_2 qu'il est donc inutile de calculer trop vite. On note donc (x_1, y_1) les coordonnées de A et (x_2, y_2) celles de B .

Médiatrice de OA : $x_1\left(x - \frac{x_1}{2}\right) + y_1\left(y - \frac{y_1}{2}\right) = 0$,

(perpendiculaire à $\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$ en $A' : \left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right)$,

soit :

$$xx_1 + yy_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2),$$

et de même pour celle de OB :

$$xx_2 + yy_2 = \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2).$$

Par somme et différence ce système est équivalent à :

$$\begin{cases} x(x_1 + x_2) + y(y_1 + y_2) = \frac{1}{2}((x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2)) \\ x(x_1 - x_2) + y(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}((x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2)). \end{cases}$$

Or :

$$y_1 + y_2 = 2pt, \quad y_1 y_2 = -p^2,$$

donc :

$$y_1^2 + y_2^2 = (y_1 + y_2)^2 - 2y_1 y_2 = 4p^2 t^2 + 2p^2.$$

Puis

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{2p}(y_1^2 - y_2^2) = \frac{1}{2p}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = t(y_1 - y_2),$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2p}(y_1^2 + y_2^2) = 2pt^2 + p,$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = t(y_1 - y_2)(2pt^2 + p),$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2pt^2 + p)^2 - 2\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2},$$

$$\text{soit : } x_1^2 + x_2^2 = 4p^2t^4 + 4p^2t^2 + p^2 - \frac{p^2}{2}.$$

Après simplification par $y_1 - y_2$ de la 2^{ème} équation, les deux équations s'écrivent, (après réduction) :

$$\begin{cases} (1 + 2t^2)px + 2pty = p^2(2t^4 + 4t^2 + \frac{5}{4}) \\ tx + y = \frac{tp}{2}(3 + 2t^2) \end{cases} \left| \begin{array}{l} 1 \\ -2pt \end{array} \right. \begin{array}{l} -t \\ (1 + 2t^2)p \end{array}$$

système qui conduit à $x = p(\frac{5}{4} + t^2)$ et $y = \frac{tp}{4}$.

Comme t parcourt \mathbb{R} , l'ensemble cherché est la parabole d'équation :

$$y^2 = \frac{p}{16} \left(x - \frac{5p}{4} \right).$$

8. Soit dans un repère orthonormé du plan, la parabole P d'équation $x^2 = 2py$, ($p > 0$), paramétrée par $x = t$, $y = \frac{t^2}{2p}$.

La tangente en $M\left(t, \frac{t^2}{2p}\right)$ est dirigée par $\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{i} + \frac{t}{p}\vec{j}$ donc elle a pour équation :

$$(x - t)\left(-\frac{t}{p}\right) + y - \frac{t^2}{2p} = 0 \quad \text{ou encore} \quad 2xt - 2py - t^2 = 0.$$

Inversement, on peut dire que par $Q(x, y)$ il passera une tangente en $M\left(t, \frac{t^2}{2p}\right)$ si et seulement si on a :

$$t^2 - 2xt + 2py = 0.$$

Ceci n'est possible que si $x^2 - 2py \geq 0$, (Q extérieur à la parabole) et dans le cas où les vecteurs tangents $\vec{V}_1 = \vec{i} + \frac{t_1}{p}\vec{j}$ et $\vec{V}_2 = \vec{i} + \frac{t_2}{p}\vec{j}$ sont orthogonaux, c'est-à-dire si $1 + \frac{t_1t_2}{p^2} = 0$, on aura un point cherché. Ceci équivaut à $t_1t_2 = -p^2 = 2py$ soit à $y = -\frac{p}{2}$: l'ensemble cherché est la *directrice de la parabole*.

9. Soit un repère orthonormé du plan P , dans lequel l'équation de l'ellipse E est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et pour $M(X, Y)$ du plan, cherchons les pentes t , des tangentes passant par M , (non parallèles à Oy).

Si l'équation de la droite D_t est $y - Y = t(x - X)$, les abscisses, x , de ses points d'intersection avec l'ellipse E sont solutions de l'équation du second degré, (en x),

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(tx + Y - tX)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

qui s'ordonne en :

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{t^2}{b^2} \right) + \frac{2xt(Y - tX)}{b^2} + \frac{(Y - tX)^2}{b^2} - 1 = 0.$$

La droite D_t sera tangente si et seulement si on a une racine double en x , donc si et seulement si :

$$\frac{t^2(Y - tX)^2}{b^4} - \frac{(b^2 + a^2t^2)}{a^2b^2} \cdot \frac{((Y - tX)^2 - b^2)}{b^2} = 0,$$

ce qui conduit à :

$$a^2t^2b^2 + b^4 - b^2(Y - tX)^2 = b^2(a^2t^2 + b^2 - Y^2 - t^2X^2 + 2tXY) = 0,$$

soit encore à :

$$t^2(a^2 - X^2) + 2tXY + b^2 - Y^2 = 0,$$

et le point M sera tel que l'on puisse mener deux tangentes perpendiculaires à l'ellipse, par M , si et seulement si cette équation du second degré en t a deux racines de produit -1 , d'où la condition :

$$a^2 - X^2 = -b^2 + Y^2, \quad \text{ou} \quad X^2 + Y^2 = a^2 + b^2 :$$

on trouve le cercle orthoptique, (ou de Monge) de l'ellipse, (voir exercice n°2), cercle contenant les points $(a, \pm b)$, $(-a, \pm b)$, par où passent les tangentes parallèles aux axes.

REMARQUE : transformez b^2 en $-b^2$ dans ce calcul, et vous aurez la réponse pour une hyperbole, mais à condition d'avoir $a^2 - b^2 > 0$ dans ce cas .

10. L'équation de (A) s'écrit encore

$$b^2x^2 + a^2(y - b)^2 = a^2b^2, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

donc (A) est une ellipse d'axes Ox et Oy , de centre $\Omega(0, b)$, de demi-axes a et b . Elle est donc tangente en O à Ox .

De même (B) est une parabole tangente en O à Ox , (si $y = 0$ on a les points d'abscisse x tel que $b^2x^2 = 0$, d'où $x = 0$ racine double).

Si on veut retrouver l'axe focal de (B), il faudrait un changement de repère tel que $bx + ay$ corresponde à un changement de coordonnées, d'où la matrice P de passage telle que :

$$P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix}.$$

Avec :

$$x = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(bX - aY) \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(aX + bY),$$

on a :

$$bx + ay = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b^2X - abY + a^2X + abY) = \sqrt{a^2 + b^2}X,$$

et l'équation de (B) s'écrit :

$$(a^2 + b^2)X^2 - \frac{4a^2b}{\sqrt{a^2 + b^2}}(aX + bY) = 0,$$

donc, si on y tient vraiment :

$$(a^2 + b^2) \left(X - \frac{2a^3b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 - \frac{4a^2b^2Y}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4a^6b^2}{(a^2 + b^2)^2} = 0,$$

ou
$$\left(X - \frac{2a^3b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 - \frac{4a^2b^2}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \left(Y + \frac{a^4}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 0,$$

mais est-il vraiment intéressant de savoir que, dans le nouveau repère, le sommet a pour coordonnées $\frac{2a^3b}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$, $-\frac{a^4}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}}$, que l'axe focal est la droite d'équation $Y = \dots$

Une telle curiosité est malsaine.

Les coordonnées des points d'intersection des deux coniques vérifient le système

$$\begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2by = 0 \\ b^2x^2 + 2abxy + a^2y^2 - 4a^2by = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b^2x^2 + a^2y^2 - 2a^2by = 0 \\ 2aby(a - x) = 0 \end{cases},$$

d'où les points $(0, 0)$, (pour $y = 0$) et (a, b) , (si $x = a$, la première équation devient $a^2b^2 + a^2y^2 - 2a^2by = a^2(y - b)^2 = 0$).

On a vu qu'en $(0, 0)$ les deux coniques sont tangentes, (tangente commune Ox), mais il en est de même en (a, b) car, pour $x = a$, $y = b$ est racine double de la première équation, mais aussi de la deuxième qui s'écrit :

$$b^2a^2 + 2a^2by + a^2y^2 - 4a^2by = a^2(b - y)^2 = 0.$$

Courbures en $(0, 0)$. Les deux courbes étant tangentes à Ox , on aura pour rayons de courbure :

$$\mathcal{R} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2y}.$$

Dans (A), en divisant par $2y$, on a :

$$b^2 \frac{x^2}{2y} + a^2 \frac{y}{2} - a^2b = 0,$$

d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0} b^2 \frac{x^2}{2y} = a^2 b \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_A = \frac{a^2}{b},$$

pour (B) , on a de même :

$$b^2 \frac{x^2}{2y} + abx + a^2 \frac{y}{2} - 2a^2 b = 0,$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} b^2 \frac{x^2}{2y} = 2a^2 b \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_B = \frac{2a^2}{b}.$$

- 11.** Dans un repère orthonormé convenable, d'origine $\Omega(x_0, y_0)$, centre d'une telle hyperbole H' isométrique à H , l'équation de H' sera $XY = k^2$. Si $\vec{T} = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$, les formules changement de coordonnées sont :

$$X = (x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi \quad \text{et} \quad Y = -(x - x_0) \sin \varphi + (y - y_0) \cos \varphi$$

d'où l'équation :

$$[(x - x_0) \cos \varphi + (y - y_0) \sin \varphi][-(x - x_0) \sin \varphi + (y - y_0) \cos \varphi] = k^2,$$

de H' dans l'ancien repère, équation qui va servir à traduire que A et A' sont sur H' . On a donc les relations

$$((a - x_0) \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)(-(a - x_0) \sin \varphi - y_0 \cos \varphi) = k^2 \quad \text{et}$$

$$((-a - x_0) \cos \varphi - y_0 \sin \varphi)(-(-a - x_0) \sin \varphi - y_0 \cos \varphi) = k^2.$$

En prenant la demi somme et la demi différence de ces relations on obtient des relations équivalentes. Or, en les considérant comme des polynômes en a , cela revient à prendre la partie paire et la partie impaire en a , d'où les conditions équivalentes :

$$\begin{cases} -a^2 \cos \varphi \sin \varphi - (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi) = k^2, \\ a[(x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi) \cos \varphi + \sin \varphi(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)] = 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -a^2 \sin 2\varphi - (x_0^2 \sin 2\varphi - y_0^2 \sin 2\varphi - 2x_0 y_0 \cos 2\varphi) = 2k^2, \\ x_0 \sin 2\varphi - y_0 \cos 2\varphi = 0 \end{cases}.$$

C'est un système en $\cos 2\varphi$ et $\sin 2\varphi$ qui conduit, sauf erreur, à :

$$\sin 2\varphi = \frac{2k^2}{x_0^2 + y_0^2 - a^2} \quad \text{et} \quad \cos 2\varphi = \frac{x_0}{y_0} \frac{2k^2}{x_0^2 + y_0^2 - a^2},$$

et à l'équation :

$$\frac{4k^4}{(x_0^2 + y_0^2 - a^2)^2} \left(1 + \frac{x_0^2}{y_0^2}\right) = 1,$$

ou encore :

$$4k^4(x_0^2 + y_0^2) = y_0^2(x_0^2 + y_0^2 - a^2)^2,$$

du lieu cherché, (sur lequel il faut retirer le point O pour tenir compte des conditions $y_0 \neq 0$ et $x_0^2 + y_0^2 - a^2 \neq 0$ qu'il aurait fallu poser). Je ne garantis pas les calculs.

12. Si $a < 0$: l'ensemble est vide.

Si $a = 0$, on doit avoir M sur C_1 et C_2 , donc l'ensemble cherché, que je vais noter Γ , est $C_1 \cap C_2$.

On suppose $a > 0$, et on note P le plan euclidien.

Soient O_1 et O_2 les centres des cercles, R_1 et R_2 leurs rayons, on note

$$\begin{aligned} E &= \{M \in P, d(M, O_1) \geq R_1 \text{ et } d(M, O_2) \geq R_2\}, \\ F_1 &= \{M \in P, d(M, O_1) \geq R_1 \text{ et } d(M, O_2) \leq R_2\}, \\ F_2 &= \{M \in P, d(M, O_1) \leq R_1 \text{ et } d(M, O_2) \geq R_2\} \text{ et} \\ G &= \{M \in P, d(M, O_1) \leq R_1 \text{ et } d(M, O_2) \leq R_2\}. \end{aligned}$$

L'ensemble E non vide, les autres peuvent être vides, F_1 par exemple sera vide si le cercle C_2 est intérieur à C_1 .

$$\begin{aligned} \text{On a : } E \cap \Gamma &= \{M \in P; MO_1 - R_1 + MO_2 - R_2 = a\}, \\ &= \{M \in P; MO_1 + MO_2 = R_1 + R_2 + a\}. \end{aligned}$$

Si $R_1 + R_2 + a < O_1O_2$, cet ensemble est vide, sinon c'est l'intersection de E et de l'ellipse de foyers O_1 et O_2 , ensemble des points dont la somme des distances à O_1 et O_2 vaut $R_1 + R_2 + a$.

$$\begin{aligned} \text{Pour : } F_1 \cap \Gamma &= \{M \in P; MO_1 - R_1 + R_2 - MO_2 = a\} \\ &= \{M \in P; MO_1 - MO_2 = R_1 + a - R_2\}, \end{aligned}$$

on est donc sur l'intersection de F_1 et d'une branche d'hyperbole, de foyers O_1 et O_2 . En fait cette hyperbole peut être vide si $|R_1 + a - R_2| > O_1O_2$, donc, sans précisions supplémentaires, on ne peut pas dire grand chose.

Pour $F_2 \cap \Gamma = \{M \in P; MO_2 - MO_1 = R_2 - R_1 + a\}$, on récupère un arc d'hyperbole, éventuellement vide.

$$\begin{aligned} \text{Enfin, pour : } G \cap \Gamma &= \{M \in P; R_1 - MO_1 + R_2 - MO_2 = a\}, \\ &= \{M \in P; MO_1 + MO_2 = R_1 + R_2 - a\}, \end{aligned}$$

on garde un arc d'ellipse, mais là encore, si a avait la malencontreuse idée d'être très « grand », un $R_1 + R_2 - a < 0$ ne nous donnerait rien, (et cette condition est indépendante de la non vacuité de G , qui a lieu si $O_1O_2 \leq R_1 + R_2$).

Nappes paramétrées

Je rédigerai ce chapitre en essayant de faire le lien avec le chapitre 6 sur les arcs paramétrés, ceci pour dégager au paragraphe 7, la notion de variété. On se place dans un espace affine euclidien A , de dimension finie n , de direction E .

1. Nappes paramétrées, nappes géométriques

DÉFINITION 9.1. — *Soit un espace affine A , de direction un espace vectoriel normé E . On appelle nappe paramétrée tout couple (Ω, f) avec Ω ouvert connexe de \mathbb{R}^2 , et f application de Ω dans E .*

Si f est de classe C^k , la nappe paramétrée est dite de classe C^k .

C'est pour introduire la différentiabilité de f , qu'on impose à Ω d'être ouvert, et non seulement d'être un connexe de \mathbb{R}^2 , (alors que pour les arcs paramétrés, on partait d'un intervalle I de \mathbb{R} , pas forcément ouvert, car on peut parler de dérivabilité à droite ou à gauche).

9.2. Rappelons qu'un ouvert connexe est ce qu'on appelle *un domaine*, et si j'ose dire, les nappes paramétrées c'est le domaine des domaines. (Je sais, c'est très mauvais.)

Si $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ est un repère de A , (avec \mathcal{B} base de E), l'ensemble des points $m(u, v)$ de l'espace affine tels que $\overrightarrow{Om}(u, v) = f(u, v)$, pour tout (u, v) de Ω , est le *support* de la nappe paramétrée.

DÉFINITION 9.3. — *Deux nappes de classe C^k , (Ω, f) et (Δ, g) sont dites C^k équivalentes si et seulement si il existe un C^k difféomorphisme θ de Ω sur Δ tel que $g \circ \theta = f$.*

On vérifie très facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence entre nappes paramétrées, dont les classes d'équivalence sont les *nappes géométriques*.

Si (Ω, f) et (Δ, g) sont alors deux paramétrages C^k équivalents d'une nappe géométrique, (on dit encore que l'on a des *paramétrages admissibles*), avec $k \geq 1$, le θ difféomorphisme est tel que pour tout (u, v) de Ω , $d\theta(u, v)$ est un isomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 , donc le déterminant de cette application linéaire est non nul, non nul dans \mathbb{R} donc il a un signe, et en fait, l'application $(u, v) \rightsquigarrow \det(d\theta(u, v))$ étant continue de Ω connexe dans \mathbb{R} , son image est un connexe de \mathbb{R} , donc un intervalle, ne contenant pas 0 : cette image est formée de nombres réels de signe constant. On a bien utilisé des propriétés de Topologie générale, voir (Tome 2, Théorème 3.8, Corollaire 4.77 ou 4.78).

DÉFINITION 9.4. — Soient deux paramétrages admissibles, (Ω, f) et (Δ, g) d'une nappe géométrique S de classe C^k , $k \geq 1$. Ils définissent la même orientation sur la nappe si et seulement si le difféomorphisme θ de Ω sur Δ tel que $g \circ \theta = f$ vérifie $\det(d\theta(u, v)) > 0$, pour tout (u, v) de Ω .

Cette définition a un sens car $d(\theta^{-1})(\theta(u, v))$ est l'inverse de $d\theta(u, v)$, (Tome 3, Théorème 17.1), donc le signe du déterminant de $d\theta^{-1}(s, t)$, pour tout (s, t) de Δ est le même que celui de $\det(d\theta(u, v))$.

9.5. Orienter une nappe géométrique c'est donc en choisir un paramétrage admissible, et n'effectuer que des changements de paramétrage avec un $d\theta(u, v)$ de déterminant positif.

DÉFINITION 9.6. — Un point $m(u, v)$ du support S d'une nappe paramétrée (Ω, f) est dit régulier, (ou non stationnaire) si et seulement si la différentielle de f en (u, v) , $df(u, v)$ est injective de \mathbb{R}^2 dans E , direction de l'espace affine, (la nappe étant supposée de classe C^k , $k \geq 1$).

Il est dit stationnaire, (ou singulier), si $df(u, v)$ est non injective. Voir le Tome 3, chapitre 16 pour la différentiabilité.

DÉFINITION 9.7. — Le fait d'être régulier ou non, pour un point $m(u, v)$ d'une nappe paramétrée de classe C^k , $k \geq 1$, est indépendant du paramétrage C^k équivalent : c'est une notion géométrique.

En effet, si on remplace le paramétrage (Ω, f) par (Δ, g) , C^k équivalent, avec θ , C^k difféomorphisme de Ω sur Δ tel que $f = g \circ \theta$, en différentiant

ce produit de composition, il vient

$$df(u, v) = dg(\theta(u, v)) \circ d\theta(u, v),$$

(voir Tome 3, Théorème 16.17), avec $d\theta(u, v)$ isomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 , (Tome 3, Théorème 17.7) donc l'injectivité de $df(u, v)$ équivaut à celle de $dg(\theta(u, v))$. ■

REMARQUE 9.8. — Si $E = \mathbb{R}^n$, a pour base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et si $f(u, v) = \sum_{i=1}^n f_i(u, v)e_i$, le rang de $df(u, v)$, est aussi le rang de la matrice jacobienne :

$$9.9. \quad M(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u} & \frac{\partial f_n}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Comme c'est aussi $2 - \dim \ker((df(u, v)))$, on a $m(u, v)$ régulier si et seulement si les vecteurs notés :

$$f'_u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u} e_i \quad \text{et} \quad f'_v = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial v} e_i$$

sont indépendants.

DÉFINITION 9.10. — Soit un point régulier $m(u, v)$ d'une nappe paramétrée $S = (\Omega, f)$ de classe C^k , $k \geq 1$. On appelle plan tangent à la nappe en m , le plan affine passant par $m(u, v)$, de direction le plan vectoriel $df(u, v)(\mathbb{R}^2)$.

Avec les notations de la remarque 9.8, le plan tangent en $m(u, v)$ est donc paramétré par :

$$9.11. \quad X_i = f_i(u, v) + \lambda \frac{\partial f_i}{\partial u}(u, v) + \mu \frac{\partial f_i}{\partial v}(u, v),$$

ceci pour $1 \leq i \leq n$ et (λ, μ) dans \mathbb{R}^2 , car l'image de \mathbb{R}^2 par $df(u, v)$ est l'espace vectoriel engendré par f'_u et f'_v .

Cette notion de plan tangent est intéressante car nous allons voir que les arcs paramétrés dont le support est sur la nappe S , et qui ont une tangente

en $m(u, v)$, ont leur tangente dans le plan tangent. Mais avant définissons de tels arcs.

DÉFINITION 9.12. — Soit une nappe paramétrée $S = (\Omega, f)$ de classe C^k de l'espace affine A de direction $E \simeq \mathbb{R}^n$, et un arc paramétré (I, α) de classe C^l , dans l'espace affine (et vectoriel) \mathbb{R}^2 , de support $\alpha(I) \subset \Omega$. Alors $(I, f \circ \alpha)$ est un arc paramétré de classe C^m , avec $m = \inf(k, l)$, de support sur la nappe S .

Il est facile de vérifier que, si (Δ, g) est un autre paramétrage admissible de la nappe, en considérant le C^k difféomorphisme θ de Ω sur Δ tel que $f = g \circ \theta$, alors $(I, g \circ \theta \circ \alpha)$ est le même arc paramétré que $(I, f \circ \alpha)$; puis que, si (J, β) est un paramétrage C^l équivalent de $\Gamma = (I, \alpha)$, avec τ difféomorphisme de I sur J tel que $\alpha = \beta \circ \tau$, les paramétrages $(I, f \circ \alpha)$ et $(J, f \circ \beta \circ \tau)$ sont C^m équivalents, ce qui permet de parler d'arc géométrique sur la nappe géométrique S .

THÉORÈME 9.13. — Soit une nappe paramétrée $S = (\Omega, f)$ de classe C^k , $k \geq 1$, $m(u, v)$ un point régulier de S , et $\gamma = (I, \alpha)$ un arc de \mathbb{R}^2 , de support dans Ω , de classe C^ℓ , $\ell \geq 1$. Si en t_0 de I , on a $\alpha(t_0) = (u, v)$, et si le point de paramètre t_0 est régulier sur Γ , le point $m(\alpha(t_0))$ est régulier sur $\Gamma = (I, f \circ \alpha)$ et la tangente en m à l'arc Γ est dirigée par $df(u, v)(\alpha'(t_0))$.

C'est la conséquence immédiate de la dérivation de $f \circ \alpha$, composée de f différentiable et de α dérivable : on a :

$$(f \circ \alpha)'(t) = df(\alpha(t))(\alpha'(t)),$$

(voir Tome 3, Corollaire 16.24), et comme $df(\alpha(t_0)) = df(u, v)$ est injective et $\alpha'(t_0) \neq 0$, on a en particulier $(f \circ \alpha)'(t_0) \neq 0$, donc le point de paramètre t_0 est régulier sur l'arc Γ de la nappe S , et la tangente à Γ en m est bien dans le plan tangent à S en m .

REMARQUE 9.14. — Avec les mêmes notations qu'en 9.13, si $m(u, v)$ est régulier sur la nappe S , et si pour l'arc γ , le premier entier caractéristique, p , existe en t_0 , l'arc $\Gamma = (I, f \circ \alpha)$ admet en t_0 une tangente dirigée par $df(u, v)(\alpha^{(p)}(t_0))$, donc encore dans le plan tangent à la nappe en S , si $p \leq k$ bien sûr.

En effet p est tel que pour tout entier r tel que $1 \leq r < p$, (s'il y en a), $\alpha^{(r)}(t_0) = 0$, et $\alpha^{(p)}(t_0) \neq 0$, (voir en 6.18 la définition des entiers caractéristiques). Mais f étant de classe C^k , $k \geq p$, on peut dériver

l'application $\varphi = t \rightsquigarrow df(\alpha(t))(\alpha'(t))$ et on a :

$$\varphi'(t) = df(\alpha(t))(\alpha''(t)) + d^2f(\alpha(t))(\alpha'(t), \alpha'(t))$$

d'où, si $\alpha''(t_0) \neq 0$, (c'est-à-dire $p = 2$), $\varphi'(t_0) = df(u, v)(\alpha''(t_0))$; et si $p > 2$, on redérive φ' en :

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= df(\alpha(t))(\alpha^{(3)}(t)) + d^2f(\alpha(t))(\alpha'(t), \alpha''(t)) \\ &\quad + d^3f(\alpha(t))(\alpha'(t), \alpha'(t), \alpha'(t)) + 2d^2f(\alpha(t))(\alpha'(t), \alpha''(t)), \end{aligned}$$

d'où si $p = 3$,

$$\varphi^{(3)}(t_0) = df(u, v) \left(\alpha^{(3)}(t_0) \right) \neq 0,$$

et on comprend qu'on obtient ainsi pour premier vecteur dérivé non nul de $\Gamma = (I, f \circ \alpha)$, le vecteur $df(u, v) (\alpha^{(p)}(t_0))$, en poursuivant les dérivations.

THÉORÈME 9.15. — *Soit une nappe paramétrée $S = (\Omega, f)$ de classe C^1 au moins, et $m(u, v)$ un point régulier de S . Toute droite D passant par m , dans le plan tangent π à S en m est la tangente en m à des arcs paramétrés Γ de S .*

Soit \vec{V} un vecteur directeur de D , \vec{V} est non nul dans $df(u, v)(\mathbb{R}^2)$, direction de π , donc il existe \vec{W} vecteur non nul de \mathbb{R}^2 tel que :

$$df(u, v)(\vec{W}) = \vec{V}.$$

Construisons un arc paramétré (I, γ) de \mathbb{R}^2 , de support dans Ω , ayant \vec{W} pour vecteur dérivé quelque part.

Par exemple, on pose $\gamma(t) = (u + \alpha t, v + \beta t)$ si $\vec{W} = (\alpha, \beta)$.

On a γ continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 , $\gamma(0) = (u, v)$ est dans Ω ouvert, donc il existe un intervalle ouvert I de \mathbb{R} tel que : $0 \in I$, $\gamma(I) \subset \Omega$, et $\gamma'(0) = (\alpha, \beta) = \vec{W}$.

Mais alors l'arc $\Gamma = (I, f \circ \gamma)$ est un arc de S , pour $t = 0$ on a :

$$f(\gamma(0)) = f(u, v) = \overrightarrow{Om}(u, v),$$

(O , origine du repère), et

$$(f \circ \gamma)'(0) = df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = df(u, v)(\vec{W}) = \vec{V} :$$

la tangente en m à Γ est bien la droite D . ■

Parmi toutes les courbes qui sont sur la nappe $S = (\Omega, f)$, et qui passent en m_0 de paramètre u_0 et v_0 , courbes obtenues en se donnant en fait u et v fonctions à leur tour d'un paramètre, il en est deux particulières, obtenues respectivement en fixant l'un des paramètres et en faisant varier l'autre, ce sont :

9.16. Les courbes régionnantes.

Soit u_0 fixé, l'ensemble $I_{u_0} = \{v, (u_0, v) \in \Omega\}$ est un ouvert de \mathbb{R} , (Ω ouvert de \mathbb{R}^2 , donc si v_1 est dans I_{u_0} , $(u_0, v_1) \in \Omega$ et il existe $\alpha > 0$ tel que la boule ouverte de centre (u_0, v_1) de rayon α , pour $\|\cdot\|_\infty$ sur \mathbb{R}^2 par exemple, soit dans Ω , d'où $]v_1 - \alpha, v_1 + \alpha[$ contenu dans I_{u_0} qui est bien ouvert comme voisinage de chacun de ses points). Mais alors I_{u_0} est réunion de ses composantes connexes, qui sont des ouverts, (Tome 2, Théorème 3.24), et il existe finalement un intervalle ouvert I de \mathbb{R} , contenant v_0 , tel que pour tout v de I , $(u_0, v) \in \Omega$. Mais alors l'arc Γ_{u_0} paramétré par $t \rightsquigarrow (u_0, t) \rightsquigarrow f(u_0, t)$, pour $t \in I$, est bien un arc de la nappe S ; on aurait de même l'arc :

$$C_{v_0} : s \rightsquigarrow (s, v_0) \rightsquigarrow f(s, v_0),$$

et on peut vérifier que m_0 est régulier sur S si et seulement si les deux courbes régionnantes Γ_{u_0} et C_{v_0} ont en m_0 des vecteurs tangents indépendants, car ce sont $\frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$ et $\frac{\partial \vec{m}}{\partial u}$, calculés en (u_0, v_0) .

Nous préciserons cette étude au paragraphe 5, dans le cas des nappes de \mathbb{R}^3 , en considérant toutes les courbes passant par m_0 sur la nappe, et ayant la même tangente D : où sont alors les centres de courbures?

Quel est le trièdre de Frenet? Autant de questions qui auront leur réponse.

2. Cas des nappes en dimension trois

Dans le cas d'une nappe S de A espace affine euclidien de dimension trois, on peut préciser notre étude parce qu'un plan affine, sous-espace de dimension deux devient un hyperplan, et régionne donc l'espace, (voir 3.35).

Soit donc une nappe S , paramétrée dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

$$9.17. \quad x = f(u, v), \quad y = g(u, v) \quad \text{et} \quad z = h(u, v),$$

(u, v) dans Ω domaine de \mathbb{R}^2 , f, g et h étant de classe C^k , $k \geq 1$.

Nous avons vu, (Remarque 9.8) que le point m , de paramètres u et v , est régulier si et seulement si les vecteurs notés :

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} = f'_u \vec{i} + g'_u \vec{j} + h'_u \vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} = f'_v \vec{i} + g'_v \vec{j} + h'_v \vec{k}$$

sont indépendants, et dans ce cas ils engendrent la direction du plan tangent, π , en m . Donc M , de coordonnées X, Y , et Z sera dans ce plan tangent si et seulement si le produit mixte $\left(\vec{mM}, \frac{\partial \vec{m}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right)$ est nul, ce qui s'écrit encore, sous forme de déterminant :

$$\mathbf{9.18.} \quad \begin{vmatrix} X - f(u, v) & Y - g(u, v) & Z - h(u, v) \\ f'_u(u, v) & g'_u(u, v) & h'_u(u, v) \\ f'_v(u, v) & g'_v(u, v) & h'_v(u, v) \end{vmatrix} = 0,$$

c'est l'équation du plan tangent en m à la nappe.

Dans ce cas, l'hyperplan vectoriel $F = \text{Vect} \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right)$, admet dans \mathbb{R}^3 euclidien, un supplémentaire orthogonal de dimension 1, qui peut être en particulier engendré par le vecteur $\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$, (voir Tome 3, 14.52 et 14.54 pour la définition du produit mixte et du produit vectoriel), car en notant \vec{V} ce produit vectoriel, on sait que pour tout vecteur \vec{W} de \mathbb{R}^3 , on a :

$$\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{m}}{\partial v}, \vec{W} \right) = \vec{W} \cdot \vec{V},$$

et pour $\vec{W} = \frac{\partial \vec{m}}{\partial u}$ ou $\frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$, le produit mixte qui figure au premier membre est nul, donc \vec{V} est bien orthogonal à $\frac{\partial \vec{m}}{\partial u}$ et à $\frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$.

DÉFINITION 9.19. — Soit $m(u, v)$ un point régulier de la nappe paramétrée (Ω, φ) de l'espace affine de dimension trois. Le vecteur $\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right)(u, v)$ est dit normal sortant pour la nappe S orientée par le paramétrage considéré.

C'est-à-dire que la notion d'orientation d'une nappe, valable en dimension quelconque, et liée au choix d'un paramétrage, devient plus « pratique » en dimension trois avec cette notion de normale sortant, notion intéressante en physique par exemple lorsque l'on calcule des flux de champ de vecteurs.

9.20. Cas particulier d'une nappe d'équation cartésienne $z = f(x, y)$.

On suppose donnée une fonction f de classe C^1 , définie sur Ω domaine de \mathbb{R}^2 , à valeurs dans \mathbb{R} , et on associe au couple (Ω, f) l'ensemble S des points de A affine rapporté à un repère orthonormé \mathcal{R} , de coordonnées $(x, y, f(x, y))$.

Ceci revient à paramétrer S par l'application φ de Ω dans \mathbb{R}^3 , définie par $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

On a donc, dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathcal{R} :

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial x} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ f'_x \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{m}}{\partial y} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ f'_y \end{vmatrix} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \vec{m}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial y} \begin{vmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Ce vecteur n'est jamais nul, et le plan tangent en $m_0(x_0, y_0, z_0)$ avec $z_0 = f(x_0, y_0)$ a pour équation :

$$(X - x_0)(-f'_x(x_0, y_0)) + (Y - y_0)(-f'_y(x_0, y_0)) + Z - z_0 = 0,$$

relation traduisant l'orthogonalité de $\overrightarrow{m_0M}$ et de $\frac{\partial \vec{m}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial y}(x_0, y_0)$.

On a donc :

THÉORÈME 9.21. — *Soit une nappe S d'équation cartésienne $z = f(x, y)$ dans A affine de dimension trois, avec f de classe C^1 au moins de Ω , ouvert de \mathbb{R}^2 , dans \mathbb{R} . Tout point m_0 de S est régulier, et l'équation du plan tangent en m_0 à S est :*

$$(X - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (Y - y_0)f'_y(x_0, y_0) - (Z - z_0) = 0.$$

C'est ce que nous venons de justifier. ■

On peut remarquer en outre que ce plan tangent n'est jamais parallèle à Oz , (coefficient de Z non nul), donc une parallèle à Oz le coupe, ce qui va vous permettre d'étudier la place (locale) de la nappe par rapport à son plan tangent.

Posons :

$$r = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad s = f''_{xy}(x_0, y_0) \text{ et } t = f''_{y^2}(x_0, y_0),$$

et $h = \rho \cos \theta, \quad k = \rho \sin \theta, \text{ avec } \rho = \sqrt{h^2 + k^2}.$

On a :

$$9.23. \quad \overline{qm} = \frac{\rho^2}{2} (r \cos^2 \theta + 2s \cos \theta \sin \theta + t \sin^2 \theta + o(1)).$$

Si $s^2 - rt < 0$, la forme quadratique, sur \mathbb{R}^2 , de matrice $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ est non dégénérée, (déterminant non nul), ses valeurs propres sont de même signe, (leur produit $= rt - s^2 > 0$), ce signe étant celui de la trace, $r + t$ avec r et t de même signe sinon $-rt \geq 0$ et $s^2 - rt < 0$ serait impossible. On a donc une forme quadratique non dégénérée positive si r (et t) sont positifs, négative si r et t négatifs.

Quoi qu'il en soit, sur la sphère unité de \mathbb{R}^2 , (ensemble des $(\cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$), cette forme quadratique atteint son minimum si elle est positive, et son maximum si elle est négative.

Continuons avec r et t positifs, en notant ϕ la forme quadratique $\phi(h, k) = h^2 r + 2hks + k^2 t$, et m la borne inférieure de ϕ , sur la sphère unité, borne atteinte d'où $m > 0$. On a, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$r \cos^2 \theta + 2s \cos \theta \sin \theta + t \sin^2 \theta \geq m > 0,$$

donc, avec :

$$\varepsilon = \frac{m}{2}, \quad \exists \rho_0 \text{ tel que } 0 < \rho < \rho_0 \Rightarrow |o(1)| \leq \frac{m}{2}$$

et pour tout $(h, k) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ avec $0 < \rho < \rho_0$, on aura :

$$\frac{\rho^2}{2} (r \cos^2 \theta + 2s \cos \theta \sin \theta + t \sin^2 \theta + o(1)) \geq \frac{m\rho^2}{4} > 0 :$$

9.24. localement, \overline{qm} reste positif : la nappe S reste localement au dessus de son plan tangent si la forme quadratique ϕ définie par :

$\phi(h, k) = h^2 f''_{x^2} + 2hk f''_{xy} + k^2 f''_{y^2}$ est définie positive; et elle resterait localement en dessous si elle était définie négative. Dans ces deux cas, la nappe ne traverse pas son plan tangent.

Considérons maintenant le cas de $s^2 - rt > 0$,

la matrice $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ est cette fois ci celle d'une forme quadratique non dégénérée, de signature (1,1), (le produit des valeurs propres, $rt - s^2$ est strictement négatif), donc elle admet un cône isotrope non réduit à 0.

Un vecteur unitaire $V = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j}$ sera dans ce cône isotrope si on a :

$$9.25. \quad r \cos^2\theta + 2s \cos\theta \sin\theta + t \sin^2\theta = 0.$$

Si $\cos\theta = 0$ est solution de 9.25, on a $t = 0$, l'équation s'écrit $\cos\theta(r \cos\theta + 2s \sin\theta) = 0$, et comme alors $s \neq 0$, ($s^2 - rt > 0$), $\cos\theta = 0$, n'est pas racine de $r \cos\theta + 2s \sin\theta = 0$ relation qui conduit donc à $\operatorname{tg}\theta = \frac{-r}{2s}$, d'où deux directions $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_2 = \operatorname{Arctg}\left(\frac{-r}{2s}\right)$, définies modulo π , pour les vecteurs isotropes, (directions dans \mathbb{R}^2 euclidien canonique).

Si $t \neq 0$, $\cos\theta = 0$ n'est pas solution de 9.25 qui s'écrit sous la forme :

$$t \operatorname{tg}^2\theta + 2s \operatorname{tg}\theta + r = 0,$$

et cette équation du second degré en $\operatorname{tg}\theta$ ayant deux racines distinctes, réelles, (discriminant réduit $s^2 - rt > 0$), notées α_1 et α_2 , on a encore deux directions, définies modulo π :

$$\theta_1 = \operatorname{Arctg}\alpha_1 \quad \text{et} \quad \theta_2 = \operatorname{Arctg}\alpha_2$$

pour nos vecteurs isotropes.

Soit alors $[\alpha, \beta]$ un segment contenu dans l'ensemble $[0, 2\pi]$ privé de $\theta_1, \theta_2, \theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi$, ensemble noté \mathcal{D} , et soit également la fonction φ définie sur $[0, 2\pi]$ par

$$9.26. \quad \varphi(\theta) = r \cos^2\theta + 2s \cos\theta \sin\theta + t \sin^2\theta.$$

On suppose par exemple $[\alpha, \beta] \subset [\theta_2 + \pi, \theta_1]$, (voir figure 9.26.1).

On peut encore écrire φ sous la forme :

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= r \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + s \sin 2\theta + t \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right), \\ &= \frac{r-t}{2} \cos 2\theta + s \sin 2\theta + \frac{r+t}{2}, \end{aligned}$$

et comme :

$$\begin{aligned} \left(\frac{r-t}{2}\right)^2 + s^2 &= \frac{r^2 + t^2 - 2rt + 4s^2}{4} \\ &= \frac{2(s^2 - rt) + 2s^2 + r^2 + t^2}{4} > 0 \quad \text{car } s^2 - rt > 0, \end{aligned}$$

il existe $a > 0$, et γ , tels que $\frac{r-t}{2} = a \sin \gamma$ et $s = a \cos \gamma$ d'où :

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &= a(\sin \gamma \cos 2\theta + \sin 2\theta \cos \gamma) + \frac{r+t}{2} \\ &= a \sin(\gamma + 2\theta) + \frac{r+t}{2}, \end{aligned}$$

relation qui montre que les zéros de φ sont simples et correspondent à des changements de signe de φ .

Mais alors, sur $[\alpha, \beta]$, la fonction continue, φ , ne s'annulant pas est de signe constant, elle est bornée et atteint ses bornes, (ah, la compacité et la connexité, que ferait-on sans elles), si par exemple φ reste positive, et si :

$$m_{\alpha, \beta} = \inf\{\varphi(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]\},$$

on a $m_{\alpha, \beta} > 0$.

Il est alors temps d'aller chercher le $o(1)$ de la formule 9.23, qui signifiait qu'avec $h = \rho \cos \theta$ et $k = \rho \sin \theta$, on a $\lim_{\rho \rightarrow 0} o(1) = 0$, (uniformément en θ en fait), donc il existe un $r_{\alpha, \beta} > 0$ tel que $0 < \rho < r_{\alpha, \beta}$ implique :

$$|o(1)| < \frac{m_{\alpha, \beta}}{2},$$

d'où a fortiori, pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$ et $0 < \rho < r_{\alpha, \beta}$,

$$\mathbf{9.26. bis} \quad \overline{qm} = \frac{\rho^2}{2} (\varphi(\theta) + o(1)) > \frac{\rho^2 m_{\alpha, \beta}}{4} > 0.$$

Cela signifie, qu'à la verticale de la zone ① de la figure 9.26.1, la nappe sera « au dessus » du plan tangent, (voir figure 9.26.2).

On était parti de $[\alpha, \beta] \subset]\theta_2 + \pi, \theta_1[$, cas de la figure 9.26.1), en prenant cette fois $[\alpha', \beta'] \subset]\theta_1, \theta_2[$, le même raisonnement conduit à un $r_{\alpha', \beta'} > 0$ tel que :

$$\theta \in [\alpha', \beta'] \quad \text{et} \quad 0 < \rho < r_{\alpha', \beta'}$$

implique $\overline{qm} < 0$, c'est-à-dire qu'à « la verticale » de la zone ② ainsi définie la nappe est « sous le plan tangent ».

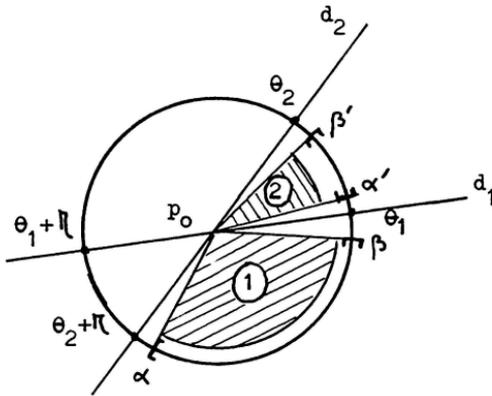


Fig. 9.26.1

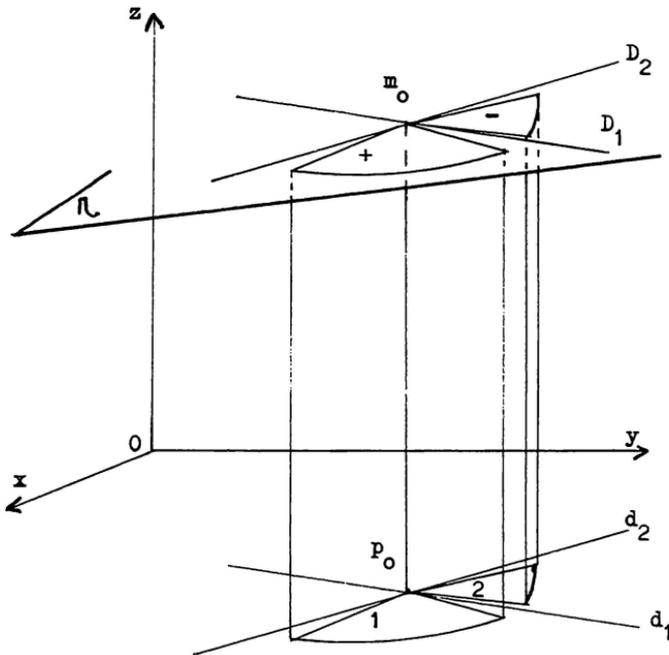


Fig. 9.26.2

On comprend donc que la nappe traverse son plan tangent dans une zone formée de secteurs angulaires se rétrécissant autour des droites D_1 et D_2 , intersections du plan tangent π et des deux plans parallèles à Oz passant

par d_1 et d_2 , droites passant par $p_0(x_0, y_0, 0)$, d'angles polaires θ_1 et θ_2 avec l'axe des x .

Intuitivement, on se doute que D_1 et D_2 vont être les tangentes en m_0 aux deux arcs de courbe intersection de la nappe S et son plan tangent, localement en m_0 , ce qu'il me reste à démontrer. Comme cette justification va servir aussi à préciser la forme locale d'une courbe en implicites au voisinage d'un point singulier, (x_0, y_0) tel que $df(x_0, y_0) = 0$, je vais la détailler.

LEMME 9.27. — Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 , étoilé en $(0, 0)$ supposé dans U , et f une application de classe C^p de U dans \mathbb{R} , telle que $f(0, 0) = 0$. Il existe deux fonctions g et h , de classe C^{p-1} de U dans \mathbb{R} telles que sur U , $f(x, y) = xg(x, y) + yh(x, y)$. (On suppose $p \geq 1$.)

En effet, pour (x, y) dans U , le segment ensemble des (tx, ty) pour $0 \leq t \leq 1$ est dans U , et on a :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x, y) - f(0, 0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx, ty) dt \\ &= \int_0^1 \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) \right) dt. \end{aligned}$$

Si on pose :

$$g(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) dt \quad \text{et} \quad h(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) dt,$$

il résulte du Théorème de dérivation d'une fonction définie par une intégrale, (Tome 3, Théorème 12.71), que g et h ont des dérivées partielles continues par rapport à (x, y) , ceci pour tout ordre de dérivation inférieur à $p - 1$, donc elles sont de classe C^{p-1} sur U , (Tome 3, définition 16.9).

On a bien :

$$f(x, y) = xg(x, y) + yh(x, y). \quad \blacksquare$$

REMARQUE 9.28. — Je m'aperçois que je n'ai pas défini le terme étoilé. Une partie Ω de A affine réel est dite étoilée en a , $a \in \Omega$, si pour tout b de Ω , le segment d'extrémités a et b est dans Ω . Ainsi, une partie convexe de A est étoilée par rapport à chacun de ses points, et cette notion sert essentiellement à calculer des intégrales.

LEMME 9.28.1. — Soit un ouvert U de \mathbb{R}^2 , étoilé en $(0, 0)$ et f une application de classe C^p de U dans \mathbb{R} , $p \geq 2$, telle que $f(0, 0) = 0$ et $df(0, 0) = 0$. Alors

il existe trois applications u, v et w de U dans \mathbb{R} , de classe C^{p-2} , telles que sur U , on ait :

$$f(x, y) = x^2 u(x, y) + 2xy v(x, y) + y^2 w(x, y).$$

Le lemme 9.27 donne déjà $f(x, y) = x g(x, y) + y h(x, y)$ avec g et h de classe C^{p-1} .

Comme :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(x, y) + x \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial h}{\partial x}(x, y),$$

on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = g(0, 0)$ et de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = h(0, 0)$.

Mais alors, la nullité de $df(0, 0)$ implique $g(0, 0) = 0$ et $h(0, 0) = 0$: le lemme 9.27 peut s'appliquer à g et h et permet de trouver des fonctions u, v_1 puis v_2, w , de classe C^{p-2} sur U , à valeurs réelles, telles que :

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x u(x, y) + y v_1(x, y) && \text{et} \\ h(x, y) &= x v_2(x, y) + y w(x, y), && \text{d'où} \\ f(x, y) &= x(xu + yv_1) + y(xv_2 + yw) \\ &= x^2 u(x, y) + 2xy \frac{v_1(x, y) + v_2(x, y)}{2} + y^2 w(x, y), \end{aligned}$$

ce qui est bien la forme voulue, avec $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$. ■

REMARQUE 9.29. — Si on considère la façon dont ont été définies les fonctions g et h , dans le lemme 9.27, on a :

$$g(0, 0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(t0, t0) dt = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),$$

et de même :

$$h(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

On aurait de même, dans le lemme 9.28.1 les égalités :

$$u(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0), \quad \text{avec} \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty) t dt,$$

vu la définition de g , donc $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) dt$, soit :

$$u(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0).$$

Puis

$$\begin{aligned} w(0,0) &= \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t0,t0) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0). \end{aligned}$$

On aura $v(0,0) = \frac{1}{2}(v_1(0,0) + v_2(0,0))$, avec :

$$v_1(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(t0,t0) dt = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0),$$

et $v_2(0,0) = \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \int_0^1 t \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(t0,t0) dt = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

d'où, par le Théorème de Schwarz, (Tome 3, Théorème 16.6),

$$v(0,0) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

Si on pose $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$ on a $u(0,0) = \frac{1}{2}r$; $v(0,0) = \frac{1}{2}s$ et $w(0,0) = \frac{1}{2}t$, et l'égalité

$$f(x,y) = x^2 u(x,y) + 2xy v(x,y) + y^2 w(x,y)$$

rappelle étrangement le développement de Taylor Young :

$$f(x,y) = \frac{1}{2} (x^2 r + 2xys + y^2 t + o(x^2 + y^2)).$$

En fait, on a englobé le $o(x^2 + y^2)$ dans u, v et w .

THÉORÈME 9.30. — Soit une fonction f de classe C^p , $p \geq 3$, de U ouvert de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} et $m_0 = (x_0, y_0)$ dans U tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et $df(x_0, y_0) = 0$. Si la forme quadratique $\phi : (h, k) \rightsquigarrow d^2 f(x_0, y_0)(h, k)$ est définie positive ou définie négative, m_0 est un point isolé de $\Gamma = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$, et

si ϕ est de signature $(1,1)$, Γ est, localement en m_0 , formé de deux arcs de courbes réguliers.

Ce théorème permet donc de préciser l'allure d'un arc d'équation implicite $f(x, y) = 0$, au voisinage d'un point où $df(x_0, y_0) = 0$, avec $d^2f(x_0, y_0)$ non dégénérée.

D'après le lemme 9.28.1 un ouvert U étant « localement étoilé en tout point », il existe Ω ouvert de \mathbb{R}^2 , avec $(x_0, y_0) \in \Omega \subset U$, Ω étoilé en (x_0, y_0) , et trois fonctions u, v, w de Ω dans \mathbb{R} , de classe C^{p-2} , telles que sur Ω on ait :

$$\mathbf{9.31.} \quad f(x, y) = (x - x_0)^2 u(x, y) + 2(x - x_0)(y - y_0)v(x, y) + (y - y_0)^2 w(x, y),$$

les fonctions du lemme 9.28.1 étant obtenues sur ce voisinage de (x_0, y_0) par une translation à partir de celles définies sur un voisinage de $(0, 0)$ translation sur les variables.

De plus, on a :

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}r = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad v(x_0, y_0) = \frac{1}{2}s = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

et $w(x_0, y_0) = \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$,

d'après la remarque 9.29, les calculs étant cette fois faits en (x_0, y_0) .

Donc la forme quadratique ϕ du Théorème s'écrit encore :

$$\phi(h, k) = rh^2 + 2shk + tk^2,$$

si elle est définie, (positive ou négative, peu importe), c'est que les valeurs propres de la matrice symétrique associée sont de même signe, donc que leur produit, $rt - s^2$, déterminant de la matrice, est > 0 .

Mais alors r et t sont non nuls, en particulier $u(x_0, y_0) \neq 0$, et par continuité $u(x, y)$ reste non nul sur Ω' ouvert contenant (x_0, y_0) et inclus dans Ω .

En effectuant une « décomposition canonique » du trinôme $(x - x_0)^2 u + 2(x - x_0)(y - y_0)v + (y - y_0)^2 w$, (qui n'en est pas un puisque u, v et w dépendent de x et y), on obtient sur Ω' , l'égalité :

$$\mathbf{9.32.} \quad f(x, y) = u(x, y) \left[\left((x - x_0) + (y - y_0) \frac{v}{u} \right)^2 + \frac{uw - v^2}{u^2} (y - y_0)^2 \right]$$

et u restant non nul sur Ω' l'appartenance de (x, y) à $\Omega' \cap \Gamma$, (avec $\Gamma = \{(x, y); f(x, y) = 0\}$), équivaut à l'égalité :

$$9.33. \quad \left((x - x_0) + (y - y_0) \frac{v}{u} \right)^2 + \frac{u(x, y)w(x, y) - v^2(x, y)}{u^2(x, y)} (y - y_0)^2 = 0.$$

Comme la fonction α , définie sur Ω' voisinage de (x_0, y_0) , par :

$$\alpha(x, y) = \frac{u(x, y)w(x, y) - v^2(x, y)}{u^2(x, y)},$$

est de classe C^{p-2} donc continue, et que $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \alpha(x, y) = \frac{rt - s^2}{r^2} > 0$, seul le couple $(x, y) = (x_0, y_0)$ est dans $\Omega'' \cap \Gamma$, avec Ω'' ouvert contenu dans Ω' , sur lequel $\alpha(x, y)$ reste > 0 : on a bien m_0 point isolé de Γ . Par contre si la forme ϕ est de signature (1,1), on a cette fois $rt - s^2 < 0$, donc localement $u(x, y)w(x, y) - v^2(x, y)$ reste < 0 .

Nous allons successivement supposer $r \neq 0$, ou $t \neq 0$, ou $r = t = 0$, pour conclure dans chaque cas, à l'existence locale de deux arcs.

Supposons alors $r \neq 0$, on a u qui reste non nul sur un voisinage Ω' de (x_0, y_0) , et on obtient encore l'expression 9.33., avec cette fois un $\alpha(x, y) = \frac{uw - v^2}{u^2}$ localement négatif, donc 9.32 équivaut aux deux égalités :

9.34.

$$x - x_0 + (y - y_0) \frac{v(x, y)}{u(x, y)} = (y - y_0) \frac{(v^2(x, y) - u(x, y)w(x, y))^{1/2}}{u(x, y)},$$

9.35. et,

$$x - x_0 + (y - y_0) \frac{v(x, y)}{u(x, y)} = -(y - y_0) \frac{(v^2(x, y) - u(x, y)w(x, y))^{1/2}}{u(x, y)}$$

donc localement, Γ est formé de deux ensembles définis implicitement par les équations :

$$g(x, y) = (x - x_0)u(x, y) + (y - y_0)v(x, y) - (y - y_0)\beta(x, y) = 0,$$

$$\text{et } h(x, y) = (x - x_0)u(x, y) + (y - y_0)v(x, y) + (y - y_0)\beta(x, y) = 0,$$

avec $\beta(x, y) = (v^2(x, y) - u(x, y)w(x, y))^{1/2}$.

De plus $m_0(x_0, y_0)$ est régulier sur chacune de ces courbes. En effet on a, toujours avec $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2}r$ supposé non nul au départ de notre calcul, comme $p \geq 3$, u, v, β sont dérivables, et

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) = \frac{r}{2} \neq 0,$$

(car le reste contient $x - x_0$ ou $y - y_0$ en facteur, donc s'annule en (x_0, y_0)), et de même $\frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{r}{2} \neq 0$. Par continuité, on aura donc $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial x}$ localement non nuls, ce qui achève de justifier le Théorème 9.30 dans ce cas.

Si on suppose $rt - s^2 < 0$ avec $t \neq 0$, on effectue une mise sous forme canonique de $f(x, y)$ avec

$$f(x, y) = w(x, y) \left(\left((y - y_0) + (x - x_0) \frac{v}{w} \right)^2 + (x - x_0)^2 \frac{uw - v^2}{w^2} \right)$$

cette fois, car $t = 2w(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow w$ localement non nul, et avec la même expression de $\beta(x, y)$, on est conduit localement aux équations équivalentes à $f(x, y) = 0$:

$$g_1(x, y) = (y - y_0)w(x, y) + (x - x_0)v(x, y) - (x - x_0)\beta(x, y) = 0$$

ou

$$h_1(x, y) = (y - y_0)w(x, y) + (x - x_0)v(x, y) + (x - x_0)\beta(x, y) = 0$$

qui définissent, là encore deux arcs en implicites, localement réguliers en $m_0(x_0, y_0)$ car cette fois $\frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{t}{2} \neq 0$ et aussi $\frac{\partial h_1}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{t}{2}, \neq 0$.

Enfin il reste le cas de $rt - s^2 < 0$ avec $r = t = 0$, et donc $s \neq 0$.

Alors là, on change de variables, dans le plan affine, en posant :

$$X = \frac{x - x_0 + y - y_0}{2} \quad \text{et} \quad Y = \frac{x - x_0 - y + y_0}{2},$$

on a donc (x_0, y_0) qui correspond à $X = 0; Y = 0$; puis $x - x_0 = X + Y$ et $y - y_0 = X - Y$, et en notant :

$$\tilde{u}(X, Y) = u(x_0 + X + Y, y_0 + X - Y),$$

$$\tilde{v}(X, Y) = v(x_0 + X + Y, y_0 + X - Y)$$

et $\tilde{w}(X, Y) = w(x_0 + X + Y, y_0 + X - Y),$

ces fonctions sont encore de classe C^{p-2} , et la relation 9.31 devient :

$$F(X, Y) = (X + Y)^2 \tilde{u} + 2(X + Y)(X - Y) \tilde{v} + (X - Y)^2 \tilde{w},$$

soit encore

$$9.36. \quad F(X, Y) = X^2(\tilde{u} + 2\tilde{v} + \tilde{w}) + 2XY(\tilde{u} - \tilde{w}) + Y^2(\tilde{u} - 2\tilde{v} + \tilde{w}),$$

qu'est du type 9.31, avec $u_1 = \tilde{u} + 2\tilde{v} + \tilde{w}$, $v_1 = \tilde{u} - \tilde{w}$ et $w_1 = \tilde{u} - 2\tilde{v} + \tilde{w}$, et un travail dans un voisinage de $X = 0$ et $Y = 0$ cette fois.

Mais ici, $u_1(0, 0) = \tilde{u}(0, 0) + 2\tilde{v}(0, 0) + \tilde{w}(0, 0)$, ce qui, compte tenu du changement de variable, vaut :

$$u_1(0, 0) = u(x_0, y_0) + 2v(x_0, y_0) + w(x_0, y_0) = \frac{r}{2} + s + \frac{t}{2} = s \neq 0,$$

donc la mise sous forme canonique de 9.36 va pouvoir s'effectuer en :

$$F(X, Y) = u_1 \left(\left(X + Y \frac{v_1}{u_1} \right)^2 + Y^2 \left(\frac{u_1 w_1 - v_1^2}{u_1^2} \right) \right),$$

avec $u_1(0, 0)w_1(0, 0) - v_1^2(0, 0) = -s^2 < 0$ en fait, donc $\frac{u_1 w_1 - v_1^2}{u_1^2}$ reste localement négatif : et on conclut encore à deux arcs implicites localement réguliers et le Théorème est justifié. ■

REMARQUE 9.37. — Ce que nous venons de justifier se généralise au cas des variétés en introduisant le Hessien et l'indice des points, mais c'est une autre histoire.

REMARQUE 9.38. — Si la forme $\phi : (h, k) \rightsquigarrow d^2 f(x_0, y_0)(h, k)$ est dégénérée, restons prudent et ne disons rien car on peut avoir beaucoup d'aspects différents pour Γ .

Je vais maintenant revenir à mon point de départ, c'est-à-dire justifier que :

THÉORÈME 9.39. — Soit une nappe paramétrée S , d'équation $z = f(x, y)$, f étant supposée de classe C^3 de Ω domaine de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . Si en (x_0, y_0) de Ω la forme quadratique :

$$\phi : (h, k) \rightsquigarrow \phi(h, k) = d^2 f(x_0, y_0)(h, k),$$

est non dégénérée, de signature $(1, 1)$, l'intersection de la nappe S et de son plan tangent π en $m_0 : (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est localement (en m_0), formée de deux arcs de courbe réguliers.

En effet, m_0 est régulier sur la nappe, et m de coordonnées (x, y, z) est dans $S \cap \pi$ si et seulement si on a :

$$z = f(x, y) \quad \text{et} \quad z - z_0 = (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0),$$

(voir le Théorème 9.21), soit encore si $z = f(x, y)$, avec x et y liés par la relation :

$$\mathbf{9.39.1} \quad f(x, y) - f(x_0, y_0) - (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) - (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

En définissant φ , de Ω dans \mathbb{R} par :

$$\varphi(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) - (y - y_0)f'_y(x_0, y_0),$$

on a φ de classe C^3 , comme f ,

$$\text{avec} \quad \varphi(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

donc $d\varphi(x_0, y_0) = 0$, et $d^2\varphi(x_0, y_0) = d^2f(x_0, y_0)$ qui définit une forme quadratique non dégénérée de signature 1.1. On peut appliquer le Théorème 9.30. à φ , donc localement en (x_0, y_0) , $\varphi(x, y) = 0$, (soit l'égalité 9.39.1), équivaut à l'appartenance de $p(x, y)$ à l'un de deux arcs réguliers γ_1 et γ_2 de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Ces arcs réguliers ont alors pour image sur S deux arcs réguliers Γ_1 et Γ_2 , obtenus par : (x, y) décrit γ_1 , (resp. γ_2) et $z = f(x, y)$, ces deux arcs étant également, vu 9.39.1 dans le plan π . ■

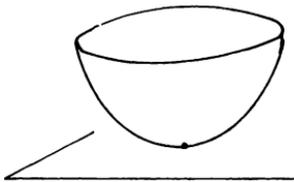
J'ai ainsi établi le résultat signalé avant le lemme 9.27.

REMARQUE 9.40. — Si $d^2f(x_0, y_0)$ est non dégénérée, la nappe S d'équation $z = f(x, y)$, a donc localement en m_0 l'un des trois aspect de la figure 9.40.1.

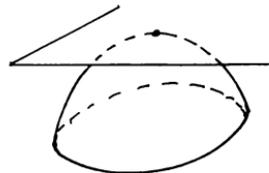
Mais si $d^2f(x_0, y_0)$ est dégénérée, on ne peut plus rien dire de $S \cap \pi$, comme le montrent les schémas 9.40.2, ces schémas sont tirés du livre Géométrie Différentielle de M. Berger et B. Gostiaux.

Après cette étude du cas particulier des nappes d'équation $z = f(x, y)$, un mot des nappes de A affine de dimension trois, définies implicitement.

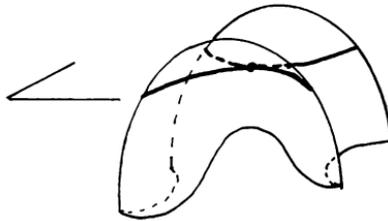
THÉORÈME 9.41. — Soit un espace affine A de dimension 3 rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et f une application de classe C^1 de Ω ouvert de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} . Si m_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) est un point de $S = \{m; f(x, y, z) = 0\}$ tel que $df(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, dans un voisinage de m_0 , S



$d^2 f(x_0, y_0)$ définie positive

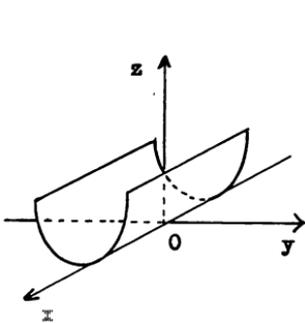


$d^2 f(x_0, y_0)$ définie négative

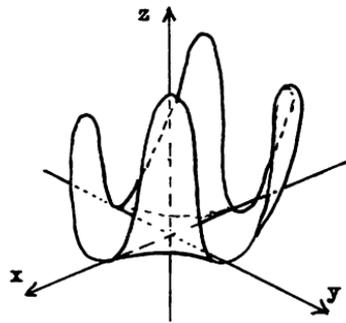


$d^2 f(x_0, y_0)$ non dégénérée de signature 1.1. (selle de cheval)

Fig 9.40.1.



$$f(x, y) = x^2$$

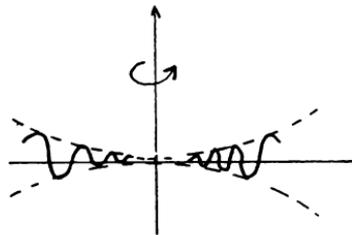


$$f(x, y) = x^2 y^2$$



$$f(x, y) = x(x^2 - 3y^2)$$

selle de singe.



$$f(x, y) = e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{x^2+y^2}$$

Fig 9.40.2.

est localement en m_0 , une nappe régulière; l'équation du plan tangent en m_0 étant :

$$(X - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (Y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (Z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

En effet, en m_0 , l'une des dérivées partielles de f est non nulle, $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ par exemple, donc par application du Théorème des fonctions implicites, (Tome 3, Théorème 17.10), on a un voisinage ouvert V de \mathbb{R}^3 contenant $m_0(x_0, y_0, z_0)$, un voisinage ouvert Ω de \mathbb{R}^2 contenant (x_0, y_0) , et une fonction φ de classe C^1 de Ω dans \mathbb{R} telle que :

$$((x, y, z) \in V \text{ et } f(x, y, z) = 0) \iff ((x, y) \in \Omega \text{ et } z = \varphi(x, y)).$$

Mais le Théorème 9.21., montre alors que $V \cap S$ est la nappe d'équation cartésienne $z = \varphi(x, y)$, régulière, le plan tangent en m_0 ayant pour équation :

$$9.42. \quad -(X - x_0)\varphi'_x(x_0, y_0) - (Y - y_0)\varphi'_y(x_0, y_0) + Z - z_0 = 0.$$

Comme φ'_x et φ'_y se calculent en dérivant l'identité $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, valable sur Ω , on a :

$$f'_x + f'_z\varphi'_x = 0 \quad \text{et} \quad f'_y + f'_z\varphi'_y = 0,$$

d'où :

$$\varphi'_x(x_0, y_0) = -\frac{f'_x(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{et} \quad \varphi'_y(x_0, y_0) = -\frac{f'_y(x_0, y_0, z_0)}{f'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

et en remplaçant φ'_x et φ'_y par ces valeurs dans 9.42, après multiplication par $f'_z(x_0, y_0, z_0)$, on obtient l'équation du plan tangent sous la forme donnée dans l'énoncé 9.41, expression symétrique en x, y et z . ■

3. Nappes réglées

Intuitivement, une nappe réglée est un ensemble de droites. Mais comme on a très rapidement besoin d'hypothèses de différentiabilité, on va imposer des hypothèses restrictives.

DÉFINITION 9.43. — Soit un espace affine euclidien A , de direction E euclidien $\simeq \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, et $\Omega = I \times \mathbb{R}$, I intervalle ouvert de \mathbb{R} . On appelle *nappe réglée*, toute nappe paramétrée par (Ω, φ) , φ étant affine en $\lambda \in \mathbb{R}$, donc du type $\varphi(t, \lambda) = f(t) + \lambda g(t)$, $t \in I$, telle que $g(t)$ soit un vecteur non nul, pour tout t de I .

Donc, si O est l'origine d'un repère de A , on a m , de paramètres λ et t , sur la nappe réglée $S = (\Omega, \varphi)$ si et seulement si $\overrightarrow{Om} = f(t) + \lambda g(t)$, ce qui prouve que m est sur la droite $D(t)$, de vecteur directeur $g(t)$, passant par $p(t)$ tel que $\overrightarrow{Op(t)} = f(t)$. Ce point $p(t)$ décrit donc un arc paramétré et $D(t)$ est une droite associée à ce point.

REMARQUE 9.44. — On peut partir d'une nappe $S = (U, \Psi)$, elle sera réglée si parmi ses paramétrages admissibles (voir 9.3.) elle en a un du type (Ω, φ) avec $\Omega = I \times \mathbb{R}$ et φ affine en $\lambda \in \mathbb{R}$.

Il est clair que, si f et g sont de classe C^p , le paramétrage sera de classe C^p et nous allons voir si les points d'une telle nappe sont réguliers ou non.

Soit donc la nappe réglée, paramétrée par :

$$9.45. \quad \overrightarrow{Om} = \varphi(t, \lambda) = f(t) + \lambda g(t),$$

avec (t, λ) , dans $\Omega = I \times \mathbb{R}$, I intervalle ouvert de \mathbb{R} , f et g étant de classe C^1 au moins, à valeurs dans $E \simeq \mathbb{R}^n$, direction de A , g ne s'annulant pas. Pour t fixé et λ variant dans \mathbb{R} , m décrit une droite notée D_t .

On a :

$$\varphi'_\lambda = \frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial \lambda} = g(t) \quad \text{et} \quad \varphi'_t = \frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial t} = f'(t) + \lambda g'(t),$$

donc φ'_λ et φ'_t sont dans $\text{Vect}(g(t), f'(t), g'(t))$, et le rang de $\{\varphi'_\lambda, \varphi'_t\}$ va dépendre du rang de cette famille notée :

$$\mathcal{F}_t = \{g(t), f'(t), g'(t)\}.$$

La non nullité de $g(t)$ implique $\text{rang}(\mathcal{F}_t) \geq 1$.

9.46. Premier cas : le rang de \mathcal{F}_t est 3.

Soit $F = \text{Vect}(g(t), f'(t), g'(t))$: c'est un sous-espace de dimension 3 de $E = \mathbb{R}^n$, (et c'est E si $n = 3$, cas que nous approfondirons), de plus \mathcal{F}_t est une base de F et la matrice des composantes de φ'_λ et φ'_t dans cette base de F est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

elle est de rang 2, donc, pour t fixé tel que \mathcal{F}_t soit de rang 3, pour tout λ dans \mathbb{R} , les points $m(t, \lambda)$ sont réguliers, (voir remarque 9.8). La direction du plan tangent varie avec λ . Ce point sera précisé au Théorème 9.49.

Il faut aussi remarquer que la condition \mathcal{F}_t de rang trois se traduit par la non nullité d'un déterminant 3×3 extrait de la matrice des composantes des vecteurs de \mathcal{F}_t dans une base de \mathbb{R}^n , condition qui reste localement (en t) vérifiée par continuité.

9.47. Deuxième cas : le rang de \mathcal{F}_t est 2.

Comme $g(t) \neq 0$, c'est que soit $\{g(t), g'(t)\}$ est libre avec $f'(t)$ dans $\text{Vect}(g(t), g'(t))$, soit $\{g(t), g'(t)\}$ est lié, mais alors $\{g(t), f'(t)\}$ est libre.

a) Supposons d'abord $\{g(t), g'(t)\}$ libre.

Il existe alors (α, β) dans \mathbb{R}^2 tel que $f'(t) = \alpha g(t) + \beta g'(t)$ et la matrice des composantes de φ'_λ et φ'_t dans la base $(g(t), g'(t))$ de $F = \text{Vect}(g(t), f'(t), g'(t))$ est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \beta + \lambda \end{pmatrix},$$

car $\varphi'_t = f' + \lambda g' = \alpha g + \beta g' + \lambda g'$.

Elle est régulière, sauf pour la valeur $\lambda = -\beta$, donc si \mathcal{F}_t est de rang 2 avec $\{g(t), g'(t)\}$ libre, tout point de la génératrice D_t est régulier sauf un. De plus la direction du plan tangent est constante le long de D_t , c'est $F = \text{Vect}(g, g')$; (en effet cette direction est $\text{Vect}(\varphi'_t, \varphi'_\lambda)$ et on passe de $\{g, g'\}$ à $\{\varphi'_\lambda, \varphi'_t\}$ par une matrice inversible).

b) On suppose \mathcal{F}_t de rang 2, mais avec $\{g, g'\}$ de rang 1 et $\{g, f'\}$ de rang 2. On a g' dans $\text{Vect}(g)$, donc il existe α réel tel que $g' = \alpha g$, d'où :

$$\varphi'_t = f'(t) + \lambda \alpha g,$$

et la matrice B des composantes de φ'_λ , φ'_t dans la base $\{g, f'\}$ de $F = \text{Vect}(g, f')$ devient :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \lambda\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

elle est de rang 2 pour tout λ dans \mathbb{R} , donc si \mathcal{F}_t est de rang 2, avec $\{g(t), g'(t)\}$ famille liée et $\{g(t), f'(t)\}$ libre, tout point de la génératrice D_t est régulier, et la direction du plan tangent, en tout point de D_t est la même, c'est $F = \text{Vect}\{g, f'\}$.

9.48. Si $\mathcal{F}_t = \{g(t), g'(t), f'(t)\}$ est de rang 1, c'est que $g'(t) \in \mathbb{R} \cdot g(t)$ et $f'(t)$ aussi, donc les vecteurs $\varphi'_\lambda(t) = g(t)$ et $\varphi'_t(t) = f'(t) + \lambda g'(t)$ sont colinéaires, $d\varphi(t, \lambda)$ n'est pas injective et tout point de D_t est stationnaire : il n'y a pas de plan tangent.

La discussion faite en 9.46, 9.47 et 9.48 ne supposait rien sur n dimension de l'espace, si ce n'est $n \geq 3$ pour parler d'un rang égal à trois. Nous allons préciser l'allure des nappes réglées en dimension trois.

THÉORÈME 9.49. — Soit une nappe réglée : $\overrightarrow{Om} = f(t) + \lambda g(t)$ de A espace affine de dimension trois, $(t, \lambda) \in I \times \mathbb{R}$, I intervalle ouvert de \mathbb{R} . Si la famille $\mathcal{F}_t = \{g(t), f'(t), g'(t)\}$ est de rang 3, lorsque λ varie dans \mathbb{R} , le plan tangent en $m(t, \lambda)$ pivote autour de la droite $D(t)$ obtenue en fixant t , et occupe toutes les positions sauf celle de direction $\text{Vect}(g(t), g'(t))$.

On suppose t fixé tel que $\{f'(t), g'(t), g(t)\}$ soit une base $\mathcal{B}(t)$ de $E = \mathbb{R}^3$ direction de l'espace affine. Prenons un repère \mathcal{R} d'origine m_0 de paramètres $(t, 0)$, sur la génératrice $D(t)$, de base $\mathcal{B}(t)$, (figure 9.49). Pour la valeur λ du paramètre, le plan tangent en $m(t, \lambda)$ a pour direction $\text{Vect}(g(t), f'(t) + \lambda g(t))$, et comme $g(t)$ dirige la droite $D(t)$, qui contient $m(t, \lambda)$, ce plan tangent, noté $\pi(t, \lambda)$ contient $D(t)$.

En particulier, pour $\lambda = 0$, ce plan tangent contient le point m_0 tel que $\overrightarrow{Om_0} = f(t)$, et le point p_0 , tel que :

$$\overrightarrow{m_0 p_0} = f'(t) + 0g'(t) = f'(t), \quad (\text{vecteur de sa direction}),$$

donc $\pi(t, 0)$ est le plan passant par $D(t)$, de direction $\text{Vect}(f'(t), g(t))$, dans le repère \mathcal{R} , c'est le plan $\pi(t, 0)$ d'équation $\eta = 0$, (voir figure 9.49).

Pour λ quelconque, $\pi(t, \lambda)$ contient encore la droite $D(t)$, donc les points $m(t, \lambda)$ et $m_0 = m(t, 0)$, et comme $f'(t) + \lambda g'(t)$ est dans sa direction, il

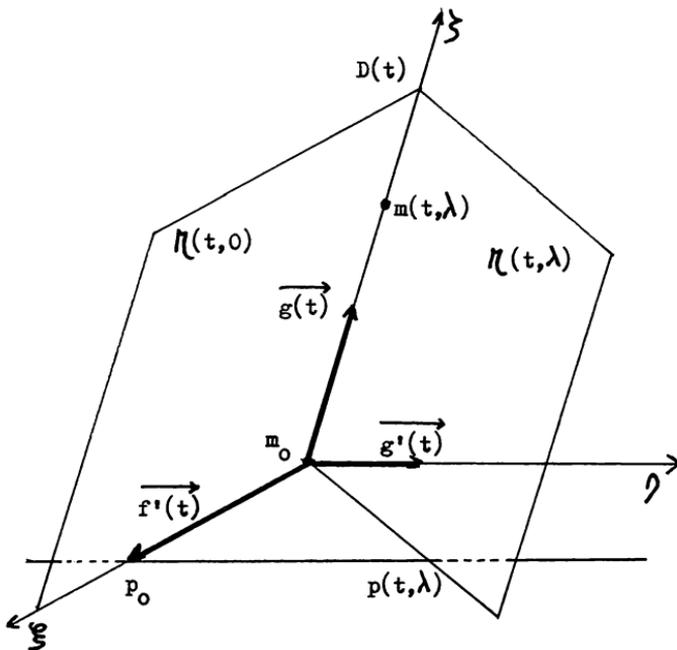


Fig. 9.49

contient le point $p(t, \lambda)$ tel que $\overrightarrow{m_0 p(t, \lambda)} = f'(t) + \lambda g'(t)$, d'où :

$$\overrightarrow{p_0 p(t, \lambda)} = \overrightarrow{m_0 p(t, \lambda)} - \overrightarrow{m_0 p_0} = f'(t) + \lambda g'(t) - f'(t),$$

soit : $\overrightarrow{p_0 p(t, \lambda)} = \lambda g'(t)$.

Dans le repère \mathcal{R} , le point $p(t, \lambda)$ a pour coordonnées $(1, \lambda, 0)$, donc le plan tangent $\pi(t, \lambda)$ contenant l'axe des ζ et passant par $p(t, \lambda)$ a pour équation $\eta = \lambda \xi$:

9.49.1. *le plan tangent à la nappe en $m(t, \lambda)$ de coordonnées $(0, 0, \lambda)$ dans le repère (\mathcal{R}) est le plan d'équation $\eta = \lambda \xi$,*

il pivote autour de $D(t)$ et occupe toutes les positions sauf celle du plan d'équation $\xi = 0$, c'est-à-dire de direction $\text{Vect}(g'(t), g(t))$. ■

On pourrait convenir, en écrivant l'équation du plan tangent sous la forme $\xi = \frac{1}{\lambda} \eta$, pour $\lambda \neq 0$, que si $m(t, \lambda)$ s'éloigne sur $D(t)$ «vers l'infini», soit si λ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors le plan tangent a pour limite le plan d'équation $\xi = 0$, qui de ce fait s'appelle plan asymptote, (voir en 6.34 la limite d'un plan).

DÉFINITION 9.50. — Soit une nappe réglée en dimension trois, paramétrée par $\overrightarrow{Om} = f(t) + \lambda g(t)$. Lorsque $\{g(t), g'(t)\}$ est libre, on appelle plan asymptote pour la génératrice $D(t)$, le plan affine contenant $D(t)$, de direction $\text{Vect}(g(t), g'(t))$.

Dans le cas où $\mathcal{F}_t = \{g(t), f'(t), g'(t)\}$ est de rang trois, le plan tangent aux différents points de $D(t)$ prenant toutes les positions « autour » de $D(t)$, (sauf le plan asymptote), il existe un point m_0 sur $D(t)$ pour lequel le plan tangent est perpendiculaire au plan asymptote, point unique car la relation 9.49.1. prouve qu'il y a bijection entre les points de $D(t)$ et les plans contenant $D(t)$, autres que le plan asymptote.

9.51. Ce point m_0 est le *point central*, le plan tangent associé est le *plan central*, et comme \mathcal{F}_t de rang trois est vrai pour t dans un ouvert J de \mathbb{R} , l'ensemble des points centraux pour t variant dans J est alors la *ligne de striction de la nappe*.

RECHERCHE DE CES ÉLÉMENTS : on cherche λ fonction de t tel que :

$$\frac{\partial m}{\partial t} \wedge \frac{\partial m}{\partial \lambda},$$

normal au plan tangent, soit perpendiculaire à $g \wedge g'$ qui lui, est normal au plan asymptote.

Ceci équivaut à $[(f'(t) + \lambda g'(t)) \wedge g(t)] \cdot (g \wedge g') = 0$, soit à :

$$\mathbf{9.52.} \quad \lambda_0(t) = \frac{(f' \wedge g) \cdot (g \wedge g')}{\|g \wedge g'\|^2},$$

d'où λ_0 fonction de t , et pour cette valeur, une paramétrisation :

$$t \rightsquigarrow \overrightarrow{Om_0}(t) = f(t) + \lambda_0(t)g(t),$$

de la ligne de striction.

9.53. PARAMÈTRE DE DISTRIBUTION

Toujours dans le cas de $\mathcal{F}_t = \{g(t), f'(t), g'(t)\}$ de rang trois, considérons le repère $(m_0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'origine m_0 , point central de la génératrice $D(t)$ (t est fixé) tel que $\{\vec{j}, \vec{k}\}$ engendre la direction du plan asymptote, \vec{k} dirigeant $D(t)$, le repère étant orthonormé.

On a donc $g(t)$ du type $\gamma(t)\vec{k}$, et $g'(t) \in \text{Vect}\{\vec{j}, \vec{k}\}$ se décompose en $g'(t) = \beta_2(t)\vec{j} + \beta_3(t)\vec{k}$; enfin si on pose :

$$f'(t) = \alpha_1(t)\vec{i} + \alpha_2(t)\vec{j} + \alpha_3(t)\vec{k},$$

le produit mixte :

$$(f'(t), g'(t), g(t)) = \begin{vmatrix} \alpha_1(t) & 0 & 0 \\ \alpha_2(t) & \beta_2(t) & 0 \\ \alpha_3(t) & \beta_3(t) & \gamma(t) \end{vmatrix} \quad \text{est non nul,}$$

donc on a $\alpha_1(t)\beta_2(t)\gamma(t) \neq 0$.

Le plan tangent en m_0 , de paramètre λ_0 donné par 9.52, passe par p_0 tel que :

$$\overrightarrow{m_0p_0} = f'(t) + \lambda_0g'(t),$$

et le plan tangent en m de paramètre λ quelconque, passe par p tel que $\overrightarrow{m_0p} = f'(t) + \lambda g'(t)$, donc tel que :

$$\overrightarrow{p_0p} = (\lambda - \lambda_0)g'(t).$$

Si on note q_0 et q les projections de p_0 et p sur le plan xm_0y , (figure 9.53.), comme le plan central est xm_0z , (perpendiculaire à ym_0z , plan asymptote), q_0 est sur m_0x ,

et :

$$\overrightarrow{q_0q} = (\lambda - \lambda_0)\beta_2(t)\vec{j},$$

et comme $g'(t)$ est dans la direction de ym_0z , l'abscisse de q_0 est $\alpha_1(t)$, ainsi que celle de q .

On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{m_0m} &= \overrightarrow{Om} - \overrightarrow{Om_0} = f(t) + \lambda g(t) - (f(t) + \lambda_0 g(t)) \\ &= (\lambda - \lambda_0)g(t), \end{aligned}$$

donc la cote de m est $(\lambda - \lambda_0)\gamma(t) = z$, alors que le plan tangent $\pi(t, \lambda)$ passe par q de coordonnées :

$$(\alpha_1(t), (\lambda - \lambda_0)\beta_2(t), 0),$$

donc $\pi(t, \lambda)$ a pour équation $Y = \frac{(\lambda - \lambda_0)\beta_2(t)}{\alpha_1(t)}X$, ou encore :

9.54.
$$Y = \frac{(\lambda - \lambda_0)\beta_2(t)\gamma(t)}{\alpha_1(t)\gamma(t)}X = \frac{\beta_2(t)}{\alpha_1(t)\gamma(t)}zX = (kz)X,$$

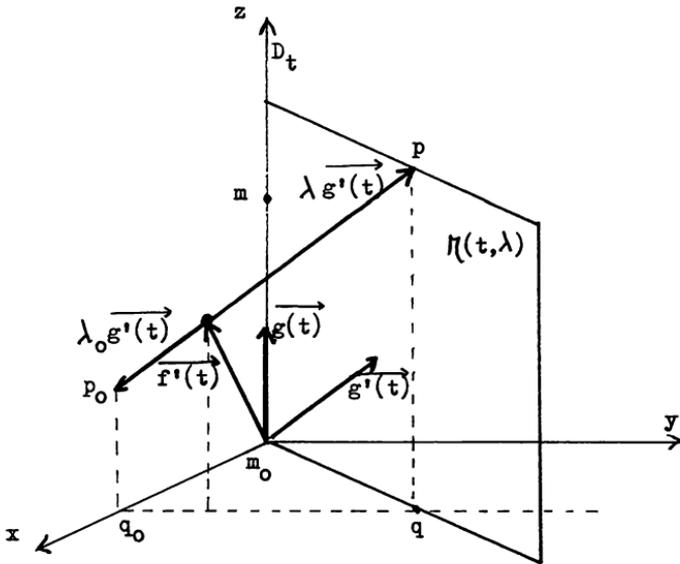


Fig 9.53.

et cette constante k est le paramètre de distribution pour la génératrice $D(t)$: c'est le facteur de proportionnalité entre la cote de m , par rapport au point central, sur la génératrice, et «la pente» du plan tangent.

On peut remarquer que :

$$k = \frac{\beta_2(t)}{\alpha_1(t)\gamma(t)} = \frac{(\beta_2)^2}{\alpha_1\beta_2\gamma}.$$

On a $\alpha_1\beta_2\gamma = (f', g', g)$, (produit mixte), $(\beta_2)^2$ n'est pas facile à exprimer, mais $g' \wedge g = \beta_2\gamma \vec{i}$, donc en écrivant $k = \frac{1}{\gamma^2} \frac{(\gamma\beta_2)^2}{\alpha_1\beta_2\gamma}$ on obtient une belle formule qui, j'en suis certain, va vous plaire :

9.55.
$$k(t) = \frac{\|g(t) \wedge g'(t)\|^2}{\|g(t)\|^2 (f'(t), g'(t), g(t))}.$$

Après toutes ces précisions dans le cas de $\mathcal{F}_t = \{g(t), f'(t), g'(t)\}$ de rang trois que me reste-t-il à dire pour le rang deux? Et bien à parler de nappe développable et d'arête de rebroussement.

DÉFINITION 9.56. — Une nappe réglée S en dimension trois, paramétrée par $\overrightarrow{Om} = f(t) + \lambda g(t)$ est dite développable si $\{g'(t), g(t)\}$ est libre avec $\{f'(t), g(t), g'(t)\}$ liée.

Cette définition est un peu restrictive à cause du « avec ... » que l'on peut faire sauter.

THÉORÈME 9.57. — Si une nappe réglée S est développable, il existe en général un arc Γ de S tel qu'en tout point de Γ la tangente à Γ soit la génératrice $D(t)$ passant par ce point.

On a donc la nappe paramétrée par $\overrightarrow{Om} = f(t) + \lambda g(t)$, $(t, \lambda) \in I \times \mathbb{R}$, I intervalle de \mathbb{R} , f et g étant de classe C^2 au moins, et on cherche λ fonction de classe C^1 de t , telle que Γ paramétré par $\varphi : t \rightsquigarrow f(t) + \lambda(t)g(t)$ ait pour tangente en $m(t)$ la droite $D(t)$.

On a :

$$\varphi'(t) = f'(t) + \lambda g' + \lambda' g,$$

avec $\{g, g'\}$ libre et $f' \in \text{Vect}\{g, g'\}$, donc il existe $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ scalaires tels que :

$$\mathbf{9.58} \quad f'(t) = \alpha(t)g(t) + \beta(t)g'(t),$$

d'où $\varphi'(t) = (\alpha(t) + \lambda')g(t) + (\beta(t) + \lambda)g'(t)$.

Si la fonction λ est choisie telle que $\lambda'(t) = -\beta(t)$, il reste $\varphi'(t) = (\alpha(t) - \beta'(t))g(t)$, à condition que β soit dérivable. Or on a supposé les fonctions f et g de classe C^2 au moins et comme dans 9.58, on calcule $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ en résolvant un système linéaire de rang deux obtenu en prenant les composantes sur une base, on sait que α et β sont de classe C^1 .

Si donc $\alpha(t) - \beta'(t) \neq 0$, (d'où le « en général »), l'arc Γ admet pour la valeur t du paramètre, un vecteur dérivé non nul, colinéaire à $g(t)$.

Si t_0 est un zéro de $\alpha - \beta'$, mais tel qu'il existe une dérivée de $\alpha - \beta'$ non nulle en t_0 , on obtient encore une tangente dirigé par $g(t_0)$, (par des dérivations successives). ■

DÉFINITION 9.59. — Lorsqu'une nappe développable S admet une courbe Γ ayant pour tangente en chaque point la génératrice rectiligne qui y passe, Γ est l'arête de rebroussement de la nappe.

EXEMPLE 9.60. — Soit un arc paramétré gauche $\Gamma = (I, f)$, bi-régulier de classe C^2 . Les tangentes à Γ engendrent une nappe réglée développable, S , d'arête de rebroussement Γ . Le plan tangent à S le long d'une génératrice $D(t)$ passant par $m(t)$ de Γ est le plan osculateur à Γ en $m(t)$.

La tangente $D(t)$ passe par $m(t)$ tel que $\overrightarrow{Om(t)} = f(t)$ et a pour vecteur directeur $g(t) = f'(t)$. La nappe S est paramétrée par $\overrightarrow{Op} = f(t) + \lambda f'(t)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et ici $\{f'(t), f''(t)\}$ est libre.

Puis, avec $g(t) = f'(t)$, on a :

$$\mathcal{F}_t = \{g, f', g'\} = \{f', f', f''\},$$

qui est de rang deux, donc la nappe est développable, (définition 9.56). Enfin, si $\lambda(t) = 0$, le point p_0 est en $m(t)$ et la tangente en p_0 à la courbe obtenue, (qui est Γ) est dirigée par $f'(t)$: c'est bien $D(t)$, donc Γ est arête de rebroussement.

Enfin, tout le long de $D(t)$, le plan tangent existe, sauf en p_0 , (on a $\frac{\partial p}{\partial t} = f'(t) + \lambda f''(t)$ et $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = f'(t)$, donc pour $\lambda = 0$ ces vecteurs sont dépendants), et sa direction est $\text{Vect}(f', f'')$: c'est le plan osculateur à Γ en $m(t)$. ■

EXEMPLE 9.61. — Soit un arc gauche $\Gamma = (I, f)$, trirégulier de classe C^k , $k \geq 4$. La droite caractéristique (voir 6.139) engendre une nappe réglée S développable, ayant pour arête de rebroussement l'ensemble des centres des sphères sur-osculatrices à Γ , si la courbe n'est pas sphérique.

On note s l'abscisse curviligne sur Γ , $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ le trièdre de Frenet. La nappe S est paramétrée par :

$$\overrightarrow{Op} = \overrightarrow{Om}(s) + \mathcal{R}(s)\vec{N} + \lambda\vec{B}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On a $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = \vec{B}$

et $\frac{\partial p}{\partial s} = \vec{T} + \mathcal{R}'\vec{N} + \mathcal{R} \left(-\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}} + \frac{\vec{B}}{\mathcal{T}} \right) + \lambda \left(-\frac{\vec{N}}{\mathcal{T}} \right),$

avec \mathcal{T} rayon de torsion, soit encore :

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \left(\mathcal{R}' - \frac{\lambda}{\mathcal{T}} \right) \vec{N} + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} (\vec{B}).$$

On a $\frac{\vec{\partial p}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\vec{\partial p}}{\partial s}$ calculé dans le trièdre $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$, en :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}' - \frac{\lambda}{T} \\ 1 & \frac{\mathcal{R}}{T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{T} - \mathcal{R}' \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Donc, si $\lambda \neq T\mathcal{R}'$, (tiens tiens, le centre de la sphère sur osculatrice, voir 6.140), le point est régulier sur la nappe S , et en tout point de la droite caractéristique autre que le centre de la sphère sur-osculatrice, le plan tangent à S , a sa direction fixe, orthogonale à \vec{T} : ce plan est le plan normal de Γ .

Cherchons l'arête de rebroussement

La nappe est paramétrée par $\vec{Op} = \varphi(s) + \lambda g(s)$, avec :

$\varphi(s) = \vec{Om}(s) + \mathcal{R}(s)\vec{N}$, (au lieu de $f(s)$) et $g(s) = B$.

On a :

$$g'(s) = -\frac{\vec{N}}{T} \quad \text{et} \quad \varphi'(s) = \mathcal{R}'(s)\vec{N} + \frac{\mathcal{R}(s)}{T(s)}\vec{B},$$

donc $\{g, g'\}$ est libre et $\{g, g', \varphi'\}$ lié.

Pour $\lambda = T\mathcal{R}'$, on obtient le centre de la sphère sur-osculatrice, $q(s)$, avec

$$\vec{Oq}(s) = \vec{Om} + \mathcal{R}(s)\vec{N} + T\mathcal{R}'\vec{B}$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{q}}{ds} &= \vec{T} + \mathcal{R}'\vec{N} + \mathcal{R} \left(-\frac{\vec{T}}{\mathcal{R}} + \frac{\vec{B}}{T} \right) + T\mathcal{R}' \left(-\frac{\vec{N}}{T} \right) + (T\mathcal{R}')'\vec{B}, \\ &= \vec{T} + \mathcal{R}'\vec{N} - \vec{T} + \frac{\mathcal{R}}{T}\vec{B} - \mathcal{R}'\vec{N} + (T'\mathcal{R}' + T\mathcal{R}'')\vec{B}, \\ &= \left(\frac{\mathcal{R}}{T} + T'\mathcal{R}' + T\mathcal{R}'' \right) \vec{B}, \end{aligned}$$

et, si la courbe n'est pas sphérique, (voir 6.149), $\frac{d\vec{q}}{ds}$ est non nul, dirigé par \vec{B} : la tangente à la courbe décrite par le centre de la sphère sur-osculatrice est bien la droite caractéristique. ■

4. Quelques types de nappes en dimension trois

Avant de parler de nappes cylindriques, coniques, ou de toute autre nature, commençons par un résultat, d'ordre général sur la manière de considérer les nappes.

THÉORÈME 9.62. — *Au voisinage d'un point m_0 , régulier, d'une nappe S de A espace affine de dimension trois, les trois modes de représentation d'une nappe : paramétrisation, équation implicite ou équation cartésienne, sont équivalents, (la nappe étant de classe C^1).*

Vu la définition 9.6, si on parle de point régulier, c'est que la nappe est de classe C^1 au moins : il y a de la redondance dans l'air!

Supposons la nappe paramétrée par la donnée de Ω ouvert de \mathbb{R}^2 , et de l'application $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, de composantes α, β et γ , applications de classe C^1 de Ω dans \mathbb{R} .

En $m_0(u_0, v_0)$, point régulier, la matrice jacobienne de f :

$$\mathcal{J}_f(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \alpha'_u(u_0, v_0) & \alpha'_v(u_0, v_0) \\ \beta'_u(u_0, v_0) & \beta'_v(u_0, v_0) \\ \gamma'_u(u_0, v_0) & \gamma'_v(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

est de rang deux, donc admet un mineur d'ordre deux non nul, et qui le reste localement par continuité.

Si par exemple $\begin{vmatrix} \alpha'_u & \alpha'_v \\ \beta'_u & \beta'_v \end{vmatrix}$ reste non nul sur U voisinage de (u_0, v_0) ,

l'application $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, de composantes α et β est telle que $dg(u_0, v_0)$ soit un isomorphisme de \mathbb{R}^2 , et g étant de classe C^1 , on peut lui appliquer le Théorème du difféomorphisme local, (Tome 3, Théorème 17.8) d'où un voisinage V de (x_0, y_0) dans \mathbb{R}^2 , avec $x_0 = \alpha(u_0, v_0)$ et $y_0 = \beta(u_0, v_0)$ et un voisinage U' de (u_0, v_0) tels que :

$$((u, v) \in U') \iff ((x, y) \in V \quad \text{et} \quad (u, v) = g^{-1}(x, y)).$$

En notant $u = \varphi(x, y)$ et $v = \Psi(x, y)$, on a donc un C^1 difféomorphisme de V sur U' , d'où un paramétrage admissible $(V, f \circ g^{-1})$ de la nappe $(U', f|_{U'})$, paramétrage du type :

9.63.
$$(x, y) \rightsquigarrow (x, y, z = \gamma(\varphi(x, y), \Psi(x, y))),$$

donc une équation cartésienne $z = F(x, y)$ de la nappe, valable dans un voisinage de m_0 .

Comme une équation cartésienne du type $z = F(x, y)$ ou encore $F(x, y) - z = H(x, y, z) = 0$ est un cas particulier d'équation implicite, il nous reste à justifier qu'au voisinage d'un point régulier m_0 , une nappe d'équation implicite $H(x, y, z) = 0$, admet une paramétrisation : ceci a été fait au Théorème 9.41, la paramétrisation étant en fait du type équation cartésienne. ■

REMARQUE 9.64. — *On aurait de même, pour un arc de classe C^1 , régulier, d'un plan affine, équivalence entre paramétrisation, équation cartésienne ou équation implicite, tout ceci restant local. (Voir Théorème 9.135.).*

REMARQUE 9.65. — *Par contre pour un arc gauche, il faudrait deux équations implicites :*

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

avec des différentielles non nulles et non proportionnelles pour la définir.

En effet, si on se donne f et g de classe C^1 sur Ω ouvert de \mathbb{R}^3 , si en m_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) on a $f(x_0, y_0, z_0) = g(x_0, y_0, z_0) = 0$, avec $df(m_0)$ et $dg(m_0)$ non nulles et non proportionnelles, alors :

$$S = \{m; f(x, y, z) = 0\} \quad \text{et} \quad T = \{m; g(x, y, z) = 0\},$$

sont deux nappes localement régulières en m_0 ,

$$\text{et} \quad m \in \Gamma = S \cap T \iff F(x, y, z) = 0,$$

avec F fonction de Ω dans \mathbb{R}^2 de composantes f et g .

La matrice jacobienne de F est :

$$\mathcal{J}_F(x, y, z) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \end{pmatrix},$$

elle est de rang deux en m_0 , d'après la non proportionnalité de :

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

et de :

$$dg(x_0, y_0, z_0) = g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz,$$

donc, si par exemple le mineur $f'_y(m_0)g'_z(m_0) - g'_y(m_0)f'_z(m_0)$ est non nul, le Théorème des fonctions implicites, (Tome 3, Théorème 17.10) donne localement :

$$(m \in \Gamma) \iff ((y, z) = \varphi(x) = (\alpha(x), \beta(x)),$$

avec un paramétrage $x \rightsquigarrow (x, \alpha(x), \beta(x))$, de classe C^1 , de Γ qui est donc un arc régulier, (première composante du vecteur dérivé non nulle).

Dans ce cas (Γ) apparaît donc comme une intersection de deux nappes passant par m_0 , de plans tangents distincts en m_0 . ■

Comparer ce résultat avec le Théorème 9.157 sur les variétés.

Venons en à l'étude de certains types de nappes, en commençant par les nappes cylindriques.

DÉFINITION 9.66. — Une nappe S de A espace affine est dite cylindrique de génératrices parallèles à une droite affine D si et seulement si, pour tout m_0 de S , la droite $D(m_0)$ parallèle à D contenant m_0 est contenue dans la nappe S .

THÉORÈME 9.67. — Si une nappe S de A affine de dimension trois admet une équation implicite du type $f(P, Q) = 0$, avec $P(x, y, z) = ax + by + cz + d$ et $Q(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$, formes affines indépendantes, elle est cylindrique.

En effet, les deux plans non parallèles (p) et (q) , d'équations respectives $ax + by + cz + d = 0$ et $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, ont pour intersection une droite D , et si $m_0 : (x_0, y_0, z_0)$ est sur S , les deux plans (p_0) et (q_0) d'équations respectives :

$$\begin{aligned} ax + by + cz + d &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d, \\ \text{et} \quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta &= \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + \delta, \end{aligned}$$

sont parallèles à (p) et (q) , donc leur intersection est une droite $D(m_0)$ parallèle à D , contenant m_0 .

Comme pour tout $m : (x, y, z)$ de $D(m_0)$, on a :

$$P(m) = P(m_0) \quad \text{et} \quad Q(m) = Q(m_0),$$

et que $f(P(m_0), Q(m_0)) = 0$, il en résulte que pour tout m de $D(m_0)$ on a $f(P(m), Q(m)) = 0$, donc $D(m_0) \subset S$: la nappe est bien cylindrique. ■

Ce théorème a une « réciproque », (si, on renforce un peu les hypothèses).

THÉORÈME 9.68. — Soit une nappe cylindrique S , de classe C^1 , régulière, dans A espace affine de dimension trois. Alors S admet pour équations implicites des équations du type $\varphi(P, Q) = 0$, où P et Q sont des formes affines indépendantes.

En effet, si $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le repère initial, dans lequel x, y, z sont les coordonnées de m , et si on change de base en prenant $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tels que \vec{K} dirige une droite D parallèle aux génératrices de S , avec X, Y, Z coordonnées de m dans ce nouveau repère, on aura :

$$m : (X, Y, Z) \in S \iff p : (X, Y, 0) \in S,$$

puisque m et p sont alors sur une parallèle à D .

Mais pour un $m_0 : (X_0, Y_0, Z_0)$ donné, S admet localement en p_0 de coordonnées $(X_0, Y_0, 0)$ une équation implicite du type $f(X, Y, Z) = 0$, pour (X, Y, Z) dans U voisinage de $(X_0, Y_0, 0)$, (Théorème 9.62.). Donc il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|X - X_0| < \alpha$ et $|Y - Y_0| < \alpha$ on aura $(X, Y, 0) \in U$, et on a :

pour tout (X, Y, Z) de $]X_0 - \alpha, X_0 + \alpha[\times]Y_0 - \alpha, Y_0 + \alpha[\times \mathbb{R} = W$, le point m correspondant sera sur S si et seulement si

$$\varphi(X, Y) = f(X, Y, 0) = 0.$$

Donc, X et Y étant des formes affines indépendantes en x, y et z , sur l'ouvert élémentaire W , (d'où le localement) on a bien $m \in W \cap S$ si et seulement si les coordonnées x, y, z de m dans le repère \mathcal{R} vérifient une relation du type $\varphi(P, Q) = 0$, (x, y, z étant tels que (X, Y, Z) reste dans W). ■

REMARQUE 9.69. — Si S est une nappe cylindrique de classe C^1 , régulière, de génératrices parallèles à D , et si H est un hyperplan affine de A , (espace de dimension 3), non parallèle à D , il résulte de la remarque 9.65, que $\Gamma = H \cap S$ est un arc (plan) car le plan tangent en m_0 de Γ , à S , contient D alors que le plan tangent à H est ... H . Cette courbe Γ étant régulière admet alors, dans le plan H , une équation implicite, (localement) qui devient celle de la nappe.

Passons aux nappes coniques.

DÉFINITION 9.70. — Une nappe S de A espace affine est dite conique de sommet $a \in S$, si et seulement si pour tout m de $S - \{a\}$, la droite affine $D(a, m)$ engendrée par a et m est dans la nappe S .

THÉORÈME 9.71. — Si dans un repère \mathcal{R} de A espace affine de dimension trois, une nappe S admet une équation implicite du type $f(P, Q, R) = 0$, où f est une fonction homogène et P, Q, R sont trois formes affines indépendantes, la nappe est conique de sommet ω intersection des trois plans d'équations $P = 0, Q = 0, R = 0$.

On suppose f homogène de degré r .

Si on prend un nouveau repère \mathcal{R}' , dans lequel les coordonnées seront :

$$X = P(x, y, z) = ax + by + cz + h,$$

$$Y = Q(x, y, z) = a'x + b'y + c'z + h',$$

et
$$Z = R(x, y, z) = a''x + b''y + c''z + h'',$$

dans \mathcal{R}' , d'origine ω , l'équation de S devient $f(X, Y, Z) = 0$, et, f étant homogène, si $m_0 \neq \omega$ est sur S , on a $f(X_0, Y_0, Z_0) = 0$, (X_0, Y_0, Z_0) coordonnées de m_0 dans le repère \mathcal{R}' , mais alors tout m de $D(\omega, m_0)$ ayant des coordonnées du type $(\lambda X_0, \lambda Y_0, \lambda Z_0)$, λ réel, sera tel que :

$$f(\lambda X_0, \lambda Y_0, \lambda Z_0) = \lambda^r f(X_0, Y_0, Z_0) = 0,$$

donc $D(\omega, m_0) \subset S$: on a bien une nappe conique de sommet ω . ■

Comme pour les nappes cylindriques, ce résultat va avoir une réciproque.

THÉORÈME 9.72. — Soit une nappe conique S , régulière de classe C^1 , de sommet a , dans A espace affine de dimension trois. En tout point $m_0 \neq a$ de S , une équation (locale) implicite de S est du type $\varphi(P, Q, R) = 0$, avec φ fonction homogène et P, Q, R désignant trois formes affines indépendantes, telles que a soit l'intersection des plans d'équation $P = 0, Q = 0, R = 0$.

C'est encore le Théorème 9.62 qui assure l'existence (locale) d'une équation implicite de S .

Si \mathcal{R} est le repère initial, on prend l'origine en $a : (\alpha, \beta, \gamma)$ et on pose :

$$P(x, y, z) = x - \alpha = X; \quad Q = y - \beta = Y \quad \text{et} \quad R = z - \gamma = Z.$$

Soit $m_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de $S - \{a\}$, ses coordonnées dans le nouveau repère ne sont pas toutes nulles, par exemple $Z_0 \neq 0$, et le point p_0 de coordonnées $\left(\frac{1}{Z_0} \cdot X_0, \frac{1}{Z_0} \cdot Y_0, \frac{1}{Z_0} \cdot Z_0\right)$, de la droite $D(a, m_0)$ est sur la nappe S .

En $p_0 : \left(\frac{X_0}{Z_0}, \frac{Y_0}{Z_0}, 1\right)$, S admet localement une équation implicite du type $\varphi(X, Y, Z) = 0$, valable pour tout m de coordonnées X, Y, Z , tel que $\|\overrightarrow{mp_0}\| < r$, avec un $r > 0$, c'est-à-dire $m \in B_0(p_0, r)$.

On note H_0 le plan d'équation $Z = 0$, et H_1 celui d'équation $Z = 1$.

Comme l'application $\theta : m' \rightsquigarrow m$, définie sur $A - H_0$ par :

$$(X', Y', Z') \rightsquigarrow \left(\frac{X'}{Z'}, \frac{Y'}{Z'}, 1\right),$$

est continue, et que $\theta(m_0) = p_0$ est dans la boule ouverte $B_0(p_0, r)$, il existe U voisinage ouvert de m_0 , tel que, pour m' dans U , $\theta(m') \in B_0(p_0, r)$, donc en fait, tel que :

$$\theta(m') \in B_0(p_0, r) \cap H_1.$$

(Voir figure 9.72).

Mais alors, pour m' de U , on a m' sur la nappe S , (si de plus $m' \neq a$) si et seulement si $\theta(m')$ est dans S . Or les coordonnées X, Y, Z de $\theta(m')$ sont

$X = \frac{X'}{Z'}$, $Y = \frac{Y'}{Z'}$, et $Z = 1$, et on a ($m' \in S \cap (U - \{a\})$) si et seulement si $\varphi\left(\frac{X'}{Z'}, \frac{Y'}{Z'}, 1\right) = 0$: sous cette forme, l'équation implicite locale de S est homogène en X', Y' et Z' , d'où le résultat. ■

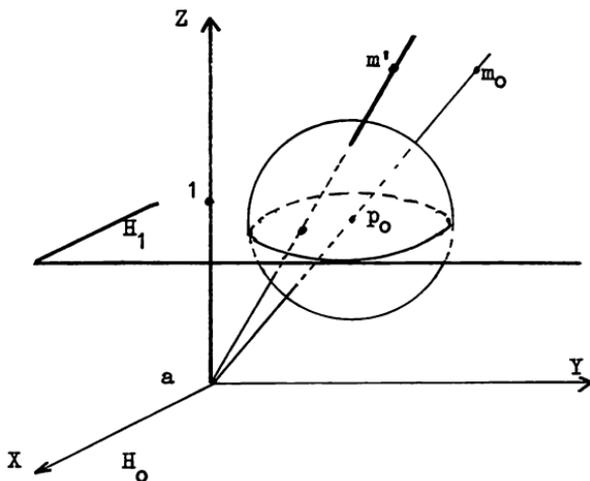


Fig. 9.72

REMARQUE 9.73. — L'ouvert U est en fait le cône (ouvert) de sommet a , contenant tout le disque $B_0(p_0, r) \cap H_1$, privé de a .

Appliquons ces notions toutes neuves à la recherche d'un cylindre ou d'un cône circonscrit à une nappe.

DÉFINITION 9.74 — Soit une nappe S d'un espace affine A de direction E et \vec{w} non nul dans E . On appelle cylindre circonscrit à S dans la direction \vec{w} , l'ensemble des tangentes à la nappe de direction $\mathbb{R}\vec{w}$, et contour apparent

de direction $\mathbb{R}\vec{\omega}$ l'ensemble des points de la nappe où le plan tangent est parallèle à $R\vec{\omega}$.

Je me bornerai à indiquer comment on recherche ces éléments pour une nappe de classe C^1 au moins, régulière, en dimension trois.

9.75. Cas d'une nappe « en implicite », d'équation $f(x, y, z) = 0$.

Le point $m(x, y, z)$ est alors sur le contour apparent \mathcal{C} si et seulement si ($m \in S$) et si la direction du plan tangent, c'est-à-dire $\ker(df(m))$, contient $\mathbb{R}\vec{\omega}$, donc si et seulement si :

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad g(x, y, z) = df(x, y, z)(\vec{\omega}) = 0.$$

Ces deux équations $f(x, y, z) = 0$ et $g(x, y, z) = 0$ caractérisent le contour apparent \mathcal{C} , qui, en général, est une courbe, (voir remarque 9.65).

Si \mathcal{C} est paramétrée en $x = \alpha(t), y = \beta(t), z = \gamma(t)$, (t dans I , intervalle réel), un point p de coordonnées X, Y, Z est alors sur le cylindre circonscrit de direction $\mathbb{R}\vec{\omega}$ si et seulement si il existe t dans I tel que p soit sur la droite de direction $\mathbb{R}\vec{\omega}$, passant par $m(t)$ sur \mathcal{C} , donc si on a, pour λ dans \mathbb{R} , avec $\vec{\omega} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$,

$$\begin{cases} X = \alpha(t) + \lambda a, \\ Y = \beta(t) + \lambda b, \\ Z = \gamma(t) + \lambda c, \end{cases} \quad (t, \lambda) \in I \times \mathbb{R}.$$

Il peut être préférable de dire que p , de coordonnées (x, y, z) est sur ce cylindre, si et seulement si la droite $D(p)$, passant par p , de direction $R\vec{\omega}$, est tangente à S . En paramétrant $D(p)$ par :

$$(m \in D(p)) \iff \left(\exists t \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{Om} = \overrightarrow{Op} + t\vec{\omega} \right),$$

on doit écrire que l'équation $f(\overrightarrow{Op} + t\vec{\omega}) = 0$, (équation en t) admet une racine t_0 telle qu'en outre :

$$df(\overrightarrow{Op} + t_0\vec{\omega})(\vec{\omega}) = 0.$$

Comme la fonction $t \rightsquigarrow \varphi(t) = f(\overrightarrow{Op} + t\vec{\omega})$ est dérivable, de dérivée

$$\varphi'(t) = df(\overrightarrow{Op} + t\vec{\omega})(\vec{\omega}),$$

ceci revient encore à dire que l'équation $\varphi(t) = 0$, admet une racine double. Cela peut servir, par exemple pour des quadriques S car l'équation en t obtenue est alors du second degré.

9.76. Cas de la nappe paramétrée par $\overrightarrow{Om} = f(u, v)$.

Le couple (u, v) correspondra à un point du contour apparent si et seulement si $\overrightarrow{\omega} \in \text{Im}(df(u, v))$, direction du plan tangent à la nappe S en m .

Cette condition se traduit par une équation en u et v qui permet «en général», de calculer u fonction de v , ou v fonction de u , (ou u et v fonctions d'un paramètre t , ce qui serait le cas par exemple d'une relation en $u^2 + v^2 = a^2$ qui équivaut à $u = a \cos t$ et $v = a \sin t$), d'où une paramétrisation éventuelle du contour apparent.

Bien sûr, $\overrightarrow{\omega}$ dans $\text{Im}(df(u, v))$ équivaut encore à la nullité du produit mixte $(f'_u, f'_v, \overrightarrow{\omega})$.

Cylindre circonscrit

Si on dispose d'un paramétrage (I, g) , (I intervalle de \mathbb{R}) du contour apparent, on procède comme en 9.75 : si

$$g(t) = \alpha(t) \overrightarrow{i} + \beta(t) \overrightarrow{j} + \gamma(t) \overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\omega} = a \overrightarrow{i} + b \overrightarrow{j} + c \overrightarrow{k},$$

on paramètre en :

$$\begin{cases} X = \alpha(t) + \lambda a, \\ Y = \beta(t) + \lambda b, \\ Z = \gamma(t) + \lambda c, \end{cases} \quad (t, \lambda) \in I \times \mathbb{R},$$

le cylindre circonscrit de direction $\mathbb{R} \overrightarrow{\omega}$.

Passons aux cônes circonscrits.

DÉFINITION 9.77. — Soit une nappe S de A espace affine de direction E et a dans A . On appelle cône de sommet a , circonscrit à la nappe S l'ensemble des droites passant par a , tangentes à S , et contour apparent de point de vue a , l'ensemble C des points de S tels que le plan tangent en m à S contienne la droite $D(a, m)$ engendrée par a et m .

Là encore, distinguons deux cas.

9.78. La nappe S est d'équation implicite $f(x, y, z) = 0$, (f de classe C^1 , nappe supposée régulière, cela va de soi).

Le point m , de coordonnées (x, y, z) est dans le contour apparent si et seulement si, (pour $m \neq a$), $(m \in S)$ et $\overrightarrow{am} \in \ker(df(m))$. Ceci équivaut donc au système :

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = df(x, y, z)(\overrightarrow{am}) = 0, \end{cases}$$

système qui «en général», définit un arc \mathcal{C} comme intersection de deux nappes, (remarque 9.65).

Remarquons que, si α, β, γ sont les coordonnées de a , g s'écrit encore :

$$g(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)(x - \alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)(y - \beta) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)(z - \gamma).$$

Si de cette étude, il résulte un paramétrage (I, φ) du contour apparent \mathcal{C} , de point de vue a , en $\varphi(t) = u(t)\vec{i} + v(t)\vec{j} + w(t)\vec{k}$, on paramétrera le cône circonscrit de sommet a par :

$$(p \in \text{cône}) \iff (\exists t \in I, p \in D(a, m(t))),$$

avec $\overrightarrow{Om(t)} = \varphi(t)$, d'où un paramétrage en :

$$\begin{cases} X = \alpha + \lambda(u(t) - \alpha), \\ Y = \beta + \lambda(v(t) - \beta), \\ Z = \gamma + \lambda(w(t) - \gamma), \end{cases}$$

de ce cône circonscrit.

9.79. Cas d'une nappe S paramétrée par $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ et $z = h(u, v)$, avec (u, v) dans Ω domaine de \mathbb{R}^2 .

Le point m de coordonnées $f(u, v)$, $g(u, v)$ et $h(u, v)$ est sur le contour apparent \mathcal{C} si et seulement si $\overrightarrow{am} \in \text{Im}(dF(u, v))$, avec F de Ω dans \mathbb{R}^3 de composantes f, g, h . C'est donc vérifié si et seulement si le produit mixte $(F'_u, F'_v, \overrightarrow{am}) = 0$, avec si, α, β et γ sont les coordonnées de a :

$$\overrightarrow{am} = (f(u, v) - \alpha)\vec{i} + (g(u, v) - \beta)\vec{j} + (h(u, v) - \gamma)\vec{k}.$$

On obtient ainsi une «relation liant u et v », ou un arc dans l'ouvert Ω de \mathbb{R}^2 , d'où en général, un arc \mathcal{C} de S .

Si on peut paramétrer \mathcal{C} , on paramètre le cône circonscrit de sommet a , comme en 9.78.

On peut encore parler, entre-autres, des nappes de révolution, et des nappes conoïdales.

DÉFINITION 9.80. — Une nappe S de A espace affine euclidien de dimension trois est dite de révolution d'axe Δ si et seulement si, pour tout m_0 de S , le cercle $\Gamma(m_0)$ d'axe Δ , passant par m_0 est sur la nappe S .

THÉORÈME 9.81. — Si une nappe S a une équation implicite du type $f(u, v) = 0$ avec $u = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ et $v = \alpha x + \beta y + \gamma z + h$, ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$), elle est de révolution d'axe Δ passant par ω de coordonnées (a, b, c) de vecteur directeur $\vec{V} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$, (le repère étant orthonormé).

En effet, soit $m_0(x_0, y_0, z_0)$ sur S . Le cercle d'axe Δ passant par m_0 , est l'intersection de la sphère (Σ) de centre ω , passant par m_0 , et du plan (P) perpendiculaire à \vec{V} passant par m_0 .

L'équation de (Σ) est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2,$$

et celle de (P) , est :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + h = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 + h,$$

et comme sur ce cercle, on a $u(m) = u(m_0)$ et $v(m) = v(m_0)$, et que m_0 est sur S , on a :

$$f(u(m), v(m)) = f(u(m_0), v(m_0)) = 0,$$

donc $m \in S$. ■

Comme pour les nappes coniques ou cylindriques on a une réciproque :

THÉORÈME 9.82. — Soit une nappe S , de classe C^1 , régulière, de révolution dans A affine euclidien de dimension trois. Dans tout repère orthonormé, une équation implicite (locale) de S est du type $f(u, v) = 0$, avec : $u = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ et v forme affine, (non constante) en x, y, z .

L'existence, (locale) d'une équation implicite de S nappe de classe C^1 , régulière, provient du Théorème 9.62.

On prend un nouveau repère d'origine $\omega = (a, b, c)$ point de l'axe Δ de la nappe de révolution, d'où de nouvelles coordonnées :

$$X = x - a, \quad Y = y - b, \quad Z = z - c.$$

On effectue une rotation de façon que l'axe ωZ_1 soit la droite Δ ; soient X_1, Y_1, Z_1 les nouvelles coordonnées de m , on a

$$\overline{\omega m}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2.$$

Le point m_1 est sur la nappe \mathcal{S} si et seulement si n'importe quel point du cercle Γ_1 d'axe Δ , passant par m_1 est sur la nappe \mathcal{S} . On note ξ_1, η_1, ζ_1 les coordonnées de m_1 .

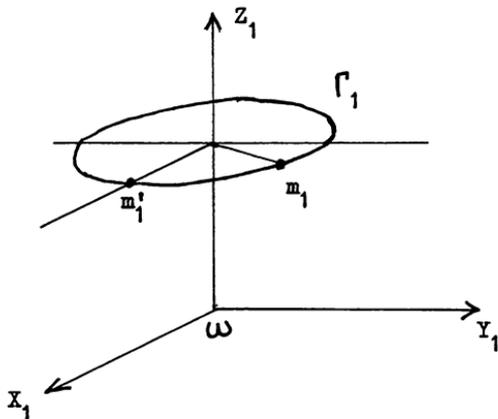


Fig. 9.82

Ce sera donc le cas si et seulement si le point m'_1 , d'abscisse positive, intersection de Γ_1 et du plan $X_1\omega Z_1$ est sur la nappe. Mais m'_1 a pour coordonnées $(\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}, 0, \zeta_1)$, et, avec $r_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}$, en prenant une fonction φ telle que, localement en m'_1 , la nappe \mathcal{S} ait une équation du type $\varphi(X_1, Y_1, Z_1)$, on aura là encore, pour (X_1, Y_1, Z_1) voisin de (ξ_1, η_1, ζ_1) , le couple $(\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}, Z_1)$ «voisin» de (r_1, ζ_1) , et dans ce cas $m_1(X_1, Y_1, Z_1)$ est sur \mathcal{S} si et seulement si :

$$\varphi\left(\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}, 0, Z_1\right) = 0.$$

En notant $u = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2$ et $v = Z_1$, c'est encore une relation du type

$$\varphi(\sqrt{u - v^2}, v) = 0,$$

avec finalement :

$$u = X^2 + Y^2 + Z^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,$$

et v forme affine non constante en x, y, z . ■

DÉFINITION 9.83. — *Les intersections d'une nappe de révolution S et des plans contenant l'axe Δ sont appelées les méridiennes de la nappe. Le plus souvent on prend un demi-plan limité par Δ .*

Enfin un mot des nappes conoïdales.

DÉFINITION 9.84. — *On appelle conoïde, toute nappe S ayant une équation implicite $f(x, y, z) = 0$ dans un repère \mathcal{R} de A affine euclidien de dimension trois, avec $((x, y), z)$ dans $U \times I$, U cône symétrique de \mathbb{R}^2 , I intervalle de \mathbb{R} , f étant homogène en (x, y) , continue.*

On parle encore de *nappe conoïdale*.

Il faut remarquer que pour avoir f différentiable, on peut soit se restreindre à $\overset{\circ}{U}$, soit supposer le cône U ouvert de \mathbb{R}^2 et alors ... c'est \mathbb{R}^2 , (voir les exemples 9.86 et 9.87).

THÉORÈME 9.85. — *Une nappe conoïdale admet un axe de symétrie Δ , elle est réglée et c'est une famille de droites parallèles à un plan fixe P , rencontrant Δ , et soumises à une autre condition. Ce plan P est le plan directeur du conoïde, Δ est un axe de symétrie et si Δ est perpendiculaire à P le conoïde est dit droit.*

Soit un conoïde S d'équation $f(x, y, z) = 0$, avec (x, y) dans U cône de \mathbb{R}^2 et z dans I intervalle de \mathbb{R} .

Si $m_0(x_0, y_0, z_0)$ est sur S , on a, pour tout λ réel,

$$f(\lambda x_0, \lambda y_0, z_0) = \lambda^r f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

(r rationnel à dénominateur impair, comme chaque fois que l'on veut parler de fonction homogène sur un cône symétrique : voir Tome 3, chapitre 16, § 6).

Si λ tend vers 0, par continuité, (supposée) de f , on aura $f(0, 0, z_0) = 0$: les points $(0, 0, z_0)$, $z_0 \in I$, de Oz , sont sur le conoïde.

De plus, comme $f(-x, -y, z) = (-1)^r f(x, y, z)$, l'appartenance de $m(x, y, z)$ à S équivaut à celle de $m'(-x, -y, z)$, symétrique de m par rapport à Oz : l'axe $\Delta = Oz$ est axe de symétrie pour S .

Enfin, si $m_0 \in S \setminus \Delta$, la droite $D(m_0)$ paramétrée par $x = \lambda x_0, y = \lambda y_0, z = z_0$ est sur S , or elle est parallèle au plan $z = 0$ et rencontre l'axe Δ du conoïde. Si on connaît les intersections Γ et Γ' de S et des plans d'équation $x = 1$, et $y = 1$ par exemple, en traduisant l'appartenance de m_0 à $\Gamma \cup \Gamma'$ on obtient le conoïde.

Deux exemples célèbres.

EXEMPLE 9.86. — *Le conoïde de Plücker* d'axe Oz . Il a pour équation $z(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0$ dans un repère orthonormé.

EXEMPLE 9.87. — Un *paraboloïde hyperbolique*, d'équation $z = xy$ est aussi un conoïde, que l'on retrouvera au chapitre X sur les quadriques, au Théorème 10.40.

EXEMPLE GÉNÉRIQUE, 9.88. — Soit un arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, de classe C^1 au moins de A affine de dimension trois, un plan P et une droite D non parallèle à P , les droites parallèles à P , coupant D et Γ engendrent «en général» un conoïde.

En effet, on prend un repère tel que le plan P soit le plan xOy , et la droite D l'axe des z .

Si Γ est paramétrée par $x = a(t), y = b(t), z = c(t)$, la droite $D(t)$ parallèle à xOy , coupant $z'z$, passant par $m(t)$ de Γ est déterminée si $m(t) \notin z'z$, (c'est le début du «en général»), et elle est paramétrée par

$$9.89. \quad \begin{cases} x = \lambda a(t), \\ y = \lambda b(t), \\ z = c(t). \end{cases}$$

Comme $m(t) \notin z'z$, on a soit $a(t) \neq 0$ soit $b(t) \neq 0$, par exemple $b(t) \neq 0$, donc 9.89 équivaut à :

$$\begin{cases} x = \lambda a(t), \\ \frac{x}{y} = \frac{a(t)}{b(t)}, \\ z = c(t), \end{cases}$$

et, avec un peu de chance, (et de bonnes hypothèses), une élimination de t entre les relations $\frac{x}{y} = \frac{a(t)}{b(t)}$ et $z = c(t)$ donnera une équation en

$\varphi\left(z, \frac{x}{y}\right) = 0$, du type équation d'un conoïde.

Si cette courbe Γ existe, c'est une *directrice* du conoïde d'axe D , de plan P .

EXEMPLE 9.90. — Pour le parabolôïde hyperbolique de l'exemple 9.87, les droites D_λ , d'équations $x = \lambda$, $z = \lambda y$, pour λ réel, sont parallèles au plan P d'équation $x = 0$, coupent l'axe $x'x$, et rencontrent l'hyperbole H d'équations $z = 1$, $1 = xy$ qui en est une directrice, (voir figure 9.90).

Au chapitre X on verra une autre représentation conoïdale de ce parabolôïde hyperbolique (voir. 10.38 et 10.40).

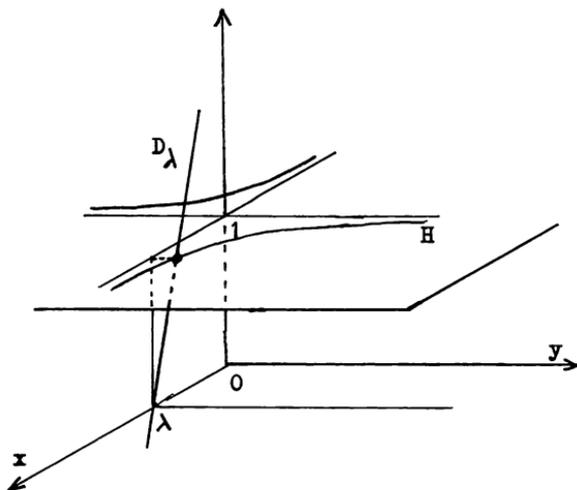


Fig. 9.90.

5. Arcs sur les nappes d'un espace affine de dimension trois

Dans ce paragraphe, de caractère technique, nous allons considérer, en un point régulier d'une nappe, l'allure de toutes les courbes passant en ce point.

9.91. NOTATIONS

On considère un espace affine euclidien A de dimension trois, de direction E , A étant muni d'un repère orthonormé :

$$\mathcal{R}_0 = (O; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0).$$

On se donne une nappe $\mathcal{S} = (\Omega, F)$, Ω ouvert connexe de \mathbb{R}^2 , F de classe C^1 au moins, (en fait elle sera supposée de classe suffisante pour

justifier les dérivations faites), et on considère le point m_0 de paramètres u_0, v_0 , régulier sur la nappe.

Enfin on considère des arcs paramétrés réguliers, (I, f) , à support dans Ω , d'où des arcs réguliers $\Gamma = (I, F \circ f)$ de la nappe \mathcal{S} , avec l'hypothèse suivante :

$$(\exists t_0 \in I), \quad (f(t_0) = (u_0, v_0)),$$

d'où $F \circ f(t_0) = \overrightarrow{Om_0}$.

On appellera s l'abscisse curviligne d'un tel arc Γ , et on considèrera à la fois m comme fonction de s sur Γ , (d'où des $\frac{d\vec{m}}{ds} \dots$) et aussi m dépendant de u et v , sur la nappe, d'où des :

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{m}}{\partial v}.$$

On suppose la nappe et l'arc de classe C^3 au moins, l'arc Γ étant bi-régulier.

On associe donc au point m de Γ son trièdre de Frenet, sa courbure γ et sa torsion τ , tout ceci ayant été défini en 6.131 et 6.132. Si $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ est le trièdre de Frenet, on a, avec $\vec{T} = \frac{d\vec{m}}{ds}$ et $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$:

$$9.92. \quad \begin{cases} \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}, \\ \frac{d\vec{N}}{ds} = -\gamma \vec{T} + \tau \vec{B}, \\ \frac{d\vec{B}}{ds} = -\tau \vec{N}. \end{cases}$$

Mais, en m sur la nappe \mathcal{S} , on dispose du vecteur normal sortant, (voir 9.19), $\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$, que l'on peut normer, ce qui nous donne donc le vecteur normal unitaire sortant :

$$9.93. \quad \vec{k} = \frac{\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right\|}.$$

On peut remarquer que \vec{T} , vecteur tangent à un arc Γ passant par m est orthogonal à \vec{k} , donc les trois vecteurs \vec{k} , \vec{B} et \vec{N} sont dans le plan normal en m pour l'arc Γ . On introduit un quatrième vecteur dans ce plan, \vec{g} , tel que le trièdre $(\vec{T}, \vec{g}, \vec{k})$ soit direct.

DÉFINITION 9.94. On appelle *vecteur normal géodésique en un point m régulier d'un arc Γ d'une nappe régulière S* le vecteur $\vec{g} = \vec{k} \wedge \vec{T}$, (\vec{k} vecteur unitaire normal sortant pour la nappe). Le trièdre direct $(\vec{T}, \vec{g}, \vec{k})$ est le trièdre de Darboux Ribeaucourt.

Un schéma va nous permettre de mieux comprendre la disposition de ces vecteurs. Comme $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ et $(\vec{T}, \vec{g}, \vec{k})$ sont deux bases orthonormées directes de E euclidien de dimension trois, il existe une isométrie directe, (rotation) envoyant \vec{T} sur \vec{T} , \vec{N} sur \vec{g} et \vec{B} sur \vec{k} . Mais, vous savez ce qu'est le poids de la tradition, les pesanteurs administratives et toutes ces choses ... on note conventionnellement θ l'angle des vecteurs \vec{N} et \vec{k} , d'où la formule :

$$9.95. \quad \vec{k} = \vec{N} \cos \theta + \vec{B} \sin \theta.$$

(En fait, la raison de ce choix est qu'on s'intéresse plus aux courbes qu'à la nappe, donc on exprime plutôt les égalités vectorielles dans la base de Frenet.)

Sur la figure 9.94, j'ai fait figurer de face, le plan normal à l'arc Γ , plan π qui contient les quatre vecteurs unitaires \vec{g} , \vec{k} , \vec{N} et \vec{B} .

Que va-t-on faire maintenant? Un bridge? (Il y a quatre vecteurs ...)
Non, restons sérieux. On va dériver \vec{T} , \vec{g} et \vec{k} par rapport à l'abscisse curviligne, en reprenant le type de raisonnement fait au § 5 du chapitre 6.

Le vecteur \vec{T} , unitaire, est tel que $\frac{d\vec{T}}{ds}$ est orthogonal à \vec{T} , donc dans $\text{Vect}(\vec{g}, \vec{k})$. On pose :

$$9.96. \quad \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma_g \vec{g} + \gamma_n \vec{k},$$

et les scalaires γ_g et γ_n sont respectivement les *courbures géodésique et normale*.

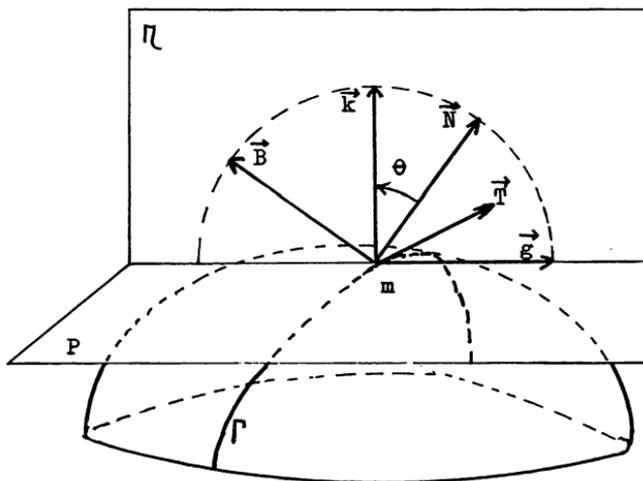


Fig. 9.94

Comme par ailleurs $\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \vec{N}$, et que, vu la définition de θ , on a $(\vec{g}, \vec{N}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ dans le plan normal (orienté),
on a $\vec{N} = \vec{g} \sin \theta + \vec{k} \cos \theta$,

donc
$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma \sin \theta \vec{g} + \gamma \cos \theta \vec{k},$$

d'où les expressions :

$$\mathbf{9.97.} \quad \gamma_g = \gamma \sin \theta = \frac{\sin \theta}{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \gamma_n = \gamma \cos \theta = \frac{\cos \theta}{\mathcal{R}},$$

de la courbure géodésique et de la courbure normale, avec \mathcal{R} rayon de courbure de l'arc Γ .

Continuons à dériver. Le vecteur unitaire \vec{g} aura son vecteur dérivé $\frac{d\vec{g}}{ds}$ orthogonal à \vec{g} , donc dans $\text{vect}(\vec{T}, \vec{k})$.

Si on pose $\frac{d\vec{g}}{ds} = \alpha \vec{T} + \beta \vec{k}$, l'égalité $\vec{T} \cdot \vec{g} = 0$ donne, en dérivant,
$$\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \vec{g} + \vec{T} \cdot \frac{d\vec{g}}{ds} = 0, \text{ soit encore } \gamma_g + \alpha = 0, \text{ d'où } \alpha = -\gamma_g.$$

Par convention, on note τ_g le scalaire β , qui s'appelle alors la *torsion géodésique* et on a :

$$9.98. \quad \frac{\vec{d}g}{ds} = -\gamma_g \vec{T} + \tau_g \vec{k}.$$

Le dernier vecteur du trièdre de Darboux-Ribeaucourt se dérive alors facilement, soit par la même méthode, soit en remarquant que $\vec{k} = \vec{T} \wedge \vec{g}$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}}{ds} &= \frac{d\vec{T}}{ds} \wedge \vec{g} + \vec{T} \wedge \frac{d\vec{g}}{ds}, \\ &= \left(\gamma_g \vec{g} + \gamma_n \vec{k} \right) \wedge \vec{g} + \vec{T} \wedge (-\gamma_g \vec{T} + \tau_g \vec{k}), \\ &= \gamma_n \vec{k} \wedge \vec{g} + \tau_g \vec{T} \wedge \vec{k} = -\gamma_n \vec{T} - \tau_g \vec{g}, \end{aligned}$$

d'où :

$$9.99. \quad \frac{d\vec{k}}{ds} = -\gamma_n \vec{T} - \tau_g \vec{g}.$$

Autre expression de la torsion géodésique.

Comme $\vec{k} = \vec{N} \cos \theta + \vec{B} \sin \theta$, (voir 9.95), avec θ fonction dérivable de s , (faire intervenir un Arc cos ou un Arc sin sur l'une des composantes de \vec{k} dans $\text{vect}(\vec{N}, \vec{B})$), on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{k}}{ds} &= -\vec{N} \sin \theta \frac{d\theta}{ds} + \cos \theta (-\gamma \vec{T} + \tau \vec{B}) + \vec{B} \cos \theta \frac{d\theta}{ds} - \tau \vec{N} \sin \theta, \\ &= -\gamma \cos \theta \vec{T} + \frac{d\theta}{ds} (-\vec{N} \sin \theta + \vec{B} \cos \theta) + \tau (-\vec{N} \sin \theta + \vec{B} \cos \theta), \end{aligned}$$

or $\vec{g} = \vec{N} \sin \theta - \vec{B} \cos \theta$: car $(\vec{N}, \vec{g}) = -\frac{\pi}{2} + \theta$, (voir figure 9.94), donc, on a la formule :

$$9.100. \quad \frac{d\vec{k}}{ds} = -\gamma \cos \theta \vec{T} - \left(\tau + \frac{d\theta}{ds} \right) \vec{g}.$$

En comparant avec 9.99, on retrouve l'égalité 9.97 : $\gamma_n = \gamma \cos \theta$, mais on obtient aussi l'expression :

$$9.101. \quad \tau_g = \tau + \frac{d\theta}{ds}, \quad \text{de la torsion géodésique.}$$

9.102. REMARQUE. — On passe du trièdre de Frenet $(m; \vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ au trièdre de Darboux $(m; \vec{T}, \vec{g}, \vec{k})$ par la rotation d'axe $(m; \vec{T})$, d'angle $\theta - \frac{\pi}{2}$. Donc, si $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation instantané du trièdre de Frenet, (voir 6.133), le vecteur rotation instantané du trièdre de Darboux sera $\vec{\omega} = \vec{\Omega} + \frac{d\theta}{ds} \vec{T}$, avec $\vec{\Omega} = \tau \vec{T} + \gamma \vec{B}$.

On décompose $\vec{\omega} = \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right) \vec{T} + \gamma \vec{B}$ dans le repère de Darboux, en $\vec{\omega} = \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right) \vec{T} - \gamma \cos \theta \vec{g} + \gamma \sin \theta \vec{k}$, on retrouve rapidement les formules 9.97. à 9.100, à partir de :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{T}, \quad \frac{d\vec{g}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{g} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{k}}{ds} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}.$$

Résumons sous forme de tableau ces formules. On a :

$$9.103. \quad \begin{cases} \frac{d\vec{T}}{ds} = \gamma_g \vec{g} + \gamma_n \vec{k} = \gamma \sin \theta \vec{g} + \gamma \cos \theta \vec{k}, \\ \frac{d\vec{g}}{ds} = -\gamma_g \vec{T} + \tau_g \vec{k} = -\gamma \sin \theta \vec{T} + \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right) \vec{k}, \\ \frac{d\vec{k}}{ds} = -\gamma_n \vec{T} - \tau_g \vec{g} = -\gamma \cos \theta \vec{T} - \left(\tau + \frac{d\theta}{ds}\right) \vec{g}. \end{cases}$$

DÉFINITION 9.104. — Soit une nappe paramétrée S , de classe C^3 au moins, de A affine euclidien de dimension trois. Les arcs de S tels qu'en tout point $\tau_g = 0$ sont les lignes de courbure; ceux vérifiant $\gamma_n = 0$ sont les asymptotiques de la nappe, enfin ceux pour lesquels $\gamma_g = 0$ sont les lignes géodésiques de S .

REMARQUE 9.105. — Pour une nappe S de révolution, les cercles intersections de S et des plans perpendiculaires à l'axe sont des lignes de courbure.

En effet, si la nappe est de révolution autour de Δ et si $\Gamma = P \cap S$ avec P plan perpendiculaire à Δ , sur la courbe plane Γ la torsion τ est nulle, et l'angle θ des vecteurs \vec{k} et \vec{N} est invariant par rotation d'axe Δ , donc $\frac{d\theta}{ds} = 0$, d'où $\tau_g = 0$ le long de Γ qui est une ligne de courbure. ■

REMARQUE 9.106. — Soit un arc Γ de S , de classe C^3 , bi-régulier. C'est une asymptotique de S si et seulement si, le long de Γ , le plan osculateur à Γ est tangent à la nappe, et c'est une géodésique de S si et seulement si le long de Γ , le plan osculateur est normal à la nappe.

En effet, Γ étant birégulier, sa courbure γ n'est pas nulle, donc la nullité de $\gamma_n = \gamma \cos \theta$ équivaut à la nullité de $\cos \theta$, d'où l'orthogonalité de \vec{k} et \vec{N} , donc le plan osculateur en m de Γ a pour direction $\text{Vect}(\vec{T}, \vec{N})$ qui est l'orthogonal de $\{\vec{k}\}$, d'où l'équivalence de (Γ asymptotique) et de (plan osculateur à $\Gamma =$ plan tangent à S).

On procède de même pour les géodésiques à partir de $\gamma \sin \theta = 0$. ■

Il convient de remarquer qu'un arc Γ , rectiligne, sur S , est à la fois de courbure normale et de courbure géodésique nulle.

C'est donc une géodésique et une asymptotique au sens de la définition 9.104 : un qualificatif n'exclut pas l'autre!

9.107. CALCUL DE γ_n, γ_g ET DE τ_g .

Nous allons changer de point de vue, en étudiant maintenant comment varient γ_n, γ_g et τ_g , en un point fixé m de la nappe S , lorsque varie l'arc Γ qui passe par m , et non plus lorsque l'on se déplace le long de Γ .

On dispose donc de la nappe $S = (\Omega, f)$, la fonction f étant de classe C^2 au moins, et on se place en $m_0(u_0, v_0)$. On a, le long d'un arc Γ :

$$\gamma_n = \gamma \cos \theta = \vec{k} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = -\vec{T} \cdot \frac{d\vec{k}}{ds},$$

d'après 9.103.

Par ailleurs :

$$\vec{k} = \frac{\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial v}}{H} \quad \text{avec} \quad H = \left\| \frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right\|.$$

D'autre part, l'arc Γ est l'image par le paramétrage f de la nappe, d'un arc supposé régulier du plan (u, v) , donc le long de Γ , u et v sont fonctions de l'abscisse curviligne s de Γ , fonctions dérivables si Γ est de classe C^2 , (ne pas oublier que dans toutes les études théoriques, les hypothèses sont assez fortes pour disposer du Théorème des fonctions implicites, du difféomorphisme local ...).

On aura donc :

$$\vec{T} = \frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\vec{\partial m}}{\partial v} \frac{dv}{ds},$$

et

$$\frac{\vec{dk}}{ds} = \frac{\vec{\partial k}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\vec{\partial k}}{\partial v} \frac{dv}{ds}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \gamma_n &= -\vec{T} \cdot \frac{\vec{dk}}{ds} = -\left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\vec{\partial m}}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right) \cdot \left(\frac{\vec{\partial k}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\vec{\partial k}}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right), \\ &= -\frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \cdot \frac{\vec{\partial k}}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 - \left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \cdot \frac{\vec{\partial k}}{\partial v} + \frac{\vec{\partial m}}{\partial v} \cdot \frac{\vec{\partial k}}{\partial u} \right) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} \\ &\quad - \frac{\vec{\partial m}}{\partial v} \cdot \frac{\vec{\partial k}}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

Or, avec $\vec{k} = \frac{1}{H} \frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial m}}{\partial v}$, on a :

$$\frac{\vec{\partial k}}{\partial v} = -\frac{H'_v}{H^2} \vec{k} + \frac{1}{H} \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial v \partial u} \wedge \frac{\vec{\partial m}}{\partial v} + \frac{1}{H} \frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial v^2},$$

et comme $\frac{\vec{\partial m}}{\partial u}$ est orthogonal à \vec{k} et colinéaire à lui même, il reste :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \cdot \frac{\vec{\partial k}}{\partial v} &= \frac{1}{H} \frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \cdot \left(\frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial v \partial u} \wedge \frac{\vec{\partial m}}{\partial v} \right), \\ &= \frac{1}{H} \left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial u}, \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial v \partial u}, \frac{\vec{\partial m}}{\partial v} \right). \end{aligned}$$

Par un calcul analogue, on obtiendrait :

$$\frac{\vec{\partial m}}{\partial v} \cdot \frac{\vec{\partial k}}{\partial u} = \frac{1}{H} \left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial v}, \frac{\vec{\partial m}}{\partial u}, \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial u \partial v} \right),$$

et ces deux produits mixtes sont égaux, puisque, le paramétrage étant de classe C^2 , on a $\frac{\overrightarrow{\partial^2 m}}{\partial u \partial v} = \frac{\overrightarrow{\partial^2 m}}{\partial v \partial u}$, (toujours ce bon vieux Schwarz sans qui on ne saurait rien faire). On a donc :

$$\frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial u} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial k}}{\partial v} = \frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial v} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial k}}{\partial u}.$$

Conventionnellement on pose :

$$9.108. \quad \begin{cases} L = -\frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial u} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial k}}{\partial u}, \\ M = -\frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial u} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial k}}{\partial v} = -\frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial v} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial k}}{\partial u}, \\ N = -\frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial v} \cdot \frac{\overrightarrow{\partial k}}{\partial v}. \end{cases} \quad (\text{cf ci-dessus}),$$

Avec ces notations, (mais il y en aura d'autres), on a :

$$9.108. \text{ bis} \quad \gamma_n = L \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2M \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + N \left(\frac{dv}{ds} \right)^2.$$

Mais cette expression ne répond pas au but visé, puisqu'elle fait intervenir $\frac{du}{ds}$ et $\frac{dv}{ds}$, donc un déplacement le long de Γ . Or, cet arc Γ est obtenu à partir d'un arc dans Ω ouvert de \mathbb{R}^2 , qui peut localement être paramétré en $u(t), v(t)$, ($t \in I$, intervalle de \mathbb{R}), d'où également s fonction de t , et avec $du = u'(t) dt$, $dv = v'(t) dt$ et $ds = s'(t) dt$, les quotients s'expriment à l'aide de u', v', s' , et on obtient l'expression suivante :

$$\gamma_n = \frac{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2}{s'^2}.$$

Comme en fait ce paramétrage est inconnu, on garde l'expression sous la forme :

$$\gamma_n = \frac{L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2}{(ds)^2},$$

en sachant que c'est la donnée de u et v fonction d'un paramètre t qui lui donne sa signification.

Dans ce cas, s fonction de t est tel que :

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{d\vec{m}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial u}u' + \frac{\partial\vec{m}}{\partial v}v'\right)^2, \\ &= \left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial u}\right)^2 u'^2 + 2\frac{\partial\vec{m}}{\partial u} \cdot \frac{\partial\vec{m}}{\partial v} u'v' + \left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial v}\right)^2 v'^2, \end{aligned}$$

ou encore :

$$(ds)^2 = \left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial u}\right)^2 (du)^2 + 2 \cdot \frac{\partial\vec{m}}{\partial u} \cdot \frac{\partial\vec{m}}{\partial v} du dv + \left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial v}\right)^2 (dv)^2.$$

On pose alors :

$$9.109. \quad \begin{cases} E = \left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial u}\right)^2, \\ F = \frac{\partial\vec{m}}{\partial u} \cdot \frac{\partial\vec{m}}{\partial v}, \\ G = \left(\frac{\partial\vec{m}}{\partial v}\right)^2, \end{cases}$$

et on obtient l'expression suivante de la courbure normale :

$$9.110. \quad \gamma_n = \frac{L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2}{E(du)^2 + 2F du dv + G(dv)^2},$$

expression qui, en y regardant bien, ne fera intervenir l'arc Γ en m_0 , (voir le début de 9.107), que par la direction de sa tangente, elle même fonction du quotient $\frac{dv}{du}$ ou de $\frac{d\vec{v}}{d\vec{u}}$ puisque \vec{T} est parallèle, soit à :

$$\frac{\partial\vec{m}}{\partial u} + \frac{\partial\vec{m}}{\partial v} \frac{dv}{du}, \quad \text{soit à} \quad \frac{\partial\vec{m}}{\partial u} \frac{du}{dv} + \frac{\partial\vec{m}}{\partial v}.$$

On vient donc de justifier le :

THÉORÈME 9.111. *La courbure normale d'un arc régulier Γ d'une nappe régulière S en un point m ne dépend de la courbe Γ que par la direction*

de son vecteur tangent unitaire \vec{T} , (\vec{T} et \vec{T} donnant la même courbure normale).

C'est le Théorème de Meusnier, dont la justification découle de l'examen de 9.110. ■

Les calculs faits vont alors nous permettre de localiser les centres de courbure de toutes les courbes passant par un point m_0 fixé de la nappe, en ayant même tangente, puis de voir ce qui se produit lorsque l'on fait pivoter la tangente autour de m_0 .

Mais auparavant, vérifions qu'à partir de l'expression $\gamma_n = \vec{k} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}$, on retrouve le Théorème de Meusnier. Ce sera l'occasion de nouveaux calculs, et d'introduire d'autres paramètres.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial v \partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial u \partial v} \frac{dv}{ds} \frac{du}{ds} \\ &\quad + \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2}. \end{aligned}$$

Dans le calcul de :

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \vec{k} \cdot \frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{1}{H} \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right) \cdot \frac{d\vec{T}}{ds}, \\ &= \frac{1}{H} \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{m}}{\partial v}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right), \end{aligned}$$

on a un produit mixte, qui dépend linéairement de chaque vecteur. En particulier, la linéarité par rapport au troisième vecteur va faire disparaître,

dans $\frac{d\vec{T}}{ds}$, les termes en $\frac{\partial \vec{m}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$, et comme $\frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial v \partial u}$, (classe C^2),

on a :

$$\gamma_n = \frac{1}{H} \left[\left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial u}, \frac{\vec{\partial m}}{\partial v}, \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial u^2} \right) \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial u}, \frac{\vec{\partial m}}{\partial v}, \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial u \partial v} \right) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial u}, \frac{\vec{\partial m}}{\partial v}, \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial v^2} \right) \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right].$$

Conventionnellement, (et oui, il y a de la répétition dans l'air), on pose :

$$9.112. \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial u}, \frac{\vec{\partial m}}{\partial v}, \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial u^2} \right), \\ D' = \left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial u}, \frac{\vec{\partial m}}{\partial v}, \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial u \partial v} \right), \\ D'' = \left(\frac{\vec{\partial m}}{\partial u}, \frac{\vec{\partial m}}{\partial v}, \frac{\vec{\partial^2 m}}{\partial v^2} \right), \quad \text{et, pour mémoire,} \\ H = \left\| \frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \wedge \frac{\vec{\partial m}}{\partial v} \right\|. \end{array} \right.$$

Avec ces notations, on a l'expression :

$$9.113. \quad \gamma_n = \frac{1}{H} \left(D \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2D' \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + D'' \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right).$$

Comme alors $\vec{T} = \frac{\vec{\partial m}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\vec{\partial m}}{\partial v} \frac{dv}{ds}$, toutes les courbes Γ ayant, en m_0 ,

le même vecteur unitaire \vec{T}_0 , sont associées à des paramétrages tels que $\frac{du}{ds}(s_0)$ et $\frac{dv}{ds}(s_0)$ caractérisent \vec{T}_0 dans la base $\left\{ \frac{\vec{\partial m}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\vec{\partial m}}{\partial v}(u_0, v_0) \right\}$

de la direction du plan tangent en m_0 à la nappe, ces valeurs sont égales, donc γ_n ne dépend que de \vec{T}_0 . De plus, deux vecteurs \vec{T}_0 opposés donnent la même valeur de γ_n : on retrouve le Théorème de Meusnier, (Théorème 9.111.). ■

Voyons maintenant où sont les centres de courbure.

THÉORÈME 9.114. Soit m_0 un point régulier d'une nappe paramétrée de classe C^2 de \mathcal{A} affine de dimension trois. Toutes les courbes Γ , passant par m_0 , point bi-régulier de Γ , ayant même tangente Δ en m_0 , ont leurs centres de courbure situés sur le cercle C de diamètre $\overrightarrow{m_0 K} = \frac{1}{\gamma_n} \vec{k}$, dans le plan perpendiculaire à Δ en m_0 .

9.115. Ce cercle est le cercle de Meusnier en m_0 , pour la direction Δ et le point K est le centre de courbure normale pour la direction Δ .

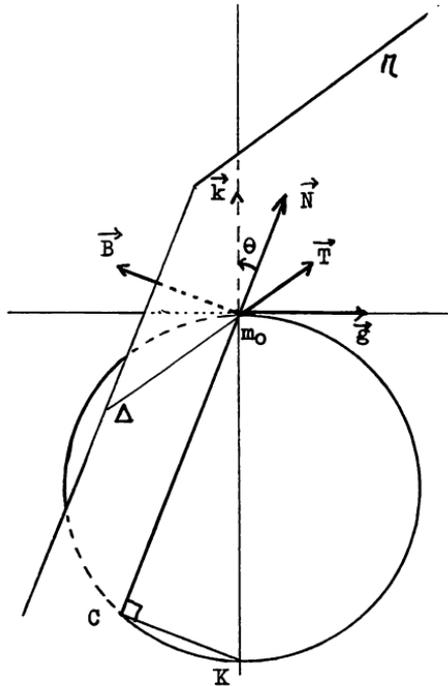


Fig. 9.114.

En effet pour une droite Δ donnée dans le plan tangent en m_0 à la nappe S , Δ passant par m_0 , si un arc Γ de S , admet m_0 pour point bi-régulier, avec Δ pour tangente, le plan osculateur de Γ existe, et si θ est l'angle (\vec{N}, \vec{k}) , angle du plan osculateur et du plan normal à la nappe contenant Δ en fait, la courbure de Γ en m_0 est telle que $\gamma_n = \gamma \cos \theta$.

Soient alors K et C les points tels que $\overrightarrow{m_0K} = \frac{1}{\gamma_n} \vec{k}$ et $\overrightarrow{m_0C} = \frac{1}{\gamma} \vec{N}$, (C est le centre de courbure de Γ en m_0), on a :

$$\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{m_0K} - \overrightarrow{m_0C} = \frac{1}{\gamma_n} \vec{k} - \frac{1}{\gamma} \vec{N},$$

$$\text{donc } \overrightarrow{m_0C} \cdot \overrightarrow{CK} = \frac{1}{\gamma\gamma_n} \vec{N} \cdot \vec{k} - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\gamma^2 \cos \theta} \cos \theta - \frac{1}{\gamma^2} = 0,$$

donc C est sur la sphère de diamètre m_0K , et comme C est dans le plan normal en m_0 à Δ , (plan de direction $\text{Vect}(\vec{N}, \vec{B}) = \text{Vect}(\vec{N}, \vec{k}) = \text{Vect}(\vec{k}, \vec{g})$), finalement C est bien sur le cercle de diamètre m_0K dans le plan perpendiculaire à Δ . ■

REMARQUE 9.116. — *Les arcs Γ passant par m_0 et ayant même plan osculateur non tangent à la nappe, ont alors même centre de courbure C .*

En effet, si le plan osculateur π est donné, l'intersection Δ de π et du plan tangent est connue, (sauf si π est tangent à la nappe, cas que nous écartons), et comme le vecteur \vec{N} est connu, (au signe près), le centre de courbure est l'intersection du cercle de Meusnier pour Δ et de la normale (m_0, \vec{N}) , (voir figure 9.114). ■

DÉFINITION 9.117. — *Si $\gamma_n \neq 0$, le scalaire $\mathcal{R}_n = \frac{1}{\gamma_n}$ est le rayon de courbure normale en m pour la courbe Γ .*

Nous allons maintenant voir comment le centre de courbure normale, K , varie sur la normale en m_0 à la nappe S , lorsque Δ pivote autour de m_0 et pour cela introduire ce qu'on appelle les formes quadratiques fondamentales en m_0 .

On se place en $m_0(u_0, v_0)$ point régulier de la nappe S et on note B l'espace vectoriel de dimension deux, direction du plan tangent P en m_0 , donc $\left\{ \frac{\partial \vec{m}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right\}$ est une base de B .

On note ϕ_1 la restriction à B de l'application $X \rightsquigarrow \|X\|^2$, donc ϕ_1 est une forme quadratique définie positive sur B , dont la racine carrée est la norme euclidienne sur B .

Par ailleurs, on note ϕ_2 la forme quadratique définie sur B par :

$$9.118. \quad \phi_2 \left(\xi \frac{\partial \vec{m}}{\partial u} + \eta \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right) = L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2,$$

les scalaires L, M et N étant définis en 9.108.

Ces deux formes quadratiques sont appelées *première et deuxième formes quadratiques fondamentales* de B .

Comme, sur un arc Γ de S passant en m_0 , on a :

$$\vec{T} = \frac{du}{ds} \frac{\partial \vec{m}}{\partial u} + \frac{dv}{ds} \frac{\partial \vec{m}}{\partial v},$$

il résulte de 9.108. bis que $\gamma_n = \phi_2(\vec{T})$.

Par ailleurs, comme $\vec{k}^2 = 1$, on a :

$$2\vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial u} = 2\vec{k} \cdot \frac{\partial \vec{k}}{\partial v} = 0,$$

donc $\frac{\partial \vec{k}}{\partial u}$ et $\frac{\partial \vec{k}}{\partial v}$ sont deux vecteurs de B .

On définit alors l'endomorphisme Ψ_1 de B dans B par :

$$9.119. \quad \psi_1 \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \right) = -\frac{\partial \vec{k}}{\partial u} \quad \text{et} \quad \psi_1 \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right) = -\frac{\partial \vec{k}}{\partial v}.$$

THÉORÈME 9.120. — *L'endomorphisme ψ_1 est auto-adjoint pour ϕ_1 et pour \vec{X} et \vec{X}' de B on a $\psi_1(\vec{X}) \cdot \vec{X}' = \vec{X} \cdot \psi_1(\vec{X}')$ si ϕ_2 est la forme bilinéaire symétrique associée à ϕ_2 .*

En effet, soient $\vec{X} = \xi \frac{\partial \vec{m}}{\partial u} + \eta \frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$ et $\vec{X}' = \xi' \frac{\partial \vec{m}}{\partial u} + \eta' \frac{\partial \vec{m}}{\partial v}$ deux vecteurs de B . On a :

$$\psi_1(\vec{X}) \cdot \vec{X}' = \left(-\xi \frac{\partial \vec{k}}{\partial u} - \eta \frac{\partial \vec{k}}{\partial v} \right) \cdot \left(\xi' \frac{\partial \vec{m}}{\partial u} + \eta' \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \right),$$

donc, compte tenu des formules 9.108. définissant L, M et N , il vient

$$\psi_1(\vec{X}) \cdot \vec{X}' = \xi\xi'L + M(\xi\eta' + \xi'\eta) + N\eta\eta',$$

ce qui est bien symétrique en X et X' , donc égal à $\vec{X} \cdot \psi_1(\vec{X}')$, d'où le côté auto-adjoint de ψ_1 pour le produit scalaire de B , enfin c'est aussi $\varphi_2(\vec{X}, \vec{X}')$. ■

Soit alors $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ une base orthonormée de B .

Si $\vec{T} = \vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi$, on aura :

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \phi_2(\vec{T}) = \phi_2(\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi), \\ &= \phi_2(\vec{i}) \cos^2 \varphi + 2\phi_2(\vec{i}, \vec{j}) \cos \varphi \sin \varphi + \phi_2(\vec{j}) \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

soit encore, en posant :

$$9.121. \quad \begin{cases} a = \phi_2(\vec{i}) = \varphi_2(\vec{i}, \vec{i}) = \psi_1(\vec{i}) \cdot \vec{i}, \\ b = \varphi_2(\vec{i}, \vec{j}) = \psi_1(\vec{i}) \cdot \vec{j} = \psi_1(\vec{j}) \cdot \vec{i}, \\ c = \phi_2(\vec{j}) = \psi_1(\vec{j}) \cdot \vec{j}, \end{cases}$$

l'expression :

$$9.122. \quad \gamma_n = a \cos^2 \varphi + 2b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi,$$

qui va permettre d'étudier les variations de γ_n lorsque la tangente Δ pivote autour de m_0 , donc lorsque $\varphi = (\vec{i}, \vec{T})$ varie puisque les définitions de ϕ_1, ϕ_2 et ψ_1 ne dépendent que du paramétrage de la nappe, il en est de même pour a, b et c .

Remarquons d'abord que, la donnée de φ caractérisant \vec{T} , on retrouve le fait que la courbure normale ne dépend que de la tangente à la courbe.

THÉORÈME 9.123. — *La somme des courbures normales en m_0 de S pour deux courbes associées à des tangentes en m_0 perpendiculaire est constante par rapport à ces tangentes.*

En effet, si dans 9.122, on remplace φ par $\varphi + \frac{\pi}{2} = \varphi'$, on obtient une courbure normale :

$$\gamma'_n = a \sin^2 \varphi - 2b \cos \varphi \sin \varphi + c \cos^2 \varphi,$$

donc $\gamma_n + \gamma'_n = a + c$ ne dépend plus de φ . ■

DÉFINITION 9.124. — On appelle courbure moyenne en m_0 de S la demi somme $\frac{a+c}{2}$ des courbures normales dans deux directions perpendiculaires.

Les calculs précédents vont nous servir pour évaluer la torsion géodésique. On a $\tau_g = -\frac{d\vec{k}}{ds} \cdot \vec{g}$, (voir 9. 103). Or :

$$\begin{aligned}\psi_1(\vec{T}) &= \psi_1 \left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \vec{m}}{\partial v} \frac{dv}{ds} \right), \\ &= -\frac{du}{ds} \frac{\partial \vec{k}}{\partial u} - \frac{dv}{ds} \frac{\partial \vec{k}}{\partial v} = -\frac{d\vec{k}}{ds}.\end{aligned}$$

Puis, le trièdre $(m_0; \vec{T}, \vec{g}, \vec{k})$ étant direct, \vec{g} est unitaire perpendiculaire, (directement) à \vec{T} dans l'espace vectoriel B .

Comme $\varphi = (\vec{i}, \vec{T})$ on a $(\vec{i}, \vec{g}) = \varphi + \frac{\pi}{2}$,

d'où $\vec{g} = -\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi$,

$$\begin{aligned}\text{et } \tau_g &= -\frac{d\vec{k}}{ds} \cdot \vec{g} = \psi_1(\vec{i} \cos \varphi + \vec{j} \sin \varphi) \cdot (-\vec{i} \sin \varphi + \vec{j} \cos \varphi), \\ &= (-\psi_1(\vec{i}) \cdot \vec{i} + \psi_1(\vec{j}) \cdot \vec{j}) \cos \varphi \sin \varphi \\ &\quad + \psi_1(\vec{i}) \cdot \vec{j} \cos^2 \varphi - \psi_1(\vec{j}) \cdot \vec{i} \sin^2 \varphi,\end{aligned}$$

soit, compte tenu des formules 9.121. :

$$\mathbf{9.125.} \quad \tau_g = b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + (c - a) \cos \varphi \sin \varphi.$$

THÉORÈME 9.126. La torsion géodésique en un point régulier d'une nappe S ne dépend que de la tangente à l'arc en ce point. Les valeurs de la torsion géodésique pour deux directions de tangentes perpendiculaires sont opposées.

L'expression 9.125. donne bien le fait que τ_g ne dépend de l'arc que par la donnée de $\varphi = (\vec{i}, \vec{T})$. De plus, pour $\varphi' = \varphi + \frac{\pi}{2}$, on a une torsion géodésique :

$$\tau'_g = b(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) - (c - a) \sin \varphi \cos \varphi,$$

qui est l'opposée de τ_g . ■

Venons en aux variations de γ_n , en m_0 fixé sur la nappe, en fonction de φ .

Si on dérive l'expression 9.122 de γ_n fonction de φ , on a :

$$\frac{d\gamma_n}{d\varphi} = 2(c-a) \cos \varphi \sin \varphi + 2b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

soit encore $\frac{d\gamma_n}{d\varphi} = 2\tau_g$, ce qui nous conduit à étudier le signe de :

$$2\tau_g = (c-a) \sin 2\varphi + 2b \cos 2\varphi.$$

Si $c \neq a$, $2\tau_g$ ne s'annule pas pour $\cos 2\varphi = 0$, car alors $\sin 2\varphi = 1$ ou -1 , on passe en $\operatorname{tg} 2\varphi$ et $2\tau_g$ s'annule pour $\operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2b}{c-a}$, en changeant de signe, soit pour :

$$\varphi = -\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2b}{c-a} + k \frac{\pi}{2}.$$

Si $b \neq 0$, les zéros et changements de signe de $2\tau_g$ sont obtenus pour :

$$\varphi = -\frac{1}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{cotg} \frac{c-a}{2b} + k \frac{\pi}{2}.$$

Enfin, $2\tau_g$ est identiquement nul pour $a = c$ et $b = 0$, ce qui mérite une définition.

DÉFINITION 9.127. *Un point m d'une nappe régulière est un ombilic si en ce point la torsion géodésique est nulle pour toute courbe passant en m .*

REMARQUE 9.128. — *Un point m est un ombilic si et seulement si pour une base orthonormée $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ de la direction B du plan tangent en m on a $a = c$ et $b = 0$, (voir en 9.121. la définition de ces scalaires).*

Comme le fait que la torsion géodésique soit nulle ne dépend pas du repère dans lequel on l'exprime, il en est de même pour toute base orthonormée de B .

THÉORÈME 9.129. *En un point m régulier d'une nappe, m n'étant pas un ombilic, il existe deux directions orthogonales de tangentes pour lesquelles la torsion géodésique s'annule en changeant de signe. Ces directions correspondent à un maximum et un minimum de la courbure normale. Elles sont appelées directions principales en m .*

En effet, en posant $\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{Arctg} \frac{2b}{c-a}$ si $c \neq a$,

(ou $\alpha = -\frac{1}{2} \operatorname{Arc} \cotg \frac{c-a}{2b}$ si $b \neq 0$), nous avons vu que $2\tau_g = \frac{d\gamma_n}{d\varphi}$

s'annule en changeant de signe pour les valeurs $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \alpha + \frac{\pi}{2}$, puis

en $\varphi_1 + \pi$ et en $\varphi_2 + \pi = \alpha + \frac{3\pi}{2}$, qui redonnent les mêmes directions de droites, et enfin en $\varphi_1 + 2\pi = \alpha + 2\pi$.

Mais alors, vu la π périodicité de $\varphi \rightsquigarrow 2\tau_g$ il est clair que l'on a :
soit un maximum de γ_n en φ_1 et $\varphi_1 + \pi$, avec minimum en φ_2 et $\varphi_2 + \pi$;
soit minimum en φ_1 et $\varphi_1 + \pi$, et alors maximum en φ_2 et $\varphi_2 + \pi$. ■

En fait ces directions sont liées à l'endomorphisme ψ_1 défini en 9.119.

THÉORÈME 9.130. *Les directions principales en m , non ombilic, sont les directions associées aux vecteurs propres de l'endomorphisme auto-adjoint ψ_1 de la direction du plan tangent (ψ_1 défini en 9.119.).*

On a vu, (Théorème 9.120), que ψ_1 est auto-adjoint pour le produit scalaire sur B , donc (Tome 3, Théorème 14.68) il est diagonalisable dans le groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$.

Soit $\{\vec{I}, \vec{J}\}$ une base orthonormée, de vecteurs propres pour ψ_1 , de B . Dans cette base, les scalaires a, b, c sont tels que $b = \vec{I} \cdot \psi_1(\vec{J}) = 0$ puisque $\psi_1(\vec{J})$ est parallèle à \vec{J} , (voir 9.121).

On a donc $\gamma_n = a \cos^2 \varphi + c \sin^2 \varphi$ et :

$$\frac{d\gamma_n}{d\varphi} = (c - a) \sin 2\varphi.$$

Comme on a supposé que m n'est pas un ombilic, c'est que $a \neq c$, donc les directions principales correspondent à $\sin 2\varphi = 0$, soit $\varphi = 0$ modulo $\left(\frac{\pi}{2}\right)$,

et comme $\varphi = (\vec{I}, \vec{T})$, c'est que ces directions correspondent à $\vec{T} = \vec{I}$ ou $-\vec{I}$, et $\vec{T} = \vec{J}$ ou $-\vec{J}$.

Si λ et μ sont les valeurs propres de ψ_1 , on a :

$$a = \vec{I} \cdot \psi_1(\vec{I}) = \lambda \quad \text{et} \quad c = \vec{J} \cdot \psi_1(\vec{J}) = \mu,$$

car \vec{I} et \vec{J} sont unitaires, (voir 9.121 pour la définition de a et c) et le fait que m ne soit pas un ombilic correspond au fait que les valeurs propres de ψ_1 sont distinctes. ■

REMARQUE 9.131. — Soit cette fois-ci un point m quelconque de la nappe S , et $\{\vec{I}, \vec{J}\}$ une base orthonormée de B formée de vecteurs propres de ψ_1 , on aura encore $b = 0$ et, avec a et c valeurs propres en fait de ψ_1 , on a l'expression :

$$\gamma_n = a \cos^2 \varphi + c \sin^2 \varphi.$$

Pour $\varphi = 0$, (tangente dirigée par \vec{I}), $\gamma_n = a$, et pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, (tangente dirigée par \vec{J}), $\gamma_n = c$.

On note conventionnellement $a = \frac{1}{R_1}$ et $c = \frac{1}{R_2}$ ces courbures normales appelées *courbures principales*, et avec $\varphi = (\vec{I}, \vec{T})$, on a :

$$9.132. \quad \gamma_n = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi \quad \text{et} \quad 2\tau_g = \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin 2\varphi.$$

Sur cette forme, on constate que τ_g est identiquement nulle, (donc m est un ombilic) si et seulement si $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$, donc si et seulement si l'endomorphisme ψ_1 admet une valeur propre double.

Comme par ailleurs γ_n varie entre $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$, (étudiez les variations pour le voir) on retrouve le fait qu'alors la courbure normale est constante.

DÉFINITION 9.133. — Si $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ sont les courbures principales en m , le produit $\frac{1}{R_1 R_2}$ est la courbure totale de la nappe en m , et la demi somme $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$ est la courbure moyenne.

La connaissance des courbures totale et moyenne en m donne les courbures principales, donc si on dispose d'un moyen de connaître les directions principales, on pourra connaître parfaitement la courbure normale (et la torsion géodésique) pour une direction de tangente quelconque.

On peut remarquer que si $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$, m est un ombilic, et dans ce cas toute base orthonormée $\{\vec{I}, \vec{J}\}$ de la direction du plan tangent est formée de vecteurs propres pour ψ_1 : on peut encore parler de directions principales.

9.134. Avant de déterminer les directions principales, voyons un peu où sont localisés les centres de courbure des courbes en m .

Pour une direction de tangente Δ donnée, ils sont sur le cercle de Meusnier de diamètre $\overrightarrow{mK} = \frac{1}{\gamma_n} \vec{k}$ dans le plan perpendiculaire à Δ en m , (Théorème 9.114).

Si Δ pivote, avec φ variant de φ_1 à $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, (directions principales), $\frac{1}{\gamma_n}$ croît (ou décroît) de R_1 à R_2 , puis décroît (ou croît) de R_2 à R_1 pendant que φ varie de φ_2 à $\varphi_1 + \pi$. Notre cercle de Meusnier pivote en se dilatant (ou se contractant). Si m est un ombilic, il se contente de pivoter et il engendre dans ce cas une sphère où se trouvent tous les centres de courbure de toutes les courbes passant par m .

On peut aussi noter que si la courbure totale est positive (strictement), $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ sont de même signe, donc γ_n , qui varie entre $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ ne s'annulera pas : *il ne passera pas d'asymptotique en m .*

Par contre, si la courbure totale est négative, la courbure totale s'annule, il y a présomption d'existence d'asymptotiques. C'est ce que nous allons voir.

On a vu qu'un arc sur la nappe $S = (\Omega, f)$, est l'image d'un arc plan, de support dans Ω , par f , donc commençons par mieux connaître les arcs plans.

THÉORÈME 9.135. — *Soit un arc plan Γ , de classe C^1 , régulier. Les trois modes de représentation : arc paramétré, arc en implicite, arc en équation cartésienne sont localement équivalents.*

Supposons le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i} \vec{j})$, et soit l'arc paramétré $\Gamma = (I, f)$, régulier.

Si $f(t) = \alpha(t) \vec{i} + \beta(t) \vec{j}$, avec $\overrightarrow{f'(t_0)} \neq 0$ l'une des composantes de ce vecteur est non nulle, par exemple $\beta'(t_0) \neq 0$, donc $\beta'(t_0)$ a un signe, (toujours l'ordre sur \mathbb{R} , tellement important), disons $\beta'(t_0) > 0$, par continuité β' reste > 0 sur $|t_0 - h, t_0 + h|$ et sur cet intervalle J la fonction strictement croissante β s'inverse (Tome 2, Théorème 7.12), d'où t de J donné par $t = \beta^{-1}(y)$ et une équation cartésienne $x = (\alpha \circ \beta^{-1})(y)$ de Γ , variable « localement ».

Par ailleurs une équation cartésienne, $x = \varphi(y)$ (ou $y = \psi(x)$) est un type particulier d'équation implicite.

Enfin, si on part de Γ d'équation implicite $f(x, y) = 0$ avec f de classe C^1 et $df(x, y)$ jamais nulle sur Γ , en $m_0(x_0, y_0)$ de Γ où par exemple

$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, le Théorème des fonctions implicites (Tome 3, Théorème 17.10) nous donne, localement, l'équivalence :

$$(f(x, y) = 0) \iff (y = \varphi(x)),$$

d'où une paramétrisation $(x = x, y = \varphi(x))$ de Γ , valable localement. ■

En revenant ici en un point régulier d'une nappe paramétré $S = (\Omega, f)$, le couple (u, v) décrira, dans Ω , un arc régulier de classe C^1 au moins, soit si on se donne u et v fonctions d'un paramètre t , soit u fonction de v ou v fonction de u , soient u et v liés par une relation. On peut remarquer que c'est ainsi que l'on obtient les courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre, (Tome 3, chapitre 18, paragraphe 7, voir 18.81 et suivants), et chercher des courbes sur la nappe $S = (\Omega, f)$ reviendra, le plus souvent, à intégrer une équation différentielle liant u et v , puis à prendre les images par f des courbes intégrales

9.136. Recherche des lignes de courbures.

On a défini les lignes de courbure de la nappe S , comme étant les arcs Γ le long desquels la torsion géodésique, τ_g , s'annule, (voir 9.104), et nous avons alors vu qu'en un point m , les tangentes aux lignes de courbure qui y passent sont principales, et correspondent aux directions de tangentes associées aux extrema de la courbure normale γ_n , ceci si m n'est pas un ombilic, hypothèse que nous ferons, (voir Théorème 9.129).

Comme la courbure normale peut s'écrire :

$$\gamma_n = \frac{L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2}{E(du)^2 + 2F du dv + N(dv)^2},$$

(voir 9.110), et que le paramètre $\frac{du}{dv}$, (ou $\frac{dv}{du}$) caractérise la tangente à l'arc du plan des (u, v) dont Γ est l'image par f , donc aussi la direction de la tangente à Γ dans le plan vectoriel B , image par $df(u, v)$ de \mathbb{R}^2 , on peut prendre par exemple $\frac{du}{dv}$ comme paramètre pour étudier les variations de γ_n en m fixé, lorsque la direction de la tangente varie.

L'expression de γ_n étant du type $\gamma_n = \frac{g\left(\frac{du}{dv}\right)}{h\left(\frac{du}{dv}\right)}$, elle passera par un

extremum lorsque la variable $\frac{du}{dv}$ varie, si la dérivée par rapport à cette

variable, γ'_n , s'annule en changeant de signe. Le Théorème 9.129 nous assurant des changements de signe, (m n'est pas un ombilic) nous n'avons qu'à nous occuper des zéros de $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'h - gh'}{h^2}$, obtenus lorsque $\frac{g}{h} = \frac{g'}{h'}$, ce qui donne ici :

$$\frac{L\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2M\frac{du}{dv} + N}{E\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2F\frac{du}{dv} + G} = \frac{L\frac{du}{dv} + M}{E\frac{du}{dv} + F}.$$

Mais, comme vous ne l'avez sûrement pas oublié, «dans une suite de rapports zégaux, on obtient un rapport zégal à ces rapports en divisant une combinaison (linéaire) des numérateurs par la même combinaison (linéaire) des numérateurs», cela donne ici, (on retranche aux premiers, $\frac{du}{dv} \times$ les seconds) :

$$\frac{L\frac{du}{dv} + M}{E\frac{du}{dv} + N} = \frac{M\frac{du}{dv} + N}{F\frac{du}{dv} + G},$$

ou sous forme plus symétrique, avec un déterminant :

$$9.137. \quad \begin{vmatrix} L du + M dv & M du + N dv \\ E du + N dv & F du + G dv \end{vmatrix} = 0,$$

équation différentielle qui a pour courbes intégrales (dans le plan \mathbb{R}^2 des (u, v)), les arcs dont les images par le paramétrage f de la nappe sont les lignes de courbure.

THÉORÈME 9.138. — *Les lignes de courbures d'une nappe sont les arcs le long desquels la normale à la nappe engendre une nappe réglée développable.*

Comme toujours dans les théorèmes, on prend des hypothèses assez fortes pour ne pas avoir d'ennuis : supposons la nappe $S = (\Omega, f)$ régulière et de classe C^2 au moins.

Les lignes de courbures correspondent à une torsion géodésique nulle, (définition 9.104) et on a $\tau_g = -\vec{g} \cdot \frac{\vec{dk}}{ds}$ d'après 9.99, avec \vec{k} vecteur normal à la nappe, et comme $\vec{g} = \vec{k} \wedge \vec{T}$, (\vec{T} vecteur tangent unitaire

orienté pour la ligne de courbure le long de laquelle on se promène, voir 9.94), on a :

$$\tau_g = - \left(\vec{k} \wedge \frac{d\vec{m}}{ds} \right) \cdot \frac{d\vec{k}}{ds} = - \left(\vec{k}, \frac{d\vec{m}}{ds}, \frac{d\vec{k}}{ds} \right), \quad \text{produit mixte.}$$

Soit alors la nappe réglée Σ engendrée par la normale en m à S , m parcourant une ligne de courbure d'abscisse curviligne s . La nappe Σ est paramétrée par :

$$\vec{OP}(s, \lambda) = \vec{Om}(s) + \lambda \vec{k}(s),$$

et la famille des trois vecteurs considérés lors de l'étude d'une nappe réglée (voir Théorème 9.49) est ici :

$$\left\{ \frac{d\vec{m}}{ds}, \frac{d\vec{k}}{ds}, \vec{k}(s) \right\},$$

famille qui est de rang deux le long d'une ligne de courbure. Mais alors la nappe réglée Σ est développable à condition de prendre comme définition de nappe développable une définition un peu moins restrictive que la définition 9.56, à savoir une nappe réglée telle que le long d'une génératrice le plan tangent reste le même, sans s'inquiéter de savoir s'il y a ou non un point singulier. ■

REMARQUE 9.139. *Si une sphère S_1 est tangente à une nappe S , (régulière de classe C^2 au moins), la ligne de contact Γ est une ligne de courbure.*

En effet, soit I le centre de la sphère S_1 , si $m(s)$ parcourt Γ , la droite $D(I, m(s))$ engendrée par I et $m(s)$ est la normale en $m(s)$ à la nappe, car en $m(s)$ la sphère et la nappe ont même plan tangent et vous n'êtes pas sans ignorer que le plan tangent en un point d'une sphère est perpendiculaire au rayon.

Mais alors cette droite $D(I, m(s))$ engendre une nappe Σ qui est ... plane ou développable, car, si on cherche le plan tangent en I à Σ , ce plan doit contenir toutes ces génératrices, (I est fixe) donc

- soit ce plan existe, mais alors les génératrices $D(I, m(s))$ sont coplanaires, Γ est un arc de cercle, le long duquel la torsion τ est nulle, et le plan du cercle contenant \vec{k} , on a $\theta = 0$ d'où $\frac{d\theta}{ds} = 0$ et $\tau_g = \tau + \frac{d\theta}{ds}$, voir 9.101), est bien nulle le long de Γ ;

— soit ce plan n'existe pas, mais alors le point I est singulier sur la génératrice $D(I, m(s))$, qui engendre donc une nappe réglée développable, car

$\overrightarrow{k(s)}$ et $\frac{\overrightarrow{dm}}{ds} = \overrightarrow{T}$ sont indépendants, donc la famille :

$$\left\{ \frac{\overrightarrow{dm}}{ds}, \frac{dk}{ds}, \overrightarrow{k} \right\}$$

est bien de rang deux. ■

9.140. Recherche des asymptotiques

Nous avons vu, (Définition 9.104), que les asymptotiques de la nappe $S = (\Omega, f)$, sont les arcs de S le long desquels la courbure normale, γ_n est nulle. En 9.110 on a calculé une expression de cette courbure normale qu'il suffit d'annuler, d'où :

THÉORÈME 9.141. — Les asymptotiques d'une nappe $S = (\Omega, f)$, régulière de classe C^2 sont associées aux fonctions u et v solutions de l'équation différentielle :

$$L(du)^2 + 2M du dv + N(dv)^2 = 0,$$

L, M et N étant définis en 9.108. ■

On peut aussi exploiter la valeur $\gamma_n = \gamma \cos \theta$, et trouver, sans calculer L, M et N , des asymptotiques correspondant à la nullité de $\cos \theta$, c'est-à-dire les asymptotiques de la nappe le long desquelles la courbure ne s'annule pas.

On aura $\cos \theta = 0$ si et seulement si \overrightarrow{N} est orthogonal à \overrightarrow{k} , ou encore si l'arc cherché a pour plan osculateur le plan tangent à la nappe.

Supposons donc la nappe paramétrée par $(u, v) \rightsquigarrow f(u, v)$, avec u et v fonctions de classe C^2 de t , correspondant à un arc bi-régulier tel que

le plan osculateur, de direction Vect $\left(\frac{\overrightarrow{dm}}{dt}, \frac{\overrightarrow{d^2m}}{dt^2} \right)$, (arc bi-régulier) soit le

plan tangent en m à la nappe. Ceci équivaut à $\frac{\overrightarrow{dm}}{dt} \cdot \overrightarrow{k} = 0$ et $\frac{\overrightarrow{d^2m}}{dt^2} \cdot \overrightarrow{k} = 0$,

la première condition étant vérifiée, puisque \overrightarrow{k} est normal à la nappe.

Comme :

$$\frac{\overrightarrow{dm}}{dt} = \frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial v} \frac{dv}{dt} = \overrightarrow{f'_u} \frac{du}{dt} + \overrightarrow{f'_v} \frac{dv}{dt},$$

on a :

$$\frac{\overrightarrow{d^2 m}}{dt^2} = \overrightarrow{f''_{u^2}} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2\overrightarrow{f''_{uv}} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + \overrightarrow{f''_{v^2}} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \overrightarrow{f'_u} \cdot \frac{d^2 u}{dt^2} + \overrightarrow{f'_v} \frac{d^2 v}{dt^2},$$

mais $\overrightarrow{f'_u}$ et $\overrightarrow{f'_v}$ sont orthogonaux à \overrightarrow{k} , donc la nullité de $\frac{\overrightarrow{d^2 m}}{dt^2} \cdot \overrightarrow{k}$ équivaut finalement à avoir u et v solutions de l'équation différentielle :

$$\left(\overrightarrow{f''_{u^2}} \cdot \overrightarrow{k} \right) (du)^2 + 2\overrightarrow{f''_{uv}} \cdot \overrightarrow{k} du dv + \overrightarrow{f''_{v^2}} \cdot \overrightarrow{k} (dv)^2 = 0.$$

Nous venons de justifier le :

THÉORÈME 9.142. — *On obtient les arcs bi-réguliers de la nappe S le long desquels le plan osculateur est tangent à la nappe en intégrant l'équation différentielle :*

$$\left(\overrightarrow{f''_{u^2}} \cdot \overrightarrow{k} \right) (du)^2 + 2\overrightarrow{f''_{uv}} \cdot \overrightarrow{k} du dv + \overrightarrow{f''_{v^2}} \cdot \overrightarrow{k} (dv)^2 = 0.$$

Ces arcs sont des (article indéfini) asymptotiques, mais il peut nous en manquer : les asymptotiques de courbure nulle, c'est-à-dire les portions de droite sur la nappe, et les arcs obtenus par des «raccords» en des points de courbure nulle.

Mais ce résultat est plus rapide à obtenir que le Théorème 9.141 qui nécessite l'étude locale en un point m fixé de la nappe, de tous les arcs qui y passent. ■

On peut alors se demander si en un point de la nappe il passe, oui ou non, des asymptotiques. On a le résultat suivant.

THÉORÈME 9.143. — *Soit une nappe S régulière, de classe C^2 et m un point de S qui n'est pas un ombilic. Si la courbure totale est strictement positive en m , il n'y passe pas d'asymptotique. Si elle est strictement négative il passe en m deux asymptotiques dont les tangentes ont pour bissectrices les directions principales, (dans le plan tangent).*

En effet, avec \vec{I} et \vec{J} vecteurs unitaires orthogonaux associés aux directions principales, dans la direction du plan tangent, on a vu, (9.132) que :

$$\gamma_n = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi = (\vec{I}, \vec{T}).$$

Mais alors, si la courbure totale $\frac{1}{R_1 R_2}$ est strictement positive, $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ étant de même signe, γ_n ne s'annule jamais, tandis qu'avec $\frac{1}{R_1 R_2} < 0$, on a γ_n qui s'annule lorsque φ est tel que :

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = -\frac{R_2}{R_1},$$

d'où deux valeurs opposées de φ , (modulo π), donc deux directions, symétriques par rapport à \vec{I} , (ou \vec{J}) dans la direction du plan tangent. ■

9.144 *Un mot des géodésiques, c'est-à-dire des arcs de la nappe le long desquels la courbure géodésique, $\gamma_g = \gamma \sin \theta$, est nulle. Comme je n'ai pas étudié les variations de γ_g , en m fixé, lorsque la direction de la tangente varie, je me contenterai d'indiquer comment chercher les géodésiques le long desquelles $\sin \theta = 0$, soit $\theta = 0$ modulo π , c'est-à-dire les arcs tels que $\vec{N} = \vec{k}$ ou $-\vec{k}$, donc les arcs bi-réguliers de plan osculateur normal à la nappe, (voir remarque 9.106).*

On obtiendra ces arcs bi-réguliers en cherchant u et v fonctions de t , telles que le produit mixte $\left(\vec{k}, \frac{d\vec{m}}{dt}, \frac{d^2\vec{m}}{dt^2} \right) = 0$.

REMARQUE 9.145. — Si une droite D est contenue dans une nappe, c'est un arc le long duquel la courbure γ est nulle, donc c'est à la fois une asymptotique et une géodésique.

En particulier, pour les nappes doublement réglées, (voir les paraboloides hyperboliques ou les hyperboloïdes à une nappe en 10.38 et 10.25 par exemple) on aura sans fatigue les asymptotiques et géodésiques passant par un point m non ombilic, d'où aussi les directions principales, bissectrices des tangentes aux asymptotiques.

REMARQUE 9.146. — Si m est un ombilic, la torsion géodésique est nulle, or $2\tau_g = \frac{\partial \gamma_n}{d\varphi}$, (voir 9.129) donc en m , la courbure normale est constante

par rapport à φ , et suivant qu'elle est nulle ou non, on peut dire qu'en un ombilic on a :

soit toutes les courbes qui y passent peuvent être des asymptotiques,
soit aucune courbe y passant n'est une asymptotique.

REMARQUE 9.147. — les courbures principales $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ en m , qui n'est pas un ombilic, sont les courbures normales pour les directions principales, c'est-à-dire le long des courbes telles que la torsion géodésique soit nulle.

Comme on a :

$$\frac{\vec{dk}}{ds} = -\gamma_n \vec{T} - \tau_g \vec{g}, \quad (\text{voir 9.99}),$$

le long d'une telle courbe on aura $\frac{\vec{dk}}{ds} = -\frac{1}{R_i} \frac{\vec{dm}}{ds}$, ($i = 1$ ou 2), mais aussi,

si t est un paramètre autre que l'abscisse curviligne $\frac{\vec{dk}}{dt} = -\frac{1}{R_i} \frac{\vec{dm}}{dt}$, ce qui permet de trouver les courbures principales si on connaît un paramétrage des lignes de courbure.

§. Recherche de quelques types d'arcs sur les nappes

Dans ce paragraphe, assez bref, nous allons généraliser ce qui a été dit concernant la recherche des asymptotiques, géodésiques ou lignes de courbure d'une nappe paramétrée.

Et d'abord, plantons le décor.

Soit une nappe paramétrée $S = (\Omega, F)$, régulière et de classe C^2 au moins, (plus si les dérivées partielles de F considérées sont d'ordre plus élevé), rapportée à un repère orthonormé de l'espace affine euclidien de dimension trois.

Nous avons vu, (définition 9.12), qu'on appelle arc sur la nappe S , l'image par F d'un arc plan, de support contenu dans Ω . Mais j'ai aussi justifié en 9.135 que, pour des arcs plans de classe C^1 , réguliers, les trois modes de représentation, (arc paramétré, ou d'équation cartésienne, ou d'équation implicite) sont localement équivalents. Enfin, l'étude des équations différentielles a montré que les courbes intégrales d'une équation différentielle du premier ordre s'obtiennent précisément par l'un de ces trois modes de représentation, (Tome 3, chapitre 18, exemples 18.81 à 18.88).

Il résulte de tout ceci que, *chercher des arcs sur la nappe S , vérifiant des conditions données, reviendra le plus souvent à chercher les courbes intégrales d'une équation différentielle liant u , et v paramètres pour la nappe (Ω, F)* , démarche déjà rencontrée en 9.137 pour les lignes de courbure, ou en 9.141 et 9.142 pour les asymptotiques d'une nappe.

Il ne me reste plus qu'à donner des exemples.

DÉFINITION 9.148. — *On appelle lignes de plus grande pente relatives à un plan π sur une nappe S , les trajectoires orthogonales sur S , aux sections de S par tous les plans parallèles à π .*

Recherche des lignes de plus grande pente.

Si \vec{V} est un vecteur perpendiculaire à π , et si C_k est une courbe, section de la nappe S paramétrée par F et d'un plan π_k parallèle à π , les vecteurs tangents à C_k sont dans la direction de π_k , donc dans l'orthogonal de \vec{V} , ils correspondent donc à un paramétrage $t \rightsquigarrow (u(t), v(t))$ tel que :

$$9.149 \quad \left(\vec{F}'_u u' + \vec{F}'_v v' \right) \cdot \vec{V} = 0.$$

Cette relation détermine le rapport $\frac{u'}{v'}$, (ou $\frac{v'}{u'}$), le long des courbes C_k , (qui peuvent être appelées *courbes de niveau parallèlement à π*), ce qui permet de trouver un vecteur :

$$9.150 \quad \vec{H} = \vec{F}'_u \frac{u'}{v'} + \vec{F}'_v \quad \text{ou} \quad \vec{F}'_u + \vec{F}'_v \frac{v'}{u'},$$

tangent aux courbes de niveau, avec $\frac{u'}{v'}$ ou $\frac{v'}{u'}$ donné par 9.149.

On suppose maintenant que $t \rightsquigarrow (u(t), v(t))$ est le paramétrage d'une ligne de plus grande pente : c'est équivalent à dire que $\vec{F}'_u u' + \vec{F}'_v v'$ est cette fois orthogonal à \vec{H} , donc on obtiendra les *lignes de plus en plus grande pente en intégrant l'équation différentielle* :

$$9.151 \quad \left(\vec{F}'_u du + \vec{F}'_v dv \right) \cdot \vec{H} = 0,$$

\vec{H} étant déterminé en 9.150.

REMARQUE 9.152. — Pour traiter un tel exemple, on peut commencer par un changement de repère tel que π soit parallèle à xOy . Les lignes de niveau correspondent alors à $z = \text{constante}$, et si le paramétrage de la nappe est

$$\vec{F}(u, v) = f(u, v) \vec{i} + g(u, v) \vec{j} + h(u, v) \vec{k},$$

on aura $h'_u u' + h'_v v' = 0$ le long d'une courbe de niveau, d'où un calcul de $\frac{u'}{v'}$ ou de $\frac{v'}{u'}$, puis $H = \vec{F}'_u \frac{u'}{v'} + \vec{F}'_v$ ou $\vec{F}'_u + \vec{F}'_v \frac{v'}{u'}$ qui sera du type $U \vec{i} + V \vec{j}$, et enfin l'équation différentielle 9.151. Voir exercice n° 2.

DÉFINITION 9.153. — On appelle *loxodromies d'une nappe de révolution* S , toute courbe Γ sur la nappe S qui coupe les méridiennes sous un angle constant, α .

Supposons la nappe de révolution d'axe Oz , dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et telle qu'avec $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ on ait un paramétrage de S du type :

$$9.154. \quad (t, \theta) \rightsquigarrow \vec{Om}(t, \theta) = F(t, \theta) = r(t) \vec{u}_\theta + z(t) \vec{k},$$

ce qui revient à dire que dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{k})$, le paramétrage $t \rightsquigarrow (r(t), z(t))$ est paramétrage d'une méridienne.

$$\text{Introduisons aussi } \vec{v}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}.$$

Le vecteur tangent en $m(t, \theta)$ à la méridienne qui y passe est :

$$\vec{V} = r'(t) \vec{u}_\theta + z'(t) \vec{k},$$

et le vecteur tangent à une courbe Γ obtenue en supposant que θ est fonction de t sera :

$$\vec{W} = r'(t) \vec{u}_\theta + r(t) \frac{d\theta}{dt} \vec{v}_\theta + z'(t) \vec{k}.$$

Cette courbe Γ sera une loxodromie si et seulement si :

$$\left(\vec{V} \cdot \vec{W} \right)^2 = \|\vec{V}\|^2 \|\vec{W}\|^2 \cos^2 \alpha, \text{ ce qui conduit à :}$$

$$(r'^2 + z'^2)^2 = (r'^2 + z'^2) \left(r'^2 + z'^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \cos^2 \alpha,$$

et comme, (privilège du théoricien qui s'arrange pour prendre les hypothèses qui lui facilitent les choses), on peut supposer les méridiennes régulières, on simplifie par $r'^2 + z'^2$ non nul, d'où :

$$(r'^2 + z'^2)(1 - \cos^2 \alpha) = r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos^2 \alpha = (r'^2 + z'^2) \sin^2 \alpha,$$

et finalement, les arcs obtenus avec θ fonction de t vérifiant :

$$9.155. \quad r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = (r'^2 + z'^2) \operatorname{tg}^2 \alpha,$$

sont les loxodromies de la nappe de révolution S paramétrée par 9.154, (voir exercice n° 4).

7. Notion de variété

Je me propose, dans ce paragraphe, en généralisant les notions sur les arcs paramétrés et les nappes paramétrées, d'introduire la notion de *variété plongée dans \mathbb{R}^n* , puis celle de *variété abstraite*, ces deux notions étant le fondement de la géométrie différentielle.

Un arc paramétré de \mathbb{R}^n est apparu comme une application d'un intervalle de \mathbb{R} , dans \mathbb{R}^n , donc comme une partie de \mathbb{R}^n dépendant d'un paramètre réel.

Une nappe de \mathbb{R}^n est de même une partie de \mathbb{R}^n dépendant de deux paramètres réels. On comprend que l'on peut généraliser avec trois, quatre, ..., d paramètres réels.

Par ailleurs un arc de \mathbb{R}^2 peut être également défini par une équation implicite; une nappe de \mathbb{R}^3 aussi; et un arc de \mathbb{R}^3 intersection de deux nappes peut se définir par la donnée de deux équations implicites. Il y a, la aussi, matière à généralisation, ce que nous allons faire.

Enfin, les Théorèmes 9.62 et 9.135, qui justifient l'équivalence locale des modes de représentation des nappes de \mathbb{R}^3 , ou des arcs de \mathbb{R}^2 , ont montré l'importance de l'aspect local dans cette étude, c'est pourquoi, dès le départ, la formulation sera locale et non plus globale.

DÉFINITION 9.156. — Soit une partie V de \mathbb{R}^n . On dit que V est une sous-variété de \mathbb{R}^n , de dimension d et de classe C^p si et seulement si pour tout a de V , il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a , un ouvert Ω de \mathbb{R}^d contenant 0 , une application g de Ω dans \mathbb{R}^n telle que $g(0) = a$, g étant un homéomorphisme de classe C^p de Ω sur $V \cap U$, avec $dg(0)$ injective. On dit encore que V est une variété plongée dans \mathbb{R}^n .

Cette définition généralise au cas de d quelconque, la notion d'être « localement » un arc paramétré régulier, ($d = 1, \overrightarrow{g'(0)} \neq 0$, d'où une tangente) ou une nappe paramétrée régulière, ($d = 2, dg(0)$ injective, d'où un plan tangent). Voir la définition 6.51 et le Théorème 6.37 pour les arcs, les définitions 9.6 et 9.10 pour les nappes.

Nous allons retrouver les formulations équation cartésienne ou équation implicite par le théorème suivant.

THÉORÈME 9.157. — Soit V une partie de \mathbb{R}^n . Il y a équivalence entre les conditions suivantes :

- 1) V est une sous-variété de dimension d , de classe C^p de \mathbb{R}^n ;
- 2) pour tout a de V , il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a et une application f de classe C^p , de U dans \mathbb{R}^{n-d} , telle que $df(a)$ soit surjective et que $V \cap U = f^{-1}(0)$;
- 3) pour tout $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de V , il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a , d coordonnées d'indices $i_1 < i_2 < \dots < i_d$ de a , un ouvert U' de \mathbb{R}^d contenant $b = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d})$ et $n - d$ applications h_r , ($1 \leq r \leq n - d$), de classe C^p , de U' dans \mathbb{R} , telles qu'en notant $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-d}$ les indices i autres que i_1, \dots, i_d , on ait :

$$(x \in V \cap U) \iff (\exists (x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) = y \in U', \forall r, 1 \leq r \leq n - d, x_{j_r} = h_r(y)).$$

1) \implies 2). Soit V une sous-variété de \mathbb{R}^n , $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans V et Ω un ouvert de \mathbb{R}^d contenant 0 , g l'application de Ω dans \mathbb{R}^n telle que $g(0) = a$, $dg(0)$ injective, g établissant un homéomorphisme de classe C^p de Ω sur $V \cap U$. Si g_1, \dots, g_n sont les n composantes de g , et si $t = (t_1, t_2, \dots, t_d)$

est l'élément générique de Ω , la matrice jacobienne $\mathcal{M} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(0) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq d}}$

est de rang d , donc elle admet un déterminant mineur d'ordre d non nul, il le reste localement. Quitte à permuter les indices dans \mathbb{R}^n , (ce qui revient à composer dans \mathbb{R}^n par un C^∞ difféomorphisme), on peut donc supposer qu'il s'agit du déterminant formé des d premières lignes. On sait donc qu'il existe Ω' , ouvert de Ω dans \mathbb{R}^d , contenant 0 , et un ouvert 0_1 de \mathbb{R}^d contenant $b = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, et d applications h_i de 0_1 dans Ω' , de classe C^p telles que h de composantes (h_1, \dots, h_d) soit le difféomorphisme réciproque de \hat{g} , de composantes g_1, \dots, g_d , de Ω' sur 0_1 .

On a donc :

$$(t = (t_1, \dots, t_d) \in \Omega') \iff (\exists (x_1, \dots, x_d) \in 0_1, \forall i \leq d, t_i = h_i(x_1, \dots, x_d)).$$

Soit alors $U' = 0_1 \times \mathbb{R}^{n-d}$, ouvert de \mathbb{R}^n , et f l'application définie sur U' , à valeurs dans \mathbb{R}^{n-d} , ayant pour composantes les fonctions notées f_j , pour j tel que $d+1 \leq j \leq n$, ces fonctions étant telles que :

$$\begin{aligned} f_j(x_1, \dots, x_d; x_{d+1}, \dots, x_n) &= x_j - g_j(h_1(x_1, \dots, x_d), \dots, h_d(x_1, \dots, x_d)) \\ &= x_j - k_j(x_1, \dots, x_d) \end{aligned}$$

Cette application est bien de classe C^p de U' dans \mathbb{R}^{n-d} , sa différentielle $df(a)$ est surjective, car sa matrice jacobienne est :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial k_{d+1}}{\partial x_1} & -\frac{\partial k_{d+1}}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial k_{d+1}}{\partial x_d} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial k_{d+2}}{\partial x_1} & -\frac{\partial k_{d+2}}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial k_{d+2}}{\partial x_d} & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\partial k_n}{\partial x_1} & -\frac{\partial k_n}{\partial x_2} & \dots & -\frac{\partial k_n}{\partial x_d} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc de rang $n-d$, grâce au deuxième bloc, I_{n-d} ,

$$\begin{aligned} \text{et } (x \in V \cap U') &\iff (x \in V \text{ et } (x_1, \dots, x_d) \in 0_1), \\ &\iff (x \in V \text{ et } (x_1, \dots, x_d) = \widehat{g}(t) \text{ pour } t \text{ dans } \Omega'), \end{aligned}$$

mais pour $t \in \Omega' \subset \Omega$, l'appartenance de x à V , vu l'aspect bijectif du paramétrage g sur Ω' , équivaut aux conditions :

$$x_j = g_j(t_1, \dots, t_d) = g_j(h_1(x_1, \dots, x_d), \dots, h_d(x_1, \dots, x_d)),$$

donc encore $f_j(x_1, \dots, x_n) = 0$, pour $d+1 \leq j \leq n$,

$$\text{d'où } (x \in V \cap U') \iff f(x) = 0.$$

2) \implies 3). Soit donc V une partie de \mathbb{R}^n telle que pour tout a de V , il y ait un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a et une application f de classe C^p de U dans \mathbb{R}^{n-d} , telle que $V \cap U = \{x \in U; f(x) = 0\}$ et que $df(a)$ soit une surjection de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^{n-d} .

La matrice jacobienne de f en a est de rang $n-d$: il existe donc $n-d$ indices, ordonnés en $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-d}$, tels que le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n-d$ des $\left(\frac{\partial f_r(a)}{\partial x_{j_s}}\right)_{\substack{1 \leq r \leq n-d \\ 1 \leq s \leq n-d}}$, (les f_r désignant les composantes de f) soit non nul.

Nous sommes dans le cadre d'application du Théorème des fonctions implicites, (Tome 3, Théorème 17.10). En notant E l'espace \mathbb{R}^d correspondant

aux d indices $i_1 < i_2 < \dots < i_d$, des indices i différents des j_s , F l'espace isomorphe à $\mathbb{R}^{n-d} = G$, formé des $(x_{j_s})_{1 \leq s \leq n-d}$, $b = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d})$, $c = (\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_{n-d}})$, d'où « $a = (b, c)$ », (les guillemets pour signaler qu'il y a lieu de réordonner les indices pour récupérer a), on a f de classe C^p , ($p \geq 1$) de U dans $G = \mathbb{R}^{n-d}$, la différentielle partielle $df_z(b, c)$ qui est un isomorphisme de F sur G , donc il existe un ouvert U' de \mathbb{R}^d contenant b , un ouvert U_1 de \mathbb{R}^n contenant a et une application h de U' dans G , ($\simeq \mathbb{R}^{n-d}$), telle que, avec $y = (x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$ et $z = (x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-d}})$, on ait :

$$(x = (y, z) \in U_1 \text{ et } f(x) = 0) \iff (y \in U' \text{ et } z = h(y)),$$

soit encore, vu la définition locale de V du 2° :

$$(x \in (U \cap U_1) \cap V) \iff (z = h(y), \text{ pour } y \text{ dans } U').$$

Si on détaille ce $z = h(y)$, on obtient bien, pour tout indice j_r , $1 \leq r \leq n - d$, $x_{j_r} = h_r(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$, vu la définition de y et de z . Bien sûr, h est de classe C^p .

3) \implies 1). Si V est telle que pour tout a de V on ait un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a , un ouvert U' de \mathbb{R}^d contenant $b = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d})$ et une application h de classe C^p de U' dans \mathbb{R}^{n-d} telle, qu'avec les notations du 3° on ait ($x \in V \cap U$) si et seulement si ($\forall r, 1 \leq r \leq n - d$, $x_{j_r} = h_r(x_{i_1}, \dots, x_{i_d})$), l'application g définie sur U' , à valeurs dans \mathbb{R}^n , par ses n composantes, et telle que :

$$\begin{aligned} \forall i_s, (1 \leq s \leq d), \quad g_{i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) &= x_{i_s}, \\ \forall j_r, (1 \leq r \leq n - d), \quad g_{j_r}(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) &= h_r(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}), \end{aligned}$$

l'application g donc est de classe C^p de U' dans \mathbb{R}^n , on a :

$$(x \in V \cap U) \iff (x = g(y), y = (x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) \in U'),$$

d'après le 3°, avec $dg(b)$ injective de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^n puisque la partie de la matrice jacobienne de g relative aux dérivées partielles des composantes g_{i_s} , $1 \leq s \leq d$, donne la matrice identité d'ordre d .

L'application g est pour l'instant continue, injective (vu la définition des g_{i_s} pour $1 \leq s \leq d$), donc si on se restreint à des voisinages compacts, sa réciproque sur $V \cap U$ sera continue, (Tome 2, corollaire 2.20) puisqu'une bijection continue d'un compact dans un séparé est bicontinue. On obtient bien l'aspect homéomorphisme de U' sur $V \cap U$ de la définition 9.15.6 d'où V sous-variété de \mathbb{R}^n . ■

J'espère que vous me pardonnerez la maladresse de la justification. L'idée est par contre simple à dégager :

1) un paramétrage de (x_1, \dots, x_n) en fonction de (t_1, \dots, t_d) permet de tirer (t_1, \dots, t_d) en fonction de d coordonnées x_{i_1}, \dots, x_{i_d} , et en remplaçant les t_r par ces expressions dans les autres coordonnées on obtient $n - d$ applications du type x_{j_k} – fonction de $(x_{i_1}, \dots, x_{i_d}) = 0$, d'où une équation implicite;

2) une équation implicite donne $n - d$ coordonnées fonctions des autres par le Théorème des fonctions implicites, d'où les équations cartésiennes;

3) enfin des équations cartésiennes sont un cas particulier de paramétrage.

REMARQUE 9.158. — *Le 2) du Théorème 9.157 peut se formuler comme suit : pour tout a de V , il existe un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant a et $n - d$ applications f_i , $1 \leq i \leq n - d$, de classe C^p , de U dans \mathbb{R} , telles que les formes différentielles $df_i(a)$ soient indépendantes et que $V \cap U = \bigcap_{i=1}^{n-d} f_i^{-1}(0)$.*

Il suffit en fait d'appeler f_i les composantes de l'application f du 2° , de U dans \mathbb{R}^{n-d} , ou de construire f à partir des f_i pour passer d'une formulation à l'autre.

C'est au sens de cette remarque, qu'un arc de \mathbb{R}^3 , sous-variété de dimension 1, apparaît, localement, comme une intersection de $2 = 3 - 1$ nappes données par deux équations implicites, les plans tangents à ces nappes en leurs points d'intersection étant distincts, (localement). ■

REMARQUE 9.159. — Dans la définition 9.156 et dans le Théorème 9.157 on a rencontré des différentielles en un point injectives ou surjectives. Ceci mérite une définition.

*Soit E et F deux espaces vectoriels, Ω un ouvert de E et f une application de Ω dans F , différentiable en a de Ω on dit que f est une **immersion** en a si $df(a)$ est injective, une **submersion** en a si $df(a)$ est surjective, enfin f est dite **étale** en a lorsque $df(a)$ est bijective de E sur F .*

Il reste à s'affranchir de l'aspect «à valeurs dans un espace vectoriel», pour obtenir la notion de variété abstraite. Mais dans ce cas, si on établit une bijection entre un ouvert Ω de \mathbb{R}^d et une partie V d'un ensemble quelconque, même pas espace topologique, il sera difficile de parler de continuité et encore plus difficile d'y mettre du calcul différentiel. A moins que ..., si on revenait dans \mathbb{R}^d par une bijection réciproque ... peut être qu'on pourrait faire quelque chose. Ceci conduit aux définitions suivantes.

DÉFINITION 9.160. — Soit un ensemble X , p et d deux entiers non nuls. On appelle atlas d -dimensionnel de classe C^p sur X tout ensemble $\{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ de couples tels que :

- 1) les U_i sont des parties de X et $\bigcup_{i \in I} U_i = X$;
- 2) les φ_i sont des bijections de U_i sur des ouverts de \mathbb{R}^d , avec en plus, $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ est un ouvert de \mathbb{R}^d , pour tout couple (i, j) de I^2 ;
- 3) pour tout couple (i, j) de I^2 , $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^p de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$.

9.161. Les couples (U_i, φ_i) sont les cartes de l'atlas, U_i étant le domaine de la carte (U_i, φ_i) .

DÉFINITION 9.162. — Soit un atlas $\{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ sur X , et un couple (U, φ) avec U partie de X et φ bijection de U sur un ouvert de \mathbb{R}^d . La carte (U, φ) est compatible avec l'atlas, si $\{(U, \varphi)\} \cup \{(U_i, \varphi_i), i \in I\}$ est encore un atlas.

Deux atlas sont dits compatibles si leur réunion est encore un atlas, (ils sont donc tous deux de même dimension et de même classe).

On vérifie facilement qu'il s'agit d'une relation d'équivalence entre atlas, ce qui conduit à :

DÉFINITION 9.163. — On appelle variété de dimension d , de classe C^p , (p et d entiers non nuls), tout ensemble X muni d'une classe d'équivalence d'atlas d -dimensionnels de classe C^p sur X . Une carte quelconque de l'un des atlas de la classe d'équivalence est ce qu'on appelle une carte de la variété.

L'étude des variétés abstraites consiste alors à utiliser la topologie de \mathbb{R}^d , et le calcul différentiel, pour munir la variété d'une topologie, lui associer des espaces tangents : c'est le point de départ de la géométrie différentielle, qui déborde de beaucoup le cadre de cet ouvrage. Mais, pour ne pas sembler paresseux, et avant d'aller desherber les allées de mon jardin, (les printemps pluvieux sont propices aux mauvaises herbes), je vais quand même vous la définir, la topologie d'une variété abstraite.

THÉORÈME 9.164. — Soit X une variété de dimension d , de classe C^p . Elle est munie d'une topologie, (dite canonique) dont les ouverts sont les réunions des domaines de toutes les cartes d'une classe d'équivalence d'atlas.

Comme la réunion des domaines des cartes d'un atlas est X , (1° de la définition 9.160), X est un ouvert.

La réunion de la famille indexée par l'ensemble \emptyset , de domaines de cartes est la partie \emptyset de X , (car $A = \bigcup_{i \in \emptyset} U_i = \{x; x \in A, \exists i \in \emptyset \dots\} = \emptyset$ puisque ce $\exists i \in \emptyset$ n'est jamais vérifié, voir Tome 1, 1.23), donc *l'ensemble vide est ouvert*.

Il est bien clair *qu'une réunion d'ouverts est une réunion de domaines de cartes donc est un ouvert*; il nous reste à justifier la stabilité de la notion d'ouvert par passage à l'intersection finie, ce qui se ramène au cas de deux.

Soient donc $A = \bigcup_{i \in I} U_i$ et $B = \bigcup_{j \in J} U_j$ deux ouverts de X , on a :

$$A \cap B = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (U_i \cap U_j),$$

et si on justifie que les $U_i \cap U_j$ sont des domaines de cartes, compatibles avec les cartes de la variété on aura gagné.

Soit alors $\psi_i = \varphi_i \Big|_{U_i \cap U_j}$, la restriction de l'application φ_i , (de U_i dans \mathbb{R}^d , telle que (U_i, φ_i) soit une carte de X), à $U_i \cap U_j$: le côté bijectif de φ_i implique le fait que ψ_i soit une bijection de $U_i \cap U_j$ sur un ouvert de \mathbb{R}^d vu le 2° de la définition 9.160.

Puis la carte $(\psi_i, U_i \cap U_j)$ est compatible avec les cartes de la variété X , car pour toute carte (U, φ) de la variété les conditions 2 et 3 de la définition 9.160 sont vérifiées.

D'abord :

$$\begin{aligned} \varphi(U \cap (U_i \cap U_j)) &= \varphi((U \cap U_i) \cap (U \cap U_j)), \\ &= \varphi(U \cap U_i) \cap \varphi(U \cap U_j), \end{aligned}$$

égalité fautive pour des applications quelconques, mais vraie ici parce que φ est bijective de U sur $\varphi(U)$, donc injective, et alors on a égalité, (voir Tome 1, Théorème 1.28).

Comme (U, φ) , (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont des cartes de X , on sait alors que $\varphi(U \cap U_i)$ et $\varphi(U \cap U_j)$ sont des ouverts de \mathbb{R}^d , donc $\varphi(U \cap (U_i \cap U_j))$ est ouvert de \mathbb{R}^d .

On vérifierait de même que $\psi_i((U_i \cap U_j) \cap U)$ est ouvert de \mathbb{R}^d , puisque ψ_i , restriction de φ_i est injective. Ceci vérifie le 2°.

Quand au 3°, considérons, avec les mêmes notations, l'application :

$$\varphi \circ \psi_i^{-1} = \varphi \circ \left(\varphi_i \Big|_{U_i \cap U_j} \right)^{-1}$$

Comme ψ_i est une bijection de $U_i \cap U_j$ sur l'ouvert de \mathbb{R}^d , $\varphi_i(U_i \cap U_j)$, ψ_i^{-1} est en fait la restriction à cet ouvert $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ de φ_i^{-1} , donc :

$$\varphi \circ \psi_i^{-1} = \varphi \circ \varphi_i^{-1} \Big|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)}.$$

Comme (φ, U) et (φ_i, U_i) sont deux cartes de la variété, on sait, (3° de la définition 9.160), que $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^p de $\varphi_i(U \cap U_i)$ sur son image $\varphi(U \cap U_i)$.

Mais alors $\varphi_i(U \cap U_i \cap U_j)$ étant un ouvert, (voir ci-dessus) de $\varphi_i(U \cap U_i)$, a fortiori $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ établit un C^p difféomorphisme de $\varphi_i(U \cap U_i \cap U_j)$ sur son image $\varphi(U \cap U_i \cap U_j)$.

On vérifierait de même que $\psi_i \circ \varphi^{-1}$ est un C^p difféomorphisme de $\varphi(U \cap U_i \cap U_j)$ sur $\varphi_i(U \cap U_i \cap U_j)$, ce qui achève la justification du Théorème 9.164. ■

REMARQUE 9.165. — Si (U_i, φ_i) et (U_j, φ_j) sont deux cartes d'une variété X , φ_j^{-1} est définie sur $\varphi_j(U_j)$, mais pour enchaîner avec φ_i et considérer $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$, il faut que les antécédents x des y de $\varphi_j(U_j)$ soient dans U_i , donc que y soit aussi dans $\varphi_j(U_i)$, c'est-à-dire que $y \in \varphi_j(U_i) \cap \varphi_j(U_j) = \varphi_j(U_i \cap U_j)$ vu le côté bijectif de φ_j .

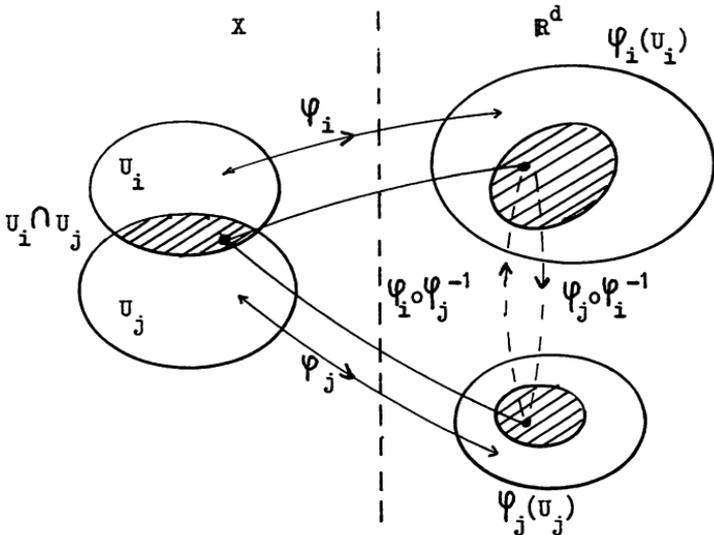


Fig. 9.165

On a le schéma de la figure 9.165, où

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \Big|_{\varphi_i(U_i \cap U_j)} \quad \text{et} \quad \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \Big|_{\varphi_j(U_i \cap U_j)}$$

apparaissent comme deux C^p difféomorphismes réciproques l'un de l'autre, de $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sur $\varphi_j(U_i \cap U_j)$, ouverts de \mathbb{R}^d .

Ceci est intéressant pour $U_i \cap U_j$ non vide, mais on peut aussi avoir $\varphi_i(U_i \cap U_j) = \varphi_i(U_i) \cap \varphi_i(U_j)$ et $\varphi_j(U_i \cap U_j) = \varphi_j(U_i) \cap \varphi_j(U_j)$ disjoints.

La structure d'atlas est celle qui permet de se ramener à des difféomorphismes d'ouverts de \mathbb{R}^d , pour en déduire, en utilisant les bijections des cartes, des conséquences pour la variété.

Il ne vous reste plus qu'à consulter des ouvrages de géométrie différentielle, (il en est d'excellents!) pour de plus amples détails.

EXERCICES

1. Soit la nappe paramétrée S , $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = a \cos t - r$, pour (t, r) dans \mathbb{R}^2 . Vérifier qu'elle est réglée et chercher les trajectoires orthogonales aux génératrices rectilignes.

2. On considère la nappe paramétrée S , définie par :

$$x = a \frac{\sin u}{1 + \cos u \cos v}, \quad y = a \frac{\sin v}{1 + \cos u \cos v}, \quad z = a \frac{\cos u + \cos v}{1 + \cos u \cos v},$$

(x, y, z coordonnées dans un repère orthonormé). En donner les lignes de plus grande pente.

3. Soit la nappe S d'équation implicite $z(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$ dans un repère orthonormé de \mathbb{R}^3 . Quels en sont les points réguliers. Plans tangents en ces points.

Soit la droite D_θ d'équations $x \sin \theta - y \cos \theta = 0$ et $z = \cos 2\theta$. Trouver les plans contenant D_θ et tangents à S en un point de D_θ .

4. Trouver une nappe de révolution d'axe $z'z$ dont une loxodromie se projette sur xOy suivant une parabole de foyer O .

5. Cylindre circonscrit à un ellipsoïde, parallèlement à un vecteur donné \vec{u} . Contour apparent de direction $\mathbb{R}\vec{u}$.

6. Soit $D_{u,v}$ la droite d'équations $x = uz - v$, $y = vz - \frac{u^3}{3}$. Comment choisir v fonction de u de telle sorte que le plan tangent à la nappe S engendrée par les droites $D_{u,v(u)}$ soit le même en tout point de $D_{u,v(u)}$?

7. Trouver, sur la nappe S paramétrée par : $x = (1 + u) \sin v$, $y = (1 - u) \cos v$, $z = u$, des courbes bi-régulières Γ telles qu'en chaque point de Γ le plan osculateur à Γ soit le plan tangent à S .

8. Soit la nappe S d'équation $xyz = a$, ($a \neq 0$). Ensemble des projections de O sur les plans tangents à la nappe.

9. Soit la nappe S d'équation $x^2(z + a) + y^2(z - a) = 0$.
a) Déterminer les droites contenues dans S .

- b) Soit A fixé dans l'espace et Γ_A l'ensemble des projections orthogonales de A sur les droites de S . Déterminer Γ_A .
 c) Lieu des centres de symétrie de Γ_A si A varie.

10. Soit la nappe S d'équation $z = a \cos 2\theta$ en coordonnées cylindriques. Montrer que l'intersection de S et du plan tangent en M à S contient une conique à centre. Lieu des centres de ces coniques quand M varie.

11. Nappes S de \mathbb{R}^3 définies par une relation de la forme :

$\vec{0m} = x \vec{i} + y \vec{j} + f(x, y) \vec{k}$, telles que le point P , intersection de la normale en m , avec le plan $z = 0$ vérifie $\vec{0m} \cdot \vec{0P} = 0$.

12. Soit S un cône de révolution d'axe D , d'angle au sommet $\frac{\pi}{2}$ et C un cylindre de révolution de rayon R dont D est une génératrice. Soit Γ l'intersection du cône et du cylindre, P le plan passant par le sommet du cône et perpendiculaire à D . Trouver l'intersection des tangentes à Γ avec P .

13. Soit Σ la surface d'équation $z = \frac{2axy}{x^2 + y^2}$.

Allure de Σ . Déterminer les courbes Γ tracées sur Σ et telles que, en tout point P de Γ , le plan tangent à Σ en P et le plan osculateur à Γ en P soient confondus.

14. Asymptotiques de la nappe d'équation :

$$z = x + y - \frac{z}{x^2}(x + y)^2.$$

SOLUTIONS

1. Comme le paramètre r intervient de manière affine, la nappe est réglée. On note $D(t)$ la génératrice rectiligne de vecteur directeur $\vec{g}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} - \vec{k}$, passant par $p(t)$ tel que $\vec{Op} = a \cos t \vec{k} = \vec{f}(t)$, $\mathcal{R} = (0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant un repère orthonormé. Un arc sur S sera cherché ici sous la forme r fonction de t . Il aura donc pour vecteur tangent :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{f}'(t) + r\vec{g}'(t) + r'\vec{g}(t),$$

et on doit traduire l'orthogonalité de $\frac{d\vec{m}}{dt}$ et de $\vec{g}(t)$ qui dirige $D(t)$.

On a :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} \begin{vmatrix} -r \sin t + r' \cos t \\ r \cos t + r' \sin t \\ -a \sin t - r' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{g}(t) \begin{vmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -1 \end{vmatrix}$$

d'où $\frac{d\vec{m}}{dt} \cdot \vec{g}(t) = 2r' + a \sin t = 0$, équation différentielle devant lier r et t pour les trajectoires orthogonales cherchées.

On a donc : $r(t) = \frac{a}{2} \cos t + k$, ce qui conduit au paramétrage :

$$\begin{cases} x = \left(\frac{a}{2} \cos t + k \right) \cos t, \\ y = \left(\frac{a}{2} \cos t + k \right) \sin t, \\ z = \frac{a}{2} \cos t - k. \end{cases}$$

Il faut encore vérifier que les points des courbes Γ_k obtenues conviennent tous, (attention aux points singuliers éventuels!). Mais on a un paramétrage de classe C^∞ , et les dérivées premières et secondes de $z = \frac{a}{2} \cos t - k$ ne sont pas nulles en même temps. En notant $\vec{\varphi}$ la fonction définissant le paramétrage, si $\vec{\varphi}'(t_0) = 0$ on aura $\vec{\varphi}''(t_0) \neq 0$ et $\vec{\varphi}''(t_0)$ dirige la tangente à Γ_k en $m(t_0)$.

Comme on a $\vec{\varphi}'(t) \cdot \vec{g}(t) = 0$, en dérivant, on a :

$$\vec{\varphi}''(t) \cdot \vec{g}(t) + \vec{\varphi}'(t) \cdot \vec{g}'(t) = 0,$$

ce qui en t_0 donne $\vec{\varphi}''(t_0) \cdot \vec{g}(t_0) = 0$: les points singuliers des courbes Γ_k conviennent encore.

2. Si on note F la fonction des deux variables u et v , de composantes x, y et z , elle est définie pour $\cos u \cos v \neq -1$ soit pour (u, v) dans l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2$ privé

des couples $(2k\pi, \pi + 2r\pi)$ ou $(2k\pi + \pi, 2r\pi)$ avec (k, r) dans \mathbb{Z}^2 . En posant $\varphi(u, v) = \frac{a}{(1 + \cos u \cos v)^2}$, on a, sur Ω ,

$$F'_u \begin{cases} \varphi(u, v)(\cos u(1 + \cos u \cos v) + \sin^2 u \cos v) = \varphi(u, v)(\cos u + \cos v), \\ \varphi(u, v) \sin u \cos v \sin v, \\ \varphi(u, v)(-\sin u(1 + \cos u \cos v) + \sin u \cos v(\cos u + \cos v)), \end{cases}$$

soit encore :

$$F'_u \begin{cases} \varphi(u, v)(\cos u + \cos v), \\ \varphi(u, v) \sin u \cos v \sin v, \\ -\varphi(u, v) \sin u \sin^2 v. \end{cases}$$

Vu la symétrie de z en u et v , et le fait qu'en changeant (u, v) en (v, u) x et y s'échangent, on trouve pour composantes de F'_v :

$$F'_v \begin{cases} \varphi(u, v) \sin v \cos u \sin u, \\ \varphi(u, v)(\cos u + \cos v), \\ -\varphi(u, v) \sin^2 u \sin v. \end{cases}$$

Si on suppose u et v fonctions de classe C^1 de t dans I intervalle de \mathbb{R} , on obtient

un arc Γ sur S de vecteur tangent $\frac{d\vec{m}}{dt} = F'_u u' + F'_v v'$, donc parallèle à \vec{V} avec

$$\vec{V} \begin{cases} (\cos u + \cos v)u' + \sin v \cos u \sin u v', \\ \sin u \cos v \sin v u' + (\cos u + \cos v)v', \\ -\sin u \sin^2 v u' - \sin^2 u \sin v v', \end{cases}$$

Si Γ est une courbe de niveau, on a $z = \text{constante}$, donc :

$$-\sin u \sin v (u' \sin v + v' \sin u) = 0.$$

Donc pour $\sin u \sin v \neq 0$, le paramétrage d'une courbe de niveau doit être tel que $u' = \lambda \sin u$ et $v' = -\lambda \sin v$, ce qui conduit à \vec{W} du type :

$$\vec{W} \begin{cases} \lambda(\sin u \cos u + \sin u \cos v - \sin^2 v \cos u \sin u), \\ \lambda(\sin^2 u \cos v \sin v - \cos u \sin v - \cos v \sin v), \\ 0, \end{cases}$$

soit encore à \vec{W} parallèle à :

$$\vec{W}_1 \begin{cases} \cos^2 v \sin u \cos u + \sin u \cos v = (1 + \cos u \cos v) \sin u \cos v, \\ -\cos^2 u \cos v \sin v - \cos u \sin v = -(1 + \cos u \cos v) \cos u \sin v, \\ 0, \end{cases}$$

ou finalement, parallèle à :

$$\vec{W}_2 \begin{cases} \sin u \cos v, \\ -\cos u \sin v, \\ 0. \end{cases}$$

Comme le vecteur tangent à une ligne de plus grande pente sera parallèle au vecteur du type \vec{V} du début du calcul, on aura l'équation différentielle liant u et v , (pour l'instant on suppose u et v fonctions d'un paramètre t), en écrivant que $\vec{V} \cdot \vec{W}_2 = 0$, ce qui conduit à :

$$u'(\sin u \cos v (\cos u + \cos v) - \sin u \cos v \sin^2 v \cos u) \\ + v'(\sin v \cos u \sin^2 u \cos v - (\cos u + \cos v) \cos u \sin v) = 0,$$

soit encore :

$$u' \sin u \cos v \underbrace{(\cos u + \cos v - \sin^2 v \cos u)}_{= \cos^2 v \cos u + \cos v} \\ + v' \cos u \sin v \underbrace{(\sin^2 u \cos v - \cos u - \cos v)}_{= -\cos u - \cos^2 u \cos v},$$

d'où l'équation différentielle :

$$(1 + \cos u \cos v)[u' \sin u \cos^2 v - v' \cos^2 u \sin v] = 0,$$

ce qui, compte tenu de la condition $1 + \cos u \cos v \neq 0$ sur Ω conduit à :

$$u' \sin u \cos^2 v - v' \cos^2 u \sin v = 0.$$

Pour $\cos u \cos v \neq 0$, on a une équation à variables séparées, qui s'écrit :

$$\frac{\sin u \, du}{\cos^2 u} = \frac{\sin v \, dv}{\cos^2 v},$$

et qui conduit à la relation $\frac{1}{\cos v} = \frac{1}{\cos u} + k$, équation implicite d'une famille d'arcs $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{R}}$, qui auront pour images par F les lignes de plus grande pente cherchées, pour les couples (u, v) de Ω tels qu'en plus $\sin u \sin v \neq 0$ et $\cos u \neq 0, \cos v \neq 0$.

3. L'équation étant homogène en x et y , S est un conoïde, donc une nappe réglée que l'on va étudier en tant que telle.

En posant $x = t \cos \theta$ et $y = t \sin \theta$, (pour (t, θ) dans $\mathbb{R} \times [0, \pi]$), on a $zt^2 = t^2 \cos 2\theta$, donc, pour $t \neq 0$, $z = \cos 2\theta$.

Les points correspondant à $t = 0$, sont tels que $x = y = 0$. En fait l'axe des z est sur S . Puis S privé de cet axe se paramètre en

$$\begin{cases} x = t \cos \theta, \\ y = t \sin \theta, \\ z = \cos 2\theta, \end{cases}$$

si $t \neq 0$, mais en prenant t réel on retrouve une partie de l'axe des z , (les points de cote comprise entre -1 et 1).

Sous cette forme, t intervenant de manière affine, on a mis en évidence l'aspect réglé de la nappe.

Soit $\overrightarrow{f(\theta)} = \cos 2\theta \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{g(\theta)} = \cos \theta \overrightarrow{i} + \sin \theta \overrightarrow{j}$, la nappe est l'ensemble des droites D_θ de vecteur directeur $\overrightarrow{g(\theta)}$ passant par $p(\theta)$ tel que $0\overrightarrow{p(\theta)} = \overrightarrow{f(\theta)}$, c'est-à-dire les droites d'équations $x \sin \theta - y \cos \theta = 0$ et $z = \cos 2\theta$, auxquelles il faut adjoindre l'axe des z .

La famille des vecteurs $\overrightarrow{f'(\theta)}$, $\overrightarrow{g'(\theta)}$, $\overrightarrow{g(\theta)}$ a pour matrice de composantes dans la base \overrightarrow{i} , \overrightarrow{j} , \overrightarrow{k} la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta & \cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ -2 \sin 2\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ régulière pour } \theta \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Donc, en restreignant θ dans $[0, \pi]$, on a :

1°) pour $\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi$, tous les points de D_θ sont réguliers, D_θ est contenue dans la nappe, tous les plans contenant D_θ , sauf celui de direction $\text{Vect}(\overrightarrow{g(\theta)}, \overrightarrow{g'(\theta)}) = \text{Vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ sont tangents à S ;

2°) si $\theta = 0$, (ou π), $z = 1$, la droite D_0 , ($= D_\pi$) est celle d'équations $z = 1$, $y = 0$, tous les points de D_0 sont réguliers, sauf un, avec pour direction de plan tangent $\text{Vect}(\overrightarrow{g(0)}, \overrightarrow{g'(0)}) = \text{Vect}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$;

3°) si $\theta = \frac{\pi}{2}(\pi)$, $z = -1$, la droite $D_{\pi/2}$ a cette fois pour équations $z = -1$ et $x = 0$, même conclusion.

Recherche du point singulier lorsque $\theta = 0 \left(\frac{\pi}{2}\right)$.

En ces points $\overrightarrow{f'} = 0$, or avec le paramétrage $\overrightarrow{0m} = \overrightarrow{f(\theta)} + t\overrightarrow{g(\theta)}$ de la nappe, on a :

$$\frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial t} = \overrightarrow{g(\theta)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \overrightarrow{m}}{\partial \theta} = \overrightarrow{f'(\theta)} + t\overrightarrow{g'(\theta)},$$

ce qui conduit, pour $\theta = 0 \left(\frac{\pi}{2}\right)$ aux vecteurs $\overrightarrow{g}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$ et $t\overrightarrow{g'}\left(\frac{k\pi}{2}\right)$, donc à une matrice de composantes :

$$B = \begin{pmatrix} -t \sin \frac{k\pi}{2} & \cos \frac{k\pi}{2} \\ t \cos \frac{k\pi}{2} & \sin \frac{k\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui est de rang 2 sauf si $t = 0$; les points singuliers sont les intersections de D_0 et de $D_{\pi/2}$ avec l'axe des z .

REMARQUE. Les points $(0, 0, z)$ avec $|z| > 1$ sont sur la nappe S , ils sont singuliers, car cette partie de la nappe est ... une courbe, seul z restant comme paramètre.

4. Les loxodromies se déduisant les unes des autres par rotation d'axe $z'z$, il en sera de même pour leurs projections sur le plan xOy par rotation de centre O . On cherche l'équation de la nappe de révolution sous la forme $z = g(r)$, avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, en supposant g dérivable, et avec les vecteurs : $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$, on a, pour m sur la nappe,

$$\vec{Om} = r \vec{u} + g(r) \vec{k}.$$

Le vecteur tangent à une méridienne, ($\theta = \text{cte}$) est donc $\vec{V} = \vec{u} + g'(r) \vec{k}$. Pour une courbe quelconque, en supposant r et θ fonctions d'un paramètre t , on aura pour vecteur tangent

$$\vec{dm} = \vec{u} dr + r \vec{v} d\theta + g'(r) \vec{k} dr,$$

donc, ce sera une loxodromie d'angle α si et seulement si :

$$\vec{V} \cdot \vec{dm} = \|\vec{V}\| \|\vec{dm}\| \cos \alpha.$$

On exprime en fait l'égalité des carrés par :

$$(1 + g'^2)^2 (dr)^2 = (1 + g'^2)[(1 + g'^2)(dr)^2 + r^2(d\theta)^2] \cos^2 \alpha,$$

ou encore, après simplification par $1 + g'^2$:

$$(1 + g'^2)(dr)^2(1 - \cos^2 \alpha) = r^2 \cos^2 \alpha (d\theta)^2,$$

ce qui s'écrit :

$$(E) \quad r^2 \cos^2 \alpha (d\theta)^2 = (1 + g'^2) \sin^2 \alpha (dr)^2.$$

Cette équation différentielle (E) est celle qui lie r et θ , paramètres d'une loxodromie. On retrouve, pour $\alpha = 0$ (modulo π) les solutions $\theta = \text{cte}$, c'est-à-dire les méridiennes, et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (π), les solutions r constant, (d'où z constant) c'est-à-dire les cercles d'axe $z'z$. On écarte ces cas particuliers, dont les projections ne sont pas des paraboles!

On peut remarquer que (E) est également l'équation différentielle des projections sur xOy des loxodromies. Comme une parabole de foyer O a pour équation polaire $r = \frac{p}{1 + \cos(\theta - \theta_0)}$, il suffit de traduire que cette fonction r de θ est solution de E.

On a encore $\frac{p}{r} = 1 + \cos(\theta - \theta_0)$ donc $\frac{p}{r^2} dr = \sin(\theta - \theta_0) d\theta$ d'où l'on tire

$$(d\theta)^2 = \frac{p^2}{r^4} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta - \theta_0)} (dr)^2, \text{ avec :}$$

$$\sin^2(\theta - \theta_0) = 1 - \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 = \frac{2pr - p^2}{r^2},$$

donc, sur une parabole de foyer O , on a :

$$(d\theta)^2 = \frac{p^2}{r^4} \cdot \frac{r^2}{2pr - p^2} (dr)^2 = \frac{p}{2r - p} \frac{(dr)^2}{r^2}.$$

Ce sera solution de (E), si on a :

$$r^2 \cos^2 \alpha \cdot \frac{p}{2r - p} \cdot \frac{(dr)^2}{r^2} = (1 + g'^2) \sin^2 \alpha (dr)^2,$$

ou encore :

$$1 + g'^2 = \frac{p \cotg^2 \alpha}{2r - p}.$$

Cette équation différentielle, (en g fonction de r) s'intègre en paramétrant.

Posons $\frac{dg}{dr} = tg\varphi$. On a alors $2r - p = p \cotg^2 \alpha \cos^2 \varphi$, et $dg = (tg \varphi) dr$

$$\text{avec} \quad 2dr = -2p \cotg^2 \alpha \cos \varphi \sin \varphi d\varphi,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad dg &= -p \cotg^2 \alpha \sin^2 \varphi d\varphi, \\ &= -\frac{p}{2} \cotg^2 \alpha (1 - \cos 2\varphi) d\varphi, \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$g(\varphi) = -\frac{p}{2} \cotg^2 \alpha \left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2} \right) + \text{constante}$$

et

$$r(\varphi) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \cotg^2 \alpha \cos^2 \varphi.$$

La nappe (S) est alors engendrée par la méridienne :

$$\begin{cases} x = \frac{p}{2} + \frac{p}{4} \cotg^2 \alpha (1 + \cos u), \\ y = 0, \\ z = z_0 - \frac{p}{4} \cotg^2 \alpha (u - \sin u), \quad (\text{on a posé } 2\varphi = u) \end{cases}$$

c'est une courbe cycloïdale.

5. Dans le cas d'une quadrique, nappe d'équation cartésienne un polynôme du second degré, traduire qu'une droite est tangente revient à écrire qu'une équation du second degré a une racine double : c'est immédiat.

On prend un repère orthonormé associé à des directions principales pour l'ellipsoïde S , (voir 10.6), qui aura donc pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; et on se donne les composantes (α, β, γ) du vecteur \vec{u} .

Un point $m(x, y, z)$ sera sur le cylindre circonscrit C cherché, si et seulement si la droite D_m passant par m , de direction $\mathbb{R}\vec{u}$ est tangente à S . Comme D_m est paramétrée en $X = x + t\alpha$, $Y = y + t\beta$ et $Z = z + t\gamma$, on doit traduire que l'équation du second degré en t :

$$t^2 \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) + 2t \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} \right) + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

a une racine double, ce qui équivaut à :

$$\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) = 0,$$

ce qui est une équation cartésienne du cylindre C .

Pour le contour apparent Γ , un point $m(x, y, z)$ de l'ellipsoïde S est sur le contour apparent, si la droite D_m , passant par m , de direction $\mathbb{R}\vec{u}$ est tangente à S en m , donc si et seulement si 0 est racine double de l'équation en t déjà trouvée, c'est-à-dire si et seulement si, en plus de l'équation de l'ellipsoïde, on a :

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 0.$$

Le contour apparent Γ est donc l'ellipse d'équations :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \\ \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2} = 0. \end{cases}$$

(intersection de l'ellipsoïde et d'un plan).

6. Pour z parcourant \mathbb{R} et v fonction de u , la droite $D_{u,v}$ a pour vecteur directeur $\vec{g}(u) = u\vec{i} + v(u)\vec{j} + \vec{k}$, (non nul) et passe par le point $p(u)$ tel que $\vec{0p} = \vec{f}(u)$ avec $\vec{f}(u) = -v(u)\vec{i} - \frac{u^3}{3}\vec{j}$.

On paramètre la nappe S par $\vec{0m} = \vec{0p} + z\vec{g}(u) = \vec{f}(u) + z\vec{g}(u)$ et la direction du plan tangent est $\text{Vect} \left(\frac{d\vec{m}}{dz}, \frac{d\vec{m}}{du} \right)$ soit $\text{Vect} (\vec{g}(u), \vec{f}'(u) + z\vec{g}'(u))$. Elle sera

indépendante de z si et seulement si le rang de la famille $(\vec{g}(u), \vec{f}'(u), \vec{g}'(u))$ est deux, et existera pour tout z de \mathbb{R} si de plus la famille $(\vec{g}(u), \vec{g}'(u))$ est de rang 1, (voir 9.47.b).

On doit donc avoir :

$$\begin{vmatrix} u & -v' & 1 \\ v(u) & -u^2 & v' \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ soit } u^2 - v'^2 = 0,$$

pour la condition $(\overrightarrow{g(u)}, \overrightarrow{f'(u)}, \overrightarrow{g'u})$ de rang ≤ 2 , et comme la matrice des composantes de (g, g') est

$$\begin{pmatrix} u & 1 \\ v(u) & v' \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ de rang 2, (mineur } \begin{vmatrix} u & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1),$$

la famille est bien de rang 2, donc il y a sur chaque génératrice un point singulier où le plan tangent n'existe pas (voir 9.47.a). L'énoncé n'est donc pas tout à fait correct : ce sont des choses qui arrivent!

7. La nappe est de classe C^∞ , réglée car le paramètre u intervient de façon affine. En posant :

$$\overrightarrow{0m} = \overrightarrow{f(v)} + u\overrightarrow{g(v)} = \begin{vmatrix} \sin v \\ \cos v + u \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sin v \\ -\cos v \\ 1 \end{vmatrix},$$

la matrice des composantes de $\overrightarrow{g(v)}, \overrightarrow{g'(v)}, \overrightarrow{f'(v)}$ a pour déterminant :

$$\begin{vmatrix} \sin v & \cos v & \cos v \\ -\cos v & \sin v & -\sin v \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cos v \sin v.$$

Elle est donc de rang 3 pour $v \neq 0 \left(\frac{\pi}{2}\right)$, et le long des génératrices rectilignes associées tous les points sont réguliers. Comme le premier mineur d'ordre 2 vaut 1, la famille est toujours de rang ≥ 2 , avec $(\overrightarrow{g(v)}, \overrightarrow{g'(v)})$ libre, donc pour $v = 0 \left(\frac{\pi}{2}\right)$ tous les points de la génératrice sont réguliers, sauf un.

On cherche alors u fonction de v de façon que $\frac{\overrightarrow{dm}}{dv} \wedge \frac{d^2m}{dv^2} \neq 0$ (arc birégulier)

et qu'avec $\overrightarrow{K} = \frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial u} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial v}$, on ait :

$$\overrightarrow{K} \cdot \frac{\overrightarrow{dm}}{dv} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{K} \cdot \frac{d^2m}{dv^2} = 0,$$

(ce qui traduit l'orthogonalité de \overrightarrow{K} , vecteur normal à la nappe, et de la direction du plan osculateur). Comme $\frac{\overrightarrow{dm}}{dv}$ est dans la direction du plan tangent, il ne reste

que la condition $\vec{K} \cdot \frac{\vec{d}^2 m}{dv^2} = 0$.

$$\text{On a } \vec{K} = \begin{vmatrix} \sin v & \cos v(1+u) \\ -\cos v & -\sin v(1-u) \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-u)\sin v \\ (1+u)\cos v \\ u + \cos^2 v - \sin^2 v \end{vmatrix}.$$

$$\text{On a } \frac{\vec{d}m}{dv} \begin{vmatrix} (1+u)\cos v + u'\sin v \\ -(1-u)\sin v - u'\cos v \\ u' \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où } \frac{\vec{d}^2 m}{dv^2} \begin{vmatrix} -(1+u)\sin v + 2u'\cos v + u''\sin v \\ -(1-u)\cos v + 2u'\sin v - u''\cos v \\ u'' \end{vmatrix}$$

et la condition $K \cdot \frac{d^2 m}{dv^2} = 0$ qui s'exprime par :

$$(u^2 - 1) + 2u'\cos v \sin v(1 - u + 1 + u) + u''((1 - u)\sin^2 v - (1 + u)\cos^2 v + u + \cos^2 v - \sin^2 v) = 0,$$

soit encore par $2u' \sin 2v = 1 - u^2$.

Cette équation à variables séparées s'intègre, pour $v \neq 0 \left(\frac{\pi}{2}\right)$ en :

$$\ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| = \frac{1}{2} \ln |tg v| + \ln |\lambda|, \text{ ce qui conduit, pour } v \text{ dans } \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\text{ à :}$$

$$\frac{1+u}{1-u} = \lambda (tg v)^{1/2}, (\lambda \text{ constante réelle}) \text{ d'où } u = \frac{\lambda (tg v)^{1/2} - 1}{\lambda (tg v)^{1/2} + 1}.$$

Il resterait à déterminer les v tels que l'arc soit birégulier au point de paramètre

v , c'est-à-dire tels que $\frac{\vec{d}m}{dv} \wedge \frac{\vec{d}^2 m}{dv^2} \neq 0$: si vous êtes courageux, faites le ! Moi je vais jardiner.

8. Un point M de coordonnées (x, y, z) sera projection de O sur un plan tangent P à la nappe S si et seulement si on trouve (x_1, y_1, z_1) coordonnées de Q_1 de S , point tel que P , passant par M , soit plan tangent en Q_1 .
L'équation de P est $xX + yY + zZ - (x^2 + y^2 + z^2) = 0$, (plan orthogonal à \vec{OM} en M).

En Q_1 , le plan tangent à (S) a pour équation :

$$y_1 z_1 (X - x_1) + z_1 x_1 (Y - y_1) + x_1 y_1 (Z - z_1) = 0,$$

(il existe car $x_1 y_1 z_1 = a \neq 0 \implies x_1 \neq 0, y_1 \neq 0, z_1 \neq 0$), équation qui s'écrit encore, en divisant par $x_1 y_1 z_1 \neq 0$: $\frac{X}{x_1} + \frac{Y}{y_1} + \frac{Z}{z_1} - 3 = 0$.

Ce plan sera P , associé à $M(x, y, z)$ avec $xyz \neq 0$ si et seulement si il existe x_1, y_1, z_1 non nuls, tels que :

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}, \text{ avec } x_1 y_1 z_1 = a.$$

Ceci implique que :

$$x_1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3x}, \quad y_1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3y} \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3z},$$

donc que x, y et z sont liés par la relation $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 27a xyz$.

Réciproquement, si $M(x, y, z)$ est sur Σ , d'équation implicite :

$(x^2 + y^2 + z^2)^3 - 27a xyz = 0$, mais pas en O , alors $x \neq 0, y \neq 0$ et $z \neq 0$, (car $x = 0 \implies y^2 + z^2 = 0 \implies y = z = 0$, ce qui est exclu), en posant

$\lambda = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}$, ($\neq 0$) et $x_1 = \frac{\lambda}{x}, y_1 = \frac{\lambda}{y}$ et $z_1 = \frac{\lambda}{z}$, on a :

$$x_1 y_1 z_1 = \frac{\lambda^3}{xyz} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^3}{27xyz} = a,$$

donc $Q_1(x_1, y_1, z_1) \in S$ et l'égalité des rapports :

$$\lambda = \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3},$$

montre que O se projette en M sur le plan tangent P en Q_1 à S .

L'ensemble cherché est la nappe Σ privée de O . Il convient de remarquer que pour traiter l'exercice, on ne part pas du point de départ, (Q_1 point de S d'où le plan tangent, d'où la projection...) mais du but cherché : un point M sera solution si ... et on essaye de trouver les conditions que doit vérifier M . Cette démarche, plus intuitive, est plus efficace.

9. a) Une droite $\Delta : x = x_0 + t\alpha, y = y_0 + t\beta, z = z_0 + t\gamma$, est contenue dans S si et seulement si la relation :

$$(x_0 + t\alpha)^2(z_0 + a + t\gamma) + (y_0 + t\beta)^2(z_0 - a + t\gamma) = 0,$$

est un polynôme en t identiquement nul. On l'ordonne en :

$$\begin{aligned} t^3 \gamma(\alpha^2 + \beta^2) + t^2(\alpha^2(z_0 + a) + \beta^2(z_0 - a) + 2\gamma(\alpha x_0 + \beta y_0)) \\ + t(2\alpha x_0(z_0 + a) + 2\beta y_0(z_0 - a) + \gamma(x_0^2 + y_0^2)) \\ + x_0^2(z_0 + a) + y_0^2(z_0 - a) = 0. \end{aligned}$$

On doit donc avoir $\gamma(\alpha^2 + \beta^2) = 0$.

PREMIER CAS : $\gamma \neq 0$, on doit avoir $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, il reste comme condition $\gamma(x_0^2 + y_0^2) = 0$ d'où $x_0 = y_0 = 0$, et alors le terme constant est nul. Comme z_0 est quelconque, on a l'axe Oz .

DEUXIÈME CAS : $\gamma = 0$.

On doit avoir une droite dans un plan $z = z_0 = \text{constante}$, or sur la nappe on a alors $x^2(z_0 + a) + y^2(z_0 - a) = 0$, ce qui donne deux droites si $(z_0 + a)(z_0 - a) < 0$, c'est-à-dire si $|z_0| < a$.

Pour $z_0 = a$, on a la droite $x = 0$, $z = a$, (et pour $z_0 = -a$ la droite $y = 0$, $z = -a$). Par contre, si $|z_0| > a$, l'intersection de S et du plan $z = z_0$ est réduite à $(0, 0, z_0)$.

On a donc des droites Δ , parallèles au plan xOy , et rencontrant l'axe Oz . En fait S est un conoïde, (homogène en x et y).

Si on pose, pour $|z| < a$, $z = a \cos u$, on aura, sur S , x et y tels que $x^2(1 + \cos u) - y^2(1 - \cos u) = 0$, ou encore $x^2 \cos^2 \frac{u}{2} - y^2 \sin^2 \frac{u}{2} = 0$, ce qui conduit à deux droites intersections du plan $z = a \cos u$ et des plans $x \cos \frac{u}{2} - y \sin \frac{u}{2} = 0$ et $x \cos \frac{u}{2} + y \sin \frac{u}{2} = 0$.

On peut les paramétrer en :

$$D_u \begin{cases} x = \lambda \sin \frac{u}{2} \\ y = -\lambda \cos \frac{u}{2} \\ z = a \cos u \end{cases} \quad \text{et} \quad D'_u \begin{cases} x = \lambda \sin \frac{u}{2} \\ y = \lambda \cos \frac{u}{2} \\ z = a \cos u \end{cases}.$$

Ces droites sont symétriques par rapport à xOz et on remarque que $D'_u = D_{2\pi - u}$, donc on se contente de la famille des génératrices D_u , pour $0 \leq u \leq 2\pi$.

b) Soit $A(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace, le plan passant par A , orthogonal à D_u a pour équation $(x - x_0) \sin \frac{u}{2} - (y - y_0) \cos \frac{u}{2} = 0$, donc le paramètre λ du point projection orthogonale de A sur D_u est tel que :

$$\left(\lambda \sin \frac{u}{2} - x_0 \right) \sin \frac{u}{2} - \left(-\lambda \cos \frac{u}{2} - y_0 \right) \cos \frac{u}{2} = 0,$$

d'où $\lambda = x_0 \sin \frac{u}{2} - y_0 \cos \frac{u}{2}$, donc la courbe Γ_A se paramètre en :

$$\begin{cases} x = \left(x_0 \sin \frac{u}{2} - y_0 \cos \frac{u}{2} \right) \sin \frac{u}{2}, \\ y = - \left(x_0 \sin \frac{u}{2} - y_0 \cos \frac{u}{2} \right) \cos \frac{u}{2}, \\ z = a \cos u, \end{cases}$$

soit encore en :

$$\begin{cases} x = x_0 \left(\frac{1 - \cos u}{2} \right) - \frac{y_0}{2} \sin u = \frac{x_0}{2} - \frac{x_0}{2} \cos u - \frac{y_0}{2} \sin u, \\ y = -\frac{x_0}{2} \sin u + y_0 \left(\frac{1 + \cos u}{2} \right) = \frac{y_0}{2} + \frac{y_0}{2} \cos u - \frac{x_0}{2} \sin u, \\ z = a \cos u. \end{cases}$$

Si on considère le point $A' \left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, 0 \right)$, en notant M_A le projeté orthogonal de A , on a :

$$\overrightarrow{A'M_A} = \cos u \begin{vmatrix} -\frac{x_0}{2} \\ \frac{y_0}{2} \\ a \end{vmatrix} + \sin u \begin{vmatrix} -\frac{y_0}{2} \\ -\frac{x_0}{2} \\ 0 \end{vmatrix}.$$

En notant $\vec{I} = -\frac{x_0}{2}\vec{i} + \frac{y_0}{2}\vec{j} + a\vec{k}$ et $\vec{J} = -\frac{y_0}{2}\vec{i} - \frac{x_0}{2}\vec{j}$, vecteurs indépendants si $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, on obtient $\overrightarrow{A'M_A} = \cos u \vec{I} + \sin u \vec{J}$ ce qui prouve que Γ_A est une ellipse de centre A' dans le plan affine passant par A' , de direction $\text{Vect}(\vec{I}, \vec{J})$.

Si $x_0 = y_0 = 0$, Γ_A est réduit au segment $\{(0, 0, z), |z| \leq a\}$, de centre $(0, 0, 0)$.

c) Les coordonnées de A étant $\left(\frac{x_0}{2}, \frac{y_0}{2}, 0 \right)$, l'ensemble des centres de symétries des Γ_A est le plan $z = 0$.

10. La nappe \mathcal{S} se paramètre, pour $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ par :

$$M(r, \theta) \begin{vmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ a \cos 2\theta \end{vmatrix}, \quad \text{d'où } \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} \begin{vmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \begin{vmatrix} -r \sin \theta \\ r \cos \theta \\ -2a \sin 2\theta \end{vmatrix}$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \begin{vmatrix} -2a \sin \theta \sin 2\theta \\ 2a \cos \theta \sin 2\theta \\ r \end{vmatrix}.$$

Une équation du plan tangent en $M(r_0, \theta_0)$, sera :

$$-2a \sin \theta_0 \sin 2\theta_0 (X - r_0 \cos \theta_0) + 2a \cos \theta_0 \sin 2\theta_0 (Y - r_0 \sin \theta_0) + r_0 (Z - a \cos 2\theta_0) = 0,$$

ou encore :

$$-2a \sin \theta_0 \sin 2\theta_0 X + 2a \cos \theta_0 \sin 2\theta_0 Y + r_0 Z - ar_0 \cos 2\theta_0 = 0.$$

Le point $M(r, \theta)$ sera dans ce plan tangent si et seulement si r et θ sont liés par la relation

$$-2ar \sin \theta_0 \sin 2\theta_0 \cos \theta + 2ar \cos \theta_0 \sin 2\theta_0 \sin \theta + ar_0 \cos 2\theta - ar_0 \cos 2\theta_0 = 0,$$

soit :

$$2ar \sin 2\theta_0 \sin(\theta - \theta_0) - 2ar_0 \sin(\theta + \theta_0) \sin(\theta - \theta_0) = 0,$$

d'où, pour $\theta \neq \theta_0$, modulo π , $r = r_0 \frac{\sin(\theta + \theta_0)}{\sin 2\theta_0}$.

Les coordonnées de ce point deviennent fonction de θ seulement, on a :

$$x = r_0 \frac{\sin(\theta + \theta_0)}{\sin 2\theta_0} \cos \theta, \quad y = \frac{r_0 \sin(\theta + \theta_0)}{\sin 2\theta_0} \sin \theta$$

et $z = a \cos 2\theta$, et en particulier,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{r_0^2}{\sin^2 2\theta_0} \sin^2(\theta + \theta_0) = \frac{r_0^2 \sin(\theta + \theta_0)}{\sin 2\theta_0} \cdot \frac{\sin(\theta + \theta_0)}{\sin 2\theta_0}, \\ &= \frac{r_0^2 \sin(\theta + \theta_0)}{\sin 2\theta_0} \frac{\sin \theta \cos \theta_0 + \cos \theta \sin \theta_0}{\sin 2\theta_0}, \\ &= \frac{r_0^2 \sin(\theta + \theta_0) \sin \theta}{\sin 2\theta_0} \cdot \frac{\cos \theta_0}{\sin 2\theta_0} + \frac{r_0^2 \sin(\theta + \theta_0) \cos \theta}{\sin 2\theta_0} \cdot \frac{\sin \theta_0}{\sin 2\theta_0}, \\ &= r_0 \frac{\cos \theta_0}{\sin 2\theta_0} y + r_0 \frac{\sin \theta_0}{\sin 2\theta_0} x. \end{aligned}$$

L'intersection cherchée est donc sur le plan tangent en M_0 à \mathcal{S} , mais aussi sur le cylindre de révolution d'équation :

$$x^2 + y^2 - r_0 \frac{\cos \theta_0}{\sin 2\theta_0} y - r_0 \frac{\sin \theta_0}{\sin 2\theta_0} x = 0.$$

C'est donc une conique à centre, le centre étant l'intersection du plan tangent en M_0 à \mathcal{S} , et de l'axe Δ du cylindre, Δ d'équation :

$$X = \frac{r_0 \sin \theta_0}{2 \sin 2\theta_0} = \frac{r_0}{4 \cos \theta_0} \quad \text{et} \quad Y = \frac{r_0 \cos \theta_0}{2 \sin 2\theta_0} = \frac{r_0}{4 \sin \theta_0},$$

d'où Z tel que :

$$\begin{aligned} -2a \sin \theta_0 \sin 2\theta_0 \cdot \frac{r_0 \sin \theta_0}{2 \sin 2\theta_0} + 2a \cos \theta_0 \sin 2\theta_0 \frac{r_0 \cos \theta_0}{2 \sin 2\theta_0} \\ + r_0 Z - ar_0 \cos 2\theta_0 = 0, \end{aligned}$$

soit :

$$ar_0(\cos^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_0 - \cos 2\theta_0) + r_0 Z = 0,$$

d'où $Z = 0$, (on croit rêver!).

Le lieu cherché est l'ensemble des points de coordonnées :

$$X = \frac{r_0}{4 \cos \theta_0}, \quad Y = \frac{r_0}{4 \sin \theta_0}, \quad \text{et} \quad Z = 0,$$

(r_0, θ_0) quelconques, ce qui conduit en fait au plan $Z = 0$ privé des axes, (mais non de l'origine), et les coniques sont des ellipses.

11. Le vecteur normal en m , associé au paramétrage est :

$$\vec{V} = \frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial x} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial m}}{\partial y} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -f'_x \\ -f'_y \\ 1 \end{vmatrix},$$

donc la normale en m se paramètre par $X = x - \lambda f'_x$, $Y = y - \lambda f'_y$, et $Z = f(x, y) + \lambda$, et le paramètre λ du point P est $\lambda = -f(x, y)$, d'où les coordonnées $x + f f'_x$, $y + f f'_y$, 0 de P et la relation :

$$x^2 + y^2 + x f f'_x + y f f'_y = 0,$$

que doit vérifier f .

En posant $g(x, y) = \frac{1}{2} f^2$, on a $x g'_x + y g'_y = x f f'_x + y f f'_y$. Si on passe en polaires, en notant $\varphi(r, \theta) = g(x, y)$, on a :

$$\varphi'_r = g'_x \frac{dx}{dr} + g'_y \frac{dy}{dr} = g'_x \cos \theta + g'_y \sin \theta,$$

donc :

$$r \varphi'_r = r \cos \theta g'_x + r \sin \theta g'_y = x g'_x + y g'_y,$$

et finalement, pour $r \neq 0$, la fonction φ doit vérifier la relation $r^2 + r \varphi'_r = 0$, soit $\varphi'_r = -r$ d'où $\varphi(r) = -\frac{r^2}{2} + \psi(\theta)$, ψ fonction arbitraire, ce qui conduit à une relation du type :

$$f^2(x, y) = -(x^2 + y^2) + \psi \left(\text{Arctg} \left(\frac{y}{x} \right) \right),$$

ou, comme ψ est quelconque, du type $f^2(x, y) = -x^2 - y^2 + h \left(\frac{y}{x} \right)$, h fonction quelconque.

12. Soit un repère orthonormé \mathcal{R} d'origine O , sommet du cône, l'axe Oz étant l'axe du cône, et tel que l'axe Δ du cylindre soit la droite d'équations $x = R$, $y = 0$. La courbe Γ a alors pour équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, & (\text{équation du cône } S) \text{ et} \\ x^2 + y^2 - 2Rx = 0 & (\text{équation du cylindre}). \end{cases}$$

En coordonnées cylindriques, un point de Γ est associé à (r, θ, z) tels que, (avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$) on ait $z^2 = r^2$ et $r^2 - 2rR \cos \theta = 0$ d'où, pour $r \neq 0$, $r = 2R \cos \theta$.

On introduit les vecteurs $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$, et le repère $\mathcal{R}' : (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$.

Un point M de Γ est donc tel que $\overrightarrow{OM} = 2R \cos \theta \vec{u} + 2\varepsilon R \cos \theta \vec{k}$, avec $\varepsilon = 1$ ou -1 . On a $\frac{d\vec{M}}{d\theta} = -2R \sin \theta \vec{u} + 2R \cos \theta \vec{v} - 2\varepsilon R \sin \theta \vec{k}$, et dans le repère \mathcal{R}' , une paramétrisation de la tangente en $M(\theta)$ est :

$$\begin{cases} X = 2R \cos \theta - 2\lambda R \sin \theta \\ Y = 2\lambda R \cos \theta \\ Z = 2\varepsilon R \cos \theta - 2\varepsilon \lambda R \sin \theta. \end{cases}$$

Comme le plan P est le plan xOy , donc d'équation $Z = 0$ dans le repère des calculs, l'intersection de P et de la tangente existera si $\theta \neq 0(\pi)$ et correspond à $\lambda = \cotg \theta$, d'où le point de coordonnées $X = 0$, $Y = 2R \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$, $Z = 0$, et finalement, si Q est ce point d'intersection, on a $\overrightarrow{OQ} = 2R \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \vec{v}$, soit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= 2R \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}), \\ &= -2R \frac{\sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right)} \left(\cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{j} \right). \end{aligned}$$

On a donc l'ensemble des points Q qui est la courbe d'équation polaire $\rho = -2R \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$ dans le plan xOy , (avec $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$), ou l'arc paramétré par $x = -2R \cos^2 \theta$, $y = 2R \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta}$. C'est une cissoïde droite. A vous de la construire.

13. On doit avoir $x^2 + y^2 \neq 0$. Comme la fonction $(x, y, z) \rightsquigarrow z - \frac{2axy}{x^2 + y^2}$ est homogène, (de poids 0) en x et y , la nappe est conoïdale, (voir 9.84), donc réglée, et on cherche des courbes sur Σ en utilisant un paramétrage de nappe réglée. En posant $x = \lambda \cos \theta$, $y = \lambda \sin \theta$, on a $z = a \sin 2\theta$, le paramétrage est affine en λ : on a un paramétrage de nappe réglée.

On cherche les asymptotiques birégulières (remarque 9.106), de cette nappe. Pour cela, sur chaque génératrice D_θ , on cherche λ fonction de θ tel que l'arc Γ obtenu convienne.

Le plan tangent à la nappe en P est orthogonal à $\vec{K} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \lambda} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta}$, donc ce plan tangent sera le plan osculateur à Γ , (en un point bi-régulier de Γ) si et seulement si :

$$\vec{K} \cdot \frac{d\vec{P}}{d\theta} = K \cdot \frac{d^2\vec{P}}{d\theta^2} = 0.$$

Or

$$\frac{d\vec{P}}{d\theta} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \theta} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial \lambda} \dot{\lambda},$$

(avec $\dot{\lambda} = \frac{d\lambda}{d\theta}$), est bien orthogonal à \vec{K} , puis on a :

$$\frac{\vec{\partial}^2 P}{\partial \theta^2} = \frac{\vec{\partial}^2 P}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\vec{\partial}^2 P}{\partial \theta \partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\vec{\partial}^2 P}{\partial \lambda^2} (\dot{\lambda})^2 + \frac{\vec{\partial} P}{\partial \lambda} \ddot{\lambda}.$$

Or $\frac{\vec{\partial} P}{\partial \lambda} \cdot \vec{K} = 0$: le terme en $\ddot{\lambda}$ disparaît; et comme λ intervient de manière

affine, $\frac{\vec{\partial}^2 P}{\partial \lambda^2} = 0$: il reste une relation liant θ , λ et $\dot{\lambda}$, que l'on peut espérer intégrer. (Et voilà pourquoi on cherche facilement les asymptotiques d'une nappe réglée).

CALCULS

$$\vec{K} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\lambda \sin \theta \\ \sin \theta & \lambda \cos \theta \\ 0 & 2a \cos 2\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a \sin \theta \cos 2\theta \\ -2a \cos \theta \cos 2\theta \\ \lambda \end{vmatrix}.$$

On a

$$\frac{\vec{\partial}^2 P}{\partial \theta^2} \begin{vmatrix} -\lambda \cos \theta \\ -\lambda \sin \theta \\ -4a \sin 2\theta \end{vmatrix} ; \quad \frac{\vec{\partial}^2 P}{\partial \theta \partial \lambda} \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix},$$

d'où l'équation différentielle traduisant $\vec{K} \cdot \frac{d^2 P}{d\theta^2} = 0$:

$$2a \sin \theta \cos 2\theta (-\lambda \cos \theta - 2\dot{\lambda} \sin \theta) - 2a \cos \theta \cos 2\theta (-\lambda \sin \theta + 2\dot{\lambda} \cos \theta) + \lambda (-4a \sin 2\theta) = 0,$$

soit :

$$-4a\dot{\lambda} \cos 2\theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 4a\lambda \sin 2\theta = 0,$$

ou encore :

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = -\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta},$$

ce qui conduit à :

$$\ln |\lambda| = \text{constante} + \frac{1}{2} \ln |\cos 2\theta|,$$

d'où $\lambda(\theta) = k\sqrt{|\cos 2\theta|}$.

Les courbes Γ obtenues par le paramétrage :

$$\begin{cases} x = k\sqrt{|\cos 2\theta|} \cos \theta, \\ y = k\sqrt{|\cos 2\theta|} \sin \theta, \\ z = a \sin 2\theta, \end{cases}$$

sont donc des asymptotiques. Par ailleurs, les génératrices rectilignes en sont d'autres, (le plan osculateur étant non défini, peut être en particulier le plan tangent à la nappe).

Comme cela, en chaque point de la nappe il passe deux asymptotiques, (k étant quelconque).

14. La fonction $f : (x, y, z) \rightsquigarrow x + y - \frac{z}{x^2}(x + y)^2 - z$ est définie pour $x \neq 0$, homogène de degré 1, donc la nappe est conique, (Théorème 9.71) et en partant d'un paramétrage de nappe réglée, la recherche des asymptotiques en sera facilitée, comme nous l'avons vu à l'exercice précédent.

Pour $z = 0$, on a $f(x, y, 0) = x + y$: l'intersection de la nappe et du plan est la deuxième bissectrice, ($y = -x, z = 0$). Toute droite du cône de sommet O , non dans le plan d'équation $z = 0$ coupe alors le plan d'équation $z = 1$, en un point de Γ , courbe d'équations $z = 1$ et $f(x, y, 1) = (x + y)x^2 - (x + y)^2 - x^2 = 0$, (avec $x \neq 0$), cubique ayant le point $(0, 0)$ pour point double, et qui se paramètre. Dans le plan des (x, y) , on coupe Γ par la droite d'équation $y = tx$, donc on a :

$$x^3(1+t) - x^2(1+t)^2 - x^2 = 0,$$

soit, comme $x \neq 0$ sur la nappe, $x = \frac{(1+t)^2 + 1}{1+t}$, pour $t \neq -1$.

La nappe est donc la réunion des droites $D_t, t \neq -1$, passant par O et $m(t)$ de coordonnées $\frac{t^2 + 2t + 2}{1+t}, \frac{t(t^2 + 2t + 2)}{1+t}, 1$, et de la deuxième bissectrice dans le plan $z = 0$.

En fait, pour $t \neq -1$, le vecteur de composantes $t^2 + 2t + 2, t(t^2 + 2t + 2)$ et $t + 1$ est aussi directeur de D_t , et pour $t = -1$, ce vecteur de composantes $1, -1, 0$ devient directeur de la droite du plan $z = 0$, si bien que la nappe se paramètre en :

$$\begin{cases} x = \lambda(t^2 + 2t + 2), \\ y = \lambda(t^3 + 2t^2 + 2t), \\ z = \lambda(t + 1), \end{cases} \text{ pour } (\lambda, t) \in \mathbb{R}^2.$$

En s'inspirant de l'exercice 13, en $P(\lambda, t)$ de la nappe, on a déjà une asymptotique, la droite D_t . On cherche l'autre, en cherchant λ fonction de t tel que :

$$\frac{d^2 P}{dt^2} \cdot \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial \lambda} \right) = 0,$$

avec
$$\frac{d^2 P}{dt^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} (\dot{\lambda})^2 + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial t \partial \lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial \lambda} \ddot{\lambda}.$$

Là encore $\frac{\partial \vec{P}}{\partial \lambda}$ est orthogonal à $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial \lambda}$, et $\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} = 0$ puisque λ intervient de façon affine.

CALCULS

$$\vec{K} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \wedge \frac{\partial \vec{P}}{\partial \lambda} = \begin{vmatrix} 2\lambda(t+1) \\ \lambda(3t^2+4t+2) \\ \lambda \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} t^2+2t+2 \\ t^3+2t^2+2t \\ t+1 \end{vmatrix},$$

est parallèle au vecteur
$$\vec{L} = \begin{vmatrix} 2t^3+5t^2+4t+2 \\ -t^2-2t \\ -t^4-4t^3-8t^2-8t-4 \end{vmatrix}.$$

(Je commence à me demander s'il n'y a pas d'erreur...)

On a :

$$\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \begin{vmatrix} 2\lambda \\ \lambda(6t+4) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t \partial \lambda} \begin{vmatrix} 2(t+1) \\ 3t^2+4t+2 \\ 1 \end{vmatrix},$$

d'où l'équation différentielle venant de $\vec{L} \cdot \left(\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t \partial \lambda} \right) = 0$:

$$(2t^3+5t^2+4t+2)(2\lambda+4\dot{\lambda}(t+1)) - (t^2+2t)((6t+4)\lambda+2\dot{\lambda}(3t^2+4t+2)) - (t^4+4t^3+8t^2+8t+4)2\dot{\lambda} = 0,$$

équation techniquement résoluble car elle sera du type $\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} =$ fraction rationnelle en t , donc cela s'intègre. Il serait peut être plus raisonnable d'en rester là!

On ordonne en :

$$2\lambda(-t^3-3t^2+2)+2\dot{\lambda}(0) = 0,$$

(on croit rêver), cette équation ne fournit donc pas d'autres asymptotiques que les génératrices rectilignes. C'est peut-être faux, mais c'est tellement joli!

Les quadriques

C'est d'un point de vue analytique que je vais considérer les quadriques. Dans tout ce chapitre \mathcal{A} est un espace affine euclidien de dimension trois, et on va retrouver l'étude des formes quadratiques réelles.

1. Quadriques à centres

DÉFINITION 10.1. — *Dans \mathcal{A} affine euclidien de dimension trois, on appelle quadrique à centre O , point de \mathcal{A} , l'ensemble des points m de \mathcal{A} qui, dans un repère d'origine O , ont leurs coordonnées x, y, z vérifiant une équation du type $Q(x, y, z) = h$, avec h réel et Q forme quadratique.*

Il convient de remarquer que les repères considérés ont leur origine O fixée, mais ne sont pas forcément orthonormés.

Si $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathcal{S} = (O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ sont deux repères d'origine O , et si P est la matrice changement de base avec X, Y, Z coordonnées de m dans le nouveau repère, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

et si Ω est la matrice symétrique de la forme quadratique Q dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'étude des formes quadratiques (voir Tome 1, 11.38) montre que la relation $Q(x, y, z) = h$, devient :

$$R(X, Y, Z) = Q(aX + bY + cZ, a'X + b'Y + c'Z, a''X + b''Y + c''Z) = h,$$

avec R forme quadratique de matrice ${}^t P \Omega P$ dans la base $\mathcal{C} = \{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$, donc le type d'équation vérifiée par les coordonnées de m sur la quadrique à centre, ne dépend pas du repère considéré, d'origine O .

REMARQUE 10.2. — Le terme quadrique à centre vient de ce que l'origine est alors centre de symétrie de la quadrique.

Un polynôme en (x, y, z) étant une fonction continue sur \mathbb{R}^3 , et $\{h\}$ étant un fermé de \mathbb{R} , une quadrique à centre est un fermé de \mathbb{R}^3 , éventuellement vide, et pour en connaître la forme, nous allons discuter suivant le rang de la forme quadratique Q , mais en commençant par prendre une base orthonormée de \mathbb{R}^3 euclidien qui soit en même temps conjuguée pour Q , en utilisant pour cela le fait que toute matrice symétrique d'ordre trois, Ω , est diagonalisable dans le groupe orthogonal $O_3(\mathbb{R})$, (voir Tome 3, Théorème 14.68, ou corollaire 14.69).

Nous supposons désormais le repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé, associé à des directions conjuguées pour Q .

10.3. ALLURE DES QUADRIQUES À CENTRE.

On considère donc l'ensemble Σ des points m de coordonnées (x, y, z) dans le repère orthonormé \mathcal{R} , vérifiant l'équation :

$$10.4. \quad \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = h.$$

1° CAS. Q est de rang 1, donc 10.4 se réduit à une équation du type $\alpha x^2 = h$, avec $\alpha \neq 0$.

Si $\alpha h < 0$, Σ est vide, sinon Σ est formée de deux plans parallèles d'équations $x = \pm \left(\frac{h}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, (confondus si $h = 0$).

2° CAS. Q est de rang 2, d'où une équation implicite de Σ du type $\alpha x^2 + \beta y^2 = h$, avec $\alpha\beta \neq 0$.

Là encore, si α et β sont de même signe, signe contraire de celui de h , Σ est vide; sinon la nappe est cylindrique de génératrices parallèles à l'axe Oz , (absence de la coordonnée z , voir Théorème 9.67).

Si $h = 0$, et $\alpha\beta > 0$, Σ est l'axe «des z »;

si $h = 0$, et $\alpha\beta < 0$, Σ est formée des deux plans sécants le long de Oz , d'équations

$$y = \pm \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} x;$$

si $h \neq 0$, (et Σ non vide), Σ est un cylindre elliptique si $\alpha\beta > 0$, (figure 10.4.1), hyperbolique si $\alpha\beta < 0$, (figure 10.4.2).

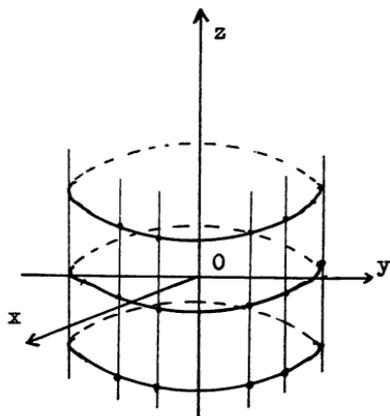


Fig. 10.4.1

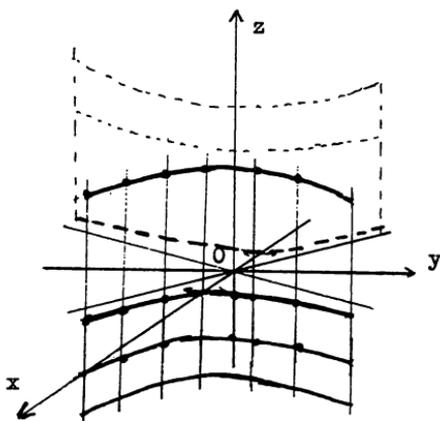


Fig. 10.4.2

3° CAS Q est de rang 3, alors dans l'équation 10.4, on a α, β et γ non nuls.

Si α, β, γ sont de même signe, signe différent de celui de h , l'ensemble est vide, cas que nous écartons.

Puis, si $h = 0$, l'équation de Σ s'écrit :

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0,$$

avec $\alpha\beta\gamma \neq 0$, donc, si α, β , et γ sont de même signe on a Σ réduit à $\{0\}$, sinon (Σ) est un cône de sommet O , l'équation étant homogène en x, y, z , (voir Théorème 9.71).

On écarte encore ce cas, donc on peut diviser l'équation 10.4 par h , et en posant :

$$\frac{\alpha}{h} = \frac{\varepsilon_1}{a^2}, \quad \frac{\beta}{h} = \frac{\varepsilon_2}{b^2} \quad \text{et} \quad \frac{\gamma}{h} = \frac{\varepsilon_3}{c^2},$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 sont égaux à 1 ou -1 , on peut mettre 10.4 sous la forme :

$$10.5. \quad \varepsilon_1 \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_2 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_3 \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et poser.

DÉFINITION 10.6. — On appelle quadrique à centre non dégénérée, de A espace affine euclidien tout ensemble non vide de points m de coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormé de A , vérifiant une équation du type 10.5.

La condition non vide suppose donc que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$ est exclu.

Un tel repère est dit *principal*, et une équation du type 10.5 est dite *équation réduite*.

THÉORÈME 10.7. — *Tout point d'une quadrique à centre non dégénérée est régulier.*

En notant :

$$f(x, y, z) = \varepsilon_1 \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_2 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_3 \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

la quadrique à centre Σ d'équation implicite $f(x, y, z) = 0$ ne contient pas l'origine.

Comme la forme différentielle $df(x, y, z)$ a pour composantes :

$$2\varepsilon_1 \frac{x}{a^2}, \quad 2\varepsilon_2 \frac{y}{b^2} \quad \text{et} \quad 2\varepsilon_3 \frac{z}{c^2},$$

elle ne s'annule pas sur Σ , donc chaque $m_0(x_0, y_0, z_0)$ de Σ est régulier, et le plan tangent en m_0 a pour équation :

$$10.8. \quad 2\varepsilon_1 \frac{x_0}{a^2}(X - x_0) + 2\varepsilon_2 \frac{y_0}{b^2}(Y - y_0) + 2\varepsilon_3 \frac{z_0}{c^2}(Z - z_0) = 0,$$

(voir Théorème 9.41).

La présence du facteur 2 est ridicule, mais je l'ai laissé pour remarquer que le vecteur de composantes $\left(2\varepsilon_1 \frac{x_0}{a^2}, 2\varepsilon_2 \frac{y_0}{b^2}, 2\varepsilon_3 \frac{z_0}{c^2}\right)$, qui n'est autre que le *gradient* de f en m_0 , est *vecteur normal* à la nappe en m_0 . ■

10.9. ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE D'UNE QUADRIQUE À CENTRE NON DÉGÉNÉRÉE.

Soit la quadrique à centre non dégénérée, d'équation dans un repère orthonormé :

$$10.10. \quad \varepsilon_1 \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_2 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_3 \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'origine du repère est *centre de symétrie*, les axes de coordonnées sont *axes de symétrie orthogonale*, et les plans de coordonnées *plans de symétrie orthogonale*.

Y a-t-il d'autres éléments de symétrie?

D'abord, l'origine est seul centre de symétrie, car si m_0 de coordonnées (x_0, y_0, z_0) est centre de symétrie, en posant :

$$x = x_0 + X, \quad y = y_0 + Y \quad \text{et} \quad z = z_0 + Z$$

dans l'équation 10.10, la présence des termes de degré 1 en X , Y et Z qui sont respectivement :

$$2\varepsilon_1 \frac{x_0 X}{a^2}, \quad 2\varepsilon_2 \frac{y_0 Y}{b^2} \quad \text{et} \quad 2\varepsilon_3 \frac{z_0 Z}{c^2}$$

impose $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ pour avoir un centre de symétrie.

Mais il peut y avoir d'autres axes ou plans de symétrie pour la quadrique. En effet, partant d'un repère quelconque au départ, et d'une forme quadratique Q de matrice symétrique Ω dans la base de ce repère, on a obtenu la forme 10.5 de l'équation de la quadrique Σ en prenant une base orthonormée de vecteurs propres de Ω .

Rappelons que les sous espaces propres de Ω associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux entre eux, (voir Tome 3, Théorème 14.68).

Supposons alors la droite Δ axe de symétrie orthogonale de la quadrique. Comme celle-ci n'admet que O pour centre de symétrie et que le symétrique de O par rapport à Δ est centre de symétrie, O est invariant donc $O \in \Delta$.

Soit \vec{I} , vecteur unitaire directeur de Δ , et $\{\vec{J}, \vec{K}\}$ une base orthonormée de l'orthogonal de $\mathbb{R}\vec{I}$.

Si X, Y, Z sont les coordonnées de m dans cette base $\{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$, le fait que Δ soit axe de symétrie donne une invariance de l'équation de la quadrique lorsque l'on remplace (X, Y, Z) par $(X, -Y, -Z)$: il n'y a donc pas de termes en XY ni en XZ .

Si P est la matrice de passage de la base orthonormée initiale, (qui peut être celle où l'équation est du type 10.5, ou une autre) dans laquelle la matrice de Q est Ω , on a donc :

$${}^t P \Omega P = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \left(\begin{array}{cc} & \\ & \end{array} \right) \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

(pas de terme en XY ni en XZ), et comme P est orthogonale, c'est encore $P^{-1} \Omega P$, donc \vec{I} est un vecteur propre de Ω .

10.11. *Mais alors, si Ω n'a que des valeurs propres simples, les sous-espaces sont trois droites vectorielles orthogonales entre elles, ce sont les seuls axes de symétrie orthogonale, et deux à deux ils engendrent les trois plans de symétrie orthogonales; si Ω admet une valeur propre double et une simple, on a un plan P de vecteurs propres, qui est l'orthogonal d'une droite Δ sous-espace propre : tout repère orthonormé ayant pour axes Δ et deux droites perpendiculaires de P , (et passant par O) est formé d'axes de symétrie orthogonale, tout plan contenant Δ est plan de symétrie,*

dans ce cas la quadrique est de révolution autour de Δ ; si Ω a une seule valeur propre, triple, toute droite contenant l'origine est axe de symétrie orthogonale, tout plan contenant l'origine est plan de symétrie orthogonale pour la quadrique qui est alors ... une sphère.

L'étude, au paragraphe deux, des nappes du second degré, montrera que, pour les quadriques quelconques, il peut y avoir plusieurs centres de symétrie.

Venons en maintenant à l'étude de la *forme des quadriques à centre non dégénérées*, la discussion portant sur la signature de la forme quadrique Q , qui est de rang trois.

On se place dans un repère principal pour la quadrique qui admet donc l'équation :

$$10.12. \quad \varepsilon_1 \frac{x^2}{a^2} + \varepsilon_2 \frac{y^2}{b^2} + \varepsilon_3 \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

les ε_i étant égaux à 1 ou -1 , le cas $-1, -1, -1$ étant exclu.

10.13. ELLIPSOÏDE

C'est la quadrique correspondant au cas $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$, donc d'équation :

$$10.14. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dans un repère orthonormé principal, (c'est-à-dire associé à des axes qui sont axes de symétrie orthogonale, et d'origine le centre de symétrie).

Comme la relation 10.14 implique $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ et $|z| \leq c$, un ellipsoïde est un fermé borné de \mathcal{A} espace homéomorphe à \mathbb{R}^3 , donc c'est un compact, (Tome 2, 2.22).

De plus on peut paramétrer l'ellipsoïde on posant :

$$x = a \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = b \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = c \cos \theta,$$

avec $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, connexe, et comme ce paramétrage est continu, l'ellipsoïde, image continue d'un connexe est connexe, (au passage, un peu de révision de topologie ne fait pas de mal, voir Tome 2, Théorème 3.8).

Les sections de l'ellipsoïde par des plans $z = h$ sont caractérisées, dans ce plan, par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Ce sont des ellipses, (voir 8.15) si $|h| \leq c$, et l'intersection est vide pour $|h| > c$, (vous avez remarqué que j'ai supposé a , b et c positifs).

On a de même des ellipses comme intersection par les plans y constant, pour $|y| \leq b$, ou x constant avec $|x| \leq a$.

Pour l'allure, un ellipsoïde est une sorte de « patate », (cela ne vous dit peut être rien si vous n'en épluchez pas de temps en temps), comme le montre la figure 10.13.

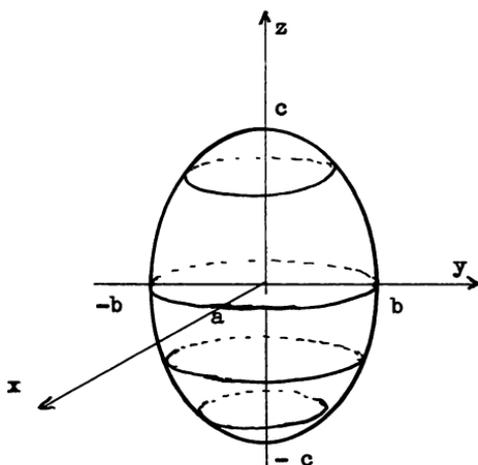


Fig. 10.13

10.15. HYPERBOLOÏDE A DEUX NAPPES

C'est la quadrique correspondant, dans l'équation 10.12, a deux ε_i égaux à -1 , le troisième valant -1 .

Par exemple, on prend $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$ et $\varepsilon_3 = 1$, d'où l'équation du type :

$$10.16. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

d'un tel hyperboloïde.

Les sections, E_h , par un plan P_h d'équation $z = h$, sont vides si $|h| < c$, ($c > 0$), et ce sont des ellipses (voir 8.15), si $|h| \geq c$: il y a deux parties de l'hyperboloïde, de part et d'autre de la bande de \mathcal{A} définie par $-c < z < c$.

Un paramétrage de l'hyperboloïde va mieux le faire comprendre.

Si on pose $z = \varepsilon c \operatorname{ch} u$, avec $\varepsilon = 1$ ou -1 ,

puis $x = a \operatorname{sh} u \cos v$, $y = b \operatorname{sh} u \sin v$, les deux applications f_ε définies, pour $(u, v) \in [0, +\infty[\times [0, 2\pi]$ connexe, par $f_\varepsilon(u, v) = (x, y, z)$, paramètrent toute la nappe qui admet donc deux composantes connexes, images respectives de $[0, +\infty[\times [0, 2\pi]$ par f_1 et f_{-1} .

La section par un plan $x = k$, constant, est l'hyperbole d'équation :

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{a^2},$$

(voir 8.30) dans ce plan, hyperbole d'axe focal parallèle à Oz .

Les plans $y = \text{constante}$ coupent également la nappe suivant une hyperbole, et la figure 10.15 représente cet hyperboloïde à deux nappes.

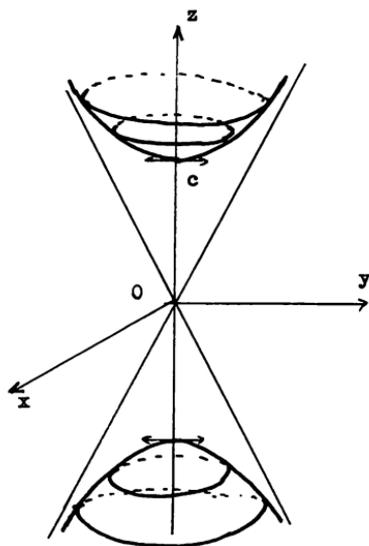


Fig. 10.15

Pour $a = b$, l'équation 10.16 est celle d'une nappe de révolution d'axe Oz , ce qui permet d'obtenir dans ce cas l'hyperboloïde à deux nappes en faisant tourner une hyperbole autour de son axe focal.

10.17. HYPERBOLOÏDE À UNE NAPPE.

C'est la quadrique obtenue en prenant dans 10.12 deux ε_i égaux à 1, le troisième à -1 , par exemple $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ et $\varepsilon_3 = -1$, ce qui conduit à l'équation :

$$10.18. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

En paramétrant, pour $(u, v) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, par :

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v,$$

$$y = b \operatorname{ch} u \sin v,$$

$$z = c \operatorname{sh} u,$$

on obtient une nappe connexe, (image continue d'un connexe).

Les sections E_h par les plans $z = h$ existent pour tout h , ce sont les ellipses d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Les sections par des plans $y = \text{constante}$ ou $x = \text{constante}$ sont des hyperboles, (voir 8.43.1) puisque l'on a une courbe du second degré avec une forme quadratique de signature (1,1), ou plus simplement, voir l'équation 8.30.

Pour $a = b$, la nappe est de révolution d'axe Oz , obtenue en faisant tourner l'hyperbole, du plan $y = 0$, d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

autour de l'axe non focal, ce qui permet de se représenter un hyperboloïde à une nappe, (figure 10.17).

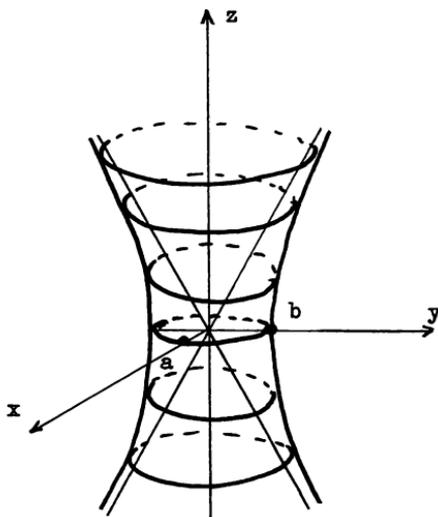


Fig. 10.17

J'ai déjà vu cela quelque part! Ne serait-ce point une cheminée de centrale nucléaire? (Il est évident que vous avez tous à côté de chez vous une cheminée de centrale!) Ou alors, une corbeille à papier peut-être.

En fait, un *hyperboloïde à une nappe* est une *nappe doublement réglée*, et de ce fait, c'est du béton! Pensez donc aux tiges métalliques qui se raccordent entre elles et permettent de couler un voile de béton armé.

Soit donc l'hyperboloïde à une nappe H , d'équation :

$$10.19. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

dans un repère orthonormé \mathcal{R} , (voir 10.18). Cette équation s'écrit encore :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

ce qui se factorise en la forme équivalente :

$$10.20. \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right).$$

Soit m_0 un point de H , de coordonnées x_0 , y_0 et z_0 .

Si $y_0 \neq b$, en posant $\lambda = \frac{\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}}{1 - \frac{y_0}{b}}$, et en remplaçant $\frac{x}{a} - \frac{z}{c}$ par

$\lambda \left(1 - \frac{y_0}{b}\right)$ dans la relation 10.20, vérifiée par x_0, y_0, z_0 , puis en simplifiant par $1 - \frac{y_0}{b}$, non nul, les coordonnées de m_0 vérifient également l'égalité :

$$\lambda \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = 1 + \frac{y_0}{b}.$$

Considérons alors les deux plans d'équations :

$$10.21. \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right) \\ \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}. \end{cases} \quad \text{et}$$

Ces plans, sont perpendiculaires aux vecteurs,

$$\vec{U}_\lambda \begin{vmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{\lambda}{b} \\ -\frac{1}{c} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_\lambda \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{a} \\ -\frac{1}{b} \\ \frac{\lambda}{c} \end{vmatrix},$$

de produit vectoriel :

$$10.22. \quad \vec{W}_\lambda \begin{vmatrix} \frac{\lambda^2 - 1}{bc} \\ -\frac{2\lambda}{ac} \\ -\frac{(1 + \lambda^2)}{ab} \end{vmatrix},$$

non nul vu sa troisième composante. Ces deux plans sont donc non parallèles, et leur intersection est une droite D_λ , de vecteur directeur \vec{W}_λ passant par m_0 (tel que $y_0 \neq b$). De plus cette droite est sur la nappe H , car si les coordonnées d'un point m vérifient les deux équations 10.21, par produit on a :

$$\lambda \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) = \lambda \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

donc pour $\lambda \neq 0$, l'équation 10.19 est vérifiée, alors que si $\lambda = 0$ on a :

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{y}{b} = 0 :$$

sous la forme 10.20, l'équation de l'hyperboloïde est vérifiée.

Si $y_0 = b$, toujours pour m_0 sur H , on a :

$$\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} \right) \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right) = 0,$$

donc soit : $\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = 0$,

soit : $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = 0$.

Supposons d'abord $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \neq 0$, en fait on peut cette fois poser :

$$\lambda = \frac{1 + \frac{y_0}{b}}{\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}},$$

(pourquoi pas hein?), remplacer $1 + \frac{y_0}{b}$ par $\lambda \left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} \right)$ dans 10.20, simplifier par $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}$ pour constater que les coordonnées de m_0 vérifient aussi l'égalité :

$$\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y_0}{b} \right),$$

et constater que pour cette valeur de λ , les deux équations 10.21 sont vérifiées.

Si, avec $y_0 = b$, on a $\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c} = 0$, alors en fait m_0 est sur les deux plans d'équations :

$$10.23. \quad \begin{cases} 1 - \frac{y}{b} = 0 & \text{et} \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \end{cases}$$

obtenus, (admirez l'astuce), à partir de 10.21 en divisant par $\lambda \neq 0$ et en faisant tendre λ vers l'infini, (+ ou -, dans un souci de participation je vous laisse le choix).

Ces deux plans sont perpendiculaires aux vecteurs :

$$\vec{U}_\infty \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ b \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_\infty \begin{vmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ \frac{1}{c} \end{vmatrix},$$

qui ont pour produit vectoriel le vecteur :

$$10.24. \quad \vec{W}_\infty \begin{vmatrix} 1 \\ bc \\ 0 \\ -\frac{1}{ab} \end{vmatrix},$$

vecteur non nul, donc leur intersection est une droite D_∞ , de vecteur directeur \vec{W}_∞ , qui passe par m_0 , et cette droite D_∞ , d'équations 10.23 est sur la nappe H , car la nullité des expressions 10.23 montre que l'équation 10.20 est vérifiée.

En résumé, en notant \mathcal{F} la famille des droites D_λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, et de la droite D_∞ , par tout point m_0 de H passe une droite de la famille \mathcal{F} , et ces droites sont sur l'hyperboloïde à une nappe H .

En fait il y a une autre famille. C'est ce que nous allons voir en justifiant le théorème suivant.

THÉORÈME 10.25. — *Soit un hyperboloïde à une nappe H , il existe sur H deux familles de droites \mathcal{F} et \mathcal{G} telles que :*

1) *par chaque point m et H il passe une (et une seule) droite de chaque famille;*

2) *deux droites de la même famille ne sont jamais coplanaires;*

3) *deux droites prises chacune dans une famille différente sont toujours coplanaires.*

Partant de l'équation 10.19 factorisée sous la forme 10.20, nous avons obtenu la famille \mathcal{F} des droites D_λ , pour $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, définies par les équations 10.21 et 10.23, et par chaque m de H il passe une droite D_λ de \mathcal{F} .

Puisqu'il s'agit d'une histoire de famille, si vous avez des frères et des soeurs, vous savez combien la jalousie est prompte à s'éveiller! Vous comprendrez alors que le facteur $1 + \frac{y}{b}$ qui figure en 10.20 peut être jaloux de son compère $1 - \frac{y}{b}$ à qui on a associé un λ . Pour rétablir l'équilibre, allons chercher d'abord $1 + \frac{y}{b}$ auquel on associera un facteur μ , (il faut bien changer un peu), ce qui va nous fournir la famille \mathcal{G} des droites Δ_μ , $\mu \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, d'équations :

$$10.26. \quad \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu \left(1 + \frac{y}{b}\right) & \text{et} \\ \mu \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}, \end{cases}$$

de vecteur directeur :

$$10.27. \quad \vec{V}_\mu \left| \begin{array}{l} \frac{1 - \mu^2}{bc} \\ \frac{-2\mu}{ac} \\ \frac{1 + \mu^2}{ab} \end{array} \right.$$

pour $\mu \in \mathbb{R}$, et

$$10.28. \quad \left| \begin{array}{l} 1 + \frac{y}{b} = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \end{array} \right.$$

de vecteur directeur :

$$10.29. \quad \vec{V}_\infty \left| \begin{array}{l} \frac{1}{bc} \\ 0 \\ \frac{1}{ab} \end{array} \right.$$

pour Δ_∞ qui, vous pouvez le remarquer, est parallèle à D_∞ .

Ces résultats se déduisent de ceux relatifs aux droites D_λ en remplaçant b par $-b$, mais si vous n'avez pas confiance, vous pouvez les vérifier!

On a encore une famille \mathcal{G} de droites sur H telle que, par chaque point m de H il passe une droite de \mathcal{G} .

Si on vérifie le 2° du Théorème 10.25, on aura unicité de la génératrice rectiligne de chaque famille qui passe par m , ce qui achèvera la justification du 1°.

D'autre part, il suffit de justifier le 2° pour la famille \mathcal{F} , (le « passage » b donne $-b$ donnant le résultat pour \mathcal{G}).

Pour λ et λ' dans \mathbb{R} , D_λ et $D_{\lambda'}$ ne sont pas parallèles, ($\lambda \neq \lambda'$), car la colinéarité de leurs vecteurs directeurs \vec{W}_λ et $\vec{W}_{\lambda'}$, se traduisant par l'égalité des rapports (voir 10.22) :

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda'^2 - 1} = \frac{-\lambda}{-\lambda'} = \frac{-(1 + \lambda^2)}{-(1 + \lambda'^2)} = \dots = \frac{-2}{-2} = 1,$$

(dans une suite de rapports égaux on obtient ...) d'où $\lambda = \lambda'$ ce qui est exclu. Ces rapports sont écrits avec la convention usuelle : si un dénominateur est nul, le numérateur correspondant l'est aussi.

De même, le parallélisme de D_∞ et D_λ implique $\lambda = 0$, (deuxième composante de \vec{W}_∞ nulle, voir 10.24), mais alors \vec{W}_0 de composantes $\left(-\frac{1}{bc}, 0, -\frac{1}{ab}\right)$ n'est pas dépendant de :

$$\vec{W}_\infty \left(\frac{1}{bc}, 0, -\frac{1}{ab} \right).$$

Enfin deux droites de \mathcal{F} ne sont jamais sécantes.

Supposons que m de coordonnées x, y et z vérifie les équations de D_λ et $D_{\lambda'}$, avec $\lambda \neq \lambda'$ dans \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda' \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \lambda' \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \end{cases}$$

(voir 10.21).

Par soustraction de la 3^{ième} à la première, et de la 4^{ième} à la 2^{ième}, et après simplification par $\lambda - \lambda' \neq 0$, on obtient $y = b$ et $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0$ d'où $1 + \frac{y}{b} = 0$ donc $y = -b$. C'est absurde.

De même D_λ et D_∞ sont non sécantes, car l'existence d'une solution au système :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \\ 1 - \frac{y}{b} = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \end{cases}$$

conduirait à $1 + \frac{y}{b} = 0$ et $1 - \frac{y}{b} = 0$, d'où $2 = 0$, curieux!

Ceci achève la justification des deux premiers points du Théorème 10.25.

Passons au troisième, en cherchant d'abord si les droites D_λ et Δ_μ , pour λ et μ dans \mathbb{R} , sont sécantes.

On cherche donc si le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \textcircled{2} \quad \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \\ \textcircled{3} \quad \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \mu \left(1 + \frac{y}{b}\right), \\ \textcircled{4} \quad \mu \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}, \end{array} \right.$$

a une solution ou non.

Ce système est équivalent au système $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3'} = \textcircled{3} - \textcircled{1}, \textcircled{4}$, avec :

$$\textcircled{3'} : (\lambda + \mu) \frac{y}{b} = \lambda - \mu.$$

Supposons d'abord $\lambda + \mu \neq 0$, (ce qui exclu le cas $\lambda = \mu = 0$).

L'équation $\textcircled{3'}$ donne un seul y , comme λ ou μ est non nul, $\textcircled{2}$ ou $\textcircled{4}$ donne $\frac{x}{a} + \frac{z}{c}$ connu, d'où avec $\frac{x}{a} - \frac{z}{c}$ connu par l'équation $\textcircled{1}$, le calcul de x et z et l'existence d'une solution soit au système $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3'}$, si $\lambda \neq 0$, soit au système $\textcircled{1}, \textcircled{3'}, \textcircled{4}$, si $\mu \neq 0$.

Supposons par exemple $\lambda \neq 0$. On a une solution au système $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3'}$.

Comme $\mu \textcircled{2} - \lambda \textcircled{4}$ s'écrit :

$$0 = \mu \left(1 + \frac{y}{b}\right) - \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right),$$

ou encore :

$$(\lambda + \mu) \frac{y}{b} = \lambda - \mu,$$

c'est-à-dire $\textcircled{3'}$, cette équation $\mu \textcircled{2} - \lambda \textcircled{4}$ est vérifiée, or $\textcircled{2}$ l'est donc $\lambda \textcircled{4}$ l'est avec $\lambda \neq 0$, d'où $\textcircled{4}$ vérifiée : on a une solution du système des quatre équations de départ.

Il en serait de même, pour $\mu \neq 0$, en partant de $\textcircled{1}, \textcircled{3'}$ et $\textcircled{4}$.

Si $\lambda + \mu = 0$, soit $\lambda = -\mu$, les vecteurs :

$$\vec{W}_\lambda \begin{vmatrix} \frac{\lambda^2 - 1}{bc} \\ \frac{-2\lambda}{ac} \\ -\frac{1 + \lambda^2}{ab} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{V}_\mu = \vec{V}_{-\lambda} \begin{vmatrix} \frac{1 - \lambda^2}{bc} \\ \frac{2\lambda}{ac} \\ \frac{1 + \lambda^2}{ab} \end{vmatrix},$$

(voir 10.22 et 10.27) sont opposés, donc D_λ et Δ_μ sont dans ce cas parallèles.

Il reste à traiter le cas de D_λ et Δ_∞ , (b donne $-b$ permettant de passer à D_∞ et Δ_μ), pour λ et μ réels, car Δ_∞ et D_∞ sont parallèles, on l'a déjà signalé en 10.29.

Soit donc le système :

$$\begin{cases} \textcircled{1} & \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = \lambda \left(1 - \frac{y}{b}\right), \\ \textcircled{2} & \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \\ \textcircled{3} & 1 + \frac{y}{b} = 0, \\ \textcircled{4} & \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \end{cases}$$

il se réduit à $\textcircled{1}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$, d'où $y = -b$, (vient de $\textcircled{3}$) puis :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 2\lambda, \\ \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 0, \end{cases}$$

d'où existence (et unité en prime) de x et y : le système à une solution.

Nous avons ainsi achevé la justification du Théorème 10.25, vous pouvez vous réveiller pour passer au paragraphe suivant. ■

2. Nappes du second degré.

DÉFINITION 10.30. — On appelle *nappe du second degré*, ou *quadrique*, dans un espace affine euclidien \mathcal{A} de dimension trois, tout ensemble S de points

m de coordonnées (x, y, z) dans un repère, vérifiant une équation du type $f(x, y, z) = 0$, f étant une fonction polynôme de degré deux en x, y et z .

Cette définition a un sens, bien qu'elle semble privilégier un repère. En effet, lors d'un changement de repère, x, y et z sont des formes affines indépendantes en x', y', z' , (nouvelles coordonnées), et la nouvelle équation :

$$g(x', y', z') = f(x(x', y', z'), y(x', y', z'), z(x', y', z')) = 0$$

caractérisant S reste polynomiale, du degré 2 au plus et de degré 2 exactement car, si elle était de degré 1, le changement de variable inverse qui doit redonner f , ne donnerait qu'un polynôme de degré 1 au plus.

Cette définition rappelle la définition 8.43 des courbes du second degré et notre étude va s'inspirer de celle du chapitre 8 : si on note $q(x, y, z)$ la partie homogène de degré deux dans le polynôme f , la discussion de la forme de la quadrique S va se faire en fonction du rang et de la signature de q .

Par ailleurs, comme nous avons déjà rencontré des quadriques à centre, on va commencer par voir si S admet ou non un centre de symétrie.

THÉORÈME 10.31. — Soit une quadrique S d'équation $f(x, y, z) = 0$ dans un repère \mathcal{R} . Un point $m_0(x_0, y_0, z_0)$ est centre de symétrie si et seulement si (x_0, y_0, z_0) est solution du système :

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0, \\ f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \end{cases}$$

En effet, en prenant m_0 pour nouvelle origine, les formules de changement de coordonnées $x = x_0 + X, y = y_0 + Y$ et $z = z_0 + Z$, nous fournissent l'équation de S dans ce repère d'origine m_0 :

$$g(X, Y, Z) = f(x_0 + X, y_0 + Y, z_0 + Z) = 0.$$

Par ailleurs, calculer f (truc + mèche, ... + ..., ...) doit déclencher en vous le réflexe pavlovien «Taylor ...», d'autant plus que, f étant polynomiale de degré deux, la formule de Taylor Lagrange à l'ordre deux est exacte, (voir Tome 3, Théorème 16.51). On a donc :

$$\begin{aligned} g(X, Y, Z) &= f(x_0, y_0, z_0) + X f'_x(m_0) + Y f'_y(m_0) + Z f'_z(m_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left(X^2 f''_{x^2}(m_0) + Y^2 f''_{y^2}(m_0) + Z^2 f''_{z^2}(m_0) + 2XY f''_{xy}(m_0) \right. \\ &\quad \left. + 2XZ f''_{xz}(m_0) + 2YZ f''_{yz}(m_0) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, m_0 est centre de symétrie si et seulement si :

$$g(X, Y, Z) = 0 \iff g(-X, -Y, -Z) = 0,$$

ce qui se traduit par la non existence des termes de degré 1 dans g , donc par x_0, y_0, z_0 solutions de :

$$f'_x(m_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$f'_y(m_0) = f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \text{ et}$$

$$f'_z(m_0) = f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0. \quad \blacksquare$$

10.32. NOTATIONS : pour discuter de l'existence de centres de symétrie, et de la nature de la quadrique S , nous allons prendre son équation implicite dans un repère \mathcal{R} sous une forme mettant en évidence la forme quadratique q correspondant aux termes du second degré. On pose donc :

$$f(x, y, z) = q(x, y, z) + \alpha(x, y, z),$$

avec q polynôme quadratique, (donc homogène de degré deux) et α polynôme de degré un en x, y, z .

Comme α'_x, α'_y et α'_z sont des constantes, et les dérivées partielles q'_x, q'_y, q'_z des formes linéaires en x, y et z , les coordonnées (x_0, y_0, z_0) d'un centre de symétrie éventuel sont solutions d'un système de trois équations, linéaire, de rang le rang de ces trois formes.

Or, l'identité d'Euler, (voir Tome 1, 11.47) permet de voir que les coefficients des trois formes q'_x, q'_y et q'_z sont exactement ceux des trois lignes de la matrice symétrique Ω de la forme quadratique q dans la base de \mathbb{R}^3 associée au repère considéré. *Donc le rang du système linéaire est celui de la forme quadratique q .*

10.33. DISCUSSION

10.34. *La forme quadratique q est de rang trois.*

Le système du Théorème 10.31 est de rang trois, donc il existe un et un seul centre de symétrie, m_0 .

On prend l'origine en m_0 , et une base \mathcal{B}_0 orthonormée et conjuguée pour q , (la matrice symétrique Ω est diagonalisable dans le groupe orthogonal, donc si le repère initial \mathcal{R} est orthonormé la matrice de passage P est orthogonale et $P^{-1}\Omega P = {}^tP\Omega P$: en diagonalisant Ω on réduit la forme quadratique q).

L'équation de S est alors du type :

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = h,$$

avec $abc \neq 0$, et l'étude du paragraphe 1 montre que S peut être vide, ou un ellipsoïde, ou un hyperboloïde, si $h \neq 0$, et réduit à un point, m_0 , ou un cône de sommet m_0 si $h = 0$.

10.35. La forme q est de rang deux, et il y a des centres de symétrie.

Le système 10.31 est de rang deux, on suppose ici l'existence de solutions, donc les points solutions forment un espace affine de dimension un, (Théorème de Rouché, Tome 1, 9.51).

Dans un repère \mathcal{R}_0 d'origine m_0 centre de symétrie, de directions conjuguées pour q , l'équation est du type :

$$aX^2 + bY^2 = h, \quad \text{avec } ab \neq 0,$$

et S peut être vide, ou un cylindre elliptique ou hyperbolique suivant le signe de ab , lorsque $h \neq 0$. Par contre, si $h = 0$, S est réduit à l'axe (m_0Z) si $ab > 0$, et formé des deux plans d'équation :

$$Y = \pm \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{2}} X, \quad \text{si } ab < 0.$$

10.36. La forme q est de rang deux, et il n'y a pas de centre de symétrie.

On prend un repère orthonormé associé à une base conjuguée de q . On aura donc une équation du type :

$$aX^2 + bY^2 + cX + dY + eZ + h = 0,$$

avec $ab \neq 0$, puisque q est de rang deux.

Si vous avez de bons souvenirs (scolaires) de votre année de seconde vous pensez « mise sous forme canonique du trinôme ... » (un peu de sérieux je vous prie, pour les souvenirs d'une autre nature attendez la récréation), donc on groupe :

$$aX^2 + cX = a \left(X + \frac{c}{2a}\right)^2 - \frac{c^2}{4a},$$

et

$$bY^2 + dY = b \left(Y + \frac{d}{2b}\right)^2 - \frac{d^2}{4b},$$

d'où, avec $X' = X + \frac{c}{2a}$ et $Y' = Y + \frac{d}{2b}$, un autre repère orthonormé où l'équation de S sera sous la forme

$$aX'^2 + bY'^2 + eZ + h' = 0,$$

avec une valeur de h' que vous pouvez calculer, mais c'est sans intérêt.

On peut affirmer que e est non nul, sinon, l'origine du repère serait centre de symétrie, et on écrit :

$$eZ + h' = e \left(Z + \frac{h'}{e} \right),$$

donc, avec $Z' = Z + \frac{h'}{e}$ et en divisant par e , on obtient une équation de S sous une forme agréable :

$$Z' = \alpha X'^2 + \beta Y'^2, \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{a}{e} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{b}{e}.$$

DÉFINITION 10.37. — On appelle *paraboloïde*, toute quadrique S d'équation $z = \alpha x^2 + \beta y^2$, avec $\alpha \beta \neq 0$, dans un repère orthonormé. Si $\alpha \beta > 0$, le paraboloïde est dit *elliptique*, et si $\alpha \beta < 0$, il est *hyperbolique*.

Cela correspond donc à une forme quadratique q de rang deux, et à la non existence de centre de symétrie.

Étudions brièvement ces deux nouvelles quadriques.

D'abord, le *paraboloïde elliptique*, d'équation s'écrivant :

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

dans un repère orthonormé, (quitte à changer z en $-z$).

Les sections par des plans $z = h$ sont des ellipses si $h \geq 0$, vides si $h < 0$.

Les sections par des plans contenant Oz , par exemple $y = \lambda x$, d'où :

$$z = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\lambda^2}{b^2} \right) x^2, \quad \text{sont des paraboles.}$$

Dans le cas particulier de $a = b$, la nappe est de révolution, engendrée par la rotation de la parabole d'équation $z = \frac{x^2}{a^2}$ dans le plan $y = 0$, autour de son axe.

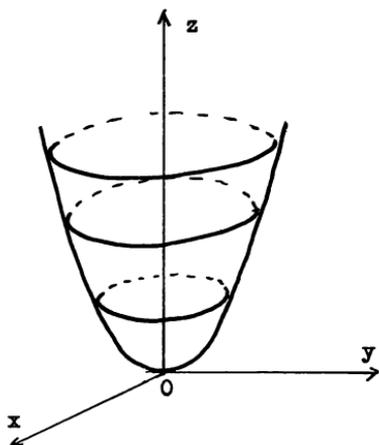


Fig. 10.37.1

Le paramétrage
$$\begin{cases} x = a u \cos v, \\ y = b u \sin v, \\ z = u^2, \end{cases}$$

de S , pour (u, v) dans $[0, +\infty[\times [0, 2\pi]$, montre que S est connexe, (image continue d'un connexe) et la figure 10.37.1 donne une idée de cette nappe.

Pour le *paraboloïde hyperbolique*, on a, dans un repère orthonormé convenable, une équation cartésienne du type :

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Le paramétrage $(x, y) \rightsquigarrow \left(x, y, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$ montre que la nappe est connexe, (au passage, on pouvait aussi prendre le paramétrage :

$$(x, y) \rightsquigarrow \left(x, y, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right),$$

pour obtenir le même résultat pour le paraboloïde elliptique).

Les sections par les plans $z = h$ sont des hyperboles, les sections par les plans $x = h$ sont des paraboles P_h «égales», car ayant pour équations :

$$x = h \quad \text{et} \quad z = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{h^2}{a^2} :$$

la parabole $P_{h'}$ est déduite de P_h par la translation de vecteur :

$$\overrightarrow{V_{h,h'}} = (h' - h) \vec{i} + \frac{h'^2 - h^2}{a^2} \vec{k}.$$

Les sommets de P_h sont sur la parabole Q_0 d'équations :

$$y = 0, z = \frac{x^2}{a^2}.$$

Les sections par les plans $y = l$, sont des paraboles Q_l d'équations :

$$y = l \text{ et } z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2},$$

elles sont égales, Q_l se déduisant de Q_0 par la translation de vecteur :

$$\vec{W}_l = l \vec{j} - \frac{l^2}{b^2} \vec{k}.$$

Les sommets des paraboles Q_l sont sur la parabole P_0 .

Si vous êtes bricoleur, faites deux paraboles P_0 et Q_0 en fil de fer, disposées dans deux plans perpendiculaires, sécantes en leur sommet, laissez pendre P_0 vers le bas et maintenez Q_0 vers le haut, et en chaque point de Q_0 , accrochez une parabole P_k égale à P_0 , dans un plan parallèle à celui de P_0 .

Soudez, et vous aurez un parabolôïde hyperbolique. (voir figure 10.37.2).

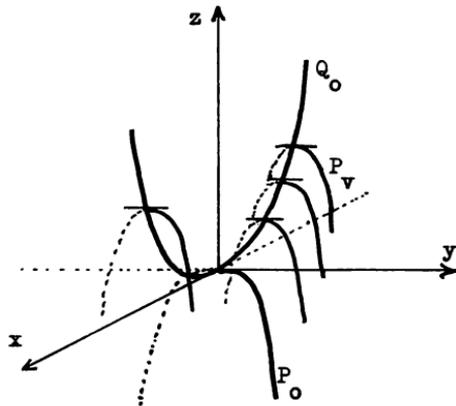


Fig. 10.37.2

REMARQUE Vous pouvez aussi faire «pendre vers le haut» des paraboles Q_l déduites de Q_0 par translation, ayant leurs sommets qui décrivent P_0 , mais c'est plus difficile.

Ce parabolôïde hyperbolique est, comme l'hyperboloïde à une nappe, une nappe doublement réglée.

THÉORÈME 10.38. — *Un parabolôide hyperbolique admet un double mode de représentation comme nappe réglée.*

En effet, partant d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans lequel l'équation du parabolôide hyperbolique S , est :

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

si on pose :

$$u = \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \quad \text{et} \quad v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b},$$

ce qui équivaut à :

$$x = \frac{a}{2}(u + v) \quad \text{et} \quad y = \frac{b}{2}(v - u),$$

on obtient un paramétrage de S en :

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}(u + v), \\ y = \frac{b}{2}(-u + v), \\ z = uv, \end{cases}$$

pour (u, v) dans \mathbb{R}^2 , paramétrage dans lequel u et v interviennent de manière affine chacun ce qui (voir remarque 9.44) permet de dire que S est doublement réglée. ■

Explicitons un peu plus en posant :

$$10.39. \quad \begin{cases} \overrightarrow{Om} = \overrightarrow{f(u)} + v\overrightarrow{g(u)} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{f(u)} = \frac{a}{2}u\vec{i} - \frac{b}{2}u\vec{j} \quad \text{et} \\ \overrightarrow{g(u)} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{b}{2}\vec{j} + u\vec{k}. \end{cases}$$

Pour u fixé, v variant dans \mathbb{R} , 10.39 est le paramétrage d'une droite D_u , de vecteur directeur $\overrightarrow{g(u)}$ parallèle au plan P d'équation $bX - aY = 0$, passant, (pour $v = 0$) par le point de coordonnées $\left(\frac{au}{2}, -\frac{bu}{2}, 0\right)$ qui appartient à la droite Δ d'équations $z = 0$ et $bx + ay = 0$, et D_u passe aussi par le point obtenu pour $v = 1$, de coordonnées :

$$x = \frac{a}{2}(u + 1), \quad y = \frac{b}{2}(-u + 1), \quad z = u,$$

point de la droite D d'équations :

$$x = \frac{a}{2}(z + 1), \quad y = \frac{b}{2}(-z + 1).$$

Quand u varie, les droites D_u engendrent le parabolôïde qui devient donc une famille de droites parallèles à un plan fixe P , rencontrant une droite Δ , non dans P , et soumises à une autre condition, (ici rencontrer D) : la nappe est conoïdale, (voir Théorème 9.85).

On peut remarquer que D et Δ sont non parallèles à P , car un vecteur normal à P est $\vec{V} = b\vec{i} - a\vec{j}$, et un vecteur directeur de Δ est $\vec{U} = -a\vec{i} + b\vec{j}$: on a bien $\vec{U} \cdot \vec{V} \neq 0$; puis un vecteur directeur de D , (paramétrée par $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}z$, $y = \frac{b}{2} - \frac{b}{2}z$, $z = z$), est \vec{W} :

$$\vec{W} = \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j} + \vec{k},$$

là encore $\vec{V} \cdot \vec{W} = ab \neq 0$.

De plus \vec{U} et \vec{W} sont non parallèles, et D et Δ non coplanaires.

Pourquoi ces précisions? Et bien, parce qu'on a une réciproque!

THÉORÈME 10.40. — *Tout conoïde S ayant pour directrice une droite D non coplanaire avec son axe Δ et non parallèle à son plan de base, est un parabolôïde hyperbolique.*

Prenons un repère \mathcal{R} tel que le plan de base de S soit le plan $z = 0$, l'axe Δ étant l'axe des z .

La droite D , directrice, peut se paramétrer par

$$\begin{cases} x = \alpha + tu, \\ y = \beta + tv, \\ z = tw, \end{cases}$$

car, non parallèle à xOy , elle coupe ce plan en un point de coordonnées $(\alpha, \beta, 0)$, de plus $w \neq 0$.

La non coplanarité de D et Δ se traduit par u et v non tous deux nuls, (sinon Δ et D sont parallèles), et la non nullité simultanée de $\alpha + tu$ et $\beta + tv$.

Mais alors, une droite parallèle à xOy , rencontrant Oz et D , en des points de cote tw , a pour vecteur directeur :

$$(\alpha + tu)\vec{i} + (\beta + tv)\vec{j},$$

et se paramètre, avec λ dans \mathbb{R} , par :

$$10.41. \quad \begin{cases} x = \lambda(\alpha + tu), \\ y = \lambda(\beta + tv), \\ z = tw, \end{cases}$$

d'où $t = \frac{z}{w}$ et $(\beta + z\frac{v}{w})x - (\alpha + \frac{z}{w}u)y = 0$:

on se promène sur une quadrique d'équation dans ce repère :

$$\frac{v}{w}zx - \frac{u}{w}zy + \beta x - \alpha y = 0,$$

ou encore

$$z(vx - uy) + w(\beta x - \alpha y) = 0,$$

soit encore

$$\frac{1}{4} \left((vx - uy + z)^2 - (vx - uy - z)^2 \right) + w(\beta x - \alpha y) = 0 :$$

il ne reste plus grand chose à faire pour retrouver un parabolôïde hyperbolique! ■

REMARQUE 10.42. — Comme le dit le dicton, on ne prête qu'aux riches : un parabolôïde hyperbolique est de deux façons une nappe conoïdale, de directrice une droite ...

En effet, en reprenant en 10.39, on pouvait poser, pour m sur le parabolôïde hyperbolique,

$$10.43. \quad \overrightarrow{Om} = \overrightarrow{f_1(v)} + u\overrightarrow{g_1(v)}, \text{ avec}$$

$$\overrightarrow{f_1(v)} = \frac{av}{2}\vec{i} + \frac{bv}{2}\vec{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{g_1(v)} = \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{b}{2}\vec{j} + v\vec{k}.$$

Pour v fixé, on obtient alors une droite d_v , de vecteur directeur $\overrightarrow{g_1(v)}$, parallèle au plan Q d'équation $bX + aY = 0$, (ce n'est plus P), passant

par le point de coordonnées $(\frac{a}{2}v, \frac{b}{2}v, 0)$ qui décrit la droite δ d'équations $z = 0$ et $bx - ay = 0$, et d_v passe par le point de coordonnées :

$$\left(\frac{a}{2}(v+1), \frac{b}{2}(v-1), v \right),$$

point décrivant la droite d d'équations :

$$x = \frac{a}{2}(z+1) \quad \text{et} \quad y = \frac{b}{2}(z-1).$$

On a encore d_v parallèle à un plan Q , rencontrant une droite δ , et soumise à une autre condition, ici rencontrer une droite d . ■

Revenons maintenant à la discussion générale commencée en 10.33, avec les notations de 10.32, et considérons le cas de la forme q de rang un, avec possibilité d'existence de centres de symétrie, (ou non).

10.44. La forme q est de rang un, et il y a des centres de symétrie, qui forment alors un plan. (Théorème de Rouché! Tome 1, 9.51).

Dans un repère \mathcal{R}_0 d'origine m_0 , centre de symétrie, d'axes des directions conjuguées pour q , et orthogonales, l'équation est du type $aX^2 = h$, avec $a \neq 0$, donc la quadrique S est vide si $ah < 0$, ou formée de deux plans parallèles, d'équations :

$$X = \pm \left(\frac{h}{a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{si} \quad ah \geq 0.$$

10.45. La forme q est de rang un, mais il n'y a pas de centre de symétrie.

On prend un repère orthonormé \mathcal{R} , conjugué pour q , d'où une équation de S du type :

$$ax^2 + bx + cy + dz + e = 0,$$

avec $a \neq 0$, ce qui permet de «gommer» le terme en x , avec :

$$ax^2 + bx = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a}.$$

On pose $X = x + \frac{b}{2a}$, $e' = e - \frac{b^2}{4a}$, l'équation devient :

$$aX^2 + cy + dz + e' = 0.$$

Les coefficients c et d ne sont pas nuls tous les deux (sinon on aurait des centres de symétrie), donc, avec θ tel que :

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \cos \theta \quad \text{et} \quad \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}} = \sin \theta,$$

la rotation d'angle θ autour de l'axe des X transforme la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$, base orthonormée, et avec :

$$Y = \cos \theta y + \sin \theta z = \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} y + \frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}} z,$$

l'équation de la quadrique devient :

$$aX^2 + \sqrt{c^2 + d^2} Y + e' = 0.$$

Une autre translation, avec $Y' = Y + \frac{e'}{\sqrt{c^2 + d^2}}$, conduit à l'équation :

$$aX^2 + \sqrt{c^2 + d^2} Y' = 0,$$

et dans un repère orthonormé convenable, notre quadrique a une équation du type :

$$x^2 = 2py : \quad \text{c'est un cylindre parabolique.}$$

3. Quadriques et coniques

La discussion que nous venons de faire rappelle celle du chapitre VIII, paragraphe 4. Mais il y a d'autres rapports entre quadriques et coniques. En effet, si on considère l'intersection d'une quadrique et d'un plan, ce sera une courbe du second degré et un problème se pose alors : sur une quadrique donnée, peut-on trouver des coniques d'une nature donnée, par exemple des hyperboles sur un ellipsoïde ?

THÉORÈME 10.46. — *L'intersection d'une quadrique, nappe du second degré, et d'un plan, est une conique au sens courbe du second degré, (voir 8.43).*

En effet, soit S l'ensemble des points $m(x, y, z)$, de l'espace affine \mathcal{A} de dimension trois, donnés par leurs coordonnées dans un repère \mathcal{R} , tels que $f(x, y, z) = 0$, avec f polynôme de degré 2 en x, y, z .

Soit un plan P d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$.

On peut trouver deux formes affines :

$$\alpha'x + \beta'y + \gamma'z, \quad \alpha''x + \beta''y + \gamma''z,$$

telles que la matrice :

$$\Omega = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix}$$

soit inversible, donc les formules :

$$\begin{cases} X = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta, \\ Y = \alpha'x + \beta'y + \gamma'z, \\ Z = \alpha''x + \beta''y + \gamma''z, \end{cases}$$

sont celles d'un changement de base.

On obtient x, y, z fonctions de X, Y, Z par la relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Omega^{-1} \begin{pmatrix} X - \delta \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uX + vY + wZ + h \\ u'x + v'Y + w'Z + h' \\ u''X + v''Y + w''Z + h'' \end{pmatrix}$$

et m , de coordonnées (X, Y, Z) dans le nouveau repère sera sur la quadrique si et seulement si :

$$g(X, Y, Z) =$$

$$f(uX + vY + wZ + h, u'X + v'Y + w'Z + h', u''X + v''Y + w''Z + h'') = 0.$$

Cette fonction g reste un polynôme de degré deux en X, Y, Z , (vraiment 2 car ..., si le degré baissait, en remplaçant X, Y, Z en fonction de x, y, z , on devait retrouver f , de degré 2, alors que l'expression resterait de degré 1 au plus).

Si de plus m est dans le plan P , d'équation $X = 0$ dans le nouveau repère, c'est que dans ce plan P , m est sur la courbe du second degré d'équation :

$$g(0, Y, Z) = f(vY + wZ + h, v'Y + w'Z + h', v''Y + w''Z + h'') = 0. \blacksquare$$

Peut-on mettre n'importe quelle conique sur n'importe quelle quadrique? On sent bien que non! Allez donc coincer une hyperbole, qui flirte avec l'infini, sur un ellipsoïde, partie bornée de l'espace!

Que peut-on dire de sérieux sur cette question. L'examen des signatures des formes quadratiques va nous renseigner.

10.47. NOTATIONS

On se donne une conique Γ dans un plan P , et on prend un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace affine \mathcal{A} , tel que l'origine soit dans P et que $F = \text{Vect}(\vec{i}, \vec{j})$ soit la direction de P .

Soit $f(x, y, z) = q(x, y, z) + \alpha(x, y, z) = 0$, une équation d'une quadrique S dans ce repère, α étant une forme affine en x, y, z , et q une forme quadratique de matrice :

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de la direction de \mathcal{A} .

Si Γ est l'intersection de P et de S , (donc si on peut placer la conique Γ sur la quadrique S), une équation de Γ dans le plan d'équation $z = 0$ est :

$$\mathbf{10.48.} \quad g(x, y) = f(x, y, 0) = q(x, y, 0) + \alpha(x, y, 0) = 0.$$

L'application $(x, y) \rightsquigarrow \alpha(x, y, 0)$ est une forme affine en x et y , alors que $(x, y) \rightsquigarrow q(x, y, 0)$ est une forme quadratique ϕ sur \mathbb{R}^2 , avec :

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= (x, y, 0) \left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \hline a'' & b'' & c'' \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est clair que, si un vecteur $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est tel que $\phi(\vec{u}) > 0$, (resp. < 0), pour $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k}$ vecteur de \mathbb{R}^3 , on aura aussi $q(\vec{u}) = \phi(\vec{u}) > 0$, (resp. < 0).

L'étude de la forme des courbes du second degré, (voir 8.43), et des nappes du second degré va nous permettre, compte tenu de la signature de q , de savoir si une conique d'une nature donnée est sur S .

10.49 SUPPOSONS QUE Γ SOIT UNE ELLIPSE,

alors la forme ϕ est de rang deux, définie positive, (ou négative, mais alors $-\phi$ est définie positive). Supposons ϕ positive pour continuer.

On a $F \cap F^0 = \{0\}$, si (\vec{V}) de F est conjugué de F , on aura $\phi(\vec{V}) = q(\vec{V}) = \varphi(\vec{V}, \vec{V})$, avec φ forme polaire de q , mais ϕ étant définie, \vec{V} est nul). Le sous-espace vectoriel F étant non isotrope pour φ , on a $E = F \oplus F^0$, (voir Tome 1, Théorème 11.25), donc il existe une base conjuguée pour q , ayant pour deux premiers vecteurs des vecteurs de F : la signature de q sera telle qu'il y ait deux signes + au moins.

Les signatures possibles de q sont donc $(3, 0)$, $(2, 1)$ et $(2, 0)$, (ainsi évidemment que $(0, 3)$, $(1, 2)$ et $(0, 2)$ mais dans ce cas on remplace q par $-q$ pour retrouver les cas précédents).

Or une signature $(3, 0)$ correspond à un *ellipsoïde*, $(2, 1)$ correspond à un *cône*, ou à un *hyperboloïde à une ou deux nappes*, et la signature $(2, 0)$ correspond à un *cylindre elliptique* ou à un *paraboloïde elliptique*, et nous avons vu que sur toutes ces quadriques il y a des ellipses.

10.50. SUPPOSONS QUE Γ SOIT UNE HYPERBOLE.

La forme ϕ admet pour signature $(1, 1)$, donc il existe deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} de F , direction du plan P , donc aussi de E direction de \mathcal{A} , tels que $\phi(\vec{u}) = q(\vec{u}) > 0$, et $\phi(\vec{v}) = q(\vec{v}) < 0$: la signature de q présente des signes + et -, donc elle est du type :

$(1, 2)$, (ou $(2, 1)$) ce qui correspond au *cône* et aux *hyperboloïdes* ;
 $(1, 1)$ mais alors S est un *cylindre hyperbolique* ou un *paraboloïde hyperbolique*, et là encore ces nappes comportent effectivement des hyperboles.

10.51. SUPPOSONS ENFIN QUE Γ SOIT UNE PARABOLE.

Comme la forme quadratique ϕ est de rang un, ϕ admet un vecteur isotrope, donc q aussi : la forme q ne peut pas être définie. A priori, sur toutes les quadriques autres que l'ellipsoïde il pourrait y avoir des paraboles, mais ce n'est pas tout à fait exact.

Pour les *hyperboloïdes*, il y en a.

En effet, pour l'hyperboloïde à deux nappes, considéré dans un repère \mathcal{R} où son équation s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} - 1, \quad \text{voir 10.16,}$$

on peut l'écrire encore :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = -1 - \frac{y^2}{b^2},$$

et le changement de coordonnées :

$$X = \frac{x}{a} - \frac{z}{c}, \quad Y = y, \quad Z = \frac{x}{a} + \frac{z}{c},$$

conduit à l'équation :

$$XZ = -1 - \frac{y^2}{b^2},$$

qui montre que les sections $X = \text{constante}$, (ou $Z = \text{constante}$) sont des paraboles.

Le même travail s'effectue à partir de l'équation 10.18 de l'hyperboloïde à une nappe, qui s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2}.$$

Sur un *cône*, il est facile de vérifier qu'une section par un plan parallèle à une génératrice, et ne passant pas par le sommet est une parabole.

Les *paraboloïdes* contiennent des paraboles, (voir figures 10.37.1 et 10.37.2), ainsi que les *cylindres paraboliques*.

Il nous reste à examiner le cas d'un cylindre elliptique ou hyperbolique S .

On se donne donc S par une ellipse, (ou une hyperbole) Γ , et une direction de droites non parallèles au plan de Γ . Choisissons un repère \mathcal{R} d'origine O centre de Γ , tel que Oz soit la direction des génératrices et que le plan d'équation $z = 0$ soit celui de Γ .

Soit P un plan, et P_0 le plan parallèle à P passant par O . Si P est parallèle à Oz , $P \cap S$ est formé de deux génératrices du cylindre, (éventuellement confondues), si P_0 est le plan de Γ , l'intersection est Γ .

Sinon, soit π le plan contenant Oz et la perpendiculaire à D , intersection de P_0 et du plan de Γ , en O , dans le plan de Γ . On prend un vecteur \vec{i} dirigeant D et \vec{j} dirigeant l'intersection de π et du plan de Γ , ainsi que \vec{j} dirigeant $P_0 \cap \pi$, (voir figure 10.51).

Dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, \vec{k} dirigeant Oz , l'équation du cylindre S est du type :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

la forme quadratique ϕ définie par :

$$\phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

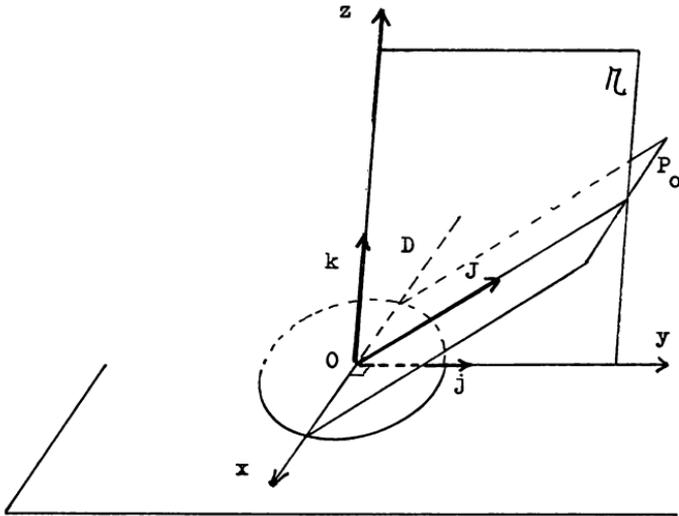


Fig. 10.51

étant de signature $(2,0)$ si le cylindre est elliptique et $(1,1)$ s'il est hyperbolique.

On pose alors $\vec{I} = \vec{i}$, $\vec{J} = \alpha \vec{j} + \beta \vec{k}$ et $\vec{K} = \vec{k}$, les formules de changement de coordonnées sont $x = X$, $y = \alpha Y$ et $z = \beta Y + Z$, donc dans le repère $\mathcal{R}' = (O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ l'équation du cylindre devient :

$$aX^2 + b\alpha XY + c\alpha^2 Y^2 + dX + e\alpha Y + f = 0,$$

et c'est aussi l'équation de la conique $S \cap P_0$, puisque P_0 a pour équation $Z = 0$ dans ce repère.

Comme les deux formes quadratiques :

$$\phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$$

et

$$\psi(X, Y) = aX^2 + b\alpha XY + c\alpha^2 Y^2,$$

ont même signature, la conique $S \cap P_0$ est de même nature que Γ donc ne sera jamais une parabole.

Le tableau qui suit rassemble ces résultats et, suivant le sens de lecture, permet de savoir quelles sont les coniques sur une quadrique donnée, ou

sur quelles quadriques peut se trouver un type de conique.

	Ellipse	Hyperbole	Parabole	Droite
ellipsoïde	×			
hyperboloïde à une nappe	×	×	×	×
hyperboloïde à deux nappes	×	×	×	
cône	×	×	×	×
paraboloïde elliptique	×		×	
paraboloïde hyperbolique		×	×	×
cylindre elliptique	×			×
cylindre parabolique			×	×
cylindre hyperbolique		×		×

10.52. Une recette.

Comme vous pourriez être déçu de ne pas trouver un passage culinaire, (voir Tome 3, 18.89 et 18.90), voici la recette des **andouillettes au vin jaune et aux morilles**.

Faire revenir à feu doux, dans une poêle, des andouillettes piquées, jeter le premier gras, poursuivre la cuisson en retournant les andouillettes qui doivent dorer, laisser attacher un peu, encore un peu, (tout est dans la durée du encore un peu qui peut s'apprécier «au nez»).

Déglacez la poêle au vin jaune, n'ayez pas peur, encore un peu, faire cuire les morilles dans ce jus, lier avec de la crème fraîche et servir les andouillettes avec cette sauce.

Entre les andouillettes de Clamecy, de Troyes, de Chablis, ou de toutes les régions de France, vous pouvez varier beaucoup la saveur de ce plat tout simple.

Bon appétit.

EXERCICES

1. Dans un espace affine euclidien de dimension trois, on donne deux droites D_1 et D_2 . Nature de la nappe réglée engendrée par l'intersection de deux plans orthogonaux contenant respectivement D_1 et D_2 .
2. Soit la nappe S d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{h} = 0.$$

On la coupe par un plan variable contenant Ox . Nature de l'intersection et ensemble des centres de courbure en O de ces intersections.

3. Lieu des sommets des cônes circonscrits à la nappe S d'équation $x^2 + 4y^2 = 2z$, et dont l'intersection avec xOy est un cercle.
4. Soit une conique Γ non dégénérée, de foyer F , que l'on fait tourner autour de son axe focal, ce qui engendre une nappe de révolution Σ . Soit S le cône de sommet F ayant pour directrice une section plane de Σ . Montrer que S est de révolution.
5. Nature des deux nappes S et S' d'équations respectives :

$$az = xy \quad \text{et} \quad bz = xy, \quad \text{pour} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0.$$

Plan tangent à S en $M(x, y, z)$.

Trouver les courbes γ sur S telles que toutes les tangentes à γ soient des tangentes à S' .

6. Lieu des sommets des cônes de révolution contenant une ellipse d'excentricité $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
7. Soit la nappe S d'équation cartésienne $z = \text{Arctan} \frac{y}{x}$. Trouver l'équation de la nappe Σ ensemble des normales à S le long de Ox .
8. Equation de la nappe de révolution d'axe $x = y, z = 0$, et de courbe directrice $xy = 1, z = 0$.

9. Ensemble des sommets des cônes de révolution contenant la parabole \mathcal{P} d'équations $z = 0, y^2 = 2px$.

10. Soit (S) l'ellipsoïde d'équation :

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dans un repère orthonormé. Soit un plan P_0 contenant Ox et un plan P parallèle à P_0 . Ensemble des centres des coniques $P \cap S$, et surface engendrée par leurs axes.

Si P_0 est le plan $z = 0$, lieu des foyers de ces coniques.

11. Pour tout t réel, soit la droite :

$$D_t : z = t, (2t + 1)x + (1 - 2t)y + 2t^2 = 0.$$

Surface S balayée par D_t ; trouver une autre famille de droites engendrant S .

Soit d_t la projection de D_t sur le plan $z = 0$. Nature de l'enveloppe γ des d_t . Trouver la podaire de γ vue d'un point A .

12. Soient D et D' deux droites non coplanaires et S la nappe de révolution engendrée par la rotation de D' autour de D . Equation de S . Nature de S . Eléments de symétrie. Droites contenues dans S . En un point de S dont la distance à D est minimale, étudier la position de S par rapport à son plan tangent.

13. Montrer que la nappe d'équation :

$$2(xy + yz + zx) + 2x - 1 = 0,$$

est de révolution et en déterminer les éléments caractéristiques.

SOLUTIONS

1. On prend un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que l'axe des z soit la perpendiculaire commune aux deux droites, l'origine étant le milieu du segment M_1M_2 , M_1 et M_2 étant les pieds de la perpendiculaire commune. La droite D_1 a des équations du type :

$$y - mx = 0, \quad z - h = 0$$

et D_2 du type

$$y + mx = 0, \quad z + h = 0,$$

(si en outre les plans de coordonnées xOz et yOz sont bissecteurs du dièdre déterminé par D_1 et D_2 , d'arête Oz). On peut supposer $m \geq 0$.

Un plan contenant D_1 a une équation du type :

$$y - mx + \lambda_1(z - h) = 0$$

(sauf le plan $z = h$) et un plan contenant D_2 aura une équation du type :

$$y + mx + \lambda_2(z + h) = 0,$$

(sauf le plan $z = -h$).

Ces plans, perpendiculaires aux vecteurs $V_1(-m, 1, \lambda_1)$ et $V_2(m, 1, \lambda_2)$ seront orthogonaux si et seulement si :

$$\lambda_1 \lambda_2 + 1 - m^2 = 0,$$

d'où les droites cherchées, d'équations :

$$\begin{cases} -mx + y + \lambda_1 z - \lambda_1 h = 0, \\ mx + y + \lambda_2 z + \lambda_2 h = 0, \\ \text{avec } \lambda_1 \lambda_2 = m^2 - 1. \end{cases}$$

Pour $z \neq h$ et $z \neq -h$, ceci équivaut à avoir :

$$\lambda_1 = \frac{mx - y}{z - h}, \quad \lambda_2 = -\frac{mx + y}{z + h} \quad \text{et} \quad m^2 - 1 = \frac{y^2 - m^2 x^2}{z^2 - h^2} :$$

on est donc sur la quadrique d'équation :

$$y^2 - m^2 x^2 + (1 - m^2)z^2 = (1 - m^2)h^2.$$

Pour $m \neq 0$ et $m \neq 1$, (on a supposé $m \geq 0$) on a un hyperboloïde à une nappe. Si $m = 0$, il reste le cylindre d'équation $y^2 + z^2 = h^2$, (dans ce cas les droites $D_1 : y = 0, z = h$ et $D_2 : y = 0, z = -h$ sont parallèles), et si $m = 1$ il reste deux plans d'équations $y = x$ et $y = -x$.

On peut remarquer que pour $z = h$, le plan P_1 contenant D_1 , d'équation $z = h$ est perpendiculaire au plan P_2 d'équation $y + mx = 0$, (contenant D_2), donc

cette droite convient, mais pour $z = h$, sur l'hyperboloïde on a deux droites d'équation :

$$y = mx \quad \text{et} \quad y = -mx : \quad \text{la première ne convient pas.}$$

De même, la droite $z = -h$, $y = -mx$ de l'hyperboloïde n'est pas solution du problème posé.

2. S est un parabolôïde elliptique, tangent en O au plan xOy , donc l'intersection de S et du plan $z = 0$ est réduite au point O .

Soit le plan P_θ contenant Ox , et dont la direction contient le vecteur :

$$\vec{J} = \cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k}.$$

Si on prend comme nouveau repère $\mathcal{R}'(O; \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ tel que la matrice de passage, soit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = X \\ y = Y \cos \theta - Z \sin \theta \\ z = Y \sin \theta + Z \cos \theta \end{cases}$$

l'équation de S dans ce repère \mathcal{R}' devient :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{(Y \cos \theta - Z \sin \theta)^2}{b^2} - \frac{(Y \sin \theta + Z \cos \theta)}{h} = 0,$$

et le plan P_θ ayant alors pour équation $Z = 0$, l'équation de l'intersection Γ_θ de S et de P_θ , dans ce plan XOY est :

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2 \cos^2 \theta}{b^2} - \frac{Y \sin \theta}{h} = 0 :$$

Γ_θ est une ellipse pour $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ (modulo π), et une parabole si $\cos \theta = 0$.

De plus, la tangente en O à Γ_θ est dans le plan tangent en O à la nappe, (remarque 9.14), donc xOy , elle est aussi dans P_θ : c'est donc l'axe Ox . Mais alors le rayon de courbure en O est :

$$\mathcal{R}_\theta = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{X^2}{2Y}, \quad (\text{voir 6.122}).$$

$$\text{On a} \quad \frac{X^2}{2Y} = -\frac{a^2 Y \cos^2 \theta}{2b^2} + \frac{a^2 \sin \theta}{2h},$$

$$\text{d'où} \quad \mathcal{R}_\theta = \frac{a^2 \sin \theta}{2h}.$$

Le centre de courbure C_θ de Γ_θ en O est alors tel que :

$$\vec{OC}_\theta = \mathcal{R}_\theta \vec{J} = \frac{a^2 \sin \theta}{2h} (\cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k}),$$

d'où les coordonnées $x = 0$, $y = \frac{a^2}{4h} \sin 2\theta$ et $z = \frac{a^2}{4h} (1 - \cos 2\theta)$ du centre de courbure qui décrit donc le cercle \mathcal{C} , du plan $x = 0$, de centre $\omega \left(0, 0, \frac{a^2}{4h} \right)$ et de rayon $\frac{a^2}{4h}$, (si on suppose $h > 0$). C'est le cercle de Meusnier, voir Théorème 9.114.

3. La nappe S est un parabolôïde elliptique.

Soit $M(x, y, z)$ un point de l'espace. Un point $P(X, Y, Z)$ est sur le cône circonscrit à S , de sommet M , si et seulement si la droite $D(M, P)$ paramétrée par $\xi = x + t(x - X)$, $\eta = y + t(y - Y)$ et $\zeta = z + t(z - Z)$ est tangente à S , ce qui se traduit par l'existence d'une racine double dans l'équation du second degré, (en t) :

$$(x + t(x - X))^2 + 4(y + t(y - Y))^2 - 2(z + t(z - Z)) = 0,$$

qui s'ordonne en :

$$t^2 \left((x - X)^2 + 4(y - Y)^2 \right) + 2t \left(x(x - X) + 4y(y - Y) - (z - Z) \right) + x^2 + 4y^2 - 2z = 0,$$

d'où l'équation du cône circonscrit à S , de sommet $M(x, y, z)$:

$$\left(x(x - X) + 4y(y - Y) - (z - Z) \right)^2 - (x^2 + 4y^2 - 2z) \left((x - X)^2 + 4(y - Y)^2 \right) = 0.$$

Ce cône coupera le plan xOy suivant la conique d'équation (en X et Y) :

$$\left(x(x - X) + 4y(y - Y) - z \right)^2 - (x^2 + 4y^2 - 2z) \left((x - X)^2 + 4(y - Y)^2 \right) = 0$$

qui sera celle d'un cercle si et seulement si le coefficient du terme en $(x - X)(y - Y)$ est nul, (soit $4xy = 0$) et si les coefficients des termes en $(x - X)^2$ et $(y - Y)^2$ sont égaux, ou ceux en X^2 et Y^2 , ou X^2 et $(y - Y)^2$...

Pour $x = 0$, il reste comme équation de la conique :

$$\left(4y(y - Y) - z \right)^2 - (4y^2 - 2z) \left((X^2 + 4(y - Y)^2) \right) = 0,$$

qui sera l'équation d'un cercle si et seulement si :

$$16y^2 - 4(4y^2 - 2z) = -4y^2 + 2z,$$

(coefficients en X^2 et $(y - Y)^2$ égaux), ou encore si $6z + 4y^2 = 0$, ce qui conduit au cercle d'équation :

$$X^2 + \left(Y - \frac{y}{2} \right)^2 - \frac{y^2}{3} = 0, \quad \text{mais sans garantie.}$$

Pour $y = 0$, il reste :

$$(x(x - X) - z)^2 - (x^2 - 2z)((x - X)^2 + 4Y^2) = 0,$$

qui est l'équation d'un cercle si et seulement si :

$$x^2 - x^2 + 2z = -4x^2 + 8z \text{ soit } 6z - 4x^2 = 0.$$

Le lieu cherché est finalement formé de deux paraboles d'équations respectives :

$$x = 0, 3z + 2y^2 = 0 \text{ et } y = 0, 3z - 2x^2 = 0.$$

4. Dans un plan rapporté à un repère d'origine F , d'axes Fx et Fz tels que la conique Γ , d'excentricité e , ait pour directrice la droite d'équation $z = -p$, l'équation de Γ s'obtient en écrivant que :

$$MF^2 = e^2 MH^2,$$

(H , projeté de M sur la directrice), ce qui donne :

$$x^2 + z^2 = e^2(z + p)^2.$$

La nappe Σ , de révolution autour de Fz , engendrée par Γ a donc pour équation, (x^2 donne $x^2 + y^2$) :

$$x^2 + y^2 + z^2(1 - e^2) - 2e^2 zp - e^2 p^2 = 0.$$

Soit un plan P d'équation :

$$ux + vy + wz + h = 0,$$

un point Q , de coordonnées X, Y, Z , est sur le cône de sommet F et de courbe directrice l'intersection de Σ et de P si et seulement si il existe λ réel tel que :

$$\begin{cases} \lambda(ux + vY + wZ) + h = 0 \text{ et} \\ \lambda^2(X^2 + Y^2 + Z^2(1 - e^2)) - 2e^2\lambda Zp - e^2 p^2 = 0. \end{cases}$$

Si $h = 0$, F est dans le plan P , et S est dans ce cas le plan P , (qui est de révolution autour de la perpendiculaire à P en F).

Si $h \neq 0$, on doit avoir $\lambda \neq 0$ et $\frac{1}{\lambda} = -\frac{uX + vY + wZ}{h}$,

$$\begin{aligned} \text{d'où } X^2 + Y^2 + Z^2(1 - e^2) + \frac{2e^2 Zp}{h}(uX + vY + wZ) \\ - \frac{e^2 p^2}{h^2}(uX + vY + wZ)^2 = 0, \end{aligned}$$

équation de S , qui s'écrit encore :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - e^2 \left[Z^2 - 2Z \frac{p}{h}(uX + vY + wZ) + \frac{p^2}{h^2}(uX + vY + wZ)^2 \right] = 0$$

ce qui s'écrit encore :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - e^2 \left(Z - \frac{p}{h}(uX + vY + wZ) \right)^2 = 0.$$

On a une quadrique, qui est un cône, (et pour cause) et sous cette forme, elle est de révolution autour de Δ , perpendiculaire passant par F au plan d'équation $puX + pvY + (pw - h)Z = 0$, (voir 9.81). Il faut s'assurer que la forme affine :

$$puX + pvY + (pw - h)Z,$$

n'est pas constante, (c'est-à-dire nulle ici), c'est le cas si u ou $v \neq 0$. Si $u = v = 0$, on peut prendre $w = 1$, le plan P a pour équation $z = -h$, et $p - h = 0$ est exclu, car le plan $z = -p$ ne coupe pas la nappe Σ , (on devrait avoir $x^2 + y^2 + p^2$).

5. Les nappes sont des paraboloides hyperboliques. En $M(x, y, z)$ de S le plan tangent a pour direction l'espace vectoriel engendré par :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} = \vec{i} + \frac{y}{a} \vec{k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = \vec{j} + \frac{x}{a} \vec{k}.$$

Une courbe (γ) associée à x et y fonctions de t aura un vecteur tangent égal à

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \dot{y}, \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad \text{et} \quad \dot{y} = \frac{dy}{dt} \right),$$

donc la tangente à (γ) en M peut se paramétrer par :

$$X = x + \lambda a \dot{x}, \quad Y = y + \lambda a \dot{y} \quad \text{et} \quad Z = \frac{xy}{a} + \lambda(\dot{x}y + \dot{y}x);$$

les paramètres des points d'intersection avec le paraboloides S' sont tels que :

$$b \left(\frac{xy}{a} + \lambda(\dot{x}y + \dot{y}x) \right) = (x + \lambda a \dot{x})(y + \lambda a \dot{y}),$$

ou encore

$$\lambda^2 a^2 \dot{x} \dot{y} + \lambda(a - b)(\dot{x}y + x\dot{y}) + xy \left(1 - \frac{b}{a} \right) = 0.$$

Comme tout point de S' est régulier, on aura une tangente à S' si et seulement si cette équation en λ admet une racine double, donc si et seulement si :

$$(a - b)^2 (\dot{x}y + x\dot{y})^2 - 4axy \dot{x} \dot{y} (a - b) = 0.$$

Il est clair que $a = b$, (soit $S' = S$) convient et que toute la courbe (γ) régulière sur S est solution dans ce cas.

Ce cas écarté, il reste l'équation différentielle :

$$(a - b)(\dot{x}y + x\dot{y})^2 - 4axy \dot{x} \dot{y} = 0,$$

qui s'écrit encore :

$$a(\dot{x}y - x\dot{y})^2 - b(\dot{x}y + x\dot{y})^2 = 0,$$

ou

$$[\sqrt{a}(\dot{x}y - x\dot{y}) + \sqrt{b}(\dot{x}y + x\dot{y})][\sqrt{a}(\dot{x}y - x\dot{y}) - \sqrt{b}(\dot{x}y + x\dot{y})] = 0.$$

Choix de la variable d'intégration.

Une solution telle que $\dot{x} = 0$, (soit x constante) conduit à $(a - b)x^2\dot{y}^2 = 0$ d'où $x = 0$, (car $y =$ constante aussi donne un point). Or la génératrice $x = 0, z = 0$ est commune à S et S' donc est solution. Il en est de même de la droite $y = 0, z = 0$.

On écarte ces cas et on prend localement y fonction de x , d'où $\dot{x} = 1$, et y' au lieu de \dot{y} , tel que l'équation :

$$E : (\sqrt{a}(y - xy') + \sqrt{b}(y + xy')) [\sqrt{a}(y - xy') - \sqrt{b}(y + xy')] = 0,$$

soit vérifiée.

On introduit les équations linéaires du premier ordre :

$$E_1 : (\sqrt{b} - \sqrt{a})xy' + (\sqrt{b} + \sqrt{a})y = 0 \quad \text{et}$$

$$E_2 : (\sqrt{b} + \sqrt{a})xy' + (\sqrt{b} - \sqrt{a})y = 0,$$

de solutions respectives, sur $] -\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$:

$$y_1(x) = \lambda|x|^\alpha, \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, \quad \text{ou}$$

$$y_2 = \lambda|x|^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Les courbes paramétrées $x = x, y = y_1(x)$ et $z = \frac{xy_1(x)}{a}$ conviennent, ainsi que les arcs obtenus à partir de $y_2(x)$.

AUTRES SOLUTIONS. Soit $\left(x, y(x), \frac{xy(x)}{a}\right)$ un arc (γ) solution.

Si d'abord la fonction y ne s'annule pas sur son intervalle I de définition, elle est solution de E . Soient alors :

$$I_1 = \{x \in I ; E_1 \text{ est vérifiée par } y\} \quad \text{et}$$

$$I_2 = \{x \in I ; E_2 \text{ est vérifiée par } y\}.$$

Comme y' est supposée continue, on a des fermés de I , de réunion I et disjoints car, y ne s'annulant pas, $\frac{xy'}{y}$ ne peut pas, pour un x donné, valoir α et $\frac{1}{\alpha}$ à la fois,

$$(\text{car } \alpha \neq \frac{1}{\alpha} \iff \alpha^2 \neq 1 \iff a + 2\sqrt{ab} + b \neq a - 2\sqrt{ab} + b \iff \sqrt{ab} \neq 0$$

ce qui est vrai).

Comme I est connexe, on a I_1 ou I_2 vide, donc y est du type y_1 ou y_2 .

Enfin, une solution du type $y_1(x) = \lambda|x|^\alpha$ peut se raccorder avec ($y = 0, z = 0$).

En effet le paramétrage $x = x, y = \lambda x^\alpha, z = \frac{\lambda}{a} x^{\alpha+1}$, (pour $x > 0$) conduit à

$$x' = 1, y' = \lambda \alpha x^{\alpha-1}, z' = \frac{\lambda(\alpha+1)}{a} x^\alpha,$$

donc, pour $\alpha > 1$, (ce qui est le cas si $a > b$) cet arc admet pour $x = 0$, le vecteur tangent $(1, 0, 0)$. Il se raccorde donc $(0, 0, 0)$ avec la génératrice $y = 0, z = 0, x < 0$.

On étudierait de même le cas $x < 0$, ou celui des solutions du type y_2 .

6. Prenons un repère orthonormé tel que l'ellipse ait pour équations :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'excentricité, $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, est telle que :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2},$$

d'où $a^2 = 2b^2$, et l'équation $x^2 + 2y^2 - 2b^2 = 0$ de l'ellipse, dans le plan xOy . Si un cône de révolution est coupé par un plan P suivant une ellipse, le grand axe de l'ellipse est l'intersection de P et du plan orthogonal à P passant par S sommet du cône, (voir 8.49) donc ici les sommets S sont cherchés dans le plan xOz .

Soit $S(x_0, 0, z_0)$ un point de ce plan, un point $M(x, y, z)$ sera sur le cône de sommet S , contenant l'ellipse, si et seulement si il existe un point de SM sur l'ellipse donc si et seulement si il existe λ réel tel qu'avec :

$$x' = x_0 + \lambda(x - x_0), y' = \lambda y, z' = z_0 + \lambda(z - z_0),$$

on ait :

$$x'^2 + 2y'^2 - 2b^2 = 0 \quad \text{et} \quad z' = 0.$$

On suppose $M \neq S$, donc par exemple $z \neq z_0$ et $\lambda = -\frac{z_0}{z - z_0}$, d'où l'équation :

$$\left(x_0 - z_0 \frac{x - x_0}{z - z_0}\right)^2 + 2\left(-\frac{z_0 y}{z - z_0}\right)^2 - 2b^2 = 0,$$

du cône de sommet S contenant l'ellipse, (avec $z \neq z_0$).

Cette équation s'écrit encore :

$$(x_0 z - z_0 x)^2 + 2z_0^2 y^2 - 2b^2(z - z_0)^2 = 0,$$

et sous cette forme, elle est valable aussi pour $z = z_0$, par continuité.

La matrice de la forme quadratique des termes du second degré est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} z_0^2 & 0 & -x_0 z_0 \\ 0 & 2z_0^2 & 0 \\ -x_0 z_0 & 0 & x_0^2 - 2b^2 \end{pmatrix},$$

et cette quadrique, que l'on sait déjà être un cône vu les calculs faits, sera un cône de révolution si et seulement si elle a une valeur propre double, car dans une base orthonormée conjuguée convenable on aura une équation en $\alpha(X^2 + Y^2) + \beta Z^2 = 0$.

Le polynôme caractéristique est :

$$(2z_0^2 - \lambda) (\lambda^2 - \lambda(x_0^2 + z_0^2 - 2b^2) - 2b^2 z_0^2) = 0.$$

Le produit des racines du trinôme étant $-2b^2 z_0^2 < 0$, ce trinôme n'a pas de racine double, donc Ω admet une valeur propre double si et seulement si $2z_0^2$ est solution du trinôme, soit si et seulement si :

$$4z_0^4 - 2z_0^2(x_0^2 + z_0^2 - 2b^2) - 2b^2 z_0^2 = 0,$$

ou

$$2z_0^2(z_0^2 - x_0^2 + b^2) = 0.$$

Si vraiment on y tient, on retrouve le plan $z_0 = 0$, (c'est un cône plat, de révolution, contenant l'ellipse), sinon on trouve l'hyperbole d'équation :

$$z^2 - x^2 + b^2 = 0,$$

dans le plan $y = 0$.

7. La nappe S ayant pour équation implicite :

$$f(x, y, z) = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} - z,$$

le vecteur normal en tout point de S , est :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{grad}} f &= f'_x \vec{i} + f'_y \vec{j} + f'_z \vec{k} \\ &= \frac{-y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j} - \vec{k}. \end{aligned}$$

La normale en $M(x, 0, 0)$, (pour $x \neq 0$), à S , est donc dirigée par le vecteur :

$$\vec{V}(y, -x, x^2 + y^2) = (0, -x, x^2),$$

ou même par $\vec{W}(0, 1, -x)$. On peut la paramétrer par :

$$X = x, Y = t, Z = -tx, \text{ avec } t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^*,$$

c'est donc la nappe d'équation $Z = -XY$, privée de la droite $X = 0, Z = 0$. On a un paraboloid hyperbolique privé d'une génératrice.

8. Si on est un tant soit peu curieux, on constatera que dans le plan $z = 0$, la courbe directrice est une hyperbole d'axe focal la première bissectrice, que l'on va faire tourner précisément autour de cette bissectrice. La nappe cherchée est donc un hyperboloïde à deux nappes, de révolution.

En prenant pour nouvelle base :

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{J} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$$

et $\vec{K} = \vec{k}$, l'équation de l'hyperbole devient :

$$X^2 - Y^2 = 2, \quad (Z = 0),$$

donc dans ce repère la nappe de révolution d'axe OX , engendrée par l'hyperbole a pour équation :

$$X^2 - Y^2 - Z^2 = 2.$$

Si on y tient, on peut revenir au repère initial, on a $Z = z$

$$\text{et} \quad \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} X = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \\ Y = \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \end{cases},$$

d'où l'équation :

$$(x+y)^2 - (-x+y)^2 - 2z^2 = 4, \quad \text{ou} \quad 2xy - z^2 = 2.$$

9. On peut aborder le problème de la manière suivante.

Partant de S de coordonnées X, Y, Z , écrire l'équation d'un cône de révolution \mathcal{C} , de sommet S , et traduire que ce cône contient l'arc paramétré $x = \frac{y^2}{2p}, y, 0$.

On doit obtenir une identité en y qui, si tout se passe bien, permettra d'éliminer les paramètres introduits, et caractérisera les coordonnées X, Y, Z des points S cherchés.

Si le cône \mathcal{C} a son axe dirigé par \vec{w} , unitaire, dans le repère orthonormé d'origine S , de base orthonormée $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ il aura une équation du type :

$$x_1^2 + y_1^2 = m^2 z_1^2,$$

ou encore :

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (1 + m^2) z_1^2,$$

(si x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées dans ce repère).

On a donc :

$$\overrightarrow{SM} = x_1 \overrightarrow{u} + y_1 \overrightarrow{v} + z_1 \overrightarrow{w} = (x - X) \overrightarrow{i} + (y - Y) \overrightarrow{j} + (z - Z) \overrightarrow{k},$$

donc :

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2.$$

Il nous faut $z_1 = \dots$ pour obtenir l'équation du cône C dans le repère de départ, donc, P désignant la matrice changement de base, il nous faut la troisième ligne de $P^{-1} = {}^tP$ car P est orthogonale, c'est-à-dire la troisième colonne de P , donc les composantes de \overrightarrow{w} dans la base $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$.

Posons $\overrightarrow{w} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j} + \gamma \overrightarrow{k}$, on aura $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ et :

$$z_1 = \alpha(x - X) + \beta(y - Y) + \gamma(z - Z),$$

et X, Y, Z doivent être tels que l'équation :

$$(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2 - (1 + m^2) (\alpha(x - X) + \beta(y - Y) + \gamma(z - Z))^2 = 0$$

soit identiquement vérifiée, en y , si :

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad y = y, \quad \text{et} \quad z = 0,$$

donc tels que le polynôme en y :

$$\left(\frac{y^2}{2p} - X\right)^2 + (y - Y)^2 + Z^2 - (1 + m^2) \left(\alpha \frac{y^2}{2p} + \beta y - \alpha X - \beta Y - \gamma Z\right)^2 = 0$$

soit nul.

En ordonnant ce polynôme on doit donc avoir les relations :

$$\begin{cases} 1 = (1 + m^2)\alpha^2 \\ 0 = 2\alpha\beta \\ -\frac{X}{p} + 1 = (1 + m^2) \left(\beta^2 - 2(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) \frac{\alpha}{2p}\right) \\ -2Y = (1 + m^2) (2\beta(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)) \\ X^2 + Y^2 + Z^2 = (1 + m^2)(\alpha X + \beta Y + \gamma Z)^2, \end{cases}$$

et, n'oublions pas, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ car \overrightarrow{w} est unitaire.

Ce système se simplifie car $\beta = 0$, donc forcément $Y = 0$, (4^{ième} relation), et $\alpha^2 = \frac{1}{1+m^2}$. Il reste les conditions :

$$\begin{cases} 1 - \frac{X}{p} = -\frac{1}{\alpha p}(\alpha X + \gamma Z) = -\frac{X}{p} - \frac{\gamma Z}{\alpha p}, & \text{soit } \frac{\gamma Z}{\alpha p} = -1, \\ X^2 + Z^2 = \frac{1}{\alpha^2}(\alpha X + \gamma Z)^2, \\ \alpha^2 + \gamma^2 = 1. \end{cases}$$

Le point S de coordonnées X, Y, Z sera sommet d'un cône cherché, si et seulement si on peut trouver α , (non nul) et γ , tels que $\alpha^2 + \gamma^2 = 1$ et que les relations :

$$\frac{\gamma Z}{\alpha} = -p \quad \text{et} \quad X^2 + Z^2 = X^2 + 2\frac{\gamma}{\alpha}ZX + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}Z^2,$$

soient vérifiées.

Compte tenu de $\frac{\gamma Z}{\alpha} = -p$, la dernière équivaut à l'égalité :

$$Z^2 = -2pX + p^2.$$

L'ensemble cherché est donc la parabole d'équations :

$$Y = 0, \quad Z^2 + 2pX - p^2 = 0.$$

10. Soit un nouveau repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que P_0 soit le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ avec $(\vec{i}, \vec{i}) = \theta$. Les formules changement de coordonnées sont :

$$x = X; \quad y = Y \cos \theta - Z \sin \theta \quad \text{et} \quad z = Y \sin \theta + Z \cos \theta,$$

d'où l'équation de l'ellipsoïde dans le nouveau repère :

$$\frac{X^2 + (Y \cos \theta - Z \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{(Y \sin \theta + Z \cos \theta)^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et les sections par les plans $Z = \text{constante} = k$ sont les ellipses d'équation :

$$\begin{aligned} \frac{X^2}{a^2} + Y^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{c^2} \right) + 2Yk \cos \theta \sin \theta \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \\ + k^2 \left(\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) - 1 = 0, \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \frac{X^2}{a^2} + \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{c^2} \right) \left(Y + \frac{k \cos \theta \sin \theta (a^2 - c^2)}{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \right)^2 \\ + k^2 \left(\frac{c^2 \sin^2 \theta + a^2 \cos^2 \theta}{a^2 c^2} - \frac{\cos^2 \theta \sin^2 \theta (a^2 - c^2)^2}{a^2 c^2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right) - 1 = 0. \end{aligned}$$

C'est affreux! Et pourtant il semblerait que le terme constant se réduise à :

$$\frac{k^2}{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} - 1.$$

On a donc une ellipse, à condition que $k^2 \leq c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta$, (c'est-à-dire que le plan P coupe l'ellipsoïde), de centre le point :

$$\Omega : \left(X = 0, Y = -\frac{k \cos \theta \sin \theta (a^2 - c^2)}{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}, Z = k \right),$$

avec k variant tel que :

$$|k| \leq (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^{\frac{1}{2}}.$$

Les centres décrivent un segment de droite dans le plan $X = 0$, sur la droite :

$$Y = -\frac{\cos \theta \sin \theta (a^2 - c^2)}{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} Z.$$

Soit $[A, B]$ ce segment.

Les axes sont les parallèles à $OX = Ox$ et OY passant par Ω .

L'axe parallèle à Ox engendre une bande dans le plan d'équation :

$$Y = -\frac{\cos \theta \sin \theta (a^2 - c^2)}{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} Z,$$

limité par les parallèles à Ox passant par A et B .

L'axe parallèle à Oy engendre de même une bande dans le plan $YOZ = yOz$, limitée par les parallèles à OY passant par A et B .

Si P_0 est le plan $z = 0$, tout se simplifie. L'ellipsoïde étant de révolution autour de Oz , les ellipses $z = k$ sont des cercles centrés sur Oz , et comme les foyers sont confondus avec le centre, dans ce cas les foyers décrivent le segment $[C, C']$ avec $C(0, 0, -c)$ et $C'(0, 0, c)$.

11. L'élimination de t est immédiate et fournit l'équation cartésienne :

$$(2z + 1)x + (1 - 2z)y + 2z^2 = 0$$

de la quadrique S .

Une décomposition en carrés de la partie homogène du second degré donne la nature de \bar{S} . On part de :

$$2z^2 + 2zx - 2zy + x + y = 0,$$

donc de

$$2\left(z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(x - y)^2 + x + y = 0 :$$

comme les formes affines $z + \frac{x}{2} - \frac{y}{2}$, $x - y$ et $x + y$ sont indépendantes on a un parabolôïde hyperbolique.

On peut écrire l'équation, (multipliée par 2) sous la forme :

$$(2z + x - y - (x - y))(2z + x - y + (x - y)) + 2x + 2y = 0,$$

donc pour tout λ réel, la droite Δ_λ d'équations :

$$\begin{cases} 2z + 2x - 2y = \lambda \\ 2x + 2y + 2\lambda z = 0 \end{cases}$$

est sur S , (et engendre S quand λ varie). On peut remarquer que les D_t sont obtenues en posant :

$$2z = 2t, \quad \text{et} \quad 2x + 2y + 2t(2z + 2x - 2y) = 0.$$

On verrait, en prenant des vecteurs directeurs, que ces deux familles de droites sont distinctes.

La projection d_t de D_t sur le plan xOy est la droite d'équation :

$$\begin{cases} d_t : (2t + 1)x + (1 - 2t)y + 2t^2 = 0, & \text{et on a :} \\ d'_t : 2x - 2y + 4t = 0, \end{cases}$$

ce qui se résoud en :

$$x = t^2 - t \quad \text{et} \quad y = t^2 + t,$$

(sauf erreur toujours possible), et conduit à la parabole \mathcal{P} d'équation :

$$2(x + y) = (x - y)^2.$$

En faisant le changement de repère associé aux nouvelles coordonnées :

$$X = \frac{x - y}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad Y = \frac{x + y}{\sqrt{2}},$$

la parabole a pour équation :

$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2} X^2.$$

Soit $A(a, b)$ dans ce nouveau repère.

On paramètre par $X = t, Y = \frac{\sqrt{2}}{2} t^2$. La tangente en $M(t)$ à la parabole a pour équation :

$$-\sqrt{2}(X - t)t + (Y - \frac{\sqrt{2}}{2} t^2) = 0.$$

La normale à cette tangente passant par A est paramétrée par :

$$X = a - \lambda\sqrt{2}t, \quad Y = b + \lambda,$$

donc le paramètre λ de la projection de A sur la tangente est tel que :

$$\lambda = \frac{a\sqrt{2}t - b - \frac{\sqrt{2}}{2} t^2}{1 + 2t^2}$$

d'où les coordonnées :

$$X = \frac{a + b\sqrt{2}t + t^3}{1 + 2t^2},$$

$$Y = \frac{a\sqrt{2}t + \left(2b - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)t^2}{1 + 2t^2},$$

d'une paramétrisation possible de la podaire considérée, ce qui, dusses-je froisser des susceptibilités, me semble d'un intérêt très limité.

12. On prend un repère orthonormé tel que $D = (Oz)$, l'axe Ox étant la perpendiculaire commune à D et D' , d'où les équations :

$$x = a, (a > 0) \text{ et } z = my \text{ de } D'.$$

Un point $M(x, y, z)$ est sur S si et seulement si il se déduit d'un point $P(X, Y, Z)$ de D' par la rotation d'axe Oz , donc si et seulement si il existe (X, Y, Z) avec $Z = z, X^2 + Y^2 = x^2 + y^2$ et $X = a, Z = mY$.

Si $m = 0$, (D' est orthogonale à D , donc tangente au cercle $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$ en $A(a, 0, 0)$ en fait) on obtient $Z = 0 \iff z = 0$ et la condition $x^2 + y^2 = a^2 + Y^2 \geq a^2$: S est le complémentaire du disque ouvert de centre O de rayon a dans le plan $z = 0$.

Si $m \neq 0$, on a : $X = a, Y = \frac{z}{m}$ et $x^2 + y^2 = a^2 + \frac{z^2}{m^2}$: S est l'hyperboloïde à une nappe, de révolution autour de Oz , d'équation

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{m^2} = a^2.$$

Éléments de symétries : l'origine, l'axe Oz et toute perpendiculaire à Oz passant par O ; tout plan contenant Oz et le plan $z = 0$.

Droites contenues dans S . Si G est le groupe des rotations d'axe Oz , toute droite $r(D')$, $r \in G$, est sur S .

Par ailleurs la droite $D'' : x = a, z = -my$ est sur S , (elle est symétrique de D' par rapport au plan xOy). Toutes les droites $r(D'')$, $r \in G$, sont aussi sur S .

Soit Δ une droite quelconque de S , Δ n'est pas parallèle à xOy (les sections $S \cap (z = k)$ sont des cercles), donc $B = \Delta \cap xOy$ existe, et ce point est sur le cercle $z = 0, x^2 + y^2 = a^2$.

Soit r la rotation telle que $r(B) = A, (a, 0, 0)$, la droite $r(\Delta)$ passa par A , elle est sur S , donc elle est dans le plan tangent en A à l'hyperboloïde. Ce plan tangent contient déjà les deux droites D' et D'' , distinctes car $m \neq 0$, et l'intersection du plan tangent et de l'hyperboloïde étant une conique, on n'a pas le choix : c'est l'hyperbole dégénérée formée des deux droites sécantes D' ou D'' donc $r(\Delta) = D'$ ou D'' et Δ est dans l'une des deux familles données.

Enfin, le plan tangent en A coupe S suivant ces génératrices D' et D'' qui régionnent les zones telles que S soit dans un des demi-espaces limité par le plan tangent.

En effet, l'équation du plan tangent en A est $x = a$.
La nappe est localement représentée par :

$$x = \sqrt{a^2 - y^2 + \frac{z^2}{m^2}}, \quad (x \geq 0),$$

donc

$$\begin{aligned} x \geq a &\iff z^2 \geq m^2 y^2 \\ &\iff (z - my)(z + my) \geq 0, \end{aligned}$$

les courbes régionnant les zones où le signe est constant sont les deux génératrices. La situation s'en déduit sur le cercle de gorge ($z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$) par rotation d'axe Oz .

13. En écrivant l'équation de S sous la forme :

$$(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1) = 0,$$

on sait que S est de révolution autour de la droite Δ perpendiculaire au plan d'équation $x + y + z = 0$, passant par $A(1, 0, 0)$, centre de la sphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 1 = 0, \quad (\text{voir Théorème 9.81}).$$

La nappe S est une quadrique. La matrice Ω de sa forme quadratique est :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B - I \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme B est symétrique réelle de rang 1, de trace 3, les valeurs propres de B sont 0, double, et 3, donc celles de Ω sont -1 , double et 2 : la quadrique est du type hyperboloïde ou cône, et elle admet un centre de symétrie A de coordonnées (x_0, y_0, z_0) telles qu'avec $x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$ et $z = z_0 + Z$, il n'y ait pas de termes en X , Y ou Z dans l'équation en X , Y , Z . Celle-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} 2((x_0 + X)(y_0 + Y) + (y_0 + Y)(z_0 + Z) + (z_0 + Z)(x_0 + X)) \\ + 2x_0 + 2X - 1 = 0, \end{aligned}$$

ou en ordonnant :

$$\begin{aligned} 2(XY + YZ + ZX) + 2X(y_0 + z_0 + 1) + 2Y(x_0 + z_0) + 2Z(y_0 + x_0) \\ + 2(x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 + x_0) - 1 = 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées du centre vérifient les équations :

$$\begin{cases} y_0 + z_0 = -1, \\ x_0 + z_0 = 0, \\ x_0 + y_0 = 0, \end{cases}$$

d'où

$$x_0 + y_0 + z_0 = -\frac{1}{2},$$

puis

$$x_0 = -\frac{1}{2} - (y_0 + z_0) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad z_0 = -\frac{1}{2}.$$

Avec l'origine en A , comme $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 + x_0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, l'équation devient :

$$2(XY + YZ + ZX) - \frac{1}{2} = 0,$$

ou encore

$$(X + Y + Z)^2 - X^2 - Y^2 - Z^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Si on effectue un changement de repère orthonormé, tel qu'avec une base $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$, on ait :

$$\vec{k}' = \frac{i}{\sqrt{3}} + \frac{j}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}},$$

la dernière colonne de la matrice de passage est « $\frac{1}{\sqrt{3}}$ partout », la dernière ligne de la matrice inverse est $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$, elle donne donc, x', y', z' étant les nouvelles coordonnées,

$$z' = \frac{X + Y + Z}{\sqrt{3}}.$$

Enfin la norme est conservée, donc :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

et, dans ce repère, l'équation de S devient :

$$3z'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 - \frac{1}{2} = 0,$$

ou finalement

$$x'^2 + y'^2 = 2z'^2 - \frac{1}{2},$$

on a un hyperboloïde à deux nappes, (pas de section si $|z'| < \frac{1}{2}$), de centre $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ dans le repère initial, de révolution autour de Δ passant par A , de vecteur directeur $(1, 1, 1)$.

Lexique

- abscisse curviligne, 6.99
- admissible (paramétrage), 6.9; 9.3
- affine (application), 1.50
- affine (espace), 1.1
- affine (espace métrique), 4.1
- affinement libres, 1.29
- affiche, 5.25
- angle de deux axes, 5.5
- angle de droites, 5.6
- angle de vecteurs, 5.7
- angle de vecteurs unitaires, 5.1
- angle polaire, 5.8
- anti-déplacement, 4.62
- arc géométrique, 6.7
- arc paramétré, 6.1
- arête de rebroussement, 9.59
- argument, 5.25
- asymptote (droite), 6.70
- asymptote (plan) 9.50
- asymptotiques (courbes), 9.104
- asymptotique (direction), 6.67
- atlas, 9.160
- axe focal, 8.16; 8.32
- axe radical, 5.52

- barycentre, 1.14
- bi-normal, 6.105; 6.131
- bi-régulier, 6.52
- bissecteur (hyperplan), 4.43
- bissectrice, 4.43; 5.9; 5.11
- branche infinie, 6.64
- branche parabolique, 6.78

- caractéristique (droite), 6.139
- caractéristique (entier, sous-espace), 6.18
- Carathéodory (Théorème de), 3.14
- carte, 9.161; 9.163
- cartésienne (équation), 6.73
- central (point, plan), 9.51
- centre de courbure, 6.114; 6.139
- centre de courbure normale, 9.115
- centre d'homothétie, 1.62
- centre radical, 5.53; 5.67
- cercle de courbure, 6.124
- cercle de Meusnier, 9.115
- cercle de Monge, exercice 8.2
- cercle directeur, 8.12; 8.25
- cercle osculateur, 6.123
- Céva (Théorème de), 1.49; 1.77
- Chasles (relation de), 1.21
- cocycliques, 5.13; 5.18
- cône circonscrit, 9.77
- conforme (transformation), 4.90
- conique (courbe), 8.1
- conique, (nappe), 9.70
- conjugués (faisceaux), 5.63
- conoïde, nappe conoïdale, 9.84
- contact (d'ordre p), 6.57
- contour apparent de direction $\mathbb{R}\vec{u}$, 9.74
- contour apparent de point de vue a , 9.77
- convexe, 3.5
- coordonnées, 1.79
- coordonnées barycentriques, 1.35

- courbes de niveau, 9.149
 courbure, 6.104
 courbure géodésique, courbure normale, 9.96
 courbure (lignes de), 9.104
 courbure moyenne, 9.124; 9.133
 courbures principales, 9.131
 courbure totale, 9.133
 curviligne (abscisse), 6.99
 cylindre circonscrit, 9.74
 cylindrique (nappe), 9.66
- Darboux-Ribeaucourt (trièdre de), 9.94
 demi-espace, 3.35
 déplacement, 4.62
 Desargues (Théorème de), 1.70
 développable (nappe), 9.56
 développante, 6.143; 6.128
 développée, 6.114; 6.142
 dimension d'un sous-espace affine, 1.28
 dimension d'un convexe, 3.23
 directe (base), 3.1
 directeur (cercle), 8.12; 8.25
 directeur (vecteur), 1.65
 direction (d'un sous-espace affine), 1.1; 1.27
 direction asymptotique, 6.67
 directions principales, 9.129
 directrice, 8.2; 8.23; 8.36
 distribution (paramètre de), 9.53
 domaine, 9.2
 domaine d'une carte, 9.161
 droite affine, 1.28
- ellipse, 8.12
 ellipsoïde, 10.13
 enveloppe (d'une famille de droites), 7.2
 enveloppe convexe, 3.6
 enveloppe convexe fermée, 3.20
 équibarycentre, 1.19
 équation d'un hyperplan, 1.33; 1.80
- équation cartésienne, 6.73
 étale, 9.159
 étoilé, 9.28
 Euclide (postulat d'), 1.41
 euclidien, 4.17 bis
 Euler (cercle d'), 5.76
 Euler (équation d'), 7.16
 Euler (formule d'), 3.47
 excentricité, 8.23; 8.36
- face, 3.43
 faisceau de cercles, 5.56
 faisceau de plans, 4.52
 Feuerbach (Théorème de), 5.83
 fondamentaux (sous-espaces), 6.15
 forme affine, 3.34
 foyer, 8.2; 8.12; 8.25
 Frenet (repère, trièdre), 6.131
 géodésique (courbure), 9.96
 géodésique (ligne), 9.104
 géodésique (torsion), 9.98
 géodésique (vecteur normal), 9.94
 géométrique (arc), 6.7
 géométrique (notion), 6.9
 Hausdorff (distance de), 4.103
 hausdorffien, exercice 3.3
 hélice, 6.144; 6.145
 Helly (Théorème de), 3.26
 homothétie, 1.60
 hyperbole, 8.25
 hyperboloïde à deux nappes, 10.15
 hyperboloïde à une nappe, 10.17
 hyperplan affine, 1.28; 3.35
 hyperplan (équation d'), 1.33; 4.29; 1.80
 hyperplan médiateur, 4.42
 hyperplan radical de deux sphères, 4.41
- immersion, 9.159
 incidence (Théorème d'), 1.46
 indirecte (base), 3.1
 inflexion analytique, 6.61
 inflexion géométrique, 6.61

- intrinsèque (équation), 6.152
 inversion, 4.82
 isogonales (trajectoires), 7.28
 isométrie, 4.5
- lacet, 6.3
 Liebnitz (fonction numérique de), 4.45
 ligne de courbure, 9.104
 ligne de plus grande pente, 9.148
 ligne de striction, 9.51
 limite de sous-espaces affines, 6.34
 limite de sous-espaces vectoriels, 6.30
 loxodromies, 9.153
- médiateur (hyperplan), 4.42
 Ménélaüs (Théorème de), 1.76; 1.87
 méplat (point), 6.61
 méridienne, 9.83
 mesure algébrique, 1.66
 métrique (espace affine), 4.1
- Meusnier (cercle de), 9.115
 Meusnier (Théorème de), 9.111
 milieu, 1.20
 module, 5.25
 Monge (cercle de), exercice 8.2
 Morley (Théorème de), 5.85
 Motzkin (Théorème de), 3.25 bis
 multiple (point), 6.5
- nappe géométrique, 9.3
 nappe paramétrée, 9.1
 niveau (courbe de), 9.149
 normal (plan), 6.137
 normal (vecteur normal principal), 6.131
 normal (vecteur normal géodésique), 9.94
 normale (vecteur normal sortant), 9.19
 normale (courbure), 9.96
- normale (équation d'un hyperplan), 4.37; 7.14
- ombilic, 9.127
 ordre (d'un point multiple), 6.5
 orientation (d'une nappe), 9.5
 orienté (arc), 6.10
 orienter un espace, 3.1
 origine, 1.11
 orthocentre, 5.20
 orthogonales (trajectoires), 7.21
 orthogonaux (cercles), 5.54
 orthogonaux (supplémentaires orthogonaux), 4.20
 osculateur (cercle), 6.123
 osculateur (k -espace), 6.46
 osculateur (plan), 6.41; 6.137
 osculatrice (sphère), 6.140
- Pappus (Théorème de), 1.68
 parabole, 8.2
 parabolique (branche), 6.78
 parabolöide elliptique, 10.37
 parabolöide hyperbolique, 9.87; 10.37
 parallèle à, 1.39
 parallélisme strict, 1.40
 paramètre de distribution, 9.54
 paramètre (arc), 6.1
 paramétrisation d'un sous-espace affine, 1.84
 Péano (courbe de), 6.11
 perpendiculaire, 4.21
 perpendiculaire commune à deux droites, 4.57
 plan affine, 1.28
 plan osculateur, 6.41; 6.137
 plan tangent à un arc, 6.40
 plan tangent à une nappe, 9.10
 Plücker (conoïde de), 9.86
 points de base (faisceau à), 5.57
 points limites (faisceau à), 5.59
 polaire (sous-ensemble), 3.32
 polyèdre convexe, 3.40
 polygonale (ligne), 6.90

- polygone, 3.41
- polytope, 3.41
- Poncelet (points de), 5.59
- préhilbertien (espace affine), 4.17
- principal (repère pour une quadratique), 10.14
- principales (courbures), 9.131
- principales (directions), 9.129
- projection affine, 1.73
- projection orthogonale, 4.23
- pseudo-orthogonal, 5.68
- Ptolémée (Théorème de), 5.38
- puissance analytique, 4.36; 4.39; 6.126 bis; 6.138
- Pythagore (Théorème de), 4.18
- quadratique, 10.30
- quadratique à centre, 10.1
- quadratique à centre non dégénérée, 10.6
- quotient (espace affine), 2.26
- radical (axe), 5.52
- radical (hyperplan), 4.41
- rapport d'homothétie, 1.61
- rayon de courbure, 6.114
- rayon de torsion, 6.132
- rebroussement (point de), 6.61
- rectifiable (arc), 6.91
- rectifiant (plan), 6.137
- régionnantes (courbes), 9.16
- réglée (nappe), 9.43
- régulier, 6.51; 6.52; 9.6
- repère, 1.31; 1.32
- réseau de cercles, 5.66
- révolution (nappe de), 9.80
- rotation instantané (vecteur), 6.133
- sécante, 6.45
- segment, 3.9
- semi-affine, 2.6
- semi-linéaire, 2.5
- similitude, 4.88
- Simson, (droite de), 5.22
- sommet d'une ellipse, 8.16
- sommet d'une hyperbole, 8.32
- sommet d'une parabole, 8.3
- sous-espace affine, 1.23
- sous-variété de \mathbb{R}^n , 9.156
- sphérique (courbe), 6.148
- spirale, 6.80.5
- stationnaire (ou singulier), 6.51; 9.6
- striction (ligne de), 9.51
- submersion, 9.159
- support, 6.4
- sur-osculatrice (sphère), 6.140
- symétrie orthogonale, 4.63
- tangent (plan tangent à une nappe), 9.10
- tangent (plan tangent à un arc), 6.40
- tangente (à un arc), 6.36
- Thalès (Théorème de), 1.67
- torsion, 6.110; 6.132
- torsion géodésique, 9.98
- transformation conforme, 4.90
- translation, 1.4; 1.57
- variété (abstraite), 9.163
- variété (plongée dans \mathbb{R}^n), 9.156
- voisinage tubulaire, 4.101

Imprimé en France
Imprimerie des Presses Universitaires de France
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme
Août 1995 — N° 41 796

COLLECTION MATHÉMATIQUES

- Jean-Pierre AUBIN. *Analyse fonctionnelle appliquée. 1 et 2*
- Marcel BERGER et Bernard GOSTIAUX. *Géométrie différentielle, variétés, courbes et surfaces (2^e éd. corrigée)*
- Josette CALAIS. *Éléments de théorie des groupes*
- Bernard CHARLES et Denis ALLOUCH. *Algèbre générale*
- Jean COMBES. *Suites et séries*
- Paul DEHEUVELS. *L'intégrale*
- René DEHEUVELS. *Formes quadratiques et groupes classiques*
- René DEHEUVELS. *Tenseurs et spineurs*
- Roger DESCOMBES. *Éléments de théorie des nombres*
- Jacques DIXMIER. *Topologie générale*
- Jean GEFROY. *Equations différentielles*
- Bernard GOSTIAUX. *Cours de mathématiques spéciales*
T. 1 : Algèbre
T. 2 : Topologie, analyse réelle
T. 3 : Analyse fonctionnelle et calcul différentiel
T. 4 : Géométrie affine et métrique
T. 5 : Géométrie : arcs et nappes
- Michel HERVÉ. *Les fonctions analytiques*
- Michel HERVÉ. *Transformation de Fourier et distributions*
- Daniel LEBORGNE. *Calcul différentiel et géométrie*
- Daniel LEHMANN et Carlos SACRÉ. *Géométrie et topologie des surfaces*
- Daniel LEHMANN et Rudolphe BKOUICHE. *Initiation à la géométrie*
- Jacqueline LELONG-FERRAND. *Les fondements de la géométrie*
- Henri MASCART et Marius STOKA. *Algèbre linéaire et applications. 1 et 2 : Exercices et corrigés*
- Henri MASCART et Marius STOKA. *Fonctions d'une variable réelle. 1, 2, 3, 4 et 5 : Exercices et corrigés*
- Pierre MEUNIER. *Analyse*
- Pierre MEUNIER. *Algèbre et analyse*
- Pierre MEUNIER. *Exercices d'algèbre et d'analyse*
- Alain MÉZARD et Charles DELORME. *Cours de mathématiques supérieures.*
T. 1
- Maurice MIGNOTTE. *Algèbre appliquée à l'informatique*
- Maurice MIGNOTTE. *Mathématiques pour le calcul formel*
- Georges PUPION. *Exercices d'algèbre avec solutions et cours résumé*
- Georges PUPION. *Exercices d'analyse avec solutions et cours résumé*
- Paulo RIBENBOIM. *Nombres premiers*
- Pierre SAMUEL. *Géométrie projective*
- Paul VER EECKE. *Fondements du calcul différentiel*
- Paul VER EECKE. *Applications du calcul différentiel*

L'étude des arcs paramétrés, puis des nappes est le point de départ qui permet de dégager la notion de variété, elle-même à la base de la géométrie différentielle.

C'est dire s'il est important de disposer de définitions rigoureuses, et généralisables.

Les coniques et les quadriques, cas particuliers d'arcs et de nappes, trouvent leur place dans ce livre, et leur étude permet de voir comment on peut utiliser tous les outils dont on dispose pour parvenir à ses fins : structures affines, transformations géométriques, aussi bien que les formes quadratiques, ou les fonctions implicites.

Les mathématiques forment un tout qu'il serait maladroit de fractionner en domaines sans rapports les uns avec les autres.