مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج٢)

الرياضيات التحليلية
بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الثاني
الحسن بن الهيثم

الدكتور رشدي راشد

ترجمة: د. محمد يوسف الحجيري

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الثاني

الحسن بن الهيثم

تُرْجِمَتْ هـذِهِ الأعمـالُ ونُشِـرَتْ
بِدَعْمٍ ماليٍّ مِنْ مدينةِ الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية،
ضِمْنَ مبادرةِ الملك عبد الله لِلْمحتوى العَرَبِيّ

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج٢)

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الثاني

الحسن بن الهيثم

الدكتور رشدي راشد

ترجمة: د. محمد يوسف الحجيري

مراجعة: نزيه يوسف المرعبي

الفهرسة أثناء النشر ـ إعداد مركز دراسات الوحدة العربية

راشد، رشدي

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة / رشدي راشد؛ ترجمة محمد يوسف الحجيري؛ مراجعة نزيه يوسف المرعبي.

٥ ج (ج ٢، ٥٣٦ ص). ـ (سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١٣/ج٢)
محتويات: ج ٢. الحسن بن الهيثم.
ببليوغرافية: ص ٥١٣ ـ ٥٢١.
يشتمل على فهرس الأسماء والمصطلحات.
ISBN 978-9953-82-374-4 (vol. 2)
ISBN 978-9953-82-372-0 (set)

١. الرياضيات عند العرب ـ تاريخ. ٢. ابن الهيثم، أبو علي محمد بن الحسن البصري. أ. الحجيري، محمد يوسف (مترجم). ب. المرعبي، نزيه يوسف (مراجع). ج. العنوان. د. السلسلة.

510.1

العنوان الأصلي بالفرنسية

Les Mathématiques infinitésimales
du IXème au XIème siècle
vol. 2: Ibn Al-Haytham

par Roshdi Rashed
(London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1993)

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ ـ ١١٣
الحمراء ـ بيروت ٢٤٠٧ ٢٠٣٤ ـ لبنان
تلفون: ٧٥٠٠٨٤ ـ ٧٥٠٠٨٥ ـ ٧٥٠٠٨٦ ـ ٧٥٠٠٨٧ (+٩٦١١)
برقياً: «مرعربي» ـ بيروت، فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (+٩٦١١)
e-mail: info@caus.org.lb Web Site: http://www.caus.org.lb

الطبعة الأولى
بيروت، ٢٠١١

المُحْتَوَيـــات

تقديـــم

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة
في سلسلة تاريخ العلوم عند العرب
ضمن مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي

يطيب لي أن أقدِّم لهذه المجلدات الخمسة في الرياضيات التحليليـــة بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، التي تُترجَمُ وتُنشَرُ بالتعـــاون بين **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية** ومركز **دراسات الوحـــدة العربية**، في إطار مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

تهدف هذه المبادرة إلى إثراء المحتوى العربي عبر عدد من المشاريع التي تنفّذها مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية بالتعاون مع جهات مختلفة داخل المملكة وخارجها. ومن هذه المشاريع ما يتعلق بترجمـــة الكتـــب العلمية الهامة، بهدف تزويد القارئ العربي بعلم نافع يفيد في التوجّه نحو مجتمع المعرفة والاقتصاد القائم عليها، ومنها ما يتعلق برقمنـــة المحتـــوى العربي الموجود ورقياً وإتاحته على الشبكة العالمية، الإنترنت.

يُعَدُّ هذا العمل، الذي يستند إلى إحدى عشرة مخطوطـــة عربيـــة، خطوة هامة في اكتشاف المخطوطات العربية العلميـــة وتحقيقهـــا، وفي إظهار وتحليل مدرسة عربية أصيلة في الرياضيات التحليليـــة والهندســـة ورياضيات اللامتناهيات في الصغر، مع تتبع علمائها وتطورها وإنتاجها وأصالتها.

وتبيِّن هذه المجلدات بشكل جليٍّ أن الحضارة العربيـــة الإســـلامية واللغة العربية قد قادت عربة المعرفة في مجالات العلم نحو أربعة قـــرون، وهذا يؤكّد ما أقرّه العالِم جورج سارتون في كتابه المرجعي **مـــدخل في تاريخ العلم**، كما أوضحت هذه المجلدات، أن العلماء العرب والمسلمين لم يكونوا نَقَلَةً لعِلْمِ غيرهم فقط بل أنتجوا العلوم الأصيلة، وكان منهم عباقرة كابن الهيثم.

إن مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية سعيدة بـــصدور هـــذه المجلدات الخمسة. وأود أن أشكر المؤلف، وأشـــكر مركـــز دراســـات الوحدة العربية على الجهود التي بذلها لتحقيق الجودة العالية في الترجمـــة والمراجعة، وعلى سرعة الإنجاز، كما أشكر زملائي في مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية الذين يتابعون تنفيذ مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

الرياض ١٠/٤/١٤٣٢ هـــ

رئيس مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية

د. محمد بن إبراهيم السويل

حَوْلَ تَرْجَمَةِ هَذا الكِتابِ

لقد صَدَرَ للأُسْتاذ رُشْدي راشِد باللُّغَةِ الفرنسيَّةِ خَمْسَةُ مُجَلَّداتٍ غايَـةً في الضَخامَةِ، وتَحْتَ عُنْوانٍ واحِدٍ: ***الرياضِيّاتُ التَحْليليَّةُ، ما بَيْنَ القَـرْنَيْن التاسِـع والحادي عَشَرَ – ابنُ الهَيْثم***. وتَجْدُرُ الإشارَةُ، وَفْقَ ما يَذْكُرُهُ المُؤَلِّفُ، إلى أنّ هذا المُجَلَّدَ رَغْمَ كَوْنِهِ الثاني من حَيْثُ التَرْتيبُ في المُجَلَّداتِ، إلاّ أنّه هُوَ الأوّلُ من حَيْثُ الشُروعُ بالتَناوُلِ الفِعْلِيِّ لأعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ الرياضِيَّةِ، الّتي أخَذَ رُشْدي راشِد عَلَـى عاتِقِهِ مُهِمَّةَ دِراسَتِها وتَحْقيقِها مُنْذُ زَمَنٍ بَعيدٍ.

وتَأْتي تَرْجَمَةُ هذا العَمَلِ العِلْمِيِّ الضَخْمِ، الّتي نَضَعُها في مُتَناوُلِ المُهْتَمّين من أهْلِ الضّادِ في سِياقِ جُهودِ فَريقِنا العِلْمِيِّ، نَعْني **فَريقَ الدِراسَةِ والبَحْثِ في التُراثِ العِلْمِيِّ العَرَبِيِّ**، الّذي دَأَبَ أعْضاؤهُ عَلَى تَرْجَمَةِ مُؤَلَّفاتِ رُشْدي راشِد، وذَلِـكَ بُغْيَةَ وَضْعِ القارِئِ العَرَبِيِّ في ضَوءِ ما اكتُشِفَ من حَقائِقَ جَديدَةٍ عن تَبَلْوُرِ وتَطَوُّرِ الفِكْرِ العِلْمِيِّ في الحِقْبَةِ العَرَبِيَّةِ، لا سِيَّما وإنّ غالبِيَّةَ تِلْكَ الحَقائِقِ لا تَزالُ مَغْمورَةً، وبَعْضُها مَطْموسٌ أو مُشَوَّهٌ.

سيُفاجَأ القارِئُ في هذا المُؤَلَّفِ بعُمْقِ الدِراسَةِ الشامِلَةِ الّتي يَقومُ بها المُؤَلِّـفُ عن شَخْصِ ابنِ الهَيْثَمِ حَيْثُ يَصِلُ إلى فَرَضِيَّةٍ استِقْرائِيَّةٍ مُوَثَّقَةٍ مَفادُها أنّه قد حَمَـلَ اسمَ ابنِ الهَيْثَمِ عالِمان اثْنانِ، هُما الحَسَنُ بنُ الهَيْثَمِ الرياضِيُّ الكَبيرُ ومُحَمَّدُ بنُ الهَيْثَمِ (الفَيْلَسوف)!

سَيَجِدُ القارِئُ نَفْسَهَ مُنْدَهِشاً أمامَ عُمْقِ المَسائِلِ والوَسائلِ المُبْتَكَرَةِ والنَتائِجِ الّتي تُطالِعُهُ في أبْحاثِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ الرياضِيَّةِ التَحْليليَّةِ: ففي الهِلالِيّاتِ مَثَلاً، وبَغَضِّ النَظَرِ عن المُحْتَوَى الرياضِيِّ المُهِمِّ لِهَذِهِ المَسْأَلَةِ الّتي تُلامِسُ ولو من بَعيدٍ العَلاقَةَ ما بَيْنَ الأعْدادِ الجَبْرِيَّةِ والمُتَسامِيَةِ، سَنَجِدُ أنّهُ من المُدْهِشِ أن يَسْتَخْدِمَ ابنُ الهَيْثَمِ في بَراهِينِهِ مَقولَةَ "الوُجودِ" للكائِناتِ الرِياضِيَّةِ بِمَعْناها المُجَرَّدِ فَيَنْأَى عن رَبْطِ

"الوُجودِ الرياضِيِّ" بِ "المَلْموسِيَّةِ" أو حتّى بإمْكانيَّةِ البناء؛ وهذا المَنْحَى بحَدِّ ذاتِهِ كافٍ للدَلالَةِ عَلَى عُمْقِ المَنْهَجيَّةِ المَعْرِفِيَّةِ لَدَى هذا العالِمِ وللدَلالَةِ، كذَلِكَ، عَلَى مَدَى دَفْعِ ابنِ الهَيْثَمِ "للكائناتِ الرياضِيَّةِ" من مُسْتَواها الحَدْسِيِّ التَجْريبيّ إلى مُسْتَوَى أرْقَى يُقارِبُ المُسْتَوَى النَظَرِيَّ المُجَرَّدَ لِلعِلمِ الرياضِيِّ. أمّا، في الحِساباتِ التَكامُلِيَّةِ، فسَنْجِدُ ابنَ الهَيْثَمِ، يَقومُ وببَراعَةٍ تِقَنِيَّةٍ تَحْليلِيَّةٍ فائِقَةٍ – قِياساً عَلَى ذَلِكَ العَصْرِ – ببِناءِ تَجْزئاتٍ لِلأشْكالِ الهَنْدَسِيَّةِ المُسَطَّحَةِ منها والمُجَسَّمَةِ، وبحِسابِ الجُموعِ التَكامُلِيَّةِ المُتَرَتِّبَةِ عَلَى ذَلِكَ عَبْرَ ما يُعادِلُ رياضِيّاً – بالمَعْنَى الحَديثِ – حِسابَ النِهايَةِ المُشْتَرَكَةِ لِلجَمْعَيْنِ التَكامُلِيَّيْنِ الأعْظَمِيِّ والأصْغَرِيِّ؛ والمُلْفِتُ في ذَلِكَ أنَّ تلكَ التِقَنِيَّةَ تُبْنَى عَلَى فِكْرَةِ مُقارَبَةِ المُثَلَّثِ المُنْحَني الإحاطَةِ اللاّمُتَناهي في الصِغَرِ بواسِطَةِ مُثَلَّثٍ مُسْتَقِيمِ الإحاطَةِ. والجَديرُ بالذِكْرِ، أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد ارْتَكَبَ هَفْوَةً مُتَعَلِّقَةً بمَحْدودِيَّةِ عَديدِ مُجَسَّماتِ إقليدس، ورَغْمَ ذَلِكَ فإنّ ما بَناهُ، حَتَّى عَلَى أساسِ هَذِهِ الهَفْوَةِ، يَمْتَلِكُ أهَمِيَّةً قُصْوَى من حَيْثُ البُنَى الرياضِيَّةُ المُسْتَحْدَثَةُ، وقد أثْبَتَ رُشْدي راشِد أنّ النَتائِجَ الّتي بَلَغَها ابنُ الهَيْثَمِ في ذَلِكَ شامِلَةٌ ومُسْتَقِلَّةٌ عن الهَفْوَةِ المُرْتَكَبَةِ.

لقد حاوَلْنا قَدْرَ الإمْكانِ في تَرْجَمَتِنا لِهَذا المُجَلَّدِ اسْتِخْدامَ المُصْطَلَحاتِ الرياضِيَّةِ الّتي اعْتَمَدَها ابنُ الهَيْثَمِ الّتي كانَت مُتَداوَلَةً في عَصْرِهِ، وحاوَلْنا كذَلِكَ قَدْرَ الإمْكانِ، أن نَنْتَقِيَ لِلمَفاهيمِ المُتَبَقِّيَةِ، أكْثَرَ المُصْطَلَحاتِ الرياضِيَّةِ انْتِشاراً وتَعْبيراً وبُعْداً عن اللَّبْسِ. وأحياناً قد تتفاوت المُصْطَلَحاتُ بشِدَّة بين قَديمِها وحَديثِها، كَأَن يُقالَ مَثَلاً: عَمَلٌ هَنْدَسِيّ (أي بناء هَنْدَسِيّ) أو المناظر (أي عِلْم البَصَرِيّات) أو هَيْئَةُ بطلَمْيوس (أي نموذج بطلَمْيوس الفلكيّ)...في هذه الحالةِ عَمَدنا إلى التَسْمِيَةِ المُتَداوَلَةِ حاليّاً استِبْعاداً مِنّا لِلَّبس، مع الإشارةِ إلى المُصْطَلَحِ القديم. وقد وَرَدَ في النَصِّ الأصْلِيِّ الفَرَنْسيِّ لِهَذا الكِتابِ الكَثيرُ من المُصْطَلَحاتِ الرياضِيَّةِ الحَديثَةِ الّتي اعْتَمَدْنا، غالباً وليس حَصْراً، في نَقْلِها إلى العَرَبِيَّة عَلَى:

مُعْجَم الرياضِيّات، بوروفسكي – بورفاين، تَرْجَمَة عَليّ الأشهر، بيروت ١٩٩٥.

ولّما كُنّا نُدْرِكُ جَيِّداً، كما يُدْرِكُ كُلُّ مَن نَقَلَ نُصوصاً رياضِيَّةً وعِلْمِيَّةً إلى العَرَبِيَّة، أنّ المَسْأَلَةَ في هذا المِضْمار مُعَقَّدَةٌ وتَكْتَنِفُها مَصاعِبُ شتَّى، فإنّنا نَشْكُرُ سَلَفاً أيَّ نَقْدٍ بَنّاءٍ في هذا الإطار. كما نَلْفِتُ نَظَرَ القارِئ الكَريم إلى ضَرورَةِ قِراءَةِ كُلِّ الصِيَغِ الرياضِيَّةِ الوارِدَةِ في نَصِّ التَرْجَمَةِ من اليَسارِ إلى اليَمين، أيْ كما تُقْرَأُ باللُّغَةِ الفَرَنْسيَّةِ. وتَجْدُرُ الإشارَةُ هنا إلَى أنّنا قد استَخْدَمْنا الصيغَةَ العَرَبِيَّةَ: "إثلاث الزاوِيَةِ"، كَتَرْجَمَةٍ مُخْتَصَرَةٍ للمُصْطَلَحِ الفَرَنْسيِّ: *trisection de l'angle*، الّذي يَعْني "قِسمَةَ الزاوِيَةِ إلى ثَلاثَةِ أقْسامٍ مُتَساوِيَةٍ". وقد يرِدُ في النصِّ أحْياناً شَكْلا كِتابَةٍ مُختَلِفان للدَلالَةِ على تَسْمِيَةٍ أعْجَمِيَّةٍ واحدةٍ. وغالِباً ما يعودُ سَبَبُ ذلك إلى اختلافِ طريقةِ كتابةِ تلك التسميةِ في النصوصِ المخطوطيّةِ المُختلِفَة. هذا ما نَجِدُهُ مثلاً في كَلِمَتَي منلاوس ومانالاوس. لقد عَمَدْنا في هذه الحالةِ إلى تَبَنّي ما هو أخَفُّ وَطأةً وأسْهَلُ كِتابةً.

وأخيراً، نَتَوَجَّهُ بالشُكْرِ إلى الأُسْتاذِ رُشْدي راشِد عَلَى مساعَدَتِهُ إيّانا في نَقْلِ هذا الجُزْءِ مِن مُؤَلَّفِهِ المُمَيَّزِ إلى العَرَبِيَّةِ، ونَشْكُرُ الدكتورَ نَزيهَ عَبْدَ القادِرِ المِرْعِبِيَّ عَلَى مُراجَعَتِهِ المُتَأَنِّيَّةِ والدَقيقَةِ لِنَصِّ التَرْجَمَةِ، ونَشْكُرُ أيضاً الأسْتاذَ بَدَوي المَبْسوط عَلَى ملاحَظاتِهِ المفيدة، كما نُنَوِّهُ بالجُهودِ الكَبيرَةِ المَشْكورَةِ لِلسَيِّدَةِ جاهِدَة الحُجَيْريّ الّتي قامَت بكِتابَةِ التَرْجَمَةِ عَلَى الحاسوبِ وتَنْسيقِ الصِيَغِ الرياضِيَّةِ والرُسومِ، فَضْلاً عن تَبَرُّعِها بِتَشْكيلِ النَصِّ المُترجَمِ كُرمَى لِذِكْرى ابنِ الهَيْثَمِ.

محمّد يوسُف الحُجَيْريّ*

طرابلس، كانون الأوّل ٢٠١٠

---

* **فريقُ الدِراسَةِ والبحثِ في التراث العلميّ: الجامعة اللّبنانيّة (كليّة الهندسة) والمجلس الوطنيّ للبحوث العلميّة – لبنان.**

رَأَيْنا في السِفْرِ الأوَّلِ من هَذا الكِتابِ نَشْأَةَ وتَطَوُّرَ هَنْدَسَــةِ اللاَّمُتَناهِيَــةِ في الصِغَرِ وبِداياتِ التَحْليلِ الرياضِيِّ في العَرَبِيَّةِ عَلَى أَيْدي فُحــولِ الرياضِــيِّين بَــيْنَ مُنْتَصَفِ القَرْنِ الثالِثِ ومُنْتَصَفِ القَرْنِ الخامِسِ، وبَيَّنّا فيما حَقَّقْناهُ مِــن آثــارِهم حَرَكَةً دائِبَةً في داخِلِ تَقْليدٍ رياضِيٍّ مُتَكامِلٍ، عِمادُها القُــدْرَةُ والمَعْرِفَــةُ والنَقْــدُ، تَوارَثَتْها الأجْيالُ، أَوْرَثَ كُلُّ جيلٍ منها جيلاً بَعْدَهُ، ما يَكونُ به أَشَدَّ خِبْرَةً وأبْعَــدَ نَظَراً وأَوْقَفْنا كُلَّ هَذا عَلَى حَقيقَتَيْنِ اثْنَتَيْنِ لا يُمْكِنُ لِمُؤَرِّخِ الرياضِيّاتِ في الإسْــلامِ التَغاضي عَنْهُما: إحْداهُما أنّ البَحْثَ الرياضِيَّ الأَكْثَرَ تَقَدُّماً والأبْعَدَ مَنالاً – مِثْــلَ هذا الفَرْعِ من الرياضِيّات – لم يَعْقُبْ نَقْلَ التُراثِ اليونانيِّ إلى العَرَبِيَّةِ بل لازَمَــهُ وصاحَبَهُ، والأُخْرَى أنّنا لن نَفْهَمَ حَقَّ الفَهْمِ تاريخَ الرياضِيّاتِ في تِلْكَ الحِقْبَةِ إن لم نَرْجِعْ إلى هَذِهِ الحَرَكَةِ الدائِبَةِ لِوَصْفِها وإلى التَقاليدِ المُتَكامِلَةِ والمُتَعَدِّدَةِ لِرَسْمِها.

وفي هَذا السِفْرِ الثاني سَنَرَى أنّ هَذا التَقْليدَ الّذي بَدَأَ بِبَني موسَى والكِنْدِيِّ* وازْدَهَرَ مع ثابِتِ بنِ قُرَّة وخُلَفائِهِ بَلَغَ أَوْجَهُ مع الحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ البَصْرِيِّ المَوْلِدِ القاهِرِيِّ الإقامَةِ. فلقد كَتَبَ ابنُ الهَيْثَمِ في هَذا الفَصْلِ ما يَقْرُبُ من ثَــلاثَ عَشْرَةَ رِسالَةً وصَلَ إلينا منها سَبْعٌ فَقَط تَنْقَسِمُ إلى ثَلاثِ مَجْموعــاتٍ. وتَتَنــاوَلُ الأُولَى منها مِساحَةَ الأشْكالِ الهِلالِيَّةِ ومِساحَةَ الــدائِرَةِ وتَرْبيعَهــا، أي مِــساحَةَ السُطوحِ الّتي تَحُدُّها أَقْواسُ دَوائِرَ؛ وَصَلَ إِلَيْنا منها ثَلاثُ رَســائِلَ فَقَــط. أمّــا المَجْموعَةُ الثانِيَةُ فَتُعالِجُ مِساحَةَ المُجَسَّماتِ المُنْحَنِيَةِ – المُجَسَّم المكافئ والكُــرَة – وكذَلِكَ مَنْهَجَ التَقْريبِ الّذي تَقومُ عَلَيْهِ؛ وَصَلَ إِلَيْنا منها كذَلِكَ ثَلاثُ رَسائِلَ. أمّا

---

* انْظُرْ:

R. Rashed, «Al-Kindī Commentary on Archimedes' The Measurement of the Circle*»,* Arabic sciences and philosophy*, 3, 1 (1993), pp. 7-53.*

الثالِثَةُ فهِيَ تَبْحَثُ في الخُطوطِ والمِساحَاتِ والحُجومِ القُصْوَى؛ وَصَلَ إلَيْنا منها رِسالَةٌ واحِدَةٌ. أضِف إلى هَذا مَجْموعَةً رابعَةً – من رِسالَتَيْنِ – تَنْظُرُ في اسْتِخْراجِ الجُذور. هَذا كُلُّ ما بَيْنَ أيْدينا، وهي تِسْعُ رَسائلَ جَمَعْناها في هَذا السِفْر. والجَديرُ بالذِكْرِ أنّ ثَمانيَةً منها لم تُحَقَّقْ إلى يَومِنا هَذا، أمّا التاسِعَةُ وهي أصْغَرُها جَميعاً فقد نَشَرَها هـ. سوتر سنة ١٨٩٩ نَشْرَةً مُؤَقَّتَةً كانَ علينا إعادَتُها. وفي هَذا الفَصْلِ من الرياضِيّات يَسْلُكُ الحَسَنُ بنُ الهَيْثَمِ مَسْلَكَهُ في الفُصولِ الأُخْرَى من العُلومِ الرياضِيَّة – من رياضِيّاتٍ وفَلَكٍ ومَناظِرَ – فهُوَ يَتَعَرَّضُ بالنَقْدِ لِما وَرِثَهُ من سابقيهِ لِيَزيدَهُ إحْكاماً ويَقيناً. ويَأخُذُ سُبُلَ مَنْ خَلَفَهُم لِيَبْلُغَ بها نِهايَتَها المَنْطِقِيَّةَ والتِقَنِيَّةَ، ويأتي بما لم يَأتِ به الأوائِلُ. فابنُ الهَيْثَمِ لم يَتَوانَ عن نَقْدِ إقليدسَ وبَطْلَميوسَ و لم يَتَرَدَّدْ في الأخْذِ عَلَى ثابتٍ بن قُرَّة وابراهيمَ بنِ سِنانٍ، مع تَقْديرِهِ لهم جَميعاً وأخْذِهِ عَنْهُم، وما نُذَكِّرُ به هنا ما هُوَ إلاّ صِفات التَجْديدِ المُسْتَمِرِّ في داخِلِ تَقْليدٍ حَيٍّ نابض.

وحينَ بَدَأتُ مُنْذُ أكْثَرَ من عَقْدَيْنِ العَمَلَ عَلَى تَحْقيقِ ودِراسَةِ أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ الرياضِيَّةِ من أجْلِ كَشْفِ المَناهِجِ الّتي انْطَوَت عَلَيْها وتَبَيُّنِ النَتائِجِ الّتي تَضَمَّنَتْها وأثَرِ هَذِهِ وتِلْكَ في تاريخِ الرياضِيّاتِ، وَجَدْتُ نَفْسي حينَئِذٍ أمامَ السُؤالِ السابِقِ ومن ثَمّ أمامَ نَهْجَيْنِ، أوَّلُهُما هُوَ النَظَرُ إلَيْها وفَحْصُها من خِلالِ التَقْليدِ الّذي أبْلَغَتْهُ نهايَتَهُ، وثانيهُما هُوَ دِراسَتُها ونَشْرُها وَحْدَها بدون اعْتِبارٍ لِهَذا التَقْليدِ. وأوّلُ النَهْجَيْنِ هُوَ أفْضَلُهما وإن كانَ وَعِرَ المَسْلَكِ، لأنّهُ يُحَتِّمُ عَلَيْنا تَحْقيقَ ودِراسَةَ العَديدِ من المُؤَلَّفاتِ والتَأْريخَ لِفَصْلٍ كامِلٍ من فُصولِ الرياضِيّاتِ، وهَذا غَيْرُ مُمْكِنٍ في كُلِّ الأحْوالِ. وعَلَى الرَّغْمِ من صُعوبَةِ هَذا الطَريقِ، سَلَكْناهُ حَتّى نَضَعَ أمامَ القارِئِ فَصْلاً كامِلاً من فُصولِ الرياضِيّات، فكانَ السِفْرُ الأوّلُ والسِفْرُ الثاني. وهنا واجَهَتْنا عَقَبَةٌ جَديدَةٌ كَثيراً ما يُواجِهُ مِثْلَها مُؤَرِّخو العُلومِ في الإسْلامِ، أعْني تَشَتُّتَ مُؤَلَّفاتِ الرياضِيِّين في أنْحاءِ المَعْمورَةِ وغِيابَ الفَهارس الشامِلَةِ. ومِمّا زادَ الأمْرَ صُعوبَةً خَلْطٌ قَديمٌ وَقَعَ فيه كُلُّ مَن كَتَبَ عن ابنِ الهَيْثَمِ مُنْذُ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة بَيْنَ

صاحِبنا وفَيْلَسوفٍ بَغْداديٍّ مُعاصِرٍ له هُوَ مُحَمَّدٌ بنُ الهَيْثَم. فَنَسَبَ البَعْضُ إلى الحَسَنِ ما كَتَبَهُ مَحَمَّدٌ، وقَرَأَ آخَرونَ في كُتُبِ هَذا الأخيرِ آراءَ الأوّل. فَصارَ حَقّاً عَلَيَّ واجباً أن أجْمَعَ كُلَّ آثارِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ وأن أُمَيِّزَها مِن مُؤَلَّفاتِ مُحَمَّدٍ بنِ الهَيْثَمِ، وأن أدْرُسَها دِراسَةً رِياضِيَّةً وتاريخِيَّةً مُتَأَنِّيَةً، وأنْقُلَها إلى إحْدَى اللُّغاتِ الأوروبيَّةِ حَتَّى يَتَسَنَّى لِلمُؤَرِّخين الاسْتِفادَةُ منها. فَجُمْهَرَتُهُم تَجْهَلُ العَرَبِيَّةَ أو لم تَبْلُغْ فيها مَبْلَغاً من المَعْرِفَةِ يُعينُها عَلَى فَهْمِها حَقَّ الفَهْم. هَذا ما فَعَلْتُهُ في هَذا السِفْرِ حَوْلَ رِياضِيّاتِ اللاّمُتَناهِيَاتِ تارِكاً لأسْفارٍ أُخْرَى ما تَبَقَّى من رَسائِلِهِ الرِياضِيَّةِ.

وسَيَرَى القارِئُ أنّ الحَسَنَ بنَ الهَيْثَمِ وَصَلَ بدِراسَةِ الأهِلَّةِ عَلَى مَقْرُبَةٍ مِن الرِياضِيِّ السويسريّ أُيلر *Euler*، ودَفَعَ بحساب التَكامُلِ خُطواتٍ ظَنَّ البَعْضُ أنّها لم تَكُنْ قَبْلَ كِپلر وكاڤليري في القَرْنِ السابعِ عَشَرَ، وسَيَرَى كذَلِكَ أنّه أوّلُ مَن بَحْثَ في الزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ حَقَّ البَحْثِ أثْناءَ دِراسَتِهِ للسُطوحِ والأجْسامِ القُصْوَى، وأنّه أوّلُ مَن سَلَكَ في هَذا البَحْثِ طَريقاً جَمَعَ فيه بَيْنَ الإسْقاطاتِ الهَنْدَسِيَّةِ والمَناهِجِ التَحْليلِيَّةِ.

وآثَرْتُ في هَذا السِفْرِ – كما فَعَلْتُ في السِفْرِ الأوّلِ – تَطْبيقَ أكْثَرِ القَواعِدِ صَرامَةً في التَحْقيقِ، وأن لا أَدَعَ قَضِيَّةً ولا بُرْهاناً ولا فِكْرَةً إلاّ شَرَحْتُها في المُقَدِّماتِ، وأن أُلْحِقَ بآخِرِهِ نُصوصاً وتَعْليقاتٍ لا غِنَى عنها. وقد وَقَعَ لي أثْناءَ هَذا كُلِّهِ اجْتِهاداتٌ لُغَوِيَّةٌ ورياضِيَّةٌ أرْجو أن يُوافِقَني عَلَيْها أهْلُ اللُّغَةِ والعِلْمِ والتَحْقيقِ وأن يَعْفوا عن الزَلَلِ، وحَسْبِي أنّي بَذَلْتُ كُلَّ ما أسْتَطيعُ.

رُشْدي راشِد

باريس١٩٩٣

تَمْهيد

تُوجَدُ بَيْنَ العُلَماءِ فِئَةٌ مُمَيَّزَةٌ نادِرَةٌ جدّاً مِمَّن يُنْجزونَ تَقْليداً عِلْمِيّاً عَبْرَ إعادَةِ تَأْسيسِ مَنْحاهِ. ويَسْتَطيعُ هَؤلاءِ العُلَماءُ في غِمارِ عَمَلِهِم هَذا، أن يَسْلُكوا مَسالِكَ مُتَنَوِّعَةً، ولَكِنَّها تَقودُ كُلُّها نَحْوَ إدْراكِ الجَديدِ الَّذي يَنْضَجُ في القَديمِ، ونَحْوَ ابْتِكارِ الوَسائِلِ الأكْثَرِ مُلاءَمَةً لإظْهارِهِ. أمّا المَقْصودُ بِ"الإنْجاز" بِهَذا المَعْنَى، فهُوَ أن تُستَقَى من الماضي كُلُّ المُعْطَياتِ الكامِنَةِ الّتي تُثْقِلُهُ، فَضْلاً عن التَفَكُّرِ بالإمْكانيّاتِ الجَديدَةِ، وبِناءِ الوَسائِلِ الكَفيلَةِ بِتَحْقيقِها. ولا تُنْجَزُ التَقاليدُ العِلْمِيَّةُ إلاّ بِمُحَصّلَةِ عِلْمٍ مُظَفَّرٍ، حَيْثُ يَتَبَلوَرُ ذَلِكَ في نِتاجِ عُلَماءٍ، يَرْتَكِزُ الخَلَفُ مِنْهُم عَلَى أعْمالِ العِظامِ مِنَ السَلَفِ. يَنْتَمي ابنُ الهَيْثَمِ إلَى هَذِهِ الفِئَةِ من العُلَماءِ، فَقَد كانَ، كأقْرانٍ لَهُ، مُبْتِكِراً في العُلومِ الرياضِيَّةِ في عَصْرِهِ. فَلْنُمْعِنِ التَفْكيرَ بإصْلاحِهِ لعِلْمِ البَصَرِيّاتِ، وبِشَكْلٍ عامٍّ للفيزياءِ، وَلْنَسْتَرْجِعْ نَقْدَهُ المُوَجَّهَ إلى نَموذَجِ بَطْلَمْيُوسَ في عِلْمِ الفَلَكِ، وبُعْدَ نَظَرِهِ فيما يَخُصُّ البَحْثَ المُسْتَقْبَلِيَّ، وَلْنَتَذَكَّرْ أخيراً مُساهَماتِهِ في مُخْتَلِفِ فُصولِ الرياضِيّاتِ، وبالأخَصِّ في الرياضِيّاتِ التَحْليلِيَّةِ، ومِنْها تِلْكَ الّتي تَتَناوَلُ التَقْطيعاتِ المُنْتَهِيَةَ، ولَكِن الّتي تُتابَعُ تَجْزِئَتُها المُحَسَّنَةُ إلَى ما لانِهايَة. وهَذا عَلَى أيِّ حالٍ ما نَرْمي إلَى تِبْيانِهِ في هَذا المُجَلَّدِ.

لَقَدْ شَهِدْنا في المُجَلَّدِ الأوّلِ تَكَوُّنَ البَحْثِ في هَذا المجالِ مِن مُنْتَصَفِ القَرْنِ التاسعِ وحَتَّى نِهايَةِ القَرْنِ اللاَّحِقِ. حَيْثُ كانَت النُصوصُ المُحَقَّقَةُ والمُتَرْجَمَةُ والشُروحُ المُرافِقَةُ بمَثابَةِ تَمْهيدٍ يُبْرِزُ التَطَوُّرَ والتَحَوُّلَ في البَحْثِ الأرشميديِّ، قُبَيْلَ ظُهورِ أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ. ولَقَدْ صادَفْنا عَلَى هَذا الدَرْبِ الطَويلِ بَني موسَى،

وثابتاً بنَ قُرَّة وحَفيدَهُ ابراهيمَ بنَ سِنانٍ، والخازنَ وابنَ سَهْلٍ والقوهيَّ. وتُؤَكِّدُ هَذِهِ الأسْماءُ، بما يَفيضُ مِنْها مِنْ وَهْجٍ، المَكانَةَ الرَفيعَةَ الّتي تَبَوَّأَها الأرشميـــديُّون عَلَـــى مَدَى قَرْنٍ ونصْفٍ عَلَى الأقَلِّ، إذ لَم يَنْحَصِرِ اهْتِمامُ هَؤلاءِ الرياضِيِّينَ بالرياضِـــيّاتِ التَحْليلِيَّةِ فَحَسْب، إنّما تَعَدّاها أيضاً إلَى تَطْويرٍ للبَحْثِ في التَحْـــويلاتِ الهَنْدَسِـــيَّةِ والإسْقاطاتِ. هَذا هُوَ مُجْمَلُ النِتاجِ الَّذي وَرِثَهُ ابنُ الهَيْثَم، وهَذا هُوَ التَقْليدُ الغَنِيُّ النابِضُ بالحياةِ الَّذي عَمَدَ إلَى تَجْديدِهِ.

إنّ هَذا المُجَلَّدَ المُخَصَّصَ بأكْمَلِهِ لإعادَةِ رَسْمِ هَذا الحَدَثِ التاريخِيِّ، مَكَرَّسٌ إذاً، لِتَناوُلِ أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ في الرِياضِيّاتِ التَحْليلِيَّةِ. سَنَرَى أنّ ابنَ الهَيْثَمِ تَحْديداً، كَوَريثٍ لبقراط الخيوسي (Hippocrate de Chios)، هُوَ من جَدَّدَ بِشَكْلٍ جَـــذْرِيٍّ دِراسَةَ الهِلالِيّاتِ لَكِنَّ نتاجَهُ كانَ قَرْيباً جدّاً من أعْمالِ أويلر (Euler). وابنُ الهَيْـــثَمِ هُوَ تَحْديداً مَنْ طَوَّرَ بَعيداً طُرُقَ التَكامُلِ القَديمَةِ بِمَعْناها اللاّمُتَناهي في الصِغَرِ: فَقَد تَأَتَّى لَهُ في هَذا المِضْمارِ الوُصولُ إلَى نَتائِجَ اكتَـــشَفَها لاحِقـــاً كبلـــر (Kepler) وكاڤليري (Cavalieri). وأخيراً، فإنّ ابنَ الهَيْثَمِ هُوَ أوّلُ مَن باشَرَ البَحْثَ الفِعْلِـــيَّ حَوْلَ الزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ، وذَلِكَ من خِلالِ دِراساتِهِ لِمَـــسألَتَي الخُطـــوطِ المُحيطَـــةِ بأشْكالٍ في سُطوحٍ والمِساحاتِ المُحيطَةِ بِمُجَسَّماتٍ، عَبْرَ دَمْجِهِ، ولأوّلِ مَـــرَّةٍ في التاريخِ وَفْقَ مَعْرِفَتِنا، ما بَيْنَ الإسْقاطاتِ وتَحْديداتِ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ. سَوْفَ نُطالِعُ في المُجَلَّدِ الثالِثِ تاريخَ هَذِهِ الفُصول، حَيْثُ سَتَتِمُّ مُعالَجَةُ كُلِّ هَذِهِ النِقـــاطِ بإسْهابٍ. أمّا هُنا، وفي هَذا المَجالِ، فَسَنَضَعُ أمامَ القارئِ، التَحْقيقَ الأوّلَ لِثَمانِيَةٍ من أصْلِ تِسْعَةِ أعْمالٍ وصَلَتْ إلَينا حَتَّى اليَوْمِ، فَضْلاً عن التَحْليلِ المُفَصَّلِ للنُـــصوصِ. وتَرِدُ قَبْلَ النُصوصِ والتَحْقيقاتِ مِقَدِّمَةٌ تَهْدِفُ إلَى استِخْلاصِ الوَقائعِ، وبأكْبَرِ قَدْرٍ مُمْكِنٍ مِنَ الدِقَّةِ، عن شَخْصِيَّةِ ابنِ الهَيْثَمِ وقِصَّةِ مُؤَلَّفاتِهِ، وذَلِكَ بُغْيَةَ تَبْديدِ الالتِباسِ الَّذي نَعْتَقِدُ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد كانَ ضَحِيَّةً لَهُ. وهَذا المُجَلَّدُ، رَغْمَ كَوْنِهِ الثاني في هَذِهِ

المَجْموعَةِ، فَبِذِهْننا أن يَكونَ الأوّلَ حَوْلَ الأعْمالِ الرِياضِيَّةِ لابنِ الهَيْثَمِ، الّتي أخَذْنا عَلَى عاتِقِنا تَحْقيقَها وتَرْجَمَتَها وتَحْليلَها، وذَلِكَ مُنْذُ زَمَنٍ بَعيدٍ.

رُشْدي راشِد

بورلارين، أكتوبر ١٩٩٢

مُلاحَظَةٌ حَوْلَ التَرْميزِ المُعْتَمَدِ في الكِتابِ

إضافَةً إلى التَرْميز التَقليدِيِّ المُتَعارَفِ عَلَيْهِ في كِتابَةِ التَعابيرِ والصِيَغِ الرِياضِيَّةِ، سوف نَعْتَمِدُ الرُموزَ التالِيَةَ:

الهَرَم الدائريّ P	*pyr.circ.(P)* *pyram.circ.(P)*
قاعِدَةُ الشَكْل P	*base de P*
الشَكْل F	*fig.(F)*
المُعَيَّن L	*Losange(L)*
الزاوِيَة المُجَسَّمَة A	*angle sol(A)* *angle solide(A)*
الهَرَم المُنْحَني الإحاطَة P	*pyr.curv.(P)* *pyram.curv.(P*
المُجَسَّم S	*sol.(S)* *solide.(S)*
مِساحَة الشَكْل F	*aire(F)*
الهَرَم P	*pyram.(P)* *pyr.(P)*
مِقدارٌ ثابتٌ	*const*

المُثَلَّث T	*tr.(T)*
الهِلال L	*lun.(L)*
القِطْعة P	*port.(P)* *portion.(P)*
المُرَبَّع C	*carré(C)*
القِطاعُ S	*sect.(S)*
الدائرة C	*cercle(C)*
القِطْعة A	*segm.(A)*
رُباعِيُّ الأضْلاعِ Q	*quadr.(Q)*
مِساحَةُ المُثَلَّثِ T	*aire tr(T)*
مِساحَةُ القِطاعِ S	*aire sect(S)*

- يُسْتَعْمَلُ المُزدَوِجان < > لِلدلالَةِ على ما أُضيفَ إلَى النَصِّ المَخْطوطيِّ لِسَدِّ نَقْصٍ طارئ ما.
- يُسْتَعْمَلُ المُزدَوِجان [ ] لِلدلالَةِ على ما يُقْتَرَحُ حَذفُهُ من النَصِّ المَخْطوطيِّ لِيُصبِحَ المَعْنَى سَوِيّاً.
- يُسْتَعْمَلُ الفاصِلُ / لِلدلالَةِ على نِهايَةِ صَفْحَةٍ من النَصِّ المَخْطوطيِّ.

مُقَدِّمَة

ابنُ الهَيْثَمِ وأعْمالُهُ في الرِياضِيّاتِ التَحْليلِيَّةِ

١- ابنُ الهَيْثَمِ: من البَصْرَةِ إلَى القاهِرَةِ

لا يَتَجاوَزُ عَدَدُ الرِياضِيِّينَ، الَّذين كَتَبوا بالعَرَبِيَّةِ وحازوا شُهْرَةَ ابنِ الهَيْثَمِ، عَدَدَ أصابِعِ الكَفِّ الواحِدَةِ. فَهَذا الرِياضِيُّ بل والفيزيائِيُّ أيضاً، قد حَظِيَ سَريعاً بِشُهْرَةٍ شامِلَةٍ، بَدَأت لَدَى أهْلِ الضادِ مَشْرِقاً، فمَغْرِباً، وانْتَقَلَت لاحِقاً إلَى اللاّتينِيَّةِ، تَحْتَ تَسْمِيَةِ (Alhazen) المَشْهورَةِ، والمُشْتَقَّةِ من اسمِ ابنِ الهَيْثَمِ الشَخْصِيِّ، وهُوَ الحَسَنُ، وكذَلِكَ الأمْرُ باللُّغَتَيْنِ العِبْرِيَّةِ والإيطالِيَّةِ، حَيْثُ تُطالِعُنا تَرْجَماتُ أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ في عِلْمِ البَصَرِيّاتِ وعِلْمِ الفَلَكِ والرياضِيّاتِ.

ولَكِنَّ تِلْكَ الشُهْرَةَ، القائِمَةَ عَلَى أهَمِيَّةِ مُساهَماتِ ابنِ الهَيْثَمِ والتَحَوُّلاتِ العِلْمِيَّةِ المُرْتَبِطَةِ بِها، تُناقِضُ بِشَكْلٍ غَريبٍ نَدْرَةَ المَعْلوماتِ شِبْهِ المَحْجوبَةِ، والمُكتَشَفَةِ بصُعوبَةٍ كَبيرَةٍ حَوْلَ الرَجُلِ وأساتِذَتِهِ والوَسَطِ العِلْمِيِّ الَّذي نَشَأَ فيهِ. عِلاوَةً عَلَى ذَلِكَ، فإنّ هَذا العالِمَ المَوْسوعِيَّ الَّذي اعْتَرَفَ بِهِ الجَميعُ، وفي كُلِّ الأمْكِنَةِ، الَّذي سُمِّيَ في القَرْنِ الثاني عَشَرَ *بَطْلَمْيوس الثاني*، تَعْبيراً عن احْتِرامِ مَكانَتِهِ العِلْمِيَّةِ، قد أُحيطَ فيما بعد بِهالَةٍ أُسْطورِيَّةٍ بِسَبَبِ عِظَمِ وأهَمِيَّةِ نتاجِهِ العِلْمِيِّ. ولِذَلِكَ فإنّ مَصادِرَنا تَقْتَصِرُ عَلَى حِكاياتٍ تَناقَلَها قُدَماءُ المُفَهْرِسينَ، حَيْثُ تَخْتَلِطُ فيها الأساطيرُ بِما نَدَرَ من الشَهادَاتِ التاريخِيَّةِ. ويُعيدُ نَشْرَ هَذِهِ الحِكاياتِ، أيضاً

المُفَهْرِسونَ المُحْدَثون وذَلِكَ بشَكْلٍ كُلّيٍّ أو جُزْئِيٍّ[1]، غَيْرَ أنَّ نَظْرَةً مُتَفَحِّصَةً واحِدَةً، مَهْما تَدَنَّى مُسْتَواها النَقْدِيُّ، ستَكونُ كافِيَةً لاستِخْلاصِ تَناقُضاتِ تِلْكَ الرِوايات، وجَلاءِ الالتِباساتِ المُحيطَةِ بشَخْصِ ابنِ الهَيْثَمِ وسيرَتِهِ وبَعْضِ مُؤَلَّفاتِهِ، والمُتَعَلِّقَةِ حَتَّى باسْمِهِ بالذات. وتَعودُ بَعْضُ أسْبابِ هَذِهِ التَناقُضاتِ والالتِباساتِ إلَى الأُسْلوبِ الأدبيِّ للفَهارِسِ الّتي تَتَناوَلُ سِيَرَ العُلَماءِ والفَلاسِفَةِ.

نَحْنُ نَعْلَمُ أهَمِيَّةَ العُلومِ التاريخِيَّةِ في التَقْليدِ الإسْلامِيِّ، كما نُدرِكُ التَطَوُّرَ غَيْرَ المَسْبوقِ في تَأْليفِ الحَوْلِيّاتِ والمُدَوَّناتِ وكُتُبِ طَبَقاتِ الفُقَهاءِ والنُحاةِ والعُلَماءِ إلخ. وفي هَذِهِ المَراجِعِ يُذْكَرُ المُؤَلِّفونَ، فَتَرِدُ السيرَةُ الذاتيَّةُ لِكُلِّ واحِدٍ مِنْهُم، فَضْلاً عن لائِحَةِ مُؤَلَّفاتِهِ، وأحْياناً تَرِدُ شَهادَاتُ مُعاصِرِيهِ أو من أتَى بَعْدَهُ، لِتُفيدَ عن مَكانَةِ وأهَمِيَّةِ نِتاجِهِ العِلْمِيِّ. غَيْرَ أنّ هَؤلاءِ المُفَهْرِسينَ، خِلافاً لِزُمَلائِهِم من رِجالِ

---

[1] إنّ نَبَذاتِ السيرَةِ الذاتِيَّةِ والفَهارِسِ عن ابنِ الهَيْثَمِ مُتَعَدِّدَةٌ نِسْبِيّاً، وتَسْتَنِدُ في غالِبِيَّتِها إلَى ابنِ أبي أُصَيْبِعَة. لِنَسْتَعْرِضْ بَعْضَها:

H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Leipzig, 1990); Johnson Reprint (New York, 1972), pp. 91-95.

C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Literatur*, 2[e] éd., I (Leiden, 1943), pp. 617-619 (1[e] éd., pp. 469-470); Suppl. I (Leiden, 1937), pp. 851-854; Suppl. III (Leiden, 1942), p. 1240.

F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, V (Leiden, 1974), pp. 358-374.

انْظُرْ كذَلِكَ المُجَلَّدَ السادِسَ، (لايدن ١٩٧٨)، ص ٢٥١–٢٦١.

G. Nebbia, «Ibn al-Haytham, nel millesimo anniversario della nascita», *Physis* IX, 2 (1967), pp. 165-214.

مَقالَة عبد الحميد صبرة (*A. Sabra*) المُكَرَّسَة لابنِ الهَيْثَمِ في:

Dictionary of Scientific Biography, éd. Ch. Gillispie, vol. VI (New York, 1972), pp. 204-208; *The Optics of Ibn al-Haytham. Books I-III*, On Direct Vision, 2 vol. (Londres, 1989), vol. II, pp. XIX-XXXIV.

ويَجِبُ أن نُضيفَ إلى ذَلِكَ الدِراساتِ التالِيَةَ أيضاً:

E. Wiedemann, «Ibn al-Haitam, ein arabischer Gelehrter», *Festschrift J. Rosenthal* gewidmet (Leipzig, 1906), pp. 149-178.

مُصْطَفَى نَظيف، ***الحَسَنُ بن الهَيْثَمِ، بُحوثُهُ و كُشوفُهُ البَصَرِيَّة***، مُجَلَّدَان. (القاهِرَة ١٩٤٢–١٩٤٣)، وتحديداً الجُزْء الأوّل، ص ١٠–٢٩.

M. Schramm, *Ibn al-Haythams Weg zur Physik* (Wiesbaden, 1963), pp. 274-285.

الحَديثِ النَبَويِّ، لَم يَكونوا دَوْماً عَلَى المُسْتَوَى المَطْلوب مِنَ الدِقَّةِ، ولَـم يُطَبِّقـوا المَعاييرَ الّتي اعْتَمَدَها رِجالُ الحَديثِ سابقو الذِكْرِ بُغْيَةَ نَقْدِ الرواياتِ ونَقَلَتِها. بـل بالعَكْسِ، فَقَد كانَ المُفَهْرِسونَ القُدَماءُ غَيْرَ مُبالينَ بَعْضَ الشَيْءِ بالتَناقُضاتِ، فغالِباً ما أَوْرَدوا حِكاياتٍ روائِيَّةً ظَريفَةً وجَذّابَةً، بِهَدَفِ لَفْتِ انْتِباهِ القـارِئِ وإغْرائِـهِ. وكانَت رِواياتُهُم مَحْكومَةً بالرَغْبَةِ في رَسْمِ صورَةٍ لِلعالِمِ والفَيْلَـسوفِ مُطابقَـةٍ لِلنَموذَجِ المِثالِيِّ في ذَلِكَ العَصْرِ، الَّذي يَتَمَثَّلُ بحَكيمٍ مُتَرَفِّعٍ ومُتَسامِحٍ كَرَّسَ حَياتَهُ بِأَكْمَلِها للبَحْثِ عن الحَقيقَةِ الّتي لا يُمْكِنُ أن تَتَعارَضَ مع الوَحْيِ. وباخْتِصارٍ، فَقَد كانَت النَـزَعاتُ الخَيالِيَّةُ سِمَةً مُتَعَمَّدَةً لِهَذِهِ الحِكاياتِ الفَهْرِسِيَّةِ، مـا يَعْـني أنّ اسْتِخْدامَ هَذِهِ المَصادِرِ يَسْتَدْعي دِراسَةً نَقْدِيَّةً مُدَقِّقَةً، كانَت طَيَّ النِسْيانِ في أغْلَبِ الأحْيانِ.

ومِثالُ ابنِ الهَيْثَمِ في هَذا الصَدَدِ نَموذَجِيٌّ: فالرَغْبَةُ في اللُّجوءِ إلَى الخَيالِ لَدَى المُفَهْرِسينَ كانَت قَوِيّةً، لا سِيَّما وأنّ ابنَ الهَيْثَمِ لم يَكُنْ عالِماً مُتَمَيِّزاً فَحَسْب، إنّما ارْتَبَطَ أمْرُهُ، عِلاوَةً عَلَى ذَلِكَ، بالخَليفَةِ الحاكِمِ، أي بشَخْصِيَّةٍ فَريدَةٍ من نَوْعِها، في أدْنَى تَقْديرٍ. فَشَخْصُ هَذا الخَليفَةِ، الَّذي اعْتُبِرَ، لَدَى البَعْضِ، مُتَكَبِّراً مُتَقَلِّباً مُضْطَرِباً عَنيفاً، في حين عَدَّهُ البَعْضُ الآخَرُ، بكِلِّ بَساطَةٍ، رَبّاً يُعْبَدُ، لا بُدَّ أن يُغْرِيَ حِـسَّ المُبالَغَةِ الروائِيَّةِ لَدَى كُتّابِ الحَوْلِيّاتِ والمُؤَرِّخينَ. فَلَرُبَّما كانَ لِقـاءٌ بَـيْنَ هـاتَيْنِ الشَخْصِيَّتَيْنِ مَشْهَداً مُناسِباً لِخَيارِ تَدْبيجِ رِوايَةٍ ما، ما كانَت لَوْلا ذَلِـكَ سِـوَى أُقْصوصَةٍ عادِيَّةٍ لِلغايَةِ، ولَرُبَّما كانَت كَئيبَةً إلَى حَدٍّ ما: إذ إنّها تَرْسُمُ مَسيرَةَ عـالِمٍ وُلِدَ في النِصْفِ الثاني من القَرْنِ العاشِرِ وتُوُفِّيَ بُعَيْدَ العامِ ١٠٤٠م إثْرَ حَياةٍ حافِلَـةٍ بالعَمَلِ، وهَذا ما تَشْهَدُ عَلَيْهِ آثارُهُ المَكْتوبَةُ.

وإذ ما ارْتَأَيْنا أن نُباشِرَ عَرْضَنا بالإشارَةِ إلَـى هَـذا الأُسْـلوبِ الخـاصِّ بالمُفَهْرِسينَ، وإلَى الالتِباساتِ المُتَرَتِّبَةِ عَلَيْهِ، فإنّنا ما هَدَفْنا من ذَلِكَ إلَـى الـدَعْوَةِ لاتِّخاذِ الحيطَةِ فَحَسْب، إنّما فَعَلْنا ذَلِكَ أيضاً بُغْيَةَ التَساؤلِ عن كَيْفِيَّةِ الوُصولِ إلَى

الحَقيقَةِ عَبْرَ فَصْلِ الأساطيرِ عن الرواياتِ الصَحيحَةِ، وذَلِكَ انطِلاقاً من هَذا القَدْرِ الشَحيحِ من المَعْلوماتِ. وبُغْيَةَ الحُصولِ عَلَى جَوابٍ، لا يَبْقَى لنا سِوَى أن نُقابِلَ الرواياتِ الّتي وَصَلَتْ إلَيْنا، لِنُمَيِّزَ مِنْها الوَقائِعَ الأكيدَةَ مِنْ تِلْكَ المُحْتَمَلَةِ الّتي لا نَسْتَطيعُ راهِناً تَأكيدَها أو دَحْضَها، وأيضاً، لِنُمَيِّزَ مِنْها ما هُوَ مُجَرَّدُ خَيالٍ، كانَ الهَدَفُ مِنْهُ غالِباً إضْفاءَ بَعْضِ الجاذِبيَّةِ عَلَى التاريخِ، وأحْياناً التَثْقيفَ. ونَوَدُّ هُنا أن نَصوغَ بِكُلِّ وُضوحٍ بَعْضَ الأسْئِلَةِ الّتي ما زالَت حَتَّى الآن في الظِلِّ، وأن نُحَدِّدَ مَسائِلَ سَيَبْقَى، عَلَى الأقَلِّ، بَعْضُها، كما نَظِنُّ، مَطْروحاً إلَى أجَلٍ غَيْرِ مُسَمّى.

لَدَيْنا خَمْسَةُ مَصادِرَ لِلسِيَرِ الذاتِيَّةِ مُتَفاوِتَةِ الأهَمِيَّةِ، وهِيَ لَيْسَت بِمُسْتَقِلَّةٍ بالكامِلِ بَعْضُها عن البَعْضِ الآخَرِ. أما أقْدَمُها، وأيضاً أكْثَرُها إيجازاً، فهُوَ كِتابُ صاعِدٍ الأنْدَلُسيِّ (٤٢٠هـ /١٠٢٩م – ٤٦٢هـ/١٠٧٠م): ***طَبَقاتُ الأُمَمِ***[٢]. والثاني هُوَ ***تَتِمَّةُ صِوانِ الحِكْمَةِ***[٣] وقد وَضَعَهُ البَيْهَقِيُّ (٤٩٩هـ/(١١٠٥ – ١١٠٦م) – ٥٦٥هـ/(١١٦٩ – ١١٧٠م)) – وهُوَ مُؤَلِّفٌ من المَشْرِقِ الإسْلامِيِّ – من مِنْطَقَةِ نيسابور في خراسان. والثالِثُ وهُوَ الأهَمُّ ***تاريخُ الحُكَماءِ***[٤]، وقد وَضَعَهُ القِفْطِيُّ (٥٦٨هـ/١١٧٢م – ٦٤٦هـ/١٢٤٨م). ويَأْتي بَعْدَ ذَلِكَ نَصٌّ مُكْتَشَفٌ حَديثاً في

---

[٢] انْظُر:

R. Blachère, *Kitāb Tabakāt al-Umam*, (Paris, 1935).

راجع كِتابَ: ***طَبَقاتُ الأُمَمِ***، الناشِر: بوعلوان، بيروت، ١٩٨٥.

[٣] راجِع النُسْخَةَ الّتي نَشَرَها مُحَمَّد كرد عليّ تَحْتَ عُنْوان: ***تاريخ حُكَماء الإسلام***، مَجْمَعِ اللُّغَة العَرَبيَّة في دمشق، الطَبْعَة الأُولَى (١٩٤٦)، الطَبْعَة الثانية (١٩٧٦). بخُصوصِ هَذا الكِتاب، راجِعْ:

M. J. Hermosilla, "Aproximación a la "*Tatimmat siwān al-hikma*" de Al-Bayhakī", *in Actas de las II Jornadas de Cultura Arabe e Islàmica*, Instituto Hispano-Arabe de Cultura (Madrid, 1980), pp. 263-272. Cf. D. M. Dunlop, « al-Bayhakī », EI^2, vol. I, pp. 1165-1166.

[٤] القِفْطِيّ، جمالُ الدينِ عليُّ بنُ يوسُف، ***تاريخ الحُكَماء***، نَشْرَه: يوليوس ليبيرت (Julius Lippert)، ليبزغ، ١٩٠٣. راجِعْ كذَلِكَ:

Corrigenda et addenda, H. Suter, *Bibliotheca Mathematica*, 3^{e} série, 4 (1903), pp. 295-296.

مَخْطوطَةٍ كُتِبَت في العامِ ٥٥٦هـ/١١٦١م، مَوْجودَةٍ في لاهور[٥]، وهِيَ تَتَضَمَّنُ عِدَّةَ عَناوينَ. وفَضْلاً عن ذَلِكَ، قد أوْرَدَ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة (٥٩٦هـ/١٢٠٠م – ٦٦٨هـ/١٢٧٠م)[٦]، الَّذي كانَ مُطَّلِعاً عَلَى مَصْدَرِ هَذا النَصِّ الأخيرِ، سيرَةً أكْثَرَ اكْتِمالاً، مُضيفاً إلَيْها ما كَتَبَهُ القِفْطِيُّ. لِنُضِفْ إلَى ما وَرَدَ ذِكْرُهُ لائِحَةً فَهْرِسِيَّةً لِلحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ، مَوْجودَةً في مَخْطوطَةٍ مُكْتَشَفَةٍ في مَدينَةِ كوييبشيف في سيبيريا، وهِيَ لا تَخْتَلِفُ إلاّ قَليلاً عن اللاّئِحَةِ الّتِي قَدَّمَها ابنُ أبي أُصَيْبِعَة[٧].

يُخْبِرُنا البَيْهَقِيُّ، تَحْتَ عُنْوانِ ***بَطْلَمْيوس الثاني: أبو عَلِيٍّ بنُ الهَيْثَمِ***[٨]، عن وُصولِ هَذا العالِمِ إلَى مِصْرَ وعن لِقائِهِ الحاكِمَ، عارِضاً عَلَيْهِ مَشْروعاً للتَحَكُّمِ بِمَنْسوبِ النيلِ، وعن الرَفْضِ العَنيفِ الَّذي أبْداهُ الخَليفَةُ لِهَذا المَشْروعِ، وعن هُروبِ ابنِ الهَيْثَمِ نَحْوَ سوريا. ويُوردُ الكاتِبُ أخيراً بَعْضَ الطَرائفِ، وهِيَ لَمَساتٌ أخيرَةٌ في رَسْمِ صورَةٍ لابنِ الهَيْثَمِ، مُعَبِّرَةٍ بأمانَةٍ عن الصورَةِ المِثالِيَّةِ لعالِمِ ذَلِكَ العَصْرِ. ويُنْهي البَيْهَقِيُّ سيرَةَ ابنِ الهَيْثَمِ بوَصْفِ المَرَضِ الَّذي قَضَى عَلَيْهِ، فَيَرْسُمُ في لَوْحَةٍ خِتامِيَّةٍ مَشْهَدَ مَوْتِ العالِمِ، حَيْثُ يُوردُ كَلِماتِهِ الأخيرَةَ. لِنَعْرِضْ في ما يَلي المَقْطَعَ الأكْثَرَ أهَمِيَّةً في هَذِهِ السيرَةِ:"وقد صَنَّفَ كِتاباً في الحِيَلِ، بَيَّنَ فيهِ حيلَةَ إجْراءِ نيلِ مِصْرَ عِنْدَ نُقْصانِهِ في المَزارِعِ، وحَمَلَ الكِتابَ وقَصَدَ قاهِرَةَ مِصْرَ فَنَزَلَ في خانٍ، فلمّا ألقَى عصاهُ، قيلَ لَهُ إنّ صاحِبَ مِصْرَ المُلقّبَ بالحاكِمِ عَلَى البابِ يَطْلُبُكَ، فَخَرَجَ أبو عليٍّ ومَعَهُ كِتابُهُ. وكانَ أبو عليٍّ قَصيرَ القامَةِ، وعَلَى بابِ الخانِ دكّانٌ فَصَعَدَ أبو

---

[٥] انْظُرِ الحاشِيَةَ رقم ٣١.

[٦] ابن أبي أُصَيْبِعَة، ***عُيونُ الأنْباءِ في طَبَقاتِ الأطِبّاءِ***، نَشْر أ. مولّير (A. Müller)، مُجَلَّدان (القاهِرَة / كونيغسبيرغ (Königsberg)، ١٨٨٢–١٨٨٤)، المُجَلَّد الثاني، ص ٩٠–٩٨.

[٧] انْظُر:

B. A. Rozenfeld, «The List of physico-mathematical Works of Ibn al-Haytham written by himself», *Historia Mathematica*, 3 (1976), pp. 75-76.

[٨] البَيْهَقِيّ، ***تأريخ حُكَماء الإسْلام***، ص ٨٥ – ٨٨.

عَلِيٍّ إِلَى الدكّانِ، ودفعَ الكِتابَ إِلَى صاحِبِ مِصْرَ، وصاحِبُ مِصْرَ راكبٌ حِماراً، مع آلاتٍ مفضفضةٍ. فلمّا نظرَ صاحبُ مِصْرَ فِي الكِتاب قالَ له: أخطأتَ، فإنّ مؤْنَةَ هَذِهِ الحيلَةِ أكْثَرُ من مَنافِعِ الزرْعِ، وأمَرَ بهَدْمِ الدكّانِ ومَضَى، فخافَ أبو عليٍّ عَلَى نَفْسهِ، وهَرَبَ حينَ جُنَّ اللّيلُ"[9]

لا يَتضَمَّنُ هَذا السَرْدُ شَيْئاً لَهُ قَدْرٌ كافٍ مِنَ الدِقَّةِ لِلتَحَقُّقِ مِنْـهُ، فَصورَةُ الحاكِمِ، المُمْتَطي حِماراً، الغَضوبِ والعَنيفِ، هِيَ صورَةٌ نَمَطِيَّةٌ تَناقَلَها المُدَوِّنونَ قَبْلَ وبَعْدَ البَيْهَقِيِّ. ومِمّا لا شَكَّ فيهِ أنّه اقْتَبَسَها عَمّن سَبَقَهُ[10]. والتفاصيلُ المُثيرةُ الأُخْرَى الّتي رُوِيَت بَعْدَ قَرْنٍ من وفاةِ العالِمِ، ما هِيَ إلا وَسائِلُ يَسْتَخْدِمُها الكاتِبُ لتَدْبيجِ سيرَةٍ مُؤَثِّرَةٍ عن ابنِ الهَيْثَمِ. أما قِصَّةُ هُروبِ ابنِ الهَيْثَمِ وإقامَتِهِ فِي سوريا، فإنّها لم تردْ سِوَى عِنْدَ البَيْهَقِيِّ، وهِيَ تُناقِضُ ما نَعْرِفُهُ، بشَكْلٍ شِبْهِ أكيدٍ، عن الرياضِيِّ عَلَى امْتِدادِ حَياتِهِ. فَبإمْكاننا إذاً، أن نعتَبرَ جَميعَ هَذِهِ التَفاصيلِ اختِلاقاً مَحْضاً، وأن لا نَسْتَبْقِيَ مِنْها سِوَى تِلْكَ الّتي يُمكنُ التَحَقُّقُ مِنْها، وهِيَ: أنّ ابنَ الهَيْثَمِ غَريبٌ بالأصْلِ عن مِصْرَ، لَكِنَّه قدِمَ إِلَيْها فِي عَصْرِ الحاكِمِ، حامِلاً بَيْنَ أوْراقِهِ مَشْروعاً مائِيّاً، مِن شَأْنِهِ أن يُثيرَ اهْتِمامَ الدَوْلَةِ، وأنّه قد وَضَعَ كِتاباً فِي عِلْمِ الأخْلاقِ وآخَرَ فِي عِلْمِ الفَلَكِ، حَيْثُ دافَعَ عن إمْكانيَّةِ تَصَوُّرِ نَماذِجَ لِحَرَكاتِ

---

[9] انْظُرِ المَصْدَرَ السابِقَ، ص ٨٥-٨٦.

[10] القلانسيّ، ***ذيل تاريخ دمشق*** (بيروت ١٩٠٨، مَطْبَعَة الآباء اليسوعيين)، الصَفَحات ٥٩ – ٨٠. أبو المحاسن بن طغري بردي، ***النجوم الزاهرة في ملوك مصر والقاهِرَة***، أرْبَعَةُ مُجَلَّدات (القاهِرَة، ١٩٣٣)، المُجَلَّد الرابع، الصَفَحات ١٧٦-٢٤٧. لَكِن، يجب ألاّ نَنْسَى أنّ الحاكِم قد شَجَّعَ العُلومَ وأسّسَ فِي القاهِرَةِ "دار العلم" الّتي وصفها المقريزيُّ فِي ***كِتاب المواعظ والاعتبار بذكر الخطط والآثار***، نَشْرَة بولاق (القاهِرَة، بدونِ تاريخ)، المُجَلَّد الأوّل، الصَفْحَتان ٤٥٨-٤٥٩، وقد أُعيدَ نشرُهُ حديثاً (بدونِ تأريخ) فِي القاهِرَة. حَوْلَ الحاكِمِ والصُوَرِ النَمَطِيَّةِ الّتي شاعَت بِصَدَدِهِ، انْظُرْ عَلَى سَبيلِ المِثالِ المَقالَةَ:

M. Canard, *"al-Hākim bi-Amr Allāh" EI²*, vol. III, pp. 79-84.

الكَواكِبِ تَخْتَلِفُ عن نَماذِجِ بَطْلَمْيوس. ورَغْمَ أنّ البَيْهقِيَّ يُشيرُ إِلَى هَذَيْنِ الكِتابَيْنِ بتَعابيرَ غامِضَةٍ، فإنّ تَحْديدَهُما مَسْأَلَةٌ سَهْلَةٌ[11]. وقد انْتَشَرَت لاحِقاً هَذِهِ السيرَةُ الّتي كَتَبَها البَيْهَقِيُّ، إذ تَناوَلَها مُجَدَّداً الشهرزوريّ في كِتابِهِ الشَهيرِ[12] مع السيرَةِ الّتي كَتَبَها القِفْطِيُّ لاحِقاً.

وهَذِهِ السيرَةُ الثانيَةُ هِيَ الأَكْثَرُ أهَمِيَّةً بَيْنَ كافَّةِ السِيَرِ الأُخْرَى، وقد وَضَعَها القِفْطِيُّ بَعْدَ قَرْنٍ من وَضْعِ سيرَةِ البَيْهَقِيِّ، وبَعْدَ قَرْنَيْنِ من وَفاةِ ابنِ الهَيْثَمِ. فهِيَ فَهْرَسَةٌ لسيرَةٍ ذاتِيَّةٍ مُسْتَقِلَّةٌ بشَكْلٍ جَلِيٍّ عن السيرَةِ الّتي قَدَّمَها البَيْهَقِيُّ. كما أنّ القِفْطِيَّ، نَظَراً إِلَى مَكانِ وِلادَتِهِ وإقامَتِهِ، كانَ مُطَّلِعاً عَلَى التَقْليدِ العِلْمِيِّ في مِصْرَ وسوريا[13]، بشَكْلٍ أفْضَلَ بكَثيرٍ من البَيْهَقِيِّ الّذي وُلِدَ ونَشَأَ في خراسان. وهَذِهِ السيرَةُ المُفَهْرَسَةُ الّتي وَضَعَها القِفْطِيُّ سيَتَناوَلُها، كما ذَكَرْنا سابِقاً، الشهرزوريّ ثمّ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة وابنُ العبريّ[14]، وكذَلِكَ المُفَهْرِسونَ المُحْدَثون. ونَظَراً إِلَى أهَمِيَّةِ هَذا النَصِّ، سَنورِدُ القِسْمَ الأساسيَّ مِنْهُ:"وبَلَغَ الحاكِمَ صاحِبَ مِصْرَ من العَلَوِيّين، وكانَ يَميلُ إِلَى الحِكْمَةِ، خَبَرُهُ وما هُوَ عَلَيْهِ من الإتقانِ لهذا الشَأنِ، فَتاقَت نَفْسُهُ

[11] يَتَعَلَّقُ الأمرُ عَلَى الأرْجَحِ بكِتاب ***"الشكوك عَلَى بَطْلَمْيوس"*** وبكِتاب ابن الهَيْثَم ***في الأخلاق***، ويرِدُ الكِتابانِ عَلَى لائِحَةِ كُلٍّ من القِفْطِيّ وابنِ أبي أُصَيْبِعَة.

[12] الشهرزوريّ، ***نزهة الأرواح وروضة الأفراح في تاريخ الحُكَماء والفلاسفة***، مَنْشورات دار المَعارِف العُثْمانيَّة (حيدر أباد الدكن، ١٩٧٦)، المُجَلَّد الثاني، ص ٢٩-٣٣.

[13] وُلِدَ القِفْطِيُّ في مِصْرَ العليا في قِفْط، وباشرَ تَعْليمَه في القاهِرَةِ، قبلَ أن يَنْتَقِلَ في الخامِسَةِ عشرة من عُمْرِه مع والدِه إلى القُدْسِ. ثمّ استَقَرَّ في حلب. حَوْلَ حَياتِهِ وتاريخِ كِتابِهِ، راجِعْ:

A. Müller, «Über das sogenannte ***تأريخ الحُكَماء*** des al-Qiftī», *Actes du VIII*[e] *Congrès Internationnal des Orientalistes tenu en 1889 à Stockolm et à Christiana*, Sect. I (Leiden, 1891), pp. 15-36.

La préface rédigée par J. Lippert à l’édition du texte, *Ta’rīkh al-hukamā’*, pp. 5-10.

C. Nallino, *Arabian Astronomy, its History during the Medieval* Times (conférences prononcées en arabe à l’Université du Caire), (Rome, 1911), pp. 50-64.

[14] ابن العبريّ، ***تاريخ مختصر الدول***، نَشْرَة صالحانيّ، نَشْرَة أُولَى (بيروت ١٨٩٠)؛ أُعيدَ طَبْعُها سنة ١٩٥٨، الصَفْحَتان ١٨٢-١٨٣.

إِلَى رؤيتِهِ. ثمّ نُقِلَ لَهُ عنهُ، أنّه قالَ، لو كُنْتُ بِمِصْرَ لعَمِلْتُ في نيلِها عَمَلاً يَحْصُلُ بِهِ النَفْعُ في كُلِّ حالَةٍ من حالاتِه، من زِيادَةٍ ونَقْصٍ، فَقَد بَلَغَني أنّه يَنْحَدِرُ من موضِعٍ عالٍ، وهُوَ في طَرَفِ الإقليمِ المِصْرِيِّ، فازدادَ الحاكِمُ إِلَيْهِ شَوْقاً وسَيَّرَ إليه سِرّاً جُمْلَةً من مالٍ، وأرْغبَهُ في الحُضورِ، فسافَرَ نحوَ مِصْرَ، ولّما وَصَلَها، خَرَجَ الحاكِم لِلِقائِهِ، والْتَقَيا في قَرْيَةٍ عَلَى باب القاهِرَةِ المعزّيةِ، تُعْرَفُ بالخَنْدَق[15]، وأمَرَ بإِنْزالِهِ وإكْرامِهِ، وأقامَ رَيْثَما اسْتَراحَ، وطالَبَهُ بما وَعَدَ بِهِ من أمْرِ النيلِ، فسارَ ومَعَهُ جَماعَةٌ من الصنّاعِ المُتوَلِّينَ للعمارةِ بأيْديهِم ليَسْتَعينَ بهم عَلَى هَنْدَسَتِهِ الّتي خَطَرَت له، ولّما سارَ إِلَى الإقْليمِ بطولِهِ، ورَأَى آثارَ من تقَدَّمَ من ساكِنيهِ من الأمَمِ الخالِيَةِ، وهِيَ عَلَى غايَةٍ من إحْكامِ الصنعةِ وجُودَةِ الهَنْدَسَةِ وما اشتَمَلَت عَلَيْهِ من أشْكالٍ سماويَّةٍ ومثالاتٍ هَنْدَسِيَّةٍ وتَصْويرٍ مُعْجزٍ، تَحَقَّقَ أنّ الّذي يَقْصِدُهُ لَيْسَ بمُمْكِنٍ، فإنّ مَن تقَدَّمَهُ لم يُعزبْ عنهم عِلْمُ ما عَلِمَهُ، ولو أمْكَنَ لَفَعَلوا، فانْكَسَرَت هِمَّتُهُ وَوَقَفَ خاطِرُهُ، ووَصَلَ إِلَى المَوْضِعِ المَعْروفِ بالجنادِلِ قِبْلِيَّ مَدينَةِ أسوان، وهُوَ موضِعٌ مُرْتَفِعٌ يَنْحَدِرُ مِنْهُ ماءُ النيلِ، فعايَنَهُ وباشَرَهُ واخْتَبَرَهُ من جانبَيْهِ، فَوَجَدَ أمرَهُ لا يَمْشي عَلَى مُوافَقَةِ مرادِهِ، وتَحَقَّقَ الخطأَ عمّا وَعَدَ به، وعادَ خَجِلاً مُنْخَذِلاً، واعتَذَرَ بما قَبِلَ الحاكِمُ ظاهِرَهُ ووافقَهُ عَلَيْهِ، ثمّ أنّ الحاكِمَ ولاّهُ بَعْضَ الدَواوين، فَتَوَلاّها رَهْبَةً لا رَغْبَةً وتَحَقَّقَ الغَلَطَ في الولايَةِ، فإنّ الحاكِمَ كانَ كَثيرَ الاستِحالَةِ، مُريقاً للدِماءِ بغَيْرِ سَبَبٍ، أو بأضْعَفِ سَبَبٍ من خَيالٍ يَتَخَيَّلُهُ، فأَجالَ فِكْرَتَهُ في أمْرٍ يَتَخَلَّصُ به، فلم يَجدْ طَريقاً إِلَى ذَلِكَ إلا إظْهارَ الجُنونِ والخبال"[16]

---

[15] ابن دقماق، ***كِتاب الانتصار لواسطة عقد الأمصار***، نَشْرَة بولاق (القاهِرَة، بدون تاريخ)، الجُزء الثاني، صَفْحَة ٤٣. يُحَدِّدُ الكاتِبُ مَوْقِعَ هَذِهِ القَرْيَةِ. حَوْلَ تاريخِها، انْظُرِ المقريزيّ، ***كِتاب المواعظ والاعتبار بذكر الخطط والآثار***، المُجَلَّد الثاني، الصَفْحَتان ١٣٦-١٣٧.

[16] القِفْطِيّ، ***تأريخ الحُكَماء***، الصَفْحَتان ١٦٦-١٦٧.

ثُمَّ يُخْبِرُنا القِفْطِيُّ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ، بَعْدَ وَفاةِ الحاكِمِ (٤١١هـ/ ١٠٢٠م) تَوَقَّفَ عن تَصَنُّعِ الجُنونِ، واسْتَأنَفَ أعْمالَهُ في البَحْثِ وفي نَسْخِ نُصوصٍ مِنْها ***المجسطيّ*** لبَطْلَمْيوس وأُخْرَى لإقليدس وكذَلِكَ نَصّ *"المُتَوَسِّطات"* وذَلِكَ مِن أجْلِ كَسْبِ قوتِهِ[١٧]. ويُقَدِّمُ في هَذا الصَدَدِ شَهادَةَ أحَدِ الأطِباءِ، وهُوَ يوسُفُ الفاسِيُّ الإسرائيلِيُّ[١٨] الّذي يُؤَكِّدُ، بالإضافَةِ إلَى أشْياءَ أُخْرَى، أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد تُوُفِّيَ في القاهِرَة حَوالَى العام ٤٣١هـ/١٠٣٩م[١٩]. أخيراً، يُورِدُ القِفْطِيُّ لائِحَةً من حَوالَى سِتّينَ عُنْواناً لابنِ الهَيْثَمِ، سَنَعودُ إلَيْها لاحِقاً.

---

[١٧] المَرْجِع السابِق، صَفْحَة ١٦٧.

[١٨] لقد قَرَأَ ج. ليپيرت (J. Lippert) "الناشي" عِوَضاً عن "الفاسيّ"، لَكِنَّه أوْرَدَ الاسمَ الأوّلَ أي "يوسُف" في الحاشِيَةِ النَقْدِيَّةِ اسْتِناداً إلى ابنِ أبي أُصَيْبِعَة. لا يَنْبَغي لِهَذا الخَطَأ في النسخِ أن يَجْعَلَنا نَعْتَقِدُ أنّ هَذِهِ الشَخْصِيَّةَ كانَت مَجْهولَةً لَدَى القِفْطِيّ، وأن يَدْفَعَنا إلى القِيامِ بِشَرْحٍ طَويلٍ، هُوَ بكُلِّ وُضوحٍ، لا طائِلَ منه بالنِسْبَةِ إلى سيرَةِ ابن الهَيْثَم. فقد كانَ هَذا الرَجُلُ صَديقاً شَخْصِيّاً للقِفْطِيِّ، كما كَتَبَ ذَلِكَ بنَفْسِهِ – راجِعِ الصَفْحَةَ ٣٩٣ – وذَلِكَ في مَقالَةٍ مُكَرَّسَةٍ بأكْمَلِها له. ويُورِدُ القِفطِيُّ اسمَ الرَجُلِ كامِلاً وهو:"يوسُف بنُ إسحاقَ السَبْتِيُّ المَغْرِبيُّ، أبو الحجّاج، القاطِن في حلب... وأصْلُهُ من فاس – راجع الصَفْحَةَ ٣٩٢. وَوَفْقاً للقِفطِيّ، فقد تُوُفِّيَ في الأيامِ العَشَرَةِ الأُولَى من ذي الحجّة في العام ٥٢٣ هـ، أي في نهايةِ شهرِ تشرين الثاني من العام ١٢٢٦م. ويوردُ القِفْطِيُّ أيضاً شَهاداتٍ أُخْرَى مُتَعَلِّقَةٍ، عَلَى سَبيلِ المِثالِ، بحُضورِهِ في بَغْدادَ لِمَشْهَدٍ يُحَرِّضُ فيهِ ابنُ المارستانيّة الناسَ عَلَى العِلْمِ بطَريقَةٍ غَوْغائِيَّةٍ – راجعِ الصَفْحَةَ ٢٢٩. وقد ذَكَرَهُ أيضاً ابنُ أبي أُصَيْبِعَة (راجعِ المُجَلَّدَ الثاني، صَفْحَة ٢١٣) وابنُ العبريّ (الصَفْحَتانّ ٢٤٢-٢٤٣). انْظُرْ أيضاً:

M. Munk: «Notice sur Joseph ben Iehouda ou Aboul'hadjâdj Yousouf ben-Ya'hya al-Sabti al-Maghrebi, disciple de Maïmonide», *Journal Asiatique*, 3e série, 14 (1842), pp. 5-70.

وكما أكّد بنَفْسِهِ، فإنّ شَهادَتَهُ قد وَصَلَت شَفَهِيّا.

[١٩] نعرِضُ هنا ما يَرْويه القِفْطِيُّ عن يوسُفَ الاسرائيلِيِّ:"وذَكَرَ لي يوسُفُ الفاسِيُّ الإسرائيليُّ نَزيلُ حلب، قال: سَمِعْتُ أنّ ابنَ الهَيْثَم كانَ يَنْسَخُ في مدّةِ سنةٍ ثَلاثَةَ كُتُبٍ في ضمنِ أشغالِهِ وهي إقليدس و*المتوسّطات* ***والمجسطيّ*** ويَسْتَكْمِلُها في مدّةِ السنةِ، فإذا شَرَعَ في نَسْخِها جاءَهُ من يُعْطيه فيهم مائةً وخمسين ديناراً مصريّةً، وصار ذَلِكَ كالرَسْمِ الذي لا يُحْتاجُ فيهِ إلى مُواكَسَةٍ ولا مُعاوَدَةِ قَوْلٍ، فَيَجْعَلُها=

ومُقارَنَةً بسيرَةِ ابنِ الهَيْثَمِ الّتي وَضَعَها البَيْهَقِيُّ، فإنّ الـــسيرَةَ الّـــتي يُوردُهـــا القِفْطِيُّ تَتَمَيَّزُ بأمْرَيْنِ اثنَيْنِ، إذ إنّها قد خُطَّت بيَدِ كاتِبٍ يَعْرِفُ حَيـــاةَ وأعْمـــالَ العالِمِ، فَضْلاً عن مَعْرِفَتِهِ بمِصْرَ بِشَكْلٍ أفْضَلَ بكَثيرٍ من الكاتِبِ الآخَرِ. إلاّ أنّ سيرَةَ القِفْطِيِّ هَذِهِ لا تَمْلِكُ إلاّ أن تُدْهِشَنا بالتَفاصيلِ الّتي تَعْرِضُها بوَفْرَةٍ في وَصْفِ لِقاءِ ابنِ الهَيْثَمِ مع الحاكِمِ، وكذَلِكَ في الوَصْفِ التَفْصيلِيِّ لِرَحْلَةِ العالِمِ إلَى مِصْرَ العُليا، ولِحالاتِهِ الروحِيَّةِ وأفْكارِهِ الأكْثَرِ حَميمِيَّةً. إنّ هَذا الفَيْضَ من التَفاصيلِ المَعْروضَـــةِ بَعْدَ قَرْنَيْنِ من الحَدَثِ عَلَى الأقَلِّ، لا يُمْكِنُ أن يَتَأَتَّى إلا عن سيرَةٍ ذاتِيَّةٍ. غَيْـــرَ أنّ القِفْطِيَّ ما كانَت لَدَيْهِ مِثْلُ هَذِهِ الوَثيقَةِ، وإلاّ لَكانَ صَرَّحَ بذَلِكَ عَلَى غِرارِ ما فَعَلَهُ بمَقالَتِهِ حَوْلَ ابنِ سينا. فَلَرُبَّما يَكونُ، إذاً، تَصْديقُ القِفْطِيِّ في هَذا الشَأنِ ضَرْباً من ضُروبِ المُجازَفَةِ.

لِنَعْزِلِ الآنَ العَناصِرَ المُشْتَرَكَةَ بَيْنَ هاتَيْنِ السيرَتَيْنِ لابنِ الهَيْثَمِ، اللّتَـــيْنِ سَـــبَقَ وأشَرْنا إلَى استِقْلالِيَّتِهِما. يُؤَكِّدُ كِلا الكاتِبَيْنِ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد وَصَلَ إلَى مِـــصْرَ، وقابَلَ الحاكِمَ، وعَرَضَ عَلَيْهِ مَشْروعاً مائِيّاً قُوبِلَ بالرَفْضِ، هَذا ما نَحْصُلُ عَلَيْـــهِ إذا ما جَرَّدْنا كُلَّ نَصٍّ من العَناصِرِ المُخَصَّصَةِ، بشَكْلٍ واضِحٍ، لِتَدْبيجِ وتَزْيينِ القِصَّةِ.

لا يَتَطَرَّقُ البَيْهَقِيُّ لِذِكْرِ المَوْطِنِ الأصْلِيِّ لابنِ الهَيْثَمِ، بَيْدَ أنَّ القِفْطِيَّ يُشيرُ إلَى البَصْرَةِ في العِراقِ[٢٠]. وتُؤَيِّدُ تَأْكيدَ القِفْطِيِّ هَذا مَخْطوطَةٌ عن ***كِتابِ المَناظِرِ*** لابـــنِ الهَيْثَمِ، قامَ بنَسْخِها صِهْرُهُ أحمدُ بنُ مُحَمَّدِ بنِ جَعْفَرٍ العَسْكَرِيِّ. وقد كُتِبَت هَـــذِهِ النُسْخَةُ في البَصْرَةِ تَحْديداً بَعْدَ وَفاةِ ابنِ الهَيْثَمِ. نَسْتَطيعُ بالمُقابِلِ، أن نُوردَ شَـــهادَةً لِصاعِدٍ الأنْدَلُسِيِّ تَتَحَدَّثُ عن "ابنِ الهَيْثَمِ المِصْرِيِّ"[٢١]، إلاّ أنّ هَذِهِ الشَهادَةَ لا تَطْعَنُ

= مَؤونَتَهُ لِسَنَتِهِ، ولم يَزَلْ عَلَى ذَلِكَ إلى أن ماتَ في القاهِرَةِ في حُدودِ سَنَةِ ثلاثينَ وأربعمائة أو بعدَها بقليلٍ"، راجِعِ القِفْطِيَّ، ***تأريخ الحُكَماء***، الصَفْحَة ١٦٧.

[٢٠] يَكْتُبُ القِفْطِيُّ: "الحَسَنُ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ أبو عليٍّ المُهَنْدِسُ البَصْرِيُّ، نَزيلُ مِصْرَ... "

[٢١] صاعِد الأنْدَلُسِيّ، ***طَبَقاتُ الأُمَمِ***، الصَفْحَة ١٥٠.

في احتِمالِ الأُصولِ البَصْرِيَّةِ للعالِمِ، إذ إنّ الناسَ في ذَلِكَ العَصْرِ، كـــانوا يُـــدْعَوْنَ سَواءٌ باسمِ بَلَدِ الوِلادَةِ أو بَلَدِ الإقامَةِ[٢٢]. ومن جهَةٍ أُخْرَى، ثَمَّةَ اختِلافٌ في حَرْفٍ واحِدٍ بَيْنَ كَلِمَتَي "المِصْرِيّ" و "البَصْرِيّ" ويَسْهُلُ الخَلْطُ بَيْنَ حَرْفَيِ الباءِ والمـــيمِ في الكِتابَةِ المَغْرِبيَّةِ المُعْتَمَدَةِ لَدَى صاعِدٍ.

ولذَلِكَ فإنّهُ من المُرَجَّحِ تَماماً أن يَكونَ ابنُ الهَيْثَمِ قد قَدِمَ من البَصْرَةِ إلَـــى مِصْرَ في عَصْرِ الحاكِمِ، أي في نِهايَةِ القَرْنِ العاشِرِ تقريباً، أو في السَنَواتِ الأُولَى من القَرْنِ اللاَّحِقِ. فَقَد وُلِدَ الحاكِمُ في العامِ ٣٧٥هـ / ٩٨٥م، وبَدَأ حُكمَهُ في العـــامِ ٣٨٦هـ/٩٩٦م، قَبْلَ أن يُقْتَلَ في العامِ ٤١١هـ/١٠٢٠م. عَلَى أيِّ حالٍ، ثَمَّةَ مَصادِرُ أُخْرَى تَسْمَحُ بتَأْكيدِ تَواجُدِ ابنِ الهَيْثَمِ في القاهِرَةِ خِلالَ العُقودِ اللاّحِقَةِ، مِنْها على سَبيلِ المِثالِ، شَهادَةُ قاضٍ هُوَ أبو زَيْدٍ عَبْدُ الرحمن بنُ عيسَى بنِ مُحَمَّدٍ بـــنِ عبـــدِ الرحمن[٢٣]، وهِيَ تَرِدُ في كِتابِ صاعِدٍ[٢٤]. وتُشيرُ بَعْضُ المَصادِرِ أيضاً إلَـــى أنّ ابـــنَ الهَيْثَمِ كانَ مَألوفاً – فَضْلاً عن مُؤَلَّفاتِهِ – في الوَسَطِ المِصْرِيِّ آنَذاك. فَقَد وَضَعَ ابنُ رضوان، طَبيبُ القاهِرَةِ الشَهيرُ ومُعاصِرُ ابنِ الهَيْثَمِ، كِتاباً عُنْوانُهُ ***في المسائل الّـــتي***

---

[٢٢] نُشيرُ إلى أنّ الخازنَ في كِتابِهِ ***"ميزان الحكمة"*** يُسَمِّيه أيضاً "ابن الهَيْثَمِ المصريّ". مَنْشورات دار المَعارِف العُثْمانيَّة (حيدر أباد الدكن، ١٩٤٠–١٩٤١)، ص ١٦.

[٢٣] وهَذا ما كَتَبَهُ بلاشير (Blachère) استِناداً إلى ابنِ بَشْكوال، رقم ٧٢٥: «وُلد في قرطبة، كان قاضِياً في طُلَيْطِلَة، وتورتوزا، ثم دانية، بأُمْرَةِ الأميرِ المَأْمونِ بنِ ذي النونِ، حامي صاعِد. تُوُفِّيَ في العامِ ٤٧٣هـ/١٠٨٠م»؛ ص ١١٦، حاشِيَة ٤. نُشيرُ إلى أنّ ابنَ بشكوال [***كِتاب الصّلة***، نَشَرَهُ سَيِّد عزّت العطّار الحُسينيّ (القاهِرَة، ١٩٥٥)، رقم ٧٢٨] يَذْكُرُهُ باسمِ «أبو زيدٍ عبدُ الرحمن بنُ مُحَمَّدٍ بن عيسى بن عبد الرحمن»؛ نُلاحِظُ هنا تَغَيُّرَ التَرْتيبِ ما بَيْنَ "ابن مُحَمَّد" و"ابن عيسى".

[٢٤] "أخْبَرَني القاضي أبو زيدٍ عبدُ الرحمن بنُ عيسَى بنِ مُحَمَّدٍ بن عبدِ الرحمنِ أنّه لَقِيَهُ بمِصْرَ سنة ثلاثين وأربعمائة"، راجعْ صاعِدَ الأنْدَلُسِيَّ، ***طَبَقاتُ الأُمَمِ***، الصَفْحَة ١٥٠.

جَرَت بَيْني وبَيْنَ ابنِ الهَيْثَمِ، والمُتَعَلِّقَة بالمَجَرَّةِ والمكانِ[25].

لَكِن، هل قابَلَ ابنُ الهَيْثَمِ الحاكِمَ فِعْلاً عِنْدَ وصولِهِ إِلَى مِصْرَ، لِيَعْرِضَ عَلَيْهِ مَشْروعَهُ المائِيَّ؟ حَوْلَ هَذِهِ النُّقْطَةِ، لا مَناصَ من أن يُفْضيَ الأمْرُ بنا إِلَى تَأْكيداتِ البَيْهَقِيِّ والقِفْطِيِّ. إلاّ أنّ عَلاقَتَهُما بالحَدَثِ (أي بمَكانِهِ، وبالمَشْهَدِ نَفْسِهِ، وبالنَتائجِ المُتَرَتِّبَةِ عَلَيْهِ ...) لَيْسَت مُتطابِقَةً، والتَبايُناتُ البالِغَةُ بَيْنَ الروايَتَيْنِ تُوحي بأنّ الأمْرَ يَتَعَلَّقُ بصَدًى بَعيدٍ لِمَشْهَدٍ جَهَدَ كُلُّ واحِدٍ من المُفَهْرِسَيْنِ في تَخَيُّلِهِ وإعادَةِ إحْيائِهِ في فَيْضٍ من التَفاصيلِ. والحُجَّةُ الحِسيَّةُ الوَحيدَةُ يُورِدُها البَيْهَقِيُّ، فَهُوَ يَذْكُرُ، لِلتَأكيدِ عَلَى المَشْروعِ المائِيِّ، كِتاباً كانَ قد وَضَعَهُ ابنُ الهَيْثَمِ حَوْلَ ***أعْمال هَنْدَسَة البناء***[26] أو ***عِلْمِ الحِيَلِ***. لَكِنَّنا لِلأَسَفِ لا نَعْرِفُ شَيْئاً عن الكِتابِ، ولا نَعْرِفُ إذا كانَ قد وُجِدَ بالفِعْلِ، فالبَيْهَقِيُّ هُوَ الوَحيدُ الَّذي يَذْكُرُهُ. وإذا ما اسْتَطَعْنا الطَعْنَ بالتَفاصيلِ الَّتي عَرَضَها الكاتِبانِ، فإنّ الصَدَى البَعيدَ للمَشْهَدِ لَيْسَ بالضَرورَةِ اختِلاقاً مَحْضاً. فابنُ الهَيْثَمِ، الرياضِيُّ والفيزيائِيُّ، هُوَ أيضاً مُهَنْدِسٌ، كما تُبَيِّنُ بَعْضُ كِتاباتِهِ. وكانَ من المألوفِ في ذَلِكَ الوقْتِ أن يَسْتَقْبِلَ الخَليفَةُ العُلَماءَ[27].

---

[25] إنّه ابنُ رضوان نَفْسُهُ الذي نَسَخَ كِتاباً لابنِ الهَيْثَمِ حَوْلَ ***ضوء القمر***، وقد أُنْجِزَت هَذِهِ النُسْخَةُ يوم الجمعة في منتصفِ شعبان للعام ٤٢٢هـ، أي يوم الجمعة في السابع من آب للعام ١٠٣١م. راجِعِ القِفْطِيَّ، ***تأريخ الحُكَماء***، الصَفْحَة ٤٤٤؛ ابن أبي أُصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، الصَفْحَة ١٠٤. راجع أيضاً:

Joseph Schacht et Max Meyerhof, *The Medico-Philosophical Controversy between Ibn bultan of Baghdad and Ibn Ridwan of Cairo* (Le Caire, 1937), p. 36.

[26] رُبَّما المَقْصودُ هنا كِتابُ ***"عقود الأبنية"*** الذي ذَكَرَهُ القلقشنديُّ في ***"صبح الأعشى"***، نَشْرَة بولاق (القاهِرَة، بدون تاريخ)؛ نَشْرَة جديدة، ١٩٦٣ المُجَلَّد الأوّل، الصَفْحَة ٤٧٦. انْظُرْ أيضاً تَشكوبري-زاده (Tashkupri-Zadah)، ***مفتاح السعادة***، نَشَرُه كامل بكريّ وعبد الوهاب أبو النور (القاهِرَة ١٩٦٨)، المُجَلَّد الأوّل، الصَفْحَة ٣٧٥. [انْظُرْ الصَفْحَة ٥٣٨].

[27] نَحْنُ نَعْرِفُ اسْتِناداً إلى المَقْريزيِّ [***كِتاب المواعظ والاعتبار بذكر الخطط والآثار***، المُجَلَّد الأوّل، الصَفْحَة ٤٥٩] أنّ الحاكِمَ كان يَعْقِدُ جَلساتٍ مع العُلَماءِ وكانَ يَسْتَمِعُ إلى مُحاوَراتِهِم. نَقْرَأُ هناك:=

وباختِصارٍ، فإنّهُ من المُؤكّدِ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد قدِمَ إلَى مِصْرَ في نهايَةِ القَرْنِ العاشِرِ أو بَعْدَ ذَلِكَ بقليلٍ، ومن المُرجّحِ أنّه جاءَ من البَصْرَةِ، ومن المُحْتَمَلِ أنّهُ كانَ يَحمِلُ مَشْروعاً مائيّاً كانَ يَنوي عَرْضَهُ عَلَى الحاكِمِ. ومن المُحْتَملِ أيضاً، إذا صَدّقْنا القِفْطِيَّ، أنّهُ قد أقامَ بالقُربِ من مَسجدِ جامعةِ الأزهرِ[٢٨].

لا نَعْرِفُ أيَّ شيءٍ عن حياةِ ابنِ الهَيْثَمِ في القاهِرَةِ[٢٩]. وما يَرْويهِ القِفْطِيُّ هَشٌ للغايةِ، وخاصّةً حادِثَةُ تَصَنُّعِ العالِمِ للجنونِ حَتّى وفاةِ الحاكِمِ. وبالمُقابِلِ لَدَيْنا مَعْلوماتٌ أفْضَلُ عن تاريخِ وفاتِهِ في القاهِرَةِ: وذَلِكَ بَعْدَ العامِ ٤٣٢هـ، أي بَعْدَ شَهْرِ أيلول من العام ١٠٤٠م. وأوّلُ شَهادَةٍ في هَذا الصَدَدِ، وقد أشَرْنا إلَيْها، تَعودُ إلى الإسرائيلِيِّ، فهُوَ يُؤَكِّدُ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد تُوُفِّيَ حَوالَى العامِ ٤٣٠هـ، أي في نهايَةِ العامِ ١٠٣٨م، حَيْثُ يَقولُ: "ماتَ (أي ابنُ الهَيْثَمِ) في القاهِرَةِ، في حُدودِ سَنَةِ ثلاثينَ وأربعمائة أو بَعْدَها بقليلٍ". لَكِنّنا رَأيْنا أنّ القاضِيَ الأنْدَلُسِيَّ أبا زَيْدٍ قد التَقاهُ في مِصْرَ في العامِ ٤٣٠هـ؛ ولذَلِكَ، فإنّ الوَفاةَ قد حَصَلَت حَتْماً بَعْدَ هَذا

=“وفي سنة ثلاث وأربعمائة: أُحضرَ جماعةٌ من دارِ العلمِ من أهلِ الحساب والمنطق، وجماعةٌ من الفقهاءِ منهم: عبد الغنيّ بن سعيد، وجماعةٌ من الأطبّاءِ إلى حضرةِ الحاكِمِ بأمرِ الله، وكانت كُلُّ طائفةٍ تحضرُ عَلَى انفرادِها للمناظرةِ بَيْنَ يديه، ثمّ خلعَ عَلَى الجميعِ ووصلهم"

[٢٨] وهَذا ما يؤكّدُهُ القِفْطِيُّ في كِتابهِ *"تأريخ الحُكَماء"*، الصفْحَة ١٦٧.

[٢٩] يُسمِّي ابنُ أبي أُصَيْبعة، ودائماً مع الخلطِ بَيْنَ الاسمين، تِلْميذَيْنِ لابنِ الهَيْثَمِ، أحَدُهُما أميرٌ والآخرُ طبيبٌ، وهما لا يَرْقَيانِ إلى مُسْتَوَى المعلّم. والأميرُ هو أبو الوفاء المبشّر بنُ فاتك، ولا نعرفُ له شيئاً في العلومِ الرياضِيّةِ. والطبيبُ هو اسحق بنُ يونس، الذي رُبَّما أُشيرَ إلى تعليقٍ عَلَّقَهُ هَذا المتطبّبُ بمِصرَ عن ابنِ الهَيْثَمِ في كِتابِ ديوفنطس في *"صناعة الجبر"*. راجع ابنَ أبي أُصَيْبعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، الصَفْحَتان ٩٨-٩٩. ومن المُحْتَمَلِ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ وجّهَ إلى ابنِ الفاتك هَذا، مؤلَّفَهُ ***في بركار الدوائر العظام***، [MS India Office, Loth 734, fols 116v – 118v]، حَيْثُ يَقولُ: "إلى الأميرِ الوزيرِ أدامَ اللهُ سلطانَهُ"].

التاريخ. ويَكْتُبُ القِفْطِيُّ بِدَوْرِهِ، بَعْدَ أن يَسْتَشْهِدَ بالإسْرائيلِيِّ."ورأيتُ بِخَطِّهِ (أي بِخَطِّ ابنِ الهَيْثَم) جُزْءاً في الهَنْدَسَةِ وقد كَتَبَهُ في سَنَةِ اثنَتَيْنِ وثلاثينَ وأربعمائة"[٣٠]

من بَيْنِ هاتَيْنِ السيرَتَيْنِ اللّتَيْنِ وَضَعَهُما البَيْهَقِيُّ والقِفْطِيُّ، نَتَمَسَّكُ بالثانيةِ بِشَكْلٍ خاصٍّ. لَكِنَّ هَذِهِ السيرَةَ تَتَشابَكُ مع تَقْليدٍ ثانٍ، ناتِجٍ مِن التِباسٍ مُؤْسِفٍ، يرجعُ إلَى القَرْنِ الثاني عَشَرَ، ويَعودُ السَبَبُ في انتشارِهِ، بِشَكْلٍ ما، إلَى ابنِ أبي أُصَيْبِعَة. ولسَوْفَ نَتَناوَلُ هَذا الالتِباسَ الآنَ.

٢–الحَسَنُ بنُ الحَسَنِ ومُحَمَّدُ بنُ الحَسَنِ: الرياضيُّ والفَيْلَسوفُ

عقبَ السيرَةِ المُفَهْرَسَةِ الخاصَّةِ بابنِ الهَيْثَمِ، الّتي وَضَعَها القِفْطِيُّ، تُعْتَبَرُ فَهْرَسَةُ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة الأكْثَرَ أهَمِيَّةً. فالمَقالَةُ الّتي خَصَّصَها لابنِ الهَيْثَمِ في ***عيون الأنباء*** هِيَ الأكْثَرُ غِنىً، والمُفَهْرِسونَ المُحْدَثونَ يستشهدونَ بها أكْثَرَ من غَيْرِها. لَكِنَّ أهَمِيَّتَها تَتَأتَّى من أنّ ابنَ أبي أُصَيْبِعَة جَمَعَ فيها، وإن يَكُن بِشَكْلٍ عشوائِيٍّ، عِدّةَ مَصادِرَ، هِيَ: شَهادَاتٌ لأحدِ المُعاصرين، والسيرَةُ الّتي وَضَعَها القِفْطِيُّ، ونَصٌّ يَتَضَمَّنُ سيرَةً ذاتيّةً لِمُحَمَّدٍ بنِ الحَسَنِ، ولائِحَةٌ بكِتاباتِ الحَسَنِ بنِ الحَسَنِ حَتَّى نهايَةِ العامِ ٤٢٩هـ/ تشرين الأول ١٠٣٨م. وقد اقْتَبَسَ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة هَذا النَصَّ وهَذِهِ

[٣٠] القِفْطِيّ، ***تأريخ الحُكَماء***، الصَفْحَة ١٦٧. نَذْكُرُ أيضاً، اسْتِناداً إلى شَهادةِ الطبيب ابن بطلان، الّتي أوْرَدَها ابنُ أبي أُصَيْبِعَة [***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الأوّل، الصَفْحَتان ٢٤٢–٢٤٣]، أنّ ابنَ الهَيْثَم، وكذَلِكَ عُلَماءَ وفلاسفةً وفُقهاءَ وأدباءً وشُعراءً، كانوا ضحايا أمراضٍ وَبائِيَّةٍ، وقد قَضوا جميعاً في العقدِ نفسِهِ، ومن بينِ هؤلاء نَجِدُ الشريفَ المرتضى، المُتوفّى في العام ٤٣٦هـ/١٠٤٤م، وأبا الحسين البصريِّ، المُتَوَفَّى أيضاً في العام ٤٣٦هـ/١٠٤٤م. لَكِنَّنا نَجِدُ أيضاً في هَذِهِ المَجْموعةِ أبا العلاءِ المعرّيَّ، المُتَوَفَّى في العام ٤٤٩هـ/١٠٥٨م؛ أمّا الشاعرُ مهيار الديلميّ فقد تُوُفِّيَ في العام ٤٢٨هـ/١٠٣٧م. وتَتَضَمَّنُ هَذِهِ اللاّئِحَةُ أيضاً الفَيْلَسوفَ ابنَ السمحِ، المُتَوَفَّى في العام ١٠٢٧م، والطبيبَ والفَيْلَسوفَ أبا الفرجِ بنِ الطيّبِ، المُتَوَفَّى في العام ١٠٤٣م. يَتَبَيَّنُ من هَذا العرضِ أنّ هَذِهِ الفترةَ الزمنيَّةَ تمتدُّ عَلَى مَدَى عقدَيْنِ، لا عقدٍ واحدٍ. لَكِنَّ الغالبيّةَ، من بينِ هَذِهِ المَجْموعَةِ، تُوُفِّيَت في الأرْبَعينيّاتِ من القرنِ الحادي عَشَرَ الميلاديِّ.

اللاّئحَةَ عن مُؤلَّفٍ مَوْضوعٍ قَبْلَ العامِ ٥٥٦هـ/١١٦١م، لأنّ هَذا المُؤَلَّفَ يُشَكِّلُ أيضاً مَصْدَراً لَمخْطوطَةِ لاهور الّتي نُسِخَت في هَذا التاريخ[٣١]. والأساسِيُّ هُنا، هُوَ أنّ ابنَ أبي أُصَيْبِعَة يَعْتَبِرُ مُحَمَّداً والحَسَنَ شَخْصاً واحِداً، ورَأيُهُ هَذا قد وَجَدَ استِمراريّةً حَتّى يومِنا هَذا. فهل يَمْلِكُ هَذا الرأيُ أساساً من الصحّةِ، أم أنّهُ مُجرّدُ التباسٍ؟ وتُصبِحُ المَسْأَلَةُ أكْثَرَ جَسامَةً لأنّها تطالُ موضوعَ أصالَةِ بَعْضِ أعْمالِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ.

لندرُسْ في البدايةِ مَقالَةَ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة عن ابنِ الهَيْثَمِ. إنّها تَرْكيبٌ من عِدّةِ مَقاطِعَ، لم يَلْقَ تماسُكُها اهْتِماماً لا من الكاتِبِ ولا من أيِّ شَخْصٍ بَعْدَهُ. يَبْدَأُ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة المَقالَةَ بتَمْهيدٍ، ويسردُ أقوالَ مُعاصِرِهِ عالِمِ الهَنْدَسَةِ عَلَمِ الدين، ويُوردُ السيرَةَ الكامِلَةَ الّتي قَدَّمَها القِفْطِيُّ، ثم ينسخُ السيرَةَ الذاتِيَّةَ ولائِحَةَ أعْمالِ مُحَمَّدٍ بنِ الحَسَنِ، ليختمَ بنسخِ لائِحَةِ أعْمالِ الحَسَنِ بن الحَسَنِ حَتّى تشرين الأوّل من العام ١٠٣٨م. وما قامَ بِهِ هُنا ابنُ أبي أُصَيْبِعَة هُوَ لَصْقٌ لَمقاطِعَ من مَصادِرَ متنوّعةٍ غَيْرِ مُتَجانِسَةٍ، ولا ينجحُ التَمْهيدُ في حجبِ طابعِها التنافريِّ. وما يُثيرُ العَجَبَ أيضاً هُوَ أنّ ابنَ أبي أُصَيْبِعَة، وخِلالَ إيرادِهِ للاقتباساتِ المُتتاليةِ، لم يُلاحظِ التَناقُضاتِ الجليّةَ بَيْنَ مُخْتَلفِ الرواياتِ، وعَلَى الأقَلِّ تِلْكَ التَناقُضاتِ المُتَعَلِّقَةَ باسمِ ابنِ الهَيْثَمِ. ويُذْكَرُ هَذا العالِمُ في المَقْطَعِ المقتبَسِ عن القِفْطِيِّ تَحْتَ اسمِ "أبي عليٍّ الحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ". أمّا اللاّئحَةُ الأخيرةُ لأعْمالِ العالِمِ، الّتي أوْرَدَها ابنُ أبي أُصَيْبِعَة، فتَعودُ، كما سنَرَى، إلى الحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ. وبَيْنَ هَذا المَقْطَعِ وهَذِهِ اللاّئحَةِ،

[٣١] إنّها مَخْطوطَةٌ تعودُ إلَى عائلةِ نبي خان في لاهور. أشارَ أنتون هاينن *(M. Anton Heinen)* إلى وُجودِ هَذِهِ المَخْطوطَةِ، وحَقَّقَ النَصَّيْنِ، أي السيرَةَ الذاتيّةَ لُمحَمَّدٍ ولائِحَةَ الحَسَنِ، مع تَحْديدِ هَوِيَّةِ هَذَيْنِ الشَخْصَيْنِ. راجع:

«Ibn al – Haiṯams Autobiographie in einer Handschrift aus dem Jahr 556 H /1161 A. D.», in U. Haarmann et P. Bachmann (éd.), *Die islamische Welt zwischen Mittelalter und Neuzeit*, Beiruter Texte und Studen, 22 (Beyrouth, 1979), pp. 254-277.

يُدرِجُ ابنُ أبي أُصَيْبعَة سيرَةً ذاتيَّةً لمُحَمَّدٍ بنِ الحَسَنِ إضافَةً إلَى لائِحَتَيْنِ لمُؤَلَّفاتِهِ كَتَبَهُما بنَفْسِهِ، ويَرد ذَلِكَ بدون شَرْحٍ. فلرُبَّما أحسَّ ابنُ أبي أُصَيْبعَة أمامَ هَذا التناقضِ، وبِشَكْلٍ غَيْرِ واعٍ عَلَى أَقَلِّ تقديرٍ، بالحاجةِ إلى تأليفِ الاسمِ الَّذي يَفْتَتِحُ بِهِ تَمْهيدَ مَقالَتِهِ، وهُوَ: أبو عِلِيٍّ مُحَمَّدٌ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ[٣٢]. وهَذا ما كَتَبَهُ:"ابنُ الهَيْثَمِ: هُوَ أبو عِلِيٍّ مُحَمَّدٌ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ، أصْلُهُ من البَصْرةِ، ثمَّ انْتَقَلَ إلَى الدِيارِ المِصْرِيَّةِ وأقامَ بها إلَى آخِرِ عِمْرِهِ"[٣٣]. ويُعَدِّدُ من ثمَّ صِفاتِهِ الروحِيَّةَ والذِهْنيَّةَ، فيَكْتُبُ:"وكانَ فاضِلَ النَفْسِ قَوِيَّ الذَكاءِ مُتَفَنِّناً في العُلومِ، لم يُماثِلْهُ أحَدٌ من أهْلِ زَمانِهِ في العِلْمِ الرياضِيِّ، ولا يقربُ مِنْهُ، وكانَ دائمَ الاشتغالِ، كثيرَ التصنيفِ، وافرَ التزهّدِ، مُحبّاً للخيرِ، وقد لخّصَ كثيراً من كُتُبِ أرسطوطاليس وشَرَحَها، وكذَلِكَ لخّصَ كثيراً من كُتُبِ جالينوس في الطبِّ، وكانَ خبيراً بأصولِ صناعةِ الطبِّ وقوانينها وأمورها الكُلِّيَّةِ، إلاّ أنّهُ لم يباشرْ أعْمالَها، ولم تكنْ لَهُ دربةٌ في المداواةِ"[٣٤]. وهَكَذا، يُقَدِّمُ لنا ابنُ أبي أُصَيْبعَة فَيْلَسوفاً وَفْقَ التَقْليدِ اليونانيِّ، منَظِّراً في الطبِّ مُلِمّاً بأعْمالِ جالينوس، ولَكِنَّه، قطعاً، لَيْسَ عالماً رياضِيّاً شهيراً. سنَرَى أنّ أقوالَ ابنِ أبي أُصَيْبعَة تَصِفُ بالتَحْديدِ صورَةَ مُحَمَّدٍ، لا صورَةَ الحَسَنِ الّتي تَرْتَسِمُ من خِلالِ أعْمالِه المُتَوَفِّرَةِ لَدَيْنا.

يَنْتَقِلُ ابنُ أبي أُصَيْبعَة بدونَ تَمْهيدٍ إلَى أقوالِ مُعاصِرِهِ عالِمِ الهَنْدَسَةِ عَلَمِ الدين بنِ أبي القاسِمِ الحنفيِّ[٣٥] (١١٧٨/١١٧٩ – ١٢٥١). حَيْثُ يَسْتَحْضِرُ هَذا

---

[٣٢] في مَقالَتِهِ عن المبشِّرِ بنِ فاتك، الّتي تَرِدُ مُباشَرَةً بعدَ المَقالَةِ المُخَصَّصَةِ لابنِ الهَيْثَمِ، يَكْتُبُ ابنُ أبي أُصَيْبعَة دائماً اسمَ ابن الهَيْثَمِ عَلَى الشَكْلِ التالي: "أبو عليٍّ مُحَمَّدٌ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ"، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، صَفْحَة ٩٩.

[٣٣] المَرْجع السابق، المُجَلَّد الثاني، الصَفْحَة ٩٠.

[٣٤] المَرْجِع السابِق. وقد أشَرْنا إليه.

[٣٥] وُلد هَذا الرياضِيُّ، عَلَى غِرارِ القِفْطِيِّ، في مِصْرَ العُليا في العامِ ٥٧٤هـ/١١٧٨-١١٧٩م وهاجَرَ إلى سوريا وتُوُفِّيَ في دمشق في العام ٦٤٩هـ/١٢٥١م. راجع: =

العالِمُ الأخيرُ ذِكْرَى من قِراءَتِه الخاصّةِ للسيرَةِ الّتِي أوْرَدَها القِفْطِيُّ، ولا يُقَدِّمُ شَيْئاً جَديداً. فهُوَ يَذْكُرُ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ أقامَ أوّلاً فِي البَصْرَةِ، فِي ضواحيها، وقد عُيِّنَ وزيراً، وأرادَ التفرُّغَ للعِلْمِ، وبما أنّهُ كانَ يتوقُ إلَى الفضائلِ والحِكمةِ فَقَد تصنَّعَ الجُنونَ لِيَتَخَلَّصَ من أعبائِهِ الوزاريَّةِ، وانْتَقَلَ أخيراً إلَى القاهِرَةِ حَيْثُ استقرَّ فِي محلَّةِ الجامعِ الأزهرِ. تبدو هَذِهِ الروايةُ، كما نَرَى، مُسْتَقاةً من سيرَةِ القِفْطِيِّ، ومِمّا لا شَكَّ فيهِ أنّ الذاكِرَةَ خانَت عَلَمَ الدين، فَقَد اعتبرَ أنّ السنواتَ الّتِي قضاها ابنُ الهَيْثَمِ فِي القاهِرَةِ وَفْقاً للقِفْطِيِّ، كانَت فِي البَصْرَةِ، وفَضْلاً عن ذَلِكَ، فَقَد جَعَلَهُ وزيراً.

بَعْدَ شَهادَةِ عَلَمِ الدينِ، يعرِضُ ابنُ أبِي أُصَيْبِعَة نَصَّ القِفْطِيِّ، بدون ملاحَظَةِ هَذا الاختِلافِ الأخير. ثمّ يُورِدُ السيرَةَ الذاتِيَّةَ لُمحَمَّدٍ بن الحَسَنِ، الّتِي تَنْدَرِجُ فِي تَقْليدِ السيَرِ الذاتِيَّةِ وَفْقَ جالينوس[٣٦]: حَيْثُ يُورِدُ مُحَمَّدٌ سيرتَهُ ومقاصدَهُ الفكريّةَ وكِتاباتِهِ حَتَّى حَوالَى العامِ ٤١٧هـ/١٠٢٦م، وهُوَ العامُ الَّذي بَلَغَ فيهِ من العُمْرِ ثلاثاً وستّينَ سَنَةً قَمَرِيَّةً، ما يُفيدُنا بأنَّ تاريخَ ولادتِهِ يَكونُ حَوالَى العام ٣٥٤هـ/٩٦٥م. إنّها سيرَةُ فَيْلَسوفٍ كَتَبَ حَتَّى الثالثَةِ والستينَ من عِمْرِهِ، خَمْساً وعشرين مَقالَةً فِي الرياضِيّاتِ وعِلْمِ الفَلَكِ، وأرْبَعاً وأرْبَعين فِي المَنْطِقِ وما بَعْدَ الطَبيعَةِ والطِبِّ، كما وَضَعَ أيضاً مَقالَةً لكي يُبَيِّنَ أنّ الأمورَ الدينيّةَ والدُنْيَوِيَّةَ هِيَ نَتائِجُ لنُظُمٍ فَلْسَفِيّةٍ؛ وهُناك أخيراً "رسائلُ ومصنّفاتٌ عِدّةٌ حَصَلَت لي فِي أيدي جماعةٍ من الناسِ فِي البَصْرَةِ وفِي الأهوازِ ضاعت دساتيرُها"[٣٧]. نَجدُ بِخاصَّةٍ فِي هَذِهِ

= H. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber*, 243,

راجع أيضاً:

C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Literatur*, I, p. 625 [474]; supp. I, p. 867; supp. III, p. 1241.

[٣٦] حَوْلَ العلاقةِ بَيْنَ السيرَةِ الذاتيّةِ لُمحَمَّدٍ بن الهَيْثَمِ، والنَموذَجِ الذي اقترحَهُ جالينوس فِي كِتابِهِ حَوْلَ ***السِيَرِ الذاتِيَّة*** *liber propriis*، راجع:

F. Rosenthal, "die arabische Autobiographie", *Studia Arabica: Analecte Orientalia*, 14(1937), pp. 3-40.

[٣٧] ابن أبي أُصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، الصَفْحَة ٩٦.

اللاّئحَةِ الأُولى "***الردّ عَلَى المسائل الرياضيَّةِ السبعِ الّتي طرحوها عليّ في بغداد***"، ونَجدُ كذَلِكَ رسالةَ، "***الردّ عَلَى مَسْأَلةٍ تَعودُ إلَى ابـــنِ الـــسمح البغـــداديّ***"[٣٨] و"رسالةً ***في الردِّ عَلَى المعتزلةِ في البَصْرَةِ***"[٣٩].

تأتِي بَعْدَ ذَلِكَ لائِحَةٌ ثانيَةٌ كَتَبَها أيضاً مُحَمَّدٌ بنُ الحَسَنِ، ويُحْـــصي فيهـــا أعْمالَهُ بَيْنَ العامَيْنِ ٤١٧هـ/١٠٢٦م – ٤١٩هـ /١٠٢٨م، وهِيَ تَتَضَمَّنُ أرْبَعَ عَشْرَةَ مَقالَةً في الفَلْسَفَةِ، وثلاثاً في عِلْمِ الفَلَكِ، وواحِدَةً في عِلْمِ الهَنْدَسَةِ، واثنَتَيْنِ في عِلْـــمِ البَصَرِيّاتِ، وواحِدَةً في الطِبِّ ومن بَيْنِ هَذِهِ المَقالاتِ، نَجِـــدُ بِخاصَّـــةٍ "***مَـــسْأَلَة هَنْدَسِيَّة سُئِل عنها في بغدادَ في شهور سنة ثماني عشرة وأربعمائة***"[٤٠]، وكَـــذَلِكَ رسالةً مُوَجَّهَةً إِلَى أبي الفرجِ عبدِ اللهِ بنِ الطيّبِ البَغْدادِيِّ وهُوَ فَيْلَسوفٌ وطبيـــبٌ من بغدادَ،[٤١] في "***عدّة معانٍ من العلوم الطبيعيّة والإلهيّة***"، ونَجدُ أيضاً مُؤَلَّفاً يَـــرُدُّ فيهِ عَلَى أبي الفرجِ نَفْسِهِ، مُنْتَقِداً آراءَه المُغايرَةَ لآراءِ جالينوس حول القِوَى الطَبيعِيَّةِ في بَدَنِ الإنسانِ.

يَكْتُبُ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة في أسْفَلِ القائِمَةِ الثانيَةِ: "أقولُ وهَذا آخرُ ما وجدتُـــهُ من ذَلِكَ بخطِّ مُحَمَّدٍ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ المُصَنِّفِ رَحِمَهُ اللهُ"، ليَـــسْتَطْرِدَ فَـــوراً: "وهَذا أيضاً فهرست وجدتُهُ لكُتُبِ ابنِ الهَيْثَمِ، إلَى آخرِ ســـنةِ تـــسعٍ وعـــشرين

---

[٣٨] هو فَيْلَسوفٌ من مَدْرَسَةِ بَغْداد، تُوُفِّيَ في العام ١٠٢٧. راجع:

S.M. Stern, "Ibn al-Samh", *Journal of the Royal Asiatic Society* (1956); réimp. dans S.M. Stern, *Medieval Arabic and Hebrew Thought*, éd. F.W. zimmermann (Londres 1983).

[٣٩] ابنُ أبي أُصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، الصَفْحَة ٩٥.

[٤٠] ابنُ أبي أُصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، الصَفْحَة ٩٧.

[٤١] حَوْلَ أبي الفرجِ عبدِ الله بنِ الطيّب، المُتَوَفَّى في العام ١٠٤٣م، راجع:

G. Graf, *Geschichte der christlichen arabischen Literatur* (Rome, 1947), vol. II, pp.160-176.

راجِعْ أيضاً: ابن أبي أُصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، صَفْحَة ٩٧.

وأربعمائة"[٤٢]. لَكِن، ومِن أجْلِ إيضاحِ مَسارِ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة وتَأكيداتِهِ، وبخاصَّةٍ الأخيرةِ مِنْها، حَيْثُ لا يَرِدُ أيُّ اسمٍ شَخْصِيٍّ لابنِ الهَيْثَمِ، سنَتَناوَلُ الآنَ مَخْطوطَةَ لاهور الّتي تَرُدُّنا إلَى المَصْدَرِ نَفْسِهِ.

وهَذِهِ المَخْطوطَةُ هِيَ عِبارَةٌ عن مَجْموعَةٍ تَتَضَمَّنُ مُؤَلَّفاتٍ لِعِدَّةِ رياضِيِّينَ، من بَيْنِهِم ابنُ الهَيْثَمِ، وكذَلِكَ عِدَّةَ لوائِحَ لِمُؤَلَّفاتٍ. وهَكَذا نَجِدُ، بَيْنَ الصَفْحَةِ ١٧٤ ووَسَطِ الصَفْحَةِ ١٨٤، السيرَةَ الذاتِيَّةَ لِمُحَمَّدٍ بن الحَسَنِ الّتي تَتَضَمَّنُ لائِحَتَيْ كِتاباتِهِ، إنّها النَصُّ نَفْسُهُ الّذي ذَكَرَهُ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة. ولَكِن لا تَرِدُ بَعْدَهُ لائِحَةُ الحَسَنِ، كما جاءَ في كِتابِ هَذا الأخيرِ، بل لائِحَةُ أعْمالِ الفَيْلَسوفِ الفارابِيِّ، الّتي تَحْتَلُّ النِصْفَ الثاني من الصَفْحَةِ ١٨٢ والصَفْحَةَ ١٨٣[٤٣]. فَقَط في الصَفْحَةِ ١٨٤ نَجِدُ:"فهرست كُتُبِ الحَسَنِ بن الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ إلَى آخِرِ سنةِ.<تسعٍ وعشرين وأربعمائة>"[٤٤]. وهَذِهِ اللاّئِحَةُ مَبْتورَةٌ، لَكِن يَكْفي مُقارَنَةُ الجُزْءِ الّذي وَصَلَ إلَيْنا بلائِحَةِ الحَسَنِ الّتي نسخَها إبنُ أبي أُصَيْبِعَة لِنَتَبَيَّنَ أن مصدرَهُما واحدٌ. عَلَى أيِّ

[٤٢] ابنُ أبي أُصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، الصَفْحَة ٩٧.

[٤٣] نَقْرَأُ: فهرست مؤلّفاتِ أبي نصرٍ مُحَمَّدٍ بنِ مُحَمَّدٍ بن طرخانيٍّ الفارابيِّ، كما نُسِخَ بِيَدِ ابنِ المرخّمِ. وهَذا الأخيرُ كان قاضياً في بَغْدادَ بَيْنَ العامَيْنِ ٥٤١هـ/١١٤٦م و ٥٥٥هـ/١١٦٠م، وكان يهتمُّ بالفلسفةِ والعِلْمِ. وقد نَسَخَ، بالإضافةِ إلى ذَلِكَ عملاً لابنِ سهلٍ في عِلْمِ البصريّاتِ؛ راجع:

R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^e siècle: Ibn sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris 1993), p. CXL.

(راجع الترجمةَ العَرَبِيَّةَ في كِتابِ: رشدي راشد، عِلم الهندسةِ والمناظرِ في القرنِ الرابعِ الهجريّ (ابنُ سهلٍ — القوهيُّ — ابنُ الهَيْثَمِ)، ترجمة د. شكر الله الشالوحي، مُراجعة عبد الكريم العلاّف، سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ٣ (بيروت مركز دراسات الوحدة العَرَبِيَّة، ١٩٩٦)).

تجدُرُ الإشارةُ إلى أنّ ناسخَ مَخْطوطَةِ لاهور، المُرتبطَ بالمَدْرَسَةِ النظاميّةِ، هو معاصرٌ لابنِ المُرخِّمِ ومواطنٌ له.

[٤٤] نَقْرَأُ في المَخْطوطَةِ: "فهرست كُتُبِ الحَسَنِ بن الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ إلى آخِرِه". ولَكِنَّ الكَلِمَةَ الأخيرةَ لا مَعْنَى لها هنا، من الواضحِ أنّ في الأمرِ خطأً أو إغفالاً باستطاعتِنا تصحيحَهَ بالرجوعِ إلى ابنِ أبي أُصَيْبِعَة. والقِراءَةُ الصحيحةُ هي:"إلى آخِرِ <سنةِ ٤٢٩>".

حالٍ، نُشيرُ إلَى أنّ ناسخَ مَخْطوطَةِ لاهور، لا بل النَموذَجَ الّذي اعْتَمَدَهُ، لم يَبْلُغْ حَدَّ اعتِبارِ مُحَمَّدٍ والحَسَنِ شَخْصاً واحداً، خِلافاً لما فَعَلَهُ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة، ويَتَبَيَّنُ ذَلِكَ من خِلالِ ترتيب اللاّئحتَيْنِ، ومن خِلالِ إدراجِ لائِحَةِ الفارابيِّ بَيْنَ السيرَةِ الذاتيّةِ لُمحَمَّدٍ بنِ الحَسَنِ من جهَةٍ، ولائِحَةِ الحَسَنِ بن الحَسَنِ من جهَةٍ أُخْرَى. نُشيرُ كذَلِكَ، إلَى أنّ المُؤَلّفاتِ الواردَةَ في اللاّئِحَةِ الثانيَةِ، الّتي ينسبُها ابنُ أبي أُصَيْبِعَة إلَى ابنِ الهَيْثَم، بدون إيرادِ أسْماءِ شَخْصيّةٍ، هِيَ مَنْسوبَةٌ في الأصْلِ وبشَكْلٍ ظاهرٍ إلَى الحَسَنِ بن الحَسَنِ بنِ الهَيْثَم[٤٥]. بالإضافَةِ إلَى ذَلِكَ، فإنّ عُنْوانَ اللاّئِحَةِ المَذْكورَةِ أعلاه، الّتي تَتَضَمَّنُ هَذِهِ المُؤَلّفاتِ، قد استبدلَهُ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة بالجملةِ المُنْبِئَةِ التاليةِ:"وهَذا أيضاً فهرست وجَدْتُهُ لكُتُبِ ابن الهَيْثَم"[٤٦]، وقد هَدَفَ من ذَلِكَ إلَى إقامةِ تواصلٍ بَيْنَ السيرَةِ الذاتيَّةِ لُمحَمَّدٍ ولائِحَةِ الحَسَنِ. وإذا ما حَصَلَ التباسٌ بَيْنَ مُحَمَّدٍ والحَسَنِ، فيَعودُ السَبَبُ إلَى ابنِ أبي أُصَيْبِعَة بخاصَّةٍ، وذَلِكَ وَفْقَ ما تُشيرُ إليه المَعْلوماتُ المُتوَفِّرَةُ لَدَيْنا حَتَّى الآن[٤٧].

---

[٤٥] هَذا الأمرُ مُثْبَتٌ أيضاً من خلالِ لائِحَةِ أعمالِ ابن الهَيْثَم، الواردةِ في مَخْطوطَةِ كويبيشيف المطابقةِ تقريباً للاّئِحَةِ الّتي يورِدُها ابنُ أبي أُصَيْبِعَة تَحْتَ اسمِ ابن الهَيْثَمِ، وهي تعودُ للحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بن الهَيْثَم.

[٤٦] ابن أبي أُصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، صَفْحَة ٩٧.

[٤٧] نُشيرُ إلى زَلَّةٍ في مَخْطوطَةِ لاهور – لَكِنَّها لَيْسَت التباساً – والنَموذَجُ الأصليُّ خالٍ منها. فالناسخُ بعد أن كتبَ العِبارَةَ الخِتاميَّةَ للسيرَةِ الذاتيَّةِ لُمحَمَّدٍ: "هَذا آخرُ ما وُجدَ بخطِّ المصنِّفِ والسَلامُ عَلَيْها بمَدينَةِ السلامِ في النظاميّةِ بتاريخِ أواخرِ صَفَر لسنةِ ستٍّ وخمسين وخمسمائة هجريّة"، أَتْبَعَها بالدَعَواتِ المُعْتادَةِ، ثمّ كَتَبَ: "وله مَقالَةٌ في الضوءِ وأيضاً مَقالَةٌ له في قوسِ قُزح" راجع:

[fol.182, ligne 11; Heinen, «Ibn Haiṯams Autobiographie», p.272]

لَكِنَّ هذين العُنْوانَيْنِ لا يردانِ في السيرَةِ الذاتيَّةِ لُمحَمَّدٍ، ويُشيرانِ إلى مؤلَّفين معروفَيْنِ عائدَيْنِ للحَسَنِ، وقد وَصَلا إلينا. فالأمْرُ إذاً هُوَ إضافَةٌ بريشةِ ناسخِ مَخْطوطَةِ لاهور، ولَيْسَت بقَلَمِ كاتِبِ النَموذَجِ الأصْليِّ، لأنّ هَذِهِ الجُمْلَةَ غَيْرُ موجودةٍ في نسخةِ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة. وهَذا يَعْني أن التَجانُسَ المَوْجودَ إلى حَدٍّ ما بَيْنَ الاسمَيْنِ قد شَكَّلَ مَصْدَراً للالتِباسِ، لَكِن وَفْقَ ما نَعْرِفُهُ، ابنُ أبي أُصَيْبِعَة هو أوّلُ من قَرَّرَ اعتِبارَ الكاتِبَيْنِ شَخْصاً واحِداً.

يَبْدو إذاً أنّنا بصَدَدِ شَخْصَيْنِ مُخْتَلِفَيْن: أحَدُهُما هُوَ مُحَمَّدٌ، مُرْتَبطٌ ببَغْـــدادَ وبجنوبِ العِراقِ التاريخِيِّ، حَيْثُ يَتَواجَدُ في العامِ ١٠٢٧م؛ والآخَرْ هُـــوَ الحَـــسَنُ وكانَ قد اسْتَقَرَّ في القاهِرَةِ حَتَّى قَبْلَ العامِ ١٠٢٠م. وتَسْمَحُ لنا الوَقـــائعُ التالِيَـــةُ بتَعْليلِ هَذا التَأْكيدِ:

١- كانَ الحَسَنُ يَذْكُرُ اسمَهُ الشَخْصِيَّ عَلَى الشَكْلِ التالي: الحَسَنُ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ، ولم يُوردْهُ قَطْ عَلَى الشَكْلِ التالي: مُحَمَّدٌ بنُ الحَسَنِ. ففـــي مَخْطوطَـــةٍ للنُسخةِ العربيَّةِ لِ***مَخْروطات*** أبلونيوس، المنسوخةِ بقَلَمِ ابنِ الهَيْثَمِ، كتبَ هَذا الأخيرُ في العِبارَةِ الخِتامِيَّةِ للكِتابِ الثالثِ:"كَتَبَ هَذا المُجَلَّدَ وشَكَّلَهُ الحَسَنُ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ وصَحَّحَهُ من أوّلِهِ إلَى آخِرِهِ، وفرغَ من تصحيحِهِ في صَفر من ســـنةِ خمـــس عشرة وأربعمائة. وكتبَ هَذِهِ الأسطُرَ في يومِ السبتِ لستٍّ خَلَوْنَ مـــن الـــشهرِ المذكورِ [السبت ٢٠ نيسان ١٠٢٤]"[٤٨]. من جهَةٍ أُخْرَى، ثَمَّةَ مَخْطوطَةٌ محفوظَةٌ حالياً في سان بطرسبورغ، وهِيَ تَتَضَمَّنُ فَقَط مُؤَلّفاتٍ لابنِ الهَيْثَمِ ونَـــصّاً لابـــنِ سَهْلٍ، وقد نُسخَت عن النَموذَجِ الأصْلِيِّ الَّذي أنجزَهُ ابنُ الهَيْثَمِ (نُشيرُ إلَى أنّ نَصَّ ابنِ سَهْلٍ كانَ قد نسخَهُ أيضاً ابنُ الهَيْثَمِ ممّا يفسّرُ وجودَهُ في النَموذَجِ الأصْلِيِّ لِهَذِهِ المَخْطوطَةِ). وفي جميعِ المُؤَلَّفاتِ الّتي تُشكّلُ هَذِهِ المَجْموعَةَ، يَكْتُبُ ابنُ الهَيْثَمِ اسمَـــهُ الشَخْصِيَّ بالطريقةِ نَفْسِها، الحَسَنُ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ[٤٩]. وأخيراً، يُخْبِرُنا كمـــالُ الدينِ الفارسيُّ أنّهُ باشرَ بكِتابةِ مُؤَلَّفٍ لِلحَسَنِ حَوْلَ قَوْسِ قُزحٍ والهالَةِ اسْتِناداً إلَى

[٤٨] راجع مَخْطوطَةَ ***المخروطات*** لأبلونيوس الّتي نسخَها ابنُ الهَيْثَمِ – مَخْطوطَة ٢٧٦٢، مَجْموعَة أيا صوفيا في مَكْتَبَةِ السليمانيّة. قدّمَ ناظم ترزيوغلو تصويراً فوتوغرافيّاً عن المَخْطوطَةِ، نُشِرَ في إسْطَنْبول في العام ١٩٨١، في مَجْموعَةِ:

Publications of the mathematical Research Institute, Istanbul, n° 4.

وأعادَ شرام (M. Schramm) نَشْرَ هَذِهِ العِبارَةِ الخِتامِيَّةِ في:

Ibn al-Haythams weg zur physik, p. IX.

[٤٩] حَوْلَ مَخْطوطَةِ سان بطرسبورغ (لينينغراد) B 1030، انْظُرْ أدناه.

مَخْطوطَةٍ، هِيَ نَفْسُها مَنْسوخَةٌ عن نُسْخَةٍ مَكْتوبَةٍ بخَطٍّ ابنِ الهَيْثَمِ الَّذي كَتَبَ العِبارَةَ الخِتامِيَّةَ التالِيَةَ: "كَتَبَ هَذا الكِتابَ وشَكَّلَهُ الحَسَنُ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ، وصَحَّحَهُ من أوّلِهِ إلَى آخِرِهِ بالقِراءَةِ، وكتبَ هَذِهِ الكَلِماتِ في رَجَب سنة (٤١٩ هـ(تسع عشرة وأربعمائة [آب ١٠٢٨م]"[٥٠].

٢– عِنْدَما كانَ صِهْرُ ابنِ الهَيْثَمِ، أحمدُ بنُ مُحَمَّدٍ بنِ جعفرٍ العسكريِّ البَصْرِيِّ، ينسخُ ***كتاب المناظر****، فإنّهُ كانَ يُدَوِّنُ اسمَ حميهِ عَلَى الشَّكْلِ التالي: الحَسَنُ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ، ولم يَكْتُبْ قَطْ مُحَمَّداً[٥١].

٣– إنّ عُلَماءَ الرياضِيّاتِ والفَلَكِ الَّذينَ قرَأوا أو شرَحوا ابنَ الهَيْثَمِ، ومنهم على سَبيلِ المِثالِ، الخيّامُ والسموألُ والفارسيُّ الخ، ذَكَروهُ باسمِ الحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بن الهَيْثَمِ، أو بأبي عليٍّ بنِ الهَيْثَمِ، ولم يَذْكُروهُ باسمِ مُحَمَّدٍ.

٤– إذا ما اعتَبَرْنا الكاتِبَيْنِ شَخْصاً واحِداً، لوجبَ علينا أن نَجْمَعَ مُؤَلَّفاتِ مُحَمَّدٍ المَذْكورَةِ في سيرتِهِ الذاتيَّةِ، والوارِدَةِ في اللائحتَيْنِ حَتَّى العامِ ٤١٩هـ/١٠٢٧–١٠٢٨م، وكذَلِكَ جَميعَ كِتاباتِ الحَسَنِ بدون استثناء، الّتي أشارَ إلَيْها ابنُ أبي أُصَيْبِعَة تَحْتَ اسمِهِ وصولاً إلَى العامِ ١٠٣٨م، والمَذْكورَةِ أيضاً في مَخْطوطَتَيْ لاهور وكويبيشيف، ممّا يَعْني جَمْعَ بِضْعَةِ آلافٍ من الصَفَحاتِ في

---

[٥٠] راجع كمالَ الدينِ الفارسيَّ، ***كتاب تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر***: مَنْشورات دار المَعارِف العُثْمانيَّة (حيدر أباد الدكن)، ١٣٤٧–١٩٢٨/٤٨–٣٠، المُجَلَّد ٢، ص ٢٧٩.

وعَلَى هَذا الشَكْلِ نَجِدُ اسْمَهُ عندَ المرخِّمِ والخَيّامِ والسموألِ والعرضيِّ وكثيرين آخرين. ولم نَجِدْ أحداً يَذْكُرُهُ باسمِ مُحَمَّدٍ.

* سُمِّيَ عِلْمُ البَصَرِيَّاتِ قديماً عِلْمَ المَناظِرِ (المُتَرْجِم).

[٥١] راجِع مُصْطَفَى نظيف، ***ابن الهَيْثَمِ، بحوثه وكشوفه البصرية***، الصَفْحَة ١٣. راجع كذَلِكَ
R. Rashed, *Géométrie et dioptrique*, pp. CXLIV – CXLV.
نَسَخَ العسكريُّ مَجْموعَ ***المناظر*** في حَوالَى العامين ١٠٨٣– ١٠٨٤. وهَذِهِ النَسْخَةُ الّتي وصلت إلينا كُتِبَت في البصرةِ، والكِتابُ السابِعُ الأخيرُ أُنجزَ يوم الجمعة في ٢٦ كانون الثاني من العام ١٠٨٤م.

الرياضِيّاتِ وعِلْمِ البَصَرِيّاتِ وعِلْمِ الفَلَكِ، الّتي تَتَضَمَّنُ البَحْثَ الأكْثَرَ تقدّماً في ذَلِكَ العَصْرِ، والّتي، بالإضافَةِ إلَى ذَلِكَ، كُتِبَت خِلالَ عشرِ سنواتٍ ونصفٍ تقريباً (بَيْنَ ٢٩ جمادى الثانيَة من العام ٤١٩هـ و٢٩ ذي الحجّة من العام ٤٢٩هـ)، وهَذا أمــرٌ مُحالٌ. فَضْلاً عن ذَلِكَ، لو كانَ الكاتبانِ شَخْصاً واحداً، لوجدْنا عدداً لا بأسَ بهِ من الأعْمالِ الوارِدَةِ عَلَى لائِحَةِ الحَسَنِ مَوْجوداً أيضاً عَلَى إحْدَى لائحَتَي مُحَمَّدٍ. لَكِنَّنا لا نَجدُ شَيْئاً من هذا القَبيلِ. فالعَناوينُ المُشْتَرَكَةُ، الّتي سنُناقِشُها، عَدَدُها اثنانِ من أصْلِ اثنَيْنِ وتسعين عَمَلاً!

٥- وفي هَذا الصَدَدِ ثَمَّةَ مِثالٌ مُعَبِّرٌ آخرُ: فقائِمَتا مُؤَلَّفاتِ مُحَمَّــدٍ، حَتَّــى الخامس والعشرين من تموز للعام ١٠٢٨م، لا تُشيرانِ إلَى أيِّ مُؤَلَّفٍ عن قَوْسِ قُزح والهالَةِ. لَكِنَّنا نَعْلَمُ أنّ الحَسَنَ أنجزَ مُؤَلَّفاً يحمِلُ هَذا العُنْوانَ في شهرِ رَجَب من العام ٤١٩هـ، أي في بدايةِ شهرِ آب من العام ١٠٢٨م. ولو كانَ الكاتبــان شَخْــصاً واحداً، لَكُنّا تَوَقَّعْنا ظُهورَ عُنْوانِ الكِتابِ عَلَى الأقَلِّ عَلَى لائِحَةِ مُحَمَّدٍ الثانيَةِ، أي في الخامِسِ والعِشْرينَ من تَمّوز للعام ١٠٢٨م. وهَذِهِ لِيْسَت مُجَرَّدَ حُجَّةٍ عــابِرَةٍ: ففي تِلْكَ البُرْهَةِ، لَما اسْتَطاعَ شَيْءٌ أن يَشْغَلَ عَقْلَ مُحَمَّدٍ أكْثَرَ من هَذا الكِتــابِ الّذي كانَ بصَدَدِ إنْجازِهِ بالتَزامُنِ مع كِتابَةِ اللاّئِحَةِ.

٦- لم يردْ ذِكْرُ أيِّ مُؤَلَّفٍ مِمّا وَصَلَ إلَيْنا، من الكُتُبِ أو المَقالاتِ المَنْــسوبَةِ إلَى الحَسَنِ، عَلَى إيٍّ من لائِحَتَي مُحَمَّدٍ. وبالعَكْسِ، فإنّ جَميعَ المُؤَلَّفاتِ الرياضِيَّةِ والبَصَرِيَّةِ والفَلَكِيَّةِ المَوْجودَةِ لَدَيْنا باسمِ الحَسَنِ، تَنْتَمي، ما عَدا بَعْضِ الاسْــتِثْناءاتِ النادِرَةِ الّتي سَنُناقِشُها، إلَى اللَّوائِحِ الّتي أوْرَدَها الكُتّابُ القُدامَى عن أعْمالِه، والخَطَأُ الوَحيدُ الّذي ارتَكَبَهُ بَعْضُ النُسَّاخِ يَتَمَثَّلُ بِتَحْريفِ اسمِ الحَسَنِ بنِ الحَسَنِ لِيُــصبِحَ

الحَسَنَ بنَ الحُسَيْنِ أو الحُسَيْنَ بنَ الحَسَنِ، أي بِزِيادَةِ حَرْفِ الياء إلَى اسمِ ابنِ الهَيْثَمِ أو إلَى اسمِ والِدِهِ[٥٢].

٧– إنّ الإحالاتِ الّتِي يَقومُ بها ابنُ الهَيْثَمِ إلَى أعْمالِهِ الخاصَّةِ الّتِي لَدَيْنا، تَتَعَلَّقُ فَقَط بالمُؤَلَّفاتِ المَوْجودَةِ عَلَى لَوائحِ أعْمالِ الحَسَنِ، الّتِي أوْرَدَها القِفْطِيُّ وابنُ أبِي أُصَيْبِعَة ومَخْطوطَةُ لاهور، لَكِنَّها لا تَتَعَلَّقُ أبداً بالأعْمالِ الوارِدَةِ تَحْتَ اسمِ مُحَمَّدٍ. ويَنْطَبِقُ الأمْرُ نَفْسُهُ عَلَى المَراجعِ الّتِي تَظْهَرُ فِي مُؤَلَّفاتِ الرياضِيِّينَ الَّذين أتوا بَعْدَه: فهِيَ تُحيلُنا دائماً إلَى أعْمالِ الحَسَنِ المَذْكورَةِ فِي اللّوائِحِ المُشارِ إلَيْها. وهُناك كِتابٌ واحِدٌ من بَيْنِ اثنَيْنِ وتِسْعِينَ كِتاباً يُثِيرُ بَعْضَ الصُعوباتِ، وهُوَ كِتابُ ***في هيئة العالم***، ولَسَوْفَ نَتَناوَلُهُ بالدِراسَةِ لاحِقاً.

٨– تُبَيِّنُ دِراسَةُ لائحَتَيْ أعْمالِ مُحَمَّدٍ ولائِحَةِ مُؤَلَّفاتِ الحَسَنِ فَرْزاً واضِحاً، إنْ يَكُنْ مِنْ حَيْثُ الشَكْلُ أو المَضْمون. فلَدَيْنا، من جِهَةٍ، تسعونَ عُنْواناً لِمُحَمَّدٍ، وهِيَ المُؤَلّفاتُ فِي اللائحَتَيْنِ؛ ومن جِهَةٍ أُخْرَى لَدَيْنا اثنان وتسعونَ عُنْواناً لِلحَسَنِ، يَرِدُ ذِكْرُها عَلَى لائِحَةِ ابنِ أبِي أُصَيْبِعَة، الّتِي تُحصِي أعْمالَهُ حَتَّى شهرِ تشرين الأوّل من العامِ ١٠٣٨م. إذا قابَلْنا بَيْنَ عناوينَ مُحَمَّدٍ والحَسَنِ، فإنّنا لا نَجدُ سِوَى اثنَيْنِ مُشترِكَيْنِ هما: ***في هيئة العالم*** و ***في حساب المعاملات***[٥٣] إلا أنّ هَذَيْنِ النَصَّين، اللّذَيْنِ وصلا إلَيْنا، يُثيرانِ مَسائِلَ جدّيةً مُرْتَبِطَةً بانتقالِهِما وأصالتِهِما. فإذا ما تَوَقَّفْنا عِنْدَ الأوّلِ[٥٤] مِنْهُما، فَسَنَجِدُ أنّ الهَدَفَ المُعْلَنَ لَدَى مُؤَلِّفِهِ إنّما هُوَ عَرْضُ أفلاكِ الكواكبِ اسْتِناداً إلى عِلْمِ الفَلَكِ العائدِ إلى بَطْلَمْيوس، وذَلِكَ من خِلالِ حَرَكاتٍ بسيطَةٍ ومُتَّصِلَةٍ لكُراتٍ مُجَسَّمَةٍ. ولَكِنَّ المُؤَلِّفَ لا يَطْرَحُ عَلَى نَفْسِهِ إطلاقاً المَسائِلَ

---

[٥٢] انْظُرِ الحَواشِيَ الإضافِيَّةَ لِهَذا المُجَلَّدِ.

[٥٣] راجع الحواشي الإضافِيَّةَ.

[٥٤] حُقِّقَ هَذا النَصُّ وتُرجِمَ إلى الانكليزيّةِ:

Y. Tzvi Langermann, *Ibn al-Haytham's on the Configuration of the Word* (New York et londres, 1990).

التقنيّةَ الّتي يُثيرُها مثلُ هَذا النَموذَجِ، ولا يَحُلُّ الصُعوباتِ الفَلَكِيّةَ والرياضِيَّةَ المُتَرَتِّبَةَ عَلَى ذَلِكَ. غَيْرَ أنّهُ يُوجَدُ لَدَيْنا مُؤَلَّفٌ شهيرٌ لِلحَسَنِ وهُوَ ***كِتاب الشكوك عَلَى بَطْلَمْيوس***، ولهَذا المُؤَلَّفِ مُسْتَوًى رفيعٌ لا يُمكنُ مُقارَنَتُهُ بمُسْتَوَى كِتاب ***في هيئة العالَم***، فالحَسَنُ في مُؤَلَّفِهِ هَذا يَنْتَقِدُ تَصَوُّرَ بَطْلَمْيوس للعالَم ويعالجُ الحَسَنُ – تَحْديداً في هَذِهِ الصَفَحاتِ – مَدْعوماً في ذَلِكَ بكُلِّ التقنيّةِ المطلوبةِ، مَسْأَلَةَ تَوافُقِ النماذجِ الهَنْدَسِيَّةِ في عِلْمِ الفَلَكِ مع الوَصْفِ الفيزيائيِّ للعالَمِ. إذاً، ثَمَّةَ سؤالان لا يُمكنُ تَجَنُّبُهُما: هَذا الكِتابُ المَنْسوبُ إلَى الحَسَنِ بالعَرَبيَّةِ وكَذَلِكَ في ترجماتِهِ اللاتينيّةِ والعبريّةِ، هل هُوَ فعلاً كِتابُهُ؟[٥٥] وهل وَضَعَهُ في شبابِهِ؟ لَكِن، لو كانَ الأمرُ عَلَى هَذا النحوِ، لأعْلَنَ عن ذَلِكَ، كما هِيَ عادتُهُ أن يَفْعَلَ: فهَكَذا فَعَلَ في مَجالِ الرياضِيّاتِ كما تشهدُ عَلَى ذَلِكَ أبحاثُهُ في الهِلالِيّاتِ[٥٦]، وفي عِلْمِ الفَلَكِ، في مُؤَلَّفِهِ ***في هيئة حركات كُلِّ واحدٍ من الكواكب السبعة***[٥٧] وفي عِلْمِ البَصَرِيّات، في مُؤَلَّفِهِ الشَهيرِ ***كِتاب المناظر***[٥٨].

---

[٥٥] هل حَصَلَ خلطٌ بَيْنَ كِتاب مُحَمَّدٍ ومؤلَّف الحَسَنِ، بسَبَب تَطابُق العُنْوانَيْن وشُهْرَةِ الأخيرِ في الرياضِيّاتِ وعِلْمِ الفَلَكِ؟ ولو حَصَلَ هَذا الاستِبْدالُ بالفِعْلِ، لكانَ ذَلِكَ في وقتٍ مُبَكِّرٍ نسْبيّاً، أيّ قبلَ القَرْنِ الثالِثِ عَشَرَ بفَتْرَةٍ طَويلَةٍ. لأنّ هَذا الاستِبْدالَ جَلِيٌّ عند الخرقيّ، المُتَوَفَّى في العام ٥٢٧هـ/١١٣٢م، في مؤلَّفِهِ ***"كِتاب مُنتهى الإدراك في تقاسيم الأفلاك"***، مَخْطوطَة باريس، المَكْتَبَة الوطنية، ٢٤٩٩. فالخرقيُّ يعرِضُ المَشْروعَ العائِدَ لكِتاب ***"في هيئة العالَم"*** بدون أن يُسَمِّيَ هَذا الكِتابَ. ويَنْسُبُ هَذا المَشْروعَ إلى أبي عليٍّ بنِ الهَيْثَمِ ويَنْتَقِدُهُ. يَكْتُبُ (الصَفْحَة ٢ظ) "وقد بالَغَ أبو عليٍّ بنُ الهَيْثَمِ في هَذا البيانِ... ولم يُبَرْهِنْ عَلَى شيءٍ مِمّا أوْرَدَهُ، بل اقْتَصَرَ عَلَى ذِكْرِ كَيْفِيَّةِ وَضْعِ الأفلاكِ ودَوَرانها بالكوكبِ عَلَى النظامِ والتَرْتيبِ المَذْكورين في كُتُبهم". انْظُرْ أيضاً الحَواشي الإضافِيَّةَ.

[٥٦] انْظُرْ أدناه.

[٥٧] في هَذا المؤلَّفِ، يَعودُ ابنُ الهَيْثَمِ أيضاً إلى أعمالِهِ السابِقَةِ. راجع مَخْطوطَةَ كويبيشيف، فهو يَتَناوَلُ من جَديدٍ مَسْأَلَةَ مسافاتِ الشمسِ والكواكب. ويَكْتُبُ في المقدّمةِ: "ثمّ <مَن> نظرَ في هَذا الكِتابِ وفي غيرِهِ من كُتُبِنا، فوجدَ فيما ذَكَرْناهُ في الارتفاعاتِ اختلافاً، فَلْيعلمْ أنّ علّتَهُ هي ما ذَكَرْنا، وهو أنّ ما =

هل يُمكنُنا أن نَجدَ، فَضْلاً عن هَذَيْنِ النَصَّين، عَناوينَ أُخْرَى مشتركةً؟ قد نحاولُ إضافةَ كِتاب ثالثٍ ***في التحليل والتَرْكيب***، لَكِنَّ هَذِهِ المحاولةَ تبوءُ بالفشلِ لَدَى التمحيص. فالحَسَنُ وَضَعَ مُؤَلَّفاً عُنْوانُهُ ***في التحليل والتَرْكيب***[٥٩]، في حين نَقْرَأُ تَحْتَ اسمِ مُحَمَّدٍ العُنْوانَ التالي: ***كِتابٌ في التحليل والتَرْكيب الهندَسِيَّيْن عَلَى التمثيل للمتعلّمين وهُوَ مَجْموعُ مسائل هَنْدَسِيَّة وَعَدَديّة حلّلتها وركّبتها***. هَذانِ العُنْوانانِ، المُخْتَلِفانِ كثيراً، يُشيران أيضاً إِلَى كِتابَيْنِ مُخْتَلِفَيْن. فمُؤَلَّفُ الحَسَنُ، بشَهادَةِ الكاتبِ نَفْسِهِ، مُرْتَبطٌ بشَكْلٍ وثيق، بكِتابٍ آخرَ عُنْوانُهُ ***في المَعْلومات***[٦٠]، وُضِعَ مُباشَرَةً إِثْرَ المُؤَلَّفِ الأوّل. وفي هَذَيْنِ النَصَّين، يَبْحَثُ الحَسَنُ في مَسائِلِ تأسيسِ الرياضِيّاتِ — وتَحْديداً في مَسْأَلَةِ وجودِ عِلْمٍ هَنْدَسِيٍّ عامٍّ – ويُطَوِّرُ نَظَرِيَّةَ البُرْهانِ؛ بَيْنَما يُخْبِرُنا عُنْوانُ كِتابِ مُحَمَّدٍ بدونِ أيِّ غُموضٍ عن غايتِهِ،

= ذَكَرْناهُ في هَذا الكِتابِ من الارتفاعاتِ للكواكبِ هو عَلَى غايةِ التحرير، وما ذَكَرْناه في غيرِهِ من كُتُبنا الَّتِي أَلّفناها قبلَ هَذا الكِتاب، فهو عَلَى المتعارفِ من طريقةِ أصحابِ التعاليم".

[٥٨] يَكْتُبُ ابنُ الهَيْثَم في مؤلَّفِهِ ***"كِتاب المناظر"*** [***كِتاب المناظر***، الكُتُب: الأول والثاني والثالث، تحقيق عبد الحميد صبرة (الكويت، ١٩٨٣، صَفْحَة ٦٣]: "وقد كنّا أَلّفنا مَقالَةً في عِلْمِ المناظر سلكنا في كثيرٍ من مقاييسها طُرُقاً إقناعيّةً، فلمّا توجّهت لنا البراهينُ المحقّقة عَلَى جميع المعاني المبصرة استأنفنا تأليفَ هَذا الكِتاب. فمَن وقعَ إليه المَقالَةُ الَّتِي ذَكَرْناها فَلْيعلمْ أنّها مُستغنًى عنها بحصولِ المعاني الَّتِي فيها في مضمونِ هَذا الكِتاب". والمَقْصودُ عَلَى الأرجح هو مؤلَّفُ ابنِ الهَيْثَم المُشار إليه بالرقم ٢٧ في لائحَةِ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة وبالرقم ٢٦ في مَخْطوطَة لاهور، وعُنْوانُهُ، ***"مَقالَة في المناظر عَلَى طريقة بَطْلَمْيوس"***.

[٥٩] انْظُر:

R. Rashed, "L'analyse et la synthèse selon Ibn al-Haytham", in R. Rashed (éd.): *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique* (Paris, 1991), pp. 131-162; «La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham. I: L'analyse et la synthèse», *in Mélanges de l'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire*, 20(1991), pp. 31-231.

وهناك نَجدْ نَصَّ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَم محقّقاً ومُتَرْجَماً إلى الفرنسيّةِ.

[٦٠] راجع تحقيقَنا والترجمةَ في:

«La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham. II: *Les Connus», MIDEO*, 21 (1993), pp. 87-275.

وهِيَ: تعليمُ المبتدئينَ، بواسِطَةِ أمْثِلَةٍ هَنْدَسِيَّةٍ وَعَدَدِيَّةٍ، كيفيّةَ العَمَلِ بواسِطَةِ *التَحْليلِ والتَرْكيب* في حَلِّ المَسائِلِ. يَتَوَجَّهُ الحَسَنُ إذاً إلَى رِياضِيِّينَ مُهْتَمِّينَ بتَأسيسِ عِلْمِهِم، ويَرْمي من وَراءِ ذَلِكَ، وَفْقَ ما يُورِدُهُ، إلَى تَقْديمِ دِراسَةٍ أصيلَةٍ، بَيْنَما يَضَعُ مُحَمَّــدٌ كِتاباً تَعْليمِيّاً.

وبالمُحَصِّلَةِ، فمن بَيْنِ اثْنَيْنِ وتِسْعينَ عَمَلاً، هِيَ كُتُبٌ ومَقالاتٌ نَسَبَها ابنُ أبي أُصَيْبِعَة إلَى الحَسَنِ، نَجِدُ عُنْوانَيْنِ فَقَط لا غَيْر وارِدَيْنِ بَيْنَ عَناوينِ أعْمالِ مُحَمَّــدٍ، الّتي بَلَغَ عددُها التسعين عملاً، وعِلاوَةً عَلَى ذَلِكَ، يُثيرُ كِلا العملَــيْنِ مَــسائِلَ في أمْرَيْ صِحَّةِ النِسْبَةِ والأصالَةِ. لذَلِكَ نَسْتَطيعُ أن نَسْتَنْتِجَ أنّ لائحتَيْ مُؤَلَّفاتِ مُحَمَّدٍ مُسْتَقِلَّتانِ عن اللاّئِحَةِ المَنْسوبَة إلَى الحَسَنِ.

٩- الكُتُبُ والمَقالاتُ المَنْسوبَةُ إلَى الحَسَنِ مُخَصَّصَةٌ كُلُّها للبَحْثِ: فهُوَ يَحُلُّ فيها مَسائِلَ عِلْمِيَّةً يَطْرَحُها بنَفْسِهِ أو يَقْتَبِسُها عَمّن سَبَقَهُ من عُلَماء. وحَتّى عِنْدَما يَشْرَحُ كُتُبَ القُدَماءِ فإنّما يَفْعَلُ ذَلِكَ لِيُبَيِّنَ الصُعوباتِ فيها ولِيقترحَ لهــا حُلــولاً جَديدَةً. ويَكْفينا، بُغْيَةَ التثبُّتِ من ذَلِكَ، أن نطَّلِعَ عَلَى مُؤَلَّفاتِهِ: ***في شَرْح مصادرة كِتاب إقليدس***، أو ***في حلّ شكوك إقليدس في الأصول وشَرْح معانيه*** و ***الشكوك عَلى بَطْلَمْيوس***. إنّ البَحْثَ النقديَّ، الّذي توحي بِهِ العَناوينُ، يُوافِقُ تماماً مُحْتَوى الأعْمالِ، وفي هَذِهِ الكُتُبِ تَحْديداً يكشِفُ الحَسَنُ عن عُمقِ تصوّراتِهِ. لــنُلاحِظْ، بالإضافَةِ إلَى ذَلِكَ، أنّ الحسنَ لم يَكْتُبْ قَطْ مُوجزاتٍ مُخَصَّصَةً للطلاّبِ لتــسهيلِ اطِّلاعِهِم عَلَى كُتُبِ القُدَماءِ أو المُحدثينَ، ورُبَّما باستثناء مُؤَلَّفه ***مَقالٌ في الــضوء*** حَيْثُ يَخْتَصِرُ فيهِ عرضَ المواضيعِ الكُبرى الوارِدَةِ في مُؤَلَّفِهِ ***كِتاب المناظر***.

ثَمّةَ سِمَةٌ أُخْرَى مهمَّةٌ للغايةِ تَطْبَعُ عَناوينَ أعْمالِ الحَسَنِ: فهِيَ تَتَناوَلُ كُلُّهــا الرياضِيّاتِ وعِلْمَ الفَلَكِ وعِلْمَ البَصَرِيّاتِ وبناءَ الآلاتِ الرياضِيَّةِ. بَيْنَما يَخْتَلِفُ الأمرُ تماماً مع مُحَمَّدٍ: فأعْمالُهُ هِيَ بالدرجةِ الأولَى *موجزاتٌ* وشــروحاتٌ لكِتابــاتِ القُدامَى: ***الأصول* و*المناظر*** لإقليدس؛ ***المَخْروطات*** (بضعة كُتُبٍ مِنْها عَلَى الأقــلِّ)

لأبلونيوس؛ ***المجسطي والمناظر*** لبَطْلَمْيوس؛ "***الطبيعيّـــات*** *la Physique*"، و"***الآثـــار العلويّة*** *Météorologiques*" و"***الحيوان*** *De animalibus*" لأرسطو، الخ. من جهَـــةٍ أُخْرَى، تُمثّلُ كِتاباتُ مُحَمَّدٍ في الرياضِيّاتِ وعِلْمِ الفَلَكِ وعِلْمِ البَـــصَرِيّاتِ ثُلْـــثَ مَجْموعِ نِتاجِهِ عَلَى أبعدِ تقديرٍ، في حينِ أنّ الثُلثَيْنِ الآخَرينِ مُخَصَّصانِ للأعْمـــالِ الفَلْسَفِيّةِ والطبيّةِ.

لكي نَفْهَمَ بِشَكْلٍ أفْضَلَ أُسْلوبَ مُحَمَّدٍ، لنأخذْ على سَبيلِ المِثالِ أحدَ كُتُبِهِ الّتي وَصَلَت إلَيْنا تَحْتَ اسْمِهِ الشَخْصِيِّ: ***تلخيص مُحَمَّدٍ بن الحسن بـــن الهَيْـــثم لكِتاب منلاوس في التعرّف عَلَى أقدار الجواهر الْمُخْتلِفة*** وهُوَ يَكْتُبُ "وقفتُ عَلَى كِتابِ مانالاوس في الحيلةِ لتمييزِ أوزانِ ما في الأجرامِ المركّبَةِ من الجواهرِ الْمُخْتَلِفـــةِ كالذهبِ والفضّةِ والنحاسِ حَتَّى نَعْرِفَ قدرَ كُلِّ جوهرٍ من تِلْكَ الجـــواهرِ الّـــتي الجسمُ مركّبٌ مِنْها من غَيْرِ أن تَتَغَيَّرَ صورتُهُ، فوجدتُ الحكاياتِ والبرهاناتِ فيها مضطربةً وهِيَ مُشْكِلةٌ عَلَى مَن يَرومُ العِلْمَ بذَلِكَ. فرأيتُ أن أُلَخِّصَ هَذِهِ المَقالَـــةَ وأحقِّقَها حَتَّى لا يخفى مِنْها شيءٌ عَلَى كُلِّ أحدٍ ممّن فيهِ ذكاءٌ وتَـــصَوُّرٌ للأمـــورِ الهندسيَّةِ"[61]

وهَذا المسارُ لا يَقْتَصِرُ فَقَط عَلَى هَذا العملِ؛ إذ نَجِدُهُ على سَبيلِ المِثـــالِ في شَرْحِهِ لكِتابِ ***المجسطيّ***

١٠– وَصَلَ إلَينا من مُحَمَّدٍ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ، وَفْقَ ما أوْرَدَهُ هُوَ شَخْصِيّاً وكما سبقَ أن رَأَيْنا، كِتابان عَلَى الأقلِّ. إذ انْتَقَلَ تَحْتَ اسمِهِ كِتابُ ***شَرْح منلاوس*** وكذَلِكَ كِتابُ ***شَرْح المجسطيّ***. وهَذا الأخيرُ مهمٌّ بوجهٍ خاصٍّ، لأنَّهُ يُؤَكِّدُ بَعْـــضَ

[61] مَخْطوطَة لاهور، الصَفَحات ٤٤–٥١، تَحْتَ اسمِ مُحَمَّدٍ بنِ الحسينِ بنِ الهَيْثَمِ. ثَمّةَ نُسْخَةٌ مَوْجودَةٌ تَحْتَ اسمِ مُحَمَّدٍ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ في المَخْطوطَةِ ٨١ (الطبّ والخيمياء) من مَجْموعَةِ نبي خان.

الوقائع الّتي أوْرَدَها مُحَمَّدٌ حَوْلَ سيرتِهِ الذاتِيَّةِ. فسنتَوَقَّفُ عِنْدَهُ إذاً، ولـــو بِـــشَكْلٍ سريعٍ.

وهَذا الشَرْحُ مَوْجودٌ في مَخْطوطَةٍ من مَجْموعَةِ أحمد الثالـــثِ في متحـــفِ طوپ قاپي سراي – إسْطَنْبول – تَحْــتَ الــرقم ٣٣٢٩(٢)، وتَتَــضَمَّنُ هَـــذِهِ المَخْطوطَةُ ١٢٤ صَفْحَةً، وقد نُسخَت في العـــامِ ٦٥٥هـ/١٢٥٧م. إلاّ أنّ هَـــذِهِ المَخْطوطَةَ الوحيدةَ لِيْسَت مكتملةً. ففي السَطْرِ الأوّلِ نَجدُ الاسمَ الكاملَ لُمحَمَّـــدِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ الَّذي يَظْهَرُ مجدداً في صلبِ النَصِّ عَلَى شَكْلِ مُحَمَّدٍ بنِ الحَسَنِ فَحَسْب[٦٢]. وهَذا يَعْني أنّ المؤلِّفَ لا يَطْرَحُ أيَّ مُشْكِلَةٍ من حَيْثُ مَسْأَلَةُ النِـــسْبَةِ. كما أنَّ ***شَرْح المجسطيّ*** هَذا يُوافِقُ فَقَط العُنْوانَ الوارِدَ عَلَى لائِحَتَيْ كِتاباتِ مُحَمَّدٍ اللَّتَيْنِ نَسَخَهُما ابنُ أبي أُصَيْبِعَة وعَلَى لائِحَةِ مَخْطوطَةِ لاهور.

ففي أُولَى هاتَيْنِ اللاّئحتَيْنِ عن السيرَةِ الذاتِيَّة، يَذْكُرُ مُحَمَّدٌ كِتابـــاً ثالثـــاً: "والثالثُ شَرْحُ ***المجسطي*** وتلخيصُهُ شَرْحاً وتلخيصاً بُرهانيّاً لم أُخرجْ مِنْهُ شَيْئاً إلَى الحساب إلاّ اليَسيرَ، وإن أخَّرَ اللهُ في الأجَلِ، وأمْكَنَ الزمانُ من الفراغِ، اســتأنفتُ الشَرْحَ المُسْتَقْصي لذَلِكَ الَّذي أخرجُهُ بِهِ إلَى الأمورِ العدديّة والحسابيّة"[٦٣] وهَـــذِهِ الأقوالُ تُوافِقُ تماماً ما نَقْرَأُهُ في تَمْهيدِ شَرْحِهِ:"وجدتُ جمهورَ مـــن شَـــرَحَ هَـــذا الكِتابَ إنّما كانَ أكْثَرُ قصدِهِ تَبْيينَ أبوابِ الحسابِ وتفريعَها وذِكْرَ وجوهٍ لها غَيْرِ ما ذَكَرَهُ بَطْلَمْيوس من ذَلِكَ بدونِ أن يكشفَ عن الغامضِ مـــن معانيـــهِ عَلَـــى المبتدئين". ويتابعُ مُحَمَّدٌ مُنتقداً النَيْريزِيَّ: :"كالنَيْريزيِّ الَّذي أشحنَ كِتابَهُ بتكـــثيرِ ضروبِ أبوابِ (في المَخْطوطَةِ: أبوابه) الحسابِ معتمداً تعظيمَ ما يصنِّفُهُ وتفخيمَهُ"، ومن ثم يُوردُ مَشْروعَهُ بِهَذا المَعْنَى :"رأيتُ أن أقولَ في شَرْحِ هَذا الكِتـــابِ قَـــوْلاً

---

[٦٢] الصَفْحَة ١٢١ ظ.

[٦٣] ابنُ ابي أُصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، صَفْحَة ٩٣. راجع :
A. Heinen, «Ibn al- Haiṯams Autobiographie», p. 262.

يَكونُ أكْثَرُ اعتمادي فيهِ إيضاحَ ما تلطَّفَ من المعاني عَلَى فهمِ المتعلّمين. وأضيفُ إِلَى ذَلِكَ من شَرْحٍ ما يَتَعَلَّقُ مِنْهُ بحساب الزيجاتِ ما تجاوزَهُ بَطْلَمْيوس وأوجزَ بتركِ إيرادِهِ تعويلاً عَلَى الخواطرِ المحمودَةِ فِي اسْتِخْراجِ ذَلِكَ واستنباطِهِ من الأصولِ الّتي أوْرَدَها بَطْلَمْيوس كِتابَهُ".[٦٤]

وهَذا التَوافُقُ التامُّ بَيْنَ السيرَةِ الذاتيّةِ و***شَرْح المجسطيّ*** لَيْسَ الوحيدَ. فثَمَّةَ توافقٌ ثانٍ؛ جديرٌ بالمُلاحَظَةِ أيضاً. ففي هَذا الكِتاب الأخيرِ يَكْتُبُ مُحَمَّدٌ خِلالَ شَرْحِهِ للظلالِ:"وقد ذَكَرَ ذَلِكَ ابراهيمُ بنُ سِنانٍ [ذَلِكَ] فِي كِتابهِ وقد شَرَحتُ أنا أمرَ الأظلالِ وخواصَّها وكُلَّ ما يَتَعَلَّقُ بها من أمورِ الهيئةِ فِي كِتابٍ مفردٍ"[٦٥]. لنَعُدِ الآنَ إِلَى لائِحَةِ السيرَةِ الذاتيَّة لُمحَمَّدٍ: فهُوَ يَذْكُرُ المُؤَلَّفَ الحاديَ والعشرين عَلَى أنّه: ***كِتاب في آلات الظلّ اختصرتهُ ولخّصتهُ من كِتاب ابراهيم بن سِنانٍ في ذَلِكَ***[٦٦] هُنا لا نَرَى فَقَط التطابُقَ التامَّ بَيْنَ ***شَرْح المجسطي*** والسيرَةِ الذاتِيَّةِ، بل نَسْتَنْتِجُ أيضاً أنّ كِتابَهُ فِي الأظلالِ لَيْسَ سِوَى اختصارٍ لُمؤَلَّفِ ابراهيمَ بنِ سِنانٍ.[٦٧]

إذا تركنا الآنَ جانباً هَذا البَحْثَ فِي التَوافُقِ بَيْنَ السيرَةِ الذاتِيَّةِ و***شَرْح المجسطيّ*** لندرسَ أُسْلوبَ التأليفِ، فإنّنا نُلاحِظُ، وكما هُوَ الأمرُ فِي ***شَرْح كِتاب***

[٦٤] مَخْطوطَة أحمد الثالث، ٢/٣٣٢٩، ص ١ظ.

[٦٥] المَرْجِع السابِق، الصَفْحَة ٩١و.

[٦٦] ابنُ أبي أُصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، المُجَلَّد الثاني، صَفْحَة ٩٤؛ راجِع:
A.Heinen, «Ibn al- Haiṯams Autobiographie», p. 264.

[٦٧] تُخبِرُنا لائِحَةٌ ذاتيّةٌ لابراهيمَ بنِ سنانٍ أنّه وضعَ كِتاباً عُنْوانُه "***في آلات الأظلال***". راجِع رسائلَ ابنِ سنانٍ، تحقيق سعيدان (الكويت،١٩٨٣)، الصَفْحَة ٢٤. لقد جرَى الخلطُ بَيْنَ شرحِ هَذا الكِتابِ لابنِ سنانٍ مع كِتابٍ للحَسَنِ بن الهَيْثَمِ، وهو "***مَقالَة في كيفية الأظلال***"، وبالتالي جرى دمجُ ***شرحِ المجسطيّ*** مع أعمالِ الحَسَنِ. راجِع:
A. Sabra, article «Ibn al-Haytham», *Dictionary of Scientific Biography*, vol. VI, pp. 206-208.

راجِع الحواشي الإضافِيَّةَ.

منلاوس، أنّ الكِتابَ مُلَخَّصٌ وشَرْحٌ لغايةٍ تعليميّةٍ. ويَكْفي للاقْتِناعِ بذَلِكَ أن نَقْرَأَ النَقْدَ الَّذي وَجَّهَهُ مُحَمَّدٌ للنَيْريزيِّ فَضْلاً عن قِراءَةِ صيغةِ مَشْروعِهِ الخاصِّ. فهُــوَ يَتَوَجَّهُ إِلَى طلاّبٍ، وبِهَذِهِ التعابيرِ أحياناً: *"إعلم أيّها المبتدئ"* ويَبْدو أنّ هَذا الهــمَّ التعليميَّ يطغى عَلَى الكِتابِ من أوّلِهِ إلَى آخرِهِ. ويقومُ مُحَمَّدٌ كــذَلِكَ، خِــلالَ شروحِهِ، باستطراداتٍ فَلْسَفِيّةٍ طويلةٍ — بالمَنْحَى اليونانيِّ الإسلاميِّ—، كما أنّهُ لَيْسَ نادراً أن نَجدَهُ يَسْتَحْضِرُ حُجّةً فَلْسَفِيّةً لاستنتاجِ استدلالٍ رياضِيٍّ. ونُلاحِظُ أخيراً أن مُحَمَّداً يَذْكُرُ عدداً كبيراً من العُلَماءِ والكُتُبِ: إقليدسَ، أرشميدسَ، أبلونيــوسَ (Apollonius)، أوطولوقـــوسَ البِتّــانِيَّ (Autolycos de Pitane)، أبــــسقلوس (Hypsiclès)، النَيْريزيَّ، بني موسَى، ثابتاً بنَ قُرَّة وحفيدَهُ ابنَ سِنانٍ ...، وحَتّــى جالينوس.

إذاً، إذا ما أردنا اعتبارَ مُحَمَّداً والحَسَنَ شَخْصاً واحداً، فَقَد يَكونُ ثمنُ ذَلِكَ بَعْضَ الأخطاءِ والتَناقُضاتِ. فأوّلاً، نَحْنُ لا نَعْرِفُ أيّ ***شَرْح للمجسطيّ*** يَعودُ إِلَى الحَسَنِ، من خِلالِ لوائحِ أعْمالِهِ المكتوبَةِ أو من خِلالِ الإحالاتِ الّتي قامَ بها إِلَــى أعْمالِهِ الخاصَّةِ. فَضْلاً عن ذَلِكَ، لا نَعْرِفُ أنّهُ وَضَعَ شَرْحاً ومُلَخَّصاً لكِتابِ ابــنِ سِنانٍ عن الظلالِ. وبشَكْلٍ أعمّ، نَحْنُ لا نَعْرِفُ لِلحَسَنِ أيَّ شَرْحٍ سَــواءٌ أكــانَ مُلَخَّصاً أم مُخْتَصَراً. وإذا ما كَتَبَ شروحاتٍ ما — على سَبيلِ المِثــالِ، كــشَرْحِ ***الأصول*** لإقليدس — فإنّما قام بذَلِكَ بهَدَفِ إظهارِ الصعوباتِ الداخليّةِ للكِتــابِ وبُنْيَتِهِ الخَفِيَّةِ وتسلسلِ براهينِهِ. من جهَةٍ أُخْرَى، فإنّ سِماتَ الأُسْلوبِ الّتي بيّناهــا عِنْدَ مُحَمَّدٍ هِيَ غَيْرُ مألوفةٍ عَلَى الإطلاقِ عِنْدَ الحَسَنِ: فالحَسَنُ لا يَتَوَجَّهُ قطعاً إلَى مبتدئين، ولا يلجأُ مُطلَقاً إلَى حُجّةٍ فَلْسَفِيّةٍ ليستنتجَ استدلالاً رياضِيّاً، وفيما خــلا المُقَدِّماتِ الّتي يصوغُ فيها المَسْأَلَةَ، فإنّهُ مُقتصِدٌ في ذِكْرِ المراجعِ والأسْماء.

وثَمّةَ أمرٌ أكْثَرُ جَسامَةً: ذَلِكَ أنّ شَرْحَ ***المجسطيّ*** يَتَضَمَّنُ تَطْويراتٍ نظريّــةً تذهبُ في الاتِّجاهِ المعاكسِ لتَطْويراتِ الحَسَنِ، بما فيها تِلْكَ الّتي تَرِدُ في أعْمالِهِ الّتي

أنجزَها في شبابِهِ. على سَبيلِ المِثالِ يَقْتَرِحُ ***شَرْحُ المجسطيّ*** تَفْسيراً لظاهِرَةِ تَــضَخُّمِ الأشْياءِ المَغْمورَةِ في الماءِ – وكذلِكَ لظاهِرَةِ *الوَهْمِ الحادِثِ في رُؤْيَةِ القَمَــرِ*، نَعْــنِي تَضَخُّمَ النُجومِ عَلَى الأفقِ، بِواسِطَةِ الانعِكاسِ فَقَط. هَذا التَفْسيرُ المُسْتَوْحَى بِشَكْلٍ ما من نَصٍّ للكِنْدِيِّ، يكشفُ أنّ المُؤَلِّفَ كانَ يجهَلُ الانكِسار[٦٨] في حين أنّ الحَسَنَ كانَ يَنْتَمي إِلَى تَقْليدٍ آخرَ في عِلْمَ البَصَرِيّاتِ يمثّلُهُ ابنُ سَهْلٍ، وكانَ يعرفُ بشَكْلٍ مبكّرٍ جدّاً قَواعِدَ الانكسار[٦٩]، الّتِي طَبَّقَها في مُؤَلَّفِهِ ***في رؤيةِ الكواكب***[٧٠]، والعائدِ إِلَى فترةِ الشباب، حَيْثُ يُناقِشُ مَسْأَلَةَ *الوَهْمِ الحادِثِ في رُؤْيَةِ القَمَرِ* نَفْــسَها. وفي هَذا الإطارِ نَفْسِهِ قد نَسْتَطيعُ الإشارةَ إِلَى الطَريقَةِ الّتِي دَرَسَ بها مُحَمَّــدٌ مَــسْأَلَةَ المُجَسَّماتِ الّتِي إحاطتُها مُتَساوِيَة : *إِنّ الكُرَةَ أعْظَمُ الأشْكالِ المُجَسَّمةِ الّتي إحاطَتُها مُتَساوِيَة*. وثَمّةَ الكَثيرُ من العَناصِرِ ذاتِ الطَبيعَةِ المُخْتَلِفَةِ للغايَةِ الّتِي تَمْنَعُ نِسْبَةَ هَــذا الكِتاب إِلَى الحَسَنِ لو لم يَحْصُلْ خَلْطٌ بَيْنَهُ وبَيْنَ مُحَمَّدٍ.

١١– أخيراً، تُبَيِّنُ أعْمالُ الحَسَنِ، من خِلالِ عَناوينها كما يُبَــيِّنُ مَــضْمونُ المُؤَلَّفاتِ الّتِي وَصَلَت إِلَيْنا، أنّ المُؤَلِّفَ لم يُساهِمْ في عِلْمِ البَصَرِيّات وفي نَقْدٍ لنَموذَجِ بَطْلَمْيوس في عِلْمِ الفَلَكِ فَحَسْب، إنّما قــد ســاهَمَ أيــضاً في الرياضِــيّاتِ: في الرياضِيّاتِ الأرشميديَّةِ، ونَظَرِيَّةِ المَخْروطاتِ، وتَطْبيقِ المَخْروطــاتِ عَلَــى الأبْنِيَــةِ الهَنْدَسِيَّةِ، ونَظَرِيَّةِ الأعْدادِ، وبناءِ الآلات الهَنْدَسِيَّةِ، وتأسيسِ الرياضِيّاتِ. ولَكِنَّنــــا

---

[٦٨] انْظُر:

R. Rashed «Fūthiṭos(?) et al–Kindī sur «l'illustration lunaire»», in M.O. Goulet, G. Madec, D. O'Brein (éd) *ΣΟΦΙΗΣ ΜΑΙΗΤΟΡΕΣ. Hommage à Jean Pépin* (Paris, 1992).

[٦٩] انْظُر:

R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique*.

[٧٠] مَخْطوطَة لاهور، الأوراق ٣٦ – ٤٢، ومَخْطوطَة طهران، مَكْتَبَة الجامِعَة، ٤٩٣، الأوراق ٢٩و – ٣٦و.

لا نَعْرِفُ لَهُ أيَّ دِراسَةٍ لا في الطبِّ ولا في الفَلْسَفَةِ بالمَنْحَى الهِلِّينِيِّ، باستِثْناءِ مُؤَلَّفٍ صَغيرٍ في عِلْمِ الأخلاق.

أمّا بالنسْبَةِ إِلَى مُحَمَّدٍ، فالأمرُ مُخْتَلِفٌ تماماً: فهُوَ فَيْلَسوفٌ ومُنَظِّرٌ في الطبِّ، مُطَّلِعٌ عَلَى العُلومِ الرياضِيَّةِ في عَصْرِهِ، وبخاصَّةٍ عَلَى عِلْمَ الفَلَكِ، عَلَى غِرارِ العَديدِ من الفَلاسِفَةِ ذَوي التوجُّهِ الهِلِّينِيِّ الإسْلامِيِّ، كَالكِنْدِيِّ والفارابيِّ وابنِ سينا. ويُوحي المَكانُ الَّذي كُتِبَت فيهِ بَعْضُ مُؤَلَّفاتِهِ، وكذَلِكَ تَبادُلُ المُراسَلاتِ مع مُعاصِريهِ، أنّهُ سَكَنَ في بَغدادَ، وفي جُنوبِ العِراق.

ويُمكنُ التَحَقُّقُ من هَذِهِ الوَقائعِ جَميعها بِسُهولَةٍ؛ وهِيَ كما رَأيْنا تَجْعَلُ الخَلْطَ بَيْنَ الرياضِيِّ والفَيْلَسوفِ أمراً مُحْتَمَلاً. ويَعودُ سَبَبُ هَذا الخَطَأ إِلَى ابنِ أبي أُصَيْبِعَة، إذ إنّ المَصْدَرَ الَّذي استَقَى مِنْهُ يُمَيِّزُ جَيِّداً بَيْنَ الشَخْصَيْنِ وَفْقَ ما تَبَيَّنَ في مَخْطوطَةِ لاهور. ولرُبَّما أدّى إِلَى هَذا الخَلْطِ تَشابُهُ الأسْماءِ فَضْلاً عن الشُروحاتِ الّتي كَرَّسَها الفَيْلَسوفُ لِكُتُبِ الرياضِيّاتِ وعِلْمِ الفَلَكِ وعِلْمِ البَصَرِيّاتِ. وقد أحْدَثَ هَذا الخَلْطُ بَيْنَ الشَخْصَيْنِ، إضافةً إِلَى ذَلِكَ، خَلْطاً آخَرَ مُتَعَلِّقاً، هَذِهِ المَرَّةَ، بمُؤَلَّفاتِهِما.

وستَنْتَظِرُ هَذِهِ المَسْأَلَةُ المزيدَ من المَعْلوماتِ التاريخيّةِ والفهرسيّةِ في السِيَرِ الذاتِيَّةِ. ونَأْمَلُ أن تَتَضِحَ عندئذٍ الصورةُ عن الحَسَنِ وكِتاباتِهِ. ولَرُبَّما واتانا الحظُّ في العُثورِ عَلَى عَمَلٍ ما لمُحَمَّدٍ في الفَلْسَفَةِ والمنطقِ، الأمرُ الّذي له أهَمِيَّةٌ خاصّةٌ نَظَراً إِلَى تواصُلِ مُحَمَّدٍ مع ابنِ السمحِ وابن الطيّبِ، أي مع مدرسةِ بَغدادَ (انظرِ المُعطَياتِ الجديدةَ حولَ شَخْصَي ابنِ الهيثم في نهاية المجلّد الثالث من هذا الكتاب).

٣– أعْمالُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ في رِياضِيّاتِ اللاّمُتَناهيةِ في الصِغَرِ

إنّ التَمييزَ بَيْنَ الحَسَنِ ومُحَمَّدٍ لا يجعلُ صورَةَ كُلٍّ من الرياضِيِّ والفَيْلَسوفِ مُتَماسِكَةً فَحَسْب، بل يَفرِضُ عَلَيْنا مُهِمَّةً مُسْتَجِدَّةً وذلك بإلقائِهِ ضَوْءاً جَديداً عَلَى

أعْمالِهما: فنَحْنُ لا نَسْتَطيعُ من الآن فصاعداً تَجَنُّبَ مَسْأَلَةِ أصالَةِ مُؤَلَّفاتِ الرياضِيِّ. أفَلَمْ نوردْ فعلاً بَعْضَ الأمْثِلَةِ على كُتبٍ تَحْمِلُ اسمَهُ، غَيْرَ أنّ أصالتَها تُثيرُ عَلَى أقلّ تقديرٍ بَعْضَ الشُكوكِ، وتَقْتَضي لإثباتِها بَحْثاً مُعَمَّقاً؟ ويَتَعَلَّقُ الأمرُ هُنا خاصّةً بالكِتاباتِ الّتي تَقَعُ في دائِرَةِ الالتباسِ، حَيْثُ تَردُ مُؤَلَّفاتٌ من اللاّئحتَيْنِ تَحْتَ العُنْوانِ نَفْسِهِ. والأكْثَرُ إثارةً للتَساؤلِ في هَذا الأمرِ أيضاً، هِيَ تِلْكَ المُؤَلَّفاتُ المَنْسوبَةُ بشَكْلٍ واضِحٍ إلَى مُحَمَّدٍ الّتي اعْتَبَرَها المُؤَرِّخون، بدون أيِّ تَرَدُّدٍ وأيِّ تَمْحيصٍ إضافِيٍّ، ككِتاباتٍ خُطَّت بريشَةِ الحَسَنِ. لم يَجْرِ، وَفْقَ ما نَعرِفُهُ، أيُّ بَحْثٍ لَمضْمونِ وأُسْلوبِ ***شَرْحِ المجسطي*** العائدِ لُمحَمَّدٍ، وكذَلِكَ ***لشَرْحِ منلاوس***، كما أنّهُ لم يَجْرِ أيُّ سَعْيٍ إلَى تَحْديدِ هويَّةِ نَصِّ ***المُقارَبَيْنِ***[71] الواردِ عَلَى اللاّئِحَةِ الّتي كَتَبَها مُحَمَّدٌ بنَفْسِهِ، وذَلِكَ قَبْلَ نسْبَةِ هَذِهِ المُؤَلَّفاتِ إلَى الحَسَنِ – نُضيفُ إلَى ما ذَكَرْناهُ أنّهُ حَتَّى اليَوْمِ لا تَزالُ تَجْري مُحاوَلاتٌ لِنسْبَةِ أعْمالٍ إلَى الحَسَنِ، لم يَقُمْ بإنجازِها قَطْ.[72]

[71] لقد ذَكَرْنا سابقاً انّ مُحَمَّداً يُشيرُ في لائِحَتِهِ الذاتِيَّةِ إلى مُؤَلَّفٍ حَوْلَ المُقارَبَيْن. أمّا بالنِسْبَةِ إلى الحَسَنِ، فلا تُوحي أيُّ لائِحَةٍ لِكِتاباتِهِ، ولا أيٌّ من تَصْريحاتِهِ الخاصَّةِ، أنَّهُ كانَ قد كَتَبَ بحثاً مُخَصَّصاً لِهَذا المَوْضوعِ. بَيْدَ أنّه تُوجد ***"رسالة في وجود خطّين يقربان ولا يلتقيان"***؛ مَخْطوطَة القاهِرَة، دار الكُتُب ٤٥٢٨، الأوراق ١٥ظ – ٢٠و؛ وهَذا النصُّ مُغْفَلٌ، لَكِنَّ الناسِخَ يَكْتُبُ في العِبارَةِ الخِتامِيَّةِ: "ويُفْهَمُ من عِبارَاتِها أنّها تَأْليفُ ابنِ الهَيْثَم"، بدونِ أن يُوضِحَ الأسْبابَ الّتي دَفَعَتْهُ إلى هَذا الاعْتِقادِ.
أمّا نَحْنُ فقد حَقَّقْنا وتَرْجَمْنا وحَلَّلْنا هَذا النَصَّ، ونَسْتَطيعُ أن نُؤَكِّدَ بدون أيِّ مُخاطَرَةٍ أنّ النَصَّ لا يَعودُ إلى الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ. فهل هو نَصٌّ لُمحَمَّدٍ بنِ الهَيْثَمِ؟ لأنّه في الواقعِ نَموذَجٌ للشَرْحِ الّذي عَوَّدَنا عليه. لَكِنَّ ذَلِكَ لَيْسَ سبباً كافياً لنسبَةِ هَذا النَصِّ إليه، ويَبْقَى السُؤالُ مَطْروحاً بانتِظارِ عَناصِرَ جَديدَةٍ.
[72] بالإضافةِ إلى ***"شرح المجسطيّ"***، فإنّ عبد الحميد صبرة في مَقالَتِهِ:
A. Sabra [Article "Ibn al – Haytham", *Dictionary of Scientific Biography*],
يَنْسُبُ إلى الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ نَصّاً مُغْفَلاً:
MS Florence, Bibliothèque Medicæ Laurenziana, Or. 152, fols 97^v-100^r,
عُنْوانُهُ: ***"كلام في توطئة المقدّمات لعمل القطوع عَلَى سطحٍ ما بطريقٍ صناعيّ"***. والحججُ المُقَدَّمَةُ لتأييدِ هَذِهِ النِسْبَةِ هي التالية: من جِهَةٍ، يشيرُ ابنُ الهَيْثَمِ في مؤلَّفِهِ ***"في المرايا المحرقة بالقطوع"*** إلى آلَةٍ لبناء=

=القُطوعِ المَخْروطِيّةِ؛ ومن جِهَةٍ أُخْرَى، يَرِدُ هَذا المَقْطَعُ مُباشَرَةً بعد نُسْخةٍ لِهَذا المؤلَّفِ في مَخْطوطَةِ فلورنسا نفسِها.

صَحيحٌ أنّ الحسنَ بنَ الهَيْثَمِ يَذْكُرُ في مؤلَّفِهِ ***"في المرايا المحرقة بالقطوع"*** آلَةً لبناءِ القطوعِ المخروطيّةِ. لقد ناقَشنا هَذِهِ المَسْأَلَةَ وبيّنّا أن فكرةَ هَذِهِ الآلَةِ وهَذا البناءِ موجودةٌ في تراثِ ابنِ سهلٍ. راجع:

[*Géométrie et Dioptrique*, p. LXXXIII]

ولَكِن، هل يُشَكِّلُ هَذا المَقْطَعُ الواردُ في مَخْطوطَةِ فلورنسا جُزءاً من هَذا المُؤَلَّفِ، أو هل هُناك فَقَط احتِمالٌ ضَئيلٌ للغايةِ في أن يَكونَ عائداً إِلَى ابنِ الهَيْثَمِ؟ تُبَيِّنُ دِراسَةُ النَصِّ أنّهُ لا مكانَ لِشَيْءٍ من هَذا القَبيلِ، لأنَّ العُيوبَ الرياضِيّةَ المَبْدَئِيَّةَ الَّتي تَشوبُهُ تُشيرُ إلى رياضِيٍّ مُسْتَواهُ أدْنَى بِدَرَجاتٍ من مُسْتَوَى الحَسَنِ، من جِهَةٍ أُخْرَى، لا تَقومُ أيُّ حُجّةٍ بِدَعْمِ مثلِ هَذِهِ الفَرَضِيَّةِ. سَنُوردُ مِثالَيْنِ كافِيَيْنِ لدَحْضِ نِسْبَةِ مَخْطوطَةِ فلورنسا إلى الحَسَنِ:

١) يُريدُ الكاتِبُ أن يُبَرْهِنَ المُقَدِّمَةَ التالِيَةَ:

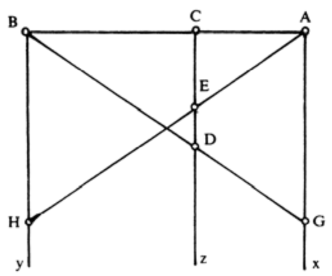
لِنَأْخُذْ نُقْطَةَ C عَلَى القِطْعَةِ المُسْتَقيمَةِ AB، ولْتَكُن الخُطوطُ المُسْتَقيمَةُ Ax وَ By وَ Cz قائِمَةً عَلَى زوايا قائِمَةٍ عَلَى AB. إذا أخَذْنا عندَئِذٍ نُقْطَتَيْنِ E وَ D عَلَى Cz بحَيْثُ يكونُ

$$(1)\quad CE \,.\, CB = CA \,.\, CD$$

فإنّ المُسْتَقيمَين AE وَ BD يَقْطَعانِ عَلَى التَوالي By وَ Ax عَلَى H وَ G، ويَكونُ لَدَيْنا $AG = HB$.

يَسْتَنْتِجُ الكاتِبُ من العَلاقَةِ *(1)* :

$$\frac{CE}{CA} = \frac{CD}{CB},$$



لَكِنَّ

$$\frac{CD}{CB} = \frac{AG}{AB}\,,\ \frac{CE}{CA} = \frac{HB}{AB}$$

بحَيْثُ يَنْتُجُ :

$$HB = AG$$

=

من الصَحيحِ القَوْلُ إنّ الوَضْعَ لَيْسَ عَلَى هَذا القَدْرِ مِنَ المأساوِيَّةِ كما يَبْـــدو لنا. بَيْدَ أَنَّهُ يجبُ علينا أن نُعاوِدَ دِراسَةَ مَجْموعَةِ العَنــاوينِ العِلْمِيَّـــةِ العائِـــدَةِ إلى الحَسَنِ، وخاصَّةً تِلْكَ العَناوينِ الّتي تَقَعُ في دائِرَةِ الالتِباسِ. وهَذِهِ الدِراسَةُ النَقْدِيَّـــةُ،

= لَكِنَّه من الواضِحِ أنّه إذا ما اخْتيرت النُقْطَةُ C كَيْفَما اتّفَقَت، فإنّنا لا نَسْتَطيعُ أن نفرضَ الشَرْطَ الّذي يَعْمَدُ المُؤَلِّفُ إلى افتِراضِهِ، وهو:

$$CD < CE .$$

ففي الواقِعِ، واسْتِناداً إلى الفَرَضِيَّةِ، يَكونُ لَدَيْنا:

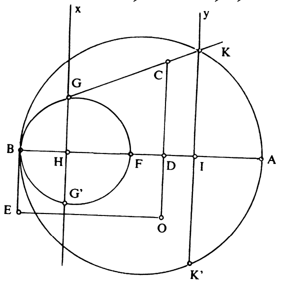
$CA > CB$ إذا كان $CD < CE$،

$CA = CB$ إذا كان $CD = CE$،

$CA < CB$ إذا كان $CD > CE$.

٢) القَضِيَّةُ الأُولَى مُكَرَّسةٌ لِبناءِ قَطْعٍ مُكافئٍ، مَعْلومِ الرَأسِ A، ومَعْلومِ المحورِ AB ويجوزُ عَلَى النُقْطَةِ C. يُقَدِّمُ الكاتِبُ هنا بناءً بالنقاطِ انطِلاقاً من المُعادَلَةِ $ax = y^2$. لِتَكُنِ النُقْطَةُ D مَسْقَطَ النُقْطَةِ C عَلَى المحورِ، وَلْنَبْنِ عَلَى BD مُسْتَطيلاً (DE)، بحَيْثُ يكون $BD . BE = CD^2$؛ فالطولُ BE هو الضِلْعُ القائِمُ لِلقَطْعِ المُكافئِ، $BE = a$.

غيرَ أنّ الكاتِبَ لا يَشْرَحُ كَيْفِيَّةَ بناءِ المُسْتَطيلِ $BDOE$.



لِيَكُنْ Hx عَموداً عَلَى AB، نَبْني F بحَيْثُ يَكونُ $HF = BE = a$؛ فالدائِرَةُ الّتي قُطْرُها BF تَقْطَعُ Hx عَلَى النُقْطَةِ G، بحَيْثُ يكونُ $HG^2 = HB . HF$ ، فَتَكونُ النُقْطَةُ G إذاً عَلَى القَطْعِ المُكافِئِ، وكذَلِكَ النُقْطَةُ G' المُتَناظِرَةُ معها.

ويَتَكَرَّرُ البناءُ انطِلاقاً من نُقْطَةٍ أُخْرَى I مَأْخوذَةٍ عَلَى المِحْوَرِ، ونَحْصُلُ عَلَى النُقْطَتَيْنِ K وَ K'.

ونَرى إذاً أنّ بُرْهانَي المُقَدِّمةِ والقَضِيَّةِ بَعيدانِ عن الدِقّةِ الرياضِيّةِ، فلا يُمكنُ إذاً أن يُنْسَبا إلى رياضِيٍّ من وَزْنِ ابنِ الهَيْثَمِ، فَضْلاً عن أنّ النَصَّ تَشوبُهُ عُيُوبٌ من هَذا الصِنْفِ ومنها ما هو أكثرُ جَسامَةً. فَوُرودُ هَذا المَقْطَعِ المُغْفَلِ إثْرَ نَصٍّ لابنِ الهَيْثَمِ، لا يَبْدو لنا حُجّةً كافِيَةً لِنسْبَتِهِ إلى هَذا الأخيرِ.

الّتي سَنَعْتَمِدُها من الآن فَصاعِداً قاعِدَةً مُتَّبَعَةً، تَتَطَلَّبُ مُضاعَفَةَ الطُــرُق. وتَتَمَثَّـــلُ المُهِمَّةُ الأكْثَرُ مُباشَرَةً والأكْثَرُ بَساطَةً في المُقارَنةِ اليَقِظَةِ للّوائحِ المُتَــوَفِّرَةِ لكِتابــاتِ الحَسَنِ، وفي إحْصاءِ جَميعِ الإحالاتِ الّتي يُجْريها من كِتابٍ إلَى آخَرَ، وكذَلِكَ في تَحْديدِ الإشاراتِ إلَى مُؤَلَّفاتِهِ الّتي قامَ بِها الكُتّابُ مِمَّن أتوا بَعْـــدَهُ. سَـــنوردُ في الحَواشي الإضافِيَّةِ لِهَذا المُجَلَّدِ جَدْوَلاً يَعْرِضُ المَعْلوماتِ الّتي تَوَفَّرَت لَدَيْنا. وهَـــذا الجَدْوَلُ ما زالَ فَقيراً بالمُعْطَياتِ، لَكِنَّنا نَدْعو إلَى إغنائِهِ مع مُرورِ الوَقْـــتِ وتَطَـــوُّرِ البَحْثِ. إنّهُ إذاً عَمَلٌ تَمْهيدِيٌّ لا يُعْفي قَطْعاً من دِراسَـــةِ كُـــلِّ مَجْموعَـــةٍ مـــن الكِتاباتِ، إضافَةً إلَى مُحْتَواها ولُغَتِها. وبرأينا، لن تُحَلَّ مَسْأَلَةُ الأصالَةِ بالنِسْبَةِ إلَى مَجْموعِ هَذا النتاجِ سِوَى عَبْرَ تَواصُلِ هَذا التَحْقيق.

سيَكونُ هَدَفُنا هُنا أقَلَّ شُمولِيَّةً من الطَرحِ السابِقِ، إذ إنّهُ سَيَقْتَصِرُ عَلَى تَناوُلِ هَذِهِ المَسْأَلَةِ الّتي تَحَدَّثْنا عَنْها ضِمنَ حُدودِ مَجْموعَةِ كِتاباتِ الحَسَنِ المُتَعَلِّقَةِ حَصْراً برياضِيّاتِ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ. وفي الواقِعِ، مُهِمَّتُنا هُنا أكْثَرُ سُهولةً مِمّا هُوَ الأمْـــرُ عَلَيْهِ بالنِسْبَةِ إلَى كِتاباتِ ابنِ الهَيْثَمِ الأُخْرَى، ذَلِكَ أنّ أيّاً من أعْمالِ الحَسَنِ في هَذا المَجالِ من الرياضِيّاتِ لا يَقَعُ في دائِرَةِ الالتِباسِ. ولَكِن لَدَيْنا عُنْوانٌ واحِدٌ لا غَيْـــرَ من لائِحَةِ مُحَمَّدٍ – وهُوَ ذاك الّذي يَتَناوَلُ *"المُقارَبْيَن"* – مِمَّا يَقَعُ في هَذه الدائِرَةِ. وأخيراً، إنّ هَذِهِ الكِتاباتِ الّتي وَصَلَت إلَيْنا هِيَ أعْمالٌ في البَحْثِ الأكْثَرِ تَقَدُّماً في ذَلِكَ العَصْرِ، وهِيَ من أكْثَرِ البُحوثِ صُعوبَةً، وبالتالي لا تَـــسْتَطيعُ إلاّ أن تَكـــونَ نِتاجاً لرِياضِيٍّ بارِزٍ، أي لِلحَسَنِ ولَيْسَ لُمحَمَّدٍ.

واسْتِناداً إلَى لوائِحِ أعْمالِ الحَسَنِ – لائِحَةِ القِفْطِيِّ [I] ولائِحَـــةِ ابـــنِ أبي أُصَيْبِعَة [II] ولائِحَةِ مَخْطوطَةِ لاهور [III] المَبْتورَةِ – يَكونُ هَذا الكاتِبُ قد وَضَعَ المُؤَلَّفاتِ المُبَيَّنَةَ في الجَدْوَلِ التالي:

	رِياضيّاتُ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ[73]	I	II	III	
I	*مَقالَةٌ مُخْتَصَرَةٌ في الهِلالِيّات*	٦	٢٠	١٨	*
II	*قَوْلٌ في تَرْبيع الدائِرَة*	١٥	٣٠	٢٣	*
III	*مَقالَةٌ مُسْتَقْصاة في الهِلالِيّات*	–	٢١	٢١	*
IV	*مَقالَةٌ في مِساحَةِ المُجَسَّم المكافئ*	٥	١٧	٢٠	*
V	*مَقالَةٌ في مِساحة الكُرَة*	٣٣	١٦	١٤	*
VI	*مَقالَةٌ في قِسمة المِقْدارَيْنِ المُخْتَلِفَيْن ...*	٤٦	٤٠	٤١	*
VII	*قَوْلٌ في أنّ الكُرَةَ أوْسَعُ الأشكالِ المُجَسَّمة ..*	٢٨	٢٦	٢٥	*
VIII	*في أعْظَمِ الخُطوطِ الّتي تقع في قِطْعَةِ الدائِرَة*	–	٨١	مَبْتورَة	
IX	*في الجُزْءِ الّذي لا يَتجَزَّأ*	٣٢	٦٥	٦٢	
X	*في جَمْعِ (أو جميع) الأجزاءِ*	٤٥	٣٢	٣٠	
XI	*في مَراكزِ الأثقالِ*	–	١٤	١٢	
XII	*في القرسطون*	–	٦٧	مَبْتورَة	
	تَقْريبُ الجُذورِ				
١	*في عِلّة الجَذْرِ وإضْعافِهِ ونَقْلِهِ*	٢٥	٧٠	مَبْتورَة	*
٢	*مَقالَةٌ في اسْتِخْراجِ ضِلْعِ المُكَعَّبِ*	٢٤	٤٧	٤٣	*

[73] الإشارة * تَعْني أنّ المَخْطوطَة متوفّرةٌ؛ الإشارة – تَعْني النقصَ.

ولا يَظْهَرُ أيُّ واحِدٍ من العَناوينِ السابِقَةِ عَلَى اللّوائحِ الّتي يُعَدِّدُ فيها مُحَمَّدٌ عَناوينَ أعْمالِهِ.

الكُتُبُ الأُولَى الاثنا عَشَرَ، الّتي يَنْبَغي أن نُضيفَ إلَيْها الكِتابَ الَّذي ذَكَرَهُ الحَسَنُ في المُؤَلَّفِ II، إذا ما كانَ قد كُتِبَ بالفعلِ، تَنْقَسِمُ بوضوحٍ إلَى أرْبَعِ مَجْموعاتٍ سنُعاودُ الرجوعَ إلَيْها وهِيَ: ١) تَرْبيعُ الهِلالِيّاتِ والدائِرَةِ؛ ٢) قِياسُ الأحجامِ المُنحنِيَةِ؛ ٣) مَسْأَلَةُ الأشكالِ المُستَوِيةِ متساوِيَةِ الإحاطةِ و مَسْأَلَةُ المُجَسّماتِ متساوِيَةِ الإحاطة. وباستثناء المُؤَلَّفِ VIII، جميعُ الأعْمالِ المنتميةِ إلَى هَذِهِ المَجْموعاتِ قد وَصَلَت إلَيْنا. أمّا المُؤَلَّفُ IX الَّذي لم يُعْثَرْ عَلَيْهِ حَتَّى الآن، فيَبْدو أنّهُ، وَفْقَ عُنْوانِهِ، يَتناوَلُ مَسْأَلَةً جَرَى نقاشُها عَلَى مَدَى فترةٍ طويلةٍ في ذَلِكَ العَصْرِ، كما يُبَيِّنُ ذَلِكَ مثالُ سلفِ ابنِ الهَيْثَمِ، السِجْزِيِّ، ونَعْني بها مَسْأَلَةَ القِسْمَةِ إلَى ما لا نِهايَة[٧٤]. ويَبْقَى العُنْوانُ العاشِرُ بالنِسْبَةِ إلَيْنا غَيْرَ واضحٍ: ربّما ناقشَ ابنُ الهَيْثَمِ فيهِ جَمْعَ الأجزاءِ في أعدادٍ لامُتَناهِيَةٍ. ٤) تَتَكَوَّنُ هَذِهِ المَجْموعَةُ الأخيرةُ مِن المُؤَلَّفَيْنِ XI وَ XII، لَكِنَّ هَذَيْنِ الكِتابين، وهما عَلَى قدرٍ واضحٍ مِن الأهَمِيَّةِ، لا يزالان مَفْقودَيْنِ؛ و لم يَبْقَ لنا سِوَى مُلَخَّصٍ صَغيرٍ وَضَعَهُ الخازِنيُّ، وهُوَ يَتَضَمَّنُ بشَكْلٍ أساسيٍّ تَحْديداتٍ يُورِدُها المُؤَلِّفُ مُسْتَنِداً في ذَلِكَ إلَى أبي سَهْلٍ القوهِيِّ وابنِ الهَيْثَمِ المصريِّ[٧٥].

ونُضيفُ في مُلْحَقِ هَذِهِ المُؤَلّفاتِ المُخَصَّصَةِ لرياضِيّاتِ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ، نَصَّيْنِ اثنَيْنِ: يَتَناوَلُ الأوّلُ مِنْهُما اسْتِخْراجَ الجَذْرِ التَرْبيعيِّ، أما الثاني فهُوَ حَوْلَ اسْتِخْراجِ الجذرِ التَكْعيبِيِّ. غَيْرَ أنّنا لا نَدَّعي أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد تَمَكَّنَ من الصياغَةِ

---

[٧٤] انْظُر:

R. Rashed, «Al-Sizji et Maïmonide: Commentaire mathématique et philosophique de la proposition II-14 des Coniques d'Apollonius», *Archives internationales d'histoire des sciences*, 37, 119 (1987), pp. 263-296.

[٧٥] الخازنيّ، ***ميزان الحكمة***.

الجَلِيَّةِ للعَلاقاتِ القائِمَةِ بَيْنَ مَسْأَلَةِ التَقْريبِ الّتي تواجِهُنا في هاتَيْن الحالَتَيْن اللَّتَين ذَكَرْناهما ومَسائِلِ هَنْدَسَةِ اللاَّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ. وسَنَشْرَحُ لاحِقاً أسبابَ اختيارِنا هَذا.

سنُحقِّقُ المُؤَلّفاتِ التِسعةَ الّتي وَصَلَت إلَيْنا. وقد اعتُبِرَ الأوّلُ من بين هَذِهِ المُؤَلّفاتِ حَتّى الوقتِ الراهنِ ضائعاً، أمّا المُؤَلّفُ الّذي يَتَناوَلُ الجذرَ التَرْبيعيَّ فَقَد كانَ غَيْرَ مَعْروفٍ. وباستثناءِ مَقالَةِ ***في تَرْبيع الدائِرة***، إنّ جَميعَ هَذِهِ النُصوصِ سيُنْشَرُ هُنا للمرّةِ الأولى. وبُغْيَةَ تحقيقِها، التَزَمْنا القواعِدَ الأكْثَرَ صَرامَةً الّتي شَرَحْناها مِراراً. لنتناولِ الآن المَخْطوطَاتِ الّتي استَخْدَمناها في تحقيقِ هَذِهِ النُصوصِ.

I- *قَوْلٌ في الهِلالِيّاتِ*

يَذْكُرُ القِفْطِيُّ مُؤَلَّفاً لابنِ الهَيْثَمِ عُنْوانُهُ ***في أشكال الهِلاليّات***. وبما أنّهُ لا يُوردُ سِوَى هَذا العُنْوانِ، فلنا إذاً أن نتساءلَ إن كانَ يُشيرُ إلَى هَذا المُؤَلَّفِ أو إلَى المُؤَلَّف III. لَكِنَّ مَخْطوطَةَ لاهور، الّتي تأتي عَلَى ذِكْرِ المُؤَلَّفَيْنِ، تحفظُ للأوّلِ العُنْوانَ نَفْسَهُ الواردَ عِنْدَ القِفْطِيِّ، ممّا يُجيزُ لنا أن نعتبرَ أنّ القِفْطِيَّ يُشيرُ إلَى هَذا المُؤَلَّفِ بالذات. يَذْكُرُ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة أيضاً المُؤَلَّفَيْنِ وينسبُهُما إلَى الحَسَن، لَكِنَّهُ بِالمُقابِلِ يُوردُ عُنْوانَ ***مَقالَة مختصرة في أشكال الهِلاليّات***. فرُبَّما تَكونُ كَلِمَةُ "*مختصرة*" الّتي استخدمَها ابنُ الهَيْثَمِ في المُؤَلَّفِ الثاني لوصفِ الأوَّلِ قد أُدرجَت للتمييزِ بَيْنَهما. نُشيرُ إلَى أن كَلِمَةَ "*مختصرة*" تعني هُنا "موجزاً" ولَيْسَ تلخيصاً لنَصٍّ مكتوبٍ.

ونَسْتَطيعُ التَحَقُّقَ من أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد ذَكَرَ بنَفْسِهِ هَذا النَصَّ مرّتَيْنِ: في ***مَقالَة مُسْتَقْصاة في أشكال الهِلاليّات*** وفي ***قَوْل في تَرْبيع الدائِرَة***، وبالنِسْبَةِ إلَى هَذا النَصِّ، فإنّ كُلَّ الدلائلِ تُفضي إلَى تأكيدِ أصالتِهِ. ولَقَدْ وَصَلَ إلَيْنا في مَخْطوطَةٍ وحيدةٍ تضمُّ مَجْموعَةَ أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ، وقد شاءَ القَدَرُ المُؤاتي أن نطَّلِعَ عَلَيْها. إنّها

مَخْطوطَةٌ من مَجْموعَةِ عبدِ الحيِّ، في المَكْتَبَةِ الجامعيّةِ في عَليكْرَه (Aligarh)، رقمها ٥٥/٦٧٨. وقد نُسِخَت في العامِ ٧٢١هـ/ ١٣٢١–١٣٢٢م في السلطانيّة، بالخَطِّ النستعليقيِّ. وهِيَ تَتَضَمَّنُ خمساً وأرْبَعين ورقةً. لَكِنَّ الفحصَ يُبَيِّنُ أنَّها قد تَضَرَّرَت، ومن المُرَجَّحِ أنّ ذَلِكَ قد حَصَلَ مُؤَخّراً: فَقَد ضاعَت بَعْضُ الأوراقِ، والأوراقُ المتبقيَّةُ، وَعَدَدُها خمسٌ وأرْبَعون غَيْرُ مُرَتَّبَةٍ بشَكْلٍ صَحيحٍ. كما نَجدُ فيها بَعْضَ آثارِ الرُطوبةِ. وقياسُ كُلِّ ورقةٍ هُوَ ٢١٨× ٧٦ ملم، وهِيَ تَحْتَوي ٣٣ سَطْراً، يَتَضَمَّنُ كُلٌّ واحدٍ مِنْها حَوالَى تسعِ كَلِماتٍ. تَضُمُّ هَذِهِ المَجْموعَةُ أعْمالَ ابنِ الهَيْثَمِ التاليةَ: ***في مساحة الكُرَة، في تَرْبيع الدائِرَة، في علّة الجذر وإضعافه ونقله***. وهَذِهِ النُصوصُ كُلُّها مُحَقَّقَةٌ هُنا. وتَتَضَمَّنُ هَذِهِ المَخْطوطَةُ المُؤَلّفاتِ التاليةَ أيضاً: ***في حَلِّ الشُكوكِ في كِتاب المجسطيّ، بركار الدوائر العظام***، ومَقْطَعاً مِن مُؤَلَّفِ ***في مُقَدِّمَة المُسبّع***، كما تَتَضَمَّنُ هَذِهِ المَخْطوطَةُ أيضاً شَرْحَ الأهوازيِّ للكِتابِ الخامِسِ من ***الأُصول***. يَحْتَلُّ نَصُّ الهِلالِيّاتِ الصَفَحاتَ ١٤ظ – ١٦ظ.

II– ***قَوْلٌ في تَرْبيعِ الدائِرَة***

وَرَدَ هَذا المُؤَلَّفُ عَلَى اللّوائحِ الثَلاثِ لأعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ (أي لوائح القِفْطِيِّ ومَخْطوطَةِ لاهور وابنِ أبي أُصَيْبِعَة)، وقد ذَكَرَهُ هَذا الأخيرُ في مُؤَلَّفِ ***في حلّ شكوك في كِتاب إقليدس في الأصول***[٧٦]. غالِباً ما يُشَكِّلُ هَذا المُؤَلَّفُ الصغيرُ جُزْءاً من "*المُتَوَسِّطات*" (في عِلْمَ الفَلَكِ)، لذَلِكَ وَصَلَ إلَيْنا في عددٍ كَبيرٍ من المَخْطوطَاتِ – وهَذا العَدَدُ في ازْدِيادٍ مُطَّرِدٍ نَظَراً إلَى وُجودِ "*المُتَوَسِّطات*" في غالِبيَّةِ مَجْموعاتِ المَخْطوطَاتِ. ولذَلِكَ تَجْدُرُ الإشارَةُ إلَى أنَّنا قد حَقَّقْنا هَذا النَصَّ اسْتِناداً إلَى

[٧٦] مَخْطوطَة إسْطَنْبول، الجامِعَة ٨٠٠، الصَفْحَة ١٦٧و.

المَخْطوطَاتِ الّتي اسْتَطَعْنا الحُصولَ عَلَيْها، ولَيْسَ انطِلاقاً من جَميعِ المَخْطوطَاتِ الّتي نَعْلَمُ بِوُجودِها. وهِيَ التالية:

(*A*، أ) إسْطَنْبول، أيا صوفيا *4832 II/21*، الصَفَحات ٣٩ ظ– ٤١ و.

(*B*، ب) پاتنا، خودابخش ٣٦٩٢، غَيْرُ مُرقّمةٍ، ثلاثُ أوراقٍ.

(*C*، ج) إسْطَنْبول،كارولاّه *1502/15*، الصَفَحاتُ ١٢٤ ظ–١٢٦ و.

(*D*، د) طهران، دَنشغاه، ١٦٠٣، الصَفَحاتُ ٧ و–٩ ظ.

(*E*، ه) عَليكَرْه، عبد الحيّ، ٦٧٨، الصَفَحاتُ ١٠ و–١١ ظ، ٣٠و –٣٠ظ.

(*I*، ط) طهران، مجلس شورى ٢٠٥/٣، الصَفَحاتُ ٩٣–١٠١.

(*K*، ک) طهران، ملك ٣١٧٩، الصَفَحاتُ ١٠٧ ظ–١١٠ و.

(*M*، م) مشهد ٥٣٩٥/١، الصَفَحاتُ ١ ظ–٣ و.

(*R*، ر) إسْطَنْبول، بشير آغا ٤٤٠، الصَفْحَةُ ١٥١ و.

(*T*، ت) طهران سِپَهْسالار ٥٥٩، الصَفَحاتُ ٨٤ ظ–٨٥ و.

(*X*، ش) طهران، مجلس شورى ٢٩٩٨، ثَمَّةَ صَفْحَةٌ من ورقةٍ غَيْرُ مُرَقَّمَةٍ.

(*V*، و) روما، الفاتيكان، ٣٢٠ ، الصَفَحاتُ ١ ظ–٦ ظ.

لِنُشِرْ في البِدايَةِ إلَى أنّ المَخْطوطَةَ *R* لا تَتَضَمَّنُ نَصَّ ابنِ الهَيْثَمِ، بل فَقَط الشَرْحَ الَّذي أُضيفَ إلَيْهِ. كما نُشيرُ، من جِهَةٍ أُخْرَى، إلَى أنّ مَخْطوطَةَ القاهِرَةِ، دار الكُتُبِ، تيمور – رياض ١٤٠ (الورقتان ١٣٦–١٣٧) لَيْسَت نَصَّ ابن الهَيْثَمِ، بل هِيَ مُلَخَّصٌ وشَرْحٌ مُتَأَخِّرٌ. نَذْكُرُ أخيراً، أنّ مَخْطوطَتَيْنِ لنَصِّ ابنِ الهَيْثَمِ، وهما *fol. 258* وَ *quart.559*، كانَتا مَوْجودَتَيْنِ في برلين قَبْلَ الحرب العالَمِيَّةِ الثانيَةِ، وكانَ سوتر (H. Suter) قد اطَّلَعَ عَلَيْهِما، قد فُقِدَتا لاحِقاً.[٧٧] أمّا بالنِسْبَةِ إلَى

[٧٧] نَحْنُ مدينون للدكتور فيستل (H. O. Feistel) من المَكْتَبَةِ الوَطَنِيَّة، القِسْم الشَرْقِيّ *(Staatsbibliothek Orientabteilung)* عَلَى لُطْفِه بتَوفيرِ هَذِهِ المَعْلومات.

الاعْتِراضِ الَّذي نَجِدُهُ مُضافاً في نِهايَةِ نَصِّ ابنِ الهَيْثَمِ، فإنّ وُجودَهُ مُقْتَصِرٌ عَلَى المَخْطوطَةِ E.

قد يُصْبِحُ الأمْرُ هُنا طَويلاً ومُمِلاًّ للغايَةِ إذا ما تَضَمَّنَ تَقْديمَ نَتائِجِ البَحْثِ في جَميعِ هَذِهِ المَخْطوطَاتِ ومُقارَنَةَ بَعْضِها بالبَعْضِ الآخَرِ، فَضْلاً عن ذَلِكَ لا يَسْمَحُ هَذا البَحْثُ بالحُصولِ عَلَى شَجَرَةٍ تَسَلْسُلِيَّةٍ فِعْلِيَّةٍ للمَخْطوطَاتِ، بل يُفْضي إلَى تَصْنيفِ تِلْكَ المَخْطوطَاتِ في مَجْموعاتٍ جُزْئِيَّةٍ. ويَدُلُّ هَذا التَصْنيفُ عَلَى تاريخِ التَقْليدِ المَخْطوطِيِّ، ويَتَمَثَّلُ هَذا التَصْنيفُ عَلَى النَحْوِ التالي:

$\{(B, T, K), (D, (I, M), X), C), A\}$ وَ $\{E, V\}$

ويَتَعَلَّقُ الأمرُ إذاً بعائلتَيْنِ أساسيَّتَيْنِ، الأُولَى مُؤَلَّفةٌ من ثَلاثِ عائِلاتٍ جُزْئِيَّةٍ، كَما أنَّ العائِلَةَ الجُزْئِيَّةَ الثانيَةَ تَتَضَمَّنُ بدَوْرِها ثَلاثَ عائِلاتٍ جُزْئِيَّةٍ. ولَقَدْ قَدَّمَ سوتر (H. Suter) تَحْقيقاً أوّلِيّاً لِهَذا النَصِّ، مُسْتَنداً في ذَلِكَ إلَى مَخْطوطَتَي برلين المَفْقودتَيْنِ حالِيّاً، وإلى مَخْطوطَةِ الفاتيكان.[٧٨] وقد أسْدَى هَذا التَحْقيقُ، عَلَى الأقَلِّ من خِلالِ تَرْجَمَتِهِ الألمانيَّةِ، خِدْمَةً للمُؤَرّخين.

III – ***مَقالَةٌ مُسْتَقْصاةٌ في الأشْكالِ الهِلالِيَّةِ***

تَحْتَ هَذا العُنْوان بالتَحْديد يَظْهَرُ هَذا المُؤَلَّفُ في لائِحَتَيْ كِتاباتِ الحَسَنِ، أي في اللاّئِحَةِ الوارِدَةِ في مَخْطوطَةِ لاهور والأُخْرَى العائِدَةِ لابنِ أبي أُصَيْبِعَة. وابنُ الهَيْثَمِ نَفْسُهُ يَذْكُرُ هَذا العُنْوانَ في كِتابِهِ ***في حلّ شكوك إقليدس في الأصول وشَرْح معانيه***، حَيْثُ يَكْتُبُ:" وقد كُنّا عَمِلْنا مَقالَةً في الأشْكالِ الهِلالِيَّةِ بَيَّنّا فيها أنّ من الهِلالِيّاتِ ما يَكونُ مُساوياً لمُثَلَّثٍ مُسْتَقيمِ الخُطوطِ. وقد ذَكَرَ المُتَقَدِّمون بَعْضَ

[٧٨] انْظُر:

H. Suter, «Die Kreisquadratur des Ibn el-Haiṯam», *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* 44(1899), pp. 33-47.H.

ذَلِكَ، إلاّ أنّ <ما> ذَكَرَهُ الْمُتَقَدِّمون جُزْئِيٌّ، أعْني في هِلالٍ واحِدٍ يُعْمَلُ عَلَى ضِلْعِ الْمُرَبَّعِ الَّذي في الدائِرَة، والَّذي بَيَّنّاهُ نَحْنُ كُلِّيٌّ، وتَصَرَّفْنا في ذَلِكَ وذَكَرْنا مِنْهُ فنوناً مُخْتَلِفَةً. والهِلالُ يُحيطُ بِهِ قَوْسان، وهُوَ مع ذَلِكَ مُساوٍ لِمُثَلَّثٍ مُسْتَقيمِ الخُطوطِ، أعْني أنّ سَطْحَ الهِلالِ مُساوٍ لِسَطْحِ الْمُثَلَّث، فَيَتَبَيَّنُ من ذَلِكَ أنّ مُبايَنَةَ القَوْسَيْنِ الْمُحيطَتَيْنِ بالهِلالِ لِخُطوطِ الْمُثَلَّثِ الْمُسْتَقيمَةِ لَيْسَ يَمْنَعُ من تَساوي سَطْحَيْهِما. وقد بَيَّنّا أيضاً أنّ هِلالاً مع دائِرَةٍ تامَّةٍ مُساويان بِمَجْموعِهِما لِمُثَلَّثٍ. ولنا أيضاً مَقالَةٌ مُفردةٌ بيّنّا فيها أنّهُ يُمْكِنُ أن تَكونَ الدائِرَةُ مُساوِيَةً لِمُرَبَّعٍ مُسْتَقيمِ الخُطوطِ. ولَوْلا أن يطولَ الكلامُ لَضَمَّنّاها هَذا الكِتابَ "[79]

إنّ وَصْفَ ابنِ الهَيْثَمِ هَذا وتَذْكيرَهُ بِمُخْتَلِفِ أنواعِ الهِلالِيّاتِ، يَنْطَبِقان عَلَى هَذا الْمُؤَلَّفِ III، ولَيْسَ عَلَى الْمُؤَلَّفِ I. إذ إنّ هَذا الأخيرَ يَتَضَمَّنُ فَقَط خمسَ قضايا، من بينها واحِدَةٌ تَعودُ لبقراط الخيوسي (Hippocrate de Chios). نُشيرُ أيضاً إلَى أنّ ابنَ الهَيْثَمِ يتحدّثُ في الوقتِ نَفْسِهِ عن مُؤَلَّفِهِ ***في تَرْبيع الدائِرَة***.

ولَقَدْ وَصَلَ إلَيْنا هَذا الْمُؤَلَّفُ كاملاً في أرْبَعِ مَخْطوطاتٍ. فَضْلاً عن ذَلِكَ فَقَد وَجَدْنا مَقْطَعاً مُهِمّاً مِنْهُ كجُزْءٍ من مَجْموعَةٍ غَنِيَّةٍ مُؤَلَّفَةٍ من كِتاباتٍ لِلحَسَنِ ابنِ الهَيْثَمِ، وهِيَ مَجْموعَةُ لينينغراد الّتي نُسِخَت عن المَخْطوطَةِ الأصْلِيَّةِ الّتي خُطَّت بيَدِ الْمُؤَلِّفِ. نَقْصِدُ هُنا المَخْطوطَةَ B 1030 – المَعْهَد الشَرْقي *89* – الصَفَحات ٥٠ وجه-٧٢ ظهر، ثم ١٣٣ ظهر – ١٤٤ وجه. ولَقَدْ جرت مُقارَنَةُ هَذِهِ المَخْطوطَةِ مع النَصِّ الأصْلِيِّ في العامِ ٧٥٠هـ/١٣٤٩م، وَفْقَ ما نَقْرَأهُ في الصَفْحَةِ الأولى مِنْها. وكُتِبَت المَجْموعَةُ كُلُّها بيدٍ واحدةٍ، بالخطِّ النستعليقيِّ البسيطِ. وتُبَيِّنُ معاينةُ النَصِّ أنّهُ يُوجَدُ هُناك أرْبَعةُ إغفالاتٍ لِجُمْلَةٍ في كُلِّ واحدٍ مِنْها – وجميعُها بدرجاتٍ

[79] إقليدس، مَخْطوطَة جامِعَة إسْطَنْبول ٨٠٠، صَفْحَة ١٦٧و.

مُتساويةٍ — وكذَلِكَ أحَدَ عَشَرَ إغفالاً لِكَلِمَةٍ أو كَلِمَتَيْنِ. سنُشيرُ إلَى هَذِهِ المَخْطوطَةِ بالحَرْفِ *L* (ل).

المَخْطوطَةُ الثانيَةُ هِيَ Oct. 2970 من المَكْتَبَةِ الوَطَنِيَّة في برلين، وقد نُسخَت في سمرقند بالخَطِّ النستعليقيّ في العامِ ٨١٧هـ/١٤١٤م. يَحْتَلُّ نَصُّ المُؤَلَّفِ الصَفَحاتِ ٢٤ وجه – ٤٣ ظهر. الأشْكالُ ممحوّةٌ – عَلَى الأقلِّ في الميكروفيلم المُتَوَفِّرِ لَدَيْنا. ونَجدُ أيضاً أرْبَعةَ إغفالاتٍ لِجُمْلَةٍ، وتِسْعَةً لِكَلِمَةٍ أو كَلِمَتَيْنِ. سنُشيرُ إلَى هَذِهِ المَخْطوطَةِ بالحَرْفِ *B* (ب).

تَعودُ المَخْطوطَةُ الثالِثَةُ إلَى مَكْتَبَةِ عاطف في إسْطَنْبول، رقمُها ١٧١٤، ويَحْتَلُّ النَصُّ الصَفَحاتِ ١٥٨ وجه — ١٧٧ ظهر. ولَقَدْ بَيَّنّا أنّ هَذِهِ المَخْطوطَةَ قد نُسِخَت عن السابقَةِ وعنها فَقَط[٨٠]. وسَنُشيرُ إلَيْها بالحَرْفِ *T* (ت).

المَخْطوطَةُ الرابعَةُ هِيَ: (India Office- London, 1270/12, Loth 734)، ويَحْتَلُّ النَصُّ الصَفَحاتِ ٧٠ وجه – ٧٨ ظهر. وتاريخُ نَسْخِها غَيْرُ مَعْروفٍ، رُبَّما هُوَ القَرْن العاشِرُ للهجرةِ. وتُبيِّنُ المُعايَنَةُ أنّ نَصَّ المُؤَلِّفِ يَتَضَمَّنُ إغْفالَيْنِ لِجُمْلَةٍ ، وتِسْعَةً لِكَلِمَةٍ أو كَلِمَتَيْنِ. نُشيرُ إلَيْها بالحَرْفِ *A* (أ).

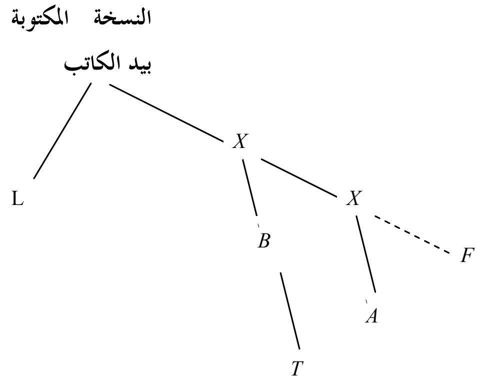
المَخْطوطَةُ الخامسةُ وهِيَ المَقْطَعُ الَّذي عُثِرَ عَلَيْه، وتَعودُ إلى مَكْتَبَةِ السليمانيّة في إسْطَنْبول وهِيَ مَخْطوطَةُ فاتِح الشَهيرة ٣٤٣٩، وقد نُسِخَت في العامِ ٨٠٦هـ/١٤٠٣-١٤٠٤م. ويَحْتَلُّ مَقْطَعُنا الصَفَحاتِ ١١٥ وجه – ١١٧ وجه. وتَصْعُبُ قِراءَتُهُ بسَبَبِ شُحوبِ الحِبْرِ، وهُوَ يَتَضَمَّنُ أرْبَعةَ إغْفالاتٍ لِجُمْلَةٍ، وأحَدَ عَشَرَ إغْفالاً لِكَلِمَةٍ أو اثنَتَيْنِ. سَنُشيرُ إلَى هَذِهِ المَخْطوطَةِ بالحَرْفِ *F* (و).

---

[٨٠] راجعْ بِخاصّةٍ:

Géométrie et Dioptrique, p. CXLVIII.

يَسْمَحُ لنا دَرْسُ تِلكَ الإغْفالاتِ الخاصَّةِ بِكُلِّ مَخْطوطَةٍ، مِمَّـــا ذَكَرْناهـــا سابِقاً، فَضْلاً عن الإغْفالاتِ المُشْتَرَكَةِ، والإضافاتِ والحَوادِثِ الطارِئَةِ الأُخْرَى في النَسْخِ، باقتِراحِ الشَجَرَةِ التَسلسلِيَّةِ المُبَيَّنَةِ أدْناه.



IV - *مَقالَة في مِساحَةِ المُجَسَّمِ المُكافِئ*

وَرَدَ هَذا المُؤَلَّفُ في اللَّوائحِ الثَلاثِ لأعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ، كما ذَكَرَهُ الكاتِـــبُ نَفْسُهُ في مُؤَلَّفِهِ ***في مِساحَةِ الكُرَةِ***. والنَصُّ المُحَقَّقُ هُنا يُكَرِّرُ نَشْرَتَنا المُحققَةَ الصادِرَةَ في العامِ ١٩٨٢[81]، مع بَعْضِ التَحْسيناتِ الطَفيفةِ الّـــتي أُجْرِيَـــت اسْـــتِناداً إلَـــى المَخْطوطَةِ India office 1270، الّتي وَرَدَ ذِكْرُها، ويَحْتَلُّ نَصُّ المُؤَلَّفِ الـــصَفَحاتِ ٥٦ ظهر–٦٩ ظهر. وقد وَضَعَ سوتر (H. Suter) تَرْجَمَةً أَلمانيَّةً، حُرَّةً، لِهَذا النَصِّ[82] ويَقْصِدُ المُتَرْجِمُ بكَلِمَةِ "حرّة" في أغْلَبِ الأحْيانِ نَقْلَ المَعْنَى بدونِ الالتِزامِ بالحَرْفِيَّةِ، وُصولاً أحياناً إلَى التَغاضي عن عَرْضِ بَعْضِ المَقاطِعِ، وخاصَّةً تِلْكَ الّـــتي تُـــشَكِّلُ

---

[81] انْظُر:

R. Rashed, «Ibn al-Haytham et mesure du paraboloïde», *Journal for the History of Arabic Science*, 5(1981), pp. 191-262.

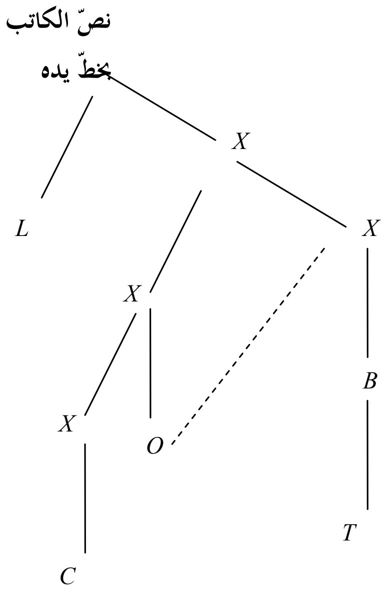
[82] انْظُر:

H. Suter, «Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloides von el-Hasan b. el-Hasan b. el-Haiṯam», *in Bibliotheca mathematica*, 3^e série, 12(1911-1912), pp. 289-332.

تَرْجَمَتُها صُعوبَةً. ويُعَبِّرُ سوتر بالإجْمالِ هُنا عن مَضْمونِ النَصِّ بِطَريقَـــةٍ دَقيقَـــةٍ، باسْتِثْناءِ بَعْضِ المَقاطِعِ والجُزْءِ الأخيرِ.

٧ – *قَوْلٌ في مِساحَةِ الكُرَةِ*

يَظْهَرُ هَذا المُؤَلَّفُ عَلَى لائِحَةِ أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ ويَذْكُرُهُ الكاتِبُ في مُؤَلَّفِهِ ***في أصول المِساحَةِ***. فيَكْتُبُ :" فأمّا الكُرَةُ فإنّ الطريقَ إلَى مِساحَتِها، هُوَ..، وقد بَيَّنَ



ذَلِكَ المُهَنْدِسون في كُتُبِهم، وكُتُبُهم في ذَلِكَ مَوْجودَةٌ، وقد بَيَّنّاهُ نَحْنُ أيضاً في قَوْلٍ مُفْرَدٍ "[٨٣]

[٨٣] ابن الهَيْثَمِ، *"مَجْموع الرسائل"*، مَنْشورات دار المعارف العثمانيّة (حيدر أباد، ١٣٥٧/١٩٣٨–١٩٣٩)، عدد ٧، صَفْحَة ٢. [راجع ايضاً ص: ل–١٣٠–ظ من مخطوطة ***في أصول المساحة*** في المُجَلَّد الثالِثِ من هذا الكتاب. (المُتَرْجِم)]

لَقَدْ وَصَلَ إلَيْنا نَصُّ هَذا المُؤَلَّفِ في خَمْسِ مَخْطوطَاتٍ. الأُولَى، وقد سَبَقَ أن أشَرْنا إلَيْها، هِيَ ٢٩٧٠/١٣ .Oct من المَكْتَبَةِ الوَطَنِيَّةِ في برلين، وقد نُسِخَت، وَفْقَ ما وَرَدَ في العِبارَةِ الخِتامِيَّةِ، في العـــام ٨٣٩هـ/١٤٣٥–١٤٣٦م. ويَحْتَـــلُّ الـــنَصُّ الصَفَحاتِ ١٤٥ و – ١٥٢ و. والأشْكالُ الهَنْدَسِيَّةُ فيهِ مَطْموسَةٌ لا يُمْكِنُ قِراءَتُها، وهُوَ يَتَضَمَّنُ ثلاثَةَ إغْفالاتٍ لِجُمْلَةٍ وإغْفالَيْنِ لِكَلِمَةٍ. سَنُشيرُ إلَى هَذِهِ المَخْطوطَـــةِ بالحَرْفِ B(ب). أمّا المَخْطوطَةُ الثانيَةُ فهِيَ ٢٠/١٧١٤ مـــن مَكْتَبَـــةِ عـــاطِف في إسْطَنْبول، وهِيَ نُسْخَةٌ عن السابقَةِ وعنها فَقَط. ويَحْتَلُّ النَصُّ فيهـــا الـــصَفَحاتِ ٢١١ و – ٢١٨ و. وسنُشيرُ إلَيْها بالحَرْفِ T(ت). تَعودُ النُسْخَةُ الثالِثَةُ إلى عَليكْرَه في الهند، وقد ذُكِرَت سابقاً، يَحْتَلُّ النَصُّ فيها الـــصَفَحاتِ ١ ظ – ٥ و ثم ١٣ ظ – ١٤ ظ. وتَتَضَمَّنُ هَذِهِ المَخْطوطَةُ أَرْبَعَةَ عَشَرَ إغْفالاً لِجُمْلَةٍ وسِتّةً وعِشرين إغْفالاً لِكَلِمَةٍ أو اثنتَيْنِ. لا يَتَّبِعُ الناسِخُ نَموذَجَهُ فَحَسْب، بل يَتَّبِعُ أيضاً نُسْخَةً أُخْرَى، وَفْقَ ما سنَتَبَيَّنُهُ في التَعْليقاتِ (راجع الصَفْحَةَ ٢٩٤ ، الـــسَطْر الأوّل). سنُـــشيرُ إلَيْهـــا بالحَرْفِ O(ع). والمَخْطوطَةُ الرابعَةُ قد أتَيْنا عَلَى ذِكْرِها، وهِيَ مَخْطوطَةُ لينينغـــراد — *B 1030*– المَعْهَد الشَرْقيّ *89*. بَعْضُ الأوْراقِ فيها ضائِعَةٌ، وبدايَةُ النَصِّ مَبْتورَةٌ؛ و لم يَبْقَ مِنْهُ إلا مَقْطَعٌ من نهايَتِهِ في الصَفَحاتِ ٧٣ و–٧٧ و. سنُشيرُ إلَـــى هَـــذِهِ المَخْطوطَةِ بالحَرْفِ L(ل). أمّا الخامِسَةُ فهِيَ المَخْطوطَةُ ١٤٤٦ (الرقم القديم ١٧٦) من المَكْتَبَةِ الوَطَنِيَّةِ في الجزائر، وسنُشيرُ إلَيْها بالحَرْفِ C(جـ). لَقَدْ دَوَّنَ الناسِخُ نَصَّهُ انطِلاقاً من نَموذَجٍ كانَت أوْراقُهُ غَيْرَ مُرَتَّبَةٍ.

ومن الواضِحِ أنّهُ قد كانَ يَجْهَلُ هَذا المَيْدانَ العِلْمَيَّ، فأجْرَى تَبْديلاتٍ عَديدَةٍ في صُلْبِ النَصِّ، الَّذي يجبُ قِراءَتُهُ وَفْقَ الترتيب التالي:

١١٣ و–١١٦ ظ (السَطْر ١٤) ← ١١٧ ظ (السَطْر ٦) — ١١٨ و (مُنْتَـــصَف السَطْر الأخـــير) ← ١١٦ ظ (الـــسَطْران ١٥ — ٢٢) — ١١٧ ظ (الـــسَطْر ٦) ← ١١٨ و (مُنْتَصَف السَطْر الأخير) — ١١٩ ظ.

تَتَضَمَّنُ هَذِهِ المَخْطوطَةُ ثلاثةَ عَشَرَ إغْفالاً لِجُمْلَةٍ، وواحِداً وعِشْرين إغْفالاً لِكَلِمَةٍ أو كَلِمَتَيْن. تَسْمَحُ دِراسَةُ تاريخِ هَذِهِ المَخْطوطَاتِ، فَضْلاً عن مُجملِ الحَوادِثِ الطارِئَةِ عَلَى النَسْخِ، باقتِراحِ الشَجَرَةِ التَسَلسليّةِ المُبَيَّنَةِ أعلاه.

VI– *في قِسْمَةِ المِقْدارَيْنِ المُخْتَلِفَيْنِ المَذْكورَيْنِ في الشَكْلِ الأوّلِ من المَقالَةِ العاشِرَةِ من كِتاب إقليدس.*

ذُكِرَ هَذا المُؤَلَّفُ الصَغيرُ عَلَى اللَّوائحِ الثَلاثِ لأعْمالِ ابن الهَيْثَم، لَكِنَّهُ وَرَدَ تَحْتَ عُنْوانِ مُخْتَصَرٍ عِنْدَ القِفْطِيِّ وفي مَخْطوطَةِ لاهور. يَذْكُرُ ابنُ الهَيْثَمِ في هَذا المُؤَلَّفِ بشَكْلٍ ضِمْنيٍّ المُؤَلَّفَيْنِ السابِقَيْنِ، وذَلِكَ عِنْدَما يَكْتُبُ:"وقد كانَت عرضت حاجتُنا، في بَعْضِ ما استَخْرَجْناهُ / من المَعاني الهَنْدَسِيَّةِ، إلَى أن نُنْقِصَ من أعْظَمِ مِقْدارَيْنِ مُخْتَلِفَيْنِ نصْفَهُ ومِمّا يَبْقَى نِصْفَهُ ... "[٨٤] من جهَةٍ أُخْرَى، يَذْكُرُ ابنُ الهَيْثَمِ بوضوحٍ هَذا المُؤَلَّفَ في كِتابِهِ ***في حَلِّ شُكوكِ إقليدس في الأُصول وشَرْحِ مَعانيه***، فيَقولُ:"فَهَذَّبْنا في هَذا المَعْنَى قَوْلاً بُرهانِيّاً يَدُلُّ عَلَى كُلِّيَّةِ هَذا المَعْنَى، ومع ذَلِكَ في غايَةِ الإيجازِ والاختِصارِ وأخْرَجْناهُ إلَى الوُجودِ من قَبْلِ أن يَعِنَّ لنا الفِكْرُ ***في حَلِّ الشُكوكِ***" [٨٥]، نُشيرُ أخيراً إلَى أنّ ابنَ السريّ، وهُوَ مِمَّن أتوا بَعْدَ ابنِ الهَيْثَمِ، قد وَضَعَ كِتاباً بِهَدَفِ نَقْدِ هَذا الأخير، حَيْثُ يُورِدُ العُنْوانَ الدَقيقَ للمُؤَلَّفِ، وكذَلِكَ مُقَدِّمَتَهُ[٨٦].

وَصَلَ إلَيْنا هَذا النَصُّ في الصَفَحاتِ ٧٨ ظ – ٨١ و من مَخْطوطَةِ لينينغراد *B 1030*، الّتي ذَكَرْناها مراراً.

---

[٨٤] راجع أدناه، الصَفْحَة ٣٠١.

[٨٥] مَخْطوطَة جامِعَة إسْطَنْبول، ٨٠٠، الصَفْحَة ١٤٣ ظ.

[٨٦] انْظُرِ الحواشي الإضافِيَّةَ.

VII– قَوْلٌ في أنّ الكُرَةَ أوْسَعُ الأشْكال المُجَسَّمةِ الّتي إحاطَتُها[٨٧] مُتَساوِيَةٌ وأنّ الدائِرَةَ أوْسَعُ الأشْكال المُسَطَّحَةِ الّتي إحاطَتُها مُتَساوِيَةٌ.

في حين أنّ القِفْطِيَّ يَذْكُرُ هَذا المُؤَلّفَ تَحْتَ عُنْوانِ ***الكُرَةُ أوْسَعُ الأشْكالِ المُجَسَّمةِ***، فإنّنا نَقْرَأُ في لائِحَةِ مَخْطوطَةِ لاهور: ***الأكر أوْسَعُ المُجَسَّمات***. من الواضحِ هُنا أنّها عَناوينٌ مختصرةٌ للعُنْوانِ الأصْلِيِّ الّذي نَجدُهُ في لائِحَةِ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة. ويُشيرُ ابنُ الهَيْثَمِ إلَى هَذا المُؤَلَّفِ في كِتابه ***في حلّ شكوك في كِتاب المجسطي***[٨٨] كما يُشيرُ إلَى نَفْسِ الأمر في مُؤَلَّفِهِ ***في المكان***، فيَكْتُبُ في هَذا الأخير: "وهَذا المَعْنَى قد بيّنّاهُ في كِتابنا ***في أنّ الكُرَة أعظم الأشكال المُجَسَّمة الّتي إحاطتها مُتَساوية***"[٨٩]

وَصَلَ إلَيْنا هَذا النَصُّ في ثَلاثِ مَخْطوطَاتٍ، هِيَ: Berlin Oct. 2907/9، الصَفَحاتُ ٨٤ و – ١٠٥ و؛ وعاطف ١٨/١٧١٤، الصَفَحاتُ ١٧٨ و – ١٩٩ ظ، وقد نُسِخَت هَذِهِ الأخيرةُ عن الأُولى. تَتَضَمَّنُ مَخْطوطَةُ برلين، إغفالاً لِجُمْلَةٍ وسبعةَ إغفالاتٍ لِكَلِمَةٍ. أمّا المَخْطوطَةُ الثالِثَةُ فهِيَ طهران، مجلس شورى، تُغابُني ١١٠، الصَفَحات ٤٦٢ – ٥٠٢. وهِيَ عِبارَةٌ عن مَجْموعَةٍ عِلْمِيَّةٍ تَتَأَلَّفُ من ٥٨١ صَفْحَة. ويَتَضَمَّنُ النَصُّ تِسْعَةَ إغْفالاتٍ لِجُمْلَةٍ وسِتَّةً لِكَلِمَةٍ. ولَقَدْ أُجْرِيَ تَحْقيقُنا إذاً، اسْتِناداً إلَى مَخْطوطَةِ برلين ومَخْطوطَةِ طهران اللّتَيْنِ تَنْتَمِيان بدونِ أيِّ شكٍّ إلَى تَقْليدَيْنِ مُخْتَلِفَيْنِ.

---

[٨٧] من الواضحِ أنّه في حالِ الأحْجامِ، يَجبُ أن نَقْرأ *"مساحة"*. لَكِن، وبما أن ابنَ الهَيْثَم يَسْتَخْدِمُ الكَلِمَةَ نَفْسَها للمُجَسَّماتِ والأشْكال المُسْتَوِيَةِ، أي كَلِمَة "إحاطَة"، فإنَّنا قَرَّرْنا أن نُبْقِيَ عَلَى هَذِهِ الكَلِمَة في الحالَتَيْنِ للحِفاظِ عَلَى وَحْدَةِ المُصْطَلَحاتِ.

[٨٨] مَخْطوطَة عَليكْرَه، الصَفْحَة ٢٣ظ.

[٨٩] ابن الهَيْثَم، ***"مَجْموع الرسائل"***، رقم ٥، ص ٥؛ [راجِع أيضاً ص ٦٣٤ في المُجَلَّد الرابِع من هذا الكتاب، النسخة العربيّة (المُتَرْجِم)].

لِنَنْتَقِلِ الآن إِلَى المُؤَلَّفَيْنِ حَوْلَ اسْتِخْراجِ الجذورِ وتَقْرِيبِها، واللَّذَيْنِ يَرِدانِ في مُلْحَقِ الكِتابِ.

١– مَقالَةٌ في عِلَّةِ الجَذْرِ وإِضْعافِهِ ونَقْلِهِ

لَقَدْ أشَرْنا إِلَى أنّ العُنْوانَ الَّذي يُورِدُهُ القِفْطِيُّ يَخْتَلِفُ عن العُنْوانِ الَّذي يُعطيهِ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة: ***في عِلَلِ الحِساب الهِنْدِيِّ***. ويَتَلاشَى هَذا الاخْتِلافُ في العُنْوانِ نَوْعاً ما عِنْدَما نَبْلُغُ نهايَةَ النَصِّ، أي عِنْدَما نَقْرَأُ أقوالَ ابنِ الهَيْثَم: "فهَذا ما أرَدْنا شَرْحَهُ في عِلَلِ نَقْلِ الجُذورِ وإضْعافِها في حِسابِ الهِندِ"[٩٠] وهَكَذا فإنّ العُنْوانَ الَّذي يُورِدُهُ المُفَهْرِسونَ القُدَماء يُمكنُ أن يَظْهَرَ كمُلَخَّصٍ لِهَذا المُؤَلَّفِ الأخيرِ أو لآخَرَ غَيْرِه مُعادِلٍ لَهُ. بإمْكاننا أيضاً أن نَتَساءَلَ إذا ما كانَ الأمْرُ في الأصْلِ يَتَعَلَّقُ بمُؤَلَّفٍ أكْثَرَ إسهاباً بحيث لا يُشَكِّلُ البَحْثُ عن عِلَّةِ الجَذْرِ سِوَى جُزْءٍ مِنْهُ. لا يَنْبَغي اسْتِبْعادُ هَذا التَخْمين مُسْبَقاً، ولا سِيَّما أنّ هَذا المُؤَلَّفَ يَظْهَرُ بدونِ التَمْهيدِ الَّذي عَوَّدَنا عَلَيْهِ ابنُ الهَيْثَمِ، حَيْثُ يَطْرَحُ في مُقَدِّماتِ أعْمالِهِ المَسْأَلَةَ الّتي يَنْوي بَحْثَها ويُشيرُ إِلَى أصالَةِ مَسارِهِ.

ويُشَكِّلُ هَذا النَصُّ جُزْءاً من مَجْموعَةِ عَليكَرَه الّتي ذَكَرْناها، ويَحْتَلُّ الصَفَحاتِ ١٧ و – ١٩ و.

٢– في اسْتِخْراج ضلع المكعّب

يَظْهَرُ هَذا النَصُّ في اللَّوائحِ الثَلاثِ، مع بَعْضِ الاخْتِلافاتِ. وهَكَذا يَسْتَخْدِمُ القِفْطِيُّ صيغَةَ الجَمْعِ، أي *"الأضلاع"*، عِوَضاً عن صيغَةِ المُفردِ، ولا تُوردُ مَخْطوطَةُ لاهور كَلِمَةَ *"اسْتِخْراج"*. وقد وَصَلَ إلَيْنا النَصُّ في مَخْطوطَةٍ واحِدَةٍ، مَبْتورَةٍ،

---

[٩٠] انْظُرْ أدْناه.

تَنْتَمي إِلَى مَخْطوطَةِ مَكْتَبَةِ كويبيشيف الّتي أتَيْنا عَلَى ذِكْرِهـــا. ويَحْتَـــلُّ الـــنَصُّ الصَفَحاتِ ٤٠١ ظ – ٤٠٢ و. وهُوَ ينقطعُ بِشَكْلٍ مفاجىء في الصَفْحَةِ ٤٠٢ و، بِسَبَبِ البَتْرِ الَّذي تَعَرَّضَت لَهُ المَخْطوطَةُ. وأخيراً، تُوجَدُ تَرْجَمَـــةٌ روسِـــيَّةٌ لِهَـــذا النَصِّ[٩١].

[٩١] انْظُر:

A. Akhmedov, "Kniga ob izvletcheni rebra kouba", *Matematika I astronomia v troudakh outchionikh srednevekovovo vostoka, izdatel'stvo "fan"* (Tachkent, 1977), pp. 113-117.

الفَصْلُ الأوَّل

تَرْبيعُ الهِلالِيّاتِ والدائِرَة

مُقَدِّمَة

تَتَناوَلُ المَجْموعَةُ الأُولَى من أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ في البُحوثِ التَحْليلِيَّةِ تَرْبيعَ الهِلالِيّاتِ والدائِرَةِ. وتَتَمَحْوَرُ المَسْأَلَةُ المَطْروحَةُ حَوْلَ الحِسابِ الدَقيقِ للمِساحَةِ الَّتي تحدُّها أقواسُ دائِرَةٍ، وحَوْلَ البَحْثِ — في مُخْتَلِفِ حالاتِ الهِلالِيّاتِ والدوائرِ — عن تَرْبيعٍ دَقيقٍ للمِساحَاتِ ذَواتِ الإحاطَةِ المُنْحَنِيَةِ. وتَبْدو في ذَلِكَ ميزةُ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغرِ جَلِيَّةً، فهيَ حاضِرَةٌ دائماً في العَلاقَةِ القائِمَةِ بَيْنَ الدَوائرِ المَأخوذَةِ، أو في العَلاقَةِ فيما بَيْنَ مُرَبَّعاتِ أقْطارِ تِلْكَ الدَوائرِ. ووَفْقَ ما نعْرِفُهُ، لم يُساهِمْ أيُّ رِياضِيٍّ مِمَّن سَبَقوا ابنَ الهَيْثَم — بِغَضِّ النظرِ أَكُتِبَ ذَلِكَ باليونانيَّةِ أم العَرَبِيَّةِ — بالمِقْدارِ الَّذي ساهَمَ فيه هَذا الأخيرُ في هَذا المضمارِ؛ ولم يُطَوِّرْ أيُّ رياضِيٍّ مِمَّن أتوا بَعْدَهُ — بغَضِّ النَظَرِ أَكُتِبَ ذَلِكَ بالعَرَبِيَّةِ أم اللاّتينِيَّةِ — هَذا البَحْثَ بمِقْدارِ ما طوّرَهُ ابنُ الهَيْثَمِ، وذَلِكَ وُصولاً إلى العُقودِ الأخيرةِ من القَرْنِ السابعِ عَشَرَ؛ ونَحْنُ نُدْرِكُ جَيِّداً أنّ هَذِهِ التَأْكيداتِ يُمْكِنُ أن تكونَ مُفاجِئَةً، لا سِيَّما وأنّ مُساهَمَةَ ابنِ الهَيْثَمِ هَذِهِ قد بقِيَت بجوهرِها مُهمّشةً، ولم تُعْطَ التقديرَ الَّذي تَسْتَحِقُّهُ.

كما رأَيْنا، لقد نَسَبَ المُفهرسونَ القُدَماءُ إلى ابنِ الهَيْثَمِ ثلاثةَ عَناوينَ مُكَرَّسَةٍ لِهَذِهِ الدِراسَةِ، يَتَناوَلُ اثنانِ مِنْها الهِلالِيّاتِ، في حينِ يَتَعَلَّقُ العُنْوانُ الثالِثُ بِتَرْبيعِ الدائِرَةِ، أمّا تِلْكَ العناوينُ فهيَ:

I – ***قَوْلٌ في الهِلالِيّاتِ،***

II – ***قَوْلٌ في تَرْبيعِ الدائِرَةِ،***

III – ***مَقالَةٌ مُسْتَقْصاةٌ في الأشكالِ الهِلالِيّةِ.***

وتِلْكَ هِيَ المُؤَلَّفاتُ الوحيدةُ الَّتي يَنسُبُها المفهرسون القُدَماءُ إلى ابن الهَيْثَم، وهِيَ كذَلِكَ المُؤَلَّفاتُ الوحيدةُ الَّتي يذكرُها هُوَ بالذاتِ في كِتاباتِهِ المُخْتَلِفَةِ، الَّتي وصَلَتْ إلينا كُلُّها. ويُمثِّلُ هَذا الأمْرُ فرصةً سانحةً فريدةً، لتقييمِ مُساهَمَةِ ابنِ الهَيْثَمِ، فَضْلاً عن تقييمِ مَدَى التطَوُّرِ في استِدْلالاتِه. لِنُلاحِظْ أنّ الأخيرَ من هَذِهِ المُؤَلَّفاتِ الثلاثةِ هُوَ الأهمُّ مَضْموناً، وأنّ التراتُبيَّةَ الزَمَنيَّةَ في كِتابَةِ هَذِهِ المُؤَلَّفاتِ تَتَوافَقُ والترتيبَ المُبَيَّنَ سابقاً، أي I، II، III . ففي المُؤَلَّفِ II يَسْتَشْهِدُ ابنُ الهَيْثَمِ مُباشرةً بالمُؤَلَّف I، حَيْثُ يَقْتَبِسُ مِنْهُ قَضِيَّتَيْنِ؛ وفي المُؤَلَّفِ الثالثِ يَذْكُرُ المُؤَلَّفَ I، كَتَحْريرٍ أوَّليٍّ قديمٍ بِشَكْلٍ ما، قد تَخطّاهُ الزمنُ. وأخيراً فالمُؤَلَّفُ II قد كُتبَ بالضرورَةِ قَبْلَ المُؤَلَّفِ III، ونقيضُ ذَلِكَ مُحالٌ، لأنّه لو لم يَكُنْ هَذا الأمْرُ صحيحاً، لَكانَ ابنُ الهَيْثَمِ قد ذَكَرَ المُؤَلَّفَ III الَّذي يَتَضَمَّنُ هُوَ أيضاً القَضايا الضَروريَّةَ، الَّذي يَكونُ وَفْقاً لِلكاتِبِ أكْثَرَ اكتِمالاً من المُؤَلَّفِ I، وقد كُتِبَ لِيَحُلَّ مَحَلَّهُ. وفَضْلاً عن ذَلِكَ، تُضافُ إلى هَذِهِ الحُجّةِ الشَكْليَّةِ حُجَّةٌ أُخْرَى، تُحيلُنا مباشرةً إلى مُحْتَوَى المُؤَلَّفاتِ.

فلقد بَدَأَ كُلُّ شَيْءٍ إذاً مع هَذا المُؤَلَّفِ الصَغيرِ، الَّذي يَبْدو عِنْدَ تَفَحُّصِهِ قد صُمِّمَ وأُلِّفَ بِهَدَفِ تَرْبيعِ الدائِرَةِ. ويُصَرِّحُ ابنُ الهَيْثَمِ شَخْصِيّاً أنّه قد انْبَرَى لِلبَحْثِ في هَذا المَجالِ، وإلى وَضْعِ المُؤَلَّفِ I، إثْرَ تَفَحُّصِهِ لِلنَتيجَةِ الَّتي *"ذَكَرَها المُتَقَدِّمون"* ، حَوْلَ *"الشكل الهِلاليّ المُساوي لِمُثَلَّث"* ، أي بِقَوْلٍ آخرَ، ما يَعْني النَتيجَةَ المنسوبَةَ إلى بقراط الخيوسي (Hippocrate de Chios). ومِن جِهَةٍ أُخْرَى، فإنّه من أصلِ أربعِ قَضايا مُكَوِّنَةٍ للمُؤَلَّفِ الأوّلِ، فَضْلاً عن مُقَدِّمَةٍ تِقَنيَّةٍ، تَرِدُ مُجَدَّداً قَضِيَّتانِ اثْنَتانِ من هَذِهِ القَضايا في مُؤَلَّفِ ***في تَرْبيع الدائِرَة***.

ولَمّا كانَ ابنُ الهَيْثَمِ مُدْرِكاً لِمَتانَةِ العَلاقَةِ القائِمَةِ بَيْنَ تَرْبيعِ الدائِرَةِ وبَعْضِ الهِلاليّاتِ، فكأنّما أرادَ سَبْرَ عُمْقِ هَذِهِ العَلاقَةِ في مُؤَلَّفٍ مُتَقَدِّمٍ، حَيْثُ يَتَناوَلُ دِراسَةَ مِساحَةِ هَذِهِ الهِلاليّاتِ، وحَتَّى دِراسَةَ مِساحَةِ دائِرَةٍ مُعيّنةٍ وهِلاليّات [راجِعِ القَضِيَّةَ

الخامِسَةَ من المُؤَلَّفِ الأوّل]. فمِن حَيْثُ المَضْمونُ، يندرجُ إذاً المُؤَلَّفانِ الأوّلُ والثاني في مسارِ تَقْليدٍ يَعودُ بعيداً إلى زمنِ بقراط الخيوسي.

وبالمناسبةِ، فإنّ ابنَ الهَيْثَمِ في مُؤَلَّفِهِ ***في تَرْبيعِ الدائرَة*** (II) لا يُضيفُ أيَّ نَتيجَةٍ مُهِمَّةٍ رياضِيّاً عَلَى ما وَرَدَ في نَصِّ المُؤَلَّفِ الأوّل. ولَكِنَّ الاكتفاءَ بِهَذا الاستنتاجِ، سيُفَوِّتُ علينا إدراكَ المَغْزَى الأساسيِّ في هَذا النَصِّ: إذ إنّ الجَوْهَرِيَّ فيه يَتَمَحْوَرُ حَوْلَ تطويرِهِ لِمَوْضوعٍ من الاسْتِدْلالِ ذي سِمَةٍ رياضِيَّةٍ – فلسفيّةٍ مُزْدَوِجَةٍ. ولقد تَناوَلْنا هَذِهِ المَسْأَلَةَ وحاولنا في مكانٍ آخَرَ استخلاصَ فحواها[1]. ويَتَعَلَّقُ الأمْرُ هنا بالتَفْكيرِ في مَفْهومِ الوُجودِ في الرياضِيّاتِ، وعَلاقاتِهِ بمفهومِ "قابليّةِ البناءِ"، وبالتالي بتَأسيسِهُ بواسِطَةِ مَفْهومِ *"المَعْلوم"*. لقد بَلَغَ هَذا التفكيرُ، الَّذي استُهِلَّ في هَذا النَصِّ ذُرْوَتَهُ في مَقالَتَيْنِ أساسِيَّتَيْنِ مُتَلاحِقَتَيْنِ كَتَبَهُما ابنُ الهَيْثَمِ، وهما: ***في التَحْليل والتَرْكيب*** و ***في المَعْلومات***[2]. ونُصادفُ في المُؤَلَّفِ II تعابيرَ مُتَطابِقَةً مع تِلْكَ المُستعملةِ في تَيْنِكَ المَقالَتَيْنِ، الأمْرُ الَّذي يَشْهَدُ عَلَى الدورِ الرئيسيِّ لِهَذا التساؤلِ لَدَى ابنِ الهَيْثَمِ، كما يُشَكِّلُ هَذا الأمْرُ حُجَّةً إضافيّةً تُدَعِّمُ صِحَّةَ نِسْبَةِ هَذِهِ المُؤَلَّفاتِ[3].

فرياضِيّاً وتاريخِيّاً، يُشَكِّلُ هَذان المُؤَلَّفانِ مَجْموعَةً جُزْئِيّةً مُتَجانسَةً. أمّا التساؤلُ الرياضِيُّ – الفلسفيُّ الواردِ فيهما، فهُوَ جوهريٌّ ولَيْسَ مُجَرَّدَ استِطْرادٍ،

---

[1] انْظُر:

R. Rashed, «L'analyse et la synthèse selon Ibn al-Haytham», dans Idem (éd.). *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique* (Paris, 1991), pp. 131-162.

[راجعْ بهذا الصَدَدِ أيضاً المُجَلَّدَ الرابعَ من هذا الكتابِ، (المُتَرْجِم)]

[2] انْظُر:

R. Rashed, «La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham. I *L'analyse et la synthèse*», *MIDEO*, 20(1991), pp. 31-231 et «La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham. II *Les connus», MIDEO*, 21(1993), pp. 87-275.

[3] حَوْلَ هَذِهِ المسألةِ، راجعِ المُقَدِّمَةَ.

بحَيْثُ يُجيزُ المؤرّخُ لِنَفْسهِ، وَفْقَ أهْوائِهِ، أن يَتَوَقَّفَ عِنْدَهُ أو يَتَغاضَى عَنْهُ. وعِلاوَةً عَلَى ذَلِكَ، فلم يُؤَدِّ تأثيرُ هَذا التساؤلِ إلى ظُهورِ امتداداتٍ له في أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ فَحَسْب، إنّما تَعَدّاها ليعكسَ، كما سَبَقَ وبَيَّنّا[٤]، اهتماماً غَيْرَ مَسْبوقٍ بِمَسْأَلَةِ الوُجودِ بمَعْناه الرياضِيّ.

أمّا في المُؤَلَّفِ الثالِثِ حَوْلَ ***الأشكال الهلاليّة***، فقد تَبَدَّلَتِ وِجْهَةُ عَمَلِ ابنِ الهَيْثَم، حَيْثُ شَهِدَ هَذا العَمَلُ لَدَيْهِ تَحَوُّلاً عَميقاً في التَعْميمِ والإدْراكِ معاً. ففي هَذا المُؤَلَّفِ الكبير، أُهمِلَت فِكْرَةُ تَرْبيعِ الدائِرَةِ، وحَتَّى دِراسَةُ الهلالِ لم تَعُدْ تَرْمي إلى المُساهَمَةِ المُباشرةِ أو غَيْرِ المُباشرةِ في حَلِّ هَذِهِ المَسْأَلَةِ، إنّما أضْحَت هَذِهِ الدِراسَةُ تُعْرَضُ، مُذّاك فَصاعِداً، كَفَصْلٍ عن تَرْبيعِ فِئَةٍ خاصَّةٍ من المِساحَاتِ المُنْحَنِيَةِ الإحاطةِ. ويُعَمِّمُ ابنُ الهَيْثَمِ إذاً النَتائِجَ الحاصِلَةَ في المُؤَلَّفِ الأوّلِ، ويُضاعفُ الحالاتِ، مُتَوَصِّلاً في ذَلِكَ إلى الكثيرِ من النَتائِجِ، الَّتي يَنْسُبُها المُؤَرخون حَتَّى يَوْمِنا هَذا إلى رياضِيِّينَ مِمَّن أتوا بَعْدَهُ بزَمَنٍ بعيدٍ. وباختِصارٍ، يَبْدو أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد تَمَكَّنَ في هَذا البَحْثِ بشَكْلٍ ما من تَحْديدِ دَوْرِ الدالَّةِ sin^2x/x .

ولا يَعْرِفُ المُؤَرخونَ من مُؤَلَّفاتِ ابنِ الهَيْثَمِ الثلاثةِ سِوَى ذاكَ الَّذي كَرَّسَهُ لتَرْبيعِ الدائِرَةِ[٥]. فالمُؤَلَّفُ الأوّلُ، كما رأَيْنا[٦]، قد اعتُبِرَ مَفْقوداً؛ أمّا الثالِثُ فلم يُمَثِّلْ يوماً مَوْضوعَ بَحْثٍ، وهَذِهِ المَعْرِفَةُ المُجْتَزَأَةُ ما كانَت بِقادِرَةٍ، في حَقيقَةِ الأمْرِ،

---

[٤] لقد أثرنا هَذِهِ المسألةَ، الَّتي لم تَلْقَ آنذاك اهتماماً كافياً، في:

«La construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham», *Journal for the History of Arabic Science*, 3 (1979), pp. 309-387.

كما أعَدْنا تَناوُلَ المسألةِ لِذاتِها في (راجع الحاشيةَ ٥٩ في مُقَدِّمَةِ الكِتاب):

«L'analyse et la synthèse selon Ibn al-Haytham».

[٥] انْظُرْ مثلاً :

C. J. Scriba, «Welche Kreismonde sind elementar quadrierbar? Die 2400 jährige Geschichte eines Problems bis zur endg:ultigen Lösung in den Jahren 1933/1947», *Mitteilumgen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg*, XI, 5 (1988), 517-534.

[٦] راجعِ المُقَدِّمَةَ، ص ٦١-٦٢.

سِوَى عَلَى حَرْفِ حُكْمِ المُؤَرّخين، وإفْسادِ تَصَوُّرِهِم حَوْلَ تاريخِ هَذا الفَصْلِ. وقد وُصِفَت مُساهَمَةُ ابنِ الهَيْثَمِ، وحَتَّى زَمَنٍ قريبٍ، "كَتَعْميمٍ بَسيطٍ[٧]" لِبَعْضِ نَتائِجِ بقراط الخيوسي، وكأنّها *"لا تمثّل أيَّ تقدّمٍ حقيقيٍ"* [٨] في هَذا المضْمارِ. سَنَرَى أنّ الأمْرَ لَيْسَ كذَلِكَ بتاتاً، إذ إنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد تَوَصَّلَ في مُؤَلَّفِهِ الثالِثِ إلى رَسْمِ مَعالِمِ فَصْلٍ جَديدٍ من رياضِيّاتِ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ.

سَوْفَ نُعاوِدُ إذاً تَناوُلَ تِلْكَ المُؤَلَّفاتِ الثلاثةِ، وَفْقَ ترتيبِ تأليفِها؛ وسنورِدُ باختِصارٍ مُحْتَوَى الأوّلِ والثاني مِنْها، بُغْيَةَ إبْرازِ النِقاطِ المُهِمَّة فيهما؛ أمّا المُؤَلَّفُ الثالثُ فلسَوْفَ نَعْمَدُ مَنْهَجيّاً إلى نَقْلِ مُحْتواهُ، وإلى شَرْحِهِ الرياضِيِّ وذَلِكَ بُغْيَةَ تَوْفيرِ إمْكانيَّة تَتَبُّعِهِ لِلقارِئِ المُعاصِرِ بدونِ أيِّ تَوَقُّفٍ مَدْعاتُهُ لُغَةٌ أو إطالَةٌ في إسْهابٍ.

---

[٧] انْظُرْ:

C. J. Scriba, op. cit., p. 517.

وهذا الحُكْمُ صَحيحٌ إذا ما اقْتَصَرَت نَظْرَتُنا على النَتائجِ الرياضِيَّةِ الَّتي تَوَصَّلَ إليها ابنُ الهَيْثَمِ في ***"قول في تربيع الدائرة"***. لَكِنَّهُ لا يَعودُ صَحيحاً إذا ما قَيَّمْنا، كما يَنْبَغي، النِقاشَ الرَديفَ المُثارَ في هذا المُؤَلَّفِ حَوْلَ وُجودِ الكائناتِ الرياضِيَّةِ.

[٨] نَفْس المَرْجِعِ، ص ٥٢٣.

١–١ الشَرْحُ الرياضِيُّ

١–١–١ مُؤَلَّفُ: *قَوْلٌ في الهِلالِيّات*

يُمَثِّلُ هَذا المُؤَلَّفُ، في واقِعِ الأمْرِ، رِسالَةً مُوَجَّهَةً من ابنِ الهَيْثَمِ إلى أحَدِهِم، حَيْثُ يُخاطِبُهُ في مُسْتَهَلِّها مُسْتَعْمِلاً التَعْبيرَيْنِ الشَكْلِيَّيْنِ *"سَيِّدَنا"* و *"الأُسْتاذ"*، اللّذَيْنِ يَدُلاّنِ عَلَى رَجُلٍ يَحْتَرِفُ الأدَبَ أو العُلومَ ويَنْتَمي إلى طَبَقَةٍ مَيْسورَةٍ، ولَكِنَّها غَيْرُ الطَبَقَةِ الحاكِمَةِ. ويُخْبِرُنا مُؤَلَّفُ ابنِ الهَيْثَمِ الثالِثُ أنّ الأمْرَ مُتَعَلِّقٌ بأحَدِ أصْدِقائِهِ مِمَّن يَكْتَفونَ *"بالجُزْئِيِّ من القَوْلِ"*، ولا نَعْرِفُ عن هَذا الشَخْصِ أكْثَرَ من ذَلِكَ، ولَكِنَّنا بِالمُقابِلِ نَعْرِفُ بشَكْلٍ أفْضَلَ الأسْبابَ الَّتي دَفَعَت ابنَ الهَيْثَمِ إلى الخَوْضِ في هَذا البَحْثِ حَوْلَ الهِلالِيّاتِ. وبِهَذا الخُصوصِ، يُزَوِّدُنا ابنُ الهَيْثَمِ نَفْسُهُ بشَهادَةٍ ثَمينَةٍ حَوْلَ المَعْرِفَةِ السائِدَةِ آنذاك عن النَتيجَةِ الَّتي تَوَصَّلَ إلَيْها القُدَماء، والمُتَعَلِّقَةِ بمُساواةِ مِساحَةِ هِلالٍ ما لِمساحَةِ مُثَلَّثٍ، نَعْني النَتيجَةَ المَشْهورَةَ المَنسوبَةَ إلى بقراط الخيوسي، وسَوْفَ نُناقِشُ في مَكانٍ آخَرَ مَسْأَلَةَ انتِقالِ هَذِهِ النَتيجَةِ إلى العَرَبِيَّة[٩].

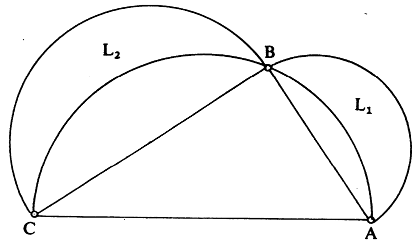
يَتَكَوَّنُ المُؤَلَّفُ من تَمْهيدٍ مُخْتَصَرٍ، ومن أرْبَعِ قَضايا ومن مُقَدِّمَةٍ. ويَتَناوَلُ ابنُ الهَيْثَمِ في كِتاباتِهِ مَضْمونَهُ مَرَّتَيْنِ: في مُؤَلَّفِ ***قَوْلٌ في تَرْبيعِ الدائِرَةِ*** ومن ثمّ في المُؤَلَّفِ الثالِثِ.

يَدْرُسُ ابن الهَيْثَمِ في القَضايا ١، ٢، ٣، ٥، انْطِلاقاً من نِصْفِ دائِرَةِ ABC، الهِلالَيْنِ L_1 وَ L_2 المُحاطَيْنِ بقَوْسِ AB أو قَوْسِ BC، وبِنِصْفِ الدائِرَةِ. وفي القَضايا ١، ٢، ٥ يَفْتَرِضُ أنّ القَوْسَ AB مُساوِيَةٌ لسُدْسِ مُحيطِ الدائِرَةِ؛ وفي القَضِيَّةِ الثالثةِ يَسْتَعينُ في بُرْهانِهِ بِاخْتِيارِ نُقْطَةٍ كَيْفَما اتَّفَقَت عَلَى نِصْفِ المُحيطِ. أمّا القَضِيَّةُ

---

[٩] راجِعِ المُجَلَّدَ الثالِثَ.

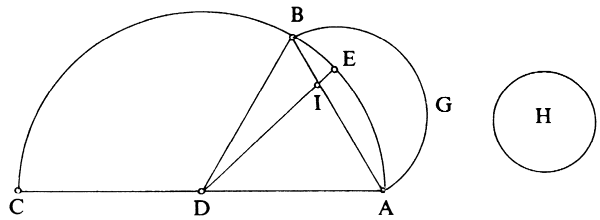
الرابعةُ فهيَ، إذا صَحَّ القَوْلُ، مُقَدِّمَةٌ – ذاتُ طابعٍ تِقَنيٍّ – ضَروريَّةٌ لإثْباتِ القَضِيَّةِ الخامِسَةِ. وهَكَذا تَبْدو إذاً بُنْيَةُ مُؤَلَّفِ ابنِ الهَيْثَمِ. فَلْنَتَناوَلْ باختِصارٍ مُحْتَوَى القَضايا نَفْسِها.



قَضِيَّة ١.–

$$L_1 + (1/24)\ cercle\ (ABC) = (1/2)\ tr.\ (ABC)$$

في مَعْرِضِ بُرْهانِهِ، يَأخُذُ ابنُ الهَيْثَمِ نُقْطَةً E عَلَى القَوْسِ AB بحَيْثُ تَكونُ القَوْسُ AE مُساوِيَةً لثُمْنِ مُحيطِ الدائِرَة، كما يَأخُذُ I الَّتي هِيَ نُقْطَةُ تَقاطُعِ نِصْفِ



شكل ١–١

القُطْرِ DE والوَتَرِ AB ، (انْظُرِ الشَكْلَ ١–١).
ومن ثَمّ يُبَيِّنُ أنّ

$$sect.(ADE) = (1/2)\ cercle\ (AGB)$$

ويَسْتَنْبِطُ العَلاقاتِ

$$tr.(ADI) = lun.(AGBE) + port.(EBI),$$
$$tr.(BAD) = lun.(AGBE) + port.(EBI) + tr.(BID),$$
$$tr.(BAD) = lun.(AGBE) + sect.(BED).$$

ولَكِنَّ قَوْسَ EB تُساوي $1/24$ من مُحيطِ الدائِرَةِ $cercle\ (ABC)$، فإذاً

$$sect.(BED) = (1/24)\ cercle(ABC)$$

ونَحْصُلُ عَلَى النَتيجَةِ المَطْلوبَةِ.

ولَكِنَّه من غَيْرِ الضَروريِّ هنا أن نُدْخِلَ هاتَيْنِ النُقْطَتَيْنِ E وَ I. فلَدَيْنا:

$$sect.(ADB) = (1/6)\ cercle(ABC)$$

وَ

$$(1/2)\ cercle(AGB) = (1/8)\ cercle(ABC),$$

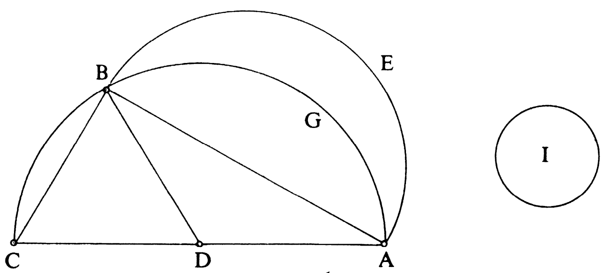
فإذاً

$$sect.(ADB) = (1/2)\ cercle(AGB) + (1/24)\ cercle(ABC)\ ;$$

فإذا طَرَحْنا القِطْعَةَ (AEB) من طرفَيِ المُساواةِ، نَحْصُلُ عَلَى النَتيجَةِ المَطْلوبَةِ.

قَضِيَّة ٢.–

$$L_2 = (1/2)\ tr.(ABC) + (1/24)\ cercle(ABC)$$



شكل ١–٢

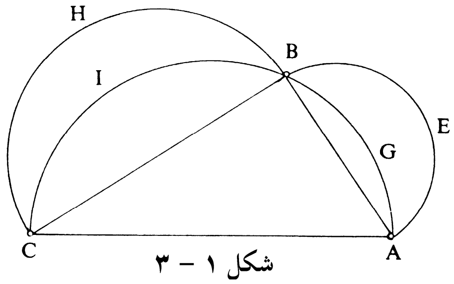
لِنُلاحِظْ أنّ القَضِيَّتَيْنِ الأُولَيَيْنِ تَتَناوَلانِ هنا مُباشَرَةً حالَةَ الهِلالَيْنِ الَّتي سَتَرِدُ دِراسَتُها لاحِقاً في مُؤَلَّفِ ***المَقالَة المُسْتَقْصاة***، في القَضِيَّةِ ١٣ الَّتي تُمَثِّلُ كما سَنَرَى لاحِقاً تَطْبيقاً للقَضِيَّتَيْنِ الثامِنَةِ والتاسِعَةِ.

قَضِيَّة ٣.–

$$L_1 + L_2 = tr.(ABC),$$

وذَلِكَ أيْنَما وَقَعَت النُقْطَةُ B عَلَى مُحيطِ الدائِرَةِ.

يُوردُ ابنُ الهَيْثَمِ لِهَذهِ القَضِيَّةِ بُرْهاناً كذاك المَنْسوبِ إلى القُدَماءِ (بقراط الخيوسي)، وذَلِكَ وَفْقَ أوديم (Eudème)[١٠]، حَيْثُ يَرْتَكِزُ هَذا البُرْهانُ عَلَى التَناسُبِ فيما بَيْنَ مِساحَةِ الدائرَةِ و مُرَبَّعِ قُطْرِها، فَضْلاً عن مَبَرْهَنَةِ فيثاغورس. نَسْتَنْبِطُ بِالفِعْلِ (انْظُرِ الشَكْلَ ١–٣) من هَذِهِ المَبَرْهَنَةِ العَلاقَةَ



شكل ١ – ٣

$$(1/2)\ cercle(AEB) + (1/2)\ cercle(BHC) = (1/2) cercle(ABC),$$

فإذا طرَحْنا من طرفَيِ المُساواةِ العِبارَةَ

$$sgm.(AGB) + sgm.(BIC)$$

نَحْصُلُ عَلَى النَتيجَةِ المَطْلوبَةِ.

قَضِيَّة ٥.–

$$L_2 + (1/2)\ tr.(ABC) = L_3 + (1/8)\ cercle\ (ABC),$$

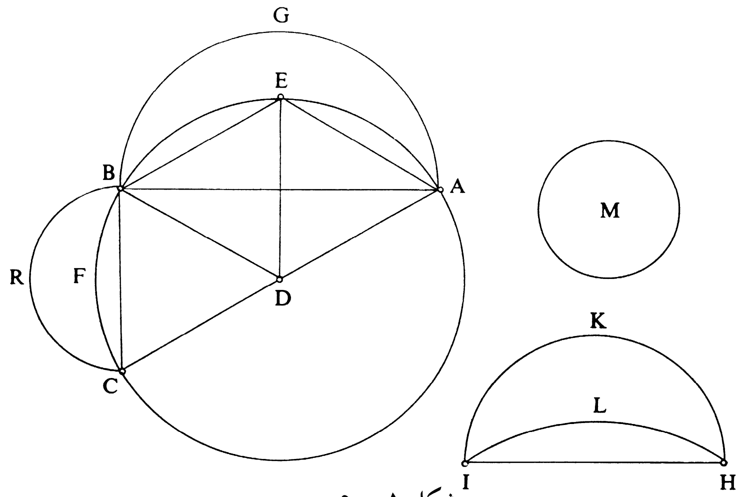
حَيْثُ يَكونُ L_3 هِلالاً مُتَشابِهاً وَ الهِلالَ L_1 ، ومُحَقِّقاً للعَلاقَةِ $L_3 = 2L_1$. [انْظُرِ الشَكْلَ ١–٥ (المُترجم)].

يَرْتَكِزُ البُرْهانُ عَلَى القَضايا ٢ وَ ٣ وَ ٤. وتَتَناوَلُ القَضِيَّةُ ٤ دِراسَةَ نِسْبَةِ هِلالَيْنِ مُتَشابِهَيْنِ [انْظُرِ الشَكْلَ ١–٤ (المُترجم)]. فيَبْدَأُ ابنُ الهَيْثَمِ بإثْباتِ أنّ نِسْبَةَ قِطْعَتَيْنِ مُتَشابِهَتَيْنِ تُساوي مُرَبَّعَ نِسْبَةِ قاعِدَتَيْهِما – وسَيُمَثِّلُ هَذا البُرْهانُ مَوْضوعَ المُقَدِّمَةِ ٥ من ***المَقالَةُ المُسْتَقْصاة*** –، لِيَسْتَنْبِطَ من ذَلِكَ نِسْبَةَ الهِلالَيْنِ.

---

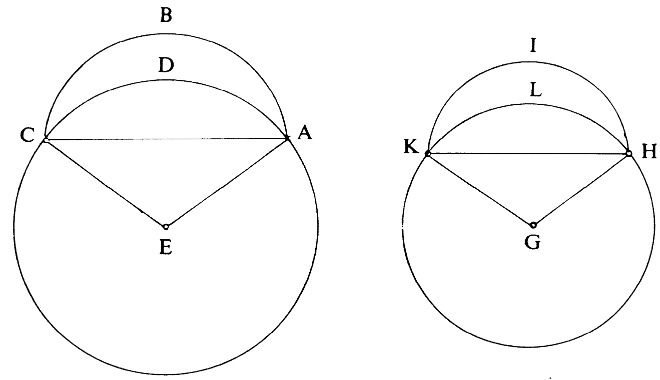
[١٠] انْظُرْ كِتابَ:

Th. Heath. *A History of Greek Mathematics*, 2 vol. (Oxford, 1921), vol. I, pp. 191-201 et O. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, 2e éd. (Munich, 1964), pp. 29-34.



شكل ١ – ٥

هَذا هُوَ المسارُ الَّذي اتَّبَعَهُ ابنُ الهَيْثَمِ في هَذا المُؤَلَّفِ الصَغيرِ، وتِلْكَ هِيَ نَتائِجُهُ الأساسيَّةُ.



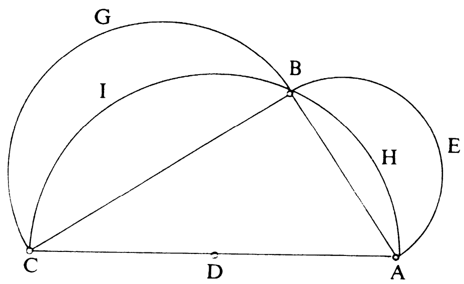
شكل ١ – ٤

١–١–٢ *مُؤَلَّف في تَرْبيعِ الدائِرَة*

لقد ذَكَرْنا أنّ هَذا المُؤَلَّفَ مُرْتَبِطٌ بسابِقِهِ، وذَلِكَ من خِلالِ تَسْليطِنا الضوءَ عَلَى غايَةِ ابنِ الهَيْثَمِ عِنْدَما باشَرَ بُحوثَهُ حَوْلَ الهِلالِيّاتِ. إذا ما كانَ عَديدُ

المَخْطوطاتِ مُؤَشِّراً عَلَى مَدَى انتِشارِ المُؤَلَّفِ، وإذا ما كانَ من الجائزِ الاستشهادُ بالنقاشاتِ الَّتِي أثارَها المُؤَلَّفُ كدليلٍ عَلَى مَدَى شَعْبِيَّتِهِ، فسيَكونُ عَمَلُ ابنِ الهَيْثَمِ هَذا، وبدون أيِّ تَعْليق، هُوَ الأكْثَرُ انْتِشاراً وشَعْبِيَّةً. وبالفِعْلِ، فإنّ ابنَ الهَيْثَمِ يَطْرَحُ في هَذا المُؤَلَّفِ مَسْأَلَةً تَقْليدِيَّةً وأساسِيَّةً: هل يُمْكِنُ تَرْبيعُ الدائِرَةِ بدِقَّةٍ؟

يَبْدَأ ابنُ الهَيْثَمِ بالتَذْكيرِ بنَتيجَتَيْنِ من المُؤَلَّفِ السابِقِ، وذَلِكَ بُغْيَةَ الإجابَةِ عَن هَذِهِ المَسْأَلَةِ، وهما القَضِيَّتان الأُولَى والثالِثَةُ، حَيْثُ يُورِدُ بُرْهاناً جَديداً للقَضِيَّةِ الثالِثَةِ (انْظُرِ الشَكْلَ ٢–١):



شكل ٢ – ١

$$\frac{cercle\ (BGC)}{cercle\ (ABE)} = \frac{BC^2}{BA^2},$$

وذَلِكَ استناداً إلى القَضِيَّةِ الثانِيَةِ من المَقالة الثانية عَشَرَة من ***أصول*** إقليدس،

$$\frac{cercle\ (BGC) + cercle\ (ABE)}{cercle\ (ABE)} = \frac{AC^2}{BA^2} = \frac{cercle\ (ABC)}{cercle\ (ABE)},$$

فإذاً

$$(1/2)\ cercle\ (ABC) = (1/2)\ cercle\ (BGC) + (1/2)\ cercle\ (ABE);$$

وبِطَرْحِ العِبارَةِ

$$sgm.(ABH) + sgm.(BCI)$$

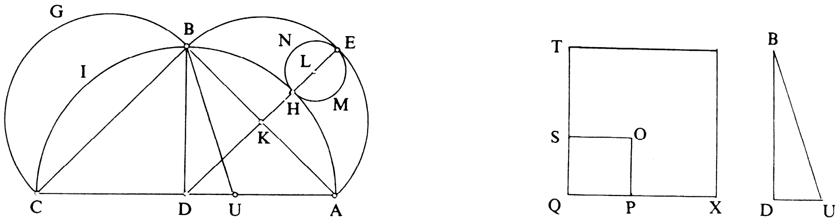
من كُلِّ طَرَفٍ من المُساواةِ، نَحْصُلُ عَلَى:

$$(1) \qquad L_1 + L_2 = lun.(AEBH) + lun.(BGCI) = tr.(ABC);$$

وإذا كانَت B مُنْتَصَفَ القَوْسِ ABC، فإنّ الهِلالَيْنِ يَكونانِ مُتَساوِيَيْنِ ونَسْتَنْتِجُ من العَلاقَةِ (1):

$$L_1 = tr.(ABD). \qquad (2)$$

ومن ثمّ يَأخُذُ ابنُ الهَيْثَمِ دائِرَةً ذاتَ قُطْرٍ HE، بحَيْثُ تَكونُ النُقْطَتانِ H وَ E مُنْتَصَفَيِ القَوْسَيْنِ AB اللّتَيْنِ تُحيطانِ بالهِلالِ $AEBH$ (انْظُرِ الشَكْلَ ٢–٢)، ويَدْرُسُ



شكل ٢ – ٢

نِسْبَةَ هَذِهِ الدائِرَةِ إلى هَذا الهِلالِ، وذَلِكَ بِهَدَفِ تَرْبيعِ الدائِرَةِ AC. فَيَلْحَظُ في البِدْءِ العَلاقَةَ

$$\text{cercle } (HE) < lun.(AEBH) = L_1,$$

ومن ثمّ يَسْتَدِلُّ كما يلي: الدائِرَةُ HE مَعْلومَةٌ وكذَلِكَ الهِلالُ L_1 مَعْلومٌ، فإذاً

$$\frac{\text{cercle } (HE)}{L_1} = k,$$

وهَذِهِ نِسْبَةٌ مَوْجودَةٌ "حَتّى وإن لم يَعْلَمْ أحدٌ تِلْكَ النِسْبَةَ"

لِنَأْخُذْ إذاً DU بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{DU}{DA} = k,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{tr.(BDU)}{tr.(BDA)} = \frac{DU}{DA} = k,$$

فإذاً

$$\frac{tr.(ABD)}{L_1} = \frac{tr.(BDU)}{\text{cercle } (HE)},$$

وإذا ما أخَذْنا العَلاقَةَ *(2)* بِعَيْنِ الاعتبارِ، سنَجِدُ

$$\text{cercle } (HE) = tr.(BDU),$$

ولَكِنَّنا نَعْرِفُ كَيْفِيَّةَ بِناءِ المُرَبَّعِ *carré(SPQO)* المُعادِلِ لِلمُثَلَّثِ *tr.(BDU)*، فإذاً

$$tr.(BDU) = carré\ (SQPO) = cercle\ (HE).$$

ومن ثمّ يُبْنَى مُرَبَّعٌ ذو ضِلْعٍ QX بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{QP}{QX} = \frac{EH}{AC}$$

وَ XT هُوَ المُرَبَّعُ المَبْنِيُّ عَلَى QX؛ فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{carré\ (XT)}{carré(QO)} = \frac{QX^2}{QP^2} = \frac{AC^2}{EH^2} = \frac{cercle\ (ABC)}{cercle\ (HE)};$$

ونَسْتَنْتِجُ أخيراً من المُساواةِ

$$cercle\ (HE) = carré\ (QO),$$

العَلاقَةَ

$$cercle\ (AC) = carré\ (XT).$$

من الواضِحِ أنّ اسْتِدْلالَ ابنِ الهَيْثَم بأكْمَلِهِ مَبْنِيٌّ عَلَى وُجودِ العَدَدِ k، الَّذي يُعَبِّرُ عن نِسْبَةِ مِساحَتَيْنِ مُسْتَوِيَتَيْن. فمِن وُجودِ k يُسْتَنْبَطُ وُجودُ القِطَعِ DU وَQP وَ QX، حَتَّى ولو كانَ بناؤها غَيْرَ مُمْكِنٍ إلاّ عِنْدَما يَكونُ المقدارُ k مَعْلوماً. ويُعْطينا هَذا الحِسابُ — الَّذي لم يُجْرِهِ ابنُ الهَيْثَمِ — المَقاديرَ التالِيَةَ:

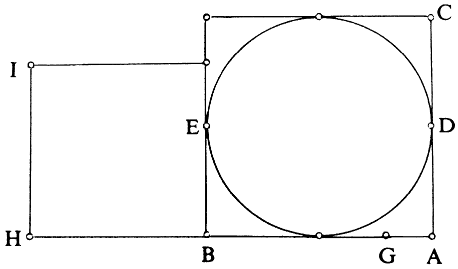
$$HE = R\ [\sqrt{2} - 1],\ cercle\ (HE) = \pi (R^2/4)(\sqrt{2} - 1)^2,\ k = \frac{\pi(\sqrt{2} - 1)^2}{2},$$

ويَكونُ ضِلْعُ المُرَبَّعِ المُعادِلِ للدائِرَةِ مُساوِياً لِ $R\sqrt{\pi}$، ونُلاحِظُ هنا مُباشرةً الخاصِيَّةَ الدائِرِيَّةَ لأنّ مَعْرِفَةَ k ومَعْرِفَةَ π مُترابِطَتانِ.

لقد قامَ بِشَرْحِ ونَقْدِ نَصّ ابنِ الهَيْثَمِ هَذا رِياضِيّان عَلَى الأقَلِّ، وهما: نصيرُ الدينِ الطوسيُّ إضافةً إلى رِياضِيٍّ آخَرَ قد يَكونُ، وَفْقَ العِبارَةِ الخِتامِيَّةِ، عَلِيّاً بنَ رضوان أو السُمَيْساطيَّ.

أما النَقْدُ الأوّلُ أي نقدُ الطوسيِّ، فَيُرَكِّزُ عَلَى طولِ النَصِّ ويَقْتَرِحُ طَريقَةً أُخْرَى.

لِنَأْخُذْ دائِرَةً ذاتَ قُطْرٍ *DE* مُحاطَةً بالْمُرَبَّعِ *carré(BC)* ذي الضِلْعِ *AB* [انْظُرِ



شكل ٢ – ٣

الشَكْلَ ٢–٣]. والدائِرَةُ هنا جُزْءٌ من الْمُرَبَّع، فإذاً نِسْبَتُهُما مَوْجودَةٌ:

$$\frac{carré\ (BC)}{cercle\ (DE)} = k,$$

(لَدَيْنا $k = 4/\pi$).

لِنَأْخُذْ *BG* بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{AB}{BG} = k$$

وَ *BH* بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{AB}{BH} = \frac{BH}{BG},$$

فيَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{AB^2}{BH^2} = \frac{AB}{BG} = k,$$

ولذَلِكَ يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{carré\ (BC)}{carré\ (BI)} = k,$$

وبالتالي، فإنّ

$$cercle\ (DE) = carré\ (BI).$$

لا يُضيفُ شرحُ الطوسيّ إذاً شَيْئاً أساسِيّاً عَلَى مُؤَلَّفِ ابنِ الهَيْثَم. إذ يَرْتَكِزُ اسْتِدْلالُهُ هُوَ أيضاً عَلَى وُجودِ العَدَدِ *k*، أي عَلَى نِسْبَةِ المِساحَتَيْنِ المستوِيَتَيْن. فمِن

وُجودِ k يُسْتَنْبَطُ وُجودُ القِطْعَتَيْنِ BG وَ BH، وبالتالي يُسْتَنْبَطُ وُجودُ الْمُرَبَّعِ *carré (BI)*.

أمّا الاعْتِراضُ الثاني، الَّذي يَعودُ إلى عَلِيٍّ بنِ رضوان أو إلى السُمَيْساطيِّ، فهُوَ أَكْثَرُ أهَمِيَّةً من اعْتِراضِ الطوسِيِّ، إذ إنّهُ يُلامِسُ جَوْهَرَ مُساهَمَةِ ابنِ الهَيْثَمِ. وهُوَ يَتَعَلَّقُ بِفَلْسَفَةِ الرياضِيّاتِ، حَيْثُ يُرادُ مِنْهُ قَوْلُ ما يلي: إنّ بُرْهانَ وُجودِ الكائِنِ الرياضِيِّ لا يَحُلُّ مَسْأَلَةَ فَعالِيَّةِ البِناءِ الَّتي تَرْتَبِطُ بِها مَعْرِفَتُنا بالخاصِيَّةِ المَطْروحَةِ.

١–١–٣ مُؤَلَّفُ: *مَقالَةٌ مُسْتَقْصاةٌ في الأشْكالِ الهِلالِيّةِ*

يُشيرُ ابنُ الهَيْثَمِ إلى أنّ هَذِهِ المَقالَةَ قد صِيغَت بَعْدَ المُؤَلَّفِ الأوّلِ بِفَتْرَةٍ طَويلَةٍ، وهِيَ تَختَلِفُ عَنْهُ بكَثيرٍ من النقاطِ. ويَصِفُها ابنُ الهَيْثَمِ بِ *"المُسْتَقْصاة"* في حين يَنْعَتُ المُؤَلَّفَ الأوّلَ *"بالقَوْلِ المُخْتَصَر"*. فقد أُلِّفَتْ هَذِهِ المَقالَةُ بِطَرائقَ يَقينيَّةٍ مُرْتَبِطَةٍ بالضَرورَةِ المَنْطِقِيَّةِ، بَيْنَما وُضِعَ المُؤَلَّفُ الأوّلُ " بطَرائقَ جُزْئِيَّةٍ". وبالتالي، فالهَدَفُ من كِتابَةِ ***المَقالَةِ المُسْتَقْصاة*** هُوَ أن تَحُلَّ مَكانَ المُؤَلَّفِ الأوّلِ، وأن تُجَدِّدَ البَحْثَ في مَسْأَلَةِ الهِلالِ. وتَتَوَضَّحُ، إذاً، مُهِمَّتُنا ها هنا، وهِيَ: نَقْلُ هَذا الكِتابِ وتَتَبُّعُ مَفاصِلِهِ ومُنْعَطَفاتِهِ، وتَلَمُّسُ ما يُؤَمِّنَ وَحْدَتَهُ، والتَوَقُّفُ عِنْدَ النِقاطِ الصَعْبَةِ الَّتي كانَت حَجَرَ عَثْرَةٍ لَدَى كِتابَتِهِ.

لِنُلاحِظْ مُسْبَقاً، أنّهُ في المُؤَلَّفِ الأوّلِ، يَرْتَبِطُ الهِلالانِ L_1 وَ L_2، اللّذانِ يَتَناوَلُهُما الكاتِبُ، بأنْصافِ الدَوائِرِ الثلاثَةِ (ABC، AEB، BGC). ويُعاوِدُ ابنُ الهَيْثَمِ، في هَذا المُؤَلَّفِ الثاني، الدِراسَةَ لِيُعَمِّمَ نَتائِجَ القَضايا ١ وَ ٢ وَ ٣ عَبْرَ تَوْسيعِ الفَرَضِيَّةِ لِتَطالَ أيَّ قَوْسَيْنِ AB وَ BC، شَرْطَ ألاّ يَتَعَدّى مَجْموعُهُما نِصْفَ مُحيطِ الدائِرَةِ.

وفي كافَّةِ الحالاتِ تَكونُ الأقْواسُ الَّتي تُحَدِّدُ الهِلالَيْنِ L_1 وَ L_2 مُتَشابِهةً وقَوْسَ نصْفِ الدائِرَةِ (ABC). والمُثَلَّثاتُ (ABC) الَّتي يَجْري تَناولُها، تَكونُ زاوِيَتُها B إمّا أكْبَرَ من زاوِيَةٍ قائمَةٍ أو مُساوِيَةً لها.

ويُظهِرُ حِسابُ مِساحَاتِ الأهِلَّةِ مَجاميعَ أو فَوارِقَ مِساحَاتٍ لقِطاعاتٍ دائِريَّةٍ أو مُثَلَّثاتٍ، بحَيْثُ تُفْضي مُقارَنَتُها فيما بَيْنَها، إلى مُقارَنَةِ نِسَبٍ بَيْنَ زَوايا ونِسَبٍ بَيْنَ قِطَعٍ.

يَبْدَأ ابنُ الهَيْثَمِ بإثْباتِ أربعِ مُقَدِّمَاتٍ، وذَلِكَ انْطِلاقاً من المُثَلَّثاتِ ABC الَّتي تَسْتَلْزِمُها الدِراسَةُ الَّتي أرادَ ابنُ الهَيْثَمِ إنْجازَها، أي أنّ المُثَلَّثَ ABC قائِمُ الزاوِيَةِ B، في المُقَدِّمَةِ الأُولَى، أو أنّهُ ذو زاوِيَةٍ B مُنْفَرِجَةٍ في المُقَدِّمَاتِ ٢، ٣، ٤. ويُثْبِتُ ابنُ الهَيْثَمِ عَلاقاتِ تَبايُنٍ بَيْنَ نسَبٍ لِزَوايا ونِسَبٍ لقِطَعٍ، وذَلِكَ في كُلِّ الأمْكِنَةِ، ولِكُلِّ حالَةٍ لِمُثَلَّثَيْنِ مُتَشابِهَيْنِ والمُثَلَّثَ الأوّلَ. وتُبْرِزُ نَتائِجُ هَذِهِ المُقَدِّماتِ، الَّتي يَسْتَعْمِلُها ابنُ الهَيْثَمِ في القَضِيَّتَيْنِ ٩ وَ ١٢، دورَ الدالَّةِ f المُعَرَّفَةِ بالعَلاقَةِ

$$f(x) = \frac{sin^2 x}{x}$$

في دِراسَةِ الأهِلَّةِ.

لِنَسْتَعْرِضِ الآن بِشَكْلٍ مُفَصَّلٍ هَذا المسار الَّذي أوْرَدْنا عَنْهُ لَمْحَةً عامَّةً، فَلْنَبْدَأْ بِالمُقَدِّماتِ الأربعِ السابِقَةِ الذِكْرِ.

مُقَدِّمَة ١ .— إذا كانَ

$$A\hat{B}C = \pi/2, BA < BC$$

وَ

$$BD \perp AC,$$

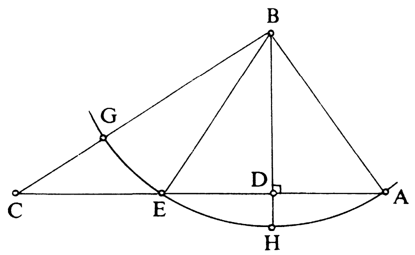
فإنّ

$$\frac{DA}{AC} < \frac{A\hat{C}B}{\pi/2}$$

وَ

$$\frac{DC}{AC} > \frac{B\hat{A}C}{\pi/2}.$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣-١]



شكل ٣ – ١

بما أنّ $BA < BC$، فلَدَيْنا $DA < DC$ والدائِرَةُ (B, BA) تَقْطَعُ $[DC]$ عَلَى نُقْطَةٍ E، كما تَقْطَعُ $[BC]$ عَلَى نُقْطَةٍ G. ويَقْطَعُ نِصْفُ المُسْتَقيمِ BD الدائِرَةَ عَلَى نُقْطَةٍ H أبْعَدَ من D.

لَدَيْنا

$$\frac{tr.(BCE)}{tr.(BDE)} > \frac{sect.(BEG)}{sect.(BEH)},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{tr.(BCD)}{tr.(BDE)} > \frac{sect.(BHG)}{sect.(BEH)} = \frac{C\hat{B}D}{E\hat{B}D},$$

فإذاً

$$\frac{CD}{ED} = \frac{CD}{DA} > \frac{C\hat{B}D}{D\hat{B}A} \qquad (1)$$

لأنّ

$ED = DA$ وَ $E\hat{B}D = D\hat{B}A$،

ونَجِدُ

$$\frac{CD + DA}{DA} > \frac{C\hat{B}A}{D\hat{B}A}.$$

ولَكِنَّ

$$D\hat{B}A = A\hat{C}B,$$

وَ

$$C\hat{B}A = \pi/2.$$

فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{DA}{AC} < \frac{A\hat{C}B}{\pi/2}.$$

وأيضاً فمن (*1*) نَستَنبِطُ

$$\frac{CD}{DA + CD} > \frac{C\hat{B}D}{D\hat{B}A + C\hat{B}D};$$

ولَكِنَّ

$$C\hat{B}D = B\hat{A}C,$$

فنَحْصُلُ عَلَى

$$\frac{CD}{AC} > \frac{B\hat{A}C}{\pi/2}.$$

مُلاحَظات

١)

$$\frac{DA}{AC} = \frac{DA}{AB}.\frac{AB}{AC} = sin^2 C\ ,$$

وَ

$$\frac{DC}{AC} = sin^2 A.$$

يُفْضي البُرْهانُ السابِقُ، إذاً، إلى النَتيجَةِ التالِيَةِ:

إذا كانَت

$$0 < C < \pi/4 < A < \pi/2,$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{sin^2 C}{C} < 2/\pi < \frac{sin^2 A}{A}.$$

وإذا كانَ

$$A = C = \pi/4,$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{sin^2 A}{A} = \frac{sin^2 C}{C} = 2/\pi.$$

ففي حالِ اعْتَمَدْنا الراديان كوحدةٍ للقياسِ، تُكْتَبُ هَذِهِ المُقَدِّمَةُ، عَلَى هَذا النَحْوِ المُبَيَّنِ أعلاه.

٢) تَسْمَحُ الطَرِيقَةُ المُطَبَّقَةُ في بُرْهانِ هَذِهِ المُقَدِّمَةِ بإثْباتِ التَضَمُّنَ التالي:

$$\alpha < \beta < \pi/2 \Rightarrow \frac{tg\beta}{tg\alpha} > \frac{\beta}{\alpha},$$

وذَلِكَ لأن الفَرَضِيَّةَ

$$A\hat{B}C = \alpha + \beta = \pi/2,$$

لم تُسْتَخْدَمْ في إثْباتِ العَلاقَةِ (*1*)، بل استُعمِلَت فَقَط الفَرَضِيَّةُ

$$\alpha < \beta < \pi/2.$$

وتُمَكِّنُنا طَرِيقَةٌ مُشابِهَةٌ تماماً من إثْباتِ التَضَمُّنِ التالي:

$$\alpha < \beta < \pi/2 \Rightarrow \frac{sin\beta}{sin\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}.$$

لِنَأْخُذْ

$$x\hat{O}y = \alpha, x\hat{O}z = \beta,$$

حَيْثُ

$$\beta > \alpha.$$

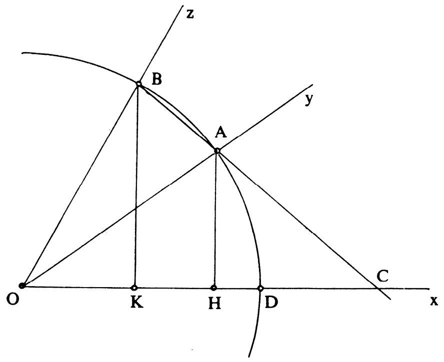
ولِنَأْخُذِ دائِرَةً مُمَرْكَزَةً في النُقْطَةِ O، ولْتَقْطَعْ Oy عَلَى النُقْطَةِ A، وَ Oz عَلَى النُقْطَةِ B، وَ Ox عَلَى النُقْطَةِ D؛ ولْيَقْطَعِ المُسْتَقيمُ BA الخَطَّ Ox عَلَى النُقْطَةِ C. فيَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{tr.(AOB)}{tr.(AOC)} < \frac{sect(AOB)}{sect(AOD)},$$

ومن هنا نَسْتَنْبِطُ

$$\frac{tr.(BOC)}{tr.(AOC)} < \frac{sect(BOD)}{sect(AOD)}.$$

وبما أنّ للمُثَلَّثَيْنِ قاعِدَةً مُشْتَرَكَةً، يَكونُ لَدَيْنا إذاً



$$\frac{tr.(BOC)}{tr.(AOC)} = \frac{BK}{AH} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}$$

أو

$$\frac{\sin\beta}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

فإذاً الدالَّةُ $\frac{\sin x}{x}$ تَناقُصِيَّةٌ عَلَى الفَتْرَةِ $]0, \pi/2[$

مُقَدِّمَة ٢.— إذا كانَ

$$A\hat{B}C > \pi/2, AB < BC$$

وَ

$$B\hat{D}A = A\hat{B}C,$$

فإنّ

$$\frac{DA}{AC} < \frac{A\hat{C}B}{\pi - A\hat{B}C}$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٢).

لِنَأْخُذِ النُقْطَةَ E بحَيْثُ يَكونُ

$$B\hat{E}C = B\hat{D}A = A\hat{B}C,$$

يَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$BE = BD$$

وَ

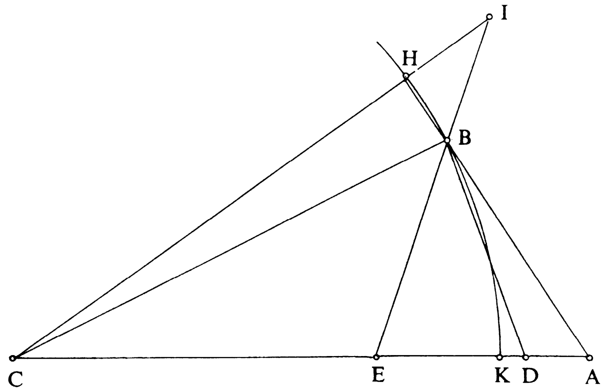
$$\frac{DA}{DB} = \frac{AB}{BC} = \frac{EB}{EC},$$

(لأنّ ADB وَ ABC وَ BEC مُثَلَّثاتٌ مُتَشابِهَةٌ)

ولذَلِكَ، فإنّ

$$DA \,.\, EC = BD \,.\, BE = BD^2.$$

ولَكِنَّ



شكل ٣ – ٢

$$DA < DB, \quad DB = BE$$

وَ

$$EB < EC,$$

فإذاً

$$DA < EC.$$

ومِن جِهَةٍ أُخْرَى

$$DA \,.\, DC < (AC/2)^2,$$

فإذاً[١١]

$$DA \,.\, EC < (AC/2)^2,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$BD^2 < (AC/2)^2$$

[١١] إذا كانَت النُقْطَةُ O مُنَصِّفَةً لِ $[AC]$، فلَدَيْنا $DA \,.\, DC = OA^2 - OD^2$، فإذاً $DA \,.\, DC < OA^2$.

أو

$$BD < AC/2$$

ومن المَعْلومِ أنّ $EB < EC$، فَلْتَكُنِ النُقْطَةُ I بَعْدَ النُقْطَةِ B بَحَيْثُ يَكونُ $EI = EC$، فيَكونُ لَدَيْنا $CI > CB > CE$، ولذَلِكَ فإن الدائِرَة (C, CB) تَقْطَعُ CI عَلَى نُقْطَةٍ H بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ C وَ I، كما أنّها تَقْطَعُ CE عَلَى نُقْطَةٍ K، أبْعَدَ من E. إذا بَنَيْنا اسْتِدْلالَنا كما في المُقَدِّمَةِ ١، عَلَى القِطاعَيْنِ الدائِرِيَّيْنِ HCB وَ BCK وعَلَى المُثَلَّثَيْنِ ICB وَ BCE، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{sect.(HCB)}{sect.(BCK)} = \frac{I\hat{C}B}{B\hat{C}E} < \frac{tr.(ICB)}{tr.(BCE)};$$

وبالتَرْكيب نَحْصُلُ عَلَى

$$\frac{I\hat{C}B + B\hat{C}E}{B\hat{C}E} < \frac{tr.(ICB) + tr.(BCE)}{tr.(BCE)},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{I\hat{C}E}{B\hat{C}E} < \frac{tr.(ICE)}{tr.(BCE)} = \frac{EI}{EB}$$

أو

$$\frac{EB}{EI} < \frac{B\hat{C}E}{I\hat{C}E}.$$

ولَكِنَّ

$$IE = EC$$

وَ

$$I\hat{C}E = ½\, B\hat{E}A = ½\, (\pi - A\hat{B}C)$$

وَ

$$\frac{EB}{EC} = \frac{DA}{DB},$$

فإذاً

$$\frac{DA}{DB} < \frac{A\hat{C}B}{\frac{1}{2}(\pi - A\hat{B}C)}.$$

ولَكِنّنا بَيَّنا أن

$$DB < AC/2,$$

فإذاً

$$\frac{DA}{AC} < \frac{A\hat{C}B}{\pi - A\hat{B}C}.$$

مُلاحَظَة. – لَدَيْنا

$$\frac{DA}{AC} = \frac{DA}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 B}.$$

وتُكْتَبُ المُقَدِّمَةُ ٢ إذاً بِصيغَةِ التَضَمُّنِ التالي:

$$(B > \pi/2 \text{ وَ } C < \pi/4) \Rightarrow \frac{\sin^2 C}{\sin^2 B} < \frac{C}{\pi - B}.$$

لِنَفرِضْ

$$B_1 = \pi - B,$$

لَدَيْنا $B_1 > C$ وَ $\sin^2 B = \sin^2 B_1$

(لأنّ $B_1 = A + C$)، فإذاً

$$(C < B_1 < \pi/2 \text{ وَ } C < \pi/4) \Rightarrow \frac{\sin^2 C}{C} < \frac{\sin^2 B_1}{B_1}.$$

مُقَدِّمَة ٣.– إذاكانَت الزاوِيَةُ $A\hat{B}C$ مُنْفَرِجَةً

وَ

$$AB < BC, B\hat{A}C \leq \pi/4,$$

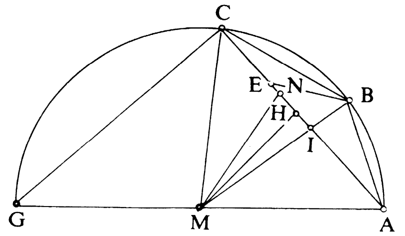
فإنّ

$$\frac{EC}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

(النُقْطَةُ E مَوْجودَةٌ عَلَى AC بحَيْثُ يَكونُ $B\hat{E}C = A\hat{B}C$).

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٣ والشَكْلَ اللاّحِقَ أدناه).

لِتَكُنِ النُقْطَةُ M مَرْكَزَ الدائِرَةِ المُحيطَةِ، وَلِتَكُنْ G النُقْطَةَ المُقابلَة قُطْرِيّاً للنُقْطَةِ A، وَلْتُبْنَ النُقْطَةُ E كما بُنِيَت في المُقَدِّمَةِ ٢، فإذاً يَكونُ المُثَلَّثُ BEC



شكل ٣ – ٣

مُتَشابهاً والمُثَلَّثَ ABC. ولْيَقْطَعِ المُسْتَقيمُ BM المُسْتَقيمَ AC عَلَى النُقْطَةِ I. ولْتَكُنِ النُقْطَةُ H عَلَى AC بحَيْثُ يَكونُ $MH \perp AC$، فتَكونُ النُقْطَةُ H مُنْتَصَفَ AC. ولْتَقْطَعِ الدائِرَةُ (M, MI) المُسْتَقيمَ AC عَلَى النُقْطَةِ N. وبما أنّ الزاوِيَةَ $A\hat{B}C$ مُنْفَرِجَةٌ، فلَدَيْنا

$$\widehat{ABC} < ½ \text{ cercle}.$$

أ) إذا كانَ

$$\widehat{ABC} \leq ¼ \text{ cercle},$$

فإنّ

$$A\hat{M}C \leq \pi/2,\ M\hat{A}C = M\hat{C}A \geq \pi/4,\ A\hat{G}C \leq \pi/4,$$

فإذاً

$$A\hat{G}C \leq M\hat{A}C.$$

ولَكِنَّ

$$M\hat{I}C > M\hat{A}C \geq \pi/4,$$

فإذاً

$$M\hat{I}C > A\hat{G}C$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$B\hat{I}C < A\hat{B}C.$$

ولَكِن وَفْقَ البِناءِ، لَدَيْنا

$$B\hat{E}C = A\hat{B}C,$$

فإذاً

$$B\hat{E}C > B\hat{I}C$$

ولذَلِكَ فإنّ النُقْطَةَ E تَكونُ بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ I وَ C.

يَكْتُبُ ابنُ الهَيْثَمِ "تَبَيَّنَ أنّ نِسْبَةَ **ج؟ح** إلى **ح؟ن** – المُساوِي لِ **ح؟ط** – أعْظَمُ من نِسْبَةِ زاوِيَةِ **ج؟م؟ح** إلى زاوِيَةِ **ح؟م؟ن** – المُساوِيَةِ لزاوِيَةِ **ح؟م؟ط**. فنِسْبَةُ **ج؟ح** إلى **ح؟ط** أعْظَمُ من نِسْبَةِ زاوِيَةِ **ج؟م؟ح** إلى زاوِيَةِ **ح؟م؟ط**".

يُمْكِنُ إثْباتُ هَذِهِ النَتيجَةِ كما في المُقَدِّمَةِ ١، انْطِلاقاً من المُثَلَّثَيْنِ *MHN* وَ *CMN* ومن قِطاعاتٍ مُحَدَّدَةٍ بواسِطَةِ الدائِرَةِ *(M, MI)*. ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ العَلاقَةَ

$$\frac{CH}{HI} > \frac{C\hat{M}H}{H\hat{M}I},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{IC}{CH} < \frac{I\hat{M}C}{H\hat{M}C}$$

وَ

$$\frac{IC}{CA} < \frac{B\hat{M}C}{C\hat{M}A}.$$

ولَكِنَّ

$$B\hat{M}C = 2.B\hat{A}C$$

وَ

$$C\hat{M}A = 2(\pi - A\hat{B}C),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{IC}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C};$$

ما يَسْتَتْبِعُ العَلاقَةَ

$$\frac{EC}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

ب) إذا كانَ

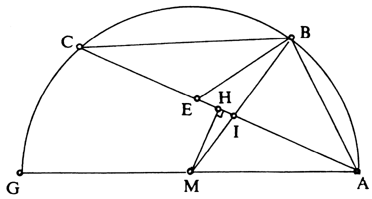
$$\widehat{ABC} > ¼ \text{ cercle},$$

فإنّ

$$A\hat{M}C > \pi/2.$$

ولَكِنّ $B\hat{A}C \leq \pi/4$، فإذاً

$$\widehat{BC} \leq ¼ \text{ cercle}.$$



• إذا كانَ

$$\widehat{BC} = ¼ \text{ cercle},$$

فإنّ

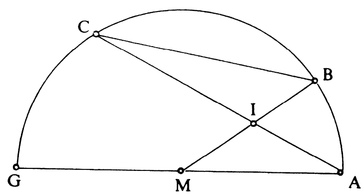
$$B\hat{M}C = \pi/2.$$

وَ

$$M\hat{B}C = B\hat{A}C = \pi/4,$$

فإذاً

$$B\hat{I}C = A\hat{B}C,$$



فإذاً، النُقْطَتانِ I وَ E مُتَطابِقَتانِ. ويُستَدَلُّ مِثْلَما استُدِلَّ في القِسْمِ الأوّلِ.

• إذا كانَ

$$\widehat{BC} < ¼ \text{ cercle},$$

فإذاً

$$B\hat{M}C < \pi/2.$$

وَ

$$M\hat{B}C > \pi/4.$$

فإذاً

$$M\hat{B}C > B\hat{A}C,$$

إلاّ أنّ

$$C\hat{B}E = B\hat{A}C;$$

فإذاً

$$C\hat{B}E < C\hat{B}M$$

وبالتالي فإنّ النُقْطَةَ E هِيَ بَيْنَ I وَ C،كما أنّ النُقْطَةَ H هِيَ في كُلِّ الحالاتِ بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ I وَ C. ونَسْتَدِلُّ عَلَى النَتيجَةِ عَلَى نَفْسِ النَسَقِ السابِقِ.

فإذاً، إذا كانَتِ الزاوِيَةُ $A\hat{B}C$ مُنْفَرِجَةً وَ $AB < BC$ وَ $B\hat{A}C \le \pi/4$، فإنّ

$$\frac{EC}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

مُلاحَظَة.– إنّ النَتيجَةَ المُثْبَتَةَ في المُقَدِّمَةِ ٢ للزاوِيَةِ $\hat{C}$، أي للزاوِيَةِ الصُغْرَى من الزاوِيَتَيْنِ الحادّتَيْنِ، تَكونُ كذَلِكَ صَحيحَةً للزاوِيَةِ $\hat{A}$ إذا كانَت $\hat{A} \le \pi/4$. وتُكْتَبُ هَذِهِ النَتيجَةُ كما يلي:

$$\frac{\sin^2 A}{A} < \frac{\sin^2 B}{\pi - B}$$

أو

$$\frac{\sin^2 A}{A} < \frac{\sin^2 B_1}{B_1}$$

(لأنّ $B_1 > A$).

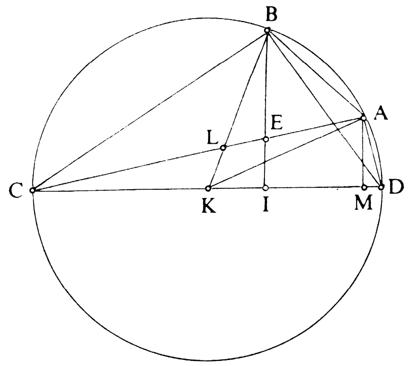
مُقَدِّمَة ٤.–

لِنَأْخُذْ $A\hat{B}C$ مُنْفَرِجَةً وَ $AB < BC$ وَ $B\hat{A}C > \pi/4$، وَلْتَكُنِ النُقْطَةُ E مَأخوذَةً بحَيْثُ يَكونُ $B\hat{E}C = A\hat{B}C$. فَتَحْتَ أيِّ شرطٍ سَتَتَحَقَّقُ العَلاقَةُ

$$\frac{EC}{CA} > \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}?$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣-٤]

لِنَأْخُذْ دائِرَةً قُطْرُها CD ومَرْكَزُها K، ولْتَكُنْ I نُقْطَةً عَلَى القِطْعَةِ KD.



شكل ٣ – ٤

وَلْيَقْطَعِ العَمودُ القائِمُ عَلَى النُقْطَةِ I من القِطْعَةِ KD الدائِرَةَ عَلَى النُقْطَةِ B، ولَدَيْنا القَوْسُ $\widehat{BC}$ أكْبَرَ من رُبْعِ مُحيطِ الدائِرَةِ، ولذَلِكَ فإنّ

$$B\hat{A}C > \pi/4.$$

وبالعَكْسِ، إذا كانَ

$$B\hat{A}C > \pi/4.$$

فإنّ النُقْطَةَ I المُسْقَطَةَ من النُقْطَةِ B عَلَى القُطْرِ CD، تَقَعُ ما بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ K وَD.

ووَفْقَ المُقَدِّمَةِ ١، يَكونُ لَدَيْنا في المُثَلَّثِ القائِمِ الزاوِيَةِ BDC:

$$\frac{IC}{CD} > \frac{B\hat{D}C}{\pi/2},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{IC}{CD} > \frac{B\hat{K}C}{\pi} = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{CBD}}.$$

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{ID}{IC} < \frac{\widehat{BD}}{\widehat{BC}}.$$

يُوجَدُ إذاً جُزْءٌ $\widehat{AB}$ من $\widehat{DB}$ بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{ID}{IC} = \frac{\widehat{BA}}{\widehat{BC}}.$$

لِتَكُنْ M مَسْقَطَ النُقْطَةِ A عَلَى DC ، فالنُقْطَةُ M بَيْنَ I وَ D ، وَلْتَكُنْ E نُقْطَةَ تَقاطُعِ[١٢] CA وَ BI، لَدَيْنا

$$D\hat{A}C = C\hat{I}E = \pi/2,$$

فإذاً

$$A\hat{D}C = I\hat{E}C = \pi - A\hat{B}C$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$B\hat{E}C = A\hat{B}C.$$

لَدَيْنا مِن جِهَةٍ أُخْرَى

$$\frac{CI}{IM} = \frac{CE}{EA} > \frac{CI}{ID} = \frac{\widehat{BC}}{\widehat{BA}},$$

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{EC}{CA} > \frac{\widehat{BC}}{\widehat{CBA}}.$$

لَكِنَّ

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{CBA}} = \frac{B\hat{K}C}{C\hat{K}A} = \frac{B\hat{A}C}{A\hat{D}C} = \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C},$$

فلَدَيْنا إذاً

$$\frac{EC}{CA} > \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C},$$

ولقد جَرَى الاسْتِدْلالُ عَلَى النُقْطَةِ A المُحَدَّدَةِ بِواسِطَةِ العَلاقَةِ

$$\frac{\widehat{BA}}{\widehat{BC}} = \frac{ID}{IC}.$$

إذا ما اخْتَرْنا نُقْطَةً أُخْرَى A' بَيْنَ A وَ D، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{CI}{ID} > \frac{\widehat{BC}}{\widehat{BA'}}.$$

وتُقابِلُ النُقْطَةَ A' النُقْطَةُ E' عَلَى BI ويَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{E'C}{E'A'} > \frac{CI}{ID},$$

[١٢] لِنُلاحِظْ أنّه إذا رَمَزْنا بِـ L إلى تَقاطُعِ BK وَ CA ، فَسَتَكونُ L بَيْنَ C وَ E؛ وتَبْقَى هَذِهِ المُلاحَظَــةُ قائِمَةً أيضاً بالنِسْبَةِ إلى القَضِيَّةِ ١٢ (انْظُرْ ص ١٢٠–١٢٧).

فإذاً

$$\frac{E'C}{E'A'} > \frac{\widehat{BC}}{\widehat{BA'}} \ ,$$

ونَحْصُلُ بِنَفْسِ الطَريقَةِ عَلَى العَلاقَةِ

$$\frac{E'C}{E'A'} > \frac{B\hat{A}'C}{\pi - A'\hat{B}C} \ .$$

وباختِصارٍ– إذا ما تَبَنَّيْنا الفَرَضِياتِ التالِيَةَ: الزاوِيَةُ $A\hat{B}C$ مُنْفَرِجَةٌ، وَ

$$\widehat{AB} < \widehat{BC},\ B\hat{A}C > \frac{\pi}{4},$$

وَالنُقْطَةُ E مَوْجودةٌ عَلَى BC بحَيْثُ يَكونُ

$$B\hat{E}C = A\hat{B}C$$

وإذا أضَفْنا الشَرْطَ التالي: المَسْقَطُ العَمودِيُّ I للنُقْطَةِ B عَلَى القُطْرِ CD للدائِرَةِ المُحيطَةِ بِ ABC، يُحَقِّقُ العَلاقَةَ:

$$\frac{ID}{IC} \leq \frac{\widehat{BA}}{\widehat{BC}},$$

فسيَكونُ[13] لَدَيْنا

$$\frac{EC}{CA} > \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

مُلاحَظَة ١.– يُمْكِنُ إذاً صياغَةُ النَتيجَةِ المُثْبَتَةِ في المُقَدِّمَةِ ٤ بِالشَكْلِ التالي:

إذا أخَذْنا $A < \pi/4$، فمن المُمْكِنِ إيجادُ زاوِيَةٍ B_0 (مُتَعَلِّقَةٍ إذّاً بالزاوِيَةِ A)، بحَيْثُ يَتَحَقَّقُ التَضَمُّنُ التالي:

$$B_1 \geq B_0 \Rightarrow \frac{\sin^2 A}{A} > \frac{\sin^2 B_1}{B_1} \ .$$

---

[13] يَكونُ الشَرْطُ المَفْروضُ إذاً كافياً لتَحْقيقِ العَلاقَةِ $\frac{EC}{CA} > \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}$. ولَكِنَّهُ غَيْرُ ضَروريٍّ لِذَلِكَ (انْظُرِ الصَفَحات ١٢٠ – ١٢٧).

مُلاحَظَة ٢.– لكي نَفْهَمَ المَنْحَى الَّذي اتَّبَعَهُ ابنُ الهَيْثَمِ، يَنْبَغي لنا أن نَدْرُسَ العَلاقَةَ:

$$\frac{CE}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C} \qquad (1)$$

لِنَجْعَلْ

$$C\hat{D}A = \alpha,\ C\hat{D}B = \beta = B\hat{A}C,\ \beta < \alpha < \pi/2$$

فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\widehat{CA} = 2\alpha,\ \ \widehat{CB} = 2\beta,\ \ \widehat{AB} = 2(\alpha - \beta),\ \ \widehat{BC} > \widehat{AB} \Leftrightarrow 2\beta > \alpha$$

في المُقَدِّمَةِ ٣، نَفْتَرِضُ أنّ القَوْسَ BC لا تَتَعَدَّى رُبْعَ مُحيطِ الدائِرَةِ، أي أنّ $\beta \leq \pi/4$ ، ولذَلِكَ فإنّ α يَجِبُ أن تُحَقِّقَ العَلاقَةَ $\beta < \alpha < 2\beta$.

في المُقَدِّمَةِ ٤ نَفْتَرِضُ أنّ القَوْسَ $\widehat{BC}$ أكْبَرُ من رُبْعِ مُحيطِ الدائِرَةِ، أي أنّ $\beta > \pi/4$، ولذَلِكَ فإنّه سيَكونُ لَدَيْنا $\beta < \alpha < \pi/2$. ولقد رأَيْنا أنّ

$$(1) \Leftrightarrow \frac{CI}{CM} < \frac{\widehat{BC}}{\widehat{AC}} \qquad (2).$$

ولَكِنَّ

$$CI = CB \sin \beta = CD \sin^2 \beta$$
$$CM = CA \sin \alpha = CD \sin^2 \alpha.$$

فيُصبحُ الشَرْطُ (2):

$$\frac{\sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} < \frac{\beta}{\alpha},$$

أي أنّ

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha} > \frac{\sin^2 \beta}{\beta}.$$

لِنَجْعَلْ

$$f(\alpha) = \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha},\ 0 < \alpha < \pi/2.$$

$$f'(\alpha) = \frac{2\alpha\ \sin\alpha\ \cos\alpha - \sin^2\alpha}{\alpha^2} = \frac{\sin\alpha\ \cos\alpha}{\alpha}(2 - \frac{tg\alpha}{\alpha}).$$

تَتزايَدُ الدالَّةُ $\frac{tg\alpha}{\alpha}$ عَلَى الفَتْرَةِ $]0\ ,\ \pi/2[$ من 1 إلى $+\infty$، فإذاً يُوجَدُ مِقْدارٌ وَحيدٌ α_0 بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{tg\alpha_0}{\alpha_0} = 2.$$

• إذا أخَذْنا

$$\alpha = 60^\circ = \pi/3$$

نَجِدُ

$$\frac{tg\alpha}{\alpha} \cong 1,66,$$

وإذا أخَذْنا

$$\alpha = 70^\circ = 7\pi/18,$$

نَجِدُ

$$\frac{tg\alpha}{\alpha} \cong 2,18,$$

فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\alpha_0 \cong 70^\circ = 7\pi/18 \cong 1,22rd,$$

وبِشَكْلٍ أدقّ

$$\alpha_1 = 1,16556119\ rd,$$

أي ما يُعادِلُ

$$66^\circ 46' 54''.$$

ويَكونُ للدالَّةِ f إذاً نِهايَةٌ عُظْمَى سَنُشيرُ إلَيْها بِحَرْفِ M.

• إذا أخَذْنا $\alpha = \alpha_0$، فيَكونُ لَدَيْنا $M \cong 0,72$، وإذا أخَذْنا $\alpha = \alpha_1$ فيَكونُ لَدَيْنا $M = 0,724611354$.

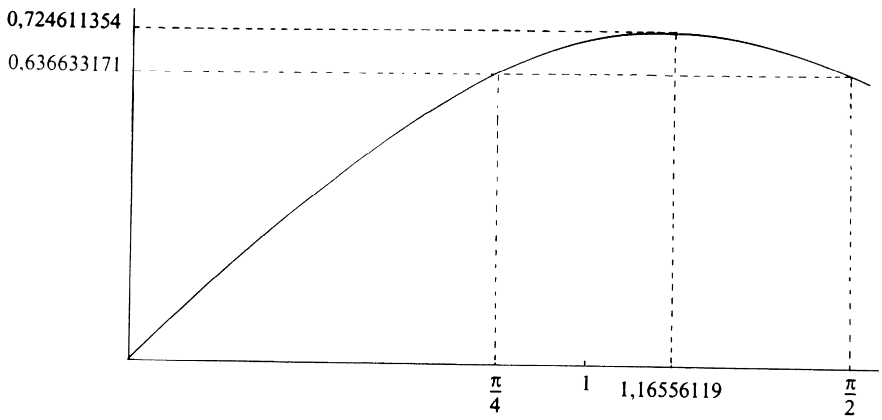
وَ

$$\lim_{\alpha\to 0} f(\alpha) = 0,$$

$$f(\pi/4) = f(\pi/2) = 2/\pi \cong 0,64,$$

وَ

$$f(\pi/6) = 3/(2\pi) \cong 0{,}48.$$



إذا كانَ $\beta \leq \pi/4$، كما في المُقَدِّمَة ٣، يَكونُ لَدَيْنا $f(\beta) < 2/\pi$ وَ $2\beta < \pi/2$

$$\forall\, \alpha \in \,]\beta, 2\beta[,\ \ f(\alpha) > f(\beta);$$

وبِهَذِهِ الحالة يَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{CE}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

وإذا كانَ

$$\beta > \pi/4$$

كما في المُقَدِّمَةِ ٤، يَكونُ لَدَيْنا

$$f(\beta) > 2/\pi.$$

• وإذا كانَ

$$\pi/4 < \beta < \alpha_0\,,$$

فإنه تُوجَدُ قيمَةٌ وحيدَةٌ α_1 من الفَتْرَةِ $]\alpha_0, \pi/2[$ بحَيْثُ يَكونُ

$$f(\alpha_1) = f(\beta).$$

أ) إذا كان

$$\beta < \alpha < \alpha_1\,,$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$f(\alpha) > f(\beta),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{CE}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

ب) إذا كانَ

$$\alpha = \alpha_1 ,$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$f(\alpha) = f(\beta),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{CE}{CA} = \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

جـ) إذا كانَ

$$\alpha_1 < \alpha < \pi/2,$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$f(\alpha) < f(\beta),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{CE}{CA} > \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

- إذا كانَ

$$\alpha_0 \leq \beta < \pi/2,$$

فإذاً

$$\forall\, \alpha \in\,]\beta, \pi/2[,$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$f(\alpha) < f(\beta),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{CE}{CA} > \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

نُلاحِظُ إذاً، أنّه لِكُلِّ قيمَةٍ

$$\beta > \pi/4$$

(حَيْثُ تَكونُ القَوْسُ $\widehat{BC}$ أعْظَمَ من رُبْعِ مُحيطِ الدائِرَةِ)

تُوجَدُ قيمَةُ α_1 مُرْفَقَةٌ بِـ α بحَيْثُ تَتَحَقَّقُ العَلاقَةُ

$$\frac{CE}{CA} = \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C},$$

(انْظُرِ المُلاحَظَةَ حَوْلَ القَضِيَّةِ ١٢)

وتُفْضي هَذِهِ العَلاقَةُ إلى هِلالٍ مُعادِلٍ لمُثَلَّثٍ. والحالَةُ الوارِدَةُ في القَضِيَّةِ ١٣ حَيْثُ يَكونُ $\beta = \pi/4$ وَ $\alpha_1 = \pi/2$، هِيَ حالَةٌ حَدِيَّةٌ؛ وتُفْضي هَذِهِ الحالَةُ إلى هِلالَيْنِ مُتَساوِيَيْنِ، يُعادِلُ كُلُّ واحِدٍ مِنْهُما مُثَلَّثاً.

مُلاحَظَة ٣.– إنّ تَحْديدَ النُقْطَةِ A بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} = \frac{ID}{IC},$$

مُمْكِنٌ، لأنّ الأمْرَ يَتَعَلَّقُ بقُسيٍّ من دائِرَةٍ واحِدَةٍ.

إذا كانَ $\frac{DI}{IC} = 1/2$ أو $\frac{DI}{IC} = 1/2^n$، فإنّنا نَعْمَلُ بواسِطَةِ القِسْمَةِ المُتَتالِيَةِ للقَوْسِ إلى نِصْفَيْنِ مُتَساوِيَيْنِ إلى أن نَحْصُلَ عَلَى الجُزْءِ من DC، المُتَماثِلِ مع DI.

ولا يَتَطَرَّقُ ابنُ الهَيْثَمِ إلى كَيْفِيَّةِ بناءِ النُقْطَةِ A في الحالَةِ العامَّةِ لقيمَةِ النِسْبَةِ

$$\frac{ID}{IC} = k,$$

حَيْثُ تَكونُ القيمَةُ k كَيْفَما اتَّفَقَت.

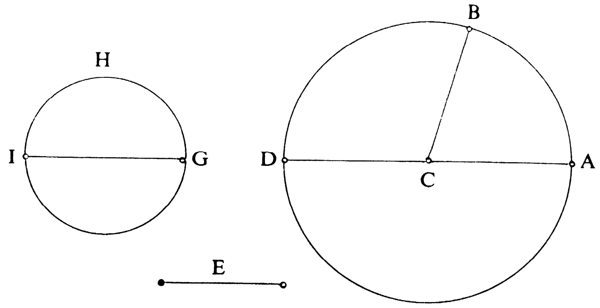
فَمَثَلاً، إذا كانَ $k = \frac{ID}{IC} = 1/3$، فإنّ بناءَ النُقْطَةِ A عَلَى القَوْسِ $\widehat{BD}$ يَؤولُ إلى إثلاثِ الزاوِيَةِ $B\hat{K}C$.[أي إلى قِسمَتِها إلى ثَلاثَةِ أقسامٍ متساوِيَة. (المترجم)].

تلي هَذِهِ المُقَدِّمَاتِ الأرْبعِ، ثلاثٌ أُخْرَى لها صِبْغَةٌ تِقَنِيَّةٌ، وهِيَ المُقَدِّمَاتُ ٥، ٦، ٧.

مُقَدِّمَة ٥.– الدائِرَةُ المُعادِلَةُ لقِطاعٍ دائريٍّ من دائِرَةٍ ذاتِ قُطْرٍ مَعْلومٍ AD؛ لِنَأْخُذْ قِطاعاً دائِرِيّاً ACB، لَدَيْنا

$$\frac{sect.(ABC)}{cercle(ABD)} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABDA}} \quad .$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٥]



شكل ٣ – ٥

القَوْسُ $\overset{\frown}{AB}$ والُمحيطُ $ABDA$ هُما مِقْدارانِ مُتَجانسانِ، فنِسْبَتُهُما إذاً مَوْجودةٌ، وبِغَضِّ النَظَرِ أكانَت هَذِهِ النِسْبَةُ مَعْلومَةً أم لا. ومَهْما كانَت هَذِهِ النِسْبَةُ فإنّه تُوجَدُ قِطْعَةٌ E من مُسْتَقيمٍ بِحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{E}{AD} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{ABDA}}.$$

ومن ثَمّ لِنَأْخُذْ قِطْعَةً GI من مُسْتَقيمٍ بِحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{GI}{E} = \frac{AD}{GI},$$

يَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{E}{AD} = \frac{GI^2}{AD^2}.$$

لِتَكُنْ GHI الدائِرَةَ ذاتَ القُطْرِ GI، فإذاً

$$\frac{cercle(GHI)}{cercle(ABD)} = \frac{GI^2}{AD^2} = \frac{sect.(ABC)}{cercle(ABD)},$$

ولذَلِكَ فإنّ القِطاعَ (ABC) والدائِرَةَ (GHI) لهما نَفْسُ المِساحَةِ.

مُلاحَظَة ١.– لا يُورِدُ ابنُ الهَيْثَمِ أيَّ شرحٍ لكَيْفِيَّةِ بِناءِ E وَ GI.

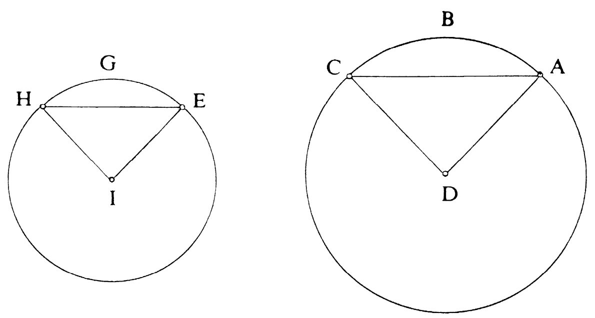
إذا ما كانَت النِسْبَةُ $\frac{E}{AD}$ عَدَداً مُنْطَقاً مَعْلوماً، فإنّ بناءَ E انْطِلاقاً من AD يَكونُ مُباشِراً وكذَلِكَ الأمْرُ بالنِسْبَةِ إلى القِطْعَة GI الَّتي تَكونُ مُتَوَسِّطاً هَنْدَسِيّاً بَيْنَ E وَ AD.

إذا لم تَكُنِ النِسْبَةُ $\frac{E}{AD}$ عَدَداً مَعْلوماً، فالأمْرُ الَّذي يُهِمُّ المُؤَلِّفَ هُوَ أنّ E مَوْجودَةٌ، وبالتالي، فإنّ القِطْعَةَ GI والدائِرَةَ ذاتَ القُطْرِ GI مَوْجودَتانِ أيضاً.

مُلاحَظَة ٢.– يَرْتَبِطُ الاسْتِدْلالُ الوارِدُ هنا بِذاكَ الَّذي قامَ بِهِ ابنُ الهَيْثَمِ في مُؤَلَّفِهِ: ***في تَرْبيعِ الدائِرَةِ***.

مُقَدِّمَة ٦.– نِسْبَةُ مِساحَتَيْ قِطْعَتَيْنِ مُتَشابِهَتَيْنِ في دائِرَتَيْنِ مُخْتَلِفَتَيْنِ تُساوي نِسْبَةَ مِساحَتَيِ الدائِرَتَيْنِ، وتُساوي أيضاً نِسْبَةَ مُرَبَّعَيْ قاعِدَتَي القِطْعَتَيْنِ.

لِنَأْخُذْ قِطْعَتَيْنِ مُتَشابِهتَيْنِ ABC وَ EGH في دائِرَتَيْنِ مُخْتَلِفَتَيْنِ ذواتَيْ



شكل ٣ – ٦

مَرْكَزَيْنِ D وَ I [انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٦].

لَدَيْنا $A\hat{D}C = E\hat{I}H$ والمُثَلَّثان ADC وَ EIH مُتَشابِهان و

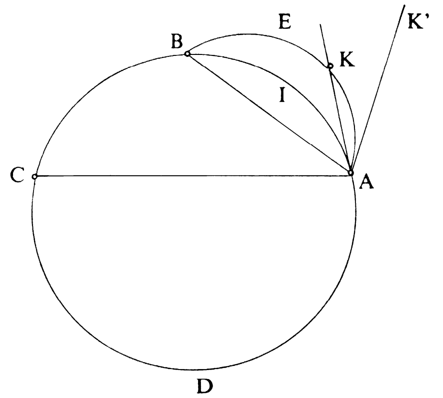
$$\frac{tr.(ADC)}{tr.(EIH)} = \frac{AD^2}{IE^2} = \frac{AC^2}{EH^2} = \frac{cercle(ABC)}{cercle(EGH)} = \frac{sect.(ADC)}{sect.(EIH)}.$$

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ

$$\frac{segm.(ABC)}{segm.(EGH)} = \frac{cercle(ABC)}{cercle(EGH)} = \frac{AC^2}{EH^2}$$

مُلاحَظَة – يَسْتَنِدُ ابنُ الهَيْثَمِ هنا إلى القَضِيَّةِ الثانيَةِ من المقالة الثانية عَشَرَة من ***أصولِ*** إقليدس والَّتي سَبَقَ أن ذَكَرَها أيضاً في مُؤَلَّفه ***في تَرْبيعِ الدائِرَة***.

مُقَدِّمَة ٧.– إذا كانَت القِطْعَتانِ ABC وَ AEB مُتَشابِهَتَيْنِ وإذا كانَت القَوْسُ الصُغْرَى $\widehat{AB}$ من الدائِرَةِ الأُولَى، والقَوْسُ $\widehat{AEB}$ من الدائِرَةِ الثانيَةِ من نَفْسِ جِهَةِ المُسْتَقيمِ AB، فإنّ القَوْسَ $\widehat{AEB}$ تَكونُ خارِجَ الدائِرَةِ الأُولَى [انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٧]



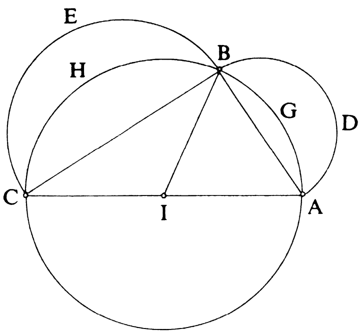
شكل ٣ – ٧

بما أنّ القِطْعَتَيْنِ ABC وَ AEB مُتَشابِهتانِ، فإذا كانَ AK مُماسّاً عَلَى النُقْطَةِ A للدائِرَةِ ABC وَ AK' مُماسّاً عَلَى النُقْطَةِ A للدائِرَةِ AEB، فإنّ $K\hat{A}C = K'\hat{A}B$، ولَكِنَّ $K\hat{A}B < K\hat{A}C$، ولذَلِكَ فإنّ $K\hat{A}B < K'\hat{A}B$، فإذاً يَقَعُ نِصْفُ المُسْتَقيمِ AK في الزاويَةِ $K'\hat{A}B$، ويَقْطَعُ AK القَوْسَ $\widehat{AEB}$. وتَكونُ النُقْطَةُ K من القَوْسِ $\widehat{AEB}$ خارِجَ الدائِرَةِ ABC، وتَكونُ كُلُّ نُقْطَةٍ من القِطْعَةِ $[AK]$ في الهِلالِ، بَيْنَ القَوْسَيْنِ AEB وَ AIB.

وتَكونُ النُقْطَتانِ A وَ B مُشْتَرَكَتَيْنِ بَيْنَ الدائِرَتَيْنِ، ويَكونُ للدائِرَةِ الصُغْرَى إذاً قَوْسٌ AB خارِجَ الدائِرَة الكُبْرَى، وهِيَ إذاً القَوْسُ AKB.

مُلاحَظَة – إذا كانَت القَوْسانِ $\widehat{AEB}$ وَ $\widehat{AIB}$ من جِهَتَيْنِ مُخْتَلِفَتَيْنِ بالنِسْبَةِ إلَى المُسْتَقيمِ AB، فإنّ القَوْسَ $\widehat{AEB}$ تَكونُ داخِلَ الدائِرَةِ الكُبْرَى.

قَضِيَّة ٨.– إذا كانَت B نُقْطَةً ما من نِصْفِ الدائِرَةِ ABC وإذا كانَت ADB وَ BEC نِصْفَي الدائِرَتَيْنِ المَبْنِيَيْنِ عَلَى AB وَ BC، فإنّ



شكل ٣ – ٨

$$lun.(ADBGA) + lun.(BECHB) = tr.(ABC).$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٨،]

أمّا البُرْهانُ فَمُطابِقٌ للبُرْهانِ الوارِدِ في مُؤَلَّفِ ***في تَرْبيعِ الدائِرَةِ***.

قَضِيَّة ٩.– إذا كانَت كُلُّ واحِدَةٍ من القَوْسَيْنِ $\widehat{BA}$ وَ $\widehat{BC}$ مُساوِيَةً لرُبْعِ الدائِرَةِ، فإنّ

$$lun.(ADBGA) = lun.(BECHB) = tr.(ABI) = tr.(BIC).$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٩أ]

إذا كانَ $\widehat{BC} > \widehat{BA}$، فإنّهُ تُوجَدُ دائِرَةٌ (N) بحَيْثُ يَكونُ

$$lun.(ADBGA) + (N) = tr.(ABI)$$
$$lun.(BECHB) - (N) = tr.(BCI).$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣-٩ب]

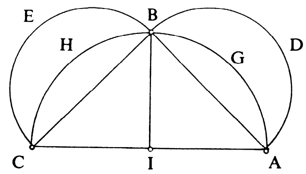
لِيَكُنْ

$$BM \perp AC,$$

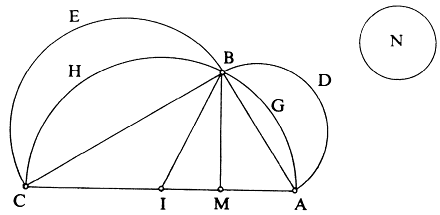
فيَكونُ لَدَيْنا

$$AB^2 = AM \,.\, AC,$$

فإذاً



شكل ٣ – ٩ أ



شكل ٣ – ٩ ب

$$\frac{MA}{AC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{\frac{1}{2}cercle(ADB)}{\frac{1}{2}cercle(ABC)}.$$

ومِن جِهَةٍ أُخْرَى، استِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ١، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{MA}{AC} < \frac{A\hat{C}B}{\pi/2},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{MA}{AC} < \frac{A\hat{I}B}{\pi} = \frac{sect.(AIBG)}{\frac{1}{2}cercle(ABC)};$$

فإذاً

$$sect.(AIBG) > ½\ cercle(ADB).$$

استِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ٥، كُلُّ قِطاعٍ دائِريٍّ يُعادِلُ دائِرَةً، فإذاً، تُوجَدُ دائِرَةٌ (C_1) ودائِرَةٌ (C_2) مُعادِلَتانِ عَلَى التَوالي للقِطاعِ $(AIBG)$ ولِنصْفِ الدائِرَةِ (ADB) ولَدَيْنا: $(C_1) > (C_2)$.

يَستَنبِطُ ابنُ الهَيْثَمِ من ذَلِكَ أنّه تُوجَدُ دائِرَةٌ (N) بحَيْثُ يَكونُ

$$(C_1) = (C_2) + (N),$$

فإذاً

$$sect.(AIBG) = demi\text{-}cercle(ADB) + (N) ;$$

وبِطَرْحِ $segm.(AGB)$ من طَرَفَي المُساواةِ نَحْصُلُ عَلَى

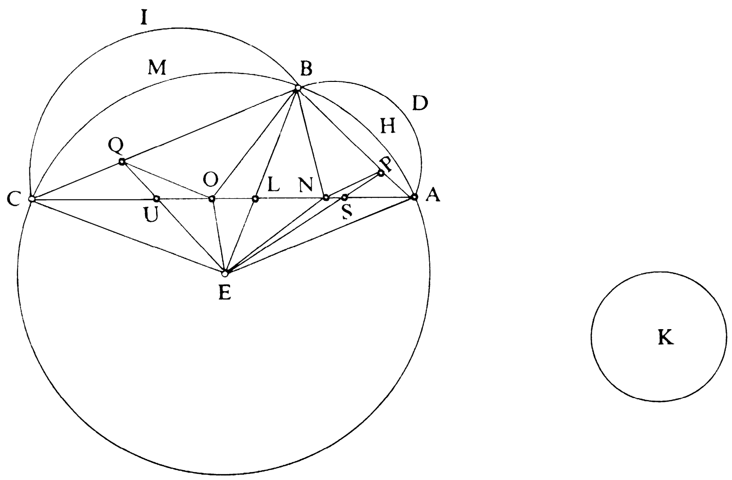
$$tr.(AIB) = lun.(ADBGA) + (N).$$

وإذا أخَذْنا بِعَيْنِ الاعْتِبارِ القَضِيَّةَ ٨ فَضْلاً عن العَلاقَةِ

$$tr.(AIB) = tr.(BIC) = \frac{1}{2}\ tr.(ABC),$$

يَصيرُ لَدَيْنا

$$tr.(BCI) = lun.(BECHB) - (N).$$



شكل ٣ – ١٠

قَضِيَّة ١٠.– لِنَأخُذْ نُقْطَةً B عَلَى قَوْسٍ $\overset{\frown}{ABC}$ أصْغَرَ من نِصْفِ مُحيطِ الدائِرَةِ، وَلْنَبْنِ عَلَى AB وَ BC قِطْعَتَيْنِ دائِرِيَّتَيْنِ مُتَشابِهَتَيْنِ والقِطْعَةَ ABC، وَلْنَأخُذْ عَلَى AC النُقْطَتَيْنِ N وَ O بحَيْثُ يَكونُ

$$B\hat{N}A = B\hat{O}C = A\hat{B}C.$$

تُوجَدُ عِنْدَئِذٍ دائِرَةٌ K بحَيْثُ يَكونُ

$$lun.(ADBHA) + lun.(BICMB) + (K) = tr.(ABC) + tr.(ENO).$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣-١٠]

المثلّثاتُ ABC، ANB، BOC مُتَشابِهَةٌ. لَدَيْنا

$$\frac{CA}{AN} = \frac{CA^2}{AB^2} = \frac{segm.(ABC)}{segm.(ADB)}$$

وَ

$$\frac{AC}{CO} = \frac{AC^2}{CB^2} = \frac{segm.(ABC)}{segm.(BIC)}.$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{AC}{AN + CO} = \frac{segm.(ABC)}{segm.(ADB) + segm.(BIC)};$$

ولَكِنَّ

$$\frac{AC}{AN + CO} = \frac{tr.(AEC)}{tr.(EAN) + tr.(ECO)}.$$

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{AC}{AN + CO} = \frac{sect.(AECB)}{segm.(ADB) + segm.(BIC) + tr.(AEN) + tr.(CEO)}.$$

لَدَيْنا

$$AC > AN + CO,$$

فإذاً

$$sect.(AECB) > segm.(ADB) + segm.(BIC) + tr.(AEN) + tr.(CEO).$$

يُوجَدُ جُزْءٌ X من القِطاعِ $(AECB)$، بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{AC}{AN + CO} = \frac{segm.(AECB)}{X}$$

وَ

$$X = segm.(ADB) + segm.(BIC) + tr.(AEN) + tr.(CEO).$$

يَكونُ الفارِقُ

$$sect.(AECB) - X$$

قِطاعاً من الدائِرَة (E, EA) وتُوجَدُ دائِرَةٌ (K) مُساوِيَةٌ لِهَذا القِطاعِ. فإذاً

$$sect.(AECB) = segm.(ADB) + segm.(BIC) + tr.(AEN) + tr.(CEO) + (K),$$

ولَكِنَّ المَجْموعَ

$$segm.(AHB) + segm.(BMC) + tr.(AEN) + tr.(CEO)$$

مُشْتَرَكٌ بَيْنَ طَرَفَيِ المُساواةِ. ولذَلِكَ نَحْصُلُ عَلَى:

$$lun.(ADBHA) + lun.(BICMB) + (K) = tr.(ABC) + tr.(ENO).$$

لِيَكُنْ $PN // EA$ وَ P نُقْطَةً عَلَى AB، وَلْيَقْطِعْ PE القِطْعَةَ AC عَلَى النُقْطَةِ S. وَلْيَكُنْ $OQ // EC$ وَ Q عَلَى BC، وَلْيَقْطِعْ QE القِطْعَةَ AC عَلَى النُقْطَةِ U، فلَدَيْنا

$$tr.(ASP) = tr.(ESN)$$

وَ

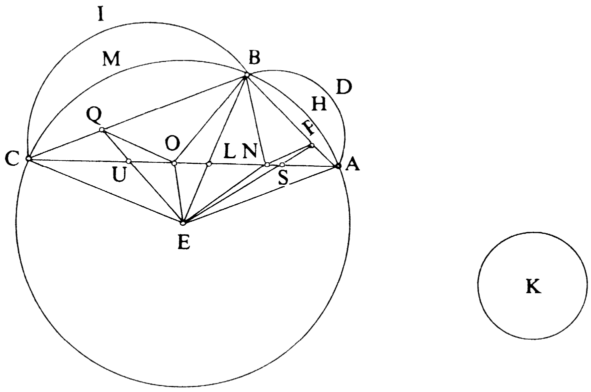
$$tr.(CUQ) = tr.(EUO),$$

فإذاً يَكونُ رُباعِيُّ الأضْلاعِ $(EPBQ)$ مُحَقّقاً للعَلاقَةِ

$$(EPBQ) = tr.(ABC) + tr.(ENO),$$

وهذا ما يَسْتَتْبِعُ العَلاقَةَ

$$lun.(ADBHA) + lun.(BICMB) + (K) = (EPBQ).$$



شكل ٣ – ١١

قَضِيَّة ١١.– يَجْري هنا تَبَنّي فَرَضِيّاتِ القَضِيَّةِ ١٠، فَضْلاً عن التَرْميزِ والشَكْلِ ٣–١١. لِنَلْحَظْ أنّه إذا فَرَضْنا القَوْسَ $\widehat{ABC}$ أصْغَرَ من نِصْفِ مُحيطِ الدائِرَةِ تَكونُ الزاوِيَةُ $A\hat{B}C$ مُنْفَرِجَةً، ولذَلِكَ فإنّ

$$B\hat{A}C + B\hat{C}A < \pi/2.$$

ونَفْرِضُ $B\hat{A}C \geq B\hat{C}A$، فإذاً $B\hat{C}A \leq \pi/4$، ولَكِنَّهُ من المُمْكِنِ أن يَكونَ $B\hat{A}C \leq \pi/4$ (راجِعْ لاحِقاً البَنْدَ ١١ ج)، أو أن يَكونَ $B\hat{A}C > \pi/4$ (راجع لاحِقاً البَنْدَ ١٢).

أ) إذا كانَتِ القَوْسُ $\overset{\frown}{ABC}$ أصْغَرَ من نِصْفِ مُحيطِ الدائِرَة وتَساوَتِ القَوْسانِ $\overset{\frown}{AB}$ وَ $\overset{\frown}{BC}$، فإنّ

$$lun.(ADBHA) = lun.(BICMB)$$

وَ

$$tr.(PEB) = tr.(QEB),$$

ولذَلِكَ، فإنّ

$$lun.(ADBHA) + ½(K) = tr.(PEB)$$

$$lun.(BICMB) + ½\ (K) = tr.(QEB)$$

(وهَذِهِ نَتيجَةٌ مُباشِرَةٌ استْتِناداً إلَى القَضِيَّة ١٠).

ب) إذا كانَت قَوْسُ $\overset{\frown}{ABC}$ أصْغَرَ من نِصْفِ مُحيطِ الدائِرَةِ وكانَ $\overset{\frown}{BC} > \overset{\frown}{AB}$، فإنّه تُوجَدُ دائِرَةٌ تامَّةٌ (Z)، لا تُساوي مِساحَتُها نصْفَ مِساحَةِ (K)، بحَيْثُ يَكونُ

$$Lun.(ADBHA) + (Z) = tr.(PEB).$$

ج) إذا كانَ $B\hat{A}C \le \pi/4$، فإنّه تُوجَدُ دائِرَةٌ تامَّةٌ (Z') بحَيْثُ يَكونُ

$$lun.(BICMB) + (Z') = tr.(QEB),\ (Z') = (K) - (Z).$$

البُرْهان .– لقد سَبَقَ ورَأَيْنا (انْظُرِ المُلاحَظَةَ ٢ الوارِدَةَ إثْرَ المُقَدِّمَةِ ٤) أنّ

$$\frac{NA}{AC} < \frac{B\hat{C}A}{\pi - A\hat{B}C}.$$

ولَكِنَّ

$$B\hat{E}A = 2.B\hat{C}A$$

وَ

$$A\hat{E}C = 2(\pi - A\hat{B}C),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{NA}{AC} < \frac{B\hat{E}A}{A\hat{E}C},$$

أو أيضاً

$$\frac{NA}{AC} < \frac{sect.(BEA)}{sect.(CEA)}.$$

ولَكِنَّ

$$\frac{NA}{AC} = \frac{segm.(ADB)}{segm.(ABC)},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{segm.(ADB)}{segm.(ABC)} < \frac{sect.(BEA)}{sect.(CEA)}.$$

يُوجَدُ إذاً قِطاعٌ Y، وهُوَ جُزْءٌ من قِطاعِ BEA، بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{segm.(ADB)}{segm.(ABC)} = \frac{Y}{sect.(CEA)} = \frac{AN}{AC} = \frac{tr.(AEN)}{tr.(AEC)},$$

ولذَلِكَ فإن

$$\frac{segm.(ADB)}{segm.(ABC)} = \frac{Y - tr.(AEN)}{sect.(CEA) - tr.(AEC)} = \frac{Y - tr.(AEN)}{segm.(ABC)},$$

فإذاً

$$Y - tr.(AEN) = segm.(ADB);$$

ولَكِنَّ

$$tr.(AEN) = tr.(APE),$$

فنَحْصُلُ عَلَى

$$segm.(ADB) + tr.(APE) = Y.$$

تُوجَدُ دائِرَة Z بحَيْثُ يَكونُ

$$Y + Z = sect.(AEB),$$

فإذاً

$$segm.(ADB) + tr.(APE) + Z = sect.(AEB).$$

والمَجْموع

$$segm.(AHB) + tr.(APE)$$

مُشْتَرَكٌ لطَرفَي المُساواةِ، فنَحْصُلُ إذاً عَلَى

$$lun.(ADBHA) + Z = tr.(PEB).$$

إضافةً إلى ذَلِكَ، إذا كانَ $B\hat{A}C \leq \pi/4$، فيَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{OC}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C},$$

ونُبيِّنُ، كما فَعَلْنا للهِلالِ الأصْغَرِ، أنّه تُوجَدُ دائِرَة Z' بحَيْثُ يَكونُ

$$lun.(BICMB) + Z' = tr.(QEB).$$

ووَفْقَ القَضِيَّةِ ١٠، تُحَقِّقُ الدائِرَتان Z وَ Z'، المُرْتَبِطَتَانِ بالهِلالَيْنِ، العَلاقَةَ:

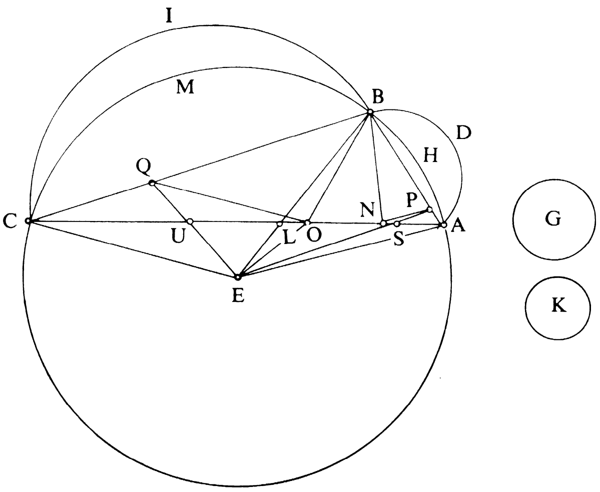
$$Z + Z' = K,$$

حَيْثُ تَكونُ K الدائِرَةَ المُرْتَبِطَةَ بمَجْموعِ الهِلالَيْن.

قَضِيَّة ١٢.– تَتَناوَلُ هَذِهِ القَضِيَّةُ المَسْأَلَةَ عَيْنَها، ولَكِن شَرْطَ أن يَكونَ

$$B\hat{A}C > \pi/4$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣-١٢]



شكل ٣ – ١٢

لَدَيْنا دائماً كما في القَضِيَّةِ ١١،

$$\frac{NA}{AC} < \frac{B\hat{C}A}{\pi - A\hat{B}C}$$

فإذاً تَبْقَى النَتيجَةُ (ب) صَحيحَةً.

ولَكِنَّ النُقْطَةَ O تَقَعُ بَيْنَ L وَ A (انْظُرْ أدناه) ويُمْكِنُ أن يَكونَ لَدَيْنا

$$\frac{OC}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C},$$

كما في القَضِيَّةِ ١١ وفي هَذِهِ الحالَةِ، تَبْقَى النَتيجَةُ (جـ) صَحيحَةً، أو يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{OC}{CA} > \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C},$$

ويَتَبَنَّى المُؤَلِّفُ، هنا، تَحْديداً هَذِهِ الفَرَضِيَّةَ.

وفي ظِلِّ هَذِهِ الفَرَضِيَّاتِ المُبَيَّنَةِ، وحَيْثُ تَكونُ *(K)* الدائِرَةَ التامَّةَ المُحَدَّدَةَ في القَضِيَّةِ ١٠، تُوجَدُ دائِرَةٌ تامَّةٌ *G* بحَيْثُ يَكونُ

$$lun.(BICMB) = tr.(BEQ) + (G)$$

$$lun.(ADBHA) + (G) + (K) = tr.(BEP)$$

البُرْهان .– من المَعْلومِ أنّ:

$$\frac{OC}{CA} = \frac{BC^2}{AC^2} = \frac{segm.(BIC)}{segm.(CBA)} = \frac{tr.(OEC)}{tr.(CEA)} = \frac{segm.(BIC) + tr.(OEC)}{sect.(ECBA)}.$$

ولَكِنَّ

$$\frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C} = \frac{B\hat{E}C}{C\hat{E}A} = \frac{sect.(BECM)}{sect.(ECBA)}$$

وَ

$$tr.(OEC) = tr.(QEC),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{segm(BIC) + tr.(QEC)}{sect.(ECBA)} > \frac{sect.(BECM)}{sect.(ECBA)}.$$

تُوجَدُ دائِرَةٌ تامَّةٌ *(G)* بحَيْثُ يَكونُ

$$segm.(BIC) + tr.(QEC) = sect.(BECM) + (G).$$

ونَطْرَحُ من طَرَفَيِ المُساواةِ

$$segm.(BMC) + tr.(QEC),$$

فنَحْصُلُ عَلَى

$$lun.(BICMB) = tr.(BEQ) + (G).$$

ولقد رَأَيْنا في القَضِيَّةِ ١٠ أنّه تُوجَدُ دائِرَةٌ تامَّةٌ *(K)* بحَيْثُ يَكونُ:

$$lun.(ADBHA) + lun.(BICMB) + (K) = tr.(BEP) + tr.(BEQ),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$lun.(ADBHA) + (G) + (K) = tr.(BEP).$$

مُلاحَظَتان

١) إذا فَرَضْنا $(Z) = (G) + (K)$؛ $(Z) > (K)$ ، يَكونُ لَدَيْنا:

$$lun.(ADBHA) + (Z) = tr.(BEP)$$
$$lun.(BICMB) = tr.(BEQ) + (Z) - (K).$$

٢) إذا كانَ

$$\frac{OC}{CA} = \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C},$$

فإنّ $(G) = O$ وَ $(Z) = (K)$ ويَكونُ لَدَيْنا:

$$lun.(BICMB) = tr.(BEQ).$$

لِنَلْحَظْ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ لم يُشِرْ إلى هَذِهِ النَتيجَةِ الّتي تُفْضي إلى هِلالٍ مُعادِلٍ لمُثَلَّثٍ، وبالتالي فهُوَ مُعادِلٌ لمُرَبَّعٍ.

ومن ثمّ يَتَفَحَّصُ ابنُ الهَيْثَمِ حالاتٍ خاصَّةً، يُمْكِنُ فيها تَحْديدُ الدوائرِ الّتي تَدْخُلُ في صيغَةِ مِساحَةِ الأهِلَّةِ وذَلِكَ من خِلالِ نسبَتِها إلى الدائِرَة المَعْلومة.

مُلاحَظَة حَوْلَ المُقَدِّمَتَيْنِ ٣ وَ ٤ والقَضِيَّتَيْنِ ١١ و ١٢.

تَسْتَدْعي المُقَدِّمَتان ٣ وَ ٤ والقَضِيَّتان ١١ وَ ١٢ استِعْمالَ مُثَلَّثٍ ABC بحَيْثُ تَكونُ الزاوِيَةُ $A\hat{B}C$ مُنْفَرِجَةً وَ $BC > BA$، وتُدْرَسُ في هذا المُثَلَّثِ النُقْطَةُ E من القِطْعَةِ BC، الّتي تُحَقِّقُ العَلاقَةَ $B\hat{E}C = A\hat{B}C$.

في ٣ وفي ١١، نَفْرِضُ العَلاقَةَ $B\hat{A}C \leq \pi/4$ [انْظُرْ أدناه الشَكْلَ ١ وَ ٢]

في ٤ وفي ١٢، نَفْرِضُ العَلاقَةَ $B\hat{A}C > \pi/4$ [انْظُرْ أدناه الشَكْلَ ٣].

– في الصورَةِ الأُولى تَكونُ القَوْسُ $\widehat{BC}$ أصْغَرَ من رُبْعِ مُحيطِ الدائِرَة وَ $CE < CL$.

– في الصورَةِ الثانية تَكونُ القَوْسُ $\widehat{BC}$ مُساوِيَةً لِرُبْعِ مُحيطِ الدائِرَة وَ $CE = CL$.

– في الصورَةِ الثالثة تَكونُ القَوْسُ $\widehat{BC}$ أكْبَرَ من رُبْعِ مُحيطِ الدائِرَة وَ $CE > CL$.

لِتَكُنِ النُقْطَةُ K مَرْكَزَ الدائِرَةِ المُحيطَةِ بِ ABC وَ CD القُطْرَ المُخْرَجَ من النُقْطَةِ C وَلْتَكُنْ I نُقْطَةَ تَقاطُعِ BE وَ CD. لَدَيْنا

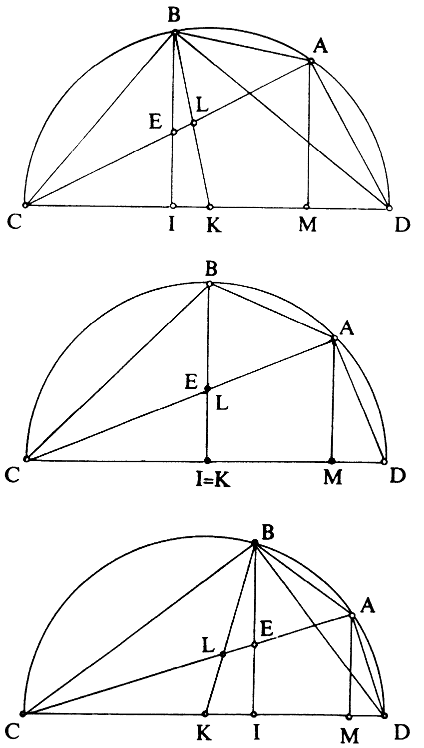
$$A\hat{B}C + A\hat{D}C = \pi$$

ووَفْقَ الفَرَضِيَّةِ، فإنّ

$$B\hat{E}C = A\hat{B}C,$$

فإذاً

$$A\hat{E}I + A\hat{D}C = \pi,$$



ولذَلِكَ فإنّ

$$E\hat{I}D = \pi/2$$

(لأنّ $D\hat{A}E = \pi/2$)،

ويَكونُ لَدَيْنا إذاً في الحالاتِ الثَلاثِ للشَكْلِ

$$BI \perp BC.$$

لِتَكُنْ L نُقْطَةَ تَقاطُعِ BK وَ CA، فعِنْدَئذٍ:

إذا كانَ $B\hat{A}C < \pi/4$ وَالقَوْسُ $\overset{\frown}{BC}$ أصْغَرُ من رُبْعِ مُحيطِ الدائِرَة والنُقْطَةُ I بَيْنَ C وَ K، فإنّ النُقْطَةَ E تَكونُ بَيْنَ C وَ L، ويَكونُ $CE < CL$ [الصورَة الأُولى]؛

إذا كانَ $B\hat{A}C = \pi/4$ وَالقَوْسُ $\overset{\frown}{BC}$ تُساوي رُبْعَ مُحيطِ الدائِرَة وَ $I = K$ فإنّ $E = L$ وَ $CE = CL$ [الصورَة الثانية]

إذا كانَ $B\hat{A}C > \pi/4$ وَالقَوْسُ $\overset{\frown}{BC}$ أكْبَرُ من رُبْعِ مُحيطِ الدائِرَة و I بَيْنَ K وَ D، فإنّ النُقْطَة E تَكونُ بَيْنَ L وَ A و $CE > CL$ [الصورَة الثالثة].

وفي الحالاتِ الثَلاثِ، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{LC}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

في المُقَدِّمَةِ ٣، وَفْقَ الفَرَضِيَّةِ، لَدَيْنا $B\hat{A}C \leq \pi/4$، فإذاً $CE \leq CL$، ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{CE}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}$$

ولَكِن في المُقَدِّمَةِ ٤، لَدَيْنا $B\hat{A}C > \pi/4$، فإذاً $CE > CL$، وفي هَذِهِ الحالَةِ لا يُمْكِنُنا أن نَسْتَنْبِطَ شَيْئاً، بدونِ تَبَنّي فَرَضِيَّةٍ إضافِيَّةٍ حَوْلَ القَوْسَيْنِ $\overset{\frown}{BC}$ وَ $\overset{\frown}{BA}$.

وبالنِسْبَةِ إلى الشَرْطِ الّذي تَتَحَقّقُ بظِلِّهِ العَلاقَةُ

$$\frac{CE}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C} \qquad (1)$$

لَدَيْنا $B\hat{A}C = B\hat{D}C$ وَ $\pi - A\hat{B}C = A\hat{D}C$ ، ومن جِهَةٍ أُخْرَى، إذا كانَ $AM \perp CD$، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{CE}{CA} < \frac{CI}{CM},$$

ولذَلِكَ فإن

$$(1) \Leftrightarrow \frac{CI}{CM} < \frac{B\hat{D}C}{A\hat{D}C} \Leftrightarrow \frac{CI}{CM} < \frac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{AC}} \qquad (2).$$

ولَكِنّ $CM = CI + IM$ وَ $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC}$، ومن ذَلِكَ نَسْتَنْبِطُ:

$$(3) \quad \frac{EC}{CA} < \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C} \Leftrightarrow \frac{IM}{IC} > \frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{BC}}$$

وَ

$$(4) \quad \frac{EC}{CA} \geq \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C} \Leftrightarrow \frac{IM}{IC} \leq \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}$$

نُشيرُ إلى أنّ العَلاقَةَ *(4)* تَكونُ، إذاً، شَرْطاً ضَرورِيّاً وكافِياً، لكي تَتَحَقَّقَ المُتَبايِنَةُ

$$\frac{EC}{CA} \geq \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}.$$

لقد بَيَّنَ ابنُ الهَيْثَمِ أنّ المُتَبايِنَةَ الصارِمَةَ $\frac{EC}{CA} > \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C}$

تَتَحَقَّقُ إذا كانَ

$$(5) \qquad \frac{ID}{IC} \leq \frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}}.$$

لَدَيْنا $ID > IM$، ولذَلِكَ يَكونُ $\frac{ID}{IC} > \frac{IM}{IC}$، فإذاً الشَرْطُ *(5)* الّذي أوْرَدَهُ ابنُ الهَيْثَمِ كافٍ لكي يَكونَ لَدَيْنا

$$\frac{EC}{CA} > \frac{B\hat{A}C}{\pi - A\hat{B}C};$$

ولَكِنَّ الشَرْطَ المَذْكورَ لَيْسَ ضَرورِيّاً لذَلِكَ.

ومن ثم يَتَفَحَّصُ ابنُ الهَيْثَمِ حالاتٍ خاصَّةً يُمْكِنُ فيها تَحْديدُ الدوائرِ الّتي تَدْخُلُ في صيغَةِ مِساحَةِ الأهِلَّةِ، وذَلِكَ من خِلالِ نِسْبَتِها إلى الدائِرَةِ المَعْلومةِ.

قَضِيَّة ١٣.– إذا كانَ

$$A\hat{B}C = \pi/2$$

وَ

$$\widehat{AB} = \tfrac{1}{2}\, \widehat{BC},$$

فإذا فَرَضْنا

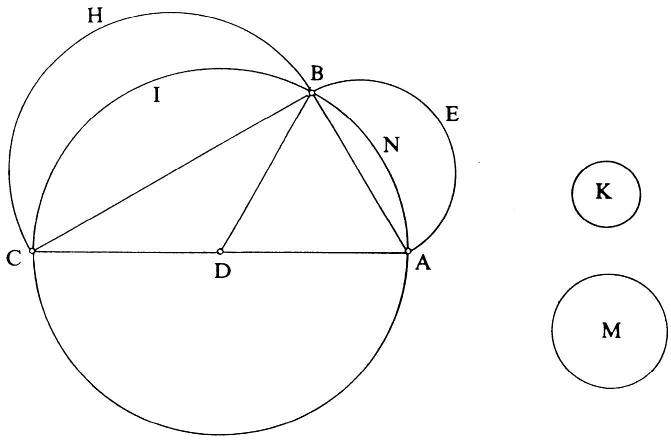
$$cercle\ (K) = (1/24)\ cercle\ (ABC)$$

وَ

$$cercle\ (M) = (1/12)\ cercle\ (ABC),$$

يَكونُ لَدَيْنا

lun.(AEBNA) + (K) = tr.(ABD)
lun.(BHCIB) – (K) = tr.(BCD)
lun.(AEBNA) + (M) = lun.(BHCIB)



شكل ٣ – ١٣

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣-١٣]

لَدَيْنا $AB = AD = DC$. والقِطاعُ (ADB) يُساوي ثُلْثَ نِصْفِ دائِرَةِ (ABC)، ونِصْفُ دائِرَةِ (AEB) يساوي رُبْعَ نِصْفِ دائِرَةِ (ABC)، ولذَلِكَ فإنّ

$$sect.(ADB) - (1/2)\ cercle(AEB) = (1/24)\ cercle(ABC) = (K).$$

وإذا طَرَحْنا القِطْعَةَ BNA من كِلا حَدَّي الفارِق نَحْصُلُ عَلَى:

$$tr.(ABD) - lun.(AEBNA) = (K),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$lun.(AEBNA) + (K) = tr.(ABD).$$

وبالتالي، اسْتِناداً إِلَى القَضِيَّة ٨، نَجِدُ:

$$tr.(BCD) + (K) = lun.(BHCIB).$$

وبما أنّ

$$tr.(BCD) = tr.(ABD),$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$lun.(AEBNA) + (M) = lun.(BHCIB).$$

قَضِيَّة ١٤.– تَتناوَلُ هَذِهِ القَضِيَّةُ الحالَةَ الخاصَّةَ من القَضِيَّةِ ١١أ، حَيْثُ تَكونُ القَوْسُ *ABC* مُساوِيَةً لثُلْثِ مُحيطِ الدائِرَةِ.

لِنَأخُذْ دائِرَتَيْنِ تامّتَيْنِ *(S)* وَ *(U)* بحَيْثُ يَكونُ

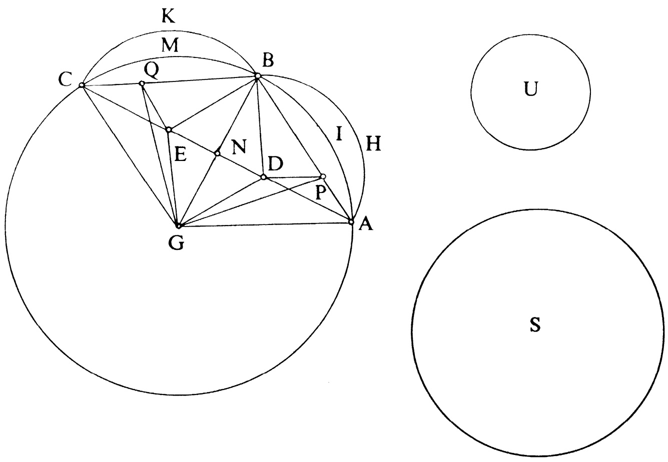
$$(S) = (1/9) \text{ cercle } (ABC)$$

وَ

$$(U) = (1/2) (S),$$

فإذاً

$$lun.(AHBIA). + lun.(BKCMB) + (S) = (GPBQ)$$
$$lun.(AHBIA). + (U) = tr.(PBG)$$
$$lun.(BKCMB) + (U) = tr.(QBG)$$



شكل ٣ – ١٤

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–١٤]

AC هُوَ ضِلْعُ المُثَلَّثِ المُتَساوِي الأضلاعِ المُحاطِ بالدائِرَةِ *ABC*، وَ *AB* هُوَ ضِلْعُ سُداسِيٍّ الأضلاعِ (المُنْتَظِمِ)، ولذَلِكَ فإنّ

$$AB^2 = (1/3) AC^2 = BC^2.$$

وكذَلِكَ فلَدَيْنا

$$DA^2 = (1/3)\ AB^2 = (1/9)\ AC^2,$$

فإذاً

$$DA = (1/3)\ AC,$$

وباستِدْلالٍ مُماثِلٍ، نَحْصُلُ عَلَى

$$CE = (1/3)\ AC,\ DE = (1/3)\ AC = DB = EB.$$

ويَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$AB^2 + BC^2 = (2/3)\ AC^2,$$

وهذا ما يَسْتَتْبِعُ المُساواةَ

$$\mathit{segm.}(AHB) + \mathit{segm.}(BKC) = (2/3)\ \mathit{segm.}(ABC).$$

ولَكِنَّ

$$\mathit{tr.}(AGD) + \mathit{tr.}(EGC) = (2/3)\ \mathit{tr.}(AGC),$$

فإذاً

$$\mathit{segm.}(AHB) + \mathit{segm.}(BKC) + \mathit{tr.}(AGD) + \mathit{tr.}(EGC) = (2/3)\ \mathit{sect.}(AGCB).$$

ولَكِن لَدَيْنا

$$(S) = (1/9)\ \mathit{cercle}(ABC) = (1/3)\ \mathit{sect.}(AGCB),$$

$$\mathit{tr.}(AGD) = \mathit{tr.}(AGP),\quad \mathit{tr.}(EGC) = \mathit{tr.}(GQC),$$

فإذاً

$$\mathit{segm.}(AHB) + \mathit{segm.}(BKC) + \mathit{tr.}(AGP) + \mathit{tr.}(GQC) + (S) = \mathit{sect.}(AGCB).$$

ونَطْرَحُ من طَرَفَي المُساواةِ المَجْموعَ

$$\mathit{segm.}(AIB) + \mathit{segm.}(BMC) + \mathit{tr.}(AGP) + \mathit{tr.}(GQC),)$$

فيَصيرُ لَدَيْنا

$$\mathit{lun.}(AHBIA). + \mathit{lun.}(BKCMB) + (S) = \mathit{quad.}(BPGQ).$$ [14]

ولَكِنَّ الهِلالَيْنِ مُتَساوِيان، ومن جِهَةٍ أُخْرَى

$$\mathit{tr.}(PBG) = \mathit{tr.}(BGQ) = \tfrac{1}{2}\ \mathit{quad.}(BPGQ),\ (U) = \tfrac{1}{2}(S),$$

فإذاً

$$\mathit{lun.}(AHBIA) + (U) = \mathit{tr.}(BPG).$$

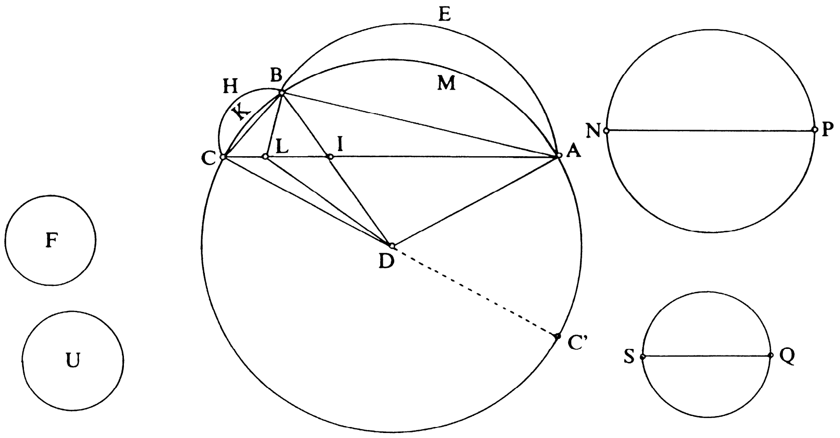
---

[14] بالفِعْلِ، لَدَيْنا:

$$\mathit{quad.}(BPGQ) = \mathit{quad.}(ABCG) - [\mathit{tr.}(APG) + \mathit{tr.}(GQC)]$$
$$= 2\ \mathit{tr.}(ABC) - (2/3)\ \mathit{tr.}(ABC) = (4/3)\ \mathit{tr.}(ABC)$$

$$lun.(BKCMB) + (U) = tr.(BGQ).$$

قَضِيَّة ١٥.– تَتَناوَلُ هَذِهِ القَضِيَّةُ حالتَيْنِ، أمّا الأُولى (١٥ أ) فهِيَ حالَةٌ خاصَّةٌ من القَضِيَّةِ ١٠.



شكل ٣ – ١٥

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–١٥]

لِتَكُنِ القَوْسُ $\widehat{AC}$ مُساوِيَةً لثُلْثِ مُحيطِ الدائِرَةِ، والقَوْسُ $\widehat{AB}$ لرُبْعِهِ، ولْتَكُنِ القِطْعَتان (AEB) وَ (BHC) مُتَشابهَتَيْنِ والقِطْعَةَ (ABC)؛ ولْتَقْطَعِ القِطْعَةُ BD القِطْعَةَ AC عَلَى النُقْطَةِ I، ولْتَكُنِ النُقْطَةُ L عَلَى AC بحَيْثُ يَكونُ $B\hat{L}C = A\hat{B}C$، ولْنَأخُذْ دائِرَتَيْنِ ذَواتَي قُطْرَيْنِ NP وَ QS بحَيْثُ يَكونُ

$$cercle\ (NP) = (1/3)\ cercle\ (ABC)$$

وَ

$$\frac{NP^2}{QS^2} = \frac{cercle(NP)}{cercle(QS)} = \frac{AC}{IL},$$

فإذاً

$$lun.(AEBMA) + lun.(BHCKB) + cercle(QS) = tr.(ABC) + tr.(DIL).$$

البُرْهان .– استِناداً إلَى المُعْطيات، يَكونُ لَدَيْنا[١٥] $A\hat{I}B = A\hat{B}C = (2/3)\pi$، والمُثَلَّثانِ AIB, ABC، من جِهَةٍ، كما المُثَلَّثانِ BLC, ABC من جِهَةٍ أُخْرَى، يَكونَان مُتَشابِهَين، فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$AB^2 = CA \,.\, AI$$

وَ

$$CB^2 = AC \,.\, CL.$$

ومن هنا نَسْتَنْبِطُ

$$\begin{aligned}\frac{IA + CL}{AC} &= \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2}\\ &= \frac{segm.(AEB) + segm.(BHC)}{segm.(ABC)}\\ &= \frac{tr.(AID) + tr.(LDC)}{tr.(ADC)}\\ &= \frac{segm.(AEB) + segm.(BHC) + tr.(AID) + tr.(LDC)}{sect.(ADCB)}.\end{aligned}$$

فإذاً

$$\frac{IA + CL}{AC} = \frac{segm.(AEB) + segm.(BHC) + tr.(AID) + tr.(LDC)}{cercle.(NP)}.$$

ولَكِنَّ

$$\frac{cercle(QS)}{cercle(NP)} = \frac{IL}{AC}$$

وَ

$$IA + CL + IL = AC,$$

ولذَلِكَ فإنّ

---

[١٥] لَدَيْنا، الزاوِيتانِ ABC وَ ADC مُتَساوِيَتانِ، مُساوِيَتان لِ $(2/3)\pi$. وبما أنّ الزاوِيَةَ ADB قائِمَةٌ، فالزاوِيَةُ IDC تُساوي:

$$(2/3)\pi - (1/2)\pi = \pi/6\ ;$$

وبالمُقابِلِ، فإنّ الزاوِيَةَ DCI تُقابلُ القَوْسَ AC' المُساوِيَةَ لـ:

$$\pi - (2/3)\pi = \pi/3,$$

فإذاً الزاوية DCI تُساوي $\pi/6$ والزاوية DIC تُساوي

$$\pi - 2\,(\pi/6) = (2/3)\pi.$$

$$segm.(AEB) + segm.(BHC) + tr.(ADI) + tr.(LDC) + cercle(QS)$$
$$= cercle(NP) = sect.(ADCB).$$

والأجْزاءُ المُشْتَرَكَةُ في الطرَفَيْنِ هِيَ:

$$segm.(AMB),\ segm.(BKC),\ tr.(ADI),\ tr.(LDC),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$(1)\quad lun.(AEBMA) + lun.(BHCKB) + cercle(QS) = tr.(ABC) + tr.(DIL).$$

وإذا كانَ d قُطْرَ دائِرَةِ ABC، يَكونُ لَدَيْنا

$$AC^2 = \tfrac{3}{4}\, d^2,\ AB^2 = \tfrac{1}{2}\, d^2.$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$AB^2 = (2/3)\ AC^2$$

فإذاً

$$IA = (2/3)\ AC$$

وَ

$$IC = (1/3)\ AC$$

(وذَلِكَ لأنّ $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{IA}{AC}$).

ولَكِنَّ

$$A\hat{I}B = B\hat{L}C = A\hat{B}C = \frac{2\pi}{3},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$B\hat{I}L = B\hat{L}I = \frac{\pi}{3},$$

ويَكونُ المُثَلَّثُ BLI ، إذاً، مُتَساوِيَ الأضْلاعِ، $BL = IL$.

ولَكِنَّ

$$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{BC}$$

وَ

$$AB > BC$$

(لأنّ $\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{AB}$)،

ولذَلِكَ فإنّ $BL > LC$، ونَسْتَنْتِجُ أنّ $LI > LC$ وَ $2.LI > IC$ ، فإذاً[١٦]

$$LI > (1/6)\, AC$$

وَ

$$cercle\,(QS) > (1/6)\, cercle\,(NP),$$

فإذاً

$$cercle\,(QS) > (1/18)\, cercle\,(ABC).$$

١٥ب.– إذا حَدَّدْنا الدائِرَتَيْنِ (F) وَ (U) بواسِطَةِ االعَلاقتَيْنِ

$$(F) = (1/36)\, cercle(ABC),$$

$$(U) = (QS) - (F)$$

(لقد رَأَيْنا أنّ: $(QS) > (1/18)\, cercle(ABC)$)،

فإنّ

$$lun.(AEBMA) + (F) = tr.(ABI)$$

---

[١٦] يُعْطينا حِسابُ BC في المُثَلَّثِ BDC المُتَساوي الساقَيْنِ (حَيْثُ تَكونُ الزاويَةُ BDC مساويةً لِ $\pi/6$):

$$BC^2 = (d^2/4)(2 - \sqrt{3}).$$

ومن جِهَةٍ أُخْرَى

$$\frac{CL}{AC} = \frac{CB^2}{AC^2},$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{CL}{AC} = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}.$$

ولَكِنّ

$$\frac{IC}{AC} = \frac{1}{3},$$

فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{LI}{AC} = \frac{IC - CL}{AC} = \frac{\sqrt{3} - 1}{3},$$

وَ

$$\frac{cercle(QS)}{cercle(NP)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{3},$$

فإذاً

$$cercle(QS) = \frac{\sqrt{3} - 1}{9}\,.cercle(ABC).$$

$$lun.(BHCKB) + (U) = tr.(BIC) + tr.(IDL).$$

منَ المَعْلومِ أنّ

$$sect.(ADBM) = (1/4)cercle(ABC), sect.(ADCB) = (1/3)cercle(ABC),$$

فإذاً

$$sect.(ADBM) = (3/4) sect.(ADCB),$$

ومن جِهَةٍ أُخْرَى

$$AB^2 = (2/3) AC^2,$$

فإذاً

$$segm.(AEB) = (2/3) segm.(ABC),$$

وَ

$$AI = (2/3) AC,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$tr.(ADI) = (2/3) tr.(ADC),$$

فإذاً

$$segm.(AEB) + tr.(ADI) = (2/3) sect.(ADCB),$$

وَ

$$sect.(ADBM) - [segm.(AEB) + tr.(ADI)]$$
$$= (1/12) sect.(ADCB) = (1/36) cercle(ACB) = (F),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$sect.(ADBM) = segm.(AEB) + tr.(ADI) + (F),$$

وإذا طَرَحْنا من طَرفَي المُساواةِ المَجْموعَ $segm.(ABM) + tr.(ADI)$، نَحْصُلُ عَلَى

$$lun.(AEBMA) + (F) = tr.(ABI)$$

أو

$$(2) \quad lun.(AEBMA) + (1/36) cercle(ABC) = tr.(ABI).$$

ونَسْتَنْبِطُ من (1) وَ (2)

$$lun.(BHCKB) + (QS) - (F) = tr.(ABC) + tr.(DIL) - tr.(ABI),$$

فإذاً

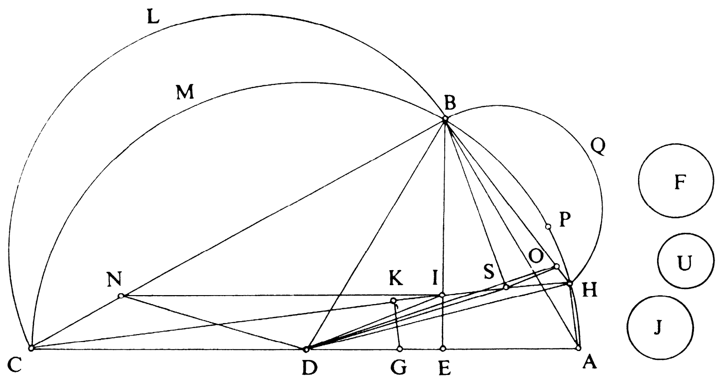
$$lun.(BHCKB) + (U) = tr.(BIC) + tr.(DIL).$$

قَضِيَّة ١٦.– لِتَكُنْ قَوْسُ $\overset{\frown}{AB}$ سُدْسَ مُحيطِ الدائِرَةِ، وقَوْسُ $\overset{\frown}{BC}$ ثُلْثَهُ، ولْتَكُنِ النُقْطَةُ E مُنْتَصَفَ AD ولْتُؤخذِ النُقْطَةُ G، بحَيْثُ يَكونُ $AG = (3/8)\ GC$، [$AG = (3/11)\ AC$ ولذَلِكَ فإنّ G تَقَعُ بَيْنَ E وَ C].

إذا كانَت قَوْسُ $\overset{\frown}{AH}$ تُساوي رُبْعَ قَوْسِ $\overset{\frown}{AB}$ فإنّ

$$\overset{\frown}{HB} = (3/8)\ \overset{\frown}{BC}$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–١٦]



شكل ٣ – ١٦

يَقْطَعُ المُسْتَقيمُ CH المُسْتَقيمَ BE عَلَى النُقْطَةِ I، ولَدَيْنا[١٧]

$$B\hat{I}C = H\hat{B}C.$$

لِنَأخُذْ $GK // AH$ وَ K بَيْنَ I وَ C، فإذاً

$$\frac{KH}{KC} = \frac{GA}{GC} = \frac{\overset{\frown}{HB}}{\overset{\frown}{BC}} = \frac{3}{8}.$$

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{CK}{HC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{\overset{\frown}{HBC}}$$

وَ

---

[١٧] لَدَيْنا $B\hat{I}C = H\hat{I}E$، وفي رُباعِيَّي الأضلاعِ $AHBC$ وَ $AHIE$ القابِلَيْنِ للإحاطَةِ بدائرَتَيْنِ، يَكونُ للزاوِيَتَيْنِ HBC وَ HIE نَفْسُ الزاوِيَةِ المُكَمِّلَةِ $H\hat{A}C$، فإذاً الزوايا الثلاثُ HBC وَ HIE وَ BIC مُتَساوِيَةٌ.

$$\frac{IC}{HC} > \frac{\widehat{BC}}{\widehat{HBC}}$$

(لأنّ $IC > KC$)،

ولَكِنَّ

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{HBC}} = \frac{B\hat{D}C}{C\hat{D}H} = \frac{B\hat{H}C}{\pi - H\hat{B}C} = \frac{sect.(BDCM)}{sect.(CDHB)},$$

فإذاً

$$\frac{IC}{HC} > \frac{sect.(BDCM)}{sect.(CDHB)}.$$

لِتَكُنِ النُقْطَةُ S عَلَى IH بَحَيْثُ يَكونُ $B\hat{S}H = H\hat{B}C$ وَلْيَكُنْ $SO//DH$ وَ $IN//DC$. القِطاعُ $(CDHB)$ هُوَ جُزْءٌ مَعْلومٌ من دائِرَةِ (ABC)،[فالقَوْسُ $\widehat{AH}$ تُساوي رُبْعَ القَوْسِ $\widehat{AB}$ أي ما يُعادِلُ $1/24$ من مُحيطِ الدائِرَةِ، فإذاً قِطاعُ $(CDHB)$ يُساوي $11/24$ من دائِرَةِ (ABC)].

لِتَكُنْ (F) دائِرَةً مُعادِلةً لِهَذا القِطاعِ، أي مُعادِلةً لِ $11/24$ من دائِرَةِ (ABC)؛ وَلْتَكُنْ (U) وَ (J) دائِرَتَيْنِ بَحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{(U)}{(F)} = \frac{SI}{HC}$$

وَ

$$\frac{(J)}{(F)} = \frac{IK}{HC}.$$

ولِتَكُنْ (HQB) وَ (BLC) القِطْعَتَيْنِ المُتَشابِهَتَيْنِ والقِطْعَةَ (ABC)، والمَبْنِيَّتَيْنِ تِباعاً عَلَى HB وَ BC. عِنْدَها يَكونُ لَدَيْنا، اسْتِناداً إِلَى القَضِيَّة ١٠:

(1) $lun.(HQBPH) + lun.(BLCMB) + (U) = tr.(DOB) + tr.(DNB).$

من جِهَةٍ أُخْرَى

$$\frac{IK}{CH} = \frac{IC}{CH} - \frac{KC}{CH} = \frac{IC}{CH} - \frac{\widehat{BC}}{\widehat{HBC}} = \frac{IC}{CH} - \frac{sect.(BDCM)}{sect.(CDHB)}$$

وَ

$$\frac{IK}{CH} = \frac{(J)}{(F)} = \frac{(J)}{sect.(CDHB)},$$

فإذاً

$$\frac{IC}{CH} = \frac{sect.(BDCM) + (J)}{sect.(CDHB)} \quad .$$

ولَكِن، بما أنّ المُثَلَّثَيْنِ BIC وَ HBC مُتَشابِهَان، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{IC}{CH} = \frac{BC^2}{CH^2} - \frac{segm.(BLC)}{segm.(CBH)} = \frac{tr.(IDC)}{tr.(CDH)} = \frac{tr.(DNC)}{tr.(CDH)}.$$

$$\frac{IC}{CH} = \frac{segm.(BLC) + tr.(DNC)}{sect.(CDHB)}.$$

ونَستَنبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$segm.(BLC) + tr.(DNC) = sect.(BDCM) + (J).$$

وإذا طَرَحْنا من طَرفَي المُساواةِ المَجْموعَ $segm.(BMC) + tr.(DNC)$، نَحْصُلُ عَلَى

$$lun.(BLCMB) = tr.(BDN) + (J). \tag{2}$$

ونَستَنبِطُ من العلاقتَيْنِ (1) وَ (2) العَلاقَةَ التالية:

$$lun.(HQBPH) + (U) + (J) = tr.(DOB).$$

باخْتِصارٍ – لِنَأخُذْ دائِرَةً مُمَرْكَزَةً في النُقْطَةِ D، وَلْتَكُنِ القَوْسانِ $\widehat{BC}$ وَ $\widehat{BH}$ مُساوِيَتَيْنِ عَلَى التَوالي لِثُلُثِ وثُمْنِ مُحيطِ الدائِرَةِ، وَلْنَبْنِ عَلَى BC وَ BH قِطْعَتَيْنِ مُتَشابِهَتَيْنِ والقِطْعَةَ HBC، وهَكَذا نَكونُ قد حَدَّدْنا الهِلالَيْنِ $(HQBPH)$ وَ $(BLCMB)$. فإذا حَدَّدْنا الدوائرَ (F)، (U)، (J) بحَيْثُ تَكونُ الدائِرَةُ (F) مُساوِيَةً لِ $11/24$ من الدائِرَةِ المفروضةِ، وَ $\frac{(U)}{(F)} = \frac{SI}{HC}$ وَ $\frac{(J)}{(F)} = \frac{IK}{HC}$ وبحَيْثُ تَكونُ النقاطُ K وَ I وَ S من HC مُحَقِّقَةً لِلعَلاقاتِ

$$\frac{KH}{KC} = 3/8, \; B\hat{I}C = B\hat{S}H = C\hat{B}H,$$

وإذا كانَت O النُقْطَةَ من BH وَ N النُقْطَةَ من BC المأخوذتَيْنِ بحَيْثُ يَكونُ

$$SO \,//\, DH, \; IN \,//\, DC,$$

فإنّ

$$lun.(BLCMB) = tr.(BDN) + (J)$$

$$lun.(HQBPH) + (U) + (J) = tr.(DOB).$$

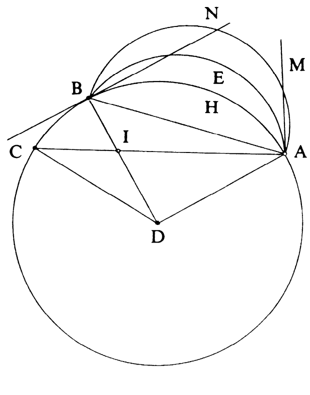
قَضِيَّة ١٧. – لِتَكُنِ القَوْسان $\widehat{AC}$ وَ $\widehat{AB}$ مُساوِيَتَيْنِ عَلَى التَوالي لِثُلُثِ ورُبْعِ مُحيطِ الدائِرَةِ. وَلْتَكُنِ القِطْعَةُ *(AEB)* مُتَشابِهَةً والقِطْعَةَ *(ABC)*، وَلْتَكُنْ *(ANB)* نِصْفَ دائِرَةٍ، وَلْيَكُنْ

$$\text{cercle } (K) = (1/36) \text{ cercle } (ABC),$$

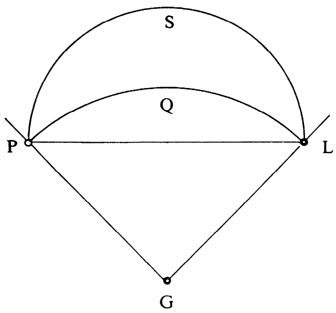
فإذاً

$$\text{lun.}(ANBEA) = \text{tr.}(ADI) + (K)$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–١٧أ]



شكل ٣ – ١٧ أ



شكل ٣ – ١٧ب

إذا كانَ *AM* هُوَ المُماسَّ عَلَى النُقْطَةِ *A* للقَوْسِ $\widehat{AEB}$، فإنّ

$$M\hat{A}B = \pi/3$$

غَيْرَ أنّ المُماسَّ عَلَى النُقْطَةِ *A* للقَوْسِ *ANB* يَكونُ عَموداً عَلَى *AB*، فإذاً *AM* يَقْطَعُ القَوْسَ $\widehat{ANB}$ ، وتَقَعُ هَذِهِ القَوْسُ كُلُّها خارِجَ دائِرَةِ *AEB*.

اسْتِناداً إِلَى القَضِيَّةِ ١٥، يَكونُ لَدَيْنا

$$\text{lun.}(AEBHA) + (K) = \text{tr.}(ABI);$$

ولذَلِكَ، فإذا زِدْنا *tr.(ADI)* عَلَى طَرَفَيِ المُساواةِ، نَحْصُلُ عَلَى

$$\text{lun.}(AEBHA) + (K) + \text{tr.}(ADI) = \text{tr.}(ABD).$$

ولَكِن اسْتِناداً إِلَى القَضِيَّةِ ٩، لَدَيْنا:

$$lun.(ANBHA) = tr.(ABD);$$

ونَستَنْتِجُ من ذَلِكَ:

$$lun.(ANBEA) = tr.(ADI) + (K).$$

لِيَكُنْ *(LGD)* مُثَلَّثاً قائمَ الزاوِيَةِ، مُتَساوِيَ الساقَيْنِ، مُعادِلاً للمُثَلَّثِ *ADI* [انْظُرْ ٣-١٧ ب]. القَوْسُ $\widehat{LQP}$ من الدائِرَةِ *(G, GP)* ونِصْفُ الدائِرَةِ *(LSP)* يُحَدِّدانِ الهِلالَ *(LSPQL)*.

ولَدَيْنا استِناداً إلى القَضِيَّةِ ٩:

$$lun.(LSPQL) = tr.(LGP);$$

بَيْدَ أنّ

$$tr.(LGP) = tr.(ADI),$$

فإذاً

$$lun.(ANBEA) = lun.(LSPQL) + (K).$$

قَضِيَّة ١٨.– لِنَرْمُزْ بِـ *D* إلى مِساحَةِ دائِرَةِ *(D, DA)*. وَلْتَكُنْ كُلُّ واحدةٍ من القَوْسَيْنِ $\widehat{AB}$ وَ $\widehat{BC}$ مُساوِيَةً لِسُدسِ مُحيطِ الدائِرَةِ، وَلْتَكُنِ القِطْعَتان *(AEB)* وَ *(BIC)* مُتَشابِهَتَيْنِ وَ *segm.(ABC)*، وَلْيَكُنْ *(AFC)* نِصْفَ دائِرَةٍ ذاتِ قُطْرٍ *AC*، وَلْتَكُنِ النُقْطَتان *L* وَ *M* عَلَى *AC* بحَيْثُ يَكونُ

$$B\hat{L}A = B\widehat{M}C = A\hat{B}C = 2\pi/3,$$

ولِتَكُنْ *(N)* وَ *(U)* دائِرَتَيْنِ مَعْلومتَيْنِ،

$(N) = (1/9)(D)$ وَ $(U) = (1/24)(D)$ وَ $(P) = (N) + (U)$،

فإذاً يَكونُ لَدَيْنا

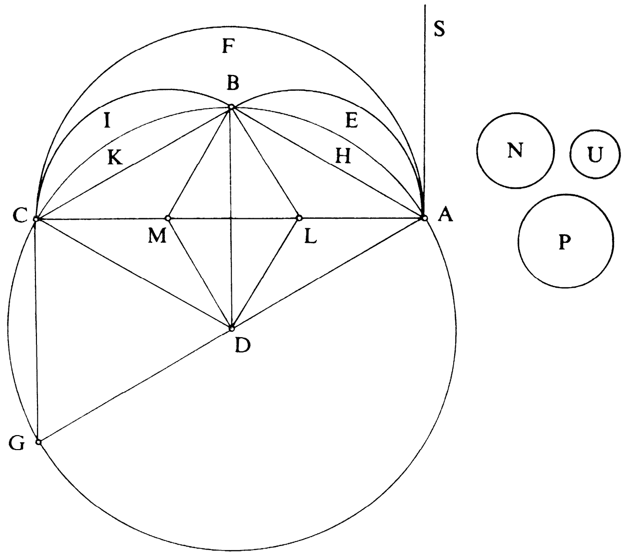
$$fig.(AFCIBEA) + tr.(DLM) = (P).$$

[انْظُرْ ٣-١٨].

لِيَكُنْ *AS* مُماسّاً عَلَى النُقْطَةِ *A* للقَوْسِ $\widehat{AEB}$، لَدَيْنا

$$S\hat{A}L = S\hat{A}B + B\hat{A}C = \pi/3 + \pi/6 = \pi/2$$

فإذاً القَوْسان $\overset{\frown}{AEB}$ وَ $\overset{\frown}{AFC}$ مُتماسَّتانِ عَلَى النُقْطَةِ A. ومَعْلومٌ أنّ النُقْطَةَ B تَقَعُ داخِلَ دائِرَةِ AFC، فإذاً تَكونُ القَوْسُ $\overset{\frown}{AEB}$ داخِلَ دائِرَةِ[18] AFC، وهذا صَحيحٌ



شكل ٣ – ١٨

كذَلِكَ بِالنِسْبَةِ إلى القَوْسِ $\overset{\frown}{BIC}$. يَقْطَعُ المُسْتَقيمُ AD الدائِرَةَ (D, DA) عَلَى النُقْطَةِ G، ولَدَيْنا

$$\overset{\frown}{CG} = \overset{\frown}{AB}.$$

ولَدَيْنا

$$tr.(ADC) = tr.(CDG) < sect.(CDG) = (1/6)\ (D)$$

وَ

$$tr.(DLM) = (1/3)\ tr.(ADC),$$

فإذاً

$$tr.(DLM) < ½\ (N).$$

ولَكِن اسْتِناداً إِلَى القَضِيَّةِ ١٤ يَكونُ لَدَيْنا:

$$(1) \quad lun.(AEBHA) + lun.(BICKB) + (N) = tr.(ABC) + tr.(DLM).$$

[18] وذَلِكَ استِناداً إلى القَضِيَّةِ ١٣ من المقالةِ الثالثةِ من كِتابِ ***الأصول***.

لِيَكُنْ $(U) = (1/24)(D)$، ومن المَعْلومِ، اسْتِناداً إِلَى القَضِيَّةِ ١٣، أنّ

$$(2) \quad lun.(AFCBA)=tr(ADC) + (U) = tr.(ABC) + (U).$$

ونَسْتَنْبطُ اسْتِناداً إِلَى (1) وَ (2)، أنّ

$$lun.(AEBHA) + lun.(BICKB) + (N) - tr.(DLM) + (U) = lun.(AFCBA),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$(N) - tr.(DLM) + (U) = fig.(AFCIBEA).$$

لِنَجْعَلْ

$$(N) + (U) = (P)$$

فيَكونُ لَدَيْنا

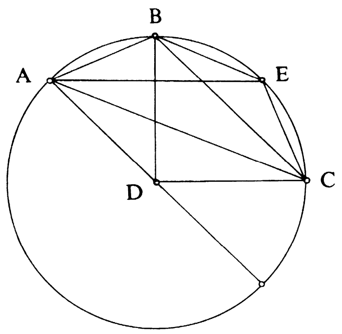
$$(P) = fig.(AFCIBEA) + tr.(DLM).$$

لِنُلاحِظْ أنّ

$$(P) = (1/9)(D) + (1/24)(D) = (11/72)(D)$$

وَ

$$tr.(DLM) = (1/3)tr.(ABC)$$



شكل ٣ – ١٩

قَضِيَّة ١٩.– نَوَدُّ بناءَ قِطْعَةٍ من دائِرَةٍ تَكونُ مَحْصورَةً بَيْنَ مُتَوازِيَيْنِ، ومُساوِيَةً لرُبْعِ الدائِرَةِ.

لِنَأخُذْ، عَلَى دائِرَةٍ مُمَرْكَزةٍ في النُقْطَةِ D، النِقاطَ A، B، C، بحَيْثُ يَكونُ $B\hat{D}C=\pi/2$ وَ $DA // BC$. فإذا كانَت النُقْطَةُ E مُنْتَصَفَ القَوْسِ $\widehat{BC}$، فإنّ المُسْتَقيمَيْنِ BE وَ CA يُمَثّلانِ حَلاًّ لِلمَسْأَلَةِ.

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣-١٩].

إذا كانَ $\widehat{BDC} = \pi/2$، يَكونُ لَدَيْنا

$$B\hat{C}D = C\hat{B}D = B\hat{D}A = \pi/4.$$

فإذاً

$$\widehat{AB} = \widehat{EC} = \widehat{EB},$$

ولذَلِكَ :

١) تَتَحَقَّقُ العَلاقَةُ

$$segm.(AB) = segm.(EC) = segm.(BE)$$

٢) تَتَساوَى الزاوِيَتانِ $B\hat{C}A$ وَ $E\hat{B}C$، فإذاً المُسْتَقيمانِ BE وَ AC مُتَوازِيان.

ومن جِهَةٍ أُخْرَى، بما أنّ $AD // BC$، يَكونُ لَدَيْنا

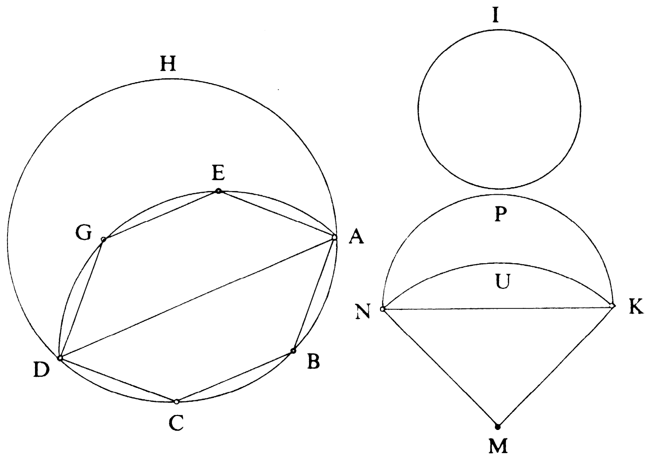
$$tr.(BAC) = tr.(BDC),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$tr.(BAC) + tr.(BEC) = tr.(BDC) + tr.(BEC)$$
$$quadr.(ABEC) = quadr.(DBEC)$$
$$quadr.(ABEC) + segm.(AB) + segm.(EC) =$$
$$=quadr.(DBEC) + segm.(BE)+ segm.(EC)$$
$$portion(EBAC) = secteur(BDCE) = ¼\ cercle\ (ABC).$$

قَضِيَّة ٢٠.– لِنَأخُذِ النِقاطَ A, B, C, D عَلَى دائِرَةٍ أُولَى (ABH)، بحَيْثُ تَكونُ الأقواسُ $\widehat{AB}$، $\widehat{BC}$، $\widehat{CD}$ مُتَساوِيَةً فيما بَيْنَها، ومُساوِيَةً (كُلٌّ واحِدَةٍ منها) لِثُمْنِ مُحيطِ الدائِرَةِ. لِنَبْنِ قَوْساً $AEGD$ مُتَناظِرَةً مع القَوْسِ $ABCD$ بحَيْثُ يَكونُ $\widehat{AE} = \widehat{EG} = \widehat{GD}$.

فإذاً، استْنِاداً إلَى القَضِيَّةِ ١٩، يَكونُ لَدَيْنا $BC \parallel AD \parallel EG$، وتَكونُ كُلُّ واحِدَةٍ من قِطْعَتَي الدائِرَتَيْنِ $(ABCD)$ وَ $(AEGD)$، المَحْصورَتَيْنِ بَيْنَ المُسْتَقيمَيْنِ المُتَوازِيَيْنِ، مُساوِيَةً لرُبْعِ الدائِرَةِ. [انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٢٠].



شكل ٣ – ٢٠

فإذاً

$$portion(ABCD) + portion(AEGD) = \tfrac{1}{2}\ cercle(ABH),$$

ما يَسْتَتْبِعُ العَلاقَةَ

$$lun.(AHDGE) + segm.(GE) + segm.(CB) = \tfrac{1}{2}\ cercle(ABH).$$

ولَكِن، لَدَيْنا

$$segm.(GE) = segm.(BC) = segm.(AE) = segm.(DG),$$

فإذاً

$$lun.(AHDGE) = portion(ABCD) + quadr.(AEGD).$$

لِنَجْعَلْ

$$(I) = (1/4)\ cercle(ABH)$$

ولِيَكُنْ KMN مُثَلَّثاً مُتَساوِي الضِلْعَيْنِ قائمَ الزاوِيَةِ $\hat{M}$، بحَيْثُ يَكونُ

$$tr.(KMN) = quadr.(AEGD).$$

فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$lun.(AHDGEA) = (I) + tr.(KMN).$$

تُحَدِّدُ القَوْسُ $\overset{\frown}{KUN}$ من الدائِرَةِ (M, MK) مع نِصْفِ الدائِرَةِ (KPN) الهِلالَ $(KPNUK)$، ويَكونُ لَدَيْنا:

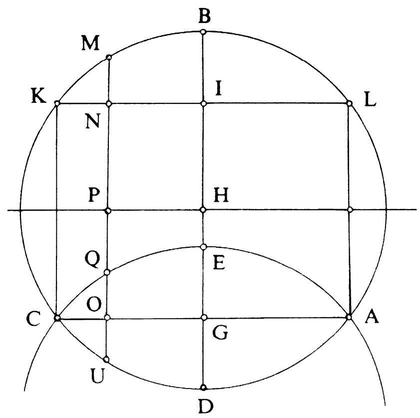
$$lun.(KPNUK) = tr.(KMN),$$

فإذاً

$$lun.(AHDGEA) = lun.(KPNUK) + (I).$$

قَضِيَّة ٢١.– خاصِيَّةُ الأهِلَّةِ الَّتِي يَكونُ مَجْموعُ قَوْسَيْها مُساوِياً لُمحيطِ دائِرَةٍ تامَّةٍ. [الهِلالُ المَدْروسُ في القَضِيَّةِ ٢٠ له هَذِهِ الخاصِيَّةُ].

لِنَأخُذِ الدائِرَةَ (H, HA) والوَتَرَ AC من هَذِهِ الدائِرَةِ، الَّذي يَفْصِلُ القَوْسَيْنِ $\overset{\frown}{ADC}$ وَ $\overset{\frown}{ABC}$ $(\overset{\frown}{ADC} < \overset{\frown}{ABC})$. ولْتَكُنْ $\overset{\frown}{AEC}$ القَوْسَ الُمتناظِرَةَ و قَوْسَ $\overset{\frown}{ADC}$ [انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٢١]. الأعْمِدَةُ القائِمَةُ عَلَى AC، الخارِجَةُ من A وَ C ومن النُقْطَةِ



شكل ٣ – ٢١

G – وهِيَ مُنْتَصَفُ AC –، ومن أيِّ نُقْطَةٍ O من AC، تُحْدِثُ في الهِلالِ $(ABCEA)$، القِطَعَ AL وَ CK وَ EB وَ MQ والَّتِي تَكونُ كُلُّها مُتَساوِيَةً.

مُلاحَظَة .– العَمودُ القائِمِ عَلَى الوَتَرِ AC، الخارِجُ من مُنْتَصَفِهِ G، يَقْطَعُ قَوْسَيِ الهِلالِ عَلَى E وَ B. وتَرْتَبِطُ القَوْسانِ $\overset{\frown}{AEC}$ وَ $\overset{\frown}{LBK}$ بِواسِطَةِ الانْسِحابِ الخَطِّيِّ الَّذي يُحْدِثُهُ الُمتَّجِهُ $\overline{EB}$. ومن هنا يَنْتُجُ ما سَبَقَ ذِكْرُهُ:

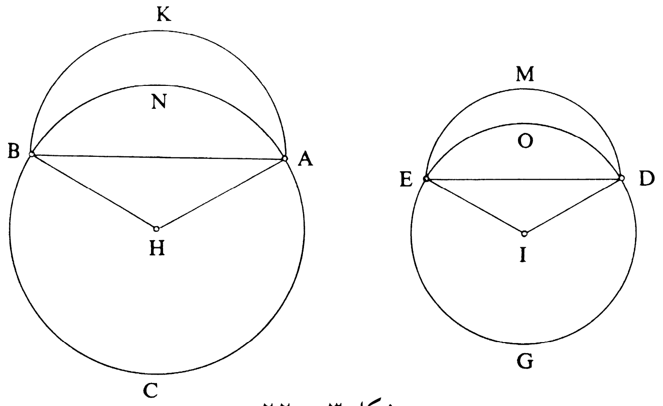
$$AL = EB = QM = CK.$$

نُشيرُ إلى أنّ هَذِهِ الخاصِيَّةِ للانسحاب الخَطِّيِّ المُرْتَبطَةِ بدائِرَتَيْنِ مُتَساوِيَتَيْنِ قد دَرَسَها ابنُ الهَيْثَمِ في مُؤَلَّفِهِ ***في المَعْلومات***، وتَحْديداً في القَضِيَّةِ[١٩] رقم ١١.

قَضِيَّة ٢٢.– إذا كانَ الهِلالانِ، المَبْنِيّان عَلَى القَوْسيْنِ المُتَشابِهَتَيْنِ $\overset{\frown}{ANB}$ وَ $\overset{\frown}{DOE}$ من الدائِرَتَيْنِ (H) وَ (I) عَلَى الترتيب، قد حُدّا بقَوْسيْنِ مُتَشابِهَتَيْنِ هما $\overset{\frown}{AKB}$ وَ $\overset{\frown}{DME}$ عَلَى الترتيب، فإنّ

$$\frac{lun.(AKBNA)}{lun.(DMEOD)} = \frac{(H)}{(I)}$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٢٢]



شكل ٣ – ٢٢

وبما أنّ الأَقَواسَ المُتَشابِهَةَ تَكونُ مُرْتَبِطَةً بقِطَعٍ مُتَشابِهَةٍ، يَكونُ لَدَيْنا إذاً، وَفْقَ القَضِيَّةِ ٦:

$$\frac{AB^2}{ED^2} = \frac{(H)}{(I)} = \frac{segm.(ANB)}{segm.(DOE)} = \frac{segm.(AKB)}{segm.(DME)},$$

وبالتالي نَحْصُلُ عَلَى

[١٩] انْظُرْ:

R. Rashed, «La philosophie des mathématiques d’Ibn al-Haytham. II *Les Connus*», *MIDEO*, 21 (1993), pp. 178-179.

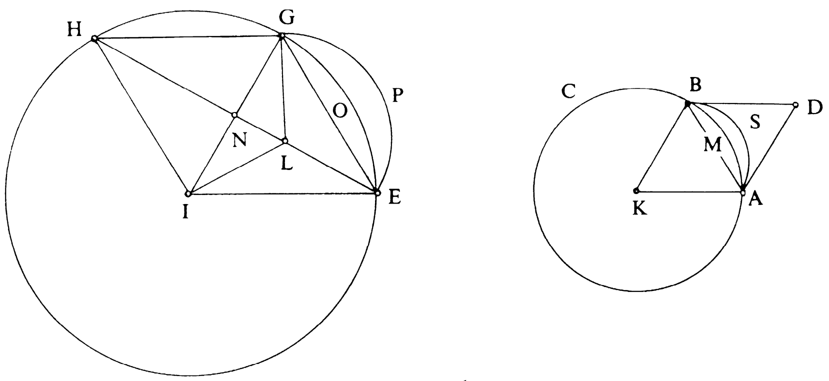
$$\frac{AB^2}{ED^2} = \frac{(H)}{(I)} = \frac{lun.(AKBNA)}{lun.(DMEOD)}.$$

قَضِيَّة ٢٣.– لِنَأخُذِ الدائِرَتَيْنِ (K) وَ (I) بحَيْثُ يَكونُ $(I) = 3(K)$ وَلْنَأخُذْ في كُلِّ واحِدَةٍ منهُما وَتَراً مُساوِيَاً لضِلْعِ سُداسِيِّ الأضلاعِ المُنْتَظِمِ المُحاطِ بالدائِرَةِ ذاتِ الصِلَةِ. والوَتَرانِ المَذْكورانِ هُما AB في (K) وَ EG في (I).

لِنَبْنِ عَلَى AB مُثَلَّثاً مُتَساوِيَ الأضْلاعِ ABD، بحَيْثُ تَكونُ النُقْطَةُ D خارِجَ الدائِرَةِ، وَلْنَبْنِ أيضاً عَلَى EG قَوْساً $\widehat{EPG}$ مُساوِيَةً لِثُلُثِ مُحيطِ الدائِرَةِ، فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$lun.(EPGOE) = fig.(ADBMA)$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣–٢٣]



شكل ٣ – ٢٣

البُرْهان .– لِنَأخُذْ EH مُساوِيَاً لضِلْعِ المُثَلَّث المُتَساوِي الأضلاعِ المُحاطِ بالدائِرَةِ وَلْتَكُنْ L نُقْطَةً عَلَى EH، بحَيْثُ يَكونُ $G\hat{L}E = E\hat{G}H$، فإذاً وَفْقَ القَضِيَّةِ ١٤ سيَكونُ لَدَيْنا:

$$lun.(EPGOE) + (1/18)\ (I) = tr.(EGN) + tr.(ILN)$$

$= tr.(HLI) = (2/3)\ tr.(EIH)$

$= (2/3)\ (EIG).$

ولَكِنَّهُ من المَعْلومِ أنّ $(I) = 3(K)$، فإذاً $EG^2 = 3AB^2$، وبالتالي فإنّ

$$tr.(EIG) = 3\ tr.(AKB)$$

$$(2/3)\ tr.(EIG) = 2\ tr.(AKB) = losange(ADBK),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$lun.(EPGOE) + (1/18)\ (I) = losange(ADBK).$$

ومن جِهَةٍ أُخْرَى

$$sect.(AKBM) = (1/6)\ (K) = (1/18)\ (I),$$

فإذاً

$$lun.(EPGOE) = losange(ADBK) - sect.(AKBM)$$

$$lun.(EPGOE) = fig.(ADBMA).$$

وإذا ما بَنَيْنا عَلَى AB القَوْسَ ASB مُساوِيَةً لِثُلُثِ المُحيطِ، والهِلالانِ $(EPGOE)$ وَ $(ASBMA)$ يَكونَان مُتَشابِهَيْنِ، فإذاً

$$3\ lun.(ASBMA) = fig.(ADBMA)$$

وَ

$$2\ lun.(ASBMA) = fig.(ADBSA).$$

وبِهَذِهِ القَضِيَّةِ تُختَتَمُ ***المقالة المستقصاة*** لابنِ الهَيْثَمِ وهِيَ المُؤَلَّفُ الأَكْثَرُ أهَمِيَّةً حَوْلَ الأهِلَّةِ من بَيْنِ المُؤَلَّفات الَّتِي نَعْرِفُها، قَبْلَ ظُهور الأعْمالِ الَّتِي كُرِّسَت لِهَذا المَوْضوعِ في القَرْنِ الثامِنِ عَشَرَ.

١–٢ النُصوصُ المَخْطوطِيَّة

١-٢-١ *قَوْلٌ لِلحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ في الهِلاليّاتِ*

١-٢-٢ *قَوْلٌ لِلحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ في تَرْبيعِ الدائِرَةِ*

١-٢-٣ *مَقالَةٌ مُسْتَقْصاةٌ لِلحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ في الأشْكالِ الهِلالِيَّةِ*

١٤ – ظ

قول للحسن بن الحسن بن الهيثم
في الهلاليات

إني لما نظرت، أطال الله بقاء سيدنا الأستاذ وأدام كفايته وحرس نعمته، في الشكل الهلالي المساوي للمثلث الذي ذكره المتقدمون، في بديع خاصته وعجيب تركيبه، حداني ذلك على أن فكرت في خواص الهلاليات وما يعرض فيها من غريب المعاني، فاستنبطت من ذلك أشكالاً ضمنتها هذه الرسالة، وقد أخرجتها إلى حضرته ليقف عليها ويتأملها ويستدل بها على فضيلة علم الهندسة وغوامض معانيها، والله أسأل حسن المعونة فيما أوفي وهو وليّ ذلك.

〈آ〉 كلّ دائرة يخرج فيها قطر كيفما اتفق ووتر مساوٍ لنصف القطر ويوصل بين المركز وبين طرفي الوتر ويعمل على الوتر نصف دائرة، فإن الهلال الذي يحدث مع الدائرة التي هي جزء من الأربعة والعشرين جزءًا من الدائرة الأولى مساويان للمثلث الذي حدث.

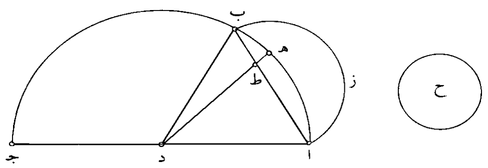
مثال ذلك: دائرة ا ب ج مركزها د وخرج فيها قطر ا ج مع وتر ا ب وهو مساوٍ لنصف القطر، ووصل د ب وعمل على خط ا ب نصف دائرة ا ز ب وجعل دائرة ح جزء من أربعة وعشرين جزءًا من دائرة ا ب ج.

فأقول: إن هلال ا ز ب ه ودائرة ح مجموعين مساويان لمثلث ا ب د.

برهان ذلك: أنا نفصل قوس ا ه ثمن الدائرة، ونصل د ط ه. فلأن خط ا ب نصف قطر ا ج يكون مربع ا ب ربع مربع ا ج ونسبته إليه 〈كنسبة الدائرة إلى الدائرة، لأن نسبة الدائرة〉 إلى الدائرة كنسبة مربع قطرها إلى مربع قطرها. فالدائرة التي قطرها ا ب ربع دائرة ا ب ج، فنصف دائرة ا ز ب هو ثمن دائرة ا ب ج. ولكن قوس ا ه ثمن دائرة ا ب ج، فقطاع ا ه د هو ثمن دائرة ا ب ج. وقد تبيّن أن نصف 〈دائرة〉 ا ز ب هو ثمن دائرة ا ب ج، فقطاع ا ه د مساوٍ

10 طرفي: طرف – 13 جزء: جزءا – 16 د ط ه: د ط ر – 18 فالدائرة: والدائرة – 19 ولكن: الواو ممحوة.

لنصف ⟨دائرة⟩ ا ز ب. ونلقي قطعة ا هـ ط المشتركة، فيبقى مثلث ا ط د مساويًا لهلال ا ز ب هـ وقطعةِ ب هـ ط. ونأخذ مثلث ب ط د مشتركًا، فيكون مثلث ا ب د مساويًا لهلال ا ز ب هـ وقطعةِ ب هـ ط ومثلث ب ط د. ولكن قطعة ب هـ ط ومثلث ب ط د هو قطاع ب هـ د. فمثلث ا ب د مساوٍ لهلال ا ز ب هـ ولقطاع ب د هـ. ولكن ا هـ ثمن الدائرة وا ب سدس الدائرة فـ هـ ب جزء من أربعة وعشرين جزءًا من محيط الدائرة،/ فقطاع ب هـ د جزء من أربعة وعشرين ١٥ - و
جزءًا من الدائرة. ودائرة ح جزء من أربعة وعشرين جزءًا ⟨من الدائرة⟩، فقطاع ب هـ د مساوٍ لدائرة ح، فهلال ا ز ب هـ ودائرة ح مساويان بمجموعها لمثلث ا ب د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



⟨ب⟩ كل دائرة يُخرج فيها قطر من أقطارها ويُخرج فيها ضلع المثلث المتساوي الأضلاع ويوصل بين المركز وطرفي الوتر ويُعمل على الوتر نصف دائرة، فإن الهلال الذي يحدث مساوٍ للمثلث الحادث والدائرة التي هي جزء من أربعة وعشرين جزءًا من الدائرة.

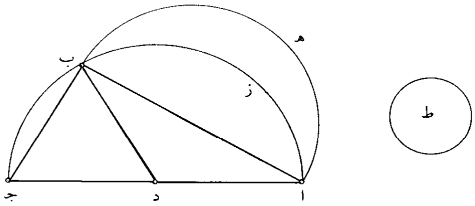
مثال ذلك: دائرة ا ب جـ مركزها د ونخرج فيها قطر ا جـ، ووتر ا ب ⟨و⟩هو مساوٍ لضلع المثلث ⟨المتساوي الأضلاع⟩، ونصل د ب. وعُمِل على ا ب نصف دائرة وجُعِل دائرة ط جزءًا من أربعة وعشرين جزءًا من دائرة ا ب جـ.

فأقول: إن هلال ا هـ ب ز مساوٍ لمثلث ا ب د ولدائرة ط.

برهان ذلك: أنا نصل ب جـ. فلأن ا ب وتر المثلث وا ب جـ نصف دائرة يكون ⟨قوس⟩ ب جـ سدس ⟨دائرة⟩. فخط ب جـ نصف القطر وزاوية ا ب جـ قائمة لأنها في نصف دائرة. فمربع ا جـ مثل مربع ا ب ومربع ب جـ، ولكن مربع ب جـ ربع مربع ا جـ، ويبقى مربع ا ب ثلاثة أرباع مربع ا جـ. فالدائرة التي قطرها ا ب ثلاثة أرباع دائرة ا ب جـ، ونصف ⟨دائرة⟩ ا هـ ب ثلاثة أرباع نصف ⟨دائرة⟩ ا ب جـ. ولكن قوس ا ب ثلثا قوس ا ب جـ، فقطاع

1 مساويًا: مساوٍ – 3 قطاع: قطع – 9 وطرفي: وطرف – 11 مساوٍ: مساويًا – 13 جزءًا: جزء.

ا ز ب د ثلثا نصف ⟨دائرة⟩ ا ب جـ. ودائرة ط جزء من أربعة وعشرين جزءًا من الدائرة. ودائرة ط نصف سدس ⟨نصف⟩ دائرة ا ب جـ وقطاع ا ز ب د ثلثا النصف. فمجموع قطاع ا ز ب د ودائرة ط ثلاثة أرباع نصف ⟨دائرة⟩ ا ب جـ. وقد [كان] تبيّن أن نصف ⟨دائرة⟩ ا هـ ب مساوٍ لقطاع ا ز ب د ولدائرة ط. فإذا ألقينا قطعة ا ز ب المشتركة بقي هلال ا هـ ز ب مساويًا لمثلث ا ب د ولدائرة ط؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

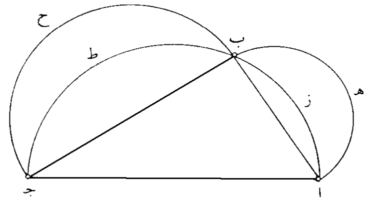


⟨جـ⟩ كل دائرة يُخرج فيها قطر كيفما اتّفق، فإن كل نقطة تتعلم على محيطها / وتوصل بطرفي القطر بخطين ويُعمَل عليهما نصفا دائرتين، فإن الهلالين اللذين يحدثان أبدًا مثل المثلث الحادث. ١٥ - ظ

مثال ذلك: دائرة ا ب جـ خرج فيها قطر ا جـ كيفما اتّفق وتعلم على محيطها نقطة كيفما اتّفق، وهي نقطة ب، ووصل خطا ا ب ب جـ، وعُمِل عليهما نصفا دائرتين وهما ا هـ ب ب ح جـ.

فأقول: إن هلالي ا هـ ب ب ح جـ مساويان لمثلث ا ب جـ.

برهان ذلك: أن زاوية ا ب جـ قائمة، فمربع ا جـ مساوٍ لمربعي ا ب ب جـ. فدائرة ا ب جـ مساوية للدائرتين اللتين قطراهما ا ب ب جـ، فنصف دائرة ا ب جـ مساوٍ لنصفي ⟨دائرتي⟩ ا هـ ب ب ح جـ. فنلقي قطعتي ا ز ب ب ط جـ المشتركتين فيبقى مثلث ا ب جـ مساويًا لهلالي ا هـ ب ز ب ح جـ ط؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



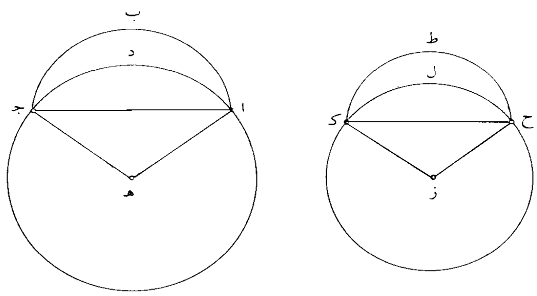
2 قطاع (الثانية): ممحوة – 4 مساويًا: مساوٍ.

‹د› كل هلالين من قسي متشابهة فإن نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة مربعي قاعدتيهما أحدهما إلى الآخر.

مثال ذلك: هلالا ا ب جـ د ح ط ك ل من قسي متشابهة، وقاعدتاهما ا جـ ح ك.

فأقول: إن نسبة هلال ا ب جـ د إلى هلال ح ط ك ل كنسبة مربع ا جـ إلى مربع ح ك.

برهان ذلك: أن نرسم دائرتين – ا د جـ ح ل ك – وليكن مركزاهما نقطتي هـ ز، ونصل هـ ا هـ جـ ز ح ز ك. فلأن قوس ا د جـ شبيه بقوس ح ل ك، تكون نسبة الدائرة إلى الدائرة كنسبة قطاع ا جـ هـ إلى قطاع ح ك ز. ونسبة الدائرة إلى الدائرة كنسبة مربع ا جـ إلى مربع ح ك. فنسبة القطاع إلى القطاع كنسبة مربع ا جـ إلى مربع ح ك. ونسبة مثلث ا جـ هـ إلى مثلث ح ك ز كنسبة مربع ا جـ إلى مربع ح ك أيضًا لتشابه المثلثين، فتبقى نسبة قطعة ا د جـ إلى قطعة ح ل ك كنسبة مربع ا جـ إلى مربع ح ك. وأيضًا قطعة ا ب جـ شبيهة بقطعة ح ط ك، فنسبة قطعة ا ب جـ إلى قطعة ح ط ك كنسبة مربع ا جـ إلى مربع ح ك. فنلقي قطعتي ا د جـ ح ل ك اللتين على نسبة مربع ا جـ إلى مربع ح ك، فتبقى نسبة هلال ا ب جـ د إلى هلال ح ط ك ل كنسبة مربع ا جـ إلى مربع ح ك؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. / ١٦ – و



‹هـ› كل دائرة يخرج فيها ضلع المثلث المتساوي الأضلاع ويُعمَل عليه نصف دائرة، ثم يقسم قوس المثلث بنصفين ويوصل الخطان، فإن الهلال والمثلث الحادثين مساويان لهلال آخر ودائرة.

3 هلالا: هلالي – 5 نقطتي: نقطتا – 15 الخطان: الخطين / الحادثين: الحادث / مساويان: مساويين.

مثال ذلك: دائرة ا ب جـ، أُخرج فيها خط ا ب وهو مساوٍ لضلع المثلث المتساوي الأضلاع، وعُمل عليه نصف دائرة ا ز ب، وقُسم ا هـ ب بنصفين على نقطة هـ، ووصل ا هـ هـ ب.

فأقول: إن هلال ا ز ب هـ ومثلث ا هـ ب مساوٍ لهلال آخر ودائرة.

برهان ذلك: أنا نحدّ المركز وليكن د، ونخرج قطر ا د جـ ونصل ب د د هـ وب جـ، ونعمل على خط ب جـ نصف دائرة ب ر جـ، ونجعل مربع ح ط ضعف مربع ب جـ، ونعمل على ح ط هلالاً من قوسين شبيهتين بقوسي ب و جـ ب ر جـ، وليكن هلال ح ط ك ل. ونجعل دائرة م ثمن دائرة ا ب جـ.

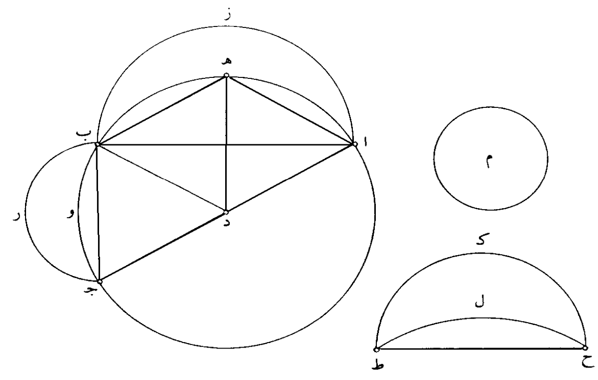
فأقول: إن هلال ا ز ب هـ ومثلث ا هـ ب مثل هلال ح ك ط ل ودائرة م.

فلأن ا هـ هـ ب ب جـ، كل واحد منها يوتر السدس، تكون الهلاليات المعمولة عليها الشبيهة بهلال ب ر جـ و متساوية، وتكون المثلثات الثلاث ا هـ د هـ د ب ب د جـ متساوية. ولكن هلال ب ر جـ و مع الدائرة التي هي جزء من أربعة وعشرين جزءًا من دائرة ا ب جـ مساويان لمثلث د ب جـ، فالهلاليات الثلاث المعمولة على خطوط ا هـ هـ ب ب جـ، التي هي ثلاثة أمثال هلال ب ر جـ و مع الدائرة التي هي ثمن دائرة ا ب جـ، مساوية للمثلثات الثلاث التي هي ا هـ د هـ د ب د ب جـ. ولكن هلال ح ك ط ل ضعف هلال ب ر جـ و، فهلالا ح ك ط ل ب ر جـ و مجموعين هما ثلاثة أمثال هلال ب ر جـ و. ودائرة م هي ثمن دائرة ا ب جـ، فهلالا ح ك ط ل ب ر جـ و ودائرة م مجموعة هي مثل المثلثات الثلاث التي هي ا هـ د هـ د ب ب د جـ. ولكن المثلثات الثلاث هي مربع ا هـ ب جـ ومربع ا هـ ب جـ هو مثلثا ا هـ ب ا ب جـ. فهلالا ح ط ك ل ‹ب ر جـ و› ودائرة م مساوية لمثلثي ا هـ ب ا ب جـ.

ولأن نقطة ب على محيط الدائرة وقد خرج إليه خطا ا ب جـ ب من طرفي/ القطر وعُمِل عليهما ١٦ - ظ هلالا ا ز ب هـ ب ر جـ و يكون الهلالان مساويين لمثلث ا ب جـ. ولكن هلالي ح ك ط ل ب ر جـ و ودائرة م مساوية لمثلثي ا ب جـ ا هـ ب. فهلالا ح ك ط ل ب ر جـ و ودائرة م

2 ا هـ ب: ل هـ ب – 5 نحدّ: نجد / د هـ وب جـ: هـ ر ب ح – 6 ضعف: المقصود هنا، ونجعل مربع ح ط الذي يكون مربعه مساويًا لضعف مربع ب جـ – 10 ا هـ: ا ح – 11 ب ر جـ و: ب ر جـ – 16 فهلالا: فهلالي – 17 فهلالا: فهلالي / مجموعة: مجموعها – 19 فهلالا: فهلالي – 21 هلالا: هلالي / ا ز ب هـ: ا د ب هـ – 22 فهلالا: فهلال.

مساوية لهلالي ب ر جـ و آ ز ب هـ ومثلث آ هـ ب. فنلقي هلال ب ر جـ و المشترك فيبقى هلال آ ز ب هـ ومثلث آ هـ ب مساويًا لهلال ح ك ط ل ودائرة م ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



تمّ القول في الهلاليات والحمد للّه ربّ العالمين.

1 هلال (الثانية): مكررة – 2 مساويًا: مساو.

بسم الله الرّحمن الرّحيم

ا – ٣٩ – ظ
ب – ١ – و
ت – ٨٤ – ظ
جـ – ١٢٤ – ظ
ش
د – ٧ – و
هـ – ١٠ – و
ط – ٩٣
ف – ١ – ظ
ک – ١٠٧ – ظ
م – ١ – ظ

قول للحسن بن الحسن بن الهيثم
في تربيع الدائرة

قد اعتقد كثير من المتفلسفين أن سطح الدائرة لا يمكن أن يكون مساويًا لسطح مربع مستقيم الخطوط، وتردد هذا المعنى في كثير من محاوراتهم ومناظراتهم، ولم نجد لأحد من المتقدمين ولا المتأخرين شكلاً مستقيم الخطوط مساويًا لسطح دائرة على غاية التحقيق؛ والذي ذكره أرشميدس في مساحة الدائرة فإنما استعمل فيه بعض التسمّح، وهذا المعنى هو أحد ما قوّى رأي المتفلسفين في اعتقادهم. ولما كان ذلك كذلك، أنعمنا الفكر في هذا المعنى فتلوّح لنا أنه ممكن وغير متعذر وله نظائر: وهو أنه قد يوجد هلال يحيط به قوسان من دائرتين، وهو مع ذلك مساوٍ لمثلث؛ وقد يوجد هلالٌ ودائرةٌ مساويان بمجموعها لمثلث. وقد ذكرنا من هذا النوع أشكالاً كثيرة مختلفة في كتابنا في الهلاليات. / ولما وجدنا الأمرَ على هذه الصفة في الأشكال الهلالية، قوّى/ في

ف – ٢ – و
هـ – ١٠ – ظ

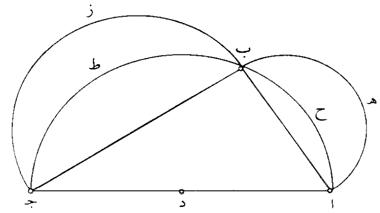
1 بسم الله الرحمن الرحيم: ناقصة [جـ] أضاف ناسخ [هـ] بعد البسملة «ثقتي بالله وحده» – 2 قول ... الهيثم: قول للشيخ أبي علي الحسين بن الحسين بن الهيثم [ف] رسالة لابن الهيثم [•] ترمز النجمة إلى هذه الأسرة من المخطوطات [ا، ب، ت، جـ، د، ش، ط، ک، م] – 4 قد: نقول قد [جـ، د، ش، ط] يقول قد [م] / اعتقد: يعتقد [ب، ت، جـ، د، ش، ک، م] / أن يكون: ناقصة [ف] – 5 وتردد: ويتردد [ف] وردد [ب، ت، ک] وتردد في [م] – 5-8 وتردد ... لنا أنه: ناقصة [ا] / ومناظراتهم: ناقصة [جـ] / نجد: يوجد [•] / لأحد من: ناقصة [ط، م] لاخذ من [ف] / المتقدمين: للمتقدمين [ط، م] – 5-6 ولا المتأخرين: ولا للمتأخرين [ت، جـ، د، ط، م] وللمتأخرين [ش] – 6 مساويًا: مساوي [هـ] / غاية: ناقصة [ف] – 7 أرشميدس: ارسمندس [ف] / بعض: ناقصة [هـ، ف] / التسمّح: النسخ [جـ، د، ش، ط، م] المنسخ [ت] / هو أحد: ناقصة [د، م، ش، ط] / أحد ما: أحدها [ب، ک] / رأي: آراء [•] – 8 المتفلسفين: للمتفلسفين [ک] / اعتقادهم: اعتقادتهم [د] اعتقاداتهم [ط، م] / ذلك: ناقصة [د، م، ش، ط] / أنعمنا: العا [ط] اتقينا [م]/ الفكر: النظر الفكري [•] / فتلوّح: فسرح [ب، ت، ک] فلاح [ف] فسخ [جـ] فسح [د، ط، م] فتح [ش] / لنا: الى [جـ] / ممكن: وهو ممكن [ا] – 9 وغير: غير [م] / متعذر: معتذر [ف]/ هلال: هلالى [•] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / يوجد هلال: توهدالى [ک] / يحيط به: كتب ناسخ [جـ] «يحيط» ثم أثبت «يحيط به» في الهامش – 9-10 يحيط ... هلال: ناقصة [ت] – 10 ودائرة: ودائرتان [ش] / بمجموعها: مجموعها [ا، ت، جـ، د، ش، ط، م] / لمثلث: المثلث [ت] / من: في [جـ] – 11 مختلفة: ناقصة [د، ش، ط، م] / في كتابنا: ناقصة [•] / ولما: واما [ک] / الأمر: مطموسة [ف] / هذه: هذا [د، ط] أثبتها في الهامش [جـ] / الأشكال: الأشكالى [ت، ک]/ الهلالية: الهلالي [ب، ت، ک] / في: ناقصة [هـ].

نفوسنا أنه من الممكن أن يكون سطح الدائرة مساويًا لسطح مربع مستقيم الخطوط. فاستقصينا الفكر في ذلك إلى أن تبيّن لنا بالبرهان أن هذا المعنى ممكن ولا شُبْهة في إمكانه. فألفنا فيه هذا القول.

فنقول: إن كل دائرة يخرج فيها قطرٌ من أقطارها، ثم يُتعلم على أحد نصفيها نقطة كيفما اتفقت، ونوصل بينها وبين طرفي القطر بخطين مستقيمين، ثم نعمل/ على هذين الخطين / ط – ٩٤ ب – ١ – ظ المستقيمين نصفي دائرتين، فإن الهلالين اللذين يحدثان من محيطي النصفين مع محيط الدائرة الأولى مساويان/ بمجموعها للمثلث الحادث في الدائرة الأولى. وقد بيّنا هذا المعنى في كتابنا في د – ٧ – ظ الهلاليات، ونحن نعيد البرهان عليه في هذا الموضع.

فليكن دائرة عليها ا ب جـ، وليكن مركزها د، ونجيز على نقطة د خط ا د جـ، فيكون ا جـ قطر الدائرة. ونتعلم على محيط الدائرة نقطة ب،/ ونصل خطي ا ب ب جـ، ونعمل على خطي ك – ١٠٨ – و ا ب ب جـ نصفي دائرتين وهما ا هـ ب ب ز جـ.

فأقول: إن هلالي ا هـ ب ح ا ب ز جـ ط ب مساويان/ بمجموعها لمثلث ا ب جـ. ف – ٢ – ظ ظ – ٢ – ظ



1 أنه من: مطموسة [ف] / من الممكن: ممكن [ا] / الدائرة: مستدير [جـ، د، ش، ط، م] ناقصة [ب، ت، ك] دائرة [ا] / فاستقصينا: فاستقسينا [ف] — 2 الفكر: الفكرة [هـ] / تبين: يتبين [ف] / فألفنا: فالقينا [د، ش، ط، م] كتب «فالقينا» ثم أثبت الصواب في الهامش مع خـ فوقها، يعني في نسخة أخرى [جـ] — 2-3 فألفنا فيه هذا القول: ناقصة [ا] — 4 إن: فوق السطر [جـ] / يخرج: نخرج [د] / فيها: فيه [*، هـ] / قطر: قطرا [ف] / يتعلم: نُعلم [جـ، ط] / أحد: محيط أحد [ا] / نصفيها: نصفها [ا، ت، د، ش، ط، ك، ف، هـ] — 4-5 كيفما اتفقت: كيف اتفق [جـ، د، ش، ط، م] كيف ما اتفق [ا، ب، ت، ك] — 5 ونوصل: ويوصل [ب، د، ش، ف] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / بينها: بينهما [ط، جـ، م] / مستقيمين: مستقيمين: ناقصة [ب] — 5-6 ثم نعمل ... المستقيمين: ناقصة [ا] — 6 المستقيمين: ناقصة [ف، هـ] / الهلالين: الهلالتين [د، ط، م] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد/ اللذين: الذين [جـ، ش، ط] / محيطي: محيط [ف] / النصفين: النصف [د، ش، ط، م] — 7 بمجموعها: مجموعها [ا، ت، جـ، د، ط، م] / مساويان ... الأولى: ناقصة [ت، ف] / في (الثالثة): ناقصة [د، ش، ط م] — 9 دائرة: ناقصة [جـ] / عليها: عليه [*] ناقصة [ت]/ ليكن: ناقصة [ف] / د: ناقصة [ت، ك] / نقطة: ناقصة [*] / د: ناقصة [ت] — 9-10 فليكن ... محيط الدائرة: في الهامش بخط آخر وفي النص نجد «فليكن ا ب ح قطر الدائرة» [جـ] — 10 الدائرة: للدائرة [هـ] / ونتعلم: ونعلم [*] ومتعلم [ف] /محيط: المحيط [د، ط، م] / نقطة: نقط [ا] / ب: ناقصة [ت] / ونصل: ويطل [ف] — 11 وهما: هما [*] / ب زجـ: ب د جـ [هـ] ب زهـ [ت، ك] — 12 هلالي: الهلالتي [ب، د، ط، م] هدا التي [ت] هذا لتي [ك] هلالتي [ا، ب] الهلالتين [ش] / ا هـ ب ح ا: ا هـ ب حـ [ط، م] ا هـ ب ح [ا، ب، ت، جـ، ش، ف، ك، م] / ب زجـ ط ب: ب زجـ ط [ت، جـ، د، ط، م، ف] ب وجـ ط [ك] / بمجموعها: مجموعها [*] / لمثلث: المثلث [ت].

برهان ذلك: أن كل دائرتين فإن نسبة إحداهما إلى الأخرى كنسبة مربع قطر إحداهما إلى
مربع قطر الأخرى كما تبيّن في شكل ب من المقالة الثانية عشر من الأصول. فنسبة دائرة ب ز ج
إلى دائرة ب ه ا كنسبة مربع ج ب إلى مربع ب ا، وبالتركيب تكون نسبة مربعي ج ب ا ب
إلى مربع ا ب كنسبة دائرتي ب ز ج ب ه ا إلى دائرة ب ه ا. ومربعا ج ب ا ب هما مربع
ا ج، فنسبة مربع/ ا ج إلى مربع ا ب كنسبة دائرتي ب ز ج ب ه ا إلى دائرة ب ه ا. ونسبة ط - ٩٥
مربع ا ج إلى مربع ا ب هي كنسبة دائرة ا ب ج إلى دائرة ب ه ا. فنسبة/ دائرتي ب ز ج ش
ب ه ا إلى دائرة ب ه ا هي نسبة دائرة ا ب ج إلى دائرة ب ه ا. فدائرة ا ب ج مساوية
لدائرتي ب ز ج ب ه ا. فنصف دائرة ا ب ج/ مساوٍ لنصفي دائرتي ا ه ب ب ز ج. فإذا م - ٢ - و
أسقطنا قطعتي ا ح ب ب ط ج المشتركتين لدائرة ا ب ج ولدائرتي ا ه ب ب ز ج، بقي مثلث
ا ب ج مساويًا لهلالي ا ه ب ح ا ب ز ج ط ب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإن كان قوسا ا ح ب ب ط ج / متساويتين، فإن خطي ا ب ب ج يكونان متساويين،/ هـ - ١١ - و ف - ٣ - و
ويكون دائرتا ا ه ب ب ز ج متساويتين، ويكون نصفاهما متساويين، ويكون هلالا
ا ه ب ح ا ب ز ج ط ب متساويين. ونصل ب د، فيكون مثلثا ا ب د ب د ج متساويين.
وقد/تبين أن الهلالين/ مساويان بمجموعهما لمثلث ا ب ج، فإذا كان الهلالان متساويين ومثلثا ج - ١٢٥ - و ب - ٢ - و

1 برهان ذلك: برهانه [ا] / دائرتين: دائرة تتين [ط، م] / إحداهما: احدهما [ت] / إلى: ناقصة [ف] / الأخرى: الاخر [د] / إحداهما: احدها [ت] — 2 الأخرى: الاخر [ط، ف، م] / شكل ب من: ناقصة [ه، ف] شكل تبين [ت] / المقالة: مقالة [ب، ت، ك] / الثانية عشر: يب [ا، ب، ت، ك] / الأصول: كتاب أقليدس [ف] كتاب أوقليدس [ه] — 3 ب ا: ا [ت، ك] / ج ب: ح ب [ش] / ا ب: ب ا [ا، د، ط، ه، ف، م] — 4 ا ب: د ا [ه] ب ا [ف] / ب ز ج: ب ز ح [ش] / ب ه ا (الأولى): ا ه ب [د، ش، ط، م] ب ه [ك] / ا ب: ما [ف] / هما: ها [ك] — 4-5 ومربعا... ا ج (الأولى): ناقصة [ش] — 5 فنسبة: ونسبة [ش] / مربع ا ج: كتب بعدها «كما يقدر في شكل العروس» [ا] / ا ج إلى: ا ج ا الى [ب، ت، ك] / إلى دائرة ب ه ا: أثبتها في الهامش [ج] — 5-6 كنسبة ... ا ب: ناقصة [ف] / ونسبة مربع ا ج إلى مربع ا ب: ناقصة [ط، م] — 6 هي: ناقصة [ه] / ا ب ج: في الهامش [ج] ناقصة [ك] / إلى دائرة: في الهامش [ج] ناقصة [ك] / ب ه ا: ب ه ر [ب، ت، د، ش، ك] — 6-7 فنسبة ... ب ه ا (الثانية): ناقصة [ط، م] — 7 هي نسبة: كنسبة [ه] هي كنسبة [ف] / مساوية: متساوية [ط] — 7-8 هي نسبة ... ب ز ج ب ه ا: أثبتها في الهامش [ج] — 8 فنصف: فنصفي [ج، د، ط، م] / دائرة: دائرتي [ج، د] / ا ب ج: ا ب ب ح [د، ط، م] ولكن نجد في [د] الصواب في الهامش، أي «فنصف دائرة ا ب ج» / ا ه ب: ا ه ر [ب، ت، ك] — 9 ا ح ب: ا ح ب [ط، ف، م] / المشتركتين: المشتركين [ا، ب، ت، ك، ه، ف] / ولدائرتي: ودائرتي [ت، ب، ك] / بقي: هي [ت] / مثلث: ناقصة [ب، ت، ج، د، ط، ك، م] — 10 لهلالي: لهلالتين [ج] لهلالتي [ت، د، م] / ا ه ب ح ا: ا ه ز ح [ف] / أن نبين: بيناه [ا، ب، ت، د، ط، ك، م] بيانها [ج] — 11 متساويتين: مساويين [ج] / ب ج: كتب ناسخ [ا] بعدها «ايضا» / يكونان: يكون نا [ك] يكون [م] / متساويين: متساوية [ا] متساويتين [ط، ك] — 12 دائرتا: كتب «دائرتي» ثم صححها عليها [ج]/ متساويتين: متساويين [ط، ج، م] / متساويين: متساويتين [ك] — 12-13 ويكون (الثالثة) ... متساويين: ناقصة [ط، م] — 13 ب ز ج ط ب: ز ج ط ب [ف] / متساويين: متساويتين [ك] / ونصل ... متساويين: ناقصة [ه] / متساويين: متساويتين [ف] — 14 وقد: و [ف] فقد [ا] / تبين: بين [د، ط، م] / الهلالين: الهلال [ف] الهلالتين [م] / مساويان: متساويان [ف] متساويين [ه] / بمجموعهما: لمجموعها [ف] / مساويان... الهلالان: ناقصة [ه] / فإذا: فان [ف، م] / متساويين: متساويان [ه، ه] متساويتين [ف].

ا ب د ب جـ د متساويين، فإن كل واحدٍ من الهلالين يكون مساويًا/ لواحد من المثلثين، فيكون د - ٨ - و

هلال ا هـ ب ح ا مساويًا / لمثلث ا ب د. ١ - ٤٠ - و

وإذ قد تبيّن ذلك، فلنعد الدائرة وهلال ا هـ ب ح ا ومثلث ا ب د، ونقسم خط ب ا بنصفين على نقطة ك، فتكون نقطة ك مركز دائرة ا هـ ب. ونصل د ك وننفذه على استقامةٍ، وليقطع قوسي ا ح ب / ا هـ ب على نقطتي ح هـ، فيكون خط د ك ح هـ قطرًا لدائرة ا ب جـ / ك - ١٠٨ - ظ ط - ٩٦ وقطرًا لدائرة ا هـ ب، لأنه مارّ بمركزيها./ ونقسم خط هـ ح بنصفين على نقطة ل؛ ونجعل ل مركزًا ف - ٣ - ظ وندير ببعد ل ح دائرة، ولتكن دائرة ح م هـ ن، فتكون هذه الدائرة مماسةً لدائرة ا ب جـ من خارجِها ومماسةً لدائرةِ ا هـ ب من داخلِها، لأنها تَلْقى كل واحدة من الدائرتين على طرف قطرٍ مشتركٍ لهما وللدائرة المماسة لهما. فدائرة ح م هـ ن جميعها في داخل هلال ا هـ ب ح ا، فهذه الدائرة إذن هي بعض هذا الهلال. وكل مقدار فَلَهُ إلى كل مقدار – هو بعضه – نسبة ما وإن لم يعلم أحد تلك النسبة ولم يقدر على الوصول إلى علمها، لأن النسبة بين المقادير ليست هي من أجل علم الناس بها ولا من أجل قدرتهم على استخراجها ومعرفتها، وإنما النسبة بين المقادير معنىً خاص للمقادير التي تكون من جنس واحد. فإذا كان مقداران من جنس واحد وكان كل واحد منها محصورًا متناهيًا ثابتًا على مقداره لا يتغير بوجه من الوجوه – لا تغيُّر زيادة ولا تغير نقصان ولا

1 ا ب جـ د: ب د جـ [هـ، ف] / متساويين: متساويان [ه] متساويتين [ف] / فيكون: ويكون [ه] – 2 ا هـ ب ح ا: ا هـ ب حـ [ط، م] هـ ب ح ا [ف] – 3 قد: ناقصة [ا، ت، ك] / فلنعد: فلنعيد [هـ] / ا هـ ب ح ا: ا هـ ح [ف] / ا ب د: ناقصة [ف] – 3-4 وهلال ... نقطة (الأولى): ناقصة [ت] – 4 ا هـ ب: ا ب [ب] / وننفذه: وبعيده [ط] – 5 وليقطع: ولقطع [ف] / قوسي: قوس [ت، جـ، د، ط، ك، م] قوسا [ا] / ا ح ب: ا حـ ب [ك] / ح هـ: ح و هـ [ه] / خط: ناقصة [ب، ت، د، ط، ك، م] نقطة [جـ]، وكتب فوقها «ذ» يعنى «كذا» / قطرًا لدائرة: وقطر الدائرة [ا] – 6 وقطرًا لدائرة: وقطر الدائرة [ا] وقطر دائرة [ب، ت، ك، م] / ا هـ ب: ا ب هـ [ف] / لأنه: ناقصة [د، ط، م] / مارّ: مساو[د، ط، م] / بمركزيها: لمركزيهما [ط، م] / هـ ح: ح هـ [جـ] / ل: ناقصة [ت] ر [جـ، د، ط، م] / ل: ر [د، جـ، ط، م] – 7 ببعد: نبعد [ف] / ل ح: ح ل [ا، ب، ت، ك] ح ر[د، جـ، ط، م] / ولتكن: كتب ناسخ [جـ] «ولكن» ثم أثبت الصواب في الهامش / دائرة: ناقصة [هـ] / ح م هـ ن: ح م ن هـ [ف] ح م هـ ق [جـ، د، ط، م] كتب هؤلاء النساخ النون قافًا ولن نشير إليها فيما بعد – 8 خارجها: خارج [ه] / ومماسةً: ومماسته [ت] / من: أثبتها فوق السطر [ب] / داخلها: داخل [ا] / تلقى: تبقى [ف] / واحدة: واحد [ا] – 9 لهما: لها [ا، ب، جـ، د، ط، ف، هـ، م] / لهما: لها [ه، ف، هـ] / فدائرة: ودائرة [ف] ودوائر [هـ] / ح م هـ ن: هـ م ح ن [ا] / جميعها: جميعا [جـ، د، هـ] جمعا [ا، ب، ت، ك] / هلال: هلالى [ط، م] – 10 إذن: ناقصة [ف] اذا [هـ] / هي: ناقصة [هـ] / الهلال: كتب بعدها «مقدّمة» [ا] الهلالى [ط، م] أثبت ناسخ [جـ] الصواب في الهامش مع «ن» فوقها / فله: عله [ت، ك] / ما: ناقصة [ب، ت، ط، ك، م] / وإن: واين [ف] – 11 على: الى [ا، جـ، د، ط، م] / إلى: على [هـ] / علمها: عملها [هـ] / المقادير: المادية [ف] / النسبة بين المقادير: أثبتها في الهامش [د] / ليست: ليس [ه، هـ] لنسب [ف] / هي: مال [ف] / من: ناقصة [ا] – 11-12 ليست ... وإنما: أثبتها في الهامش [د] – 12 بها: ناقصة [هـ] / ومعرفتها: ومعرفها [ت، ك] – 13 خاص: خاصى [هـ] / فإذا: فاذن [ا، جـ، د، ط، م] / كان: كل [ه] / مقداران: مقدارين [ه] – 14 منها: منها [ت] / محصورًا: مصورا [د، ط، م] تصورا [ب، ت، ك] متصورا [ا] / ثابتًا: باقيا [ه] / مقداره: كتب بعدها «ثابت» [ت] / بوجه: لوجه [ف] / تغير (الثانية): ناقصة [د، ط، م] / بوجه ... نقصان ولا: أثبتها في الهامش [ف].

تغير جنس– فإن لأحدهما إلى الآخر نسبة واحدة بعينها ثابتة لا تتغير/ ولا تنتقل عن صورتها بوجه ف - ٤ - و
من الوجوه.

وكل مقدار فبعضه هو من جنسه إذا كان ذلك البعض محصورًا متناهيًا، لا يتغير، لا في
جنسه ولا في مقداره ولا في شكله / ولا في هيئته، وكان المقدار الأعظم أيضًا ثابتًا على حاله لا ط - ٩٧
يتغير، لا في جنسه ولا في مقداره ولا في شكله ولا في هيئته. وإذا كان المقدار وبعضه على هذه
الصفة، فإن لجملة المقدار إلى بعضه نسبة واحدة بعينها ثابتة لا تتغير ولا تختلف بوجه من الوجوه.

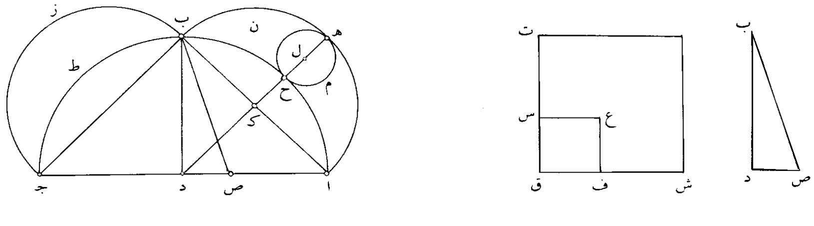
وإذا كانت/ دائرة ا ب جـ معلومة المقدار، فإن محيطَها يكون معلومًا وقطرَها يكون معلومًا هـ - ١١ - ظ
أيضًا ومركزَها/يكون معلومًا، فقطر ا جـ يكون معلومًا /، وقوس ا ب التي هي ربع محيطها تكون د - ٨ - ظ / ك - ١٠٩ - و
معلومةً، وخط ا ب يكون معلومًا، وخط ب د يكون معلومًا، ومثلث ا ب د يكون معلومًا، وأعني
بكل معلوم ذكرته في صفة دائرة ا ب جـ أنه ثابت على حاله لا يتغير، لأن / المعلومَ عند أصحاب ب - ٢ - ظ
التعاليم هو الذي // لا يتغير. ويكون نصف دائرة ا هـ ب معلومًا، لأن خط ا ب الذي هو قطرها ف - ٤ - ظ / م - ٢ - ظ
هو معلوم، ويكون قوس ا هـ ب معلومةً لأنها لا تتغير، وقوسُ ا ح ب معلومة، فيكون هلال
ا هـ ب ح ا معلومًا، أعني أنه يكون ثابتًا على صفة واحدة لا يتغير في جنسه ولا في مقداره ولا في
شكله؛ وأعني بجنسه أنه سطحٌ مستوٍ. ويكون خط ك هـ الذي هو نصف قطر الدائرة معلومًا،
ويكون خط ك ح معلومًا / لأن نقطتي ك ح معلومتان، فيبقى خط هـ ح معلومًا، أعني أنه لا ا - ٤٠ - ظ
يتغير، لا في مقداره/ ولا في جنسه ولا في هيئته. / وخط هـ ح هو قطر دائرة ح م هـ ن، فدائرةُ ط - ٩٨ / جـ - ١٢٥ - ظ

1 تغير: أثبتها في الهامش [ف] / فإن: فلان [هـ] / ثابتة: ناقصة [•] / تتغير: يتغير [ف] / تنتقل: ينتقل [ف، ط، هـ] تتقبل [ت] – 3-1 لا تتغير ... فبعضه: ناقصة [ك] – 3 مقدار: ناقصة [ا] / من: ناقصة [ا، ت، د، ط، م] / إذا: اذ [ب، ت، ك] / محصورًا: محصور [ط، م] متناهيًا [ف، هـ] / متناهيًا: محصورًا [ف، هـ] / لا يتغير: ناقصة [ت] – 4 هيئته: هيئاته [ا، ب، ت، د، ط، ك، م] / أيضًا: ناقصة [ب، ت، ك] / ثابتًا: مماسا [ت] / لا: ناقصة [هـ] – 5 لا في جنسه: لا في شكله [•] / ولا في شكله: ولا في جنسه [•] / هيئته: هيئاته [•] ولن نشير إليها فيما بعد / وإذا: إذا [ط] / وبعضه: بعضه [ت] – 6 لجملة: الجمله [ت، ك] / ثابتة: ناقصة [•] / تتغير: يتغير [ف] تختلف [جـ] / تختلف: يختلف [ف] تتغير [جـ] / الوجوه: الوجود [ف] – 7 وإذا: وان [ت، د، ط، ك، م] واا [ب] فان [جـ] كتب ناسخ [ا] بعدها «يقرر هذا فإن» / كانت: كتب ناسخ [د] «كان» ثم أضاف فوق السطر «نت» / ا ب جـ: ا ب [جـ] / المقدار: القدر [•] / محيطها: قطرها [ف، هـ] / وقطرها: ومحيطها [ف، هـ] – 8 أيضًا: ناقصة [د، ط، ف، م، هـ] / ا جـ: ا خ ر [ت] / معلومًا: معلومان [ف] / وقوس: قوس [ف] / التي هي: هو [•] الذي هو [هـ] / تكون: يكون [جـ، د، ط، ف، ك، م] – 9 معلومة: معلوما [•، ف، هـ] ناقصة [ت] / ومثلث ا ب د يكون معلومًا: ناقصة [ط، م] – 10 ذكرته في صفة دائرة ا ب جـ: ناقصة [ا] / ذكرته: ذاته [•] ذكر به [ف] / ا ب جـ: ا ب [•] / على حاله: ناقصة [ف] على حالة [ط] – 11 ا هـ ب: ا ب [ت] / ا ب: ا هـ ب [ا، ب، د، ط، م] ا هـ ر [ت، ك] / هو: ناقصة [د، ط، م] – 12 ا هـ ب: ا هـ ر [ب، ت، ك] / معلومة: معلوما [•] / تتغير: يتغير [ف] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / ا ح ب: ا ح ر [ت، ك] / معلومة: معلوم [ا، ب، ت، ك] – 13 أعني: ناقصة [ف] – 14 ك هـ: اله [ت] / قطر: القطر [د، ط، م] – 15 ك ح: ك هـ ح [ط، م] / ك: ط [ت] / معلومتان: معلومتا [د، ط] معلوما [م] / أنه: ناقصة [•] – 16 لا (الأولى): ناقصة [ف، هـ] / في (الثانية): ناقصة [ت، ف] / هـ ح: ح هـ [ف].

ح م ه ن معلومة، لا يتغير مقدارُها ولا شكلها ولا هيئتها. ودائرة ح م ه ن هي بعض هلال ا ه ب ح ا. وكل واحد من هلال ا ه ب ح ا ودائرة ح م ه ن لا يتغير في حال من الأحوال، وهما من جنس واحد لأن أحدهما هو بعض الآخر، فلِهلال ا ه ب ح ا إلى دائرة ح م ه ن نسبة / ثابتة على صفة واحدة لا تتغير بوجه من الوجوه. وكلُّ نسبة لمقدار من المقادير إلى بعضه فهي (ف - ٥ - و) نسبة كل مقدار إلى بعضه النظيرِ لذلك البعض، فنسبة هلال ا ه ب ح ا إلى دائرة ح م ه ن هي نسبة خط ا د إلى بعضه، علمنا مقدار ذلك البعض أوكنّا لا نعلم مقدار ذلك البعض ولا نقدر على استخراجه ولا نصل إلى وجوده. فليكن ذلك البعض د ص، فتكون نسبة ا د إلى د ص هي نسبة هلال ا ه ب ح ا إلى دائرة ح م ه ن، فيكون نسبة ا د إلى د ص نسبةً ثابتة لا تتغير أبدًا، / لأن نسبة الهلال إلى الدائرة / نسبةٌ ثابتة لا تتغير. وإذا كانت نسبة ا د إلى د ص نسبة (ت - ٨٥ - و، ف - ٥ - ظ) ثابتة / لا تتغير أبدًا، فإن خط د ص / خط واحد بعينه لا يتغير لأن خط ا د خطٌّ معلوم القدر لا (ك - ١٠٩ - ظ، د - ٩ - و) يتغير مقدارُه. ونصل ب ص ليكون ب ص د مثلثًا. ونسبة مثلث ا ب د إلى مثلث ب د ص / (ط - ٩٩) كنسبة خط ا د إلى خط د ص. ونسبة ا د إلى د ص هي كنسبة هلال ا ه ب ح ا إلى دائرة ح م ه ن، فنسبة مثلث ا ب د إلى مثلث ب د ص هي كنسبة هلال ا ه ب ح ا إلى دائرة ح م ه ن. وإذا بدلنا / كانت نسبة مثلث ا ب د إلى / هلال ا ه ب ح ا كنسبة مثلث (هـ - ٣٠ - ظ، ب - ٣ - و) ب د ص إلى دائرة ح م ه ن. وهلال ا ه ب ح ا قد تبيّن أنه مساوٍ لمثلث ا ب د، فدائرة ح م ه ن مساوية لمثلث ب د ص. وكل مثلث فهو مساوٍ لمربع، وقد تبيّن ذلك في آخر المقالة الثانية من كتاب أقليدس في الأصول.

1 لا يتغير: ليتغير [ف] / مقدارها: مقدارتها [جـ] / ولا: لا [ف] / ولا شكلها: ناقصة [جـ، د، ط، م] – 2 ا ه ب ح ا: ا ب ه ح [*] / وكل: فكل [جـ، د، ط، م] / ا ه ب ح ا: ا ب ه ح [ا، ب، ت، ك] / ح م ه ن: ه م ق [ط، م] ح م ق [ت، جـ، ك] ح ه م ق [ب] / لا: ولا [ت] / في: من [ا] / من: مكررة [م] – 3 لأن: الا ان [ط، م] / هو: ناقصة [ف] / ا ه ب ح ا: ا ه ب جـ [ت] / إلى: في [ط، م] / ح م ه ن: ح ه م ن [ت] – 4 صفة: هيئة [*] / لا تتغير: ناقصة [ت، ب، جـ، د، ط، ك، م] ونجد في [جـ] «لا تختلف» في الهامش / لمقدار: بمقدار [هـ، ط، م] / من المقادير: ناقصة [د، ط، م] – 4-5 إلى بعضه ... مقدار: ناقصة [ط، م] – 6 ا د: ه ا د [ف] – 7 ولا: فلا [ط، م] / وجوده: وجوه [ب، ت، ط، ك، م] / د ص: ه ص، وكتب «د» فوق «ه» [جـ] / فتكون نسبة ا د إلى د ص: ناقصة [*] – 8 هي: وهي [ت، ب، ك] على [جـ] / ا ه ب ح ا: ا ب ح [ب، ت، د، ط، ك، م] / فيكون: ويكون [هـ، ف] فاذن [*] / ا د إلى د ص: ا ه ص [ت] – 9 أبدًا: ناقصة [ف، هـ] / لأن نسبة ... لا تتغير: ناقصة [*] / نسبة (الرابعة): ناقصة [ا، ب] – 9-10 وإذا ... أبدًا: ناقصة [ط] / ثابتة: ناقصة [ف، هـ] / أبدًا: ناقصة [ف، هـ] / فإن: وان [*] / خط (الثانية): ناقصة [هـ] – 11 ليكون ... ونسبة: فيكون نسبة [هـ، ف] / ب ص ليكون: ناقصة [د، ط، م] / ب ص د: ب ص ه [ت، ك] / مثلثًا: ومثلث [ت، ك] مثلث [ا، ب، د، ط، م] / ب د ص: ب ص د [*] – 12 خط (الأولى): ناقصة [د، ط، م] فوق السطر [ب] / د ص: ص د [هـ] / ونسبة: فنسبة [ف] / هي: ناقصة [هـ] / كنسبة: نسبة [*] / ا ه ب ح ا: ا ه ب ح [ت، ك] – 13 ح م ه ن: ح م ن ه [ت، ك] ح م ق ه [ب] ح م ق [جـ، د] / ا ب د: في الهامش [جـ] / هي: ناقصة [ب، ت، ك] / ا ه ب ح ا: ا ه ح [ف] – 14 بدلنا: ابدلنا [جـ، ط، م] / ا ب د ... مثلث: في الهامش بخط آخر [جـ] – 15 وهلال: فهلال [هـ] / مساو: مساوية [ف] / ا ب د: ا ب ه [ت] مطموسة [ف] – 16 مساوية: مساو [*] / ب د ص: ف د ص [ت] / وقد: قد [ا، جـ، د، ط، ف، هـ، م] / آخر: ناقصة [*] – 17 كتاب: ناقصة [ا، ب، ت، جـ، ك] / أقليدس في: ناقصة [*].

ولنعمل مربعًا مساويًا لمثلث ب د ص، وليكن مربع س ق ف ع. فتكون دائرة ح م هـ ن مساويةً لمربع / س ق ف ع. ونسبة قطر ا جـ إلى قطر هـ ح نسبةٌ معلومة، لأن كل واحد من ف - ٦ - و هذين القطرين معلومُ المقدار، ولتكن نسبة ا جـ إلى هـ ح كنسبة ش ق إلى ق ف، فتكون نسبة مربع ا جـ إلى مربع ح هـ كنسبة مربع ش ق إلى مربع ق ف. ونعمل على خط ش ق مربعًا، وليكن مربع ش ت، فتكون نسبة مربع ا جـ إلى مربع هـ ح كنسبة مربع ش ت إلى مربع ق ع. ونسبة مربع ا جـ إلى مربع ح هـ هي نسبة دائرة ا ب جـ إلى دائرة ح م هـ ن، فنسبة مربع ش ت إلى مربع ق ع كنسبة / دائرة / ا ب جـ إلى دائرة ح م هـ ن. ومربع ق ع مساوٍ لدائرة ط - ١٠٠ - و م - ٣ - و ح م هـ ن، فمربع ش ت مساوٍ لدائرة ا ب جـ.



فقد تبيّن من هذا البيان أن كل دائرة / فهي مساويةٌ لمربع مستقيم الخطوط. ك - ١٠١ - و

فأما كيف يوجد هذا المربع، فإنّا نستأنف فيه مقالة مفردة، إذ ليس غرضُنا في هذه المقالة سوى أن نبيّن أن هذا المعنى ممكن / ليتبين به فساد اعتقاد من اعتقد أن الدائرة لا تصحّ أن ف - ٦ - ظ تُساوي مربعًا مستقيم الخطوط. وقد تبيّن بالبراهين التي ذكرناها في هذا القول أن كل دائرة فهي

1 مساويًا: متساويًا [ف] / مربع: ناقصة [د، ط، م] / س ق ف ع: ق ف ع [ا، جـ، د، ط، م] ف ع [ب، ت، ك] — 2 س ق ف ع: ق ف ع [ه] س ق ع ف [ف] / هـ ح: ح هـ [جـ، ا، د، ف] — 3 هـ ح: هـ ح [ك] ح هـ [ف، د، م] وح هـ [ط] / ش ق: س ق [هـ] كتب الشين سينًا [ه، ف] — 4 ح هـ: هـ ح [ه] / ش ق: س ق ر [ط] / على: ناقصة [د، ط، م] — 5 ش ت: س ب [ا] / فتكون: ليكون [ا، ب، جـ، د، ط، ك] لكون [م] / هـ ح: ح هـ [ا، ب، ت، جـ، ط، ف، ك] ح هـ [م] / ش ت: س ب [ا، جـ] — 6 ونسبة: فنسبة [ه] ولكن كتب ناسخ [د] الواو في الهامش / هي: وهي [ط، م] / ا ب جـ إلى دائرة: ناقصة [ط، م] كتب ناسخ [د] «ا جـ د إلى دائرة» في الهامش — 7 ا ب جـ: ا ب [ت] / ح م هـ ن: ح هـ م ن [ب، ت، ك] / مساوٍ: متساو [هـ] — 8 ش ت: س ب [جـ] — 9 فقد: وقد [ه] / فهي: مكررة [ت] / مستقيم: مستقيمة [ت] — 10 فأما: واما [ب، ت، ك] / فإنا: فاما [ت] / غرضنا: عرضيا [ف] / في هذه: في هذا [جـ، د، ط] ونجد في مخطوطة [جـ] الصواب في الهامش — 11 ممكن: امكن [ف] / ليتبين: ليس [ب، ت، ك] / به: فيه [جـ] ناقصة [ت، ك] / تصح: يصح [جـ، د، م] — 11-12 ليتبين ... الخطوط: ناقصة [ا] — 12 تساوي: يساوي [جـ، د، م] / بالبراهين: ناقصة [ط، م] / ذكرناها: ذكرنا [ب، ت، ك] / القول: مكررة [ب] / فهي: وهي [ت].

مساوية لمربع مستقيم الخطوط. فقد تبين من ذلك فساد اعتقاد هذه الطائفة / وصح أن كل دائرة فهي مساوية لمربع مستقيم الخطوط. والمعاني المعقولة ليس تحتاج حقائقها إلى إيجاد الإنسان لها وإخراجها إلى الفعل، بل إذا قام البرهان على إمكان المعنى فقد صحّ ذلك المعنى، أخرجه الإنسان / إلى الفعل أم لم يخرجه. وفيما ذكرناه من تحقيق هذا المعنى كفاية وهو الذي قصدنا له في هذا القول. د - ٩ - ظ ، هـ - ٣٠ - و

تم القول في تربيع الدائرة.

أقول على هذه المقالة * ر - ١٥١ - و

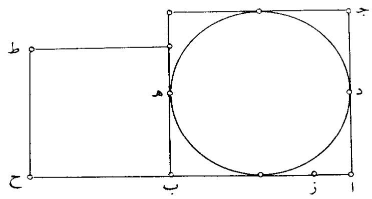
لوكفى في إثبات / هذا المطلوب إثبات إمكانه بالوجه الذي ذكره / لكان له عن جميع هذا التطويل غنىً بهذا القدر من البيان؛ وهو أن يقال: جـ - ١٢٦ - و ، ١ - ٤١ - و

ليكن ا ب خطًا معلومًا، ولنعمل عليه مربع ب جـ، فهو/ معلومٌ، وفيه دائرة د هـ، فهي معلومة لكون قطرها وهو د هـ - المساوي لـ ا ب - معلومًا. ولأن الدائرة جزءٌ معلوم من كُلٍّ معلوم، وهو المربع، يكون لها إليه نسبة، ولتكن كنسبة ب ا إلى ب ز. / ونخرج ب ح وسطًا فيما بينهما في النسبة لتكون نسبة ا ب إلى ب ح كنسبة ب ح إلى ب ز، ونعمل على ب ح مربع ب ط فيكون نسبة ا ب إلى ب ز، أعني نسبة مربع ب جـ إلى دائرة د هـ كنسبة مربع ب جـ إلى ط - ١٠١ ، ب - ٣ - ظ

1 هذه: ناقصة [ا] / الطائفة: الطارد [ت] / وصح: ووضح [ف، هـ] - 1-5 وصح ... القول: ناقصة [ا] - 2 المعقولة: المعنوية [ه] / إيجاد: الإيجاد [د، ط، م] وجود [ب، ت، ك، ف، هـ] / الإنسان: الان [ت، لك] والانسان [م] - 3 لها وإخراجها إلى الفعل: اياها بالفعل [ب، ت، جـ، د، ك] فاياها بالفعل [ط، م] / فقد صح ذلك: ناقصة [د، ط، م] / المعنى: ناقصة [د، ط، م] في الهامش [جـ] - 4 الإنسان: الان [ت، ك] / أم لم: ولم [ط، م] أولم [ب، ت، جـ، د، ك، هـ] / ذكرناه: ذكرنا [هـ] / تحقيق: تحقق [ه] - 5-4 في هذا القول: بالقول [ه] - 6 تم القول: تمت المقالة [ه] / في تربيع الدائرة: ناقصة [ه]؛ كتب ناسخ [ا] بعدها «قال مولانا نصير الملة والد⟨ين⟩ برّد الله مضجعه»؛ «والحمد لله وحده والصلاة على نبيه وآله» [هـ] - 6 = «تم القول والحمد لله رب العالمين والصلاة على رسوله محمد وآله أجمعين ووقع الفراغ منه في يوم الاثنين رابع عشر شهر جمادى الثاني في سنة إحدى وثلاثين ⟨و⟩ألف من الهجرة النبوية» [ف]؛ نجد في الهامش: «بلغ عرضًا وتصحيحًا في ليلة الجمعة التاسعة من رجب الفرد لسنة ست وتسعمائة هجرية بأدرنه المحمية ولله الحمد» [جـ] - 7* ينسب بعض النساخ - مثل [ا] - هذا التعليق لنصير الدين الطوسي / أقول: وأقول [جـ] مطموسة [ط]، كتب ناسخ [ر] قبلها «كتب رحمه الله على رسالة لابن الهيثم رحمه الله في تربيع الدائرة هذا» / هذه: هذا [ط] - 8 المطلوب: المط [ت، ب، جـ، ك] كتب ناسخ [ر] بعدها «وهو أنه من الممكن أن يكون سطح الدائرة مساويًا لسطح مربع مستقيم الخطوط» - 9 غنى: أعني [ر] / يقال: يقا [ك] يق [د، ط، م] / أن يقال: اربعا [ت] - 10 ليكن: كتب ناسخ [جـ] «ولكن» ثم أثبت الصواب في الهامش / ولنعمل: ونعمل [ب، ت، ك] / ب جـ: كتبها ب ح في كل النص [ر] / د هـ: هـ د [جـ] / فهي: فهو [ر] - 11 ولأن: لأن [ط] - 11-12 من كل معلوم: ناقصة [ت] من كل المعلوم [ا] - 12 وهو: هو [ا، ب، جـ، د، ك] / لها إليه: له إليها [ر] / نسبة: ناقصة [ت] / ولتكن: فلتكن [ا، ب، ت، ر، ك] / كنسبة: نسبة [ب، ت، ك] / ب ز: ب ب [جـ] / ب ح: ب ح [جـ] / فيما: فيها [د] - 13 بينهما: بينها [جـ] / ب ح: ب د [ك، ط، م] / كنسبة: نسبة [ت، ك] / ب ح: روع [ك] زوح [ت] ب جـ [جـ] / ب ح: ب جـ [جـ] د ح [ط، م] - 14 ب جـ: ب ح [ط، م] / كنسبة ... إلى: ناقصة [م].

مربع ب ط. فنسبة مربع ب ج إلى دائرة د هـ وإلى مربع ب ط واحدة. فدائرة د هـ مساوية لمربع ب ط.

فإذن وجدنا ما طلبنا، وليس هذا ممّا يوجب كُلّ هذا التحيّر للمتقدمين والمتأخرين.



الاعتراض

هـ - ٣٠ - و

المعنى الذي ذكره الشيخ أبو علي في هذا القول إن كان قد بان مما بينه به، فإنه يتبين على هذه الطريقة بأيسر مما ذكره: وهو أن كل دائرة نرسم فيها ‹مربعًا› فإن المربع بعضها، وللبعض إلى الكل نسبة ما، على ما ذكره، وإن لم تعلم النسبة. فلتكن تلك النسبة كنسبة ذلك المربع إلى مربع آخر؛ فنسبة المربع المعمول في الدائرة إلى الدائرة وإلى المربع الآخر واحدة، فالدائرة مساوية للمربع الآخر.

غير أنني أرى أنه لم يصنع في هذا القول شيئًا، لأن المطلوب: هو أن نعمل مربعًا مساويًا لدائرة. فأما هل ذلك ممكن في علم اللّه أم لا، فلا يُغني في المطلوب؛ فأما أن ذلك ممكن ولا قدرة عليه، فما زاد على ما يعتقده المتقدمون، إذ قولهم إنه إلى الآن لم يوجد ذلك بالبرهان. وليس هذا البيان بأوضح من القول في وتر درجة، فإنه إذا كان وتر درجة ونصف معلومًا ووترُ نصف وربع درجة معلومًا، فللدرجة وتر موجود، ولكن نسبته إلى القطر إلى الآن لم تعلم، وهما من جنس واحد.

1 مربع (الأولى) ... د هـ (الأولى): ناقصة [م] / د هـ: ر هـ [ب، ت، ك] هـ د [ا، جـ] / د هـ: د [ر] – 3 فإذن: فاذا [ب، ت، ك] / التحير: تحيز [ر] / كل هذا... والمتأخرين: ناقصة [ا] وأضاف «التشنيع والله اعلم» / والمتأخرين: ولا للمتأخرين [ر]، كتب نساخ [ب، ت، ك] بعدها «فيه»؛ كتب ناسخ [د] بعدها «فيه هذا الشكل تمت (كذا) كتاب تربيع الدائرة»؛ «تمت (كذا) الكتاب بعون الله تعالى» [ط]؛ «والحمد لله ربّ العالمين [جـ]»؛ «تم ٢٩ محرم ١٠٥٨» [م] – 7 تعلم: يعلم – 10 مربعًا مساويًا: مربع مساو – 14 فللدرجة: وللدرجة.

فالممتنع ما امتنع علينا علمه، واعتقادنا أن علمه ممكنٌ لا يغني شيئًا. وإذا حرّر القول في هذه المعاني تقسمت إلى ثلاثة أقسام هي: أن يكون المعنى معلومًا وهو ما قام البرهان عليه، على علمه ⟨أو على امتناع علمه⟩، أو يكون علمه ممتنعًا وهو ما لم يقم البرهان على علمه ولا على امتناع علمه: ⟨كعلم⟩ وتر تسع الدائرة وعلم وتر درجة، وأشباه لهما كثيرة من هذا القسم. ولم يبيّن أيضًا أن علم تربيع الدائرة واجب وما وعد به. فإلى الآن لم يظهر له قولٌ فيه ولا ذُكر في فهرست مصنفاته.

وجدت في آخره مكتوب هذا الاعتراض.

أظنه كلام ابن السميساطي أو كلام علي بن رضوان الطبيب.

4 كثيرة: كثير.

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم ا – ٧٠ – و
ب – ٢٤ – ظ
ل – ٥٠ – ظ

مقالة مستقصاة للحسن بن الحسن بن الهيثم في الأشكال الهلالية

كان بعض إخواني سألني عن الشكل الهلالي الذي يُعمل على محيط الدائرة، فألفت قولاً مختصرًا في الأشكال الهلالية بطرق جزئية لاستعجال صاحب السؤال لي ولاقتناعه بالجزئي من القول.

ولما تمادى الزمان من بعد ذلك عَنّ لي فكرٌ في هذا المعنى فاستخرجته بطرق علمية، واستخرجت معه أيضًا أنواعًا من الأشكال الهلالية لم تكن في القول الأول، فرأيت أن أستأنف في هذه الأشكال مقالة استقصي الكلام فيها على هذا المعنى، فألفت هذه المقالة وقدمت فيها مقدمات تستعمل في براهينها.

والمقدمات

– آ – كل مثلث قائم الزاوية ويكون ضلعاه المحيطان بالزاوية القائمة مختلفين، ويخرج من زاويته القائمة عمودٌ على قاعدته التي هي وتر الزاوية القائمة، فإن نسبة القسم الأصغر من قسمي القاعدة إلى / جميع القاعدة هي أصغر من نسبة الزاوية التي يوترها الضلع الأصغر من زوايا ل – ٥١ – و

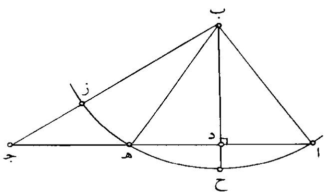
1 كتب ناسخ [ا] بعد البسملة «العزة للّه» – 2 مستقصاة: ناقصة [ل] / الحسن: الحسين [ب] – 7 فكر: الفكر [ب، ل] / علمية: كلية [ب، ل] – 8 معه: أثبتها في الهامش [ب] / تكن: يكن [ا]، ويكتب دائمًا التاء ياءً، وسنصححها دون الإشارة إلى ذلك فيما بعد / أستأنف: أثبت في الهامش «معه» [ب] – 12 آ: ناقصة [ب] كتبها ناسخ [ل] أمام الصورة، ولن نشير إليها فيما بعد / ويكون: يكون [ب، ل] – 13 هي: ناقصة [ا] / القسم: للقسم [ا]، وغالبًا ما كتب ناسخا [ا، ل] الألف لام «لل»، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد.

المثلث إلى زاوية قائمة، وإن نسبة القسم الأعظم من قسمي القاعدة إلى جميع القاعدة هي أعظم من نسبة الزاوية التي يوترها الضلع الأعظم إلى زاوية قائمة.

مثال ذلك: مثلث ا ب جـ زاوية ا ب جـ منه قائمة. وضلع ا ب أصغر من ضلع ب جـ، وخرج فيه عمود ب د.

فأقول: إن نسبة د ا إلى ا جـ أصغر من نسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية قائمة، وإن نسبة د جـ إلى جـ ا أعظم من نسبة زاوية ب ا جـ إلى زاوية قائمة.

برهان ذلك: أنّا نجعل د هـ مثل د ا ونصل ب هـ، فيكون جـ ب أعظم من ب هـ وب هـ أعظم من ب د لأن زاوية ب د جـ قائمة. ونجعل نقطة ب مركزًا ونديربعد ب هـ قوسًا من دائرة، فهي تقطع خطّ ب جـ وتقع خارجًا عن خط ب د، فلتكن القوس ز هـ ح. فيكون نسبة مثلث ب جـ هـ إلى مثلث ب هـ د أعظم من نسبة قطاع ب ز هـ إلى قطاع ب هـ ح. وبالتركيب / يكون نسبة مثلث / ب جـ د إلى مثلث ب د هـ أعظم من نسبة قطاع ب ز ح إلى قطاع ب ح هـ. فيكون نسبة خط جـ د إلى خط د هـ أعظم من نسبة زاوية ح ب ز إلى زاوية ح ب هـ. وهـ د مثل د ا وزاوية د ب هـ مثل زاوية د ب ا. فنسبة جـ د إلى د ا أعظم من نسبة زاوية جـ ب د إلى زاوية د ب ا. وبالتركيب يكون نسبة جـ ا إلى ا د أعظم من نسبة زاوية جـ ب ا إلى زاوية د ب ا. فبالعكس يكون نسبة د ا إلى ا جـ أصغر من نسبة زاوية ا ب د إلى زاوية ا ب جـ. وزاوية ا ب د مثل زاوية ا جـ ب وزاوية ا ب جـ قائمة، فنسبة د ا إلى ا جـ أصغر من نسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية قائمة. ل – ٥١ – ظ / ب – ٢٥ – و



وأيضًا فلأن نسبة جـ د إلى د ا أعظم من نسبة زاوية جـ ب د إلى زاوية ا ب د، يكون بالعكس نسبة ا د إلى د جـ أصغر من نسبة زاوية ا ب د إلى زاوية د ب جـ. وبالتركيب يكون

8 ونجعل: فنجعل [ب، ل] – 9 عن: من [ل] – 10 ب ز هـ: ب د هـ [ل] – 13 فنسبة: ونسبة [ب] – 19 ا ب د: ا ب جـ [ا، ل].

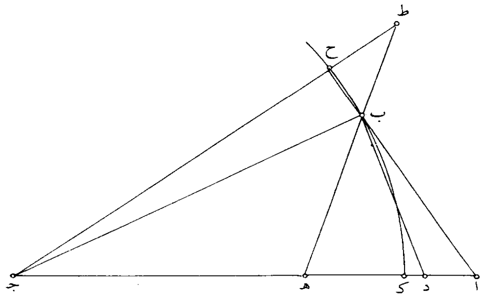
نسبة ا جـ إلى جـ د أصغر من نسبة زاوية ا ب جـ إلى زاوية د ب جـ . فبالعكس يكون نسبة د جـ إلى جـ ا / أعظم من نسبة زاوية جـ ب د إلى زاوية جـ ب ا . وزاوية جـ ب د مثل زاوية ل - ٥٢ - و ب ا جـ ، فنسبة د جـ إلى جـ ا أعظم من نسبة زاوية ب ا جـ إلى زاوية قائمة ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

- ب - ونقول أيضًا : إنه إذا كان مثلث ا ب جـ منفرج الزاوية ، وكانت زاوية ا ب جـ ا - ٧٠ - ظ منه / منفرجة ، وكان خط ا ب منه أصغر من خط ب جـ ، وخرج خط ب د حتى صارت زاوية ب د ا مساوية لزاوية ا ب جـ ، فإن نسبة د ا إلى ا جـ أصغر من نسبة / زاوية ا جـ ب إلى الزاوية ب - ٢٥ - ظ التي تلي زاوية ا ب جـ .

برهان ذلك : أنّا نخرج ب هـ أيضًا حتى يكون زاوية ب هـ جـ / مثل زاوية ب د ا ، فيكون ل - ٥٢ - ظ زاوية ب هـ د مثل زاوية ب د هـ ، فيكون خطا ب د ب هـ متساويين، ويكون نسبة ا د إلى د ب كنسبة ا ب إلى ب جـ ، وكذلك يكون نسبة ب هـ إلى هـ جـ كنسبة ا ب إلى ب جـ . فنسبة ا د إلى د ب كنسبة ب هـ إلى هـ جـ ، فضرب جـ هـ في د ا مساوٍ لمربع د ب . وخط ا د أصغر من خط د ب ، فهو أصغر من خط هـ جـ ، فهو أصغر بكثير من خط د جـ . وضرب جـ د في د ا أصغر من مربع نصف ا جـ ، فضرب جـ هـ في د ا أصغر بكثير من مربع نصف ا جـ ، فمربع د ب أصغر من مربع نصف ا جـ ، فـ د ب أصغر من نصف ا جـ ، فنسبة د ا إلى نصف ا جـ أصغر من نسبة د ا إلى د ب . ولأن نسبة ب هـ إلى هـ جـ كنسبة ا ب إلى ب جـ ، يكون ب هـ أصغر من هـ جـ . فنخرج هـ ب على استقامة ونجعل ط هـ مثل هـ جـ ونصل جـ ط ، فيكون ط جـ أعظم من جـ ب . وجـ ب أعظم من جـ هـ لأن زاوية ب هـ جـ منفرجة. فنجعل نقطة جـ مركزًا ونُدير ببعد جـ ب قوسًا من دائرة ولتكن ك ب ح . فيكون / نسبة خط ط هـ إلى خط ل - ٥٣ - و هـ ب أعظم من نسبة زاوية ط جـ هـ إلى زاوية ب جـ هـ . فبالعكس يكون نسبة ب هـ إلى هـ ط أصغر من نسبة زاوية ب جـ هـ إلى زاوية ط جـ هـ . وزاوية ط جـ هـ نصف زاوية ب هـ د المساوية للزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ . وخط ط هـ مثل خط هـ جـ ، فنسبة ب هـ إلى هـ جـ أصغر من نسبة زاوية ا جـ ب إلى نصف / الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ . ونسبة ب هـ إلى هـ جـ ب - ٢٦ - و

3 فنسبة ... ب ا جـ : ناقصة [ل] – 5 ب : ناقصة [ا، ب] – 11 وكذلك : فكذلك [ب] / كنسبة : نسبة [ل] – 12 مساوٍ : مساوي [ا]، ولن نشير إليها فيا بعد – 13 خط (الثانية) : ناقصة [ب] – 14 مربع (الأولى) : ربع [ا] – 13-14 خط د جـ ... بكثير من : ناقصة [ب] – 15 ا جـ (الأولى) : ناقصة [ل] – 16 ولأن : فلان [ب] / يكون : فيكون [ل] – 19 ط هـ : ط ح [ا، ب] – 21 وزاوية ط جـ هـ : ناقصة [ب].

هي نسبة ا د إلى د ب ، فنسبة ا د إلى د ب أصغر من نسبة زاوية ا جـ ب إلى نصف الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ . وخط د ب قد تبيّن أنه أصغر من نصف ا جـ ، فنسبة د ا إلى نصف ا جـ أصغر بكثير من نسبة زاوية ا جـ ب إلى نصف الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ ، فنسبة د ا إلى جميع ا جـ أصغر من نسبة زاوية ا جـ ب إلى جميع الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./ ل – ٥٣ – ظ



– جـ – ونقول أيضًا: إنه إذا كانت زاوية ب ا جـ ليست بأعظم من نصف قائمة، فإن نسبة هـ جـ إلى جـ ا أصغر من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ .

ولنعد صورة المثلث لئلا تكثر الخطوط ، وليكن مثلث ا ب جـ ، وندير عليه دائرة، ولتكن دائرة ا ب جـ ز، وليكن مركزها م ، ونصل خط ا م وننفذه إلى ز ، ونصل خطوط م ط ب م جـ جـ ز. فمن أجل أن زاوية ا ب جـ منفرجة، يكون قوس ا ب جـ أقل من نصف دائرة، فهي إما أعظم من ربع دائرة وإما ليست بأعظم من ربع دائرة.

فإن كانت / قوس ا ب جـ ليست بأعظم من ربع دائرة، فإن زاوية ا م جـ ليست بأعظم من ل – ٥٤ – و قائمة، فزاوية ا ز جـ ليست بأعظم من نصف زاوية قائمة. وإن كانت زاوية ا م جـ ليست بأعظم من قائمة، فإن كل واحدة من زاويتي م ا جـ م جـ ا ليست بأصغر من نصف زاوية قائمة، فهي إما نصف قائمة أو أعظم. وزاوية ا ز جـ إما نصف قائمة أو أصغر، فزاوية ا ز جـ ليست بأعظم من زاوية م ا جـ . وزاوية م ط جـ أعظم من زاوية م ا جـ ، فزاوية م ط جـ أعظم من زاوية ا ز جـ ،

4 زاوية (الثانية): ناقصة [ا] – 4-5 وذلك ما أردنا أن نبين: أثبت ناسخ [ل] تحتها: «هذا شكل أهمل موضعه سهوًا» – 6 جـ : ناقصة [ب] / قائمة: غير واضحة [ل] – 9 ا ب جـ ز: ا ب جـ [ب]، ا ب جـ د [ل] – 10 جـ ز: جـ ن [ا] – 11 ربع (الثانية): مربع [ا] – 12 ربع: مربع [ا] – 13 وإن: وإذا [ب، ل] – 14 واحدة: واحد [ب].

فزاوية ب ط جـ أصغر من زاوية ا ب جـ ، فزاوية ب هـ جـ أعظم من زاوية ب ط جـ ، فنقطة هـ فيما بين نقطتي / ط جـ . ونخرج من نقطة م عمودًا على ا جـ وليكن م ح ، فنقطة ح / فيما بين (ا – ٧١ – و ، ب – ٢٦ – ظ) نقطتي ط جـ لأن م ح يقسم قوس ا ب جـ بنصفين إذا خرج على استقامة. ونجعل ح ن مثل ح ط .

فإذا جعلنا نقطة م مركزًا وأدرنا ببعد م ن قوسًا من دائرة، تبيّن أن نسبة جـ ح إلى ح ن – المساوي لـ ح ط – أعظم من نسبة زاوية جـ م ح إلى زاوية / ح م ن المساوية لزاوية ح م ط . (ل – ٥٤ – ظ) فنسبة جـ ح إلى ح ط أعظم من نسبة زاوية جـ م ح إلى زاوية ح م ط . فبالعكس يكون نسبة ط ح إلى ح جـ أصغر من نسبة زاوية ط م ح إلى زاوية ح م جـ . وبالتركيب يكون نسبة ط جـ إلى جـ ح أصغر من نسبة زاوية ط م جـ إلى زاوية ح م جـ ويكون نسبة ط جـ إلى جـ ا أصغر من نسبة زاوية ب م جـ إلى زاوية جـ م ا . وزاوية ب م جـ ضعف زاوية ب ا جـ ، وزاوية جـ م ا ضعف زاوية ا ز جـ المساوية للزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ ، فنسبة ط جـ إلى جـ ا أصغر من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ ، فنسبة هـ جـ إلى جـ ا أصغر بكثير من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ .

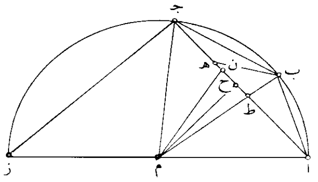
وإن كانت قوس ا ب جـ أعظم من ربع دائرة، فإن زاوية ا م جـ أعظم من زاوية قائمة. وزاوية ب ا جـ بالفرض ليست بأعظم من نصف قائمة، فهي إما نصف قائمة وإما أصغر. فقوس ب جـ إما ربع دائرة وإما أصغر. فإن كانت قوس ب جـ ربع دائرة فإن زاوية ب م جـ قائمة /، (ل – ٥٥ – و) ويكون زاوية م ب جـ نصف قائمة، وزاوية ب ا جـ نصف قائمة، فيكون زاوية جـ ب ط مثل زاوية ب ا جـ . وزاوية ا جـ ب مشتركة فزاوية ب ط جـ مساوية لزاوية ا ب جـ ، فنقطة هـ هي نقطة ط .

ويتبيّن كما تبيّن في القسم الأول أن نسبة ط جـ إلى جـ ا أصغر من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ ، ونقطة هـ هي نقطة ط ، فيكون نسبة هـ جـ إلى جـ ا أصغر من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ .

3 نقطتي: نقطي [ا] – 5 تبين: يتبين [ل] – 6 إلى زاوية ح م ن: أثبتها في الهامش [ب]، إلى زاوية جـ م ن [ل] – 8 ح جـ : جـ ح [ب] / وبالتركيب: والتركيب [ا] – 9 ويكون: ولكون [ب] – 11 تلي: أثبتها في الهامش، مع «ظ» فوقها بمعنى «الظاهر» [ب] – 12 تلي: ناقصة [ا] – 13 ا ب جـ : كتب ناسخ [ا] بعدها «فنسبة ط جـ إلى جـ ا أصغر بكثير من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ» – 17 جـ ب ط : ح ب ط [ا] – 18 مشتركة: مشركة [ا] / ب ط جـ : ب ط هـ [ب] ب ط ح [ل].

وإن كانت قوس / ب ج أصغر من ربع دائرة، فإن زاوية ب م ج أصغر من قائمة. فيكون ب – ٢٧ – و زاوية م ب ج أعظم من نصف قائمة ويكون زاوية ب ا ج أصغر من نصف قائمة، فيكون زاوية م ب ج أعظم من زاوية ب ا ج ، فزاوية ج ب هـ أصغر من زاوية م ب ج ، فنقطة هـ فيما بين نقطتي ط ج .

ويتبيّن على تصاريف الأحوال بالطريق الذي ذكرناه أن نسبة ط ج إلى ج ا أصغر من نسبة زاوية ط م ج إلى زاوية ج م ا ، لأن عمود/ م ح يقع أبدًا فيما بين نقطتي ط ج ، لأن قوس ل – ٥٥ – ظ ج ب أعظم من قوس ب ا . وإذا كانت نقطة هـ فيما بين نقطتي ط ج ، كان خط هـ ج أصغر من خط ط ج ، فيكون نسبة هـ ج إلى ج ا أصغر بكثير من نسبة زاوية ب م ج إلى زاوية ج م ا . وزاوية ج م ا ضعف الزاوية التي تلي زاوية ا ب ج ، وزاوية ب م ج ضعف زاوية ب ا ج ، فنسبة هـ ج إلى ج ا أصغر من نسبة زاوية ب ا ج إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب ج . فإذا كانت زاوية ب ا ج من مثلث ا ب ج المنفرج الزاوية ليست بأعظم من نصف زاوية قائمة، فإن نسبة هـ ج إلى ج ا أصغر من نسبة زاوية ب ا ج إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب ج ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./ ل – ٥٦ – و



– د – ونقول أيضًا: إن زاوية ب ا ج إذا كانت أعظم من نصف زاوية قائمة، فإن نسبة هـ ج إلى ج ا قد تكون أعظم من نسبة زاوية ب ا ج إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب ج .

فلنرسم دائرة عليها ا ب ج د وليكن مركزها ك ، ونخرج قطر ج ك د ، ونفرض على / خط ب – ٢٧ – ظ ك د نقطة كيفما اتفقت، / ولتكن ط ، ونخرج منها عمود ط ب ، ونصل خطوط ج ب ب د ا – ٧١ – ظ ك ب ، فيكون مثلث د ب ج قائم الزاوية. فيكون نسبة ط ج إلى ج د أعظم من نسبة زاوية ب د ج إلى زاوية قائمة كما تبيّن في الشكل الأول من هذه المقالة. فنسبة ط ج إلى ج د أعظم

6 لأن: لاان [ل] / م ح : م ج [ا، ب، ل] – 7 نقطتي: خطين [ا] / ط ج : ج ط [ا] – 8 خط : ناقصة [ا، ب] – 9 وزاوية ج م ا : كررها ناسخ [ل] / زاوية (الثانية): ناقصة [ب] – 11 فإذا: فان، ثم أثبت الصواب فوقها [ل] – 12 التي تلي زاوية: كررها ناسخ [ا] – 14 د : ناقصة [ب].

من نسبة زاوية ب ك ج إلى زاويتين قائمتين، فهي أعظم من نسبة قوس ب ج إلى قوس
ج ب د. فبالعكس يكون نسبة د ج إلى ج ط أصغر من نسبة قوس د ب ج إلى قوس ج ب.
فبالتفصيل يكون نسبة د ط إلى ط ج أصغر من نسبة قوس د ب إلى قوس ب ج، فنسبة د ط /
إلى ط ج هي كنسبة بعض قوس د ب إلى قوس ب ج، فليكن ذلك البعض قوس ا ب. ل - ٥٦ - ظ
ونصل خطوط ج هـ ا ا ب ا د، فيكون زاوية د ا ج قائمة ويكون زاوية ا ب ج منفرجة. فلأن
زاوية د ا ج قائمة، تكون مساوية لزاوية هـ ط ج. وزاوية ا ج د مشتركة لمثلثي ا د ج
هـ ط ج، فيبقى زاوية ا د ج مساوية لزاوية ط هـ ج. وزاوية ا د ج هي مساوية للزاوية التي
تلي زاوية ا ب ج، فزاوية ط هـ ج مساوية للزاوية التي تلي زاوية ا ب ج، فزاوية ب هـ ج
مساوية لزاوية ا ب ج. ونخرج عمود ا م، فيكون نسبة ج ط إلى ط م كنسبة ج هـ إلى هـ ا.
ونسبة ج ط إلى ط م أعظم من نسبة ج ط إلى ط د، فنسبة ج هـ إلى هـ ا أعظم من نسبة
ج ط إلى ط د. ونسبة ج ط إلى ط د هي كنسبة قوس ج ب إلى قوس ب ا، فنسبة ج هـ إلى
هـ ا أعظم من نسبة قوس ج ب إلى/ قوس ب ا. فبالعكس يكون نسبة ا هـ إلى هـ ج أصغر من ل - ٥٧ - و
نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ج. وبالتركيب يكون نسبة ا ج إلى ج هـ أصغر من نسبة قوس
ا ب ج إلى قوس ج ب. وبالعكس يكون نسبة هـ ج إلى ج ا أعظم من نسبة قوس ب ج إلى
قوس ج ب ا. ونصل ا ك، فيكون نسبة قوس ب ج إلى قوس / ج ب ا كنسبة زاوية ب - ٢٨ - و
ب ك ج إلى زاوية ج ك ا، فنسبة هـ ج إلى ج ا أعظم من نسبة زاوية ب ك ج إلى زاوية
ج ك ا. وزاوية ب ك ج ضعف زاوية ب ا ج وزاوية ج ك ا ضعف زاوية ا د ج المساوية
للزاوية التي تلي زاوية ا ب ج، فنسبة هـ ج إلى ج ا أعظم من نسبة زاوية ب ا ج إلى الزاوية
التي تلي زاوية ا ب ج.

وكذلك يلزم إن كانت نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ج أعظم من نسبة د ط إلى ط ج،
لأنه يصير نسبة ج ط إلى ط د أعظم من نسبة قوس ج ب إلى قوس ب ا. ونسبة ج هـ إلى
هـ ا أعظم من نسبة ج ط إلى ط د، فيكون نسبة ج هـ إلى / هـ ا أعظم من نسبة قوس ج ب ل - ٥٧ - ظ
إلى قوس ب ا. فيتبيّن كما تبين من قبل أن نسبة هـ ج إلى ج ا أعظم من نسبة زاوية ب ا ج إلى
الزاوية التي تلي زاوية ا ب ج.

9 لزاوية: للزاوية [ا] / نسبة: فنسبة [ل] – 21 يصير: أثبت فوقها «٩٥» [ل] / ب ا: ب ا د [ب] / ونسبة: نسبة [ب] او نسبة [ل].

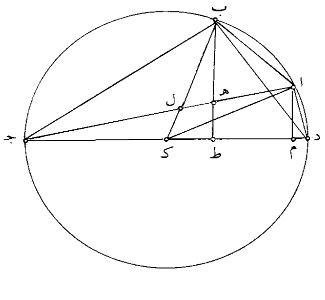
فيتبيّن من جميع ذلك أنه إذا كانت نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ ليست بأصغر من نسبة خط د ط إلى خط ط جـ ، فإن نسبة هـ جـ إلى جـ ا أعظم من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ.

فأما أن هذه النسبة ممكنة – أعني أن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ قد تكون مساوية لنسبة خط د ط إلى خط ط جـ وقد تكون أعظم منها – فذلك بيّن. أما إمكان ذلك على الإطلاق فلأن قوسي ا ب ب جـ من دائرة واحدة، فقد يصح أن يقع بينهما كل نسبة تكون بين مقدارين متجانسين. وأما وجود ذلك بالفعل وبطريق العمل وبعمل سهل، فإن خط د ط إذا كانت نسبته إلى خط ط جـ نسبة الأنصاف – أعني أن يكون د ط نصف ط جـ أو نصف نصفه أو نصف نصف نصفه وعلى ذلك إلى ما لا نهاية – فإن وجود قطعة من قوس د ب تكون / نسبتها ل – ٥٨ – و إلى قوس ب جـ هذه النسبة ممكنٌ متسهلٌ؛ وهو بأن / يُقسم قوس ب جـ بنصفين، ونصفها / ا – ٧٢ – و ب – ٢٨ – ظ بنصفين إلى أن تنتهي القسمة إلى الجزء النظير لجزء د ط من ط جـ . ثم نجعل قوس ا ب التي هي بعض د ب مساوية للجزء الذي انتهت إليه القسمة، فيكون نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ كنسبة خط د ط إلى خط ط جـ.

وإذا كان د ط أصغر من ط جـ فإن قوس جـ ب تكون أعظم من قوس ب د ، فيكون زاوية ب ا جـ أعظم من نصف زاوية قائمة، ويكون خط جـ ب أعظم من خط ب ا ، ويكون نسبة هـ جـ إلى جـ ا أعظم من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ.

فقد تبيّن مما بيناه أنه قد يكون مثلث منفرج الزاوية ويكون الخطان المحيطان بزاويته المنفرجة مختلفين ويكون الخط – الذي يخرج من الزاوية المنفرجة إلى وترها ويحيط مع الوتر بزاوية مساوية للزاوية المنفرجة مما يلي الضلع الأعظم – يفصل من وتر الزاوية المنفرجة مما يلي الضلع الأعظم خطًا يكون نسبته إلى جميع الوتر أعظم من نسبة الزاوية التي يوترها الضلع الأعظم إلى/ الزاوية ل – ٥٨ – ظ التي تلي الزاوية المنفرجة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

6 قوسي: قوس [ا، ل] – 7 د ط : ط د [ل] – 8 د ط : جـ ط [ب] وأثبت «د» في الهامش مع «ظ» فوقها بمعنى «الظاهر» – 10-11 ونصفها بنصفين: كررها ناسخ [ب] عند تغيير الورقة – 11 ثم: لم [ب] – 13 د ط : ط د [ل] – 16 إلى (الأولى) : كررها الناسخ [ا] / تلي: ناقصة [ا] – 19 وتر: ناقصة [ا] – 20 خطًا: خط [ب] / خطًا ... الأعظم إلى: أثبتها في الهامش [ل].

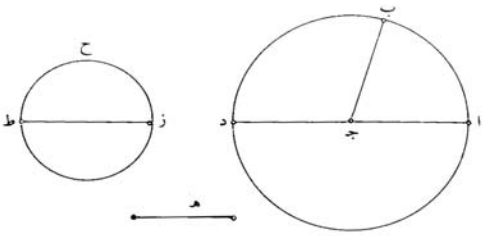


– هـ – ونقول أيضـًا: إن كل قطاع من دائرة يكون رأسه مركز الدائرة فإنه مساوٍ لدائرة تامة.
مثال ذلك: قطاع ا ب جـ، في دائرة ا ب د، ورأسه – وهو مركز الدائرة – نقطة جـ.
فأقول: إنه مساوٍ لدائرة تامة./ ب – ٢٩ – و

برهان ذلك: أن نسبة قوس ا ب إلى محيط الدائرة هي كنسبة قطاع ا ب جـ إلى جميع الدائرة. وقوس ا ب ومحيط الدائرة مقداران من جنس واحد يصح بينهما التطابق والتفاضل. وكل نسبة بين مقدارين / متجانسين يصح بينهما التطابق والتفاضل، فإنها تقع بين كل مقدارين ل – ٥٩ – و متجانسين يصح بينهما التطابق والتفاضل. أما إن كانت النسبة عددية فذلك ظاهر، وأما إن كانت النسبة غير عددية، فهي تقع بين كل مقدارين متجانسين، وجدنا نحن تلك النسبة أم لم نجدها، لأن النسبة هي معنىً يخص المقادير المتجانسة، لا من أجل علمنا بها ووجودنا لها. وليست واحدة من النسب أولى بالمقادير المتجانسة من غيرها. فنسبة قوس ا ب إلى محيط الدائرة هي كنسبة خط مستقيم إلى قطر الدائرة الذي هو خط ا د، وجدنا نحن ذلك الخط أم لم نجده. فليكن ذلك الخط خط هـ، وليكن خط ز ط متوسطـًا في النسبة بين خط هـ وخط ا د. ونديرعلى خط ز ط دائرة، ويكون قطرها ز ط، ولتكن دائرة ز ح ط. ولأن نسبة خط هـ إلى خط ز ط كنسبة ز ط إلى ا د، يكون نسبة هـ إلى ا د كنسبة مربع ز ط إلى مربع ا د. ونسبة مربع ز ط إلى مربع ا د هي /كنسبة دائرة ز ح ط إلى دائرة ا ب د، فنسبة دائرة ز ح ط إلى دائرة ا ب د هي كنسبة خط هـ ل – ٥٩ – ظ

1 هـ: ناقصة [ب] – 5 ا ب: ا ب جـ [ا، ب، ل] – 6-7 فإنها ... والتفاضل: ناقصة [ب] – 8 نجدها: تجدها [ا] – 9 هي: أثبتها في الهامش [ب] / وليست: وليس [ب] – 11 أم: ا م [ا] / نجده: تجده [ا] – 12 خط (الأولى): ناقصة [ب] – 13 ويكون: يكون [ب، ل] / ولأن: فلأن [ب، ل] – 15 ا ب د: ا ب جـ [ا، ب، ل] / فنسبة دائرة ز ط ح إلى دائرة ا ب د: مكررة [ب].

إلى خط ا د. ونسبة هـ إلى ا د هي كنسبة قوس ا ب إلى محيط الدائرة، ونسبة قوس ا ب إلى محيط الدائرة هي كنسبة قطاع ا جـ ب إلى جميع الدائرة، فنسبة دائرة / ز ح ط إلى دائرة ا ب د هي كنسبة قطاع ا جـ ب إلى دائرة ا ب د، فدائرة ز ح ط مساوية لقطاع ا جـ ب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ب - ٢٩ - ظ



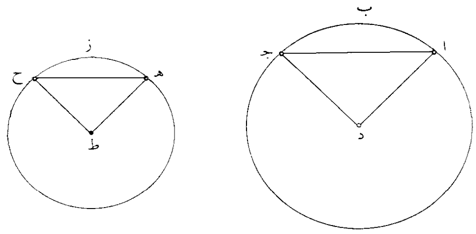
– و – ونقول أيضًا: إن كل قطعتين متشابهتين من دائرتين مختلفتين، فإن نسبة إحداهما إلى / الأخرى هي كنسبة الدائرة إلى الدائرة وكنسبة مربع قاعدة القطعة إلى مربع قاعدة القطعة. ل - ٦٠ - و

مثال ذلك: قطعتا ا ب جـ هـ ز ح قطعتان متشابهتان وهما من دائرتين مختلفتين.

فأقول: إن نسبة / قطعة ا ب جـ إلى قطعة هـ ز ح هي كنسبة الدائرة إلى الدائرة. ا - ٧٢ - ظ

⟨برهان ذلك:⟩ ولنتمم الدائرتين، وليكن مركز دائرة ا ب جـ نقطة د ومركزُ دائرة هـ ز ح نقطةَ ط، ونصل خطوط ا د جـ د هـ ط ح ط. فلأن قطعتي ا ب جـ هـ ز ح متشابهتان، يكون زاويتا ا د جـ هـ ط ح متساويتين، فمثلثا ا د جـ هـ ط ح متشابهان، فنسبة مثلث ا د جـ إلى مثلث هـ ط ح هي كنسبة مربع ا د إلى مربع هـ ط وكنسبة مربع ا جـ إلى مربع هـ ح. ونسبة مربع ا د إلى مربع هـ ط هي كنسبة دائرة ا ب جـ إلى دائرة هـ ز ح، ونسبة دائرة ا ب جـ إلى دائرة هـ ز ح هي كنسبة قطاع ا د جـ ب إلى قطاع هـ ط ح ز لأن نسبة كل قطاع / إلى دائرته ل - ٦٠ - ظ هي كنسبة كل قطاع شبيه به إلى دائرته. فنسبة قطاع ا د جـ ب إلى قطاع هـ ط ح ز هي كنسبة مثلث ا د جـ إلى مثلث هـ ط ح وكنسبة الباقي إلى الباقي. فنسبة قطعة ا ب جـ إلى قطعة هـ ز ح

2 هي ... الدائرة: ناقصة [ب] – 5 و: ناقصة [ب] / إن: فوق السطر [ل] / مختلفتين: مختلفين [ا] – 7 مختلفتين: مختلفين [ا] – 10 متشابهتان: متشابهتين [ا] – 12 وكنسبة: فكنسبة [ب] – 13 هي: ناقصة [ب] – 14 هـ ط ح ز: هـ ط ح د [ل] – 15 ا د جـ ب: ا د جـ [ا، ب، ل] – 16 وكنسبة: فكنسبة [ب] / ا ب جـ: كتبها ا د جـ، ثم أثبت الصواب في الهامش [ا].



هي كنسبة قطاع ا د جـ ب إلى قطاع هـ ط ح ز. / ونسبة القطاع إلى القطاع هي كنسبة الدائرة إلى الدائرة، فنسبة قطعة ا ب جـ إلى قطعة هـ ز ح هي كنسبة دائرة ا ب جـ إلى دائرة هـ ز ح وكنسبة مربع ا جـ إلى مربع هـ ح لأن نسبة هذين المربعين هي نسبة مربع القطر إلى مربع القطر؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./ ب – ٣٠ – و ل – ٦١ – و

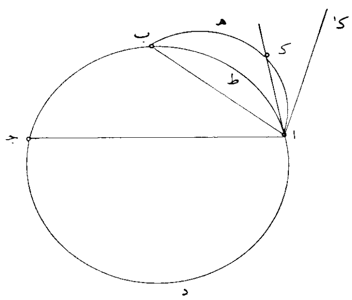
– ز – ونقول أيضًا: إن كل قطعة من دائرة يخرج فيها وتر كيفما اتفق، ويُعمل عليه قطعة شبيهة بالقطعة الأولى، فإن جميع محيط القطعة الثانية يقع خارجًا عن الدائرة الأولى.

مثال ذلك: قطعة ا ب جـ من دائرة ا ب جـ د خرج فيها وتر ا ب، وعُمل عليه قطعة ا هـ ب شبيهةً بقطعة ا ب جـ.

فأقول: إن محيط قطعة ا هـ ب يقع جميعه خارجًا عن قطعة ا ب جـ.

برهان ذلك: أنا نخرج خط ا ك مماسًا لدائرة ا ب جـ د، فتكون زاوية ك ا جـ مساويةً للزاوية التي تقع في قطعة ا د جـ، فزاوية ك ا ب أصغر من الزاوية التي تقع في تمام قطعة ا هـ ب، فخط ا ك يقطع محيط قطعة ا هـ ب، وهو مماس لقوس ا ب جـ، فخط ا ك متوسط بين القوسين، فزاوية هـ ا ط خارجة عن قوس ا ب، وزاوية هـ ا ب مساوية لزاوية هـ ب ا وزاوية ط ا ب مساوية لزاوية ط ب ا، فيبقى زاوية هـ ب ط مساوية لزاوية هـ ا ط، فجميع قوس ا هـ ب خارجة عن قطعة / ا ب جـ، فقوس ا هـ ب يحيط مع قوس ا ط ب بشكل هلالي جميعه خارج عن قطعة / ا ب جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ل – ٦١ – ظ ب – ٣٠ – ظ

1 هي (الثانية): ناقصة [ل] – 3 مربع (الأولى): كتب بعدها «نسبة» [ا] / نسبة (الأولى): ناقصة [ا] – 5 ز: ناقصة [ب] – 8 ا ب جـ: ا م ب جـ [ب] – 9 جميعه: جمعه [ب] – 11 فزاوية: بزاوية [ب] – 14 ط ا ب: ط ب ا [ب].

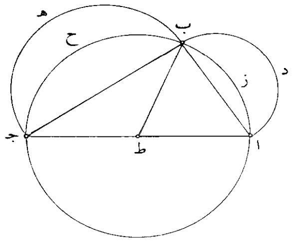


⟨الأشكال⟩

– ح – وإذْ قد تبيّنت هذه المقدمات فإنا نقول: إن كل دائرة يخرج فيها قطر من أقطارها، ثم نتعلم على محيط أحد نصفيها نقطة كيفما اتفقت، ويوصل بين تلك النقطة وبين طرفي القطر بخطين مستقيمين، ونعمل على كل واحد من الخطين نصف دائرة، فإن الهلالين اللذين يحدثان من محيطي هذين النصفين مع محيط نصف الدائرة الأولى مساويان بمجموعها للمثلث الذي حدث في نصف الدائرة.

مثال ذلك: دائرة ا ب ج خرج فيها قطر ا ج، وفرض على نصف ا ب ج نقطة ب، ووصل خطا ا ب ب ج، وعمل على خطي ا ب ب ج نصفا دائرتين، وهما / ا د ب ب هـ ج. ل - ٦٢ - و

فأقول: إن هلالي ا د ب ز ا ب هـ ج ح ب مساويان بمجموعها لمثلث ا ب ج.



2 ح: ناقصة [ب] – 3 نصفيها: نصفها [ب، ل] – 8 ووصل، وعمل: حتى تستقيم الجملة كما كانت عليه في المخطوطة استدرك ناسخ [ب] الخطأ واقترح في الهامش «ونصل، ونعمل» مع حرف «ظ» فوق كل منها، والتي تعني الظاهر هكذا / خطا: خطي [ا، ب، ل] / نصفا: نصفي [ا، ب، ل] – 10 ا د ب ز ا: لا يكتب ناسخا [ب، ل] الحرف الأخير، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد.

برهان ذلك: أن نسبة كل دائرة إلى كل دائرة هي كنسبة مربع قطرها إلى مربع قطرها، فنسبة دائرتي ا د ب ب هـ جـ مجموعتين إلى دائرة ا ب جـ هي كنسبة مربعي ا ب ب جـ إلى مربع ا جـ. ومربعا ا ب ب جـ مساويان لمربع ا جـ، فدائرتا ا د ب ب هـ جـ / مساويتان بمجموعهما ا - ٧٣ - و لدائرة ا ب جـ، فنصفا ا د ب ب هـ جـ مساويان بمجموعهما لنصف دائرة ا ب جـ. فيسقط قطعتا ا ز ب ب ح جـ المشتركتين، فيبقى هلالا ا د ب ز ا ب هـ جـ ح ب مساويين بمجموعهما لمثلث ا ب جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./ ب - ٣١ - و

– ط – ولنعد الصورة، وليكن مركز الدائرة نقطة / ط، ونصل ط ب. فإن كان قوسا ا ب ل - ٦٢ - ظ ب جـ متساويتين فإن قطعتي ا د ب ب هـ جـ متساويتان. ومثلثا ا ب ط ب ط جـ متساويان، فيكون الهلالان متساويين، ويكون كل هلال مساويًا للمثلث الذي يليه.

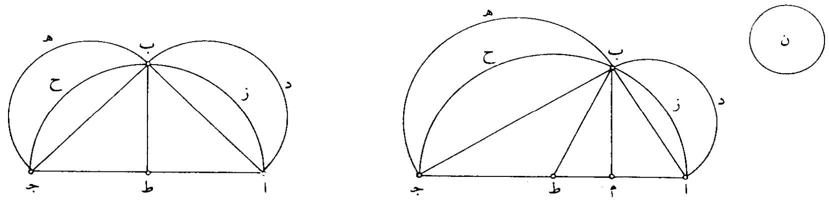
وإن كان قوسا ا ب ب جـ مختلفتين، فإن الهلالين يكونان مختلفين. ‹و›لأن المثلثين متساويان، فنقول: إن أصغر الهلالين مع دائرة تامة مساويان بمجموعهما للمثلث الذي يلي الهلال الأصغر، وإن المثلث الباقي – مع تلك الدائرة بعينها – مساوٍ للهلال الباقي.

وليكن قوس ا ب أصغر من قوس ب جـ ونخرج من نقطة ب عمود ب م، فيكون نسبة م ا إلى ا جـ كنسبة مربع ا ب إلى مربع ا جـ وكنسبة نصف دائرة ا د ب إلى نصف دائرة ا ب جـ. وقد تبين في الشكل الأول من المقدمات أن نسبة م ا إلى ا جـ هي أصغر من نسبة زاوية ا جـ ب إلى زاوية قائمة. وزاوية ا ط ب هي ضعف زاوية ا جـ ب، فنسبة م ا إلى ا جـ هي أصغر من نسبة زاوية ا ط ب إلى زاويتين قائمتين/. ونسبة زاوية ا ط ب إلى زاويتين قائمتين هي نسبة قطاع ل - ٦٣ - و ا ط ب ز إلى نصف دائرة ا ب جـ، فنسبة نصف دائرة ا د ب إلى نصف دائرة ا ب جـ هي أصغر من نسبة قطاع ا ط ب إلى نصف دائرة ا ب جـ، فقطاع ا ط ب أعظم من نصف دائرة ا د ب. وكل قطاع فهو مساوٍ لدائرة تامة، وكل نصف دائرة فهو مساوٍ لدائرة تامة، وكل دائرتين مختلفتين فإن العظمى تزيد على الصغرى بدائرة تامة، فقطاع ا ط ب يزيد على نصف دائرة ا د ب بدائرة تامة، فلتكن تلك الدائرة دائرة ن، فيكون نصف دائرة ا د ب مع دائرة ن

3 ومربعا: ومربعات [ا] / مساويتان: متساويتان [ا] – 4 فنصفا: فنصفها [ل] – 5 ا ز ب: ا د ب [ل] / المشتركتين: المشتركين [ا] / مساويين: مساويان [ا، ب، ل] – 7 ط: ناقصة [ب] – 8 متساويان: متساويتان [ا] – 9 مساويًا: مساوي [ا] مساوٍ [ل] – 10 مختلفتين: مختلفين [ا، ل] – 11 بمجموعهما: لمجموعهما [ا] – 12 مساو: وهي أيضًا جائزة – 17 زاويتين: زاويين [ا] / قائمتين ... زاويتين: أثبتها في الهامش [ب] – 21 مختلفتين: مختلفين [ا] – 22 دائرة (الأولى): ناقصة [ا].

مساويين بمجموعهما لقطاع ا ط ب. فتسقط قطعة ب ز ا المشتركة، فيبقى هلال ا د ب ز ا مع دائرة ن مساويين بمجموعهما لمثلث ا ط ب. وقد تبيّن أن الهلالين مجموعين مساويان لمثلث ا ب ج. وإذا كان / مثلث ا ط ب يزيد على هلال ا د ب ز ا بدائرة ن، فإن مثلث ب ط ج ينقص عن هلال/ ب هـ ج ح ب بدائرة ن، فمثلث ب ط ج مع دائرة ن مساويان بمجموعهما لهلال ب هـ ج ح ب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ب - ٣١ - ظ
ل - ٦٣ - ظ



وقد يتبيّن مما بيناه في أول هذا الفصل أن كل هلال يعمل على ربع دائرة ويكون محيطه نصف دائرة، فإنه مساوٍ للمثلث القائم الزاوية الذي يقع في ربع الدائرة.

– ي – ولنرسم أيضـًا دائرة عليها ا ب ج ومركزها هـ، ونخرج فيها وترًا كيفما اتفق يفصل منها قطعة هي أصغر من نصف دائرة، وهي قطعة ا ب ج، ونفرض على قوس ا ب ج نقطة كيفما اتفق، ولتكن نقطة ب، ونصل خطي ا ب ب ج. ونعمل على كل واحد من خطي ا ب ب ج قطعة شبيهة بقطعة ا ب ج وليكن قطعتا ا د ب ب ط ج، / ونخرج خطي ب ن ب ع حتى يصير كل واحدة من زاويتي ب ن ا ب ع ج مساوية لزاوية ا ب ج، ونصل خطوط هـ ا هـ ج هـ ن هـ ع.

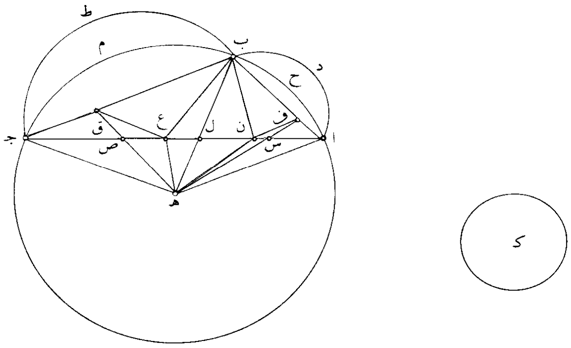
ل - ٦٤ - و

فأقول: إن هلالي ا د ب ح ا ب ط ج م ب مع دائرة تامة مساويات بمجموعها لمثلث ا ب ج مع مثلث هـ ن ع.

1 مساويين: مساويان [ا، ب] / لقطاع: لمثلث [ا] / ب ز ا: ب ز [ا] / ا د ب ز ا: ا د ز ب ا [ا] ا د ز ب [ب] – 1-2 فتسقط ... ا ط ب: أثبتها في الهامش وكتب فوقها «٢١» [ا] – 2 مساويين: مساويان [ا، ب] / لمثلث (الأولى): المثلث [ا]، كتبها «لقطاع»، ثم أثبت الصواب في الهامش [ل] – 6 يتبين: تبين [ل] / محيطه: محيطة [ا] – 8 ي: ناقصة [ا، ب] – 10 اتفق: يعوُد الضميرُ في الفعل «اتفق» على الفرد.

برهان ذلك: أن نسبة / جـ ا إلى ا ن هي نسبة مربع جـ ا إلى مربع ا ب وكنسبة مربع قطر ا - ٧٣ - ظ دائرة ا ب جـ إلى مربع قطر دائرة ا د ب وكنسبة قطعة ا ب جـ إلى قطعة ا د ب. وكذلك نسبة ا جـ إلى / جـ ع هي كنسبة مربع ا جـ إلى مربع جـ ب وكنسبة قطعة ا ب جـ إلى قطعة ب - ٣٢ - و ب ط جـ. فنسبة ا جـ إلى خطي ا ن جـ ع مجموعين هي كنسبة قطعة ا ب جـ إلى قطعتي ا د ب ب ط جـ. ونسبة ا جـ إلى خطي ا ن جـ ع هي كنسبة مثلث ا هـ جـ إلى مثلثي ا هـ ن جـ هـ ع، فنسبة قطعة ا ب جـ إلى قطعتي ا د ب ب ط جـ هي نسبة مثلث ا هـ جـ إلى مثلثي ا هـ ن جـ هـ ع وكنسبة الجميع إلى الجميع، فنسبة / ا جـ إلى ا ن جـ ع مجموعين هي نسبة ل - ٦٤ - ظ قطاع ا هـ جـ ب إلى قطعتي ا د ب ب ط جـ مع مثلثي ا هـ ن جـ هـ ع. وا جـ أعظم من خطي ا ن جـ ع مجموعين، فقطاع ا هـ جـ ب أعظم من قطعتي ا د ب ب ط جـ مع مثلثي ا هـ ن جـ هـ ع. ونسبة ا جـ إلى خطي ا ن جـ ع مجموعين هي نسبة قوس ا ب جـ إلى بعضها وكنسبة قطاع ا هـ جـ ب إلى القطاع الذي قاعدته تلك القوس التي هي بعض قوس ا ب جـ؛ فذلك القطاع الذي قاعدته بعض قوس ا ب جـ مساوٍ لقطعتي ا د ب ب ط جـ مع مثلثي ا هـ ن جـ هـ ع. وزيادة قطاع ا هـ جـ على ذلك القطاع هي قطاع في دائرة ا ب جـ رأسه نقطة هـ، فهو مساوٍ لدائرة تامة، فلتكن تلك الدائرة دائرة ك، فيكون قطاع ا هـ جـ ب مساويًا لقطعتي ا د ب ب ط جـ مع مثلثي ا هـ ن جـ هـ ع ومع دائرة ك. فتسقط المشتركات – وهي قطعتا ا ح ب ب م جـ ومثلثا ا هـ ن جـ هـ ع – فيبقى هلالا ا د ب ح ا ب ط جـ م ب مع دائرة ك مساويات / بمجموعها لمثلثي ا ب جـ هـ ن ع. ونخرج خط ن ف / موازيًا لخط ا هـ ل - ٦٥ - و ب - ٣٢ - ظ ونصل هـ س ف، فيكون مثلث ا س ف مساويًا لمثلث هـ س ن. ونخرج خط ع ق موازيًا لخط هـ جـ، ونصل هـ ص ق، فيكون مثلث جـ ص ق مساويًا لمثلث هـ ص ع. فيسقط مثلثا ا س ف جـ ص ق من مثلث ا ب جـ، ونزيد مثلثي هـ س ن هـ ص ع على مثلث هـ ن ع، فيصير مربع هـ ف ب ق مساويًا لمثلثي ا ب جـ هـ ن ع، فيكون هلالا ا د ب ح ا ب ط جـ م ب مع دائرة ك مساويين بمجموعها لمربع هـ ف ب ق؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

3 هي: ناقصة [ا] / ا جـ: فوق السطر، ثم كررها في الهامش [ا] / إلى (الثانية): مكررة [ا] – 3-4 قطعة ب ط جـ: قطعتي ا د ب ط جـ، وهذه العبارة هي تكرار لعبارة تعقبها [ا] – 10 إلى بعضها: مطموسة [ا] – 13 جـ هـ ع: هـ جـ ع [ب] / هي: هو [ا، ب، ل] – 14 مساويًا: مساوٍ [ل] – 16 فيبق: فيبقا [ا] – 20 نزيد مثلثي: يزيد مثلثا [ا، ب، ل] – 22 مساويين: مساويان [ا، ب] في مثل هذا الموضع عادة ما يكتب «مساويات» أو «مساوية»، وربما اعتبر هنا مجموع الدائرتين فردًا / هـ ف ب ق: هـ ب ف ق [ا، ب].



– يا – ولنعد الصورة ونصل خط هـ ل ب . فإن كان قوسا ا ب ب ج متساويتين، فإن
خطي ا ب ب ج متساويان وخطي ا ن ج ع متساويان وخطي ف ب ق ب متساويان ومثلثي
ف هـ ب ق هـ ب متساويان / ويكون الهلالان متساويين. فيكون كل واحد من الهلالين مع ل – ٦٥ – ظ
دائرة تامة – مساوية لنصف دائرة ك – مساويين بمجموعها للمثلث الذي يلي الهلال من مثلثي
ف هـ ب ق هـ ب .

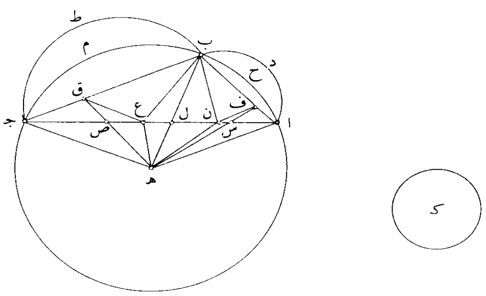
وإن كان قوسا ا ب ب ج مختلفتين وكانت قوس ا ب أصغر القوسين، فإن هلال
ا د ب ح ا مع دائرة تامة أيضًا مساويان بمجموعها لمثلث ف ب هـ .

برهان ذلك: أنه قد تبيّن أن نسبة ن ا إلى ا ج أصغر من نسبة زاوية ب ج ا إلى الزاوية التي
تلي زاوية ا ب ج . وزاوية ب هـ ا هي ضعف زاوية ب ج ا ، وزاوية ا هـ ج ضعف الزاوية التي
تلي زاوية ا ب ج . فنسبة ن ا إلى ا ج أصغر من نسبة زاوية ب هـ ا إلى زاوية ا هـ ج ، فهي
أصغر من نسبة قطاع ب هـ ا إلى قطاع ا هـ ج . ونسبة ن ا إلى ا ج هي كنسبة مربع ب ا إلى
مربع ا ج ، وكنسبة قطعة ا د ب إلى قطعة ا ب ج ، فنسبة قطعة ا د ب إلى قطعة ا ب ج / هي ا – ٧٤ – و
أصغر من نسبة قطاع ب هـ ا إلى قطاع ا هـ ج ، / فنسبة قطعة ا د ب إلى قطعة ا ب ج هي ل – ٦٦ – و

1 يا: ناقصة [ب] / ونصل: فنصل [ل] / هـ ل ب: هـ ا ب [ل] / متساويتين: متساويان [ا] متساويتان [ب] – 4 مساويين: مساويان [ا، ب] – 6 مختلفتين: مختلفين [ا، ب] – 7 ا د ب ح ا: ا د ب [ا، ب، ل] / أيضًا: أثبتها فوق السطر [ل] – 8 تبين: يتبين [ا] / أن نسبة: أثبتها في الهامش [ل] / ن ا: ز ا [ب] – 10 تلي: ناقصة [ا].

كنسبة قطاع هو أصغر من قطاع ب ه ا إلى قطاع ا ه ج ، فنسبة القطاع الذي هو أصغر من قطاع ب ه ا / إلى قطاع ا ه ج هي كنسبة ن ا إلى ا ج وكنسبة مثلث ا ه ن إلى مثلث ا ه ج ب - ٣٣ - و وكنسبة زيادة القطاع الأصغر على مثلث ا ه ن إلى قطعة ا ب ج . فنسبة قطعة ا د ب إلى قطعة ا ب ج هي كنسبة زيادة القطاع الأصغر على مثلث ا ه ن إلى قطعة ا ب ج . فزيادة القطاع الأصغر على مثلث ا ه ن مساوية لقطعة ا د ب . فقطعة ا د ب مع مثلث ا ه ن – أعني مثلث ا ف ه – مساوية للقطاع الأصغر الذي نسبته إلى قطاع ا ه ج كنسبة ن ا إلى ا ج . وزيادة قطاع ا ه ب على القطاع الأصغر هي دائرة تامة، فالقطاع الأصغر مع الدائرة مساويان بمجموعها لقطاع ا ه ب. فقطعة ا د ب مع مثلث ا ه ف مع الدائرة التامة مساويات بمجموعها لقطاع ا ه ب. فتسقط المشتركات / – وهي قطعة ا ح ب ومثلث ا ف ه – فيبقى ل - ٦٦ - ظ هلال ا د ب ح ا مع الدائرة التامة مساويين لمثلث ف ه ب.

وإذا كانت زاوية ب ا ج ليست بأعظم من نصف زاوية قائمة، فإن نسبة ع ج إلى ج ا أصغر من نسبة زاوية ب ا ج إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب ج . فيتبيّن كما تبيّن في خط ن ا أن هلال ب ط ج م ب مع دائرة تامة أيضًا مساويان بمجموعها لمثلث ق ه ب . وقد كان تبيّن أن مجموع الهلالين على تصاريف الأحوال مع دائرة تامة مساويات لمربع ف ه ق ب الذي هو مجموع مثلثي ف ه ب ب ه ق . فيكون الدائرتان اللتان مع الهلالين مساويتين بمجموعها للدائرة التي مع مجموع الهلالين.



4 القطاع (الأولى) : أثبتها في الهامش [ا] – 5 ا ه ن : ا ه ز [ل] / مساوية : مساوي [ا] مساو [ب، ل] / ا ه ن : ا ه ز [ل] – 6 مساوية : مساوي [ا] مساو [ب، ل] / نسبته : نسبة [ا] – 7 هي : هو [ا، ب، ل] – 8 ا د ب : ا ر ب [ب] / مساويات : مساويان [ب] – 9 بمجموعها : بمجموعها [ب] لمجموعها [ا] / ا ح ب : ا ح ن [ب] – 10 مساويين: مساويات [ا، ل] مساويان [ب] – 12 زاوية (الثانية): ممحوة [ا] / فيتبين: فتبين [ل] – 14 هو: ناقصة [ا، ب] – 15 ف ه ب : ف ه ن [ب] / مساويتين: مساويتان [ا، ب، ل] – 16 الهلالين: الهلالي [ب].

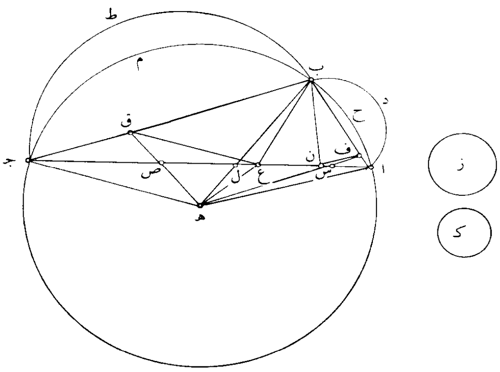
فقد تبيّن مما بيّناه أن كل واحد من الهلالين مع / دائرة تامة – إذا كانت زاوية / ب ا جـ ليست بأعظم من نصف زاوية قائمة – مساويان لمثلث معلوم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ب – ٣٣ – ظ / ل – ٦٧ – و

– يب – ولنعد الصورة. وليكن زاوية ب ا جـ أعظم من نصف قائمة، وليكن نسبة ع جـ إلى جـ ا أعظم من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ، فيكون نقطة ع خارجة عن مثلث ب هـ جـ، لأنه قد تبيّن أن نسبة ل جـ إلى جـ ا أصغر من نسبة زاوية ب ا جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ.

فأقول: إن هلال ب ط جـ م ب يزيد على مثلث ق هـ ب بدائرة تامة، وإن هلال ا د ب ح ا مع الدائرة التي يزيد بها مربع ب ف هـ ق على الهلالين ومع الدائرة التي يزيد بها هلال ب ط جـ م ب على مثلث ق هـ ب مساويات لمثلث ف هـ ب.

برهان ذلك: أن نسبة ع جـ إلى جـ ا هي كنسبة مربع ب جـ إلى مربع جـ ا وكنسبة قطعة ب ط جـ إلى قطعة جـ ب ا وكنسبة مثلث ع هـ جـ إلى مثلث جـ هـ ا وكنسبة قطعة ب ط جـ مع مثلث ع هـ جـ إلى قطاع هـ جـ ب ا. ونسبة زاوية ب ا جـ / إلى الزاوية التي تلي زاوية ا ب جـ هي كنسبة زاوية ب هـ جـ إلى زاوية جـ هـ ا وكنسبة قطاع ب هـ جـ م إلى قطاع هـ جـ ب ا، فنسبة قطعة ب ط جـ مع مثلث ع هـ جـ – أعني مثلث ق هـ جـ – إلى قطاع هـ جـ ب ا أعظم من نسبة قطاع ب هـ جـ م إلى قطاع هـ جـ ب ا، فهي كنسبة قطاع أعظم من قطاع ب هـ جـ م إلى قطاع هـ جـ ب ا. وذلك القطاع الأعظم يزيد على قطاع ب هـ جـ م بدائرة تامة، فلتكن تلك الدائرة دائرة ز، فيكون قطعة ب ط جـ مع مثلث ق هـ جـ مساويين لقطاع ب هـ جـ م مع دائرة ز. فتسقط المشتركات – وهي قطعة ب م جـ مع مثلث ق هـ جـ – فيبقى هلال ب ط جـ م ب مساويًا لمثلث ب هـ ق مع دائرة ز. فهلال ب ط جـ م ب يزيد على مثلث ب هـ ق بدائرة ز. ل – ٦٧ – ظ

1 تبين: يتبين [ا] / مما: بما [ب] / ب ا جـ: ب جـ [ل] – 3 يب: ناقصة [ب] / وليكن: فليكن [ب] – 8 ومع: مع [ا] – 11 جـ ب ا: جـ ب ف [ا] / وكنسبة (الأولى): والنسبة [ا] – 12 مثلث: ثلث [ا] – 15-16 إلى ... ب هـ جـ م: أثبتها في الهامش [ل] – 17 ز: هـ ز [ب] / مساويين: مساويان [ب، ل] مساويات [ا] – 19 ب ط جـ م ب: ب ط جـ م ن [ب] – 20 ب هـ ق: ز هـ ف [ب].



وأيضًا فإنه قد تبيّن في الشكل العاشر / من هذه المقالة أن هلالي ا د ب ح ا ب ط ج م ب مع دائرة ك مساوية بمجموعها لمثلثي ب ف ه ب ه ق. فمثلثا ف ه ب ب ه ق يزيدان على الهلالين بدائرة ك. فإذا كان مثلث ب ه ق / ينقص عن هلال ب ط ج م ب بدائرة ز، فإن مثلث ب ف ه يزيد على هلال / ا د ب ح ا مع دائرة ك بدائرة ز. فهلال ا د ب ح ا مع دائرتي ك ز مساويان لمثلث ف ه ب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ب - ٣٤ - و
ا - ٧٤ - ظ
ل - ٦٨ - و

– يـج – ولكي يكون هذا المعنى ظاهرًا ويكون منطقًا، نجعل النسبة بين القوسين نسبة عددية. فنرسم دائرة عليها ا ب ج، وليكن مركزها د، ونخرج قطر ا د ج. ونخرج وتر ا ب ونجعله مساويًا لنصف القطر ونصل ب ج ب د، ونعمل على كل واحد من خطي ا ب ب ج نصف دائرة وليكونا / نصفي ⟨دائرتي⟩ ا ه ب ب ح ج، ونجعل دائرة ك مساوية لجزء من أربعة وعشرين جزءًا من دائرة ا ب ج، وذلك ممكن متسهل. ونجعل دائرة م جزءًا من اثني عشر جزءًا من دائرة ا ب ج.

ل - ٦٨ - ظ

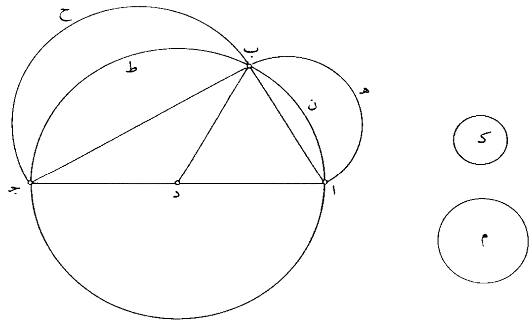
فأقول: إن هلال ا ه ب ن ا مع دائرة ك مساويان بمجموعهما لمثلث ا د ب، وإن مثلث

1 تبين: يتبين [ا] – 2 بمجموعها: بمجموعهما [ب] – 5 ز: ب [ب] / ز: ناقصة [ا]، وأثبت مكانها كلمة «بدائرة» / مساويان: وهو جائز على اعتبار الهلال من جهة ومجموع الدائرتين من جهة أخرى، ولن نشير إلى مثل ذلك فيما بعد – 6 يـج: ناقصة [ب] / ولكي: ولكن [ا، ب، ل] – 8 ونصل: ونصل ا [ا] – 9 ب ح ج: ب ج د [ا] – 10 اثني: اثنا [ا].

ب د ج مع دائرة ك مساويان لهلال ب ح ج ط ب ، وإن هلال ا ه ب ن ا مع دائرة م مساويان لهلال ب ح ج ط ب .

برهان ذلك: أن مربع ا ب ربع مربع ا ج ، / فنصف دائرة ا ه ب ربع نصف دائرة ا ب ج . ولأن ا ب مثل نصف القطر يكون قطاع ا د ب سدس الدائرة، فنصف ‹دائرة› ا ب ج ثلاثة أمثال قطاع ا د ب ، وهو أربعة أمثال نصف دائرة ا ه ب . فقطاع ا د ب يزيد على نصف دائرة ا ه ب بنصف سدس نصف دائرة ا ب ج ، ونصف سدس النصف هو جزء من أربعة وعشرين من الكل. فقطاع ا د ب يزيد على نصف دائرة ا ه ب بدائرة ك ، فنصف دائرة ا ه ب مع دائرة ك مساويان لقطاع ا د ب . فتسقط / قطعة ا ن ب المشتركة، فيبقى هلال ا ه ب ن ا مع دائرة ك مساويين لمثلث ا د ب . وإذا كان هلال ا ه ب ن ا مع دائرة ك مساويين لمثلث ا د ب فإن مثلث ا د ب يزيد على هلال ا ه ب ن ا بدائرة ك . وقد تبيّن أن مثلث ا ب ج مساوٍ لهلالي ا ه ب ن ا ب ح ج ط ب ، فمثلث ب د ج ينقص عن هلال ب ح ج ط ب بدائرة ك . فمثلث ب د ج مع دائرة ك مساويان لهلال ب ح ج ط ب ، فهلال ب ح ج ط ب يزيد على مثلث ب د ج بدائرة ك . ومثلث ب د ج يزيد على هلال ا ه ب ن ا بدائرة ك ، لأن مثلث ب د ج مساوٍ لمثلث ا د ب ، فهلال ب ح ج ط ب يزيد على هلال ا ه ب ن ا بضعف دائرة ك . ودائرة م ضعف دائرة ك ، فهلال ب ح ج ط ب يزيد على هلال ا ه ب ن ا بدائرة م ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن/.

ب – ٣٤ – ظ
ل – ٦٩ – و
ل – ٦٩ – ظ



1 ا ه ب ن ا: ا ب ه ن ا [ا، ب] / م: ه م [ا] – 8 ا ن ب: ا ز ب [ا] – 9 مساويين: مساويان [ا، ب، ل] – 10 مساويين: مساويان [ا، ب] / تبين: يتبين [ا] – 13-14 ومثلث ... ك: أثبتها في الهامش [ب].

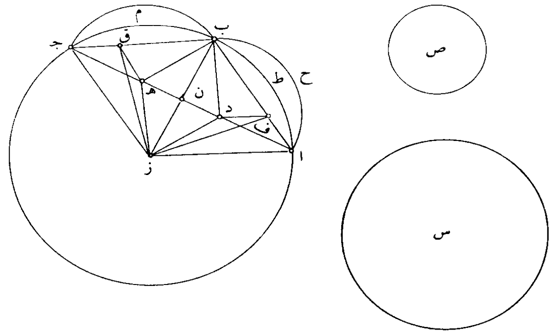
〈يد〉 ولنرسم أيضًا / دائرة عليها ا ب ج ، ونخرج فيها وترًا مساويًا لضلع المثلث المتساوي [ب - ٣٥ - و] الأضلاع الذي تحيط به الدائرة، وليكن خط ا ج ، وليكن القوس الصغرى ا ب ج . ونقسمها بنصفين على نقطة ب ، ونصل ا ب ب ج ونخرج خطي ب د ب هـ حتى تصير كل واحدة من زاويتي ب د ا ب هـ ج مساوية لزاوية ا ب ج . ونعمل على كل واحد من خطي ا ب ب ج قطعة شبيهة بقطعة ا ب ج ، وليكن قطعتي ا ح ب ب ك ج ، ونجعل دائرة س تسع دائرة ا ب ج ، ونجعل دائرة ص نصف دائرة س . وليكن مركز دائرة ا ب ج نقطة ز ، ونصل ا ز / [ا - ٧٥ - و] ج ز ب ز د ز هـ ز ونخرج خط د ف موازيًا لخط ز ا وخطًّ هـ ق موازيًا لخط ز ج ، ونصل ف ز ق ز .

فأقول: إن هلالي ا ح ب ط ا ب ك ج م ب مع دائرة س مساويات لمربع ز ف ب ق ، وإن كل واحد من الهلالين مع دائرة ص مساويان لأحد مثلثي ف ب ز ق ب ز .

برهان ذلك: أن قوس ا ب ج ثلث الدائرة، فقوس/ ا ب سدس الدائرة، فمربع ا ب ثلث [ل - ٧٠ - و] مربع ا ج ، فخط د ا ثلث ا ج . وكذلك هـ ج ثلث ا ج ، فخطا د ا هـ ج ثلثا ا ج ، فمربعا ا ب ب ج ثلثا مربع ا ج . فقطعتا ا ح ب ب ك ج ثلثا قطعة ا ب ج . ومثلثا ا ز د هـ ز ج ثلثا مثلث ا ز ج ، فقطعتا ا ح ب ب ك ج مع مثلثي ا ز د ج ز هـ مجموعة مساوية لثلثي قطاع ا ز ج ب . وقطاع ا ز ج ب هو ثلث دائرة ا ب ج ، ودائرة س هي تسع دائرة ا ب ج ، فدائرة س هي ثلث قطاع ا ز ج ب . فقطعتا ا ح ب ب ك ج مع مثلثي ا ز د هـ ز ج مع دائرة س مساويات لقطاع ا ز ج ب . ومثلثا ا ز د هـ ز ج مساويان لمثلثي ا ز ف ج ز ق . فقطعتا ا ح ب ب ك ج مع مثلثي ا ز ف ج ز ق مع دائرة س مساويات لقطاع ا ز ج ب . فتسقط المشتركات /، فيبقى هلالا ا ح ب ط ا ب ك ج م ب مع دائرة س مساويات لمربع [ب - ٣٥ - ظ] ب ف ز ق . ولأن خطي ا ب ب ج متساويان يكون الهلالان متساويين ويكون مثلثا ا ب ن ج ب ن متساويين ويكون مثلثا ز د ن ز هـ ن متساويين ويكون مثلثا ف ب ز ب ز ق متساويين ويكون مثلث ز ف ب مساويًا لمثلثي ا ب ن / ز د ن ، ويكون مثلث ز ق ب مساويًا [ل - ٧٠ - ظ] لمثلثي ج ب ن ز هـ ن ، فيكون كل واحد من الهلالين مع دائرة ص – التي هي نصف دائرة

7 ب ز: ب ن [ب، ل] / د ز: ز د [ا] / خط (الأولى): ناقصة [ب] – 10 ق ب ز: ج ب ز [ا، ب، ل] – 13 ب ك ج: ب ط ج [ا، ب، ل] / هـ ز ج: هـ ز ح [ب] – 15 وقطاع: فقطاع [ا] – 16 ا ح ب: ا ج ب [ب] – 17 ج ز ق: ج ن ق [ل] – 18-19 لقطاع ... مساويات: ناقصة [ل] – 20 ولأن: فلان [ب] / متساويين: متساويان [ا] / ويكون: ناقصة [ا] أثبتها في الهامش [ب] – 20-21 ا ب ن ... مثلثا (الأولى): ناقصة [ل].

س – مساويين لأحد مثلثي ف ب ز ب ز ق ولأحد مثلثي ا ب ن ج ب ن مع أحد مثلثي ز د ن ز هـ ن ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



ويستبين من هذا البيان أن كل قوس من دائرة تكون أقل من ربع دائرة إذا أوترت بخط مستقيم وعُمل على ذلك الخط قطعةٌ شبيهة بالقطعة التي يحوزها ضعف تلك القوس، فإن الهلال الذي يحدث يكون مع دائرة معلومة مساويًا لمثلث معلوم.

– يه – ولنرسم أيضًا دائرة عليها ا ب ج، ونخرج فيها وترا ا ج يفصل منها ثلثها، ونخرج ا ب يفصل منها ربعها، وليكن مركز الدائرة د. ونصل خطوط ا د ج د ب د ب ط د ب ج ونعمل على خطي ا ب ب ج قطعتين / شبيهتين بقطعة ا ب ج، ولتكونا ا هـ ب ب ح ج، ونخرج / ب ل حتى يكون زاوية ب ل ج مساوية لزاوية ا ب ج، ونصل د ل. ونجعل دائرة ن ف ثلث دائرة ا ب ج ونخرج قطرها، وليكن ن ف. ونجعل نسبة مربع ن ف إلى مربع خط ق س كنسبة ا ج إلى ط ل. ونجعل ق س قطرًا وندير عليه دائرة ولتكن دائرة ق س. فيكون نسبة دائرة ق س إلى دائرة ن ف كنسبة ط ل إلى ا ج.

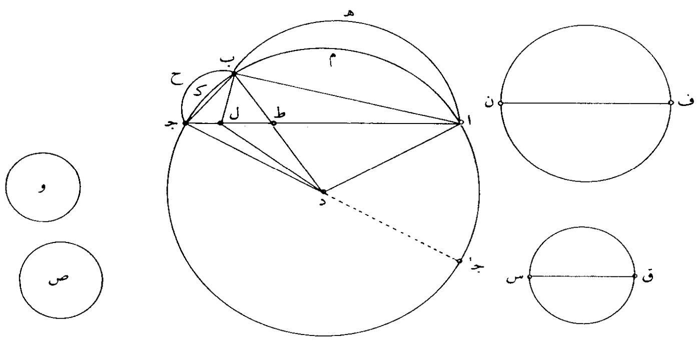
ب - ٣٦ - و
ل - ٧١ - و

1 مساويين: مساويان [ا، ب] / ف ب ز ب ز ق ولأحد مثلثي: أثبتها في الهامش [ل] / ب ز ق: ز ق ف [ا] / ج ب ن: ج ب ز [ب] – 5 الذي: التي [ا] – 6 يه: ناقصة [ب] – 7 منها: ناقصة [ل] – 8 خطي: خط [ل].

فأقول: إن هلالي ا ه ب ب ح ج مع دائرة ق س مساويان بمجموعها لمثلثي ا ب ج د ط ل.

برهان ذلك: أن قوس ا ب ج ثلث دائرة، فزاوية ا ب ج قائمة وثلث، وزاوية د ا ج ثلث قائمة، وقوس ا ب ربع دائرة، فزاوية ا د ب قائمة، وزاوية ا ط ب مساوية لزاويتي ا د ط د ا ط، فزاوية ا ط ب قائمة وثلث. وزاوية ا ب ج قائمة وثلث لأنها في ثلث دائرة، فزاوية ا ط ب مساوية لزاوية ا ب ج، فضرب ج ا في ا ط مثل مربع ا ب. وكذلك ضرب ا ج في ج ل مثل مربع ج ب لأن زاوية ب ل ج مثل زاوية ا ب ج. / فنسبة خطي / ط ا ل ج إلى خط ا ج هي نسبة مربعي ا ب ب ج إلى مربع ا ج، وكنسبة قطعتي ا ه ب ب ح ج إلى قطعة ا ب ج، وكنسبة مثلثي ا د ط ل د ج إلى مثلث ا د ج، وكنسبة قطعتي ا ه ب ب ح ج مع مثلثي ا د ط ل د ج مجموعة إلى قطاع ا د ج ب. فنسبة خطي ط ا ل ج إلى خط ا ج هي كنسبة قطعتي ا ه ب ب ح ج مع مثلثي ا د ط ل د ج إلى دائرة ن ف. ونسبة دائرة ق س إلى دائرة ن ف هي كنسبة ط ل إلى ا ج، فنسبة خطوط ط ا ط ل ل ج إلى خط ا ج هي نسبة قطعتي ا ه ب ب ح ج مع مثلثي ا د ط ل د ج مع دائرة ق س إلى دائرة ن ف المساوية لقطاع ا د ج. فقطعتا ا ه ب ب ح ج مع مثلثي ا د ط ل د ج ومع دائرة ق س مساويات بمجموعها لقطاع ا د ج ب. وتسقط المشتركات – وهي قطعتا ا م ب ب ك ج مع / مثلثي ا د ط ل د ج – فيبقى هلالا ا ه ب م ا ب ح ج ك ب مع دائرة ق س مساويات لمثلثي ا ب ج د ط ل.

ل – ٧١ – ظ
ا – ٧٥ – ظ
ب – ٣٦ – ظ



1 ق س: ف س [ا] / مساويان: مساويات [ا، ب] – 3 ا ب ج (الثانية): ا د ج [ا، ب، ل] – 8 وكنسبة: ونسبة [ل] – 9 وكنسبة: ونسبة [ل] / مثلث: مثلثي [ا] صححها ناسخ [ب] – 10 ل ج: ل ح [ل] – 11 إلى دائرة: ناقصة [ب].

ولأن خط ا جـ ضلع المثلث / المتساوي الأضلاع، يكون مربعه ثلاثة أرباع مربع قطر الدائرة، وخطَّ ا ب ضلع المربع، فمربعه نصف مربع قطر الدائرة، فمربع ا ب ثلثا مربع ا جـ، فخط ط ا ثلثا خط ا جـ، فخط ط جـ ثلث ا جـ. وكل واحدة من زاويتي ا ط ب ب ل جـ قائمة وثلث، فكل واحدة من زاويتي ب ط ل ب ل ط ثلثا قائمة، فمثلث ط ب ل متساوي الأضلاع، ونسبة ب ل إلى ل جـ هي كنسبة ا ب إلى ب جـ. وا ب أعظم من ب جـ لأن قوس ا ب ربع الدائرة وقوسَ ا ب جـ ثلثها، فقوس ا ب ثلاثة أمثال قوس ب جـ. فخط ب ل أعظم من خط ل جـ، فخط ط ل أعظم من خط ل جـ، وخط ط جـ / ثلث ا جـ، فخط ط ل أعظم من سدس ا جـ، فدائرة ق س أعظم من سدس قطاع ا د جـ ب، فهي أعظم من جزء من ثمانية عشر جزءًا من دائرة ا ب جـ. ل – ٧٢ – و ل – ٧٢ – ظ

فنجعل دائرة و جزءًا من ستة وثلاثين جزءًا من دائرة ا ب جـ، فتكون دائرة و / أصغر بكثير من دائرة ق س. فنجعل دائرة ص مساوية لزيادة دائرة ق س على دائرة و. ب – ٣٧ – و

فأقول: إن هلال ا هـ ب م ا مع دائرة و مساويان لمثلث ا ب ط، وإن هلال ب ح جـ ک ب مع دائرة ص مساويان لمثلثي ب ط جـ ط د ل.

برهان ذلك: أن قطاع ا د ب م ربع الدائرة وقطاع ا د جـ ب ثلث الدائرة، فقطاع ا د ب م ثلاثة أرباع قطاع ا د جـ ب. ومربع ا ب ثلثا مربع ا جـ، فقطعة ا هـ ب ثلثا قطعة ا ب جـ. وخط ا ط ثلثا خط ا جـ فمثلث ا د ط ثلثا مثلث ا د جـ، فقطعة ا هـ ب مع مثلث ا د ط مجموعين ثلثا قطاع ا د جـ ب. فقطاع ا د ب م يزيد على قطعة ا هـ ب مع مثلث ا د ط بجزء من اثني عشر جزءًا من قطاع ا د جـ ب. وقطاع ا د جـ ب ثلث الدائرة، فالجزء من اثني عشر منه هو جزء من ستة وثلاثين جزءًا / من الدائرة. فقطعة ا هـ ب مع مثلث ا د ط مع دائرة و مساويات لقطاع ا د ب م. وتسقط المشتركات – وهي قطعة ا م ب مع مثلث ا د ط – فيبقى هلال ا هـ ب م ا مع دائرة و – التي هي جزء من ستة وثلاثين جزءًا من دائرة ا ب جـ – مساويين لمثلث ا ب ط. وقد كان الهلالان مع دائرة ق س مساويين لمثلثي ا ب جـ د ط ل، ودائرتا و ص مساويتان لدائرة ق س، فالهلالان مع دائرتي و ص مساويات لمثلثي ا ب جـ د ط ل. ل – ١٣٣ – و

3 ط ا: ط ل [ب] / ب ل جـ: ب د جـ [ل] – 7 ل جـ (الثانية): ب جـ [ا، ب] الحرف الأول غير واضح [ل] – 10 جزءًا (الأولى): جزء [ل] – 14 ا د ب م: ا د ب م ا [ب] – 16 ا د ط ثلثا مثلث: ناقصة [ا] – 18 اثني: اثنا [ا] / فالجزء: والجزء [ب] / اثني: اثنا [ا] – 19 فقطعة: كتب «فيكون» ثم أثبت الصواب فوقها [ل] – 21 ا هـ ب م ا: ا هـ ب [ا، ب، ل] / مساويين: مساويان [ا، ب، ل] – 22 مساويين: مساويان [ا، ب، ل].

وإذ قد تبيّن أن هلال ا هـ ب م ا مع دائرة و مساويان لمثلث ا ب ط ، فإن / هلال ب ح جـ ك ب مع دائرة ص مساويان لمثلثي ب ط جـ د ط ل. ا - ٧٦ - و

ولأن دائرة ق س أعظم من جزء من ثمانية عشر جزءًا من دائرة ا ب جـ ودائرة و جزءٌ من ستة وثلاثين جزءًا من دائرة ا ب جـ ، يكون دائرة ص أعظم من دائرة و. فكل واحد من الهلالين مع دائرة معلومة مساويان لمثلث معلوم؛ وذلك ما أردنا أن/ نبيّن. ب - ٣٧ - ظ

– يو – ولنرسم أيضًا دائرة عليها ا ب جـ / وليكن مركزها د. ونخرج قطر ا د جـ ونقسم ا د بنصفين على نقطة هـ ، ونخرج عمود هـ ب ونصل خطوط جـ ب ب ا ب د. فلأن ا هـ مثل هـ د وهـ ب عمودٌ، يكون ا ب مثل ب د ، فمثلث ا ب د متساوي الأضلاع، فقوس ا ب سدس الدائرة وقوس ب جـ ثلث الدائرة. فنقسم قوس ا ب بنصفين ونصفها بنصفين، وليكن ⟨قوس⟩ ا ح ربع قوس ا ب ، فيكون قوس ح ب ثلاثة أرباع قوس ا ب ، فهي ربع وثمن قوس ب جـ ، فهي أكبر من ثلث قوس ب جـ. وخط ا هـ ثلث خط هـ جـ. فنجعل خط ا ز ربع وثمن خط ز جـ ، ونصل خطوط د ح ب ح ح ا ح ط جـ. فيكون زاوية ب ط جـ مساوية لزاوية ح ب جـ كما تبيّن في الشكل الرابع من هذه المقالة. ونخرج من نقطة ز على خط ح جـ عمود ز ك ، فيكون موازيًا لخط ا ح لأن زاوية ا ح جـ قائمة، ويكون نقطة ك فيما بين نقطتي ط جـ لأن زاوية هـ ط جـ حادة. ولأن ك ز موازٍ لـ ح ا ، تكون نسبة ح ك إلى ك جـ كنسبة ا ز إلى ز جـ / ونسبة ا ز إلى ز جـ هي كنسبة قوس ح ب إلى قوس ب جـ ، فنسبة ح ك إلى ك جـ هي كنسبة قوس ح ب إلى قوس ب جـ. وبالتركيب يكون نسبة خط ح جـ إلى خط جـ ك كنسبة قوس ح ب جـ إلى قوس جـ ب. فبالعكس يكون نسبة خط ك جـ إلى خط جـ ح كنسبة قوس ب جـ إلى قوس جـ ب ح. فنسبة ط جـ إلى جـ ح أعظم من نسبة قوس ب جـ إلى قوس جـ ب ح. ونسبة قوس ب جـ إلى قوس جـ ب ح هي نسبة زاوية ب د جـ إلى زاوية جـ د ح ، وكنسبة زاوية ب ح جـ إلى الزاوية التي تلي زاوية ح ب جـ ، وكنسبة قطاع ب د جـ م إلى قطاع جـ د ح ب ، فنسبة ط جـ إلى جـ ح أعظم من نسبة قطاع ب د جـ م إلى قطاع جـ د ح ب.

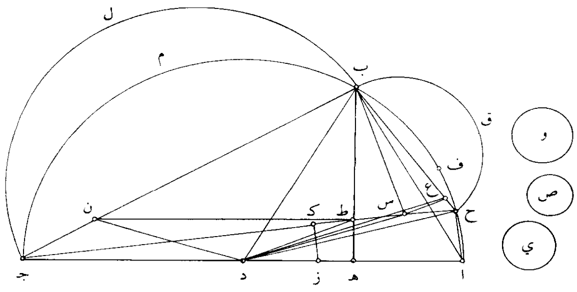
ل - ١٣٣ - ظ / ل - ١٣٤ - و

6 يو: ناقصة [ب] – 10 ا ح: ا جـ [ل] / ح ب: جـ ب [ل] – 11 أكبر: أكثر [ب] – 12 ز جـ: ز ح [ا] ب جـ [ب] / ح ا: جـ ا [ب] / ب ط جـ: ب ط هـ [ل] – 13 تبين: يتبين [ل] – 14 موازيًا: أثبتها فوق السطر [ل] – 16 ونسبة ... ز جـ: ناقصة [ا] أثبتها في الهامش [ب] / ح ب: جـ ب [ل] – 18 نسبة: أثبتها فوق السطر [ل] – 21 وكنسبة: كنسبة [ل] / ب د جـ م: ب د م جـ [ا] – 22 فنسبة ... جـ د ح ب: أثبتها في الهامش [ل] / ط جـ: ط ح [ل].

ونخرج خط ب س حتى تكون زاوية ب س ح مساوية لزاوية ح ب جـ ، ونخرج / خط س ع ب – ٣٨ – و
موازيًا لخط د ح ، ونصل د ع ونخرج خط ط ن موازيًا لخط د جـ ، ونصل خطوط د ن د ط
د س . ونجعل دائرة و مساوية لقطاع جـ د ح ب . وذلك ممكن لأن / نسبة قطاع جـ د ح ب ل – ١٣٤ – ظ
إلى دائرة ا ب جـ نسبة معلومة. ونجعل نسبة دائرة ص إلى دائرة و كنسبة خط س ط إلى خط
ح جـ ، ونجعل نسبة دائرة ي إلى دائرة و كنسبة خط ط ك إلى خط ح جـ ، ونعمل على خطي
ح ب ب جـ قطعتين شبيهتين بقطعة ا ب جـ ، ولتكونا قطعتي ح ق ب ب ل جـ . فيكون
هلالا ح ق ب ف ح ب ل جـ م ب مع دائرة ص مساويةً لمثلثي د ع ب د ب ن كما تبيّن في
الشكل الذي قبل هذا. ولأن نسبة ك جـ إلى جـ ح كنسبة قوس ب جـ إلى قوس جـ ب ح ،
يكون نسبة ط ك إلى جـ ح هي زيادة نسبة ط جـ إلى جـ ح على نسبة قوس ب جـ إلى قوس
جـ ب ح . ونسبة ك جـ إلى جـ ح هي كنسبة قطاع ب د جـ م إلى قطاع جـ د ح ب ، فنسبة
ط ك إلى جـ ح هي [نسبة] زيادة نسبة ط جـ إلى جـ ح على نسبة قطاع ب د جـ م إلى قطاع
جـ د ح ب . ونسبة ط ك إلى جـ ح هي كنسبة دائرة ي إلى دائرة و المساوية لقطاع جـ د / ل – ١٣٥ – و
ح ب . فنسبة ط جـ إلى جـ ح هي كنسبة قطاع ب د جـ م مع دائرة ي إلى قطاع جـ د ح ب . / ا – ٧٦ – ظ
ونسبة ط جـ إلى جـ ح هي نسبة مربع ب جـ إلى مربع جـ ح وكنسبة قطعة ب ل جـ إلى قطعة
جـ ب ح وكنسبة مثلث ط د جـ إلى مثلث جـ د ح وكنسبة قطعة ب ل جـ مع مثلث ط د جـ –
أعني مثلث د ن جـ – إلى قطاع جـ د ح ب . فنسبة قطعة ب ل جـ مع مثلث د ن جـ إلى قطاع
جـ د ح ب هي كنسبة قطاع ب د جـ م مع دائرة ي إلى قطاع جـ د ح ب . فقطعة / ب ل جـ ل – ١٣٥ – ظ
مع مثلث د ن جـ مساويان لقطاع ب د جـ م مع دائرة ي . فتسقط المشتركات – وهي قطعة
ب م جـ ومثلث د ن جـ – فيبقى هلال ب ل جـ م ب مساويًا لمثلث / ب د ن مع دائرة ي . ب – ٣٨ – ظ

ولأن مثلثي د ع ب د ن ب مساويان بمجموعهما لهلالي ح ق ب ف ح ب ل جـ م ب مع دائرة ص ، ومثلثَ د ن ب ينقص عن هلال ب ل جـ م ب بدائرة ي ، يكون مثلث د ع ب يزيد على هلال ح ق ب ف ح مع دائرة ص بدائرة ي ، فهلال ح ق ب ف ح مع دائرتي ص ي مساويان بمجموعهما لمثلث د ع ب ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

2 د ط : أثبتها في الهامش [ب] – 6 ولتكونا : وليكن [ا، ب، ل] / قطعتي : قطعتا [ل] – 8 ب جـ : ف جـ [ا، ب] / جـ ب ح : كتب ناسخ [ا] بعدها «إلى جـ ح هي كنسبة» ويبدو أنه ضرب على أولها بالقلم – 10 جـ د ح ب : د ح ب [ا] – 13 جـ د ح ب : حـ د حـ ب [ل] – 14 ب ل جـ : ب ا ح ب [ب] – 15 وكنسبة (الثانية) : ونسبة [ا، ب] – 16 جـ د ح ب : حـ د حـ ب [ل] – 17 جـ د ح ب (الثانية) : حـ د حـ ب [ل] – 20 لهلالي ح ق ب ف ح ب ل جـ م ب : لهلالي ح و ب ، فيبقى ح ب ل ح م ن [ل] – 21-22 يكون مثلث ... بدائرة ي : ناقصة [ل] – 22 ح ق ب ف ح (الثانية) : ح و ب [ل] / دائرتي : دائرة [ا].



– يز – ولنرسم أيضًا دائرة عليها ا ب ج ونخرج وتر ا ج يفصل منها ثلثها ووتر ا ب يفصل منها ربعها، وليكن مركزها د. ونصل خطوط ا د ج د ب ط د ب ج ، ونعمل على خط ا ب قطعة دائرة شبيهة بقطعة ا ب ج ، ولتكن قطعة ا هـ ب. ونجعل دائرة ك جزءًا من ستة وثلاثين جزءًا من دائرة ا ب ج ، فيكون هلال ا هـ ب ح ا مع دائرة ك مساويين لمثلث ا ب ط ، / كما تبيّن ف – ١١٥ – و
في الشكل الخامس عشر من هذه المقالة. ونعمل على خط ا ب نصف دائرة، وليكن ا ن ب.

فأقول أولاً: إن قوس ا ن ب جميعها خارج عن قوس ا هـ ب.

برهان ذلك: أنا نخرج خط ا م مماسًا لقوس ا هـ ب، فيكون زاوية م ا ب ثلثي قائمة، فخط ا م يقطع قوس ا ن. فخط ا م متوسط بين قوسي ن ا ا هـ. وكذلك يتبيّن أن المماس الذي يخرج من نقطة ب يقطع قوس ب ن. فجميع / قوس ا ن ب خارجة عن قوس ا هـ ب./ ن – ١٣٦ – و ب – ٣٩ – و

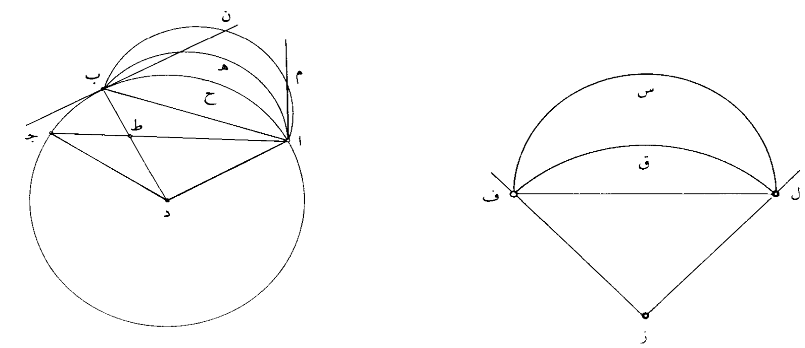
وإذ قد تبين ذلك، فإنا نقول: إن هلال ا ن ب هـ ا مساوٍ لمثلث ا د ط مع دائرة ك.

برهان ذلك: أن هلال ا هـ ب ح ا مع دائرة ك مساويان لمثلث ا ب ط. ونأخذ مثلث ا د ط مشتركًا، فيكون هلال ا هـ ب ح ا مع دائرة ك مع مثلث ا د ط مساويات لمثلث ا د ب. وهلال ا ن ب ح ا مساوٍ لمثلث ا د ب كما تبيّن في الشكل التاسع من هذه المقالة.

1 يز: ناقصة [ب] – 2 وليكن: فليكن [ب] – 4 مساويين: مساويان [ا، ب] / كما: لما [ف] – 2-5 قطعة ... دائرة: أثبتها في الهامش [ل] وكرر «نصف دائرة» – 6 فأقول: فنقول [ل] / خارج: أثبتها في الهامش [ل] – 7 برهان ذلك: برهانه [ف] / ثلثي قائمة: كررها ناسخ [ل] – 7-8 فخط ا م: فخطا م [ف] – 8 ن ا: د ا [ا، ب] وأثبت ناسخ [ب] «ن» في الهامش مع «ظ» فوقها، يعني الظاهر – 10 وإذ: فإذ [ب] / ا ن ب هـ ا: ا ن ب هـ ، لا يكتب ناسخ [ف] الحرف الأخير في كثير من الأحيان، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد/ مساوٍ: مساوي [ل] – 11-12 مساويان ... ك: ناقصة [ف] – 13 ا د ب (الأولى) : كتب بعدها ناسخ [ل] «ومثلث» / كما: لما [ف].

فهلال ا هـ ب ح ا مع دائرة ك مع مثلث ا د ط مساويات لهلال ا ن ب ح ا. فيلقى هلال ا هـ ب ح ا المشترك، فيبقى هلالُ ا ن ب هـ ا مساويًا لمثلث ا د ط مع دائرة ك.

ولنجعل أيضًا مثلثَ ل ز ف قائمَ الزاوية متساويَ الساقينِ مساويًا لمثلث ا د ط. فيكون هلال ا ن ب هـ ا مساويًا / لمثلث ل ز ف مع دائرة ك. ونجعل ز مركزًا، ونديرِ ببعدي ل ف ل – ١٣٦ – ظ قوسًا من دائرة، ولتكن ل ق ف، ونعمل على خط ل ف نصف دائرة وليكن ل س ف. فيكون هلال ل س ف ق ل مساويًا لمثلث ل ز ف، فيكون هلال ا ن ب هـ ا مساويًا لهلال ل س ف ق ل مع دائرة ك؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



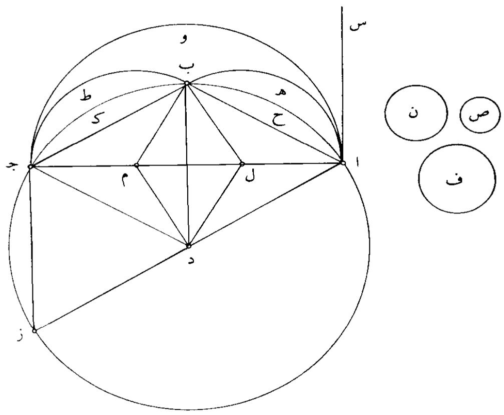
〈يح〉 ولنرسم دائرة عليها ا ب جـ، ومركزها د، ونخرج فيها خط ا جـ يفصل منها ثلثها ونقسم قوس ا ب جـ بنصفين على نقطة ب، ونصل / خطوط ا ب ب جـ ا د ب د جـ د، ونعمل ب – ٣٩ – ظ على خطي / ا ب ب جـ قطعتين شبيهتين بقطعة ا ب جـ ولتكونا قطعتي ا هـ ب ب ط جـ. ا – ٧٧ – و ونخرج خطي ب ل ب م حتى يكون كل واحدة من زاويتي ب ل ا ب م جـ مساويةً لزاوية ا ب جـ، ونصل خطي د ل د م. ونجعل دائرة ن تُسْعَ دائرة ا ب جـ. فيكون هلالا

1 فهلال: ـهلال [ب] – 2 فيبقى: فيبقا [ل] – 3 مساويًا: مساوٍ [ب، ل، ف] مساوي [ا] –4 ز: ن [ل] / ببعدي: ببعد [ف] / ل ف: ل و [ل] أيْ ببعد كلّ من ل وف من ز – 5 ل ق ف: ف و [ل] – 6 ل س ف ق ل: س ف ول [ا، ل] – 8 ولنرسم: ولنرسم أيضًا [ف] / ا ب جـ: يكتب الجيم حاءً ولن نشير إليها فيما بعد [ف] – 9 ب جـ ا د: ناقصة [ل] – 10 قطعتي: قطعتين [ف] – 11 ونخرج: ونخرج على [ل].

ا ه ب ح ا ب ط ج ك ب مع دائرة ن مساويات لمثلثي ا ب ج د ل م كما تبيّن في الشكل الرابع عشر من هذه المقالة. ونعمل على خط ا ج نصف دائرة وليكن ا و ج.

فأقول أولاً: إن قوس/ ا و ج جميعَها خارجٌ عن قوسي ا ه ب ب ط ج. ل - ١٣٧ - و

برهان ذلك: أنا نخرج ا س مماسًا لقوس ا ه ب، فيكون زاوية س ا ب ثلثي قائمة وزاويةُ ب ا ج ثلث قائمة، فزاوية س ا ج قائمة، فخطُّ ا س مماسٌ لقوس ا و ج، وهو مماس لقوسٌ ا ه ب، فقوس ا و ج مماسة لقوس ا ه ب. وكذلك يتبيّن أنها مماسة لقوس ج ط ب. فجميع / قوس ا و ج خارجة عن قوسي ا ه ب ب ط ج. ف - ١١٥ - ظ



وإذْ قد تبيّن ذلك، فإنا نقول: إن شكل ا و ج ب ا مع مثلث معلوم مساوٍ لدائرة معلومة.

برهان ذلك: أنا نخرج ا د إلى ز ونصل ج ز، فيكون مثلث ا ج د مساويًا لمثلث ج د ز، وقطاع ج د ز سدس الدائرة، فمثلث ج د ز أقلُّ من سدس الدائرة. فمثلث ا د ج أقلُّ من سدس

1 مساويات: مساويان [ف] – 2 الرابع: السابع [ف] / ا ج: ل ح [ف] / ا و ج: ا ق ج [ب] كتب الواو قافًا ولن نشير إليها فيما بعد – 3 خارج: كتبها «خارج» ثم أثبت خارجا [ا] – 4 س ا ب: س ب [ف] – 6 مماسة (الأولى): أثبتها في الهامش [ب] – 7 قوسي: قوس [ل] – 10 ج د ز: ج د ن [ب] / ج د ز: ج د ن [ل].

الدائرة. ومثلثُ د ل م ثلثُ مثلثِ ا د ج، فمثلثُ د ل م أقلُّ من جزءٍ من ثمانية عشر جزءًا من الدائرة. ودائرةُ ن تُسْعُ الدائرة، فمثلثُ د ل م أقلُّ من نصف دائرة ن. وهلالا ا ه ب ح ا ب ط ج ك ب مع دائرة ن مساويات لمثلثي ا ب ج د ل م. / ل - ١٣٧ - ظ فالهلالان مع زيادة دائرة ن على مثلث د ل م مساويات لمثلث ا ب ج. ونجعل دائرة ص مساويةً لجزء من أربعة وعشرين جزءًا من دائرة ا ب ج. فيكون الهلالان مع زيادة دائرة ن على مثلث د ل م مع دائرة ص مساويات لمثلث ا ب ج مع دائرة ص. ومثلث ا ب ج / ب - ٤٠ - و مساوٍ لمثلث ا د ج لأن خطي ا ب ب ج مساويان لخطي ا د ج د. فيكون الهلالان مع زيادة دائرة ن على مثلث د ل م مع دائرة ص مساويات لمثلث ا د ج مع دائرة ص. ومثلثُ ا د ج مع دائرة ص مساويان / ل - ١٣٨ - و لهلال ا و ج ب ا كما تبيّن في الشكل الثالث عشر. فهلالا ا ه ب ح ا ب ط ج ك ب مع زيادة دائرة ن على مثلث د ل م مع دائرة ص مساويات لهلال ا و ج ب ا. فنسقط الهلالين المشتركين، فيبقى شكل ا و ج ط ب ه ا الذي يحيط به ثلاث قسي مساويًا لزيادة دائرة ن على مثلث د ل م مع دائرة ص. فيكون شكل ا و ج ط ب ه ا مع مثلث د ل م مساويًا لدائرتي ن ص.

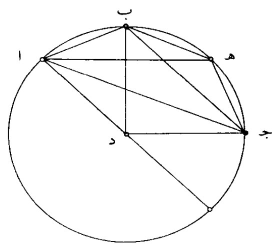
ونجعل دائرة ف مساوية لدائرتي ن ص، فيكون شكل ا و ج ط ب ه ا مع مثلث د ل م مساويين لدائرة ف. وإذا عملنا مثلثًا قائم الزاوية متساوي الساقين، وعملنا على وتر الزاوية القائمة هلالاً – كما عملنا في الشكل الذي قبل هذا الشكل – كان ذلك الهلال مساويًا لمثلث د ل م، فيكون شكل ا و ج ط ب ه ا مع ذلك الهلال مساويًا لدائرة ف؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **يط** – وأيضًا، فإنه قد بيّن أقليدس في كتابه في القسمة: كيف نفصل من دائرة معلومة / ل - ١٣٨ - ظ قطعة فيما بين خطين متوازيين يكون نسبتُها إلى جميع الدائرة نسبة معلومة. ونحن نبيّن ما نستعمله نحن من ذلك في هذا الموضع.

فليكن / ا - ٧٧ - ظ دائرة عليها ا ب ج / ب - ٤٠ - ظ ومركزها د، وليكن قطاع د ب ج ربع الدائرة، ونصل ب ج، ونقسم قوس ب ج بنصفين على نقطة ه، ونصل خطي ب ه ه ج، ونخرج د ا

2 من: قد تقرأ بعدها كلمة «جميع» [ف] – 3 مساويات: مساويان [ف] / زيادة: ناقصة [ل] – 3-4 لمثلثي... مساويات: ناقصة [ف] – 5 مساويات: مساويان [ف] – 6 دائرة: فوق السطر [ل] – 7 ا د: ا ب [ب] / ج د: د ج [ف] – 9 كما: لما [ف] / الثالث عشر: ي ج [ف] / ا ه ب ح ا: بعض الحروف ممحوة [ا] ا ب ج ا [ف] – 10 مساويات: مساويان [ف] / فنسقط: فيسقط [ا] / المشتركين: المشركين [ا] – 11 قسي: فيبق [ا] / مساويًا: مساو [ل] – 12 مساويًا: مساو [ل] – 13 ف: ناقصة [ف] / ا وج ط ب ه ا: وكرر ناسخ [ا] الحروف الثلاثة الأولى – 14 مساويين: مساويات [ا، ب] مساويان [ف] / عملنا: علمنا [ا] – 15 الشكل (الثانية): الشكل الأول [ل] – 17 يط: ناقصة [ب] / بيّن: تبين [ب] / أقليدس: أوقليدس [ل] – 18 بين: ناقصة [ف].

موازيًا لخط ب ج ، ونصل ج ا ه ا ب ا ، فيكون مثلث ا ب ج مساويًا لمثلث ب د ج . ومثلث ب ه ج مشتركٌ فمربع ا ب ه ج مساوٍ لمربع د ب ه ج . ولأن قطاع د ب ج ربع دائرة، يكون زاوية ب د ج قائمةً، ويكون زاوية د ب ج نصف قائمة. ويكون زاوية ب د ا نصف قائمة، فيكون قوس ا ب ثمن الدائرة. وقوس ب ه ثُمْنُ الدائرة، فقطعة ا ب مثل قطعة ب ه . فنأخذ قطعة ا ب بدل قطعة ب ه ، فيكون مربع ا ب ه ج مع قطعتي ا ب ه ج مساوية لقطاع ب د ج ه . فتكون قطعة ا ب ه ج ربع دائرة ا ب ج .



ولأن قوس ه ج / مثل قوس ا ب ، يكون زاوية ج ا ه مثل زاوية ا ه ب ، فيكون خط ا ج موازيًا لخط ب ه ، فقطعة ا ب ه ج هي فيما بين خطين موازيين؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. /

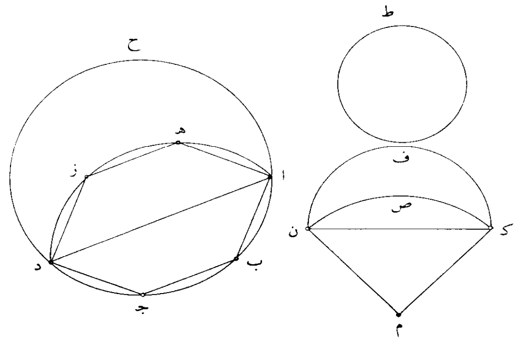
ل – ١٣٩ – و
ف – ١١٦ – و

– كـ – وإذ قد تبيّن ذلك، فلنرسم دائرة عليها ا ب ح ، ونفصل منها قوس ا ب ج د تكون ثلاثة أثمان الدائرة، ونقسمها بثلاثة أثمان، وليكن قسي ا ب ب ج ج د. ونخرج خط ب ج فيكون موازيًا لخط ا د ، كما تبيّن في الشكل الذي قبل هذا، ويكون قطعة ا ب ج د – التي فيما بين الخطين المتوازيين – ربع الدائرة. ونعمل على خط ا د قطعة دائرة في الجهة الأخرى مساويةً لقطعة ا ب ج د ، ولتكن قطعة ا ه ز د ، / ونقسمها أيضًا / بثلاثة أثمان ولتكن قسي ا ه ه ز ز د. ونصل ه ز فيكون موازيًا لخط ا د ، وتكون قطعة ا ه ز د – التي بين الخطين المتوازيين –

ب – ٤١ – و
ل – ١٣٩ – ظ

1 ب ا : ب [ل] – 2 د ب ه ج : د ب ج ه [ا، ف] – 4 فقطعة : كررها الناسخ [ل] – 5 ا ب ه ج : ل ب ه ح [ل] – 6 ربع : بع [ف] – 8 هي : ناقصة [ا، ف] – 9 نجد في الهامش دون إشارة العبارة التالية «فالدائرة معروفة» [ف] – 10 كـ : ناقصة [ب] / ا ب ح : ا ب ج [ب، ل] / ا ب ج د : ا ب ج [ا، ف] – 12 تبيّن : بيّن [ا] قد تبين [ل] / الشكل : الشكل الأول [ل] – 13 الجهة الأخرى : أيْ الجهة الأخرى من ا د – 15 خطي : خطين [ا].

ربع الدائرة، فتكون قطعة جـ ب ا هـ ز د جـ – التي بين خطي ب جـ هـ ز المتوازيين – نصف دائرة ا ب جـ ، فيبقى هلال ا ح د ز هـ ا مع قطعتي ب جـ هـ ز نصف دائرة ا ب جـ. فيكون هلال ا ح د ز هـ ا مع قطعتي هـ ز ب جـ مساويات لقطعة جـ ب ا هـ ز د جـ التي بين خطي هـ ز ب جـ المتوازيين. ونصل خطوط ا هـ د ز د جـ ب ا ؛ فيكون قطعتا ا هـ ز د مساويتين لقطعتي هـ ز ب جـ. فنسقط قطعتي ا هـ ز د من قطعة جـ ب ا هـ ز د جـ – التي بين خطي هـ ز ب جـ المتوازيين – فيبقى هلال ا ح د ز هـ ا مساويًا لقطعة ا د جـ ب – التي بين خطي ا د ب جـ المتوازيين – التي هي ربع الدائرة مع مربع ا هـ ز د. وليكن دائرة ط ربع دائرة ا ب جـ د ، وليكن مثلث ك م ن قائم الزاوية متساوي الساقين، وزاوية م منه قائمة وضلعا م ك م ن منه متساويان، وليكن هذا / المثلث مساويًا لمربع ا هـ ز د. فيكون هلال ا ح د ز هـ ا ل - ١٤٠ - و مساويًا لدائرة ط مع مثلث م ك ن. ونجعل م مركزًا، وندير ببعدي ك ن قوسًا من دائرة، ولتكن ك ص ن ، ونعمل على خط ك ن نصف دائرة، وليكن ك ف ن. فيكون هلال ك ف ن ص ك مساويًا لمثلث م ك ن ، فيكون هلال ا ح د ز هـ ا مساويًا لهلال ك ف ن ص ك / مع دائرة ب - ٤١ - ظ ط ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

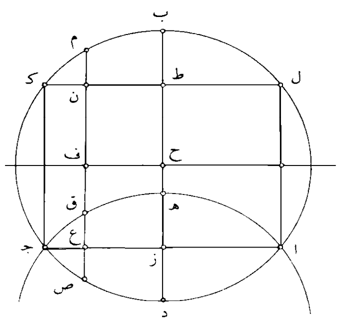


2 ا ح د ز هـ ا : ا حـ د ز هـ ا [ل] – 3 ا ح د ز هـ ا : ا ح د ز ا [ا] / مساويات: مساويان [ب، ف] – 4 هـ ز ب جـ : أثبتها في الهامش [ب] مع «ظ» فوقها – 5 لقطعتي: بقطعتي [ا] / ب جـ : أثبتها في الهامش [ل] / فنسقط: فيسقط [ا] / قطعتي: قطعتا [ل] – 6-5 فنسقط... ب جـ : مكررة [ف] – 7 مربع: ربع [ا] ناقصة [ب] – 8-7 دائرة ا ب جـ د : أيْ دائرة ا ب ح – 9 وليكن: فليكن [ف] – 10 ببعدي: ببعد [ف] – 11 ك ف ن : ك ف ز [ا] كون [ل] / ك ف ن ص ك : ك و ن ص ك [ل] – 12-11 هلال ... فيكون: أثبتها في الهامش [ب] – 12 ا ح د ز هـ ا : ا ح د هـ ز ا [ا، ب، ف] / ك ف ن ص ك : ك و ن ص ك [ل].

– كا – ولهذا الهلال ولكل هلال، يكون قوساه مساويتين لدائرة تامة، خاصةٌ ليست لسائر الأهلّة، وذلك أن الخطوطَ المتوازيةَ – التي / تقع فيه، وتكون إذا امتدت على استقامة لقيت ل – ١٤٠ – ظ خط ا جـ على زوايا قائمة – جميعَها متساويةٌ؛ ⟨و⟩الذي يقع في وسط الهلال منها مساوٍ للذي يقع عند طرفه.

فلنبين ذلك بالبرهان: فنرسم دائرة عليها ا ب جـ، ونفصل منها قطعة أقلّ من نصف دائرة، كيفما اتفق، ولتكن قطعة ا د جـ، ونصل ا جـ، ونعمل على خط ا جـ قطعة ا هـ جـ مساوية لقطعة ا د جـ، ونقسم خط ا جـ بنصفين على نقطة ز، ونخرج عمود ز هـ ب / وننفذه إلى د. ا – ٧٨ – و ونفرض على قوس ب جـ نقطة كيفما اتفقت، ولتكن م، ونخرج عمود م ق ع ص.

فأقول: إن خط م ق مثل خط ب هـ.



برهان ذلك: أن ب د قطرٌ، فنقسمه بنصفين على نقطة ح، فيكون ح مركز الدائرة. ونخرج من نقطة ح عمود ح ف، فيقسم م ص بنصفين على نقطة ف. فلأن قطعة ا د جـ أقل من نصف دائرة، يكون خط ب ز أعظم من خط ز د. فنجعل ب ط مثل ز د، فيبقى ط ح مثل ح ز. ونخرج من نقطة ط / خط ل ط ك عمودًا على خط ب د. فيكون قطعة ل ب ك مساوية ف – ١١٦ – ظ

1 كا: ناقصة [ا، ب] / يكون: قد تقرأ بعدها كلمة «ما» [ف] / مساويتين: متساويتين [ا] – 3 الذي: التي [ف] / مساوٍ: مساوي [ف] – 5 فلنبين: ولنبين [ل] – 6 ونصل ا جـ: ناقصة [ل] – 7 خط ا جـ: ناقصة [ا، ف] / ز: ن [ف] د [ا، ب، ل] وهذا الصحيح وإلا قال «قوس ا جـ» / ز هـ ب: هـ ز ب [ل] – 8 نقطة: نقطعه [ب] – 11 م ص: أثبتها في الهامش [ل] / فلأن: ولأن [ب، ل] – 12 يكون: فيكون [ل] – 13 ح ز: ح د [ل] / قطعة: ناقصة [ل].

لقطعة ا د جـ. وليقطع خط ل كـ خط م ص على نقطة ن، فيكون خط ف ن مساويًا لخط / ل - ١٤١ - و ف ع، ويبقى خط م ن مساويًا لخط ع ص. ونصل ا ل جـ كـ، فيكونان متساويين متوازيين ومساويين أيضًا لخط ط ز وموازيين له. فلأن ب ط مساوٍ ل ز د، يكون ط ز هو زيادة ب ز على ز د. ولأن م ن مساوٍ ل ع ص، يكون ن ع هو زيادة م ع على ع ص. ون ع مثل ط ز، فزيادة ب ز على ز د مساويةٌ لزيادة م ع على ع ص. وز د مثل ز هـ، وع ص مثل ع ق، فزيادةُ ب ز على ز هـ مساوية لزيادة م ع على ع ق. فخط ب هـ مساوٍ لخط م ق. ولأن كل واحد من / ب - ٤٢ - و ب هـ م ق مساوٍ لزيادة ب ز على ز د، يكون كل واحد من ب هـ م ق مساويًا لخط ط ز. وكل واحد من خطي ا ل جـ كـ مساوٍ لخط ط ز، فكل واحد من خطي ا ل جـ كـ مساوٍ لكل واحد من خطي ب هـ م ق؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– كب – ونقول أيضًا: إن كل هلالين من قطعتين متشابهتين معمولين على قوسين / ل - ١٤١ - ظ متشابهتين من دائرتين، فإن نسبة الهلال إلى الهلال هي كنسبة الدائرة إلى الدائرة.

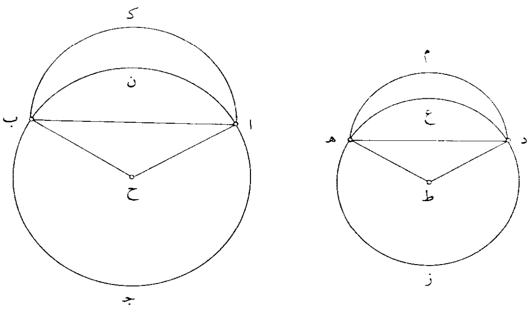
مثال ذلك: هلالا ا كـ ب ن ا د م هـ ع د على قوسي ا ن ب د ع هـ المتشابهتين من دائرتي ا ب جـ د هـ ز، وقوسا ا كـ ب د م هـ متشابهتان.

فأقول: إن نسبة الهلال إلى الهلال هي كنسبة الدائرة إلى الدائرة.

برهان ذلك: أنا نحدّ مركزي الدائرتين، وليكونا ح ط، ونصل خطوط ا ح ا ب ب ح د ط د هـ هـ ط. فلأن قوسي ا ن ب د ع هـ متشابهتان، يكون نسبة مربع ا ب إلى مربع د هـ كنسبة مربع قطر الدائرة إلى مربع قطر الدائرة، وكنسبة الدائرة إلى الدائرة، وكنسبة قطاع ا ح ب إلى قطاع د ط هـ وكنسبة مثلث ا ح ب إلى مثلث د ط هـ وكنسبة قطعة ا ن ب إلى قطعة د ع هـ، وكنسبة قطعة ا كـ ب إلى قطعة د م هـ. فنسبة قطعة ا كـ ب إلى قطعة د م هـ هي كنسبة قطعة ا ن ب إلى قطعة د ع هـ، وكنسبة الباقي إلى الباقي. فنسبة هلال ا كـ ب ن ا / إلى ل - ١٤٢ - و

3 ط ز: ط ن [ب] / مساوٍ: مواز [ف] / ب ز: ب د [ا، ب، ل] – 5 مساوية: مساوي [ا] مساو [ب، ل، ف] / ز هـ: ز د [ا] – 6 مساوية: مساوي [ا] مساو [ب، ل، ف] / ولأن: فلأن [ب، ل] – 7 مساوٍ: مساوي [ل] / ز د: ز جـ [ب] / م ق: كررها بعدها ناسخ [ل] العبارة السابقة ابتداءً من «مساو لزيادة» حتى «ز د» / مساويًا: مساوٍ [ل] / ط ز: ط ن [ل] – 8 ط ز: ط ب [ب] / لخط... مساوٍ: ناقصة [ف] – 10 كب: ناقصة [ب] – 11 هي: ناقصة [ل] – 12 ا كـ ب ن ا: ا كـ ز ن ا [ا] / قوسي: قوسين [ا] / المتشابهتين: المتشابهين [ا] – 13 ا ب جـ: ا ب ح [ل] / ا كـ ب: ا ل ب [ل] / متشابهتان: متشابهتين [ل] – 12-16 المتشابهتين ... د ع هـ: أثبتها في الهامش [ل] – 14 إلى الهلال هي: ناقصة [ف] – 15 نحدّ: نجد [ا، ل] ناقصة [ف] / ب ح: ب جـ [ب].

هلال د م هـ ع د هي كنسبة قطعة ا ن ب إلى قطعة د ع هـ . ونسبة قطعة ا ن ب / إلى قطعة د ع هـ هي كنسبة دائرة ا ب جـ إلى دائرة د هـ ز. فنسبة هلال ا ك ب ن ا إلى هلال د م هـ ع د هي كنسبة دائرة ا ب جـ إلى دائرة د هـ ز؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ب - ٤٢ - ظ



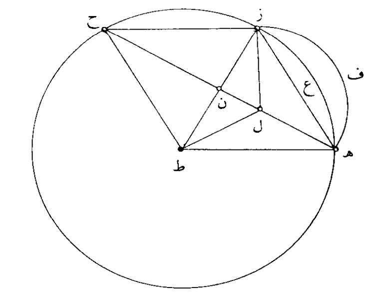
– كجـ – ولنرسم أيضًا دائرة عليها ا ب جـ ، ونخرج فيها ضلع المُسَدَّس وليكن ا ب . ونعمل على خط ا ب مثلثًا متساوي الأضلاع خارجًا من الدائرة وليكن ا د ب. ونجعل دائرة هـ ز ح ثلاثة أمثال دائرة ا ب جـ ، / ونخرج فيها ضلع المسدس أيضًا، وليكن هـ ز، ونعمل على خط هـ ز قطعةً يكون محيطُها ثُلْثَ دائرة، ولتكن قطعة هـ ف ز. ل - ١٤٢ - ظ

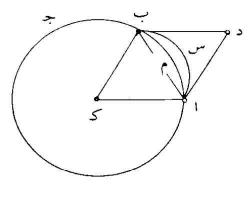
فأقول: إن هلال هـ ف ز ع هـ مساوٍ لشكل ا د ب م ا.

برهان / ذلك: / أنا نجدّ مركزي الدائرتين وليكونا ك ط . ونخرج هـ ح مساويًا لضلع المثلث، ونصل خطوط ا ك ب ك هـ ط ز ن ط ح ط ز ح ، ونخرج خط ز ل حتى تكون زاوية ز ل هـ مساوية لزاوية هـ ز ح. فيكون هلال هـ ف ز ع هـ مع نصف تسع دائرة هـ ز ح مساويًا لمثلثي هـ ز ن ط ل ن كما تبيّن في الشكل الرابع عشر. ومثلث هـ ز ن مساوٍ لمثلث ط ح ن لأن مثلثي هـ ز ح هـ ط ح متساويان وخطَّ ط ن ز يقسم كل واحد منها بنصفين. فهلال هـ ف ز ع هـ مع نصف تسع دائرة هـ ز ح مساويان لمثلث ح ل ط . ومثلث ح ل ط ثلثا مثلث هـ ط ح لأن خط ا - ٧٨ - ظ / ف - ١١٧ - و

2 ا ك ب ن ا: ا ك ب ن [ل، ف] – 4 كجـ: ناقصة [ب] – 6 أيضًا: ناقصة [ف] – 7 قطعة هـ ف ز: أثبتها وصححها في الهامش [ل] – 9 نجدّ: نجد [ا] – 10 هـ ط: ناقصة [ف] / ز ن ط: ط ز ن [ف] – 13 ط ن ز: ط ن د [ل] / فهلال هـ ف ز ع هـ: فهلالا ف ز ع هـ [ف] – 14 هـ ز ح: ز ح [ف] / ح ل ط ثلثا: أثبتها في الهامش [ل].

هـ ل ثلث خط هـ ح. / ومثلث هـ ط ح مساوٍ لمثلث هـ ط ز لأن كل واحد منها نصف مربع ب – ٤٣ – و
هـ ط ح ز، فهلال هـ ف زع هـ مع نصف تسع / دائرة هـ زح مساويان لثلثي مثلث هـ ط ز. ل – ١٤٣ – و





ولأن دائرة هـ زح ثلاثة أمثال دائرة ا ب ج، يكون مثلث هـ ط ز ثلاثة أمثال مثلث ا ك ب. فثلثا مثلث هـ ط ز مساوٍ لضعف مثلث ا ب ك، ومعيّن ا د ب ك هو ضعف مثلث ا ب ك، فثلثا مثلث هـ ط ز مساوٍ لمعيّن ا د ب ك. فهلال هـ ف زع هـ مع نصف تسع دائرة هـ زح مساوٍ لمعيّن ا د ب ك. وقطاع ا ك ب هو سدس دائرة ا ب ج، ودائرة ا ب ج ثلث دائرة هـ زح، فقطاع ا ك ب م نصف تسع دائرة هـ زح، فهلال هـ ف زع هـ مع قطاع ا ك ب م مساويان / لمعيّن ا د ب ك. فيسقط القطاع المشترك، فيبقى هلال هـ ف زع هـ ل – ١٤٣ – ظ مساويًا لشكل ا د ب م ا؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ونعمل أيضًا على خط ا ب قوسًا مساوية لثلث دائرة ولتكن ا س ب. فتكون نسبة هلال هـ ف زع هـ إلى هلال ا س ب م ا كنسبة دائرة هـ زح إلى دائرة ا ب ج، / فيكون هلال ب – ٤٣ – ظ هـ ف زع هـ ثلاثة أمثال هلال ا س ب م ا، فيكون شكل ا د م ب ا ثلاثة أمثال هلال ا س ب م ا، فيكون شكل ا د ب س ا ضعف هلال ا س ب م ا.

1 هـ ط ز: ط هـ ز [ف] – 2 هـ ط ح ز: هـ ط ح [ف] – 4 مساوٍ: مساوي [ل]، وتجوز على تقدير العدد – 6 هو: هي [ب] – 7 فقطاع: بقطاع [ب] – 8 مساويان: مساوي [ا] مساو [ف] / المشترك: المشرك [ا] – 10 ولتكن: فليكن [ل] – 13-12 ا د م ب ا ... شكل: ناقصة [ب] – 12 ا د م ب ا: ا د ب م ا [ل] – 13 شكل: ناقصة [ا، ف].

فإن عملنا دائرة مساوية لضعف دائرة ا ب جـ ، وأخرجنا فيها ضلع المسدس، وعملنا عليه ثلث دائرة، كان الهلال الذي يحدث مساويًا لشكل ا د ب س ا.

وقد يمكن أن تُعمل أنواعٌ كثيرةٌ من الأهلّة على الوجوه التي بيّناها. وإنما ذكرنا ما ذكرناه من الأهلّة المنطقة على طريق الأمثلة لينكشف بها المعنى الكلي الذي/ قدمنا تبيينه؛ وفيما ذكرناه منها ل - ١٤٤ - و مقنعٌ في إيضاح ما قصدنا لتبيينه.

فلنختم الآن هذا القول.

تمت المقالة والحمد لله حقّ حمده.

3 تُعمل: نعمل [ا] / ذكرنا: ناقصة [ف] — 4 المعنى: المعين [ا] / ذكرناه: ذكرنا [ف] — 5 في إيضاح ... لتبيينه: ناقصة [ف] — 7 تمت ... حمده: تم تحرير هذه المقالة في اليوم الثاني من شعبان سنة ٨٣٩ [ب]، تمت المقالة في الأشكال الهلالية، والحمد للّه ربّ العالمين وصلاته على سيدنا محمد نبيّه ‹و›آله الطاهرين وحسبنا الله ونعم الوكيل ونعم المولى ونعم البصير. قوبِلَ هذا الكتاب من أوله إلى آخره مقابلة تصحيح وإتقان بالأصل المنقول منه وهو بخط المصنف ولله الحمد [ل] — 6-7 فلنختم... حمده: والله أعلم بالصواب. تمت المقالة بعون الله تعالى [ف].

الفَصْلُ الثاني

حِسابُ حَجْمِ الُمجَسَّمِ الُمكافِئ والكُرَةِ، وطَريقَةُ الاسْتِنْفادِ

مُقَدِّمَة

تَتَناوَلُ هَذِهِ المَجْموعَةُ الثانِيَةُ من أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ في الرِياضِيّاتِ التَحْليلِيَّةِ حِسابَ أحْجامِ الُمجَسَّماتِ الُمحاطَةِ بِسُطوحٍ مُنْحَنِيَةٍ، بواسِطَةِ طَريقَةِ الاسْتِنْفادِ. ولقد وَضَعَ ابنُ الهَيْثَمِ في هَذا المَوْضوعِ ثَلاثَةَ مُؤَلَّفاتٍ مُتَفاوِتَةِ الحَجْمِ، تَوالَت وَفْقَ التَرْتيبِ التالي:

I- ***مقالَةٌ في مِساحَةِ الُمجَسَّمِ الُمكافِئ***،

II- ***قولٌ في مِساحَةِ الكُرَةِ***،

III- ***قولٌ في قِسْمَةِ الِمقْدارَيْنِ الُمخْتَلِفَيْنِ الَمذْكورَيْنِ في الشَكْلِ الأوّلِ من الَمقالَةِ العاشِرَةِ من كِتاب إقليدس***.

تُوحي العَناوينُ نَفْسُها بأنّ ابنَ الهَيْثَمِ يَسْتَنِدُ إلَى سابِقيهِ: عَلَى ثابتٍ بنِ قُرَّة والقوهِيِّ بما يَخُصُّ الُمجَسَّمَ الُمكافِئ؛ وعَلَى أرشميدس وبَني موسَى، وربّما عَلَى آخَرينَ غَيْرِهِم، في مَوْضوعِ الكُرَةِ. أمّا مَوْضوعُ الرِسالَةِ الثالِثَةِ، فقد سَبَقَ أن كانَ مادَّةً للبَحْثِ لَدَى ابنِ قُرَّة والقوهيِّ. ويتمَوْضَعُ ابنُ الهَيْثَمِ إذاً في وسَطِ هَذا التَقْليدِ الَمليءِ بالأسْماءِ والعَناوينِ، والَّذي تَرْجِعُ بداياتُهُ إلى الكِنْدِيِّ وبَني موسَى. لم يَسْتَقِ ابنُ الهَيْثَمِ من هَذا التَقْليدِ الأرشميديِّ مَواضيعَ البَحْثِ فَحَسْب، إنّما الطَرائِقَ أيضاً. ولم تَفُتْهُ لا الاسْتِفادَةُ من طُرُقِ عِلْمِ الحِسابِ الَّتي تَعودُ إلى سَلَفِهِ البَعيدِ ثابتٍ بنِ قُرَّة، ولا الاسْتِفادَةُ مِمّا أعادَ اكْتِشافَهُ سَلَفُهُ الُمباشِرُ القوهيُّ وأحَدُ مُعاصِري هَذا الأخيرِ، وأغْلَبُ الظَنِّ أنّهُ ابنُ سَهْلٍ؛ وذَلِكَ تَحْديداً في مِضْمارِ طَريقَةِ الَمجاميعِ

التَكامُلِيَّةِ. لقد غَيَّرَ دَمْجُ هَذَيْنِ النَوْعَيْنِ من الطَرائِقِ مَنْحَى البَحْثِ في اللاّمُتَناهية في الصِغَرِ عَلَى يَدِ ابنِ الهَيْثَم، وهَذا ما سَنَراهُ لاحِقاً.

لا تُمَثِّلُ مُؤَلَّفاتُ ابنِ الهَيْثَمِ في هَذا الحَقْلِ بَحْثاً طَليعِيّاً فَحَسْب، بل تُبْرِزُ أيضاً اكْتِمالَهُ، كما أنّها تُعيدُ صِياغَةَ مَنْحاه. فقد جَسَّدَ ابنُ الهَيْثَمِ في التَقْليدِ العَرَبِيِّ مَرْحَلَةً خِتامِيَّةً: فلم تَرَ النورَ بَعْدَهُ أيُّ مُساهَمَةٍ مَبْنِيَّةٍ عَلَى طُرُقِ الاسْتِنْفادِ. فالاكْتِمالُ في هَذِهِ الحالَةِ خِتامٌ، ولن يُجْدِيَ نَفْعاً في إعادَةِ إطْلاقِ البَحْثِ أيُّ تَغْييرٍ للمَنْحَى. ويُطالِعُنا في هَذا المَجالِ تَساؤلانِ اثنانِ، لا يُمْكِنُ للمُؤَرِّخِ التَغاضي عنهُما بسُهولَةٍ، إذ إنّنا نَشْهَدُ هنا مَرَّةً أُخْرَى تَوَقُّفاً فُجائِيّاً في البَحْثِ؛ أمّا الأوَّلُ فقد حَدَثَ قَبْلَ ثَلاثَة عَشَرَ قَرْناً. سَوْفَ نَبْدَأ كما دَرَجَتِ العادَةُ بدِراسَةِ رياضِيّاتِ المُؤَلَّفَيْنِ الأَوَّلَيْنِ، تارِكينَ عن قَصْدٍ المُؤَلَّفَ الأخيرَ، لِتَناوُلِهِ في المُجَلَّدِ الثالِثِ، حَيْثُ سَنَعودُ أيضاً إلى التَساؤلَيْنِ السابِقَيْنِ.

٢–١ الشَرْحُ الرِياضِيُّ

٢–١–١ حِسابُ حَجْمِ المُجَسَّمِ المُكافِئ

تَتَأَلَّفُ رِسالَةُ ابنِ الهَيْثَمِ حَوْلَ حَجْمِ المُجَسَّمِ المُكافِئ من مَدْخَلٍ، يُعيدُ المُؤَلِّفُ فيه رَسْمَ تاريخِ المَسْأَلَةِ، ذاكِراً في هَذِهِ المُناسَبَةِ، حَصْراً، اسْمَي ابنِ قُرَّة والقوهيِّ من العُلَماءِ الَّذين سَبَقوه؛ ومن جُزْءٍ أوَّلِيٍّ مُكَرَّسٍ كُلِيّاً لمُقَدِّماتٍ مُهِمَّةٍ في عِلْمِ الحِساب، ضَروريَّةٍ لإقامَةِ البَراهين؛ ومن جُزْءٍ ثانٍ، يُدرَسُ فيه المُجَسَّمُ المُكافِئُ الدَوَرانيُّ؛ ومن جُزْءٍ ثالِثٍ حَيْثُ يَجْري تَفَحُّصُ النَوْعِ الثاني، الحادِثِ عن دَوَرانِ القَطْعِ المُكافِئِ حَوْلَ أحَدِ خُطوطِ التَرْتيبِ؛ وأخيراً من خُلاصَةٍ حَيْثُ يُناقِشُ ابنُ الهَيْثَمِ الطَريقَةَ المُتَّبَعَةَ في هَذا الفَصْلِ لتَحْديداتِ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ في المِساحاتِ والأحْجامِ. سَوْفَ نُعاوِدُ دِراسَةَ هَذِهِ الفُصولِ تِباعاً.

٢-١-١-١ المُقَدِّماتُ الحِسابيَّةُ

يَبْدأُ ابنُ الهَيْثَمِ رِسالَتَهُ بِإثْباتِ خَمْسِ مُقَدِّماتٍ حِسابيَّةٍ، تَتَناوَلُ أرْبَعٌ منها مَجْموعَ أعْدادٍ مَرْفوعَةٍ بالقُوَّةِ n، حَيْثُ يَكونُ العَدَدُ n طَبيعِيّاً صَحيحاً. وتُسْتَعْمَلُ هَذِهِ المُقَدِّماتُ الأرْبَعُ بُغْيَةَ إثْباتِ مُتَبايِنَةٍ أساسيَّةٍ.

مُقَدِّمَة ١.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$$

بُرْهانُ ابنِ الهَيْثَمِ شِبْهُ عامٍّ، أيّ أنّه يُقامُ لعَدَدٍ خاصٍّ، هُوَ ٤، ومن ثم يُفتَرَضُ أنّ إقامَةَ الدَليلِ عَلَى ذَلِكَ مُمْكِنَةٌ لأيّ عَدَدٍ آخَرَ عَلَى نَفْسِ المِنْوالِ الَّذي جَرَت به للعَدَدِ الخاصِّ. وتُعادُ كِتابَةُ هَذا البُرْهانِ كما يلي:

$$S_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n$$
$$S_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

مُقَدِّمَة ٢.

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right) n \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\, n^3 + \frac{1}{2}\, n^2 + \frac{1}{6}\, n.$$

يُثْبِتُ ابنُ الهَيْثَمِ هَذِهِ المُقَدِّمَةَ بواسِطَةِ الاسْتِقْراءِ التامِّ المُنْتَهي، بِصورَتِهِ القَديمَةِ الَّتي تُطالِعُنا أيضاً في مُؤَلَّفاتِ القَرْنِ السابِعِ عَشَرَ. وهُوَ يَسْتَعْمِلُ في هَذا البُرْهانِ العَلاقَةَ

$$P_k = (k+1)S_k = S_k^{(2)} + S_k + S_{k-1} + \ldots + S_1,$$

الَّتي يُبَرْهِنُها في حالَةِ $1 \leq k \leq 4$، مُرْتَكِزاً في ذَلِكَ وبشَكْلٍ بَديهِيٍّ عَلَى العَمَلِيَّةِ التَكْرارِيَّةِ. ويَظْهَرُ حِسابُ ابنِ الهَيْثَمِ كما يلي:

$$(1) \quad P_1 = 1(1 + 1) = 1^2 + 1 = S_1^{(2)} + S_1;$$

وبِواسِطَةِ العَلاقَةِ (1)، يُثْبَتُ أنّ

$$(2) \quad P_2 = (1 + 2)(2 + 1) = 2^2 + 1^2 + (1 + 2) + 1 = S_2^{(2)} + S_2 + S_1.$$

ونَبْدَأ مُجَدَّداً، بِواسِطَةِ (2)، حِسابَ العَلاقَةِ (3)

$$\begin{aligned}(3) \quad P_3 &= (1 + 2 + 3)(3 + 1)\\ &= 3^2 + 2^2 + 1^2 + (1 + 2 + 3) + (1 + 2) + 1\\ &= S_3^{(2)} + S_3 + S_2 + S_1.\end{aligned}$$

وعَلَى نَفْسِ المِنْوالِ، اسْتِناداً إلى (3) يَكونُ لَدَيْنا

$$\begin{aligned}(4) \quad P_4 &= (1 + 2 + 3 + 4)(4 + 1)\\ &= 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + (1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3) + (1 + 2) + 1\\ &= S_4^{(2)} + S_4 + S_3 + S_2 + S_1.\end{aligned}$$

فالنَتيجَةُ صَحيحَةٌ لِـ $k = 1$:

$$P_1 = (1 + 1)1 = 1^2 + 1.$$

لنَفْرِضْ من ثَمّ أنّها صَحيحَةٌ للرُتْبَةِ العَدَدِيّةِ k، ولْنَجْعَلْ

$$P_k = (k + 1)S_k,$$

فنَحْصُلَ عَلَى العَلاقَةِ

$$P_k = S_k^{(2)} + S_k + S_{k-1} + \ldots + S_1.$$

ولِنُبَيِّنْ أنّ هَذِهِ الخاصِيَّةَ تَبْقَى صَحيحَةً للرُتْبَةِ العَدَدِيّةِ $(k + 1)$.

$$P_{k+1} = [(k + 1) + 1]S_{k+1} = (k + 1) S_{k+1} + S_{k+1},$$

$$\begin{aligned}P_{k+1} &= (S_k + (k + 1))(k + 1) + S_{k+1} = P_k + (k + 1)^2 + S_{k+1}\\ &= S_{k+1}^{2} + S_{k+1} + S_k + \ldots + S_1.\end{aligned}$$

إِثْرَ بُرْهانِهِ هَذِهِ المُساواةَ، يُتابِعُ ابنُ الهَيْثَمِ كما يلي: لَدَيْنا بما يَخُصُّ المُقَدِّمَةَ الأُولَى

$$(n + 1)\, S_n = S_n^{(2)} + \frac{1}{2}\, S_n^{(2)} + \frac{1}{2}\, S_n\ ,$$

لأنّ

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + \ldots + S_n &= \frac{1}{2}\, (1.(1 + 1) + 2.(2 + 1) + \ldots + n(n + 1)) \\ &= \frac{1}{2}\, (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + 1 + 2 + \ldots + n) \\ &= \frac{1}{2}\, (S_n^{(2)} + S_n)\ . \end{aligned}$$

ولَكِنَّ

$$(n + 1)\, S_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) S_n + \frac{1}{2}\, S_n\ ,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$S_n^{(2)} + \frac{1}{2}\, S_n^{(2)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) S_n$$

وَ

$$S_n^{(2)} = \frac{2}{3}\, \left(n + \frac{1}{2}\right) S_n = \frac{1}{3}\, (n + 1)\, n\, \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

نُشيرُ إلى أن بُرْهانَ ابنِ الهَيْثَمِ في هَذِهِ المُقَدِّمَة مُخْتَلِفٌ عن ذاك الَّذي يَعودُ إلى أرشميدس، والوارِدِ في مُؤَلَّفِهِ ***"اللّوالِب"*** *Des Spirales*.

مُقَدِّمَة ٣.

$$S_n^{(3)} = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{4}\right) n^2\, (n + 1) = \frac{1}{4}\, n^4 + \frac{1}{2}\, n^3 + \frac{1}{4}\, n^2.$$

وتُعادُ كِتابَةُ بُرْهانِ ابنِ الهَيْثَمِ في هَذِهِ المُقَدِّمَة كما يلي:

$$(n + 1)\, S_n^{(2)} = n\, S_n^{(2)} + S_n^{(2)} = S_n^{(2)} + n^3 + ((n - 1) + 1)\ S_{n-1}^{(2)}\,;$$

ويُبَيَّنُ كذَلِكَ أنّ

$$((n-1)+1)\ S^{(2)}_{n-1} = S^{(2)}_{n-1} + (n-1)^3 + ((n-2)+1)\ S^{(2)}_{n-2},$$

ويُتابَعُ النـــُزولُ إلى أن نَصِلَ إلى العَلاقَةِ

$$(n-(n-1)+1)\ S^{(2)}_{n-(n-1)} = S_1^{(2)} + 1^3.$$

فنَحْصُلُ عَلَى

$$(n+1)\ S_n^{(2)} = S_n^{(3)} + \sum_{k=1}^{n} S_k^{(2)} = S_n^{(3)} + \frac{1}{3}\ S_n^{(3)} + \frac{1}{2}\ S_n^{(2)} + \frac{1}{6}\ S_n\ ,$$

وذَلِكَ اسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ٢.

ولَكِنَّ

$$(n+1)\ S_n^{(2)} = \left(n + \frac{1}{2}\right) S_n^{(2)} + \frac{1}{2} S_n^{(2)},$$

فإذاً

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) S_n^{(2)} = S_n^{(3)} + \frac{1}{3}\ S_n^{(3)} + \frac{1}{6}\ S_n\ ;$$

ويَنْتُجُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{3}{4}\ \left(n + \frac{1}{2}\right) S_n^{(2)} = S_n^{(3)} + \frac{1}{8}\ S_n\ .$$

ومن جِهَةٍ أُخْرَى

$$\frac{3}{4}\ S_n^{(2)} = \frac{1}{4}\ (n+1)\ n\ \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

فإذاً

$$\begin{aligned} S_n^{(3)} + \frac{1}{8}\ S_n &= \left(\frac{n}{4} + \frac{1}{4}\right) n\ \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\ (n+1)\ n\ \left(n + \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

ولَكِنَّ

$$\frac{1}{2}\ S_n = \frac{1}{4}\ (n+1)n\ ,$$

فإذاً

$$S_n^{(3)} = \frac{1}{4}\ (n+1)n\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{4}\ n^4 + \frac{1}{2}\ n^3 + \frac{1}{4} n^2.$$

لنُلاحِظْ أنّ بُرْهانَ ابنِ الهَيْثَمِ يَجْري عَلَى نحوٍ انْحِداريٍّ، وبِواسِطَةِ الْمُقَدِّمَاتِ السابِقَةِ.

مُقَدِّمَة ٤ .

$$S_n^{(4)} = \sum_{k=1}^{n} k^4 = \left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}\right) n \left(n + \frac{1}{2}\right)\left((n+1)n - \frac{1}{3}\right).$$

لَدَيْنا

$$(n+1)\, S_n^{(3)} = n^4 + n\, S_{n-1}^{(3)} + S_n^{(3)};$$

فإذا عَمِلْنا بالانْحِدارِ كما في بُرْهانِ الْمُقَدِّمَةِ ٣، نَحْصُلُ بَعْدَ الحِسابِ عَلَى العَلاقَةِ

$$(n+1)\, S_n^{(3)} = S_n^{(4)} + \sum_{k=1}^{n} S_k^{(3)};$$

ولَكِن، اسْتِناداً إلى الْمُقَدِّمَةِ السابِقَةِ، يَصيرُ لَدَيْنا

$$(n+1)\, S_n^{(3)} = S_n^{(4)} + \frac{1}{4}\, S_n^{(4)} + \frac{1}{2}\, S_n^{(3)} + \frac{1}{4}\, S_n^{(2)},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{4}{5}\,(n+1)\, S_n^{(3)} = S_n^{(4)} + \frac{2}{5}\, S_n^{(3)} + \frac{1}{5}\, S_n^{(2)}.$$

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ

$$\frac{4}{5}\left(n + \frac{1}{2}\right) S_n^{(3)} = S_n^{(4)} + \frac{1}{5}\, S_n^{(2)},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$S_n^{(4)} = \frac{4}{5}\left(n + \frac{1}{2}\right) S_n^{(3)} - \frac{1}{5}\, S_n^{(2)};$$

ولَكِن، وَفْقَ الْمُقَدِّمَتَيْنِ ٢ وَ ٣، يَصيرُ لَدَيْنا

$$\frac{4}{5}\, S_n^{(3)} = \frac{1}{5}\,(n+1)\, n \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

وَ

$$S_n^{(2)} = \frac{1}{3}\, n\,(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$S_n^{(4)} = \frac{1}{5}\,(n+1)\,n\left(n+\frac{1}{2}\right).\left(n\,(n+1)-\frac{1}{3}\right)$$

يُثْبِتُ بُرْهانُ المُقَدِّماتِ الأرْبَعِ السابِقَةِ، عَبْرَ تَطْبيقِ الاسْتِقْراءِ التامِّ بالشَكْلِ الَّذي نَعْرِفُهُ أو بِواسِطَةِ الانْحِدارِ، أنّ طَريقَةَ ابنِ الهَيْثَمِ عامَّةٌ. فطَريقَتُهُ صالِحَةٌ لأيِّ قُوَّةٍ صَحيحَةٍ، وبدون أن نُضيفَ إلى هَذِهِ الطَريقَةِ أيَّ مَفْهومٍ مُكَمِّلٍ. فالمَبْدَأ العامُّ الَّذي اكْتَشَفَهُ ابنُ الهَيْثَمِ لِحِسابِ مَجاميعِ ما مِقْدارُه n من الأعْدادِ الصَحيحَةِ مَرْفوعَةً بأيِّ قُوَّةٍ صَحيحَةٍ، والَّذي رَأَيْناه في الحالاتِ السابِقَةِ، يُمْكِنُ أن تُعادَ كِتابَتُهُ كما يلي:

$$(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^i = \sum_{k=1}^{n} k^{i+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} k^i\right),$$

ولو أرادَ ابنُ الهَيْثَمِ، لاسْتَطاعَ أن يَحْسُبَ مَجْموعَ القُوَى من الدَرَجَةِ i لأوَّلِ n من الأعْدادِ الصَحيحَةِ، حَيْثُ تَكونُ $i \geq 5$. غَيْرَ أنّه تَوَقَّفَ عِنْدَ الحالَةِ الَّتي تَكونُ فيها الدَرَجَةُ i مُساوِيَةً لأرْبَعَةٍ، أي أنّه تَوَقَّفَ عِنْدَ حُدودِ حاجَتِهِ الخاصَّةِ. فلا يَسْتَعْمِلُ ابنُ الهَيْثَمِ سِوَى مَجاميعَ هَذِهِ القُوَى في بَراهينِهِ اللاّحِقَةِ، وتَحْديداً في بُرْهانِهِ للمُتَبايِنَةِ المُهِمَّةِ التالِيَةِ.

مُقَدِّمَة ٥.

$$\frac{8}{15}\,n\,(n+1)^4 \leq \sum_{k=1}^{n}[(n+1)^2 - k^2]^2 \leq \frac{8}{15}\,(n+1)(n+1)^4$$
$$\leq \sum_{k=0}^{n}[(n+1)^2 - k^2]^2.$$

إنّ بُرْهانَ ابنِ الهَيْثَمِ لِهَذِهِ المُقَدِّمَةِ طَويلٌ جِدّاً، ولَكِنَّه جَديرٌ بأن يُصارَ إلى تَناوُلِهِ بشَكْلٍ سريعٍ، لَيْسَ فَقَط بُغْيَةَ تَتَبُّعِ النَصِّ، إنّما أيضاً بهَدَفِ تِبْيانِ المَدَى الَّذي بَلَغَهُ البَحْثُ الحِسابِيُّ في أعْمالِ هَذا الهندسِيِّ في ذَلِكَ العَصْرِ.

يُثْبِتُ ابنُ الهَيْثَمِ في البدْءِ المُتَطابقَةَ التالِيَةَ:

$$(1)\quad [2(n+1)^2 - k^2]k^2 + [(n+1)^2 - k^2]^2 = (n+1)^4,$$

حَيْثُ $0 \le k \le n$،

ويَستَنْبطُ منها عَلاقَةَ تَطابُق أُخْرَى:

$$(2) \quad (n+1)^4 - [2(n+1)^2 - k^2]k^2 = [(n+1)^2 - k^2]^2,$$

ويُبَيِّنُ من جِهَةٍ أُخْرَى أنّ

$$(3) \quad 2(n+1)^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^4 = \sum_{k=1}^{n} [2(n+1)^2 - k^2]\, k^2 \,;$$

وبِواسِطَةِ الجَمْعِ، ارْتِكازاً عَلَى العَلاقَةِ *(2)*، يَحْصُلُ عَلَى العَلاقَةِ

$$(4) \quad n(n+1)^4 - \sum_{k=1}^{n} [2(n+1)^2 - k^2]\, k^2 = \sum_{k=1}^{n} [(n+1)^2 - k^2]^2 \;.$$

ولَكِن، اسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ٢، يَكونُ لَدَيْنا

$$(5) \quad \frac{1}{3}\, n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \,,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$(6) \quad \frac{2}{3}\, n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)^2 = 2(n+1)^2 \sum_{k=1}^{n} k^2 \,;$$

واسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ (٤) نَجِدُ

$$(7) \quad \frac{1}{5}(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) n \left[(n+1)n - \frac{1}{3}\right] = \sum_{k=1}^{n} k^4 \;.$$

واسْتِناداً إلى العَلاقاتِ *(3)* وَ *(6)* وَ *(7)*، يَصيرُ لَدَيْنا

$$\begin{aligned}(8) \quad A_n &= \sum_{k=1}^{n} [2(n+1)^2 - k^2]\, k^2 \\ &= \frac{2}{3}\, n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)^2 - \\ &\quad - \frac{1}{5}\, n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[(n+1)n - \frac{1}{3}\right].\end{aligned}$$

غَيْرَ أنّ

$$\frac{2}{3} = \frac{7}{15} + \frac{1}{5}$$

وَ

$$(n+1)^2 = n(n+1) + n + 1,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$(9) \quad A_n = n\,(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{7}{15}(n+1)^2+\frac{1}{5}(n+1)+\frac{1}{15}\right] = n\,H_n\,.$$

ونَستَنْتِجُ من (4) وَ (9)

$$(10) \quad \sum_{k=1}^{n}\left[\left(n+1\right)^2 - k^2\right]^2 = n(n+1)^4 - nH_n = n[(n+1)^4 - H_n].$$

ولَكِن

$$H_n = \frac{7}{15}\,(n+1)^4 - \frac{7}{30}(n+1)^3 + (n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{5}(n+1)+\frac{1}{15}\right]$$

وَ

$$(n+1)^2 = (n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\,(n+1)$$

وَ

$$\frac{n+1}{2} = \frac{8}{15}\frac{n+1}{2} + \frac{7}{15}\frac{n+1}{2};$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\begin{aligned}(11) \quad K_n &= (n+1)^4 - H_n \\ &= \frac{8}{15}\,(n+1)^4 + \frac{7}{30}\,(n+1)^3 - \\ &- (n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{5}\,(n+1) + \frac{1}{15}\right] \\ &= \frac{8}{15}\,(n+1)^4 + \frac{7}{30}\,(n+1)^3 - \\ &- \frac{(n+1)^3}{5} + \frac{1}{2}\frac{(n+1)^2}{5} - \frac{(n+1)^2}{15} + \frac{n+1}{30} \\ &= \frac{8}{15}\,(n+1)^4 + \frac{n+1}{30}[(n+1)^2 + (n+1) + 1].\end{aligned}$$

بَيْدَ أنّ

$$(n+1)^2 + (n+1) + 1 = \frac{(n+1)^3 - 1}{n},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$(12) \quad nK_n = \frac{8n(n+1)^4}{15} + \frac{n+1}{30}[(n+1)^3 - 1].$$

ومَهْما كانَ العَدَدُ الصَحيحُ الطَبيعيُّ n، فلَدَيْنا $(n+1)^3 \geq 1$،

ولذَلِكَ فإنّ

$$n\,K_n \geq \frac{8n\,(n+1)^4}{15};$$

وهَكَذا نَتَحَقَّقُ من أنّ

$$\frac{8}{15}\,n\,(n+1)^4 \leq \sum_{k=1}^{n}\Big[(n+1)^2 - k^2\Big]^2.$$

ومن جِهَةٍ أُخْرَى

$$nK_n = \frac{8(n+1)(n+1)^4}{15} - \frac{8(n+1)^4}{15} + \frac{(n+1)(n+1)^3}{30} - \frac{(n+1)}{30}$$
$$= \frac{8(n+1)(n+1)^4}{15} - \frac{(n+1)^4}{2} - \frac{(n+1)}{30},$$

فلِكُلِّ عَدَدٍ طَبيعِيٍّ صَحيحٍ، نَتَحَقَّقُ من أنّ

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[(n+1)^2 - k^2\Big]^2 < \frac{8(n+1)(n+1)^4}{15}.$$

وأخيراً يَكونُ لَدَيْنا

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[(n+1)^2 - k^2\Big]^2 = n\,K_n + (n+1)^4$$
$$= \frac{8(n+1)(n+1)^4}{15} + \frac{(n+1)^4}{2} - \frac{(n+1)}{30}.$$

غَيْرَ أنّه، إذا كانَ $n \geq 1$، يَكونُ لَدَيْنا

$$(n+1)^4 > n+1$$

وَ

$$\frac{(n+1)^4}{2} > \frac{(n+1)}{30},$$

فإذاً

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[(n+1)^2 - k^2\Big]^2 > \frac{8(n+1)(n+1)^4}{15},$$

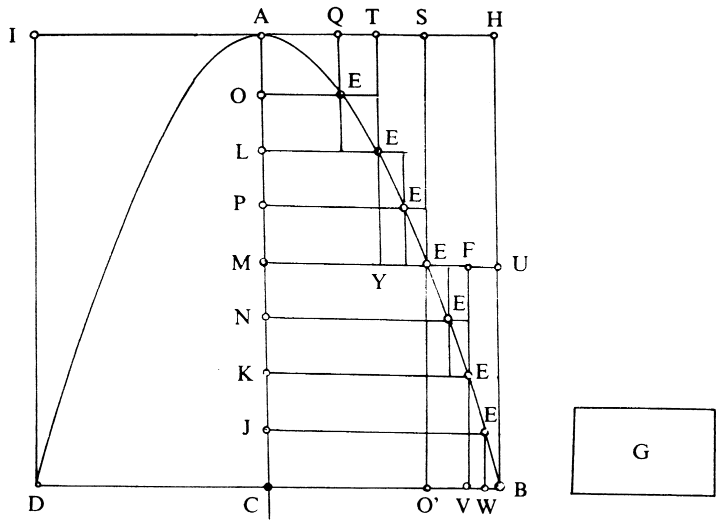
وبذَلِكَ تَكونُ المُتَبايِنَةُ قد أُثْبِتَت.

كما رَأَيْنا، يَتطَلَّبُ إثْباتُ هَذِهِ المُتَبايِنَةِ احْتِسابَ مَجْموعِ القُوَى من الدَرَجَةِ الرابِعَةِ لأوّلِ n من الأعْدادِ الصَحيحَةِ الطَبيعِيَّةِ؛ وهذا الأمْرُ الَّذي يَجْعَلُ ما ذَكَرْناه أعلاه مَفْهوماً؛ ومن جِهَةٍ أُخْرَى، تُخَصَّصُ هَذِهِ المُتَبايِنَةُ للبَحْثِ عن حَجْمِ المُجَسَّمِ المُكافِئ من النَوْعِ الثاني.

٢-١-١-٢ حَجْمُ المُجَسَّمِ المُكافِئ الدَوَرانيِّ

يُعاوِدُ ابنُ الهَيْثَمِ إثْباتَ القَضِيَّةِ التالِيَةِ:

حَجْمُ المُجَسَّمِ المُكافِئ الحادِثِ عن دَوَرانٍ حَوْلَ قُطْرٍ، يُساوي نِصْفَ حَجْمِ الأُسْطُوانَةِ المُحيطَةِ.



الشكل ١ – ٤

يَأخُذُ ابنُ الهَيْثَمِ ثلاثَ حالاتٍ للشَكْلِ، تِبْعاً لِما تَكونُ عليه الزاوِيَةُ $A\hat{C}B$، قائِمَةً، حادَّةً أو مُنْفَرِجَةً.

الحالَةُ الأولى.– لنَفرِضْ أنّ الزاويَةَ $A\hat{C}B$ قائِمَةٌ [انْظُرِ الشَكْلَ ١–٤] ولْنُشِرْ بِـ V إلى حَجْمِ الأُسْطُوانَةِ المُحيطَةِ، وَبِـ v إلى حَجْمِ المُجَسَّمِ المُكافِئ.

• لنَفْترض أنّ

$$v > \frac{1}{2} V;$$

ولِيَكُنْ

$$v - \frac{1}{2} V = \varepsilon.$$

لِتَكُنِ النُقْطَةُ M مُنْتَصَفَ AC ولْنَرْسُمِ المُسْتَقيمَ MU بحَيْثُ يَكونُ $MU // BC$، وَلْيَقْطَعِ القَطْعَ المُكافِئَ عَلَى النُقْطَةِ E وَ BH عَلَى النُقْطَةِ U. وَلْنُخْرِجِ المُسْتَقيمَ SEO' بحَيْثُ يَكونُ $SEO' // AC$، ولْيَقْطَعْ BC عَلَى النُقْطَةِ O' وَ AH عَلَى النُقْطَةِ S. سَنَرْمُزُ بِـ $[EC]$ للمُجَسَّمِ الحادِثِ عن دَوَرانِ السَطْحِ $MCO'E$ وكذَلِكَ أيضاً بِالنِسْبَةِ إلى باقي المُجَسَّماتِ. فيَصيرُ لَدَيْنا

$$(1) \quad [HE] + [EC] = \frac{1}{2} V, [BE] + [AE] = \frac{1}{2} V.$$

ونُكَرِّرُ نَفْسَ البناءِ، انطِلاقاً من النُقْطَةِ L، وهِيَ مُنْتَصَف AM، ومن ثمّ نُعيدُ الكَرَّةَ انطِلاقاً من النُقْطَةِ K، وهِيَ مُنْتَصَفُ MC، فيَصيرُ لَدَيْنا

$$[SE_l] + [ME_l] = \frac{1}{2} [MS] = \frac{1}{2} [AE],$$

$$[UE_k] + [E_kO'] = \frac{1}{2} [UO'] = \frac{1}{2} [BE];$$

فإذاً

$$(2) \quad [SE_l] + [ME_l] + [UE_k] + [E_kO'] = \\ = \frac{1}{2} [AE] + \frac{1}{2} [BE] = \frac{1}{2} V.$$

ونُكَرِّرُ نَفْسَ البِناءِ انطِلاقاً من النقاطِ O, P, N, J، وهِيَ تُنَصِّفُ عَلَى التَوالي AL, LM, MK, KC، فإذاً يَكونُ مَجْموعُ المُجَسَّماتِ الثَمانيَة مُساوِياً لِنصْفِ *(2)* أي لِ $(1/8)V$.

ونُتابِعُ العَمَلَ عَلَى نَفْسِ المِنْوالِ، أي بِطَرْحِنا للمُجَسَّماتِ من النَوْعِ *(1)* وَ *(2)* من الأُسْطُوانَةِ المُحيطَةِ. فَسَنَطْرَحُ إذاً من V، عَلَى التَوالي

$$\frac{1}{2}\ V,\ \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ V\right),\ \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ V\right)\right),$$

وهَكَذا دَوالَيْك. وسَوْفَ نَصِلُ بالضَرورَةِ، بَعْدَ عَدَدٍ مُنْتَهٍ من العَمَلِياتِ، إلى باقٍ أصْغَرَ من ε، وذَلِكَ اسْتِناداً إلى القَضِيَّةِ الأُولَى من المَقالَةِ العاشِرَةِ من ***"أصول"*** إقليدس (أو اسْتِناداً إلى مُبَرْهَنَةِ ابنِ الهَيْثَمِ).

لنَفْرِضْ أنّ تَجْزِئَةَ المُجَسَّمِ تَتَناسَبُ وهَذِهِ المَرْحَلَةَ، حَيْثُ يَكونُ الباقي أقَلَّ من ε.

ولِيَكُنْ V_n حَجْمَ المُجَسَّماتِ المُتَبَقِّيَةِ بَعْدَ تَطْبيقِ عَدَدٍ مُساوٍ لِ n من المَراحِلِ، فإذاً $V_n < \varepsilon$، وَلْيَكُنْ v_n حَجْمَ الجُزْءِ من هَذِهِ المُجَسَّماتِ المَوْجودِ داخِلَ المُجَسَّمِ المُكافِئ، فإذاً $v_n < V_n$، ولذَلِكَ فإنّ $v_n < \varepsilon$، واسْتِناداً إلى الفَرَضِيَّةِ نَحْصُلُ عَلَى العَلاقَةِ

$$v - v_n > \frac{1}{2}\ V.$$

ولَكِن، اسْتِناداً إلى خَواصِّ القَطْعِ المُكافِئ، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{AC}{AM} = \frac{CB^2}{EM^2}$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$BC^2 = 2\ EM^2.$$

وعَلَى غِرارِ ذَلِكَ، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{BC^2}{AC} = \frac{JE_j^2}{AJ} = \frac{OE_0^2}{AO} = \frac{JE_j^2\ +\ OE_0^2}{AC},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$JE_j^2 + OE_0^2 = BC^2 = 2\ EM^2.$$

ونُبيِّنُ بنَفْسِ الطَريقَةِ أنّ

$$KE_k^2 + LE_l^2 = BC^2 = 2\ EM^2,$$

وهَكَذا دَوالَيْك.

فإذا جَعَلْنا $E_0 = A, E_1, \ldots , E_n = B$، حَيْثُ يَكونُ $n = 2^m$، ستَكونُ نِقاطُ القَطْعِ المُكافئ المُرْتَبِطَةُ بنِقاطِ المِحْوَرِ

$$F_0 = A, \ldots, F_{\frac{n}{2}} = M, \ldots, F_n = C,$$

ويَصيرُ لَدَيْنا

$$\overline{E_iF_i}^2 + \overline{E_{n-i}F_{n-i}}^2 = \overline{BC}^2 = 2\overline{EM}^2, (0 \le i \le n)$$

وَ

$$\overline{E_1F_1}^2 + \ldots + \overline{E_{\frac{n}{2}-1}F_{\frac{n}{2}-1}}^2 + \overline{E_{\frac{n}{2}+1}F_{\frac{n}{2}+1}}^2 + \\ + \ldots + \overline{E_{n-1}F_{n-1}}^2 = \left(\frac{n}{2} - 1\right)\overline{E_nF_n}^2,$$

فإذاً

$$\sum_{i=1}^{n-1} \overline{E_iF_i}^2 = \frac{1}{2}(n - 1)\overline{E_nF_n}^2.$$

لِتَكُنِ الآن

$$S_i = \pi\,\overline{E_iF_i}^2 \quad (1 \le i \le n-1),$$

مِساحاتِ الأقْراصِ الّتي لها أنْصافُ أقْطارٍ مُساوِيةٌ لِ $\overline{E_iF_i}$، وحَيْثُ تَكونُ S_n مِساحَةَ القُرْصِ الّذي له نِصْفُ القُطْرِ $\overline{E_nF_n} = BC$، لَدَيْنا

$$\sum_{i=1}^{n-1} S_i = \frac{1}{2}(n - 1)S_n .$$

لِنَرْمُزْ بِ W_i إلى أحْجامِ الأُسْطُوانَاتِ الّتي لها قَواعِدُ S_i وارتِفاعٌ $h = \frac{1}{n}AC$، وَلْيَكُنْ W_n حَجْمَ الأُسْطُوانَة ذاتِ القاعِدَةِ S_n والارتِفاعِ h. فيَصيرُ لَدَيْنا

$$\sum_{i=1}^{n-1} W_i = \frac{1}{2}(n - 1)\ W_n ,$$

ولَكِنَّ

$$\frac{1}{2}\,(n-1)W_n < \frac{1}{2}V,$$

لأنّ $V = n\,W_n$، فإذاً

$$\sum_{i=1}^{n-1} W_i < \frac{1}{2}\,V,$$

ولَكِنَّ

$$\sum_{i=1}^{n-1} W_i = v - v_n > \frac{1}{2}\,V,$$

وهَذا غَيْرُ مُمْكِنٍ؛

$$v \le \frac{1}{2}\,V. \qquad (3)$$

• لنَفْتَرِضِ الآن أنّ $\frac{1}{2}\,V > v$، أي أنّ $\frac{1}{2}\,V = v + \varepsilon$؛ وَلْنَسْتَدِلَّ وَفْقَ النَسَقِ السابِقِ: نَطْرَحُ عَلَى التوالي، نِصْفَ حَجْمِ الأُسْطُوانَةِ، ثمّ نِصْفَ ما بَقِيَ، إلى أن نَصِلَ إلى حَجْمٍ مُتَبَقٍّ V_n، أقَلَّ من عَدَدٍ اختِياريٍّ مَعْلومٍ ε. لِنَجْعَلْ u_n الجُزْءَ من V_n الواقِعَ خارِجَ المُجَسَّمِ المُكافئ، يَكونُ لَدَيْنا $u_n < V_n$، فإذاً $u_n < \varepsilon$، ولذَلِكَ فإنّ

$$v + u_n < \frac{1}{2}\,V;$$

ولَكِنَّ

$$v + u_n = \sum_{i=1}^{n} W_i\,,$$

فإذاً

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{2}\,V;$$

لَكِنَّنا قد بَيَّنّا أنّ

$$\sum_{i=1}^{n-1} W_i = \frac{1}{2}\,(n-1)W_n\,,$$

غَيْرَ أنّ

$$\sum_{i=1}^{n-1} W_i = \sum_{i=1}^{n} W_i - W_n,$$

فإذاً

$$\sum_{i=1}^{n} W_i - W_n = \frac{1}{2}(n-1)W_n ,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\sum_{i=1}^{n} W_i - \frac{1}{2} W_n = \frac{n}{2} W_n = \frac{1}{2} V;$$

فإذاً

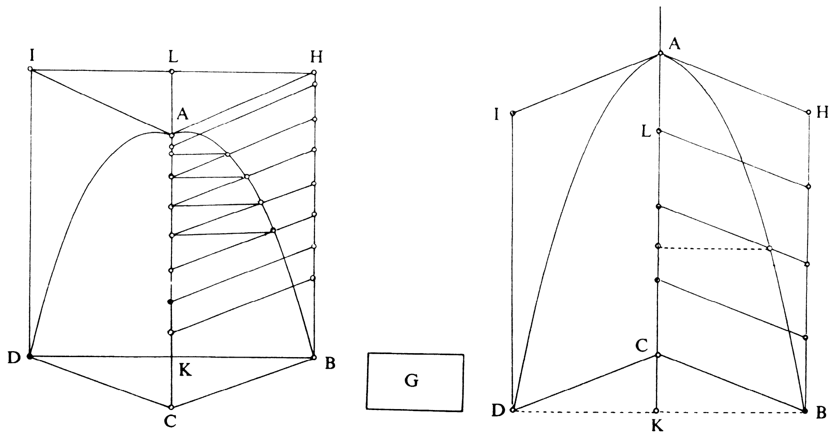
$$\sum_{i=1}^{n} W_i > \frac{1}{2} V,$$

وهَذا مُحالٌ ، فإذاً

$$v \geq \frac{1}{2} V ; \qquad (4)$$

واسْتِناداً إلى *(3)* وَ *(4)* نَجِدُ في النِهايَةِ أنّ

$$v = \frac{1}{2} V.$$



الشكل ١ – ٥أ

الشكل ١ – ٥ب

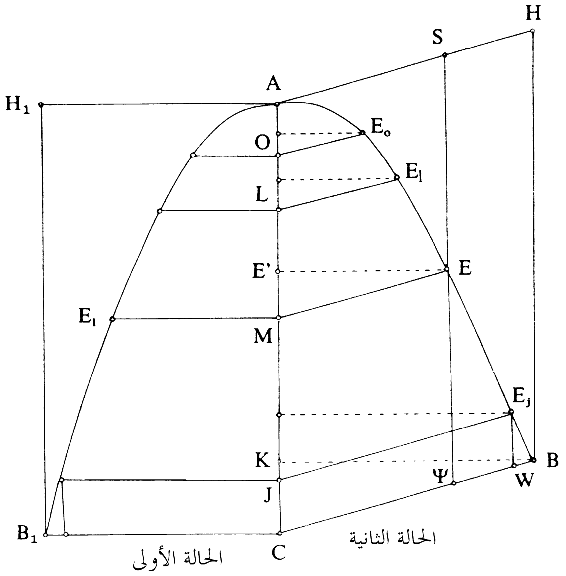
الحالَةُ الثانيَةُ – لنَفْتَرِضْ أنّ الزاوِيَةَ $A\hat{C}B$ حادَّةٌ [انْظُرِ الشَكْلَ ١–٥أ].

في هَذِهِ الحالَةِ، يَكونُ المَخْروطانِ ذَوا القِمّتَيْنِ A' وَ C' مُتَساوِيَيْنِ. وتَكونُ الأُسْطُوانَةُ المَخْروطِيَّةُ مُساوِيَةً إذاً للأُسْطُوانَةِ القائِمَةِ، ويَتِمُّ الحُصولُ عليها عَبْرَ الطَرْحِ أو الإضافَةِ عَلَى التَوالي للمَخْروطَيْنِ *(A')* وَ *(C')*.

• لِنَجْعَلْ في البِدْءِ $V \frac{1}{2} > v$.

لِنَأخُذْ تَجْزِئَةً مُطابِقَةً لتَجْزِئَةِ الحالَةِ الأُولَى؛ وَلْنَطْرَحْ عَلَى التَوالي نِصْفَ حَجْمِ الأُسْطُوانَةِ ومن ثمّ نِصْفَ الحَجْمِ المُتَبَقّي، كما فَعَلْنا سابقاً، إلى أن نَحْصُلَ عَلَى مُجَسَّمٍ في داخِلِ المُجَسَّمِ المُكافِئِ أكْبَرَ من $\frac{1}{2}V$؛ ومن ثمّ نُبَرْهِنُ أنّ المُجَسَّمَ المَذْكورَ أصْغَرُ من $\frac{1}{2}V$.

وبُغْيَةَ تَحْقيقِ ذَلِكَ، لِنَرْسُمْ عَلَى شَكْلٍ واحِدٍ، القَطْعَ المُكافِئَ ذا القُطْرِ AC، الَّذي يُحْدِثُ مُجَسَّماً مُكافئاً P من الحالَةِ الثانِيَةِ؛ والقَطْعَ المُكافِئَ ذا المِحْوَرِ AC الَّذي يُحْدِثُ مُجَسَّماً مُكافئاً P_1 من الحالَةِ الأُولَى. لِنَرْمُزْ بِ V_1 إلى حَجْمِ الأُسْطُوانَةِ المُحيطَةِ بِ P_1 وَ بِ $x_0, x_1, \ldots, x_n$ إلى الإحْداثِياتِ السينيَّةِ لنقاطِ القِسْمَةِ $A, O, L, \ldots, J, \quad C$ ، المَوْجودَةِ عَلَى القِطْعَةِ AC، والَّتي جَرَى التَوَقُّفُ عِنْدَها. لنَرْبِطْ بِكُلِّ نُقْطَةٍ $E(x_i, y_i)$ من P نُقْطَةً $E_1(x_i, Y_i)$ من P_1. لِنُخْرِجْ من E العَمودَ EE' عَلَى



EC، وَلْنَجْعَلْ $EE' = z_i$، فيَكونُ لَدَيْنا إذاً، عَلَى وَجْهِ المِثالِ، للنُقْطَتَيْنِ المُرْتَبِطَتَيْنِ بِ O وَ L:

$$\frac{z_1^2}{z_2^2} = \frac{y_1^2}{y_2^2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{Y_1^2}{Y_2^2}.$$

وبشَكْلٍ أعَمّ، عِنْدَما تَكونُ $1 \le i \le n$، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{z_1^2}{Y_1^2} = \frac{z_2^2}{Y_2^2} = \ldots = \frac{z_i^2}{Y_i^2} = \ldots = \frac{BK^2}{CB_1^2} = \frac{V}{V_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}{\sum_{i=1}^{n} Y_i^2}. \qquad (1)$$

والمُجَسَّمُ المُحاطُ بِ $\boldsymbol{P}$ مُؤَلّفٌ من أُسْطُوانَاتٍ مَخْروطِيَّةٍ مِثْلَ الأُسْطُوانَةِ المَخْروطِيَّةِ $[CJE_jW]$ الَّتِي لها حَجْمٌ مُساوٍ لِ

$$\pi z^2_{n-1} .h, \; (h = CJ = \frac{AC}{n}),$$

والَّتِي نُرفِقُ بها أُسْطُوانَةً قائِمَةً من نَوْعِ الحالَةِ الأُولَى، لها حَجْمٌ مُساوٍ لِ

$$\pi Y^2_{n-1}.h.$$

ونَسْتَنْبِطُ من (1) العَلاقَةَ: $\frac{\sum_{i=1}^{n} \pi\, z_i^2\, h}{V} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \pi\, Y_i^2\, h}{V_1}$. وإذا رَمَزْنا بِ I_n وَ I_{n_1}، عَلَى التَوالي، إلى حَجْمَي المُجَسَّمَيْنِ الداخِلِيَّيْنِ المُحاطَيْنِ بِ $\boldsymbol{P}$ وَ $\boldsymbol{P_1}$، يَكونُ لَدَيْنا: $\frac{I_n}{V} = \frac{I_{n_1}}{V_1}$، ولَكِنَّنا قد رَأَيْنا في الحالَةِ الأُولَى أنّ $I_{n_1} < \frac{1}{2} V_1$، ولذَلِكَ فإنّ $I_n < \frac{1}{2} V$.

ويَكونُ المُجَسَّمُ المَخْروطِيُّ إذاً أقَلَّ من نِصْفِ الأُسْطُوانَةِ المَخْروطِيَّةِ، الأمْرُ الَّذي يَتَناقَضُ مع ما سَبَقَ تِبْيانُهُ، فإذاً

$$v \le \frac{1}{2}\, V.$$

- لِنَفْتَرِضِ الآنَ أنّ

$$v < \frac{1}{2}\, V.$$

نَبْنِي بطَريقَةٍ مُماثِلَةٍ مُجَسَّماً مُحيطاً أصْغَرَ من $\frac{1}{2}\, V$. ومن ثَمّ نُبَيِّنُ، كما سَبَقَ وبَيَّنّا، أنّ هَذا المُجَسَّمَ سَيَكونُ أيضاً أكْبَرَ من $\frac{1}{2}\, V$. ونَسْتَنْبِطُ بالتالي من هَذا التَناقُضِ، أنّ: $v = \frac{1}{2} V$

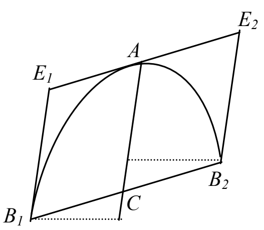
الحالَةُ الثالِثَةُ – لنَفْتَرِضْ أنّ الزاوِيَةَ ACB مُنْفَرِجَةٌ [انْظُرِ الشَكْلَ ١–٥ب].
نَتَّبِعُ نَفْسَ المَسارِ السابِقِ، ونُبَيِّنُ أنّ

$$v = \frac{1}{2}\ V$$

لنُلاحِظْ أنّ الحالتَيْنِ الأخيرتَيْنِ تُفضِيانِ إلى الحالَةِ الأُولَى، وذَلِكَ بواسِطَةِ تَحْويلٍ تآلُفِيٍ، يُحَوِّلُ المَحاورَ المائِلَةَ إلى مَحاورَ مُتَعامِدَةٍ. ورَغْمَ عَدَمِ الإبانَةِ الكامِلَةِ عن هَذا التَحْويلِ، فإنّ ابنَ الهَيْثَمِ يَرْبطُ المُجَسَّمَيْنِ الأخيرَيْنِ، نُقْطَةً بنُقْطَةٍ، بالمُجَسَّمِ الأوّلِ، كما أنّه يَسْتَعْمِلُ خاصيَّةَ لاتَغَيُّرِ العلاقاتِ الخَطِيَّةِ في هَذِهِ الأشْكالِ.

يُتْبِع ابنُ الهَيْثَمِ هَذِهِ النَتيجَةَ المُتَعَلِّقَةَ بحَجْمِ قِطْعَةٍ من المُجَسَّمِ المُكافِئِ الدَوَرانيِّ، بعِدَّةِ لازِماتٍ، ومنها ما هُوَ مُهِمٌّ. لِنَرْمُزْ بِ h وَ h' إلى ارتِفاعَيْ قِطْعَتَيْنِ من المُجَسَّمِ المُكافِئِ؛ وبِ v وَ v' إلى حَجْمَيهما، عَلَى التَرْتيبِ؛ وبِ S وَ S' إلى مِساحَتَيْ قُرْصَيْ قاعدتَي الأُسْطُوانَتَيْنِ ذَواتَي الصِّلَةِ بالقطعتَيْنِ المَذْكورَتَيْنِ، عَلَى التَرْتيبِ؛ وبِ V و V' إلى حَجْمَيِ الأُسْطُوانَتَيْنِ.

لازمة ١ – لِنَأخُذْ قَطْعاً مُكافئاً ذا قُطْرٍ AC كَيْفَما اتَّفقَ، ولْيَكُنْ B_1CB_2 خَطَّ تَرْتيبِهِ. فحَجْما المُجَسَّمَيْنِ المُكافئيْنِ المُحدَثَيْنِ بالجُزْءيْنِ ACB_1 وَ ACB_2 مُتَساويانِ.



لازمة ٢ – لِتَكُنْ S وَ S' قاعِدَتَي الأُسْطُوانَتَيْنِ القائِمَتَيْنِ المُرْفَقَتَيْنِ بالمُجَسَّمَيْنِ

المُكافئيْنِ ولْيَكُنْ h وَ h' ارتفاعَيْهما عَلَى التَرْتيبِ. فإن تَساوَت المِـــساحَتانِ S وَ S' يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{v}{v'} = \frac{h}{h'}.$$

لازمة ٣ – إذا كانَ $S \neq S'$ وَ $h = h'$ فإنّ

$$\frac{v}{v'} = \frac{S}{S'}.$$

لازمة ٤ – إذا كانَ $S \neq S'$ وَ $h \neq h'$ فإنّ

$$\frac{v}{v'} = \frac{S}{S'}.\frac{h}{h'}.$$

لازمة ٥ – في المَرْحَلَةِ n من التَجْزِئَةِ، إذا كانَ العَدَدُ n كبيراً بِقْدْرِ ما يُرادُ، فـــإنّ مَجْموعَ أحْجامِ المُجَسَّماتِ الصَغيرَةِ الَّتي تَخْتَرِقُ المُجَسَّمَ المُكافئ سيَكونُ مُساوِيًا لِ $\frac{h}{n}.S$. وبِلُغَةٍ أُخْرَى: إذا ما كانَ العَدَدُ n كَبيراً بشَكْلٍ كافٍ، سيَكونُ لَدَيْنا

$$J_n - I_n = \frac{h}{n} S,$$

حَيْثُ تَدُلُّ J_n عَلَى المُجَسَّماتِ المُحيطَةِ، وَ I_n عَلَى المُجَسَّماتِ المُحاطَةِ، وذَلِــكَ في المَرْحَلَةِ n من التَجْزِئَةِ.

لازمة ٦ –

$$I_n = \frac{1}{2} [V - S \frac{h}{n}],$$

ولَكِنَّ

$$v = \frac{1}{2} V,$$

فإذاً

$$v - I_n = \frac{1}{2}\, S\, \frac{h}{n}\ ;$$

ولذَلِكَ، فإنّ مَجْموعَ المُجَسَّماتِ الأُسْطُوانِيّةِ الصَغيرَةِ الّتي تَختَرِقُ المُجَسَّمَ المُكافئ، يَنْقَسِمُ بِواسِطَةِ السَطْحِ المُكافئ إلى نِصْفَيْن.

٢-١-١-٣ حَجْمُ المُجَسَّمِ المُكافئ من النَوْعِ الثاني

ومن ثمّ يُحَدِّدُ ابنُ الهَيْثَمِ حَجْمَ قِطْعَةٍ من مُجَسَّمٍ مُكافئ حادِثٍ عن دَوَرانِ قَطْعٍ مُكافئ حَوْلَ خَطِّ التَرْتيب.

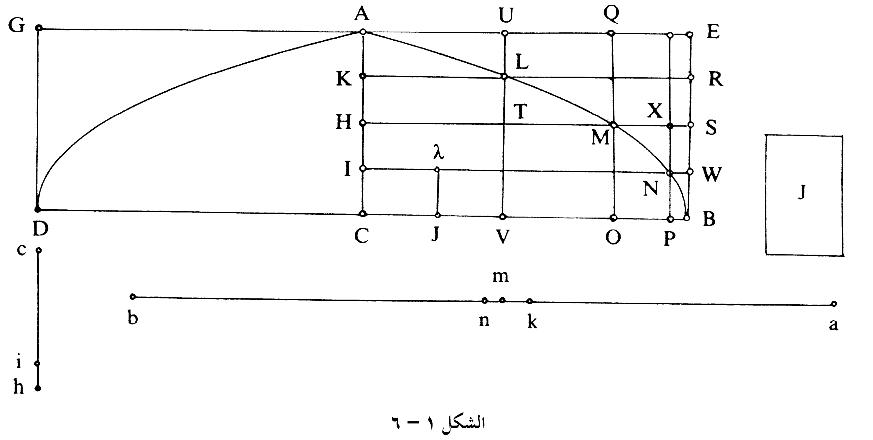
لِيَكُنْ ABC نِصْفَ قَطْعٍ مُكافئ وَ BC قُطْرَه وَ AC خَطَّ تَرْتيبِهِ. وَلْيَكُنْ v حَجْمَ المُجَسَّمِ المُكافئ الحادِثِ عن دَوَرانِ ABC حَوْلَ AC؛ وَ V حَجْمَ الأُسْطُوانَةِ المُحيطَةِ، فإذاً

$$v = \frac{8}{15}\, V$$

يَتناوَلُ ابنُ الهَيْثَمِ هنا ثَلاثَ حالاتٍ، تِبْعاً لما تَكونُ عليه الزاوِيَةُ $A\hat{C}B$: أكْبَرَ من قائِمَةٍ، أصْغَرَ من قائِمَةٍ أو مُساوِيَةً لقائِمَةٍ.

الحالَةُ الأولى . – لِنَجْعَلْ $A\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$.

لِنَفْترِض أوّلاً أنّ $v > \frac{8}{15}\, V$، أي أنّ $v - \frac{8}{15}V = \varepsilon$.



الشكل ١ – ٦

لِتَكُنِ النُقْطَةُ H مُنْتَصَفَ AC وَ $BC \;//\; HS$، وَلْيَقْطِعِ المُسْتَقيمُ HS القَطْعَ المُكافئَ عَلَى M. وَلْيَكُنْ $AC \;//\; MQO$ [انْظُرِ الشَكْلَ ١-٦]، وَلْنَرْمُزْ بِ $[U]$ إلى حَجْمِ المُجَسَّمِ المُحْدَثِ عن دَوَرانِ السَطْحِ (U)؛ يَكونُ لَدَيْنا

$$[EM] = [MB], \;\; [AM] = [MC],$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$[EM] + [MC] = \frac{1}{2}\, V$$

لِتَكُنِ النُقْطَةُ K مُنْتَصَفَ AH وَ I مُنْتَصَفَ HC؛ وبطَريقَةٍ مُماثِلَةٍ يَكونُ لَدَيْنا

$$[QL] + [LH] = \frac{1}{2}\, [AM]$$

وَ

$$[SN] + [NO] = \frac{1}{2}\, [BM],$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$[SN] + [NO] + [QL] + [LH] = \frac{1}{2}\, \{[AM + BM]\} = \frac{1}{4}\, V.$$

وهَكَذا، فإنّ ابنَ الهَيْثَمِ يَأخُذُ في البِدْءِ تَجْزِئَةَ AC إلى $n = 2^m$ مِن الأجْزاءِ المُتَساوِيَةِ، ويَعْمَدُ إلى طَرْحٍ مُتَتالٍ لِ

$$\frac{1}{2}\, V, \; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\, V\right),$$

وهَكَذا دَوالَيْك. ويُبَيِّنُ أنّنا إذا ما زِدْنا عَدَدَ نِقاطِ التَجْزِئَةِ بشَكْلٍ كافٍ، فسَوْفَ نَحْصُلُ لُزوماً عَلَى باقٍ أصْغَرَ من ε.

لنَفْتَرِضْ وابنَ الهَيْثَمِ، أنّنا قد بَلَغْنا هَذِهِ المَرْحَلَةَ المَذْكورَةَ، أي أنّ

$$[BN] + [NM] + [ML] + [LA] < \varepsilon,$$

أو وَفْقَ التَرْميزِ المُعْتَمَدِ سابِقاً

$$V_n < \varepsilon;$$

لِيَكُنْ v_n الجُزْءَ من V_n المَوْجودَ داخِلَ المُجَسَّمِ المُكافئ، فيَصيرُ لَدَيْنا

$$v_n < \varepsilon,$$

وبما أنّ

$$v = \frac{8}{15} V + \varepsilon$$

فإنّ

$$v - v_n > \frac{8}{15} V.$$

ولَكِن $v - v_n$ يُساوي مُجَسَّماً قاعِدَتُهُ القُرْصُ ذو نِصْفِ القُطْرِ PC ورَأسُــهُ القُرْصُ ذو نِصْفِ القُطْرِ KL. ومن جِهَةٍ أُخْرَى، واسْــتِناداً إلى خــواصِّ القَطْــعِ المُكافِئ، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{AC^2}{LV^2} = \frac{BC}{BV}, \frac{LV^2}{MO^2} = \frac{BV}{BO}, \frac{MO^2}{NP^2} = \frac{BO}{BP};$$

ولَكِن

$$MO = 2NP, \; LV = 3\,NP, \qquad AC = 4\,NP$$

لِنَجْعَلْ $NP = 1$، فَتُصْبِحُ نِسَبُ

$$NP, MO, LV, AC$$

مُساوِيةً لِنِسَبِ أوّلِ n من الأعْدادِ الطَبيعِيَّةِ الصَحيحَةِ، وتُصْبِحُ نِسَبُ

$$BC, BV, BO, BP$$

مُساوِيةً لنِسَب مُرَبَّعاتِ الأعْدادِ الطَبيعِيَّةِ الصَحيحَةِ الأُولَى. ومن هنا يَنْتُجُ أيضاً أنّ نِسَبَ

$$EA, RL, SM, WN$$

مُساوِيةٌ لنِسَب مُرَبَّعاتِ أُولَى الأعْدادِ الطَبيعِيَّةِ الصَحيحَةِ لأنّ

$$BP = WN, BO = SM, BV = RL, BC = EA.$$

ولَكِنَّ

$$WI = SH = RK = AE$$

وَ

$$\frac{WN}{SM} = \frac{1^2}{2^2}, \ldots, \frac{RL}{EA} = \frac{3^2}{4^2} = \frac{(n-1)^2}{n^2};$$

ولَكِن اسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ الخامِسَةِ، يُصْبِحُ لَدَيْنا

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 \leq \frac{8}{15} n \,.\, n^4 \leq \sum_{k=0}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 \;,$$

وهذا ما يُعْطينا في حالَةِ القِطَعِ ذاتِ الصِلَةِ

$$NI^2 + MH^2 + LK^2 \leq \frac{8}{15} \{WI^2 + SH^2 + RK^2 + AE^2\}$$

وَ

$$NI^2 + MH^2 + LK^2 + AE^2 \geq \frac{8}{15} \{WI^2 + SH^2 + RK^2 + AE^2\}.$$

لِنَرْمُزْ بِ S_i إلى مِساحاتِ الأقْراصِ الَّتي تَكونُ أنْصافُ أقْطارِها مُساوِيةً عَلَى التَرْتيبِ للقِطَعِ السابِقَةِ، أي

$$S_k = \pi (n^2 - k^2)^2;$$

وبشَكْلٍ خاصٍّ

$$S_0 = \pi n^4 ,$$

فإذاً

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k \leq \frac{8}{15} n S_0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} S_k .$$

لِنَرْمُز الآنَ بِ W_k إلى الأُسْطُوانَاتِ ذواتِ القاعِدَةِ S_k والارتفاعِ $h = AC/n$؛ فيَصيرُ لَدَيْنا

$$\sum_{k=1}^{n-1} W_k \leq \frac{8}{15} V .$$

غَيْرَ أنّه وَفْقَ البِناءِ، يَكونُ لَدَيْنا

$$\sum_{k=1}^{n-1} W_k = v - v_n ;$$

فإذاً

$$v - v_n < \frac{8}{15} V,$$

وهَذا مُحالٌ. فإذاً

$$v \leq \frac{8}{15} V.$$

لنَفْتَرِضِ الآنَ أنّ $V\ \frac{8}{15} > v$ ، أي أنّ $\frac{8}{15}\ V - v = \varepsilon$. لِنَأخُذْ نَفْسَ التَجْزِئَـــةِ فِي المَرْحَلَةِ الَّتِي يَكونُ فيها مَجْموعُ المِساحاتِ الَّتِي تُغَطِّي القَطْعَ المُكافِئ أصْغَرَ مـــن ε. وَلْيَكُنْ u_n الجُزْءَ من V_n الواقِعَ خارِجَ المُجَسَّمِ المُكافِئ، ولذَلِكَ فإنّ $u_n < \varepsilon$، فإذاً

$$v + u_n < \frac{8}{15}\ V.$$

ولَكِنّ المُجَسَّمَ $v + u_n$ ما هُوَ إلا المُجَسَّمُ الَّذي قاعِدَتُهُ القُـــرْصُ ذو نِـــصْفِ القُطْرِ BC ورَأسُهُ القُرْصُ ذو نِصْفِ القُطْرِ AU. ولَكِنَّنا بَيَّنّا أنّ

$$\sum_{k=0}^{n-1} S_k \geq \frac{8}{15}\ n\ S_o;$$

فإذاً

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_k \geq \frac{8}{15}\ V,$$

وهَذا مُحالٌ، لأنّ

$$\sum_{k=0}^{n-1} W_k = v + u_n < \frac{8}{15}\ V.$$

ونَستَنْتِجُ إذاً، أنّ

$$v \geq \frac{8}{15}\ V; \qquad (2)$$

واستِناداً إلى *(1)* وَ *(2)* نَحْصُلُ عَلَى

$$v = \frac{8}{15}\ V.$$

الحالَتانِ الثانِيَةُ والثالِثَة. لِنَجْعَلْ $A\hat{C}B < \frac{\pi}{2}$ أو $A\hat{C}B > \frac{\pi}{2}$.

يُبَيِّنُ ابنُ الهَيْثَمِ بنَفْسِ الطَريقَةِ السابِقَةِ، وعَلَى مِثالِ الحالَتَيْنِ المُشابِهَتَيْنِ في حالَةِ قِطْعَةِ المُجَسَّمِ المُكافِئ الدَوَرانِيّ، أنّ

$$v = \frac{8}{15}\ V.$$

ويُبَيِّنُ أيضاً أنّ

$$V_n = \frac{1}{2^n}\ V$$

حَيْثُ يَكونُ V_n مَجْموعَ الأُسْطُوانَاتِ الصَغيرَةِ الَّتي تُحيطُ بالقَطْعِ المُكافئ وهنا يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{1}{2^n}\ V = [BI].$$

٢-١-١-٤ دِراسَةُ مُجَسَّماتِ الإحاطَةِ

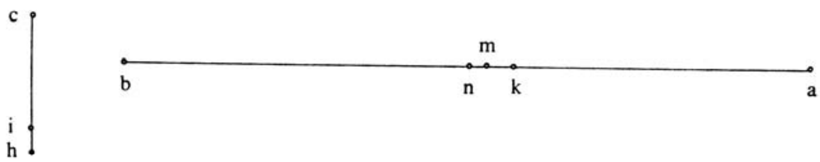
يَتَساءلُ ابنُ الهَيْثَمِ عن التَغْييراتِ الَّتي تَطْرَأُ عَلَى مُجَسَّماتِ الإحاطَةِ هَذِهِ عِنْدَ زيادَةِ عَدَدِ نقاطِ التَجْزِئَةِ إلى ما لانهايَة، فهُوَ يَطْرَحُ إذاً مَسْأَلَةَ تَغَيُّرِ نسْبَةِ جُزْءَيْنِ يُؤَلِّفانِ تِلْكَ المُجَسَّماتِ اللاّمُتَناهِيَةَ في الصِغَرِ، أي الجُزْئَيْنِ الداخِلِيِّ والخارِجيِّ بالنسْبَةِ إلى المُجَسَّمِ المُكافئ. لقد بَيَّنّا أنّ ذَيْنك الجُزْءَيْنِ مُتَساوِيا الحَجْمِ في حالَةِ المُجَسَّمِ المُكافئ من النَوْعِ الأوّلِ، ولَكِنَّ هَذا الأمْرَ لَيْسَ كذَلِكَ هنا.

لِيَكُنْ ab العَدَدَ المُرَبَّعَ المُرْتَبطَ بالقِطْعَةِ AE، (أي أنّ $ab = 2^{2m}$ إذا كانَت القِطْعَةُ AC مَقْسومَةً إلى 2^m من الأجْزاء)

$$an = \frac{ab}{2},\ nk = \frac{1}{30}\ ab;$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$bk = \frac{8}{15}\ ab.$$



لِيَكُنْ

$$hc = \sqrt{ab}\,,\ hi = \frac{1}{30}$$

ولِتَكُنِ النُقْطَةُ m بحَيْثُ تُحَقِّقُ العَلاقَةَ

$$\frac{hi}{nm} = \frac{ab}{ch},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$ab \,.\, nm = \frac{1}{30}\ ch,\ ab \,.\, kn = \frac{1}{30}\ ab^2,\ ab \,.\, km = \frac{1}{30}\ ab^2 - \frac{1}{30}\ \sqrt{ab}\,.$$

ولَكِن، استْناداً إلى العَلاقَةِ *(12)* من المُقَدِّمَةِ ٥، لَدَيْنا

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - k^2)^2 = \frac{8}{15}(n-1)n^4 + \frac{1}{30}n^4 - \frac{1}{30}n,$$

وهَذا ما يُكْتَبُ هنا بواسطةِ القِطَعِ كالتالي:

$$LK^2 + MH^2 + NI^2 =$$

$$= \frac{8}{15}\ (RK^2 + SH^2 + WI^2) + \frac{1}{30}\ ab^2 - \frac{1}{30}\ \sqrt{ab}$$

$$= \frac{8}{15}\ (RK^2 + SH^2 + WI^2) + ab \,.\, km;$$

ولَكِنَّ

$$ab \,.\, bk = \frac{8}{15}\ ab^2,$$

فإذاً

$$(1) \qquad LK^2 + MH^2 + NI^2 + ab \,.\, bm = \frac{8}{15}\ (RK^2 + SH^2 + WI^2 + BC^2).$$

لِنَأخُذِ الآن النُقْطَةَ J عَلَى BC [انْظُرِ الشَكْلَ ١-٦]، بحَيْثُ يَكونُ

$$(2) \qquad \frac{BC^2}{CJ^2} = \frac{ab}{bm} = \frac{ab^2}{ab \,.\, bm},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$CJ^2 = ab \,.\, bm\,.$$

ولِتَكُنِ النُقْطَةُ L_a بحَيْثُ يَكونُ

$$JL_a \,//\, CI,$$

فيَكونُ لَدَيْنا استْناداً إلى *(1)*

$$(3) \qquad CJ^2 + NI^2 + MH^2 + LK^2 = \frac{8}{15}\ (RK^2 + SH^2 + WI^2 + BC^2).$$

لِنَأخُذِ الآن الأقْراصَ

$$S, S_1, \ldots, S_{n-1}$$

الَّتي لها عَلَى التوالي أنْصافُ أقْطارٍ

$$BC, CJ, NI, \ldots, LK,$$

لَدَيْنا

$$S + \sum_{k=1}^{n-1} S_k = \frac{8}{15}\, n\, S_0.$$

لِنَرْمُزْ بِ

$$W, W_1, \ldots, W_{n-1}$$

إلى الأُسْطُوانَاتِ ذواتِ الصّلةِ وذواتِ الارتفاعات المُساوِية لِ $AK = \dfrac{AC}{n}$ ؛

فيَصيرُ لَدَيْنا

$$W + \sum_{k=1}^{n-1} W_i = \frac{8}{15}\, n\, W_0 = \frac{8}{15}\, V.$$

ولَكِنَّنا بَيَّنَّا أنّ

$$v = \frac{8}{15}\, V,$$

فإذاً

$$v = W + \sum_{k=1}^{n-1} W_i,$$

لذَلِكَ فإنّ

$$W = v - \sum_{k=1}^{n-1} W_i = v_n,$$

حَيْثُ يَكونُ v_n مَجْموعَ الأجْزاءِ من مُجَسَّماتِ الإحاطَةِ الصَغيرَةِ المَوْجودَةِ داخِلَ المُجَسَّمِ المُكافئ.

لقد بَيَّنَّا كذَلِكَ أنّ $V_n = \pi r^2 h$، حَيْثُ يَكونُ V_n مَجْموعَ مُجَسَّماتِ الإحاطَةِ الصَغيرَةِ وَ

$$r = BC,\ h = \frac{AC}{n} = IC.$$

ويَنْتُجُ إذاً من ذَلِكَ أنّ

$$u_n = V_n - W = u,$$

حَيْثُ يَكونُ u_n مَجْموعَ أجزاءِ مُجَسَّماتِ الإحاطَةِ الصَغيرَةِ المَوْجــودةِ خــارِجَ المُجَسَّمِ المُكافِئ؛ فيُساوي المَجْموعُ u_n إذاً الأُسْطُوانَةَ المُحْدَثةَ عن دَوَرانِ الــسَطْحِ (BL_a). غَيْرَ أنّ

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{u}{W} = \frac{BC^2 - JC^2}{JC^2} = \frac{am}{bm},$$

لأنّ

$$\frac{BC^2}{JC^2} = \frac{ab}{bm}$$

وذَلِكَ اسْتِناداً إلى (2).

لِنَرْمُزْ بِـ $u(m)$ وَ $W(m)$ إلى الأحْجامِ المُرْتَبِطَــةِ بِـ u وَ W في المَرْحَلَــةِ ذاتِ المَرْتَبَةِ m من مَراحِلِ التَجْزِئَةِ (حَيْثُ $n = 2^m$). لقد تَبَيَّنَ أنّ

$$\frac{u(m+1)}{W(m+1)} > \frac{u(m)}{W(m)},$$

ففي المَرْحَلَةِ $(m + 1)$، يَرْتَبِطُ AE بِـ $(2n)^2$ وَ ab بِـ n^2، فإذاً

$$\frac{AE}{\sqrt{AE}} > \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \frac{ab}{ch};$$

ولَكِنَّ

$$\frac{hi}{nm} = \frac{ab}{ch},$$

فإذاً

$$\frac{\frac{1}{30}}{n'm'} > \frac{\frac{1}{30}}{nm};$$

حَيْثُ $n'm'$ هُوَ المُرْتَبِطُ بِـ nm في المَرْحَلَة $(m + 1)$، ولذَلِكَ فإنّ

$$n'm' < nm$$

وَ

$$n'b' > nb.$$

لنُلاحِظْ أوّلاً أنّ AC يُساوي جَذْرَ الضِلْعِ القائِمِ مَــضْروباً بِـ $\sqrt{AE}$ الَّــذي يَرْتَبِطُ، بِكُلِّ مَرْحَلَةٍ من مَراحِلِ التَجْزِئَةِ، بِـ

$$\sqrt{ab} = \frac{ab}{ch} = \frac{hi}{nm}.$$

عِنْدَما نَنْتَقِلُ من تَجْزِئَةِ AC المُؤَلَّفَةِ من $n = 2^m$ من الأجزاءِ، إلى تَجْزِئَـــةِ AC المُؤَلَّفَةِ من $2n = 2^{m+1}$ من الأجزاءِ، فإنّ $\sqrt{ab}$ يُصْبِحُ

$$\sqrt{a'b'} = 2\sqrt{ab}$$

وَ nm يُصْبِحُ

$$n'm' = \frac{nm}{2}\ ;$$

وعِلاوَةً عَلَى ذَلِكَ فإنّ nb يُصْبِحُ

$$n'b' = 4nb\ .$$

وهَكَذا يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{m'n'}{n'b'} = \frac{1}{8}\frac{mn}{nb};$$

وبما أنّ

$$\frac{mb}{ab} = \frac{mn + nb}{2nb} = \frac{1}{2}\frac{mn}{nb} + \frac{1}{2} \geq \frac{mn}{nb}$$

وَ

$$\frac{m'b'}{a'b'} = \frac{m'n' + n'b'}{2n'b'} = \frac{1}{2}\frac{m'n'}{n'b'} + \frac{1}{2} = \frac{1}{16}\frac{mn}{nb} + \frac{1}{2},$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{mb}{ab} > \frac{m'b'}{a'b'}.$$

ونَسْتَنْتِجُ من ذَلِكَ

$$\frac{a'm'}{m'b'} > \frac{am}{mb}\ ,$$

أي أنّ

$$\frac{u(m+1)}{W(m+1)} > \frac{u(m)}{W(m)}.$$

وهَكَذا يُبَيِّنُ ابنُ الهَيْثَمِ أنّ النِسْبَةَ تَتَزايَدُ عِنْدَ زيادَةِ عَدَدِ نقاطِ التَجْزِئَةِ.

٢-١-٢ حِسابُ حَجْمِ الكُرَةِ

بَعْدَ أن ذَكَّرَ ابنُ الهَيْثَم بأنّ الكثيرين ممّن سَبَقوهُ قد حَسَبوا حَجْمَ الكُرَةِ، يَقْتَرِحُ الرُجوعَ إلى هَذا البُرْهانِ بُغْيَةَ اعْطائِهِ شَكْلاً أقْصَرَ وأوْضَحَ ممّا أُعْطِيَ سابقاً. ويَتَعَلَّقُ الأمْرُ هنا بالطَريقَةِ الّتي سَبَقَ وطُبِّقَت في حالَةِ المُجَسَّمِ المُكافئ. ويَبْدَأُ ابنُ الهَيْثَمِ هنا أيضاً بمُقَدِّماتٍ حِسابِيّةٍ بُغْيَةَ إثْباتِ بَعْضِ المُتَبايِنَاتِ الضَروريَّةِ لِتَحْديدِ حَجْمِ الكُرَةِ.

مُقَدِّمَات حِسابية

يَبْدَأُ ابنُ الهَيْثَمِ بإعادَةِ بُرْهانِ مُقَدِّمَتَيْنِ، كانَ قد سَبَقَ له أن أثْبَتَهُما في مُؤَلَّفِهِ ***"مقالة في مِساحَةِ المُجَسَّمِ المُكافئ"***. ويُعَلِّلُ ابنُ الهَيْثَمِ هَذِهِ الإعادَةَ بأنّه يَوَدُّ أن تَكونَ رِسالَتُهُ حَوْلَ حَجْمِ الكُرَةِ مُسْتَقِلَّةً مُكْتَمِلَةً. سَوْفَ نُعاوِدُ باخْتِصارٍ تَناوُلَ هاتَيْنِ المُقَدِّمَتَيْنِ الواحِدَةَ تِلْوَ الأُخْرَى.

مُقَدِّمَة ١.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}.$$

يَخْتَلِفُ بُرْهانُ هَذِهِ المُقَدِّمَةِ عن ذاك الّذي وَرَدَ في المُؤَلَّفِ السابِق. لِنَرَ كَيْفَ يُعرَضُ هَذا البُرْهانُ: لِكُلِّ عَدَدٍ صَحيحٍ n، ولِكُلِّ عَدَدٍ صَحيحٍ k لا يَتَعَدَّى n، يَكونُ لَدَيْنا

$$1 + n = k + (n - k + 1),$$
$$2\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1) = n(n+1),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1).$$

مُقَدِّمَة ٢.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{n}{3}+\frac{1}{3}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right).$$

يَتَطابَقُ بُرْهانُ ابنِ الهَيْثَمِ في هَذِهِ المُقَدِّمَةِ مع بُرْهانِها الَّذي أوْرَدَهُ في المُؤَلَّفِ السابِقِ. وبالفِعْلِ، لَدَيْنا

$$(n+1)S_n = S_n + nS_n = S_n + n^2 + nS_{n-1}$$
$$= (S_n + S_{n-1} + \ldots + S_1) + (n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 1^2);$$

ولَكِن اسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ السابِقَةِ، يَصيرُ لَدَيْنا

$$(n+1)S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\left(n+\frac{1}{2}\right) S_n = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2,$$

فإذاً

$$S_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{3}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{n}{3}+\frac{1}{3}\right)n\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}.$$

ومن ثمّ يُثْبِتُ ابنُ الهَيْثَمِ المُتَبايِنات.

مُقَدِّمَة ٣.

$$(1) \qquad \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2} < \sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \frac{n^3}{3}+\frac{2}{3}n^2.$$

ويَتِمُّ التَحَقُّقُ من هَذِهِ المُتَبايِناتِ مُباشرةً اسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ٢، إذا ما لاحَظْنا أنّ $n/6 < n^2/6$ لأنّ $n \geq 1$.

لِنَأخُذِ الآن مُتَوالِيَةً حِسابِيَةً

$$u_1, u_2, \ldots, u_n$$

فارِقُها u_1، وحَدُّها الأوّلُ مُساوٍ للصِفْرِ، فيَكونُ لَدَيْنا كذَلِكَ

$$(2) \quad \frac{1}{2}\, u_n{}^2 + \frac{1}{3}\, nu_n{}^2 < \sum_{k=1}^{n} u_k^2 < \frac{1}{3}\, nu_n{}^2 + \frac{2}{3}\, u_n{}^2.$$

وبالفِعْلِ، لَدَيْنا

$$u_k = ku_1 \; (1 \le k \le n)$$

ولذَلِكَ فإنّ

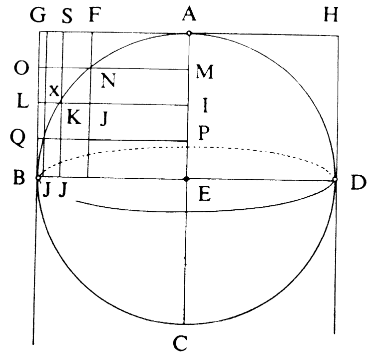
$$\frac{u_k^2}{u_n^2} = \frac{k^2}{n^2},$$

فإذاً

$$\frac{1}{u_n^2}\sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2,$$

وبالتالي نَحْصُلُ عَلَى النَتيجَةِ المَطلوبَةِ فَوْرَ تَطْبيقِ المُقدِّمَةِ ٣.

إثْرَ إنهائِهِ المُقَدِّمَاتِ الحِسابِيَّةَ والمُتَبايِنَاتِ السابِقَةَ، يَعْمَدُ ابنُ الهَيْثَمِ إلى إثْبــاتِ



الشكل ٢ – ٢

المُبَرْهَنَةِ الأساسِيَّةِ في هَذا المُؤَلَّفِ.

مُبَرْهَنَة.– يُساوي حَجْمُ الكُرَةِ ثُلْثَيْ حَجْمِ الأُسْطُوانَةِ المُحيطَةِ الَّتي تَكونُ قاعِــدَتُها مُساوِيةً للقُرْصِ الأكْبَرِ في الكُرَةِ، ويَكونُ ارتفاعُها مُساوِياً لقُطْرِ الكُرَةِ.

لِنَأخُذِ المُسْتَطيلَ $AEBG$ [انْظُرِ الشَكْلَ ٢–٢] الَّذي يُحدِثُ بدَوَرانِهِ حَــوْلَ AE أُسْطُوانَةً لها قاعِدَةٌ مُساوِيةٌ لأكْبَرِ قُرْصٍ في الكُرَةِ ولها ارتِفاعٌ مُساوٍ لِنصْفِ قُطْرِ الكُرَةِ. تُحْدِثُ القِطْعَةُ ABE، نَتيجَةَ حَرَكَةِ الدَوَرانِ المُبَيَّنِ، نِصْفَ كُــرَةٍ، بَيْنَمــا

تُحْدِثُ القِطْعَةُ ABC كُلَّ الكُرَةِ. فالقَضِيَّةُ السابِقَةُ مُعادِلَةٌ إذاً للقَضِيَّةِ التالِيَةِ: حَجْمُ نِصْفِ الكُرَةِ المُحْدَثِ عن دَوَرانِ القِطْعَةِ ABE يُساوي ثُلُثَيْ حَجْمِ الأُسْطُوانَةِ الَّتي لها قاعِدَةٌ مُساوِيةٌ لأكْبَرِ قُرْصٍ في الكُرَةِ وارتِفاعٌ مُساوٍ لنِصْفِ قُطْرِ الكُرَةِ.

لِنَجْعَلْ v حَجْمَ نِصْفِ الكُرَةِ وَ V حَجْمَ الأُسْطُوانَة المُرْتَبِطَةِ بها وَ $[U]$ مُجَسَّمَ U. يُثْبِتُ ابنُ الهَيْثَمِ أنّ

$$v = \frac{2}{3} V.$$

لنَفْرض في البِدْءِ أنّ

$$v > \frac{2}{3} V,$$

أي أنّ

$$v = \frac{2}{3} V + \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

لنَقْسِمْ AE إلى نِصْفَيْنِ مُتَساوِيَيْنِ عَلَى النُقْطَةِ I، ومن ثمّ نَقْسِمُ كُلاًّ من AI وَ IE إلى نِصْفَيْنِ مُتَساوِيَيْنِ عَلَى M وَ P عَلَى التَوالي، وهَكَذا دَوالَيْك. فيَصيرُ لَدَيْنا

$$[EK] + [KG] = \frac{1}{2} [AB] = \frac{1}{2} V,$$

$$[NI] + [NS] = \frac{1}{2} [AK],$$

$$[UJ] + [UL] = \frac{1}{2} [BK],$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$[NI] + [NS] + [UJ] + [UL] = \frac{1}{2} [AK] + \frac{1}{2} [BK] = \frac{1}{2} (\frac{1}{2} V).$$

وهَكَذا، فإثْرَ التَجْزِئَةِ الأُولَى، يَبْقَى $\frac{1}{2} V$ ؛ وإثْرَ التَجْزِئَةِ الثانِيَةِ يَبْقَى $\frac{1}{2} (\frac{1}{2} V)$، وبالتالي فإثْرَ التَجْزِئَةِ من المَرْتَبَةِ n يَبْقَى $\frac{1}{2^n} V < \varepsilon$، وذَلِكَ اسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ الأُولَى من المقالة العاشِرة من ***أصول*** إقليدس (أو اسْتِناداً إلى مُبَرْهَنَةِ ابنِ

الهَيْثَمِ) الَّتي عَمَّمَها ابنُ الهَيْثَمِ [راجعِ الشَرْحَ إضافَةً إلى النَصِّ الأخيرِ من هَذا الفَصْلِ: ***قولٌ في قِسْمَةِ المِقْدارَيْنِ المَذْكورَيْنِ في الشَكْلِ الأوّل من المقالة العاشرة من كتابِ إقليدس***]. لنُشِرْ بِ V_n إلى هَذا الباقي وَ بِ v_n إلى الجُزْءِ منه المَوْجود في داخِلِ الكُرَةِ.

فيَصيرُ لَدَيْنا

$$v_n < V_n < \varepsilon,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$v_n < \varepsilon.$$

غَيْرَ أنّ

$$v = \frac{2}{3}\ V + \varepsilon,$$

فإذاً

$$v - v_n > \frac{2}{3}\ V;$$

ولَكِنَّ

$$I_n = v - v_n$$

وهُوَ حَجْمُ مَجْموعِ أُسْطُوانَاتٍ لها ارتفاعٌ واحِدٌ. ويَدْرُسُ ابنُ الهَيْثَمِ إذاً I_n.

وتَكونُ القِطَعُ

$$EP,\ EI,\ EM,\ EA$$

عَناصِرَ مُتَوالِيَةٍ حِسابِيَّةٍ لها فارقٌ مُساوٍ لِحَدِّها الأوَّلِ. واسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ٣ يَكونُ لَدَيْنا

$$\begin{aligned}(3)\quad \frac{1}{2}\ EA^2 + \frac{1}{3}\ (EB^2 + PQ^2 + IL^2 + MO^2) &< \\ &< EP^2 + EI^2 + EM^2 + EA^2 \\ &< \frac{1}{3}\ (EB^2 + PQ^2 + IL^2 + MO^2) + \frac{2}{3}\ EA^2 .\end{aligned}$$

ولَكِنَّ

$$EP^2 + PU^2 = EU^2 = R^2$$

وَ

$$PQ = R,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$EP^2 + PU^2 = PQ^2,$$
$$EI^2 + IK^2 = IL^2,$$
$$EM^2 + MN^2 = MO^2,$$
$$EA^2 = EB^2,$$

فإذاً

$$(EP^2 + EI^2 + EM^2 + EA^2) + (PU^2 + IK^2 + MN^2) = \\ = PQ^2 + IL^2 + MO^2 + EB^2,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$(4) \quad PU^2 + IK^2 + MN^2 = \\ = PQ^2 + IL^2 + MO^2 + EB^2 - (EP^2 + EI^2 + EM^2 + EA^2),$$

وإذا ما أخَذْنا العَلاقَةَ *(3)* بعيْنِ الاعتِبارِ، يَصيرُ لَدَيْنا

$$PU^2 + IK^2 + MN^2 < \frac{2}{3}\,(EB^2 + PQ^2 + IL^2 + MO^2) - \frac{1}{2}\,EA^2,$$

فإذاً

$$PU^2 + IK^2 + MN^2 < \frac{2}{3}\,(EB^2 + PQ^2 + IL^2 + MO^2),$$

غَيْرَ أنّ

$$I_n = \pi\,(PU^2 + IK^2 + MN^2).EP,$$

لذَلِكَ فإنّ

$$I_n < \frac{2}{3}\,\pi\,(EB^2 + PQ^2 + IL^2 + MO^2).EP,$$

فإذاً

$$I_n < \frac{2}{3}\,V;$$

وهَذا مُحالٌ، فإذاً

$$v \leq \frac{2}{3}\,V.$$

لنَفْتَرِضِ الآن أنّ

$$v < \frac{2}{3} V,$$

أي أنّ

$$v + \varepsilon = \frac{2}{3} V, (\varepsilon > 0).$$

لِنَجْعَلْ u_n الجُزْءَ من V_n المَوْجودَ خارِجَ الكُرَةِ ولْنَفْتَرِضْ أنّ الشَكْلَ يُمَثِّلُ المَرْحَلَةَ حَيْثُ تُحَقِّقُ التَجْزِئَةُ الشَرْطَ

$$u_n < \varepsilon.$$

فيَصيرُ لَدَيْنا

$$v + u_n < \frac{2}{3} V.$$

لِنَجْعَلْ $C_n = v + u_n$، فإذاً C_n هُوَ حَجْمُ مَجْموعِ أُسْطُوانَاتٍ لها ارتفاعٌ واحِدٌ. واسْتِناداً إلى *(3)* وَ *(4)*، يَكونُ لَدَيْنا

$$PU^2 + IK^2 + MN^2 > \frac{2}{3} (EB^2 + PQ^2 + IL^2 + MO^2) - \frac{2}{3} EA^2$$

وَ

$$PU^2 + IK^2 + MN^2 + EA^2 > \frac{2}{3} (EB^2 + PQ^2 + IL^2 + MO^2) + \frac{1}{3} EA^2 ;$$

ويَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$PU^2 + IK^2 + MN^2 + EA^2 > \frac{2}{3} (EB^2 + PQ^2 + IL^2 + MO^2),$$

غَيْرَ أنّ

$$C_n = \pi (EB^2 + PU^2 + IK^2 + MN^2).EP,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$C_n > \frac{2}{3} V,$$

وهَذا مُحالٌ، فإذاً

$$v = \frac{2}{3} V$$

وبذَلِكَ تَكونُ القَضِيَّة قد أُثْبِتَت.

٢–٢ النصوص المخطوطيّة

٢–٢–١ *مقالةٌ لِلحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ في مِساحَةِ المُجَسَّمِ المُكافِئِ*

٢–٢–٢ *قولٌ لِلحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ في مِساحَةِ الكُرَةِ*

٢–٢–٣ *قولٌ لِلحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ في قِسْمَةِ المِقْدارَيْنِ المُخْتَلِفَيْنِ المَذْكورَيْنِ في الشَكْلِ الأوَّلِ من المَقالَةِ العاشِرَةِ من كِتاب إقليدس*

بسم الله الرّحمن الرّحيم – العزة لله تعالى ٥٦ – ظ

مقالة للحسن بن الحسن بن الهيثم
في مساحة المجسّم المكافئ

〈 فاتحة 〉

كلُّ قول وكلُّ تأليفٍ فإن لقائله ومؤلفه محركًا، هو الذي حرّكه لقول ما قاله وتأليفِ ما ألفه. وقد كنا نظرنا في كتابٍ لأبي الحسن ثابتِ بن قُرّة في مساحة المجسّم المكافئ، فوجدناه قد سلك فيه مسلكًا متعسفًا، وارتكب في تبيّنه طريقًا متكلفًا في الطول وفي الصعوبة معًا.

ثم وقع إلينا من بعد ذلك مقالة لأبي سهل ويجن بن رستم الكوهي في مساحة المجسّم المكافئ، فوجدناها خفيفة مختصرة، ووجدناه يذكر فيها أن السبب الذي حرّكه وبعثه على تأليف هذه المقالة هو نظرُه في كتاب أبي الحسن ثابت بن قرّة – في مساحة هذا المجسّم – واستصعابُه له واستبعادُه لطريقته. إلا أنا وجدنا مقالة أبي سهل، وإن كانت مُتَسَهَّلة مخففة، فإنما بُيّن فيها مساحةُ أحدِ نوعي المجسّم المكافئ.

وذلك أن المجسّم المكافئ ينقسم إلى نوعين سنجدها فيما بعدُ: أحدُهما قريبٌ متيسّر، والآخر صعبٌ متعسّر. ووجدنا أبا سهلٍ قد قَصَرَ مقالته على مساحة النوع المتيسّر، وأعرضَ 〈عن〉 ذكر النوع الثاني.

فلما وجدنا هذين القولين على الصفة التي شرحناها حركتنا هذه الحال على تأليف هذه المقالة. فاعتمدنا فيها أن نستوعب الكلامَ في مساحة نوعي هذا المجسّم، ونستوفي جميع المعاني التي

5 محركًا: محرك / ما (الثانية): قد تقرأ «وما» – 7 تبيّنه: مهملة – 11 أنا: اذا – 17 نستوعب: يستوعب، فضلنا صيغة جمع المتكلم بدليل قوله بعد ذلك «ونتحرّى». استوعب الكلام أي جعله شاملاً / نستوفي: يستوفي، فضلناها للسبب نفسه.

تتعلق بمساحتها. ونتحرّى مع ذلك – في جميع ما نذكره ونبيّنه – أخْصَرَ الطرق التي بها يتم – مع الاستقصاء – بيانُه، وأوجزَ المقاييس التي بها يتّضح – مع استيفاء المعاني – برهانُه.

وهذا حين ابتدأنا بالكلام فيه، واللّه الموفق والمعين على ما يرضيه.

كلُّ شكلٍ مسطح، نفرض في سطحه خطًا مستقيمًا، ونثبت الخط حتى لا يتغير وضعه، ويُدار الشكلُ حول ذلك الخط إلى أن يعود إلى وضعه الذي كان عليه، فإنه يحدث باستدارته جسمًا مُصْمَتًا.

فكلُّ قطعة من قِطْع مكافئ إذا فُرض في سطحها خطٌّ مستقيم، وأثبت الخط حتى لا يتغيّر وضعُه، وأديرت القطعةُ حول ذلك الخط إلى أن تعود إلى وضعها الذي كانت عليه، فإنها تُحدث باستدارتها جسمًا مُصْمَتًا. والجسم الذي يحدث على هذه الصفة يسمى المجسّمَ المكافئ.

وكلُّ خط يُفرض في سطح قِطْع مكافئ، فإنه إما أن يكون موازيًا لقطر القطعة، التي يُفرض فيها، أو القطرِ نفسه، وإما أن يَلْقى القُطرَ، إما في الحال وإما إذا أُخرجا على استقامة. فإن كان موازيًا للقطر فهو أيضًا قطرٌ، وإن كان يلقى القطرَ فهو يلقى القِطْعَ على نقطتين، وإذا كان يلقى القطع على نقطتين فهو خط ترتيب لقطر من أقطار القِطْع، كما بيّن جميع ذلك أبلونيوسُ الفاضل في كتابه في المخروطات.

فجميعُ الخطوط المستقيمة – التي تُفرض في سطح قطعة من قطع مكافئ – تنقسم إلى نوعين، هما الأقطار وخطوطُ الترتيب. وإذا كان ذلك كذلك، فجميع المجسّمات المكافئة – التي تحدث من حركة القِطع المكافئ حول خطٍّ من الخطوط المستقيمة التي تُفرض في سطحه – تنقسم إلى نوعين : أحدهما المجسّمات التي تحدث من حركة القِطْع حول أقطاره، والآخر المجسّمات التي تحدث من حركة القِطع حول خطوطِ ترتيبه. فلْنبحث الآن عن مساحة هذين النوعين، ولنقدم لذلك مقدّمات.

أما أحدُ النوعين، وهو الذي يحدث من حركة القطع حول أقطاره، فليس يحتاج إلى شيء من المقدّمات. وهذا النوع هو الذي ذكرنا في صدر المقالة أنه سهلٌ متيسّر. وأما النوع الآخر، وهو الذي يحدث من حركة القطع حول خطوط ترتيبه، وهو أصعبُ النوعين، فهو يحتاج إلى مقدّمات عددية.

1 تتعلق : يتعلق – 2 استيفاء : غير مقروءة وتبدو هكذا من السياق – 3 ابتدأنا : لعل الصواب «ابتدائنا»، ولكن الرسم في المخطوط لا يحتمل ذلك ولهذا أبقيناها على حالها / بالكلام : الميم ناقصة / والله : وبالله – 4 خطًا مستقيمًا : خط مستقيم – 8 تعود : يعود – 9 تحدث : يحدث – 13 بيّن : تبين – 15 تنقسم : ينقسم – 17 تحدث : يحدث / تفرض : يفرض – 18 تنقسم : ينقسم / تحدث : يحدث – 19 تحدث : يحدث / فلنبحث : فليبحث.

فمنها أن الأعداد التي أولها الواحد، ثم تتزيّد بواحدٍ واحدٍ، إذا فُرض منها أعداد كم كانت / ٥٧ - و وأُخذ نصفُ أعظمها ونصفُ الواحد – الذي هو أولها – وجُمعا، وضُرب مجموعها في العدد الأخير – الذي هو أعظمها – كان الذي يخرج هو مجموعَ جميع تلك الأعداد.

وأن الأعداد المتوالية، إذا أُخذ ثلث أعظمها وثُلثُ الواحدِ وجُمعا، وضُرب مجموعُها في العدد الأخير الذي هو أعظمها، ثم أضيفَ إلى العدد الأعظم نصفُ الواحد، وضُرب ذلك في الذي كان خرج من الضرب الأول، كان الذي يخرج من هذا الضرب هو مجموع مربعات تلك الأعداد.

وأن الأعداد المتوالية، إذا أُخذ ربعُ أعظمها وأضيف إليه ربع الواحد، ثم ضُرب ذلك في العدد الأعظم، ثم زيد على العدد الأعظم واحد، وضُرب ذلك في العدد الأعظم، ثم ضُرب ما اجتمع من هذا الضرب فيما كان خرج من الضرب الأول، فإن الذي يجتمع هو مجموعُ مكعبات الأعداد المتوالية.

وأن الأعداد المتوالية، إذا أُخذ خُمْسُ أعظمِها وأضيف إليه خُمْسُ الواحد، وضُرب مجموعُ ذلك في العدد الأعظم، ثم أضيف إلى العدد الأعظم نصفُ الواحد، وضرب ذلك فيما كان خرجَ من الضرب الأول، فما خرج حُفظ، ثم أضيف إلى العدد الأعظم واحد، وضرب ذلك في العدد الأعظم، فما خرج نقص منه ثلث واحد، فما بقي ضُرب في الذي كان حُفظ، فإن الذي يخرج من مجموع ذلك هو مجموع مربعات مربعات الأعداد المتوالية.

فلنبيّن أولاً جميع هذه المقدمات بالبرهان.

⟨مقدّمات⟩

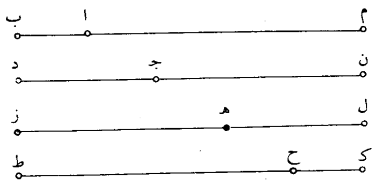
⟨آ⟩ فليكن أعداد ا ب جـ د هـ ز ح ط أعدادًا متوالية، وليكن ا ب واحدًا والباقية متزيّدة بواحد واحد.

فأقول: إنه إذا أُخذ نصف ح ط، وأضيف إليه نصفُ الواحد، وضُرب الجميع في عدد ح ط، فإن الذي يكون من ذلك هو مجموعُ أعداد ا ب جـ د هـ ز ح ط.

1 تتزيّد: بمعنى «زاد» و«تزايد» ويدل على الزيادة المتدرّجة حتى يبلغ منتهاه، ورسمها في المخطوط: يتريد – 9 واحد: واحدا – 15 واحد: واحدا.

برهان ذلك: أنا نضم إلى هذه الأعداد أعدادًا أُخَرَ متوالية مبتدئة من الواحد متزيّدة بواحد واحد، ونجعل ترتيبها بالعكس من ترتيب الأعداد الأول، وليكن ك ح ل هـ ن جـ م ا، وليكن ك ح واحدًا، والباقية متزيّدة بواحد واحد. فلأن ح ط يزيد على هـ ز بواحد، وك ح واحد، يكونُ ك ط يزيد على هـ ز باثنين. ول هـ اثنان، فـ ل ز مثل ك ط. ولأن ح ط يزيد على جـ د باثنين يكون ك ط يزيد على جـ د بثلاثة. ون جـ ثلاثة، فـ ن د مثل ك ط. وكذلك يتبين أن م ب مثل ك ط. فجميع أعداد م ب ن د ل ز ك ط متساوية. والأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد، المتزيّدة بواحد واحد، يكون عددها هو عدّةَ ما في العدد الأخير منها من الآحاد، فعدة أعداد ا ب جـ د هـ ز ح ط هو عدة ما في ح ط من الآحاد، وعدة أعداد ا ب جـ د هـ ز ح ط هو عِدّةُ أعداد م ب ن د ل ز ك ط. فعدّة أعداد م ب ن د ل ز ك ط المتساوية هو عِدّة ما في ح ط من الآحاد. فإذا ضُرب عدد ك ط في آحاد ح ط كان الذي يخرج من الضرب هو مجموعَ أعداد م ب ن د ل ز ك ط. وأعداد ا ب جـ د هـ ز ح ط متوالية مبتدئة من الواحد متزيّدة بواحدٍ واحد. وأعداد ك ح ل هـ ن جـ م ا أيضًا متوالية مبتدئة من الواحد متزيّدة بواحد واحد، وعِدّةُ هذه الأعداد كعدة الأعداد الأُوَل، فهي مساوية لها. فمجموع الجميع هو ضعف ⟨مجموع⟩ أعداد ا ب جـ د هـ ز ح ط. فهذه الأعداد ⟨مجموعة⟩ إذن هي نصفُ مجموع أعداد م ب ن د ل ز ك ط؛ ⟨وك ط⟩ في آحاد ح ط هو مجموعُ هذه الأعداد، فَضربُ نصفِ ك ط في ح ط هو مجموعُ أعداد ا ب جـ د هـ ز ح ط. وط ك هو عددُ ح ط – الذي هو آخِرُ الأعداد المتوالية – وك ح هو الواحد، فنصف / ك ط هو نصف ح ط مع نصف الواحد. ظ - ٥٧

وكذلك يتبيّن في جميع الأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد كم كانت.



1 أعدادًا: أعداد – 4 اثنان: اثنين – 6 ل ز: ل ن.

فالأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد المتزيّدة بواحد واحد، إذا أخذ نصفُ أعظمها، وأضيف إليه نصفُ الواحد، وضُرب ذلك في العدد الأعظم، كان الذي يخرج من الضرب هو مجموعَ الأعداد المتوالية من الواحد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ويستبين من هذا البيان أن مجموع الأعداد المتوالية مساوٍ لنصف مربع العدد الأعظم ولنصف العدد نفسِه. وذلك أن ضرب العدد الأخير في نصفه هو نصفُ مربعه، وضَرْبَه في نصف الواحد هو نصفُ العدد نفسه.

〈ب〉 وأيضًا فليكن الأعدادُ المتوالية ا ب ب جـ جـ د د هـ على الوضع الذي في هذه الصورة، أعني صورةَ الشكل الثاني. ونجعلُ أعداد ب ز جـ ح د ط هـ ك أيضًا أعدادًا متوالية مبتدئةً من الواحد، فيكون ا ب مثل ب ز وب جـ مثل جـ ح وجـ د مثل د ط ود هـ مثل هـ ك. ونضيف إلى كل واحد من أعداد ب ز جـ ح د ط هـ ك واحدًا، وليكن آحاد ف ز ن ح م ط ل ك. فضَرْبُ ا ب في ب ف هو ضرب ا ب في ب ز وضرب ا ب في ز ف. وضرب ا ب في ب ز هو مربع ب ز، وضرب ا ب في ز ف هو ا ب نفسُه، لأن ز ف واحد. وضرب ا جـ في جـ ن هو ضرب ا جـ في جـ ح وضرب ا جـ في ح ن. فأما ضرب ا جـ في ح ن فهو ا جـ نفسه، لأن ح ن واحد. وضرب ا جـ في جـ ح هو ضرب ب جـ في جـ ح وضرب ا ب في جـ ح. وضرب ب جـ في جـ ح هو مربع جـ ح، لأن ب جـ مثل جـ ح. فضرب ا جـ في جـ ن هو ا جـ نفسُه ومربع جـ ح وضرب ا ب في جـ ح. وضرب ا ب في جـ ح هو ا ب في ب ف، لأن ب ف مثل جـ ح. وذلك أن ب ف مساوٍ لـ ب جـ لأن ب ف يزيد على ب ز المساوي لـ ب ا واحدًا وب جـ يزيد على ا ب واحدًا، وب جـ مساوٍ لـ جـ ح، فـ ب ف مساوٍ لـ جـ ح.

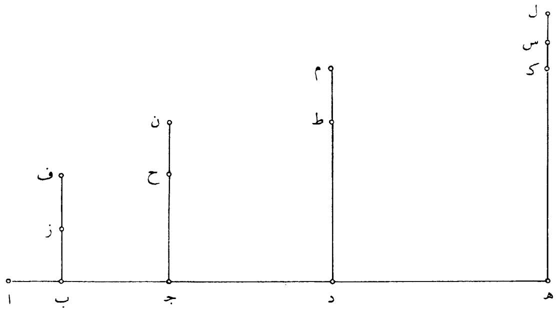
وقد تبين 〈أن ضرب〉 ا ب في ب ف هو مربعُ ب ز وا ب نفسُه. فضرب ا جـ في جـ ن هو مربع ب ز ومربع جـ ح وا ب نفسه وا جـ نفسه.

وأيضًا فإن ضرب ا د في د م هو ضرب ا د في د ط وا د في ط م. وا د في ط م هو ا د نفسه، لأن ط م واحد. وا د في د ط هو جـ د في د ط وا جـ في د ط. وجـ د في د ط هو مربع د ط، وا جـ في د ط هو ا جـ في جـ ن، لأن د ط مثل جـ ن؛ وذلك أن

4 مساوٍ: مساوي، ولن نشير إليها فيما بعد – 8 أعدادًا: أعداد – 9 مثل (الثالثة): مكررة – 10 ف ز: ف ن – 20 تبين: يتبين.

جـ ن يزيد على جـ ح المساوي لـ جـ ب واحدًا، فهو مساوٍ لـ جـ د. وجـ د مساوٍ لـ د ط، ف ن جـ مساوٍ لـ د ط. فضرب ا د في د م هو ا د نفسه ومربع د ط وضرب ا جـ في جـ ن. وقد تبيّن أن ضرب ا جـ في جـ ن هو مربع ح جـ ومربع ب ز وا جـ نفسه وا ب نفسه. فضرب ا د في د م هو مربع د ط ومربع جـ ح ومربع ب ز وا د نفسه وا جـ نفسه وا ب نفسه.

وبمثل ذلك يتبيّن أن ضرب ا هـ في هـ ل هو ا هـ نفسُه ومربع هـ ك وضرب ا د في د م. وقد تبيّن أن ضرب ا د في د م هو مربعُ د ط ومربع جـ ح ومربع ب ز وا د نفسه وا جـ نفسه وا ب نفسه. فضرب ا هـ في هـ ل هو مربع هـ ك ومربع د ط ومربع جـ ح ومربع ب ز وا هـ نفسه وا د نفسه وا جـ نفسه وا ب نفسه. وا هـ نفسه هو مجموع الأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد المتزيّدة بواحد واحد التي آخرها د هـ المساوي لـ هـ ك. ف ا هـ هو نصف مربع ك هـ ونصف ك هـ كما تبيّن في عقيب الشكل الأول. وكذلك ا د هو نصفُ مربع د ط ونصف د ط؛ وكذلك / ا جـ هو نصفُ مربع جـ ح ونصف جـ ح. وكذلك ا ب هو نصف مربع ب ز ٥٨ - و
ونصف ب ز. فضرب ا هـ في هـ ل هو مجموعُ مربعات هـ ك د ط جـ ح ب ز وأيضًا أنصافُ مربعاتها وأنصافُها أنفسها. و⟨مجموع⟩ أنصاف أعداد هـ ك د ط جـ ح ب ز هو نصف ا هـ، لأن ا هـ هو مجموع هذه الأعداد. فضرب ا هـ في هـ ل هو مربعات الأعداد المتوالية التي آخرها ك هـ، وأنصاف مربعاتها، ونصف ا هـ.



6 تبيّن: يتبين – 13 أنصاف مربعاتها: ف مربعاتها.

ونقسم ل ك بنصفين على نقطة س ، فيكون ضَرْبُ ا ه في ه ل هو ا ه في ه س وا ه في س ل . وضَرْبُ ا ه في س ل هو نصف ا ه ، لأن س ل هو نصف واحد. وقد كان ضربُ ا ه في ه ل هو مربعاتِ الأعداد المتوالية وأنصافَ مربعاتها ونصفَ ا ه . فيبقى ضربُ ا ه في ه س هو مربعاتِ الأعداد المتوالية التي آخرها ك ه وأنصافَ مربعاتها. فضربُ ثلثي ا ه في ه س هو مجموعُ مربعات الأعداد المتوالية التي آخرها ك ه . وقد تبيّن في الشكل الأول أن ضربَ نصفِ ل ه – الذي هو العددُ الأخيرُ مع الواحد – في ك ه هو جميعُ ا ه . فضرب ثلثي نصف ل ه – الذي هو ثلث ل ه – في ك ه هو ثلثا ا ه . فإذا أُخذ ثلثُ ل ه ، الذي هو ثلث ك ه – الذي هو العدد الأعظم – وثلث الواحد، وضُرب ذلك في ك ه – الذي هو العدد الأعظم – ثم ضُرب ما اجتمع في ه س – الذي هو العدد الأعظم مع نصف الواحد – كان الذي يخرج من الضرب هو مجموع مربعاتِ ه ك د ط جـ ح ب ز ، التي هي الأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد المتزيّدة بواحدٍ واحد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ويستبين من هذا البرهان أن مجموع مربعات الأعداد المتوالية هو ثلث مكعب أعظمها ونصفُ مربعه وسدسُ العدد نفسه: وذلك أن ضرب ثلث ل ه في ه ك هو ثلثُ مربع ه ك وثلث ه ك . فإذا ضُرب ذلك في ه س كان ضرب ثلث مربع ه ك في ه س ثلثَ مكعب ه ك وسدسَ مربع ه ك ، لأن ك س نصف واحد. وثلث ه ك في ه س هو ثلث مربع ه ك وسدس ه ك نفسه. فضرب ثلث ل ه في ه ك ثم ما خرج في س ه ، هو ثلث مكعب ه ك ونصف مربعه وسدس ه ك نفسه.

– جـ – وأيضـًا فإنا نجعل أعداد ا ب ب جـ جـ د د ه هي الأعدادَ المربعاتِ المتوالية؛ فيكون ا ب هو الواحدَ – الذي هو مربعُ الواحد – وب جـ هو مربعَ الاثنين وجـ د هو مربع الثلاثة ود ه مربعُ الأربعة. ونجعل أعداد ب ز جـ ح د ط ه ك هي الأعدادَ المتوالية أنفسَها. فيكون ب ز واحدًا وجـ ح اثنين ود ط ثلاثة وه ك أربعة. فيكون ضربُ د ه في ه ك هو مكعبَ ه ك ، وضرب جـ د في د ط هو مكعب د ط ، وكذلك الباقية. ونضيف إلى كل واحد من الأعداد المتوالية الآحاد كما في الصورة. فيكون ضرب ا ه في ه ل هو ضرب ا ه في ه ك

4 وأنصاف: ونصاف – 7 ثلثا: ثلثي / ل ه: ا ه – 9 ثم ضرب: ثم ضربت.

وا هـ في ك ل. وا هـ في ك ل هو ا هـ نفسه، لأن ك ل واحد. وضرب ا هـ في هـ ك هو ضرب د هـ في هـ ك وا د في هـ ك. وضرب د هـ في هـ ك هو مكعب هـ ك، لأن د هـ هو مربع هـ ك. وضرب ا د في ⟨هـ ك هو ضرب ا د في⟩ د م، لأن د م مثل هـ ك كما تبيّن من قبل. فضرب ا هـ في هـ ل هو ا هـ نفسه ومكعب هـ ك وضرب ا د في د م.

وبمثل هذا البيان يتبيّن أن ضرب ا د في د م هو ا د نفسُه ومكعب د ط وضرب ا جـ في جـ ن. وضرب ا جـ في جـ ن هو ا جـ نفسه ومكعب جـ ح وضرب ا ب في ب ف؛ ⟨وضرب ا ب في ب ف⟩ هو ا ب نفسه ومكعب ب ز. فضرب ا هـ في هـ ل هو مكعب هـ ك ومكعب د ط ومكعب جـ ح ومكعب ب ز وا هـ نفسه وا د نفسه وا جـ نفسه وا ب نفسه. لكن ا هـ هو مجموع المربعات المتوالية، فهو ثلثُ مكعب هـ ك ونصفُ مربعه وسدسُ هـ ك نفسِه، كما تبيّن فيما مضى. وكذلك ا د هو ثلثُ مكعب د ط ونصفُ مربعه وسدسُ د ط نفسِه؛ وكذلك ا جـ هو ثلث مكعب جـ ح ونصفُ مربعه وسدسُ جـ ح / ٥٨ – ظ نفسِه؛ وكذلك ا ب هو ثلث مكعب ب ز ونصفُ مربعه وسدسُ ب ز نفسِه، لأن الواحد بهذه الصفة. فضربُ ا هـ في هـ ل هو مجموع مكعبات الأعداد المتوالية – التي آخرها هـ ك – وأثلاث مكعباتها وأنصاف مربعاتها وأسداس الأعداد أنفسها.

وضرب ا هـ في هـ ل هو ضرب ا هـ في هـ س، وا هـ في س ل. لكن ا هـ في س ل هو نصف ا هـ، لأن س ل نصف واحد. ونصف ا هـ هو أنصاف مربعات جميع الأعداد المتوالية التي آخرها هـ ك. ويبقى ضرب ا هـ في هـ س هو مكعباتُ جميع هذه الأعداد وأثلاثُ مكعباتها وأسداسُ الأعداد أنفسها. ولكن ا هـ هو الذي يجتمع من ضربِ ثلثِ ل هـ في هـ ك ثم ما اجتمع في هـ س. فضرب ثلاثة أرباع ثلث ل هـ – الذي هو ربع ل هـ – في هـ ك ثم ما اجتمع في هـ س هو ثلاثة أرباع ا هـ. وثلاثة أرباع ا هـ إذا ضرب في هـ س، كان مجموع مكعبات الأعداد المتوالية وأثمان الأعداد أنفسها؛ لأن جميع ا هـ إذا ضُرب في هـ س كان منه مجموعُ مكعبات هذه الأعداد وأثلاث مكعباتها وأسداس الأعداد أنفسها. فإذا أخذ ربع ل هـ – الذي هو ربعُ هـ ك وربع الواحد – وضُرب ذلك في

4 ا د: د م – 8 جـ ح: الجيم مطموسة – 9 هو: هو هو، والثانية فوق السطر، والتعبير «هو هو» جائز، ولكن لم يلجأ إليه ابن الهيثم في موضع آخر – 10 مضى: أي الشكل الثاني.

هـ ك، ثم ضُرب ما خرج في هـ س، ثم ضُرب ما اجتمع في هـ س أيضًا، كان الذي يجتمع هو مجموعَ مكعبات أعداد هـ ك د ط جـ ح ب ز ‹و›ثمن مجموع هذه الأعداد. ولكن ضَرْبَ ربع ل هـ في هـ ك، ثم ما اجتمع في هـ س، ثم ما اجتمع في هـ س، هو ضربُ ربع ل هـ في هـ ك، ثم ما اجتمع في مربع هـ س. لأنه إذا كانت ثلاثةُ أعداد فإن ضرب الأول في الثاني ثم ما اجتمع في الثالث هو مثل ضرب الثالث في الثاني ثم ما اجتمع في الأول. والذي يخرج من ضرب ربع ل هـ في هـ ك هو عدد ما، وهـ س عدد ثان، وهـ س أيضًا عدد ثالث. فإذا ضُرب ربع ل هـ في هـ ك، ثم ما خرج في مربع هـ س، كان الذي يخرج هو مجموعَ مكعبات أعداد هـ ك د ط جـ ح ب ز مع ثُمن مجموع هذه الأعداد. وقد تبيّن أن ضرب نصف ل هـ في هـ ك هو مجموعُ هذه الأعداد. فضربُ ربع ل هـ في هـ ك هو نصفُ مجموع هذه الأعداد. وضرب هذا النصف في ربع واحد هو ثُمن مجموع الأعداد. وإذا كان ضرب ربع ل هـ في هـ ك، الذي هو نصفُ مجموع الأعداد، إذا ضُرب في مربع هـ س، كان الذي يخرج هو مجموع مكعبات الأعداد المتوالية مع ثمن مجموعها. فإنه إذا نُقص من مربع هـ س ربع واحد وضُرب الباقي في الذي يخرج من ضرب ربع ل هـ في هـ ك، الذي هو نصف مجموع الأعداد، كان الذي يجتمع من ذلك هو مجموعَ مكعبات الأعداد المتوالية فقط. ولكن مربع هـ س هو ضربُ ل هـ في هـ ك مع مربع ك س، لأن ذلك يتبيّن من تضعيف هذه الأعداد بعضِها ببعضٍ. ومربع ك س هو ربع واحد، لأن ك س هو نصف واحد. فإذا نقص من مربع هـ س ربع واحد، كان الذي يبقى هو ضرب ل هـ في هـ ك. فإذا ضرب ربع ل هـ في هـ ك ثم ضرب ما خرج في مضروب ل هـ في هـ ك، كان الذي يجتمع من ذلك هو مجموع مكعبات هـ ك د ط جـ ح ب ز.

فالأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد المتزيدة بواحد واحد – كم كانت – إذا أُخذ ربعُ أعظمِها، وأضيف إليه ربع واحدٍ، وضرب ذلك في العدد الأعظم، ثم ضرب ما خرج في مضروب العدد الأعظم في العدد الذي يزيد عليه بواحد، كان الذي يجتمع من جميع ذلك هو مجموعَ مكعبات الأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ويستبين من هذا البيان أن مجموع مكعبات الأعداد المتوالية هو ربعُ مربعِ مربعِ أعظمِها ونصفُ مكعبه وربعُ مربعه.

2 ب ز: ب د – 6 ثان: ثاني – 11 هـ س: هـ ز – 16 ببعض: المقصود هـ س = هـ ك + ك س، ومنه هـ س² = هـ ك (هـ ك + ٢ ك س) + ك س²، ومنه هـ س² = هـ ل. هـ ك + ك س² – 22 يزيد: تزيد.

وذلك أن ضرب ربع ل ه في ه ك هو ربع مربع ه ك وربع ه ك نفسه، لأن ربع ل ه هو ربعُ ه ك وربعُ الواحد. وضرب ربع ه ك في ه ك هو ربع مربع ه ك؛ وربع الواحد في ه ك هو ربع ه ك نفسه. وضرب ل ه / في ه ك هو مربع ه ك وه ك نفسه. وضرب ٥٩ - و مربع ه ك في ربع مربع ه ك هو ربع مربع ‹مربع› ه ك. وضرب ه ك نفسه في ربع مربع ه ك هو ربع مكعب ه ك. وضرب مربع ه ك أيضًا في ربع ه ك نفسه هو ربع مكعب ه ك. وضرب ه ك نفسه في ربع ه ك هو ربع مربع ه ك. فالذي يجتمع من ضرب ربع مربع ه ك وربع ه ك نفسه في مضروب ل ه في ه ك هو ربع مربع مربع ه ك ونصف مكعب ه ك وربع مربع ه ك. فمجموع مكعبات الأعداد المتوالية هو ربعُ مربعِ مربعِ أعظمِها ونصفُ مكعبِه وربعُ مربعِه.

‹د› وأيضًا فإنا نجعل أعداد ا ب ب ج ج د د ه هي الأعدادَ المكعباتِ المتواليةَ، ونجعل أعداد ب ز ج ح د ط ه ك هي الأعدادَ المتوالية أنفسَها، فيكون ضرب د ه في ه ك هو مربعَ مربع ه ك، ويكون ضرب ج د في د ط هو مربعَ مربع د ط، ويكون ضرب ب ج في ج ح هو مربع مربع ج ح، ويكون ضرب ا ب – الذي هو الواحدُ – في ب ز – الذي هو الواحدُ أيضًا – هو مربعُ مربع الواحد. ونضيف إلى كل واحد من هذه الأعدادِ المبتدئةِ ‹من الواحد› واحدًا، كما في الصورة. فيكون ضرب ا ه في ه ل هو ضربَ ا ه في ه ك وا ه في ك ل. وا ه في ك ل هو ا ه نفسُه، وا ه في ه ك هو ضربُ د ه في ه ك وا د في ه ك. وضرب د ه في ه ك هو مربعُ مربع ه ك، لأن د ه هو مكعبُ ه ك، وا د في ه ك هو ا د في د م، ‹لأن د م› مثل ه ك. فضرب ا ه في ه ل هو ا ه نفسه ومربعُ مربع ه ك وضربُ ا د في د م. وضرب ا د في د م هو ا د نفسه ومربع مربع د ط وا ج في ج ن. وكذلك الباقيةُ، لأنه يتبيّن كما تبيّن. فضرب ا ه في ه ل هو مربعاتُ مربعاتِ أعدادِ ه ك د ط ج ح ب ز وأعداد ا ه ا د ا ج ا ب أنفسها. وقد تبيّن أن ا ه هو ربعُ مربع ‹مربع› ه ك ونصف مكعب ه ك وربع مربع ه ك، لأن ا ه هو مجموعُ مكعبات الأعداد المتوالية التي أعظمُها ه ك، وكذلك ا د هو ربعُ مربع مربع د ط ونصفُ مكعبه وربعُ مربعه. وكذلك ا ج هو ربعُ مربع مربع ج ح ونصفُ مكعبه وربعُ مربعه، وكذلك ا ب – الذي هو الواحد – هو ربعُ مربع مربع ب ز ونصف

8 وربع: وبع – 18 ا د: د ط.

مكعبه وربع مربعه. فضرب اهـ في هـ ل هو مربعاتُ مربعات جميع الأعداد المتوالية – التي أعظمها هـ ك – وأرباع مربعات مربعاتها وأنصاف مكعباتها وأرباع مربعاتها. فإذا ضُرب أربعة أخماس اهـ في هـ ل، كان الذي يخرجُ هو مربعاتِ مربعاتِ الأعدادِ المتوالية وخمسي مكعباتها وخمسَ مربعاتها. وضرب أربعة أخماس اهـ في س ل – الذي هو نصف واحد – هو خمسا اهـ – الذي هو مجموع مكعبات هذه الأعداد المتوالية. فيبقى مضروب أربعة أخماس اهـ في هـ س هو مربعات مربعات الأعداد المتوالية وخمس مربعاتها. وا هـ هو الذي يجتمع من ضرب ربع ل هـ في هـ ك، ثم ما خرج في مضروب ل هـ في هـ ك. فإذا ضرب أربعة أخماس ربع ل هـ – الذي هو خمس ل هـ – في هـ ك، ثم ضرب ما خرج في مضروب ل هـ في هـ ك، كان الذي يخرج هو أربعةَ أخماسِ اهـ. فإذا ضرب ذلك في هـ س، كان الذي يخرج هو مجموعَ مربعاتِ مربعاتِ الأعداد المتوالية وخُمسَ مربعاتها. فإذا ضرب خُمسُ ل هـ في هـ ك، ثم ما خرج في مضروب ل هـ في هـ ك، ثم ما خرج في هـ س، كان الذي يجتمع هو مربعاتِ مربعاتِ الأعداد المتوالية وخُمس مربعاتها. وضَرْبُ الأعداد بالتقديم والتأخير واحدٌ. فإذا ضرب خمس ل هـ في هـ ك، ثم ما اجتمع في هـ س، ثم ما اجتمع في مضروب ل هـ في هـ ك، كان الذي يخرج هو مربعاتِ مربعات الأعداد المتوالية وخُمسُ مربعاتها.

لكن ضَرْبَ ثُلثِ ل هـ في هـ ك، ثم ما خرج في هـ س هو مجموعُ مربعاتِ الأعداد المتوالية التي أعظمُها / هـ ك. فضرب خمس ل هـ في هـ ك، ثم ما خرج في هـ س هو ثلاثة أخماس ٥٩ – ظ
مربعات هذه الأعداد المتوالية، لأن الخُمسَ هو ثلاثة أخماس الثلث. فضرب ثلاثة أخماس مربعات الأعداد المتوالية – التي آخرها هـ ك – في مضروب ل هـ في هـ ك هو مربعاتُ مربعاتِ الأعداد المتوالية مع خُمسِ مربعاتها. لكن ضرب ثلثٍ واحدٍ في ثلاثة أخماس مربعاتها هو خُمْسُ مربعاتها. فإذا نقص من مضروب ل هـ في هـ ك ثلث واحد، ثم ضرب الباقي في ثلاثة أخماس مربعات هذه الأعداد المتوالية، كان الذي يخرج هو مربعات مربعات هذه الأعداد فقط. فضربُ خمس ل هـ في هـ ك، ثم ما خرج في هـ س، ثم ما خرج في مضروب ل هـ في هـ ك منقوصًا منه ثلثُ واحد، هو مجموع مربعات ⟨مربعات⟩ هذه الأعداد.

فالأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد المتزيّدة بواحد واحد، إذا أخذ خمس أعظمها وخمس الواحد، [وضرب ذلك في العدد الأعظم وخمس الواحد] وضرب ذلك في العدد الأعظم، ثم

2 وأنصاف: واضاف – 6 وخمس: وخمسي – 16 خمس: خمسي – 22 منقوصًا: منقوص.

ضرب ما خرج في العدد الأعظم مزيدًا عليه نصفُ واحدٍ، وحُفظ ذلك، ثم زيد على العدد الأعظم واحدٌ، وضُرب ذلك في العدد الأعظم، ونُقص مما خرج ثلثُ واحدٍ فقط، وضرب الباقي فيما كان حُفظ، فإن الذي يجتمع من ذلك هو مجموعُ مربعاتِ مربعاتِ الأعداد المتوالية؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

⟨هـ⟩ وأيضًا فليكن أعدادُ ا ب جـ د هـ ز ح ط ك ل مربعات الأعداد المتوالية، على تواليها. ونجعل كلَّ واحد من م ب ن د ف ز ع ط مساويًا لـ ك ل.

فأقول: إن مجموع مربعات ا م جـ ن هـ ف ح ع أقلُّ من ثلثِ وخُمْسِ مجموع مربعاتِ م ب ن د ف ز ع ط ⟨ك ل، وأكثرُ من ثلثِ وخمس مجموع مربعات م ب ن د ف ز ع ط⟩، وإن ⟨مجموع⟩ مربعات ا م جـ ن هـ ف ح ع ك ل أكثرُ من ثلثِ وخُمْسِ مربعات م ب ن د ف ز ع ط ك ل.

برهان ذلك: أنّا نجعل س ب ضعف م ب وس د ضعفَ ن د وس ز ضعفَ ف ز وس ط ضعفَ ع ط. فيكون ضرب س ح في ح ط مع مربع ح ع مساويًا لمربع ع ط، وضربُ س هـ في هـ ز مع مربع هـ ف مساويًا لمربع ف ز، وكذلك الباقيةُ. فإذا نُقص من مربع ع ط ضربُ س ح في ح ط كان الباقي هو مربعَ ح ع، وكذلك الباقيةُ. لكنه إذا نقص من ضرب س ط في ط ح مربعُ ح ط، كان الباقي هو ضربَ س ح في ح ط. وكذلك إذا نقص من ضرب س ز في ز هـ مربع ز هـ، كان الباقي هو ضربَ س هـ في هـ ز. وإذا نقص من ضرب س د في د جـ مربعُ د جـ، كان الباقي هو ضربَ س جـ في جـ د. وإذا نقصَ من ضرب س ب في ا ب المربع ب ا، كان الباقي هو ضربَ س ا في ا ب. لكن ضربَ س ط في ط ح وس ز في ز هـ وس د في د جـ وس ب في ب ا هو ضربُ س ط في مجموع ط ح ز هـ د جـ ب ا، الذي هو مجموعُ مربعاتِ الأعداد المتوالية. ومربع ط ح ومربع ز هـ ومربعُ د جـ ومربعُ ب ا هي مربعاتُ مربعاتِ الأعداد المتوالية. فإذا ضُرب ضعف ع ط، أعني ضعفَ ك ل، في مجموع مربعات الأعداد المتوالية التي آخرُها عددُ ح ط المربعُ، ثم نقصَ مما يجتمع مربعاتُ مربعات الأعداد المتوالية التي آخرُها ح ط، كان الباقي هو مجموعَ ضرب س ح في ح ط وس هـ في هـ ز وس جـ في جـ د وس ا في ا ب.

2 واحدٌ: واحدا – 11 س د: س هـ – 13 مساويًا: مساوي – 14 ح ع: ح ط – 17 ا ب: ت / ب ا: ت ا.

فإذا نقص هذا الباقي من مجموع مربعات ع ط ف ز ن د م ب المتساوية، كان الذي يبقى هو مربعاتِ ح ع ه ف جـ ن ا م مجموعةً.

ونجعل ص ق هو ضلعَ مربع ك ل. ونجعل ص ي واحدًا، فيكون ي ق هو ضلعَ مربع ح ط. ونقسم ص ي بنصفين على نقطة ش. فلأن ي ق هو ضلعُ مربع ح ط، يكون ي ق هو آخرَ الأعداد المتوالية التي مربعاتُها ا ب جـ د ه ز ح ط. وي ص واحد. فضربُ ثلثِ ص ق في ق ي، ثم ما خرج في ق ش، هو مجموع ا ب جـ د ه ز ح ط، التي هي المربعات المتوالية. فإذا ضُرب ثلثُ ص ق في ق ي، ثم ما خرج في ق ش، ثم ما خرج في ضعف ك ل، كان الذي / ٦٠ - و يجتمع هو مضروبَ ضعفِ ك ل في مجموع ا ب جـ د ه ز ح ط. وضربُ ثلثِ ص ق في ق ي ثم ما خرج في ق ش ثم ما خرج في ضعف ك ل مساوٍ لضرب ص ق في ق ي ثم ما خرج في ق ش ثم ما خرج في ثلث ضعف ك ل – الذي هو ثلثا ك ل. فضرب ص ق ⟨في ق ي⟩ ثم ما خرج في ق ش ثم ما خرج في ثلثي ك ل، هو ضربُ ضعفِ ك ل في مجموع ا ب جـ د ه ز ح ط – التي هي المربعاتُ المتوالية. وقد تبيّن فيما تقدم أن ضربَ خُمسِ ص ق في ق ش ثم ما خرج في ق ي ثم ما خرج في مضروب ص ق في ق ي منقوصًا منه ثلثُ واحدٍ، هو مربعاتُ مربعات الأعداد المتوالية. فهو ⟨مجموع⟩ مربعات ا ب جـ د ه ز ح ط التي هي مربعات الأعداد المتوالية. ونجعل ل خ هو مضروبَ ص ق في ق ي، ونجعل خ ذ ثلثَ واحدٍ. فيكون ضرب خُمسِ ص ق في ق ش ثم ما خرج في ق ي ثم ما خرج في ل ذ هو مجموعَ مربعاتِ ا ب جـ د ه ز ح ط. وضرب الأعداد بعضِها في بعضٍ بالتقديم والتأخير واحدٌ. فضرب ص ق في ق ش ثم ما خرج في ق ي ثم ما خرج في خمس ل ذ، هو مجموعُ مربعات ا ب جـ د ه ز ح ط. فإذا نقص مضروبُ ص ق في ق ش ثم ما خرج في ق ي ثم ما خرج في خمس ل ذ من مضروب ص ق في ق ش ثم ما خرج في ق ي ثم ما خرج في ثلثي ك ل، كان الباقي هو ضربَ س ح في ح ط وس ه في ه ز وس جـ في جـ د وس ا في ا ب. لكنه إذا نقص مضروبُ ص ق في ق ش ثم ما خرج في ق ي ثم ما خرج في خمس ل ذ من مضروب ص ق في ق ش ثم ما خرج في ق ي ثم ما خرج في ثلثي ك ل، كان الذي يبقى هو مضروبَ ص ق في ق ش ثم ما خرج في ق ي ثم ما خرج في خُمسٍ وسُدسٍ وعُشرِ ل ذ وفي ثلثي ك ذ.

1 ع ط: ع ز / ف ز: ف ط – 9 ق ش: ق س – 10 ثلثا: ثلثي – 11 ق ش: ق ى – 17 ق ش: ق س – 19 ق ش: ق س – 21 ق ش: ق س.

ونجعل ل ت هو مضروبَ ص ق في ق ش. فيبقى ت ك مساويًا لنصف ص ق، لأن ك ل هو مربعُ ص ق، فهو مضروبُ ص ق في ق ش وص ق في ص ش. وص ق في ص ش هو نصفُ ص ق، لأن ص ش هو نصفُ واحدٍ. فيكون ت خ هو أيضًا مساويًا ل ت ك، لأن خ ك هو مثل ص ق، لأن ت ك هو مضروبُ ص ق في ص ي الذي هو واحدٌ. فمضروبُ ص ق في ق ش ثم ما خرج في ق ي ثم ما خرج في خُمس وسُدس وعُشر ل ذ وفي ثلثي ك ذ، هو مضروب ل ت في خُمس وسُدس وعُشر ل ذ وفي ثلثي ك ذ ثم ما خرج في ق ي. لأن ل ت هو مضروب ص ق في ق ش، وثلثي ك ذ هو خمس وسدس وعشر ك ذ وخُمسه أيضًا، فمضروبُ ل ت في خمس وسدس وعشر ل ذ وخمس وسدس وعشر ك ذ – اللذين هما خمس وسدس وعشر ل ك – وفي خمس ك ذ، ثم ما اجتمع في ق ي، هو مضروبُ س ح في ح ط وس هـ في هـ ز وس جـ في جـ د وس ا في ا ب. وضرب ل ت في خمس وسدس وعشر ل ك هو ضرب ل ك في خمس وسدس وعشر ل ت، وضرب ل ت في خمس ك ذ هو ضربُ ل ت في خمسي ك ت وفي خمسي سُدسٍ واحدٍ، لأن ك ت نصفُ ك خ والسدسَ نصفُ خ ذ. فمضروب ك ل في خمس وسدس وعشر ل ت مع مضروب ل ت في خمسي ك ت وفي خُمسي سدس واحد – الذي هو ثلثا عُشرٍ واحدٍ – ثم ما اجتمع في ق ي، هو مجموعُ ضرب س ح في ح ط وس هـ في هـ ز وس جـ في جـ د وس ا في ا ب. ولأن أعداد ا ب جـ د هـ ز ح ط ك ل هي مربعاتُ الأعداد المتوالية. وص ق ضلع ك ل، يكون ص ق آخرَ الأعداد المتوالية التي هذه مربعاتُها. فيكون في ص ق من الآحاد مثل عدد تلك الأعداد، وعدد تلك الأعداد المتوالية هو عدد مربعاتها. فعدة ا ب جـ د هـ ز ح ط ك ل هي عدةُ ما في ص ق من الآحاد، وص ي واحد. ففي ق ي من الآحاد مثل عدة ا ب جـ د هـ ز ح ط. وعدة هذه الأعداد هي عدة م ب ن د ف ز ع ط المتساوية والمساوية ل ك ل./ فإذا ضُرب مربع ك ل في آحاد ق ي كان الذي يخرج ٦٠ - ظ هو مجموعَ مربعات أعداد ع ط ف ز ن د م ب. وقد تبيّن أنه إذا ضرب ك ل في خمس وسدس وعُشر ل ت، وأضيف إليه مضروب ل ت في خُمسي ك ت وثُلثي عُشر الواحد، ثم ضرب ما يجتمع من ذلك في ق ي، كان الذي يخرج هو مجموعَ ضرب س ح في ح ط وس هـ في هـ ز وس جـ في جـ د وس ا في ا ب. فإذا نُقص ضرب ك ل في خمس وسدس وعشر ل ت ول ت في خمسي ك ت وفي ثلثي عُشر واحد من مربع ك ل وضرب الباقي في ق ي، كان الذي يخرج هو

8 اللذين: اللذان – 9 س ح: السين ممحوة – 12 ك ت (الثانية): ك ب – 14 ثلثا: ثلثي – 18 هي: هو – 19 هي: هو – 20 والمساوية: والمتساوية – 21 ف ز: ك ز – 23 هـ ز: ص ز – 24 جـ د: جـ ز / ل ت (الثانية): ل ب – 25 مربع: ربع.

بقية مربعات ع ط ف ز ن د م ب التي هي مربعات م ا ن جـ ف هـ ع ح. لكن مربع ك ل إذا نُقص منه مضروب ك ل في خمس وسدس وعشر ل ت ومضروبُ ل ت في خمسي ك ت وثلثي عشر واحد، كان الذي يبقى هو مضروب ك ل في ثلث وخمس ل ت ومضروب ك ل في جميع ك ت، منقوصًا من الجميع مضروبُ ل ت في خمسي ك ت وثلثي عشر واحد. وجميع ك ت هو ثلثُ وخمسُ ك ت وخمسُ وسدسُ وعشرُ ك ت، فالذي يبقى من مربع ك ل هو مضروبُ ك ل في ثلث وخمس ك ل وخمسُ وسدسُ وعشرُ ك ت، منقوصًا من الجميع مضروبُ ل ت في خمسي ك ت وفي ثلثي عشر واحد. فإذا ضُرب ك ل في ثلث وخمس ك ل وفي خمس وسدس وعشر ك ت، ونقص منه مضروبُ ل ت في خمسي ك ت وفي ثلثي عشر واحد، وضرب الباقي في ق ي، كان الذي يخرج هو مجموعَ مربعاتِ م ا ن جـ ف هـ ع ح.

ونجعل نسبة ل ك إلى ك ت كنسبة ت ك إلى ك غ، فيكون نسبة ك ل إلى ل ت كنسبة ك ت إلى ت غ. فضرب ل ت في ت ك هو ضرب ك ل في ت غ، وضرب ل ت في خمسي ك ت هو ضرب ك ل في خمسي غ ت. ولأن نسبة ل ك إلى ك ت كنسبة ت ك إلى ك غ، يكون ضرب ل ك في ك غ مثل مربع ك ت. وك ت هو نصف ص ق كما تبيّن من قبل، فربعه هو ربع مربع ص ق. وك ل هو مربع ص ق، فربع ك ت هو ربع ك ل. فضرب ك ل في ك غ هو ربع ك ل، ف ك غ هو ربع واحد.

فنجعل غ ذ سدس واحد، فيكون ضربُ ل ت في ثلثي عُشر واحدٍ هو ضربَ ل ت في خمسي غ ذ. ونجعل نسبة غ ذ إلى ذ ض كنسبة ت ك إلى ك غ، التي هي نسبةُ ل ك إلى ك ت. فيكون نسبة ك ل إلى ل ت كنسبة ذ غ إلى غ ض. فضرب ل ت في [خمس] غ ذ هو ضربُ ك ل في ض غ، وضرب ل ت في خمسي غ ذ هو ضربُ ك ل في خمسي ض غ. فيكون ضرب ل ت في خمسي ك ت وفي ثلثي عُشر واحد هو ضربَ ك ل في خمسي ض ت.

ونجعل ت ظ ستة أسباع ت ض، فيكون نسبة ض ت إلى ت ظ كنسبة خمسٍ وسدسٍ وعشرٍ التي هي ١٤ من ٣٠ – إلى خُمْسَيْن، التي هي ١٢ من ٣٠. فيكون ضرب ك ل في خمسيْ ض ت هو ضربَ ك ل في خُمس وسدس وعشرت ظ. فيكون ضرب ل ت في خمسيْ

2 ل ت (الأولى والثانية): ل ب – 4 ك ت: ك ب / منقوصًا: منقوص / ك ت: ك ب – 6 وسدس: وسد / منقوصًا: منقوص – 7 ثلثي: ثلثا – 9 ع ح: ع هـ – 10 ك غ: ك ع – 11 ت غ: ك ع / ت غ: ك ع – 12 غ ت: مطموسة – 13 ك ت (الثانية): ك ب – 15 هو (الثانية): هى – 16 غ ذ: ع د / واحد: واخد – 17 ت ك: التاء مهملة / ك غ: ك ع – 19 ل ت: ل ب – 21 ت ظ: ث ظ / ض ت: الحروف مهملة / ت ظ: ث ظ – 22 خمسين: خمسي – 23 ت ظ: ت ط.

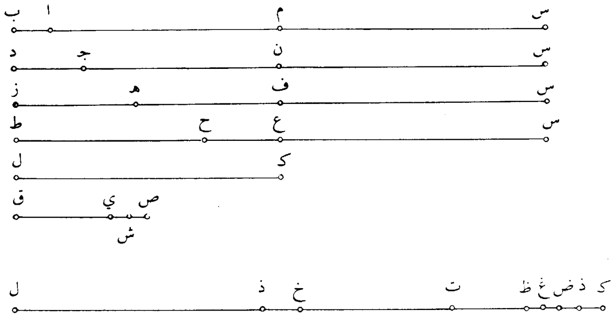
ك ت وفي ثلثيْ عشرِ واحدٍ هو ضربَ ك ل في خُمس وسدس وعشر ت ظ. وإذا نُقص من ضرب ك ل في خمس وسدس وعشر ك ت ضربُ ك ل في خمس وسدس وعشر ت ظ، كان الذي يبقى هو ضربَ ك ل في خمس وسدس وعشر ك ظ. فالذي يبقى من مربع ك ل – بعد أن ينقص منه مضروب ك ل في خمس وسدس وعشر ل ت ومضروب ل ت في خمسي ك ت وفي ثلثي عُشر واحد – هو مضروب ك ل في ثلث وخمس ك ل وفي خمس وسدس وعشر ك ظ. فإذا ضرب هذا في ق ي، كان الذي يخرج هو مجموعَ مربعات م ا ن ج ف ه ع ح. ومضروبُ ك ل في ثلث وخمس ك ل هو ثلثُ وخمسُ مربع ك ل. فإذا ضرب ذلك في ق ي، كان الذي يخرج هو ثلثَ وخمسَ مجموع مربعات ع ط ف ز ن د م ب، لأن عدة آحاد ق ي هي عدة هذه الأعداد. فمربعات م ا ن ج ف ه ع ح هو ثلثُ / ٦١ - و وخمسُ مربعات م ب ن د ف ز ع ط، مع مضروب ك ل في خمس وسدس وعشر ك ظ ثم ما خرج في ق ي. ومضروبُ ك ل في خُمسٍ وسدس وعشر ك ظ ثم ما خرج في ق ي هو مضروب خُمسٍ وسُدسٍ وعُشرِ ك ظ في ق ي ثم ما خرج في ك ل. وخمس وسدس وعشر ك ظ هو خمس وسدس وعشر ظ ض وخمسُ وسدسُ وعشر ض ذ وخمسُ وسدس وعشر ذ ك. ف ظ ض هو سُبع ض ت، لأن ت ظ ستةُ أسباع ض ت. وخمس وسدس وعشر السبع هو سبع الخمس والسدس والعشر، الذي هو أربعةَ عشرَ جزءًا من ٣٠ جزءًا. فسُبعه اثنان ⟨من ثلاثين⟩، وهو ثلثا عُشرٍ. فخمس وسدس وعشر ظ ض هو ثلثا عُشر ت ض. ونأخذ من ك ض ثلثي عُشره، فنضيفه إلى هذا؛ فيبقى من خمس وسدس وعشر ك ض خمساه. ويصير ثلثا عُشر ت ض وثلثا عشر ك ض هو ثلثي عُشر ك ت. فيكون خمس وسدس وعشر ك ظ هو ثلثي عشر ك ت وخمسيْ ك ض. وثلثا عشر ك ت هو ثلث عشر ص ق، لأن ك ت نصف ص ق. وإذا ضُرب ثلث عُشرِ ص ق في ق ي، كان الذي يخرج هو ثلثَ عُشرِ ل خ، لأن ضرب ص ق في ق ي هو ل خ. فضرب خمس وسدس وعشر ك ظ في ق ي هو ثلث عشر ل خ مع مضروب خمسي ك ض في ق ي. وك ذ هو نصف سدس واحد لأن ك غ ربع واحد وغ ذ سدس واحد. فخمسا ك ذ هو ثلث عشر واحد. فإذا ضُرب في ق ي،

1 ت ظ: ت ط – 2 ت ظ: ب ط – 3 ك ظ: ك ط / مربع: ربع – 5 ك ظ: ك ط – 10 ك ظ: ك ط – 11 ك ظ: ك ط / ك ظ: ك ط / ق ي: القاف ممحوة – 12 ك ظ: ك ط / ظ ض: ط ص – 13 ض ذ: ص د / ذ ك: د ك / ظ ض: ط ض / ت ظ: مهملة – 14 ض ت: ص ت – 15 ظ ض: مهملة – 16 ت ض: ب ص / ك ض: ك ص / ثلثي عشره: ثلثا عشرة – 17 ك ض: ك ص / ك ض: ك ص / ثلثي عشر: ثلثا عشر، وهو جائز ولكن النصب أفصح – 18 ك ظ: ك ط / ثلثي عشر: ثلثا عشر / وخمسي: وخمسا – 20 ك ظ: ك ط – 21 خمسي: خمس / ك ض: ك ص / ك ذ: ك د – 22 ك غ: ك ع / غ ذ: ع د / ك ذ: ك د.

كان الذي يخرج هو ثلثَ عُشرِ ق ي، الذي ينقص عن ك خ بواحد، لأن ك خ مثل ص ق. فإذا أضيف ثلثُ عُشرِ ق ي إلى ثلث عشر ل خ، كان الذي يجتمع هو ثلثَ عشر ك ل إلا ثلثَ عشر واحد. فمضروب خمس وسدس وعشر ك ظ في ق ي هو ثُلثُ عُشرِ ك ل، إلا ثُلثَ عُشر واحد، مع مضروب خمسي ذ ض في ق ي. وإذا ضرب ثلثُ عُشر ك ل إلا ثلث عشر واحد في ك ل، كان الذي يخرج هو ثلثُ عشرِ مربع ك ل إلا ثلثَ عشر ك ل، لأن ضرب ثلث عشر واحد في ك ل هو ثلث عُشر ك ل. فيكون مضروب ك ل في خمس وسدس وعشر ك ظ، ثم ما خرج في ق ي، هو ثلثُ عُشر مربع ك ل، إلا ثلثَ عشر ك ل، مع مضروب ك ل في خمسي ذ ض، ثم ما خرج في ق ي. وقد كان فُرِض نسبة غ ذ إلى ذ ض كنسبة ت ك إلى ك غ، التي هي نسبة ل ك إلى ك ت. فنسبة ك ل إلى ك ت كنسبة غ ذ إلى ذ ض. فضرب ل ك في ذ ض هو ضربُ ك ت في غ ذ. وضرب ك ت في غ ذ هو سدسُ ك ت، لأن غ ذ سدس واحد. فضربُ ك ل في ذ ض هو سدسُ ك ت. فضرب ك ل في خمسي ذ ض هو خمسا سدس ك ت، الذي هو ثلثا عُشر ك ت، الذي هو ثُلثُ عُشر ص ق، لأن ك ت نصف ص ق. وإذا ضرب ثلثُ عُشر ص ق في ق ي، كان الذي يخرج هو ثلث عُشرِ ل خ، لأن ضرْب ص ق في ق ي هو ل خ. فمضروب ك ل في خمسي ذ ض، ثم ما خرج في ق ي، هو ثلثُ عُشر ل خ. فمضروب ك ل في خمس وسدس وعشر ك ظ، ثم ما خرج في ق ي هو ثلثُ عُشر مربع ك ل، وثلث عُشر ل خ، إلا ثلث عُشر ك ل. وثلث عشر ك ل هو ثلثُ عُشرِ ل خ وثلثُ عُشر ك خ. فيسقط الزائدُ من الناقص، فيبقى من ثلثِ عُشرِ ك ل ثلثُ عُشر ك خ، الذي هو مساوٍ لـ ص ق. فمضروب ك ل في خمس وسدس وعشر ك ظ ثم ما خرج في ق ي هو ثلثُ عُشر مربع ك ل إلا ثلث عشر ص ق، الذي هو ضلعه. وص ق هو آحادُ صحاحٍ، لأنه آخر الأعداد المتوالية. وك ل هو مربع ص ق، فـ ك ل أعظمُ من ص ق. فثلث عُشر ص ق أقل من ثلث عشر مربع ك ل، وأقل أيضًا من ثلث عشر ك ل نفسِه، لأن ك ل أيضًا آحادُ صحاحٍ فهو أضعاف ص ق.

2 ل خ: ل ح – 3 ك ظ: ك ط – 6 ك ظ: ك ط – 8 ذ ض (الأولى والثانية): د ض / ت ك: ب ك – 9 غ ذ: ع ذ / ذ ض: ذ ص – 10 ذ ض: د ض / غ ذ (الثانية): ع د – 11 ذ ض (الأولى والثانية): د ص – 13 ل خ: ل ح – 14 ل خ: ل ح / ذ ض: د ص / ل خ: ل ح – 15 ك ظ: ك ط – 16 ل خ (الأولى): ل ح / ك خ: ك ح – 17 ك خ: ك ح – 18 ص ق: ض ق / ك ظ: ك ط – 19 ضلعه: أي ص ق ضلع ك ل / آخر: اخذ – 20 ص ق (الأولى): ض ق.

وقد كان تبيّن أن مجموع مربعات م ا ن جـ ف هـ ع ح هو ثلث وخمس مجموع مربعات م ب ن د ف ز ع ط ، مع مضروب ك ل في خمس وسدس وعشر ك ظ ثم / ما خرج في ق ي. فمجموع مربعات م ا ن جـ ف هـ ع ح هو ثلثُ وخمسُ مجموعِ مربعات م ب ن د ف ز ع ط مع ثلث عشر مربع ك ل إلا ثلثَ عُشر ضلع ك ل. وثلث عشر مربع ك ل إلا ثلث عشر ضلعه ينقص عن ثلث وخمس مربعه بنصف مربعه وثلث عشر ضلعه، لأن الثلث والخمس إذا نقص منه ثلث عشر كان الباقي نصفًا. فمربعات م ا ن جـ ف هـ ع ح أقل من ثلث وخمس مجموع مربعات م ب ن د ف ز ع ط ك ل بنصف مربع ك ل وثلثِ عُشر ضلعه. فإذا زيد على مربعات م ا ن جـ ف هـ ع ح نصفُ مربع ك ل وثلثُ عشر ضلع ك ل، كان الذي يجتمع هو ثلثَ وخُمسَ مربعات ب م ن د ف ز ع ط ك ل. وإذا زيد على مربعات م ا ن جـ ف هـ ع ح جميعُ مربع ك ل، كان الذي يجتمع يزيد على ثلث وخمس مربعات م ب ن د ف ز ع ط ك ل إلا ثلث عشر ضلعه. ٦١ - ظ



〈ولكن نصف مربع ك ل أكثرُ من ثلث عُشر ص ق فمجموع مربعات م ا ن جـ ف هـ ع ح ك ل أكثر من ثلث وخمس مربعات م ب ن د ف ز ع ط ك ل.〉

فقد تبيّن من جميع ما ذكرنا أن مجموع مربعات م ا ن جـ ف هـ ع ح أقلُّ من ثلث وخمس مربعات م ب ن د ف ز ع ط ك ل وأكثرُ من ثلث وخمس مربعات م ب ن د 〈ف ز〉 ع ط ؛ وأن مربعات م ا ن جـ ف هـ ع ح ك ل أكثرُ من ثلث وخمس مربعات م ب ن د ف ز ع ط ك ل ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1 وخمس: وعشر – 2 وسدس: وسد / ك ظ: ك ط – 6 نصفًا: نصف – 7 ف ز: ف ر – أضفنا إلى هذا الشكل خط ل ك.

ويستبين من هذا البيان أنه إذا كانت خطوط مستقيمة متساوية – كم كانت – ثم فُرضت أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد، وجُعل عِدّة الأعداد المربعة كعدة الخطوط، وقُسم من الخط الأول مقدارٌ يكون نسبةُ جميع الخط إليه كنسبة أعظم المربعات إلى الواحد، التي هي بمنزلة نسبة م ب إلى ب ا؛ وقُسم من الخط الذي يليه مقدارٌ يكون نسبةُ الخط إليه كنسبة المربع الأعظم إلى المربع الذي يلي الواحدَ، التي هي بمنزلة نسبة ن د إلى د جـ؛ وقُسم من الخط الذي يليه مقدارٌ يكون نسبةُ الخط إليه كنسبة المربع الأعظم إلى المربع الثالث، التي هي بمنزلة نسبة ف ز إلى ز هـ؛ وفُعل مثل ذلك بجميع الخطوط المتساوية، إلى أن يبقى الخط الواحد النظير للمربع الأعظم غير منقسم؛ فإن مجموع مربعات الخطوط التي تبقى من الخطوط المقسومة بعد انقسام ⟨الخطوط⟩ النظائر للمربعات، يكون أصغرَ من ثلث وخمس مجموع مربعات الخطوط المقسومة مع مربع الخط الغير مقسوم. ويكون مجموع مربعات الخطوط التي تبقى من الخطوط المقسومة مع مربع الخط الغير مقسوم أعظمَ من ثلث وخمس مربعات الخطوط المقسومة مع مربع الخط الغير مقسوم.

وذلك لأن الخطوط المستقيمة المقسومة إذا كانت نسبتُها إلى أقسامها كنسبة أعداد م ب ن د ف ز ع ط إلى أعداد ب ا د جـ ز هـ ح ط، كانت نسبة الخطوط المستقيمة المقسومة إلى ما يبقى منها كنسبة أعداد ب م د ن ز ف ط ع إلى أعداد م ا ن جـ ف هـ ع ح. فيكون نسبة مربعات الأقسام الباقية من الخطوط إلى مربعات الخطوط أنفسِها كنسبة مربعات الأعداد النظائر لأعداد م ا ن جـ ف هـ ع ح إلى مربعات الأعداد النظائر لأعداد م ب ن د ف ز ع ط ك ل. فالخطوط المستقيمة المتساوية إذا قسم منها أقسامٌ متوالية، وبقي منها خطٌّ غير مقسوم، وكان الخط الغيرُ مقسوم مع الأقسام التي قسمت من الخطوط المقسومة على نسبة الأعداد المربعة المتوالية المبتدئة من الواحد، فإن ⟨مجموع⟩ مربعات الفضلات الباقية من الخطوط المقسومة هو أصغرُ من / ثلث وخمس مجموع مربعات الخطوط المتساوية المقسومة مع مربع الخط الذي لم ٦٢ – و يُقسم، وإن مجموع مربعات الفضلات الباقية، مع مربع الخط الذي لم يُقسم، أعظمُ من ثلث وخمس مجموع مربعات الخطوط المستقيمة المقسومة مع مربع الخط الذي لم يقسم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

3 التي هي: الذي هو – 7 ف ز: و ز – 9 انقسام: الانقسام – 18 أقسام: أقساما.

〈المجسم المكافئ: النوع الأول〉

وإذْ قد تبيّنت هذه المقدمات، فلنشرع الآن في مساحة المجسم المكافئ.

وليكن قطعة من قِطْع مكافئ عليها ا ب، وليكن قطرها ا ج ورأسها ا وخط الترتيب – الذي يخرج من طرفيها – خطُّ ب ج. وليكن زاوية ا ج ب – من الصورة الأولى – قائمةً، ومن الصورة الثانية حادّةً، ومن الصورة الثالثة منفرجةً. ولنثبت قطر ا ج على وضعه حتى لا يتغير. ولنُدِرْ قِطْعَ ا ب ج حول قطر ا ج حتى يعود إلى وضعه، وليحدُث من استدارته مجسّمُ ا ب د.

فأقول: إن مجسّم ا ب د مساوٍ لنصف الأسطوانة القائمة التي نصفُ قطر قاعدتِها العمودُ الواقعُ من نقطة ب على قطر ا ج، وارتفاعُها قطر ا ج.

ونخرج من نقطة ب عمودًا على قطر ا ج. أما في الصورة الأولى فهو خط ب ج الذي هو خط الترتيب، لأن زاوية ا ج ب قائمة بالفرض. وأما في الصورتين الباقيتين، فليكن العمود ب ك. ونخرج من نقطة ب خطًا في سطح قطعة ا ب ج موازيًا لقطر ا ج عليه ب ح. ونجعل ب ح مثلَ ج ا، ونصل ا ح، فيكون موازيًا لخط ب ج. ونخرج من نقطة ح – في الصورتين الثانية والثالثة – عمودَ ح ل. ونتوهم سطح ا ج ب ح – من الصورة الأولى – دائرًا حول خط ا ج إلى أن يعود إلى وضعه، فيحدث من حركته أسطوانةٌ قائمة، ويحدث من خطي ب ج ح ا دائرتان متوازيتان، هما قاعدتا الأسطوانة، ويكون خط ا ج سهم الأسطوانة. ونتوهم – من الصورة الثانية – سطح ح ل ج ب دائرًا حول خط ل ج، فيحدث من سطح ح ل ك ب أسطوانة قائمة، ومن مثلثي ب ك ج ح ا ل مخروطان قائمان. ونتوهم – من الصورة الثالثة – سطح ح ا ك ب دائرًا حول خط ا ك، فيحدث من سطح ح ل ك ب أسطوانة قائمة، ومن مثلثي ب ك ج ح ا ل مخروطان قائمان. وليكن الأسطوانة القائمة من الصور الثلاث هي التي عليها ب ح ط د.

فأقول: إن مجسّم ا ب د – من كل واحد من الصور الثلاث – نصفُ أسطوانةِ ب ح ط د.

برهان ذلك: أنه إن لم يكن هذا المجسّمُ نصفَ الأسطوانة فهو إما أعظمُ من نصفها أو أصغرُ من النصف.

17 مخروطان قائمان: مخروطين قائمين – 19 ب ك ج: ب ك ح / مخروطان قائمان: مخروطين قائمين / الصور: الصورة.

فلنفرض أولاً أن الجسم المكافئ أعظمُ من نصف أسطوانة ب ح ط د. وليكنْ يزيدُ على نصفها بمجسّم ز. ويُقسم قطر ا ج – من الصورة الأولى – بنصفين على نقطة م. ونخرج م هـ على الترتيب ونُنفذه على استقامة حتى يلقى خط ح ب. وليلْقَه على نقطة ص. ونجيز على نقطة هـ خطًا موازيًا لخط ا ج عليه س هـ غ. فلأن ا م مثل م ج، يكون س هـ مثل هـ غ، ويكون سطح ح هـ مثل سطح هـ ب، ويكون سطح ا هـ مثل سطح هـ ج. فإذا دار سطح ا ح ب ج حول خط ا ج، وحدثت أسطوانةُ ح ب د ط، فإنه يحدث من سطح س ج أسطوانة، ويحدث من سطح ح غ جسمٌ مستديرٌ محيطٌ بالأسطوانة التي تحدث من سطح س ج، ويحدث من خط م ص دائرة تقطع الأسطوانة – التي تحدث من سطح س ج – بنصفين وتقطع الجسم المستدير – الذي يحدث من سطح ح غ – أيضًا بنصفين. فيكون الجسم الذي يحدث من استدارة سطح ح هـ والأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح هـ ج، بمجموعها، مساويين لنصف الأسطوانة العظمى التي حدثت من استدارة سطح ح ج.

وأيضًا فإنا نقسم خط ا م بنصفين على نقطة ل، ونخرج من نقطة ل خطًا على الترتيب، عليه ل هـ، ونُنفذه حتى / يلقى خط ح ب، ونجيز على نقطة هـ من خط هـ ل أيضًا خطًا موازيًا ٦٢ - ظ لقطر ا م، وليكن ت خ. فيكون الجسمان، اللذان يحدثان من استدارة سطحي س هـ م هـ، نصف الأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح س م.

وأيضًا فإنا نقسم خط م ج بنصفين على نقطة ک، ونخرج من نقطة ک خطًا على الترتيب، عليه ک هـ، وننفذه حتى يلقى خط ب ح، ونجيز على نقطة هـ من خط هـ ک خطًا موازيًا لخط م ج، عليه و هـ ش، فيكون الجسم الذي يحدث من استدارة سطحي ص هـ هـ غ نصفَ الجسم المستدير الذي يحدث من استدارة سطح ص غ، لأن سطح ص هـ نصفُ سطح و ب وسطحَ هـ غ نصفُ سطح و غ. فيكون المجسمات الأربعة – التي تحدث من استدارة سطوح ص هـ هـ غ س هـ هـ م، بمجموعها – نصفَ المجسمين اللذين يحدثان من استدارة سطحي ب هـ هـ ا. وهذان الجسمان هما اللذان بقيا من الأسطوانة بعد نقصان الجسمين اللذين حدثا من استدارة سطحي ح هـ هـ ج.

3 وننفذه: وينفذه – 4 س هـ غ: س هـ ع / هـ غ: هـ ع – 7 ح غ: ح ع / جسم مستدير محيط: جسما مستديرا محيطا / تحدث: يحدث – 8 تقطع: يقطع / تحدث: يحدث / تقطع: يقطع – 9 ح غ: ح ع – 10 تحدث: يحدث / مساويين: مساويان – 12 ونخرج: ويخرج – 13 وننفذه: وينفذه – 14 ت خ: ت هـ ح – 15 تحدث: يحدث – 18 و هـ ش: و هـ س / هـ غ: هـ ع – 20 هـ غ: هـ ع – 21 بمجموعها: بمجموعها – 22 حدثا: حدثان.

وأيضـًا فإنا نقسم كلَّ واحد من خطوط ا ل ل م م ك ك ج بنصفين على نقط ع ف ن ي ونخرج منها خطوطـًا على الترتيب، عليها ع هـ ف هـ ن هـ ي هـ، وننفذها حتى تلقى خط ح ب، ونجيز على نقط هـ خطوطـًا موازية للقطر. فنقسم ما يبقى من السطوح بنصفين نصفين. ويكون المجسمات التي تحدث باستدارتها نصف ما يبقى من الأسطوانة بعد القسمين الأوَّلين. وإذا فُعل ذلك يكون قد قُسم من الأسطوانة العظمى نصفُها، ومما يبقى نصفُه، ومما يبقى نصفُه. وإذا فُعل ذلك فإنه يبقى من الأسطوانة العظمى مقدارٌ هو أصغرُ من مقدار ز؛ وذلك أن كل مقدار يُقسم منه نصفُه، ومما يبقى نصفُه، ونفعل ذلك مرتين، يكون قد قسم من المقدار أعظمُ من نصفه. فإذا قسم مما يبقى أيضـًا نصفُه، ومما يبقى نصفُه، مرتين أيضـًا، يكون قد قسم من الباقي أعظمُ من نصفه. وإذا قسم من مقدار نصفه، ومما يبقى نصفه، وفُعل ذلك دائمًا، فإنه يكون قد قسم من ذلك المقدار أعظمُ من نصفه، ومما يبقى أعظمُ من نصفه، لأن كل دفعتين من القَسْم يكون المقسومات ⟨فيها⟩ أعظمَ من النصف. والأسطوانة أعظم من مقدار ز. فإذا قسم من الأسطوانة نصفها، ومما يبقى نصفه – على الصفة التي في الصورة – وفعل ذلك دائمًا، فإنه لا بدّ أن يبقى مقدار هو أصغر من مقدار ز. فلينتهِ القسمةُ إلى ذلك الحد، والذي يبقى من هذه الأسطوانة – إذا قسمت على الوجه الذي بيناه – هو المدوّرات التي يمرّ سطح المجسّم المكافئ بأوساطها، ويكون نُقَطُ هـ على زواياها. فيكون المدوّرات التي على زواياها ⟨نقط⟩ هـ، بمجموعها، أصغرَ من مقدار ز، فيكون ما يقع في داخل المجسم المكافئ من هذه المدوّرات أصغرَ بكثير من مقدار ز.

وإذا كان ذلك كذلك، كان الذي يبقى من المجسم المكافئ بعد ⟨إلقاء⟩ الذي في داخله من أجزاء المدوّرات أعظمَ من نصف أسطوانة ب ح ط د، لأن هذا المجسم المكافئ كان يزيد على نصف هذه الأسطوانة بمقدار ز. والذي يبقى من المجسم المكافئ بعد ⟨إلقاء⟩ الذي في داخله من أجزاء المدوّرات هو المنشورُ الذي يقسم الدوائر التي تحدث من استدارة خطوط الترتيب، وهو الذي قاعدتُه الدائرةُ التي نصف قطرها ض ج ورأسه الدائرة التي نصف قطرها ع هـ وزواياه المستديرة تحدّها الدوائرُ التي تحدث عند الاستدارة من نقطة هـ. فهذا المنشورُ أعظمُ من نصف أسطوانة ب ح ط د.

2 تلقى: يلقى – 4 المجسمات: المجسمان / باستدارتها: الضمير يعود على أنصاف السطوح / الأولين: الأولتين – 5 العظمى: العظم / نصفه (الثانية): نقطه – 6 ز: حرف بين النون والزاي – 11 المقسومات: أضفنا «فيها» ليعود الضمير إلى كلمة «دفعتين» ويترابط الكلام – 14 يمر: تمر – 20 تحدث: يحدث – 21 ض ج: ص ج / وزواياه: وزاواياه – 22 تحدث: يحدث.

لكن قِطْع ا ب قِطعٌ مكافئ، فنسبة جـ ا إلى ا م كنسبة مربع ب جـ إلى مربع هـ م. وجـ ا ضعف ا م، فمربع ب جـ ضعف مربع هـ م. وب جـ مثل ص م، فمربع ص م ضعف مربع م هـ. وأيضًا فإن نسبة مربع ب جـ إلى مربع هـ ي كنسبة جـ ا إلى ا ي، وبالتفصيل يكون نسبة فضل مربع ب جـ على مربع هـ ي إلى مربع هـ ي هي نسبة جـ ي إلى ي ا. ونسبةُ مربع هـ ع إلى مربع هـ ي هي نسبة ع ا إلى ا ي. وع ا مثل جـ ي، فنسبة مربع / هـ ع إلى مربع هـ ي هي ٦٣ - و نسبة فضل مربع ب جـ على مربع هـ ي إلى مربع هـ ي. ففضل مربع ب جـ على مربع هـ ي مساوٍ لمربع هـ ع. فمربع هـ ي مع مربع هـ ع مساويان لمربع ب جـ، فهما بمجموعهما ضعفُ مربع هـ م. وأيضًا فإن نسبة مربع ب جـ إلى مربع هـ ك هي نسبة جـ ا إلى ا ك. وبالتفصيل، نسبة فضل مربع ب جـ على مربع هـ ك إلى مربع هـ ك هي نسبة جـ ك إلى ك ا. ونسبة مربع هـ ل إلى مربع هـ ك هي نسبة ا ل المساوي لـ جـ ك إلى ا ك. ففضل مربع ب جـ على مربع هـ ك هو مربع هـ ل. فمربع هـ ك مع مربع هـ ل هما ضعف مربع هـ م. وكذلك يتبيّن في مربعي هـ ن هـ ف.

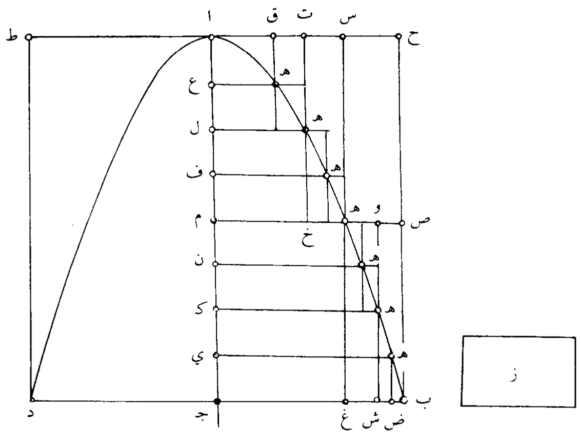
فمجموع مربعات خطوط هـ ي هـ ك هـ ن هـ ف هـ ل هـ ع هي أضعافٌ لمربع هـ م، عِدّتها كعدّة هذه الخطوط، لأن كل اثنين منها هما ضعفُ مربع هـ م. ومربع هـ م هو نصف مربع ب جـ، فمجموع مربعات هذه الخطوط مساوية لنصف مجموع مربعات الخطوط المارّة بنقط ع ل ف ن ك ي القاطعة لسطح ح جـ، المساوي كل واحد منها لخط ب جـ؛ ومربع هـ م أيضًا نصف مربع ص م، فمربعات خطوط هـ ع هـ ل هـ ف هـ م هـ ن هـ ك هـ ي مجموعةً مساويةٌ لنصف مربعات الخطوط المساوية لخط ب جـ المارة بنقط ع ل ف م ن ك ي. وكذلك أضعافها القاطعة لسطح ب ط، أعني أن الخطوط القاطعة للقِطْع – التي هي أضعاف خطوط هـ ع هـ ل هـ ف هـ م هـ ن هـ ك هـ ي – مجموعُ مربعاتها مساوٍ لنصف مجموع مربعات الخطوط القاطعة / لسطح ب ط – المتوازي الأضلاع – المارّة بنقط ع ل ف م ن ك ي ٦٣ - ظ المساوي كلُّ واحدٍ منها لخط ب د. وكذلك الدوائر التي أقطارُها مارّة بهذه النقط. وإذا جعلنا أحد أقسام قطر ا جـ المتساوية ارتفاعًا مشتركًا – أعني خطَّ ا ع – كانت الأساطينُ، التي قواعدُها الدوائر – القاطعة للمجسم المكافئ التي أقطارُها خطوطُ الترتيب – وارتفاعُها خط ا ع، بمجموعها، نصفَ الأساطين التي قواعدُها الدوائر القاطعة للأسطوانة العظمى وارتفاعها خط

2 وب جـ: وزجـ – 3 ا ي: ا ث / وبالتفصيل: وبالتفضيل – 4 هي: هو – 8 وبالتفصيل: وبالتفضيل – 9 هي: هو – 20 مساوٍ: مساوية – 22 ب د: ب جـ – 23 المتساوية: المساوية.

ا ع. والأساطين التي ارتفاعها خط ا ع هي بعينها الأساطين التي ارتفاعاتها خطوط ع ل ل ف ف هـ هـ ن ن ك ك ي ي ج، لأن هذه الخطوط متساوية. والأساطين التي ارتفاعاتها هذه الخطوط وقواعدها الدوائر القاطعة للمجسم المكافئ، بمجموعها، هي المنشور الذي قاعدته الدائرة – التي نصف قطرها خط ض ج – ورأسه الدائرة التي نصف قطرها هـ ع. والأساطين التي ارتفاعاتها خطوط ع ل ل ف ف م م ن ن ك ك ي ي ج وقواعدها الدوائر القاطعة للأسطوانة العظمى، هي الأسطوانةُ التي قاعدتها الدائرة – التي نصفُ قطرها ب ج – وارتفاعُها خط ع ج. فالمنشور الذي في داخل المجسم المكافئ هو نصفُ الأسطوانة التي ارتفاعها خط ع ج وقاعدتها قاعدة الأسطوانة العظمى، فهو أصغر من نصف أسطوانة ب ح ط د العظمى. وقد كان تبيّن أن هذا المنشورَ أعظمُ من نصف هذه الأسطوانة، وهذا مُحال.

وهذا المُحال إنما عَرض من فرْضنا المجسّمَ المكافئَ أعظمَ من نصف الأسطوانة، فليس المجسّمُ المكافئُ أعظمَ من نصف الأسطوانة.

وأقول: إنه ليس بأصغرَ من نصف الأسطوانة أيضًا.



فإن أمكن، فليكن أصغرَ من نصف الأسطوانة، وليكن نقصانُه عن نصف الأسطوانة بمقدار مجسّم ز. ونقسم من الأسطوانة نصفها، ومما يبقى نصفَه، بالوجه الذي تقدم، حتى يبقى من المدورات – التي يمرُّ سطحُ المجسم المكافئ بأوساطها – أصغرُ من مجسم ز؛ فيكون ما يقع خارجَ

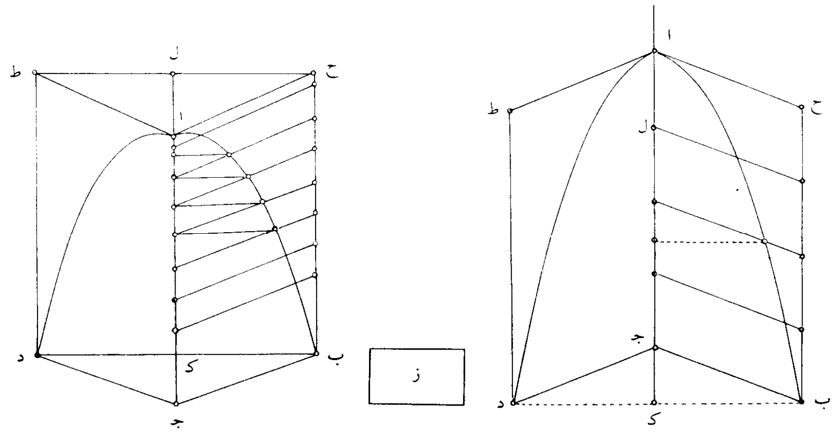
4 ض ج: ص ج – 9 هذا (الأولى): هذ – 15 يمر: تمر.

المجسم المكافئ من هذه المدورات أصغرَ بكثير من مقدار ز. والمجسّم المكافئ مع مقدار ز هو نصفُ أسطوانة ب ح ط د. فالمجسم المكافئ مع ما يقع خارجًا منه من أجزاء المدورات أصغر من نصف الأسطوانة. لكن المجسّم المكافئ مع ما يقع خارجًا منه من المدورات هو المنشورُ الذي قاعدته قاعدة الأسطوانة ورأسُه الدائرةُ التي نصف قطرها ق ا، فالمنشور الذي قاعدته قاعدة الأسطوانة ورأسه الدائرة التي نصف قطرها ق ا أصغرُ من نصف الأسطوانة.

وقد تبيّن أن المنشور الذي في داخل المجسم المكافئ هو نصفُ الأسطوانة التي ارتفاعها جـ ع وقاعدتُها الدائرةُ التي نصفُ قطرها ب جـ. لكن المنشور، الذي في داخل المجسم المكافئ، مساوٍ للمنشور المحيط بالمجسم المكافئ الذي قاعدته الدائرة – التي نصف قطرها خط هـ ي – ورأسه الدائرةُ التي نصف قطرها ق ا، لأن هـ ي مثل ض جـ وق ا مثل هـ ع وارتفاع ا ي مثل ارتفاع جـ ع. والأسطوانة التي ارتفاعها جـ ع مساويةٌ للأسطوانة التي ارتفاعها ا ي؛ فيكون المنشور المحيط بالمجسم المكافئ – الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها هـ ي – نصفَ الأسطوانة التي ارتفاعها ا ي. فإذا أضيف إلى هذا المنشور نصفُ الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة – التي نصف قطرها ب جـ – وارتفاعها ي جـ، فإن الجميع يكون نصفَ أسطوانة ب ح ط د. فإذا أضيف إلى المنشور المحيط بالمجسم المكافئ الذي قاعدتُه الدائرة التي نصفُ قطرها هـ ي – جميعُ الأسطوانة التي ارتفاعها ي جـ وقاعدتُها الدائرة التي نصف قطرها ب جـ، كان الجميع أعظمَ من نصف أسطوانة ب ح ط د. لكن المنشور / المحيط بالمجسم المكافئ – الذي قاعدته الدائرة التي نصف ٦٤ - و قطرها هـ ي وارتفاعه ا ي – إذا أضيف إليه الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي نصف قطرها ب جـ وارتفاعها خط جـ ي، كان ذلك هو المنشور المحيطَ بالمجسم المكافئ الذي قاعدته قاعدة الأسطوانة العظمى – أعني أسطوانة ب ح ط د – ورأسُه الدائرة التي نصفُ قطرها ق ا. فهذا المنشور هو إذًا أعظم من نصف أسطوانة ب ح ط د. وقد كان تبيّن أن هذا المنشور أصغرُ من نصف هذه الأسطوانة، وهذا مُحال.

فليس المجسّمُ المكافئُ أصغرَ من نصف أسطوانة ب ح ط د ولا أعظمَ من نصفها، فهو إذن مساوٍ لنصف هذه الأسطوانة.

2 مع ما: معا – 3 مع ما: معا – 4 ق ا: ق – 5 ق ا: ق – 6 جـ ع: جـ ح – 9 ض جـ: ص جـ.



فأما الصورةُ الثانية، فإن المجسم المكافئ الذي فيها، يكون قاعدتُه منخرطةً، ويكون الأسطوانة المحيطة به منخرطة، إلا أن المخروط الذي يحدث من مثلث ب ج ك هو مساوٍ للمخروط الذي يحدث من مثلث ح ل ا. فإذا نقص المخروطُ الذي رأسه نقطةُ ج من الأسطوانة المنخرطة، وزيد المخروطُ الذي رأسُه نقطةُ ا، صارت الأسطوانة القائمة مساوية للأسطوانة المنخرطة. فإذا فرض المجسمُ المكافئ أعظمَ من نصف الأسطوانة، ثم قُسمت الأسطوانة المنخرطة على الوجه الذي يتبيّن في الصورة الأولى، كان الذي يُقسم منها نصفَها، ومما يبقى نصفه، ومما يبقى نصفه؛ فيبقى المنشور الذي في داخل المجسم المكافئ أعظمَ من نصف الأسطوانة كما تبيّن في الصورة الأولى، ويكون هذا المنشور منخرطـًا. ويتبيّن كما تبيّن في الصورة الأولى أن هذا المنشور أصغرُ من نصف الأسطوانة المنخرطة. وذلك أنه إذا أُخرجت من رؤوس خطوط الترتيب أعمدةٌ على القطر، كانت نسبة هذه الأعمدة بعضها إلى بعض كنسبة خطوط الترتيب بعضِها إلى بعضٍ. ونسب خطوط الترتيب التي في هذه الصورة بعضها إلى بعضٍ هي نسبُ خطوط الترتيب التي في الصورة الأولى بعضِها إلى بعضٍ. فيكون نسب الأعمدة – التي تخرج في هذه الصورة من رؤوس خطوط الترتيب إلى القطر – بعضِها إلى بعضٍ، هي نسبَ خطوط الترتيب التي في الصورة الأولى بعضها إلى بعضٍ. وإذا أُخرجت هذه الأعمدة ⟨حتى⟩ تلقى خطَّ ب ح، كانت نسب الأعمدة – التي في داخل القِطْع – إلى ما ينتهي منها إلى خط ب ح كنسب خطوط

11 ونسب : ونسبة – 12 تخرج : يخرج – 14 تلقى : يلقى – 15 نسب : نسبة.

الترتيب إلى ما ينتهي منها إلى خط ب ح. ونسب خطوط الترتيب التي في الصورة الثانية إلى ما ينتهي منها إلى خط ب ح، هي نسبُ خطوط الترتيب التي في الصورة الأولى إلى ما ينتهي منها إلى خط ب ح من الصورة الأولى. فنسب الأعمدة التي في داخل القِطْع في الصورة الثانية إلى ما ينتهي منها إلى خط ب ح، هي نسب خطوط الترتيب التي في الصورة الأولى إلى ما ينتهي منها إلى خط ب ح. فيكون نسب الدوائر – التي أنصافُ أقطارها الأعمدةُ التي في داخل القِطْع من الصورة الثانية – بعضِها إلى بعضٍ، هي نسبَ الدوائر – التي أنصافُ أقطارها خطوطُ الترتيب من الصورة الأولى – بعضها إلى بعضٍ. فيكون نسب المدورات القائمة – التي في الصورة الثانية – إلى الأسطوانة القائمة – التي في هذه الصورة – هي نسبَ المدورات التي في الصورة الأولى إلى أسطوانتها. فيكون نسبةُ المنشور القائم – الذي في داخل الصورة الثانية – إلى الأسطوانة القائمة، هي نسبة المنشور – الذي في الصورة الأولى – إلى أسطوانتها. والمنشور الذي في الصورة الأولى أصغرُ من نصف الأسطوانة. فالمنشور القائم الذي في الصورة الثانية أصغرُ من نصف الأسطوانة القائمة. والأسطوانة القائمة مساوية للأسطوانة المنخرطة. والمنشور القائم مساوٍ للمنشور المنخرط، لأن كل واحدة / من المدوّرات القائمة مساوية لنظيرتها من المدورات المنخرطة، لأن ذلك يتبيّن كما ٦٤ – ظ
تبيّن في الأسطوانة القائمة والأسطوانة المنخرطة. فيلزم من ذلك أن يكون المنشور المنخرط أصغر من نصف الأسطوانة المنخرطة.

وكذلك إذا فُرض المجسّم المكافئ أصغرَ من نصف الأسطوانة، يكون المنشور المحيط به أصغرَ من نصف الأسطوانة المنخرطة. ويتبيّن، مثلَ ما تبيّن من قبل، أن المنشور المحيط بالمجسم المكافئ أعظمُ من نصف الأسطوانة المنخرطة. فيلزم بمثل هذا البرهان، الذي تبيّن في الصورة الأولى، أن المجسم المكافئ الذي في الصورة الثانية نصف الأسطوانة المنخرطة. والأسطوانة المنخرطة مساوية للأسطوانة القائمة، فيكون المجسم المكافئ الذي في الصورة الثانية نصفَ الأسطوانة القائمة.

وبمثل هذا البيان بعينه يتبيّن في الصورة الثالثة، لأن المخروطين والأعمدة – التي تقع في الصورة الثالثة – حالُها مساويةٌ لحال المخروطين والأعمدةِ التي في الصورة الثانية.

فالمجسم المكافئ الذي يحدث من استدارة قِطْع ا ب جـ حول قطر ا جـ من الصور الثلاث، هو نصفُ الأسطوانة التي قاعدتها الدائرةُ التي نصفُ قطرها العمودُ الواقع من نقطة ب على قطر ا جـ وارتفاعها مساوٍ لقطر ا جـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

9 الذي: التي – 10 أسطوانتها: الضمير يعود على الصورة الأولى، والمقصود الأسطوانة في هذه الحال – 21 تقع: يقع.

〈تعقيبات على النوع الأوّل〉

وكل قِطع مكافئ يكون قطره يحيط، مع خطوط ترتيبه، بزاويتين مختلفتين، فإن المجسم المكافئ – الذي يحدث من القسم الحادّ الزاوية – مساوٍ للمجسم الذي يحدث من القسم المنفرج الزاوية.

وذلك أن أسطوانتيها القائمتين تكونان متساويتين، لأن كل واحدة من الأسطوانتين يكون سهمها مساويًا لقطر القِطْع، ونصفُ قطر قاعدة كل واحدة منها مساوٍ للعمود الواقع من طرف خط الترتيب على القطر. والعمودان الخارجان من طرفي خط الترتيب على القطر متساويان، لأن خط الترتيب ينقسم بالقطر بنصفين. فالأسطوانتان القائمتان متساويتان، وكل واحد من المجسمين نصف أسطوانته. فيكون المجسمان المكافئان اللذان من قسمي القطع متساويين.

وكذلك القِطْع المكافئ الذي يكون قطره سهمًا؛ ويكون هذا السهم مساويًا لقطر قطع آخرَ مختلفِ الزاويتين، ويكون خط ترتيب السهم – الذي هو قاعدة القطع – مساويًا لكل واحد من العمودين الخارجين من طرفي خطي الترتيب 〈في القطع〉 المختلف الزاويتين؛ فإن المجسم المكافئ – الذي يكون من إدارة هذا القطع حول سهمه – مساوٍ لكل واحد من المجسمين اللذين يحدثان من إدارة كل واحد من قطعي القطع المختلف الزاويتين حول قطره.

ويتبيّن من جميع ما ذكرناه أن نسبة كل مجسم مكافئ إلى كل مجسم مكافئ، إذا كانت قواعد أسطوانتيها متساويتين، كنسبة ارتفاعه إلى ارتفاعه، لأن نسبة المجسم إلى المجسم كنسبة أسطوانته إلى أسطوانته.

وإن كانت قواعد أسطوانتيها مختلفتين وارتفاعاهما متساويين، فإن نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة القاعدة إلى القاعدة.

وإن اختلفت ارتفاعاتها وقواعدها معًا، فإن نسبة أحدهما إلى الآخر مؤلفةٌ من نسبة الارتفاع إلى الارتفاع ومن نسبة القاعدة إلى القاعدة. وارتفاعات جميع المجسمات المكافئة – التي من هذا النوع – هي أقطارُ القطوع التي منها حدثت هذه المجسمات.

2 مختلفتين: مختلفين – 5 تكونان: يكونان – 6 سهمها: سهمها – 8 فالأسطوانتان القائمتان متساويتان: فالأسطوانتين القائمتين متساويتين – 11 لكل: مكررة – 18 مختلفتين وارتفاعاهما: مختلفين وارتفاعها.

ويستبين مما تقدم من البرهان أن المدوَّرات التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها، مساويةٌ للأسطوانة التي قاعدتها قاعدة الأسطوانة العظمى وارتفاعها خط جـ ي.

وذلك أنه قد تبيّن أن المدوَّرتين / اللتين تحدثان من استدارة سطحي س هـ م ب ص هـ هما ٦٥ - و نصفُ الأسطوانة العظمى. والأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ب م هي نصف الأسطوانة العظمى. فالمدورتان إذن مساويتان بمجموعها الأسطوانةَ التي تحدث من استدارة سطح ب م. والمدورتان اللتان تحدثان من استدارة سطحي ت هـ ل هـ خ هـ هما نصفُ المدورة التي تحدث من استدارة سطح س هـ م. والمدورتان اللتان تحدثان من استدارة سطحي هـ و هـ ب ش هـ هما نصف المدورة التي تحدث من استدارة سطح ص غ. فالمدورات الأربع التي تحدث من استدارة سطوح ت هـ ل هـ خ هـ هـ و هـ ب ش هـ هي ⟨نصف⟩ نصف الأسطوانة العظمى. والأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ب ک هي نصف ⟨نصف⟩ الأسطوانة العظمى. فالمدوّراتُ الأربعُ التي حددناها هي مساوية للأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ب ک.

وكذلك أيضـًا يتبيّن أن المدوّرات الأربعَ التي حددناها ينقسم كلُّ واحدة منها بالمدورتين اللتين في داخلها، اللتين يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها، بنصفين نصفين. فيكون جميعُ المدورات الصغار – التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها – نصفَ المدورات الأربع التي حددناها. والأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ب ي هي نصفُ الأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ب ک، التي قد تبيّن أنها مساويةٌ للمدورات الأربع. فالمدورات الصغائر الأخيرة – التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها – مساويةٌ للأسطوانة التي قاعدتها قاعدة الأسطوانة العظمى، وارتفاعها خط جـ ي.

وكذلك يتبيّن ⟨أنه⟩ إنْ قُسمت الأسطوانة إلى مدوّرات أصغرَ من هذه المدورات إلى غير نهاية، فإن مجموعها مساوٍ للأسطوانة الصغرى، التي قاعدتها قاعدةُ الأسطوانة العظمى، وارتفاعُها قسم واحد من أقسام القطر؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وأيضـًا فإنه قد تبيّن أن المنشور الذي في داخل المجسم المكافئ – الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ض جـ، ورأسه الدائرة التي نصف قطرها هـ ع – هو نصف الأسطوانة التي قاعدتها

1 تقدم: يقدم / يمر: تمر – 3 تحدثان: يحدثان – 5 فالمدورتان: فالمدويان / مساويتان: متساويتان – 6 تحدثان: يحدثان – 7 تحدث: يحدث / تحدثان: يحدثان / سطحي: سطى – 8 تحدث: يحدث – 10 تحدث: يحدث – 14 يمر: تمر – 15 يمر: تمر – 16 تحدث: يحدث / تحدث: يحدث – 17 يمر: تمر.

قاعدة الأسطوانة العظمى وارتفاعُها خط جـ ع المساوي لخط ي ا. وقد تبيّن أن المجسم المكافئ هو نصفُ الأسطوانة العظمى، فزيادة المجسم المكافئ على المنشور الذي في داخله، هو نصفُ الأسطوانة التي قاعدتها قاعدة الأسطوانة العظمى وارتفاعُها خط جـ ي. وزيادة المجسم المكافئ على المنشور الذي في داخله هو ما يقع في داخل المجسم المكافئ من أجزاء المدورات الصغار التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها، والذي يقع من هذه المدورات في داخل المجسم المكافئ هو مساوٍ لنصف الأسطوانة التي قاعدتها قاعدةُ الأسطوانة العظمى وارتفاعُها خط جـ ي.

وقد تبيّن أن هذه المدورات بمجموعها مساويةٌ للأسطوانة التي قاعدتها قاعدة الأسطوانة العظمى، وارتفاعها خط جـ ي. فسطح المجسم المكافئ يقسمُ جميعَ المدوَّرات الصغار التي يمرّ في أوساطها بنصفين؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ويلزم هذا المعنى بعينه في المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها خط هـ ي، وفي المجسم الذي نصف قطره هـ ك، وفي جميع المجسمات الباقية.

فيتبيّن من ذلك أن سطح المجسّم المكافئ يقسمُ كلَّ واحدة من المدورات الصغار بنصفين نصفين.

وهذا الذي بيّناه، هو مساحة أحد نوعي المجسّم المكافئ، وهو الذي يحدث من استدارة القِطْع حول قطره.

⟨المجسم المكافئ: النوع الثاني⟩

فأما النوع الثاني، وهو الذي يحدث من حركة القِطْع حول خطّ ترتيبه فإنا نبيّنه الآن:

فليكن قِطْعٌ مكافئ عليه ا ب جـ / وليكن قطره ب جـ وخط ترتيبه ا جـ، وليكن زاوية ٦٥ – ظ ا جـ ب قائمةً، ولنخرج من نقطة ب خطًا موازيًا لخط ا جـ، هو ب هـ، ونخرج خط ا هـ موازيًا لخط جـ ب، ونثبت خط ا جـ حتى لا يتغير وضعه؛ ونُدير سطح ا جـ ب هـ المتوازي الأضلاع حول خط ا جـ، فيحدث من استدارة سطح ا ب أسطوانة مستديرة نصفُ قطرِ قاعدتها خط

5 يمر: تمر – 8 يمر: تمر – 19 ولنخرج: وليخرج – 20 يتغير: يتعين.

ب ج وهي التي عليها ب ز؛ ويحدث من قطع ب ا ج مجسَّم مكافئ قاعدته الدائرة التي نصف قطرها خط ب ج ، وهو الذي عليه ب ا د.

فأقول: إن مجسّم ب ا د ثلثُ وخُمسُ أسطوانةِ هـ د.

برهان ذلك: أنه إن لم يكن ثلثَ وخُمسَ الأسطوانة فهو أعظم من ثلث وخمس الأسطوانة أو أصغرُ من ثلثها وخمسها.

فليكن أولاً أعظمَ من ثلثها وخمسها، وليكن زيادتُه على ثلث وخمس الأسطوانة مجسّم ي. ونقسم ا ج بنصفين على نقطة ح ، ونُخرج خطّ ح م س موازيًا لخط ب ج ؛ ونُجيز على نقطة م خط ق م ع موازيًا لخطي ب هـ ا ج . فلأن خط ق م مساوٍ لخط م ع – من أجل أن ا ح مساوٍ لـ ح ج – يكون سطح هـ م مساويًا لسطح م ب ويكون سطح ا م مساويًا لسطح م ج . فإذا أُدير سطح ب ا حول خط ا ج حتى يعود إلى وضعه، فإن المدوّرتين اللتين تحدثان من استدارة سطحي ا م م ج تكونان متساويتين والمدوّرتين اللتين تحدثان من استدارة سطحي هـ م م ب تكونان أيضـًا متساويتين. فيكون المدورتان اللتان تحدثان من استدارة سطحي م هـ م ج بمجموعها نصفَ أسطوانة ب ز.

ونقسم أيضـًا خط ا ح بنصفين على نقطة ک ، ونُخرج من نقطة ک خطـًا موازيًا لخطي ح س ا هـ ، وهو خط ک ل ر؛ ونُجيز على نقطة ل خطـًا موازيًا لخطي ا ج هـ ب ، وهو خط ص ل ت ش . ونقسم أيضـًا خطَّ ح ج بنصفين على نقطة ط ، ونخرج من نقطة ط خطـًا موازيًا لخطي ج ب ح س ، وهو خط ط ن ض ؛ ونجيز على نقطة ن خط ث ن ف موازيًا لخطي ت ش ر س . فيتبيّن – كما تبيّن من قبل – أن المدورتين، اللتين تحدثان من استدارة سطحي ق ل ل ح ، هما نصفُ المدوّرة التي تحدث من استدارة سطح ا م . وكذلك يتبيّن أن المدورتين اللتين تحدثان من استدارة سطحي س ن ن ع هما نصفُ المدورة التي تحدث من استدارة سطح س ع . فيكون المدوّرات الأربع التي تحدث من استدارة سطوح س ن ن ع ق ل ل ح مجموعةً نصفَ المدورتين اللتين تحدثان من استدارة سطحي ب م م ا. ولكنه إذا نُقص من جميع أسطوانة ب ز المدورتان اللتان تحدثان من استدارة سطحي هـ م م ج – اللتان هما نصف

4 الأسطوانة: والأسطوانة – 8 مساوٍ: مساويا – 11 تكونان: يكونان / تحدثان: يحدثان – 12 تكونان: يكونان – 13 بمجموعها: لمجموعها – 17 ط ن ض: ط ن ص – 18 ت ش: ث ش / تحدثان: يحدثان – 19 تحدث: يحدث – 20 تحدثان: يحدثان / تحدث: يحدث – 21 تحدث: يحدث – 22 تحدثان: يحدثان – 23 المدورتان اللتان: المدورتين اللتين / تحدثان: يحدثان.

الأسطوانة – كان الذي يبقى هما المدورتان اللتان تحدثان من استدارة سطحي ب م م ا. وإذا نُقصت المدورات الأربع التي تحدث من استدارة سطوح ق ل ل ح س ن ن ع – من المدورتين اللتين تحدثان من استدارة سطحي ب م م ا – اللواتي هي نصفُ هاتين المدورتين، كان الذي يبقى هي المدورات، التي تحدث من استدارة سطوح ب ن ن م م ل ل ا. وإذا قسم كلُّ قسم من أقسام خط ا جـ بنصفين، وأخرج من مواضع القسمة خطوطٌ موازية لخط ب جـ وأجيز على مواضع التقاطع – التي تقع بينها وبين قطع ا ب – خطوطٌ موازية لخط ا جـ ، كانت المدوّرات التي تكون من استدارة السطوح، والتي يحدث كلُّ مدورتين منها نصفَ المدورة التي فيها، كما تبيّن من قبل.

وإذا كان مقداران مختلفان، وفُصل من أحدهما نصفُه، ومما يبقى نصفُه، وفُعل ذلك دائمًا، فلا بدّ أن يبقى مقدارٌ أصغرُ من المقدار الأصغر، كما تبيّن في / الشكل الذي قبل هذا. فإذا قُسمت ٦٦ - و أسطوانة ب ز، على الصفة التي بيّناها، فلا بدّ أن يبقى مقدار هو أصغر من مقدار ي. فلينته القسمةُ إلى ذلك، وليكن الذي يبقى من أسطوانة ب ز هي المدورات التي تحدث من استدارة سطوح ب ن ن م م ل ل ا. فهذه المدوّرات أصغر من مقدار ي. والذي يقع في داخل المجسم المكافئ من هذه المدورات هو أقلُّ من هذه المدورات. فالذي يقع في داخل المجسم المكافئ من هذه المدورات هو أصغرُ بكثير من مجسم ي. وإذا كان مجسّم ب ا د المكافئ أعظم من ثُلث وخمس أسطوانة ب ز بمجسم ي، وكان الذي في داخل المجسم المكافئ من أقسام المدورات الصغار هو أقلّ من مجسم ي، فالذي يبقى من المجسم المكافئ بعد هذه الأقسام التي هي في داخله هو أعظم من ثلث وخمس الأسطوانة. والذي يبقى من المجسم المكافئ بعد الذي في داخله من أقسام المدورات الصغار، هو المنشور الذي قاعدتُه الدائرة – التي نصفُ قطرها ف جـ – ورأسُه الدائرة التي نصف قطرها ل ك. فهذا المنشور إذن أعظمُ من ثلث وخمس أسطوانة ب ز.

ولأن قِطع ا ب جـ قِطعٌ مكافئ وقطره ب جـ وخط ا جـ على الترتيب، يكون مربع خط ا جـ مساويًا لضرب ب جـ في الضلع القائم. ولأن خطوط ل ش م ع ن ف موازيةٌ لخط ا جـ ، يكون هذه الخطوط على الترتيب. فيكون مربع ل ش مثلَ ضرب ب ش في الضلع القائم، ويكون

1 تحدثان: يحدثان – 2 تحدث: يحدث – 3 تحدثان: يحدثان – 4 تحدث: يحدث – 5 خطوط: خطوطا – 6 تقع: يقع / خطوط: خطوطا – 7 تكون: يكون / والتي: التي – 9 أحدهما: لعلها «أعظمهما» أو «أكبرهما» ثم نقلها الناسخ «أحدهما» وهذا هو المقصود هنا – 11 فلينته: فلنبتيه، نسخت هكذا – 12 الذي: الذين / تحدث: يحدث – 14 فالذي: والذي.

مربع م ع مثل ضرب ب ع في الضلع القائم، ويكون مربع ن ف مثل ضرب ب ف في الضلع القائم. فنسبة مربع ا جـ إلى مربع ل ش كنسبة جـ ب إلى ب ش، ونسبة مربع ل ش إلى مربع م ع كنسبة ش ب إلى ب ع، ونسبة مربع م ع إلى مربع ن ف كنسبة ع ب إلى ب ف. فخطوط ب جـ ب ش ب ع ب ف نسبةُ بعضِها إلى بعضٍ كنسبة مربعات خطوط ا جـ ل ش م ع ن ف بعضها إلى بعض. ولأن خط ن ف مثلُ خط جـ ط وخطَّ م ع مثلُ خط جـ ح وخطَّ ح جـ ضعفُ خط جـ ط، يكون م ع ضعفَ خط ن ف. ولأن أقسام ا ك ك ح ح ط ط جـ متساوية، يكون ك جـ ثلاثةَ أمثال جـ ط، فخط ل ش ثلاثةُ أمثال ن ف. وكذلك ا جـ أربعة أمثال جـ ط، فـ ا جـ أربعة أمثال ن ف. فبالمقدار الذي به خط ن ف واحد، يكون م ع اثنين ويكون ل ش ثلاثة ويكون ا جـ أربعة. فنسب خطوط ن ف م ع ل ش ا جـ بعضِها إلى بعض كنسب الأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد، المتزيّدة بواحدٍ واحدٍ، بعضها إلى بعضٍ. وكذلك لو كانت الخطوط أكثر عددًا من هذه لكانت [يكون] كلُّها على نسب الأعداد المتوالية. فيكون من أجل هذه الحال نِسَبُ مربعات خطوط ن ف م ع ل ش ا جـ بعضها إلى بعضٍ كنسب مربعات الأعداد المتوالية بعضها إلى بعض. ونسب مربعات خطوط ن ف م ع ل ش ا جـ بعضها إلى بعض كنسب خطوط ب ف ب ع ب ش ب جـ بعضها إلى بعض. فنسب خطوط ب ف ب ع ب ش ب جـ بعضها إلى بعض كنسب ⟨مربعات⟩ الأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد المتزيّدة بواحدٍ واحدٍ، بعضها إلى بعض. وخطُّ ب ف مثل ض ن، وب ع مثلُ س م، وب ش مثل ر ل، وب جـ مثل هـ ا. فخطوط ض ن س م ر ل هـ ا على نسبة الأعداد المربعات المتوالية المبتدئة من الواحد، بعضها إلى بعضٍ. وخطوط ض ط س ح ر ك هـ ا متساوية.

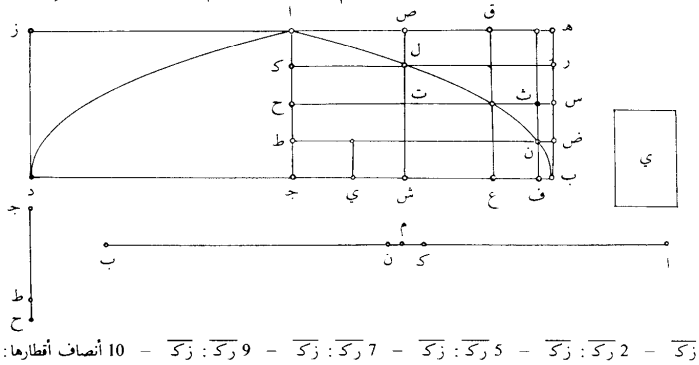
وقد تبيّن في المقدمات التي قدمناها أنه إذا كانت خطوط مستقيمة متساوية وفُصل منها خطوط، وبقي منها خط لم يُقسم، وكانت نسب الخطوط التي قُسمت إلى الخط الذي لم يقسم متواليةً على نسب الأعداد المربعات المتوالية المبتدئة من الواحد، فإن مربعات الفضلات التي بقيت من الخطوط مجموعةً أقلُّ من ثلث وخمس مجموع مربعات جميع الخطوط المتساوية المساوية لأعظم الخطوط، وإن مربعات الفضلات مجموعةً مع مربع الخط الذي لم يقسم، أعظمُ من ثلث وخمس مجموع مربعات / جميع الخطوط المتساوية. فمربعات خطوط ن ط م ح ٦٦ - ظ

1 ويكون: فيكون – 7 ل ش: ل ن – 9 ل ش: ل س / ل ش: ل س – 12 ل ش: ل س – 13 ل ش: ل س – 14 ب ش: ب س – 15 ب ش: ب س – 17 ر ل (الأولى والثانية): ز ل – 18 خطوط: صححها عليها / ض ط: ص ط / ر ك: ز ك – 20 نسب: نسبة / إلى: مع – 21 الفضلات: الفصلات – 23 الفضلات: الفصلات.

ل ك أقلُّ من ثلث وخمس مربعات خطوط ض ط س ح ر ك ا هـ ؛ ومربعات خطوط ن ط م ح ل ك ا هـ أعظمُ من ثلث وخمس مربعات ⟨خطوط⟩ ض ط س ح ر ك ا هـ.

ونسبة مربعات الخطوط بعضها إلى بعضٍ كنسبة الدوائر التي أنصافُ أقطارها تلك الخطوطُ، بعضها إلى بعض. فالدوائر التي أنصافُ أقطارها خطوطُ ن ط م ح ل ك أقلُّ من ثلث وخمس الدوائر التي أنصافُ أقطارها ض ط س ح ر ك ا هـ. والدوائر التي أنصاف أقطارها ن ط م ح ل ك هـ ا أعظم من ثلث وخمس الدوائر التي أنصاف أقطارها خطوط ض ط س ح ر ك هـ ا. ونجعل خط ا ك ارتفاعًا مشتركًا، فيكون الأساطين الصغار التي قواعدها الدوائر – التي أنصافُ أقطارها خطوطُ ن ط م ح ل ك – وارتفاعها مساوٍ لخط ا ك أقلَّ من ثلث وخمس الأساطين التي قواعدُها الدوائر، التي أنصاف أقطارها خطوط ض ط س ح ر ك هـ ا وارتفاعها مساوٍ لخط ا ك. والأساطين التي قواعدها الدوائر – التي أنصاف أقطارها خطوط ن ط م ح ل ك – وارتفاعها مساوٍ لخط ا ك هو المنشور الذي قاعدته الدائرة – التي نصف قطرها خط ج ف المساوي لخط ن ط – ورأسُه الدائرة التي نصف قطرها خط ل ك، لأن ارتفاعات ك ح ح ط ط ج كلٌّ واحد منها مساوٍ لخط ا ك. والأساطين التي قواعدها الدوائرُ – التي أنصاف أقطارها خطوط ض ط س ح ر ك هـ ا – وارتفاعُها مساوٍ لخط ا ك، هي الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة – التي نصف قطرها خطُّ هـ ا – وارتفاعها خط ا ج، وهي أسطوانة ب ز. فالمنشور الذي قاعدته الدائرة – التي نصف قطرها خط ف ج – ورأسه الدائرة التي نصف قطرها ل ك، أقل من ثلث وخمس أسطوانة ب ز.

وهذا المنشورُ هو المنشورُ الذي في داخل المجسم المكافئ، الذي تبيّن أنه أعظمُ من ثلث وخمس أسطوانة ب ز؛ وهذا خُلْف. فليس المجسم المكافئ بأعظمَ من ثلثِ وخمسِ الأسطوانة.



1 ر ك : ز ك – 2 ر ك : ز ك – 5 ر ك : ز ك – 7 ر ك : ز ك – 9 ر ك : ز ك – 10 أنصاف أقطارها : انصافها قطارها – 14 ر ك : ز ك.

وأقول: إنه ليس بأصغرَ من ثُلثها وخُمسها أيضًا.

فإن أمكن، فليكن هذا المجسّم أصغرَ من ثلث وخمس الأسطوانة، وليكن أصغرَ من ثلثها وخمسها بمقدار مجسّم ي. ونقسم الأسطوانةَ بالمدورات كما عملنا من قبل، فيبقى المدورات التي تحدث من استدارة سطوح ب ن ن م م ل ل ا أصغرَ من مجسم ي. فيكون أقسام هذه المدوّرات الخارجة عن المجسم المكافئ المحيطة به أصغر بكثيرٍ من مجسم ي.

فالمجسّم المكافئ مع هذه الأقسام أصغرُ من ثلث وخمس الأسطوانة. والمجسّم المكافئ مع هذه الأقسام هو المنشور الذي قاعدته الدائرة – التي نصف قطرها خط ب ج – ورأسه الدائرة التي نصف قطرها خط ا ص. فهذا المنشور أقلُّ من ثلث وخمس أسطوانة ب ز.

وقد تبيّن أن الدوائر التي أنصافُ أقطارها خطوطُ ن ط م ح ل ك ه ا أعظمُ من ثلث وخمس الدوائر التي أنصافُ أقطارها / خطوط ض ط س ح ر ك ه ا. ونجعل ا ك ارتفاعًا ٦٧ - و مشتركًا، ونأخذ ب ج بدل ه ا لأنه مساوٍ له. فالأساطينُ الصغار التي قواعدُها الدوائر – التي أنصافُ أقطارها خطوط ب ج ن ط م ح ل ك – وارتفاعاتها مساوية لخط ا ك أعظمُ من ثلث وخمس الأساطين التي قواعدها الدوائر – التي أنصاف أقطارها خطوط ب ج ض ط س ح ر ك – وارتفاعاتها مساوية لخط ا ك. والأساطين التي قواعدها الدوائر – التي أنصاف أقطارها خطوط ب ج ن ط م ح ل ك – وارتفاعاتها مساوية لخط ا ك، هي الأساطين التي تحدث من استدارة سطوح ب ط ن ح م ك ل ا. والأساطين التي تحدث من استدارة هذه السطوح مجموعُها هو المنشورُ الذي قاعدتُه الدائرة – التي نصف قطرها ب ج – ورأسُه الدائرة التي نصف قطرها ص ا. والأساطين التي قواعدها الدوائر – التي أنصاف أقطارها خطوطُ ب ج ض ط س ح ر ك – وارتفاعاتها مساويةٌ لخط ا ك، هي الأساطين التي تحدث من استدارة سطوح ب ط ض ح س ك ر ا. وهذه الأساطين بمجموعها هي الأسطوانةُ التي تحدث من استدارة سطح ب ا، لأن مجموع السطوح التي ذكرناها هو سطحُ ب ا، التي هي أسطوانة ب ز. فالمنشور الذي قاعدته الدائرة – التي نصف قطرها خط ب ج – ورأسه الدائرة – التي نصف قطرها ص ا – أعظمُ من ثلث وخمس أسطوانة ب ز.

4 تحدث: يحدث – 10 ض ط: ص ط / ر ك: د ك – 13 ض ط: ص ط – 14 ر ك: ز ك – 18 ض ط: ص ط – 19 ر ك: ز ك / تحدث: يحدث – 20 ض ح: ص ح / ر ا: ز ا / تحدث: يحدث.

وقد كان تبيّن أن هذا المنشور أقلُّ من ثلث وخمس أسطوانة ب ز، وهذا خُلْفٌ لا يمكن. فليس مجسّم ب ا د المكافئ بأصغرَ من ثلثِ وخمسِ أسطوانة ب ز.

وقد تبيّن أنه ليس بأعظمَ من ثلثها وخمسها. فمجسم ب ا د المكافئ ثلثُ وخمسُ أسطوانةِ ب ز؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وإذا كانت زاوية ا ج ب حادةً أو منفرجةً، عملنا في القِطْع كما عملنا في الصورة الثانية والثالثة من الشكل الذي قبل هذا. فيتبيّن – كما تبيّن من ذلك الشكل – أن المجسّم المكافئ ثلثُ وخمسُ الأسطوانة القائمة التي قاعدتُها الدائرة – التي نصفُ قطرها العمودُ الواقعُ من طرف القطر على خط الترتيب – وارتفاعُها مساوٍ لخط الترتيب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

〈تعقيبات على النوع الثاني〉

ويتبيّن – كما تبيّن في الشكل الذي قبلَ هذا – أن المدوَّراتِ الصغارَ التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها مساويةٌ بمجموعها للمدوّرة التي تحدث من استدارة سطح ب ط.

لأن المدوراتِ الصغارَ نسبتُها إلى الأسطوانة نسبةُ النصف ونصف النصف، وكذلك المدوّرةُ التي تحدث من استدارة سطح ب ط. وكلما قُسمت المدورات التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها، انقسمت المدورةُ – التي تكون من استدارة سطح ب ط – بنصفين. فالمدورات التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها مساويةٌ للمدورة التي تكون من استدارة سطح ب ط.

〈المدورات الصغار〉

ونجعل ا ب هو العددَ المربع النظير لخط هـ ا، لأن خطوط ض ن س م ر ل هـ ا على نسبة الأعداد المربعات المتوالية المبتدئة من الواحد. ونقسم ا ب بنصفين على نقطة ن، ونجعل ن ك

5 عملنا (الثانية): طمست فكتبها الناسخ فوقها – 10 يمر: تمر – 13 تحدث: يحدث / يمر: تمر – 14 تكون: يكون – 15 يمر: تمر / تكون: يكون – 17 ض ن: ص ن / ر ل: ز ل.

ثُلث عُشر اب ؛ فيكون ب ك ثُلثَ وخُمسَ اب. وليكن جـ ح ضلعَ عدد اب المربع ، ونجعل ح ط ثُلثَ عُشر واحد ، ونجعل نسبة ح ط إلى ن م كنسبة اب إلى جـ ح ؛ فيكون ضرب اب في ن م مثلَ ضرب جـ ح في ح ط. وضربُ جـ ح في ح ط هو ثلثُ عُشر جـ ح ، لأن ح ط ثلثُ عشرِ واحد. فضربُ اب في م ن ثلثُ عشر جـ ح ، وضربُ اب في ك ن ثلثُ عشر مربع اب. فضربُ اب في ك م هو ثلثُ عشر مربع اب إلا ثلثَ عشر ضلع اب. وقد تبيّن في المقدّمات العددية التي قدمناها أن مربعات الأعداد النظيرة لخطوط ل ك م ح ن ط مجموعةً تزيد على ثلث وخمس مربعات الأعداد النظائر لخطوط ر ك / س ح ض ط بثلث عُشر مربع العدد ٦٧ - ظ النظير لخط اهـ إلا ثلث عُشر ضلع هذا العدد. فمربعات الأعداد النظائر لخطوط ل ك م ح ن ط تزيد على ثلث وخمس مربعات الأعداد النظائر لخطوط ر ك س ح ض ط بضرب اب في ك م. وضرب اب في ب ك هو ثلث وخمس مربع اب. فمربعات الأعداد النظائر لخطوط ل ك م ح ن ط مع ضرب اب في ب م هو ثلثُ وخمس مربعات الأعداد النظائر لخطوط ر ك س ح ض ط ب جـ.

ونجعل نسبة مربع ب جـ 〈إلى مربع جـ ي〉 كنسبة اب إلى ب م. ونسبةُ اب إلى ب م كنسبة مربع اب إلى ضرب اب في ب م. فنسبة مربع ب جـ إلى مربع جـ ي كنسبة مربع اب إلى ضرب اب في ب م ، فمربع جـ ي مساوٍ لضرب اب في ب م ، ونخرج خط ي لا موازيًا لخط ط جـ ، فلأنّ ضرْبَ اب في ب م مع مربعات الأعداد النظائر لخطوط ل ك م ح ن ط هو ثلثُ وخمسُ مربعات الأعداد النظائر لخطوط ر ك س ح ض ط ب جـ ، يكون مربعات خطوط ل ك م ح ن ط ي جـ هي ثلث وخمسَ مربعات خطوط ر ك س ح ض ط ب جـ. والدوائر أيضًا ، التي أنصاف أقطارها هذه الخطوط ، هي أيضًا في هذه النسبة. والمدروات أيضًا ، التي قواعدها هذه الدوائر وارتفاعاتُها خطوط اك ك ح ح ط ط جـ ، هي أيضًا في هذه النسبة. فالمنشور الذي في داخل المجسم المكافئ – وهو الذي رأسُه الدائرة ، التي نصفُ قطرها ل ك ، وقاعدته الدائرة التي نصف قطرها ف جـ – مع المدوّرة التي تحدث من استدارة سطح ي ط ، هو ثلثُ وخمس المدوّرات التي قواعدها الدوائر – التي أنصاف أقطارها خطوط ر ك س ح ض ط ب جـ – وارتفاعاتُها خطوط اك ك ح ح ط ط جـ. وهذه المدورات هي

3-4 ثلث عشر: ثلث وعشر – 4 ثلث عشر (الأولى): ثلث وعشر – 7 ر ك: ز ك / ض ط: ص ط – 9 ر ك: ن ك / ض ط: ص ط – 12 ض ط: ص ط – 17 ر ك: ز ك / ض ط: ص ط – 18 ر ك: ز ك / ض ط: ص ط – 22 تحدث: يحدث – 23 هو: هي – 24 ر ك: ز ك / وارتفاعاتها: وارتفاعها.

أسطوانة ب ز. فالمنشور الذي في داخل المجسم المكافئ مع المدورة التي تحدث من استدارة سطح ي ط هو ثلث وخمس أسطوانة ب ز. لكن المجسّم المكافئ هو ثلث وخمس أسطوانة ب ز. فالمنشور الذي في داخل المجسم المكافئ مع المدورة التي تحدث من استدارة سطح ي ط مساوٍ للمجسّم المكافئ. فالمدوّرة التي تحدث من استدارة سطح ي ط مساويةٌ لأجزاء المدوّرات الصغار التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها التي هي في داخل المجسم المكافئ.

وقد كان تبيّن أن جميع المدوّرات الصغار مساويةٌ لجميع المدوّرة التي تحدث من استدارة سطح ب ط. فأجزاءُ المدوّرات الصغار التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها – التي هي خارجةٌ عن المجسم المكافئ ومحيطةٌ به – مساويةٌ للمدوّرة التي تحدث من استدارة سطح ب لا. ونسبة الأجزاء الخارجة من هذه المدوّرات إلى الأجزاء الداخلة منها كنسبة المدوّرة التي تحدث من استدارة سطح ب لا إلى المدورة التي تحدث من استدارة سطح ي ط. ونسبة هاتين المدوّرتين – إحداهما إلى الأخرى – كنسبة قاعدتيْها، إحداهما إلى الأخرى. ونسبة قاعدتيها – إحداهما إلى الأخرى – كنسبة فضْل مربع ب ج على مربع ج ي إلى مربع ج ي. ونسبة فضْل مربع ب ج على مربع ج ي إلى مربع ج ي كنسبة ا م إلى م ب، لأن نسبة مربع ب ج إلى مربع ج ي كنسبة ا ب إلى ب م. فنسبة أجزاء المدورات الصغار، الخارجة عن المجسم المكافئ، إلى أجزائها الداخلة في المجسم المكافئ كنسبة عدد ا م إلى عدد م ب.

ويلزم هذه النسبةُ في كلٍّ واحدةٍ من المدوَّرات كما تبيّن في الشكل الذي قبل هذا. ويلزم من هذه النسبة أن يكون المُدوَّرات الصغار، كلما صغُرت، كانت نسبة الأجزاء الخارجة منها إلى الأجزاء الداخلة أعظمَ من نسبة الأجزاء الخارجة من المدورات، التي هي أعظمُ منها، إلى أجزائها الداخلة. وذلك أن المدوَّرات الصغارَ، / كلما صغُرت، كثرت الخطوطُ النظائر لخطوط ٦٨ - و ل ك م ح ن ط ج ب ؛ فيكثر الخطوطُ النظائر لخطوط ض ن س م ر ل هـ ا ؛ فيكون العدد المربعُ النظيرُ لخط ا هـ أعظمَ من عدد ا ب ؛ فيكون نسبته إلى ضلعه أعظمَ من نسبة ا ب إلى ج ح ، لأن الأعداد المربعة المتوالية، كلُّ ما كان منها أبعدَ عن الواحد، كانت نسبتُه إلى ضلعه أعظمَ. فيكون ⟨نسبة⟩ ثُلث عشر الواحد – الذي هو مثلُ ح ط – إلى العدد النظير لعدد ن م أعظمَ من نسبة ح ط إلى ن م. فيكون العدد النظير لعدد ن م أصغرَ من ن م ، ويكون نصف

1 تحدث: يحدث – 3 تحدث: يحدث / مساو: مساوية – 4 فالمدورة: فالمدور / تحدث: يحدث – 5 يمر: تمر – 6 مساوية: مكررة – 7 يمر: تمر – 9 الأجزاء الخارجة: اجزا الخارجة – 20 ج ب: ا ب / ض ن: ص ن / ر ل: ز ل / العدد: عدد – 21 نسبته: نسبة – 22 كل ما: كلما.

العدد المربع النظير لعدد ن ب أعظمَ من ن ب. فيكون نسبة م ن إلى ن ب أعظم من نسبة العدد النظير لـ ن م إلى العدد النظير لـ ن ب من المربع الأعظم النظير لعدد ا ب. وبالتركيب يكون نسبة م ب إلى ب ا أعظمَ من نسبة العدد النظير لـ ن م إلى العدد النظير لـ ن ب. ونسبة م ب إلى ب ا كنسبة نصف ذلك العدد إلى جميع ذلك العدد. فيكون نسبة م ب إلى ب ا أعظمَ من نسبة العدد النظير لعدد م ب من المربع الأعظم إلى ذلك المربع الأعظم. وبالعكس يكون نسبة ذلك العدد المربع الأعظم إلى الجزء منه النظير لعدد ب م أعظمَ من نسبة ا ب إلى ب م. وبالتفصيل يكون نسبة العدد النظير لعدد ا م إلى العدد النظير لعدد م ب أعظم من نسبة ا م إلى م ب، فيكون نسبة الأجزاء الخارجة من المدوَّرات التي هي أصغرُ إلى أجزائها الداخلة أعظمَ من نسبة الأجزاء الخارجة من المدورات التي هي أعظمُ منها إلى أجزائها الداخلة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ويلزم في هذا النوع أيضًا أن كلَّ قِطْع مكافئ يكون خطُّ ترتيبه يحيط مع قطره بزاويتين مختلفتين، فإن المجسم الذي يحدث من القسم الحادّ الزاوية مساوٍ للمجسم الذي يحدث من القسم المنفرج الزاوية، لأن أسطوانتيْها تكونان متساويتين، لأن ارتفاعي الأسطوانتين مساويان لخطي الترتيب، وخطَّا الترتيب متساويان، ونصف قطر قاعدة كلٍّ واحدة من الأسطوانتين هو العمودُ الواقع من طرف القطر على خط الترتيب، وهو عمود واحد. فالمجسمان اللذان يكونان من القسمين، يكونان متساويين.

وكذلك المجسّمُ – الذي يكون من القِطْع الذي قطرُه مساوٍ للعمود الواقع من طرف القطر على خط الترتيب، وخط ترتيبه مساوٍ لخط ترتيب القِطْع المختلف الزاويتين – يكون مساويًا لكل واحد من المجسّمين الحادثين من القطعين المختلفي الزاويتين.

ويكون نسب المجسمات المكافئة التي من هذا النوع، بعضها إلى بعضٍ، على مثل ما تبيّن في النوع الأول.

3 إلى العدد النظير لـ ن ب – 4 م ب (الأولى) : ن ب – 7 وبالتفصيل: وبالتفضيل – 12 مختلفتين: مختلفين – 13 تكونان: يكونان / مساويان : مساويين.

〈برهان الخلف〉

ولأنه قد يشْكُل على كثير من الناس برهانُ الخُلْفِ إذا كان على صفة برهان هذين الشكلين، وذلك أنه ربما ظن قوم، لم يُنعموا النظر، أنه لو فرض المجسم المكافئ جزءًا من الأسطوانة غيرَ الثلث والخمس في هذا النوع، وغيرَ النصف في النوع الأول، لقد كان يطَّرد فيه برهانٌ مثل البرهان الذي ذُكر في هذين الشكلين – وجب من أجل هذه الحال أن نكشف العلة التي بها تم هذا البرهان، والتي أنتجت المطلوب، وهذا المعنى الذي من أجله صار المجسّم المكافئ – الذي يحدث من إدارة القطع حول خط ترتيبه – ثلثًا وخمسًا، وصار المجسم المكافئ الذي يحدث من إدارة القطع حول قطره – نصفًا.

فنقول: إن العلة التي بها يتبيّن أن المجسم المكافئ – الذي يحدث من إدارة القطع حول ترتيبه – ثُلث وخمس، هي أن كلَّ منشور يقع في داخل المجسم المكافئ – على الصفة التي شرحناها في البرهان – هو أقلُّ / من ثلث وخمس الأسطوانة وكلَّ منشور يحيط بالمجسم المكافئ – ٦٨ – ظ على الصفة التي شرحناها أيضًا في البرهان – هو أعظمُ من ثلث وخمس الأسطوانة؛ وأن كلَّ جزءٍ يُفرض غير الثلث والخمس، فقد يوجد في داخل المجسم المكافئ منشوراتٌ كثيرة على هذه الصفة التي تقدمت، ومحيطًا به منشورات كثيرة، يكون الداخلةُ والخارجةُ معًا إما أعظمَ من ذلك الجزء وإما أصغرَ من ذلك الجزء؛ ولا يوجد جزءٌ يكون كلُّ منشورٍ يقع في داخل المجسم المكافئ أصغرَ منه؛ وكلُّ منشور يحيط بالمجسم المكافئ أعظمُ منه غيرَ الثلث والخمس فقط؛ وإن هذا المعنى هو الذي أنتج البرهان. وأعني بالجزء فيما مضى من قولي، وفيما يأتي من بعدُ، البعضَ. فقد بقي أن نبيّن هذا الذي ذكرناه بالبرهان.

ولنفرض جزءًا ما أقلَّ من ثلث وخمس الأسطوانة، فأقول: إنه قد يوجد في داخل المجسم المكافئ منشوراتٌ كثيرة، كلُّ واحد منها أعظمُ من ذلك الجزء. وذلك أن الجزء المفروض الذي هو أقلُّ من ثلث وخمس الأسطوانة يكون الفضل الذي بينه وبين ثلث وخمس الأسطوانة مقدارًا ما. فإذا قُسمت الأسطوانة بالمدوَّرات بنصفين، ونصفُها بنصفين، وفُعل ذلك دائمًا، فلا بدّ أن يبقى من الأسطوانة مقدارٌ هو أصغرُ من تلك الفَضْلة. والذي يبقى من الأسطوانة إذا قُسمت 〈هو〉

2 يشكل: تشكل – 6 والتي: والذي – 10 ثلث وخمس: ثلثا وخمسا – 16 منه: مطموسة – 21 مقدارًا: مقدار – 23 الفضلة: الفصلة.

المدوَّراتُ الصغار التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها، وتلك المدوَّراتُ مساويةٌ للمدورة النظيرة للمدورة التي تحدث من استدارة سطح ب ط. فيكون المدوَّرة النظيرة للمدورة التي تحدث من استدارة سطح ب ط أصغرَ من تلك الفَضْلة. فيكون المدوّرات التي تحدث من استدارة السطح النظير لسطح ي ط أصغرَ بكثير من تلك الفَضْلة. فيكون الجزء الذي فُرض مع المدوَّرة التي تحدث من استدارة السطح النظير لسطح ي ط أصغرَ من الثلث والخمس. وقد تبيّن أن المنشور الذي يقع في داخل المجسم المكافئ مع المدوَّرة التي تحدث من استدارة السطح النظير لسطح ي ط هو ثلثُ وخمسُ الأسطوانة. فيكون المنشور مع المدورة التي تحدث من استدارة السطح النظير لسطح ي ط أعظمَ من ذلك الجزء مع هذه المدوَّرة بعينها. فيكون المنشور الذي يقع في داخل المجسم المكافئ أعظمَ من ذلك الجزء. وإذا قُسمت المدوَّرات الصغار أيضًا ⟨من بعد⟩ هذه الحالِ، بالتنصيف مرةً بعد مرة، كانت البقايا التي تبقى من الأسطوانة، كلٌّ بقيةٍ منها أصغر من البقية التي قبلها. فيكون المنشورات التي تحدث في داخل المجسم المكافئ، كلٌّ واحدٍ منها أعظم بكثير من ذلك الجزء. فتبيّن من هذا البيان أن كلَّ مقدار يفرض أقلّ من الثلث والخمس، فإنه يوجد في داخل المجسم المكافئ منشوراتٌ كثيرةٌ، كلٌّ واحد منها أعظمُ من الجزء.

وأيضًا فإنا نفرض جزءًا ما أعظمَ من الثلث والخمس، فيكون بينه وبين الثلث والخمس فَضْلة. فإذا قُسمت الأسطوانة بالمدوَّرات بنصفين، ونصفها بنصفين، وفُعل ذلك دائمًا، فيبقى منها بقيةٌ هي أقلُّ من الفضلة. والبقيةُ التي تبقى من الأسطوانة هي المدوَّارت الصغارُ التي يمرّ سطح المجسم المكافئ بأوساطها وهي مساويةٌ للمدوَّرة النظيرة للمدوَّرة التي تحدث من استدارة سطح ب ط. فيكون المدوَّرة التي تحدث من استدارة السطح النظير لسطح ب ط أصغرَ من تلك الفضلة. فيكون ثلث وخمس الأسطوانة مع المدورة التي تحدث من استدارة السطح النظير لسطح ب ط أصغر من ذلك الجزء. فيكون الثلث والخمس مع المدوَّرة التي تحدث من استدارة السطح النظير لسطح ب لا أصغرَ بكثير من ذلك الجزء. لكن الثلث والخمس مع المدورة التي تحدث من استدارة السطح النظير لسطح ب لا هو المنشورُ المحيط بالمجسّم المكافئ، لأن المنشور المحيطَ بالمجسم المكافئ يزيد على الثلث والخمس بالمدوَّرة التي تحدث من استدارة السطح النظير / ٦٩ – و
لسطح ب لا. فيكون المنشور المحيط بالمجسّم المكافئ أصغرَ من ذلك الجزء المفروض، الذي هو

1 المدورات: بالمدورات / يمر: تمر – 2 تحدث: يحدث – 10 بالتنصيف: مالتنصيف – 16 يمر: تمر – 17 للمدورة (الثانية): المدورة / تحدث: يحدث – 18 تحدث: يحدث – 19 تحدث: يحدث.

أعظمُ من الثلث والخمس. وإن قُسمت المدوَّرات الصغار من بعد هذه الحال أيضًا بالتنصيف كانت المنشورات التي تحدث، المحيطة بالمجسّم المكافئ، كلُّ واحدٍ منها أصغرُ بكثير من ذلك الجزء.

وكلُّ جزء يُفرض ويكون أصغر من ثلث وخمس الأسطوانة، فقد يوجد منشورات كثيرة في داخل المجسّم المكافئ كلُّ واحد منها أعظمُ من ذلك الجزء. ويكون المنشورات المحيطة بالمجسّم المكافئ المقترنة بتلك المنشورات كلُّ واحد منها أيضًا أعظمُ من ذلك الجزء، لأنه أعظم من المنشور الذي في داخل المجسّم.

وكلُّ جزء يفرض ⟨و⟩يكون أعظمَ من ثلث وخمس الأسطوانة، فقد يوجد منشورات كثيرة محيطة بالمجسم المكافئ كلُّ واحد منها أصغرُ من ذلك الجزء. ويكون المنشورات التي في داخل المجسّم المكافئ، المقترنة بتلك المنشورات؛ كلُّ واحد منها أيضًا أصغرُ من ذلك الجزء، لأنه أصغرُ من المنشور المحيط بالمجسّم.

وكلُّ جزء يُفرض غير الثلث والخمس فقد يوجد منشورات كثيرة في داخل المجسم المكافئ ومنشوراتٌ كثيرة محيطة بالمجسم المكافئ، يكون الداخلة والخارجة معًا إما أعظمَ من ذلك الجزء وإما أصغرَ من ذلك الجزء.

وقد تبيّن من قبل أن كلَّ منشورٍ يقع في داخل المجسّم المكافئ فهو أصغرُ من ثلث وخمس الأسطوانة، وكلَّ منشور يحيط بالمجسّم المكافئ فهو أعظمُ من ثلث وخمس الأسطوانة. فيستبين من هذا البيان أنه لا جزءَ من أجزاء الأسطوانة – أعني لا مقدارَ هو بعضُ الأسطوانة – يكون كلُّ منشور يقع في داخل المجسّم المكافئ أصغرَ منه، وكلُّ منشور يحيط بالمجسّم المكافئ أعظم منه غير الثلث والخمس. والمجسّم المكافئ هو بعض الأسطوانة، وكلُّ منشور يقع في داخله فهو أصغرُ منه، وكلُّ منشور يحيط به فهو أعظمُ منه. فإذا كان المجسّم المكافئ بعضَ الأسطوانة، وكان كلُّ منشور يقع في داخله أصغرَ منه، وكلُّ منشور يحيط به فهو أعظمُ منه، وكان لا بعض من أبعاض الأسطوانة يكون كلُّ منشور يقع في داخل هذا المجسم أصغرَ منه وكلُّ منشور يحيط بهذا المجسم أعظم منه إلا الثلثَ والخمسَ، وجب أن يكون المجسّم المكافئ هو الثلث والخمس.

فقد انكشفت العلّة التي من أجلها وجب أن يكون المجسّم المكافئ الذي يحدث من استدارة القِطْع حول خط ترتيبه ثلثَ وخمسَ الأسطوانة، ومن أجلها لا يصحّ أن يكون هذا المجسّم

6 المقترنة: المعرنة – 10 المقترنة: المقرنة.

المكافئ غيرَ الثلث والخمس، وهي أن كلَّ منشور يقع في داخل المجسّم المكافئ فهو أصغرُ من ثلثِ وخمس الأسطوانة، وكلَّ منشور يحيط بالمجسّم المكافئ فهو أعظمُ من ثلث وخمس الأسطوانة.

وعلى مثل هذه الطريقة بعينها يتبيّن في النوع الأول أن العلة – التي من أجلها لزم أن يكون المجسّمُ المكافئُ، الذي يحدث من استدارة القطع حول قطره، هو نصفَ الأسطوانة – هي أن كلَّ منشورٍ يقع في داخل ذلك المجسم المكافئ هو أصغرُ من نصف الأسطوانة، وكلَّ منشور يحيط بذلك المجسم المكافئ فهو أعظمُ من نصف الأسطوانة؛ وهي العلة التي أنتجت البرهان. والطريق في تبيُّن ذلك هو الطريق بعينه الذي يتبيّن في النوع الثاني. وإنما بيّناه في النوع الثاني لأن برهان النوع الثاني أصعبُ وأغمضُ؛ فمن أجل صعوبته وغموضه وجب أن نبيّنه ونكشفَ علتَه، ونقيس الأول عليه.

وكلُّ معنى يتبيّن ببرهان الخُلْف – بأن نَقسم من المقدار نصفَه ونصفَ نصفه أو أعظمَ من نصفه، ومما يبقى أعظمَ من نصفه إلى أن يلزم منه المحال – فإن علّته / المنتجةَ للبرهان هي شبيهةٌ ٦٩ – ظ
بالعلة التي بيناها في هذا الشكل.

فقد أتينا على تبيين مساحة نوعي المجسّم المكافئ، وكشفنا علّةَ براهينه واستوفينا الكلامَ عليه. وهذا حين نختم القولَ فيه.

تم الكتاب والحمد للّه ربّ العالمين والصلاة على النبي محمد وآله أجمعين وسلَّم.

7 أنتجت: بنحت – 9 ونكشف: وبكشف – 16 والصلاة: والصلوة.

ب – ١٤٥ – ظ
جـ – ١١٣ – و
ع – ١ – و

بسم الله الرّحمن الرّحيم

قول للحسن بن الحسن بن الهيثم
في مساحة الكرة

إن كثيرًا من المعاني الهندسية قد يُوصل إليها من عدة مقاصد، ويقوم البرهانُ عليها من عدة مسالكَ. وما زال أصحابُ التعاليم يتكلم الواحدُ منهم في المعنى الذي قد تكلم فيه غيره، ويتوصل إلى الغرض – الذي قد سَبق إليه من تقدمه – إذا وجد طريقًا إلى الكلام عليه لم يطرقه غيره ولم يسلكه أحد ممن تقدّمه. وقد تكلم عدّة من أصحاب التعاليم في مساحة الكرة وتوصلوا إلى إقامة البرهان على كمية مساحتها. وسلك كل واحد ممّن تكلم فيها طريقًا غير الطريق الذي سلكه غيره.

ولما وقع إلينا كلامُهم في هذا المعنى، ووقفنا على براهينهم، فكّرنا في مساحة الكرة: هل يمكن أن يوصَل إليها من غير الوجوه التي وصَل بها من تكلم فيها؟ فلما أنعمنا النظر في ذلك، عنّ لنا مسلكٌ يُوصل إلى مساحة الكرة، أوجزُ وأخصرُ من جميع المسالكِ التي سلكها مَن تقدَّمَنا، وأوضحُ مع ذلك برهانًا، وأظهرُ بيانًا. فساغ لنا بهذه الحالِ أن نتكلم على مساحة الكرة، وإن كان قد سَبق إلى الكلام عليها عدّةٌ من أصحاب هذه الصناعة.

1 بعد البسملة نقرأ «وبه نستعين» [ب] «ثقتي بالله وحده» [ع] «عونك اللهم وتوفيقك» [جـ] – 2-3 قول ... الكرة: ناقصة إلاّ أن ناسخ [ب] كتب عنوان الرسالة في صفحة قبل هذه – 2-14 قول ... الصناعة: الثالث من الموسّطات ما يحتاج إليه من كتاب الكرة والأسطوانة لأرشميدس وهو مساحة الكرة فأوردنا ذلك بتلخيص الشيخ أبي علي بن الهيثم وشرحه ويحتاج إلى هذا القدر لمعرفة مساحة جرم الأرض ومساحة أجرام الكواكب وتكسيراتها بالحقيقة [جـ] – 6 الغرض: العرض [ب] – 11 من (الثانية): ناقصة [ع].

〈آ〉 ونحن نقدّم لذلك مقدمةً عددية قريبة المأخذ، يسهل بها فهمُ ما يُقصد له، وهي أنه: إذا كانت أعدادٌ متوالية مبتدئة من الواحد، متزيّدة بواحدٍ واحد، ثم أُخذ ثلث أعظمِها وثلثُ الواحد، وجمعا، وضُرب ذلك في أعظم الأعداد، ثم أضيف إلى العدد الأعظم نصفُ الواحد، وضرب ذلك في الذي كان خرج من الضرب الأول، كان الذي يجتمع هو مجموع مربعات تلك الأعداد.

وقد بيّنا هذه المقدمةَ بالبرهان المحقق في كتابنا في مساحة المجسم المكافىء، ونحن نستأنف البرهانَ عليها في هذا القول، لئلا يكونَ هذا القول محتاجًا إلى غيره.

فلتكن أعداد ا ب ب ج ج د د هـ أعدادًا متوالية مبتدئة من الواحد، متزيّدة بواحد واحد.

فأقول: إنه إذا ضرب ثلث د هـ مع ثلث الواحد في عدد د هـ، ثم أضيف/ إلى د هـ نصف ب – ١٤٦ – و
واحد، وضرب ذلك فيما كان خرج من الضرب 〈الأول〉، كان الذي يجتمع هو مجموع مربعات ا ب ب ج ج د د هـ.

برهان ذلك: أنا نجعل ب ز // مثلَ ب ا وج ح مثل ج ب وط د مثل د ج وك هـ مثل ج – ١١٣ – ظ / ع – ١ – ظ
هـ د، ونجعل كل واحد من ز ف ح ن ط م ك ل واحدًا.

ونقول أولاً: إن نصف مربع د هـ مع نصف د هـ هو مجموعُ أعداد ا ب ب ج ج د د هـ التي هي ا هـ.

وذلك أن ج ب يزيد على ب ا بواحدٍ وج د ينقص عن د هـ بواحد. فـ ا ب مع د هـ مثلُ ج ب مع ج د. وكذلك إن كانت الأعداد أكثر عدّةً من هذه، فإن الطرفين منها مساويان بمجموعها للعددين اللذين يليانها، واللذان يليانها مساويان 〈بمجموعها〉 للذين يليانها، وكذلك

2 ونحن: قال [جـ] / أنه: ناقصة [جـ] – 3 متزيّدة: مزيدة [ب، جـ] متزايدة [ع] – 7 المحقق: ناقصة [ع] / نستأنف: مطموسة [ع] – 8 عليها: على ما [ع] / هذا القول: مطموسة [ع] – 7-8 وقد ... غيره: ناقصة [جـ] – 9 الواحد: ناقصة [ب] / متزيدة: ناقصة [ب] متزايدة [جـ] – 14 جـ ب: ح ب [ب] – 15 هـ د: د هـ [جـ] / ز ف ح ن: ز ق ح له [جـ] – 16 ونقول: فنقول [ع] – 18 أن: مكررة [جـ] / جـ ب: جـ د [جـ] / ب ا: ا ب [جـ] / ينقص: نقص [جـ] / د هـ (الأولى): جـ هـ [ع] – 19 جـ ب: د ب [جـ] / مساويان: متساويان [ب، جـ] – 20 بمجموعها: لمجموعها [ب] / للعددين: العدد [جـ] / واللذان: واللذين [ب، ع] / مساويان: متساويان [جـ] / للذين يليانها: للعددين اللذين يليان ذينك العددين [ع] / وكذلك: ناقصة [ع] كذلك [ب، جـ].

دائمًا. فإن كانت عدّة الأعداد عددًا فردًا، فإن الأوسط منها نصفُ الطرفين، لأنه نصف العددين اللذين عن جنبتيه، وذلك أنه يزيد على الذي قبله بواحدٍ، وينقص عن الذي بعده بواحد، فهو نصف اللذين عن جنبتيه. فيلزم من ذلك أن يكون مجموع أعداد اب ب جـ جـ د د هـ ، التي هي عدد اهـ ، هو أضعافُ لعددي اب د هـ عدّتُها نصف عدّةِ أعداد اب ب جـ جـ د د هـ . وعدّةُ هذه الأعداد هي عدّةُ ما في العدد الأخير منها من الآحاد، لأن أولها الواحدُ وهي تتزيّد بواحدٍ واحد. فعدد اهـ هو أضعاف لعددي اب د هـ عدّتها نصف عدّة آحاد د هـ . فإذا ضُرب عددا اب د هـ في نصف آحاد د هـ ، كان الذي يخرج من الضرب هو جميع عدد اهـ . وضرب نصف د هـ في د هـ هو نصف مربع د هـ ؛ وضرب نصف د هـ في اب هو نصف د هـ ، لأن اب واحدٌ. فضربُ نصف د هـ في عددي اب د هـ هو نصف مربع د هـ ونصف د هـ . فعدد اهـ هو نصف مربع د هـ ونصف د هـ .

وأيضًا فإن ضرب اهـ في هـ ل هو ضربُ اهـ في ك ل وضرب اهـ في هـ ك ؛ وضرب اهـ في ك ل هو اهـ لأن ك ل واحد، وضرب اهـ في هـ ك هو ضرب د هـ في هـ ك وضرب اد في هـ ك . ولكنّ ضرب/ د هـ في هـ ك هو مربع هـ ك لأن د هـ مثل هـ ك ؛ وضرب اد في هـ ك ب - ١٤٦ - ظ
هو ضرب اد في د م لأن د م مساوٍ لـ هـ ك ؛ وذلك أن هـ ك يزيد على د ط بواحدٍ / وم د يزيد جـ - ١١٤ - و
على د ط بواحدٍ فـ م د مثل هـ ك . فضرْب اهـ في هـ ل هو اهـ نفسُه ومربع هـ ك وضرب اد في د م . وضرب اد في د م هو ضرب اد في ط م وضرب اد في د ط . وضرب اد في ط م هو اد نفسُه، لأن ط م واحد. وضرب اد في د ط هو ضرب جـ د في د ط وضرب اجـ في د ط . وضرب جـ د في د ط هو مربع د ط / لأن جـ د مثلُ د ط . وضرْب اجـ في د ط هو ضرب اجـ ع - ٢ - و
في جـ ن لأن جـ ن مثل د ط . فضرب اهـ في هـ ل هو اهـ نفسُه واد نفسه ومربع هـ ك ومربع د ط وضرب اجـ في جـ ن . وضرب اجـ في جـ ن هو اجـ نفسه ومربع جـ ح وضرب اب في

1 دائمًا: ناقصة [ع] / فإن كانت: وإن كان [ع] / منها: لها [ع] / لأنه: لأن [جـ] – 2 أنه: كتب ناسخ [جـ] «الذي» ثم أثبت الصواب فوقها – 3 نصف: النصف [جـ] / اللذين: الذي [ب، جـ] / فيلزم: فلزم [جـ] / من: ناقصة [ع] / ب جـ : د جـ [جـ] – 4 د هـ : و هـ [ب] – 5 الأخير: الآخر [جـ، ع] – 6 تتزيد: تتزايد [ع] مزيدة [جـ] / فعدد: بعدة [جـ] – 7 د هـ (الأولى): و هـ [ب] – 8 عدد: عدة [جـ] / د هـ (الأولى): حـ هـ [جـ] – 9 فضرب: فيصير [ع] / مربع: وربع [ع] – 11 اهـ : اد [جـ] / هو... ك ل : ممحوة لتآكل المخطوطة [ع] / هـ ك : هـ ل [ع] – 12 د هـ : كتب ناسخ [جـ] «ك هـ» ثم ضرب عليها بالقلم – 13 ولكن: و [جـ، ع] / هـ ك (الثانية): ك [جـ] / اد: ل د [جـ] – 14 لأن د م : ناقصة [جـ] / مساوٍ: مساوي [ع] – 15 فـ م د مثل هـ ك : فخط م د مثل خط هـ ك [ع]/ نفسه: في نفسه [ع] / ومربع: فربع [ب] – 16 وضرب اد في د م : أثبتها في الهامش [ب] ناقصة [جـ، ع] / د ط : ط د [ع] – 17 نفسه: ناقصة [ع] / د ط (الأولى والثالثة): حـ ط [ع] – 18 وضرب (الأولى): فضرب [ع] / اجـ (الأولى): اد [ع] – 19 جـ ن مثل د ط : د ط مثل جـ ن [ع] / واد نفسه ومربع هـ ك : أثبتها في الهامش [ب] / ومربع (الأولى): فربع [ع] – 20 د ط : د ك [ع] / جـ ن : د ن [جـ] / وضرب اجـ في جـ ن : ناقصة [جـ، ع].

ب ج، لأن ذلك يتبيّن كما تبيّن في عددي هـ ل د م. وضرْب ا ب في ب ف هو ا ب نفسه ومربع ب ز، لأن ب ز مثل ب ا وز ف واحد.

فضرب ا هـ في هـ ل هو ا هـ نفسُه وا د نفسه، وا ج نفسه وا ب نفسه ومربع هـ ك ومربع د ط ومربع ج ح ومربع ب ز. لكن ا هـ نفسه هو نصف مربع د هـ ونصف د هـ، وكذلك ا د هو نصف مربع ج د ونصف ج د، وكذلك ا ج هو نصف مربع ب ج ونصف ب ج، وكذلك ا ب الذي هو الواحد، هو نصف مربع ا ب ونصف ا ب. وأعداد ا ب ب ج ج د د هـ، التي هي الأعداد المتوالية، هي أعداد ب ز ج ح د ط هـ ك. فضرب ا هـ في هـ ل هو مجموع مربعات ب ز ج ح د ط هـ ك وأنصاف مربعاتها وأنصافها أنفسها.

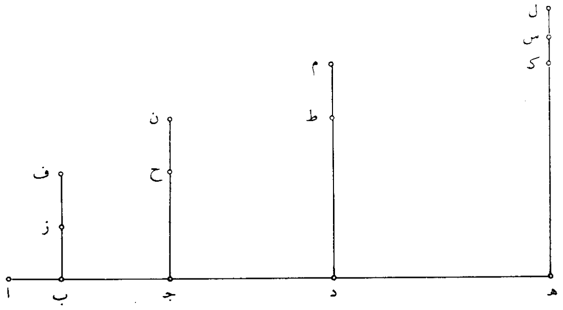
ويُقسم ل ك بنصفين على نقطة س، فيكون ضربُ ا هـ في هـ ل هو ضرب ا هـ في هـ س وضرب ا هـ في س ل. وضرب ا هـ في س ل هو نصف ا هـ لأن س ل نصف واحد. وقد كان ضرب ا هـ في هـ ل هو مجموع مربعات الأعداد المتوالية وأنصاف مربعاتها وأنصافَ الأعداد أنفسها. فيكون ضرب ا هـ في هـ س هو مجموع مربعات الأعداد المتوالية التي آخرها هـ ك وأنصاف مربعاتها/ فقط. فضرب ثلثي ا هـ في هـ س هو مجموع مربعات ب ز ج ح د ط هـ ك فقط. وقد تبيّن فيما تقدم أن ضرب نصف د هـ في مجموع ا ب د هـ هو مجموع ا هـ؛ ود هـ مثل هـ ك وا ب مثل ك ل. فضرب نصف هـ ك في هـ ل هو ا هـ. فضرْب ثلثي نصف هـ ك – الذي هو/ثلث هـ ك – في هـ ل هو ثلثا ا هـ. وضرب ثلثي ا هـ في هـ س هو مجموع مربعات ب ز ج ح د ط هـ ك. فإذا ضُرب ثلث هـ ك في هـ ل، ثم ضرب ما خرج في س هـ، كان الذي يجتمع هو مجموع مربعات ب ز ج ح د ط هـ ك. وضرْب ثلث هـ ك في هـ ل هو ضرْب ثلث هـ ل في هـ ك. وهـ ل هو هـ ك والواحد. فإذا ضُرب ثلث هـ ك مع ثُلث الواحد في هـ ك، ثم ضرب ما خرج في هـ س – الذي هو هـ ك مع نصف الواحد – كان الذي يجتمع هو مجموع

ب - ١٤٧ - و

ج - ١١٤ - ظ

1 ب ج: ب ح [ب] ب ر [ج] / لأن: ولأن [ب، ع] / ب ف: ب د [ع] / هو: وهو [ع] – 2 ز ف: ز د [ع] – 3 ومربع (الثانية): مربع [ج] – 4 ب ز: ب د [ع] / لكن: ولكن [ج] / نفسه: ناقصة [ع] / ا د: ا ح [ع] – 4-5 د هـ ونصف ... ج د (الأولى): ناقصة [ج] – 5 ج د (الثانية): ح ك [ج] / وكذلك (الأولى): كذلك [ع] – 6 الذي هو الواحد: ناقصة [ع] – 7 ب ز: ب د [ب] – 8 ب ز ج ح: رر د ح [ج] – 9 هـ ل هو ضرب: س ل هو نصف [ج] – 10 وضرب ا هـ في س ل (الأولى): أثبتها في الهامش [ع] ناقصة [ج] / س ل (الثالثة): س ك [ج] / وقد: فقد [ع] – 12 آخرها: يعدها [ع] – 13 هو: هي [ج] / ج ح: ح ع [ع] – 14 فقط: ناقصة [ع] / فيما: مما [ع] – 15 هـ ك (الثانية): ناقصة [ج] / في: ناقصة [ج] – 16 الذي ... هـ ك: ناقصة [ع] / هو (الثالثة): هي [ج] – 17 د ط: د ك [ع] / ثلث: ناقصة [ع] / س هـ: هـ س [ع] – 19 هـ ل في هـ ك. وهـ ل هو: هـ ط مع ثلث الواحد في [ع] – 18-19 في هـ ل ... ثلث هـ ك: ناقصة [ج] – 20 ما خرج: با ح ح [ع] / الواحد: كتب ناسخ [ج] بعدها «في هـ ك».

مربعات ب ز ج ح د ط هـ ک ، التي هي الأعداد المتوالية المبتدئة من / الواحد المتزيّدة بواحدٍ ع - ٢ - ظ واحد، التي آخرها هـ ک ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



⟨ب⟩ وأيضًا فإن ضَرب ثلث هـ ک في هـ ک هو ثلث مربع هـ ک ، وضرب ثلث الواحد في هـ ک هو ثلث هـ ک. فضرب ثلث هـ ک مع ثلث الواحد في هـ ک هو ثلث مربع هـ ک وثلث هـ ک. فإذا ضُرب ثلث مربع هـ ک مع ثلث هـ ک في هـ س ، كان الذي يجتمع هو مجموع مربعات ب ز ج ح د ط هـ ک.

وضرب ثلث مربع هـ ک في هـ س هو ضرب ثلث مربع هـ ک في هـ ک وفي ک س. وضرب ثلث مربع هـ ک / في هـ ک هو ثلث المربعات المتساويات، المساوي كلٌّ واحد منها لمربع هـ ک ، ب - ١٤٧ - ظ التي عدّتها مثل عدّة آحاد هـ ک لأن ضرب ثلث مربع هـ ک في هـ ک هو تضعيف ثلث مربع هـ ک مراتٍ بعدّة آحاد هـ ک ، وكلُّ مرةٍ منها هو ثلث مربع هـ ک. وضربُ ثلث هـ ک في هـ ک هو ثلث مربع هـ ک ؛ فضرب ثلث مربع هـ ک مع ثلث هـ ک في هـ ک هو ثلث المربعات المتساويات المساويات لمربع هـ ک التي عدّتها عدّة آحاد / هـ ک مع زيادة ثلث مربع هـ ک. جـ - ١١٥ - و وضرب ثلث مربع هـ ک في ک س هو سدس مربع هـ ک ، لأن ک س نصف واحد. وضرب ثلث هـ ک في ک س هو سدس هـ ک. فضرب ثلث مربع هـ ک مع ثلث هـ ک في هـ س هو ثلث

1 المتزيدة: المتزايدة [جـ] – 2 وذلك: مكررة [ع] / أردنا: ناقصة [جـ] – 3 وضرب: فضرب [ب] – 3-4 وضرب ... هو ثلث هـ ک : ناقصة [جـ] – 5 مربع : الواحد [جـ] – 7 مربع (الأولى والثانية): ربع [ب] – 8 المساوي: المساويات [ع] / كل واحد منها: ناقصة [ع] – 9 مثل: ناقصة [ع] – 9-10 تضعيف ثلث مربع هـ ک مرات: نصف وثلث مربع هـ ک وا ب [ع] – 10 هـ ک (الأولى) : هـ ل [جـ] / وكل: فكل [جـ] / مرة: قدر [ع] – 14 هـ ک (الرابعة) : ک هـ [ب، جـ].

المربعات المتساويات المساويات لمربع هـ ك التي عدّتها عدّة آحاد هـ ك مع زيادة ثلث مربع هـ ك وسدس مربع هـ ك وسدس هـ ك. وثلث مربع هـ ك وسدس مربع هـ ك هو نصف مربع هـ ك. وسدس هـ ك هو أقلّ من سدس مربع هـ ك؛ لأن كل عدد هو أكثرُ من واحد، فإنّ سدسه هو أقلُّ من سدس مربعه، لأن العدد نفسه إذا كان أكثرَ من واحد يكون أقلَّ من مربعه. فنصف مربع هـ ك مع سدس هـ ك هو أقل من ثلثي مربع هـ ك. فضرب ثلث مربع هـ ك مع ثلث هـ ك في هـ س يزيد على ثلث المربعات المتساويات المساويات لمربع هـ ك المساوية عدتُها لعدّة آحاد هـ ك بأقلّ من ثلثي مربع هـ ك وأكثر من نصف مربع هـ ك. وضرب ثلث مربع هـ ك مع ثلث هـ ك في هـ س هو مجموع مربعات أعداد ب ز جـ ح د ط هـ ك؛ وعدّةُ آحاد هـ ك هي عدةُ أعداد ب ز جـ ح د ط هـ ك. فمجموعُ مربعات أعداد ب ز جـ ح د ط هـ ك يزيد على ثلث المربعات المتساويات المساويات لمربع هـ ك، التي عدّتها عدّة أعداد ب ز جـ ح د ط هـ ك بأقلّ من ثلثي مربع هـ ك وأكثر من نصف مربع هـ ك.

⟨تعقيب⟩

وأيضـًا فإنا نجعل ب ز جـ ح د ط هـ ك خطوطـًا مستقيمة / متزيّدة / تزيُّدًا متساويًا، وكلَّ ب - ١٤٨ - و / ع - ٣ - و واحدة من زياداتها مساويةً لخط ب ز. فتكون هذه الخطوط أضعافًا لخط ب ز متوالية كتوالي الأعداد المتزيّدة بواحد واحد. فتكون نسبة هذه الخطوط، بعضها إلى بعض، كنسبة الأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد المتزيّدة بواحد واحد، بعضها إلى بعض. فتكون نسبة مربعات هذه الخطوط، بعضها إلى بعض، كنسبة مربعات الأعداد المتوالية بعضها إلى بعض، لأن كل خط مستقيم / مقسوم بأجزاء متساوية، فإن مربعه أضعافٌ لمربع الجزء الواحد منه، مساويةً عدّتها جـ - ١١٥ - ظ لعدّة ما في مربع العدد السميّ لأجزاء ذلك الخطّ من أضعاف مربع الواحد، الذي هو واحد.

2 وسدس مربع هـ ك: ناقصة [ع] / مربع (الثانية): وربع [ع] – 3 هو (الأولى): ناقصة [ع] – 4 أكثر: أقل [ع] / واحد: الواحد [ع] – 5 فنصف: فضرب [ع] / مربع (الثانية): ناقصة [ع] / فضرب ثلث مربع هـ ك: ناقصة [ب] – 6 المساوية: المساوي [ب، جـ] – 6-7 المساوية ... هـ ك (الثالثة): ناقصة [ع] – 7 وأكثر ... هـ ك: ناقصة [جـ] / وضرب ثلث مربع هـ ك: ناقصة [ب] – 9 فمجموع: مجموع [جـ] / أعداد: ناقصة [ع] – 10 عدة: ناقصة [ع] – 13 هـ ك: هـ ط [ع] – 14 واحدة: واحد [ب، جـ] – 15 المتزيّدة: المتزايدة [ع] – 16 المتزيدة: المزيدة [ب] – 17-19 لأن ... واحد: ناقصة [ع] – 18 مساوية: متساوية [جـ] – 19 السمي: المسمي [جـ] / الذي: ناقصة [جـ].

فتكون نسبة مجموع مربعات خطوط ب ز جـ ح د ط هـ ك إلى مربع هـ ك هي نسبة مجموع مربعات الأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد المتزيّدة بواحدٍ واحد، التي عدّتُها عدّةُ هذه الخطوط، إلى مربع أعظمِها النظيرِ لخط هـ ك. لكنّ مجموع مربعات الأعدادِ المتواليةِ المبتدئة من الواحد، المتزيّدة بواحدٍ واحد، يزيد على ثلث المربعات المتساويات المساويات لمربع أعظمها، التي عدّتها عدّة الأعداد المتوالية، بأقلّ من ثلثي مربع أعظمها، وأكثر من نصف مربعه. فمربعات خطوط ب ز جـ ح د ط هـ ك تزيد على ثلث المربعات المتساويات المساويات لمربع هـ ك التي عدّتها عدّة خطوط ب ز جـ ح د ط هـ ك بأقل من ثلثي مربع هـ ك وأكثر من نصف مربعه.

⟨الشكل⟩

وإذ قد تبيّن ذلك فإنا نقول: إن كلَّ كُرة فهي ثُلثا الأسطوانة المستديرة، التي قاعدتها أعظم دائرة تقع في الكرة، وارتفاعها مثل قطر الكرة.

مثال ذلك: كرة ا ب جـ د ومركزها هـ.

فأقول: إنها ثلثا الأسطوانة التي قاعدتها أعظم دائرة تقع في الكرة، وارتفاعها قطر الكرة.

فنجيز على مركز الكرة، وهو نقطة هـ، سطحًا يقطع الكرة، فهو يحدث فيها دائرة هي من أعظم الدوائر التي تقع في الكرة، ولتكن دائرة ا ب جـ د. ونخرج في هذه الدائرة قطرين/ ب - ١٤٨ - ظ
يتقاطعان على زوايا قائمة، وليكونا قطري ا هـ جـ ب هـ د. ونجيز على نقطة ب خطًا موازيًا لخط هـ ا، وليكن ب ز؛ ونجيز على نقطة ا خطًا موازيًا لخط هـ ب، وليكن ا ز. فيكون سطح ا هـ ب ز متوازي الأضلاع قائم الزوايا.

فإذا أُثبت خط ا هـ وأديرَ سطح ا هـ ب ز حول خط ا هـ حتى يعود إلى وضعه الأول، فإن سطح ا هـ ب ز يُحدث أسطوانة مستديرةً، قاعدتُها الدائرةُ – التي نصفُ قطرها خط هـ ب الذي هو نصفُ قطر الكرة أيضـًا – وارتفاعها خط هـ ا الذي هو نصف قطر الكرة أيضـًا. والدائرة

4 المتزيّدة: المزيدة [ب] – 6 تزيد: ناقصة [جـ] / على: مكررة [جـ] – 9 فإنا نقول: فاقول [جـ] – 11 كرة: ناقصة [جـ] / ومركزها: مكررة [ع] – 12 فأقول: فنقول [جـ] / التي: ناقصة [جـ] / أعظم: أعظم من [جـ] – 13 فهو: وهو [جـ] / فيها: لها [ع] / هي: وهي [ع] / من: ناقصة [جـ، ع] – 14 ونخرج: ويخرج [جـ] / الدائرة: الدوائر [جـ] – 15 على (الأولى): مكررة [جـ] / ب: ز [جـ] – 16 لخط: أثبتها في الهامش [ب] – 18 وأدير: ادر [جـ] / سطح: ناقصة [جـ] / الأول: ناقصة [ب، جـ] – 19 خط: ناقصة [ع] / هـ ب: ب هـ [ع] – 20 قطر: ناقصة [جـ] / أيضـًا: ناقصة [ب، جـ] / هـ ا: ا هـ [جـ، ع] / هو: ناقصة [جـ].

التي نصفُ قطرها/ نصفُ قطر الكرة هي أعظمُ دائرة تقع في / الكرة. فالأسطوانة التي تَحدث من استدارة سطح ب ا حول خط هـ ا قاعدتُها أعظمُ دائرة تقع في الكرة، وارتفاعها نصفُ قطر الكرة؛ فليكن هذه الأسطوانة ب ح. وإذا دار سطح ب ا حول خط هـ ا، فإن قطاع ا ب هـ يدور حول خط هـ ا. وإذا دار قطاع ا ب هـ حول خط هـ ا حدث من استدارته نصف كرة قاعدتُها الدائرةُ التي نصفُ قطرها خط ب هـ، لأن نصف دائرة ا ب جـ د – الذي عليه ا ب جـ وقطره ا جـ – إذا دار حول قطر ا جـ حتى يعود إلى وضعه حدث من استدارته كرة ا ب جـ د، وحدث من استدارة خط هـ ب دائرة تقسم الكرة بنصفين. فإذا دار سطح ب ا حول خط هـ ا، حدث من استدارته أسطوانة قاعدتُها أعظمُ دائرةٍ تقع في كرة ا ب جـ د، وارتفاعها خط هـ ا الذي هو نصفُ قطرِ كرة ا ب جـ د، وحدث من استدارة قِطاع ا ب هـ نصف كرة ا ب جـ د. ج - ٣ - ١١٦ - ظ

فنقول: إن نصف الكرة الذي يحدث من استدارة قطاع ا ب هـ هو ثلثا الأسطوانة التي تحدث عن استدارة سطح ب ا التي هي أسطوانة ب ح.

برهان ذلك: أنه لا يمكن غيره. فإن أمكن، فليكن نصف الكرة غيرَ مساوٍ لثلثي أسطوانة ب ح. وإذا لم يكن نصف الكرة مساويًا لثلثي أسطوانة ب ح فهو إما أعظم من ثلثي الأسطوانة وإما أصغر.

فليكن نصف الكرة أولاً أعظم من / ثلثي الأسطوانة، وليكن زيادة نصف الكرة على ثلثي الأسطوانة بمقدار ت. ب - ١٤٩ - و

ونقسم ا هـ بنصفين على نقطة ط، ونجيز على نقطة ط خطًا موازيًا لخط هـ ب، وليكن ط ك. فيكون ط ك عمودًا على خط ا هـ. وننفذ ط ك إلى ل، فيكون ط ل مساويًا لخط هـ ب. ونجيز على نقطة ك خطًا موازيًا لخطي هـ ا ب ز، وليكن س ك ي، فيكون س ك مثل ك ي، لأن ا ط مثل ط هـ. فيكون سطح ك هـ مثلَ سطح ك ا، ويكون سطح ك ب مثل سطح ك ز. فإذا دار سطح ب ا حول خط هـ ا، فإن سطحي هـ ك ك ا يُحدثان أسطوانتين

1 هي: وهي [ع] / تقع: يقع [ع] – 3 فليكن: وليكن [جـ] / ب ح: ب حـ [ب] / هـ ا: ا هـ [جـ] – 4 يدور: ناقصة [جـ] / هـ ا: هـ ا [جـ] / وإذا: فاذا [جـ، ع] / حدث: احدث [ع] – 5 ب هـ: هـ ب [ع] – 8 أسطوانة: كرة [جـ] / ا ب جـ د: ا ب جـ [جـ] – 9 هـ ا: ا هـ [جـ] / ا ب جـ د: ا ب د جـ [جـ] – 11 الذي: التي [ب، جـ] / يحدث: تحدث [جـ] / ا ب هـ: ا ب د [ع] – 12 ب ا: ب ح [جـ] – 13 فإن: وان [جـ] – 14 وإذا: فإذا [جـ] – 17 بمقدار: مقدار [ع] – 18 ونقسم: ويقسم [ب] / هـ ب: ب هـ [جـ] / وليكن: فليكن [ع] – 20 هـ ا: ا هـ [جـ] / لخطي ا هـ ب ز: لخط هـ ا ب ا [جـ] / ب ز: ب د [ب] – 21 ك ي: ك هـ ي [جـ] / فيكون: فيكون ز [جـ] – 22 فإذا: وإذا [جـ] / دار: ادار [ع] / سطحي: سطح [ع، جـ].

متساويتين، وسطحي ك ب ك ز يُحدثان مدورتين متساويتين محيطتين بالأسطوانتين المتساويتين. فتكون الأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ك هـ مع المدورة / التي تحدث من استدارة ج - ١١٦ - ظ سطح ك ز مجموعتين نصف أسطوانة ب ح. وأيضًا فإنا نقسم ا ط بنصفين على نقطة م ونجيز على نقطة م خطًا موازيًا لخط هـ ب، وليكن / م ن، فيكون م ن عمودًا على خط ا هـ. ونخرج م ن ع - ٤ - و إلى ع، فيكون م ع مساويًا لخط هـ ب. ونجيز على نقطة ن خطًا موازيًا لخطي ك س ل ز، وليكن ون ي. فيكون ون مثل ن ي، ويكون سطح ن ط مساويًا لسطح ن ا وسطحُ ن ك مساويًا لسطح ن س. فإذا دار سطح ب ا حول خط هـ ا، دار سطح ك ا، وحدث من سطحي ن ط ن ا أسطوانتان متساويتان، وحدث من سطحي ن ك ن س مدورتان متساويتان. وتكون الأسطوانةُ التي تحدث من استدارة سطح ن ط مع المدورة التي تحدث من استدارة سطح ن س مجموعتين نصفَ الأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ك ا.

وأيضًا فإنا نقسم خط ط هـ بنصفين على نقطة ف، ونجيز على نقطة ف خطًا موازيًا لخط هـ ب، وليكن ف ص. فيكون ف ص عمودًا على ا هـ. وننفذ ف ص إلى / ق، فيكون ف ق ب - ١٤٩ - ظ مساويًا لخط هـ ب. ونجيز على نقطة ص خطًا موازيًا لخطي هـ ط ب ل، وليكن ش ص ي. فيكون ش ص مثل ص ي، ويكون سطح ص ك مثل سطح ص ي، ويكون سطح ص ب مثل سطح ص ل. فإذا دار سطح ب ا حول خط هـ ا، دار سطح ب ك وحدث من استدارته / ج - ١١٧ - ظ * مدورة مستديرة، وحدث من 〈استدارة〉 سطحي ص ك ص ي مدورتان متساويتان، وحدث من 〈استدارة〉 سطحي ص ب ص ل مدورتان متساويتان. فتكون المدورة التي تحدث من

1 وسطحي: كتب في الهامش «وسطحا» وكتب «نخ» فوقها، مما يعني أنها كذلك في نسخة أخرى [ع] / ك ز: ب ز [ج، ب] ب ل [ع] – 2-3 مع المدورة... ك ز: ناقصة [ع] – 3 مجموعتين: مجموعين [ب، ج، ع] / ب ح: ب حـ [ب] / ا ط: ل ط [ب، ج] – 3-4 ونجيز على نقطة م: ناقصة [ب] – 4 م ن (الأولى والثانية والثالثة): م ر [ج] – 5 ن: ز [ج] / ك س: ك ا [ب] ط ا [ع] / ل ز: ن ز [ج] – 6 ون ي: ون ح [ب، ع] ف ن ح [ج] / ون: ف ن [ج] / ن ي: ن ح [ب، ج، ع] / لسطح ن ا: ناقصة [ج] – 8 ن ط ن ا: ز ط ب ا [ج] / أسطوانتان متساويتان: أسطوانتين متساويتين [ب، ع] / وحدث: وحدثت [ج] / مدورتان مساويتان: مدورتين متساويتين [ب، ع] – 9 وتكون: فيكون [ع] / ن ط ... سطح: ناقصة [ع] – 10 مجموعتين: مجموعين [ج، ع] / التي: أثبتها في الهامش [ب] – 11 ف: ك [ع] ق [ج] / ف: ك [ع] / خطًا: خطوطًا [ع] – 12 ف ص (الأولى والثانية والثالثة): ق ص [ج] – 13 ش ص ي: س ص ر [ب، ج، ع] – 14 ص ي: ص ن [ع] ص ب [ب] ص ز [ج] / ويكون (الأولى والثانية): فيكون [ج] / ص ك: ص ز ك [ج] / سطح: أثبتها في الهامش [ب] / ص ي: ص لى [ج] – 15 فإذا: مكررة [ج] / ب ا: ر ل [ع] ب ك [ج] / استدارته: من الواضح أن ناسخ مخطوطة [ج] قد نقل عن نسخة اختلطت أوراقها أو عن نسخة نُقلت عن نسخة أخرى هي كذلك. ففي [ج] تتعاقب الفقرات على ما يلي: *مدورة ... نصف* ١١٧–ظ حتى ١١٨–و؛ +قطرها ... هو أيضًا+ ١١٦–ظ حتى ١١٧–ظ؛ # أصغر ... أصغر # ١١٨–و، مما يدل على تبدل مواضع الأوراق – 16 سطحي: سطح [ج] / مدورتان متساويتان: مدورتين متساويتين [ب، ع] / وحدث: مكررة [ج] – 17 ص ب ص ل: رص ل هـ [ج] / مدورتان متساويتان: مدورتين متساويتين [ب، ع].

استدارة سطح ص ي مع المدورة التي تحدث من استدارة سطح ص ل نصفَ المدورة التي تحدث من استدارة سطح ك ب. فتكون الأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ن ط مع المدورة التي تحدث من استدارة سطح ن س مع المدورتين اللتين تحدثان من استدارة سطحي ص ي ص ل نصفَ الأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ك ا مع نصفِ المدورةِ التي تحدث من استدارة سطح ك ب. وقد تبيّن أن الأسطوانة التي تحدث من استدارة سطح ك هـ مع المدورة التي تحدث من استدارة سطح ك ز نصفُ أسطوانة ب ح.

وإذا كان ذلك كذلك، فقد انفصل من أسطوانة ب ح نصفها، ومما يبقى نصفُه. وإذا قسمنا كل واحد من خطوط ا م م ط ط ف ف هـ بنصفين، وأخرجنا من مواضع القسمة خطوطًا موازية لخط هـ ب، ومن مواضع إفرازها لقوس ا ب خطوطًا موازية لخط ا هـ، انقسمت سطوح ب ص ص ك ك ن ن ا، كل واحد منها بأربعة أقسام يكون كل سطحين متقابلين منها نصف السطح الذي هو منه، وتكون المدورات التي تحدث من استدارة تلك السطوح نصف المدورات التي تحدث من استدارة سطوح ب ص ص ك ك ن ن ا. وإذا فعل ذلك دائمًا، يكون قد انقسم من / أسطوانة ب ح نصفها، ومما يبقى نصفه. ج - ١١٧ - و

وكل مقدارين مختلفين يُنقص / من / أعظمها نصفُه، ومما يبقى نصفُه ويفعل ذلك دائمًا، ع - ٤ - ظ ب - ١٥٠ - و فلا بدّ أن يبقى مقدار أصغر من المقدار الأصغر، لأنه إذا نقص من المقدار نصفُه، ومما يبقى نصفه دفعتين، يكون قد نقص من المقدار أكثر من نصفه. فإذا نقص من المقدار نصفُه، ومما يبقى نصفُه، مراتٍ كثيرة، يكون كل دفعتين منها أكثرَ من النصف. وكلّ مقدارين مختلفين يُنقص من أعظمها نصفُه، ومما يبقى نصفه، ويُفعل ذلك دائمًا، فلا بدّ أن يبقى مقدار أصغر من المقدار الأصغر. وأسطوانة ب ح ومقدار ت مقداران مختلفان، وأعظمها أسطوانة ب ح. فإذا قسم من أسطوانة ب ح نصفها، / ومما يبقى نصفه، ومما يبقى نصفه، على الوجه الذي بيّناه، وفُعل ذلك ل - ٧٣ - و دائمًا، فلا بدّ أن يبقى مقدار أصغر من مقدار ت.

1 ص ي: ص ل [جـ] / ص ي ... سطح: ناقصة [ع، جـ] / ص ل: م ل [ب] – 2 ك ب ... سطح: ناقصة [ع] / سطح ن ط: سطحي ط [جـ] – 3 ن س: ر س [جـ] – 4 تحدث: ناقصة [جـ] – 5 أن: ناقصة [جـ] – 6 سطح: ناقصة [ع] – 7 وإذا: فإذا [جـ] / يبقى: بقى [جـ، ع] / وإذا: فإذا [جـ] – 9 إفرازها: لقاها [ع] – 10 ن ا: ز ا [جـ] / متقابلين: مقابلين [جـ] – 11 هو: ناقصة [جـ] / وتكون: ناقصة [ع] – 12 ك ن: ك ر [جـ] / ن ا: ر ا [جـ] ن ل [ع] – 13 يبقى: بقى [جـ] – 14 وكل... يبقى نصفه: ناقصة [جـ] / أعظمها: أعظمها [ب] – 15 ومما يبقى نصفه: ناقصة [جـ] – 16-17 دفعتين ... يبقى نصفه: مكررة [جـ] – 17 يكون: ويكون [ع] فيكون [جـ] / كل دفعتين: دفعة [ع] – 18 أعظمها: أعظمها [ب] / ويفعل: وتفعل [ع].

وإذا قسم من أسطوانة ب ح نصفها، ومما يبقى نصفُه، ومما يبقى نصفُه، على الوجه الذي بيّناه. فإن الذي يبقى من الأسطوانة هي المدورات التي تحدث من سطوح ب ص ص ك ك ن ن ا ونظائرها التي يمرّ سطح الكرة بأوساطها.

فلتكن الأقسام التي تنتهي إليها قسمة الأسطوانة على الوجه الذي بيّناه، وهي أقل من مقدار ت هي المدورات التي تحدث من استدارة سطوح ب ص ص ك ك ن ن ا. فيكونُ الذي في داخل نصف الكرة من هذه المدورات أقلَّ بكثير من مقدار ت. لكن نصف الكرة يزيد على ثلثي أسطوانة ب ح بمقدار ت. فالذي يبقى من نصف الكرة بعد ⟨نقصان⟩ أقسام المدورات التي في داخله هو أعظم من ثلثي أسطوانة ب ح. والذي يبقى من نصف الكرة بعد ⟨نقصان⟩ أقسام المدورات التي في داخله، هو المنشور الذي في داخل نصف الكرة، الذي قاعدتُه / الدائرةُ – التي ل – ٧٣ – ظ نصف قطرها ب هـ – ورأسُه الدائرةُ التي نصف /* + قطرها ن م. فهذا المنشور هو أعظم من ج – ١١٦ – ظ ثلثي أسطوانة ب ح.

وأيضًا فإن خطوط ا م م ط ط ف ف هـ متساوية، فخطوط هـ ف هـ ط هـ م هـ ا يزيد كل واحد منها على الذي يليه بمثل خط هـ ف. فنسب خطوط/ هـ ف هـ ط هـ م هـ ا بعضها ب – ١٥٠ – ظ إلى بعض هي نسب الأعداد المتوالية المبتدئة من الواحد المتزيّدة بواحد واحد، بعضها إلى بعض. فمربعات خطوط هـ ف هـ ط هـ م هـ ا مجموعةً تزيد على ثلث المربعات المتساويات المساويات لمربع هـ ا التي عدّتها عدّة خطوط هـ ف هـ ط هـ م هـ ا بأقل من ثلثي مربع هـ ا، كما / تبيّن في ع – ١٣ – و المقدمة. وعدّة خطوط هـ ف هـ ط / هـ م هـ ا هي عدّة فصول ف ط م ا. وعدّة فصول ف ج – ١١٧ – و ط م ا هي عدة فصول هـ ف ط م إذا أخذنا هـ عوضًا عن ا. وعدّة فصول هـ ف ط م هي عدّة خطوط هـ ب ف ق ط ل م ع. وخطوط هـ ب ف ق ط ل م ع متساوية وكل واحد منها مساوٍ لخط هـ ب، وهـ ب / مساوٍ لخط هـ ا. فمربعات خطوط هـ ف هـ ط هـ م هـ ا ل – ٧٤ – و تزيد على ثلث مربعات خطوط هـ ب ف ق ط ل م ع بأقل من ثلثي مربع هـ ا. ومربع هـ ف

1 وإذا: فإذا [ج، ع] – 2 يبقى: تبقى [ج] – 2-3 ك ن ن ا: ك ر ا [ج] – 6 بكثير: أثبتها ناسخ [ل] فوق السطر – 7 أسطوانة: الاسطوانة [ج] / بمقدار: مقدار [ج] / يبقى: تبقى [ج] / من: مكررة [ع] / التي: ناقصة [ج] – 8 هو: هي [ج، ل] / أسطوانة ب ح: الكرة [ع] – 9 المنشور: المشهور [ب] / في: ناقصة [ع] / داخل: داخله [ب] – 10 ب هـ: ر هـ [ب، ج، ع، ل] / نصف: نصفها [ج] / ن م: ز م [ج] / المنشور: المشهور [ب] – 11 أسطوانة: الاسطوانة [ج] – 12 هـ ف: هـ ب [ع] / هـ ط: ط [ب] – 13 بمثل: مثل [ع] / هـ ف: هـ ب [ع] / فنسب: فنسبة [ب، ج، ل، ع] / هـ ط: وهـ ط [ل] – 14 نسب: نسبة [ج، ع] – 15 هـ ف: هـ ك [ع] / هـ ا: هـ ل [ع] / مجموعة: المجموعة [ع] – 19 وخطوط: كتب ناسخ [ع] قبلها «فعدة خطوط ه ف ه ط ه م ه ا هي عدة خطوط ه ب ف ق ط ل م ع» – 20 مساو (الأولى): مساوي [ب] / هـ ف: هـ ك [ل] هـ ب [ج] – 21 ومربع: فمربع [ع].

مع ضرب جـ ف في ف ا هو مربع هـ ا، وضرب جـ ف في ف ا هو مربع ف ص. فمربع هـ ف مع مربع ف ص مساوٍ لمربع هـ ا المساوي لمربع ف ق؛ وكذلك مربع هـ ط مع مربع ط ک مساوٍ لمربع هـ ا المساوي لمربع ط ل؛ وكذلك مربعُ هـ م مع مربع م ن مساوٍ لمربع هـ ا المساوي لمربع م ع. ومربع هـ ا مساوٍ لمربع هـ ب. فمربعات هـ ف هـ ط هـ م هـ ا مع مربعات ف ص ط ک م ن مساويات بمجموعها لمربعات هـ ب ف ق ط ل م ع. لكن مربعات هـ ف هـ ط هـ م هـ ا تزيد على ثلث مربعات هـ ب ف ق ط ل م ع بأقل من ثلثي مربع هـ ا. فيبقى مربعات ف ص ط ک م ن تنقص عن ثلثي مربعات هـ ب ف ق ط ل م ع بأقل من ثلثي مربع هـ ا.

فتكون الدوائر التي أنصافُ أقطارها خطوطُ ف ص ط ک م ن أقلَّ من ثلثي الدوائر التي أنصاف أقطارُها خطوطُ هـ ب ف ق ط ل م ع. ونسبة الدوائر إلى الدوائر كنسبة الأساطين التي تقوم عليها، بعضها إلى بعض، إذا كانت / ارتفاعات الأساطين متساوية. فالأساطين التي قواعدُها الدوائر – التي أنصافُ أقطارها خطوط / ف ص ط ک م ن – وارتفاعاتُها خطوطُ هـ ف ف ط ط م هي أقلّ من ثلثي الأساطين التي قواعدُها الدوائرُ – التي أنصافُ أقطارها خطوطُ هـ ب ف ق ط ل م ع – وارتفاعاتُها خطوطُ هـ ف ف ط ط م م ا المتساوية. والأساطين التي قواعدها الدوائر – التي أنصاف أقطارها خطوط ف ص ط ک م ن – وارتفاعاتها خطوط هـ ف ف ط ط م هي المنشور الذي قاعدته الدائرة – التي نصفُ قطرِها ب هـ – ورأسه الدائرة التي نصفُ قطرِها / م ن، الذي / هو في داخل نصف الكرة. والأساطينُ التي قواعدُها الدوائرُ – التي أنصافُ أقطارها خطوطُ هـ ب ف ق ط ل م ع – وارتفاعاتُها خطوط هـ ف ف ط ط م م ا هي أسطوانةُ ب ح.

ل – ٧٤ – ظ
ب – ١٥١ – و
جـ – ١١٧ – ظ
ع – ١٣ – ظ

فالمنشور الذي في داخل نصفِ الكرة أقلُّ من ثلثي أسطوانة ب ح.

وقد كان تبيّن أن هذا المنشور أعظم من ثلثي أسطوانة / ب ح. وهذا محال. ل – ٧٥ – و

1 جـ ف: د ف [ب] / هو: وهو [جـ] / ف ا: ق ا [جـ] / ف ص: هـ ص [ع] – 2 مربع (الأولى): ناقصة [ع] / مساوٍ: مساوي [ع] – 3 هـ م: م ن [جـ] / مربع: ناقصة [ع] / مساوٍ: مساوي [ع] / مع ... هـ ا: ناقصة [جـ] – 4 مساوٍ: مساوي [ع] / هـ ف: هـ ب [ع] – 6 ثلث: ثلثي [ل] – 7 م ن: ک م ن [ع] – 6-7 فيبقى... هـ ا: أثبتها في الهامش [ل] – 7 تنقص: ينقص [ب] / عن: على [ب، ع] / هـ ا: ناقصة [ع] – 8 فتكون: ناقصة [ع] / م ن: م ر [جـ] – 8-9 ف ص ... هـ ب: أثبتها في الهامش [ل] / التي ... إلى الدوائر: ناقصة [جـ] – 9 هـ ب: هـ ر [ل] ومكررة / الدوائر (الثانية): الدائرة [ع] – 10 تقوم: يقوم [جـ] / كانت: كان [ب، جـ، ع] – 11 الدوائر: ناقصة [جـ] / وارتفاعاتها: وارتفاعها [ع] – 13 هـ ب: هـ ز [جـ] / م ا: ناقصة [ب، جـ] / المتساوية: المساوية [ل] ناقصة [ع] – 13-14 وارتفاعاتها ... م ن: مكررة [ع] – 14 م ن: م ر [جـ] – 15 ط م: كتب ناسخ [ع] بعدها «ا م» / الذي: التي [ل] / قاعدته: قاعدتها [ل] / ب هـ: ر هـ [ب، جـ، ع] د هـ [ل] – 16 م ن: ن م [ع، ل] م ر [جـ] / الذي هو: التي [ب، جـ] / قواعدها: قاعدتها [جـ] – 17 هـ ب: ب [ع] / ف ق: ف ى [جـ] – 20 ب ح: ب حـ [ل]/ وهذا: هذا [جـ].

وهذا المحال لزم من فرضنا نصفَ الكرة أعظمَ من ثلثي أسطوانة ب ح. فليس نصف الكرة بأعظمَ من ثلثي أسطوانة ب ح.

وأقول: إن نصف الكرة ليس هو أيضـًا+/ أصغر # من ثلثي أسطوانة ب ح. جـ - ١١٨ - و

فإنْ أمكن، فليكن أصغرَ/ # من ثلثي الأسطوانة، وليكن نقصانُ نصف الكرة عن ثلثي جـ - ١١٨ - ظ الأسطوانة بمقدار ت. فيكون مقدار ت أصغر من أسطوانة ب ح.

فإذا قُسم من أسطوانة ب ح نصفها، ومما يبقى نصفه، ومما يبقى نصفه على الوجه الذي بيّناه، فلا بدّ أن يبقى مقدارٌ هو أصغرُ من مقدار ت. والذي يبقى من الأسطوانة عند قسمتها – على الوجه الذي بيّناه – هو المدوراتُ التي تحدث من استدارة سطوح ب ص ص ك ك ن ن ا ونظائرِها التي يمرّ سطح الكرة بأوساطها. ولتنته القسمة إلى ما هو أصغر من مقدار ت، وليكن ذلك هي المدورات التي تحدث من استدارة سطوح ب ص ص ك ك ن ن ا. فيكون أقسام هذه المدورات / التي هي من خارج نصف الكرة أصغر بكثير من مقدار ت. وقد كان نصف الكرة مع ل - ٧٥ - ظ مقدار / ت مساويًا لثلثي أسطوانة ب ح. فنصف الكرة مع أقسام المدورات التي هي خارجة عن ب - ١٥١ - ظ نصف الكرة هي أصغرُ بكثيرٍ من ثلثي أسطوانة ب ح. ونصف الكرة مع أقسام المدورات الخارجة عن نصف الكرة هي المنشور الذي قاعدتُه الدائرةُ – التي نصفُ قطرها خطُّ هـ ب – ورأسه الدائرةُ التي نصف قطرها خط ا و، المحيطُ بنصف الكرة. فهذا المنشور هو أصغر من ثلثي أسطوانة ب ح.

وقد تبيّن أن مربعاتِ خطوط ف ص ط ك م ن تنقص عن ثلثي مربعات خطوط هـ ب ف ق ط ل م ع بأقل من ثلثي مربع هـ ا. فإذا أضفنا إلى مربعات خطوط ف ص ط ك م ن جميع مربع هـ ب المساوي لمربع هـ ا، كان مجموعُ مربعات خطوط هـ ب ف ص ط ك م ن أعظمَ من ثلثي مربعات خطوط هـ ب ف ق ط ل م ع. فيكون الدوائر التي أنصافُ أقطارها خطوطُ هـ ب ف ص ط ك م ن أعظم من ثلثي الدوائر التي أنصاف أقطارها خطوط هـ ب

2 ثلثي: ناقصة [ع] – 4 فليكن: فلتكن [جـ] – 5-4 وليكن ... الأسطوانة: ناقصة [ع] – 6 ومما يبقى نصفه (الثانية): ناقصة [جـ] / بيناه: كتب ناسخ [ع] بعدها «فيما تقدم» – 7 فلا: ولا [ب] / بد أن: بدوان [ل] / يبقى: تبقى [جـ] / مقدار هو ... يبقى: ناقصة [ع] – 8 هو: وهو[ع] / ك ن: ك ب [ب] ك ز [جـ] / ن ا: ز ا [جـ] – 9 يمر: تمر [ب، جـ] / ولتنته: ونسبة [جـ] – 10-9 هي المدورات: هو الذي [جـ] – 10 المدورات: المدادات [ع] / ك ن ن ا: ك ز ز ا [جـ] – 11 المدورات: المدارات [ع] / من: ناقصة [ع، ل] / خارج: ناقصة [جـ] – 12 مساويًا: مساو [ع، ل] / المدورات: المدارات [ع] / التي هي خارجة: الخارجة [ع] – 14-13 أصغر ... هي: ناقصة [ع] – 14 الذي: التي [ل] – 15 ورأسه: وزاوية [جـ] / نصف: ناقصة [ع] / ا و: ا ب [جـ] / فهذا: وهذا [جـ] / أصغر: الاصغر [جـ] – 17 ف ص: ب ص [ع] / م ن: م ز [جـ] – 19-18 فإذا ... هـ ا: أثبتها في الهامش [ل] – 18 إلى: ان [ب] / ط ك: ط ل [ل] – 19 هـ ب: ب هـ [جـ] هـ ن [ب] هـ ا [ع] / هـ ا: هـ ب [ع] / ف ص: ف ق [ع] – 20 هـ ب: هـ ف [ب] – 21 أقطارها: ناقصة [ع] / خطوط: أثبتها في الهامش [ب].

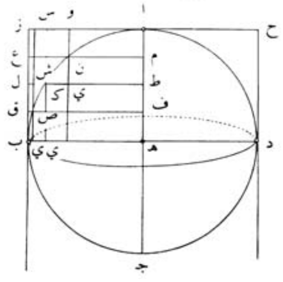
ف ق / ط ل م ع ؛ وتكون الأساطين التي قواعدُها الدوائرُ – التي أنصافُ أقطارها خطوطُ ل - ٧٦ - و هـ ب ف ص ط ك م ن – وارتفاعاتها / خطوط هـ ف ف ط ط م م ا المتساوية أعظمَ من ج - ١١٩ - و ثلثي الأساطين التي قواعدها الدوائر – التي أنصاف أقطارها / خطوط هـ ب ف ق ط ل م ع – ع - ١٤ - و وارتفاعاتُها خطوط هـ ف ف ط ط م م ا. والأساطين التي قواعدُها الدوائرُ – التي أنصاف أقطارها خطوط هـ ب ف ص ط ك م ن – وارتفاعاتُها خطوط هـ ف ف ط ط م م ا هي المنشور الذي قاعدته الدائرة – التي نصف قطرِها خط هـ ب – ورأسه الدائرةُ التي نصفُ قطرها ا و، الذي هو المنشور المحيط بنصف الكرة. والأساطين التي قواعدُها الدوائر – التي أنصاف أقطارها خطوط هـ ب ف ق ط ل م ع – وارتفاعاتها خطوط هـ ف ف ط ط م م ا هي أسطوانة ب ح. فالمنشور المحيط بنصف الكرة أعظم من ثلثي أسطوانة ب ح.

وقد كان تبيّن أن هذا المنشور أصغر من ثلثي أسطوانة ب ح. وهذا محال.

وهذا المحال لزِم من فرضنا نصفَ الكرة أصغرَ من ثلثي أسطوانة ب ح. فليس/ نصف الكرة ل - ٧٦ - ظ بأصغرَ من ثلثي أسطوانة ب ح. وقد كان تبيّن أنه ليس بأعظمَ من ثلثي أسطوانة ب ح. فإذا كان نصف الكرة ليس بأعظمَ من ثلثي أسطوانة ب ح / ولا بأصغر من ثلثيها، فهو ثلثا أسطوانة ب ح. ب - ١٥٢ - و وجميع الكرة ضعف نصف الكرة، والأسطوانة التي قاعدتها الدائرة – التي نصف قطرها خط هـ ب – وارتفاعها/ خط ا جـ – الذي هو قطر الكرة وهو ضعف خط ا هـ – هي ضعف أسطوانة ج - ١١٩ - ظ

1 وتكون: تكون [ع] / التي (الثانية): الى [ل] – 2 هـ ب: ب [جـ] / وارتفاعاتها: وارتفاعها [ب] مكررة [جـ] / هـ ف ف ط: ف ق ط [جـ] – 3 التي قواعدها الدوائر: ناقصة [ب، جـ، ع] – 3-5 هـ ب ... ف ص: أثبتها في الهامش، و«هـ ب ف ص» مكررة [ل] – 4 هـ ف ف ط: هـ ب وط [جـ] – 5 هـ ب ف ص: ب وص [جـ] / ط ك: ط م [ب] / م ن: ك ن [ب] م ر [جـ] – 6 الذي: التي [ب، جـ] / قاعدته: قاعدتها [جـ] / خط: ناقصة [جـ] / هـ ب: ا ب [جـ] – 6-7 ورأسه ... ا و: ناقصة [جـ] – 8 ف ق: ف ف [جـ] – 10 أن: أضافها فوق السطر [ب] – 11 من (الأولى): ا ن [ع] – 11-12 فليس ... ب ح (الأولى): ناقصة [ع] – 12 ليس: كتب قبلها «بأصغر من ثلثي أسطوانة ب ح وقد تبيّن أنه» [ع] / فإذا: واذا [ع، ل] – 13 بأصغر: أصغر [جـ] – 15 ا جـ: ا ح [جـ].

ب ح. فكرة ا ب جـ د هي ثلثا الأسطوانة التي قاعدتُها أعظمُ دائرةٍ تقع في الكرة وارتفاعُها مساوٍ لقطر الكرة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./ ل - ٧٧ - و



تم القول في مساحة الكرة.

1 فكرة: وكرة [ب، جـ] ومكررة [جـ] – 2 وذلك: فذلك [ل] / نبين: كتب ناسخ [ل] بعدها «بلغت القراءة وصح» – لم يرسم ناسخ [جـ] الشكل وترك له فراغًا، والشكل غير واضح في [ب] وكذلك في مخطوطة «عاطف» المنقولة عنها، أما في [ل] فرسم الناسخ بجوار الكرة دائرة لها نفس المحيط – 3 في مساحة الكرة: ناقصة [ع] وكتب بعدها «بحمد لله وحسن توفيقه» في السلطانية يو جمادى الأولى سنة ٧٢١ [ع] «لأرشميدس والشكر الله وحده والحمد لله حق حمده وصلاته على خير خلقه محمد النبي وآله وسلم تسليمًا كثيرًا وحسبنا الله ونعم الوكيل» [جـ]؛ «والحمد لله صلى على سيدنا محمد سلم سلام» [ل]؛ الحمد لله ربّ العالمين سنة ٨٣٩ [ب].

بسم الله الرّحمن الرّحيم ٧٨ – ظ

قولٌ للحسن بن الحسن بن الهيثم
في قسمة المقدارينِ المختلفينِ المذكورين
في الشكلِ الأول من المقالةِ العاشرةِ من كتابِ أقليدسَ

قد يظنّ كثير من أصحاب التعاليم أنّ معنى الشكلِ الأولِ من المقالة العاشرة من كتاب أُقليدسَ في الأصول جزئيٌّ، ولا يصحّ أن يكون إلاّ على الوجه الذي ذكره أُقليدسُ، وهو أن كلَّ مقدارين مختلفين يُفصل من أعظمها أكثرُ من نصفه، ومما يبقى أكثرُ من نصفه، ويُفعل ذلك دائمًا؛ فإنه سيبقى مقدارٌ أصغرُ من المقدار الأصغرِ.

وليس الأمرُ على ما تظنه هذه الطائفةُ، وإنما اقتصر أقليدسُ على المعنى الجزئي – وهو أن يكون المنقوص أكثر من النصف – لأن هذا المعنى هو الذي يستعمله في كتابه، فاقتصر عليه لأنه هو الذي احتاج إليه.

وقد كانت عَرَضتْ حاجتُنا، في بعض ما استخرجناه / من المعاني الهندسية، إلى أن نقصَ ٧٩ – و
من أعظم مقدارين مختلفين نصفَه، ومما يبقى نصفَه، ومما يبقى أيضـًا نصفَه دائمًا، إلى أن تنتهي القسمةُ إلى أن يبقى مقدار أصغرُ من المقدار الأصغرِ، فاستخرجنا هذا المعنى لحاجتِنا، كانت، إليه. وأنعمنا النظر من بعدِ ذلك في تأمّل هذا المعنى فوجدناه معنىً كليًا، وخاصةً من خواص النِّسب، وهو أنه إن جُعلت نِسبةُ المنقوص إلى المقدار الأعظمِ أيَّ نسبةٍ كانت، وجُعلت المنقوصات كلُّها على مثل تلك النِسبة، فلا بدَّ أن تنتهي القسمةُ إلى مقدارٍ أصغرَ من المقدار الأصغرِ. فرأينا أن نكشف هذا المعنى ونُظهِرَه لينتفع به من تَعِنُّ حاجتُه إليه، وليَسقُط الظنُّ الذي

قدّمنا ذكره من أن هذا المعنى جزئيٌّ، فاستأنفْنا في ذلك، فورد برهانُنا يدلّ على كليّة هذا المعنى، ومع ذلك غاية الإيجاز والاختصار، وهو هذا:

كلُّ مقدارين مختلفين يُنقص من أعظمها مقدارٌ، نسبتُه إليه مثلُ نسبةٍ مفروضةٍ، أيَّ نسبةٍ كانت، مما هي نسبةُ أصغرَ إلى أعظمَ،/ ويُنقص من الباقي مقدارٌ نسبتُه إليه تلك النسبةُ، ٧٩ - ظ ويُنقص من الباقي مقدارٌ نسبتُه إليه تلك النسبةُ، ونفعل ذلك دائمًا، فلا بدّ أن تنتهيَ القسمة إلى مقدارٍ أصغر من المقدار الأصغرِ.

مثال ذلك: مقدارا ا ب جـ د وا ب أعظم من جـ د ونسبة هـ ز إلى ز ح معلومة.

فأقول: إنه إذا فُصل من مقدار ا ب مقدارٌ، نسبتُه إليه كنسبة هـ ز إلى ز ح، وفُصل من الباقي مقدارٌ نسبتُه إليه هذه النسبةُ، فإنه ستنتهي القسمة إلى أن يبقى من ا ب مقدار أصغرُ من مقدار جـ د.

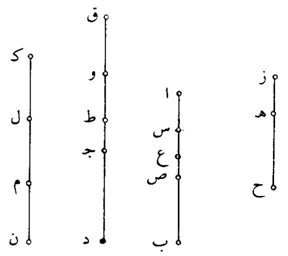
برهان ذلك: أنّا نجعل نسبة ط جـ إلى جـ د كنسبة ز هـ إلى هـ ح ثم نضعّف مقدار ط جـ إلى أن ينتهيَ إلى مقدارٍ أعظمَ من مقدار ا ب، ولتكن تلك الأضعاف ك ل ل م م ن وليكن ك ن أعظمَ من ا ب ونجعل نسبةَ ف ط إلى ط د كنسبة ط جـ إلى جـ د، ونجعل نسبة ق ف إلى ف د كنسبة ف ط إلى ط د، ونفعل ذلك دائمًا إلى أن تصير / المقادير المتناسبةُ المضافة إلى ٨٠ - و مقدار جـ د عِدّتُها كعِدّة الأضعاف التي في ك ن. ولتكن المقادير المضافةُ إلى مقدار جـ د – التي عِدّتُها كعِدّة الأضعاف التي في ك ن – مقادير ق ف ف ط ط جـ. فلأن نسبة ف ط إلى ط د كنسبة ط جـ إلى جـ د تكون – إذا بدّلنا – نسبة ف ط إلى ط جـ كنسبة ط د إلى د جـ، وط د أعظم من د جـ. فمقدار ف ط أعظم من مقدار ط جـ. وكذلك يتبيّن أنّ ق ف أعظمُ من ف ط. فعِدّةُ مقادير ق ف ف ط ط جـ كعدة مقادير ك ل ل م م ن، ومقادير ك ل ل م م ن متساويةٌ، وكلُّ واحدٍ منها مساوٍ لمقدار ط جـ، ومقادير ق ف ف ط ط جـ مختلفة، إذْ أصغرُها ط جـ، فجميع ق جـ أعظم من جميع ك ن، فمقدار ق د أعظم بكثيرٍ من مقدار ك ن. وك ن أعظم من ا ب، فمقدار ق د أعظم من ا ب، فمقدار ا ب أصغرُ من مقدار ق د، وتَقسمةُ ا ب

20 مختلفة: بمختلفة.

على نسبِ أقسامِ مقدار ق د ، / ولتكن القسمة على س ع ص . فتكون نسبة ا س إلى س ب ٨٠ - ظ كنسبة ق ف إلى ف د . ونسبةُ ق ف إلى ف د هي كنسبة ز هـ إلى هـ ح ، فنسبةُ ا س إلى س ب كنسبة ز هـ إلى هـ ح ؛ وكذلك نسبةُ س ع إلى ع ب كنسبة ف ط إلى ط د التي هي نسبةُ ز هـ إلى هـ ح ؛ وكذلك نسبةُ ع ص إلى ص ب كنسبة ط جـ إلى جـ د ، التي هي نسبةُ ز هـ إلى هـ ح ، فتكون نسبةُ س ا إلى س ب كنسبة هـ ز إلى ز ح ونسبة ع س إلى ع ب كنسبة هـ ز إلى ز ح ، ونسبة ص ع إلى ص ب كنسبة هـ ز إلى ز ح ، فتكون نسبة ا ب إلى ب س كنسبة ق د إلى د ف ، ونسبة س ب إلى ب ع كنسبة ف د إلى د ط ، ونسبة ع ب إلى ب ص كنسبة ط د إلى د جـ .

فلأن مقادير ا ب س ب ع ب ص ب على نِسب مقادير ق د ف د ط د جـ د تكون في نسبة المساواة: نسبةُ ا ب إلى ب ص كنسبة ق د إلى جـ د . وإذا / بدلنا تكون نسبة ا ب إلى ٨١ - و ق د كنسبة ص ب إلى جـ د ، وا ب قد تبيّن أنه أصغر من ق د فمقدار ب ص أصغر من مقدار جـ د الذي هو المقدار الأصغر.

فقد فُصل من مقدار ا ب مقدارٌ، نسبتُه إليه كنسبة هـ ز إلى ز ح ، ومما بقي مقدارٌ نسبتُه إليه هذه النسبةُ ، ومما بقي مقدارٌ نسبتُه إليه هذه النسبة ، وانتهت القسمة إلى مقدارٍ أصغرَ من مقدار جـ د الأصغر، وهو مقدار ص ب ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



تـمّ القول ولله الحمد والمنّة، والصلاة على سيدنا محمد وآله وسلم.

بلغت القراءة وصحّ.

5 س ب: ا ب / ع ب: س ب – 6 هـ ز: هـ د / ص ب: ع ب – 10 ب ص: ف ص – 14 القسمة: النسبة – 16 وسلم: سلم.

الفَصْلُ الثالِث

مَسائِلُ السُطوحِ والمُجَسَّماتِ المُتَساوِيَةِ الإحاطَةِ
ودِراسَةُ الزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ

مُقَدِّمَة

تَمَثَّلَ المَيدانُ الرياضِيُّ التَحْليلِيُّ الثالِثُ الَّذي تَناوَلَهُ ابــنُ الهَيْــثَم بالدِراسَــةِ بمَسْأَلَتَيِ الأشْكالِ المُسطّحةِ والأشْكالِ المُجَسَّمَةِ الّتي تكون إحاطتُهــا متَــساوية: وتَتَمَحْوَرُ المَسْأَلَةُ هنا حَوْلَ إثْباتِ أنّ الدائِرَةَ، من بَيْنِ الأشْكالِ المُسْتَوِيَةِ الَّــتي لهــا مُحيطٌ مَعْلومٌ، هِيَ الأعْظَمُ مِساحَةً؛ وعَلَى غِرارِ ذَلِكَ في الفَضاءِ، فإنّ الكُرَةَ، مــن بَيْنِ المُجَسَّماتِ المُحاطَةِ بمِساحَةٍ مَعْلومةٍ، هِيَ الأعْظَمُ حَجْماً؛ وهَذِهِ المَسْأَلَةُ – الَّتي نَجدُها مَنْقولَةً إلى العَرَبيَّةِ في كِتاباتِ الفَلَكِيِّينَ والرياضِيِّينَ الإغْريقِ – لَفَتَت انْتِبــاهَ عُلَماءِ التَقْليدِ العَرَبيِّ في وَقْتٍ مُبْكِرٍ: فقد سَبَقَ لِلكِنْديِّ في مُنْتَصَفِ القَرْنِ التاسِعِ أن تَناوَلَها[١]، وأعادَ الخازنُ الكَرَّةَ بَعْدَ ذَلِكَ بقَرْنٍ، وهَذا فَضْلاً عن آخَرينَ تَطَرَّقــوا إلى هَذِهِ المَسائِلِ. لقد كانَ مَوقِعُ ابنِ الهَيْثَمِ ضِمْنَ هَذا التَقْليدِ الإغْريقِــيِّ – العَرَبــيِّ، ولَكِنَّهُ تَخَطَّاهُ بَعيداً. وبالفِعْلِ فإنّ رُجوعَ ابنِ الهَيْثَمِ من جَديدٍ إلى هَذِهِ المَسْأَلَةِ قــد رَمَى إلى تَعْديلٍ جَوْهَرِيٍّ في دِراسَتِها، إذ إنّه يُعْلِنُ بدون مُوارَبَةٍ، ومُنْــذُ البَــدْءِ في

---

[١] نحنُ نَعْرِفُ استِناداً إلى ***فهرست*** النَديم أنّ الكِنْدِيَّ قد كَتَبَ كِتاباً تَحْتَ عُنْوانِ: ***في أنّ الكُرَةَ أعْظَمُ الأشْكال الجرميّةِ والدائرةَ أعْظَمُ من جَميعِ الأشْكالِ البَسيطَةِ***. مَنْشورات رضا تَجَدُّد، طهران ١٩٧١، ص ٣١٦.

المُقَدِّمَةِ التَمْهيدِيَّةِ لرِسالَتِهِ، أنّه غيرُ راضٍ عن وَضْعِ المَسْألَةِ، وذَلِكَ عِنْدَما كَتَبَ: "وقد ذَكَرَ أصْحابُ التَعاليمِ هَذا المَعْنَى واستَعْملوهُ، إلاّ أنّهُ لم يَقَعْ إلَيْنا بُرْهانٌ لهم عَلَى هَذا المَعْنَى ولا دَليلٌ مُقْنِعٌ"[٢]. فهل كانَ ابنُ الهَيْثَمِ يَجْهَلُ أعْمالَ سابقيهِ في هَذا المِضْمارِ؟ سَوْفَ نُناقِشُ هَذِهِ المَسْألَةَ في مَكانٍ آخَرَ، وحالِيّاً لنُشِرْ فَقَط إلى وَعْدِ ابنِ الهَيْثَمِ بأنّه سيُورِدُ "بُرْهاناً كُلِّيّاً" لإثْباتِ هاتَيْنِ الخاصِيَّتَيْنِ القُصْوَيَيْنِ. وهُوَ يَبرُّ بوَعْدِهِ في حالَةِ الدائِرَةِ، ولَكِن بالمُقابِلِ، لا يَبْلُغُ ابنُ الهَيْثَمِ غايَتَهُ في الحالَةِ العَويصَةِ المُتَعَلِّقَةِ بالمُجَسَّمِ الفَضائِيِّ، لَكِنَّ هَذا الفَشَلَ لَيْسَ سَلبيّاً بالمُطْلَقِ، إذ إنّه يُمَثِّلُ صورَةً مَقْلوبَةً لتَجْديدٍ في مَيْدانٍ آخَرَ من الرِياضِيّاتِ. بَعْدَ رَسْمِنا للخُطوطِ العَريضَةِ في مسارِ ابنِ الهَيْثَمِ، سَوْفَ نَعْمَدُ إلى تَحْليلِ هَذا المَسارِ وشَرْحِهِ الرِياضِيِّ المُفَصَّلِ.

عَقْبَ مَسْألَةِ السُطوحِ ذاتِ الإحاطَةِ المُتَساوِيَةِ المَعْلومةِ، يَنْبَري ابنُ الهَيْثَمِ إلى تَناوُلِ مَسْألَةِ المُجَسَّماتِ المُحَاطَةِ بسُطوحٍ ذاتِ مِساحَةٍ مُتَساوِيَةٍ مَعْلومةٍ، ويَرْمي إلى إثْباتِ القَضِيَّةِ (الخامِسَةِ) التالِيةِ:

١) كُلُّ مُتَعَدِّدَيْ قواعِدَ مُنْتَظِمَيْنِ، مُتَشابِهَي الوُجوهِ ومُتَساوِيَي المِساحَةِ، فذاك الَّذي لهُ وُجوهٌ أكْثَرُ منهُما يَكونُ الأكْبَرَ حَجْماً.

٢) كُلُّ مُتَعَدِّدَيْ قواعِدَ مُنْتَظِمَيْنِ، مُتَشابِهَي الوُجوهِ ومُحاطَيْنِ بكُرَةٍ واحِدَةٍ، فذاك الَّذي لهُ وُجوهٌ أكْثَرُ منهما يَكونُ ذا المِساحَةِ والحَجْمِ الأعْظَمَيْنِ.

بُغْيَةَ بُرْهانِ هَذِهِ القَضِيَّةِ، يُثْبِتُ ابنُ الهَيْثَمِ خَمْسَ مُقَدِّمَاتٍ (من المُقَدِّمَةِ السادِسَةِ حَتَّى العاشِرَةِ). وتُعالِجُ هَذِهِ المُقَدِّمَاتُ مُتَبايناتٍ لنسَبٍ فيما بَيْنَ الزوايا المُجَسَّمةِ ولِنسَبٍ فيما بَيْنَ المِساحَاتِ. ووَفْقَ ما نَعْرِفُه، فإنّها المَرَّةُ الأُولَى الَّتي يَجْري فيها تَطْبيقٌ مُهِمٌّ ومُوَسَّعٌ للزاوِيَةِ المُجَسَّمةِ، وبالتالي هِيَ المَرَّةُ الأُولَى الَّتي تَجْري فيها دِراسَةٌ جَوْهَرِيّةٌ لبَعْضِ خَواصِّ هَذِهِ الزاوِيَةِ. والمُهِمُّ أيضاً أهَمِيَّةَ تِلْكَ المُتَبايِنَاتِ هِيَ الطَريقَةُ الَّتي يَسْتَعْمِلُها ابنُ الهَيْثَمِ للوُصولِ إليها. حَيْثُ تَدْمُجُ هَذِهِ الطَريقَةُ ما بَيْنَ

[٢] انْظُرْ أدناه.

الإسْقاطِ المَخْروطِيِّ وتَحْديدِ اللاّمُتَناهيةِ الصِغَرِ للشَرائِحِ الهَرَمِيَّة. لقد واجَهَ ابنُ الهَيْثَمِ بَعْضَ المَصاعِبِ في بُرْهانِ هَذِهِ المُقَدِّمَاتِ الَّتي نادِراً ما تَكونُ سَهْلَةً. ولَكِنَّ هَذِهِ الصُعوباتِ لا تُؤَثِّرُ في النَتيجَةِ. فهُوَ يُثْبِتُ بكُلِّ عُمومِيَّةٍ، بواسِطَةِ طَريقَتِهِ، القَضِيَّةَ الخامِسةَ تِلْكَ. ولَكِنَّ هَذِهِ القَضِيَّةَ غَيْرُ قابلَةٍ للتَطْبيقِ سِوَى عَلَى حالاتِ رُباعِيِّ القَواعِدِ وثُمانِيِّ القَواعِدِ والمُجَسَّمِ ذي العِشْرينَ قاعِدَةً، لأنّ عَدَدَ وُجوهِ مُتَعَدِّدِ القَواعِدِ المُنْتَظِمِ ذي الوُجوهِ المُرَبَّعَةِ أو المُخَمَّسَةِ المُنْتَظِمةِ، هُوَ عَدَدٌ ثابِتٌ (إذ إنّهُ يُساوي ٦ أو ١٢). فالقِسْمُ الأوّلُ من قَضِيَّةِ ابنِ الهَيْثَمِ يَعْني إذاً، أنّهُ إذا ما تَساوَت المِساحَاتُ المُحيطَةُ برُباعِيِّ قواعِدَ مُنْتَظِمٍ وبثُمانيٍّ قواعِدَ مُنْتَظِمٍ وبمُجَسَّمٍ مُنْتَظِمٍ ذي عِشْرينَ قاعِدَةً، فإنّ حَجْمَ هَذِهِ المُجَسَّماتِ يتزايدُ وَفْقَ التَرْتيبِ التالي: رُباعيُّ القَواعِدِ، ثُمانيُّ القَواعِدِ، عِشْرينيُّ القَواعِدِ؛ أما القِسْمُ الثاني من القَضِيَّةِ فيَعْني بدَوْرِهِ، أنّهُ إذا ما كانَ رُباعيُّ القواعِدِ المُنْتَظِمُ وثُمانيُّ القواعِدِ المُنْتَظِمُ وعشرينيُّ القواعِدِ المُنْتَظِمُ مُحَاطَةً بكُرَةٍ واحِدَةٍ، فإنّ أحْجامَ هَذِهِ المُجَسَّماتِ تَتَزايدُ وَفْقَ التَرْتيبِ المُبَيَّنِ أعلاه. فلا يُوجَدُ مَكانٌ إذاً لمَسْألَةِ مُقارَبَةِ الكُرَةِ بواسِطَةِ مُتَوالِيَةٍ غَيْرِ مُنْتَهِيَةٍ من مُتَعَدِّداتِ القواعِدِ المُنْتَظِمةِ المُحاطَةِ بالكُرَةِ.

ونَحْنُ نَعْتَرِفُ بأنّ هَذِهِ الهَفْوَةَ الَّتي ارتَكَبَها ابنُ الهَيْثَمِ في هَذِهِ المَسْألَةِ، تَبْقَى أُحْجِيَةً مُحَيِّرَةً، لا سِيَّما وأنّ الرَجُلَ كانَ من أعْلَمِ الّذين تَضَلَّعوا من ***أصول*** إقليدس. فكيفَ لم يَرَ أنّ مُتَعَدِّداتِ القَواعِدِ الَّتي تَناوَلَها تُفْضي إلى مُجَسَّماتِ إقليدس؟ وأنّ عَدَدَها مُنْتَهٍ. وبالرَّغْمِ من ذَلِكَ، لا يَجوزُ أن تَحْجُبَ هَذِهِ الهَفْوَةُ غِنَى هَذا المُؤَلَّفِ، وبالأخَصِّ الجانِبَ المُتَعَلِّقَ منهُ بدِراسَةِ الزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ ورياضِيَّاتِ اللاّمُتَناهِيَةِ الصِغَرِ.

وبما يَخُصُّ النَصَّ بحَدِّ بذاتِهِ، فهُوَ مَذْكورٌ لَدَى المُفَهْرِسينَ، وصِحَّةُ نِسْبَتِهِ وَفْقَ ما عايَنّا، لا تُثيرُ أيَّ شَكٍّ، فابنُ الهَيْثَمِ يَذْكُرُهُ في مُؤَلَّفَيْنِ آخَرَيْنِ، هما:" ***في***

المَكانِ" و"في حَلِّ شُكوكٍ في كِتابِ المجسطيّ" [٣]

ولَكِنَّ اللاّئحةَ الَّتي وَضَعَها ابنُ أبي أُصَيْبعة عن مُؤَلَّفاتِ ابنِ الهَيْثَمِ تَتَضَمَّنُ مُؤَلَّفاً عُنْوانُهُ ***"في أعْظَمِ الخُطوطِ الَّتي تَقَعُ في قِطاعاتِ الدائِرَةِ"***. ولم يصِلْنا أيُّ شَيْءٍ، ولو بِشَكْلٍ غَيْرِ مُباشِرٍ، عن مُحْتَوَى هَذا المُؤَلَّفِ الَّذي يَتَناوَلُ أيضاً خاصِيَّةً قُصْوَى. فاسْتِناداً إلى العُنْوانِ وَحْدَهِ،.وعَلَى ضَوْءِ سِياقِ البَحْثِ الرياضِيِّ آنذاك، نَسْتَطيعُ أن نَفْتَرِضَ، أنّ الدِراسَةَ في هَذا المُؤَلَّفِ قد تَناوَلَتْ مُقارَنَةً بَيْنَ مُنْحَنَياتٍ مُحَدَّبَةٍ مُخْتَلِفَةٍ في قِطاعٍ دائِريٍّ، حَيْثُ يُعْتَبَرُ طولُ كُلِّ مُنْحَنٍ كَحَدٍّ أعْلَى لِمُتَعَدِّداتِ الأضْلاعِ المُحَاطَةِ؛ بِشَكْلٍ، تَؤولُ فيه المُقارَنَةُ بَيْنَ المُنْحَنياتِ إلى مُقارَنَةٍ بَيْنَ مُتَعَدِّداتِ الأضْلاعِ. لو ثَبُتَت لنا صِحَّةُ هَذِهِ الفَرَضِيَّةِ، لَشَرَّعَتْ تَساؤلَنا عن غايَةِ ابنِ الهَيْثَمِ من ذَلِكَ: فَلَعَلَّهُ، في هَذِهِ الحالَةِ، أرادَ أن يُؤسِّسَ مُصادَرَةَ أرشميدس المَشْهورَةَ الوارِدَةَ في ***"الكُرَة والأُسْطُوانَة"***، والمُتَعَلِّقَةَ بالخُطوطِ الَّتي تُحَقِّقُ ما يَرِدُ في القَوْلِ:"وأما الخُطوطُ الأُخَرُ الَّتي في سَطْحٍ ونهاياتُها واحِدَةٌ، فإنّها مُخْتَلِفَةٌ؛ وأُسَمِّي بِهَذِهِ الأسْماءِ الخُطوطَ الَّتي انْحِناؤُها في جِهَةٍ واحِدَةٍ. وهَذِهِ الخُطوطُ إمّا أن يَكونَ كُلُّ واحِدٍ منها يَشْتَمِلُ عَلَى الَّذي يَليهِ حَتَّى يَكونَ الخَطُّ المُسْتَقيمُ الَّذي يَصِلُ بَيْنَ نهاياتِها مُشْتَرَكاً لها كُلِّها أو يَكونُ الخطُّ يَشْتَمِلُ عَلَى بَعْضِ الخَطِّ الَّذي يَليهِ ويَكونُ باقيهِ مُشْتَرَكاً، والخطُّ الَّذي يَشْتَمِلُ عليه الخطُّ هُوَ أصْغَرُ منها"[٤].

لا يَذْكُرُ المُفَهْرِسونَ القُدَماءُ أيَّ عُنْوانٍ آخَرَ مُتَعَلِّقٍ بِمَسْألَةِ تَساوي المُحيطاتِ أو بِمَسائِلَ على صِلةٍ بذلك، أوعموماً بالمَسائِلِ الَّتي أصْبَحَت لاحِقاً جُزْءاً من *حِساب التَغَيُّراتِ*. وبما أنّ ابنَ الهَيْثَمِ بالذات لا يَذْكُرُ في مُؤَلّفاتِهِ الَّتي وصلَتْ إلينا

---

[٣] راجِعْ مُقَدِّمَةَ الكِتاب.

[٤] لقد تُرْجِمَ هذا النَصُّ إلى العَرَبيّةِ وكانَ في مُتَناوَلِ يَدِ ابنِ الهَيْثَمِ. انْظُرْ مَخْطوطَةَ إسْطَنْبول، سليمانيّة، فاتح ٣٤١٤، ص ٧-ظ.

أيَّ مُساهَمَةٍ أُخْرَى، فسَيَقْتَصِرُ إذاً هَذا الفَصْلُ، حالِياً، عَلَى هَذا المُؤَلَّف عن تَساوي المُحيطاتِ. وسَوْفَ نَعْمَدُ إلى تَناوُلِ هَذا المُؤَلَّفِ ودِراسَتِهِ بالتَفْصيلِ.

ويَبْقَى لنا أن نَأسَفَ لعَدَمِ تَوَفُّرِ مُؤَلَّفاتِ ابنِ الهَيْثَمِ حول مَراكِزِ الثِقَلِ والقَرَسطونِ، نَعْني الأعْمالَ المُتَعَلِّقَةَ بِالبُحوثِ حَوْلَ اللاّمُتَناهِيَةِ الصِغَرِ في عِلْمِ الحيَلِ أي ميكانيكا السكون[°].

٣-١ الشَرْحُ الرِياضِيُّ

قَضِيَّة ١.– إذا كانَ مُحيطُ دائِرَةٍ مُساوِياً لِمُحيطِ مُتَعَدِّدِ أضْلاعٍ مُنْتَظِمٍ، فإنّ مِساحَةَ الدائِرَةِ تَكونُ أعْظَمَ من مِساحَةِ مُتَعَدِّدِ الأضْلاعِ.

لِنَأخُذْ دائِرَةً (Γ)، نِصْفُ قُطْرِها r ومُحيطُها $2p_1$ ومِساحَتُها A_1، وَلْنَأخُذْ مُتَعَدِّدَ أضْلاعٍ مُنْتَظِماً، عَدَدُ أضْلاعِهِ n ومُحيطُهُ $2p_2$ ومِساحَتُهُ A_2.

إذا كانَ

$$2p_1 = 2p_2 = 2p,$$

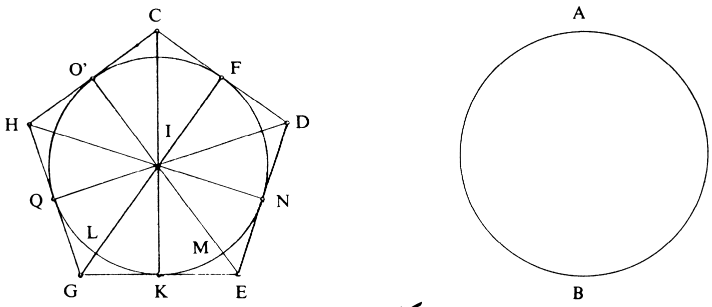
فإنّ

$$A_1 > A_2.$$

البُرْهان.– تَلْتَقي مُنَصِّفاتُ زَوايا مُتَعَدِّدِ الأضْلاعِ في نُقْطَةٍ واحِدَة، لِتَكُنْ I [انْظُرِ الشَكْلَ١]. والمُثَلَّثاتُ الَّتي يَقَعُ رَأسُها في النُقْطَةِ I ويَكونُ أحَدُ أضْلاعِ مُتَعَدِّدِ الأضْلاعِ قاعِدَتَها هِيَ مُثَلَّثاتٌ مُتَساوِيَةُ الساقَيْنِ ومُتَساوِيَةٌ فيما بَيْنَها. لِيَكُنْ h ارْتِفاعَها المُشْتَرَكَ. الدائِرَةُ ذاتُ المَرْكَزِ I ونِصْفِ القُطْرِ h تُماسُّ كُلَّ أضْلاعِ مُتَعَدِّدِ الأضْلاعِ. لِتَكُنْ (Γ') تِلْكَ الدائِرَةَ ولْيَكُنْ $2p'$ مُحيطَها. لِيَكُنْ EG أحَدَ أضْلاعِ

[°] راجِعِ المُجَلَّدَ الثالِثَ.

مُتَعَدِّدِ الأَضْلاعِ وَلْنَأخُذْ IK بحَيْثُ يَكونُ $IK \perp GE$ وَلْنَرْمُزْ بِـ L وَ M عَلَى التَــوالي



شكل ١

إلى نُقْطَتَيْ تَقاطُعِ المُسْتَقيمَيْنِ IE وَ IG مع الدائِرَةِ (Γ'). فإذاً

$$\frac{h \,.\, EG}{2} = aire\ (IEG) = s.$$

$$\frac{h \,.\, \widehat{ML}}{2} = aire\ sect.(IMKL) = s'.$$

(وذَلِكَ اسْتِناداً إلى كِتابِ أرشميدس ***في مِساحَةِ الدائِرَة***)

يَكونُ لَدَيْنا

$$s > s',$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$EG > \widehat{ML}\ ;$$

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِك، العَلاقَةَ

$$n \,.\, EG > n \,.\, \widehat{ML},$$

ما يَعْني أنّ

$$2p_2 > 2p',$$

أو أيضاً

$$2p > 2p'.$$

ويَنْتُجُ من ذَلِكَ أنّ

$$r > h$$

وَ

$$p \,.\, r > p \,.\, h.$$

غَيْرَ أنّ مِساحَةَ الدائِرَةِ تَكونُ

$$A_1 = p \,.\, r,$$

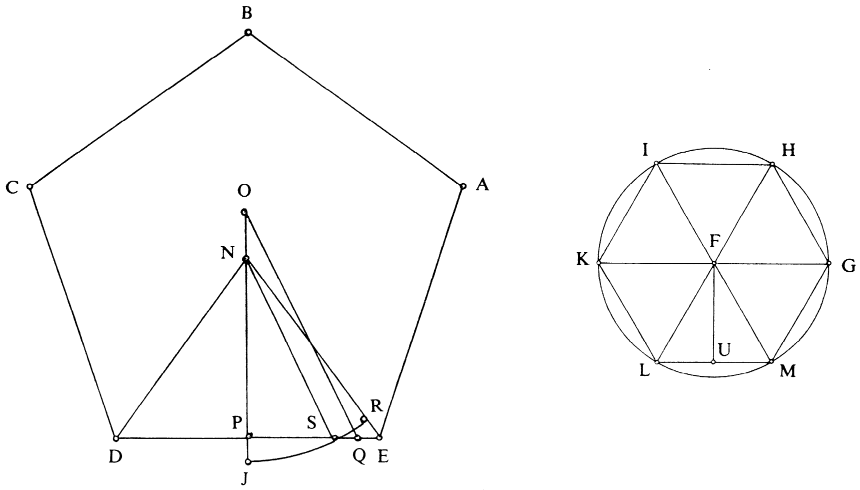
ومِساحَةُ مُتَعَدِّدِ الأَضْلاعِ تَكونُ

$$A_2 = p \,.\, IK = p \,.\, h;$$

وبالتالي يَصيرُ لَدَيْنا

$$A_1 > A_2 \,.$$

قَضِيَّة ٢.– كُلُّ مُتَعَدّدَيْ أضْلاعٍ مُنْتَظِمَيْنِ لَهُما نَفْسُ المُحيطِ، ذاك الَّذي تَكـــونُ أضْلاعُهُ أكْثَرَ فهُوَ الأعْظَمُ مِساحَةً.



شكل ٢

لِنَأخُذْ مُتَعَدِّدَيْ أضْلاعٍ مُنْتَظِمَيْنِ P_1 وَ P_2 لهما نَفْسُ المُحيطِ $2p$. لِـــيَكُنْ n_1 عَدَدَ أضْلاعِ P_1 وَ A_1 مِساحَتَهُ، وَلْيَكُنْ n_2 عَدَدَ أضْلاعِ P_2 وَ A_2 مِساحَتَهُ. إذا كانَ $n_1 < n_2$، فإنّ $A_1 < A_2$.

لِيَكُنْ DE ضِلْعاً لِ P_1 وَ LM ضِلْعاً لِ P_2 [انْظُرِ الشَكْلَ ٢].

لَدَيْنا

$$2p = n_1.DE = n_2.LM,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$DE > LM$$

لأنّ $n_2 > n_1$.

لِتَكُنِ النُقْطَتانِ P وَ U، عَلَى التوالي، مُنْتَصَفَيْ DE وَ LM، لَدَيْنا إذاً

$$PE > UM$$

وَ

$$\frac{PE}{UM} = \frac{n_2}{n_1}.$$

لِتَكُنِ النُقْطَتانِ N وَ F، عَلَى التَوالي، مَرْكَزَيْ مُتَعَدِّدَي الأَضْلاع P_1 وَ P_2، يَكـــونُ لَدَيْنا إذاً

$$P\hat{N}E = \frac{2\pi}{2n_1} = \frac{\pi}{n_1},$$

وأيضاً

$$U\hat{F}M = \frac{\pi}{n_2};$$

ونَستَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{P\hat{N}E}{U\hat{F}M} = \frac{n_2}{n_1},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$P\hat{N}E > U\hat{F}M$$

وَ

$$\frac{P\hat{N}E}{U\hat{F}M} = \frac{PE}{UM}.$$

لِنَأخُذِ النُقْطَةَ S عَلَى DE بحَيْثُ يَكونُ

$$P\hat{N}S = U\hat{F}M,$$

فإذاً

$$\frac{P\hat{N}E}{P\hat{N}S} = \frac{PE}{UM}.$$

تَقْطَعُ الدائِرَةُ $(N, \quad NS)$ القِطْعَةَ NP عَلَى J كما أنّها تَقْطَــعُ NE عَلَـــى R.

ويَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{E\hat{N}P}{S\hat{N}P} = \frac{\text{aire sect.}(RNJ)}{\text{aire sect.}(SNJ)} = \frac{EP}{MU},$$

$$\text{aire tr.}(SNE) > \text{aire sect.}(SNR)$$

وَ

$$\text{aire tr.}(SNP) < \text{aire sect.}(SNJ),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{\text{tr.}(SNE)}{\text{tr.}(SNP)} > \frac{\text{sect.}(SNR)}{\text{sect.}(SNJ)} \Rightarrow \frac{\text{tr.}(PNE)}{\text{tr.}(SNP)} > \frac{\text{sect.}(RNJ)}{\text{sect.}(SNJ)},$$

غَيْرَ أنّ

$$\frac{\text{tr.}(PNE)}{\text{tr.}(SNP)} = \frac{PE}{PS}$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{PE}{PS} > \frac{PE}{MU}$$

وَ

$$PS < MU$$

والمُثَلَّثانِ القائِمانِ PNS وَ UFM مُتَشابِهانِ، لأنّ

$$P\hat{N}S = U\hat{F}M;$$

وبما أنّ

$$PS < MU,$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$NP < FU;$$

غَيْرَ أنّ

$$A_1 = p \, . \, NP$$

وَ

$$A_2 = p \, . \, FU,$$

فإذاً

$$A_2 > A_1 .$$

قَضِيَّة ٣.– كُلُّ مُتَعَدِّدَيْ أضْلاعٍ مُنْتَظِمَيْنِ مُحاطَيْنِ بدائِرَةٍ واحِدَةٍ، فإنّ ذاك الَّذي أضْلاعُهُ أكْثَرُ هُوَ الأكْبَرُ مِساحَةً.

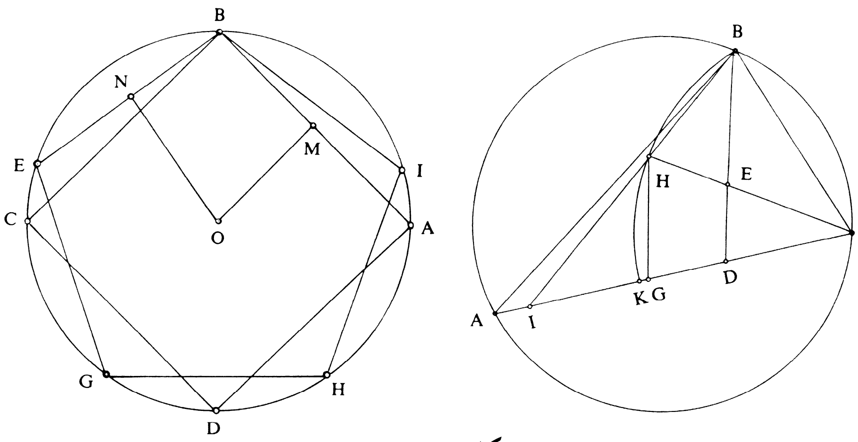
مُقَدِّمَة .– لِنَأخُذْ قَوْسَينِ $\widehat{AB}$ وَ $\widehat{BC}$ بحَيْثُ يَكونُ

$$\widehat{AB} > \widehat{BC}$$

وَ

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} \leq \frac{2}{3} \; cercle,$$

فإذاً



شكل ٣

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{AB}{BC}.$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٣]

إذا كانَ

$$\widehat{AB} > \widehat{BC}$$

وَ

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} \leq \frac{2}{3} \text{ cercle,}$$

فيَكونُ لَدَيْنا

$$\widehat{BC} < \frac{1}{3} \text{ cercle,}$$

وَ

$$\widehat{AC} \geq \frac{1}{3} \text{ cercle,}$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\widehat{BC} < \widehat{AC}$$

وَ

$$B\hat{A}C < A\hat{B}C$$

وهَذا ما يُمَكِّنُنا من بِناءِ $C\hat{B}D$ بحَيْثُ يَكونُ $C\hat{B}D = B\hat{A}C$، وتَكونُ النُقْطَةُ D عَلَى القِطْعَةِ AC. والمُثَلَّثانِ ABC وَ BDC مُتَشابِهانِ، ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{BD}; \quad (1)$$

وبما أنّ

$$AC > BC, AB > BC,$$

نَحْصُلُ من ذَلِكَ عَلَى

$$BC > CD, BD > CD.$$

ونَبْني داخِلَ الزاوِيَةِ $A\hat{C}B$

$$D\hat{C}E = C\hat{B}E = B\hat{A}C.$$

والمُثَلَّثانِ CDE وَ BDE مُتَشابِهان، ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{CB}{CE} = \frac{CD}{DE} = \frac{BD}{DC} \quad (2)$$

وتَقْطَعُ الدائِرَةُ (C, CB) القِطْعَةَ CE عَلَى النُقْطَةِ H، والقِطْعَةَ CA عَلَى K، وَلْنُخْرِجْ من النُقْطَةِ H المُسْتَقيمَ HG مُوازِياً لِ BD؛ وَلْيَقْطَعْ BH القِطْعَةَ AC عَلَى I. ويَكونُ المُثَلَّثانِ HGC وَ EDC مُتَشابِهَيْنِ، ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{HG}{ED} = \frac{GC}{DC} = \frac{HC}{EC} = \frac{CB}{EC}. \quad (3)$$

وتَنتُجُ من *(2)* و *(3)* العَلاقَةُ

$$\frac{CD}{DE} = \frac{HG}{ED},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$HG = CD.$$

ولَكِنَّ HG وَ BD مُتَوازِيانِ، لذَلِكَ فإنّ

$$\frac{BI}{IH} = \frac{BD}{HG},$$

ونَستَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{BI}{IH} = \frac{BD}{CD}.$$

واستِناداً إلى *(1)* لَدَيْنا

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{BC},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{BI}{IH} = \frac{AB}{BC}.$$

ولَدَيْنا

$$aire\ sect.(CBH) > aire\ tr.(CBH)$$

وَ

$$aire\ sect.(CHK) < aire\ tr.(CHI),$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{sect.(CBH)}{sect.(CHK)} > \frac{tr.(CBH)}{tr.(CHI)}.$$

ونَستَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{\widehat{BH}}{\widehat{HK}} > \frac{BH}{HI}$$

وَ

$$\frac{B\hat{C}H}{H\hat{C}I} > \frac{BH}{HI},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{B\hat{C}H + H\hat{C}I}{H\hat{C}I} > \frac{BH + HI}{HI},$$

وبالتالي نَحْصُلُ عَلَى

$$\frac{B\hat{C}A}{B\hat{A}C} > \frac{AB}{BC},$$

ويَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BC}} > \frac{AB}{BC}.$$

مُلاحَظَة .– إنّ أكْبَرَ الأقواسِ الَّتي نُصادِفُها لَدَى دِراسَتِنا لِمُتَعَدِّداتِ الأضْلاعِ المُنْتَظِمةِ المُحاطةِ بدائِرَةٍ، هِيَ القَوْسُ المُقابِلَةُ الَّتي يُوَتِّرُها ضِلْعُ المُثَلَّثُ المُتَساوِي الأضْلاعِ. وهَذا ما يُعَلِّلُ الفَرَضِيَّةَ المُمَثِّلَةَ بالعَلاقَةِ

$$\widehat{AB} + \widehat{BC} \leq \frac{2}{3} \text{ cercle},$$

الَّتي أدْخَلَها هُنا ابنُ الهَيْثَمِ، والَّتي يُستَنَدُ إليها في بِناءِ النُقْطَةِ D المُسْتَعْمَلَةِ في مَعْرِضِ الاسْتِدْلالِ.

لِنُلاحِظْ أنّهُ إذا كانَ الراديانُ هُوَ وحْدَةَ قِياسِ الأقواسِ، وإذا جَعَلْنا

$\widehat{AB} = 2\alpha$ وَ $\widehat{BC} = 2\beta$،

فإنّ النَتيجَةَ الحاصِلةَ لَيْسَت سِوَى المُتَبايِنَةِ

$$\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \left(\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta\right).$$

بُرْهانُ المُبَرْهَنَةِ .– المُثَلَّثُ المُتَساوِي الأضْلاعِ هُوَ مُتَعَدِّدُ الأضْلاعِ المُنْتَظِمِ المُحَدَّبِ الَّذي لهُ أقَلُّ عَدَدٍ من الأضْلاعِ.

إنّ القَوْسَ الَّتي يُوَتِّرُها أيُّ ضِلْعٍ من مُتَعَدِّدِ أضْلاعٍ مُنْتَظِمٍ مُحاطٍ بدائِرَةٍ ولَهُ أكْثَرُ من ثَلاثَةِ أضْلاعٍ، تَكونُ أقَلَّ من ثُلُثِ مُحيطِ تِلْكَ الدائِرَةِ.

لِنَأخُذْ مُرَبَّعاً $ABCD$ مُحيطُهُ C_1 ومِساحَتُهُ A_1، ومُخَمَّساً $BEGHI$ مُحيطُهُ C_2 ومِساحَتُهُ A_2. المجموعُ $\widehat{AB} + \widehat{BE}$ أصْغَرُ من ثُلُثَيْ مُحيطِ الدائِرَةِ، فإذاً

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BE}} = \frac{AB}{BE},$$

ولذَلِكَ، اسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BI}} > \frac{AB}{BI}. \qquad (1)$$

وإذا كانَ C مُحيطَ الدائِرَةِ المُحيطَةِ، نَحْصُلُ عَلَى

$$\frac{\widehat{AB}}{C} = \frac{AB}{C_1}$$

وَ

$$\frac{\widehat{BI}}{C} = \frac{BI}{C_2},$$

وبالقِسمةِ نَحْصُلُ عَلَى العَلاقَةِ

$$\frac{\widehat{AB}}{\widehat{BI}} = \frac{AB}{BI} \cdot \frac{C_2}{C_1},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{AB}{BI} \cdot \frac{C_2}{C_1} > \frac{AB}{BI},$$

وهذا ما يَسْتَتْبِعُ العَلاقَةَ

$$C_2 > C_1 .$$

لَدَيْنا

$$A_1 = \frac{1}{2}\, C_1 \,.\, OM$$

وَ

$$A_2 = \frac{1}{2}\, C_2 \,.\, ON$$

حَيْثُ $OM < ON$ (لأنّ: $AB > BE \Rightarrow OM < ON$)، ونَسْتَنْتِجُ العَلاقَةَ

$$A_2 > A_1.$$

لِنُشِرْ إلى أنّ الاسْتِدْلالَ مُسْتَقِلٌّ عن طَبيعَةِ مُتَعَدِّدِ الأضْلاعِ المُنْتَظِمِ.

قَضِيَّة ٤.– لِنَأخُذْ كُرَةً ومُتَعَدِّدَ قواعِدَ مُنْتَظِماً مُحاطاً بكُرَةٍ. إذا كانَت مِساحَتا الكُرَةِ ومُتَعَدِّدِ القَواعِدِ المَأخوذَيْنِ مُتَساوِيَتَيْنِ، فإنّ حَجْمَ الكُرَةِ يَكونُ أكْبَرَ من حَجْمِ مُتَعَدِّدِ القَواعِدِ.

مُقَدِّمات.

١) لِنَأخُذْ كُرَةً نِصْفُ قُطْرِها R وحَجْمُها V_S ومِساحَتُها A_S، وأُسْطُوانَةً قائِمَةً نِصْفُ قُطْرِها R وارْتِفاعُها $h_C = 2R$ وحَجْمُها V_C. فإذاً

$$V_S = \frac{2}{3}\, V_C \quad \text{(وَفْقَ أرشميدس)}$$

الدائِرَةُ العَظيمَةُ في الكُرَةِ تُساوي قاعِدَةَ الأُسْطُوانَةِ، لِتَكُنْ s مِساحَةَ هَذِهِ الدائِرَةِ.

لَدَيْنا

$$V_C = s\,.\,h_C = s\,.\,2R\,,$$

فإذاً

$$V_S = \frac{2}{3}\, s\,.\,2R = (1 + \frac{1}{3})s\,.\,R\,,$$

ولَكِنَّ لَدَيْنا

$$(1 + \frac{1}{3})s = \frac{1}{3}\, A_s\,,$$

لذَلِكَ فإنّ

$$V_S = \frac{1}{3}\, A_S\,.\,R = \frac{4}{3}\,\pi R^3. \qquad (1)$$

٢) لِنَأخُذْ مُتَعَدِّدَ قواعِدَ مُنْتَظِماً مُحاطاً بكُرَةٍ. يَرْتَبِطُ كُلُّ وَجْهٍ من وُجوهِ مُتَعَدِّدِ القَواعِدِ بِهَرَمٍ مُنْتَظِمٍ قاعِدَتُهُ الوَجْهُ المَذْكورُ ورأسُهُ مَرْكَزُ الكُرَةِ. وهَكَذا نَكونُ قد حَدَّدْنا زاوِيَةً مُجَسَّمَةً رَأسُها في النُقْطَةِ B وسَطْحاً كُرَوِيّاً ومَقْطَعاً من الكُرَةِ.

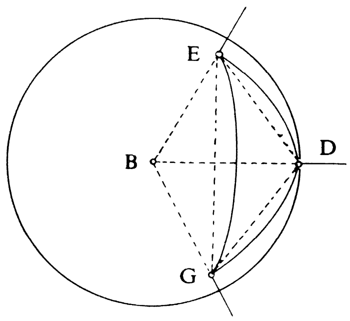
لِنُشرْ بـ A إلى مِساحَةِ سَطْحِ الكُرَةِ، و بـ s إلى مِساحَةِ السَطْحِ الكُرَوِيِّ، وبـ v إلى حَجْمِ المَقْطَعِ الكُرَوِيِّ، وبـ V إلى حَجْمِ الكُرَةِ، و بـ α إلى الزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ، و بـ D إلى الزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ القائِمَةِ، يَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{v}{V} = \frac{s}{A} = \frac{\alpha}{8D} \qquad (2)$$

لِنُلاحِظْ أنّ كُلَّ واحِدَةٍ من هَذِهِ النِسَبِ تُساوي $\frac{1}{n}$، حَيْثُ يَكونُ n عَدَدَ وُجوهِ مُتَعَدِّدِ القَواعِدِ.

فمَجْموعُ الزوايا المُجَسَّمَةِ في مَرْكَزِ الكُرَةِ يُساوي ثَمانيَ زوايا مُجَسَّمَةٍ قائِمَةٍ، لأنّ كُلَّ ثَلاثَةِ خُطوطٍ مُسْتَقيمةٍ، مُتَعامِدَةٍ ثُناءً في نُقْطَةٍ واحِدَةٍ، تُحْدِثُ ثَمانيَ زوايا مُجَسَّمَةٍ مُتَساوِيَةٍ، بحَيْثُ تَكونُ كُلُّ واحِدَةٍ منها زاوِيَةً مُجَسَّمَةً قائِمَةً. ونَسْتَنْتِجُ من (2) وَ (1) العَلاقَةَ

$$v = \frac{1}{3}\, s \,.\, R.$$



بُرْهانُ القَضِيَّةِ ٤.– لا يَتَطَرَّقُ البُرْهانُ إلى طَبيعَةِ مُتَعَدِّدِ القَواعِدِ.

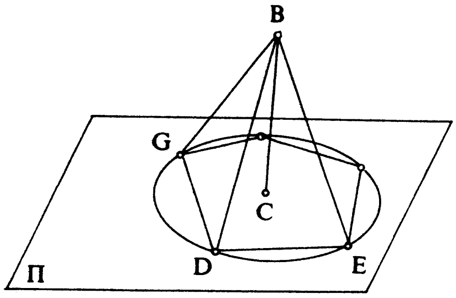
لِيَكُنْ (Π) سَطْحاً لأحَدِ الوُجوهِ، ولْتَكُنِ النقاطُ E, D, G ثَلاثَةَ رُؤوسٍ لهَذا الوَجْهِ، ولْتَكُنِ النُقْطَةُ B مَرْكَزَ الكُرَةِ المُحيطَةِ [انْظُرِ الشَكْلَ ٤]، فيَكونُ لَدَيْنا

$$BG = BD = BE.$$

لِنَأخُذْ عَلَى (Π) النُقْطَةَ C بحَيْثُ يَكونُ $BC \perp (\Pi)$ ، فيَكونُ لَدَيْنا

$$CG = CD = CE$$

ويَكونُ الوَجْهُ مُحاطاً بالدائِرَةِ (C, CD). وتَكونُ كُلُّ الدَوائِرِ المُحدَثَةِ بِهَذِهِ الطَريقَةِ مُتَساوِيَةً لِكُلِّ الأوْجُهِ، (لأن مُتَعَدِّداتِ الأضْلاعِ مُتَساوِيَةٌ)، وتَكونُ النُقْطَةُ B مُتَساوِيَةَ البُعْدِ عن كُلِّ السُطوحِ والأوْجُهِ. فإذاً، تَكونُ الكُرَةُ (B, BC) مُحاطَةً بِمُتَعَدِّدِ القَواعِدِ.



شكل ٤

لِنَجْعَلْ P الهَرَمَ الَّذي تَكونُ النُقْطَةُ B رأسَهُ ويَكونُ الوَجْهُ GDE من مُتَعَدِّدِ القَواعِدِ قاعِدَتَهُ. ولْيَكُنْ v_1 حَجْمَهُ وَ s_1 مِساحَةَ قاعِدَتِهِ ولْيَكُنْ V_1 حَجْمَ مُتَعَدِّدِ القَواعِدِ و S_1 مِساحَتَهُ الإجْمالِيَّةَ.

فيكون لَدَيْنا إذاً

$$V_1 = n\, v_1$$

وَ

$$S_1 = n\, s_1,$$

حَيْثُ يَكونُ n عَدَدَ وُجوهِ مُتَعَدِّدِ القَواعِدِ. يُحْدِثُ الهَرَمُ P في الكُرَةِ (B, BC) مَقْطَعاً كُرَوِيّاً، لِيَكُنْ v_2 حَجْمَهُ، وَلْتَكُنْ s_2 مِساحَةَ السَطْحِ الكُرَوِيِّ المُرْتَبِطِ بالمَقْطَعِ المَذْكورِ. وَلْتَكُنْ S_2 مِساحَةَ الكُرَةِ وَ V_2 حَجْمَها, فإذاً

$$S_2 = n\, s_2,\ V_2 = n\, v_2\ ,\ v_2 < v_1\ .$$

ويَكونُ لَدَيْنا

$$v_1 = \frac{1}{3} s_1 . BC,$$

واسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ

$$v_2 = \frac{1}{3} s_2 . BC;$$

وبما أنّ

$$v_1 > v_2 ,$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$s_1 > s_2 ,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$S_1 > S_2 .$$

وبما أنّ S_1 هِيَ أيضاً مِساحَةُ الكُرَةِ A، فتَكونُ هَذِهِ المِساحَةُ، أي S_1، أكْبَرَ من مِساحَةِ الكُرَةِ (B, BC)، أي S_2. فإذاً نِصْفُ قُطْرِ الكُرَةِ A يَكونُ أكْبَرَ من BC.

حَجْمُ مُتَعَدِّدِ القَواعِدِ B:

$$V_1 = \frac{1}{3} S_1 . BC$$

وحَجْمُ الكُرَةِ A:

$$V = \frac{1}{3} S_1 . R.$$

فإذاً يَكونُ لَدَيْنا التَضَمُّنُ التالي:

$$R > BC \Rightarrow V > V_1$$

قَضِيَّة ٥.

٥ أ – كُلُّ مُتَعَدِّدَيْ قواعِدَ مُنْتَظِمَيْنِ مُتَشابِهَيِ الأوْجُهِ مُتَساوِيَيِ المِساحَةِ الإجْمالِيَّةِ، فإنّ ذاك الَّذي لهُ أوْجُهٌ أكْثَرُ هُوَ الأكْبَرُ حَجْماً.

٥ ب – كُلُّ مُتَعَدِّدَيْ قواعِدَ مُنْتَظِمَيْنِ مُتَشابِهَيِ الأوْجُهِ مُحاطَيْنِ بكُرَةٍ واحِدَةٍ، فإنّ ذاك الَّذي لهُ أوْجُهٌ أكْثَرُ هُوَ الأكْبَرُ مِساحَةً وحَجْماً.

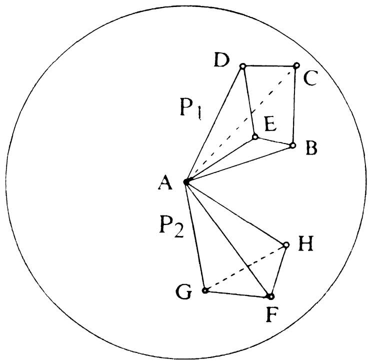
تَمْهيد – لِنَجْعَلْ A مَرْكَزَ الكُرَةِ، وَلْنَأْخُذِ الهَرَمَيْنِ

$$P_1\ (A, BCDE)\ ,\ P_2\ (A, HFG)$$

ولِنَجْعَلْ α_1 الزاوِيَةَ المُجَسَّمَةَ للهَرَمِ P_1. تَقْتَطِعُ الزاوِيَةُ المُجَسَّمَةُ α_1 مِساحَةً كُرَوِيَّةً، لِنَجْعَلْها s_1، كما أنّها تَحُدُّ مَقْطَعاً كُرَوِيّاً لِنَجْعَلْ حَجْمَهُ v_1؛ وعَلَى نَفْسِ النَسَقِ، نَرْبطُ الهَرَمَ P_2 بالزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ α_2، وبالمِساحَةِ الكُرَوِيَّةِ s_2 وبالمَقْطَعِ الكُرَوِيِّ ذي الحَجْمِ v_2. يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

وإذا ما ضاعَفْنا الهَرَمَ P_1 ما مِقدارُهُ n من المَرّاتِ، يَصيرُ حَجْمُ القِطْعَةِ الكُرَوِيَّةِ المُرْتَبِطَةِ بما نَحْصُلُ عليه مُساوِياً لِ $n\,v_1$، وتُصْبِحُ مِساحَةُ السَطْحِ الكُرَوِيِّ المُقْتَطَعِ مُساوِيَةً لِ $n\,s_1$ أمّا الزاوِيَةُ المُجَسَّمَةُ الحاصِلَةُ فتَصيرُ مُساوِيَةً لِ $n\alpha_1$. وهَذا صَحيحٌ أيضاً بالنِسْبَةِ إِلَى الهَرَمِ P_2.



$$n\,v_1 > n\,v_2 \Rightarrow n\,\alpha_1 > n\,\alpha_2,\ n\,s_1 > n\,s_2$$
$$n\,v_1 < n\,v_2 \Rightarrow n\,\alpha_1 < n\,\alpha_2,\ n\,s_1 < n\,s_2$$
$$n\,v_1 = n\,v_2 \Rightarrow n\,\alpha_1 = n\,\alpha_2,\ n\,s_1 = n\,s_2$$
$$n\,\alpha_1 > n\,\alpha_2 \Rightarrow n\,s_1 > n\,s_2,\ n\,v_1 > n\,v_2$$
$$n\,\alpha_1 < n\,\alpha_2 \Rightarrow n\,s_1 < n\,s_2,\ n\,v_1 < n\,v_2$$
$$n\,\alpha_1 = n\,\alpha_2 \Rightarrow n\,s_1 = n\,s_2,\ n\,v_1 = n\,v_2$$

لِنُلاحِظْ أنّ الشُروحَ الّتي يُورِدُها ابنُ الهَيْثَمِ هنا لا تُمَثِّلُ بُرْهاناً للخاصِيَّةِ المُصاغَةِ:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

في المُقَدِّمَةِ ٢ من القَضِيَّةِ ٤، يَأخُذُ ابنُ الهَيْثَمِ مُتَعَدِّدَ قَواعِدَ مُنْتَظِماً مُحاطاً بكُرَةٍ، ومُجَزّأً إلى عَدَدٍ من الأهْراماتِ المُنْتَظِمَةِ مُساوٍ لِ n، ولَدَيْنا لِكُلِّ واحِدٍ من هَذِهِ الأهْراماتِ

$$\frac{v}{V} = \frac{s}{A} = \frac{\alpha}{8D},$$

(انْظُرْ أدْناه)

وفي هَذا التَمْهيدِ، إذا ما كانَ P_1 وَ P_2 قد تَأَتَّيا من مُتَعَدِّدَيْ قَواعِدَ مُنْتَظِمَيْنِ لهما عَدَدٌ من الأوْجُهِ مُساوٍ، عَلَى التَوالي، لِ n_1 وَ n_2، يَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{v_1}{V} = \frac{s_1}{A} = \frac{\alpha_1}{8D} = \frac{1}{n_1}, \quad \frac{v_2}{V} = \frac{s_2}{A} = \frac{\alpha_2}{8D} = \frac{1}{n_2},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1}{s_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}.$$

ولَكِنَّ ابنَ الهَيْثَمِ لا يُحَدِّدُ بِدِقَّةٍ طَبيعَةَ الهَرَمَيْنِ P_1 وَ P_2.

مُقَدِّمَة ٦. لِيَكُنْ $ABCD$ هَرَماً بحَيْثُ يَكونُ

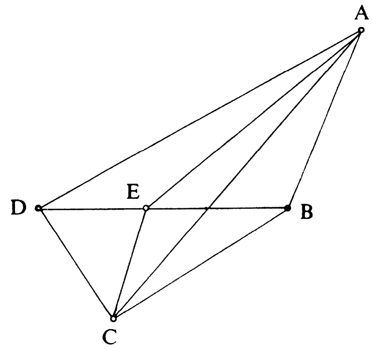
$$A\hat{B}C \geq \frac{\pi}{2}, \; A\hat{B}D \geq \frac{\pi}{2},$$

إذا كانَت E نُقْطَةً من BD بحَيْثُ يَكونُ $A\hat{E}C \geq \frac{\pi}{2}$ أو $A\hat{C}E \geq \frac{\pi}{2}$ ، فإنّ

$$\frac{aire(DBC)}{aire(EBC)} > \frac{angle\ sol.\ (A, BDC)}{angle\ sol.\ (A, EBC)}.$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٥]

لِنَأخُذْ كُرَةً Σ مُمَرْكَزةً بالنُقْطَةِ A ولها نِصْفُ قُطْرٍ AB، تَقْطَعُ AC عَلَـــى H وَ AD عَلَى I وَ AE عَلَى L، بحَيْثُ يَكونُ



الشكل ٥

$$AB = AH = AI = AL,$$

فتَكونُ القَوْسُ $\widehat{BH}$ إذاً في المُسْتَوِي (BAC)، والقَـــوْسُ $\widehat{BLI}$ في (BAD) وَ $\widehat{HI}$ في (ACD) وَ $\widehat{HGL}$ في المُسْتَوِي (ACE). ويَقَعُ المُسْتَقيمُ BL في المُسْتَوِي(BAD)، وهُوَ يَقْطَعُ AD عَلَى K (لأنّ $A\hat{B}L$ حادَّةٌ و $B\hat{A}D$ حادَّةٌ). القَوْسُ $\widehat{LGH}$ عَلَى الكُرَةِ Σ، فإذاً تَقَعُ K خارِجَ Σ وَ $AI < AK$. والسَطْحُ المَخْروطِيُّ ذو الرأسِ B الَّذي تُحَـــدِّدُهُ القَوْسُ $\widehat{LGH}$ يَقْطَعُ السَطْحَ (ADC) تِبْعاً للقَوْسِ $\widehat{KFH}$، لأنّ كُلَّ مُـــسْتَقيمٍ BG يَقْطَعُ هَذا المُسْتَوِي عَلَى F خارِجَ الكُرَةِ Σ، والقَوْسُ $\widehat{KFH}$، ما عَدَا النُقْطَـــةِ H، تَقَعُ خارِجَ Σ. فإذاً يَكونُ مَقْطَعُ الكُرَةِ $AILGH$ داخِلَ المُجَسَّمِ $AKFHGL$، المُحاطِ بِسُطوحٍ مُسْتَوِيَةٍ وبِجُزْءٍ من السَطْحِ المَخْروطِيِّ، لأنَّ الجُزْءَ GF من المُوَلِّدِ يَقَعُ خارِجَ Σ، ومَقْطَعُ الكُرَةِ $ALHB$ أكْبَرُ من المُجَسَّمِ $ALHB$ المُحاطِ بالأسْطُحِ المُسْتَوِيَةِ وبِجُزْءٍ آخَرَ من السَطْحِ المَخْروطِيِّ، لأنّ الجُزْءَ BG من مُوَلِّدِ المَخْروطِ يَقَعُ داخِلَ Σ. [انْظُرِ الشَكْلَ ٦]

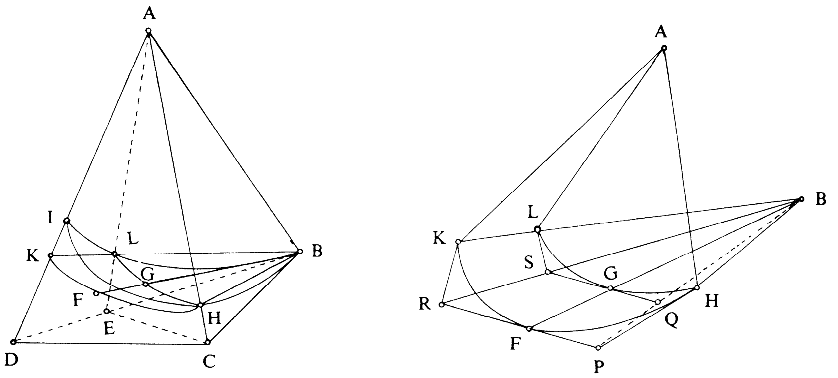
$$\left.\begin{array}{l} sect.(A, ILH) < sol.(A, KFHGL) \\ sect.(A, LHB) > sol.(A, HGLB) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{sect.(A, ILH)}{sect.(A, LHB)} < \frac{sol.(A, KFHGL)}{sol.(A, LGHB)}.$$

وبالتَرْكيبِ، يَصيرُ لَدَيْنا

$$\frac{sect.(A, IHB)}{sect.(A, LHB)} < \frac{sol.(B, AKFH)}{sol.(B, AHGL)}. \qquad (*)$$

ويُدْرِجُ ابنُ الهَيْثَمِ إذاً، في مَعْرِض بُرْهانهِ للمُقَدِّمَةِ ٦، قَضِيَّةً تُصاغُ كما يَلي:

$$\frac{aire\ tr.(AEC)}{aire\ sect.(ALGH)} \leq \frac{aire\ tr.(ADC)}{aire\ sect.(AKFH)}. \qquad (**)$$



الشكل ٦

وبلُغَةٍ أُخْرَى، المَقْصودُ هنا أن نَرَى أنّ الإسْقاطَ المَخْروطِيَّ المُمَرْكَزَ في النُقْطَةِ B للسَطْحِ AEC عَلَى السَطْحِ ADC يَزيدُ بَعْضَ نِسَبِ المِساحَاتِ النَجْمِيَّةِ بالنِسْبَةِ إلى النُقْطَةِ A.

ويَؤولُ بُرْهانُ ابنِ الهَيْثَمِ لهَذهِ القَضِيَّةِ إلى رَدِّها، بواسِطَةِ الطَريقَةِ الخُلْفِيَّةِ، إلى حالاتٍ تَجْري فيها مُقارَنَةُ مِساحَاتٍ لمُثَلَّثاتٍ يَكونُ رأسُها في النُقْطَةِ A.

لِنَسْتَرْجِعْ مَراحِلَ هَذا البُرْهانِ. لِنَفْرِضْ أنّ

$$\frac{aire\ (AEC)}{aire\ sect.(ALGH)} > \frac{aire\ (ADC)}{aire\ sect.(AKFH)}; \qquad (1)$$

تُوجَدُ مِساحَةٌ L_a (الوَجْهُ الرابِعُ في تَرْكيبِ النِسْبَةِ) بحَيْثُ يَكونُ

$$(2) \qquad \frac{aire\ (AEC)}{L_a} > \frac{aire\ (ADC)}{aire\ sect.\ (AKFH)}.$$

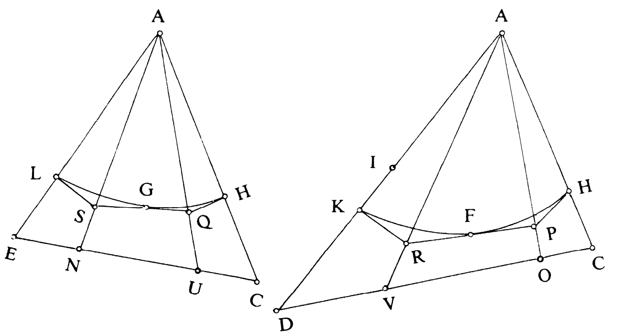
وتُكْتَبُ الفَرَضِيَّةُ *(1)* إذاً كما يَلي:

$$L_a > aire\ sect.\ (ALGH),$$

ويُوجَدُ إذاً مُتَعَدِّدُ أضْلاعٍ *LSQH* مُحيطٌ بقَوْسِ الدائِرَةِ *LGH*، بحَيْثُ يَكونُ

$$(3) \qquad aire\ (ALSQH) < L_a.$$

يَتوَقَّفُ ابنُ الهَيْثَمِ عِنْدَ الحالَةِ الَّتي يَكونُ فيها لِمُتَعَدِّدِ الأضْلاعِ هَذا ثَلاثَةُ أضْلاعٍ، *LS* وَ *SQ* وَ *QH*، مُماسَّةٍ لقَوْسِ الدائِرَةِ، تَرْتيباً، عَلَى النقاطِ *L* وَ *G* وَ *H*. ويُسْقَطُ مُتَعَدِّدُ الأضْلاعِ *LSQH* عَلَى السَطْحِ المُسْتَوي *ADC* تِبْعاً لِمُتَعَدِّدِ الأضْلاعِ *KRPH* الَّذي تَكونُ أضْلاعُهُ، *KR* وَ *RP* وَ *PH*، مُماسَّةً، تَرْتيباً عَلَى النقاطِ *K* وَ *F* وَ *H*، للقَوْسِ المُسْقَطَةِ *KFH* (وهِيَ قَوْسٌ مَخْروطِيَّةٌ) من قَوْسِ الدائِرَةِ *LGH*.



لِنُلاحِظْ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ يُدْرِكُ تَماماً أنّ الإسْقاطَ المَخْروطِيَّ يَحْفَظُ التَماسَّ، وهذا ما يُذَكِّرُنا بِخَصائِصِ السَطْحِ المُسْتَوِي المُماسِّ للمَخْروطِ، الَّتي كانَت مَعْروفَةً لَدَى ابنِ سَهْلٍ[٦].

[٦] انْظُرْ كِتابَ رشدي راشد:

Géométrie et dioptrique: Ibn Sahl, al Qūhi et Ibn al-Haytham (Paris, 1993), pp. XVIII – XXXIX.

وتؤولُ الصيغَةُ إذاً إلى المُتَبايِنَةِ

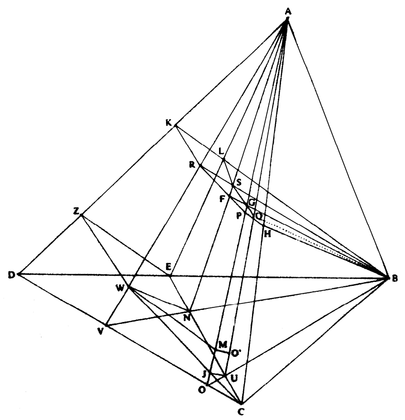
$$\frac{aire\ (ADC)}{aire\ (AKRPH)} > \frac{aire\ (AEC)}{aire\ (ALSQH)}. \qquad (4)$$

فاسْتِناداً إلى *(3)*، تَكونُ النِسْبَةُ الثانِيَةُ في *(4)* أكْبَرَ من

$$\frac{aire\ (AEC)}{L_a} = \frac{aire\ (ADC)}{aire\ sect.(AKFH)} \qquad (2),$$

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$aire\ (AKRPH) < aire\ sect.(AKFH),$$



شكل ٧

وهَذا مُحالٌ، لأنّ مُتَعَدِّدَ الأضْلاعِ مُحيطٌ بقَوْسِ المُنْحَني.

ويُؤَكِّدُ ابنُ الهَيْثَمِ أنّ المُتَبايِنَةَ *(4)* تَنْتُجُ من المُتَبايِنَاتِ

$$\frac{aire\ (AEN)}{aire\ (ALS)} < \frac{aire\ (ADV)}{aire\ (AKR)};\ \frac{aire\ (ANU)}{aire\ (ASQ)} < \frac{aire\ (AVO)}{aire\ (ARP)};\ \frac{aire\ (AUC)}{aire\ (AQH)} < \frac{aire\ (AOC)}{aire\ (APH)}. \qquad (5)$$

وبُغْيَةَ إثْباتِ المُتَبايِنَاتِ *(5)*، يَبْني ابنُ الهَيْثَمِ المُثَلَّثاتِ *AZW* وَ *AWJ* وَ *AJC* في المُسْتَوِي *ADC* بحَيْثُ يَكونُ

$$(5') \qquad \frac{aire\ (AZW)}{aire\ (AKR)} = \frac{aire\ (AEN)}{aire\ (ALS)}; \frac{aire\ (AWJ)}{aire\ (APR)} = \frac{aire\ (ANU)}{aire\ (ASQ)};$$

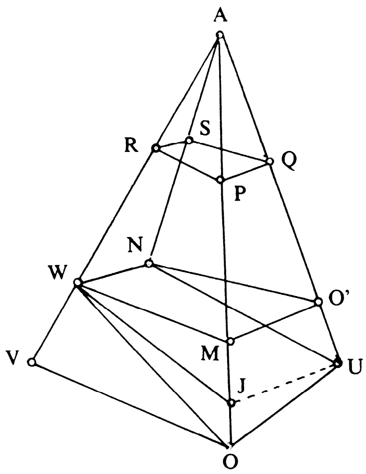
$$\frac{aire\ (AJC)}{aire\ (APH)} = \frac{aire\ (AUC)}{aire\ (AQH)}.$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٧].

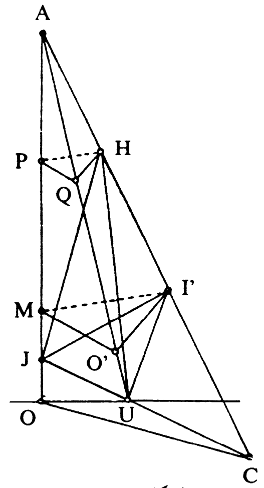
لنَفْتَرِضْ في البَدْءِ أنّ الزاوِيَةَ $A\hat{E}C$ قائِمَةٌ؛ لَدَيْنا LS مُوازٍ لِ EC، ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{AE}{AL} = \frac{AN}{AS} = k,$$

لِنُخرِجْ من النُقْطَةِ E في المُسْتَوِي ABD المُسْتَقيمَ المُوازِيَ لِ BK؛ وَلْيَقْطَعِ المُستَقيمَ AD عَلَى Z، فيَكونُ لَدَيْنا



الشكل ٨



الشكل ٩

$$\frac{AE}{AL} = \frac{AZ}{AK} = k,$$

ولِنُخرِجْ من النُقْطَةِ N في المُسْتَوِي ABV المُسْتَقيمَ المُوازِيَ لِ BS؛ وَلْيَقْطَعِ المُستَقيمَ AV عَلَى W، فيَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{AN}{AS} = \frac{AW}{AR} = k.$$

ويَصيرُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{WA}{AR} = \frac{AZ}{AK},$$

ولذَلِكَ فإنّ WZ مُوازٍ لِ RK. ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{aire\ (AWZ)}{aire\ (ARK)} = \frac{aire\ (ANE)}{aire\ (ASL)} = k^2. \tag{a}$$

يَقْطَعُ المُسْتَقيمُ المُخْرَجُ من N، مُوازِياً لِ SQ، المُسْتَقيمَ AU عَلَى النُقْطَةِ O'، الواقِعَةِ ما بَيْنَ Q وَ U، لأنّ الزاوِيَةَ $A\hat{N}U$ مُنْفَرِجَةٌ، والزاوِيَةُ $A\hat{S}Q$ حادَّةٌ. ويَقْطَعُ المُسْتَقيمُ المُخْرَجُ من O'، مُوازِياً لِ PQ، المُسْتَقيمَ AO عَلَى النُقْطَةِ M، فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{AM}{AP} = \frac{AO'}{AQ} = \frac{AN}{AS} = \frac{AW}{AR}.$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٨]

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أن MW يُوازي PR وأنّ

$$\frac{aire\ (AMW)}{aire\ (ARR)} = \frac{aire\ (ANO')}{aire\ (ASQ)}. \tag{6}$$

لنُخْرِجْ من النُقْطَةِ U مُسْتَقيماً مُوازِياً لِ QP، فيَقْطَعُ AO عَلَى نُقْطَةٍ J تَقَعُ ما بَيْنَ M وَ O، لأنّ UJ يُوازي MO'. ويَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{AU}{AO'} = \frac{AJ}{AM}.$$

ولَكِنَّ

$$\frac{aire\ (ANU)}{aire\ (ANO')} = \frac{AU}{AO'}, \qquad \frac{aire\ (AWJ)}{aire\ (AWM)} = \frac{AJ}{AM},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{aire\ (AWJ)}{aire\ (AWM)} = \frac{aire\ (ANU)}{aire\ (ANO')}. \tag{7}$$

ونَسْتَنْتِجُ من (6) وَ (7) أنّ

$$\frac{aire\ (AWJ)}{aire\ (APR)} = \frac{aire\ (ANU)}{aire\ (ASQ)}. \tag{b}$$

لنُخْرِجْ من O' العَمودَ $O'I'$ عَلَى AC؛ فيَكونُ لَدَيْنا: $O'I'$ مُوازٍ لِ QH وتَكونُ I' بَيْنَ H وَ C؛ ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{MA}{AP} = \frac{O'A}{AQ} = \frac{I'A}{AH}\ ,$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$I'M \,//\, PH,$$

وهذا ما يَسْتَتْبِعُ العَلاقَةَ

$$\frac{aire\ (AMI')}{aire\ (APH)} = \frac{aire\ (AO'I')}{aire\ (AQH)}.$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ٩]

ولَكِن من جِهَةٍ أُخْرَى

$$\frac{aire\ (AJI')}{aire\ (AMI')} = \frac{AJ}{AM} = \frac{AU}{AO'} = \frac{aire\ (AUI')}{aire\ (AO'I')}$$

ويَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{aire\ (AJI')}{aire\ (APH)} = \frac{aire\ (AUI')}{aire\ (AQH)}; \tag{8}$$

ولَكِنَّ

$$\frac{aire\ (AUC)}{aire\ (AUI')} = \frac{AC}{AI'} = \frac{aire\ (AJC)}{aire\ (AJI')},$$

ولذَلِكَ فإنّ

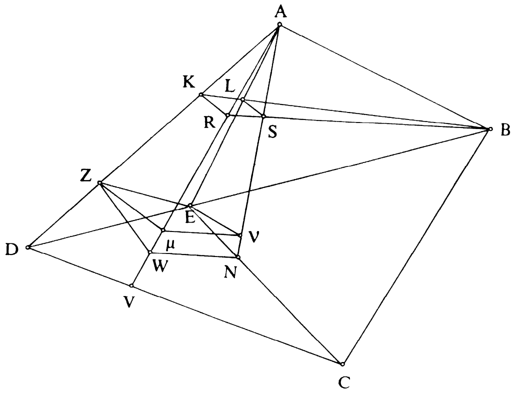
$$\frac{aire\ (AJC)}{aire\ (AJI')} = \frac{aire\ (AUC)}{aire\ (AUI')}. \tag{9}$$

وتُعْطي العَلاقَتانِ (8) و (9)، عَبْرَ الضَرْبِ طَرَفاً بِطَرَفٍ

$$\frac{aire\ (AJC)}{aire\ (APH)} = \frac{aire\ (AUC)}{aire\ (AQH)}. \tag{c}$$

وبذَلِكَ نَكونُ قد بَنَيْنا المُثَلَّثاتِ المَذْكورَةَ AZW وَ AWJ وَ AJC الَّتي تُحَقِّـــقُ الخَواصَّ المَطْلوبَةَ، لأنّ (a) وَ (b) وَ (c) تُكَوِّنُ عَلاقَاتِ التَساوي $(5')$.

ويَفْتَرِضُ ابنُ الهَيْثَمِ في مَرْحَلَةٍ ثانِيَةٍ أنّ الزاوِيَةَ $A\hat{E}C$ مُنْفَرِجَةٌ، ويَعْمَلُ عَلَى هَذا الأساسِ.



الشكل ١٠

باسْتِطاعَتِنا بِناء الزاوِيَةِ $AE\nu$، مُساوِيَةً لزاوِيَةٍ قائِمَةٍ، حَيْثُ تَكونُ النُقْطَـــةُ ν عَلَى AN، ونُخْرِجُ من ν مُسْتَقيماً $\nu\mu$ مُوازِياً لِ BSR. ويَكونُ لَدَيْنا $NW // \nu\mu$. فإذاً

$$\frac{AN}{A\nu} = \frac{AW}{A\mu}$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$\frac{aire\,(AZW)}{aire\,(AZ\mu)} = \frac{aire\,(AEN)}{aire\,(AE\nu)}.$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ١٠]

ومن جِهَةٍ أُخْرَى

$$\frac{A\mu}{AR} = \frac{A\nu}{AS} = \frac{AE}{AL} = \frac{AZ}{AK}$$

(وذَلِكَ لأنّ $E\nu // LS$ وَ $EZ // LK$)؛

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$Z\mu // KR,$$

فإذاً

$$\frac{aire\ (AZE)}{aire\ (AKL)} = \frac{aire\ (AZ\mu)}{aire\ (AKR)} = \frac{aire\ (AE\nu)}{aire\ (ALS)},$$

وبِناءً عَلَى العَلاقَةِ السابِقَةِ، يَصيرُ لَدَيْنا

$$\frac{aire\ (AZW)}{aire\ (AKR)} = \frac{aire\ (AEN)}{aire\ (ALS)};$$

غَيْرَ أنّ

$$aire\ (ADV) > aire\ (AZW),$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{aire\ (ADV)}{aire\ (AKR)} > \frac{aire\ (AEN)}{aire\ (ALS)}.$$

ونُخرِجُ من النُقْطَةِ ν مُسْتَقيماً مُوازِياً لِ SQ ونُتابِعُ الاسْتِدْلالَ كما في الحالَةِ الأُولَى.

وتَبْقَى الطَريقَةُ عَلَى حالِها في حالَةِ الفَرَضِيَّةِ $A\hat{C}E \geq \frac{\pi}{2}$.

لِسوءِ الحَظِّ، إنّ قَوْلَ ابنِ الهَيْثَمِ الَّذي تَنْتُجُ وَفْقاً له العَلاقَةُ *(4)* من العَلاقَةِ *(5)* لَيْسَ صَحيحاً في كُلِّ الحالاتِ.

لِنَخْتَبِرِ العَلاقَةَ القائِمَةَ ما بَيْنَ النَوْعَيْنِ من المُتَبايِنَاتِ. لِنَجْعَلْ

$$\lambda_1 = \frac{aire\ (AEN)}{aire\ (ALS)},\ \lambda'_1 = \frac{aire\ (ADV)}{aire\ (AKR)};\ \lambda_2 = \frac{aire\ (ANU)}{aire\ (ASQ)},$$
$$\lambda'_2 = \frac{aire\ (AVO)}{aire\ (ARP)};\ \lambda_3 = \frac{aire\ (AUC)}{aire\ (AQH)},\ \lambda'_3 = \frac{aire\ (AOC)}{aire\ (APH)},$$

بحَيْثُ تُكْتَبُ العَلاقَةُ *(5)* كما يَلي:

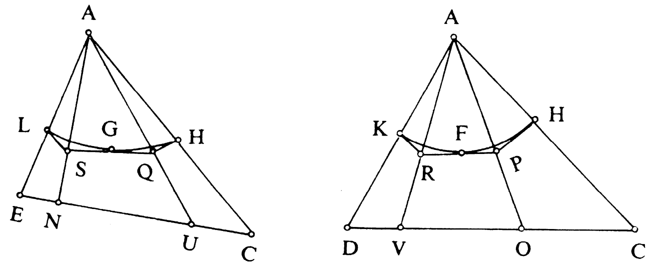
$$\lambda_1 < \lambda'_1,\ \lambda_2 < \lambda'_2,\ \lambda_3 < \lambda'_3.$$

فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\begin{aligned} aire\ (AEC) &= aire\ (AEN) + aire\ (ANU) + aire\ (AUC) \\ &= \lambda_1\ aire\ (ALS) + \lambda_2\ aire\ (ASQ) + \lambda_3\ aire\ (AQH) \end{aligned}$$

وكذَلِكَ أيضاً

$$aire\ (ADC) = \lambda'_1\ aire\ (AKR) + \lambda'_2\ aire\ (ARP) + \lambda'_3\ aire\ (APH).$$



لِنَجْعَلْ

$$\mu_1 = \frac{aire\ (ALS)}{aire\ (ALSQH)},\ \mu_2 = \frac{aire\ (ASQ)}{aire\ (ALSQH)},\ \mu_3 = \frac{aire\ (AQH)}{aire\ (ALSQH)},$$

$$\mu'_1 = \frac{aire\ (AKR)}{aire\ (AKRPH)},\ \mu'_2 = \frac{aire\ (ARP)}{aire\ (AKRPH)},\ \mu'_3 = \frac{aire\ (APH)}{aire\ (AKRPH)},$$

بحَيْثُ يُكْتَبُ طَرَفا العَلاقَةِ *(4)*، عَلَى التَرْتيبِ، كما يلي:

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3$$

وَ

$$\lambda'_1\mu'_1 + \lambda'_2\mu'_2 + \lambda'_3\mu'_3\,.$$

اسْتِناداً إلى العَلاقَةِ *(5)*، يَكونُ لَدَيْنا

$$\begin{aligned} (10) \qquad \lambda'_1\mu'_1 + \lambda'_2\mu'_2 + \lambda'_3\mu'_3 &> \lambda_1\mu'_1 + \lambda_2\mu'_2 + \lambda_3\mu'_3 \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)\mu'_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\mu'_1 + \mu'_2) + \lambda_3 \end{aligned}$$

حَيْثُ تَنْتُجُ المُساواةُ الأخيرةُ من العَلاقَةِ

$$\mu'_1 + \mu'_2 + \mu'_3 = 1.$$

وبما أنّهُ لَدَيْنا أيضاً

$$\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \lambda_3\mu_3 = (\lambda_1 - \lambda_2)\mu_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)(\mu_1 + \mu_2) + \lambda_3,$$

فإنّهُ لإثْباتِ *(4)*، يَكْفي أن نُبَرْهِنَ ما يلي:

$$(\alpha) \qquad \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

$$(\beta) \qquad \mu_1 < \mu'_1,\ \mu_1 + \mu_2 < \mu'_1 + \mu'_2$$

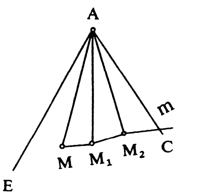
(أي ما يَعْني المُتَبايِنَةَ $\mu_3 > \mu'_3$) .

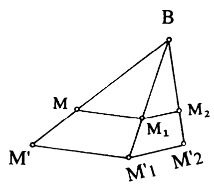
المُتَبايِنَاتُ في (β) صَحيحةٌ في مُخْتَلِفِ حالاتِ الشَكْلِ في حينِ أنّ (α) لَيْسَت صَحيحةً إلاّ عِنْدَما تَكونُ الزاوِيَةُ $A\hat{C}E$ قائِمَةً أو مُنْفَرِجَةً.

لِنُثْبِتْ في البَدْءِ العَلاقَةَ (β)، أي:

$$\frac{aire\ (ALS)}{aire\ (AKR)} < \frac{aire\ (ALSQH)}{aire\ (AKRPH)} < \frac{aire\ (AQH)}{aire\ (APH)}.$$

يَتَطَلَّبُ الأمْرُ هنا، أن نُثْبِتَ أنّ نِسْبَةَ مِساحَةِ مُثَلَّثٍ ذي رأسٍ A، في المُسْتَوي AEC، إلى مِساحَةِ مُسْقَطِهِ المَخْروطِيِّ ذي الرأسِ B، عَلَى المُسْتَوي ADC، يَتَزايَدُ من E باتِّجاهِ C. لِنَأخُذْ إذاً مُثَلَّثَيْنِ مُتَجاوِرَيْنِ AMM_1 وَ AM_1M_2 في المُسْتَوي AEC ومُسْقَطَيْهما $AM'M'_1$ و $AM'_1M'_2$ في المُسْتَوي ADC. ومن خِلالِ تَعْبيرِنا بِشَكْلَيْنِ مُخْتَلِفَيْنِ عن حَجْمَي الهَرَمَيْنِ $ABMM_1$ وَ $ABM'M'_1$ نَجدُ أنّ





$$\frac{\delta'}{\delta}\frac{aire\ (AM'M'_1)}{aire\ (AMM_1)} = \frac{aire\ (BM'M'_1)}{aire\ (BMM_1)},$$

حَيْثُ δ هِيَ المَسافَةُ بَيْنَ B والمُسْتَوي AEC و δ' هِيَ المَسافَةُ بَيْنَ B وَ ADC.
وهَكَذا يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{aire\,(AMM_1)}{aire\,(AM'M'_1)} = \frac{\delta'}{\delta}.\frac{aire\,(BMM_1)}{aire\,(BM'M'_1)} \tag{11}$$

وكذَلِكَ أيضاً

$$\frac{aire\,(AM_1M_2)}{aire\,(AM'_1M'_2)} = \frac{\delta'}{\delta}.\frac{aire\,(BM_1M_2)}{aire\,(BM'_1M'_2)}.$$

المَقْصودُ أن نُثْبِتَ إذاً أنّ

$$\frac{aire\,(BMM_1)}{aire\,(BM'M'_1)} < \frac{aire\,(BM_1M_2)}{aire\,(BM'_1M'_2)}.$$

فالطَرَفُ الأوَّلُ يُساوي

$$\frac{BM.BM_1}{BM'.BM'_1},$$

أمّا الثاني فيُساوي

$$\frac{BM_1.BM_2}{BM'_1.BM'_2},$$

ويُفْضي الأمْرُ بنا إلى المُتَبايِنَةِ

$$\frac{BM}{BM'} < \frac{BM_2}{BM'_2}.$$

ولِكَيْ نَحْسُبَ المِقْدارَ $\rho = \frac{BM}{BM'}$، لِنَجْعَلْ $\overline{BM} = \rho\,\overline{BM'}$ وَ $\vec{u}$ المُتَّجِهَ الواحِدِيَّ العَمودِيَّ عَلَى المُسْتَوِي ADC والمُوَجَّهَ بِحَيْثُ يَكونُ

$$\overline{BA}.\vec{u} = \delta'.$$

فيَكونُ لَدَيْنا

$$\overline{BM}.\vec{u} = \rho\,\overline{BM'}.\vec{u} = \rho\,\delta',$$

وإذا أدْرَجْنا النُقْطَةَ m، المُسْقَطَةَ العَمودِيَّةَ عَلَى AC من النُقْطَةِ M، فيَصيرُ لَدَيْنا:

$$\rho\delta' = \overline{Bm}.\vec{u} = \overline{mM}.\vec{u} = \delta' + \overline{mM}.\vec{u} = \delta' - mM.sin\varphi$$

حَيْثُ تَكونُ φ زاوِيَةَ مَيْلِ السَطْحِيْنِ AEC وَ ADC $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$.

ويَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\rho = 1 - \frac{mM}{\delta'} \sin\varphi . \tag{12}$$

وكذَلِكَ أيضاً

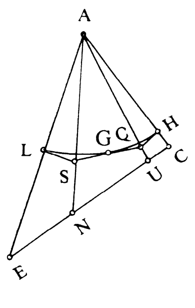
$$\rho_2 : \quad \frac{BM_2}{BM'_2} = 1 - \frac{m_2M_2}{\delta'} \sin\varphi.$$

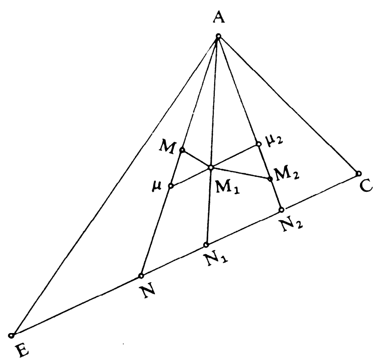
وَ $\rho_2 > \rho$، الأمْرُ الَّذي يُعَبِّرُ عنهُ أيضاً بالعَلاقَةِ $mM > m_2M_2$. وتَعْني العَلاقَةُ (β) أنّ النُقْطَةَ M أبْعَدُ من النُقْطَةِ M_2 عن AC.

وفي الحالَةِ الّتي تَعْنينا، تَتَناقَصُ المَسافاتُ تِباعاً من النِقـــاطِ Q, S, L إلى AC، الأمْرُ الَّذي يُثْبِتُ العَلاقَةَ (β).

لِنُثْبِتِ الآن المُتَبايِنَاتِ (α) انْطِلاقاً من الفَرَضِيَّةِ الّتي مفادُها أن تَكونُ الزاوِيَـــةُ ACE قائِمَةً أو مُنْفَرِجَةً.

$$\frac{aire\ (AEN)}{aire\ (ALS)} > \frac{aire\ (ANU)}{aire\ (ASQ)} > \frac{aire\ (AUC)}{aire\ (AQH)} \tag{α}$$





لِنَأخُذْ من جَديدٍ المُثَلَّثَيْنِ المُتَجاوِرَيْنِ AMM_1 وَ AM_1M_2 ذَوَي الـــرأسِ A؛ وَلنَمُـــدّ أضْلاعَهما AN وَ AN_1 وَ AN_2 المُخْرَجَةَ من A لِتَلْتَقِيَ EC عَلَى النِقـــاطِ N وَ N_1 وَ N_2. نُريدُ أن نُثْبِتَ أنّ

$$\frac{aire\ (ANN_1)}{aire\ (AMM_1)} > \frac{aire\ (AN_1N_2)}{aire\ (AM_1M_2)}.$$

لِنُخرِجْ من النُقْطَةِ M_1 مُستَقيماً $\mu\mu_2$ مُوازِياً لِ EC وَلْيَقْطَعْ هَذا المُستَقيمُ AM وَ AM_2 عَلَى النُقْطَتَيْنِ μ وَ μ_2 عَلَى التَرْتيبِ. فيَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{aire\ (ANN_1)}{aire\ (AMM_1)} = \frac{aire\ (ANN_1)}{aire\ (A\mu M_1)} \cdot \frac{aire\ (A\mu M_1)}{aire\ (AMM_1)} = \left(\frac{AN_1}{AM_1}\right)^2 \cdot \frac{aire\ (A\mu M_1)}{aire\ (AMM_1)}$$

وكذَلِكَ أيضاً

$$\frac{aire\ (AN_1N_2)}{aire\ (AM_1M_2)} = \left(\frac{AN_1}{AM_1}\right)^2 \cdot \frac{aire\ (AM_1\mu_2)}{aire\ (AM_1M_2)}.$$

من المُلائِمِ أن نُثْبِتَ إذاً أنّ

$$\frac{aire\ (A\mu M_1)}{aire\ (AMM_1)} > \frac{aire\ (AM_1\mu_2)}{aire\ (AM_1M_2)}.$$

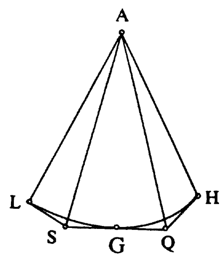
وبما أنّ الزاوِيَتَيْنِ $A\hat{N_1}N$ وَ $A\hat{N_2}N$ مُنْفَرِجَتانِ وَفْقَ الفَرَضِيَّةِ، يَكونُ لَدَيْنا

$$A\hat{M_1}\mu > A\hat{M_1}M$$

وَ

$$A\hat{\mu_2}M_1 > A\hat{M_2}M_1$$

إذا كانَتِ الزاوِيَتانِ $A\hat{M_1}M$ وَ $A\hat{M_2}M_1$ حادَّتَيْنِ، تَقَعُ النُقْطَةُ μ إذاً بَيْنَ M وَ N والنُقْطَةُ μ_2 بَيْنَ A و M_2، وهذا ما يُعْطي



$$\frac{aire\ (A\mu M_1)}{aire\ (AMM_1)} > 1 > \frac{aire\ (AM_1\mu_2)}{aire\ (AM_1M_2)}$$

وفي حالَتِنا، الزاوِيَتـــانِ $A\hat{S}L$ وَ $A\hat{Q}S$ حادَّتـــانِ والزاوِيَتـــانِ $A\hat{L}S$ وَ $A\hat{H}Q$ قائِمتانِ.

وبذَلِكَ نَكونُ قد أثْبَتْنا خاصِيَّةَ ابنِ الهَيْثَمِ (المُتَبايِنة *(4)*) في الحالَةِ الَّتي تَكـــونُ فيها الزاوِيَةُ $A\hat{C}E$ قائمَةً أو مُنْفَرِجَةً.

ولَكِن ما هُوَ المَغْزَى من مَسْلَكِ ابنِ الهَيْثَمِ هَذا وما هِيَ الأفْكارُ المُسْتَتِرَةُ وراءَ ذَلِكَ؟ بُغْيَةَ الإجابَةِ عَلَى هَذِهِ التَساؤلاتِ لِنَتَناوَلْ من جَديدٍ هَذا البُرْهانَ ولَكِن بِلُغَةٍ أُخْرَى، وتَحْديداً بلُغَةِ حِساب التَكامُلِ.

إذا كانَ AMM_1 مُثَلَّثاً لامُتَناهِيَ الصِغَرِ في المُسْتَوي AEC ومِساحَتهُ

$$\frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

(حَيْثُ $r = AM$ وَ $d\theta = M\hat{A}M_1$)

فاسْتِناداً إلى *(11)*، تَكونُ نِسْبَتُهُ إلى المُثَلَّثِ $AM'M'_1$ المُسْقَطِ عَلَـــى الـــسَطْحِ ADC مُساوِيَةً لِ:

$$\frac{\delta'}{\delta}\frac{aire\ (BMM_1)}{aire\ (AM'M'_1)} = \frac{\delta'}{\delta}\left(\frac{BM}{BM'}\right)^2$$

(وذَلِكَ بمُقارَبَةٍ، فارِقُها مَقاديرُ لامُتَناهِيَةُ الصِغَرِ من الدَرَجَةِ العُلْيا)

واسْتِناداً إلى *(12)*، إذا ما جَعَلْنا $\theta = C\hat{A}M$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$، يَصيرُ لَدَيْنا

$$\frac{BM}{BM'} = 1 - \frac{mM}{\delta'}\ sin\varphi = 1 - \frac{r}{\delta'} sin\varphi .\ sin\theta$$

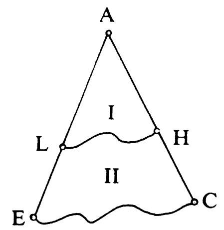
فإذاً يَكونُ عُنْصُرُ المِساحَةِ المُسْقَطَةِ $AM'M'_1$ مُساوِياً لِ

$$\frac{\delta}{2\delta'}\frac{r^2 d\theta}{\left(1 - \frac{r}{\delta'}\ sin\varphi . sin\theta\right)^2}.$$

لِنَأخُذِ الآن في المُسْتَوِي AEC مِساحَاتٍ نَجْمِيَّةً لها رَأسٌ A، ومُحَدَّدَةً على التَرْتيبِ بِواسِطَةِ التكامُلين

$$I \qquad 0 \le \theta \le \theta_1, \quad (0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}), \quad 0 \le r \le R(\theta)$$

$$II \qquad 0 \le \theta \le \theta_1, \quad 0 \le r \le \lambda(\theta) R(\theta)$$



حَيْثُ تَبْقَى نِسْبَةُ نِصْفَي القُطْرَيْنِ المُتَّجِهَيْنِ λ أَكْبَرَ من واحِدٍ، بِحَيْثُ تَحْتَوي المِساحَةُ II المِساحَةَ I . لِنَأخُذْ أيضاً الإسْقاطَيْنِ I' وَ II' الناتِجَيْنِ عن I وَ II في المُسْتَوِي ADC. نُريدُ أن نُبَيِّنَ أنّ $\frac{II}{I} < \frac{II'}{I'}$، أي أنّ:

$$(13) \qquad \frac{\int_0^{\theta_1} \lambda^2 R^2 d\theta}{\int_0^{\theta_1} R^2 d\theta} < \frac{\int_0^{\theta_1} \frac{\lambda^2 R^2 d\theta}{\left(1 - \frac{\lambda R}{\delta'} \sin\varphi \sin\theta\right)^2}}{\int_0^{\theta_1} \frac{R^2 d\theta}{\left(1 - \frac{R}{\delta'} \sin\varphi \sin\theta\right)^2}}.$$

ويُقابِلُ المُتَبايِنَتَيْنِ (5) لَدَى ابنِ الهَيْثَمِ العَلاقَةُ الَّتي تُحَقِّقُها عَناصِرُ المِساحَاتِ، حَيْثُ يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{\lambda^2 R^2 d\theta}{R^2 d\theta} = \lambda^2 < \frac{\frac{\lambda^2 R^2 d\theta}{\left(1 - \frac{\lambda R}{\delta'} \sin\varphi \sin\theta\right)^2}}{\frac{R^2 d\theta}{\left(1 - \frac{R}{\delta'} \sin\varphi \sin\theta\right)^2}} = \lambda^2 \left(\frac{1 - \frac{R}{\delta'} \sin\varphi \sin\theta}{1 - \frac{\lambda R}{\delta'} \sin\varphi \sin\theta} \right)^2$$

لأنّ

$$\frac{\lambda R}{\delta'} \sin\varphi \ \sin\theta > \frac{R}{\delta'} \ \sin\varphi \ \sin\theta \ .$$

لِنُنْقِصْ من مِقْدارِ الطَرَفِ الثاني في الْمُتَبايِنَةِ *(13)* بِتَعْويضِنا عن بَسْطِهِ بالتَكامُلِ

$$\int_0^{\theta_1} \frac{\lambda^2 R^2 d\theta}{\left(1 - \frac{R}{\delta'} \ \sin\varphi \ \sin\theta\right)^2} \ ,$$

الَّذي يُقابِلُ مِساحَةَ الشَكْلِ *AZVWJ*، الَّتي نَجِدُها عِنْدَ ابن الهَيْثَمِ.

لِنَجْعَلْ

$$f(\theta) = \int_0^{\theta} R^2(\omega) d\omega, \qquad g(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{R^2(\omega) d\omega}{\left(1 - \frac{R(\omega)}{\delta'} \ \sin\varphi \ \sin\omega\right)^2}$$

وَ

$$h(\theta) = \lambda(\theta)^2 .$$

نُريدُ أن نُثْبِتَ العَلاقَة

$$(13') \qquad \frac{1}{f(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} h(\theta) \ d f(\theta) < \frac{1}{g(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} h(\theta) \ d \ g(\theta)$$

إذا كامَلْنا بالتَجْزِئَةِ، وهَذِهِ المَرْحَلَةُ تُوافِقُ التَحْويلَ *(10)* في البُرْهانِ الوارِدِ أعلاه، فإنّ الْمُتَبايِنَةَ تَتَّخِذُ الشَكْلَ التالي:

$$h(\theta_1) - \frac{1}{f(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} f(\theta). \ dh(\theta) \ < h(\theta_1) - \frac{1}{g(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} g(\theta). \ dh(\theta),$$

وهذا ما يَعْني أنّ

$$\frac{1}{f(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} f(\theta). \ dh(\theta) \ > \ \frac{1}{g(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} g(\theta). \ dh(\theta).$$

لِنَجْعَلْ

$$\gamma = \frac{g}{f}$$

يُكْتَبُ عِنْدَها الطَرَفُ الثاني للمُتَبايِنَةِ كما يلي:

$$\frac{1}{\gamma(\theta_1)\, f(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} \gamma(\theta)\, f(\theta)\, dh(\theta)$$

ويَجِبُ أن نُثْبِتَ إذاً المُتَبايِنَةَ

$$\int_0^{\theta_1} f(\theta) dh(\theta) > \frac{1}{\gamma(\theta_1)} \int_0^{\theta_1} \gamma(\theta) f(\theta) . dh(\theta) .$$

ولَكِنّ هَذِهِ المُتَبايِنَةَ ستَكونُ مُحَقَّقَةً إذا ما فَرَضنا الشَرْطَيْنِ التالِيَيْنِ:

(α): الدالَّةُ h تَزايُدِيَّةٌ بِالنِسْبَةِ إلى θ (وغَيْرُ ثابتَةٍ)

(β): الدالَّةُ δ تَزايُدِيَّةٌ بِالنِسْبَةِ إلى θ (وغَيْرُ ثابتَةٍ).

فالدالَّةُ

$$\gamma(\theta) = \frac{1}{\int_0^{\theta} R^2(\omega)\, d\omega} . \int_0^{\theta} \frac{R^2(\omega)\, d\omega}{\left(1 - \frac{R(\omega)}{\delta'} \sin\varphi \sin\theta\right)^2}$$

تَكونُ تَزايُدِيَّةً إذا ما كانَتِ الدالَّةُ

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{R(\theta)}{\delta'} \sin\varphi \sin\theta\right)^2}$$

تَزايُدِيَّةً، أي إذا كانَت $R(\theta) \sin\theta$ تَزايُدِيَّةً.

وهَكَذا نَكونُ قد أثْبَتْنا (13) في ظِلِّ فَرَضِيَّةِ أن تَكونَ الدالَّتانِ $\lambda(\theta)$ وَ $R(\theta) \sin(\theta)$ كِلاهما تَزايُدِيَّتَيْنِ (تُعَبِّرُ الدالَّةُ $R(\theta) \sin\theta$ عن المَسافَةِ مِن النُقْطَةِ المُتَحَرِّكَةِ عَلَى حُدودِ المِساحَةِ I، إلى AC). في الحالَةِ الَّتي يَتَناوَلُها ابنُ الهَيْثَمِ، قيمَةُ R ثابِتَةٌ، وهِيَ تُساوي AB، وَ $\lambda(\theta) = \frac{AN}{R}$ وهِيَ تَزايُدِيَّةٌ عِنْدَما تَكونُ الزاوِيَةُ $A\hat{C}E$ قائِمَةً أو مُنْفَرِجَةً. في هَذِهِ الحالَةِ، تَكونُ المِساحَتانِ II (المُساوِيَةُ لِ AEC) وَ II' (المُساوِيَةُ لِ ADC) بَسيطَتَيْنِ (وهُما مُثَلَّثان)، في حينِ أنّ مِساحَةَ I تُساوي $\frac{1}{2} R^2\theta_1$.

وتَتَّخِذُ المُتَبايِنَةُ *(13)* إذاً صيغَةً مُبَسَّطَةً:

$$\frac{aire(AEC)}{\frac{1}{2}R^2\theta_1} < \frac{aire(ADC)}{\frac{\delta}{2\delta'}R^2\int_0^{\theta_1}\frac{d\theta}{\left(1-\frac{R}{\delta'}\sin\varphi\sin\theta\right)^2}}$$

أي:

$$(14)\qquad \frac{1}{\theta_1}\int_0^{\theta_1}\frac{d\theta}{\left(1-\frac{R}{\delta'}\sin\varphi\sin\theta\right)^2} < \frac{\delta'}{\delta}\frac{aire\,(ADC)}{aire\,(AEC)} = \frac{aire\,(BDC)}{aire\,(BEC)} = \frac{BD}{BE}.$$

وهَذا يَتَحَقَّقُ حُكْماً إذا ما كانَ لَدَيْنا

$$\left(\frac{BK}{BL}\right)^2 = \frac{1}{\left(1-\frac{R}{\delta'}\sin\varphi\sin\theta_1\right)^2} \leq \frac{BD}{BE}$$

أي إذا كانَ:

$$(15)\qquad \left(\frac{BL}{BK}\right)^2 \geq \frac{BE}{BD},$$

وهَذِهِ المُتَبايِنَةُ كما نَرَى، لا تَتَضَمَّنُ سِوَى نِقاطِ المُثَلَّثِ *ABD*. ومن الواضِحِ أنّ ابنَ الهَيْثَمِ قد فَوَّتَ إمْكانيَّةَ الاستِفادَةِ من هَذا التَبْسيطِ.

لِنَأخُذْ مِحْوَرَيْنِ مُتَعامِدَيْنِ ذَوَي أصْلٍ *B* ، حَيْثُ يَكونُ *BA* مِحْوَرَ الإحْداثِيّاتِ العَمودِيَّةِ *y*. وَلْنَجْعَلْ *(0, a)* إحْداثِيَّتَي النُقْطَةِ *A*، وَ *(m, n)* إحْداثِيَّتَيْ *D*؛ ولِكَـــوْنِ الزاوِيَةِ *ABD* قائِمَةً أو مُنْفَرِجَةً، يَكونُ لَدَيْنا

$$m < 0,\ n \leq 0$$

(ونَفْتَرِضُ هنا أن تكونَ $a > 0$، وأن تَقَعَ النُقْطَةُ *D* من الجِهَةِ اليُسْرَى من المُسْتَقيمِ *AB*).

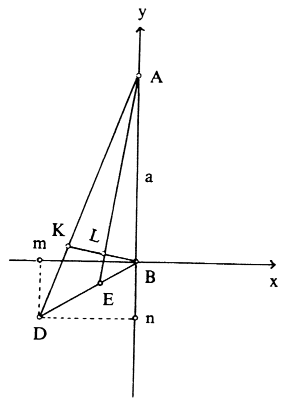
تَرْتَبِطُ إحْداثِيَّتا النُقْطَةِ *E*، وهُما *(x, y)*، بالعَلاقَةِ $y = \frac{n}{m}x$. وتَكونُ مُعادَلَتــا *AD* وَ *AE* عَلَى التَوالي:

$$Y - a = \frac{n-a}{m} X$$

وَ

$$Y - a = \frac{y-a}{x} X.$$

وتَكونُ الإحْداثِيَّةُ الأُفُقِيَّةُ للنُقْطَةِ L مُساوِيَةً لِ $\frac{a\,x}{AE}$، ولِذَلِكَ فإحْداثِيَّتُها العَمودِيَّـــةُ تُساوي:



$$a + \frac{y-a}{x}\frac{a\,x}{A\,E} = \frac{a}{AE}(AE + y - a).$$

وتُكْتَبُ مُعادَلَةُ BL إذاً، كما يَلي:

$$Y = (AE + y - a)\frac{X}{x}$$

ونَحْصُلُ عَلَى الإحْداثِيَّةِ الأُفُقِيَّةِ للنُقْطَةِ K من العَلاقَةِ

$$(AE + y - a)\ \frac{X}{x} = a + \frac{n-a}{m} X,$$

أي أنّ

$$X = \frac{ax}{AE - a\,(1 - \frac{x}{m})}.$$

وهَكَذا يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{BL}{BK} = 1 - \frac{a}{AE}\left(1 - \frac{x}{m}\right) \qquad (15\,')$$

ويُصْبِحُ الشَرْطُ *(14)* كما يَلي:

$$1-\frac{2a}{AE}\left(1-\frac{x}{m}\right)+\frac{a^2}{AE^2}\left(1-\frac{x}{m}\right)^2\geq\frac{x}{m}$$

وبَعْدَ الاختِزالِ بِالعِبارَةِ $1-\frac{x}{m}$ (وهِيَ مُوجبَةٌ فِعْلِيّاً لأنّ E تَقَعُ بَيْنَ B وَ D) نَحْصُلُ عَلَى العَلاقَةِ

$$1-\frac{2a}{AE}+\frac{a^2}{AE^2}\left(1-\frac{x}{m}\right)\ \geq\ 0,$$

أي ما يَسْتَتْبِعُ العَلاقَةَ

$$(x^2+(y-a)^2+a^2(1-\frac{x}{m}))^2\geq 4a^2(x^2+(y-a)^2)$$

أو أيضاً

$$(16)\qquad (x^2+y^2-\frac{a^2x}{m}-2ay)^2-\frac{4a^4x}{m}\geq 0\,.$$

وتَعْني هَذِهِ المُتَبايِنَةُ أنّ النُقْطَةَ E لَيْسَت في داخِلِ مُنْحَنٍ من الدَرَجَةِ الرابِعَةِ Γ يُماسُّ عَلَى النُقْطَةِ B المُسْتَقيمَ AB (a وَ m ثابِتان). وإذا جَعَلْنا

$$\frac{a}{m}=\alpha,\ \frac{x}{m}=\xi,\ \frac{y}{m}=\eta,$$

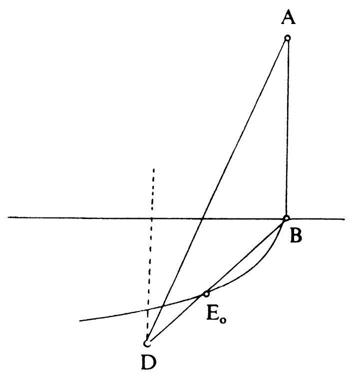
تَصيرُ مُعادَلَةُ Γ كما يلي:

$$(17)\qquad (\xi^2+\eta^2-\alpha^2\xi-2\alpha\eta)^2-4\alpha^4\xi=0\,,$$

حَيْثُ لم يَبْقَ في المُعادَلَةِ سِوَى وَسيطٍ واحِدٍ وهو α (وهو سالِبُ الإشارة).

إذا كانَ $\alpha=-4$، نَحْصُلُ عَلَى حَلْزونِ پاسكال *(limaçon de Pascal)* ذي المُعادَلَةِ القُطْبِيَّةِ التالية (وذلك بعد القيام بالتحويلات اللاّزمة – المترجم):

$$\rho=8\,(\cos\theta+\sqrt{2}\,)$$



بحَيْثُ تَكونُ النُقْطَةُ $(4, -4)$ نُقْطَةً مُزْدَوِجَةً لِلمُنْحَني Γ، وبالنِسْبَةِ إلى القِيَمِ الأُخْرَى لِـ α يَكونُ المُنْحَني Γ، من الصِنْفِ الأوّل.

إذا كانَ المُثَلَّثُ ABD مَعْلوماً، فمِن الواضِحِ أنّ الشَرْطَ (14) يَكونُ مُحَقَّقاً عِنْدَما تَقَعُ النُقْطَةُ E عَلَى القِطْعَةِ E_0D، حَيْثُ تَكونُ E_0 نُقْطَةً مُخْتَلِفَةً عن B، حادِثَةً عن تَقاطُعِ BD وَ Γ، وذَلِكَ في حالِ وُجِدَت E_0. ومن السَهْلِ أن نَرَى أنّ النُقْطَةَ E_0 مَوْجودَةٌ دائماً إذا تَحَقَّقَ الشَرْطُ

$$0 > \frac{a}{m} \geq -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

ولَكِن إذا كانَ لَدَيْنا

$$\frac{a}{m} < -\frac{\sqrt{3}}{3},$$

فإنّ الزاوِيَةَ ABD يَجِبُ أن تَكونَ في هَذِهِ الحالَةِ أكْبَرَ من حَدٍّ أدْنَى مِقْدارُهُ

$$Arc\ tg\ \frac{\sqrt{4\alpha^2-1}-\alpha}{1-3\alpha^2}.$$

وإذا كانَت النُقْطَةُ E عَلَى القِطْعَةِ E_0D، فإنّ المُتَبايِنَةَ (**) الّتي صاغَها ابنُ الهَيْثَمِ تَكونُ مُحَقَّقَةً مَهْما كانَتِ العَناصِرُ الأُخْرَى للهَرَمِ $ABCD$، أمّا إذا كانَت E عَلَى BE_0، فإنّهُ من الضَروريِّ عِنْدَها مُناقَشَةُ الأمْرِ تِبْعاً لِمَقاديرَ الزاوِيَةِ $\theta_1 = C\hat{A}E$.

يُمْكِنُ حِسابُ الطَرَفِ الأوّلِ في (14) ببَساطَةٍ. فلَدَيْنا

$$\frac{R}{\delta'} sin\varphi .\ sin\theta_1 = 1 - \frac{BL}{BK} = \frac{KL}{BK} = \frac{a}{AE}\left(1 - \frac{x}{m}\right) = \beta,$$

(راجِع العَلاقَةَ $(15')$)، فإذاً،

$$\frac{R}{\delta'} sin\varphi = \frac{\beta}{sin\theta_1}$$

وتُكْتَبُ عِنْدَها العِبارَةُ المَدْروسَةُ كما يَلي:

$$I = \frac{1}{\theta_1}\int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{\left(1 - \beta\frac{sin\theta}{sin\theta_1}\right)^2} = \frac{1}{\theta_1}\int_0^{t_1} \frac{2(1 + t^2)dt}{\left(t^2 - 2vt + 1\right)^2},$$

وذَلِكَ عَبْرَ التَعْويضِ

$$tg\frac{\theta}{2} = t,\ tg\frac{\theta_1}{2} = t_1,\ v = \frac{\beta}{sin\,\theta_1}.$$

إذا كانَ لَدَيْنا $v < 1$، أي:

$$a^2 (1 - \frac{x}{m})^2 < [x^2 + (y-a)^2]\ sin^2\theta_1.$$

ما يَعْني:

$$\xi^2(sin^2\theta_1 - \alpha^2) + \eta^2 sin^2\theta_1 + 2\alpha^2\xi - 2\alpha\eta\ sin^2\theta_1 - \alpha^2 cos^2\theta_1 > 0, \quad (18)$$

أي أنّه، إذا كانَت النُقْطَةُ (ξ, η) خارِجَ القَطْعِ المَخْروطِيِّ **C**، نَجْعَلُ

$$v = sin\,\theta_0,\ (0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2})$$

أي:

$$sin\theta_0 \,.\, sin\theta_1 = \beta,$$

ونَسْتَعْمِلُ التَعْويضَ

$$t = u\ cos\theta_0 + sin\theta_0\,,$$

فنَحْصُلُ عَلَى

$$I = \frac{2}{\theta_1 cos^3\theta_0}(Arc\ tg\ \frac{t_1 - sin\theta_0}{cos\theta_0} + \theta_0) + \quad (19)$$
$$+ \frac{sin\theta_1}{\theta_1}\frac{\beta}{sin^2\theta_1 - \beta^2}(1 - \frac{cos\theta_1}{1-\beta})\,.$$

وبِالعَكْسِ، إذا كانَ لَدَيْنا $1 < v$، أي إذا كانَت النُقْطَةُ (ξ, η) داخِلَ **C**، نَجْعَلُ

$$\frac{1}{v} = sin\theta_0 = \frac{sin\theta_1}{\beta}$$

ونَحْصُلُ عَلَى

$$I = \frac{tg^3\theta_0}{\theta_1}\ log\frac{sin\left(\theta_0 - \frac{\theta_1}{2}\right) - sin\frac{\theta_1}{2}}{sin\left(\theta_0 + \frac{\theta_1}{2}\right) - sin\frac{\theta_1}{2}} + \frac{sin\theta_1}{\theta_1}\frac{\beta}{\beta^2 - sin^2\theta_1}\left(\frac{cos\theta_1}{1-\beta} - 1\right). \quad (20)$$

وأخيراً، إذا كانَ $v = 1$، أي إذا كانَت النُقْطَةُ (ξ, η) عَلَى **C** نَحْصُلُ عَلَى

$$I = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{1 - sin\theta_1} + cos\theta_1\frac{3 - 2\,sin\theta_1}{(1 - sin\theta_1)^2}\right). \quad (21)$$

لِنَحْسُبْ عَدَدِيّاً (19) وَ (20) عَلَى بَعْضِ الأَمْثِلَةِ، لِكَي نُبَيِّنَ أن مُتَبايِنَةَ ابنِ الهَيْثَمِ (**) لَيْسَت صَحيحَةً دائماً.

مثال ١.– لِنَجْعَلْ

$$a = 4,\ m = -1,\ n = -\frac{1}{2}$$

فإذاً

$$BD = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1,11803399...$$

وَ

$$AD = \frac{\sqrt{85}}{2} = 4,60977223....$$

إذا كانَ لَدَيْنا

$$\frac{BE}{BD} = \frac{x}{m} = \frac{1}{10},$$

يَكونُ

$$x = -\frac{1}{10},\ y = -\frac{1}{20};$$

$$BE = \frac{\sqrt{5}}{20} = 0,1180339,\ AE = \frac{\sqrt{6565}}{20} = 4,05123438$$

وَ

$$\beta = \frac{72}{\sqrt{6565}} = 0,888618051.$$

وباسْتِطاعَتِنا اخْتِيار

$$\theta_1 = \frac{5\pi}{12},$$

وهذا ما يُعْطي

$$\sin\theta_1 = 0,965925826 > \beta,$$

وذَلِكَ لِكَي نَكونَ في إطارِ الحالَةِ $v > 1$، ونَحْصُلُ عَلَى

$$\sin\theta_0 = 0,919965102,$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\theta_0 = 66^\circ 55' 15'', 53.$$

ويُعْطينا حِسابُ *(19)* لِـ *I* المِقْدارَ

$$14,1533141 > \frac{BD}{BE} = 10.$$

ونَسْتَطيعُ بِناءَ هَرَمٍ آخِذينَ $A\hat{E}C = \frac{\pi}{2}$، وهذا ما يَجْعَلُنا نَحْصُلُ عَلَى

$$AC = \frac{AE}{\sin\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6565(2+\sqrt{3})}}{10} = 15,6527677$$

وَ

$$EC = AE\, tg\frac{5\pi}{12} = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{20}\right)\sqrt{6565} = 15,1194125\,.$$

ونَخْتارُ بِالتالي *BC* بَيْنَ المِقْدارَيْنِ:

$$EC - BE = 15,00137851$$

وَ

$$EC + BE = 15,23744649,$$

نَأخُذُ مَثَلاً

$$BC = 15,1,$$

فيَكونُ لَدَيْنا

$$\cos A\hat{B}C = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} = -\,0,1076087378,$$

$$A\hat{B}C = 96^\circ 10' 38'', 96$$

وَ

$$\begin{aligned} DC^2 &= BD^2 + BC^2 - 2BD\,.\,BC \cos D\hat{B}C \\ &= BD^2 + BC^2 - \frac{BD}{BE}\,(BC^2 + BE^2 - EC^2) \\ &= ED\,(BD - \frac{BC^2}{BE}) + \frac{EC^2.\,BD}{BE} \end{aligned}$$

$$= (1 - \frac{x}{m})\,(BD^2 - BC^2\,\frac{m}{x}) + EC^2\,\frac{m}{x}$$

$$= 235{,}001355452,$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$DC = 15{,}3297539.$$

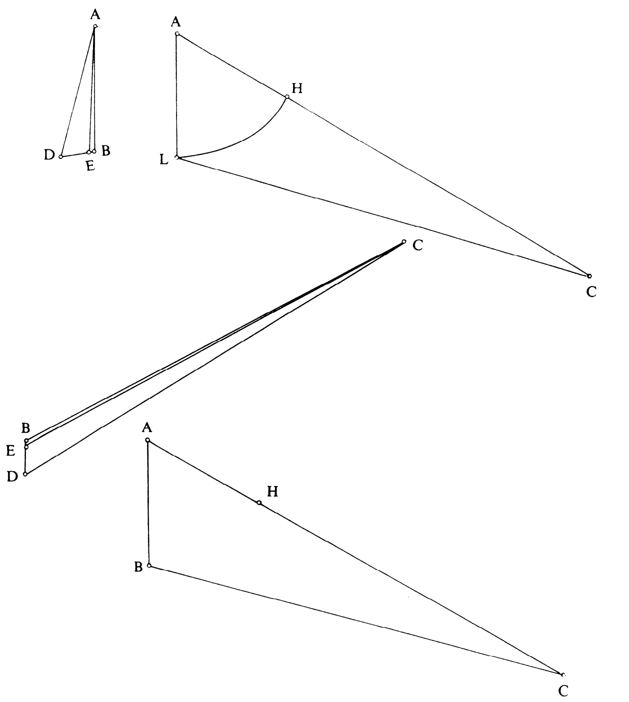
وبِالنسْبَةِ إلى هَذا الهَرَمِ، سيَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{aire(ABC)}{aire(\widehat{ALH})} = 2{,}92464268,$$

في حينِ أنّ

$$\frac{aire(ADC)}{aire(\widehat{AKH})} = 2{,}06640131,$$

وهذا ما يَتَناقَضُ مع مُتَبايِنَةِ ابنِ الهَيْثَمِ (**)



مِثال ٢.- لِنَجْعَلْ

$$a = 4, \quad m = -1, \quad n = -\frac{1}{5},$$

فإذاً

$$BD = \frac{\sqrt{26}}{5} = 1{,}0198039$$

وَ

$$AD = \frac{\sqrt{466}}{5} = 4{,}317406629.$$

إذا كانَ

$$\frac{BE}{BD} = \frac{x}{m} = \frac{1}{10},$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$x = -\frac{1}{10}, \quad y = -\frac{1}{50}, \quad BE = \frac{\sqrt{26}}{50} = 0{,}10198039,$$

$$AE = \frac{\sqrt{40426}}{50} = 4{,}02124359, \quad \beta = \frac{180}{\sqrt{40426}} \cong 0{,}895245443.$$

وبِإمْكانِنا أن نَخْتارَ $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ فيَكونُ

$$\sin\theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0{,}866025404 < \beta,$$

وذَلِكَ لِكَي نَكونَ في الحالَةِ $v > 1$. ويَكونُ لَدَيْنا

$$\sin\theta_0 = \frac{\sin\theta_1}{\beta} = 0{,}967360863,$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\theta_0 = 75^\circ 19' 15'',72$$

وحِسابُ (20) يُعْطي لِـ I المِقْدارَ:

$$10{,}9012463 > \frac{BD}{BE} = 10.$$

وبِاسْتِطاعَتِنا بِناء هَرَمٍ آخِذِينَ:

$$A\hat{E}C = \frac{7\pi}{12},$$

فنَحْصُلُ عَلَى

$$AC = AE\,\frac{\sin\frac{7\pi}{12}}{\sin\frac{\pi}{12}} = 15{,}00748538$$

وَ

$$EC = AE\,\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{12}} = 13{,}45534329.$$

ومن ثمّ نَخْتارُ BC بَيْنَ المِقْدارين:

$$EC - BE = 13{,}3533629$$

وَ

$$EC + BE = 13{,}55732368,$$

مَثَلاً نَجْعَلُ

$$BC = 13{,}4,$$

فيَكونُ لَدَيْنا

$$\cos A\hat{B}C = -\,0{,}276722178, \quad A\hat{B}C = 106°37'52'',14,$$

$$DC^2 = 195{,}35863136,$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$DC = 13{,}9770752076.$$

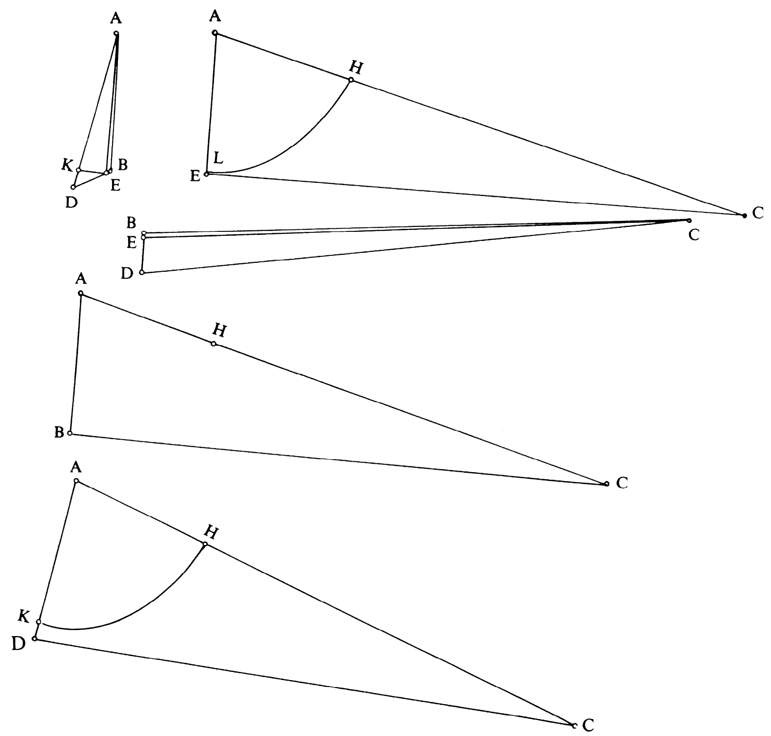
وبالنِسْبَةِ إلى هَذا الهَرَمِ، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{aire\,(AEC)}{aire\,(A\widehat{LH})} = 3{,}11925113383$$

في حينِ أنّ

$$\frac{aire\,(ADC)}{aire\,(A\widehat{KH})} = 2{,}86137112032,$$

وتَتَناقَضُ هَذه النتيجةُ أيضاً مع مُتَبايِنَةِ ابنِ الهَيْثَمِ (**).



وهَكَذا ففي الحالَةِ الَّتي تَكونُ فيها الزاوِيَة $A\hat{C}E$ قائِمَةً أو مُنْفَرِجَةً، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{aire\ tr.(AEC)}{aire\ sect.(AHGL)} \leq \frac{aire\ tr.(ADC)}{aire\ sect.(AHFK)},$$

ولَكِنَّنا قد رَأَيْنا، أنّه في حالِ كانَت الزاوِيَةُ $A\hat{E}C$ قائِمَةً أو مُنْفَرِجَةً، لا تَكونُ هَذِهِ الخاصِيَّةُ صَحيحَةً إلاّ عِنْدَما تَكونُ النُقْطَةُ E بَعيدَةً عن B بِشَكْلٍ كافٍ.

يَعودُ ابنُ الهَيْثَمِ، بَعْدَ الإثْباتِ (غَيْرِ المُكْتَمِلِ) لِهَذِهِ القَضِيَّةِ، إلى المُقَدِّمَةِ السادِسَةِ

$$\frac{aire\ (DBC)}{aire\ (EBC)} > \frac{angle\ sol.(A,BCD)}{angle\ sol.(A,EBC)}$$

أي:

$$\frac{pyr.(ABCD)}{pyr.(ABCE)} > \frac{sect.sph.(A,BCD)}{sect.sph.(A,BCE)},$$

وبما أنّ الطَرَفَ الثاني مَحْدودٌ عُلْوِيّاً بالعِبارَةِ

$$\frac{pyr.curv.(BAHFK)}{pyr.circ.(BAHGL)}, \qquad \text{((انظر (*}$$

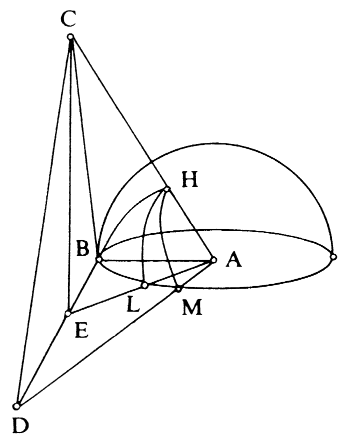
فيَكْفي أن نُثْبِتَ المُتَباينة

$$\frac{pyr.(BACD)}{pyr.(BAEC)} \geq \frac{pyr.curv.(BAHFK)}{pyr.circ.(BAHGL)}.$$

وبما أنّ العَلاقَةَ (**) تَعْني أنّ:

$$\frac{pyr.(BAEC)}{pyr.circ.(BAHGL)} \leq \frac{pyr.(BACD)}{pyr.curv.(BAHFK)}.$$

لِنَختَبِرِ الآن بِطَريقَةٍ تَحْليلِيَّةٍ مُباشِرَةٍ صِحَّةَ المُقَدِّمَةِ ٦، الَّتي تَلْعَبُ دَوْراً مَرْكَزِيّاً في مُؤَلَّفِ ابنِ الهَيْثَمِ. لِنَخْتَرْ مِحْوَرَيْنِ مُتَعامِدَيْنِ ذَوَي أصْلٍ A، بحَيْثُ تَكونُ النُقْطَةُ B



عَلَى Ax والنُقْطَةُ D في المُسْتَوي Axy. ولِيَكُنْ التَوْجيهُ مَأخوذاً بحَيْثُ تَكونُ إحْداثِيّاتُ B وَ D مُوجِبَةً.

لِنَجْعَلْ λ وَ μ إحْداثِيَّتَي الطولِ للنُقْطَتَيْنِ L وَ M الحادِثَتينِ، عَلَى التَرْتيبِ، عن تَقاطُعِ AE وَ AD مع الكُرَةِ المُمَرْكَزَةِ في النُقْطَةِ A وذاتِ نِصْفِ القُطْرِ a المُساوي لِ AB.

وتَكونُ إحْداثِيّاتُ النِقاطِ B، L، M، E، D كما يَلي:

$$B: (a, 0, 0), \quad L: (a \cos \lambda, a \sin \lambda, 0); \quad M:(a \cos \mu, a \sin \mu, 0);$$

$$E: (e \cos \lambda, e \sin \lambda, 0); \quad D:(d \cos \mu, d \sin \mu, 0),$$

حَيْثُ يَكونُ

$$e = AE, d = AD.$$

وإذا اسْتَعْمَلْنا تَسامُتَ النِقاطِ الثلاثِ E، D، B ، نَحْصُلُ عَلَى ما يلي:

$$e = a \left(1 - \frac{1}{\rho}\right) \frac{\sin \mu}{\sin(\mu - \lambda)}$$

وَ

$$d = a (\rho - 1) \frac{\sin \lambda}{\sin(\mu - \lambda)} ,$$

حَيْثُ يَكونُ

$$\rho = \frac{BD}{BE} > 1.$$

ويُكْتَبُ الشَرْطُ عن كَوْنِ الزاوِيَةِ $A\hat{B}D$ قائِمَةً أو مُنْفَرِجَةً كما يَلي:

$$d \cos \mu \geq a ,$$

وهذا ما يَعْني:

$$\mu < \frac{\pi}{2}$$

وَ

$$\rho \geq \frac{tg \mu}{tg \lambda} \qquad (22)$$

(ولَدَيْنا من ناحِيَةٍ أُخْرَى $0 < \lambda < \mu$)

لِنَجْعَلْ θ الإحْداثِيَّةَ المُتَمِّمَةَ لإحْداثِيَّةِ عَرْضِ النُقْطَةِ H وهِيَ نُقْطَةُ تَقاطُعِ AC مع الكُرَةِ، ولْتَكُنْ φ إحْداثِيَّةَ طولِ النُقْطَةِ H. تُكْتَبُ عِنْدَها الإحْداثِيَّاتُ الديكارتيّةُ للنُقْطَتَيْنِ H وَ C كما يلي:

$$H: (a \sin \theta \cos \varphi, a \sin \theta \sin \varphi, a \cos \theta);$$

$$C: (c \sin \theta \cos \varphi, c \sin \theta \sin \varphi, c \cos \theta).$$

وبما أنّ الزاوِيَةَ $A\hat{B}C$ مُساوِيَةٌ لقائِمَةٍ أو أكْبَرُ منها، يَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$c \sin \theta \cos \varphi \geq a \tag{23}$$

ما يَفْرِضُ أن يَكونَ

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2}$$

وَ

$$c \geq \frac{a}{\sin \theta . \cos \varphi}.$$

لِنُعَبِّرْ عن كَوْنِ إحْدَى الزاوِيَتَيْنِ $A\hat{E}C$ أو $A\hat{C}E$ قائِمَةً أو مُنْفَرِجَةً:

$$A\hat{E}C \geq \pi/2 \iff e \leq c \sin \theta \cos (\lambda - \varphi) \tag{24}$$

$$A\hat{C}E \geq \pi/2 \iff c \leq e \sin \theta \cos (\lambda - \varphi) \tag{24'}$$

ويَتَطَلَّبُ هَذانِ الشَرْطانِ أن يَكونَ

$$|\lambda - \varphi| < \frac{\pi}{2};$$

وتَفْرِضُ العَلاقَةُ *(24)* أن تَكونَ قيمَةُ c كَبيرَةً بِشَكْلٍ كافٍ، أمّا العَلاقَةُ *(24')* فلا تَكونُ مُتَوافِقَةً مع *(23)* إلاّ إذا كانَ

$$\frac{a}{\sin\theta \cos\varphi} \leq e \sin\theta \cos(\lambda - \varphi),$$

أي إذا كانَ :

$$\cos(2\varphi - \lambda) \geq \frac{2a}{e \sin^2 \theta} - \cos\lambda,$$

والعِبارَةُ

$$\frac{2a}{e\sin^2\theta} - \cos\lambda$$

هِيَ دالّةٌ تَناقُصِيَّةٌ بِالنِسْبَةِ إلى ρ وهِيَ تَسْعَى نَحوَ الحَدِّ

$$\frac{2\sin(\mu-\lambda)}{\sin\mu\ \sin^2\theta} - \cos\lambda$$

عِنْدَما تَسْعَى ρ نَحوَ اللاَّنِهاية.

باسْتِطاعَتِنا إذاً أن نَخْتارَ ρ وَ φ وَفْقَ *(23)* وَ *(24')* إذا كانَ

$$\frac{2\sin(\mu-\lambda)}{\sin\mu\ \sin^2\theta} - \cos\lambda \le 1$$

أي إذا كانَ:

$$tg\mu.\ (\cos^2\theta - tg^2\frac{\lambda}{2}) \le 2.tg\frac{\lambda}{2}.$$

وبِاسْتِطاعَتِنا إذاً بِناء الشَكْلِ عِنْدَما تَكونُ الزاوِيَة $\frac{\pi}{2} \ge A\hat{C}E$ في حالَةٍ أو أُخْرَى من الحالَتَيْنِ التالِيَتَيْن:

(i) $$tg\frac{\lambda}{2} \ge \cos\theta = tg\frac{\lambda_o}{2},$$

أي ما يَعْني:

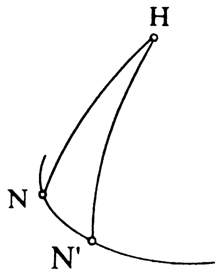
$$\lambda \ge \lambda_0;$$

(ii) $$\lambda < \lambda_0,\ tg\mu \le \frac{2tg\frac{\lambda}{2}}{\cos^2\theta - tg^2\frac{\lambda}{2}} = tg\lambda\,\frac{1 + \cos\lambda_0}{1 - \frac{\cos\lambda_0}{\cos\lambda}} = tg\,\mu_0,$$

أي أنّ $\lambda < \mu \le \mu_0$.

ونَحْنُ نَقيسُ الزاوِيَتَيْنِ المُجَسَّمَتَيْنِ *(A, BCE)* و *(A, BCD)* بِواسِطَةِ مِساحَتَيِ المُثَلَّثَيْنِ الكُرَوِيَّيْنِ *BHL* وَ *BHM* . ولِكَي نَحْسُبَهما، نُعَبِّرُ عن مِساحَةِ مُثَلَّثٍ كُرَوِيٍّ لامُتَناهي في الصِغَرِ *HNN'* حَيْثُ تَكونُ النُقْطَتان *N'* وَ *N* بَيْنَ *B* وَ *M*. لِيَكُنْ v وَ $v + dv$ الإحْداثِيَّتَيْنِ الطولِيَّتَيْنِ لِ *N* وَ *N'* عَلَى التَرْتيب. فتَكونُ المِساحَةُ

$$a^2\, d\sigma = a^2\, (\hat{H} + \hat{N} + \hat{N}' - \pi)$$



واسْتِناداً إلى صيغةِ س. لويليه *(S. Lhuillier)* يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{1}{4}\, d\sigma \approx tg\,\frac{d\sigma}{4} = \sqrt{tg\,\frac{p}{2a}\; tg\,\frac{p-\widehat{NN'}}{2a}\; tg\,\frac{p-\widehat{HN}}{2a}\; tg\,\frac{p-\widehat{HN'}}{2a}}$$

حَيْثُ جَعَلْنا

$$p = \frac{1}{2}\,(\widehat{HN}+\widehat{HN'}+\widehat{NN'}) \;\cong \widehat{HN} + \frac{a}{2}\,dv.$$

ويَكونُ لَدَيْنا

$$p - \widehat{NN'} \cong \widehat{HN} - \frac{a}{2}\, dv;$$

$$p - \widehat{HN} = \frac{1}{2}\,(\widehat{HN'}-\widehat{HN}+\widehat{NN'})$$

$$\cong \frac{a}{2}\,(d\frac{\widehat{HN}}{a} + dv),$$

وَ

$$p - \widehat{HN'} \cong \frac{1}{2}\,(\widehat{HN}-\widehat{HN'}+\widehat{NN'}) = \frac{a}{2}\,(-\,d\,\frac{\widehat{HN}}{a} + dv),$$

وهَكَذا فإنّ

$$tg\,\frac{p}{2a}.tg\,\frac{p-\widehat{NN'}}{2a}.\;tg\,\frac{p-\widehat{HN}}{2a}.\;tg\,\frac{p-\widehat{HN'}}{2a} \approx$$

$$\approx tg^2\,\frac{\widehat{HN}}{2a}.\frac{1}{16}(dv^2 - (d\,\frac{\widehat{HN}}{2a})^2).$$

غَيْرَ أنّه من

$$\cos\frac{\widehat{HN}}{a} = \sin\theta.\ \cos(v-\varphi)$$

نَستَنْبِطُ العَلاقَةَ

$$d\frac{\widehat{HN}}{a} = \frac{\sin\theta.\sin(v-\varphi)}{\sin\frac{\widehat{HN}}{a}}dv,$$

ولِذَلِكَ يَكونُ

$$dv^2-(d\,\frac{\widehat{HN}}{a})^2 = \frac{dv^2}{\sin^2\frac{\widehat{HN}}{a}}(1-\sin^2\theta\ \cos^2(v-\varphi)-\sin^2\theta\ \sin^2(v-\varphi)$$

$$= \frac{dv^2\cos^2\theta}{\sin^2\frac{\widehat{HN}}{a}}.$$

وأخيراً، نَحْصُلُ عَلَى

$$(25)\qquad d\sigma=(tg\frac{\widehat{HM}}{a}/\sin\frac{\widehat{HM}}{a})\ dv\cos\theta = \frac{dv\cos\theta}{1+\sin\theta.\cos(v-\varphi)}.$$

والزاوِيَتانِ المُجَسَّمَتانِ المَأخوذَتانِ تُساوِيانِ تَكامُلَيَّ هَذا العُنْصُرِ التَفاضُلِيِّ، مَأخوذَيْنِ عَلَى التَرْتيبِ، بَيْنَ صِفْرٍ وَ λ وبَيْنَ صِفْرٍ وَ μ. وتُكْتَبُ إذاً مُتَبايِنَةُ ابنِ الهَيْثَمِ من المُقَدِّمَةِ ٦ كما يَلي:

$$(26)\qquad \int_0^\mu \frac{dv}{1+\sin\theta\cos(v-\theta)} < \rho\int_0^\lambda \frac{dv}{1+\sin\theta\cos(v-\varphi)}$$

واسْتِناداً إلى المُتَبايِنَةِ *(22)*، تَكونُ العَلاقَةُ *(26)* صَحيحَةً إذا كانَت العِبارَةُ

$$\frac{1}{tg\lambda}\int_0^\lambda \frac{dv}{1+\sin\theta\ \cos(v-\varphi)}$$

دالّةً تَناقُصِيَّةً بِالنِسْبَةِ إلى λ. ويُكْتَبُ مُشْتَقُّ هَذِهِ العِبارَةِ كما يلي:

$$-\frac{1+tg^2\lambda}{tg^2\lambda}\int_0^\lambda \frac{dv}{1+\sin\theta\ \cos(v-\varphi)}+\frac{1}{tg\lambda}\ \frac{1}{1+\sin\theta\ \cos(\lambda-\varphi)}$$

وهو سالِبٌ إذا كانَ

$$(27)\qquad \frac{\sin 2\lambda}{2}\,\frac{1}{1+\sin\theta\,\cos(\lambda-\varphi)} \le \int_0^{\lambda}\frac{dv}{1+\sin\theta\,\cos(v-\varphi)}.$$

وإذا تَحَقَّقَ الشَرْطُ $\lambda = 0$، يَكونُ مِقْدارا طَرَفَي المُتَبايِنَةِ *(27)* صِفْرِيَّيْنِ، أي أنّ المُتَبايِنَةَ تَكونُ صَحيحَةً ما دام لَدَيْنا

$$\frac{\cos 2\lambda}{1+\sin\theta\,\cos(\lambda-\varphi)}+\frac{\sin 2\lambda}{2}\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{1+\sin\theta\,\cos(\lambda-\varphi)}\right)\le\frac{1}{1+\sin\theta\,\cos(\lambda-\varphi)},$$

أي:

$$\frac{d}{d\lambda}\log\frac{1}{1+\sin\theta\,\cos(\lambda-\varphi)} \le 2tg\lambda = \frac{d}{d\lambda}\,\log\frac{1}{\cos^2\lambda},$$

وهذا ما يَعْني كذَلِكَ أنّ العِبارَةَ

$$\frac{\cos^2\lambda}{1+\sin\theta\,\cos(\lambda-\varphi)}$$

هِيَ دالَّةٌ تَناقُصِيّةٌ بِالنِسْبَةِ إلى λ. ولَكِنَّ مُشْتَقَّ هَذِهِ العِبارَةِ يُساوي

$$-\frac{\cos\lambda}{2(1+\sin\theta\,\cos(\lambda-\varphi))^2}\,(3\,\sin\theta\sin\varphi+\sin\,(2\lambda-\varphi)\,\sin\theta+4\sin\lambda);$$

وهو سالِبٌ إذا ما كانَ لَدَيْنا

$$\sin 2\lambda\cos\varphi + 2(1+\sin^2\lambda)\,\sin\varphi \ \ge -4\,\frac{\sin\lambda}{\sin\theta}.$$

ولَكِنَّ هَذا الشَرْطَ يَعْني أنّه إذا كانَ مِقْدارا λ وَ θ مَعْلومَيْنِ، فإنّ النُقْطَةَ $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ من الدائرةِ ذات نِصْفِ القُطْرِ المُساوي للواحِدِ، تَقَعُ في أعْلَى المُسْتَقيمِ ذي المُعادَلَةِ:

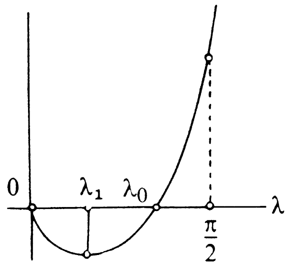
$$x\sin\lambda\cos\lambda + y\,(1+\sin^2\lambda) = -2\,\frac{\sin\lambda}{\sin\theta};$$

عِنْدَما تَكونُ $\lambda = 0$ يَصيرُ هَذا المُسْتَقيمُ ذا مُعادَلَةٍ $y = 0$ (المِحْوَر السينيّ)، وأمّا الشَرْطُ المُقابِلُ فهو $\varphi \ge 0$.

ولِذَلِكَ، إذا تَحَقَّقَ الشَرْطُ $0 \geq \varphi$، فإنّ المُتَبايِنَةَ (27) تَكونُ صَحيحَةً مَهْما كانَت قيمَةُ λ (بَيْنَ صِفْرٍ وَ $\frac{\pi}{2}$)، ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ المُتَبايِنَةَ (26) الخاصَّةَ بالزَوايا المُجَسَّمَةِ.

وباخْتِصار، وبِشَكْلٍ مُسْتَقِلٍّ عن المُقَدِّمَةِ الجُزْئِيَّةِ، تَكونُ المُقَدِّمَةُ ٦ صَحيحَةً إذا ما افْتَرَضْنا أنَّ إحْداثِيَّةَ الطول φ لِ C مُوجبَةً، أي أنّ النُقْطَتَيْنِ C وَ D تَقَعانِ من نَفْسِ الجِهَةِ من المُسْتَوي القائِمِ عَمودِيّاً عَلَى ABD، والمارّ بِ AB. وقد فات ابنَ الهَيْثَمِ الانْتِباهُ إلى هَذا الشَرْطِ.

ولَكِن إذا كانَت الزاوِيَةُ φ سالِبَةً، فلا تَكونُ نَتيجَةُ المُقَدِّمَةِ ٦ صَحيحَةً بِشَكْلٍ دائم: إذ إنّ الفارِقَ بَيْنَ طَرَفَيْ (27) يَبْدأ بالتَناقُصِ من الصِفْرِ وُصولاً إلى حَدٍّ أدْنَى سالِبٍ، ومن ثُمّ يَتَزايَدُ ليُصْبِحَ مُوجِباً ابتِداءً من قيمَةٍ $\lambda_0\ (\theta, \varphi)$ لِ λ، يُمْكِنُ الحُصولُ عَلَيْها من العَلاقَةِ



$$(28)\qquad Arc\ tg\left(\tau\ tg\frac{\lambda_0-\varphi}{2}\right)+Arc\ tg\left(\tau\, tg\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin^2 2\lambda_0}{4}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta\ \cos(\lambda_0-\varphi)}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<0<\theta<\frac{\pi}{2};\ \tau=tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right).$$

فقيمَةُ هَذا الفارِقِ، عِنْدَما تَكونُ $\lambda = \frac{\pi}{2}$، تساوي

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dv}{1+\sin\theta\ \cos(v-\varphi)}\geq 0$$

وإذا كانَ $\lambda_0 \leq \lambda \leq \mu$، فإنّ مُتَبايِنَةَ المُقَدِّمَةِ ٦ تَكونُ صَحيحَةً أيضاً؛ ولَكِن، وَفْقَ ما يُبَيِّنُهُ المِثالُ، لا يَكونُ ذَلِكَ صَحيحاً بالضَرورَةِ إذا ما كانَ $\lambda < \lambda_0$.

مِثال.– لِنَجْعَلْ:

$$\varphi = -87^{\circ}, \ \tau = \frac{1}{10},$$

فتَكونُ

$$\theta = 78^{\circ}\ 34'\ 43'', 72;$$

ويَكونُ لَدَيْنا

$$\lambda_0 = 88^{\circ} 32'\ 7'', 42.$$

فإذا أخَذْنا $\lambda = 1^{\circ}$ وَ $\mu = 21^{\circ}$، يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{tg\,\mu}{tg\,\lambda} = 21,99155584$$

وباسْتِطاعَتِنا أن نَخْتارَ $\rho = 22$. فإذا كانَ

$$a = 4 = AB,$$

يَكونُ لَدَيْنا

$$AD = d = 4.21.\frac{\sin\ 1^{\circ}}{\sin\ 10^{\circ}} = 4,286303511,$$

$$AE = e = 4.\frac{21}{22}.\frac{\sin\ 21^{\circ}}{\sin\ 20^{\circ}} = 4,000682462.$$

ومن ثمّ يَجِبُ أن نَخْتارَ

$$AC = c > \frac{4}{\sin\theta\ \cos\varphi} = \frac{4\ .\ 101}{99\ .\ \cos 87^{\circ}} = 77,9733165$$

وَ

$$AC = c \geq \frac{e}{\sin\theta \ \cos(\lambda - \varphi)} = 116{,}9502347.$$

فمَثَلاً إذا كانَ $c = 117$، تَكونُ الزاوِيَتانِ المُجَسَّمَتانِ مُساوِيَتَيْنِ عَلَى التَرْتيبِ لِ

$$2\left(Arc\ tg \frac{tg54^{\circ}}{10} - Arc\ tg \frac{tg43^{\circ}30'}{10} \right) = 4^{\circ}51'54'', 58$$

وَ لِ

$$2\left(Arc\ tg \frac{tg44^{\circ}}{10} - Arc\ tg \frac{tg43^{\circ}30'}{10} \right) = 11'23'', 46;$$

وتَكونُ نِسْبَتُهُما مُساوِيَةً لِ

$$25{,}62634243 > \rho = 22 = \frac{aire\ (BCD)}{aire\ (BCE)}$$

ولا تَكونُ إذاً المُقَدِّمَةُ ٦ مُحَقَّقَةً.

في هَذِهِ الحالَةِ

$BD = 1{,}536074643$, $BE = 0{,}069821575$,

$EC = 116{,}9315223$, $BC = 116{,}8630976$, $DC = 118{,}3688195$,

$A\hat{B}D = 90^{\circ}03'36'',07$ $A\hat{B}C = 90^{\circ}58'53'',82$

$A\hat{E}C = 90^{\circ}00'03''$ $A\hat{D}C = 70^{\circ}23'26'',07$

$\theta_1 = C\hat{A}E = 88^{\circ}02'22'',63$

أي ما يُعادِلُ: $1{,}536581233$ راديان

وَ

$v = \sin\theta_0 = 0{,}954941529$

أي أنّ θ_0 تُساوي $1{,}26946271$ راديان في التَكامُلِ الّذي يُعْطي المِساحَةَ المُنْحَنِيَةَ الإحاطَةِ AKH. وبِما يَخُصُّ هَذا التَكامُلَ نَحْصُلُ عَلَى ما يَلي:

$$\int_0^{\theta_1} \frac{d\theta}{(1 - v\sin\theta)^2} = 102{,}766964,$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{aire\ (ADC)}{aire\ (AKH)} = 6,259142771$$

وَ

$$\frac{aire\ (AEC)}{aire\ (ALH)} = 19,02787015$$

أي، أكْبَرُ بثلاثِ مَرّاتٍ تقريباً، خِلافاً لِما وَرَدَ في المُقَدِّمَةِ الجُزْئِيَّة.

مُلاحَظَة - لا تَتَعَلَّقُ صِحَّةُ المُقَدِّمَةِ الجُزْئِيَّةِ سِوَى بِمَواقِعِ النقاطِ A, B, D, E وبالزاوِيَةِ $\theta_1 = C\hat{A}E$، ومَهْما كانَت مَقاديرُ هَذِهِ الوَسائِطِ، وبالتالي صِحَّةُ أو عَدَمُ صِحَّةِ المُقَدِّمَةِ الجُزْئِيَّةِ، فبِإمْكانِنا إكْمالُ الهَرَمِ باخْتِيارِ النُقْطَةِ C بحَيْثُ يَكونُ $A\hat{E}C \geq \frac{\pi}{2}$ وَ $0 > \varphi$، وبحَيْثُ تَتَحَقَّقُ إذاً مُتَبايِنَةُ المُقَدِّمَةِ ٦، حَتَّى ولو لم تَتَحَقَّقْ مُتَبايِنَةُ المُقَدِّمَةِ الجُزْئِيَّةِ.

فلنَفْتَرِضْ أنّه مَعْلومٌ لَدَيْنا ما يلي: $AB = a$ والإحْداثِيَّتانِ السالِبتانِ x وَ y للنُقْطَةِ E عَلَى المِحْوَرَيْنِ ذَوَي الأصْلِ B وذَلِكَ إضافَةً إلى الزاوِيَةِ θ_1. فيَكونُ لَدَيْنا

$$AE = e = \sqrt{x^2 + (y-a)^2}\ .$$

إذا جَعَلْنا المِقْدارَيْنِ $AC = c$ وَ $BC = b$ مَعْلومَيْن، فإنّ إحْداثِيَّتَي النُقْطَةِ C عَلَى المِحْوَرَيْنِ ذَوَي الأصْلِ A تَكونانِ مُساوِيَتَيْنِ لِ

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},\ \frac{e\cos\theta_1}{|x|} + \frac{a-y}{x}.\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$tg\varphi = \frac{1}{|x|}\left(\frac{2aec\cos\theta_1}{a^2 + c^2 - b^2} - a + y\right);$$

وتَكونُ الزاوِيَةُ φ مُوجَبَةً إذا كانَ

$$a^2 + c^2 - b^2 \leq \frac{2aec\cos\theta_1}{a-y},$$

أي أنّ

$$b^2 \geq a^2 + c^2 - \frac{2aec\cos\theta_1}{a-y}.$$

ومن ناحِيَةٍ أُخْرَى، يَنْبَغي فَرْضُ المُتَبايِنَاتِ التالِيةِ:

$$(i) \qquad c \geq \frac{e}{\cos\theta_1} \qquad (A\hat{E}C \geq \frac{\pi}{2}).$$

$$(ii) \qquad b \leq BE + EC$$

$$(iii) \qquad c^2 \geq a^2 + b^2 \qquad (A\hat{B}C \geq \frac{\pi}{2}).$$

وتُحَدِّدُ المُتَبايِنَتانِ *(ii)* وَ *(iii)* لِ *b* فَتْرَةً غَيْرَ فارغةٍ، وذَلِكَ إذا ما كانَ

$$a^2 + c^2 - \frac{2aec\cos\theta_1}{a-y} \leq c^2 - a^2$$

وَ

$$a^2 + c^2 - \frac{2aec.\cos\theta_1}{a-y} \leq BE^2 + EC^2 + 2BE.EC$$

$$= 2x^2 + 2y^2 - 2ay + a^2 + c^2 - 2ec\ \cos\theta_1 + 2\sqrt{(x^2+y^2)(e^2+c^2-2ec\cos\theta_1)}.$$

وتُكْتَبُ المُتَبايِنَةُ الأُولَى كما يلي:

$$a \leq ec\ \frac{\cos\theta_1}{a-y}$$

أي:

$$c \geq a\ \frac{a-y}{e\cos\theta_1}$$

وهِيَ مُحَقَّقَةٌ لأنّ

$$e \geq a\ \frac{a-y}{e}.$$

أمّا المُتَبايِنَةُ الثانِيَةُ، فتُصْبِحُ

$$0 \leq x^2 + y^2 - ay + \frac{ecy.\cos\theta_1}{a-y} + \sqrt{(x^2+y^2)(e^2+c^2-2ec\cos\theta_1)}$$

وهِيَ تَكونُ صَحيحَةً إذا ما افْتَرَضْنا أنّ

$$(iv) \qquad \frac{ec|y|\cos\theta_1}{a-y} \leq x^2 + y^2 - ay\,.$$

وتُحَدِّدُ المُتَبايِنَتانِ (i) وَ (ii) لِ c فَتْرَةً فارِغَةً إذا كانَ

$$e^2\,|\,y\,| \leq (x^2 + y^2 - ay)(a - y)$$

أي إذا كانَ

$$(x^2 + y^2 - ay)(a - y) + y(x^2 + y^2 - 2ay + a^2) = ax^2 \geq 0$$

ويَكونُ هَذا الشَرْطُ مُحَقَّقاً دائِماً.

وهَكَذا، ففي المِثالِ ١ الوارِدِ أعْلاه، يَكْفي أن نَأخُذَ $BC = 15{,}13$ عِوَضاً عن $15{,}1$، لِكَي تُصْبِحَ الزاوِيَةُ φ موجبَةً $(\varphi = 22^o\,27'\,23'', 17)$ ؛ وفي هَذِهِ الحالَةِ تَكونُ المُقَدِّمَةُ ٦ صَحيحَةً بَيْنَما تَكونُ المُقَدِّمَةُ الجُزْئِيَّةُ غَيْرَ صَحيحَةٍ.

في المِثالِ ٢، لَدَيْنا

$$\varphi = -\,46^o\,29'\,38'', 6$$

وَ

$$\theta = 48^o\,15'\,03'', 31$$

وهَذا يُعْطي

$$\lambda_0 = 19^o\,30'\,21'', 92$$

وهَذا المِقْدارُ أكْبَرُ من λ ومن μ. وتَكونُ الزاوِيَتانِ المُجَسَّمَتانِ مُساوِيَتَيْنِ عَلَى التَرْتيبِ لِ $37'\,46'', 92$ وَ $6^o\,10'\,18'', 94$ وتَكونُ نِسْبَتُهُما مُساوِيَةً لِ

$$9{,}801378082 < \rho = 10\,;$$

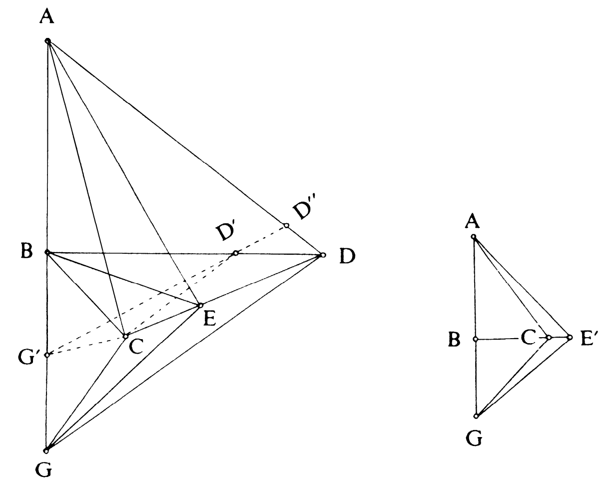
وتَكونُ المُقَدِّمَةُ ٦ إذاً مُحَقَّقَةً وذَلِكَ لأنّ

$$\rho = 10 > \frac{tg\mu}{tg\lambda} = 9{,}571428571.$$

وإذا ما أخَذْنا $\rho = 9{,}6$ وحافَظْنا عَلَى نَفْسِ المَقاديرِ السابِقَةِ لِ λ وَ μ وَ φ وَ θ، فإنّ المُقَدِّمَةَ ٦ لن تَكونَ صَحيحَةً.

لقد اختَبَرْنا فَرَضِيّاتِ ابنِ الهَيْثَمِ لِنَتَأَكَّدَ من مُتَبايِنَةِ المُقَدِّمَةِ ٦، وقد بَيَّنّا أنّ هَذِهِ الفَرَضِيّاتِ غَيْرُ كافِيَةٍ. ويَسْتَنْبِطُ ابنُ الهَيْثَمِ المُقَدِّماتِ الوارِدَةَ أدْناه من المُقَدِّمَةِ ٦. ومن المُتَوَقَّعِ إذاً أن تَكونَ هَذِهِ المُقَدِّماتُ غَيْرَ صَحيحَةٍ، ولَكِنَّ الأمْرَ لَيْسَ كذَلِكَ كما سنَرَى، فهِيَ كُلُّها صَحيحَةٌ. فَلْنَخْتَبِرها تِباعاً.

مُقَدِّمَة ٧. — لِنَأخُذْ هَرَماً $ABCD$ بحَيْثُ يَكونُ AB عَمودِيّاً عَلَى $plan(BCD)$ وَ $B\hat{C}D \geq \frac{\pi}{2}$. إذا كانَت E نُقْطَةً من $[CD]$، يَكونُ لَدَيْنا



الشكل ١١

$$\frac{aire\ (DBC)}{aire\ (EBC)} > \frac{angle\ sol.(A,\ BDC)}{angle\ sol.(A,\ EBC)}.$$

لِنُخْرِجْ في المُسْتَوي ABE من النُقْطَةِ E عَموداً عَلَى AE، فيَقْطَعُ AB عَلَى G. ولأنّ $B\hat{C}E \geq \frac{\pi}{2}$، فإنّ $BE > BC$، ولأنّ $AB \perp plan\ (BCD)$ يَكونُ لَدَيْنا $AE > AC$. إذا أخْرَجْنا BC حَتّى النُقْطَةِ E'، بحَيْثُ يَكونُ $B\,E'=BE$، يَصيرُ لَدَيْنا

$$A\hat{E}'G = A\hat{E}G = \frac{\pi}{2},$$

ولِذَلِكَ فإنّ الزاوِيَةَ ACG مُنْفَرِجَةٌ [انْظُرِ الشَكْلَ ١١]

لِنُبَيِّنْ أن $A\hat{C}D \geq \frac{\pi}{2}$.

- إذا كانَ $B\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$، يَكونُ $CB \perp CD$، ومن ناحِيَةٍ أُخْرَى فإنّ CD عَمودِيٌّ عَلَى AB، فإذاً $CD \perp plan\ (ABC)$ ، ولِذَلِكَ فإنّ $CD \perp AC$، أي أنّ $A\hat{C}D = \frac{\pi}{2}$.
- إذا كانَ $BCD < \frac{\pi}{2}$، يُمْكِنُنا أن نَرْسُمَ CD' في داخِلِ الزاوِيَةِ BCD بحَيْثُ يَكونُ $D'C \perp BC$، فإذاً $CD' \perp plan\ (ACB)$ وَ $AC \perp CD'$، فإذا $A\hat{C}D' = \frac{\pi}{2}$ وَ $D' \in]BD[$.

في المُسْتَوي ACG، يُمْكِنُنا أن نَرْسُمَ CG' بحَيْثُ يَكونُ

$$CG' \perp AC,\ G' \in]BG[.$$

فإذاً يَكونُ المُسْتَوي $CD'G'$ عَمودِيّاً عَلَى AC ويَقْطَعُ المُسْتَوي ABD تِبْعاً للمُسْتَقيمِ $G'D'$ الّذي يَقْطَعُ AD عَلَى النُقْطَةِ D'' ما بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ A وَ D، ولَدَيْنا $A\hat{C}D'' = \frac{\pi}{2}$ ، فإذاً $A\hat{C}D < \frac{\pi}{2}$. ويُحَقِّقُ إذاً الهَرَمُ $AGCD$ شُروطَ المُقَدِّمَةِ ٦ في الحالَةِ الّتي تَكونُ فيها الزاوِيَةُ $A\hat{E}G$ قائِمَةً، وهو أمْرٌ كُنّا قد بَيّنّا أنّه غَيْرُ مُؤَكّدٍ.

يُتابِعُ ابنُ الهَيْثَمِ الاسْتِدْلالَ كما يلي:

$$\frac{aire\ (GCD)}{aire\ (GCE)} > \frac{angle\ sol.(A,\ GCD)}{angle\ sol.(A,\ GCE)};$$

ولَكِنَّ

$$\frac{aire\ (GCD)}{aire\ (GCE)} = \frac{CD}{CE} = \frac{aire\ (DBC)}{aire\ (EBC)}$$

وَ

$$angle\ sol.\ (A,\ GDC) = angle\ sol.(A,\ BCD)$$
$$angle\ sol.\ (A,\ GCE) = angle\ sol.(A,\ BCE)$$

فنَحْصُلُ عَلَى النَتيجَةِ

$$\frac{aire\ (DBC)}{aire\ (EBC)} > \frac{angle\ sol.(A,\ BCD)}{angle\ sol.(A,\ BCE)}.$$

وبُغْيَةَ إثْباتِ صِحَّةِ هَذهِ المُقَدِّمَةِ، لِنَعُدْ إلى الوَسائلِ التَحْليليَّةِ: لِنَخْتَرْ مِحْوَرَيْنِ مُتَعامِدَيْنِ ذَوَي أصْلٍ A، بحَيْثُ تَكونُ النُقْطَةُ C عَلَى Ax والنُقْطَةُ D عَلَى المُسْتَوي Axy. لنَخْتَرِ التَوْجيهَ بحَيْثُ تَكونُ إحْداثِيّاتُ C وَ D مُوجِبَةَ. وَلْنَكْتُبْ إحْداثِيّاتِ نِقاطِ الشَكْلِ:

$$C: (c, 0, 0);\ E(e \cos \lambda, e \sin \lambda, 0)\ ;$$

$$D: (d \cos \mu, d \sin \mu, 0)$$

$$(0 < \lambda < \mu < \pi \text{ حَيْثُ}).$$

لَدَيْنا

$$\frac{CD}{CE} = \rho > 1,$$

حَيْثُ تَكونُ النِقاطُ C, E, D مُتَسامِتَةً، ويَنْتُجُ من ذَلِكَ أنّ

$$e = c\,(1 - \frac{1}{\rho})\frac{\sin \mu}{\sin(\mu - \lambda)}$$

وَ

$$d = c\,(\rho - 1)\frac{\sin \lambda}{\sin(\mu - \lambda)}.$$

وتَكونُ إحْداثِيَّات B وَ H كالتالي:

$$H: (c \cos \theta \cos \varphi, c \sin \theta \sin \varphi, c \cos \theta)$$

$$B: (b \sin \theta \cos \varphi, b \sin \theta \sin \varphi, b \cos \theta)$$

حَيْثُ يَكونُ $\frac{\pi}{2} > \theta \leq 0$. وإذا عَبَّرْنا عن تَعامُدِ AB والمُسْتَوي BCD، سنَرَى أنّ $b = AB$ يُمَثِّلُ المُسْقَطَ من $c = AC$ عَلَى AH، أي أنّ

$$b = c \sin \theta \cos \varphi\ ;$$

وهَذا الشَرْطُ يَفْرِضُ أن يَكونُ $\frac{\pi}{2} > |\varphi|$. وكذَلِكَ فإنَّ AB هو المُسْقَطُ من AD عَلَى AH، أي أنّ

$$b = d \sin \theta \cos(\mu - \varphi),$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$c\cos\varphi = d\cos(\mu-\varphi) = c(\rho-1)\,\frac{\sin\lambda}{\sin(\mu-\lambda)}\,\cos(\mu-\varphi);$$

ونَسْتَنْتِجُ من ذَلِكَ أنّ

$$\rho = \frac{\sin\mu\ \cos(\lambda-\varphi)}{\sin\lambda\ \cos(\mu-\varphi)}.$$

لِنُعَبِّرِ الآن عن كَوْنِ الزاوِيَةِ $B\hat{C}D$ قائِمَةً أو مُنْفَرِجَةً؛ ولَكِنَّها تَحْدُثُ عن إسْقاطٍ عَموديٍّ للزاوِيَةِ $A\hat{C}D$، ولِذَلِكَ فإنّ الشَرْطَ المَذْكورَ معادلٌ لِ

$$A\hat{C}D \geq \frac{\pi}{2},$$

أي أنّ:

$$c \leq d\cos\mu = c\,(\rho-1)\,\frac{\sin\lambda\ \cos\mu}{\sin(\mu-\lambda)} = c\,\frac{\cos\varphi\ \cos\mu}{\cos(\mu-\varphi)}.$$

وهَذا يَفْرِضُ أن يَكونَ $\mu < \frac{\pi}{2}$ (لَدَيْنا $\rho > 1$ وَ $0 < \lambda < \mu$) وأن يَكونَ أيضاً $|\mu-\varphi| < \frac{\pi}{2}$؛ ويُعَبَّرُ عن هَذا الشَرْطِ بالعَلاقَةِ

$$\frac{\sin\mu\ \sin\varphi}{\cos(\mu-\varphi)} \leq 0$$

أي أنّ $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq 0$.

فلَيْسَت مُقَدِّمَةُ ابنِ الهَيْثَمِ في هَذِهِ الحالَةِ بالحُكْمِ الأكيدِ. بَيْدَ أنّ مُتَبايِنَةَ هَذِهِ المُقَدِّمَةِ تُكْتَبُ بِظاهِرِها كما يلي:

$$\frac{\displaystyle\int_0^{\mu}\frac{dv}{1+\ \sin\theta\ \cos(v-\varphi)}}{\displaystyle\int_0^{\lambda}\frac{dv}{1+\ \sin\theta\ \cos(v-\varphi)}} \leq \rho = \frac{\sin\mu\ \cos(\lambda-\varphi)}{\sin\lambda\ \cos(\mu-\varphi)};$$

وهِيَ تَعْني أنّ العِبارَةَ

$$\frac{\cos(\lambda-\varphi)}{\sin\lambda}\int_0^{\lambda}\frac{dv}{1+\ \sin\theta\cos(v-\varphi)}$$

هِيَ دالّةٌ تَناقُصِيّةٌ بِالنِسْبَةِ إلى λ. لِنَحْسُبْ مُشْتَقَّها

$$\left(-\frac{\sin(\lambda-\varphi)}{\sin\lambda}-\frac{\cos(\lambda-\varphi)\cos\lambda}{\sin^2\lambda}\right)\int_0^\lambda\frac{dv}{1+\sin\theta\cos(v-\varphi)}+\frac{\cos(\lambda-\varphi)}{\sin\lambda(1+\sin\theta\cos(\lambda-\varphi))}=$$

$$=\frac{1}{\sin^2\lambda}\left\{\left(\frac{\cos(\lambda-\varphi)\sin\lambda}{1+\sin\theta\cos(\lambda-\varphi)}\right)-\cos\varphi\int_0^\lambda\frac{dv}{1+\sin\theta\cos(v-\varphi)}\right\}.$$

ويَكونُ هَذا المُشْتَقُّ سالِباً إذا كانَ

$$\frac{\cos(\lambda-\varphi)\sin\lambda}{1+\sin\theta\cos(\lambda-\varphi)}\leq\cos\varphi\int_0^\lambda\frac{dv}{1+\sin\theta\cos(v-\varphi)},$$

ويُحَقِّقُ المِقْدارُ $\lambda = 0$ هَذِهِ المُتَبايِنَةَ.

وتَبْقَى المُتَبايِنَةُ مُحَقَّقَةً طالَما بَقِيَ المُشْتَقُّ من طَرَفِها الأوَّلِ مَحْدوداً عُلْوِيّاً بالمُشْتَقِّ من طَرَفِها الثاني:

$$\frac{\cos(2\lambda-\varphi)}{1+\sin\theta\cos(\lambda-\varphi)}+\frac{\cos(\lambda-\varphi)\sin\lambda\sin\theta\sin(\lambda-\varphi)}{(1+\sin\theta\cos(\lambda-\varphi))^2}$$

$$\leq\frac{\cos\varphi}{1+\sin\theta\cos(\lambda-\varphi)}$$

وهذا ما يَعْني أنّ:

$$\cos(2\lambda-\varphi)+\cos^2(\lambda-\varphi)\cos\lambda\sin\theta\leq\cos\varphi+\sin\theta\cos(\lambda-\varphi)\cos\varphi$$

$$\Leftrightarrow 0\leq 2\sin\lambda\sin(\lambda-\varphi)+\sin\theta\cos(\lambda-\varphi)\sin\lambda\sin(\lambda-\varphi)$$

$$\Leftrightarrow 0\leq\sin\lambda\sin(\lambda-\varphi)(2+\sin\theta\cos(\lambda-\varphi))$$

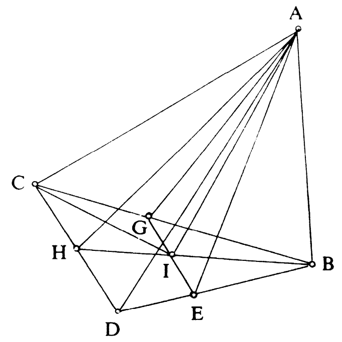
وتَتَحقَّقُ هَذِهِ المُتَبايِنَةُ إذا كانَ $\varphi \leq \lambda$. وبما أنّ لَدَيْنا هنا $\varphi \leq 0 < \lambda$؛ فإنّ صِحَّةَ المُقَدِّمَةِ تَكونُ مُؤَكَّدَةً في هَذِهِ الحالَةِ.

مُقَدِّمَة ٨.— لِنَأخُذْ هَرَماً $ABCD$ بحَيْثُ يَكونُ AB عَمودِيّاً عَلَى المُسْتَوي (CBD) وَ $BC = BD$؛ إذا كانَ $EG \parallel CD$، فإنّ

$$\frac{\text{aire }(CDB)}{\text{aire }(EBG)}>\frac{\text{angle sol.}(A, BCD)}{\text{angle sol.}(A, BEG)}$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ١٢]

لأنّ $EG \parallel CD$، فإنّ المُثَلَّثَ BGE مُتَساوي الساقَيْنِ. وإذا كانَت النُقْطَةُ I مُنْتَصَفَ EG، فإنّ $BI \perp EG$ والمُسْتَقيمُ BI يَقْطَعُ القِطْعَةَ DC عَلَى مُنْتَصَفِها وهو H.



الشكل ١٢

وَ

$$AB \perp (CBD) \Rightarrow (ABC) \perp (CBD)$$

وَ

$$(ABH) \perp (CBD).$$

ولَكِنَّ

$$BH = (ABH) \cap (BCD)$$

ويَكونُ المُسْتَقيمُ GI من المُسْتَوي (BCD) عَمودِيّاً عَلَى BH، فإذاً هو عَمودِيٌّ عَلَى المُسْتَوي (ABH)، فإذاً $A\hat{I}G = \frac{\pi}{2}$ وكذَلِكَ أيضاً فإنّ $A\hat{H}C = \frac{\pi}{2}$.

ومن المَعْلومِ إذاً أنّ $A\hat{I}H$ وَ $A\hat{I}C$ مُنْفَرِجَتانِ وأنّ $B\hat{H}C = \frac{\pi}{2}$، ونَسْتَطيعُ أن نُطَبِّقَ المُقَدِّمَةَ ٦ مُفْتَرِضينَ أنّ الزاوِيَةَ $A\hat{I}C$ مُنْفَرِجَةٌ؛ وهَذِهِ الحالَةُ مَشْكوكٌ فيها أيضاً، ولَكِنَّها تَبْقَى صَحيحَةً لأنّ النُقْطَتَيْنِ C وَ H تَكونانِ من جهَةٍ واحِدَةٍ من المُسْتَوي العَمودِيِّ عَلَى ABH، والَّذي يَمُرُّ بِ AB (حَيْثُ يَكونُ المُسْتَقيمُ CH مُوازِياً لهَذا المُسْتَوي)

$$\frac{aire\ (BCH)}{aire\ (BCI)} > \frac{angle\ sol.(A,\ BCH)}{angle\ sol.(A,\ BCI)}.$$

وتُعْطي المُقَدِّمَةُ ٦، حَيْثُ تَكونُ الزاوِيَة $A\hat{I}G$ قائِمَةً (وهَذا صَحيحٌ في كُلِّ الحالاتِ؛ الزاوِيَةُ $A\hat{I}G$ تَلْعَبُ هنا دَوْرَ الزاوِيَةِ $A\hat{C}E$ في المُقَدِّمَةِ ٦):

$$\frac{aire\ (CBI)}{aire\ (IBG)} > \frac{angle\ sol.(A,\ BCI)}{angle\ sol.(A,\ BIG)}$$

وبِضَرْبِ المُتَبايِنَتَيْنِ طَرَفاً بطَرَفٍ، نَحْصُلُ عَلَى

$$\frac{aire\ (HBC)}{aire\ (IBG)} > \frac{angle\ sol.(A,\ BCH)}{angle\ sol.(A,\ BIG)}.$$

وإذا ضَرَبْنا بِاثْنَيْنِ كُلَّ حَدٍّ من حُدودِ النِسْبَةِ نَسْتَنْبِطُ العَلاقَةَ

$$\frac{aire\ (DBC)}{aire\ (BEG)} > \frac{angle\ sol.(A,\ BCD)}{angle\ sol.(A,\ BEG)}$$

وقد كانَ بالإمكانِ إثْباتُ هَذِهِ المُقَدِّمَةِ بِشَكْلٍ مُباشِرٍ مُسْتَقِلٍّ عن المُقَدِّمَةِ ٦ وذَلِكَ بِواسِطَةِ حِسابِ التَكامُلِ.

مُقَدِّمَة ٩.— لِنَأخُذْ هَرَمَيْنِ مُنْتَظِمَيْنِ لهما رَأسٌ مُشْتَرَكٌ A، وقاعِدَتاهما هما مُتَعَدِّدا أضلاعٍ مُنْتَظِمانِ مُتَشابِهانِ غَيْرُ متساوِيَيْنِ، ومُحاطانِ بكُرَةٍ مُمَرْكَزَةٍ في النُقْطَةِ A.

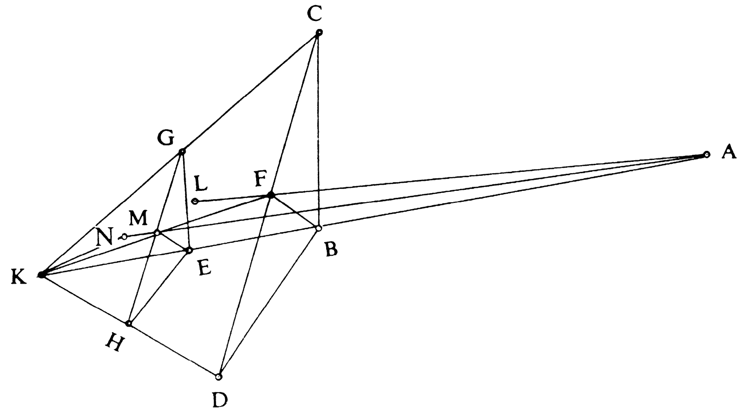
لِيَكُنْ P_1 الهَرَمَ ذا القاعِدَةِ الكُبْرَى و P_2 الهَرَمَ الآخَرَ.

يَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{angle\ sol.(A,\ base\ P_1)}{angle\ sol.(A,\ base\ P_2)} > \frac{base\ P_1}{base\ P_2}.$$

لِتَكُنْ $(B,\ BC)$ الدائرةَ المُحيطَةَ بِمُتَعَدِّدِ الأضْلاعِ الخاصِّ بِقاعِدَةِ الهَرَمِ P_1، وَ AB العَمودَ القائِمَ عَلَى سَطْحِ هَذِهِ الدائرةِ. يُجَزّأ مُتَعَدِّدُ الأضْلاعِ المَذْكورُ إلى مُثَلَّثاتٍ مُتَساوِيَةٍ، ومُتَساوِيَةِ الساقَيْنِ، بِواسِطَةِ أنْصافِ الأقْطارِ المُخْرَجَةِ من مَرْكَزِ

الدائرةِ إلى رؤوسِهِ. لِيَكُنْ BCD أحَدَ تِلْكَ المُثَلَّثاتِ المَذْكورَةِ: ويُجزّأ إذاً الهَرَمُ P_1 إلى أهْراماتٍ مُتَساوِيَةٍ فيما بَيْنَها، لِيَكُنْ $ABCD$ أحَدَها.



لن نَحُدَّ من عُمومِيَّةِ المَسْأَلَةِ إذا ما افْتَرَضْنا أنّ مُسْتَوي قاعِدَة الهَرَمِ P_2 مُوازٍ للمُسْتَوي (BCD)، والدائرةَ (E, EG) المُحيطَةَ بالقاعِدَةِ الثانيَةِ أصْغَرُ من الدائرةِ (B, BC)، فإذاً $AE > AB$.

لنُجَزِّئْ P_2، كما فَعَلْنا بِ P_1، إلى أهْرامات مُتَساوِيَةٍ فيما بَيْنَها، ولْيَكُنْ $AEGH$ أحَدَها. لنَفْرِضْ $EG \parallel BC$ وَ $EH \parallel BD$، وَ EGH مُتَشابِهٌ وَ BCD، فإذاً $GH \parallel CD$.

إذا كانَ $BF \perp CD$ فتَكونُ F مُنْتَصَفَ CD وإذا كانَ $EM \perp GH$ فَتَكونُ M مُنْتَصَفَ GH ويَكونُ لَدَيْنا $EM < BF$ لأنّ $\frac{BF}{EM} = \frac{BC}{EG}$.

يَقْطَعُ المُسْتَقيمُ AF الكُرَةَ عَلَى النُقْطَةِ L، فإذاً L هِيَ مُنْتَصَفُ القَوْس $\overset{\frown}{CD}$ في المُسْتَوي ACD، وأيضاً، يَقْطَعُ المُسْتَقيمُ AM الكُرَةَ عَلَى N، وَ N هِيَ مُنْتَصَفُ القَوْسِ $\overset{\frown}{GH}$ في المُسْتَوي AGH.

ويَقْطَعُ المُسْتَقيمُ FM المُسْتَقيمَ AB لأنّ $FB \parallel EM$ وَ $EM < FB$.

لِتَكُنْ K نُقْطَةَ التَقاطُعِ. فيَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{BK}{KE} = \frac{BF}{EM} = \frac{BC}{EG};$$

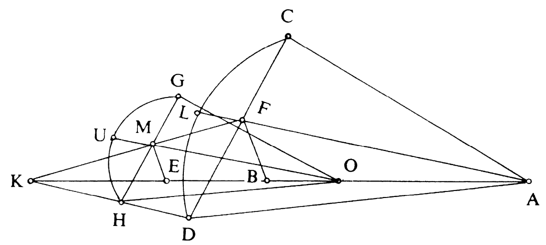
وبما أنّ BC وَ EG مُتَوازِيانِ، فإنّ GC يَمُرُّ عَلَى النُقْطَةِ K وكذَلِكَ فإنّ المُسْتَقيمَ DH يَمُرُّ عَلَى K أيضاً.

مُلاحَظَة – النُقْطَةُ K هِيَ مَرْكَزُ تَحاكٍ للدائرتَيْنِ المُمَرْكَزَتَيْنِ في النُقْطَتَيْنِ B وَ E. وَلْيَكُنْ K هَذا التَحاكي:

$$K: E \to B$$
$$G \to C$$
$$H \to D$$
$$M \to F$$

إذا أخرَجْنا من النُقْطَةِ M مُسْتَقيماً مُوازِياً لَ FA، فهو يَقْطَعُ المُسْتَقيمَ AB عَلَى نُقْطَةِ O ما بَيْنَ النُقْطَتَيْنِ E وَ A.

ولأنّ $OM \,//\, FA$ وَ $GH \,//\, CD$، فإنّ المستوِيَيْنِ HOG وَ ACD مُتَوازِيانِ ويَقْطَعانِ المُسْتَوي AKC تِبْعاً للمُسْتَقيمَيْنِ OG وَ AC، ويَكونُ لَدَيْنا $OG \,//\, AC$، وكذَلِكَ فهما يَقْطَعانِ المُسْتَوي AKD تِبْعاً للمُسْتَقيمَيْنِ OH وَ AD، ويَكونُ لَدَيْنا $OH \,//\, AD$، ولِذَلِكَ فإنّ $G\hat{O}H \,//\, C\hat{A}D$.



في التَحاكي K تَكونُ النُقْطَةُ O صورَةً للنُقْطَةِ A. وتَكونُ الكُرَةُ (O, OG) صورَةَ الكُرَةِ (A, AC). ويَكونُ المُسْتَوي (OGH) صورَةَ المُسْتَوي (ACD). فإذاً يَكونُ التَقاطُعانِ $(A, AC) \cap (ACD)$ و $(O, OG) \cap (OGH)$ دائرتَيْنِ مُتَحاكِيَتَيْنِ، كما تَكونُ القَوْسانِ $\widehat{GLD}$ وَ $\widehat{GUH}$ مُتَحاكِيَتَيْنِ، وكذَلِكَ بِالنِسْبَةِ إلى القِطاعَيْنِ

$(O, \widehat{GUH})$ وَ $(A, \widehat{CLD})$

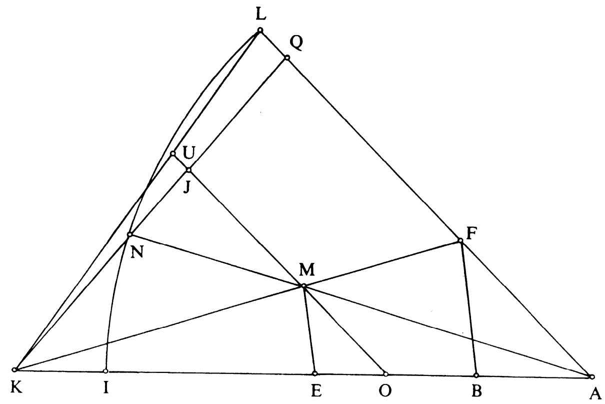
$$\frac{sect.(A,CLD)}{sect.(O,GUH)}=\frac{AC^2}{OG^2}=\frac{tr.(ACD)}{tr.(OGH)}=\frac{segm.(CLD)}{segm.(GUH)}$$

(حَيْثُ تَكونُ النُقْطَةُ U مُنْتَصَفَ القَوْسِ $\widehat{GH}$).

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{pyrm.(KACD)}{pyrm.(KOGH)}=\frac{pyrm.circ.(KCLD)}{pyrm.circ.(KGUH)}$$

لأنّ $(KACD)$ وَ $(KCLD)$ من ناحِيَةٍ، كما $(KOGH)$ وَ $(KGUH)$ من ناحِيَةٍ أُخْرَى، لهما نَفْسُ الارتِفاعِ.



ولَكِنَّ

$$\frac{pyrm.(KACD)}{pyrm.(KOGH)}>\frac{pyrm.(KACD)}{pyrm.(KAGH)}$$

فإذاً

$$\frac{pyrm.circ.(KCLD)}{pyrm.circ.(KGUH)}>\frac{pyrm.(KACD)}{pyrm.(KAGH)}.$$

ويَحْتَوي المُسْتَوي AKF عَلَى النقاطِ U, N, M, L لأنّه المُسْتَوي المُنَصِّفُ العَمودِيُّ لَ CD ولِ GH، ويَكونُ لِذَلِكَ تَقاطُعُهُ مع الكُرَةِ دائرةً عَظيمَةً تَمُرُّ عَلَى النِقاطِ L وَ N وَ I (النُقْطَةُ I مَوْجودَةٌ عَلَى AK).

ولَدَيْنا في التَحاكي السابِقِ

$$\frac{AC}{OG} = \frac{AF}{OM} = \frac{FK}{KM},$$

ولَكِنَّ

$$AC = AL, \quad OG = OU,$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{AL}{OU} = \frac{AF}{OM} = \frac{AL-AF}{OU-OM} = \frac{LF}{MU} \;;$$

غَيْرَ أنّ

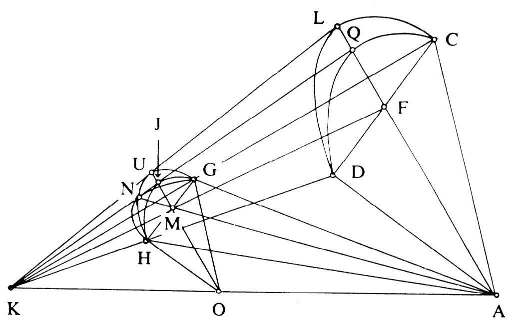
$$LF \,//\, MU, \quad \frac{FK}{KM} = \frac{LF}{MU}$$

وبالتالي، فإنّ المُسْتَقيمَ LU يَمُرُّ بِمَرْكَزِ التَحاكي K. ويَقَعُ المُسْتَقيمُ KN في المُسْتَوي AKL، ويَقْطَعُ المُسْتَقيمَ FL عَلَى Q، كما أنّه يَقْطَعُ مُسْتَوي القَوْسِ $\widehat{GUH}$ المُمَرْكَزَةِ في النُقْطَةِ O، عَلَى نُقْطَةٍ من المُسْتَقيمِ OU، وَلْتَكُنْ هَذِهِ النُقْطَةُ J. ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ النِقاطَ K, N, J, Q متسامتة.

لِنَأخُذِ الهَرَمَ الدائِرِيَّ الّذي رَأسُه النُقْطَةُ K وقاعِدَتُهُ القِطاعُ $AHNG$. إذا أخْرَجْناهُ فإنّهُ يَقْطَعُ المُسْتَوي ACD تِبْعاً لِخَطٍّ يَمُرُّ عَلَى النِقاطِ D, Q, C، كما أنّه يَقْطَعُ كذَلِكَ مُسْتَوي القِطاعِ $OHGU$ تِبْعاً لِخَطٍّ يَمُرُّ عَلَى النِقاطِ H, J, G. وتَكونُ القَوْسانِ $\widehat{CLD}$ و $\widehat{CQD}$ عَلَى التَرْتيبِ نَظيرَتَي القَوْسَيْنِ $\widehat{GUH}$ وَ $\widehat{GJH}$ في التَحاكي ذي المَرْكَزِ K. فإذاً

$$\frac{pyr.circ.(KCLD)}{pyr.circ.(KGUH)} = \frac{pyr.circ.(KCQD)}{pyr.circ.(KGJH)} \;(= k^3)$$

(إذا ما كانَت k نِسْبَةَ التَحاكي، أي: $k = \frac{AC}{OG}$).



ولَكِنَّ

$$\frac{pyr.circ.(KCLD)}{pyr.circ.(KGUH)} > \frac{pyr.(KACD)}{pyr.(KAGH)}$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{pyr.circ.(KCQD)}{pyr.circ.(KGJH)} > \frac{pyr.(KACD)}{pyr.(KAGH)},$$

ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ

$$\frac{pyr.circ.(KACQD)}{solide(KAGJH)} > \frac{pyr.(KACD)}{pyr.(KAGH)},$$

لأنّ*

$$[\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} > \frac{c}{d}]$$

والهَرَمُ الدائِريُّ *(KAGNH)* مَوْجودٌ داخِلِ المُجَسَّمِ *(KAGJH)*، فإذاً:

$$\frac{pyr.circ.(KACQD)}{pyr.circ.(KAGJH)} > \frac{pyr.circ.(KACQD)}{solide(KAGJH)} > \frac{pyr.(KACD)}{pyr.(KAGH)}.$$

* يُسْتَعْمَلُ هنا رَمْزُ *((pyr.circ.(KACQD))* الهَرَمِ الدائريِّ مَجازيّاً، لأنَّ القَوْسَ *CQD* هي قَوْسٌ مَخْروطِيَّةٌ ولَيْسَت دائِرِيَّةً. كانَ من الأدَقِّ إذاً، ان يُسْتَعْمَلَ رَمْزُ الهَرَمِ المُنْحَني. ولَكِنّ هذه اللُّغَةَ المَجازِيَّةَ لَيْسَت ذاتَ تَأثيرٍ لا سيّما وأنّه لا يُوجَدُ إمكانيّةٌ للالتباسِ في النَصِّ اللاّحِقِ.

إنّ القِطْعَةَ من الهَرَمِ $KACQD$ المحْصورَةَ بَيْنَ المُسْتَوِيَيْنِ $ACQD$ وَ $AHNG$ مَوْجودَةٌ داخِلَ القِطْعَةِ من الكُرَةِ الّتي يَحُدُّها القِطاعانِ الدائِرِيّانِ $ACLD$ وَ $AGNH$ فإذاً

$$solide\ (ACLDHNG) > solide\ (ACQDHNG).$$

والمَقْطَعُ الكُرَوِيُّ الّذي يَحُدُّه المُسْتَقيمُ AI والقِطاعُ $AGNH$ يَكونُ داخِلَ الهَرَمِ الدائِرِيِّ $KAGNH$، فإذاً المَقْطَعُ $(AIGNH)$ أصْغَرُ من الهَرَمِ الدائِرِيِّ $(KGNH)$، ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{solide(ACLDHNG)}{section(AIGNH)} > \frac{solide(ACQDHNG)}{pyr.circ.(KAGNH)}$$

وبِواسِطَةِ التَرْكيبِ

$$[\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} > \frac{c+d}{d}]$$

نَحْصُلُ عَلَى

$$\frac{sect.sphérique\ d'angle\ sol.(A,BCD)}{sect.sphérique\ d'angle\ sol.(A,EGH)} > \frac{pyr.circ.(KACQD)}{pyr.circ.(KAGNH)} > \frac{pyr.(KACD)}{pyr.(KAGH)}$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{angle\ sol.(A,\ BCD)}{angle\ sol.(A,\ EGH)} > \frac{tr.(KCD)}{tr.(KGH)},$$

ولَكِنَّ

$$\frac{tr.(KCD)}{tr.(KGH)} = \left(\frac{KC}{KG}\right)^2 = \left(\frac{BC}{EG}\right)^2 = \frac{tr.(BCD)}{tr.(EGH)},$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{angle\ sol.(A,\ BCD)}{angle\ sol.(A,\ EGH)} > \frac{tr.(BCD)}{tr.(EGH)}$$

إذا كانَ n هو عَدَدُ وُجوهِ كُلِّ واحِدٍ من الهَرَمَيْنِ المَدْروسَيْنِ، وإذا ضَرَبْنا بِ n كلَّ حدٍّ من نِسْبِ هَذِهِ المُتَبايِنَةِ، نَحْصُلُ عَلَى

$$\frac{angle\ solide\ de\ P_1}{angle\ solide\ de\ P_2} > \frac{base\ de\ P_1}{base\ de\ P_2}.$$

مُقَدِّمَة ١٠.– لِنَأخُذْ هَرَمَيْنِ مُنْتَظِمَيْنِ P_1 وَ P_2 لهما نَفْسُ الرَأسِ A، وحَيْثُ يَكونُ n_1 عَدَدَ وُجوهِ الهَرَمِ الأوّل، وَ n_2 عَدَدَ وُجوهِ الثاني. وَلْتَكُنْ قاعِدَتا الهَرَمَين، B_1 وَ B_2، مُتَعَدِّدَيْ أضلاعٍ مُنْتَظِمَيْنِ مُحاطَيْن بكُرَةٍ واحِدةٍ مُمَرْكَزَةٍ في النُقْطَةِ A، ولْتَكُنْ مِساحَتا هاتَيْنِ القاعِدَتَيْنِ عَلَى التَرْتيبِ s_1 وَ s_2.

إذا كانَ $n_1 > n_2$ وَ $s_1 < s_2$ فإنّ

$$\frac{angle\ solide\ A\ de\ P_2}{angle\ solide\ A\ de\ P_1} > \frac{s_2}{s_1}$$

لِيَكُنْ r_1 وَ r_2 نِصْفَيْ قُطْرَي الدائرتَيْنِ المُحيطَتَيْنِ بـ B_1 وَ B_2. لِكَي يُبَرْهِنَ ابنُ الهَيْثَمِ أنّ $r_1 < r_2$، يَسْتَعْمِلُ مُتَعَدّدَ أضلاعٍ B حَيْثُ يَكونُ عَدَدُ أضلاعِهِ مُساوِيَاً لـ n_2 وتَكونُ مِساحَتُهُ مُساوِيَةً لـ s_1. لِيَكُنْ r نِصْفَ قُطْرِ الدائرةِ المُحيطَةِ به. بما أنّ B مُتَشابهٌ وَ B_2 وله مِساحَةٌ أصْغَرُ من مِساحَةِ B_2، فإنّ $r < r_2$. ولَكِنَّ B وَ B_1 مُتَساوِيا المِساحَةِ و لِ B عَدَدٌ من الأضلاعِ أقَلُّ مِمّا هو لِ B_1، فإذاً $r_1 < r$. وبالتالي، فإنّ $r_1 < r_2$. ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ $h_1 > h_2$ حَيْثُ يَكونُ h_1 وَ h_2، عَلَى التَرْتيبِ، ارتِفاعَي الهَرَمَيْنِ P_1 وَ P_2.

ومن ثمّ نَعْمَلُ كما سَبَقَ. لِتَكُنِ النُقْطَةُ A مَرْكَزَ الكُرَةِ، وَ لِيَكُنِ المُسْتَقيمُ AB عَموداً عَلَى مُسْتَوي القاعِدَةِ الكُبْرَى، ولْيَكُنْ BCD أحَدَ مُثَلَّثاتِ هَذِهِ القاعِدَةِ ولْيَكُنِ المُسْتَقيمُ AE عَموداً عَلَى مُسْتَوي القاعِدَةِ الصُغْرَى ولْيَكُنْ EGH أحَدَ مُثَلَّثاتِها. ويَكونُ لَدَيْنا $AE < AB$. نَسْتَطيعُ، بدون أن نَحُدَّ من عُمومِيَّةِ المَسْأَلَةِ، أن نَفْتَرِضَ أنّ النِقاطَ A, E, B مُنْتَظِمَةٌ عَلَى استِقامَةٍ وأنّ

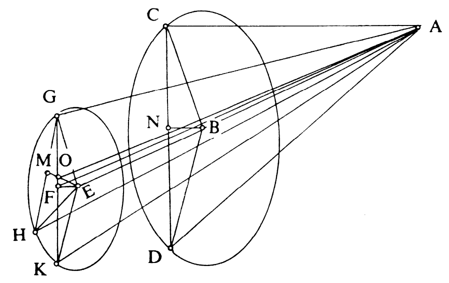
$$EG \parallel BC,\ G\hat{E}H < C\hat{B}D,$$

(حَيْثُ يَكونُ $C\hat{B}D = \frac{2\pi}{n_2}$, $G\hat{E}H = \frac{2\pi}{n_1}$)،

فإذاً، المُسْتَقيمُ EH لا يُوازي BD [انْظُرِ الشَكْلَ ١٤]

لِنُخْرِجْ EK مُوازِياً لِ BD، فإذاً $G\hat{E}K = C\hat{B}D$. وَلْتَكُنِ النِقاطُ N, M, F مُنَصِّفَةً، عَلَى التَرْتيبِ، للأَوْتارِ DC, GH, GK. فيَكونُ لَدَيْنا

$$BN \perp CD,\ EM \perp GH,\ EF \perp GK,$$



الشكل ١٤

ويَنْقَسِمُ كُلُّ واحِدٍ من الأَهْرامات $ABCD, AEGH, AEGK$ إلى هَرَمَيْنِ مُتَساوِيَيْنِ وذَلِكَ، عَلَى التَرْتيبِ، بِواسِطَةِ المُسْتَويات ABN, AEM, AEF. والمُثَلَّثانِ EGK, BCD مُتَشابِهانِ، فإذاً

$$(1) \qquad \frac{\text{angle sol.pyr.}(A,\ BCD)}{\text{angle sol.pyr.}(A,\ EGK)} > \frac{\text{aire}(BCD)}{\text{aire}(EGK)} \qquad \text{(مُقَدِّمَة ٩)}$$

ولَكِنَّ $G\hat{E}K > G\hat{E}H$، ولِذَلِكَ فإنّ $E\hat{G}F < E\hat{G}M$، فإذاً يَقْطَعُ المُسْتَقيمُ GF المُسْتَقيمَ EM عَلَى نُقْطَةٍ، لِتَكُنْ O. والزاوِيَةُ $G\hat{O}E$ مُنْفَرِجَةٌ والمُثَلَّثُ AGK مُتَساوي الساقَيْنِ والنُقْطَةُ F هِيَ مُنْتَصَفُ GK، فإذاً $AF \perp GK$ ولِذَلِكَ فإنّ $A\hat{O}G$ مُنْفَرِجَةٌ، ويُطَبِّقُ ابنُ الهَيْثَمِ المُقَدِّمَةَ ٦ في الحالَةِ المَشْكوكِ فيها: حَيْثُ تَلْعَبُ الزاوِيَةُ $A\hat{O}G$ دَوْرَ الزاوِيَةِ $A\hat{E}C$ في المُقَدِّمَةِ ٦. ولَكِنَّ GM مُوازٍ للمُسْتَوي العَموديِّ عَلَى AEM والمارِّ بِ AE، فإذاً، تَكونُ النُقْطَتانِ G وَ M من جِهَةٍ واحِدَةٍ من هَذا المُسْتَوي وتَكونُ المُقَدِّمَةُ صالِحَةً للتَطْبيقِ

$$(2) \qquad \frac{\text{aire}(EGM)}{\text{aire}(EGO)} > \frac{\text{angle sol.}(A,\ EGM)}{\text{angle sol.}(A,\ EGO)}.$$

وتَكونُ الزاوِيَةُ $A\hat{F}G$ قائِمَةً اسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ٧ ويَكونُ لَدَيْنا

$$\frac{aire(EGF)}{aire(EOF)} > \frac{angle\ sol.(A,\ EGF)}{angle\ sol.(A,\ EOF)}; \qquad (3)$$

ونَسْتَنْبِطُ من *(3)*

$$\frac{aire(EGO)}{aire(EGF)} > \frac{angle\ sol.(A,\ EGO)}{angle\ sol.(A,\ EGF)}, \qquad (4)$$

وبالضَرْبِ طَرَفاً بطَرَفٍ، نَسْتَنْتِجُ من *(2)* وَ *(3)* أنّ

$$\frac{aire(EGM)}{aire(EGF)} > \frac{angle\ sol.(A,\ EGM)}{angle\ sol.(A,\ EGF)},$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{angle\ sol.(A,\ EGF)}{angle\ sol.(A,\ EGM)} > \frac{aire(EGF)}{aire(EGM)}; \qquad (5)$$

وباسْتِطاعَتِنا إعادَة كِتابَةِ *(1)* بالصيغَةِ التالِيَةِ:

$$\frac{angle\ sol.(A,\ BCD)}{angle\ sol.(A,\ EGF)} > \frac{aire(BCD)}{aire(EGF)}, \qquad (6)$$

لأنّ

$$(EGK) = 2(EGF)$$

وبالضَرْبِ طَرَفاً بطَرَفٍ نَسْتَنْبِطُ من *(5)* وَ *(6)* أنّ

$$\frac{angle\ sol.(A,\ BCD)}{angle\ sol.(A,\ EGM)} > \frac{aire(BCD)}{aire(EGM)}. \qquad (7)$$

وعَدَدُ أضْعافِ الزاوِيَةِ *(A, BCD)*، المُكَوِّنُ للزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ *A* الخاصَّةِ بالهَرَمِ P_2، يَكونُ مُساوِيَاً لعَدَدِ أضْعافِ المُثَلَّثِ *BCD* المُكَوِّنِ لقاعِدَةِ P_2

$$angle\ (A,\ base\ P_2) = n_2\ angle\ (A,\ BCD)$$

$$base\ (P_2) = n_2\ triangle\ (BCD)$$

وكذَلِكَ أيضاً

$$angle\ (A,\ base\ P_1) = n_1\ angle\ (A,\ EGK) = 2n_1\ angle\ (A,\ EGM)$$

$$base\ (P_2) = n_1\ triangle\ (EGK) = 2n_1.\ triangle\ (EGM).$$

ونَسْتَنْبِطُ إذاً من (7)

$$\frac{angle\ solide\ A\ de\ P_2}{angle\ solide\ A\ de\ P_1} > \frac{base\ de\ P_2}{base\ de\ P_1}$$

وبنَتيجَةِ هَذِهِ التَفْصيلاتِ الطَويلَةِ فَضْلاً عن تَفَحُّصِ المُقَدِّماتِ السابقَةِ، يُمْكِنُنا أن نَتَساءَلَ، إذا ما كانَ قد وُجِدَ لَدَى ابنِ الهَيْثَمِ الحِسُّ المُسْبَقُ بالمُتَبايِنَاتِ المُصاغَةِ في المُقَدِّماتِ ٧ و٨ و١٠، انطِلاقاً من بُحوثِهِ حَوْلَ الزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ، وقَبْلَ أن يَسْعَى إلى بُرْهانِ تِلْكَ المُتَبايِنَاتِ بواسِطَةِ المُقَدِّمَةِ ٦، الَّتي أحالَها بدَوْرِها إلى المُقَدِّمَةِ الجُزْئِيَّةِ. وهَذا المَنْحَى عِنْدَ ابنِ الهَيْثَمِ كرِياضِيٍّ قد يُفَسِّرُ لنا سِرَّ صِحَّةِ المُقَدِّماتِ ٧ وَ ٨ وَ ١٠ بصُورَةٍ مُسْتَقِلَّةٍ عن المُقَدِّمَةِ ٦، كما رَأَيْنا. ولَدَيْنا حُجَّةٌ إضافِيَّةٌ بِهَذا الخُصوصِ، تَتَمَثَّلُ في أنّ ابنَ الهَيْثَمِ لا يَسْتَعْمِلُ لاحِقاً سِوَى المُقَدِّماتِ ٨ وَ ٩ وَ ١٠؛ وهذا هو الأمْرُ الَّذي مَكَّنَهُ، من ناحِيَةٍ أُخْرَى، من استِبْعادِ أيِّ خَطَأٍ قد يَنْتُجُ من استِعْمالِ المُقَدِّمَةِ ٦.

مُبَرْهَنَة القَضِيَّة ٥ — أ

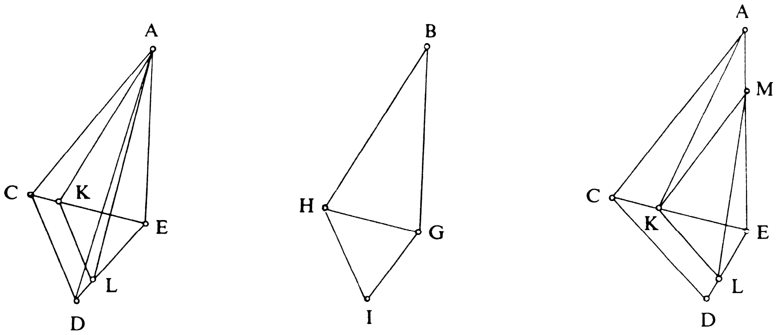
كُلُّ مُتَعَدِّدَيْ قَواعِدَ مُنْتَظِمَيْن، مُتَشابِهَي القَواعِدِ، مُتَساوِيَي المِساحَةِ الإجْمالِيَّةِ، فإنّ ذاك الَّذي له وُجوهٌ أكْثَرُ منهما، هو الأكْبَرُ حَجْماً.

لِتَكُنِ النُقْطَةُ A مَرْكَزَ الكُرَةِ المُحيطَةِ بِمُتَعَدِّدِ القَواعِدِ الأوَّل، وَ AE المَسافَةَ بَيْنَ المَرْكَزِ A ومُسْتَوي أحَدِ الوُجوهِ، وَ S_A المِساحَةَ الإجْمالِيَّةَ لِمُتَعَدِّدِ القَواعِدِ وَ V_A حَجْمَهُ، فيَكونُ لَدَيْنا إذاً $V_A = \frac{1}{3}S_A.AE$. ولْتَكُنِ النُقْطَةُ B مَرْكَزَ الكُرَةِ المُحيطَةِ بِمُتَعَدِّدِ القَواعِدِ الثاني، وَ BG المَسافَةَ بَيْنَ المَرْكَزِ B ومُسْتَوي أحَدِ الوُجوهِ، فيَكونُ لَدَيْنا كذَلِكَ

$$V_B = \frac{1}{3}S_B.BG$$

وَفْقَ الفَرَضِيَّةِ، لَدَيْنا $S_A = S_B$ وَ $n_A < n_B$ حَيْثُ يَكونُ n_A وَ n_B عدَدَيْ وُجوهِ مُتَعَدِّدَي القَواعِدِ.

يَؤولُ البُرْهانُ إلى مُقارَنَةِ AE وَ BG [انْظُرِ الشَكْلَ ١٥]. لنَفْتَرِضْ أنّ إحْدَى قَواعِدِ الهَرَمِ A مُجَزَّأَةٌ إلى مُثَلَّثاتٍ، وَلْيَكُنْ CED أحَدَها. لنَعْمَلْ نَفْسَ الشيءِ بِالنِسْبَةِ إلى الهَرَمِ B وَلْيَكُنْ GHI المُثَلَّثَ الحاصِلَ.



الشكل ١٥

$$AE \perp plan\ (ECD),\ BG \perp plan\ (HGI).$$

والمُثَلَّثانِ ECD وَ HGI مُتَشابِهانِ لأنّ قاعِدَتَيِ الهَرَمَيْنِ مُتَشابِهَتانِ.

ونَسْتَنْبِطُ من الفَرَضِيَّةِ $S_A = S_B$ وَ $n_A < n_B$، أنّ قاعِدَةً ما لِ A أكْبَرُ من قاعِدَةٍ ما لِ B، فإذاً المُثَلَّثُ ECD أكْبَرُ من المُثَلَّثِ HGI، ولَكِنَّهُما مُتَساوِيا الساقَيْنِ، فإذاً $EC > GH$ وَ $ED > GI$.

لِنَأخُذِ النُقْطَةَ K عَلَى EC بحَيْثُ يَكونُ $GH = EK$، والنُقْطَةَ L عَلَى ED بحَيْثُ يَكونُ $EL = GI$. فلو كانَ لَدَيْنا $AE = BG$، لَكانَ الهَرَمُ $AEKL$ مُساوِياً للهَرَمِ $BGHI$ ولَكانَ لَدَيْنا

$$angle\ sol.(A, EKL) = angle\ sol.(B, GHI).$$

ونَحْنُ نَعْلَمُ (اسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ٢ من القَضِيَّةِ ٤) أنّ

$$\frac{angle\ sol.(A,ECD)}{8D} = \frac{pyr.(AECD)}{V_A} = \frac{aire(ECD)}{S_A}$$

وَ

$$\frac{angle\ sol.(B,GHI)}{8D} = \frac{pyr.(BGHI)}{V_B} = \frac{aire(GHI)}{S_B}$$

وبما أنّ $S_A = S_B$ ، نَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\frac{aire(ECD)}{aire(GHI)} = \frac{angle\ sol.(A,\ ECD)}{angle\ sol.(B,\ GHI)}, \qquad (1)$$

ولَكانَ لَدَيْنا إذاً

$$\frac{aire(ECD)}{aire(GHI)} = \frac{angle\ sol.(A,\ ECD)}{angle\ sol.(A,\ EKL)},$$

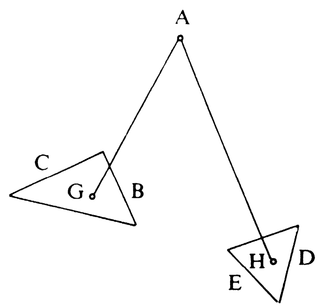
ولَكِنَّ هَذا مُحالٌ، استِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ٨. فلَدَيْنا إذاً

$$AE \neq BG$$

إذا كانَ $AE > BG$، فإنّه تُوجَدُ نُقْطَةٌ M عَلَى AE بحَيْثُ يَكونُ $EM = BG$ ويَكونُ لَدَيْنا

$$angle\ sol.(M,\ EKL) = angle\ sol.(B,\ GHI)$$

[انْظُرِ الشَكْلَ ١٦]



الشكل ١٦

ولَكِن لَكانَ لَدَيْنا إذاً

$$E\hat{M}K > E\hat{A}K,\ E\hat{M}L > E\hat{A}L,\ K\hat{M}L > K\hat{A}L,$$

(لَدَيْنا زَوايا رؤوسِ مُثَلَّثَيْنِ مُتَساوِيَي الساقَيْنِ وقاعِدَتُهما مُشْتَرَكَة)
ولِذَلِكَ فإنّ

$$E\hat{M}K + E\hat{M}L + K\hat{M}L > E\hat{A}K + E\hat{A}L + K\hat{A}L,$$

فإذاً

$$angle\ sol.(M, EKL) > angle\ sol.(A, EKL).$$

واسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ٨

$$\frac{aire(ECD)}{aire(EKL)} > \frac{angle\ sol.(A, ECD)}{angle\ sol.(M, EKL)};$$

وإذاً، لَكانَ لَدَيْنا هنا

$$\frac{aire(ECD)}{aire(EKL)} > \frac{angle\ sol.(A, ECD)}{angle\ sol.(M, EKL)},$$

أي أنّ:

$$\frac{aire(ECD)}{aire(GHI)} > \frac{angle\ sol.(A, ECD)}{angle\ sol.(B, GHI)},$$

وهَذا مُحالٌ وَفْقاً لِ *(1)*

ولِذَلِكَ يَكونُ لَدَيْنا بِالضَرورَةِ $BG > AE$، ولِذَلِكَ فإنّ $V_B > V_A$.

مُبَرْهَنَةُ القَضِيَّةِ ٥ ب. — كُلُّ مُتَعَدِّدَيْ قَواعِدَ مُنْتَظِمَيْنِ، وُجوهُهُما مُتَعَدّداتُ أضْلاعٍ مُنْتَظِمَةٌ مُتَشابِهَةٌ، ومُحاطيْنِ بكُرَةٍ واحِدَةٍ، فإنَّ ذاك الَّذي له وُجوهٌ أكْثَرُ منهُما هو الأعْظَمُ مِساحَةً وحَجْماً.

لِنَأخُذْ مُتَعَدِّدَيْ قَواعِدَ P_1 وَ P_2، مِساحَتاهُما S_1 وَ S_2 وحَجْماهُما V_1 وَ V_2 وعَدَدا وُجوهِهِما n_1 و n_2، عَلَى التَرْتيب. لنَفْرِضْ أنّ $n_1 > n_2$. وَلْنَجْعَلْ A مَرْكَزَ الكُرَةِ المُحيطَةِ بذَيْنِكَ المُجَسَّمَيْنِ، فيَكونُ لَدَيْنا ما مِقْدارُهُ n_1 من الأهْراماتِ المُتَساوِيَةِ المُنْتَظِمَةِ الَّتي رَأسُها في النُقْطَةِ A والمُرْتَبِطَةِ بوُجوهِ P_1، وكذَلِكَ يَكونُ لَدَيْنا n_2 من الأهْراماتِ المُتَساوِيَةِ المُنْتَظِمَةِ والمُرْتَبِطَةِ بوُجوهِ P_2.

لِيَكُنْ عَلَى التَرْتيب α_1، s_1، h_1 زاوِيَةَ الرَأسِ ومِساحَةَ القاعِدَةِ وارتِفاعَ الهَرَمِ المُنْتَظِمِ P'_1 المُرْتَبِطِ بِـ P_1، وَلْتَكُنْ α_2، s_2، h_2 عَناصِرَ الهَرَمِ المُنْتَظِمِ P'_2 المُرْتَبِطِ بِـ P_2 .

ويَكونُ لَدَيْنا $n_1\alpha_1 = n_2\ \alpha_2 = 8D$، وبما أنّ $n_1 > n_2$ فإنّه يَكونُ لَدَيْنا $\alpha_1 < \alpha_2$.

باسْتِطاعَتِنا أن نَفْتَرِضَ أنّ هَرَماً P'_1 وهَرَماً P'_2 لهُما نَفْسُ المِحْوَرِ AH، وبما أنّ $\alpha_1 < \alpha_2$ فإنّ الزاوِيَةَ المُجَسَّمَةَ لِ P'_1 ستَكونُ إذاً في داخِلِ الزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ لِ P'_2، وإنّ أضْلاعَ P'_1 سَوْفَ تَقْطَعُ الكُرَةَ فيما بَعْدَ مُسْتَوي قاعِدَةِ الهَرَمِ P'_2. مُسْتَويا قاعِدَتَي الهَرَمَيْنِ مُتَوازِيانِ وهما يَقْطَعانِ الكُرَةَ تِبْعاً لدائرتَيْنِ تُحيطانِ بالقاعِدَتَيْنِ، ونَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ $s_1 < s_2$ وأنّ $h_1 > h_2$. ولَدَيْنا من جِهَةٍ أُخْرَى

$$\frac{\alpha_1}{8D} = \frac{s_1}{S_1} = \frac{1}{n_1}$$

وَ

$$\frac{\alpha_2}{8D} = \frac{s_2}{S_2} = \frac{1}{n_2}$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{s_2}{S_2} \cdot \frac{S_1}{s_1} = \frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{S_1}{S_2}.$$

ولَكِنّنا أثْبَتْنا (انْظُرِ القَضِيَّةَ ٩) أنّ $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} > \frac{s_2}{s_1}$، فلَدَيْنا إذاً

$$\frac{s_2}{s_1} \cdot \frac{S_1}{S_2} > \frac{s_2}{s_1},$$

ولِذَلِكَ فإنّ

$$S_1 > S_2.$$

ولَمّا كانَ مَعْلوماً أنّ

$$V_1 = \frac{1}{3}\ S_1 h_1,\ V_2 = \frac{1}{3}\ S_2 h_2;$$

وبما أنّ

$$S_1 > S_2,\ h_1 > h_2,$$

فإنّ

$$V_1 > V_2.$$

وكما بَيَّنّا في التَمْهيدِ لهَذا الفَصْلِ، رَغْمَ الإثْباتِ العامّ لهَذِهِ المُبَرْهَنَةِ بطَريقَةِ ابنِ الهَيْثَمِ، فإنّها غَيْرُ قابلَةٍ للتَطْبيقِ سِوَى في ثَلاثِ حالاتٍ من المُجَسَّمَاتِ، وهِيَ: رُباعِيُّ القَواعِدِ وثُمانِيُّ القَواعِدِ وعِشْرينِيُّ القَواعِدِ.

لازِمَة — لِنَأخُذْ مُتَعَدِّدَيْ قَواعِدَ مُنْتَظِمَيْنِ P_1 وَ P_2 مُحاطَيْنِ بكُرَةٍ واحِدَةٍ، حَيْثُ يَكونُ عَدَدُ وُجوهِ P_i مُساوِيَاً لِ n_i $(i = 1, 2)$ وحَيْثُ تَكونُ الوُجوهُ مُتَعَدّداتِ أضْلاعٍ مُنْتَظِمَةً عَدَدُ أضْلاعِها مُساوٍ عَلَى التَرْتيبِ لِ n'_1 وَ n'_2.

فإذا كانَ $n_1 > n_2$ وَ $n'_1 > n'_2$ فإنّ $S_1 > S_2$ وَ $V_1 > V_2$.

واسْتِناداً إلى المُقَدِّمَةِ ١٠، تَكونُ المَسافَةُ من مَرْكَزِ الكُرَةِ إلى وُجوهِ P_1 أكْبَرَ من المَسافَةِ من المَرْكَزِ إلى وُجوهِ P_2.

ويَجْري الاسْتِدْلالُ، إذاً، كالسابِقِ، باسْتِخْدامِ النَتيجَةِ المُثْبَتَةِ في المُقَدِّمَةِ ١٠، والخاصَّةِ بالزاوِيَةِ المُجَسَّمَةِ الّتي رَأسُها في مَرْكَزِ الكُرَةِ.

الشرح. — بما أنّ مُتَعَدِّدَي القَواعِدِ المَقْصودَيْنِ مُنْتَظِمَانِ فاللاّزِمَةُ تَعْني أنّه إذا كانَ رُباعِيُّ القَواعِدِ والمُكَعَّبُ والمُجَسَّمُ ذو الإثْنَتَيْ عَشَرَةَ قاعِدَةً مُحاطَةً جَميعُها بكُرَةٍ واحِدَةٍ فإنّ مِساحَتَها وحَجْمَها يَتَزايَدانِ وَفْقاً لهَذا التَرْتيبِ المَذْكورِ.

ووَفْقاً لِمَلْحوظَةٍ وَرَدَت لَدَى أبسقلوس[٧] (Hypsiclès) فإنّ أبلونيوس (Apollonius) قد قارَنَ نِسْبَةَ مِساحَتَيْ ونِسْبَةَ حَجْمَيْ مُتَعَدِّدِ قَواعِدَ ذي اثْنَيْ عَشَرَ وَجْهاً ومُتَعَدِّدِ قَواعِدَ ذي عِشْرينَ وَجْهاً: وهاتانِ النِسْبَتانِ مُتَساوِيَتانِ، لأنّ المَسافاتِ

---

[٧] راجِعْ:
The Thirteen Books of Euclid's Elements, trad. et com. par Th. Heath, 3 vol., 2e éd. (Cambridge, 1926), vol. III, p. 512.

من المَرْكَزِ إلى الوُجوهِ في هذيْنِ المُجَسَّمَيْنِ مُتَساوِيَةٌ. يَسْتَخْدِمُ ابنُ الهَيْثَمِ أيضاً مُقارَنَةَ المَسافاتِ بَيْنَ المَرْكَزِ والوُجوهِ، ولَكِن في الحالاتِ الأُخْرَى، الَّتي يَتَناوَلُها بِشَكْلٍ عامّ.

٣-٢ النُصوصُ المَخْطوطِيَّةُ

قَوْلٌ للحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ
في أنّ الكُرَةَ أوْسَعُ الأشْكالِ المُجَسَّمَةِ الَّتي إحاطَتُها مُتساوِيَةٌ،
وأنّ الدائِرَةَ أوْسَعُ الأشْكالِ المُسَطَّحَةِ الَّتي إحاطَتُها مُتَساوِيَةٌ.

ط - ٤٦٢
ب - ٨٤ - ظ

بسم الله الرّحمن الرّحيم

قول للحسن بن الحسن بن الهيثم في أن الكرة أوسع الأشكال المجسمة التي إحاطاتها متساوية، وأن الدائرة أوسع الأشكال المسطّحة التي إحاطاتها متساوية

‹ فاتحة ›

إن أحد المعاني الهندسية، التي يُعتمد عليها في الاستدلال على كُرِّية السماء واستدارةِ جملة العالم، هو أن أوسع الأشكال المجسّمةِ المتساويةِ الإحاطة التي إحاطةُ كلّ واحدٍ منها متساويةُ الأجزاء، وأعظمَها مساحةً هو شكلُ الكرة، وأن أوسعَ الأشكال المسطحةِ المتساويةِ الإحاطةِ التي إحاطةُ كلّ واحدٍ منها متساويةُ الأجزاء، وأعظمَها مساحةً هو شكلُ الدائرة، وأن كلَّ ما كان أقربَ إلى الاستدارة من الأشكال المجسمة والمسطحة كان أعظم مساحةً ممّا بَعُدَ عنها. وأعني بالمتشابهِ الإحاطةِ الذي أجزاءُ محيطِه شبيهٌ بعضها ببعض. فمن الأشكال المجسمة: الكرةُ، والأشكالُ المستقيمةُ الخطوطِ، التي قواعدُها متساويةُ الأضلاع متشابهةٌ. ومن الأشكال المسطحة: الدائرةُ، والأشكالُ المستقيمةُ الخطوطِ المتساويةُ الأضلاع والزوايا. والأقربُ إلى الاستدارة من الأشكال المجسمة ذواتِ القواعد هي التي قواعدُها أكثرُ عددًا، وقواعدُها شبيهةٌ بقواعد المجسم الآخر. والأقرب إلى الاستدارة من الأشكال المسطحة هي التي أضلاعُها أكثرُ عددًا.

1 البسملة: يعقبها في [ب] «ربّ يسرّ وتمم بالخير والسعادة» – 2-5 قول... متساوية: رسالة في أوسعية الكرة [ب] – 8 متساوية: متشابه [ب] – 9 وأعظمها: فأعظمها [ب] – 10 متساوية: متسابه [ب، ط] – 11 المجسمة والمسطحة: المسطحة والمجسمة [ط]، كتب ناسخ [ط] فوق كل كلمة منها حرف الميم ليشير إلى ضرورة قلبها / عنها: منها [ب] – 12 شبيه: شبيهة [ب، ط] / فمن: وهي من [ب، ط].

وقد ذكر أصحابُ التعاليم هذا المعنى واستعملوه، إلاّ أنه لم يقع إلينا برهانٌ لهم على هذا المعنى ولا دليل مقنع. فدعتْنا هذه الحالُ إلى إنعام النظر في ذلك، فعنَّ لنا برهانٌ / كليٌّ مستوفٍ لجميع معانيه. فأنشأنا فيه هذا القول. ط - ٦٣و

⟨الدائرة أوسع الأشكال المسطحة⟩

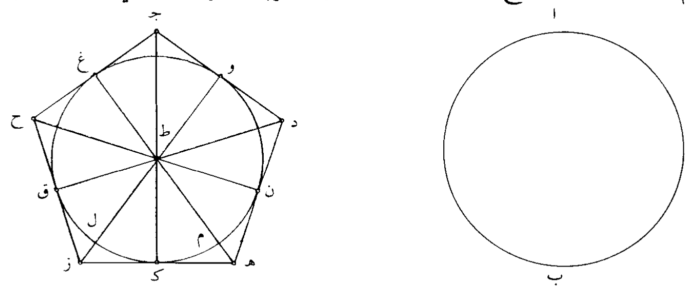
⟨آ⟩ كلّ دائرةٍ محيطُها مساوٍ لمحيطِ شكلٍ مستقيم الخطوط متساوي الأضلاع والزوايا، فإن مساحتها أعظمُ من مساحته.

مثالُ ذلك: دائرة ا ب محيطها مساوٍ لمحيط شكل جـ د هـ ز ح / المستقيم الخطوط المتساوي الأضلاع والزوايا. ب - ٨٥ - و

فأقول: إن مساحة دائرة ا ب أعظم من مساحة شكل جـ د هـ ز ح.

برهان ذلك: أن شكل جـ د هـ ز ح، من أجل أنه متساوي الأضلاع والزوايا فإنه يقع في داخله دائرة تُماسّ جميع أضلاعه؛ لأنه إذا قُسمت كل واحدةٍ من زواياه بنصفين، وأُخرجت الخطوط التي تقسمها، فإنها تلتقي على نقطة واحدة في داخل الشكل، وتكون المثلثات التي تحدث – التي رؤوسها تلك النقطةُ – جميعُها متساويةً متشابهةً. فتكون الأعمدةُ التي تخرج من تلك النقطة إلى جميع أضلاع الشكل متساويةً. فإذا جُعلت تلك النقطةُ مركزًا وأُدير ببُعد أحدِ الأعمدة دائرةٌ، فإنها تماسُّ جميع أضلاع الشكل.

فلتكن الدائرة التي تماس أضلاع الشكل دائرة ك ن و غ ق، وليكن مركزها ط، ونصل خطّي ط م هـ ط ل ز، ونُخرج عمود ط ك، فيكون ضرب عمود ط ك في نصف هـ ز مساويًا



5 مساوٍ: مساوي، كثيرًا ما يخطىء ناسخ [ب] في كتابة الأسماء المقصورة وسنثبت الصحيح دون الإشارة إلى ذلك – 7 ذلك: أثبتها ناسخ [ط] في الهامش – 16 ك ن و غ ق: ك د ق ع ف [ط].

لمساحة مثلث ط ه ز؛ وضربُ ط ك – وهو نصف قطر الدائرة – في نصف قوس م ل مساوٍ لمساحة قطاع ط م ك ل ؛ ومثلث ط ه ز أعظم من قطاع ط م ك ل. فخط ه ز أعظم من قوس م ل./ وكذلك نبيّن أن كل ضلع من أضلاع الشكل أعظم من القوس التي يوترها الخطّان الخارجان من نقطة ط إلى طرفي ذلك الضلع. فمحيط شكل ج د ه ز ح أعظم من محيط دائرة ك ن وغ ق، ومحيط شكل ج د ه ز ح مساوٍ لمحيط دائرة ا ب. فمحيط دائرة ا ب أعظم من محيط دائرة ك ن وغ ق، فنصف قطر دائرة / ا ب أعظم من خط ك ط. وضرب نصف قطر دائرة ا ب في نصف محيطها مساوٍ لمساحتها، وضرب خط ط ك في نصف محيط شكل ج د ه ز ح المساوي لمحيط دائرة ا ب مساوٍ لمساحة الشكل. فدائرة ا ب أعظم من شكل ج د ه ز ح ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ط - ٤٦٤ ب - ٨٥ - ظ

⟨ب⟩ كل شكلين مستقيمي الخطوط متساويي الإحاطة، وكل واحد منها متساوي الأضلاع والزوايا، وتكون أضلاع أحدهما أكثر عددًا من أضلاع الآخر، فإن مساحته أعظم من مساحة الآخر.

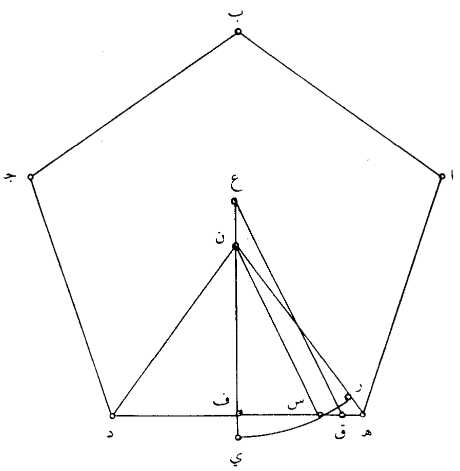
مثال ذلك: شكلا ا ب ج د ه زح ط ك ل م كل واحد منها متساوي الأضلاع والزوايا، وأضلاع شكل زح ط ك ل م أكثر عددًا من أضلاع شكل ا ب ج د ه، ومحيطاهما متساويان.

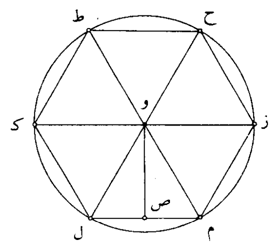
أقول: إن شكل زح ط ك ل م أعظم مساحةً من شكل ا ب ج د ه.

فليكن مركز الدائرة المحيطة بشكل ا ب ج د ه نقطة ن، ومركز الدائرة المحيطة بشكل زح ط ك ل م نقطة و، ونخرج خطوط ن ا ن ب ن ج ن د ن ه وخطوط و ز وح وط و ك و ل و م، ونخرج عمود ن ف ونخرج عمود و ص، فإذا أخرجنا من نقطة ن أعمدة على جميع أضلاع شكل ا ب ج د ه، حدثت مثلثات متساويات القواعد، كلٌّ واحد منها / مساوٍ لمثلث ه ن د، ومساويةٌ زاويته التي عند المركز لزاوية ه ن د. وكذلك إذا أخرجنا من نقطة و أعمدة ط - ٤٦٥

1 لمساحة: لمسافة [ب]، كتبها ناسخ [ط] «لمسافة» ثم صححها عليها / وهو: ورى هو [ب] هكذا نقلها ناسخ [ط] ولكنه ضرب على «رى» بالقلم وأضاف فوق السطر «د» – 5 ك ن وغ ق: ك ن ق ع ف [ب] ك رف ع ق [ط] وكتب ناسخ [ط] النون زايًا ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / ا ب (الثانية): ناقصة [ط] – 6 ك ن وغ ق: ك ن ق ع ف [ب] ك رف ع ق [ط] / ك ط: ك [ب، ط] – 7-6 وضرب... لمساحتها: ناقصة [ط] – 8 أعظم من: مكررة [ط] – 11 مساحته: الأفصح أن يقول «مساحة الأول»، لأنه ابتدأ بمثنى – 13-14 زح ط ك ل م ... وأضلاع شكل: ناقصة [ط] – 14-16 ومحيطاهما ... ا ب ج د ه: ناقصة [ط] – 18 و: كتبها «ف» ثم صححها فوقها [ط]، يخلط كل من ناسخ [ب] و[ط] بين الفاء والقاف والواو، وسوف نصحح دون إثبات ذلك في الهامش – 21 ه ن د: ن ف [ب] ه د ف [ط] / ومساوية: ومساوى [ب] / ه ن د: ن ف [ب] د ف [ط].

على أضلاع شكل زح ط ك ل م ، حدثت مثلثاتٌ متساوياتٌ، متساوياتُ القواعدِ، كلُّ واحد منها مساوٍ لمثلث م وص ، مساويةٌ زاويتُه التي عند المركز لزاوية م وص ، وتكون عدّة قواعد المثلثات – التي في كل واحد من الشكلين – بعدّة الزوايا التي عند مركزه. فيكون نسبة زاوية هـ ن ف إلى جميع الزوايا التي عند مركز نَ كنسبة خط هـ ف إلى جميع محيط شكل ا ب جـ د هـ ، لأن الزوايا متساوية وقواعدَ المثلثات متساويةٌ وعدَّة الزوايا كعدّة القواعد، وجميعَ / القواعد هو محيط الشكل. ب - ٨٦ - و





وكذلك تكون نسبة زاوية م وص إلى جميع الزوايا التي عند مركز وَ كنسبة م ص إلى جميع محيط شكل زح ط ك ل م . وبالعكس، تكون نسبة جميع الزوايا التي عند مركز وَ إلى زاوية م وص كنسبة جميع المحيط إلى ضلع م ص . وجميع الزوايا التي عند نقطة نَ هي مساوية لجميع الزوايا التي عند نقطة وَ، لأن الجميع هي أربع زوايا قائمة. ومحيط ا ب جـ د هـ مساوٍ لمحيط زح ط ك ل م ، فنسبة زاوية ف ن هـ إلى جميع الزوايا التي عند نَ كنسبة خط هـ ف إلى جميع محيط شكل / زح ط ك ل م ، ونسبة جميع الزوايا التي عند وَ إلى زاوية م وص كنسبة محيط شكل زح ط ك ل م إلى خط م ص . ففي نسبة المساواة: تكون نسبة زاوية هـ ن ف إلى زاوية م وص كنسبة خط هـ ف إلى خط م ص . ولأن شكل زح ط ك ل م أكثر قواعد من شكل ا ب جـ د هـ ، تكون كل واحدة من الزوايا التي عند وَ، التي هي رأس المثلثات، أصغرَ ط - ٦٦؛

4 نَ: لَ [ط] – 9 نَ: دَ [ط] – 11 ف ن هـ : ن ف [ب] د ف ن [ط] / نَ: فَ [ب، ط] – 13 هـ ن ف: أثبت ناسخ [ط] في الهامش «ه د ف» – 14 م وص: م وس [ب، ط] / قواعد: قواعدا [ط] – 15 رأس: روس [ط].

من كل واحدة من الزوايا التي عند ن ، لأنه إذا أحاط بكل واحد من هذين الشكلين دائرة، كان الضلع الواحد من شكل ز ح ط ك ل م يفصل من دائرته جزءًا أصغر نسبةً إلى دائرته من نسبة الجزء الذي يقطعه ضلعُ شكل ا ب ج د هـ إلى دائرته. فزاوية م و ص أصغر من زاوية هـ ن ف. فيُفصل من زاوية هـ ن ف / ب – ٨٦ – ظ زاوية ف ن س مساويةً لزاوية م و ص. فتكون نسبة زاوية هـ ن ف إلى زاوية ف ن س كنسبة خط هـ ف إلى خط م ص. ونجعل ن مركزًا، وندير ببعد خط ن س قوس س ي ؛ فتكون نسبة زاوية هـ ن ف إلى زاوية س ن ف كنسبة قطاع ر ن ي إلى قطاع س ن ي. وقد كانت نسبة زاوية هـ ن ف إلى زاوية س ن ف كنسبة خط هـ ف إلى خط م ص ، فنسبة قطاع ر ن ي إلى قطاع س ن ي كنسبة خط هـ ف إلى خط م ص. ونسبة خط هـ ف إلى ف س أعظم من نسبة قطاع ر ن ي إلى قطاع س ن ي ، لأن هذه النسبة هي نسبة مثلث هـ ن ف إلى مثلث س ن ف التي هي أعظم من نسبة / ط – ٤٦٧ قطاع ر ن ي إلى قطاع س ن ي ؛ فنسبة خط هـ ف إلى خط ف س أعظم من نسبة خط هـ ف إلى خط م ص ، فخط س ف أصغر من خط م ص. فنفصل ف ق مثل م ص ، ونخرج ق ع موازيًا لخط ن س. فتكون زاوية ف ع ق مساويةً لزاوية م و ص ، لأن كل زاوية منها مساوية لزاوية س ن ف. والزاويتان اللتان عند نقطتي ص ف قائمتان، فالزاوية الباقية من مثلث ع ق ف مساوية لزاوية و م ص وضلع ق ف مساوٍ لضلع م ص ، فمثلث ع ق ف مساوٍ لمثلث و م ص ، فخط ع ف مساوٍ لعمود و ص. و ع ف أعظم من عمود ن ف ، فعمود و ص أعظم من عمود ن ف ، وضرب عمود و ص في نصف محيط شكل ز ح ط ك ل م هو مساحة شكل ز ح ط ك ل م ، وضرب عمود ن ف في نصف محيط شكل ا ب ج د هـ هو مساحة شكل ا ب ج د هـ. ومحيطا الشكلين متساويان، وعمود و ص أعظم من عمود ن ف ، فمساحة شكل ز ح ط ك ل م أعظم من مساحة ا ب ج د هـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وقد يتبيَّنُ هذا المعنى على جهة أخرى، وذلك أنه إذا انتهى البرهانُ إلى أن خط س ف أصغر من خط م ص ، يبيّنُ أن خط ن ف أصغر من خط و ص ، وذلك أن زاوية ف ن س مساوية / ب – ٨٧ – و

1 ن : د [ط] وكثيرًا ما يخلط ناسخ [ط] بين الدال والنون وسنصححها دون الإشارة إلى ذلك مرة أخرى – 2 دائرته (الأولى) : دائرة ته [ط]، كتب ناسخ [ب] «دائرة ت ه» ثم أثبت «ته» في الهامش – 3 هـ ن ف : هـ ز ف [ب] – 4 زاوية (الثانية) : ناقصة [ب] / هـ ن ف : م ن ف [ط] – 5 ونجعل : مكررة [ط] – 6 س ي : ن س ى [ب] ر س د [ط]، وأيضًا يخلط ناسخ [ب] بين الزاي والنون وسنصححها دون الإشارة إلى ذلك – 9 ف س : ح س [ب] / هي : بين [ب، ط] – 10 قطاع (الثانية) : قطع [ب] – 13 زاوية : واحدة [ب] – 17-18 ز ح ط ك ل م (الثانية) ... هو مساحة شكل : ناقصة [ط] – 18 ومحيطا : ومحيط [ب، ط] – 22 يبين : يتبين [ب، ط].

لزاوية ص و م ، وكل واحدة من الزاويتين اللتين عند نقطتي ف ص قائمة، فالزاويتان الباقيتان متساويتان، فمثلث م و ص شبيه بمثلث س ن ف ، وخط م ص أعظم من خط س ف ، فعمود و ص أعظم من عمود ن ف. ومحيط شكل ز ح ط ك ل م مساوٍ لمحيط شكل ا ب ج د هـ / ظ – ٤٦٨ فمساحة شكل ز ح ط ك ل م أعظم من مساحة شكل ا ب ج د هـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فقد تبيّن مما بيّناه أن الدائرة أوسع الأشكال المتشابهة الإحاطة، وأن ما قرب من الأشكال المستقيمة الخطوط من الاستدارة أعظمُ مما بَعُد.

〈جـ〉 ونقول أيضًا: إن كل شكلين، كل واحد منها متساوي الأضلاع والزوايا، تحيط بها دائرة واحدة، وأضلاعُ أحدهما أكثر عددًا من أضلاع الآخر، فإن مساحة الشكل الذي هو أكثر أضلاعًا أعظم من مساحة الشكل الآخر، ومحيطه أعظم من محيطه.

ولنقدّم لذلك مقدمة، وهي أن كل قوسين مختلفتين يكون مجموعها ليس بأعظم من ثلثي دائرة، فإن نسبة القوس العظمى إلى القوس الصغرى أعظم من نسبة وتر القوس العظمى إلى وتر القوس الصغرى.

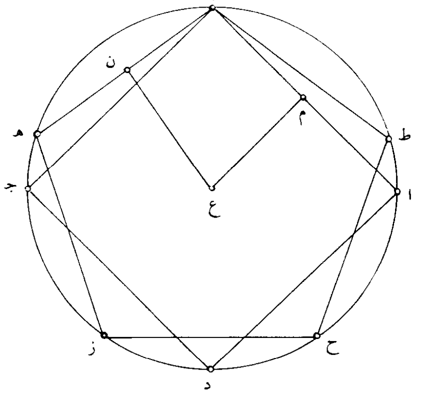
فلتكن قوسان مختلفتان، عليها ا ب ب ج ومجموعها، وهو قوس ا ب ج ، ليس بأعظم من ثلثي الدائرة، ووتراهما ا ب ب ج .

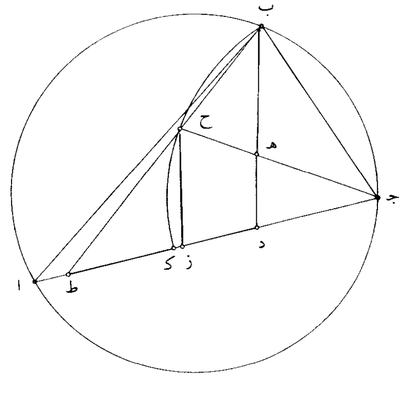
فأقول: إن نسبة قوس ا ب إلى قوس ب ج أعظمُ من نسبة وتر ا ب إلى وتر ب ج .

برهان ذلك: أنا نصل ا ج ، ونجعل زاوية ج ب د مثل زاوية ب ا ج التي هي أصغر من زاوية ا ب ج ، من أجل أن قوس ب ج أصغر من قوس ج ا ، لأن قوس ب ج أصغر من ثلث الدائرة، وقوس ج ا ليست بأصغر من ثلث الدائرة؛ فتكون زاوية ب د ج مثل زاوية ا ب ج ، فيكون مثلثا ا ب ج ب د ج متشابهين، فتكون نسبة ا ج إلى ج ب كنسبة ب ج إلى ج د. وا ج أعظم من ج ب ، فخط ب ج أعظم من خط ج د. فنجعل / ج مركزًا، وندير ببُعد ج ب قوسًا من دائرة، فهي تقطع خط ا ج فيما بين نقطتي ا د، فلتقطعه على نقطة ك. ونجعل زاوية د ج هـ مثل زاوية ج ب هـ / التي هي مثل زاوية ب ا ج ، التي هي أصغر من ط – ٤٦٩ ب – ٨٧ – ظ

1 فالزاويتان: فالزوايا [ب] وصححها ناسخ [ط] في الهامش – 4 فمساحة: ومساحة، وأضاف «مساحة» فوق السطر [ط] ناقصة [ب] – 8 عددًا: عداد [ط] – 10 مختلفتين: مختلفين [ب، ط] – 13 مختلفتان: مختلفان [ب] / ليس: ليست [ب، ط]، والضمير في «ليس» يعود على المبتدأ «مجموعها» – 17 ثلث: ثلثي [ب، ط] – 18 ثلث: ثلثي [ب، ط] – 22 ج ب هـ: ج ب د [ب].

زاوية ب جـ ا، فتكون نقطة هـ في داخل قوس ب ک. فنخرج جـ هـ إلى أن يلقى القوس، فليلقه على نقطة ح، فتكون نسبة ح جـ إلى جـ هـ كنسبة ب جـ إلى جـ هـ التي هي كنسبة ب د إلى د جـ وكنسبة جـ د إلى د هـ لأن مثلثي ب جـ د د جـ هـ متشابهان. ونخرج ح ز موازيًا لخط ب د، فتكون نسبة ‹جـ ز إلى جـ د مساوية لنسبة› ح ز إلى هـ د ‹التي هي› كنسبة ح جـ إلى جـ هـ التي هي كنسبة ب جـ إلى جـ هـ التي هي نسبة جـ د إلى جـ هـ. فخط ح ز مثل خط د جـ، وب د أعظم من د جـ لأن نسبته إليه كنسبة ا ب إلى ب جـ. فخط ب د أعظم من خط ح ز، وهما متوازيان. ونصل ب ح ونخرجه على استقامة، فهو يلقى خط ا جـ، فليلقه على نقطة ط، فتكون نسبة ب ط إلى ط ح كنسبة ب د إلى ح ز التي هي نسبة ب د إلى د جـ التي هي نسبة ا ب إلى ب جـ. ونسبة قطاع جـ ب ح إلى قطاع جـ ح ک أعظم من نسبة مثلث جـ ب ح إلى مثلث جـ ح ط. فنسبة قوس ب ح إلى قوس ح ک أعظم من نسبة خط ب ح إلى خط ح ط، فنسبة زاوية ب جـ ح إلى زاوية ح جـ ک أعظم من نسبة خط ب ح إلى خط ح ط. وبالتركيب تكون نسبة زاوية ب جـ ا إلى زاوية ا جـ ح – المساوية لزاوية ب ا جـ – أعظمَ من نسبة خط ب ط إلى خط ط ح التي هي نسبة ب د إلى ح ب التي هي نسبة ب د إلى د جـ التي هي نسبة خط / ا ب إلى خط ب جـ. ونسبة زاوية ب جـ ا إلى زاوية ب ا جـ هي ط – ٤٧٠
نسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ، فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب جـ أعظم / من نسبة وتر ا ب ب – ٨٨ – و
إلى وتر ب جـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.





1 داخل: حاصل [ب، ط] – 3 موازيًا: مواز [ب] – 4 ب د: ب جـ [ط] / ح ز إلى هـ د: ح ب إلى هـ ب إلى هـ د [ب، ط] / كنسبة: نسبة [ب] – 5 جـ هـ (الثانية): د هـ [ب، ط] / ح ز: ح د [ط] – 9 جـ ب ح: جـ ب جـ [ب، ط] / مثلث: صححها ناسخ [ب] في الهامش – 12 ح ط: ح ک [ب].

وإذْ قد تبيّن ذلك، فلتكن دائرة عليها ا ب جـ وفيها شكلان متساويا الأضلاع والزوايا، وأحدهما أكثر أضلاعًا من الآخر، وليكونا ا ب جـ د ب هـ ز ح ط.

فأقول: إن مساحة شكل ب هـ ز ح ط أعظم من مساحة شكل ا ب جـ د، ومحيطه أعظم من محيطه.

برهان ذلك: أنه ليس يقع في الدائرة شكل متساوي الأضلاع أقل أضلاعًا من المثلث، وضلعه يُوتر ثلث الدائرة، وليس يقع فيها بعدَ المثلث من الأشكال المتساوية الأضلاع أقلُّ أضلاعًا من المربع، وضلعه يُوتر ربع الدائرة. فليس يقع في الدائرة الواحدة شكلان متساويا الأضلاع يكون ضلعان منها يُوتران من الدائرة أكثر من ثلثها وربعها. فكل شكلين متساوييْ الأضلاع يقعان في دائرة واحدة، فإن ضلعيها يوتران من الدائرة قوسًا أصغر من ثلثي الدائرة. فقوسا ا ب ب هـ أصغر من ثلثي الدائرة، وقوس ا ب أعظم من قوس ب هـ، فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب هـ أعظم من نسبة وتر ا ب إلى وتر ب هـ، فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب ط أعظم من نسبة وتر ا ب / إلى وتر ب ط. وقد بيّن بطلميوس هذه النسبة في المقالة الأولى من المجسطي ط - ٤٧١ بطريق غير هذا الطريق، وإنما استأنفنا تَبْيين هذه النسبة ليكون المعنى الذي له قدّمنا هذه المقدمة بيّنًا قبل قراءة كتاب المجسطي. ونسبة قوس ا ب إلى قوس ب ط مؤلفة من نسبة قوس ا ب إلى محيط الدائرة، ومن نسبة محيط الدائرة إلى قوس ب ط. ونسبة قوس ا ب إلى محيط الدائرة كنسبة ضلع ا ب إلى محيط شكل ا ب جـ د، لأن القِسيّ والأضلاع متساويتا العدد ونسبة محيط الدائرة إلى قوس ب ط كنسبة محيط شكل ب هـ ز ح ط إلى ضلع ب ط. فنسبة قوس ا ب إلى قوس ب ط مؤلفة من نسبة ضلع ا ب إلى محيط شكل ا ب جـ د، ومن نسبة محيط شكل ب هـ ز ح ط إلى ضلع ب ط. / ونسبة قوس ا ب إلى قوس ب ط أعظم من نسبة ب - ٨٨ - ظ ضلع ا ب إلى ضلع ب ط، فالنسبة المؤلفة من نسبة ا ب إلى محيط شكل ا ب جـ د، ومن نسبة محيط شكل ب هـ ز ح ط إلى ضلع ب ط أعظم من نسبة ا ب إلى ب ط. ونسبة ا ب إلى ب ط مؤلفة من نسبة ا ب إلى محيط ا ب جـ د، ومن نسبة محيط ا ب جـ د إلى ب ط، فالنسبة المؤلفة من نسبة ا ب إلى محيط ا ب جـ د، ومن نسبة محيط ب هـ ز ح ط إلى ب ط أعظم من النسبة المؤلفة من نسبة ا ب إلى محيط ا ب جـ د، ومن نسبة محيط ا ب جـ د إلى ب ط.

3 ومحيطه: ولمحيطه [ب] – 9 يقعان: أثبتها ناسخ [ب] في الهامش مع بيان موضعها – 10 ب هـ: جـ هـ [ط] / ا ب (الثانية): ا ب هـ [ب، ط] – 13 له: أثبتها ناسخ [ب] في الهامش مع بيان موضعها، وكتبها ناسخ [ط] فوق السطر – 16 متساويتا: متساويتى [ب].

فنسقط نسبة ا ب إلى محيط ا ب جـ د المشتركة، فتبقى نسبة محيط ب هـ ز ح ط إلى ب ط أعظمَ من نسبة محيط ا ب جـ د إلى ب ط. فمحيط ب هـ ز ح ط أعظمُ من محيط ا ب جـ د.

والعمود الذي يخرج من مركز الدائرة */ إلى خط ب ط أعظم من العمود الذي يخرج من ط - ٤٧٢ المركز إلى خط ا ب، لأن ب ط أصغر من ا ب. وضرْب العمود الذي يخرج من المركز إلى ب ط في نصف محيط شكل ب هـ ز ح ط، هو مساحة هذا الشكل، وضرب العمود الذي يخرج من المركز إلى خط ا ب في نصف محيط شكل ا ب جـ د هو مساحة هذا الشكل. فمساحة شكل ب هـ ز ح ط أعظم من مساحة شكل ا ب جـ د، ومحيط شكل ب هـ ز ح ط أعظم / من ط - ٤٧٣ محيط شكل ا ب جـ د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

‹الكرة أوسع الأشكال المجسمة›

‹دَ› وأقول أيضًا: إن كل كرة يكون سطحها المحيطُ بها مساويًا لسطح شكل مجسم متساوي القواعد، وقواعده متساوية الأضلاع / ومتشابهة، فإن مساحة الكرة أعظم من مساحة ب - ٨٩ - و المجسم المتساوي القواعد.

ولنقدم لذلك مقدمات، وهي أنه قد بيّن أرشميدس الفاضل في كتابه في الكرة والأسطوانة أن الكرة هي ثلثا الأسطوانة التي قاعدتها أعظم دائرةٍ تقع في الكرة وارتفاعها قطر الكرة، وأن سطح الكرة هو أربعة أضعاف أعظم دائرةٍ تقع في الكرة، وأن مساحة الأسطوانة هو ضرب ارتفاعها في قاعدتها. فيلزم من ذلك أن يكون ضرب قطر الكرة في ثلثي أعظم دائرةٍ تقع في الكرة هو مساحة الكرة، وأن يكون ضرب نصف قطر الكرة في مثل وثلث أعظم دائرة تقع فيها، هو مساحتها؛ ومثل وثلث أعظمِ دائرةٍ تقع في الكرة هو ثلث جميع سطح الكرة، لأن سطح الكرة هو أربعة أضعاف أعظم دائرة تقع فيها. فيجب من جميع ذلك أن تكون مساحة الكرة هو ضرب نصف قطرها في ثلث سطحها.

فكل مجسم يقع في الكرة، وتكون قواعده متساوية، ومتساوية الأضلاع، وتخرج من مركز

... ما بين النجمتين من الصفحة السابقة إلى هنا مكرر[ط] – 5 هو: وهو[ب، ط] – 11 القواعد: ناقصة [ط] – 15 وأن: فان [ط] – 17 مثل: مثلث [ب] – 21 مجسم: جسم، كما يسميه فيما بعد.

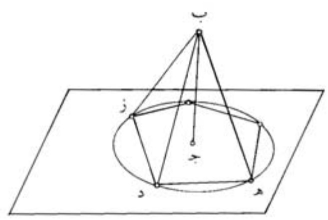
الكرة سطوح إلى أضلاع إحدى قواعده، فإنها تفصل من الكرة قطاعًا تكون نسبته إلى جميع الكرة كنسبة السطح الكري، الذي هو قاعدة القطاع، إلى جميع سطح الكرة، وكنسبة الزاوية المجسّمة – التي عند مركز الكرة، التي تحيط بها سطوح المخروط المستقيم / الخطوطِ، الذي ط – ٤٧٤ قاعدتُه إحدى قواعد المجسم – إلى ثمان زوايا قائمة مجسمة، التي هي جميع الزوايا المجسمة التي عند مركز الكرة، وعند كل نقطة في وسط كل مجسم، لأن الكرة وسطح الكرة تنقسم بتلك السطوح بأقسام متساوية.

وأما الزوايا، فلأن الكرة إذا خرج فيها دائرة عظيمة وأُخرج في الدائرة قطران يتقاطعان على زوايا قائمة، وأُخرج من مركزها عمود على سطحها وأُنْفِذَ في الجهتين إلى سطح الكرة، وأُخرج من / طرفيه خطوط ⟨قائمة⟩ إلى أطراف القطرين، حدث في الكرة ثمانية مخروطات متساويات، ب – ٨٩ – ظ رؤوسها عند مركز الكرة، وزواياها التي عند رؤوسها متساوية، وكل واحدة من هذه الزوايا تسمى «زاوية قائمة مجسمة»، ومجموع هذه الزوايا هو مجموع زوايا كل مجسم يقع في الكرة، وتكون الكرة محيطةً به.

فيلزم من ذلك أن يكون ضرب نصف قطر الكرة في ثلث السطح الكري، الذي هو قاعدة القطاع الكري، هو مساحة القطاع الكري.

وإذْ قد تبيّن ذلك، فلتكن كرة عليها آ وليكن مجسم بَ متساوي القواعد، وقواعده متساوية الأضلاع، بأي شكل كان المجسم، وأيّ شكل كانت قواعده. وليكن سطح هذا المجسم المحيط به مساويًا لسطح كرة آ.

فأقول: إن مساحة الكرة أعظم من مساحة المجسم.



1 إحدى: احد [ب، ط] – 3 المستقيم: المستقيمة [ب، ط] – 4 إحدى: احد [ب] – 7-8 في الدائرة... وأخرج: ناقصة [ط] – 9 خطوط: خطوطا [ب، ط] / ثمانية: ثمان [ب، ط] – 16 وأيّ: وهي [ب].

برهان ذلك: أن كل مجسم متساوي القواعد، وقواعده متساوية الأضلاع والزوايا، فإنه يحيط به كرة. فليكن مركز الكرة التي تحيط بمجسم ب نقطة ب، ولتكن إحدى قواعد مجسم ب سطح د ز هـ. ونصل خطوط ب ز ب هـ / ب د فتكون متساوية. ونخرج من نقطة ب عمودًا على ط - ٤٧٥ سطح د ز هـ، وليكن ب ج؛ فتكون نقطة ج في وسط شكل د ز هـ، لأن نقطة ج هي مركز الدائرة المحيطة بشكل د ز هـ التي تقع في الكرة المحيطة بمجسم ب. ونتوهم كرةً نصفُ قطرها ب ج، فهذه الكرةُ تُماسّ جميع قواعد شكل ب، لأن الأعمدة التي تخرج من نقطة ب إلى جميع قواعد الشكل تكون متساوية، لأن شكل ب تُحيط به كرة، فقواعده المتساوية تحيط بها دوائر متساوية تقطع ‹سطوحها› الكرة. فالخطوط التي تخرج من مركز الكرة إلى مراكز تلك الدوائر متساوية، وهي أعمدة على سطوحها، ومخروط ب ج هـ ز تفصل سطوحُه من هذه الكرة جزءًا، هو في داخل هذا المخروط؛ فمخروط ب ج هـ ز / أعظم من القطاع الكري الذي في ب - ٩٠ - و داخله، الذي هو جزء من الكرة، كجزء المخروط من جميع الشكل المجسم الكثير القواعد. وضرب ب ج في ثلث سطح د هـ ز هو مساحةُ المخروط، وضرب ب ج في ثلث السطح الكري، الذي هو قاعدة القطاع الكري، الذي في داخل المخروط المستقيم الخطوط، هو مساحة القطاع، لأن نسبة سطح القطاع إلى جميع سطح الكرة كنسبة القطاع إلى جميع الكرة. فنسبة ضرب نصف قطر الكرة في ثلث قاعدة القطاع الكري إلى ضرب نصف قطر الكرة في ثلث جميع سطح الكرة كنسبة القطاع الكري إلى جميع الكرة. وضرب نصف قطر الكرة في ثلث جميع سطح الكرة هو مساحة الكرة. فضرب نصف قطر الكرة في ثلث / قاعدة القطاع الكري هو مساحة القطاع ط - ٤٧٦ الكري. فضرب خط ب ج في ثلث سطح د هـ ز أعظم من ضرب ب ج في ثلث قاعدة القطاع الكري. فسطح د هـ ز أعظم من السطح الكري الذي هو قاعدة القطاع. وكذلك كل قاعدة من قواعد الشكل المجسم هي أعظم من السطح الكري الذي ‹تفصله› سطوح المخروط التي تخرج من مركز الكرة إلى أضلاع تلك القاعدة.

فتبيّن من ذلك أن السطح المحيط بجميع مجسم ب أعظم من سطح الكرة التي في داخل هذا المجسم، التي نصف قطرها خطّ ب ج. والسطح المحيط بمجسم ب هو مساوٍ لسطح كرة آ، فسطح كرة آ أعظم من سطح الكرة التي نصفُ قطرها خطُّ ب ج، فنصف قطر كرة آ أعظم

2 إحدى: احد [ب، ط] – 3 ب ز: ب د [ب] ب ج [ط] – 4 د ز هـ (الثانية): د ج [ط] / ج: ممحوة [ط] – 9 ب ج هـ ز: ب د هـ ز [ط] – 10 في داخل: داخل في [ط] / ب ج هـ ز: د هـ ز [ب، ط] – 24 الكرة: كرة [ب]، وكتبها ناسخ [ط] «كرة» ثم ضرب عليها بالقلم.

من خط ب ج . وضرب نصف قطر كرة آ في ثلث سطح كرة ⟨آ⟩ هو مساحة كرة آ، وضرب خط ب ج في ثلث السطح المحيط بمجسم ب هو مساحة مجسم ب. / وثلث سطح كرة آ هو مساوٍ لثلث سطح المحيط بمجسم ب، ونصف قطر كرة آ أعظم من خط ب ج . فمساحة كرة آ أعظم من مساحة مجسم ب ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ب - ٩٠ - ظ

⟨**شكل هـ**⟩ ونقول أيضًا: إن كل مجسمين – يكون كل واحد منها متساوي القواعد وقواعده متساوية الأضلاع ومتشابهة، وقواعد أحدهما شبيهة بقواعد الآخر، وقواعد أحدهما أكثر عددًا من قواعد الآخر – وذلك يكون في المجسمات التي قواعدها مثلثات متساويات الأضلاع – إذا كان السطح المحيط بأحدهما مساويًا للسطح المحيط / بالآخر، أعني أن يكون مجموع قواعد أحدهما مساويًا لمجموع قواعد الآخر، فإن مساحة المجسم – الذي قواعده أكثر عددًا – أعظم من مساحة المجسم الآخر. ط - ٤٧٧

ونقول أيضـًا: إنّ كل مجسمين – يكون كل واحد منها متساوي القواعد وقواعده متساوية الأضلاع، ومتشابهة، وقواعد أحدهما شبيهة بقواعد الآخر، وقواعد أحدهما أكثر عددًا من قواعد الآخر – إذا أحاط بها كرة واحدة، فإن السطح المحيط بالمجسم الذي قواعده أكثر عددًا، أعظم من السطح المحيط بالمجسم الآخر، ومساحة المجسم – الذي قواعدُه أكثرُ عددًا – أعظم من مساحة المجسم الآخر.

ولنقدم لذلك مقدمات، وهي:

⟨مقدمة⟩ كلُّ مخروطين مستقيمي الخطوط يقعان في كرة ويكون رأساهما مركز الكرة، فإن نسبة زاوية المخروط إلى زاوية المخروط كنسبة القطعة من سطح الكرة التي توتر زاوية المخروط، إلى القطعة من سطح الكرة، التي توتر زاوية المخروط الآخر، وكنسبة القطاع الكري – الذي قاعدته القطعة من سطح الكرة – إلى القطاع الكري الذي قاعدته القطعة الأخرى.

برهان ذلك: أنا إذا أخذنا لكل واحدٍ من المخروطين أضعافًا متساوية، كم كانت، فَصَلتْ أضعافُ المخروطات من الكرة قطاعاتٍ متساويةً، وزواياها متساويةٌ / وسطوحها كريّة متساوية. ب - ٩١ - و فإن كانت القطعة من الكرة – التي فَصَلها جميع أضعاف أحد المخروطين – أعظم من

1 نصف... وضرب: ناقصة [ب] – 2 كرة آ: كوا [ب، ط] – 8 للسطح: لسطح [ب] / يكون: ناقصة [ب] – 9 مساويًا: متساوي [ب] – 11 متساوية: متساوي [ب] – 16 لذلك: ذلك [ب].

القطعة من الكرة التي فصلها ⟨جميع⟩ أضعاف المخروط الآخر، فإن الزاوية – التي هي أضعاف زاوية المخروط – أعظمُ من الزاوية التي هي أضعاف زاوية المخروط الآخر، والقطعةُ من سطح الكرة التي توترها الزاوية ⟨الكبرى أعظم من القطعة من سطح الكرة التي توترها الزاوية⟩ الصغرى. وإن كانت / القطعة من الكرة، التي فصَلها أضعاف أحد المخروطين، أصغر من القطعة ط – ٤٧٨ من الكرة التي فصَلها أضعاف المخروط الآخر، فإن زاوية القطعة أصغر من زاوية القطعة، والسطح الكريّ – الذي يوتر الزاوية الصغرى – أصغر من السطح الكريّ الذي يُوتر الزاوية العظمى. وإن كانت القطعة مساويةً للقطعة، فإن الزاوية مساوية للزاوية، والسطح مساوٍ للسطح. فالزاوية – التي هي أضعاف زاوية أحد المخروطين – إذا كانت أعظم من الزاوية التي هي أضعاف زاوية المخروط الآخر، فإن السطح الكري أعظم من السطح الكري، والقطاع – الذي هو القطعة من الكرة – أعظم من القطاع الآخر الذي هو القطعة من الكرة. وإذا كانت الزاوية – التي هي الأضعاف – أصغر من الزاوية التي هي الأضعاف، فإن السطح الكري أصغر من السطح الكري، والقطاع أصغر من القطاع. وإذا كانت الزاوية – التي هي الأضعاف – مساويةً للزاوية التي هي الأضعاف، فإن السطح الكري مساوٍ للسطح الكري والقطاع مساوٍ للقطاع. وإن لم يمكن أن تؤخذ الأضعاف من كرة واحدة أُخذت الأضعاف من كرتين أو أكثر.

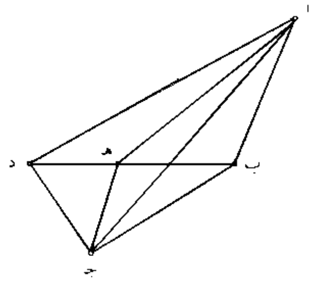
وتمام البرهان على ما تقدم، لأن الأُكَر تكون متساويةً، فنسبة زاوية أحد المخروطين إلى زاوية المخروط الآخر كنسبة السطح الكري – الذي يُوتر تلك الزاوية – إلى السطح الكري الذي يوتر الزاوية الأخرى، وكنسبة / القطاع إلى القطاع؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./ ب – ٩١ – ظ / ط – ٤٧٩

⟨**مقدمة وَ**⟩ كل مخروطٍ مستقيم الخطوط، قاعدته مثلثٌ، يكون أحد أضلاعه – التي تخرج من رأسه إلى إحدى زوايا قاعدته – يحيط، مع كل واحدٍ من ضلعي الزاوية التي خرج إليها، بزاويةٍ ليست بأصغر من قائمة؛ إذا خرج من رأسه خطٌّ إلى أحد ضلعي القاعدة اللذين تقدم ذكرهما، فقطَع ذلك الضلع، ثم خرج من طرف ذلك الخط خطٌّ إلى طرف الضلع الآخر، ففصل من القاعدة مثلثًا هو بعضها، وفَصَل من المخروط مخروطًا هو بعضُه، وكانت إحدى زاويتي المثلث الحادث اللتين عند القاعدة ليست بأصغر من قائمة؛ فإن نسبة قاعدة المخروط

23 وفصل : ونصل [ب، ط].

الأعظم إلى قاعدة المخروط الأصغر أعظمُ من نسبة زاوية المخروط الأعظم إلى زاوية المخروط الأصغر.

مثال ذلك: مخروط ا ب ج د، رأسه نقطة ا، وقاعدته مثلث ج ب د. وضلع ا ب يحيط، مع كل واحد من ضلعي ب ج ب د، بزاوية ليست بأصغر من قائمة. ونخرج من رأسه خط ا ه، ونصل ه ج، فحدث مخروط ا ب ه ج، وكانت إحدى زاويتي ا ه ج ا ج ه ليست بأصغر من قائمة.

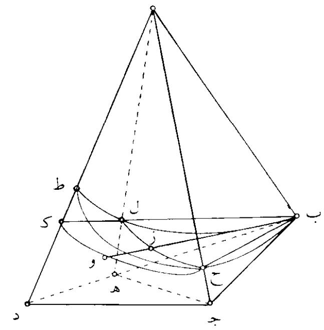


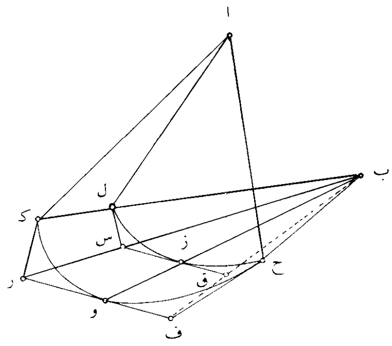
فأقول: إن نسبة مثلث د ب ج إلى مثلث ه ب ج أعظم من نسبة زاوية مخروط ا ب ج د، التي عند نقطة ا، إلى زاوية مخروط ا ب ه ج التي هي عند نقطة ا.

برهان ذلك: أنا نجعل ا مركزًا وندير ببعد ا ب قطعة من كرة، فهي تحدث في كل سطح من سطوح المخروط قوسًا من دائرة. فلتكن القوسُ التي تحدث في سطح ا ب ج قوس ب ح، والقوس / التي تحدث في سطح ا ب د قوس ب ل ط، والقوس التي تحدث في سطح ا ج د ط - ٤٨٠ قوس ح ط، والقوس التي تحدث في سطح ا ج ه قوس ح ز ل. ونصل خط ب ل، ونخرجه على استقامةٍ، فهو يلقى خط ا د لأن زاوية ب ا د حادّة، وزاوية ا ب ل حادّة لأن ا ب مثل ا ل، فليلقه على نقطة ک. فنقطة ک في سطح مثلث / ا ج د، وتحت نقطة ط، وكل خط يخرج ب - ٩٢ - و من نقطة ب إلى نقطةٍ من قوس ح ز ل إذا أُخرج على استقامةٍ لقي سطح ا ج د لأن السطح الذي فيه ذلك الخطُّ وخط ا ب، يقطع سطح ا ج ه ويَحدُث فيه خطٌّ يحيط مع خط ا ب بزاوية حادّة. فنتوهم مخروطًا، رأسه نقطة ب، وقاعدته قطاع ط ح ز ل، ونتوهمه ممتدًا في جهة

11 ا ب د: ا ب ج [ط] — 12 ونصل: ونصف [ط] — 13 ا ب ل: ا ب ک [ط] — 15 ح ز ل: ح ز ک [ط] — 17 مخروطًا: مخروط [ط] / ط ح ز ل: ا ح ز ل [ب، ط].

قاعدته، فهو يقطع سطح ا ج د، ويُحدث فيه خطًّا منحنيًا، طرفاه نقطتا ح ك، فليكن ذلك خط ح و ك. فهذا الخط خارج عن السطح الكري، لأن كل خط يخرج من نقطة ب إلى نقطة من قوس ل ز ح إذا امتدّ على استقامة كان خارجًا عن السطح الكري. فمن أجل ذلك يكون القطاع الكري – الذي رأسه نقطة آ وقاعدته السطح الكري، الذي تَحُوزه قسيّ ح ط ح ل ل ط – في داخل سطح مخروط ا ح ط ل، ويكون مخروط ا ح ل ب في داخل القطاع الكري الذي رأسه نقطة آ وقاعدته السطح الكري الذي تَحوُزه قسيُّ ب ح ب ل ل ح. فتكون نسبة المخروط إلى المخروط أعظمَ من نسبة القطاع الكري إلى القطاع الكري. وبالتركيب / تكون نسبة ط – ٨١ظ مخروط ا ح و ك ب المستدير – الذي رأسه نقطة ب وقاعدته ا ح و ك – إلى مخروط ا ح ز ل ب المستدير – الذي رأسه نقطة ب وقاعدته قطاع ا ح ز ل – أعظم من نسبة القطاع الكري الذي رأسُه نقطةُ آ وزاويته زاوية مخروط ا ب ج د التي عند نقطة آ إلى القطاع الكري الذي رأسُه نقطة آ وزاويته زاوية مخروط ا ب ج ه التي عند نقطة آ.





وأقول: إن نسبة مثلث ا ه ج إلى قطاع ا ل ز ح ليست بأعظم من نسبة مثلث ا د ج إلى قطاع ا ك و ح.

4 تحوزه: كتبها «محوره» ثم صححها فوقها [ط] كتبها «تحرره» في الهامش [ب] – 5 ا ح ط ل: ا ح ر ك ل [ب] ا ح ر ك ل د [ط] / ا ح ل ب: ا ح ك ل ب، وكتب في الهامش «د» مع «ن» فوقها [ب] ا ح د ل ل ب [ط] – 7 الكري (الأولى): الكبرى، ثم أثبت الصواب في الهامش مع حرف «ظ» ويعني «الظاهر» هكذا [ب] – 8 ا ح و ك ب: ح ن ك ب [ب، ط] / ا ح و ك: ا ح ن ك [ب] ا ح ب ك [ط] يخلط كل من ناسخ [ب] و [ط] بين الواو والنون والزاي والباء، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 10 التي: الذي [ط] – 12 كتب «آ د ف» في الهامش [ب].

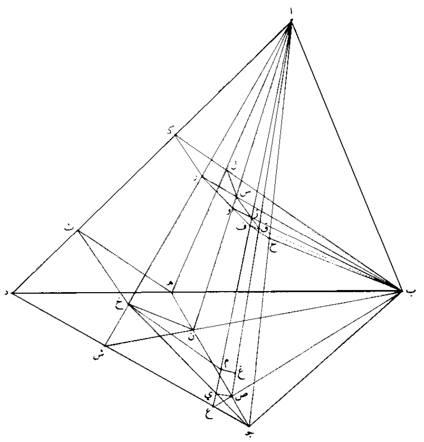
ولا يمكن ⟨غير⟩ ذلك؛ فإن أمكن، فلتكن نسبة مثلث ا هـ جـ إلى قطاع ا ل ز ح أعظم من نسبة مثلث ا د جـ إلى قطاع ا ك و ح. فتكون نسبة مثلث ا د جـ إلى قطاع ا ك و ح كنسبة مثلث ا هـ جـ إلى سطح هو أعظم من / قطاع ا ل ز ح، فليكن ذلك السطح سطح لا، ولتكن زيادة سطح لا على قطاع ا ل ز ح سطح ي. فقد يمكننا أن نعمل على قوس ل ز ح شكلاً مستقيم الخطوط، مماسّة أضلاعه لقوس ل ز ح، يكونُ السطح الذي هو زيادته على قطاع ا ل ز ح أصغر من سطح ي. فليكن ذلك الشكلَ الشكلَ الذي أضلاعُه خطوط ل س س ق ق ح، ولتكن مماسّة هذه الخطوط لقوس ل ز ح على نقط ل ز ح. فالخط الذي يخرج من نقطة ب إلى نقطة ز إذا امتد على استقامة، فهو ينتهي إلى خط ح و ك المنحني، فلينته إلى نقطة و. ونصل خطوط ب ح ب ل ب س ⟨ب ق⟩، فيحدث مخروط / رأسه نقطة ب وقاعدته شكل ا ل س ق ح المضلع. فإذا امتدت سطوح مخروط ب ا ل س ق ح، فإنها تلقى سطح ا جـ د، وتُحدث فيه خطوطًا مماسّةً لخط ح و ك على نقط ح و ك، لأن سطوح المخروط المضلع ليس تلقى سطوح المخروط المستدير إلا على خطوط ب ل ب ز ب ح، فقواعد هذا المخروط، التي في سطح ا جـ د، ليس تلقى خط ح و ك إلا على نقطة فقط، فلتكن تلك القواعد خطوط ح ف ف و ور ر ك، فتكون نقط التماسّ نقط ح و ك، فتكون نقطتا ف ر خارجتين عن المخروط المستدير. ونصل خط ا س، ونُنفذه على استقامة، فهو يلقى خط هـ جـ، فليلقه على نقطة ن. ونصل خط ا ق ونُنفذه على استقامة، فهو يلقى خط هـ جـ، فليلقه على نقطة ص. ونصل ا ر ونُنفذه على استقامةٍ، فهو يلقى خط د جـ، فليلقه على نقطة ش. ونصل ا ف ونُنفذه على استقامة، فهو يلقى خط د جـ، فليلقه على نقطة ع. فلأن خط ب س ر يقطع خطوط ا ر ا س ا ب، تكون هذه الخطوط في سطح واحد. فنُنْفذ ب ن ش في سطح هذه الخطوط وهي في سطح مثلث جـ ب د، فنقط ب ن ش على خط مستقيم، فنصل ذلك الخط، وليكن ب ن ش.

ب - ٩٢ - ظ

ط - ٤٨٢

---

3 السطح: السطح ا [ط] – 5 يكون: لكون [ط] – 7 ولتكن: وليمكن [ب] / نقط: نقطة [ب، ط] – 9 ب س: د س [ط] – 11 ح و ك: وح ك [ب، ط] / نقط: نقطة [ب، ط] – 12 ب ز ب ح: ب س ب ق ب ح [ب] ب س ب ق د ح [ط] – 13 نقطة: التاء ممحوة [ب] – 14 خطوط: في الهامش [ب] / ور ر ك: كتب كل من ناسخ [ب] و[ط] الراء فاءًا، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / نقط: نقطة [ب، ط] /نقط: نقطة [ط] / و: د [ط] – 15 فهو: فهي [ب، ط] – 16 ن: ر [ب، ط] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 17-18 فليلقه ... د جـ: مكررة [ط] وأشار الناسخ نفسه لهذا بالعلامة المعروفة.



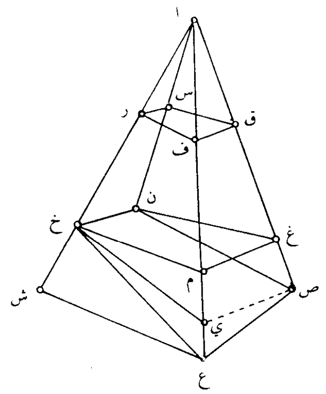
وكذلك / نبيّن أن خط ب ص ع مستقيم. ب - ٩٣ - و

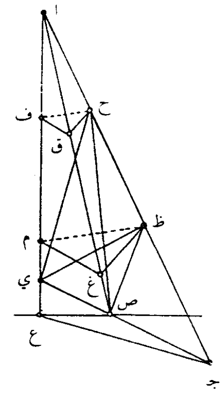
ولتكن زاوية ا هـ جـ أولاً قائمة، فيكون خط هـ جـ موازيًا لخط ل س، ونخرج من نقطة ن خطًا موازيًا لخط ب س ر / فهو يقطع خط ا ش فيما بين نقطتي ر ش، لأنه يكون في داخل ط - ٤٨٣ مثلث ب ر ش، فليقطعه على نقطة خ، ونخرج من نقطة هـ خطًا موازيًا لخط ب ل ك، فهو يقطع خط ا د فيما بين نقطتي ك د، فليقطعه على نقطة ث، ونصل خ ث. فلأن هـ ث موازٍ لخط ل ك، تكون نسبة هـ ا إلى ا ل كنسبة ث ا إلى ا ك، ولأن هـ ن موازٍ لخط ل س، تكون نسبة هـ ا إلى ا ل كنسبة ن ا إلى ا س، ولأن ن خ موازٍ ل س ر، تكون نسبة ن ا إلى ا س كنسبة خ ا إلى ا ر، فنسبة خ ا إلى ا ر كنسبة ث ا إلى ا ك، فخط خ ث موازٍ لخط ر ك؛ فنسبة مثلث ا خ ث إلى مثلث ا ر ك كنسبة مثلث ا ن هـ إلى مثلث ا س ل، لأن نسبة ث ا إلى ا ك مثنّاةً هي كنسبة هـ ا إلى ا ل مثنّاةً. فنسبة مثلث ا ش د إلى مثلث ا ر ك أعظم من نسبة مثلث ا ن هـ إلى مثلث ا س ل.

ونخرج من نقطة ن خط ن غ موازيًا لخط س ق، فهو يقطع خط ا ص فيما بين نقطتي ق ص، لأن زاوية ا ن ص منفرجة، وزاوية ا س ق حادّة، فليقطعْه على نقطة غ. ونخرج من نقطة

2 ل س: ا س [ط] – 4 خ: ح [ب، ط] – 5 ا د: كتب «حـ» فوق الدال [ط] / فليقطعه: وليقطعه [ب] – 7 ا س (الثانية): وضع ناسخ [ط] فوق السين نونًا – 8 ث ا: ف ا [ط] / خ ث: ح ب [ط] – 12 ن غ: ر ع [ب، ط] اختلطت الحروف الهندسية في هذا النص على الناسخين اختلاطًا هائلاً، ففي نفس المخطوطة يخلط الناسخ بين هذه الحروف و يزداد هذا الخلط إن اعتبرنا المخطوطتين في نفس الوقت. فالواو هي أحيانًا «ف» وأحيانًا «ن» وأحيانًا «ب» وأحيانًا «ر»؛ والراء فهي أحيانًا «ن» وأحيانًا «ز»، والنون أحيانًا «ر» وهكذا. ولهذا لم يعد أمامنا عند تحقيق النص إلا مراعاة الاتساق والصحة وإن اضطررنا إلى تغير الحروف الهندسية، وأثبتنا هذا التغيير في الهامش، وأهمّ هذه التغييرات هي أن غيرنا الراء والفاء والثاء على التوالي إلى ن، ر، م.

غ خط غ م موازيًا لخط ب ق ف، فهو يقطع خط ا ع، فليقطعه على نقطة م، ونصل م غ، فتكون نسبة م ا إلى ا ف كنسبة غ ا إلى ا ق، ونسبة غ ا إلى ا ق كنسبة ن ا إلى ا س، ونسبة ن ا إلى ا س كنسبة خ ا إلى ا ر، فنسبة خ ا إلى ا ر كنسبة م ا إلى ا ف، فخط م خ موازٍ لخط ف ر ونسبة مثلث ا خ م إلى مثلث ا ف ر كنسبة مثلث ا ن غ إلى مثلث ا س ق.





ونخرج من نقطة ص خطَّ ص ي موازيًا لخط ف ق، فهو يقطع خط ا ع فيما بين نقطتي ف غ / فليَقطعه على نقطة ي، فنقطة ي فيما بين نقطتي م ع لأن ص ي موازٍ لـ ف ق، ونصل ي خ، فتكون نسبة مثلث ا خ ي إلى / مثلث ا خ م كنسبة ي ا إلى ا م، ونسبة ي ا إلى ا م كنسبة ص ا إلى ا غ، ونسبة ص ا إلى ا غ كنسبة مثلث ا ن ص إلى مثلث ا ن غ. فنسبة مثلث ا خ ي إلى مثلث ا خ م كنسبة مثلث ا ن ص إلى مثلث ا ن غ، ونسبة مثلث ا ن غ إلى مثلث ا س ق كنسبة مثلث ا خ م إلى مثلث ا ف ر. فنسبة مثلث ا خ ي إلى مثلث ا ف ر كنسبة مثلث ا ن ص إلى مثلث ا س ق، فنسبة مثلث ا ش ع إلى مثلث ا ف ر أعظم من نسبة مثلث ا ن ص إلى مثلث ا س ق. ونخرج من نقطة غ عمودًا على خط ا ج، وليكن غ ظ. فنقطة ظ فيما بين نقطتي ا ج لأن زاوية ا هـ ج قائمة. فخط غ ظ موازٍ لخط ق ح لأن زاوية ا ح ق قائمة، لأن ح ق مماسّ، ونصل ظ م ظ ي ظ ص؛ فنسبة م ا إلى ا ف كنسبة غ ا إلى ا ق ونسبة غ ا إلى ا ق / كنسبة ظ ا إلى ا ح. فنسبة ظ ا إلى ا ح كنسبة م ا إلى ا ف، فخط ظ م موازٍ لخط

ط - ٤٨٤
ب - ٩٣ - ظ
ب - ٩٤ - و

2 ن ا: ر ن [ب] – 3 ن ا: ر ن [ب] / م خ: ف خ [ب، ط] – 5 ف ق: ب ق [ب، ط] / خط: ناقصة [ب] / ا ع: ا غ [ب] – 6 ف ق: غ ب [ب، ط] – 7 ا خ م: ا ح ب [ط] – 10 ا س ق: ا س ب [ط] – 14 ا ق: ا وق [ب] / ونسبة: فنسبة [ب] – 14-15 ونسبة غ ا إلى ا ق: ناقصة [ط] – 15 كنسبة (الأولى): وكنسبة [ط].

ح ف. فنسبة مثلث ا م ظ إلى مثلث ا ف ح كنسبة مثلث ا غ ظ إلى مثلث ا ق ح، ونسبة مثلث ا ي ظ إلى مثلث ا م ظ كنسبة ي ا إلى ا م، ونسبة ي ا إلى ا م كنسبة ص ا إلى ا غ، ونسبة ص ا إلى ا غ كنسبة مثلث ا ص ظ إلى مثلث ا غ ظ، فنسبة مثلث ا ي ظ إلى مثلث ا ف ح كنسبة مثلث ا ص ظ إلى مثلث ا ق ح.

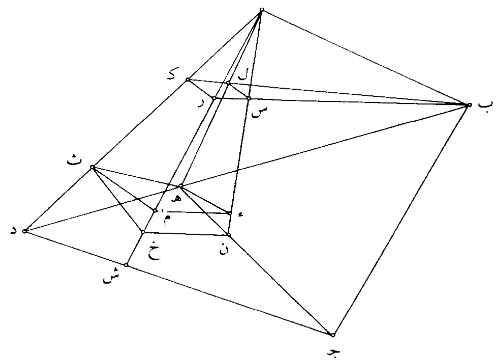
ولنعد إلى مثلث ا ف ح، ونصل ي ج، فتكون نسبة مثلث ا ي ج إلى مثلث ا ي ظ كنسبة ج ا إلى / ا ظ، ونسبة ج ا إلى ا ظ كنسبة مثلث ا ج ص إلى مثلث ا ص ظ، ونسبة ط – ٤٨٥ مثلث ا ص ظ إلى مثلث ا ق ح كنسبة مثلث ا ي ظ إلى مثلث ا ف ح، فنسبة مثلث ا ي ج إلى مثلث ا ف ح كنسبة مثلث ا ص ج إلى مثلث ا ق ح، فنسبة مثلث ا ع ج إلى مثلث ا ف ح أعظم من نسبة مثلث ا ص ج إلى مثلث ا ق ح، فنسبة جميع مثلث ا د ج إلى مضلع ا ك ر ف ح أعظم من نسبة مثلث ا هـ ج إلى مضلع ا ل س ق ح. ونسبة مثلث ا هـ ج إلى مضلع ا ل س ق ح أعظم من نسبة مثلث ا د ج إلى قطاع ا ح و ك؛ فنسبة مثلث ا د ج إلى مضلع ا ك ر ف ح أعظم من نسبة مثلث ا د ج إلى قطاع ا ح ز ل؛ فمضلع ا ك ر ف ح أصغر من قطاع ا ح و ك، وهذا محال. فليس نسبة مثلث ا هـ ج إلى قطاع ا ح ز ل أعظم من نسبة مثلث ا د ج إلى قطاع ا ح و ك. ونسبة مثلث ا هـ ج إلى قطاع ا ح ز ل كنسبة مخروط ا ب هـ ج – الذي رأسه نقطة ب – إلى مخروط ا ح ز ل ب الذي رأسه نقطة ب. فليس نسبة مخروط ا ب هـ ج – الذي رأسه نقطة ب – إلى مخروط ا ح ز ل ب – الذي رأسه نقطة ب وقاعدته قطاع ا ح ز ل – بأعظم من نسبة مخروط ا ب ج د الذي رأسه نقطة ب إلى مخروط ا ح و ك ب الذي رأسه نقطة ب وقاعدته قطاع ا ح و ك./ ط – ٤٨٦

فنسبة مخروط ا ب ج د إلى مخروط ا ح و ك ب إمّا / مساوية لنسبة مخروط ا ب ج هـ ب – ٩٤ – ظ إلى مخروط ا ح ز ل ب أو أعظم منها، وبالتبديل تكون نسبة مخروط ا ب ج د إلى مخروط ا ب ج هـ إما مساوية لنسبة مخروط ا ب ح و ك إلى مخروط ا ب ح ز ل أو أعظم منها. ونسبة مخروط ا ب ح و ك إلى مخروط ا ح ز ل ب أعظم من نسبة القطاع الكري الذي 〈زاويته〉 زاوية مخروط ا ب ج د التي عند نقطة ا إلى القطاع الكري الذي زاويته زاوية مخروط

5 ولنعد: ونصل [ب، ط] / ي ج: ي ح [ب، ط] ولكن أثبت ناسخ [ب] الصواب في الهامش – 8-9 فنسبة ... ا ق ح: مكررة [ط] – 12 ا ح ز ل: ا ح ف ل [ب، ط] / فمضلع: مضلع [ب] – 16-17 إلى المخروط... وقاعدته: مكررة [ب، ط] – 17-18 إلى ... ب: مكررة [ط] – 21 ا ب ح و ك: ا ب حـ ن ك [ب، ط] / أو: و [ب] – 22 ا ب ح و ك: ن ك ب [ب، ط].

ا ب ج هـ التي عند نقطة ا. فنسبة مخروط ا ب ج د إلى مخروط ا ب ج هـ أعظم من نسبة القطاع الكري إلى القطاع الكري. ونسبة مخروط ا ب ج د إلى مخروط ا ب ج هـ كنسبة مثلث ج ب د إلى مثلث ج ب هـ، ونسبة القطاع الكري الأعظم إلى القطاع الكري الأصغر كنسبة زاوية مخروط ا ب ج د إلى زاوية مخروط ا ب ج هـ اللتين عند نقطة ا. فنسبة مثلث ج ب د 〈إلى مثلث ج ب هـ〉 أعظم من نسبة زاوية مخروط ا ب ج د التي عند نقطة ا إلى زاوية مخروط ا ب ج هـ التي عند نقطة ا.

وإن كانت زاوية ا هـ ج منفرجة، جعلنا زاوية ا هـ ء قائمة، وأخرجنا من نقطة ء خط ء م' موازيًا لخط ب س ر، فيكون موازيًا لخط ن خ، فتكون نسبة ن ا إلى ا ء كنسبة خ ا إلى ا م'، ونصل ث م' فتكون نسبة مثلث ا ث خ إلى مثلث ا ث م' كنسبة مثلث ا هـ ن إلى مثلث ا هـ ء، وتكون نسبة م' ا إلى ا ر كنسبة ء ا إلى ا س، ونسبة ء ا إلى ا س كنسبة هـ ا إلى ا ل. ونسبة هـ ا إلى ا ل كنسبة ث ا إلى ا ك، فنسبة ث ا إلى ا ك كنسبة م' ا / إلى ا ر، ط – ٤٨٧ فخط ث م' موازٍ لخط ك ر، ونسبة مثلث ا ث هـ إلى مثلث ا ك ل 〈كنسبة مثلث ا ث م' إلى مثلث ا ك ر〉 وتكون نسبة مثلث ا ث م' إلى مثلث ا ك ر كنسبة مثلث ا هـ ء إلى مثلث ا ل س. 〈ونسبة مثلث ا ث خ إلى مثلث ا ث م' كنسبة مثلث ا هـ ن إلى مثلث ا هـ ء، فتكون نسبة مثلث ا ث خ إلى مثلث ا ك ر كنسبة مثلث ا هـ ن إلى مثلث ا ل س، ولكن مثلث ا د ش أكبر من مثلث ا ث خ〉. فتكون نسبة مثلث ا د ش إلى مثلث ا ك ر أعظم من نسبة مثلث ا هـ ن إلى مثلث ا ل س.



3 ج ب هـ: ج ب د [ط] – 7 ا هـ ء: ا هـ ر [ب، ط] / ء: د [ب، ط] / ء م': د م [ب، ط] في هذه الفقرات اختلطت الحروف الهندسية على الناسخين، فاضطررنا إلى تغيرها وخاصة: ء = د، م' = م – 10 ء ا (الثانية): ذ ا [ب، ط] – 11 ونسبة: فنسبة [ب، ط] – 12 ونسبة: فنسبة، وأثبت الصواب فوقها [ط] / ا ك ل: ا ل س [ب، ط] – 13 وتكون: فتكون [ب، ط] / ا ث م': ا ب ح [ب] ا ب ج [ط] / ا هـ ء: ا هـ ز [ب، ط] – 16 ا د ش: ا ك س [ب، ط].

ونخرج من نقطة ء خطًا موازيًا لخط س ق، ونسوق البرهان على / مثل ما تقدم، فيتبيّن أن نسبة مثلث ا د جـ إلى المضلع الذي في داخله أعظم من نسبة مثلث ا هـ جـ إلى المضلع الذي في داخله. ب - ٩٥ - و

وإن كانت الزاوية القائمة أو المنفرجة هي زاوية ا جـ هـ، ابتدأنا بالعمل من نقطة جـ، وسُقنا البرهان على مثل ما تقدّم؛ لأن زاوية ا جـ هـ - إن كانت قائمةً - كان خط جـ هـ موازيًا لخط ح ق، وإن كانت منفرجة، كان الموازي ⟨لـ ح ق⟩ يقطع زاوية ا جـ هـ.

فعلى تصاريف الأحوال، إذا كانت إحدى زاويتي ا هـ جـ ا جـ هـ ليست بأصغر من قائمة فإن نسبة مثلث جـ ب د إلى مثلث جـ ب هـ أعظمُ من نسبة زاوية مخروط ا ب جـ د التي عند نقطة ا إلى زاوية مخروط ا ب جـ هـ التي عند نقطة ا؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

⟨**مقدمة ز**⟩ كل مخروطٍ مستقيمِ الخطوط، قاعدتُه مثلثٌ إحدى زواياه ليست بأصغر من قائمة، وأحدُ ضلعيه الخارجين من رأسه إلى زاويتيه الحادّتين عمودٌ على سطح القاعدة، يُخرج من رأسه خطٌّ يقطع ضلعَ قاعدته التي تُوتر الزاوية الحادة التي خرج إليها العمود، ويُوصَل بين طرفه وبين مسقط العمود، فتُقسم القاعدة بمثلثين، ويُقسم المخروط بمخروطين، فإن نسبة المثلث الأعظم إلى المثلث الأصغر الذي يلي الزاوية العظمى أعظم من نسبة زاوية المخروط الأعظم إلى زاوية المخروط الأصغر، الذي يلي الزاوية / العظمى. ط - ٤٨٨

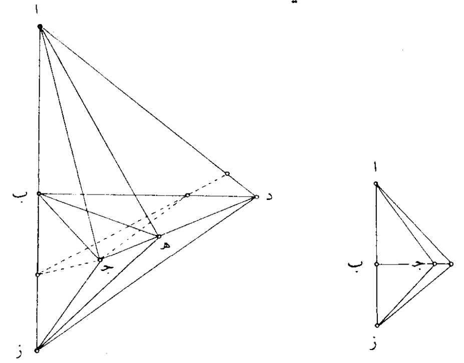
مثالُ ذلك: مخروط ا ب جـ د رأسه نقطة ا وقاعدته مثلث ب جـ د، وزاوية ب جـ د ليست بأصغر من قائمة، وضلع ا ب عمود على سطح القاعدة. ونخرج من نقطة ا خط ا هـ، ووصل هـ ب.

فأقول: إن نسبة مثلث د ب جـ إلى مثلث هـ ب جـ أعظم من نسبة زاوية مخروط ا ب جـ د إلى زاوية مخروط ا ب جـ هـ.

برهان ذلك: أنّا نخرج عمود ا ب في جهة ب، ونقيم على خط ا هـ زاوية قائمة، وليكن ا هـ ز، فخط هـ ز يلقى خط ا ب لأن زاوية هـ ا ب حادّة، فليلْقه على نقطة ز، ونصل جـ ز د ز. فلأن زاوية ب جـ د ليست بأصغر من / قائمة، يكون خط هـ ب أعظم من خط ب جـ، ولأن ب - ٩٥ - ظ

1 ء: ب [ب، ط] - 2 ا د جـ: ا ب جـ [ط] - 11 زاويتيه: أي زاويتي المثلث - 13 بمخروطين: المخروطين [ب] - 14-15 أعظم ... العظمى: مكررة [ط] - 21 ونقيم: ونقسم [ب، ط].

ا ب عمودٌ على القاعدة، يكون ا هـ أعظم من ا جـ. فإذا أُخرج ب جـ في جهة جـ، وفُصل منه مثل ب هـ، ووصل بين طرفه وبين نقطتي آ ز، حدثت زاوية قائمة مساوية لزاوية ا هـ ز، فزاوية ا جـ ز منفرجة. لأنها في داخل الزاوية القائمة؛ ولأن زاوية ب جـ د ليست بأصغر من قائمة، وسطح ا ب جـ قائم على سطح ب جـ د على زوايا قائمة، تكون زاوية ا جـ د ليست بأصغر من قائمة؛ وذلك أن زاوية ب جـ د، إن كانت قائمة، كان د جـ عمودًا على سطح ا ب جـ، فتكون زاوية ا جـ د قائمة، فإن كانت زاويةُ ب جـ د منفرجةً، كان خط جـ د من وراء العمود الخارج من نقطة جـ القائم على سطح ا ب جـ، فتكون زاوية ا جـ د منفرجة. فزاوية ا جـ د، على تصاريف الأحوال، ليست / بأصغر من قائمة. وزاوية ا جـ ز منفرجة، فمخروط ا جـ د ز رأسه ط - ٤٨٩ نقطة آ وقاعدته مثلث جـ ز د، وضلع ا جـ، الذي خرج من رأسه إلى زاوية ز جـ د، يحيط مع كلّ واحد من خطي جـ ب جـ د بزاوية ليست بأصغرَ من قائمة، وخرج من رأسه خطّ ا هـ إلى أحد ضلعي القاعدة اللذين يحيطان بزاوية ز جـ د، وخرج من طرفه، الذي هو نقطة هـ، خط هـ ز، فكانت زاويةُ ا هـ ز قائمةً، فنسبةُ مثلث ز جـ د إلى مثلث ز جـ هـ أعظمُ من نسبة زاوية مخروط ا جـ ز د التي عند نقطة آ إلى زاوية مخروط ا ز جـ هـ التي عند نقطة آ. ونسبة مثلث ز جـ د إلى مثلث ز جـ هـ هي كنسبة د جـ إلى جـ هـ، ونسبة د جـ إلى جـ هـ هي كنسبة مثلث / ب - ٩٦ - و د ب جـ إلى مثلث هـ ب جـ. وزاوية مخروط ا ز جـ د، التي عند نقطة آ، هي زاوية مخروط ا ب جـ د، وزاوية مخروط ا ز جـ هـ، التي عند نقطة آ، هي زاوية مخروط ا ب جـ هـ، فنسبة مثلث د ب جـ إلى مثلث هـ ب جـ أعظم من نسبة زاوية مخروط ا ب جـ د التي عند نقطة آ إلى زاوية مخروط ا ب جـ هـ التي عند نقطة آ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



1 وفصل: ونصل [ب، ط] – 5 د جـ: ز جـ [ب، ط] – 12 فكانت: وكانت [ب].

⟨**مقدمة ح**⟩ **كل مخروطٍ مستقيم الخطوط، قاعدته مثلثٌ متساوي الساقين، وضلعه** – الذي يخرج من رأسه إلى رأس المثلث المتساوي الساقين – عمودٌ على سطح القاعدة، يُخرج من رأسه سطح يقطع قاعدته على خطٍ موازٍ لضلع / القاعدة الذي يوتر الزاوية التي عند مسقط ط - ٩٠ؤ العمود. ونفصل من المخروط مخروطًا هو بعضه. فإن نسبة قاعدة المخروط الأعظم إلى قاعدة المخروط الأصغر أعظم من نسبة زاوية المخروط الأعظم إلى زاوية المخروطِ الأصغر، اللتين عند رأس المخروط.

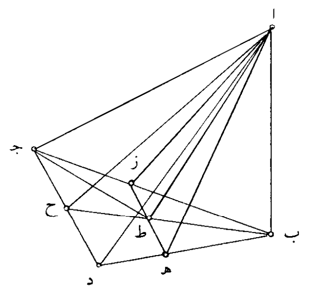
مثال ذلك: مخروط ا ب جـ د، رأسُه نقطة ا وقاعدتُه مثلث ب جـ د، خرج من رأسه سطح ا هـ ز فقطع مثلث ب جـ د على خط هـ ز، وهـ ز موازٍ لخط جـ د.

فأقول: إن نسبة مثلث جـ ب د إلى مثلث هـ ب ز أعظم من نسبة زاويةِ مخروط ا ب جـ د – التي عند نقطة ا – إلى زاوية مخروط ا ب هـ ز التي عند نقطة ا.

برهان ذلك: أنا نقسم هـ ز بنصفين على نقطة ط ونصل ب ط، فيكون عمودًا على خط هـ ز، ونخرج ب ط إلى ح فيقسم خط جـ د بنصفين على نقطة ح، ونصل خطوط ا ط ا ح جـ ط. فلأن ا ب عمودٌ على سطح مثلث ب جـ د، يكون سطح ا ب جـ قائمًا على سطح مثلث جـ ب د على زوايا قائمة. فلأن سطح ا ب ح قائمٌ على سطح مثلث جـ ب د على زوايا قائمة، وخط ط ز عمودٌ على خط ب ح، الذي هو الفصل المشترك بين السطحين، يكون ط ز عمودًا على سطح ا ب ح. فزاوية ا ط ز قائمة، وزاوية ا ط ح منفرجة. فلأن مخروط ا ب ح جـ مستقيم الخطوط وضلع ا ب عمودٌ على خطي ز جـ ب ح، وقد خرج خطّ / ا ط ووصل ب - ٩٦ - ظ ط جـ، وكانت زاوية ا ط جـ منفرجة، تكون نسبةُ مثلث ب جـ ح إلى مثلث ب جـ ط أعظمَ من نسبة زاوية مخروط ا ب جـ ح إلى زاوية مخروط ا ب جـ ط. ولأن مخروط ا ب جـ ط مستقيمُ الخطوط، وقاعدتَه / مثلث ب جـ ط، وضلعَ ا ب عمودٌ على خطي ب جـ ب ط، ط - ٤٩١ وخط ا ط يحيط مع ط ز بزاوية قائمة، تكون نسبة مثلث جـ ب ط إلى مثلث ط ب ز أعظمَ من نسبة زاوية مخروط ا ب جـ ط إلى زاوية مخروط ا ب ط ز، كما تبين في الشكل و، فنسبة مثلث ح ب جـ إلى مثلث ط ب ز أعظم من نسبة زاوية مخروط ا ب جـ ح إلى زاوية مخروط ا ب ط ز. ومثلث د ب جـ ضعف مثلث ح ب جـ، وزاوية مخروط ا ب جـ د ضعف زاوية

2 يخرج (الثانية): فخرج [ب، ط] – 3 يقطع: فقطع [ط] – 12 فيقسم: فينقسم [ب] – 16 ا ب ح: ا ب جـ [ط] / ا ط ح: ا ط جـ [ب، ط] وكتب ناسخ [ب] في الهامش «ا د ط» / ا ب ح جـ: ا ب ح د [ط] – 21 ط ز: الزاي ممحوة [ط] – 22 ا ب ط ز: ا ب ز ط [ب، ط] / و: ف، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب].

مخروط ا ب ج ح، وزاوية مخروط ا ب ه ز ضعف زاوية مخروط ا ب ط ز، ومثلث ه ب ز ضعفُ مثلث ط ب ز، فنسبةُ مثلث د ب ج إلى مثلث ه ب ز أعظمُ من نسبةِ زاوية مخروطِ ا ب ج د إلى زاوية مخروط ا ب ه ز اللتين عند نقطة ا؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



〈**مقدمة ط**〉 كل مخروطين مستقيمي الخطوط، قاعدتاهما شكلان مسطّحان متشابهان، أحدُهما أعظم من الآخر، يقعان في كرةٍ، ويكون رأسا المخروطين عند مركز الكرة، فإن نسبة زاوية المخروطِ الأعظم إلى زاوية المخروطِ الأصغر أعظمُ من نسبةِ قاعدة المخروطِ الأعظم إلى قاعدةِ المخروطِ الأصغر.

فليكن مركزُ الكرة نقطة ا، ونتوهم سطح قاعدةِ المخروطِ الأعظم يقطعُ الكرةَ، فهو يحدث فيها دائرة، فليكنْ مركزُ تلك الدائرة نقطة ب؛ ونصل ا ب فيكون عمودًا على سطح الدائرة، الذي هو سطح / قاعدةِ المخروط، لأن أضلاع المخروط متساوية. ونتوهم خطوطًا تخرجُ من نقطة ب ب - ٩٧ - و إلى زوايا قاعدةِ المخروط، فهي تقسم القاعدة بمثلثات متساويات، / فليكن أحدُ تلك المثلثات ط - ٤٩٢ مثلثَ ب ج د. ونتوهم أيضًا سطحَ قاعدة المخروطِ الأصغر يقطع الكرة، فهو يُحدث فيها دائرة، ونتوهم خطًا يخرجُ من نقطة ا إلى مركز تلك الدائرةِ، فهو يكون عمودًا على سطح تلك الدائرة، وعلى سطح قاعدة المخروط التي في تلك الدائرة. فلأن قاعدتي المخروطين متشابهتان، وإحداهما أعظم من الأخرى، تكون الدائرة التي في الكرة، التي تحيط بالقاعدة العظمى، أعظمَ من الدائرة التي تحيط بالقاعدة الصغرى، والخطُّ الذي يخرج من مركز الكرة إلى مركز الدائرة الصغرى يكون أعظمَ من الخط الذي يخرج من مركز الكرة إلى مركز الدائرة العظمى. وهذان الخطّان هما

16 والخط: فالخط [ب] / الدائرة: مكررة [ط].

العمودان القائمان على سطحي القاعدتين. فالعمود الذي يخرج من نقطة آ إلى القاعدة الصغرى أعظمْ من خط ا ب. فليكن خط ا هـ مساويًا لذلك العمود. ونتوهم خطوطًا تخرج من مركز تلك الدائرة إلى زوايا القاعدة التي فيها، فهي تقسم القاعدة بمثلثات متساوياتٍ متشابهات، وشبيهات بمثلث ب جـ د. ونتوهم سطحًا يخرج من نقطة هـ موازيًا لسطح مثلث ب جـ د، فهو يُحدث في الكرة دائرة مساويةً للدائرة الصغرى المحيطةِ بقاعدة المخروط الأصغر. ونُخرج من نقطة هـ خطين موازيين لخطي ب جـ ب د ينتهيان إلى محيط الدائرة التي مركزها نقطة هـ، وليكونا خطي هـ ز هـ ح. ونصل ز ح، فيكون مثلث هـ ز ح شبيهًا بمثلث ب جـ د، ومساويًا لكل واحدٍ من المثلثات التي انقسمت إليها قاعدة المخروط الأصغر./ ط - ٤٩٣ وإذا أخرجنا من نقطة هـ خطوطًا تحيط بزوايا متساويةٍ، ومُساويةٍ لزاوية ز هـ ح، ووصلنا بين أطراف الخطوط، حدث في الدائرة التي مركزها نقطة هـ، شكلٌ مساوٍ لقاعدة المخروط / ب - ٩٧ - ظ الأصغر وشبيهٌ بها. وإذا أخرجنا من نقطة آ خطوطًا إلى زوايا الشكل، الذي حدث في دائرة هـ، أحدثت مخروطًا يساوي المخروط الأصغر، وشبيهًا به، وزاويته التي عند نقطة آ مساوية لزاوية ذلك المخروط. ونصل خطوط ا جـ ا د ا ح ا ز، ونُخرج من نقطة ب عمودًا على خط جـ د، فهو يقسمه بنصفين، وليكن ب و، وكذلك نُخرج من نقطة هـ عمودًا على خط ح ز، فهو يقسمه بنصفين، وليكن هـ م. فيكونُ ب و أعظمَ من هـ م، لأن مثلثي ب جـ د هـ ز ح متشابهان، ومثلث ب جـ د أعظمُ من مثلث هـ ز ح. ونصل ا و، ونُنْفذه على استقامةٍ إلى سطح الكرة، وليلْقَ سطحَ الكرة على نقطة ل. ونتوهم سطحَ مثلث ا جـ د يقطع الكرة، فهو يُحدث في سطحها قوسًا من دائرةٍ، فليكنْ قوس جـ ل د. ونصل أيضًا خط ا م، ونُخرجه حتى يلقى سطح الكرة، وليلقه على نقطة ن. ونخرج سطح مثلث ا ز ح، وليُحدث في سطح الكرة قوس ز ن ح. ونصل و م، ونُنْفِذه على استقامةٍ، فهو يلقى خط ا هـ، لأن خطي ب و هـ م متوازيان وب و أعظمُ من هـ م، فليلْقه على نقطة ك. فتكون نسبة ب ك إلى ك هـ كنسبة ب و إلى هـ م، ونسبة ب و إلى هـ م هي كنسبة ب جـ إلى هـ ز، لأن المثلثين متشابهان. فنسبةُ ب ك إلى ك هـ كنسبة ب جـ إلى هـ ز، وب جـ هـ ز متوازيان، فهما في سطح واحد، وخط ب هـ ك في / ط - ٤٩٤ سطحهما. فإذا وصلنا جـ ز بخط مستقيم، وأنفذناه على استقامة، انتهى إلى نقطة ك، ولنصل، وليكن خط جـ ز ك. وكذلك إذا وصلنا د

10 وشبيه بها: وشبيها به [ب، ط] / أخرجنا: أخرجها [ب] – 11 أحدثت: أحدث [ب، ط] – 15 ب و: جـ د [ط] – 19 ز ن ح: روح [ط] – 22 هـ ز (الأولى): هـ ب [ط] – 23 سطحهما: سطحها [ب] / جـ ز: جـ د [ط] – 24 وكذلك: ولذلك [ب، ط].

ح بخط مستقيم انتهى إلى نقطة ك، فلنصل، وليكن د ح ك، فيكون ⟨مع⟩ مثلث ك جـ د في سطح واحد، وهو يقطع سطحي هـ ز ح ب جـ د المتوازيين. فخط ز ح موازٍ لخط جـ د. ونخرج من نقطة م خطًا موازيًا لخط و ا، فهو يلقى خط ك ا، فليلقه على نقطة ع. فنقطة ع فيما بين نقطتي ا هـ. ولنصل ع ز ع ح، فيكونا ⟨مع⟩ مثلث ع ز ح / في سطح واحد. ولأن ز ح موازٍ لخط جـ د، وم ع موازٍ لخط و ا، يكون سطح مثلث ح ع ز موازيًا لسطح مثلث ا جـ د. وسطحا مثلثي ا ك جـ ا ك د يقطعان سطحي مثلثي ا جـ د ع ز ح، فخط ا جـ موازٍ لخط ع ز، وخط ا د موازٍ لخط ع ح، وزاوية ز ع ح مساوية لزاوية جـ ا د. ونخرج سطح مثلث ع ز ح حتى يقطع الكرة، فهو يُحدث في سطحها قوسًا شبيهةً بقوس جـ ل د، فلتكن قوس ز ص ح. فيكون قطاع ع ز ص ح شبيهًا بقطاع ا جـ ل د، وتكون نسبة قطاع ا جـ ل د إلى قطاع ع ز ص ح كنسبة ا جـ إلى ع ز مثنّاةً، ونسبةُ ا جـ إلى ع ز مثنّاةً هي كنسبة مثلث ا جـ د إلى مثلث ع ز ح. فنسبة قطاع ا جـ د إلى قطاع ع ز ح كنسبة مثلث ا جـ د إلى مثلث ع ز ح، وكنسبة قطعةِ جـ ل د الباقيةِ إلى قطعة ز ص ح الباقية. وعلى التبديل تكون نسبة مثلث ا جـ د إلى قطعة جـ ل د كنسبة مثلث ع ز ح إلى قطعة ز ص ح. فنسبة مخروط ك ا جـ د إلى مخروط ك جـ ل د كنسبة مخروط ك ع ز ح إلى مخروط ك ز ص ح. وبالتبديل تكون نسبةُ مخروط ك ا جـ د إلى مخروط / ك ع ز ح كنسبة مخروطِ ك جـ ل د إلى مخروط ك ز ص ح. ونسبةُ مخروط ك ا جـ د إلى مخروط ك ع ز ح أعظمُ من نسبة مخروط ك ا جـ د إلى مخروط ك ا ز ح، فنسبةُ مخروط ك جـ ل د إلى مخروط ك ز ص ح أعظمُ من نسبة مخروط ك ا جـ د إلى مخروط ك ا ز ح.

ب - ٩٨ - و

ط - ٤٩٥

ونتوهم سطح مثلث ا ك ل و، يقطع الكرة، فهو يُحدث في سطحها قوسًا من دائرة تمرّ بنقطتي ص ن، لأن هاتين النقطتين في سطح مثلث ا ك ل و، فليكن قوس ل ص ن ط، فتكون نقطة ن فيما بين نقطتي ص ط. ولأن مثلث ا جـ د شبيهٌ بمثلث ع ز ح، يكون مثلث ا جـ و شبيهًا بمثلث ع ز م، فنسبةُ ا جـ إلى ع ز كنسبة ا و إلى ع م. وا جـ مثل ا ل، وع ز مثل ع ص، فنسبة ا ل إلى ع ص كنسبة ا و إلى ع م، وكنسبة الباقي – وهو و ل – إلى الباقي وهو

4 فيكونا: فيكون [ب، ط] – 5 ح ع ز: حـ ع ز [ب، ط] – 6 سطحي: سطح [ب] / ا جـ د: ا جـ هـ [ب، ط] – 9 قطاع (الثانية): كتبها ناسخ [ط] «خطا» ثم أضاف العين – 15 ك ز ص ح: ز ص ح [ب] – 15-18 ك ع ز ح ... مخروط: ناقصة [ط] – 20 ل ص ن ط: ل ص ف ط [ط] – 22 ع ز (الأولى): ع د [ط].

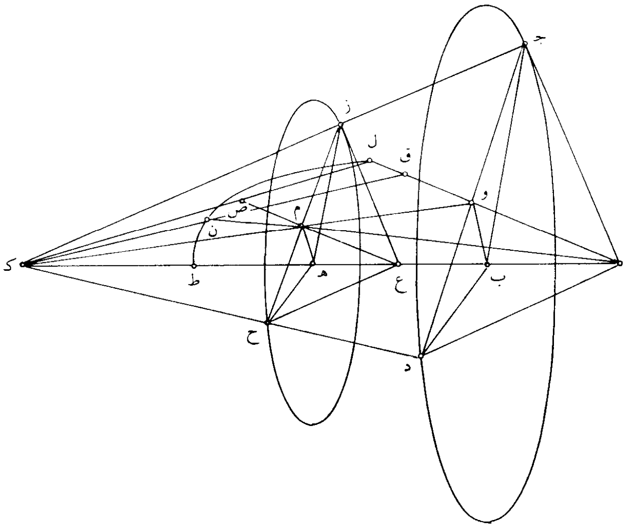
م ص ؛ ونسبة و ک إلى / ک م كنسبة ا و إلى ع م ، فنسبة و ک إلى ک م هي كنسبة و ل إلى ب - ٩٨ - ظ
م ص .

فإذا وصلنا ل ص بخط مستقيم وأنفدناه على استقامة ، انتهى إلى نقطة ک ، فلنصل ، وليكن خط ل ص ک . ونقطتا ل ص على قوس ل ص ط ، فخط ل ص ک يقطع سطح الكرة ، ويقع خارجًا منها. فنقطة ن ، التي على قوس ص ن ط ، وفيما بين نقطتي ص ط ، هي تحت خط ص ک . فنخرج من نقطة ک خطًا مستقيمًا إلى نقطة ن ، وننفذه على استقامة ، فهو يقطع خط و ل على نقطةٍ فيما بين نقطتي و ل ، لأن نقط م ن ص في سطح مثلث و ک ل ، ونقطة ن في سطح هذا المثلث وفيما بين خطي ک و ک ل . فليقطع خطُّ ک ن خطَّ و ل على نقطة ق ، وهذا الخطُّ يقطع سطحَ قطعةِ ز ص ح على نقطةٍ في داخل قوسٍ ز ص ح – أعني على نقطةٍ في جهة هـ – فليقطعْه على نقطة ي . ونتوهم مخروطًا رأسُه نقطة ک ، وقاعدتُه قِطاع ا ن ز ح ، فهذا المخروط ، إذا امتدَّ على استقامة ، فهو يقطع سطح قطاع ا ج ل د ، لأنه يمرّ بنقط ج ق د ، فهو يحدث في سطح قطعة ج ل د خطًا منحنيًا ، فليكن ذلك الخطُّ خطَّ ج ق د ؛ وهو يقطع أيضًا سطح قِطاع / ع ز ص ح ، فهو يُحدث في قطعة ز ص ح خطًا منحنيًا ، فليكن خط ط - ٤٩٦ ز ي ح . فتكون نسبة مخروط ک ج ل د إلى مخروط ک ز ص ح كنسبة مخروط ک ج ق د إلى مخروط ک ز ي ح ، لأن سطحي القاعدتين متوازيان ونسبة مخروط ک ج ل د إلى مخروط ک ز ص ح أعظمُ من نسبة مخروط ک ا ج د إلى مخروط ک ا ز ح . فنسبةُ مخروط ک ج ق د إلى مخروط ک ز ي ح أعظم من نسبة مخروط ک ا ج د إلى مخروط ک ا ز ح . ونسبة جميع مخروط ک ا ج ق د إلى مخروط ک ا ز ن ح أعظمُ من نسبة مخروط ک ا ج د إلى مخروط ک ا ز ح . وقطعة المخروط ، التي فيما بين سطحي ا ج ق د ا ز ن ح في داخل القطاع الكري ، الذي فيما بين قطاعَيْ ا ج ل د ا ز ن ح ، والقطاع الكري – الذي فيما بين نقطة / ط وبين قطاع ب - ٩٩ - و ا ز ن ح – في داخل مخروط ک ا ز ن ح . فنسبة قطاع ا ج ل د ح ز ن إلى قطاع ا ط ح ز ن أعظم من نسبة قطعة المخروط التي عليها ا ج ق د ح ن ز إلى مخروط ک ا ح ن ز . وبالتركيب

1 و ک : ق ک [ط] / فنسبة : ونسبة [ط] / و ل : و ک [ط] – 4 ل ص ک (الثانية) : د ص ک [ط] – 7 نقط : كتبها «نقطة» ثم صححها في الهامش [ط] – 8 ک ل : ک ن [ط] / و ل : و ن [ط] – 10 ي : د [ط] / ا ن ز ح : ا ن ق ح [ط] – 11 ق : ب [ط] – 13 ع ز ص ح : ع ز ص [ب ، ط] – 18 ک ا ج ق د : ک ا ج ب د [ب ، ط] – 19 ا ز ي ح : ا ب ز ح [ب] ا ز ر ح [ط] – 20 قطاعيْ : قطاع [ط] / ا ز ن ح : ا ز ر ح [ط] / ک ا ز ن ح : ک ا ز ر ح [ط] / ا ج ل د ح ز ن : ا ح ل د ح ز ن [ب ، ط] – 22 ا ج ق د ح ن ز : ا ج ف د ح ز ر [ط] / ک ا ح ن ز : ک ا ح ر ر [ط].

تكون نسبة القطاع الكري، الذي زاويتُه زاويةُ مخروط ا ب جـ د التي عند نقطة آ ، إلى القطاع الكري، الذي زاويته زاوية مخروط ا هـ ز ح، التي عند نقطة آ، أعظمَ من نسبة مخروط ك ا جـ ق د إلى مخروط ك ا ز ن ح، ونسبةُ مخروط ك ا ز ق د إلى مخروط ك ا ز ن ح أعظمَ من نسبة مخروط ك ا جـ د المستقيم الخطوط، إلى مخروط ك ا ز ح المستقيم الخطوط. فنسبةُ القطاع الكري، الذي زاويتُه زاويةُ مخروط ا ب جـ د التي عند نقطة آ، إلى القطاع الكري، الذي زاويتُه زاويةُ مخروطِ ا هـ ز ح، التي عند نقطة آ، أعظم من نسبة مخروط ا ك جـ د المستقيم الخطوط / إلى مخروط ا ك ز ح المستقيم الخطوط. ونسبةُ القطاع الكري إلى القطاع ط - ٤٩٧ الكري كنسبة زاويته التي عند نقطة آ التي هي مركزُ الكرة، إلى زاوية القطاع الآخر، التي عند نقطة آ. ونسبةُ مخروط ا ك جـ د إلى مخروط ا ك ز ح هي كنسبة مثلث ك جـ د إلى مثلث ك ز ح، ونسبةُ مثلث ك جـ د إلى مثلث ك ز ح / هي كنسبة جـ ك إلى ك ز مثنّاة. ونسبة ط - ٤٩٨ جـ ك إلى ك ز مثنّاةً هي كنسبة ب جـ إلى هـ ز مثنّاةً، ونسبة ب جـ إلى هـ ز مثنّاةً هي كنسبة مثلث ب جـ د إلى مثلث هـ ز ح. فنسبةُ زاويةِ مخروطِ ا ب جـ د، التي عند نقطة آ، إلى زاويةِ مخروط ا ك ز ح، التي عند نقطة آ، أعظمُ من نسبة مثلث ب جـ د إلى مثلث هـ ز ح. ونسبةُ زاويةِ المخروط – الذي مخروطُ ا ب جـ د جزءٌ منه – التي عند نقطة آ، إلى زاوية مخروط ا ب جـ د، التي عند نقطة آ، / كنسبة جميع قاعدة المخروط إلى مثلث ب جـ د. ونسبة زاوية ب - ٩٩ - ظ مخروط ا هـ ز ح إلى زاوية المخروط، الذي مخروطُ ا هـ ز ح جزءٌ منه، كنسبة مثلث هـ ز ح إلى جميع قاعدة المخروط. فنسبةُ زاوية المخروط الأعظم، التي عند نقطة آ، إلى زاوية المخروط الأصغر، التي عند نقطة آ، أعظمُ من نسبة قاعدة المخروط الأعظم إلى قاعدة المخروط الأصغر؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

3 ك ا ز ق د: ك ا جـ ق د [ب، ط] / – 9 آ ونسبة: كتبها ناسخ [ب] اف نسبة، وهكذا كتبها ناسخ [ط] ثم استدركها وضرب على الفاء بالقلم – 12 زاوية (الثانية): ناقصة [ب].



〈**مقدّمة يَ**〉 كل مخروطين مستقيمي الخطوط يقعان في كرة، وتكون قاعدةُ أحدهما أصغر / ب - ١٠٠ - و من قاعدة الآخر وأكثر أضلاعًا، فإن نسبة زاوية المخروط العظيم القاعدة إلى زاوية المخروط الصغير القاعدة أعظمُ من نسبة القاعدة إلى القاعدة.

وذلك يكون في المكعب وذي الاثنتي عشرة قاعدة.

فليكن مركز الكرة نقطة آ، ولنعمل في هذين المخروطين مثل ما عملنا في المخروطين اللذين قبل هذين، أعني بأن نقسم قاعدة كل واحدٍ منها إلى مثلثات. فلأن إحدى القاعدتين أصغرُ من الأخرى، كانت 〈قاعدة صغرى عدد أضلاعها مثل عدد أضلاع القاعدة العظمى〉 حتى كانت القاعدتان متشابهتين، وكانت الدائرة، التي تحيط بالقاعدة الصغرى الأكثر أضلاعًا وكانت مساوية للقاعدة الصغرى القليلة الأضلاع 〈أصغر من الدائرة التي تحيط بالقاعدة الصغرى القليلة الأضلاع، و〉كانت الدائرة التي تحيط بها أصغر بكثير. فيكون العمود الخارج إلى القاعدة الصغرى أعظم من / العمود الخارج إلى القاعدة العظمى. ط - ٤٩٩

وليكن مركزُ قاعدة المخروط العظيم القاعدةِ نقطةَ بَ، وأحدُ مثلثاته مثلث ب ج د، ونصل

4 الاثنتي عشرة: الاثنى عشر [ب] – 7 كانت (الأولى): ناقصة [ط] يكون [ب] – 8 وكانت: كانت [ب، ط] / الأكثر: أكثر [ب، ط].

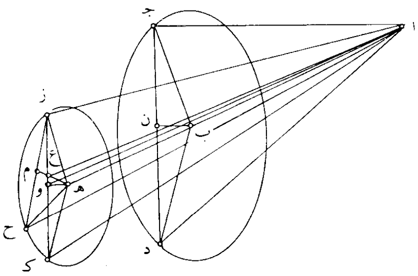
ا ب ا جـ ا د فيكون ا ب عمودًا على سطح مثلث ب جـ د، ونُخرج ا ب، ونجعل ا هـ مثلَ عمود المخروطِ الآخر. وليكن مثلث هـ ز ح مساويًا لأحد مثلثات المخروط الآخر. و⟨ليكن سطحه⟩ موازيًا لسطح مثلث ب جـ د، وليكن هـ ز موازيًا لخط ب جـ. فيكون هـ ح غير موازٍ لخط ب د، لأن زاوية ز هـ ح أصغرُ من زاوية جـ ب د. ونجعلُ زاوية ز هـ ك مساويةً لزاوية جـ ب د، ولتكن نقطة ك على محيط الدائرة المحيطة بالقاعدة. ونصلُ ا ز ا ح ا ك ز ح ز ك، ونقسم جـ د بنصفين على نقطة ن، ونصلُ ب ن، فيكون عمودًا على خطّ جـ د؛ ونقسمُ ز ح بنصفين على نقطةِ م، ونصلُ هـ م، فيكون عمودًا على خط ز ح، ونصلُ خطوط ا ن ا م ا و [ز ح]، ونقسم ز ك بنصفين على نقطة و، ونصل هـ و، فيكون عمودًا على خطّ ز ك، فنقسمُ زوايا المخروطات الثلاثة بنصفين نصفين – أعني مخروط ا ب جـ د ومخروط ا هـ ز ح ومخروط ا هـ ز ك. فلأن مثلث هـ ز ك شبيه بمثلث ب جـ د، تكون نسبة زاوية / مخروط ا ب جـ د إلى زاوية مخروط ا هـ ز ك أعظم من نسبة مثلث ب جـ د إلى مثلث هـ ز ك، كما تبيّن في الشكل الذي قبل هذا. فتكون نسبة زاوية مخروط ا ب جـ د إلى زاوية مخروط ا هـ ز و أعظم من نسبة مثلث ب جـ د إلى مثلث هـ ز و. ولأن زاوية ز هـ ك أعظمُ من زاوية ز هـ ح، تكون زاوية ز هـ و أعظمَ من زاوية ز هـ م، فزاويةُ هـ ز و أصغرُ من زاوية هـ ز م، فخطُّ ز و يقطع خطَّ هـ م، فليقطعْه على نقطة ع، ونصلُ ا ع. فلأن خط ا ز مثلُ خط ا ك، لأن كلَّ واحدٍ منها هو نصفُ قطرِ الكرة، وخطَّ ز و مثلُ خط و ك، تكون زاويةُ ا و ز / قائمةً، فزاويةُ ا ع ز منفرجةٌ. فنسبةُ مثلث هـ ز م إلى مثلث هـ ز ع أعظمُ من نسبة زاويةِ مخروط ا هـ ز م إلى زاوية مخروط ا هـ ز ع، لما تبين في الشكل السادس من هذه المقالة. ولأن زاوية ا و ز قائمة، تكون نسبة مثلث هـ ز و إلى مثلث هـ ع و أعظم من نسبة زاوية مخروطِ ا هـ ز و إلى زاوية مخروط ا هـ ع و، لما تبيَّن في الشكل السابع من هذه المقالة. فلأن نسبة مثلث هـ ز و إلى مثلث هـ ع و أعظمُ من نسبةِ زاويةِ مخروط ا هـ ز و إلى زاوية مخروط ا هـ ع و، تكون نسبةُ مثلث هـ ز ع إلى مثلث هـ ز و أعظمَ من نسبة زاويةِ مخروط ا هـ ز ع إلى زاوية ⟨مخروط⟩ ا هـ ز و. فنسبة مثلث هـ ز م إلى مثلث هـ ز ع أعظم من نسبة زاوية مخروط ا هـ ز م إلى زاوية مخروط ا هـ ز ع. ونسبة مثلث هـ ز ع إلى مثلث هـ ز و أعظم من نسبة زاوية مخروط ا هـ ز ع إلى زاوية ⟨مخروط⟩ ا هـ ز و. ففي

ب – ١٠٠ – ظ

ط – ٥٠٠

2 مساويًا: مساو [ب] – 7 ز ح: ا ز ك [ب، ط] – 8 و: ور [ب، ط] وكتب كل من ناسخ [ب] و[ط] الواو فاءً، ولن نشير إليها فيما بعد – 11 هـ ز ك: هـ ز ح [ب، ط] – 12 ا ب جـ د: ا ب جـ ز [ب] – 13 ب جـ د: ب جـ ز [ب، ط] – 17 هـ ز م: د هـ م [ب، ط] – 19 مخروط (الثانية): ناقصة [ط].

نسبة المساواة، تكون نسبة مثلث هـ ز م إلى مثلث هـ ز و أعظمَ من نسبة زاوية مخروط ا هـ ز م إلى زاوية مخروط ا هـ ز و. فبالعكس تكون نسبةُ زاوية مخروط ا هـ ز و إلى زاوية مخروط ا هـ ز م أعظمَ من نسبة مثلث هـ ز و إلى مثلث هـ ز م، فنسبةُ زاوية مخروط ا ب جـ د إلى زاوية مخروط ا هـ ز و أعظمُ من نسبة مثلث ب جـ د إلى مثلث هـ ز و. ونسبةُ زاوية مخروط ا هـ ز و/ إلى زاوية ب - ١٠١ - و مخروط ا هـ ز م أعظمُ من نسبة مثلث هـ ز و إلى مثلث هـ ز م. ففي نسبة المساواة، تكون نسبة زاوية مخروط ا ب جـ د إلى زاوية مخروطِ ا هـ ز م أعظمَ من نسبة مثلث ب جـ د إلى مثلث هـ ز م. ويتبيَّنُ أن نسبةَ زاوية جميعِ المخروطِ، الذي قاعدتُه أعظمُ، إلى زاوية جميعِ المخروط، الذي قاعدتُه أصغرُ، أعظمُ من نسبةِ جميع قاعدةِ المخروط إلى جميع قاعدة المخروط، /كما تبيّن ط - ٥٠١ في الشكل الذي قبل هذا؛ لأن جميع زاوية المخروط أضعافُ ⟨زاوية مخروط ا ب جـ د و⟩القاعدةَ أضعافٌ لمثلث ب جـ د مثلُ أضعاف الزاوية. وكذلك المخروطُ الآخر، فنسبةُ زاوية المخروطِ المستقيم الخطوط، الذي قاعدتُه أعظمُ، إلى زاوية المخروط المستقيم الخطوط، الذي قاعدتُه أصغرُ وأكثر أضلاعًا، أعظمُ من نسبة القاعدة إلى القاعدة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



⟨**شكل هـ ا**⟩ وأذْ قد قدّمنا هذه المقدمات، فلنعد إلى تَبْيينِ ما قدمناها له.

فنقول: إنّ كل مجسّمين كثيرَيْ القواعدِ – وقواعدُهما متساويةٌ ومتساويةُ الأضلاع ومتشابهةٌ، وقواعدُ أحدهما شبيهةٌ بقواعد الآخر، والسطحُ المحيط بأحدهما مساوٍ للسطح المحيط بالآخر – فإن مساحة المجسّم، الذي قواعدُه أكثرُ عددًا، أعظمُ من مساحة المجسم الآخر.

3 ا ب جـ د: ا ب جـ ز [ب] – 9 قبل: صححها ناسخ [ط] فوق السطر – 11 المستقيم (الأولى): المستقيمه [ب] – 12 وأكثر: فاكثر [ب].

مثال ذلك: مجسما آ ب، كلُّ واحدٍ منها قواعدُه متساويةٌ متشابهةٌ متساويةُ الأضلاع، وقواعدُ أحدهما شبيهةٌ بقواعد الآخر، والسطحُ المحيط بأحدِهما مساوٍ للسطح المحيط بالآخر، وقواعدُ مجسم ب أكثرُ عددًا من قواعدِ مجسم آ.

فأقول: إن مساحة مجسم ب أعظم من مساحة مجسم آ./ ب - ١٠١ - ظ

برهان ذلك: أن العمودَ الواقعَ من مركز الكرةِ المحيطةِ بمجسم ب على قاعدةٍ من قواعد مجسم ب يكون أعظمَ من العمود الواقع من مركز الكرة المحيطة بمجسم آ.

ولتكن ⟨نقطة آ مركزَ الكرة المحيطة بمجسم آ و⟩ نقطةُ ب مركزَ الكرة المحيطة بمجسم ب، وليكن مثلث هـ جـ د أحدَ المثلثات التي تنقسم إليها قاعدةٌ من قواعد مجسم آ، ومثلثُ / ز ح ط ط - ٥٠٢ أحدَ المثلثات التي تنقسم إليها قاعدةٌ من قواعد مجسم ب. ونصل آ هـ ب ز، فيكونان عمودين على سطحي المثلثين، كما تبين من قبل. وليكن عمود ب ز مساويًا لعمود آ هـ، أو أصغرَ منه، إن كان ذلك ممكنًا. ولأن قواعد المجسمين متشابهة، يكون مثلث هـ جـ د شبيهًا بمثلث ز ح ط، ولأن قواعد مجسم ب أكثرُ عددًا من قواعد مجسم آ، ومجموعَ قواعد أحدهما مساوٍ لمجموع قواعد الآخر، فيكون مثلث هـ جـ د أعظمَ من مثلث ز ح ط. وكلُّ واحدٍ منها متساوي الساقين، فكلُّ واحدٍ من خطي هـ جـ هـ د أعظمُ من كل واحدٍ من خطي ز ح ز ط. فنفصلُ خطي هـ ك هـ ل مساويين لخطي ز ح ز ط، ونصل ك ل آ ك آ ل. فإن كان عمود آ هـ مثلَ عمود ب ز، فإن مخروطَ آ هـ ك ل مساوٍ لمخروط ب ز ح ط، وزاويةَ مخروط آ هـ ك ل، التي عند نقطة آ، مساويةٌ لزاوية مخروط ب ز ح ط، التي عند نقطة ب. ولأن قواعد مجسم آ متساويةٌ ومتشابهة، تكون نسبةُ زاوية مخروط آ هـ جـ د، التي عند نقطة آ، إلى ثمان زوايا قائمة، كنسبة مخروط آ هـ جـ د إلى جميع المجسم الكثيرِ القواعدِ، وكنسبة مثلث هـ جـ د إلى جميع قواعد المجسم، التي هي السطحُ المحيطُ بالمجسّم. وكذلك تكون نسبةُ زاوية مخروط ب ز ح ط، التي عند نقطة ب، إلى ثمان زوايا قائمة، كنسبة مخروط ب ز ح ط إلى جميع المجسم، وكنسبة مثلث ز ح ط إلى جميع السطحِ المحيطِ بالمجسم. والسطحان المحيطان بالمجسم متساويان، فنسبةُ مثلث هـ جـ د إلى جميع السطحِ المحيطِ بمجسم آ كنسبة زاوية مخروط آ هـ جـ د، التي عند نقطة آ، إلى ثمان زوايا قائمة، ونسبةُ / السطح المحيط بمجسّم ب إلى مثلث ز ح ط / كنسبة ثمان زوايا قائمة إلى ط - ٥٠٣ ب - ١٠٢ - و

3 عددًا: أثبتها ناسخ [ط] فوق السطر – 19 وكنسبة: ونسبة [ط] – 20 وكذلك: أثبتها ناسخ [ب] في الهامش / نسبة: أثبتها فوق السطر [ب] – 23 آ (الأولى): ب [ب، ط].

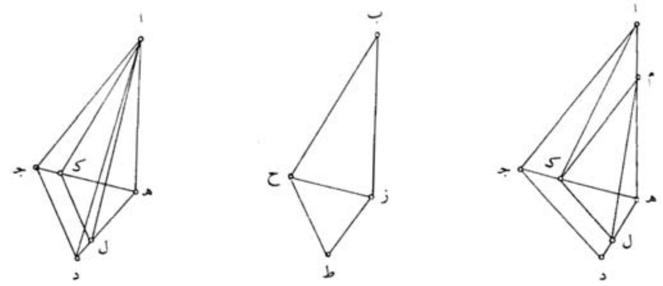
زاوية مخروط ب ز ح ط ، التي عند نقطة ب . ففي نسبة المساواة ، تكون نسبةُ مثلث هـ جـ د إلى مثلث ز ح ط كنسبة زاوية مخروط ا هـ جـ د ، التي عند نقطة ا ، إلى زاوية مخروط ب ز ح ط ، التي عند نقطة ب . ومخروطُ ا هـ ك ل مساوٍ لمخروط ب ز ح ط ، وشبيه به ، وزاويتُه ، التي عند نقطة ا ، مساويةٌ للزاوية ، التي عند نقطة ب ، ومثلثُ هـ ك ل مساوٍ لمثلث ز ح ط ، فنسبةُ مثلث هـ جـ د إلى مثلث هـ ك ل كنسبة زاوية مخروط ا هـ جـ د ، التي عند نقطة ا ، إلى زاوية مخروط ا هـ ك ل ، التي عند نقطة ا ؛ وهذا محال لأنه قد تبين في الشكل الثامن من هذه المقالة أن نسبةَ مثلث هـ جـ د إلى مثلث هـ ك ل أعظم من نسبة زاوية مخروط ا هـ جـ د ، التي عند نقطة ا ، إلى زاوية مخروط ا هـ ك ل ، التي عند نقطة ا ، فليس عمود ا هـ مثلَ عمود ز ب .

وإن كان عمود ب ز أصغرَ من عمود ا هـ ، فصلنا هـ م مثل ب ز ، ووصلنا خطي م ك م ل ، فيكون مخروط م هـ ك ل مساويًا لمخروط ب ز ح ط ، وزاويتُه ، التي عند نقطة م ، مساويةً للزاوية التي عند نقطة ب ؛ فتكون نسبة مثلث هـ جـ د إلى مثلث هـ ك ل كنسبة زاوية مخروط ا هـ جـ د ، التي عند نقطة ا ، إلى زاوية مخروط م هـ ك ل ، التي عند نقطة م . لكن زاوية هـ م ك المسطحةَ أعظمُ من زاوية هـ ا ك ، وزاوية هـ م ل أعظمُ من زاوية هـ ا ل ، وزاوية ك م ل أعظمُ من زاوية ك ا ل ، لأن المثلثين متساويا السّاقين ، وضلعا ا ك ا ل أعظمُ من ضلعي م ك م ل ، وقاعدةُ المثلثين واحدةٌ . فزاويةُ ك م ل أعظمُ من زاوية ك ا ل . فالزوايا المسطحةُ المحيطةُ بزاوية مخروط م هـ ك ل المجسّمة ، التي عند نقطة م / أعظمُ من الزوايا المسطحة المحيطة بزاوية مخروط ا هـ ك ل المجسّمة ، التي عند نقطة ا . فزاوية مخروط م هـ ك ل المجسّمة ، التي عند نقطة م ، أعظمُ من زاوية مخروط ا هـ ك ل التي عند نقطة ا . فنسبة مثلث جـ هـ د إلى مثلث / ك هـ ل أعظم من نسبة زاوية مخروط ا هـ جـ د ، التي عند نقطة ا ، إلى زاوية مخروط ا هـ ك ل ، التي عند نقطة ا ، فنسبة زاوية مخروط ا جـ هـ د ، التي عند نقطة ا ، ⟨إلى زاوية مخروط ا هـ ك ل التي عند نقطة ا أعظم من نسبة زاوية مخروط ا هـ جـ د التي عند نقطة ا⟩ إلى زاوية مخروط م هـ ك ل التي عند نقطة م ؛ وقد كانت هاتان النسبتان متساويتين ، وهذا محال ؛ فليس عمود ب ز بأصغر من عمود ا هـ . وقد تبيّن أنه ليس بمساوٍ له ، فعمود ب ز

ط - ٥٠٤ ب - ١٠٢ - ظ

12 هـ ك ل : هـ ك ن [ط] — 14 هـ م ك : م هـ ك [ب ، ط] — 15 متساويا : متساوي [ب] — 21 زاوية (الثانية) : ناقصة [ب] فوق السطر [ط] / مخروط ا جـ هـ د : مثلث جـ هـ د [ب ، ط] — 23 زاوية : أثبتها ناسخ [ط] في الهامش.

أعظم من عمود آ هـ. وضرْبُ عمود ب ز في ثلث جميع قواعد مجسم ب هو مساحة مجسم ب ، وضرب عمود آ هـ في ثلث جميع قواعد مجسم آ هو مساحة مجسم آ. وجميعُ قواعد مجسم ب مساويةٌ لجميعِ قواعد مجسم آ بالفرْض، وعمود ب ز أعظمُ من عمود آ هـ ، فمساحةُ مجسم ب أعظمُ من مساحة مجسم آ ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



⟨**شكل هـ''**⟩ ونقول أيضـًا: إن كل مجسمين متساويَيْ القواعد، وقواعدُهما متساوية الأضلاع ومتشابهة، فقواعدُ أحدهما شبيهةٌ بقواعد الآخر، وقواعدُ أحدِ المجسمين أكثرُ عددًا من قواعد المجسم الآخر،/ إذا أحاط بهما كرةٌ واحدة، فإنّ السطح المحيط بجميع المجسم، الذي قواعده ط - ٥٠٥ أكثرُ عددًا، أعظمُ من السطح المحيط بالمجسم الآخر، ومساحةُ المجسم الأكثرِ قواعدَ أعظمُ من مساحة المجسم الآخر.

فلتكن كرةٌ مركزُها نقطة آ ، وليقعْ فيها مجسّمان على الصفة التي / قدّمناها. ب - ١٠٣ -

فأقول: إن المجسم الذي هو أكثرُ قواعدَ أعظمُ سطحًا وأعظم مساحةً.

برهان ذلك: أنّ قواعد أحد المجسّمين شبيهةٌ بقواعدِ المجسّم الآخر. فالزاويةُ المجسمة – التي عند مركز الكرة، التي تُوترها قاعدة المجسم، الذي قواعدُه أكثرُ عددًا – تكون أصغرَ من الزاوية المجسمة التي عند مركز الكرة التي تُوترها قاعدةُ المجسم القليلِ القواعد؛ وذلك لأن نسبة كل واحدة من الزاويتين المجسّمتين إلى ثمان زوايا قائمة مجسمة كنسبة القاعدة التي توتر تلك الزاوية إلى جميع القواعد المتصلة بها، التي هي السطحُ المحيطُ بالمجسم. ونسبةُ قاعدة المجسم – الذي قواعدُه أكثر

6 فقواعد: بقواعد [ب] – 7 المجسم (الأولى): ناقصة [ط] – 8 قواعدَ: قواعدا [ط] – 11 قواعد: قواعدا [ط] – 12 أحد: ناقصة [ب] – 15 ثمان: ثماني [ط] وهو جائز أيضـًا، ولن نشير إليها مرة أخرى.

عددًا – إلى جميع قواعدِه، أصغرُ من نسبة قاعدة المجسم القليلِ القواعد إلى جميع قواعده، فالزاوية المجسمة التي توترها قاعدة المجسم الذي قواعده أكثر عددًا، أصغر من الزاوية المجسمة التي توترها قاعدة المجسم القليل القواعد. وعددُ الزوايا المسطحةِ المحيطة بإحدى الزاويتين المجسمتين مساويةٌ لعدد الزوايا المسطحةِ المحيطة بالزاوية المجسمة الأخرى. والزوايا المسطّحةُ المحيطةُ بكل واحدةٍ من الزاويتين المجسمتين متساويةٌ، فكلّ واحدة من الزوايا المسطحةِ المتساوية التي تحيط بالزاوية المجسّمة الصغرى أصغرُ من كل واحدةٍ من الزوايا المسطحةِ المتساوية المحيطة بالزاوية / ط - ٥٠٦ المجسّمة العظمى؛ لأنه لو كانت الزوايا المسطحةُ المحيطة بالزاوية المجسمة الصغرى مساويةً للزوايا المسطحة المحيطةِ بالزاوية المجسمة العظمى، كانت الزاويتان المجسّمتان متساويتين. ولو كانت الزوايا المسطّحة المحيطةُ بالزاوية المجسمة الصغرى أعظمَ من الزوايا المسطحةِ المحيطة بالزاوية المجسمة العظمى، كانت الزاوية المجسمة الصغرى أعظمَ من الزاوية المجسّمة العظمى، وهذا محالٌ. فكلُّ واحدة من الزوايا المسطّحةِ المحيطة بالزاوية المجسمة الصغرى أصغرُ من كل واحدة من / الزوايا المسطحة المحيطة بالزاوية المجسمة العظمى. فقد يمكن أن يقع جميعُ الزاوية المجسمة ب - ١٠٣ - الصغرى في داخل الزاويةِ المجسمة العظمى. وإذا كان ذلك كذلك، فإن الدائرة المحيطة بالقاعدة التي توتر الزاوية المجسّمة الصغرى قد يمكن أن تقع تحت الدائرة المحيطة بالقاعدة التي توتر الزاويةَ المجسمة العظمى. فإذا كانت الدائرة تحت الدائرة – وهما في كرة واحدة – فإن الدائرة السفلى تكون أصغر من الدائرة العليا. وإذا كانت أصغر، كان الخط الذي يخرج من مركز الكرة إلى الدائرة الصغرى أعظمَ من الخط الخارج من مركز الكرة إلى مركز الدائرة العظمى. والخط الخارج من مركز الكرة إلى مركز كل دائرة فيها – إذا كان محيط الدائرة في سطح الكرة – يكون عمودًا على سطح الدائرة، وعمودًا على سطح كل شكل يكون في الدائرة. والعمودُ الذي يخرج من مركز الكرة القائم على سطح قاعدة المجسم – الذي قواعدُه أكثرُ عددًا – يكون أعظم من العمود الخارج من مركز الكرة القائم على سطحِ قاعدةِ المجسم القليل / القواعدِ. ط - ٥٠٧ وقد تبيّن من هذا البيانِ أيضًا أن كل واحدة من قواعد المجسم – الذي قواعدُه أكثرُ عددًا – أصغرُ من كل واحدةٍ من قواعد المجسم القليلِ القواعد؛ لأن قواعد أحد المجسمين شبيهةٌ بقواعد المجسم الآخر، والدائرةَ

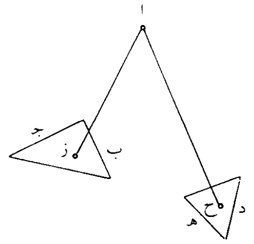
3-2 الذي... المجسم: ناقصة [ط] – 4 مساويةٌ: خبر المبتدأ «عدد» وتأنيث الخبر هنا جائز / المحيطة (الأولى): ناقصة [ب] – 15 فإذا: وإذا [ط] – 16 العليا: العظمى [ب] – 17 الكرة: ناقصة [ط] – 19 والعمود: فالعمود [ب] – 21 تبين: يتبين [ب] – 22 واحدة (الثانية): واحد [ب، ط].

المحيطةَ بقاعدة المجسم الأكثرِ قواعد أصغرُ. فالقاعدة التي في الدائرة الصغرى أصغر من القاعدة التي في الدائرة العظمى.

فلتكن القاعدة العظمى ب ج، والقاعدة الصغرى د هـ، وليكن العمود الخارج من مركز الكرة إلى قاعدة د هـ عمود ا ح. فنسبة الزاوية المجسمة العظمى إلى الزاوية المجسمة الصغرى مؤلفةٌ من نسبة الزاوية العظمى إلى ثمان زوايا قائمة، ومن نسبة ثمان زوايا قائمة إلى الزاوية الصغرى. ونسبة الزاوية العظمى إلى ثمان زوايا قائمة كنسبة قاعدة ب ج إلى جميع القواعد المتصلة / بها التي هي جميع سطح المجسم. لأن عدد الزوايا وعدد القواعد متساويان، والزوايا ب - ٠٤ متساوية والقواعد متساوية، ونسبة ثمان زوايا قائمة إلى الزاوية الصغرى كنسبة جميع قواعد المجسم المتصلة بقاعدة د هـ إلى قاعدة د هـ، فنسبةُ الزاوية العظمى إلى الزاوية الصغرى مؤلفةٌ من نسبة قاعدة ب ج إلى جميع القواعد المتصلة بها، ومن نسبة جميع القواعد المتصلة بقاعدة د هـ إلى قاعدة د هـ. ونسبةُ الزاوية العظمى إلى الزاويةِ الصغرى هي أعظمُ من نسبة قاعدة ب ج إلى قاعدة د هـ، كما تبين في الشكل التاسع من هذه المقالة. فالنسبةُ المؤلّفة من نسبة قاعدة ب ج إلى جميع سطح المجسم، الذي قاعدته ب ج، ومن نسبة جميع سطح المجسم الذي قاعدته د هـ إلى قاعدة د هـ، أعظمُ من نسبة قاعدة ب ج / إلى قاعدة د هـ. ونسبة قاعدة ب ج إلى قاعدة ط - ٥٠٨ د هـ مؤلفةٌ من نسبة قاعدة ب ج إلى جميع سطح المجسم الذي قاعدتُه ب ج، ومن نسبة جميع سطح هذا المجسّم إلى قاعدة د هـ. فالنسبة المؤلفة من نسبة قاعدة ب ج إلى جميع سطح المجسم الذي قاعدته ب ج، ومن نسبة جميع سطح المجسم الذي قاعدته د هـ إلى قاعدة د هـ أعظم من النسبة المؤلفة من نسبة قاعدة ب ج إلى جميع سطح المجسم الذي قاعدته ب ج، ومن نسبة جميع سطح هذا المجسم إلى قاعدة د هـ. فنُسقط النسبة المشترَكة، فتبقى نسبة جميع سطح المجسم، الذي قاعدته د هـ، إلى قاعدة د هـ، أعظم من نسبة جميع سطح المجسم الذي قاعدته ب ج، إلى قاعدة د هـ. فجميع سطح المجسم، الذي قاعدته د هـ، أعظم من جميع سطح المجسم الذي قاعدته ب ج. وعمود ا ح أعظم من عمود ا ز، فضرب عمود ا ح في ثلث جميع سطح المجسّم الذي قاعدته د هـ أعظم من ضرب ا ز في ثلث جميع سطح المجسم الذي قاعدته ب ج. وضرب العمود في ثلث جميع قواعد الشكل المتساوي القواعد، / الذي تحيط به ب - ١٠٤ -

1 قواعد: قواعدا [ط] – 16 إلى (الأولى): الذي [ب، ط] – 19 جميع (الأولى): كتبها «جمع» ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] – 20 المجسم (الثانية): الجسم [ط] أثبت ناسخ [ب] في الهامش «الجسم».

كرة، هو مساحة ذلك المجسّم. فمساحة المجسم الذي قواعده أكثر عددًا أعظم من مساحة المجسم الذي قواعده أقلّ عددًا.



فكل مجسمين يقعان في كرةٍ ويكونان متساويَيْ القواعد ومتشابهين، وقواعدُ أحدهما شبيهة بقواعد الآخر، وقواعدُ أحدهما أكثر عددًا من قواعد الآخر، فإن السطح المحيط بالمجسم – الذي قواعدُه أكثرُ عددًا – أعظمُ من السطح المحيط بالمجسم الذي قواعده أقل عددًا، ومساحة المجسم الكثير القواعدِ أيضـًا أعظمُ من مساحة المجسم القليلِ القواعد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وإن كانت / قواعد المجسم – الذي قواعدُه أكثر عددًا – أكثرَ أضلاعًا من أضلاع قواعد ط - ٥٠٩
المجسم الآخر، وكان العمود الذي يخرج إلى قاعدة المجسم – الذي قواعده أكثر عددًا – أعظمَ من العمود الخارج إلى قاعدة المجسم الآخر، فإن سطح المجسّم – الذي قواعده أكثر عددًا – أيضـًا أعظم من سطح المجسم الآخر، ومساحته أعظمُ من مساحته.

وذلك أنه يتَبيَّنُ، كما تبين في الشكل الذي تقدم، أن نسبة الزاوية المجسّمة إلى الزاوية المجسّمة مؤلفةٌ من نسبة القاعدةِ إلى جميع القواعدِ المتصلةِ بها ومن نسبة جميعِ القواعد المتصلةِ بالقاعدة الأخرى إلى القاعدة الأخرى. ونسبة الزاوية المجسمة إلى الزاوية المجسمة أعظمُ من نسبة القاعدة إلى القاعدة، كما تبيّن في الشكل العاشر من هذه المقالة.

فيتبيّنُ، كما تبيَّنَ فيما تقدم، أن السطح المحيطَ بالمجسّم – الذي قواعدُه أكثرُ عددًا – أعظمُ
من السَّطْح المحيط بالمجسم القليل القواعدِ، وأن / مساحةَ المجسمِ الذي قواعدُه أكثرُ عددًا أعظمُ ب - ١٠٥ - و
من مساحة المجسّم الآخر.

1 فمساحة المجسم: فالمجسم [ب، ط] – 3 متشابهين: متشابهه [ب، ط] – 11 تبين: يتبين [ب] – 14 العاشر: يَ [ب].

فقد تبيّن، من جميع ما بينّاه في هذه المقالة، أن الكرة أوسعُ الأشكال المجسّمة التي إحاطاتُها متساويةٌ، وأن الدائرة أوسعُ الأشكال المسطحة التي إحاطاتها متساوية، وأن ما كان أقربَ إلى الاستدارة من هذه الأشكال كان أوسع مما بَعُدَ منها. وذلك ما قصدنا لتبيينه في هذه المقالة.

تمت المقالة والحمد للّه ربّ العالمين والصلاة
على رسوله محمّد المصطفى وآله أجمعين.

2 وأن ... متساوية: ناقصة [ط] – 6 المصطفى: ناقصة [ب].

مُلْحَق

تَقْريبُ الجُذورِ

١ – الشَرْحُ الرياضِيُّ

لقد اهْتَمَّ ابنُ الهَيْثَمِ، عَلَى غِرارِ الكَثيرينَ من مُعاصِريهِ، باسْتِخْراجِ الجُذورِ التَرْبيعِيَّةِ والتَكْعيبِيَّةِ. ومن البَديهِيِّ أنّه قد واجَهَ هنا أيضاً مَسْأَلَةَ التَقْريب؛ ولَكِن، خِلافاً لِلمَجالاتِ الأُخْرَى الَّتِي تَناوَلَ ابنُ الهَيْثَمِ فيها تَحْديداتِ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ، فإنّه هَذِهِ المَرَّةَ لا يَعْمَلُ لا بِواسِطَةِ مُصادَرَةِ أرشميدس ولا بطَريقَةِ الاسْتِنفادِ. فَهَذانِ المَفْهومانِ، اللَّذانِ يُوَحِّدانِ بشَكْلٍ ما مُخْتَلِفَ بُحوثِ اللاّمُتَناهِيَةِ في الصِغَرِ، غائِبانِ. وبِهَذا المَعْنَى تَحْديداً، يُشَكِّلُ تَقْريبُ الجُذورِ حَقْلاً مُنْفَصِلاً لن يَتَكامَلَ كَجُزْءٍ في هَذِهِ البُحوثِ، مع الأجْزاءِ الأُخْرَى، إلا في وَقْتٍ مُتَأَخِّرٍ. وسَوْفَ نُبَيِّنُ في المُجَلَّدِ الثالِثِ أنّ هَذا التَكامُلَ قد حَدَثَ بِفَضْلِ عِلْمِ الجَبْرِ، أوَّلاً في القَرْنِ الثاني عَشَرَ في أعْمالِ السَمَوْأَلِ وشَرَفِ الدِّينِ الطوسِيِّ، ومن ثُمّ بَعْدَ ذَلِكَ بخَمْسَةِ قُرونٍ، ولَكِن بشُمولِيَّةٍ وانطِلاقَةٍ مُخْتَلِفَتَيْنِ كُلِّيّاً. وقد دَفَعَنا هَذا التَأْثيرُ المُسْتَقْبَلِيُّ الباهِرُ تَحْديداً لنَتَناوَلَ هنا نَصَّيِ ابنِ الهَيْثَمِ هَذَيْنِ، ولَكِن كَمُلْحَقٍ، وذَلِكَ بُغْيَةَ الدَلالَةِ عَلَى الفارِقِ في وَضْعِهِما. أمّا النَصّانِ اللَّذانِ وَصَلا إلينا – واكتُشِفا مُنْذُ فَتْرَةٍ وَجيزَةٍ – فقد كُرِّسا لِدِراسَةِ الجَذْرِ التَرْبيعِيِّ والجَذْرِ التَكْعيبِيِّ تَرْتيباً. وإذا صَدَقَت شَهادَةُ المُفَهْرِسينَ القُدَماءِ، فإنّ هَذَيْنِ العَمَلَيْنِ هُما الوَحيدانِ اللّذانِ كَتَبَهما ابنُ الهَيْثَمِ حَوْلَ هَذا المَوْضوعِ.

لِنَبْدَأْ بِاسْتِخْلاصِ مَسارِ ابنِ الهَيْثَمِ، مُتَعَمِّدينَ القِيامَ بهَذا الأمْرِ، بِواسِطَةِ لُغَةٍ

مُخْتَلِفَةٍ، وذَلِكَ بُغْيَةَ الإحاطَةِ بالأفْكارِ الَّتي تُؤَسِّسُ[1] لِهَذا المَسارِ. سَوْفَ نُبَيِّنُ أنَّ لَدَى ابنِ الهَيْثَمِ خَوارِزْمِيَّةٌ سَتَقودُنا إلى تِلْكَ المَنْسوبَةِ إلى روفيني – هورنر *(Ruffini – Horner)*، وأنّه حَتَّى ولو بَدا أنَّ ابنَ الهَيْثَمِ قد تَقاسَمَ مَعْرِفَةَ هَذِهِ الخَوارِزْمِيَّةِ مع مُعاصِريهِ، فإنّه من ناحِيَةٍ أُخْرَى قد تَمَيَّزَ عن الجَميعِ بِتَوْقِهِ لإيجادِ التَأْسيسِ الرِياضِيِّ لِهَذِهِ الخَوارِزْمِيَّةِ في حالَةِ الجَذْرِ التَرْبيعِيِّ.

لِنَأخُذْ حُدودِيَّةً $f(x)$ ذاتَ مُعامِلاتٍ صَحيحَةٍ، وَلْنَأْخُذِ المُعادَلَةَ

$$f(x) = N. \tag{1}$$

لِيَكُنْ s جَذْراً مُوجِباً لِهَذِهِ المُعادَلَةِ، وَلْنَجْعَلْ

$$(s_i)_{i\geq 0}$$

مُتَوالِيَةً من الأَعْدادِ الصَحيحَةِ المُوجِبَةِ، بِحَيْثُ تَكونُ المَجاميعُ الجُزْئِيَّةُ لِعَناصِرِها مُحَقِّقَةً للعَلاقَةِ

$$\sum_{i=0}^{k} s_i \leq s;$$

وتُسَمَّى الأَعْدادُ s_i أَجْزاءَ s.

من البَديهِيِّ أنَّ جُذورَ المُعادَلَةِ

$$f_0(x) = f(x + s_0) - f(s_0) = N - f(s_0) = N_0 \tag{2}$$

تَنْتُجُ من جُذورِ (1)، بإنْقاصِ s_0 من كُلِّ جَذْرٍ لِ (1).

لِنَأخُذْ $i > 0$ وَلْنُكَوِّنْ بالتَكْرارِ المُعادَلَةَ

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f(x + s_0 + \ldots + s_i) - f(s_0 + \ldots + s_i) \\ &= [N - f(s_0 + \ldots + s_{i-1})] - [f(s_0 + \ldots + s_i) - f(s_0 + \ldots + s_{i-1}) = N_i; \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1] انْظُرْ:

Sharaf al – Din al – Ṭūsī, *Œuvres Mathématiques. Algèbre et géométrie au XII^e siècle.* Texte établi et traduit par R. Rashed, 2 vol. (Paris, 1998), tome I, p.p. LXXX – LXXXIX.

رشدي راشد، ***الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر، مؤلّفات شرف الدين الطوسيّ***، مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت ١٩٩٨(ترجمة د. نقولا فارس).

فمَثَلاً إذا كانَ $i = 1$، يَكونُ لَدَيْنا

$$f_1(x) = f(x + s_0 + s_1) - f(s_0 + s_1) = [N - f(s_0)] - [f(s_0 + s_1) - f(s_0)]$$
$$= N_0 - [f(s_0 + s_1) - f(s_0)] = N_1.$$

نَجدُ الطَريقَةَ الَّتي يُطَبِّقُها ابنُ الهَيْثَمِ ويُوردُ تَعْليلَها، مُسْتَخْدَمَةً في أعْمالِ كوشيار بنِ اللَّبّانِ[٢]، وهي تُعْرَفُ بطَريقَةِ روفيني — هورنر. وتُوَفِّرُ هَذِهِ الطَريقَةُ خَوارِزْمِيَّةً كَفيلَةً بإعْطاءِ مُعامِلاتِ المُعادَلَةِ ذاتِ المَرْتَبَةِ i انطِلاقاً من مُعامِلاتِ المُعادَلَةِ ذاتِ المَرْتَبَةِ $(i - 1)$. وهنا تَحْديداً تَكْمُنُ الفِكْرَةُ المَبْدَئِيَّةُ لِهَذِهِ الطَريقَةِ.

لِنَبْدَأْ باسْتِخْراجِ الجَذْرِ النونيِّ (من الدَرَجَةِ n) الَّذي عُرِفَ في القَرْنِ الثاني عَشَرَ، ورُبَّما قَبْلَ ذَلِكَ حَتّى. لَدَيْنا

$$f(x) = x^n;$$

إنّ مَعْرِفَةَ الصيغَةِ الحَدّانِيَّةِ الَّتي أوْرَدَها الكَرَجيُّ في القَرْنِ العاشِرِ — وقد ذَكَرْنا هَذا الأمْرَ — يَجْعَلُنا بغِنىً عن جَدْوَلِ هورنر. إذ إنّ مُعامِلاتِ المُعادَلَةِ ذاتِ المَرْتَبَةِ i في هَذِهِ الحالَةِ، تَكونُ كما يَلي:

$$\binom{n}{k} (s_0 + \ldots + s_{i-1})^{n-k}, (k = 1, \ldots, n)$$

وَ

$$N_i = N_{i-1} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (s_0 + \ldots + s_{i-1})^{n-k} s_i^k. \qquad (4)$$

وبَعْدَ هَذا التَمْهيدِ، لنَعُدْ إلى النَصِّ المَنْسوبِ إلى ابنِ الهَيْثَمِ والمُتَعَلِّقِ بالجُذورِ التَرْبيعِيَّةِ والتَكْعيبِيَّةِ. لِنَجْعَلْ

$$f(x) = x^2 = N$$

[٢] تُرْجِمَ كِتابُ كوشيار بنِ اللَّبّان ***"في أصول حساب الهند"*** إلى الانكليزيّةِ وقد قامَ بتَحْليلِهِ مارتين ليــڤـــي (Martin Levey) ومارڤــين پتروك (Marvin Petruck):

Principles of Hindu Reckoning, The University of Wisconsin Press, Publications in Medieval Science (Madison et Milwaukee, 1965)

وقد نَشَرَ أحمد سعيدان النَصَّ في مَجَلَّةِ مَعْهَدِ المَخْطوطاتِ العَرَبِيَّة، ١٣، (١٩٦٧)، ص. ٥٥ — ٨٣.

فيَكونُ لَدَيْنا حالَتان:

الحالَةُ الأُولَى: العَدَدُ N يَكونُ مُرَبَّعاً لعَدَدٍ صَحيحٍ. لِنَفْتَرِضْ أنّ الجَذْرَ له الشَكْلُ التالي:

$$s = s_0 + \ldots + s_h,$$

حَيْثُ يَكونُ

$$s_i = \sigma_i\, 10^{\,h-1},\ (0 \le i \le h)$$

لقد تَمَحْوَرَت مُهِمَّةُ رِياضِيِّي القَرْنِ الحادي عَشَرَ في البَدْءِ، حَوْلَ إيجادِ h إضافَةً إلى الأعْدادِ σ_i. لِنَكْتُبِ الصِيَغَ *(4)* بالصورَةِ التالِيَةِ:

$$2(s_0 + \ldots + s_{i-1}),\ 1,\quad N_i = N_{i-1} - [2(s_0 + \ldots + s_{i-1})s_i + s_i^2].$$

ونَحْصُلُ هَكَذا عَلَى σ_0 من العَلاقَةِ:

$$\sigma_0^2 10^{\,2h} \le N < (\sigma_0 + 1)^2 \,.\, 10^{\,2h}$$

كما نَحْصُلُ عَلَى $\sigma_1, \ldots, \sigma_h$ بِواسِطَةِ الصيغَةِ

$$\sigma_i = \frac{N_i}{2(s_0 + \ldots + s_{i-1}).10^{h-1}}$$

وتُحْتَسَبُ N_i، $(0 \le i \le h)$، في هَذِهِ العِباراتِ انطِلاقاً من N_{i-1} وذَلِكَ بأن يُطْرَحَ منها $[2(s_0 + \ldots + s_{i-1})s_i + s_i^2]$. فإذا كانَ $i = h$، نَجِدُ أنّ $N_h = 0$.

يَصِفُ المُؤَلِّفُ ويُبَرْهِنُ خَوارِزْمِيَّةً لاسْتِخْراجِ الجَذْرِ التَرْبيعِيِّ. فَلْنَسْتَعْرِضْ مَسارَهُ باخْتِصارٍ مُتَوَخِّينَ في ذَلِكَ الفَصْلَ بَيْنَ التَوْصيفِ والإثْباتِ. فلاسْتِخْراجِ الجَذْرِ التَرْبيعِيِّ أو جُزْئِه الصَحيحِ، نَتَّبِعُ المَراحِلَ التالِيَةَ:

١- نَضَعُ العَدَدَ N الَّذي نُريدُ اسْتِخْراجَ جَذْرِه التَرْبيعِيِّ عَلَى جَدْوَلٍ

٢- نَضَعُ σ_0 في المَوْضِعِ العُشْرِيِّ $2h$

٣- نَطْرَحُ σ_0^2 في هَذا المَوْضِعِ من N، ما يَعْني تَكْوينَ الفارِقِ، $N - s_o^2$

٤- نَضْرِبُ σ_0 بِ 2 ونَقومُ بإزاحَةِ حاصِلِ الضَرْبِ مَوْضِعاً عُشْرِيّاً واحِداً لِجِهَةِ اليَمينِ.

٥- نَقومُ بإيجادِ σ_1 ووَضْعِهِ تَحْتَ المَوْضِعِ العُشْرِيِّ $2h - 2$.

٦- نَضْرِبُ σ_1 بِ $2\sigma_0$ في مَوْضِعِ $2\sigma_0$.

٧- نَطْرَحُ حاصِلَ الضَرْبِ من N_0.

٨- نَطْرَحُ $\sigma_1{}^2$ – في مَوْضِعِ σ_1 من N_0 –، ما يَعْني في النِهايَةِ تَكْوينَ العِبارَةِ

$$N_1 = N_0 - (2s_0 + s_1)\, s_1$$

٩- نَضْرِبُ σ_1 بِ 2 ونَقومُ بإزاحَةِ $2\sigma_0$ وَ $2\sigma_1$ المَوْجودَيْنِ عَلَى التَرْتيبِ تَحْتَ المَوْضِعَيْنِ العُشْرِيَّيْنِ $2h - 1$ وَ $2h - 2$، مَوْضِعاً عُشْرِيّاً واحِداً

١٠- نَقومُ بإيجادِ σ_2 ووَضْعِهِ تَحْتَ المَوْضِعِ العُشْرِيِّ $2h - 4$،

١١- نَضْرِبُ σ_2 بِ $2\sigma_1$ وَ $2\sigma_0$ في مَوْضِعَيهما عَلَى التَرْتيبِ.

١٢- نَطْرَحُ حاصِلَي الضَرْبِ من N_1.

١٣- نَطْرَحُ $\sigma_2{}^2$ – في مَوْضِعِ σ_2 من N_1 – وهذا ما يَعْني تَكْوينَ العِبارَةِ

$$N_2 = N_1 - [2(s_0 + s_1)\, s_2 + s_2{}^2].$$

١٤- ونُعيدُ الكَرَّةَ إلى أن نَحْصُلَ عَلَى $N_h = 0$، وعِنْدَئِذٍ نَقْسِمُ عَلَى 2 كُلاً من $2\sigma_0, 2\sigma_1, \ldots, 2\sigma_h$ في مَوْضِعِهِ لنَحْصُلَ عَلَى الجَذْرِ التَرْبيعِيِّ المَطْلوبِ.

يَصوغُ المُؤَلِّفُ بُرْهانَ هَذِهِ الخَوارِزْمِيَّةِ بالمُصْطَلَحاتِ العامَّةِ المُسْتَعْمَلَةِ في نَظَرِيَّةِ الأعْدادِ الإقليدِيَّةِ. ويَرْتَكِزُ مَبْدَئِيّاً في ذَلِكَ عَلَى خَواصِّ المُتَوالِياتِ الهَنْدَسِيَّةِ الوارِدَةِ في الكِتابِ التاسِعِ من ***الأصول***، وتَحْديداً في القَضِيَّةِ الثامِنَةِ الَّتي يَتَطَرَّقُ إليها بِشَكْلٍ واضِحٍ.

الحالَةُ الثانِيَةُ: العَدَدُ N لا يَكونُ مُرَبَّعاً لعَدَدٍ صَحيحٍ. ويَسْتَعْمِلُ ابنُ الهَيْثَمِ نَفْسَ الطَريقَةِ بُغْيَةَ تَحْديدِ الجُزْءِ الصَحيحِ من الجَذْرِ، ومن ثَمّ، كَصيغَةِ تَقْريبٍ، يُورِدُ

صيغَةَ الخَوارِزْمِيِّ و صيغَةَ "التَقْريبِ الاتِّفاقِيِّ"، اللّتَيْنِ تُكْتَبانِ عَلَى التَوالي، بِواسِطَةِ هَذا الترميز، كما يلي:

$$(s_0+ \ldots + s_h) + \frac{N_h}{2(s_0+\ldots+s_h)}$$

وَ

$$(s_0+ \ldots + s_h) + \frac{N_h}{2(s_0+\ldots+s_h)+1}.$$

وهَكَذا، فإنّ ابنَ الهَيْثَمِ لم يَكْتَفِ بِتَوْصيفِ الخَوارِزْمِيَّةِ كما فَعَلَ كوشيار، إنّما ذَهَبَ أبْعَدَ من ذَلِكَ إلى مَنَحِها الحُجَجَ الرِياضِيَّةَ، مُعَلِّلاً فيها مَسْأَلَةَ إحاطَةِ الجَذْرِ بِهَذَيْنِ التَقْريبَيْنِ.

أمّا المَنْحَى المُتَعَلِّقُ باسْتِخْراجِ الجَذْرِ التَكْعيبِيِّ لعَدَدٍ صَحيحٍ فهُوَ مُماثِلٌ للمَنْحَى السابِقِ. لِنَأخُذْ

$$f(x) = x^3 = N;$$

وهنا أيضاً لَدَيْنا حالَتانِ.

الحالَةُ الأُولَى: العَدَدُ N هُوَ مُكَعَّبٌ لعَدَدٍ صَحيحٍ. وفي هَذِهِ الحالَةِ يُحَدَّدُ العَدَدُ s_0 بِحَيْثُ يَكونُ $s_0^3 < N$. ويَأْخُذُ ابنُ الهَيْثَمِ عَلَى غِرارِ مُعاصِريه

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_h = 1.$$

وتُكتب مُعامِلاتُ المُعادَلَةِ ذاتِ المَرْتَبَةِ i كما يَلي:

$$3(s_0 + i)^2, 3(s_0 + i), 1, N_i = N_{i-1} - [3(s_0 + (i-1))^2 + 3(s_0 + (i-1)) + 1].$$

إذا كانَ N_i مُكَعَّبَ عَدَدٍ صَحيحٍ، فإنّه تُوجَدُ قيمَةٌ k للمُؤَشِّرِ i، بِحَيْثُ يَكونُ $N_k = 0$؛ أي بِحَيْثُ يَكونُ $(s_0 + k)$ الجَذْرَ المَطْلوبَ. ويَقْتَرِحُ ابنُ الهَيْثَمِ لذَلِكَ الخَوارِزْمِيَّةَ التالِيَةَ:

١- نَخْتارُ s_0 بِحَيْثُ يَكونُ $s_0^3 \leq N$.

٢- إن كانَ لَدَيْنا $N = s_0^3$ تَكونُ المَسْأَلَةُ عِنْدَئِذٍ مُنْتَهِيَةً، وإن لم يَكُنْ كذَلِكَ، فَعَلَينا المُتابَعَةُ.

٣- نُكَوِّنُ إذاً $N_1 = N - s_0^3$.

٤- نَأخُذُ $s_1 = s_0 + 1$.

٥- نُكَوِّنُ $N_2 = N_1 - (3s_0^2 + 3s_0 + 1) = N - s_1^3$.

٦- إن كانَ $N_2 = 0$، يَكونُ إذاً s_1 الجَذْرَ المَطْلوبَ، وإن لم يَكُنْ كذَلِكَ، فَعَلَينا المُتابَعَةُ.

٧- نَأخُذُ $s_2 = s_1 + 1$.

٨- نُكَوِّنُ $N_3 - N_2 - (3s_1^2 + 3s_1 + 1) = N - s_2^3$.

٩- إن كانَ $N_3 = 0$، فإنَّ s_2 يَكونُ الجَذْرَ المَطْلوبَ، وإن لم يَكُنْ كذَلِكَ فَعَلَينا البَدْءُ من جَديدٍ.

تَرْتَكِزُ هَذِهِ الخَوارِزْمِيَّةُ، كما هُوَ بَديهِيٌّ، عَلَى الفِكْرَةِ المَذْكورَةِ سابقاً: إذا كانَ العَدَدُ N مُكَعَّبَ عَدَدٍ صَحيحٍ، وإذا كانَ العَدَدُ s_0 يُحَقِّقُ العَلاقَةَ $N > s_0^3$ ، فباسْتِطاعَتِنا أن نَكْتُبَ الجَذْرَ التَكْعيبِيَّ s بالشَكْلِ التالي: $s = s_0 + k$ حَيْثُ يَكونُ العَدَدُ k مَجْهولاً مَوْجوداً في المَجْموعَةِ $\mathbb{N}^*$. فإذا كانَ $s_1 = s_0 + 1$، يَكونُ لَدَيْنا

$$(x + s_1)^3 = N,$$

ويَكونُ العَدَدُ $k - 2$ جَذْراً لِهَذِهِ المُعادَلَةِ الّتي تُكْتَبُ كما يلي:

$$(x + s_2)^3 - s_1^3 = N - s_1^3 = N_1 - (3s_0^2 + 3s_0 + 1) = N_2.$$

وإذا تابَعْنا سَنَصِلُ إلى المُعادَلَةِ

$$(x + s_k)^3 = N,$$

حَيْثُ

$$s_k = s_{k-1} + 1 = s_0 + k,$$

ويَكونُ الصِفْرُ جَذْراً للمُعادَلَةِ الأخيرَةِ. فإذاً s_k هُوَ الجَذْرُ المَطْلوبُ.

الحالَةُ الثانيَةُ: العَدَدُ N لا يَكونُ مُكَعَّباً لعَدَدٍ صَحيحٍ. يَسْتَخْدِمُ ابنُ الهَيْثَمِ الطَريقَةَ نَفْسَها لإيجادِ الجُزْءِ الصَحيحِ للجَذْرِ. يَأْخُذُ هنا القيمَةَ التَقْريبِيَّةَ

$$(s_0+ \ldots + s_h) + \frac{N_h}{3(s_0+\ldots+s_h)^2}$$

وللأسَفِ، إنّ مَخْطوطَةَ هَذا النَصِّ، الَّتي وصَلَتْ إلينا، مَبْتورَةٌ. تُرَى هل أعْطَى ابنُ الهَيْثَمِ في الجُزْءِ المَفْقودِ من النَصِّ، التَقْريبَ الثاني الَّذي عَرَفَهُ مُعاصِروه؟ وهَذا التَقْريبُ هُوَ

$$(s_0+ \ldots + s_h) + \frac{N_h}{3(s_0+\ldots+s_h)^2+3(s_0+\ldots+s_h)+1}.$$

وهذا الأمْرُ بالِغُ الاحْتِمالِ؛ وذَلِكَ أوّلاً بحُجَّةِ التَماثُلِ القائِمِ مع حالَةِ الجَذْرِ التَرْبيعِيِّ، حَيْثُ يُعطي ابنُ الهَيْثَمِ تَقْريبَيْنِ؛ وثانياً لأنّ هَذا التَقْريبَ الأخيرَ كانَ مَعْروفاً جَيِّداً لَدَى مُعاصِري ابنِ الهَيْثَمِ.

ومَهْما يَكُنْ، فإنّنا نَرَى أنّه عِنْدَ مُنْعَطَفِ القَرْنِ العاشِرِ قد كانَت طَريقَةُ روفِّيني — هورنر مَعْروفَةً، وقد جَرَت مُحاوَلاتٌ رِياضِيَّةٌ لِتَعْليلِ اسْتِعْمالِها. ولسَوْفَ تُعمَّمُ هَذِهِ الطَريقَةُ لَدَى الجَبْرِيّينَ نَتيجَةً لاكْتِشافِ صيغَةِ الحَدَّيْنِ وجَدْوَلِ المُعامِلاتِ. ولقد اضْحَى هَذا التَعْميمُ مُمْكِناً عِنْدَ مُنْعَطَفِ ذَلِكَ القَرْنِ، بَعْدَما أوْرَدَ الكَرَجِيُّ تِلْكَ الصيغَةَ وذاك الجَدْوَلَ. وقد كانَ عَدَدُ المُرَشَّحينَ لِلقِيامِ بعَمَلِيَّةِ التَعْميمِ تِلْكَ كَبيراً، نَذْكُرُ منهُم مَثَلاً، البيرونيَّ والخَيَّامَ.

النُصوصُ المَخْطوطِيَّةُ

١ – مَقالَةُ أبي عَليٍّ الحَسَنِ بنِ الحَسَنِ في عِلَّةِ الجَذْرِ وإضْعافِهِ ونَقْلِهِ

٢ – قَوْلٌ لِلحَسَنِ بنِ الحَسَنِ <بنِ> الهَيْثَمِ في اسْتِخْراجِ ضِلْعِ المُكَعَّبِ

بسم الله الرّحمن الرّحيم ١٧ - و

مقالة أبي علي الحسن بن الحسن بن الهيثم
في علّةِ الجذر وإضعافه ونقله

في علّة ذلك: أما ⟨لِمَ⟩ المرتبة الأولى لها جذر والثانية لا جذر لها، وما يلي ذلك مرتبةٌ لها جذر، والتي تليها ما لها جذر؟ فإن علّة ذلك هي أن كل مرتبة من مراتب الحساب الهندي هي عشرة أضعاف المرتبة التي قبلها، والمرتبة الأولى هي الواحد، فجميع المراتب هي على نسبة واحدة، وهي أعداد متناسبة مبتدئة من الواحد. فالثالث من الواحد مربع، وما بعد ذلك بواحد غيرُ مربع، والآخر مربع. وذلك بيّن في الشكل الثامن من المقالة التاسعة من كتاب أقليدس.

فأما لِمَ يضعَّفُ العدد الذي أثبت؟ فإنه ليكون إذا أثبت قبله عدد ثم ضرب في العدد المضعف، كان ما يخرج هو مضروب العدد الثاني في العدد الأول مرتين. وأمّا لِمَ يؤخَّر العدد المضعَّف مرتبةً؟ فإن ذلك لأن مرتبة العدد الأول المثبت هي مرتبة ضلع المربع الذي هو فوقه، فمرتبة ضلع المربع الذي فوقه هي مرتبة المتوسط بين المربع الآخر وبين المربع الأول الذي هو الواحد. وذلك أن نسبة الواحد إلى العدد المتوسط كنسبة العدد المتوسط إلى المربع الآخر، فالذي يخرج من ضرب العدد المتوسط في نفسه هو المربع الآخر، والعدد المتوسط هو ضلع المربع الآخر؛ وكذلك العددُ الذي قبل المتوسط هو ضلع المربع الثاني الذي قبل المربع الآخر، وذلك لأنه متوسط بين الواحد وبين العدد المربع الآخر، لأن عدد المراتب التي أولها الواحد وآخرها المربع الثاني هو عدد فرد، وهو ينقص من العدد الأول الفرد الذي آخره المربع الآخر باثنين؛ فوسطه هو العدد الذي يلي المتوسط الأول، فنسبة الواحد إليه كنسبته إلى المربع الثاني، فهو ضلع المربع الثاني. فتبيّن من ذلك أن العقود المتوالية التي بعدَ الواحد هي أضلاع المربعات المتوالية التي بعدَ

3 وإضعافه: قد تقرأ أيضًا «اصنافه» – 5 تليها: يليها – 6 أضعاف: اصناف – 7 بواحد: واحد – 17 الآخر: الأخير.

الواحد. والعدد الأول الذي يثبت تحت المربع الآخر إذا ضُرب في مثله ونقص من المربع الآخر الذي فوقه، فمرتبته هي مرتبة العدد المتوسط بين المربع الآخر وبين الواحد الذي هو آخر أضلاع المربعات المتوالية. وكذلك العدد الثاني الذي يثبت تحت المربع الثاني الذي قبل المربع الآخر، مرتبتُه هي مرتبة ضلع المربع الثاني، فمرتبته هي مرتبة العقد الذي يلي العقد الذي هو ضلع المربع الآخر. وكذلك كل ما أثبت تحت المربعات المتوالية، كل واحد منها مرتبتُه هي مرتبة العقدِ /– من ١٧ - ظ العقود الأوَلِ – الذي يلي ضلعَ ذلك المربع.

ويلزم من ذلك أن يكون ما يخرج من ضرب ضلع المربع الأول في ضلع المربع الثاني، هو العقد الذي بين المربعين المتتاليين، وذلك أن كل عقد من العقود المتوالية هو عشرة أضعاف العقد الذي قبله. فإذا ضرب العقد في العقد الذي يليه، فإن الذي يخرج من الضرب هو عشرةُ أضعاف مربع العقد الأول. فكل مربعٍ من المربعات المتوالية فإن العقد الذي يليه هو عشرة أضعافه والعقد الذي يلي المربع هو العقد المتوسط بينه وبين المربع الذي يليه، فلذلك صارت المرتبةُ التي بين المربعين هي مرتبةَ العقد الذي يكون من ضرب ضلع المربع الأول في ضلع المربع التالي له: فالعدد الأول الذي يثبت للجذر دائمًا يؤخر مرتبة واحدة ليكون إذا أثبت تحت المربع الثاني الذي قبل المربع الآخر عددٌ وضُرب في العدد المؤخر، كان الذي يخرج من الضرب هو من جنس المرتبة التي بين المربع الثاني ⟨والمربع الآخر⟩. فإذا نقص مما فوق العدد المؤخر يكون قد نقص ما خرج من الضرب من العقد الذي هو في مرتبته، فلذلك يؤخر العدد المضعف مرتبة واحدة.

فأما لِمَ يرتفع العدد الثاني المثبت وينقص مما فوقه؟ أما نقصه فليصير جميع المنقوص من المربعين هو مربع مجموع العددين المثبتين، وذلك أن كل عددين فإن مربعيها وضرْبَ أحدِهما في الآخر مرتين فهو مربعُ مجموعِها. فأما نقص مربع العدد الثاني فهو في مرتبة العدد الذي فوقه لأن كل عددين متواليين فهما جذران لمربعين متواليين. فإذا رُبِّع العدد الأول ونقص مما فوقه وأضعف وأخر مرتبةً، وضرب العدد الثاني في العدد المُضعف ونقص مما فوقه، ورُبّع العدد الثاني ونقص مما فوقه، كان جميعُ المنقوص هو مربعَ العدد الذي هو مجموع العددين اللذين هما عقدان متواليان، ويكون كل واحد منها منقوصًا، نُقِصَ من المرتبة التي هي مرتبته. ثم إذا أضعف العدد الثاني وأخر الجميع مرتبة واحدة، وأثبت تحت المربع الثالث عدد، وضُرب ذلك العدد في العددين المضعفين

5 كل ما: كلما – 8 عشرة: قد تقرأ «عدة» – 9 عشرة: علة – 10 عشرة: عدة – 17 يرتفع: المقصود: يربّع أو يرفع إلى الدرجة الثانية / أما: كذا والأفصح إدخال الفاء عليها – 19 فهو: هو – 20 متواليين (الثانية): متساوين – 21 مرتبة: مرتبته – 23 منقوصًا: منقوص – 24 الجميع: جميع.

المؤخرين وفي نفسه، ونقص كل واحد من الأعداد الذي يخرج من الضرب من العدد الذي فوقه، كانت الأعداد المنقوصة قد نقص كل واحد منها من المرتبة التي هي مرتبته. وذلك أن العدد الثالث المثبت هو ضلع المربع الثالث، فإذا ضُرب في العدد الثاني / – وهو ضلع المربع الثاني – ١٨ – و كان الذي يخرج من الضرب من جنس المرتبة التي بين المربع الثالث والمربع الثاني، كما تبيّن من قبل. فإذا ضرب في العدد الأول – الذي هو ضلع المربع الآخر – كان الذي يخرج من الضرب هو ⟨من⟩ جنس المربع الثاني؛ لأن مرتبة العدد الأول هي عشرة أضعاف مرتبة العدد الثاني، ومرتبة المربع الثاني هي عشرة أضعاف المرتبة التي بين المربع الثاني وبين المربع الثالث. ثم إذا ضعف العدد الثالث وأخّر الجميع مرتبة واحدة كان العدد الذي يثبت قبلها إذا ضرب في الأعداد الثلاثة وفي نفسه، كانت الأعداد التي تخرج من الضرب كلٌّ واحدٍ منها من جنس المرتبة التي فوقه، كما تبيّن في الأعداد الثلاثة؛ كذلك دائمًا إلى أن يبلغ آخر الأعداد إلى المرتبة الأولى التي هي المرتبة الواحدة. فإذا بلغ إلى المرتبة الأولى نُصِّف ما كان أُضْعِفَ من الأعداد، فيكون ما بقي من الأعداد التي تحصل من التنصيف مع العدد الذي تحت المرتبة الأولى هي جذر العدد المفروض إذا كان قد فني بالنقصانات التي نُقِصَت، وتكون مراتبُها هي مراتبَ العقود التي تحصلت بعد التنصيف، والتي الأولى منها هي مرتبة الواحد.

أما أن العدد الذي يحصل هو جذرُ العدد المفروض الذي فني بالنقصانات؛ فإن ذلك لأن كل عدد يثبت ويضرب في نفسه، ثم يثبت قبله عدد آخر ويضرب في نفسه وفي العدد الأول مرتين، فإن مجموع الأعداد التي تخرج من الضرب مع مربع العدد الأول المنقوص هو مربع مجموع العددين. وكذلك إذا أثبت قبل العدد الثاني عدد آخر وضرب في نفسه وفي العددين الأولين مرتين، يكون ما يخرج من الضرب مع الأعداد الأول المنقوصة هو مربع مجموع الثلاثة الأعداد. وكذلك كلُّ ما ثبت من الأعداد هو على هذه الصفة. والأعداد التي تتحصل بعد التنصيف مع العدد الذي تحت المرتبة الأولى هي الأعداد التي أثبتت وضرب بعضها في بعض على الصفة التي ذكرناها، فمربعها هو مجموع الأعداد المنقوصة. وإذا كان مجموعُ الأعداد المنقوصة هو العددَ المفروضَ المطلوبَ جذرُه، فالأعداد التي تحصلت والتي أولها تحت المرتبة الأولى، هي جذرُ العدد المفروض المطلوب جذره إذا كان قد فني جميعه بالنقصانات./ وأما أن مراتبها هي مراتب العقود ١٨ – ظ

3 وهو: هو – 4 بين: قد تقرأ «هي» – 6 ومرتبة: من مرتبة – 7 هي: هو / عشرة: عدة – 10-11 المرتبة الواحدة: أي مرتبة الآحاد – 13 العقود: العقد – 20 كل ما: كلما – 23 والتي: التي – 24 إذا: وإذا.

التي تحصلت بعد التنصيف التي الأولى منها هي مرتبة الواحد، فإن ذلك لأن العقود التي تحصلت بعد التنصيف هي أضلاعُ المربعات المتتالية. وأضلاع المربعات المتتالية هي العقود الأول المتتالية التي أولها الواحد، كما تبيّن من قبل. والأعداد التي تحصل بعد التنصيف، مع العدد الذي تحت المرتبة الأولى، مراتبُ عقودها هي مراتب العقود المتوالية المبتدئة من الواحد.

والعددُ المطلوبُ جذرُه إما أن يكون مربعًا وإما أن يكون غيرَ مربع. فإن كان مربعًا فإنه إذا أجذر لم يبق منه شيء، وإن كان غيرَ مربع فإنه إذا جذِر ‹بقيت› منه بقية، والبقية التي تبقى فلا يمكن أن تجذر. والعدد الصحيح يكون أبدًا أقلَّ من ضعف الجذر ‹الذي› يحصل مع زيادة واحدٍ؛ لأن ضعف الجذر وواحدًا إذا أضيف إلى الأعداد المنقوصة كان مجموع ذلك عددًا مربعًا، وقد تبيّن ذلك في المقدمات. فإذا كان العددُ المفروض غيرَ مربع فإنه إذا جذر ما يُجذر منه بالعدد الصحيح، ونقص ما يُجذر من العدد المفروض، كان الذي يبقى أقل من ضعف الجذر الذي يحصل إذًا، وواحدٍ، وذلك أن ضعف الجذر وواحدًا إذا أضيف إلى الأعداد المنقوصة كان مجموع ذلك عددًا مربعًا. [فإذا كان العدد المفروض غيرَ مربع فإنه إذا جذر ما يجذر وينقص من العدد المفروض كان الذي يبقى أقل من ضعف الجذر بواحد] وليس يكون لِا هذه صفتُه جذرٌ محقّقٌ بوجهٍ من الوجوه، لأن العدد الذي ليس له جذر ‹محقق› بوجه من الوجوه كان العدد الذي ليس بمربع [ليس له جذر بوجه من الوجوه]. فإن سلك في تجذير ما يبقى طريق التقريب فإنه يقسم العدد الذي يبقى بعد التجذير بالعدد الصحيح، على ضعف الجذر مع زيادة واحدٍ، أو على ضعف الجذر فقط. فيكون ما يخرج جزءًا من واحد، فيضاف إلى الجذر الذي يحصل، فيصير الجميع عددًا صحيحًا وكسورًا من واحد. فإذا ضُرب مجموع ذلك في نفسه كان الذي يخرج منه هو العدد المفروض المطلوب جذره بنقصان شيء يسير أو زيادة شيء. وذلك أن العدد الباقي إذا قسمته على ضعفِ الجذر وواحدٍ، كان الذي يخرج من القسمة هو جزء من / ضعف الجذر وجزء الواحد، ١٩ - و
ويكون نسبة هذا الجزء من الواحد هي نسبة العدد المقسوم إلى ضعف الجذر وواحد. فيكون متى ضرب هذا الجزء في ضعف الجذر وواحدٍ عاد العددُ المقسوم. والذي يخرج من ضرب الجزء في

6 أجذر: اجذره / جذر: جذرت – 6-7 فلا يمكن أن تجذر: أي لا تسهم في استخراج الجذر «الصحيح» للعدد، إذ من العبث أن نفترض أن ابن الهيثم يخطىء في مثل هذا – 7 والعدد الصحيح: أي العدد الباقي / زيادة: الزيادة – 8 وواحدًا: وواحد – 9 بالعدد: العدد – 11 وواحدًا: وواحد – 13 لما: لنا – 19 يسير أو: يسيرًا و – 20 ضعف الجذر وجزء: هذا التعبير غير سليم والمقصود: جزء من أجزاء عددها ضعف الجذر وواحد – 22 الجزء (الثانية): الجذر.

ضعف الجذر وواحدٍ هو جزءٌ من ضعف الجذر وجزء من الواحد وهو أكثر من مربع ذلك الجزء. والجزء من ضعف الجذر [وواحد] مع مربع ذلك الجزء إذا أضيف إلى مربع الجذر يكون مجموعه مربعًا. فإذا أضيف ما يخرج من ضرب الجزء في ضعف الجذر وواحدٍ إلى مربع الجذر كان الجميع أكثر من مربع الجذر مع الجزء. وهذه الزيادة هي ما يخرج من مضروب زيادة الواحد على الجزء ⟨في الجزء⟩ فهي شيء يسير.

وإن قسم العدد الباقي على ضعف الجذر فقط كان الذي يخرج من القسمة هو جزء من ضعف الجذر فقط. فيكون متى ضرب هذا الجزء في ضعف الجذر عاد العدد المقسوم. والذي يخرج من ضرب الجزء في ضعف الجذر إذا أضيف إلى مربع الجذر كان الذي يجتمع من ذلك عددًا غيرَ مربع، وينقص عن عدد مربع بمربع الجزء. فإذا أضيف ما يخرج من ضرب الجزء في ضعف الجذر مع مربع الجزء إلى مربع الجذر كان الجميع عددًا مربعًا. فإذا ضُرب الجذر مع الجزء في نفسه كان الذي يخرج من الضرب هو عددٌ مربعٌ يزيد على العدد المفروض بمربع الجزء وهو شيء يسير. فإذا سُلك فيما يبقى ⟨بالقسم⟩ على ضعف الجذر وواحدٍ أو على ضعف الجذر فقط، فما خرج من القسم أضيف إلى العدد الصحيح الذي يحصل من الجذر، فما اجتمع فهو جذر العددِ المفروضِ المطلوبِ جذرُه على التقريب. فأما أي الطريقين المذكورين في التقريب أولى، وأيها يجب أن يُعتمد؟ فإن تمييز ذلك يكون بأن يُعتبر كلٌّ واحد من الطريقين: فأيّهما كان التفاوتُ فيه أقلَّ اعتُمد. فهذا ما أردنا شرحه في علل نقل الجذور وإضعافها في حساب الهند، ولله الحمد.

وفرغنا من كتابتها في يآ جمادى الأخرى سنة ٧٢١ بالسلطانية.

1 وهو: هو / الجزء: أي الجزء من الواحد – 2 إذا: واذا – 14 وأيها: وأيها – 15 فأيها: فانها – 17 الأخرى: الآخر.

قول للحسن بن الحسن ⟨بن⟩ الهيثم في استخراج ضلع المكعب

العدد المكعب هو المجتمع من ضرب عدد فيما يجتمع من ضربه في مثله. واستخراج ضلع المكعب يكون إذا كان العدد المكعب مفروضًا، ولم يكن ضلعه معلومًا، واحتيج إلى معرفة ضلعه، أعني العددَ الذي إذا ضرب في مثله ثم ضرب في مثله كان الذي يجتمع هو ذلك العدد المكعب المفروض.

وقد جرت عادة الحسّاب أن يستخرجوا ضلع المكعب بالحساب الهندي. ولا نعرف لأحدٍ منهم طريقًا في استخراج ضلع المكعب بغير الحساب الهندي. ولما نظرنا في خاصة هذا العدد تبيّن لنا أنه يمكن أن يُستخرج ضلع هذا العدد بطريق المعاملات من غير حاجة إلى الهندي، فألّفنا فيه هذه المقالة. ونحن نذكر في هذه المقالة كيف يُستخرج ضلع المكعب بطريق المعاملات، ونذكر فيها أيضًا كيف يُستخرج بالحساب الهندي، لأن الناظر في هذه المقالة ربما لم يكن عارفًا بالطريقة الهندية، وتتُوق نفسُه عند ذكرها إلى العلم بها. فنحن نضيفها إلى الطريقة المحسوبة بالمعاملات، ليتم للراغب في علم هذا العدد معرفتُه بالطريقين جميعًا.

والطريق إلى استخراج ضلع العدد المكعب – إذا كان العدد المكعب مفروضًا – هو أن يؤخذ عددٌ، أيّ عدد كان، ويضرب في مثله، ثم يضرب ما حصل من ذلك في العدد الأول، فما اجتمع ⟨كان مساويًا للعدد المفروض⟩ أو ليس ⟨مساويًا⟩ للعدد المفروض. فإن كان مساويًا له فإن العدد الأول المأخوذ هو ضلع المكعب المفروض، وإن لم يكن ما خرج من الضرب مساويًا

2 للحسن: للحسين – 4 واستخراج: استخراج – 6 في مثله (الثانية): في ربعه – 8 نعرف: يعرف – 16 ويضرب: يضرب – 17 أو ليس: فليس / للعدد: بالعدد؛ وربما كان في الأصل «كان العدد المفروض أو ليس بالعدد المفروض».

للعدد المفروض فهو إما أقل منه وإما أكثر منه. فإن كان أكثرَ منه أُلقِيَ ذلك العدد المأخوذ وأخذ عددٌ غيره أقلّ منه وضرب في مثله، ثم ضرب في مربعه – ومربعُه هو الذي يجتمع من ضربه في مثله – حتى يكون ما يخرج من الضرب أقلّ من العدد المفروض أو مساويًا له. فإن كان مساويًا له فالعدد المأخوذ هو ضلع العدد المفروض؛ وإن كان أقل منه، ضُرب العدد المأخوذ في ثلاثة وضرب مربعه في ثلاثة، وجمعا وأضيف إليها واحد من العدد، وأضيف ما يحصل من ذلك إلى العدد الذي خرج من ضرب العدد المأخوذ في مربعه. فإن كان ما يجتمع من ذلك مساويًا للعدد المفروض، أضيف إلى العدد الأول المأخوذ واحدٌ، فيكون الذي يحصل من العدد الأول مع الواحد هو ضلع المكعب المفروض. وإن لم يكن العدد المجتمع مساويًا للعدد المفروض، فهو أقل منه وليس يكون أكثرَ منه إذا كان العدد المفروض مكعبًا. وإذا كان أقل منه ضُرب العدد الذي يحصل من العدد الأول مع الواحد في ثلاثة وضرب مربعه أيضًا في ثلاثة، ويجمع الجميع ويزاد عليه واحد من العدد، ويضاف ما يحصل من ذلك إلى العدد الأول المجتمع الذي هو أقلُّ من العدد المفروض. فإن كان ما يجتمع من ذلك مساويًا للعدد المفروض، أضيف إلى العدد الذي كان يحصل من العدد الأول والواحد واحدٌ آخر، فيكون ذلك هو ضلع ⟨المكعب⟩ المفروض. وإن لم يكن مساويًا له فهو أقل منه. فنفعل بالعدد المحصل الثاني منه ما فُعل بالعدد المحصل الأول؛ وكذلك دائمًا يضرب العدد المحصل في ثلاثة، ويُضرب مربعه في ثلاثة ويُزاد على الجميع واحدٌ، ويُضاف إلى العدد المجتمع الأول. ويُزاد على العدد المحصل في كل مرة واحدٌ، إلى أن يساوي العدد المجتمع من الضرب العدد المكعب المفروض. فإذا ساواه فإن العدد المحصل هو ضلع ذلك العدد المفروض، والعدد الذي سميناه المحصل هو العدد المجتمع من العدد الأول المأخوذ مع الآحاد التي أضيفت إليه، واحدًا بعد واحد. وقد يختصر هذا العمل أيضًا بأن يُضرب العدد الأول المأخوذ في مثله، ثم يضرب في مربعه، فما اجتمع ينقص من العدد المكعب المفروض، فإن بقي من المكعب بقية ضرب العدد المأخوذ في ثلاثة، وضرب مربعه في ثلاثة، وجمع الجميع وزيد عليه واحد، ونقص ما يجتمع من ذلك من البقية التي بقيت من المكعب، ثم زيد على العدد المأخوذ واحد؛ فإن بقيت من المكعب بقيةٌ ثانية ضرب العدد المحصل في ثلاثة وضرب مربعه في ثلاثة، وزيد على الجميع واحدٌ، ونقص ما يجتمع من ذلك من البقية الثانية، ويزاد على العدد المحصل واحد؛ كذلك دائمًا إلى أن يفنى العدد المكعب المفروض ولا يبقى منه شيء. فإذا فني العدد

2 ثم ضرب: أي العدد – 7 إلى العدد: غير مقروءة / واحد: واحدا – 13 والواحد: فلواحد – 19 واحد: واحدهم – 21 وجمع : وجميع.

المكعب فإن العدد المحصل هو ضلع ذلك العدد المكعب. وإذا كان العددُ المفروضُ المطلوبُ ضلعُه مكعبًا فإنه إذا سُلكت الطريقة التي ذكرناها فلا بدّ أن يفنى ذلك العدد المكعب / حتى ٤٠٢ - و لا يبقى منه شيء.

والمثال في جميع ما ذكرناه أن يكون العدد المكعب المفروض ألفًا وسبعمائة وثمانية وعشرين، ونريد أن نستخرج ضلعه، فنأخذ عشرة من العدد فنضربها في مثلها ليكون مائة، ثم نضرب العشرة في المربع فيكون ألفًا، فنقيسها بالعدد المفروض، وهو ألف وسبعمائة وثمانية وعشرون، فنجدها أقل منها، فنضرب عشرة في ثلاثة فيكون ثلاثين، ونضرب مائة في ثلاثة فيكون ثلاثمائة، فنجمعها فيكون ثلاثمائة وثلاثين، فنزيد عليها واحدًا فيكون ثلاثمائة وأحدًا وثلاثين، فنضيفها إلى الألف فيكون ألفًا وثلاثمائة وأحدًا وثلاثين، وهي أقلّ من العدد المفروض. فنضيف إلى العشرة واحدًا، فيكون أحد عشر، وهذه الأحد عشر هي ضلع مكعب ألف وثلاثمائةٍ وأحدٍ وثلاثين، لأنه إذا ضرب أحد عشر في مثله، ثم ضرب ما يخرج في أحد عشر، كان من ذلك ألف وثلاثمائة وأحد وثلاثين، ثم يُضرب الأحد ⟨عشر⟩ في مثلها، فيكون مائة وأحدًا وعشرين، فيُضرب الأحد عشر في ثلاثة، فيكون ثلاثة وثلاثين، ويُضرب مائة وأحد وعشرون في ثلاثة، فيكون ثلاثمائة وثلاثة وستين، فنجمعها ونزيد عليها واحدًا، فيكون ثلاثمائة وسبعة وتسعين، فنضيفها إلى العدد الذي كان اجتمع أولاً وهو ألف وثلاثمائة وأحد وثلاثون، فيصير ألفًا وسبعمائة وثمانية وعشرين، وهو مساوٍ للعدد المفروض. فنزيد على أحد عشر واحدًا فيكون اثني عشر، فهو ضلع المكعب المفروض الذي هو ألف وسبعمائة وثمانية وعشرون. وإن نقصنا الألف من ألف وسبعمائة وثمانية وعشرين، ثم نقصنا مما يبقى ثلاثمائة وأحدًا وثلاثين، ونقصنا من الباقي ثلاثمائة وسبعة وتسعين، إلى أن يفنى العدد المفروض، وزدنا في كل مرة على العدد الأول واحدًا، كان الذي ينتهي إليه العمل واحدًا بعينه.

واعتبارُ صحة هذا العمل هو أن يضرب العدد المحصل الأخير – الذي هو في هذا المثال اثنا عشر – في مثله فيكون مائة وأربعة وأربعين، ثم يضرب اثنا عشر في مائة وأربعة وأربعين فيكون ألفًا وسبعمائة وثمانية وعشرين.

وليس كل عدد يكون مكعبًا، ولا كلُّ عددٍ يُفرض ويُطلب ضلعه يكون مكعبًا. وكل عدد

1 المكعب (الأولى): والمكعب – 4 ألفًا: ألف / وثمانية: ثا – 6 المربع: مطموسة / فنقيسها: فيقسمها / وثمانية وعشرون: وثلثه وعشرين – 8 وأحدًا: واحد – 9 ألفًا: الف / وأحدًا: واحد / فنضيف: فتضيف / واحدًا: واحد – 12 وأحدًا: واحد – 13 وعشرون: وعشرين – 14 ونزيد: او نزيد – 15 اجتمع: اجتماع / ثلاثون: ثلاثين / ألفًا: ألف – 16 اثني: اثنا – 17 وعشرون: وعشرين / نقصنا (الأولى): نقيصنا – 18 وأحدا: واحد – 21 ألفا: ألف.

غيرِ مكعب فليس له ضلع كعبٍ على التحقيق، إلاّ أنه قد يستخرج ضلع كعب العدد الذي ليس بمكعب على التقريب، كما يستخرج جذر العدد الذي ليس بمربع على التقريب. فإذا فرض عدد وأردنا أن نستخرج ضلع كعبه، فإنا نسلك الطريقة التي شرحناها. فإن كان العدد مكعبًا فلا بدّ أن ينتهي العمل الذي رتبناه إلى عددٍ مساوٍ لذلك العدد المفروض، وإن نقصناه فَنِيَ إلى أن لا يبقى منه شيء. وإن لم يكن العدد مكعبًا فلا بدّ أن تبقى منه بقية ويكون إذا ضرب العدد المحصل في ثلاثة، وضرب مربعه في ثلاثة وجمعا وزيد عليها واحدٌ، يكون هذا الذي يجتمع أكثرَ من البقية التي بقيت. فإذا انتهى العمل إلى هذا الحدّ ضرب العدد المحصَّل في ثلاثة، ثم ضرب مربعه في ثلاثة، ثم قُسمت البقية التي بقيت من العدد المفروض على المربع المضروب في ثلاثة، فما خرج فهي أجزاء من واحد. فتضاف هذه الأجزاء إلى العدد المحصَّل فيكون الذي يجتمع من ذلك هو ضلع مكعب العدد المفروض على التقريب.

ومثال ذلك: أن يكون العددُ المفروض ألفًا وثمانمائة، ونريد أن نجد ضلع كعبه، فنسلك الطريقة التي شرحناها إلى أن يتحصل لنا اثنا عشر، فيكون مكعبها ألفًا وسبعمائة وثمانية وعشرين. فإذا نقصنا هذا العدد من ألف وثمانمائة إما دفعة واحدة على الوجه الأول وإما في دفعات إن كان عملنا بالتنقيص، فإنه يبقى من الألف وثمانمائةٍ: اثنان وسبعون، ويكون إذا ضربنا ⟨اثني⟩ عشر في ثلاثة، وضربنا مربعه وهو مائة وأربعة وأربعون في ثلاثة وجمعناهما وزدنا عليها واحدًا كان من جميع ذلك أربعمائة وتسعة وستون، وهي أكثر من البقية التي هي اثنان وسبعون. فنضرب مربع الاثني عشر – وهو مائة وأربعة وأربعون – في ثلاثة، فيكون أربعمائة واثنين وثلاثين، فنقسم اثنين وسبعين على أربعمائة واثنين وثلاثين، فيكون اثنين وسبعين جزءًا من أربعمائة واثنين وثلاثين جزءًا، فهي سدس، فنضيف إلى اثني عشر سدسًا فيكون اثنا عشر وسدس هي ضلع مكعبِ ألفٍ وثمانمائةٍ على التقريب. واعتبار ذلك يكون بأن يُضرب اثنا عشر وسدس في اثني عشر وسدسٍ فيكون مائة وثمانية وأربعين وجزءًا من ستة وثلاثين جزءًا، ثم يضرب اثنا عشر وسدس في مائة وثمانية وأربعين وجزء / ⟨من ستة وثلاثين جزءًا⟩.

1 على التحقيق: مطموسة – 2 بمربع: بربع – 3 وأردنا: وردنا / مكعبًا: آخر الكلمة مطموس – 4 العمل: بالعمل / وإن: قد تقرأ «او ان» – 6 الذي: الياء ناقصة – 7 ثلاثة: مثله – 10 ضلع مكعب: مصطلح يعنى الجذر التكعيبي – 11 ألفًا: الف – 12 إلى: لا / ألفًا: الف – 15 مربعه: مربعها / وأربعون: وأربعين / واحدًا: واحد – 16 وستون: وستين / اثنان وسبعون: اثنين وسبعين – 17 وهو: وهي / وأربعون: وأربعين – 18 وسبعين: سبعين – 19 سدسًا: سدس.

[ص ٤٦، الحاشِيَة ٥٣] ***كِتابُ حِسابُ الْمعامَلاتِ***

شَأْنُ كِتاب ***حِسابُ الْمعامَلاتِ*** دَقيقٌ لِلغايَةِ لِسَبَبَيْنِ: الأوَّلُ مِنْهُما هُوَ عُمومِيَّةُ العُنْوانِ الَّذي يُشيرُ إلَى مَيْدانٍ عِلْمِيٍّ أكْثَرَ مِمّا يَدُلُّ عَلَى عَمَلٍ مُعَيَّنٍ؛ وأمّا الثاني فهُوَ عَدَدُ الكِتابَاتِ المَنْسوبَةِ إلَى ابنِ الهَيْثَمِ في هَذا المَوْضوعِ. ونَحْنُ نَوَدُّ هُنا، في هَذِهِ الحاشِيَةِ، إيضاحَ المَسْأَلَةِ فَقَطْ، بدونِ ادِّعاءِ حَلِّها.

وَصَلَ إلينا كِتابَانِ يَتَناوَلان هَذا الحِسابَ تَحْتَ اسْمِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ. الأوَّلُ عُنْوانُهُ ***الْمعامَلاتُ في الحِسابِ***. ونَعْرِفُ له حَتَّى الآن مَخْطوطَتَيْنِ مَوْجودتَيْنِ في إسْطَنْبول، هُما: فيض الله ١٣٦٥/٢، الصَفَحات ٣٧ظ – ١٦٤و؛ ونور عُثْمانيَّة ٢٩٧٨، الصَفَحات ٣٩ – ١٢٥. ونسْبَتُهُما إلَى ابنِ الهَيْثَمِ جَلِيَّةٌ؛ إذ نَقْرَأُ في الصَفْحَةِ الأُولَى:***كِتابُ الْمعامَلاتِ في الحِسابِ***. تَأليفُ الشَيْخِ الإمامِ العَلاّمَةِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ البَغْدادِيِّ رَحِمَهُ الله". كما أنّنا نَجِدُ اسمَهُ بَعْدَ بِضْعِ صَفَحاتٍ، حَيْثُ نَقْرَأُ: "قالَ الشَيْخُ أبو الحَسَنِ بنُ الهَيْثَمِ ..." ؛ ويَتْبَعُ ذَلِكَ اسْتِشْهادٌ مُؤَلَّفٌ من حَوالَى خَمْسَة عَشَرَ سَطْراً من الكِتابِ الآخَرِ الَّذي سَنَأْتي عَلَى ذِكْرِه عاجلاً. نُشيرُ إلَى أنّ ظُهورَ اسمِ الكاتِبِ مرّتَيْنِ لا يُمْكِنُ أن يَكونَ بالطَبْعِ من فِعْلِ ابنِ الهَيْثَمِ. ومع ذَلِكَ، فإنّ هَذا الظُهورَ هُوَ الَّذي دَفَعَ الْمُفَهْرِسين الْمُحْدَثينَ إلَى نسْبَةِ هَذا الكِتابِ إلَى الحَسَنِ بن الهَيْثَمِ، وذَلِكَ بدونِ أيِّ دليلٍ آخَرَ. لَكِنَّ صِحّةَ هَذِهِ النسْبَةِ تَتَهاوَى أمامَ أوّلِ دِراسَةٍ جِدِّيَّةٍ. فقَبْلَ كُلِّ شَيْءٍ، لم يَرِدْ هَذا الكِتابُ، تَحْتَ هَذا العُنْوانِ، في أيِّ فَهْرِسٍ قَديمٍ لكِتابَاتِ ابنِ الهَيْثَمِ، كما أنّ الكاتِبَ لم يُشِرْ إلَيْهِ في أيٍّ من أعْمالِهِ. ومن جِهَةٍ أُخْرَى، فإنّ هَذا الكِتابَ هُوَ مُجَرَّدُ جَمْعٍ مُقْتَبَسٍ، ولا يُمَثِّلُ تَأليفاً فِعْلِيّاً في هَذا المِضْمارِ. فهُوَ يُسْتَهَلُّ بِمَقْطَعٍ حَوْلَ الحِسابِ بواسِطَةِ "أشْكال الأقْباطِ"؛

ويُوردُ السُطورَ الخَمْسَةَ عَشَرَ الَّتي ذَكَرْناها؛ ومن ثمّ يَسْتَعْرِضُ مَسائِلَ بَسيطَةً في الحِساب التِجاريِّ – كتَحْويلِ الأوْزانِ والعُمُلاتِ، وكَيْلِ الحُبوب ... – وكذَلِكَ مَسائِلَ مُتَنَوِّعَةً في عَمَلِيّاتِ الشِراءِ وفي الهَنْدَسَةِ التَطْبيقِيَّةِ، .... وهَذا الأُسْلوبُ في التَأليفِ – فَضْلاً عن مُسْتَوَى الاسْتِدْلالِ الرياضِيِّ فيه – لا يُذَكِّرانِنا بما عَهِدْناهُ في أُسْلوب ابنِ الهَيْثَمِ. كَسْباً للوَقْتِ، سَنَكْتَفي بأن نُعطِيَ مِثالاً واحِداً، عِلْماً أنّه لَيْسَ هُوَ بالأسْوَأ مِنْ بَيْنِ الأمْثِلَةِ المُمْكِنَةِ: لنَقْرَأْ مَثَلاً كَيْفِيَّةَ عَرْضِ الكاتِبِ لطَريقَةِ مِساحَةِ الدائِرَةِ: "دائِرَةٌ قُطْرُها سَبْعَةٌ ومُحيطُها اثنانِ وعِشْرون، مِساحَتُها أن تَضْرِبَ نصْفَ القُطْرِ في نِصْفِ المُحيطِ وهُوَ ثَلاثَةٌ ونِصْفٌ في أحَدَ عَشَرَ، يَكونُ ثَمانيَةً وثَلاثينَ ونِصْفاً، وهُوَ مِساحَتُها" (مَخْطوطَة فيض الله، الصَفْحَة ١٢٩و). وبالرَّغْمِ من أنّ النَتيجَةَ صَحيحَةٌ، فإنّ هَذِهِ الطَريقَةَ في عَرْضِ الرياضِيّاتِ غَريبَةٌ عن أُسْلوبِ ابنِ الهَيْثَمِ، حَتَّى ولو تَعَلَّقَ الأمْرُ بالهَنْدَسَةِ التَطْبيقِيَّةِ، وهَذا ما نَجِدُهُ مَثَلاً في كِتابِهِ ***في مَسْأَلَةٍ في المِساحَةِ***.

أمّا الكِتابُ الثاني فهُوَ مُخْتَلِفٌ تماماً. وعُنْوانُهُ هُوَ: ***في القَوْلِ المَعْروفِ بالغَريبِ في حِسابِ المُعامَلاتِ***. لقد وَصَلَ إلينا هَذا الكِتابُ في مَخْطوطَتَيْنِ، الأُولَى هِيَ: إسْطَنْبول، عاطِف ١٧١٤/١٣، الصَفَحات ١١٦و – ١٢٥و؛ والثانيَةُ هِيَ: برلين، Oct. 2970/17، الصَفَحات ١١٧و – ١٨٦و. وبالنِسْبَةِ إلَى العُنْوانِ، فلَدَيْنا بَعْضُ الشُكوكِ حَوْلَ كَلِمَةِ "الغَريب". ذَلِكَ أنّه لم يَكُنْ من تَقاليدِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ أن يَصِفَ كِتابَاتِهِ بهَذا النَوْعِ من العِباراتِ، وهَذا أمْرٌ يُمْكِنُ التَحَقُّقُ منه. ومن جهَةٍ أُخْرَى، ولَوْلا حَرْفٌ واحِدٌ لَقُرِئَت هَذِهِ الكَلِمَةُ "القَريب" بمَعْنَى "السَهْل". وأخيراً، نَقْرَأُ في العِبارَةِ الخِتامِيَّةِ: "تَمَّ الكِتابُ في ***حِسابِ المُعامَلاتِ***، ولا نَجِدُ فيها هَذِهِ الصِفَةَ، أي "الغَريب". إلاّ أنّ هَذِهِ التَسْمِيَةَ بالتَحْديدِ هِيَ الَّتي نَجِدُها في لائِحَةِ الحَسَنِ ولائِحَةِ مُحَمَّدٍ. أمّا الكِتابُ، فإنّهُ يَتَناوَلُ أُصولَ هَذِهِ الصَناعَةِ، أي دِراسَةَ عَمَلِيّاتِ هَذا الحِسابِ، ولَكِن بِدونِ بَراهينَ، وتَتَضَمَّنُ هَذِهِ العَمَلِيّاتُ النِسْبَةَ

والضَرْبَ والقِسْمَةَ، وكذَلِكَ جَمْعَ الكُسورِ. وأخيراً، فإنّ هَذا النَصَّ، وَفْقَ ما اسْتَعْرَضْناه، قد يَكونُ عائداً إلى الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ؛ لَكِنّنا لا نَسْتَطيعُ حَسْمَ هَذِهِ الفَرَضِيَّةِ حَتَّى الآن، وذَلِكَ بِسَبَبِ النَقْصِ في الحُجَجِ الإضافِيَّةِ.

[ص ٤٧، الحاشِيَة ٥٥] ***مَقالَةٌ في هَيْئَةِ العالَمِ***[١]، المَنْسوبَةُ إلَى ابنِ الهَيْثَمِ.

نُضيفُ إلَى الحُجَجِ السابِقَةِ بَعْضَ الحُجَجِ الأُخْرَى الَّتِي تَحُثُّنا عَلَى التَساؤُلِ عن صِحَّةِ نِسْبَةِ هَذا الكِتابِ إلَى الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ. فَلْنَسْتَخْلِصْ فَقَطْ تِلْكَ الحُجَجَ الَّتِي تَسْتَنِدُ إلَى مُعْطَياتٍ يُمْكِنُ التَحَقُّقُ منها.

لِنُبَيِّنْ إذاً، المُعْطَياتِ المَوْضوعِيَّةَ الوارِدَةَ في هَذا المُؤَلَّفِ، والمُصاغَةَ بأرْقامٍ، نَعْني بذَلِكَ: الوَسائِطَ وتَعْدادَ الحَرَكاتِ السَماوِيَّةِ.

تَعودُ الوَسائِطُ الَّتِي ذَكَرَها كاتِبُ هَذا المُؤَلَّفِ إلَى بَطْلَمْيوس، وهُوَ لا يُورِدُ أيَّ إشارَةٍ إلَى أعْمالِ عُلَماءِ الفَلَكِ من القَرْنَيْنِ التاسِعِ والعاشِرِ:

١) في الفَقْرَةِ ١٤٤، يَذْكُرُ الكاتِبُ أنّ مَيْلَ فَلَكِ البُروجِ "قَريبٌ من ٢٤ دَرَجَةً". وبالفِعْلِ لقد أعْطَى بَطْلَمْيوسُ المَيْلَ قيمَةً قَدْرُها *23;51*، في حينِ أنّ عُلَماءَ الفَلَكِ العَرَبَ وَجَدوا، ومُنْذُ بدايَةِ أعْمالِهِم، أنّ هَذِهِ القيمَةَ كانَت تُساوي *23;33* (أو *23;35*، وَفْقاً لِلكُتّابِ)، أمّا القيمَةُ *23;51* فقد تَمَّ لذَلِكَ التَخَلّي عنها[٢]. ورَغْمَ

---

[١] انْظُرْ:

Ibn al-haytham’s *On the Configuration of the World.* Édition, trad. et com. par Y. Tzvi Langermann (NewYork et Londre, 1990)

[٢] بالنِسْبَةِ إلى الوَسائِطِ الَّتِي حُدِّدَت في القَرْنِ التاسِعِ، راجِعْ:

Thābit ibn Qurra. *Œuvres d’astronomie*, Édition. Trad. et com. par Régis Morelon. Les Belles Lettres (Paris, 1987)

الصَفْحَة ٨ لِمَيْلِ فَلَكِ البُروجِ، والصَفَحات ٢٤–٦٧ لِمَوْقِعِ أوْجِ الشَمْسِ ولِقيمَةِ ثابتِ المُبادَرَةِ، مع المُقَدِّمَةِ والحَواشي الإضافِيَّةِ المُوافِقَةِ. [راجِعِ المُلْحَقَ بالمُجَلَّدِ الخامِسِ من هذا الكِتابِ (المُتَرْجِم)]

ذَلِكَ، فإنّ هَذِهِ الحُجَّةَ اليَتيمَةَ لن تَكونَ كافِيَةً، لا سِيَّما وأنّ الحَسَنَ بنَ الهَيْثَمِ يَسْتَخْدِمُ في كِتابِهِ في ***خطوط الساعات*** قيمَةً قَدْرُها ٢٤ دَرَجَةً.

٢) في الفَقْرَةِ ١٩٥، يُمَوْضِعُ الكاتِبُ مَوْقِعَ أوْجِ الشَمْسِ عَلَى فَلَكِ البُروجِ، كما حَدَّدَهُ بَطْلَمْيوس بَعْدَ إبرخس (Hipparque)، عَلَى مَسافَةٍ قَدْرُها 24;30 من الانْقِلابِ الصَيْفِيِّ، عَلَى خِلافِ تَوالي البُروجِ. ولقد أُعيدَ حِسابُ هَذِهِ القيمَةِ في مَطْلِعِ القَرْنِ التاسِعِ، ووُجِدَتْ تُساوي 9;15 من النُقْطَةِ نَفْسِها، ثمّ حَسَّنَ البَتّانيُّ الحِسابَ في بدايَة القَرْنِ العاشِرِ، فوَجَدَ القيمَةَ 7;43. فَضْلاً عن هَذا، يُذَكِّرُ كاتِبُ المُؤَلَّفِ بَعْدَ ذَلِكَ أنّ بَطْلَمْيوس قد أكَّدَ أنّ هَذا الأوْجَ كانَ ثابتاً عَلَى فَلَكِ البُروجِ، في حينِ أنّ "المُحْدَثينَ من عُلَماءِ الفَلَكِ" كانوا قد وَجَدوا أنّ هَذا الأوْجَ مُتَحَرِّكٌ عَلَى تَوالي البُروجِ، ولا يُقَدِّمُ الكاتِبُ أيَّ تَحْديدٍ آخَرَ. وقد كانَ مَعْلوماً مُنْذُ بدايَةِ القَرْنِ التاسِعِ أنّ أوْجَ الشَمْسِ كانَ خاضِعاً لِحَرَكَةِ المُبادَرَةِ.

٣) بالنِسْبَةِ إلَى بَطْلَمْيوس، كانَت حَرَكَةُ المُبادَرَةِ تُساوي دَرَجَةً في القَرْنِ. وقد ظَهَرَت هَذِهِ القيمَةُ ثلاثَ مَرّاتٍ (في الفَقَراتِ ٢٨٦ و٣٥٠ و٣٦١)، في حينِ أنّه كانَ مَعْلوماً، ابْتِداءً من الأعْمالِ المَجْموعَةِ في ***الزيج المُمْتَحَن*** (في بدايَةِ القَرْنِ التاسِعِ)، إنّ قيمَةَ المُبادَرَةِ كانَت حوالَى دَرَجَة ونصْف في القَرْنِ.

من الواضِحِ أنّ هَذِهِ النِقاطَ الدَقيقَةَ لم تَكُنْ مَعْروفَةً لَدَى المُؤَلِّفِ، في حينِ أنّ النَتائِجَ المُوافِقَةَ لها كانَت مُعْتَمَدَةً في جَميعِ الأوْساطِ العِلْمِيَّةِ في القَرْنِ الحادي عَشَرَ، ومن بَيْنِها، بالتَأكيدِ، الوَسَطُ الّذي كانَ يَنْتَمي إلَيْهِ ابنُ الهَيْثَمِ.

فَضْلاً عن ذَلِكَ، يُجْري مُؤَلِّفُ الكِتابِ، في الفَقْرَةِ ٣٨١، تَعْداداً لِلحَرَكات السَماوِيَّةِ الوارِدَةِ في ***المجسطيّ***، ويُبَيِّنُ سَبْعاً وأربعين منها، وهِيَ: واحِدَةٌ للحَرَكَةِ اليَوْمِيَّةِ، وواحِدَةٌ للمُبادَرَةِ، وثَماني عَشَرَةَ لِلكَواكِبِ العُلْيا الثَلاثَةِ، واثْنَتانِ للشَمْسِ، وثمانٍ للزهرة، وتِسْعٌ لِعُطارِد، وسِتٌّ للقَمَرِ، واثْنَتانِ للعالَمِ تَحْت القَمَرِيِّ (الثَقيلِ

والخَفيفِ). وقد أجْرَى الحَسَنُ بنُ الهَيْثَمِ في كِتابِهِ ***في الشُكوكِ عَلَى بَطْلَمْيوس***[٣] التَعْدادَ نَفْسَهُ لَكِن فَقَطْ بالنسْبَةِ إِلَى حَرَكاتِ الكَواكِبِ المُتَحَيِّرَةِ السَبْعَةِ، فوَجَدَ سِتّاً وثَلاثينَ حَرَكَةً. وفي هَذا التَعْدادِ، هُوَ لا يَحْسُبُ أوّلَ حَرَكَتَيْنِ، ويُهْمِلُ بالتَأكيدِ آخَرَ حركتَيْنِ، ثمّ يَحْسُبُ حَرَكَةً أقلَّ لِكُلِّ واحِدٍ من الكَواكِبِ، لأنّه بالطَبْعِ يُهْمِلُ أيضاً حَرَكَةً يَوْمِيَّةً لِكُلِّ واحِدٍ منها، طالَما أنّ هَذِهِ الحَرَكَةَ شامِلَةٌ. يُبَيِّنُ هَذا الاخْتِلافُ البَسيطُ في تَعْدادِ الحَرَكاتِ أنّه ثَمَّةَ، من جهَةٍ أُولَى، الحَسَنُ الّذي كانَ مُتَضَلِّعاً من المَوْضوعِ، و ثَمَّةَ، من جهَةٍ أُخْرَى، شَخْصٌ ما — من المُحْتَمَلِ أنّه مُحَمَّدٌ — كانَ بعيداً عن جَوْهَرِ المَوْضوعِ.

[ص ٥٢، الحاشِيَة ٦٤] **ابنُ سِنانٍ وابنُ الهَيْثَمِ حَوْلَ *خُطوطِ الأظْلال*.**

تُقَدِّمُ أعْمالٌ أُخْرَى للحَسَنِ بن الهَيْثَمِ حُجَجاً إضافِيَّةً، للتَأكيدِ — وهَذا إذا ما اقْتَضَى الأمْرُ — عَلَى أنّ هَذا *الاخْتِصارَ*، الّذي هُوَ في الوَقْتِ نَفْسِهِ *تَلْخيصٌ* لكِتابِ ابنِ سِنانٍ *في **آلاتِ الأظْلال***، لا يُمْكِنُ أن يَكونَ عائِداً إلَى الحَسَنِ، لا مَضْموناً ولا أُسْلوباً. تُؤَكِّدُ هَذِهِ الحُجَجُ إذاً، الاسْتِنْتاجاتِ المُتَعَلِّقَةَ بكِتابِ ***شَرْحِ المجسطيّ***، وكذَلِكَ بالتَمْييزِ بَيْنَ مُؤَلِّفِهِ مُحَمَّدٍ والرياضِيِّ البارِزِ الحَسَنِ.

لِنُشِرْ، في البِدايَةِ، إلَى أنّ كِتابَ ابنِ سِنانٍ كانَ مُخَصَّصاً لِلساعاتِ الشَمْسيَّةِ، وَفْقَ أقْوالِ المُؤَلِّفِ نَفْسِهِ، أي لِخُطوطِ الساعاتِ، ويَكْتُبُ ابنُ سِنانٍ في مُقَدِّمَةِ كِتابِهِ: "ورَأَيْتُ مَن تَقَدَّمَنا من أصْحابِ التَعاليمِ قد عنوا بأمْرِ الآلاتِ عِنايَةً لَيْسَت تامَّةً. أمّا الأسطرلاباتُ فقد وَضَعَ في عَمَلِها جَماعَةٌ من أصحابِ التعاليمِ كُتُباً عَلَى حَسَبِ طاقَتِهِم؛ وأمّا الرخاماتُ فلم أجِدْ أحَداً منهم عَمِلَ في أمْرِها عَمَلاً يُرْتَضَى مِثْلُهُ. وأمّا آلاتُ الماءِ وآلاتُ الأرْصادِ، فلِلقُدَماءِ فيها كُتُبٌ كافِيَةٌ. فَتَكَفَّلْتُ

---

[٣] حَقَّقَ هذا النَصَّ عَبْدُ الحميد صبرة (A. I. Sabra) والشهابيّ (N. Shehaby) (القاهرة ١٩٧١)، الصَفَحات ٣٩ — ٤١.

عَمَلَ هَذا الكِتابِ في أمْرِ الرخاماتِ خاصَّةً، وسَمَّيْتُهُ ***كِتابَ الأظلال*** [مَخْطوطَة أيا صوفيا ٤٨٣٢، ٦٦ظ].

فلا مُبَرِّرَ إذاً حَتَّى لِلقَوْلِ إنّه لَيْسَ هُناك أيُّ صِلَةٍ بَيْنَ كِتابِ ابنِ سِنانٍ ومُؤَلَّفِ الحَسَنِ ***مقالَةٌ في كَيْفِيَّةِ الأظلال***، المُخَصَّصِ للأظْلالِ كَظَواهِرَ بَصَرِيَّةٍ. وبالمُقابِلِ، يَنْبَغي هُنا أن نَسْتَحْضِرَ كِتابَيْنِ للحَسَنِ لا تُثيرُ أصالَتُهُما أيَّ شَكٍّ، وذَلِكَ بِهَدَفِ تِبْيانِ ما إذا كانَ الحَسَنُ قد كَتَبَ *اخْتِصاراً وتَلْخيصاً* لِكِتابِ ابنِ سِنانٍ. والكِتابَان هما بالتَحْديدِ كِتابُ الساعاتِ الشَمْسِيَّةِ وعُنْوانُهُ ***في الرخامات***[٤]، ومُؤَلَّفٌ عَلَى قَدْرٍ عالٍ من الأهَمِيَّةِ وعُنْوانُهُ ***خطوطُ الساعاتِ***، حَيْثُ يُحَدِّدُ الحَسَنُ بنَفْسِهِ عَمَلَهُ الخاصَّ بالنِسْبَةِ إلَى كِتابِ ابن سِنانٍ، مُقَدِّماً لنا مُسْبَقاً إجابَتَهُ الخاصَّةَ عن المَسْأَلَةِ المَطْروحَةِ هُنا. وفي خِتامِ كِتابِهِ في الساعاتِ الشَمْسِيَّةِ يَعِدُنا الحَسَنُ بكِتابَةِ مُؤَلَّفٍ حَوْلَ آلاتِ الأظْلالِ. من الجَلِيِّ هُنا، وبشَكْلٍ قاطِعٍ، أنّ هَدَفَ هَذا الكِتابِ لَيْسَ كِتابَةَ *اخْتِصارٍ وتَلْخيصٍ*، بل عَلَى العَكْسِ من ذَلِكَ، وَفْقَ ما يَقولُهُ الحَسَنُ: "نسْتَوْفِي فيه جَميعُ المَعاني والأغْراضِ والأعْمالِ الَّتي تَقْتَضيهِ هَذِهِ الصَناعَةُ"* من جِهَةٍ أُخْرَى، لا يُوجَدُ ما يُؤَكِّدُ لنا أنّ هَذا الكِتابَ المَوْعودَ قد وُضِعَ فِعْلاً. فالحَسَنُ لا يَأْتِي عَلَى ذِكْرِهِ في أعْمالِهِ الأُخْرَى، ويَبْدو أنَّ المَصادِرَ الفَهْرِسِيَّةَ كانَت تَجْهَلُهُ. وعَلَى أيِّ حالٍ، فإنّ النِيَّةَ المُعْلَنَةَ لِوَضْعِ هَذا الكِتابِ لم تَكُنْ بالتَأْكيدِ نِيَّةَ مُؤَلِّفٍ يَسْتَعِدُّ لكِتابَةِ اخْتِصارٍ لمُؤَلَّفِ ابنِ سِنانٍ.

والأكْثَرُ أهَمِيَّةً بالنِسْبَةِ إلَيْنا هُوَ كِتابُ ابنِ الهَيْثَمِ ***في خطوط الساعات***[٥]، حَيْثُ يُحَدِّدُ الحَسَنُ مُساهَمَتَهُ بالنِسْبَةِ إلَى كِتابِ ابن سِنانٍ، ويوضِحُ مَشْروعَهُ: فهُوَ كانَ يَنْوي مُواصَلَةَ البَحْثِ في الساعاتِ الشَمْسِيَّةِ، انطِلاقاً مِمّا كَتَبَهُ ابنُ سِنانٍ،

---

[٤] انْظُرِ الجَدْوَلَ.

* انْظُرْ نِهايَةَ مخطوطةِ ***في الرخامات الأفقيّة*** لابن الهيثم في المُجَلَّدِ الخامِسِ من هَذا الكِتابِ (المُتَرْجِم)

[٥] مَخْطوطَتا إسْطَنْبول، متحف عسكري ٣٠٢٥ وعاطف ١٧١٤/٧، الصَفَحات ٥٧ظ – ٧٦ظ.

ولَكِن بِشَكْلٍ مُخالِفٍ له. غَيْرَ أنَّ ابنَ الهَيْثَمِ لم يَنْوِ قَطّ كِتابَةَ اختصارٍ ما. لِنَسْتَعْرِضْ هُنا الأقْوالَ الخاصَّةَ بالحَسَنِ، وذَلِكَ بالرَّغْمِ من طولِ النَصِّ:

"إنّا لّما نَظَرْنا في كِتابِ إبراهيمَ بنِ سِنانٍ المهندس في ***آلات الأظلال***، وَجَدناهُ يطعنُ عَلَى رأيِ المتقدّمين في فَرْضِهِم الخطوطَ الّتي تُحُدُّ نهاياتِ الساعاتِ الزمانيّةِ في سُطوحِ الرخاماتِ خطوطاً مُسْتَقيمَةً، واعتقادِهم أن الخَطَّ الواحِدَ المُسْتَقيمَ عنده تَكونُ نهايةُ ظلّ الشخص عند آخر الساعة الواحِدَة الزمانيّة بعينها وأوّل الساعة الّتي تليها في كلّ يوم من أيّام السنة. وذَكَرَ أنّ الخَطَّ الواحِدَ المُسْتَقيمَ في سَطْحِ الرخامة الأفقيّةِ لَيْسَ يحدّ نهاية الساعة الواحِدَة الزمانية في أكْثَر من ثلاث دوائر من الدوائر الزمانية — أحدها معدّل النهار، ودائرتَيْنِ أخريين عن جنبتي معدّل النهار مُتَساوِيَتي البُعد عنها؛ وأنّ الخَطّ المُسْتَقيم الّذي في سَطْحِ الرخامة الأفقيّة الّذي يحدّ نهاية الساعة الواحِدَة الزمانيّة في الدوائر الثلاث الّتي تقدّم ذِكْرُها، هُوَ الفصلُ المشترك بَيْنَ سَطْحِ الرخامة وبَيْنَ سَطْحِ دائِرَةٍ عظيمة تمرّ برأس الشخص وبالنقطِ الّتي هِيَ نهايات الساعة الواحِدَة الزمانيّة من الدوائر الثلاث. وهَذا قولٌ صحيحٌ لا شكّ فيه. ثمّ ذَكَرَ أن هَذِهِ الدائِرَةَ العظيمة لَيْسَ تفصل واحِدَةً من الدوائر الزمانيّة الباقية عَلَى نُقْطَةٍ هِيَ نهاية تِلْكَ الساعة الزمانية من تِلْكَ الدائِرَةِ. وهَذا القول أيضاً قول صحيح، إلاّ أنّه ما قَدَرَ عَلَى تَبْيينه لأنّه لّما أتى بالبُرْهان عَلَى ما ادّعاه، بيّن بياناً صحيحاً أنّ الدائِرَةَ الواحِدَة العظيمة تفصل مُحيطات الدوائر الثلاث عَلَى ثلاث نقط هِيَ نهايات ساعة واحِدَة بعينها زمانية. ثمّ رام أن يُبَيِّنَ أنّ الدائِرَةَ العظيمة الّتي فصلت من الدوائر الثلاث ساعة زمانية، لَيْسَ تفصل من واحِدَة من الدوائر الباقية الزمانيّة تِلْكَ الساعة الزمانية. فأتى ببُرْهان لا يَدُلُّ عَلَى هَذا المَعْنَى. / وذَلِكَ أنّه فرض دائرتَيْنِ عظيمتَيْنِ تفصلان من الدوائر / الثلاث ساعتَيْنِ زمانيتَيْنِ؛ ثمّ أخرج دائِرَةً رابعة زمانية، وبيّن أنّ تَيْنك الدائرتَيْنِ العظيمتَيْنِ تفصلان من الدائِرَةِ الرابعة قوسين مُخْتَلِفَتَيْنِ، و لم يُبَيِّنْ أنه لَيْسَ واحِدَة من القوسين

المُخْتَلِفَتَيْنِ ساعة زمانيّة؛ فصارت نَتيجَةُ بُرْهانه غَيْر صريح دعواه؛ ومع ذَلِكَ فإنّ نَتيجَةَ البُرْهان لَيْسَ تمنع أن يَكونَ واحِدَة من القوسين المُخْتَلِفَتَيْنِ ساعة زمانيّة فكأنّه ادّعى أنه لَيْسَ واحِدٌ من خطوط الساعات مُسْتَقيماً، وبرهن عَلَى أنّه لَيْسَ جَميعُ خطوط الساعات مُسْتَقيمَةً. فصار كلامه في هَذا المَعْنَى مقصراً عن غرضه، ومع ذَلِكَ غَيْر مفصح عن حقيقة المَعْنَى.

وأيضاً، فإنه لم يُبَيِّنْ مقدار التفاضل الَّذي به تخرج أطراف أظلال الساعة الزمانية من الخط المفروض لتِلْكَ الساعة. وقد يحتمل أن يَكونَ خروج أطراف الأظلال عن الخط المُسْتَقيم المفروض لتِلْكَ الساعة خروجاً يسيراً، لَيْسَ له قدر محسوس. والبُرْهان إنّما يقوم عَلَى الخط التعليميّ الَّذي هُوَ طول لا عَرْضَ له، والخطّ المرسوم في سَطْح الرخامة هُوَ خطّ له عَرْضٌ محسوس، يحتمل أن يَكونَ مشتملاً عَلَى تفاضل الأظلال، إذا كانَ التفاضل غَيْر محسوس أو ينقص عنها بمقدار لا يعتد به.

وأيضاً، فإنّ جَميعَ الآلات المعمولة للشَمْسِ والكواكب إنّما هِيَ معمولة عَلَى التقريب لا عَلَى غاية التَحْقيق. فإن الأسطرلاب إنما تُقسم دوائره بثلاثمائة وستّين جزءاً. فإذا أخذ به الارتفاع، فإنّما تخرج الأجزاء الصَحيحَةُ، ولَيْسَ يَكونُ الارتفاع أبداً أجزاء صَحيحَةً، بل قد يَكونُ مع الأجزاء الصَحيحَةِ دقائق في أكْثَر الأوقات؛ ولا تظهر الدقائق في الأسطرلاب ، وربما كانَت الدقائق كثيرة ولا تظهر مع كثرتها. وأيضاً، فإن الخطوط الَّتي تقسم بها دوائر الأسطرلاب لكلّ واحِدٍ منها عَرْضٌ / محسوس؛ وذَلِكَ العَرْضُ هُوَ جزء من الدَرَجَةِ الَّتي يفصلها ذَلِكَ الخط وهُوَ جزء له قدر، لأنّ أجزاء دائِرَةِ الأسطرلاب تَكونُ صغاراً وخاصة إذا كانَ الأسطرلاب صغيراً. ومع / ذَلِكَ فلَيْسَ يُعْتَدُّ بعروض خطوط قسمة الأسطرلاب.

وهَذِهِ المعاني مَوْجودة أيضاً في ذات الحلق وفي الربع – الَّذي ترصد به الشَمْسُ – وفي جَميعِ الآلات الَّتي ترصد بها الشَمْسُ والكواكب. فقد يجوز أن

يَكونَ المتقدّمون فرضوا خطوط الساعات خطوطاً مُسْتَقيمَةً، عَلَى علم منهم بما في ذَلِكَ من التفاوت، اعتماداً عَلَى أنّ قصدهم فيما فرضوه التقريب لا غاية التَحْقيق، كما قصدوا مثل ذَلِكَ في عَمَلِ الأسطرلاب وآلات الرصد. ولّما وَجَدنا هَذا المَعْنَى ملتبساً لتقصير إبراهيم بن سِنانٍ عن إيضاح حقيقته؛ واحتمال جوازه عَلَى طريـــق التقريب، رأينا أن ننعم النظر في البَحْثِ عن حقيقة هَذا المَعْنَى، ونُجَوّز القول فيـــه ونحقّق حدود الساعات الزمانية في سُطوح الرخامات الأفقيّة. فأعملنا الفكـــر في ذَلِكَ واستقصينا البَحْثَ إلَى أن نكتشف حقيقته. فظَهَرَ أنّ المتقـــدّمين أصـــابوا في فرضهم خطوط الساعات خطوطاً مُسْتَقيمَةً وأنّ ذَلِكَ هُوَ عَلَى طريـــق التقريـــب وعَلَى نهاية التقريب، وأنّه لا يُمْكِنُ أن ترسم حدود الساعات في سُطوح الرخامات عَلَى وجه غَيْر ذَلِكَ.

وتبيّن ممّا بيّناه أنّ إبراهيم بن سِنانٍ أصاب من وجه وأخطأ من وجه؛ وذَلِكَ أنّه نظر نظراً تعليميّاً ولم ينظر نظراً طبيعيّاً؛ فأصاب من حَيْثُ التخيّل وأخطأ مـــن حَيْثُ الحسّ، لأنّه سلك في تبيين ما ادّعاه عَلَى أنّ الخطوط المرسومة في الرخامات خطوط متخيّلة، أعني طولاً لا عَرْضَ له؛ والخطوط المرسومة في الرخامـــات هِـــيَ ذوات عروض؛ فلم يميّز بَيْنَ الخطّ المتخيّل والخطّ المحسوس، فتمّ عليه الغلط.

ولّما وَجَدنا هَذا المَعْنَى عَلَى ما وصفناه، عملنا فيه هَذِهِ المَقالَةِ لِيَكونَ عـــذراً للمتقدّمين فيما رأوه من ذَلِكَ وحُجَّةً عَلَى ما فرضوه، وإظهاراً / للموضع الَّـــذي زلّ عنه إبراهيم بن سِنانٍ.

ونَحْنُ نُقَدِّم لهَذِهِ المَقالَةِ مُقَدِّمات هِيَ في نفسها علوم مستفادة لم يَـــذْكُرْها عَلَى ما ظَهَرَ لنا أحد ممّن تقدّمنا، / ومع ذَلِكَ ينكشف بها جَميعُ المعاني الَّتي بيّناها في هَذِهِ المَقالَةِ. وهَذا حين ابتدأ بالقول في ذَلِكَ. وبالله نستعين في جَميعِ الأمور".

وهَكَذا لا تَسْمَحُ قِراءَةُ هَذِهِ المُقَدِّمَةِ، وكذَلِكَ دِراسَةُ بَقِيَّةِ النَصِّ، بأيِّ التِباسٍ بَيْنَ كِتابِ الحَسَنِ واختِصارِ – تَلْخيصِ مُحَمَّدٍ.

[ص ١٥٩، سطر ٧] يَنْبَغي مُقابَلَةُ أقوالِ ابنِ الهَيْثَمِ في هَذا المَقْطَعِ حَوْلَ المِقْدارِ المَعْلومِ بما طَوَّرَهُ في مُؤَلَّفِهِ ***في المَعْلومات***، راجعْ:

«La philosophie des mathèmatiques d'Ibn al – Haytham. II. *Les Connus*». *MIDEO*, 22 (1993), pp. 87 – 275, voir pp. 97 sqq.

[ص ١٦١، سطر١٠] من السَهْلِ أن نَفْهَمَ أنّ هَذا المُؤَلَّفَ حَوْلَ بناءِ مُرَبَّعٍ مُساوٍ لدائِرَةٍ لم يُكْتُبْ قَطّ، ومن العَبَثِ البَحْثُ عن آثارٍ له في كِتابَاتِ المُفَهْرِسين القُدامَى أو في أعْمالِ ابن الهَيْثَمِ نَفْسهِ. يُشيرُ كاتِبُ الاعْتِراضِ [ص ١٦٤، سطر ٥] إلَى هَذا فيُكْتُبُ:"فإلَى الآن لم يَظْهَرْ له قَوْلٌ فيه ولا ذُكِرَ في فهرست مُصَنَّفاتِهِ". نُشيرُ من جِهَةٍ أُخْرَى إلَى أنّ هَذا النَقْدَ المُوَجَّه إلَى الحَسَنِ بن الهَيْثَم، بالرَّغْمِ من صِحَّةِ الاعْتِراضِ الَّذي يَتَضَمَّنُهُ، لم تُدْرَكْ فيه النِيَّةُ الحَقيقِيَّةُ لابنِ الهَيْثَمِ، الَّذي رَمَى بِكُلِّ تَأكيد إلَى مُقارَنَةِ مِساحَتَيِ الدائِرَةِ والمُرَبَّعِ، وإلَى إعادَةِ تَأْسيسِ المَسْلَكِ المُقْتَرَحِ في نَقْدِه. أمّا مُرورُهُ عَبْرَ الأهِلَّةِ فقد هَدَفَ إلَى تَجَنُّبِ التَعاطي مع نِسَبٍ بَيْنَ شَكْلٍ مُسْتَقيمٍ وآخرَ مُنْحَنٍ، ما دَفَعَهُ إلَى تَناوُلِ نِسَبٍ بَيْنَ أشْكالٍ مُتَجانِسَةٍ فَحَسْب، أي بَيْنَ دَوائِرَ وأهِلَّةٍ.

[ص ١٦٤، سطر ٧] الطَبيبُ ابنُ رضوان لَيْسَ شَخْصاً مَجْهولاً. إذ نَجدُ فَهْرِسَ أعْمالِه في ***تأريخ الحكماء*** للقِفْطِيِّ، وفي ***عيون الأنباء*** لابنِ أبي أُصَيْبِعَة. انْظُرْ أيضاً:

J. Schacht et Max Meyerhof, *The Medico – Philosophical Controversy between Ibn Butlan of Baghdad and Ibn Ridwan of Cairo* (Le Caire, 1937), p. 12.

تُظْهِرُ عَناوينُ هَذِهِ الأعْمالِ أنّ ابنَ رضوان اشْتَغَلَ بالفَلْسَفَةِ، لا بالرياضِيّاتِ.

السُمَيْساطي، وكما يَدُلُّ اسْمُهُ، هُوَ فارسِيٌّ من سُمَيْساط وهِيَ مِنْطَقَةٌ يَتَحَدَّرُ منها العَديدُ من العُلَماءِ. نَعْرِفُ له نَصَّ ***الدائِرَةُ أوْسَعُ الأشْكالِ***، انْظُرِ المُجَلَّدَ الأوّلَ.

[ص ١٩٤ / سطر ١٧] إنّها القَضِيَّةُ ٢٩ من كِتابِ إقليدس حَوْلَ *قِسْمَةِ الأشْكال*
R. C. Archibald, *Euclid's Book on Division of Figures* (Cambridge, 1915), pp. 66-67.

[ص ٣٠١] **شَرْحُ ابنِ الهَيْثَمِ في كِتابِهِ *في حَلّ الشُكوكِ*... للقَضِيَّة الأُولَى من المَقالَةِ العاشِرَةِ من كِتاب *الأُصول* لإقليدس.**

بَعْدَ أن وَضَعَ ابنُ الهَيْثَمِ الكُتَيِّبَ، المُحَقَّقَ هُنا، حَوْلَ القَضِيَّةِ الأُولَى من المَقالَةِ العاشِرَةِ من كِتابِ ***الأُصول***، عادَ إلَى المَسْأَلَةِ نَفْسِها في ***حَلّ الشُكوكِ***. فقد تَناوَلَ مُجَدَّداً، مع بَعْضِ الاخْتِلافاتِ، نَصَّ الكُتَيِّب. ويَتَأَلَّفُ الشَرْحُ الَّذي كَتَبَهُ في ***حَلّ الشُكوكِ*** من مُقَدِّمَةٍ، حَيْثُ يَسْتَعيدُ مع بَعْضِ التَعْديلاتِ مُقَدِّمَةَ الكُتَيِّبِ، قَبْلَ أن يَعْرِضَ البُرْهانَ الَّذي سَبَقَ أن قَدَّمَهُ في هَذا الكُتَيِّب. وقد حَقَّقْنا المُقَدِّمَةَ، حَيْثُ بإمْكانِ القارِئ أن يَتَعَرَّفَ عَلَى جُمَلٍ بأكْمَلِها من الكُتَيِّب. أمّا بالنِسْبَةِ إلَى البُرْهانِ، فقد أشَرْنا فَقَطْ إلَى الاخْتِلافاتِ، نظراً إلَى أنّ الأمْرَ يُفْضي فَحَسْب إلَى اسْتِشْهادٍ من نَصِّ الكُتَيِّب. ومن أجْلِ تَحْقيقِ النَصِّ وتَحْديدِ الاخْتِلافات، استعنّا بالمَخْطوطَاتِ التالِيَة لكِتاب ***حَلّ الشُكوكِ***، وهِيَ:

١– إسْطَنْبول جامعة ٨٠٠، أشرنا إلَيْها هُنا بالحَرْفِ **أ**، تاريخُ نَسْخِها غَيْرُ مَذْكورٍ؛ قد يَكونُ ذَلِكَ في القَرْن السادِسِ أو السابِعِ للهجرةِ، أي في القَرْن الثالِث عَشَرَ أو الرابِعِ عَشَرَ للميلادِ.

٢– Bursa Haraççi 1172، أشَرْنا إلَيْها هُنا بِالحَرْفِ **ب**، وقد نُسِخَت في العام ٤٧٧هـ / ١٠٨٤م.

٣– طهران، ملك ٣٤٣٣، أشرنا إلَيْها بِالحَرْفِ **ت**؛ وقد نُسِخَت في العامِ نَفْسِهِ الَّذي نُسِخَت فيه المَخْطوطَةُ السابِقَةُ.

وهذا الشكل قد يلتبس على الناس معناه. ويظنّ أكثر أصحاب التعاليم أنه جزئيّ على ما ذكره أقليدس وأنه لا يصحّ إلا على الوجه الذي ذكره أقليدس. وليس الأمر على ما تظنه هذه الطائفة. وإنما اقتصر أقليدس على المعنى الجزئيّ – وهو أن يكون المنقوص أكثر من النصف – لأن هذا المعنى هو الذي يستعمله في كتابه فاقتصر عليه لأنه هو الذي يحتاج إليه. ا - ٣٣٢ / ب - ٢٠٥ - ظ / ت

ولما أنعمنا النظر في هذا المعنى وبحثنا عن حقيقته، وجدناه معنى كليًّا وخاصةً من خواصّ النسب، وهو أنه إن جعلت نسبة المنقوص إلى المقدار الأعظم أيَّ نسبة كانت، وجعلت المنقوصات كلّها على مثل تلك النسبة، فلا بدّ أن ينتهي التنقيص إلى مقدار أصغر من المقدار الأصغر. ولما ظهر لنا هذا المعنى رأينا أن نكشفه لينتفع به من تضطره حاجته إليه، وليسقط الظنّ الذي قدمنا ذكره من أن هذا المعنى جزئيّ. فهذبنا في هذا المعنى قولاً برهانيًّا يدلّ على كلية هذا المعنى، ومع ذلك في غاية الإيجاز والاختصار. وأخرجناه إلى الوجود من قبل أن يعن لنا الفكر في حلّ الشكوك. ولما شرعنا في حلّ الشكوك وشرح / ما يلتبس من معاني هذا الكتاب وانتهينا إلى هذا الشكل، وجب أن نشرح هذا المعنى في هذا الموضع – لأنه من جملة ما يجب شرحه من معاني هذا الكتاب – ونلخص البرهان ليكون/ مقترنًا / بهذا الشكل. والبرهان على هذا المعنى هو ما نذكره الآن. ب - ٢٠٦ - و / ت ا - ٣٣٣

1 قد : ناقصة [ت] – 4 يستعمله : يحتاج إليه [ت] / في كتابه : ناقصة [ت] / يحتاج إليه : يستعمله [ت] – 11-12 هذا الكتاب ... نشرح : ناقصة [ا، ب] – 12 الشكل : الشك [ت] – 13 الشكل : الشك [ت] – 14 الآن : نقل ابن الهيثم بعدها نصّ برهانه كما نجده في رسالته مع بعض الفروق التي نثبتها فيما يلي وسنشير إلى أرقام صفحات الكتاب :

[page 327] 4 أصغر إلى أعظم : الأصغر إلى الأعظم [ت] / من : إلى [ت] / الباقي : الثاني [ا] – 5 القسمة : التنقيص [ا، ب، ت] ونلفت النظر إلى أخذه بكلمة «التنقيص» عوضًا عن «القسمة» كما في مواضع عدة من هذا النصّ عند نقله إيّاه في كتابه في حلّ شكوك كتاب أقليدس في الأصول – 11 زهـ : هـ ز [ت] – 12 ولتكن : فليكن [ا، ب، ت] / تلك : ناقصة [ب] – 15 المقادير : المقادير المفروضة [ت] – 15-16 مقدار جـ د التي ... ك ن : ناقصة [ت] – 18 د جـ ... ق ف أعظم من : ناقصة [ت] – 20 مساوٍ : مساوى [ا، ب] / إذ أصغرها : وأصغرها [ا، ب، ت] – 21 ك ن (الثالثة) : ناقصة [ت] – 22 وتقسمة : ويقسَم [ا، ب].

[page 329] 1 نسب : نسبة [ت] – 2 هي : ناقصة [ا، ب، ت] – 4 زهـ : د هـ [ت] – 5 س ب : ا ب [ا، ب، ت] / ع ب : س ب [ا، ب، ت] – 6 ص ب : ع ب [ا، ب، ت] – 9 نسب : نسبة [ا، ب] – 9-10 ق د ... كنسبة : ناقصة [ت] – 14 ومما ... هذه النسبة : ناقصة [ت].

ابنُ الهَيْثَمِ ونَقْدُ ابنِ السريّ: القَضِيَّةُ الأُولَى من المَقالَةِ العاشِرَةِ من *الأُصول*.

يَعودُ أصْلُ ابنِ السرّي، المُلَقَب بابنِ الصلاح (نَجْمُ الدين أبو الفتوح أحمدُ بنُ مُحَمَّدٍ)، إلَى همذان وَفْقَ ابن أبي أُصَيْبِعَة[٦]، وإلَى سُمَيْسَاط وَفْقَ القِفْطِيِّ[٧]. ويَتَّفِقُ المُفَهْرِسان عَلَى أنّ ابنَ السرّي قد أقامَ في بَغْدادَ قَبْلَ أن يُغادِرَها إلَى دمشق، حَيْثُ تُوفِّيَ في أواخِرِ العامِ ٥٨٤ للهجرة أي ١١٥٣/ ١١٩٤م[٨].

يُمكِنُ أن نَسْتَخْلِصَ من كِتابَاتِ ابنِ السرّي الَّتي وَصَلَت إلينا أوْصافَ عالِمٍ وفيلسوفٍ، عَمِلَ في عِلْمِ المَنطقِ، وانْتَمَى إلَى رَعيلٍ من العُلَماءِ — الفلاسِفَةِ، يَعودُ تأسيسُ مَنْحاهُم إلَى الكِنْدِيِّ. ويَسْتَطيعُ هَذا الاهتِمامُ المُزْدَوِجُ بالرياضِيّاتِ وبالمَنْطقِ معاً أن يُوضِحَ، ولو جُزْئِيّاً عَلَى الأقَلِّ، أُسْلوبَ المُؤَلِّفِ النَقْدِيَّ ومَواضيعَ كِتابَاتِهِ. ونَحْنُ نَعْرِفُ له كُتَيِّباً عُنْوانُهُ: ***الشكل الرابع من القياس المَنْسوب إلَى جالينوس***[٩] فَضْلاً عن كِتابَاتٍ أُخْرَى في المَنْطقِ[١٠] والفيزياءِ[١١] وعِلْمِ الفَلَكِ[١٢]. وتعكسُ مُؤَلَّفاتُهُ

---

[٦] ابنُ أبي أصَيْبِعَة، ***عيون الأنباء***، بيروت ١٩٦٥، ص ٦٣٨ — ٦٤١.

[٧] القِفْطيّ، ***تأريخ الحكماء***، ص ٤٢٨.

[٨] انْظُرْ نَفْسَ المَرْجَعِ.

[٩] انْظُرْ:

N. Rescher, *Galen and the syllogisms* (Pittsburg, 1966),

وتَحْتَوي هَذِهِ المَقالَةُ على تَحْقيقِ النَصِّ العَرَبِيِّ وتَرْجَمَتِهُ.

A. Sabra, A twelfth – century defence of the figure of the syllogism", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, XXVIII (1965), pp. 14 – 28.

[١٠] انْظُرْ:

Mubahat Türker Küyel, "Ibn uṣ –Ṣalâḥ comme exemple à la rencontre des cultures", *Araştirma,* VIII, 1972 (Paru en 1973);

وكذلك تَحْقيقَه وترجمته إلى التركيّة:

«Aristotels' in Burhân Kitabi'nin ikinci makalesi'nin sonundaki kismin şerhi ve oradaki yanlişin düzeltilmesi hakknida», *Araştirma*. VIII, 1972 (paru en 1973).

[١١] انْظُرْ:

M. Tüker,« Les iritiques d'Ibn al – Şalāḥ sur le De Caelo d'Aristote et sur ses commentaires», *Araştirma*. II, (1964), pp. 19 – 30 et 52 – 79.

[١٢] انْظُرْ:

الرياضِيَّةُ أُسْلوباً نَقْدِيّاً مُشْتَرَكاً لنتاجهِ العِلْمِيِّ. فهُوَ يُصَوِّبُ للقوهِيِّ خَطَأً مُتَعَلِّقاً بتَحْديدِ نِسْبَةِ قُطْرِ الدائِرَةِ إِلَى مُحيطِها[١٣]. وقد كَتَبَ ثَلاثَةَ كُتَيِّباتٍ بُغْيَةَ الرَدِّ عَلَى انْتِقاداتٍ صاغَها ابنُ الهَيْثَم، تَسْتَهْدِفُ ***أُصول*** أقليدس[١٤]. ويَنْتَمي النَصُّ الَّذي نُحَقِّقُهُ هُنا إِلَى هَذِهِ المَجْموعَةِ، وهُوَ يَتَناوَلُ مُؤَلَّفَ ابنِ الهَيْثَمِ المُكَرَّسَ للقَضِيَّةِ الأُولَى من المَقالَةِ العاشِرَةِ من ***الأُصول***. ولا يَقْتَصِرُ تَناوُلُ ابنِ السريِّ عَلَى هَذا المُؤَلَّفِ فَحَسْب، بل يَتَعَدّاهُ إِلَى كِتابِ ابنِ الهَيْثَم ***في حَلّ شُكوكِ كِتاب إقليدس من الأُصول وشرح معانيه***[١٥]. وقَبْلَ أن نَنْكَبَّ عَلَى دِراسَةِ نَصِّ ابنِ السريّ، لِنُلاحِظْ أنّ هَذا النَصَّ يُمَثِّلُ شَهادَةً قَيِّمَةً عَلَى مَدَى المَعْرِفَةِ الَّتي كانَت سائِدَةً في النِصْفِ الأَوّلِ من القَرْنِ الثاني عَشَرَ عن النُسَخِ العَرَبِيَّةِ لِمُؤَلَّفاتِ أرشميدس.

يُوَجِّهُ ابنُ السريّ، في هَذا الكُتَيِّب، نَقْدَيْنِ أساسِيَّيْنِ إِلَى ابنِ الهَيْثَم:

١) وَفْقَ ما يُورِدُهُ ابنُ السريّ، فقد ادَّعَى ابنُ الهَيْثَمِ أنّ القَضِيَّةَ، الَّتي أَثْبَتَها هَذا الأخيرُ، "كُلِّيَّةٌ" فيما تَكونُ تِلْكَ الَّتي تَعودُ إِلَى إقليدس "جُزْئِيَّةً". ولِذَلِكَ، اسْتَنْتَجَ ابنُ الهَيْثَمِ أنّه يَنْبَغي اسْتِبْدالُ قَضِيَّةِ إقليدس بقَضِيَّتِهِ الخاصَّةِ. ووَفْقَ ما يُورِدُهُ ابنُ السريّ، فقد أخْطَأَ ابنُ الهَيْثَمِ في ذَلِكَ مرّتَيْن: في حُكْمِهِ بِكُلِّيَّةِ قَضِيَّتِهِ وجُزْئِيَّةِ تِلْكَ

P. Kunitzsch, Ibn aṣ – Ṣalāh. *Zur Kritik du Koordinatenüberlierung im Sternkatalog des Almagest*, Abhrandlungen der Akademie der wissenschaften in Göttingen. Philologisch – Historische Klasse. Folge 3, nº 94 (Göttingen, 1975).

[١٣] راجعْ مَخْطوطَةَ آيا صوفيا ٤٨٤٥، ص ٣٦ظ – ٤٠و.

[١٤] ***جوابٌ لأحمَدَ بن مُحَمَّدٍ بنِ السريّ عن بُرْهانِ مَسْأَلَةٍ مُضافَةٍ إلى المَقالَةِ السابعَةِ من كتاب إقليدس في الأصول***، مخطوطة آيا صوفيا ٤٨٣٠، ص ١٣٩و – ١٤٥ظ؛ ***في بيان ما وهم فيه أبو عليّ بن الهيثم في كتابه الشكوك على إقليدس***، مخطوطة آيا صوفيا ٤٨٣٠، ص ١٤٦ظ – ١٤٩ظ؛ ***في كشف الشبهة الّتي عرضت لجماعة ممّن ينسب نفسه إلى علوم التعاليم على إقليدس في الشكل الرابع عشر من المَقالَةِ الثانية عشر من كتاب إقليدس***، مخطوطة آيا صوفيا ٤٨٣٠، ص ١٥١ظ – ١٥٤و.

[١٥] انْظُرْ مَخْطوطَةَ إِسْطَنْبول، الجامعة، ٨٠٠، ص. ١٤٣ظ – ١٤٥و. راجِعِ الحَواشي الإضافِيَّة ص ٤٦١ – ٤٦٣.

الَّتي تَعودُ إِلَى إقليدس، هَذا من جِهَةٍ؛ وفي فَهْمِهِ لِما تَعْنيهِ "القَضِيَّةُ الكُلِّيَّةُ" بالذاتِ، وهَذا من جِهَةٍ أُخْرَى.

٢) في القَضِيَّةِ الَّتي يصوغُها ابنُ الهَيْثَمِ، يَفْرِضُ نِسْبَةً ثابِتَةً α ، حَيْثُ يَكونُ $0 < \alpha < 1$، وذَلِكَ عِوَضاً عن أخْذِهِ لِمُتَوالِيَةٍ $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ من النِسَبِ المُتَغَيِّرَةِ الَّتي تُحَقِّقُ العَلاقَةَ

$$½ < \alpha_i < 1, (i = 1, 2, ...)$$

فَلِفَرَضِيَّةِ ابنِ الهَيْثَمِ هَذِهِ أن تَحُدَّ من إمْكانِيَتِهِ في إقامَةِ البُرْهانِ عَلَى بَعْضِ القَضايا، الوارِدَةِ في المَقالَةِ الثانِيَةِ عَشَرَةَ من ***الأُصول***، الَّتي تُثْبَتُ، تَحْديداً، بواسِطَةِ القَضِيَّةِ الأُولَى من المَقالَةِ العاشِرَةِ، وهَذا ما يُفْسِدُ الصِبْغَةَ الكُلِّيَّةَ لقَضِيَّةِ ابنِ الهَيْثَمِ، وَفْقَ ما يَسوقُهُ ابنُ السريّ.

بُغْيَةَ فَهْمِ مَغْزَى نَقْدِ ابنِ السريِّ وما يَرْمي إِلَيْهِ، لِنُذَكِّرْ، بِالرَّغْمِ من إمْكانِيَّةِ الوُقوعِ بالتَكْرارِ، بقَضِيَّتَيْ إقليدس وابنِ الهَيْثَمِ. لِنَبْدَأْ بِتِلْكَ الَّتي تَعودُ إِلَى إقليدس:

لِيَكُنْ A وَ a مِقْدارَيْنِ مُتَجانسَيْن، بِحَيْثُ يَكونُ $A > a$، وَلْتَكُنْ $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ مُتَوالِيَةً من نِسَبٍ مُتَساوِيَةٍ أو مُتَبايِنَةٍ، بِحَيْثُ يَكونُ

$$½ < \alpha_i < 1,(i = 1, 2, ...)$$

لِنَأخُذِ المَقاديرَ

$$A_1 = (1 - \alpha_1)A,\ A_2 = (1 - \alpha_2)A_1 = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)A,\ ..A_k = \prod_{i=1}^{k}(1-\alpha_i)\,A,$$

فإذاً يُوجَدُ عَدَدٌ طبيعيٌّ صحيحٌ $(N \in \mathbb{N})$ بِحَيْثُ يَكونُ

$$n > N \Rightarrow A_n < a.$$

لِنُلاحِظْ أنّ النَصَّ اليونانيَّ للقَضِيَّة الأُولَى من المَقالَةِ العاشِرَةِ مُتْبَعٌ بشِبْهِ قَضِيَّةٍ: "نَسْتَطيعُ أن نُثْبتَ هَذِهِ القَضِيَّةَ بِنَفْسِ الطَريقَةِ، إذا ما كانَت الأَجْزاءُ المُقْتَطَعَةُ أنْصافاً". ويَبْدو أنّ شِبْهَ القَضِيَّةِ هَذِهِ كانَت غَيْرَ مَعْروفَةٍ لَدَى الرياضِيِّين الَّذين عَمِلوا عَلَى النُسَخِ العَرَبِيَّةِ لأعْمالِ إقليدس، المُتَداوَلَةِ آنذاك.

وقَضِيَّةُ ابنِ الهَيْثَمِ مُكَرَّسَةٌ لِنَفْسِ المَسْأَلَةِ، ولَكِن تُعْتَمَدُ فيها الفَرَضِيَّةُ التالِيَةُ:

$$\alpha_I = \alpha = const, (i = 1, 2, \ldots; 0 < \alpha < 1);$$

ويَكونُ لَدَيْنا إذاً

$$A_n = (1 - \alpha)^n A$$

وإذا كانَت $\alpha = ½$، يَكونُ $A_n = (½)^n A$، ويُوجَدُ عَدَدٌ صَحيحٌ N، $(N \in \mathbb{N})$ بحَيْثُ يَكونُ

$$n > N \Rightarrow A_n < a.$$

وبلغةٍ أُخْرَى، فإنّ نَقْدَ ابنِ السريّ، يَعْني أنّه من غَيْرِ الكافي — كما في حالَةِ ابنِ الهَيْثَمِ — أن تُثْبَتَ العَلاقَةُ

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \alpha)^n = 0,$$

إنّما يَنْبَغي إثْباتُ العَلاقَةِ

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_i) = 0,$$

لأنّ النِسَبَ تَسْتَطيعُ أن تَكونَ مُتَساوِيَةً أو مُتَبايِنَةً.

ومن المَعْروفِ أنّ هَذِهِ الصياغةَ مُعادِلَةٌ لِتِلْكَ الَّتي تَعودُ إِلَى ابنِ قُرَّةَ[١٦]، ممّا يَعْني أنّ ابنَ السريّ لم يَأْتِ بِشَيْءٍ جَديدٍ. فهُوَ لم يَلْحَظْ أنّهُ باسْتِطاعَتِنا الحُصول عَلَى هَذا الشَرْطِ، الَّذي هُوَ أعَمُّ، ولَكِن بِقَدْرٍ يَكادُ لا يُذْكَرُ، من ذاك الَّذي يَعودُ إِلَى ابنِ الهَيْثَمِ، فإذا فَرَضْنا

$$0 < \alpha < \alpha_i < 1$$

سيَكونُ لَدَيْنا

$$(1 - \alpha_i) < (1 - \alpha) \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} (1-\alpha_i) < (1 - \alpha)^n$$

فإذا أخَذْنا حَصْراً الأعْدادَ α_i الَّتي تُحَقِّقُ العَلاقَةَ

$$½ \leq \alpha_i < 1,$$

---

[١٦] ابنُ قُرَّة، ***كِتابٌ في مِساحَةِ المَخْروطِ المُكافِئ***، القَضِيَّة ٣٠. انْظُرِ المُجَلَّدَ الأوَّلَ من هذا الكتاب.

تَتضَمَّنُ النَتيجَةُ المُثْبَتَةُ لَدَى إقليدس — وبالتالي لَدَى ابنِ قُرَّة —نَتيجَةَ ابنِ الهَيْثَمِ كحالَةٍ جُزْئِيَّةٍ؛ أمّا، في الحالَةِ الَّتي تَكونُ فيها الأعْدادُ α_i مُحَقِّقَةً للعَلاقَةِ

$$0 \leq \alpha_i < ½$$

فإنّ النَتيجَةَ المُثْبَتَةَ لَدَى ابنِ الهَيْثَمِ، تُعَمِّمُ نَتيجَةَ إقليدس لتُصْبِحَ مُمْكِنَةَ التَطْبيقِ عَلَى الفَتْرَةِ

$$0 < \alpha_i < 1.$$

لنتَناوَلِ الآن النَقْدَ الثاني الَّذي يُورِدُهُ ابنُ السريّ، الَّذي مَفادَهُ أنّ قَضِيَّةَ ابنِ الهَيْثَمِ غَيْرُ قابلَةٍ للتَطْبيقِ عَلَى القَضايا ٢، ٥، ١٠ وَ ١١ من المَقالَةِ الثانيَةِ عَشَرَةَ من ***الأُصول***. لِنَأخُذِ القَضِيَّةَ الثانيَةَ من المَقالَةِ الثانيَةِ عَشَرَةَ، وذَلِكَ بُغْيَةَ فَهْمِ اسْتِدْلالِ ابنِ السريّ:

إذا كانَت C وَ C_1 مِساحَتَيِ الدائرتَيْنِ ذَواتَيِ القُطْرَيْنِ D وَ D_1 عَلَى التَرْتيبِ، فإنّ

$$\frac{C}{C_1} = \frac{D^2}{D_1^2}.$$

لِنَفْرِضْ أنّ

$$\frac{D^2}{D_1^2} > \frac{C}{C_1},$$

فإذاً تُوجَدُ مِساحَةٌ S أصْغَرُ من C_1 بحَيْثُ يَكونُ

$$\frac{D^2}{D_1^2} = \frac{C}{S}.$$

لِنَجْعَلْ $S + \varepsilon = C_1$

لتَكُنْ

$$S_i, \ (i = 2, \ldots, n)$$

مِساحاتِ مُتَعَدِّداتِ الأضْلاعِ المُحاطَةِ بالدائِرَةِ ذاتِ المِساحَةِ C_1، الَّتي يَكونُ عَدَدُ أضْلاعِها 2^i؛ فيَكونُ لَدَيْنا تِباعاً

$$S_2 > ½\, C_1 \Rightarrow A_1 = C_1 - S_2 < ½ C_1$$

$$S_3 - S_2 > \tfrac{1}{2}A_1 \Rightarrow A_2 = C_1 - S_3 = A_1 - (S_3 - S_2) < \tfrac{1}{2}A_1 < (\tfrac{1}{2})^2 C_1, \ \ldots$$

$$S_m - S_{m-1} > \tfrac{1}{2} A_{m-2} \Rightarrow$$

$$A_{m-1} = C_1 - S_m = A_{m-2} - (S_m - S_{m-1}) < \tfrac{1}{2}A_{m-2} < (\tfrac{1}{2})^{m-1} C_1$$

وإذا ما طَبَّقْنا القَضِيَّةَ الأُولَى من المَقالَةِ العاشِرَةِ ارتِكازاً عَلَى هَذِهِ المُتَبايِناتِ، باسْتِطاعَتِنا أن نَجِدَ العَدَدَ n بحَيْثُ يَكونُ $A_n < \varepsilon$. وبما أنّ $A_n + S_n = C_1$؛ فيَكونُ لَدَيْنا إذاً $S_n > S$.

غَيْرَ أنَّ النِسَبَ، الَّتِي تَدْخُلُ فِي المَسارِ المُتَّبَعِ لَدَى إقليدس، غَيْرُ مُتَساوِيَةٍ، وهِيَ أَكْبَرُ من النِصْفِ:

$$\frac{S_2}{C_1} = \frac{2}{\pi};\ \frac{S_3 - S_2}{C_1 - S_2} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{\pi - 2};\ \frac{S_4 - S_3}{C_1 - S_3} = \frac{2\left(2\sqrt{2-\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)}{\pi - 2\sqrt{2}}.$$

ومن ثم يُؤَكِّدُ ابنُ السريّ أنَّ قَضِيَّةَ إقليدس تُمَكِّنُنا من استِنْتاجٍ ما لا تُمَكِّنُنا منه قَضِيَّةُ ابنُ الهَيْثَمِ. وهَذا النَقْدُ غَيْرُ مَبْنِيٍّ عَلَى أساسٍ سَليمٍ، لأنّه، من المُتَبايِناتِ المُتَتالِيَةِ المُسْتَعْمَلَةِ لَدَى إقليدس،

$$S_2 > \tfrac{1}{2} C_1;\quad S_3 - S_2 > \tfrac{1}{2}A_1,\quad \ldots;\ S_{m+1} - S_m > \tfrac{1}{2}A_{m-1};$$

نَسْتَنْبِطُ

$$A_1 < \tfrac{1}{2} C_1;\quad A_2 < \tfrac{1}{2} A_1;\quad \ldots\quad;\quad A_m < \tfrac{1}{2} A_{m-1},$$

ونَحْصُلُ بالتالي عَلَى العَلاقَةِ التَكْرارِيَّةِ

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad A_n < (\tfrac{1}{2})^n C_1.$$

وابنُ الهَيْثَمِ الَّذي أَثْبَتَ بِلُغَةٍ أُخرَى أنّ

$$\lim_{n\to\infty} (\tfrac{1}{2})^n C_1 = 0,$$

يَسْتَنْبِطُ من ذَلِكَ أنّ

$$\lim_{n\to\infty} A_n = 0.$$

وبِالرَّغْمِ من عَدَمِ دِقَّةِ نَقْدِ ابنِ السريّ، فإنّه يُوحي بالنَظَرِ الثاقِبِ لَدَى صاحِبِهِ ويَشْهَدُ عَلَى أنّ الرياضِيِّين والرياضِيِّين — الفلاسِفَةَ قد أَوْلوا آنذاك اهتِماماً

خاصّاً للقَضِيَّةِ الأُولَى من المَقالَةِ العاشِرَةِ من ***الأُصول*** الَّتي تُشَكِّلُ أساساً لعَمَلِيةِ التَقْريبِ. ولَكِنَّ ابنَ السريّ، لم يُحَوِّرْ أراءَ ابنِ الهَيْثَمِ فَحَسْب، إنما أيضاً، لم يُفْلِحْ في تَقْديرِ مَدَى عُمْقِ مَنْحاه.

ا - ٣٠ - ظ
ب - ١٤٩ - ظ

بسم الله الرّحمن الرّحيم

قول للشيخ أبي الفتوح أحمد بن محمد بن السريّ رحمة الله في إيضاح غلط أبي علي بن الهيثم في الشكل الأول من المقالة العاشرة من كتاب أقليدس في الأصول

قال: إني نظرت مقالة لأبي علي بن الهيثم قد عنونها بقسمة المقدارين المختلفين المذكورين في المقالة العاشرة من كتاب أقليدس في الأصول، ووجدته يذكر في خطبتها ظنّ كثير من أصحاب التعاليم بأن معنى الشكل الأول من المقالة العاشرة من كتاب أقليدس في الأصول جزئيٌّ وأنه لا يصحّ إلا على الوجه الذي ذكره أقليدس، وهو أن كل مقدارين / مختلفين يُفصل من أعظمهما (ب - ١٥٠ -) أكثرُ من نصفه ومما يبقى أكثرُ من نصفه، ويُفعل ذلك دائمًا، فإنه سيبقى مقدار أصغر من المقدار الأصغر الموضوع. وأنه ليس الأمر على ما تظنّه هذه الطائفة، فإنه إنما اقتصر أقليدس على المعنى الجزئيّ، وهو أن يكون المنقوص أكثر من النصف، لأن هذا المعنى هو الذي يستعمله في كتابه، فاقتصر عليه، لأنه هو الذي يحتاج إليه. ثم ذكر أن الحاجة دعته في بعض استنباطاته الهندسية إلى أن ينقص من أعظم مقدارين مختلفين نصفه ومما يبقى نصفه ومما يبقى أيضًا نصفه دائمًا إلى أن ينتهي القسمة إلى أن يبقى مقدار أصغر من المقدار الأصغر؛ فاستخرج هذا المعنى لحاجته إليه. ثم زعم أنه لمّا أنعم النظر من بعد ذلك في هذا المعنى وجده معنى كليًّا وخاصّة من خواصّ النسب، وهو أنه إن جعلت نسبة المنقوص إلى المقدار الأعظم أي نسبة كانت وجعلت المنقوصات كلها على مثل تلك النسبة، فلا بدّ أن ينتهي القسمة إلى مقدار أصغر من المقدار الأصغر، وأنه رأى أن

1 نجد بعد البسملة «استعنت بالله» [ب] – 3 إيضاح غلط: غير واضحة [ا] – 5 في الأصول: غير واضحة [ا] – 8 أقليدس: اوقليدس [ب] / جزئيّ: كلي، كما في نصي ابن الهيثم. ومن غير المعقول أن يقول «كلي» ثم يعقب هذا بالجملة التالية «وأنه لا يصح ...» – 11 تظنّه: يتظنه [ب].

يكشف هذا المعنى ويظهره ليُنتفع به وليسقط الظنّ الذي يظهر به أن هذا المعنى جزئيّ، فاستأنف برهانًا يدلّ على كليّة هذا المعنى.

ثم ذكر أبو علي هذا الكلام والبرهان أيضًا في كتابه في حلّ شكوك كتاب أقليدس في الأصول في المقالة العاشرة منه. وذكر هناك أن له في ذلك مقالة مفردة ⟨و⟩أشار إلى هذه المقالة.

ولمّا تأملت كلام هذا الرجل ببادئ النظر وجدته قد أخطأ / ضروبًا من الخطأ. أما أوّلاً ففي ا - ٣١ - و فهم معنى الكليّ والجزئيّ؛ وثانيًا في فهم معنى كلام أقليدس والأشكال التي استعمل فيها هذا الشكل، وظنّه أن شكله ينوب مناب شكل أقليدس فيها؛ وثالثًا اقتصاره بالشكل الذي ذكره أقليدس على كتاب أقليدس فقط وأنه ذكر هنالك الحاجة إليه والإضراب عما عداه.

فلمّا رأيت ذلك، أشرت إلى الخلل العارض في كلامه لئلا يشتبه ذلك على متعلم، فيبقى شكل أقليدس على الخصوصية التي لا توجد إلا فيه وبها يتمّ البرهان على حلّ المعاني الهندسية المستعملة في السطوح والأجسام غير المتجانسة، أعني بغير المتجانسة مثل الشكل المستقيم الخطوط والدائرة ومثل الشكل المجسّم الذي تحيط به سطوح مستوية والكرة.

وهذا مبدأ كلامنا في ذلك. أمّا خطأه في فهم معنى الكليّ والجزئيّ، فذلك ظاهر، وذلك لأن الكليّ والجزئي من الأشياء المتضايفة التي يقال أحدها / على الآخر على سبيل العموم وأن ب - ١٥٠ - ظ يوجد جميع أوصافه وشروطه في الخاصّ، وليس يلزم من ذلك الانعكاس، أعني أن يوجد جميع أوصاف الخاصّ وشروطه في العام؛ مثال ذلك: عموم الشكل المستقيم الخطوط للمثلث والمربع، وعموم العدد للزوج والفرد؛ فإن كل مستقيم الخطوط شكل، ولا ينعكس القضيّة حتى يكون كل شكل مستقيم الخطوط؛ وكذلك كل مثلث شكل، وليس كل شكل بمثلث؛ وكذلك أيضًا كل زوج فهو عدد، وليس كل عدد بزوج. فإذا طلبنا هذا الرسم الذي يوجد للكليّ والجزئيّ، لم نجده في قضيته، وذلك أنه استعمل قضيته، التي زعم أنها كليّة بزيادة شرط، وهو قوله: إن المنقوصات كلّها على نسبة واحدة، وأقليدس ذكر الكلام مرسلاً من غير اشتراط أنها متناسبة أو غير متناسبة، أعني أن المنقوصات التي في شكل أقليدس كانت متناسبة أو غير متناسبة، فإن الانتهاء سيكون إلى مقدار أصغر من المقدار الأصغر. فيكون كلام ابن الهيثم بزيادة شريطة وحكمُه في غاية الظهور لمن شدا أدنى شيء من علم الهندسة. ولا يعلم شكل أبي علي / ا - ٣١ - ظ بشكل أقليدس إلا إذا كانت المنقوصات على نسبة واحدة وهو الأسهل؛ وأما إذا كانت غير

1 جزئي: كلي [ا، ب] – 3 أقليدس: اوقليدس [ب] – 18 بمثلث: مثلث [ب] – 19 بزوج: زوج [ب].

متناسبة وهو الأغمض، فلا كليّة في شكل ابن الهيثم لهذا الشكل ولا انعكاس بينهما ولا دخول لأحدهما تحت الآخر؛ وذلك أن في شكل أقليدس المنقوصات أعظم من النصف وهي مطلقة في النسبة، أعني متناسبة كانت أو غير متناسبة، وفي شكل أبي علي المنقوصات قد تكون أعظم من النصف وأصغر منه ومساوية له. وهي مقيّدة بشريطة أنها متناسبة.

وأما خطأه في فهم شكل أقليدس وسائر الأشكال التي استعمل فيها هذا الشكل، فليجعل شكله نائبًا مناب شكل أقليدس – ولهذا ما ذكره في كتابه في حلّ الشكوك مفردًا. وجعل شكل أقليدس كالذي لا غناء فيه، وأقام هذا الشكل مقامه. ونحن متى أردنا أن نقيم شكله مقام شكل أقليدس، لم يتأت لنا البرهان على شكل من الأشكال التي استعمل أقليدس فيها هذا الشكل. فإن الأشكال التي استعمل أقليدس هذا الشكل فيها إنما هي أربعة أشكال فقط من أشكال الثانية عشرة من كتابه في الأصول، وهي الثاني منها والخامس والعاشر والحادي عشر، وليس يصحّ استعمال شكل أبي علي في شيء من هذه الأشكال.

بيان ذلك: / ب - ١٥١ - و

إن أقليدس أوّل ما يستعمل هذا الشكل كالمقدّمة إنما هو في الشكل الثاني من المقالة الثانية عشرة، وهو قوله: كل دائرتين فنسبة إحداهما إلى الأخرى كنسبة مربعي قطريهما. ونبرهن ذلك بأن نقول: إن لم يكن ذلك كذلك، فليكن نسبة المربع إلى المربع أعظم أو أصغر من نسبة بسيط الدائرة إلى بسيط الدائرة. ثم نفرض نسبة المربع إلى المربع أوّلاً أعظم من نسبة الدائرة إلى الدائرة. ثم نفرض المقدار الأصغر الذي نسبة الدائرة إليه كنسبة المربع إلى المربع؛ ونفرض مقدارًا آخر يكون هو وهذا المقدار الأصغر المنسوب إليه يساويان جميعًا الدائرة التي هذا المقدار الأصغر أصغر منها وهي التالية في النسبة. ثم نخطّ في هذه الدائرة المتأخرة في النسبة مربعًا، وهو أعظم من نصف الدائرة. ونخطّ مثمنًا أيضًا في هذه الدائرة؛ ومعلوم بأن زيادة هذا المثمن على المربع أعظم من نصف زيادة الدائرة على المربع؛ وهكذا أيضًا نعمل شكلاً ذا ست عشرة قاعدة، ونبيّن أنّ زيادة هذا الشكل على المثمن أعظم من نصف زيادة الدائرة على المثمن. وعلى هذا نمرّ في عمل / ا - ٣٢ - و
أشكال عدد أضلاعها زوج الزوج متتالية، ونبيّن في فضلاتها هذا البيان؛ وبآخرة يلزم أنه لابدّ من أن تنتهي الفضلات إلى فضلة هي أصغر من المقدار الأصغر المفروض، وهو المقدار الذي فرضناه

5 فليجعل: فليجعله [ا، ب] – 10 عشرة: عشر [ا، ب] / والخامس: والتاسع [ا، ب] – 14 عشرة: عشر [ا، ب] / إحداهما: احديها [ا] – 16 أعظم: أصغر [ا، ب] – 19 نخط: يخط [ب].

مساويًا لفضلة الدائرة التالية في النسبة على المقدار الذي نسبة الدائرة المتقدمة في النسبة إليه كنسبة المربع إلى المربع.

فلو أردنا أن نبيّن هذا الحكم بالشكل الذي جعله ابن الهيثم خلفًا عن شكل أقليدس وأولى منه، لما صحّ به البرهان، وذلك أنه يحتاج أن نبيّن نسبة المربع إلى الدائرة كنسبة زيادة المثمن على المربع إلى زيادة الدائرة على المربع، وكنسبة زيادة ذي الست عشرة قاعدة على المثمن إلى زيادة الدائرة على المثمن وهلّم جرًّا على هذه السبيل في سائر المنقوصات. وليس واجبًا في هذه المنقوصات أن تكون متناسبة. فإذًا شكل أبي علي لا يصحّ استعماله في هذا الشكل لعدم لزوم التناسب في الفضلات. وبمثل هذا المسلك، يتبيّن أن استعمال شكله لا يصحّ في باقي أشكال هذا الكتاب المذكورة ولا فائدة فيه فيها.

وأما خطأه في أن هذا الشكل إنما قدمه أقليدس لحاجة إليه كانت في كتابه لا لأنه شكل أصليّ، والإضراب عما عداه من الكتب فبيّنٌ أيضًا. أما بيان أن هذا الشكل أصليّ فقد ذكرناه / قبيل. وأما إضرابه عن باقي الكتب، فبيّن أيضًا. فإن الحاجة إلى هذا الشكل داعية في ب – ١٥١ – ظ
فهم ما في كتاب أقليدس وغيره من الكتب التي للقدماء والحدث. أما القدماء، فمثل كتاب أرشميدس في مساحة الدائرة، فإنه إنما يستعمل في برهان ذلك هذا الشكل، وبه يصحّ وينتظم البرهان. وأما في كتب الحدث، فمثل كتاب إبرهيم بن سنان بن ثابت بن قرّة في أن مساحة القطع المكافئ مرة ونصف مثل المثلث الذي قاعدته قاعدة القطع وارتفاعه كارتفاعه. وهذا الشكل، وإن كان قد ذكره أرشميدس في صدر كتابه في الكرة والأسطوانة وأشار إلى أن له كتابًا في ذلك، فلم يقع إلينا ذلك الكتاب، فلهذا نسبناه إلى الحدث. وإن أنا عددت جميع الكتب الخارجة عن كتاب أقليدس التي استعمل فيها هذا الشكل وأنها لا تصحّ إلا به، كان ذلك كالفضل الذي لا يحتاج إليه ولم تف به مقالة مثل هذه. فإنّا إنما ذكرنا هذا الكلام على سبيل التنبيه على سهوه.

والسلام.

تمت المقالة الخامسة بعون اللّه.

5 الست عشرة: الستة عشر [ا، ب] – 10 لحاجة: لحاحته [ا، ب] – 14 يستعمل: يستعمله [ا، ب] – 15 أن مساحة: مساحة أن [ا، ب] وأثبت «أن» في الهامش مع بيان موضعها [ب] – 21 والسلام: والسلم [ب] – 22 تمت ... اللّه: تم القول والحمد لله وحده وصلواته على سيدنا محمد وآله وصحته [ب].

[ص ٣٠١، سطر ٨] يُوردُ ابنُ الهَيْثَمِ هنا بشَكْلٍ شِبْهِ حَرْفِيٍّ نَصَّ التَرْجَمَةِ العَرَبيَّة من كِتاب ***الأصول***، المَنْسوبَةِ إلَى إسحاق وثابتٍ: "وإذا كانَ مِقْداران مَوْضوعانِ غَيْرَ مُتَساوِيَين، وفُصِلَ من أعْظَمِهِما أكْثَرُ من نصْفِهِ، ومِمّا يَبْقَى أكْثَرُ من نِصْفِهِ، وفُعِلَ ذَلِكَ دائِماً، فإنّهُ سيَبْقَى منه مِقْدارٌ ما أقَلُّ من المِقْدارِ الأصْغَرِ المَوْضوعِ" (مَخْطوطَة طهران، ملك ٣٤٣٣ (الأوْراقُ غَيْرُ مُرَقَّمَة)).

لنُلاحِظْ أنّ المُتَرْجِمَ إلى العَرَبيَّةِ قد نَقَلَ العِبارَةَ اليونانيَّةَ:

καί τοϋτο άεί γίγνηται

بِ «وفُعِلَ ذَلِكَ دائِماً»، فقد تُرْجِمَ المُصْطَلَحُ άεί بواسِطَةِ الكَلِمَةِ "دائم" وهي كَلِمَةٌ تَدُلُّ على دَوامِ فِعْلٍ ما. فنَجِدُ في القُرْآنِ الآيَةَ: ﴿الّذينَ هُم على صَلاتِهِم دائِمون﴾ [انْظُرْ: «سورةَ المعارج»، الآية ٢٣ (المترجم)]. إنّ خَيارَ المُتَرْجِمِ صَحيحٌ، فالمُصْطَلَحُ، في اللُّغَةِ اليونانيَّةِ وكذَلِكَ في العَرَبيَّة، يُمْكِنُ التَعْبيرُ عنه بأشْكالٍ مُخْتَلِفَةٍ، يَنْبَغي أن تُفْضِيَ كُلُّها إلى كَلِمَةِ "دائم" أو ما يُعادِلُها في اللُّغاتِ الأُخْرَى. – «وفُعِلَ ذَلِكَ دائِماً»، «وعَمِلْنا دائِماً نَفْسَ العَمَلِ».

[ص ٤٤١، سطر ٨] المَقْصودُ في الواقِعِ، أنّه لِكُلِّ عَدَدٍ طَبيعِيٍّ n، ($n \in I\!N$)،

$$\frac{a^{n-1}}{a^n} = \frac{a^n}{a^{n+1}},$$

ولذَلِكَ فإنّ

$$a^{n+1} = \frac{\left(a^n\right)^2}{a^{n-1}},$$

فإذاً، إذا كانَ المِقْدارُ a^{n-1} مُرَبَّعاً، فإنّ a^{n+1} يَكونُ مُرَبَّعاً أيضاً، وبما أنّ $a^0 = 1$ يَكونُ مُرَبَّعاً، فإنّ كُلَّ الحُدودِ ذاتِ المَرْتَبَةِ الزَوْجيَّةِ تَكونُ مُرَبَّعَةً. ولَكِنَّ a^1 لَيْسَ بمُرَبَّعٍ، ولذَلِكَ فإنّ الحُدودَ ذاتِ المَرْتَبَةِ الفَرْدِيّةِ لا تَكونُ مُرَبَّعَةً. لنُلاحِظْ أنّ كَلِمَة "مَرْتَبَة" تَرْمُزُ أيضاً إلى الحَدِّ 10^n أو a_n10^n فَضْلاً عن دَلالَتِها على المَرْتَبَةِ بالمَعْنَى السابِقِ، الّتي تَكونُ مُساوِيَةً لِ $(n + 1)$.

[ص ٤٤١، سطر ١١] «مَرْتَبَةُ ضِلْعِ المُرَبَّعِ الَّذي هو فَوقهُ»

لكُلِّ عَدَدٍ ($n \in I\!N$)، يَكونُ المِقْدارُ 10^n جذراً لِلمُرَبَّع 10^{2n}، ويَكونُ 10^n مُتَساوِيَ البُعْدِ عن المُرَبَّع الأوّلِ $1 = 10^0$ والمُرَبَّعِ الآخر «الَّذي هو فوقه»، لأنّ

$$\frac{1}{10^n} = \frac{10^n}{10^{2n}}$$

والحَدُّ 10^{n-1} الَّذي يَسْبِقُ 10^n يَكونُ جَذْراً للمُرَبَّع 10^{2n-2} الَّذي يَسْبِقُ 10^{2n}، لأنّ

$$\frac{1}{10^{n-1}} = \frac{10^{n-1}}{10^{2n-2}}.$$

* * *

سَوْفَ نُوردُ في الجَدْوَلِ التالي عَناوينَ أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ استِناداً إلى ثَلاثَةِ مَراجعَ قَديمَةٍ – يَعودُ الأوّلُ منها إلى القِفْطِيِّ (I)، والثاني إلى ابنِ أبي أُصَيْبِعَة (II)، أمّا الثالِثُ فهو لائِحَةُ لاهور (III)– بالإضافَةِ إلى بَعْضِ المَخْطوطاتِ الَّتي وَصَلَتْ إلينا ومنها ما يُذْكَرُ لِلمَرَّةِ الأُولَى. بَعْدَ مُعايَنَةِ هذه المَخْطوطاتِ نُوردُ في هذا الجَدْوَلِ اسمَ المُؤَلِّف، ومَراجعَهُ الخاصَّةَ المَأْخوذَةَ من المُؤَلَّفاتِ المُخْتَلِفَةِ، واسْتِشْهاداتِ المُتَأَخِّرينَ بِمُؤَلَّفاتِهِ والاسمَ الّذي تَرِدُ هَذِه المُؤَلَّفاتُ تَحْتَهُ.

جَدْوَلٌ تَلْخيصِيٌّ لأعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ

جَدْوَلٌ تَلْخيصِيٌّ لأعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ

الرقم	مؤلّف الحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ	أشْكالُ التَسْمِيَةِ
١	*في آداب الكتّاب*	
٢	*في أعداد الوفق*	
٣	*في أضواء الكواكب*	
	برلين Oct, 2970/16، ص ١٧٣ظ – ١٧٦ظ	ابن الهيثم
	برلين ٥٦٦٨، ص ١١و – ١٤و	أبو عليّ الحسن بن الحسين بن الهيثم
	إسطنبول، عاطف ١٧١٤/١٢، ص ١١٢و – ١١٥ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩، ص ١٣١و – ١٣٦ظ	ابن الهيثم
	كويبشيف، ص ٢٩٥ظ – ٢٩٨ظ	الحسين بن الحسن بن الهيثم
	Londres, India Office 1270, fols 10v – 12r	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Oxford, Seld. A. 32, fols 128 – 133	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	طهران، مجلس شورى ٢٩٩٨، ص ١٥٨ظ – ١٦٣و	أبو علي الحسن بن الحسين بن الهيثم
٤	*في أحكام النجوم* *(كتاب ما يراه الفلكيّون)*	
٥	*في الأخلاق* طهران، مجلس شورى ١٣٩٧، ص ٣٣-٨٦	أبو علي الحسن بن الحسن بن الهيثم
٦	*في عمل البنكام*	
	إسطنبول، متحف عسكري، ٣٠٢٥، ست صفحات	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، عاطف، ١٧١٤/٨، ص ٧٧و – ٨٢ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول فاتح، ٣٤٣٩، ص ١٣٨و – ١٤٠و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٧	*في عمل مخمّس في مربّع*	
٨	*في عمل المسبّع في الدائرة*	
	إسطنبول متحف عسكري، ٣٠٢٥، عشر صفحات	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول عاطف، ١٧١٤/١٩، ص ٢٠٠و – ٢١٠و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٩	*في عمل القطوع*	

I	II	III	**الإسْنادُ الذاتِيّ**	**إسْنادُ العُلَماءِ الآخَرين**
	٨٩			
١٧	٥١	٤٦		
٤٣	٤٨	٤٧	مذكور في: *في ماهيّة الأثر الذي في وجه القمر* القاهرة ، تيمور ٧٨، ص ١٨	
٦٩				
٥٩	٨٨			مذكور لدى البيهقيّ، *تأريخ حكماء الإسلام*، ص ٨٥
٦٦	٧٦			
	٤٥	٣٥		
٢٠	٧٤		مذكور في: في مقدّمة *ضلع المسبّع* عاطف ١٧١٤/١٩، ص ٢٠٠ ظ	
			مذكور في: *في المرايا المحرقة بالقطوع* India Office 1270, fol. 21r	

١٠	*في أنّ الكرة أوسع الأشكال المجسّمة التي إحاطتها متساوية وأنّ الدائرة أوسع الأشكال المسطّحة التي إحاطتها متساوية*	
	برلين Oct, 2970/9، ص ٨٤و – ١٠٥و	ابن الهيثم
	إسطنبول، عاطف، ١٧١٤/١٨، ص ١٧٨و – ١٩٩ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	طهران، مجلس، تُغابُني ١١٠، ص ٤٦٢ – ٥٠٢	الحسن بن الحسن بن الهيثم
١١	*في أنّ ما يُرى من السماء هو أكثر من نصفها*	
	الإسكندريّة، بلدية ٢٠٩٩، ص ١٢و – ١٣و	لم يجرِ الاطلاع عليها
	Oxford, Bodl., Thurst 3, fol. 104r/ 116r	ابن الهيثم
	Oxford, Marsh 720, fol. 232r – v	ابن الهيثم
١٢	*في الأشكال الهلاليّة* (مقالة مستقصاة)	
	برلين Oct, 2970/3، ص ٢٤و – ٤٣ظ	الحسن بن الحسين بن الهيثم
	إسطنبول، عاطف، ١٧١٤/١٧، ص ١٥٨و – ١٧٧ظ	الحسن بن الحسين بن الهيثم
	إسطنبول، فاتح، ٣٤٣٩، ص ١١٥و – ١١٧و	مخطوطة مبتورة
	لينينغراد، B 1030، ص ٥٠و – ٧٢ظ، ١٣٣ظ – ١٤٤و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Londres, India Office 1270, fols 70r-78v	الحسن بن الحسن بن الهيثم
١٣	*في أعظم الخطوط التي تقع في قطعة الدائرة*	
١٤	*في بركار الدوائر العظام* *مقالة مختصرة* *مقالة مشروحة*	
	عليكره ٦٧٨، ص ٢٩و، ٨و – ١٠و	أبو علي الحسن بن الهيثم
	Leiden Or. 133/6, fols 106 – 111	أبو علي بن الهيثم (العنوان) وأبو علي الحسن بن الحسن بن الهيثم (العبارة الختامية)
	Leningrad, B1030, fols 125r – 131r	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Londres, India Office 1270, fols 116v – 118r	ابن الهيثم (العبارة الختامية)
	Rampur 3666, fols 436 – 448	ابن الهيثم (العبارة الختامية)
١٥	*في بركار القطوع* (مقالتان)	
١٦	*في الضوء*	
	برلين ٥٦٦٨، ص ١و – ١٠و	الحسن بن الحسين بن الهيثم
	برلين Oct, 2970/15، ص ١٦٣و – ١٧٣و	ابن الهيثم
	إسطنبول، عاطف، ١٧١٤/١١، ص ١٠٢و – ١١١ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Londres, India office 1270, fols 12v – 17v	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	طهران ٢٩٩٨، ص ١٣٤ – ١٥٦	الحسن بن الحسين بن الهيثم

٢٨	٢٦	٢٥	مذكور في: *في حلّ شكوك في كتاب المجسطي* أليغارة ٦٧٨، ص ٢٣ظ *في المكان* India office 1270 ص ٢٦و.	
٢٦	٣٧	٤٠	مذكور في: *في تصحيح الأعمال النجوميّة* Oxford, Seld A. 32, ص ١٦٣ ظ	
٦	٢١	٢١	مذكور في: *في حل شكوك إقليدس في الأصول وشرح معانيه* إسطنبول جامعة ٨٠٠، ص ٣ ظ، ١٣و مذكور في: *في الهلاليّات* برلين، Oct. 2970، ص ٢٤ ظ	
	٨١			
٤٤	٢٢ ٢٣	٢٢ ١٥	مذكور في: *في المرايا المحرقة بالدوائر.* India office 1270, fol. 24v.	
	١٣	١١		
	٦٠	٥٣	مذكور في : *في المناظر* India office 1270, fol. 13r.	مذكور لدى: – فتح الله الشرواني طهران، ملّي ٧٩٩، ص ٤ ظ – الفارسي، *كتاب تنقيح المناظر*، المجلّد الأوّل، ص ٤٠١.

١٧	*في ضوء القمر* Londres, India Office 1270, fols 32v – 47r	 أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
١٨	*في الهالة وقوس قزح* برلين، ١٠/٢٩٧٠، ص ١٠٦و – ١١٧ظ إسطنبول، عاطف ١٤/١٧١٤، ص ١٢٦و – ١٣٨و	 الحسن بن الهيثم الحسن بن الهيثم
١٩	*في حلّ شكوك حركات الالتفاف* برلين، Oct. 2970/11، ص ١١٨و – ١٢٧و إسطنبول، عاطف ١٥/١٧١٤، ص ١٣٩و – ١٤٨ظ لننغراد، B 1030/1، ص ١ظ – ٢٠ظ	 الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم
٢٠	*في حلّ شكوك في كتاب المجسطي يشكّك فيها بعض أهل العلم* عليكره، عبد الحي ٢١، ص ١٩ظ (غير مكتملة) إسطنبول، بايزيد ٢٣٠٤، ص ١ظ – ٢٠ظ إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩، ص ١٤٢و – ١٥٤ظ إسطنبول ولي الدين ٢٣٠٤/١، ٢٠ صفحة	 أبو علي الحسن بن الحسن بن الهيثم ابن الهيثم ______ لم يجرِ الاطلاع عليها
٢١ أ	*في حلّ شكوك كتاب إقليدس في الأصول وشرح معانيه* إسطنبول، جامعة ٨٠٠، ١٨١صفحة Bursa, Haraççi 1172/2, fols 83r – 226v إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩، ص ٦٦و – ١١٧و Kasan, KGU, arab 104 Leiden, Or 516, 184v - 208r بيشاور ٣٢٣ طهران، ملّي ملك ٣٤٣٣، ١٥٧ صفحة	 الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم لم يجرِ الاطلاع عليها الحسن بن الحسن بن الهيثم لم يجرِ الاطلاع عليها الحسن بن الحسن بن الهيثم
ب	*في حلّ شكوك المقالة الأولى من كتاب إقليدس*	
ج	*في حلّ شكّ في المقالة الثانية عشرة من كتاب إقليدس*	
د	*في حلّ شكّ في مجسّمات كتاب إقليدس*	
ه	*في حلّ شكّ من المجسّم*	
و	*في حلّ شكّ من إقليدس*	
٢٢	*في حركة الالتفاف*	
٢٣	*في حركة القمر* إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩، ص ١٥٨و – ١٥٩ظ Oxford, Bodl., Seld. A. 32, fols 100v – 107r لننغراد، B 1030، ص ٨١ظ – ٨٩ظ	 الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم

٥٧	٦	٥	مذكور في: في *ماهيّات الأثر*، القاهرة ،تيمور ٧٨، ص ٩ – ١٠	
٣٦	٨	٧	مذكور في: *في حلّ شكوك المجسطي* إسطنبول، بايزيد ٢٣٠٤، ص ٨ظ	مذكور لدى: – ابن رشد، *تلخيص الآثار العلويّة*، Paris, 1800 Heb., fol. 82v – الفارسي، *كتاب تنقيح المناظر*، الجزء الثاني، الصفحات: ٢٥٨، ٢٧٩ ...
٥٣	٦٣	٦٠	مذكور في : *في الشكوك على بطلميوس* إسطنبول، عاطف ١٧١٤، ص ١٣٩ظ *في حركة الالتفاف* إسطنبول، عاطف١٧١٤، ص ١٤٠و، ١٤٣ظ	
٥٥	٣٨	٣٣	مذكور في : في *المناظر*، عليكره، ص ٢١و في *قوس قزح*، بايزيد، ص ٨ظ في *أنّ الكرة أوسع*، عليكره، ص ٢٣ظ	
٤			مذكور: *في شرح مصادرات كتاب إقليدس* إسطنبول، جامعة ٨٠٠، ص ٣ظ-١٣ و *في الأشكال الهلاليّة* إسطنبول، جامعة ٨٠٠، ص ٣ظ – ١٣و *في (أصول) المساحة* إسطنبول، جامعة ٨٠٠، ص ٨٧ظ – و *في قسمة المقدارين المختلفين* (انظر الحواشي الإضافيّة)	مذكور لدى: – الفارسي، *الزاوية* – ابن السريّ أيا صوفيا ٤٨٣٠، ص ١٣٩ظ، ١٤٦و، ١٥٠و، ١٥٠ظ، ١٥٢و (انظر الحواشي الإضافيّة) – نصير الدين الطوسي، *الرسالة الشافية*، أحمد الثالث ٣٣٤٢، ص ٢٤٨ظ – القلقشندي، *صبح الأعشى*، الجزء الأوّل، ص ٤٨٠؛ الجزء الرابع عشر، ص ٢٢٧.
	٥٦	٥٥		مذكور لدى الخيّام، *شرح ما أشكل من مصادرات إقليدس*، باريس ٤٩٤٦/٤، ص ٤٠و
	٥٥	٥١		
	٣٩	٣٧		
٢١				
٢٢				
٥٢	٦١	٥٧	مذكور في: *في حلّ شكوك حركات الالتفاف* عاطف ١٧١٤، ص ١٤٠و – ١٤٣ظ	نصير الدين الطوسي، *التذكرة* Leiden, Or. 905, fol. 49r, 50r ابن الشاطر، نهايات *السول*، Marsh ١٣٩، ص ٣١ظ
٢٣	٨٢			

٢٤	*في هيئة العالم* (راجع مقدّمة الكتاب والحواشي الإضافيّة) Londres, India Office 1270, fols 101r-116r Kastamonu, Genel 2298, fols 1-43 الرباط، حسّانية، ملك ٨٦٩١، ص ١٩٠–٢٢٨	الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو الحسن عليّ بن الحسن بن الهيثم
٢٥	*في هيئة كلّ واحد من الكواكب السبعة* كويبيشيف، ص ٣٣٧و — ٣٩٤ظ	أبو عليّ بن الهيثم
٢٦	*في الهلاليّات* عليكره، عبد الحيّ ٦٧٨/٥٥، ص ١٤ظ–١٦ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٢٧	*في حساب الخطأين*	
٢٨	*في حساب المعاملات* *(القول المعروف بالغريب –)* إسطنبول، عاطف ١٧١٤/١٣، ص ١١٦و–١٢٥و برلين، Oct. 2970/17، ص ١٧٧و–١٨٦و	أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
٢٩	*الاختلاف في ارتفاعات الكواكب* *(في ما يعرض من –)* إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩، ص ١٥١و–١٥٥و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٣٠	*في اختلاف المناظر*	
٣١	*في اختلاف منظر القمر* Londres, India Office 1270, fols 120r-120v لننغراد، B 1030، ص ١٢٢و — ١٢٥و طهران، ملك٣٠٨٦/٣، ص ٥٦ظ – ٥٩ظ	أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو عليّ بن الحسن بن الهيثم
٣٢	*في علّة الجذر وإضعافه ونقله* عليكره ٦٧٨، ص ١٧و – ١٩و، ١٣ظ – ١٤ظ	أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
٣٣	*في استخراج أعمدة الجبال* Oxford, Seld A.32, fol. 187r-188r	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٣٤	*في استخراج أربعة خطوط*	

٣١	١	١		
	٢٠	١٨	مذكور في: *في تربيع الدائرة* عليكره ٦٧٨، ص ١٠ظ *في الأشكال الهلاليّة*، برلين ٢٩٧٠، ٢٤ظ	
٤٨	٥٧	٥٨		
٣٥	١٠			مذكور في: *في المعاملات في الحساب* فيض الله ١٣٦٥، ص ٧٦ظ. انظر الحواشي الإضافيّة
٦٣	٩	٨		
٥٦	٤١	٣٤		
١٠				
٢٥	٧٠			
	٦٩			
٥١	٢٩	٣٢		الخيّام، *الجبر* India Office 1270, fol. 55r, 55v

٣٥	*في استخراج ضلع المكعّب*	
	كويبيشيف، ص ٤٠٠ظ – ٤٠١و	الحسين بن الحسن <بن> الهيثم
٣٦	*في استخراج ارتفاع القطب على غاية التحقيق*	
	برلين،Oct. 2970/6، ص ٦٠و-٦٥و	ابن الهيثم
	إسطنبول، عاطف ١٧١٤/٤، ص ٢٦ظ – ٣٠ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩، ص ١٤٠و – ١٤٢ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Leiden Or. 14/11, fols 246-254	الحسن بن الحسين بن الهيثم
	Londres, Br. Mus., Add. 3034, fols 3-13	الحسن بن الحسين بن الهيثم
	Oxford, Bodl. Seld. A. 32, fols 121-128	الحسن بن الحسين بن الهيثم
	New York, Smith Or. 45/3, fols 35-46	الحسن بن الحسين بن الهيثم
٣٧	*في استخراج جميع القطوع بطريق الآلة*	
٣٨	*في استخراج خطّ نصف النهار على غاية التحقيق*	
	برلين، Oct. 2970/5، ص ٤٦ظ-٥٩و	ابن الهيثم
	إسطنبول، عاطف ١٧١٤/٣، ص ١٣ظ-٢٦و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٣٩	*في استخراج خطّ نصف النهار بظلّ واحد*	
	برلين، Oct. 2970/4 ، ص ٤٤و – ٤٦و	ابن الهيثم
	إسطنبول، عاطف ١٧١٤/٢، ص ١١و – ١٣و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	طهران، ملك ٣٠٨٦/٤، ص ٥٩ظ – ٦٢و	أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
٤٠	*في استخراج مسألة عدديّة*	
	Londres, India Office 1270/20, fols 121r-v	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	طهران، ملك ٣٠٨٦/٥، ص ٦٢ظ – ٦٦و	أبو الحسن بن الحسن بن الهيثم
٤١	*في استخراج سمت القبلة*	
	لينينغراد، B 1030، ص ١١١و – ١٢١ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Oxford, Seld. A.32, fols 107r-115r	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٤٢	*في جمع (أو جميع) الأجزاء*	
٤٣	*في الجزء الذي لا يتجزّأ*	
٤٤	*في الكواكب الحادثة في الجوّ* (أو *في الكواكب المنقضّة*)	

٢٤	٤٧	٤٣		
٦٢	٧٥			
			مذكور في: *المرايا المحرقة بالقطوع* India Office 1270, fol. 20v	
٢٩	٣١	٢٩	مذكور في : *في التنبيه على مواضع الغلط* عاطف ١٧١٤، ص ١٣ظ	
٤٢	٤٤	٤٤		
١١	٩٢			
	٥٩	٥٦	مذكور في : *في سمت القبلة بالحساب* Oxford, Seld A. 32, fol. 107r	
٤٥	٣٢	٣٠		
٣٢	٦٥	٦٢		
	٥	٤		

٤٥	*في كيفيّة الأظلال* برلين ٥٦٦٨، ص ١٤و – ٢٧و أصفهان، دانشكا ١٧٤٣٥، ص ٦١و – ٨١و إسطنبول، متحف عسكري ٣٠٢٥، ١٤ صفحة إسطنبول، عاطف ١٧١٤/٥، ص ٣١و – ٤٦و إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩، ص ١٢٤و – ١٣٠ظ كويبيشيف، ص ٢٩٧ظ – ٣٠٢ظ طهران، مجلس شورى ٢٩٩٦، ص ١٠٠ – ١٣٠	 الحسن بن الحسين بن الهيثم الحسن بن الحسين بن الهيثم الحسن بن الحسين بن الهيثم الحسن بن الحسين بن الهيثم الحسن بن الحسين بن الهيثم الحسين بن الهيثم الحسن بن الحسين بن الهيثم
٤٦	*في كيفيّة الأرصاد* Dublin, Ch. Beatty 4549, 19 fols الإسكندرية، بلدية ٣٦٨٨	 أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم لم يجرِ الإطلاع عليّها
٤٧	*في خواص الدوائر*	
٤٨	*في خواص المثلّث من جهة العمود* پاتنا، خودا بخش، ٢٤٦٨، ص ١٨٩و – ١٩١و	 ابن الهيثم
٤٩	*في خواص القطوع* *في خواص القطع المكافئ* *في خواص القطع الزائد*	
٥٠	*في خطوط الساعات* إسطنبول، متحف عسكري ٣٠٢٥، ١٩ صفحة إسطنبول، عاطف ١٧١٤/٧، ص ٥٧و – ٧٦ظ	 الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم
٥١	*في الكرة المحرقة* إسطنبول، عاطف ١٧١٤/١٠، ص ٩١ظ – ١٠٠ظ برلين،Oct 2970/8، ص ٧٤و – ٨٣و	 الحسن بن الحسن بن الهيثم ابن الهيثم
٥٢	*في الكرة المتحرّكة على السطح*	
٥٣	*في ماهيّة الأثر الذي في وجه القمر* الإسكندرية، بلديّة ٢٠٩٦ القاهرة، تيمور ٧٨، ١٥ صفحة	 ابن عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم

٦٤	٣٦	٣١	مذكور في: *في المناظر* عاطف ١٧١٤، ص ٣٢ظ	مذكور لدى الفارسيّ، *كتاب تنقيح المناظر*، الجزء الثاني، ص ٣٥٨
٣٤	٤	٣		مذكور لدى القلقشندي، *صبح الأعشى*، الجزء الأوّل، ص ٤٧٧.
	٧٢			
١٩	٧١			
	٣٣ ٣٤	٢٧		
٢٧	٦٦		مذكور في: *في الكرة المحرقة* برلين، Oct. 2970، ص ٧٥و	مذكور لدى الفارسي، *كتاب تنقيح المناظر* Leiden, 201, fols. 277r
٣٠	٧٧		مذكور في: *في المناظر*، برلين ٢٩٧٠، ص ٧٤ظ، ٨٣و *في خطوط الساعات*، برلين ٢٩٧٠، ٧٥و	مذكور لدى الفارسي، *كتاب تنقيح المناظر*، Leiden, 201, fols. 277r
	٥٢	٤٨		
٦٧	٤٩	٥٤	مذكور في: في ضوء *القمر*، القاهرة، ص ٩، ١٠ *في المناظر*، ص ١١ *في أضواء الكواكب*، ص ١٨	

٥٤	*في المجرّة*	
أ	*في ماهيّة المجرّة*	
ب	*جواب عن سؤال سائل عن المجرّة هل هي في الهواء أو في*	
جـ	*جسم السماء*	
	Leiden, Or 184/10, fols 87r-88v	أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Edirne, Selimiye 713/11	لم يجرِ الاطلاع عليها
	طهران، دانيشكا ١٥، ص ٣٧ظ – ٣٨و	لم يجرِ الاطلاع عليها
٥٥	*في المكان*	
	القاهرة ٣٨٢٣، ص ١ظ – ٥ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Hyderabad, Salar Jung Mus. 2196, fol. 19v-22r	الحسن بن الحسن بن الهيثم (حسين بن الهيثم في العبارة الختامية)
	إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩، ص ١٣٦ظ–١٣٨و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Londres, India Office 1270, fols 25v-27v	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	طهران، مجلس شورى ٢٩٩٨، ص ١٦٦–١٧٤	أبو عليّ الحسن بن الحسين بن الهيثم
٥٦	*في المعلومات*	
	باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٥٨/٥، ص ١١ظ — ٢٦و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	كويبيشيف، ص ٣٠٣و — ٣١٥ظ	الحسين بن الحسن بن الهيثم
٥٧	*في المناظر*	
	(سبع مقالات)	
	إسطنبول أحمد الثالث ١٨٩٩، ص ١ظ – ٢٤٩و	أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، أحمد الثالث ٣٣٣٩، ص ١ظ – ١٢٥و	أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، أيا صوفيا ٢٤٤٨، ٦٧٨ صفحة	أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، فاتح ٣٢١٢، ص ١ظ – ١٤١و	أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، فاتح ٣٢١٥، ص ١٣٨و – ٣٣١ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، فاتح ٣٢١٦، ص ١ظ – ١٣٨ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، كوبرولو ٩٥٢، ص ١و – ١٣٥ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٥٨	*في المناظر على طريقة بطلميوس*	
٥٩	*في مراكز الأثقال*	
٦٠	*في المرايا المحرقة بالدوائر*	
	عليكره، عبد الحيّ ٦٧٨، ص ٤٤و – ظ	مخطوطة مبتورة
	حيدر أباد، S.J.M. 2196، ص ١٢ظ – ١٩و	الحسن بن الهيثم
	إسطنبول، عاطف ١٧١٤/٩، ص ٨٣و – ٩١و	ابن الهيثم
	Londres, India Office 1270, fols 21v-25r	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	برلين، Oct. 2970/7، ص ٦٦و – ٧٣ظ	ابن الهيثم

٣٧ ٣٨ ٣٩	٤٦ ٦٢	٣٩ ٥٩		٥٤ ج – مذكور لدى ابن رضوان، *كتاب ابن رضوان في مسائل جرت بينه وبين ابن الهيثم في المجرّة والمكان* (قائمة أعماله، مذكورة لدى ابن أبي أصيبعة)
٥٨	٦٨		مذكور في: *في أنّ الكرة أعظم* India Office 1270, fol. 26r	
	٥٤	٥٠	مذكور في: *في التحليل والتركيب* دبلن ٣٦٥٢، ص ٧١ظ مذكور: في *(أصول) المساحة* باريس ٢٤٥٨، ص ١٦ظ	ابن هود، *الاستكمال*، Leiden *123/1*، ص ٦٥ظ–٦٧و. كوبنهاغن شرقي ٨٢، ص ٦٥ظ — ٦٧و
٢	٣		مذكور في: – *في حل شكوك في كتاب المجسطي*، عليكره، عبد الحيّ ٢١، ص ٢١و – *في الكرة المحرقة*، برلين ٢٩٧٠، ص ٧٤ظ – ٨٣و – *في كيفيّة الأظلال*، عاطف ١٧١٤، ص ٣٢ظ – في *صورة الكسوف*، أوكسفورد، A 32، ص ٨٢و – *في الضوء* ، India Office ١٢٧٠، ص ١٣و – *في ماهيّة الأثر*، القاهرة، تيمور ٧٨، ص ١١ –Marsh 720، ص ١٩٥و مذكور في: *في علم المناظر*، فاتح ٣٢١٢، ص ٤ظ (= رقم ٥٨؟)	شرحها كمال الدين الفارسي، *كتاب تنقيح المناظر*. ابن هود، *الاستكمال*، Copenhague Or. 82, fol. 105r-107v. – فتح الله الشرواني، طهران، ملّي ٧٩٩، ص ٢و، ٤ظ، ٥ظ ... – القلقشندي، *صبح الأعشى*، الجزء الأوّل، ص ٤٧٦
	٢٧	٢٦		
	١٤	١٢		مذكور لدى:– الخازني، *كتاب ميزان الحكمة*، نشرة حيدر أباد، ص ١٦ – القلقشندي، *صبح الأعشى*، الجزء الأوّل، ص ٤٧٦
٥٠	١٨	١٦	مذكور في: *استخراج الدوائر العظام* India Office 1270, fol. 24v	مذكور لدى القلقشندي، *صبح الأعشى*، الجزء الأوّل، ص ٤٧٦

٦١	*في المرايا المحرقة بالقطوع*	
	عليكره، عبد الحيّ ٦٧٨، ص ٢٨و – ٢٩و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	حيدر أباد، S.J.M. 2196، ص ٥ظ – ١١ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Leiden, Or. 161/3, fols 43-60	ابن الهيثم
	Londres, India Office 1270, fols 18r-21r	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Florence, Laurenziana Or. 152, fol. 90v-97v	______________
٦٢	*في معرفة ارتفاع الأشخاص القائمة وأعمدة الجبال وارتفاع الغيوم*	
	Leiden Or. 14/8, fols 236-237	أبو عليّ بن الهيثم
	New York, Smith Or. 45/12, fols 243-244	أبو عليّ بن الهيثم
	طهران، مجلس ٢/٢٧٧٣، ص ١٨ – ١٩	أبو عليّ بن الهيثم
	طهران، ملك ٣٤٣٣، صفحة واحدة.	أبو عليّ بن الهيثم
٦٣	*في مسألة عدديّة*	
٦٤	*في مسألة عدديّة مجسّمة*	
	Londres, India Office 1270, fols118v-119r	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٦٥	*في مسألة في المساحة*	
٦٦	*في مسألة هندسيّة*	
	لينينغراد، B 1030، ص ١٠٢و — ١١٠ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	Oxford, Seld. A32, fols 115v-120r	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٦٧	*في مسائل التلاقي*	
	لينينغراد، B 1030، ص ٩٠و — ١٠١ظ	الحسن بن الحسن بن الهيثم
٦٨	*في مساحة الدائرة*	
٦٩	*في مساحة الكرة*	
	الجزائر، المكتبة الوطنية ١٤٤٦، ص ١١٣و — ١١٩ظ	أبو عليّ بن الهيثم
	عليكره، ٦٧٨، ص ١ظ – ٤ظ، ١٣ظ – ١٤و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	برلين Oct.2970/13، ص ١٤٥و – ١٥٢و	ابن الهيثم
	إسطنبول، عاطف ٢٠/١٧١٤، ص ٢١١و – ٢١٨و	الحسن بن الحسن بن الهيثم
	لينينغراد، B 1030، ص ٧٣و — ٧٧و	المخطوطة مبتورة
٧٠	*في مساحة المجسّم المكافئ*	
	Londres, India Office 1270, fols 56v-69v	الحسن بن الحسن بن الهيثم

	١٩	١٧	مذكور في: *في استخراج جميع القطوع بطريق الآلة* India Office 1270, fol. 20v *في عمل القطوع* India Office 1270, fol. 21r	
				مذكور لدى ابن أحمد الحسينيّ محمّد اللاحجاني، مجلس شورى ٢٧٧٣/١
	٥٠	٤٥		
٨	٧٨			
١٨	٥٨	٥٢		
٤٠	٧٩			
	٨٣			
			مذكور في: *في (أصول) المساحة* India Office 1270, fol. 28v	
٣٣	١٦	١٤	مذكور في: *في مساحة المجسّم المكافئ* برلين ٢٩٧٠، ص ١٤٥ظ. مذكور في: *في (أصول) المساحة* India Office 1270, fol. 28v	
٥	١٧	٢٠	مذكور في: *في مساحة الكرة* برلين ٢٩٧٠، ص ١٤٥ظ.	

٧١	*في مقدّمة ضلع المسبّع* عليكره، عبد الحيّ ٦٧٨، مقطع India Office 1270, fols 122r - 123v Oxford, Marsh 720, fols 259r – 260v Oxford, Thurston 3, fols 132r-132v	——— الحسن بن الحسن بن الهيثم ابن الهيثم ابن الهيثم
٧٢	*في نسب القسيّ الزمانيّة إلى ارتفاعاتها*	
٧٣	*في القرسطون*	
٧٤	*في قسمة الخطّ الذي استعمله أرشميدس في المقالة الثانية من كتابه في الكرة والأسطوانة* إسطنبول، أحمد الثالث ٣٤٥٣/١٦، ص ١٧٩ظ أحمد الثالث ٣٤٥٦/١٨، ص ٨١ظ-٨٢و عاطف ١٧١٢، ص ١٤٧و-١٤٧ظ Beshiraga 440/18, fols 275r-v Carullah 1502, fols 222v-223r Selimaga 743, fols 135v-136v Leiden, Or. 14/26, fols 498-499 India Office 1270, fols 119v	 أبو الحسن بن الحسن بن الهيثم المصريّ أبو الحسن بن الحسن بن الهيثم ابن الهيثم أبو الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الهيثم
٧٥	*في قسمة المقدارين المختلفين المذكورين في الشكل الأوّل من المقالة العاشرة من كتاب إقليدس* لينينغراد، B 1030، ص ٧٨و — ٨١و	 الحسن بن الحسن بن الهيثم
٧٦	*في قسمة المنحرف الكلّي*	
٧٧	*في الرخامات الأفقيّة* برلين، Oct 2970/14، ص ١٥٣و — ١٦١و إسطنبول، عاطف ١٧١٤/٦، ص ٤٧و-٥٥ظ Téhéran, Tungābunī 110/1, fols 1-19	 ابن الهيثم أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
٧٨	*في رؤية الكواكب* لاهور، ص ٣٦ظ-٤٢ظ طهران، دانيشكا ٤٩٣، ص ١٩ظ-٢٣و طهران، ملّي ٧٩٩، ص ٢٠ظ-٢٤و	 الحسن بن الحسن بن الهيثنم ابن الهيثم ابن الهيثم
٧٩	*في سمت*	

١٢	٤٢	٣٨	مذكور في: *في عمل المسبّع في الدائرة* عاطف ١٧١٤، ص ٢٠٠ظ	
	٣٥	٣٦		
	٦٧			
٩	٤٣	٤٢		
٤٦	٤٠	٤١	مذكور في: *في حلّ شكوك كتاب إقليدس*	ابن السريّ، أيا صوفيا ٤٨٤٥، ص ٣٠ظ انظر الحواشي الإضافيّة
	٨٧			
٦٥	١١	٩	مذكور: *في آلة الأظلال* عاطف ١٧١٤، ص ٥٥و انظر الحواشي الإضافيّة	
١٣	١٢	١٠		
٦٠	٢٤	١٩		

٨٠	*في سمت القبلة بالحساب* برلين، Oct 2970/1، ص ٤و — ١١ظ القاهرة، دار الكتب ٣٨٢٣، ص ١٤ظ-١٨ظ إسطنبول، عاطف ١/١٧١٤، ص ١ظ-٩ظ فاتح، ٣٤٣٩، ص ١٥٥و-١٥٧ظ Téhéran, Tungābunī 110/2, fols 19-35	 ابن الهيثم الحسن بن الهيثم الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الهيثم
٨١	*في شكل بني موسى* عليكره، جامعة الرقم ١، ص ٢٥-٣٨ إسطنبول، عاطف ١٦/١٧١٤، ص ١٤٩و-١٥٧و إسطنبول، متحف عسكري ٣٠٢٥، ٨ صفحات Londres, India Office 1270, fols 28r-28v Londres, Br. Mus. Add.14 332/2, fols 42-61	 ـــــــــ الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم
٨٢	*في شرح الارتماطيقي على طريق التحقيق*	
٨٣	*في شرح مصادرات كتاب إقليدس* الجزائر، ١/١٤٤٦، ص ١ظ-٥١و Bursa, haraççi 1172/I, fols 1r-81v إسطنبول، أحمد الثالث ٢/٣٤٥٤ (مقطع) فيض الله ٢/١٣٥٩، ص ١٥٠-٢٣٧و Kasan, KGU, Arab 104 Oxford, Bodl. Hunt 237, fols 1r-76r Rampur 3657, fol. 1-223 تونس، أحمد ١/٥٤٨٢، ص ١ظ-٦١ظ	 أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم (ص ١٥١ظ ابن الهيثم) أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم لم يتمّ الاطلاع على هذه المخطوطة الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو عليّ الحسين بن الهيثم أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
٨٤	*في شرح قانون إقليدس*	
٨٥	*في الشكوك على بطلميوس* Oxford, Seld. A. 32, fols 162v-184v الإسكندريّة، بلديّة ٢٠٥٧، ١٨ صفحة	 الحسن بن الحسن بن الهيثم أبو عليّ الحسن بن الحسن بن الهيثم
٨٦	*في السياسة* (خمس مقالات)	
٨٧	*في صورة الكسوف* إسطنبول، فاتح ٣/٣٤٣٩، ١١٧و-١٢٣ظ لينينغراد، B 1030، ص ٢١و -٤٩ظ Londres India Office 461/2, fols 8v-34r India Office 1270, fols 79r-86v Oxford, Bold., Seld. A32, fols 81v-100v	 الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم
٨٩	*في تهذيب المجسطي*	

٦١	٧	٦	مذكور في: *في استخراج سمت القبلة (مقالة مختصرة)* Oxford, Seld. A. 32, 107r	
٤٩	٧٣			
	٨٤			
٣	٢	٢	مذكور في: *في حلّ شكوك كتاب إقليدس في الأصول* إسطنبول، جامعة ٨٠٠، ص ٣ظ-١٣و *في تحليل وتركيب* دبلن، ٣٦٥٢، ص ٧١ظ	مذكور لدى: – الفارسيّ، *الزاوية* – الإنطاكي، حيدر أباد، عثمانيّة ٩٩٢، ص ٦٣ظ-٢٩٧ظ -نصير الدين الطوسي، *الرسالة الشافية*، أحمد الثالث، ٣٣٤٢، ص ٢٥٨ظ -*في الفوائد والمستنبطات من شرح مصادرات إقليدس*، طهران، مجلس شورى ١٣٨، ص ٢٠٤
٤١	٨٥			
٥٤	٦٤	٦١	مذكور في: *في حل شكوك حركة الالتفاف* عاطف ١٧١٤، ص ١٣٩ظ	– العُرْضِيّ، *كتاب الهيئة*، Oxford, Marsh 621, fol. 156v – ابن باجة، *من كلامه ما بعث به لابن جعفر يوسف بن هسداي* Oxford, Pococke 206, fol. 118v
	٩٠			
٧	٨٠		مذكور في : *في المناظر* Oxford, Seld. A. 32, fol. 82r	مذكور لدى الفارسيّ، *كتاب تنقيح المناظر*، الجزء الأوّل، ص ٣٨١
١				

٨٩	*في التحليل والتركيب* دبلن ٣٦٥٢/١٢، ص ٦٩ظ-٨٦و القاهرة، تيمور ٣٢٣، ص ١-٦٨ إسطنبول، رشيد ١١٩١/١، ص ١ظ-٣٠ظ كويبيشيف، ص ٣١٦و — ٣٣٦ظ	 الحسن بن الحسن بن الهيثم ابن الهيثم الحسن بن الحسن بن الهيثم الحسن بن الحسين بن الهيثم
٩٠	*في تعليق في الجبر*	
٩١	*في تمام كتاب المخروطات لأبلونيوس* Manisa, Genel 1706, fols 1v-25r	 الحسن بن الحسين بن الهيثم
٩٢	*في التنبيه على مواضع الغلط في كيفيّة الرصد* الاسكندريّة، بلديّة ٢٠٩٩، ١٣ صفحة.	 لم يجرِ الاطلاع عليها
٩٣	*في تربيع الدائرة* عليكره ٦٧٨، ص ١٠و -١١ظ، ٣٠ظ-٣٠و برلين، ص ٢٥٨ وربع الصفحة ٥٥٩ القاهرة، تيمور ١٤٠، ١٣٦-١٣٧ إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، ص ٣٩ظ-٤١و إسطنبول، بشير آغا ٤٤٠، ص ١٥١و Istanbul, Carullah 1502/15, fols 124v-126r Meshhed 5395/1, fols 1v-3r Patna, Khudabakhsh 3692, 3 folios روما، الفاتيكان ٣٢٠، ص ١ظ-٦ظ طهران، دانيشكا ١٠٦٣، ص ٧و-٩ظ طهران ، مجلس شورى ٢٠٥/٣، ص ٩٣-١٠١ طهران، مجلس شورى ٢٩٩٨ المخطوطة غير مكتملة طهران، ملك ٣١٧٩، ص ١٠٧ظ-١١٠و Téhéran, Sepahsālār 559, fols 84v-85r	 الحسن بن الحسن بن الهيثم ابن الهيثم أبو الهيثم ابن الهيثم ابن الهيثم ابن الهيثم ابن الهيثم ابن الهيثم أبو عليّ الحسين بن الحسين بن الهيثم ابن الهيثم ابن الهيثم ابن الهيثم ابن الهيثم ابن الهيثم
٩٤	*في تصحيح الأعمال النجوميّة* Oxford, Bold. Seld. A32, fols 132v-162r	 ———
٩٥	*في ثمرة الحكمة* Istanbul, Köprülü 1604, fol. 41v	 أبو عليّ الحسن الحسن بن الهيثم

٤٧	٥٣	٤٩	مذكور في: *في شرح مصادرات إقليدس* دبلن، ٣٦٥٢/١، ص ٧١ظ *في المعلومات* باريس، ٢٤٥٨/٥، ص ٧١ظ	
٦٨	٩١			
١٤	٢٥	٢٤	مذكور في: *في استخراج خطّ نصف النهار على غاية التحقيق* عاطف ١٧١٤، ص ١٣ظ - Marsh 720, fol. 194v	
١٥	٣٠	٢٣	مذكور في: *في الهلاليّات* عليكره ٦٧٨، ص ١٠ظ	
	٢٨	٢٨	مذكور في: *في أنّ ما يُرى من السماء هو أكثر من نصفها*، ص ١٦٣ظ يأتي على ذكر المؤلّف الأوّل، ص ١٣٢ظ	

٩٦	*في أصول المساحة* India office 1270, fol. 28v-32v (المخطوطة مبتورة) إسطنبول، فاتح ٣٤٣٩، ص ١٠٣ظ – ١٠٤ظ لينينغراد، B 2139/2	——— أبو عليّ بن الحسن بن الحسن بن الهيثم لم يجرِ الاطّلاع عليها

١٦	١٥	١٣	مذكور في: *في مساحة الدائرة* *في مساحة الكرة* India Office 1270, fol. 28v مذكور في: *في حلّ شكوك كتاب إقليدس في الأصول* إسطنبول، جامعة ٨٠٠، ص ٨٧و–ظ في *المعلومات*، باريس ٢٤٥٨، ص ١٦ظ	

حَواشي الجَدْوَلِ

الأَرْقامُ الوارِدَة أَدْناه تَدُلُّ عَلَى مُؤَلَّفاتِ ابنِ الهَيْثَمِ المُشارِ إِلَيْها في الجَدْوَلِ السابِقِ.

[رَقْم ٣] ذُكِرَ هَذا المُؤَلَّفُ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***أُصولُ الكَواكِبِ***، وفي (III)، تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في ضَوْءِ الكَواكِبِ***.

[رَقْم ١٠] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***في أنّ الكُرَةَ أوْسَعُ الأشْكالِ المُجَسَّمَةِ***، وفي (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في الأُكَرِ وشَرْحِ المُجَسَّماتِ***. راجع المُقَدِّمَةَ، الصَفَحاتِ ٧١ — ٧٣.

[رَقْم ١١] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***ما يُرَى من السَماءِ أعْظَمُ من نِصْفِها***، وفي (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في أنّ ما يُرَى من السَماءِ أكْثَرُ من نِصْفِها***.

[رَقْم ١٢] انْظُرِ المُقَدِّمَةَ، الصَفَحات ٦٢ — ٦٩.

[رَقْم ١٤] نَجدُ في خِتامِ مَخْطوطَةِ Leiden Or. 133، العِبارَةَ التالِيَةَ: *تَمَّت المَقالَةُ لبَطْلَمْيوس الثاني الشَيْخِ عَلِيٍّ الحَسَنِ بنِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ.*

[رَقْم ١٦] ذَكَرَهُ فَتْحُ الله الشرْوانيُّ باسمِ: ابنُ الهَيْثَمِ، مَخْطوطَة طهران، ملّي ٧٩٩ (الصَفَحاتُ غَيْرُ مُرَقَّمَةٍ = ٤ظ، ٥ظ ...)

[رَقْم ١٨] ذَكَرَهُ الفارِسِيُّ تَحْتَ عُنْوانِ ***في الأَثَرَيْنِ***، وأَوْرَدَ التَسْمِيَةَ عَلَى الشَكْلِ التالي: أبو عَلِيٍّ الحَسَنُ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ.

[رَقْم ٢٠] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***حَلُّ شُكوكِ المجسطيّ***، وفي (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***في حَلِّ شُكوكٍ في المَقالَةِ الأُولَى من كِتابِ ...***، وفي (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في حَلِّ شُكوكٍ في المجسطيّ***.

يَصوغُ ابنُ الهَيْثَمِ في هَذا الكِتابِ شُكوكاً مُرْتَبِطَةً بِبَعْضِ الصُعوباتِ الَّتي تُواجِهُ القارِئَ في ***المجسطيّ*** لِبَطْلَمْيوس. ويُقَدِّمُ حُلولَهُ الخاصَّةَ، حَيْثُ يُورِدُ كُلَّ واحِدٍ منها مُسْتَخْدِماً في ذَلِكَ مُصْطَلَحَ "*الجواب*".

في مَخْطوطَتَيْ مَكْتَبَةِ بودلييان (Bodleian)، أي:

Thurston 3, fol. 100r – 101r

وَ

Marsh 720, fol. 194r – 198r,

نَجِدُ نَصّاً مُغَفَّلاً وبدونِ عُنْوانٍ، وقد اعْتَقَدَ سيزكين (Sezgin) بِإمْكانِيَّةِ تَحْديدِ هَوِيَّةِ هَذا المُؤَلَّفِ، فَنَسَبَهُ إلى ابنِ الهَيْثَمِ تَحْتَ عُنْوانِ «***المسائل <والأجوبة>***». من الصَحيحِ أنّ هَذا النَصَّ يأتي عَلَى ذِكْرِ مُؤَلَّفَيْنِ لابن الهَيْثَمِ، وهُما ***المَناظِر*** وَ ***مَقالَةٌ في التَنْبيهِ عَلَى مَواضِعِ الغَلَطِ في كَيْفِيَّةِ الرَصْدِ***. إلاّ أنّ دِراسَةً دَقيقَةً لِهَذا النَصِّ، تُبَيِّنُ أنّه عِبارَةٌ عن <أجوبة> مُقْتَبَسَةٍ، حَرْفِيّاً أو مع بَعْضِ التَعْديلاتِ غَيْرِ الجَوْهَرِيَّةِ، عن كِتابِ ابنِ الهَيْثَمِ ***في حَلِّ شُكوكٍ في كِتابِ المجسطيّ***. فلا يُوجَدُ إذاً أيُّ أُفُقٍ لِنِسْبَةِ هَذا المُؤَلَّفِ الإضافِيِّ إلى ابنِ الهَيْثَمِ.

[رَقْم ٢١] العُنْوانُ **أ** مُثْبَتٌ لَدَى المُؤَلِّفين اللاّحِقين وفي الانتِقاداتِ الَّتي وُجِّهَت إلى ابنِ الهَيْثَمِ، وكذَلِكَ من خِلالِ المَخْطوطاتِ الَّتي وَصَلَتْ إلينا. وقد ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ ***الشُكوكُ عَلَى <إقليدس>***: أمّا العُنْوانُ **ب** فقد أوْرَدَهُ الخيّامُ بدون أن يُحَدِّدَ إذا ما كانَ عُنْواناً مُسْتَقِلاًّ أم جُزءاً من أ. ولا نَمْلِكُ أيَّ وَسيلَةٍ لِنَعْرِفَ إذا كانَ العُنْوانان **ج** ***(في حَلِّ شَكٍّ في المُجَسَّماتِ غَيْرِ الأُولَى)*** وَ **د** ***(في حَلِّ شَكٍّ في المُجَسَّماتِ)***، اللّذان وَرَدَ ذِكْرُهُما فَقَط عِنْدَ سَلَفِ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة وعِنْدَ كاتِبِ لائِحَة لاهور، وكذَلِكَ العُنْوانان **ه** وَ **و** الوارِدَان فَقَط عِنْدَ القِفْطِيِّ، يُشيرُ كُلٌّ منها إلى فُصولٍ مُخْتَلِفَةٍ من أ، أو إلى مُؤَلَّفاتٍ مُسْتَقِلَّةٍ. وبالإضافَةِ إلى ذَلِكَ، لا نَعْرِفُ إذا ما كانَ البَعْضُ منها يَتَطابَقُ مع بَعْضِها الآخَرِ.

ذُكِرَ المُؤَلَّفُ ٢١ أ عِنْدَ ابنِ السريّ في كِتابه ***جَوابٌ لأحْمَدَ بنِ مُحَمَّدٍ بنِ السريّ عن بُرْهانِ مَسْأَلَةٍ مُضافَةٍ إلى المَقالَةِ السابِعَةِ من كِتابِ إقليدس في الأصول***، ووَرَدَ ذِكْرُ المُؤَلِّفِ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ بنُ الهَيْثَمِ (مَخْطوطَة آيا صوفيا، ٤٨٣٠، ص ١٣٩ظ – ١٤٠و، ١٤٢ظ، ١٤٣ظ، ١٤٤ظ)، و تَحْتَ تَسْمِيَةِ أبو عَلِيٍّ (ص ١٤٠ظ، ١٤٣ظ،

١٤٥و)، أو تَحْتَ تَسْمِيَةِ: ابنُ الهَيْثَمِ (ص ١٤٣ظ — ١٤٥و)؛ وفي كِتاب ***في بَيانِ ما وَهَمَ فيه أبو عَلِيٍّ بنُ الهَيْثَمِ في كِتابه في الشُكوكِ عَلَى إقليدس*** وَرَدَ ذِكْرُ المُؤَلِّفِ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ بن الهَيْثَم (ص ١٤٦و — ظ، ١٤٧ظ، ١٤٨و، ١٤٩ظ — ١٥١ظ)، و تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ (ص ١٤٦ظ — ١٤٨ظ)؛ وفي كِتابِ ***في إيضاحِ غَلَطِ أبي عَلِيٍّ بن الهَيْثَمِ في الشَكْلِ الأوّلِ من المَقالَةِ العاشِرَةِ من كِتاب إقليدس في الأصول*** وَرَدَ ذِكْرُ المُؤَلِّفِ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ بنُ الهَيْثَمِ (ص ١٤٩و)، و تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ (ص ١٥٠و — ١٥١و) وتَحْتَ تَسْمِيَةِ: ابنُ الهَيْثَمِ (ص ١٥٠ظ — ١٥١و)؛ وفي كِتابِ ***في كَشْفِ الشُبْهَةِ الّتي عَرَضَت لجماعةٍ مِمّن يَنْسبُ نَفْسَهُ إلى عُلومِ التَعاليمِ عَلَى إقليدس في الشَكْلِ الرابعِ عَشَرَ من المَقالَةِ الثانيَةِ عَشَرَةَ من كِتابِ إقليدس*** وَرَدَ اسمُ الكاتِبِ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ بنُ الهَيْثَمِ (ص ١٥٢و — ١٥٢ظ) و تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ (ص ١٥٠و — ١٥١و) وتَحْتَ تَسْمِيَةِ: ابنُ الهَيْثَمِ (ص ١٥٣ظ).

ذُكِرَ المُؤَلَّفُ ٢١ أ أيضاً عِنْدَ الفارِسِيِّ، ووَرَدَ اسمُ الكاتِبِ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: ابنُ الهَيْثَمِ؛ وكذَلِكَ عِنْدَ نَصيرِ الدين الطوسِيِّ، وَرَدَ اسمُ الكاتِبِ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ بنُ الهَيْثَمِ (ص ٢٥٨و) وابنُ الهَيْثَمِ (ص ٢٤٨ظ).

[رَقْم ٢٢] ذُكِرَ في (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في حَرَكَةِ الالْتِفافِ***؛ وفي (III): ***مَقالَةٍ في أجْرامِ الالْتِفافِ***. وقد اسْتَشْهَدَ كُلٌّ من نَصيرِ الدين الطوسِيِّ وابنِ الشاطِرِ بهَذا المُؤَلَّفِ بدون تَحْديدٍ دَقيقٍ للعُنْوانِ، ووَرَدَ اسمُ الكاتِبِ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: ابنُ الهَيْثَمِ.

[رَقْم ٢٦] انْظُرِ المُقَدِّمَةَ، ص ٦٢ — ٦٥.

[رَقْم ٢٨] ذُكِرَ في (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***في حِساب المُعامَلاتِ***. كِتابُ ***في المُعامَلات في الحِساب*** يَسْتَشْهِدُ بالمُؤَلَّفِ السابِقِ بدون تَحْديدِ العُنْوانِ، ويَرِدُ اسمُ الكاتِبِ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو الحَسَنِ بنُ الهَيْثَمِ (ص ٧٦ظ). انْظُرِ الحَواشِيَ الإضافِيَّةَ.

[رَقْم ٢٩] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***ارْتِفاعاتُ الكَواكِبِ***، وفي (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في ارْتِفاعاتِ الكَواكِبِ***.

[رَقْم ٣٠] ذُكِرَ في (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَسْأَلَةٌ في اخْتِلافِ النَظَرِ***.

[رَقْم ٣٢] انْظُرِ المُقَدِّمَةَ، صَفْحَة ٧٣.

[رَقْم ٣٣] نُشيرُ إلى أنّ هَذا المُؤَلَّفَ، وبِعَكْسِ ما تَمّ تَأكيدُهُ، يَخْتَلِفُ عن كِتابِ ***في مَعْرِفَةِ ارْتِفاعِ الأَشْخاصِ القائِمَةِ وأعْمِدَةِ الجِبالِ وارْتِفاعِ الغُيومِ*** [انْظُرِ الكِتابَ رَقْم ٦٢].

[رَقْم ٣٤] ذُكِرَ في (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في اسْتِخْراجِ أرْبَعَةِ خُطوطٍ بَيْنَ خَطَّيْنِ***. وفي (III): ***مَقالَةٌ في وُجودِ أرْبَعَةِ خُطوطٍ بَيْنَ خَطَّيْنِ***. يَسْتَشْهِدُ الخيّامُ بِهَذا المُؤَلَّفِ بدون تَحْديدٍ دَقيقٍ للعُنْوانِ، ويرِدُ اسمُ الكاتِبِ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ بنُ الهَيْثَمِ (ص ٥٥و) وابنُ الهَيْثَمِ (ص ٥٥ظ).

[رَقْم ٣٥] انْظُرِ المُقَدِّمَةَ، صَفْحَة ٧٣.

[رَقْم ٣٦] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***ارْتِفاعُ القُطْرِ***.

[رَقْم ٣٨] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***خَطُّ نِصْفِ النَهارِ***، وفي (III)، ***مَقالَةٌ في اسْتِخْراجِ نِصْفِ النَهارِ***.

[رَقْم ٤١] ذُكِرَ في (II) وَ (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ مُخْتَصَرَةٌ في سَمْتِ القِبْلَةِ***. نُشيرُ إلى أنّ هَذا العُنْوانَ يُمْكِنُ تَأكيدُهُ استِناداً إلى مُقَدِّمَةِ ابنِ الهَيْثَمِ لِهَذا المُؤَلَّفِ. إذ نَقْرَأُ: "كُنّا ألَّفْنا مَقالَةً في اسْتِخْراجِ سَمْتِ القِبْلَةِ في جَميعِ المَواضِعِ من الأرْضِ شَماليها وجُنوبيها بِطَريقِ الحِسابِ والبَراهينِ الهَنْدَسِيَّةِ. ثُمّ عَنَّ لنا من بَعْدِ ذَلِكَ اسْتِخْراجُ سَمْتِ القِبْلَةِ في جَميعِ النَواحي

لِلمَعْمورَةِ الشَمالِيَّةِ بِطَريقٍ مُخْتَصَرٍ لا يَحْتاجُ إلى شَيْءٍ من الحِساب. فألَّفْنا هَذِهِ المَقالَةَ".
[انْظُرْ ص ١٠٧و من مَخْطوطَةِ Oxford, Seld. A. 32]

[رَقْم ٤٤] ذُكِرَ في (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في الكَواكِبِ المُنْقَضَّةِ.***

يَبْدو أنَّ هذيْنِ العُنْوانَيْنِ، الوارِدَيْنِ عِنْدَ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة وفي مَخْطوطَةِ لاهور عَلَى التَوالي، يَخُصّانِ المُؤَلِّفَ نَفْسَهُ. ويُؤَكِّدُ هَذِهِ الفَرَضِيَّةَ المَوْقِعُ الَّذي يَحْتَلُّهُ كُلٌّ مِنْهُما في لائِحَةِ أعْمالِ ابنِ الهَيْثَمِ، حَيْثُ يردان ،عَلَى التَوالي، في المَوْقِعِ الرابعِ عِنْدَ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة، وفي الخامِسِ في مَخْطوطَةِ لاهور. ولقد سَبَقَ واسْتَخْدَمَ حُنَيْنٌ بنُ إسحاق كَلِمَةَ *المُنْقَضَّة* في تَرْجَمَتِهِ لِشَرْحِ أوليمـــپـــيودور *Olympiodore* لكِتابِ أرِسْطو عن *الآثارِ العُلْوِيَّةِ*؛ حَيْثُ نَقْرَأُ فيه: «***في الكَواكِبِ المُنْقَضَّةِ***» [راجِعْ ***شُروحٌ عَلى أرِسْطو ورَسائِلُ أُخْرَى،*** نَشَرَها وعَلَّقَ عَلَيْها عَبْدُ الرحمن بَدَوي (بيروت، ١٩٨٦)، صَفْحَة ٩٥]. ويَتَعَلَّقُ الأمْرُ بظاهِرَةٍ أشارَ إلَيْها أرِسْطو، راجِعْ:

[*Météorologiques* I, 4, 341b, établi et traduit par P. Louis, Les Belles Lettres (Paris 1982, t. I]

يَبْقَى أن نَعْرِفَ لماذا يُشارُ إلى مُؤَلِّفٍ واحِدٍ بعُنْوانَيْنِ مُخْتَلِفَيْنِ. ثَمَّةَ تَفْسيرٌ مُحْتَمَلٌ، فَلَرُبَّما ذَكَرَت إحْدَى اللائِحَتَيْنِ عُنْوانَ المُؤَلَّفِ، في حينِ أوْرَدَت الأُخْرَى كَلِمَاتٍ وَرَدَت مُباشَرَةً بَعْدَ العُنْوانِ.

[رَقْم ٤٥] ذُكِرَ في (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في الأظلال.***

[رَقْم ٤٨] ذُكِرَ في (I) وَ (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في أعْمِدَةِ المُثَلَّثات،*** وهَذا يَتوافَقُ مع العِبارَةِ الخِتامِيَّةِ للمُؤَلَّفِ حَيْثُ نَقْرَأُ: تَمَّت ***المَقالَةُ في أعْمِدَةِ المُثَلَّثات.***

[رَقْم ٥٠] انْظُرِ الحَواشِيَ الإضافِيَّةَ: ابنُ سِنانٍ وابنُ الهَيْثَمِ فيما يَتَعَلَّقُ بِ ***خُطوطِ الساعات.***

[رَقْم ٥٣] ذُكِرَ في (I) وَ (II) وَ (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في الأثَرِ الَّذي في القَمَرِ.***

[رَقْم ٥٤] المُؤَلَّف ٥٤ جـ مَذْكورٌ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***في جَوابِ من خالَفَ في المَجَرَّةِ***، وفي (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في الرَدِّ عَلَى من خالَفَهُ في ماهِيَّةِ المَجَرَّةِ***، وفي (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَة في الردّ عَلَى من خالَفَهُ في المَجَرَّةِ***. ومن المُحْتَمَلِ أنّ هَذا المُؤَلَّفَ وُضِعَ كجَوابٍ عَلَى ابنِ رضوان، وَفْقَ ما تُشيرُ إِلَيْهِ إِحْدَى كِتاباتِ هَذا الأخيرِ، الَّتي ذَكَرَها ابنُ أبي أُصَيْبِعَة.

[رَقْم ٥٦] يَقْتَبِسُ المُؤْتَمَنُ بنُ هودٍ في كِتابِه ***الاستكمال***، قَضايا عَديدَةً، بشَكْلٍ حَرْفِيٍّ أحْياناً، من كِتابِ ابن الهَيْثَمِ ***في المَعْلومات***، بدون أن يُشيرَ إِلَيْهِ، وَلْنُقارِنْ عَلَى سَبيلِ المِثالِ القَضِيَّةَ ١٣ (في الصَفْحَتَيْنِ ٦٠ظ – ٦١و من مَخْطوطَةِ Leiden 123) والقَضِيَّة ١٤ من الفَصْلِ الثاني من كِتابِ ***في المَعْلومات*** [ص ٢٤٤ – ٢٤٥ من تَحْقيقِنا في *MIDEO,* 21(1993)] . ثَمَّةَ قضايا أُخْرَى أخَذَها ابنُ هودٍ من كِتابِ ابنِ الهَيْثَمِ أو اسْتَوْحاها في العَديدِ من المَسائلِ الوارِدَةِ في ***الاستكمال*** (ص ٦٦ظ – ٨٠ظ)، راجِعْ:

Jan P. Hogendijk, «The geometrical part of the *Istikmāl* of Yūsuf al – Mu'taman ibn Hūd (11th century). An analytical table of contents», *Archives internationales d'histoire des sciences,* vol. 41. n° 127 (1991), pp. 207 – 208 et pp. 249 – 253.

[رَقْم ٥٧] ذَكَرَهُ القَلْقَشَنْدِيُّ تَحْتَ عُنْوانِ: ***المبسوطة***. ذَكَرَهُ الشروانيّ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ الحَسَنُ بنُ الحسيْنِ بنِ الهَيْثَمِ (ص ٢و)، وابنُ الهَيْثَمِ (ص ٤ظ، ٥ظ ...).

[رَقْم ٥٨] ذُكِرَ في (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في المَناظِرِ***. لَكِن من المُحْتَمَلِ أن يَكونَ هَذا المُؤَلَّفُ هُوَ المَقْصود، نَظَراً إِلَى التَوافُقِ بَيْنَ اللائِحَتَيْنِ في تَسَلْسُلِ الأعْمالِ.

[رَقْم ٥٩] ذَكَرَهُ الخازِنيُّ، تَحْتَ تَسْمِيَةِ: ابنُ الهَيْثَمِ المِصْرِيُّ.

[رَقْم ٦٠] ذَكَرَ القِفْطِيُّ فَقَط: ***في المَرايا المُحْرِقَة***، لذَلِكَ فهُوَ لا يُمَيِّزُ هَذا المُؤَلَّفِ مِنَ الَّذي رَقْمُهُ ٦١. وذَكَرَ القَلْقَشَنْدِيُّ أيضاً: ***في المَرايا المُحْرِقَة***، بدون أن يُمَيِّزَ بَيْنَ المُؤَلَّفَيْنِ، وذَلِكَ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: ابنُ الهَيْثَمِ.

[رَقْم ٦٢] راجعِ المُؤَلَّفَ ذا الرَقْمِ ٣٣.

[رَقْم ٦٤] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***العَدَدُ والمُجَسَّم***.

[رَقْم ٦٥] ذُكِرَ في (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***قَوْلٌ في جوابِ مَسْأَلَةٍ في المِساحَةِ***، وفي (III) ***مَقالَةٌ في مَسْأَلَةٍ مِساحِيَّةٍ***.

[رَقْم ٦٩] انْظُرِ المُقَدِّمَةَ، صَفْحَة ٦٩.

[رَقْم ٧٠] انْظُرِ المُقَدِّمَةَ، الصَفْحَتَيْنِ ٦٨ وَ ٦٩، أكَّدَ بَعْضُ المُفَهْرِسين وُجودَ مَخْطوطَةٍ أُخْرَى لِهَذا المُؤَلَّفِ في زنجان، وقد عايَنّا المَوْجوداتِ في لائِحَةِ زنجان، ولَكِن بدون جَدْوَى.

[رَقْم ٧١] ذُكِرَ في (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***قَوْلٌ في اسْتِخْراجِ مُقَدِّماتِ ضِلْعِ المُسَبَّعِ***.

[رَقْم ٧٢] *ارْتِفاعها* في (II).

[رَقْم ٧٥] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***في قِسْمَةِ المِقْدارَيْنِ***، وفي (III): ***قَوْلٌ في قِسْمَةِ المِقْدارَيْنِ المُخْتَلِفَيْنِ***. انْظُرِ المُقَدِّمَةَ، صَفْحَة ٧١، والحَواشِيَ الإضافِيَّةَ.

[رَقْم ٧٧] ذُكِرَ في (II) وَ (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في الرخامةِ الأُفُقِيَّةِ***.

[رَقْم ٧٨] دُمِجَ هَذا المُؤَلَّفُ في كِتابِ فتح الله الشروانيّ، مَخْطوطَة طهران، ملّي ٧٩٩، صَفْحَة ٢٠ظ ومَخْطوطَة Danishka 493، الصَفَحَات ١٩ظ – ٢٣و.

[رَقْم ٨٠] ذُكِرَ في (III) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في سَمْتِ القِبْلَةِ***.

[رَقْم ٨٢] ذُكِرَ في (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***عَلَى طَريقِ التَعْليقِ***. كما نَجِدُ أيضاً في ***شَرْحِ الرُمونيقي (؟)عَلَى طَريقِ التَعْليقِ*** (الرَقْم ٨٦ في لائِحَةِ ابنِ أبي أُصَيْبِعَة).

[رَقْم ٨٣] ذَكَرَهُ الإنْطاكِيُّ، لَكِن بدون تَحْديدٍ دَقيقٍ للعُنْوانِ (ص ٣٦ظ، ٢٩٧ظ)، ووَرَدَ تَحْتَ تَسْمِيَةِ: "أبو ابن الهَيْثَمِ".

[رَقْم ٨٤] ذُكِرَ في (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في شَرْحِ القانونِ عَلَى طَريقِ التَعليقِ.***

[رَقْم ٨٥] ذَكَرَهُ العرضيُّ، بدون تَحْديدٍ دَقيقٍ للعُنْوانِ، وتَحْتَ تَسْمِيَةِ: أبو عَلِيٍّ بنُ الهَيْثَمِ (ص ١٥٦ظ)، وتَحْتَ تَسْمِيَةِ: ابنُ الهَيْثَمِ (ص ١٩٦و).

ذَكَرَهُ ابنُ باجَّة، تَحْتَ تَسْمِيَةِ: ابنُ الهَيْثَمِ، راجِعْ جمالَ الدين العَلَوِيَّ، ***المتن الرشديّ*** (الرباط، ١٩٨٦).

[رَقْم ٨٩] انْظُرِ السَمَوْأَلَ، ***الباهِر***، صَفْحَة ١٤٨: *قالَ أبو عَلِيٍّ بنُ الهَيْثَمِ: نُريدُ أن نُبَيِّنَ كَيْفَ نَعْمَلُ مُثَلَّثاً قائِمَ الزاوِيَةِ* ... صيغَةُ هَذِهِ المَسْأَلَةِ مُعادِلَةٌ لِصيغَةِ المَسْأَلَةِ الثامِنَةِ من كِتابِ ***في التَحْليلِ والتَرْكيبِ***، راجِعْ *MIDEO*, 20، الصَفْحَة ١٠٤. نُذَكِّرُ بأنّ السَمَوْأَلَ نَفْسَهُ قد وَضَعَ مُؤَلَّفاً في التَحْليلِ والتَرْكيبِ، وهُوَ لم يَصِلْ إلينا، ولَرُبَّما كانَ فيه ما يُفيدُنا عن أثَرِ مُؤَلَّفِ ابنِ الهَيْثَمِ.

[رَقْم ٩٠] ذُكِرَ في (II) تَحْتَ عُنْوانِ: ***تَعْليقٌ عَلَّقَهُ اسحقُ بنُ يونسَ المُتَطَبِّبُ بِمِصْرَ عن ابنِ الهَيْثَمِ في كِتابِ ديوفنطس في مَسائلِ الجَبْرِ*** (خمس مَقالات).

[رَقْم ٩٢] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***التَنْبيهُ عَلَى ما في الرَصْدِ من الغَلَطِ***؛ وفي (III): ***مَقالَةٌ في المَواضِعِ الغَلَطِ في الرَصْدِ.***

[رَقْم ٩٣] يُخْبِرُنا ابنُ الهَيْثَمِ أنّه سَيَكْتُبُ مُؤَلَّفاً مُسْتَقِلاًّ، يَوَدُّ أن يُبَيِّنَ فيه كَيْفِيَّةَ إيجادِ مُرَبَّعٍ مُساوٍ لدائرةٍ (ص ١٦١). انْظُرْ أيضاً المُقَدِّمَةَ، الصَفَحَات ٦٣ – ٦٥، والحَواشِيَ الإضافِيَّةَ.

[رَقْم ٩٥] يُنسَبُ هَذا المُؤَلَّفُ بشَكْلٍ جَلِيٍّ إلى الحَسَنِ بن الهَيْثَمِ، وهُوَ يَتَناوَلُ مَسْأَلَةَ تَصْنيفِ العَلومِ وهُوَ يُناقِضُ، في مَواضِعَ مُتَعَدِّدَةٍ، ما نَقْرَأُه في ***في التَحْليلِ والتَرْكيبِ*** و ***في المَعْلوماتِ***،

ولا تُوجَدُ أيُّ شُبْهَةٍ حَوْلَ هَذَيْنِ المُؤَلَّفيْنِ لِجهَةِ أصالَةِ نِسْبَتِهِما إلى الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ. ومن جهَةٍ أُخْرَى، عِنْدَما يَتَناوَلُ كاتِبُ هَذا المُؤَلَّفِ عِلْمَ البَصَرِيّاتِ، فإنّه لا يَتَحَدَّثُ سِوَى عن الانْعِكاسِ، مِمّا يَتَناقَضُ بشَكْلٍ ما مع الأعْمالِ الخاصَّةِ بالحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ. وأخيراً، لم يَكُنْ من عادَةِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ إعْطاءُ عَناوينَ مَجازيَّةٍ لكِتاباتِهِ — عَلَى غِرارِ كَلِمَةِ *"الثمرة"*.

[رَقْم ٩٦] ذُكِرَ في (I) تَحْتَ عُنْوانِ: ***في أُصولِ المِساحَةِ وذِكْرِها بالبَراهين.***
قَبْلَ أن نَسْتَخْلِصَ العَناوينَ المَشْكوكَ فيها والمَنْسوبَةَ إلى الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ ، لِنُشِرْ إلى الأعْمالِ الَّتي تَعودُ أصْلاً إلى مُحَمَّدٍ، وقد نُسِبَت إلى الحَسَنِ خَطَأً، بسَبَبِ الخَلْطِ بَيْنَ الرَجُلَيْن: هِيَ تِلْكَ الَّتي اسْتَدَلَّيْنا عَلَيْها في المُقَدِّمَةِ، وفي الحَواشي الإضافِيَّةِ والجَدْوَلِ السابِقِ، وهِيَ بالتَأكيدِ مَنْسوبَةٌ بشَكْلٍ غَيْرِ صَحيحٍ. ولا يُمْكِنُ رَسْمُ صورَةٍ كامِلَةٍ عن نِتاجِ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ، قَبْلَ المُعايَنَةِ الخِتامِيَّةِ لِكافَّةِ العَناوينِ الَّتي يَجبُ أن يَتَضَمَّنُها الجَدْوَلُ. إلاّ أنّ البَعْضَ من هَذِهِ العَناوينِ يُثيرُ صُعوباتٍ لا يُمْكِنُ تَجاوُزُها، نَظَراً إلى جَهْلِنا بما تَتَضَمَّنُهُ ولِكَوْنِها تَتَناوَلُ مَواضيعَ غَريبَةً عمَّا عَهِدْناهُ من بُحوثٍ لابنِ الهَيْثَمِ — عَلَى سَبيلِ المِثالِ، نَذْكُرُ المُؤَلَّفاتِ (١)، (٥)، (٨٦).

١ – مُؤَلّفاتٌ مَشْكوكٌ بأصالَتِها:

– ***في ثَمَرَةِ الحِكْمَةِ*** (انْظُر الحاشِيَةَ ذات الرَقْم ٩٥).

– ***في عُقودِ الأَبْنِيَةِ.*** ذَكَرَهُ مُؤَلِّفون مُتَأخِّرون: القَلْقَشَنْدِيُّ، ***صبح الأعشى،*** المُجَلَّد الأوّل، الصَفْحَة ٤٧٦ وكَذَلِكَ تشكوپري زاده، ***مفتاحُ السَعادَةِ،*** المُجَلَّد الأوّل، الصَفْحَة ٣٧٥. ولم يَصِلْ إلينا هَذا المُؤَلَّفُ. وقد ذَكَرَ البَيْهَقِيُّ أنّ الحَسَنَ بنَ الهَيْثَمِ كانَ قد وَضَعَ كِتاباً في "علم *الحيل*". لَكِن، ما من شَيْءٍ يُؤَكِّدُ لنا أنّ البَيْهَقِيَّ والكُتّابَ المُتَأخِّرين قد تَحَدَّثوا عن الكِتابِ عَيْنِهِ. وما من شَيْءٍ أيضاً يُؤَكِّدُ لنا أنّ الكُتّابَ المُتَأخِّرين لم يَخْلِطوا بَيْنَ الحَسَنِ ومُحَمَّدٍ، حَيْثُ إنّ هَذا الأخيرَ قد كَتَبَ، وَفْقاً لما يَسوقُهُ ابنُ أبي أُصَيْبِعَة، كِتاباً تَحْتَ عُنْوانِ: ***مَقالَةٌ في إيجاراتِ الحُفورِ والأَبْنِيَةِ بجَميعِ الأشْكالِ الهَنْدَسِيَّةِ.***

٢- **أعْمالٌ لمُحَمَّدٍ مَنْسوبَةٌ إلى الحَسَن:**

- ***في شَرْحِ المجسطيّ***، مَخْطوطَة أحمد الثالث ٣٣٢٩/٢، ص ٣٨ظ - ١٥٨و.
- ***مَقالَةُ مِنلاوس في تعرّفِ أقدارِ الجَواهرِ المُخْتَلِفَةِ***، مَخْطوطَة لاهور.

٣- **أعْمالٌ يُرَجَّحُ أنّها لمُحَمَّدٍ، مَنْسوبَةٌ إلى الحَسَن:**

- ***في هَيْئَةِ العالَمِ*** (انْظُرِ الجَدْوَلَ، الرَقْم ٢٤، والحَواشِيَ الإضافِيَّةَ).
- ***في وُجودِ خطّيْنِ يقرُبان ولا يلتقيان***، مَخْطوطَة القاهرة ٤٥٢٨، ص ١٥ظ - ٢٠و.

٤- **أعْمالٌ مَنْحولَةٌ وغَيْرُ صَحيحَةِ النسْبَةِ**

- ***تُحْفَةُ الطُلّاب في عملِ الإسطرلابِ*** (أبو الحَسَنِ عَلِيٌّ بنُ الحسيْنِ بنِ الهَيْثَمِ)، مَخْطوطَة Bursa haraççi 1177، ص ١٥و - ٢٣و.
- ***شَرْحُ قصيدةِ ابنِ الهَيْثَمِ في ترحيلِ الشمسِ في المنازلِ***، وقد نَسَبَ هَذا المُؤَلِّفَ إلى ابنِ الهَيْثَمِ أبو عبدِ الله مُحَمَّدٌ بنُ أحْمَدَ بنِ هِشامٍ اللّخميّ (مَخْطوطَة القاهرة، دار الكتب، ميقات ١٠٥١ (أمّا قائلُ هَذِهِ القَصيدَةِ فالشَيْخُ أبو عَلِيٍّ الحَسَنُ بنُ الحَسَنِ بنِ الهَيْثَمِ ...).
- ***في تَوْطِئَةِ مُقَدِّماتٍ لعملِ القطوعِ عَلَى سطحٍ ما بطريقٍ صناعيٍّ***، مَخْطوطَة: Florence, Laurenziana Or. 152، ص ٩٧ظ - ١٠٠و.
- ***في المُعامَلاتِ في الحِساب***، مَخْطوطَة إسْطَنْبول، نور عثمانيّة ٢٩٧٨، ص ٣٩ - ١٢٥، ومَخْطوطَة إسْطَنْبول، فيض الله ١٣٦٥، ص ٧٣ظ - ١٦٤و. انْظُرِ الحواشِيَ الإضافِيَّةَ.
- ***الشَفَقُ والغَسَقُ*** *De Crepusculis*

لائِحَةُ الأعْمالِ المَذْكورةِ[1]

١– مَخْطوطاتُ النُصوصِ العَرَبيَّةِ

ابن الهَيْثَمِ

- قَوْلٌ في الهِلالِيّاتِ

عليكرة، عبد الحيّ ٦٧٨/٥٥، ص ١٤ظ –١٦ظ.

- قَوْلٌ في تَرْبيعِ الدائِرَةِ

عليكرة، عبد الحيّ ، ٦٧٨، ص ١٠و – ١١ظ، ٣٠و – ٣٠ظ (رمزها **ي**)

القاهرة، دار الكُتُبِ، تيمور – رياضة ١٤٠, ص ١٣٦ – ١٣٧.

إسْطَنْبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢ II/21، ص ٣٩ظ – ٤١و (رمزها **أ**)

إسْطَنْبول، بشير آغا ٤٤٠، ص ١٥١و (رمزها **ر**).

إسْطَنْبول، جارالله *(Carullah)* ١٥٠٢/١٥، ص ١٢٤ظ –١٢٦و (رمزها **ج**)

مشهد ٥٣٩٥/١، ص ١ظ –٣و (رمزها **م**)

پاتنا، خودابخش ٣٦٩٢، غير مُرَقَّمَة، ثلاث صَفَحات (رمزها **ب**)

طهران، مجلس شورى ٢٠٥/٣، ص ٩٣ – ١٠١ (رمزها **ط**)

طهران، مجلس شورى ٢٩٩٨، صفحة من ورقة غير مُرَقَّمَة (رمزها **س**)

طهران، ملك ٣١٧٩، ص ١٠٧ظ – ١١٠و (رمزها **ك**)

طهران، سيباهسالار *(Sepahsālār)* ٥٥٩، ص ٨٤ظ –٨٥و (رمزها **ت**)

– مَقالَة مُسْتَقْصاة في الأشْكالِ الهِلالِيَّة

برلين *Staatsbibliothek*، *Oct. 2970*، ص٢٤و–٤٣ظ، (رمزها **ب**)

إسْطَنْبول، عاطف ١٧١٤/١٧، ص ١٤٨و–١٧٧ظ (رمزها **ت**)

إسْطَنْبول، سليمانية، فاتح ٣٤٣٩، ص ١١٥و–١١٧و (رمزها **ف**)

[1] سَنَجِدُ هنا المَخْطوطاتِ المَذْكورَةِ في المُجَلَّدِ، باسْتِثْناءِ تِلْكَ الوارِدَةِ في الجَدْوَلِ السابِقِ.

لينينغراد، معهد الاستشراق ٨٩، مَجْموعة **ب** ١٠٣٠، ص ٥٠و – ٧٢ظ، ص ١٣٣ظ – ١٤٤و (رمزها **ل**)

لندن: (*India Office 1270/12, Loth 734*)، ص ٧٠ظ–٧٨ظ (رمزها أ)

- مَقالَة في مِساحَة الُمجَسَّمِ المكافئ

لندن:(*India Office 1270/11, Loth 734*)، ص ٥٦ظ- ٦٩ظ (رمزها أ)

- قَوْلٌ في مِساحَة الكرة

الجزائر، المكتبة الوطنية ١٤٤٦، ص ١١٣و – ١١٩ظ (رمزها **جـ**(

عليكرة، عبد الحيّ ٦٧٨، ١ظ–٥ظ، ١٣ظ- ١٤ظ (رمزها ع)

برلين، *(Staatbibliothek, Oct.2970/13)*، ص ١٤٥و -١٥٢و (رمزها **ب**)

إسْطَنْبول، عاطف ١٧١٤/٢٠، ص ٢١١و – ٢١٨و (رمزها **ت**)

لنينغراد، معهد الاستشراق ٨٩، *B 1030*، ص ٧٣و – ٧٧و (رمزها **ل**)

- قَوْلٌ في قِسْمَةِ المِقْدارَيْن الُمخْتَلِفَيْنِ الَمذْكورَيْنِ في الشَكْلِ الأوّلِ من الَمقالَة العاشِرةِ من كتاب إقليدس

لنينغراد، معهد الاستشراق ٨٩، الَمجْموعة *B 1030*، ص ٧٨ظ – ٨١و.

- قَوْلٌ في أنّ الكُرَةَ أوْسَعُ الأشْكال الُمجَسَّمَة الّتي إحاطتها متساوية وأنّ الدائِرَة أوسَــعُ الأشْكال الُمسَطّحة الّتي إحاطتها متساوية

برلين، *(Staatbibliothek, Oct.2970/9)*، ص ٨٤و – ١٠٥و (رمزها **ب**)

إسْطَنْبول، عاطف ١٧١٤/١٨، ص ١٧٨و -١٩٩ظ

طهران، مجلس شورى، توغابوني (Tugābunī)١١٠، ص ٤٦٢ -٥٠٢ (رمزها **ط**)

- مَقالَة في علّةِ الجَذْرِ وإضعافه ونقله

عليكرة، عبد الحيّ ٦٧٨، ص ١٧و – ١٩و؛ ١٣ظ – ١٤ظ.

- قَوْلٌ في استِخْراجِ ضِلْعِ الُمكَعَّب

كويبيشف، ص ٤٠١ظ- ٤٠٢و.

١-٢ المَخْطوطاتُ الوارِدَةُ في التَحْليلِ والحَواشي الإضافِيَّةِ

كاتِبٌ مَجْهول

- في وجود خطّين يقربان ولا يلتقيان

القاهرة ٤٥٢٨، ص ١٥ظ-٢٠و.

مَخْطوطات منحولة (رسائل منسوبة إلى الحَسَنِ بن الهَيْثَمِ)

- تحفة الطلاّب بعمل الاسطرلاب (أبو الحَسَنِ علي بن الحسين بن الهَيْثَمِ)

برسا، *Haraççi* ١١٧٧، الصَفَحات ١٥و -٢٣و

- شرح قصيدة ابن الهَيْثَمِ في ترحيل الشمس في المنازل، ذُكِرَت النِسْبَةُ لَـدَى عبـد الله مُحَمَّد بن أحمد بن هشام اللّخمي

القاهرة، دار الكُتُبِ، ميقات ١٠٥١

- في توطئة مقدّمات لعمل القطوع عَلَى سطح ما بطريق صناعيّ

فلورنسا، لورونزيانا، شرقي ١٥٢، ص ٩٧ظ- ١٠٠و.

- في المعاملات في الحساب

إسْطَنْبول، نور عُثْمانِيَّة ٢٩٧٨، ص ٣٩-١٢٥، وفيض الله ١٣٩٥، ص ٧٣ظ — ١٦٤و.

أرشميدس

- الكرة والأُسطوانة، إسْطَنْبول، سليمانيّة، فاتح ٣٤١٤

إقليدس

- الأصول (نسخة اسحاق — ثابِت)، طهران، ملك ٣٤٣٣

ابن الهَيْثَمِ، الحَسَن

- في بركار الدوائر العِظام

Londrs, India office 1270, Loths 734, fols 116v -118r

- في حَلِّ شُكوكٍ في كِتابِ إقليدس في الأصول

إسْطَنْبول، جامعة ٨٠٠، ١٨١ص؛ بُرسا، *Haraççi* ١١٧٢؛ طهران، ملك ٣٤٣٣

- في حَلِّ شُكوكٍ في كِتابِ المجسطيّ يُشَكِّكُ فيها بعضُ أهْلِ العِلْمِ

عليكرة، عبد الحيّ ٢١، إسْطَنْبول، بيازيــت ٢٣٠٤، ص ١ظ – ٢٠ظ وفــاتح ٣٤٣٩، الصَفَحات ١٤٢و- ١٥٤ظ.

ابن الهَيْثَمِ، مُحَمَّد

- في شَرْحِ المجسطيّ

إسْطَنْبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ٣٣٢٩، ١٢٤ص.

- مَقالَةُ منلاوس في تَعَرُّف أقْدارِ الجَواهِرِ المُخْتَلِفَةِ

لاهور، ص ٤٤ – ٥١، ونبي خان *M 81*

ابن هود (المؤتَمَن)

الاستكمال، ليدن، مكتبة الجامعة ١٢٣/١، ص ١و-٨٠ظ وكوبنهاغن، المكتبة الملكيّــة، شرقي ٨٢، ص ١و-١٢٨و.

ابن السريّ

- جوابٌ لأحمد بن مُحَمَّدٍ بنِ السريّ عن بُرهانِ مَسْأَلَةٍ مُضافَةٍ إلى المَقالَةِ الــسابِعَةِ مـــن كِتابِ إقليدس في الأصول

إسْطَنْبول، آيا صوفيا ٤٨٣٠، ص ١٣٩و-١٤٥ظ.

- في بَيانِ ما وَهَمَ فيه أبو عليٍّ بنُ الهَيْثَمِ في كِتابِهِ في الشُكوكِ عَلَى إقليدس

إسْطَنْبول، آيا صوفيا ٤٨٣٠، ص ١٤٦ظ-١٤٩ظ.

- في إيضاحِ غَلَطِ أبي عليٍّ بن الهَيْثَمِ في الشَكْلِ الأوّلِ من المَقالَةِ العاشِرَةِ مـــن كِتـــابِ إقليدس في الأصول

إسْطَنْبول، آيا صوفيا ٤٨٣٠، ص ١٤٩ظ-١٥١ظ؛ و ٤٨٣٥، ص ٣٠ظ-٣٢و.

- في كَشْفِ الشُبْهَةِ الّتي عرضت لجماعةٍ ممّن ينسبُ نَفْسَهُ إلى علوم التعاليم عَلَى إقليدس في الشَكْلِ الرابعِ عَشَرَ من المَقالَةِ الثانِيَةِ عَشَرَةَ من كتاب إقليدس

إسْطَنْبول، آيا صوفيا ٤٨٣٠، ص ١٥١ظ – ١٥٤ظ.

الخرقيّ

كِتابُ مُنْتَهَى الإدْراكِ في تَقاسيمِ الأفْلاكِ، باريس المكتبة الوطنية ٢٤٩٩.

٢ – الكُتُب والمقالات

A. Akhmedov, “Kniga ob izvletcheni rebra kouba”, *Matematika i astronomia v troudakh outchionnikh srednevekovovo vostoka, izdatel’stvo “fan”* (Tachkent, 1977), pp. 113-117.

العَلَويّ، المتن الرُشديّ (رباط ١٩٨٦).

Apollonius, *Les Coniques,* (reprod. Photo. Du MS Aya Sofya 2762 par M. Nāzim Terzioğlu),
Publications of the Mathematical Research Institute, 4 (Istanbul, 1981).

R. C. Archibald, *Euclid's Book on Division of Figures* (Cambridge, 1915).

Archimède, *De la sphere et du cylindre*, trad. Ch. Mügler, Collection des Universités de France (Paris,1970).

Aristote, *Météorologiques*, éd. et trad. Par P. Louis,Les Belles Lettres (Paris,1982).

البيهقيّ، ***تأريخ حكماء الإسلام***. تحقيق مُحَمَّد كرد عليّ، مجمّع اللّغة العَرَبِيَّة في دمشق الإصدارالأوّل (دمشق ١٩٤٦)، الإصدار الثاني (دمشق ١٩٧٦).

O. Becker, *Grundlagen der Mathematik*, 2e éd. (Munich, 1964).

C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Literatur*, 2e éd. I (Leiden, 1943), Suppl. I (Leiden, 1937), Suppl. II (Leiden, 1938), Suppl. III (Leiden, 1942), II (Leiden, 1949).

J. al-Dabbāgh, «Infinitesimal Methods of Ibn al-Haitham», *Bulletin of the College of Science*, University of Baghdad, vol. II (1970), pp.8-17.

Euclide, *The thirteen Books of Euclid's Elements*, trad. et com. par Th. Heath, 3 vol., 2e éd. (Cambridge,1926).

الفارسيّ كمال الدّين، ***كتاب تنقيح المناظر لذوي الأبصار والبصائر***، دار المعارف العُثْمانِيَّة. مجلّدان (حيدر أباد ١٣٤٧ – ١٣٤٨/١٩٢٨-١٩٣٠).

G. Graf, *Geschichte der christlichen arabischen Literatur* (Rome, 1947).

Th. Health, *A History of Greek Mathematics*, 2 vol. (Oxford, 1912); reprod. (Oxford, 1965).

A. Heine, «Ibn al-Haiṯams Autobiographie in einer Handschirft aus dem Jahre 556 H./1161 A. D.», in U. Haarmann et P. Bachmann (éd.), *Die islamische Welt zwischen Mittelalter und Neuzeit. Festschrift für Hans Robert Roemer zum 65 Geburstag*, Beiruter Texte und Studien 22 (Beyrouth, 1979), pp. 254-277.

M.J. Hermosilla, «Aproximación a la *Tatimmat ṣiwān al-ḥikma* de Al-Bayhakī», in *Actas de las II Jornadas de Cultura Arabe e Islámica*, Instituto Hispano-Arabe de Cultura (Madrid,1980), pp. 263-272.

حجاب، مُحَمَّد عليّ، «قائمة بالموجود من كُتُبِ ابن الهَيْثَمِ ومكان وجودها». منشورات الجمعيّة المصرية لتاريخ العلوم، العدد ٢ (القاهرة ١٩٤٨)، ص ١٣٩ -١٤٣.

Jan P. Hogendijk, «The geometrical parts of the *Istikmāl* of Yūsuf al-Mu’taman ibn Hūd (11th century). An analytical table of contents», *Archives internationales d'histoire des sciences,* vol. 41, no 127 (1991), pp. 207-281.

ابن أبي أُصَيْبِعَة، ***عيـــون الأنبـــاء في طبقـــات الأطّبـــاء***، تحقيـــق أ. مـــولّير، مجلّـــدان (القاهرة/كونينسبرغ ١٨٨٢/١٨٨٤)؛ بيروت (١٩٦٥).

ابن دقماق، ***كتاب الانتصار لواسطة عقد الأمصار***، نَشْرَة بولاق (القاهرة بدون تأريخ).

ابن الهَيْثَم

مَجْموع الرسائل، دار المعارف العُثْمانيَّة (حيدرأباد ١٩٣٨ –١٩٣٩).

مَقَالَة في الشكوك عَلَى بطلميوس، تحقيق عبد الحميد صبره والشهابي (القاهرة ١٩٧١).

The Optics of Ibn al-Haytham, Books I-III, On Direct Vision, Traduction, Introduction et Commentaire par A.I. Sabra, 2 vol. (Londres,1989).

On the Configuration of the World, éd. trad. et com. Par Y. Tzvi Langermann (New York / Londres,1990).

*Maqālah 'an thamrat al-Ḥikmah (**مَقَالَة عن ثمرة الحِكمة**) A treatise on the fruit (benefit) of wisdom*, ed. By M. Abd al-Hādī Abou-Rīdah (Le Caire,1991).

ابن العبري، أبو الفرج، ***تاريخ مُخْتَصَر الدول***، تحقيق الصالحاني (بـــيروت ١٨٩٠ وأعيـــد طبعه في بيروت سنة ١٩٥٨)

ابن تَغْري بِردي، أبو المحاسن، ***النجوم الزاهرة في ملوك مصروالقاهرة***، ٤ مجلّدات (القاهرة ١٩٣٣).

الخازنيّ، ***ميزان الحكمة***، دار المعارف العُثْمانيَّة (حيدرأباد ١٩٤٠ – ١٩٤١).

P. Kunitzsch, *Ibn aṣ-Ṣalāḥ. Zur Kritik der Koordinatenüberlieferung im Sternkatalog des* Almagest, Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Philologisch-Historische Klasse, Folge 3, n° 94 (Göttingen, 1975).

Kūshyār ibn al-Labbān, *Principles of Hindu Reckoning*, A translation with Introduction and Notes by Martin Levey and Marvin Petruck of the *Kitāb fī uṣūl ḥisāb al-hind,* The University of Wisconsin Press, Publications in Medieval Science (Madison / Milwakee,1965);

وقد نشر أحمد سعيدان النَصَّ بالعَرَبِيَّة في مَجَلّة المَخْطوطـــاتِ العَرَبِيَّـــة، ١٣ (١٩٦٧)، ص ٥٥–٨٣.

المقريزيّ، ***كتاب المواعظ والاعتبار بذكر الخطط والآثار***، نشرة بولاق، مجلّدات (القاهرة، بدون تأريخ)؛ نَشْرَة مُعادة في القاهِرة (بدون تَأريخ).

R. Morelon: voir Thābit ibn Qurra.

A. Müller, «Über das sogenannte ***تأريخ الحكمـــاء*** des al-Qifṭī», *Actes du VIII^e Congrès International des Orientalistes tenu à Stockolm et à Christiana*, Sect. I (Leiden,1891), pp.15-36.

M. Munk, «Notice sur Joseph ben-Iehouda ou Aboul'hadjâdj Yousouf ben-Ya'hya al-Sabti al-Maghrebi, disciple de Moïmonide», *Journal Asiatique*, 3e série, 14 (1842), pp. 5-70.

النديم، ***كتاب الفهرست***، نشرة تجدّد (طهران ١٩٧١).

C. Nallino, *Arabian Astronomy, its History during the Medieval Times* (Rome, 1911), pp. 50-64.

مصطفى نظيف، ***الحَسَنُ بن الهَيْثَمِ، بحوثه وكشوفه البصرية***، مجلّدان (القـــاهرة ١٩٤٢ – ١٩٤٣.

G. Nebbia, «Ibn al-Haytham, nel millesimo anniversario della nascita», *Physis*, IX, 2 (1967), pp. 165-214.

عبد الرحمن بدوي، ***أرسطوطاليس، في السماء والآثار العلْويَّة***، بيروت ١٩٨٦.

القلانسيّ، ***ذيل تاريخ دمشق*** (بيروت ١٩٠٨).

القَلْقَشَنْديّ، ***صبح الأعشى في صناعة الإنشاء***، منشورات القاهرة (أعاد طباعته بـــولاق، ١٩٦٣).

القِفْطيّ، ***تأريخ الحكماء***، نشرة يوليوس ليبرت (ليبزيغ ١٩٠٣)

R. Rashed

«La construction de l'heptagone régulier par Ibn al-Haytham», *Journal for the History of Arabic Science*, III, 2 (1979), pp. 309-387.

«Ibn al-Haytham et la mesure du paraboloïde», *Journal for the History of Arabic Science*, V, 1-2 (1981), pp. 191-262.

«Al-sijzī et Maïmonide: Commentaire mathématique et philosophique de la proposition II-14 des *Coniques* d'Apollonius», *Archives internationales d'histoire des sciences,* 37, 119 (1987), pp. 263-296 ; reprod. dans *Optique et mathématiques: recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe,* Variorum Reprints (Londres, 1992), XIII; traduction anglaise dans *Fundamenta Scientiœ*, 8, 3-4 (1987), pp. 241-256.

«L'analyse et la synthèse selon Ibn al-Haytham», dans R. Rashed (éd), *Mathématiques et philosophie de l'antiquité à l'âge classique* (Paris, 1991), pp. 131-162 ; reprod. dans *Optique et mathématiques: recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe,* variorum Reprints (Londres, 1992), XIV.

«La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham. I: *L'analyse et la synthèse*», *Mélanges de l'Institut Dominicain d'Études Orientales du Caire (MIDEO),* 20 (1991), pp. 31-231.

«Fūthiṭos (?) et al-Kindī sur 'l'illusion lunaire'», dans M. O. Goulet-Cazé, G. Madec, D. O'Brien (éd), *ΣΟΦΙΗΣ ΜΑΙΗΤΟΡΕΣ. Hommage à Jean Pépin* (Paris, 1992).

Géométrie et dioptrique au Xe siècle : Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham, Les Belles Lettres (Paris, 1993).

«La philosophie des mathématiques d'Ibn al-Haytham. II : *Les connus*», *MIDEO*, 21 (1993), pp. 87-275.

انْظُرِ السَمَوْأل والطوسيّ

N. Rescher, G*alen and the syllogisms* (Pittsburg, 1966).

F. Rosenthal, «Die arabische Autobiographie», *Studia Arabica : Analecta Orientalia*, 14 (1937), pp. 3-40.
B. A. Rozenfeld, «The list of physico-mathematical Works of Ibn al-Haytham written by himself», *Historia Mathematica*, 3 (1976), pp. 75-76.
A. I. Sabra
«A twelfth-century defence of the figure of the syllogism», *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes,* XXVIII (1965),pp. 14-28.
«The authorship of the *Liber de crepusculis», Isis*, 58 (1967), pp. 77-85.
«Ibn al-Haytham», *Dictionary of Scientific Biography,* éd. Ch. Gillispie, vol. VI (New York, 1972), pp. 204-208.
Voir Ibn al-Haytham.
صاعِد الأنْدَلُسيّ، ***طبقات الأمم***، نشرة بو علوان (بيروت ١٩٨٥).
السموأل، ***الباهِر في جَبْرِ السَمَوْأل***، حَقَّقَهُ وعَلَّقَ عَلَيْهِ صلاح أحمد ورشدي راشد، دمشق ١٩٧٢.
J. Schacht et M. Meyerhof, *The Medico-Philosophical Controversy between Ibn Butlan of Baghdad and Ibn Ridwan of Cairo. A Contribution to the History of Greek Learning Among the Arabs,* Faculty of Arts n° 13 (Le Caire, 1937).
M. Schramm, *Ibn al-Haythams Weg zur Physik* (Wiesbaden, 1963).
C. J. Scriba, «Welche Kreismonde sind elementar quadrierbar? Die 2400 jährige Geschichte eines Problems bis zur endgültigen Lösung in den Jahren 1933/1947», *Mitteilungen des mathematischen Gesellschaft in Hamburg,* XI, 5 (1988), pp. 517-534.
F. Sezgin*, Geschichte des arabischen Schrifttums,* V: Mathematik (Leiden, 1974), VI: Astronomie (Leiden, 1978).
الشَهرزوريّ، ***نزهة الأرواح وروضة الأفراح في تاريخ الحكماء***، دار المعارف العُثْمانِيَّة (حيدرأباد، ١٩٧٦).
S.M. Stern, «Ibn al-Samḥ», *Journal of the Royal Asiatic Society* (1956); réimp. dans S.M. Stern, *Medieval Arabic and Hebrew Thought*, éd. F.W. Zimmermann (Londres, 1983).
H. Suter
«Die Kreisquadratur des Ibn el-Haiṯam», *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* Historisch-litterarische Abteilung, 44 (1899), pp. 33-47.
Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke (Leipzig, 1900); Johnson Reprint (New York, 1972).
«Corrigenda et addenda», *Bibliotheca mathematica*, 3e série, 4 (1903), pp. 295-296.
«Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloides von el-Ḥasan b. el Ḥasan b. el Haiṯam», *Bibliotheca Mathematica*, 3e série, 12 (1911-1912), pp. 289-332.
تاشكوبري زادة، ***مفتاح السعادة***. نشره كميل بكري وعبد الوهاب أبو النور (القاهرة ١٩٦٨)
Thābit ibn Qurra, *Œuvres d'astronomie*, éd., trad. et com. Par Régis Morelon, Les Belles Lettres (Paris, 1987).
Türker Küyel, Mubahat
«Les Critiques d'Ibn al-Ṣalāḥ ṣur le *De Caelo* d'Aristote et sur ses commentaires», *Araştirma*, II (1964), pp. 19-30 et 52-79.

«Ibn uṣ-Salâḥ comme exemple à la rencontre des cultures», *Araştirma*, VIII, 1972 (paru en 1973); ainsi que son édition et sa traduction en turc: «Aristoteles' in Burhān Kitabi'nin ikinci makalesi'nin sonundaki kismin şerhi ve oradaki yanlişin düzeltilmesi hakkinda», *Araştirma*, VIII, 1972 (paru en 1973).
Al-Ṭūsī, Sharaf al-Dīn, *Œuvres Mathématiques. Algèbre et géométrie au XII^e^ siècle,* Texte établi et traduit par R. Rashed, 2 vol. (Paris, 1986).
E. Weidemann, «Ibn al-Haiṯam, ein arabischer Gelehrter», in *Festschrift für J. Rosenthal zur vollendung seines siebzigsten Lebensjahres Gewidmet* (Leipzig, 1906), pp. 149-178.
M.A. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes* (Paris, 1976).

حواشي النُصوص المَخْطوطِيّة

ص ١٥٢، سطر ١: المقصود قُسِيٌّ مُتَشابِهَةٌ ثُناءً.

ص ١٦٠، سطر ١٧: إقليدس، المقالة الثانية ، القضّية ١٤.

ص١٦١، سطر ٢: تكون نسبة أ؟ج إلى هـ؟ح مساويةً لِ:

$$\frac{2R}{R(\sqrt{2}-1)} = 2(\sqrt{2}+1)$$

(حيث نشير بِ $2R$ إلى القُطر)

ص ١٧٠، سطر ١٥: يدرس الكاتبُ هنا الشَرْطَ الكافي الذي يُحَقِّقُ هذه النتيجةَ.

ص ١٧١، سطر ٤: و هذا يُحَدِّدُ، إذاً، النقطةَ ا على القوس ب؟د.

ص ١٧٥:

- سطر ٦: المقصود القوس.
- سطر ٩: انظر الملاحظةَ السابقة.

ص ١٨٢، سطر ٤: انظر القَضِيَّةَ ٤.

ص ١٨٦، سطر ٥: لقد أُثبِتت هذه النتيجة في ١١–أ. وهنا نبيّن أنّه في الحالة التي تكون فيها القوس أ؟ب مساويةً لسُدسِ دائرةٍ، تكون "الدائرةُ المعلومة" مُساويةً لثُمن الدائرة (أ؟ب؟ج).

ص ١٩٤:

- سطر ٣: هذه هي النتيجة نفسها المُثبتة في ١٤.
- سطر ١٤: مثلّث قائم الزاوية مُتساوي الساقين معادل للمثلّث د؟ل؟م.
- سطر ١٧: إقليدس، القَضِيَّة ٢٩ من "قسمة الأشكال".

ص ١٩٧، سطر ٣: المستقيم ا؟د هو الموجود في الشكل على الصفحة السابقة.

ص ١٩٩، سطر ٩: مثلّث متساوي الأضلاع محاط بدائرة.

ص ٢٤٣:

- سطر ٢: راجع المجلّدَ الأوّل من هذا الكتاب.
- سطر ٨: راجع المجلّدَ الأوّل من هذا الكتاب.

ص ٢٤٧، سطر ٧: راجع صيغة المقدِّمة السابقة.

ص٢٥٠:

- سطر ١٤: ثُلث مجموع مكعّباتها.
- سطر ١٩: راجع القَضِيَّة ٢.

ص ٢٥١، سطر ٨: راجع القَضِيَّة ١.

ص ٢٥٢:

- سطر ١٦: لأن ١٢ ك؟ل يساوي واحداً.
- سطر ٢١: راجع القَضِيَّة ٣.

ص٢٥٣:

- سطر ٧: راجع القَضِيَّة ٣
- سطر ١٥: راجع القَضِيَّة ٢

ص ٢٥٥

- سطر ٥: القَضِيَّة ٢.
- سطر ١٢: القَضِيَّة ٤.

ص ٢٥٧:

- سطر ١: أي أنّ النتيجة تكون كما يلي:

(ع؟ط)^{٢} + (ف؟ز)^{٢} + (ن؟د)^{٢} + (م؟ب)^{٢} – [(س؟ح . ح؟ط)+ (س؟ه . ه؟ز) +
(س؟جـ . جـ؟د) + (س؟ا. ا؟ب)] =(م؟ا)^{٢} + (ن؟جـ)^{٢} + (ف؟ه)^{٢} + (ع؟ح)^{٢}.

- سطر ١٠: نختار النقطةَ **غ** التي تُحقِّق تساوي النسبتين.
- سطر١٦: الحرف **ذ** يدلّ هنا على نقطةٍ مختلفةٍ عن تلك المُشار إليها بالحرف **ذ** سابقاً.
- سطر١٧: نختار النقطةَ **ض** التي تحقّق هذه النسبة.
- سطر٢١: و نختار النقطة **ظ** بحيث يكون **ت؟ظ** مساوياً لستّةِ أسباع **ت؟ض**.

ص ٢٧٥، سطر ٢٠: راجع المقدّمة ٥.

ص٢٧٩، سطر ٦: راجع المقدّمة ٥.

ص ٢٨٦، سطر ٨: المقصود حجم الكرة.

ص ٢٩٧، سطر ٨: المقصود مجموع الدوائر.

ص٣٠٢:

- سطر١٢: المقصود مقادير يكون مجموعُها أضْعافَ **ك؟ن**.
- سطر ١٥: راجع الملاحظة السابقة.
- سطر ١٦: راجع الملاحظة السابقة.

ص ٣٩٥ سطر ١٩: **ن؟ف** عموديٌّ على **د؟ه؟** وَ **و؟ص** عموديٌّ على **ل؟م**.

ص ٣٩٧ سطر ١٠: هذا يُثْبَتُ، راجع الشرح الرياضيّ.

ص ٣٩٨ سطر ٥: المقصود ضمنيّاً مضلّعات مُنتظمة (انظر الشرح).

ص ٣٩٩ سطر ١٠: هذا ليس ببديهيٍّ، راجع الشرح الرياضيّ.

ص ٤٠٠:

- سطر ٩: المقصود، قوسان مجموعهما أقلّ.
- سطر ١٢: وذلك وفق المقدّمة.
- سطر ١٢ (آخر السطر): ضمّنياً، بدون الرجوع إلى المجسطي.

ص ٤٠٢ سطر ١١: المقصود مجموع الزوايا المجسّمة التي رأسها في مركز المجسّم.

ص ٤٠٣ سطر ٩: المقصود في كلّ هذا المقطع الدائرة المحاطة.

ص ٤٠٤

- سطر ٧: أي رُباعيّ الأسطح المنتظم وثُمانِيّ الأسطح المنتظم وعشرونيّ الأسطح المنتظم.
- سطر ١٨: زاوية مجسّمة.
- سطر ١٨: زاوية مجسّمة.

ص ٤٠٨:

- سطر ٥: تتعلّق مساحة الشكل المضلّع المحدّد بهذه الصورة باختيار النقطة **ز** على القوس **ل؟ح**.
- سطر ١٢: المقصود الهرم الدائري **ب؟ا؟ح؟ز؟ل**
- سطر ١٢: لنُذكّرْ بأنّ المستقيم **ب؟أ** هوضلعٌ مشترك لكلا المُجسّمين **ب؟ا؟ل؟س؟ق؟ح** وَ **ب؟ا؟ح؟ز؟ل.**
- سطر (١٢ – ١٣): أضلاع القاعدة.
- سطر ١٣: أضلاع القاعدة.

ص ٤١٠:

- سطر ١١: مثلّث **؟أ؟ش؟ع** أكبر من مثلّث **؟أ؟خ؟ي**، لأنّ النقطة **ي** بين **م** و **ع** والنقطة **خ** بين **ر** وَ **ش**.
- سطر ١٣: النقطة **ظ** نفسها بين **ج** وَ **ح**.

ص ٤١١، سطر ٩: راجع الشرح الرياضيّ.

ص ٤١٤، سطر ٦: راجع الشرح الرياضيّ.

ص ٤١٦، سطر ٦: الهرم الذي له القاعدة الأكبر.

ص ٤١٨:

- سطر ٨: المقصود الكرة الممركزة بالنقطة **ع** والتي نصف قطرها **ع؟ز** .
- سطر ١٤: المقصود "المخروط الدائري".
- سطر ١٩: النقطة **و** موجودة على ضلع المثلّث ا؟**ك**؟ل، وهنا ا؟**ك**؟ل؟**و** تدلّ على مستوي هذا المثلّث.
- سطر ٢٠: النقطة **ط** لم تُحَدّد، ولكنّها تُفْتَرَضُ على ا؟**ك**. النقطة **ص** من الكرة (ا، **ع**؟ز) لا تكون على القوس ل؟ن؟**ط** وهي قوس دائرة عظمى على الكرة (ا، ا؟**ج**)؛ انظر الشرح الرياضيّ.

ص ٤٢١، سطر ١٠: الدائرة التي تُحيط بقاعدة الهرم الثاني أصغر من تلك المُحيطة بقاعدة الهرم الأوّل.

ص ٤٢٣، سطر ١: أي القَضِيَّتان **ﻫ**` و **ﻫ**``.

ص ٤٢٤، سطر ١٩: راجع المقدّمة الثانية للقَضِيَّة الرابعة.

ص ٤٢٦، سطر ١٦: وفقاً للمقدّمة ٦.

ص ٤٢٧، سطر ١٢: هذا المقطع ليس ضرورياً. يستخدم الكاتب هنا القَضِيَّة العكسيّة للقَضِيَّة المستخدمة في برهان **ﻫ**``. راجع الشرح الرياضيّ.

فهرس الأسماء والمصطلحات

١- الأسماء

– ب –

– ت –

– ط –

– ع –

– ف –

– ق –

– ك –

– ل –

٢- المُصطلحات

Black plate (1,1)

هذا الكتاب

لقد صدر للأستاذ رشدي راشد، باللغة الفرنسية، خمسة مجلدات، غاية في الضخامة، وتحت عنوان واحد: **الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة** (بين القرنين التاسع والحادي عشر الميلادي).

وتجدر الإشارة، إلى أن هذا **المجلد** رغم كونه **الثاني** من حيث الترتيب في المجلدات، إلّا أنه هو الأول من حيث الشروع بالتناول الفعلي لأعمال الحسن بن الهيثم الرياضي. سيجد القارئ نفسه مندهشاً أمام عمق المسائل والوسائل المبتكرة والنتائج التي تطالعه في مساحة الأشكال الهلالية ومساحة الدائرة وتربيعها ومساحة المجسّمات المنحنية ـ المُجَسَّم المكافئ والكرة ـ وكذلك منهج التقريب الذي تقوم عليه، إضافة إلى استخراج الجذور.

وسيرى القارئ أن الحسن بن الهيثم وصل بدراسة الأَهِلَّة على مقربة من الرياضي السويسري أُيلر (Euler)، ودفع بحساب التكامل خطوات، ظنّ البعض أنها لم تكن قبل كبلر وكافليري في القرن السابع عشر، وسيرى كذلك أنه أول من بحث في الزاوية المجسّمة حقّ البحث أثناء دراسته للسطوح والأجسام القصوى، وأنه أول من سلك في هذا البحث طريقاً جمع فيه بين الإسقاطات الهندسية والمناهج التحليلية.

وتبقى **الترجمة العربية** لهذه المجلدات الخمسة، محافظة، حتى درجة عالية من المسؤولية والحِرَفية، على ما جاء في النص الأصلي (باللغة الفرنسية). وهو جهد جليل للمؤلّف والمترجمين وفريق العمل العلمي والتقني.

وهو انجاز تراثي كبير يقدمه **مركز دراسات الوحدة العربية**، بالتعاون مع **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية**، إلى القارئ العربي.

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ ـ ١١٣
الحمراء ـ بيروت ٢٠٣٤ ٢٤٠٧ ـ لبنان

تلفون: ٧٥٠٠٨٤ ـ ٧٥٠٠٨٥ ـ ٧٥٠٠٨٦ ـ ٧٥٠٠٨٧ (٩٦١١+)

برقياً: «مرعربي» ـ بيروت

فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (٩٦١١+)

e-mail: info@caus.org.lb

Web site: http://www.caus.org.lb

الثمن للمجموعة الكاملة
للأفراد: ١٠٠ دولار أو ما يعادلها
للمؤسسات: ١٥٠ دولاراً أو ما يعادلها

ISBN 978-9953-82-374-4