الدكتور آسعد الجنابي

المنطق الرمزي المعاصر

نظري وتمارين محلولة

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2007/2/486)

160
الجنابي، أسعد نادر
منطق الرمزي المعاصر: نظري وتمارين محلولة / أسعد
نادر الجنابي.- عمان: دار الشروق، 2007.
(352) ص
ر. إ. : 2007/2/486
الواصفات: المنطق//علم الفلسفة/

• تم إعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

ISBN 978 - 9957 - 00 - 306-7 (ردمك)

2006/12/4141 (رقم الإجازة المتسلسل)

- المنطق الرمزي المعاصر : نظري وتمارين محلولة .
- تأليف : الدكتور أسعد نادر الجنابي .
- الطبعة العربية الأولى : الإصدار الأول 2007 .

دار الشروق للنشر والتوزيع
هاتف : 4618190 / 4618191 / 4624321 فاكس : 4610065
ص.ب : 926463 الرمز البريدي : 11118 عمان - الاردن

دار الشروق للنشر والتوزيع
رام الله: شارع المستشفى رام الله - مقابل دائرة الطابو

هاتف 2975632 - 2991614 - 2975633 فاكس 02/2965319

■ الاخراج الداخلي وفرز الألوان و الأفلام :
دائرة الإنتاج / دار الشروق للنشر والتوزيع
هاتف : 4618190/1 فاكس 4610065 / ص.ب. 926463 عمان (11110) الأردن

Email: shorokjo@nol.com.jo

الفهرس

الفصل الثاني: الاستنتاج الطبيعي لحساب القضايا

الفصل الثالث: الأنساق الصورية لحساب القضايا

الفصل الرابع: لغة ودلالة حساب المحمولات

المقدمة

هذا الكتاب هو تطوير لمحاضراتنا التي ألقيناها على طلبة الكليات العلمية والأدبية في عدة جامعات عربية لأكثر من عقدين. وهكذا فهو موجه، بشكل أساسي، للطلبة الجامعيين الدارسين للمنطق ولا يتطلب منهم أية معلومات مسبقة في المنطق أو في الرياضيات وإن كنا قد استخدمنا فيه مفاهيم وعمليات وعلاقات أولية من نظرية المجموعات نفترض أن يكون القارئ مطلعا عليها سواء كان تخصصه أدبيا أم علميا.

لقد كان هدفنا من إصدار هذا الكتاب هو تقديم مادة نريدها أن تكون، أولا قابلة للاستيعاب بشكل كامل من قبل طلبة الجامعات، خصوصا ونحن نرى أن معظم الكتب العربية والأجنبية ينقصها الوضوح الذي يجعل محتواها في متناول هؤلاء الطلبة. كما أن تجربتنا في تدريس هذا العلم قد أوصلتنا إلى استنتاج يفيد بان غياب مصادر قادرة على تبسيطه قد أعاق حتى انتشاره والتخصص فيه.

أردنا بهذا الكتاب ثانيا، أن نقدم مادة باللغة العربية تنسجم مع ما وصل إليه هذا العلم من أساليب ومعالجات عصرية وتكون استمرار لكتب الرواد الذين كتبوا فيه ولم تعد معالجاتهم تساير التقدم الهائل في هذا العلم. إن تقديم مادة يستطيع طلبة الجامعات استيعابها بسبب من وضوح المعالجة الناتج من دقتها وكذا مسايرتها للتطور تمثل أهدافنا الرئيسية.

إن ما أردنا الوصول إليه من محتوى الكتاب هو تمكين الطلبة من اكتشاف وكتابة البراهين الصورية للحجج فقدمنا له بالتفصيل عرضا دقيقا لعملية الاشتقاق التي تمثل إحدى الأركان الرئيسية لمحتوى الكتاب. ذلك أننا نعتقد بان إحدى الأهداف المركزية للمنطق هو التمييز بين الحجج الصحيحة

والخاطئة. وبعد أن مكنا القارئ من عملية الاشتقاق قمنا ببناء المنطق الرمزي نفسه على شكل نسق والذي يمثل الهدف المركزي الآخر.

نُدخل في الفصل الأول لغة رمزية بسيطة هي لغة حساب القضايا حيث ندرس الجانب النحوي (التركيبي) وجانب الدلالة من هذه اللغة. استخدمنا العديد من الأمثلة لغرض ترجمتها من اللغة العربية إلى اللغة الرمزية لحساب القضايا.

الفصل الثاني مخصص بشكل رئيسي لمفهوم البرهان الصوري في حساب القضايا. باستخدام تعريف العلاقتين (ينتج) و(يكافئ) تدخل العديد من قواعد الاشتقاق المستخدمة في البراهين الصورية الثلاثة: المباشر، الشرطي، غير المباشر. تدخل الحجج الصحيحة والحجج الخاطئة، حيث يستخدم المثال المضاد لبرهان خطأ الحجج. ندخل كذلك مفهومي اتساق الصيغ وعدم اتساقها، حيث نقوم بتعريفهما وبرهان الشرط اللازم والكافي لهما.

الفصل الثالث يغطي بناء نسق صوري لحساب القضايا. بعد تحديد مكونات النسق الصوري المتمثلة في أبجدية النسق، قواعد بناء الصيغ، قواعد الاشتقاق ومجموعات بديهيات النسق، نقوم ببناء النسق الصوري وذلك بإعطاء بعض من مبرهنات النسق. نبرهن أيضا خواص النسق : التمامية، الاتساق، الاستقلال.

يخصص الفصل الرابع لدلالة حساب المحمولات. إن تفسير صيغة في حساب المحمولات يماثل تعيين قيم صدق للمتغيرات القضائية لصيغة في حساب القضايا. نناقش مفهومي الكذب والصدق في التفسيرات. إن استيعاب هذين المفهومين من قبل الطلبة يساعدهم على فهم لماذا تحافظ على الصدق قواعد الاشتقاق المدخلة في الفصل التالي.

في الفصل الخامس تضاف أربعة قواعد اشتقاق جديدة هي: التخصيص الكلي، التكميم الكلي، التمثيل الوجودي والتكميم الوجودي. وهكذا يصبح بالإمكان إعطاء براهين صورية للحجج في حساب المحمولات. نقوم بإدخال العلاقات على أنواعها وننشأ براهين صورية للحجج التي تحوي المكممين، الكلي والوجودي. يختتم هذا الفصل بعلاقة الهوية حيث تعطى قواعد اشتقاقها وتنشأ براهين صورية لها.

يعالج الفصل السادس الأنساق الصورية لحساب المحمولات، حيث يتم بناء نسق صوري لحساب المحمولات.

يخصص الفصل السابع لاستخدام أشجار الصدق كطريقة فعالة من أجل : تحديد نوع الصيغ، صحة الحجج، تكافؤ الصيغ واتساقها. يتم هذا الاستخدام في حساب القضايا ثم يتم إدخال أشجار الصدق في حساب المحمولات لتحديد صحة الحجج.

قمنا بحل التمارين التي تغطي كل فصول الكتاب بالتفصيل، حيث شغلت الحلول ثمانين صفحة. وهذا هو أول كتاب باللغة العربية في المنطق يتضمن حلولا للتمارين بهذا العدد الكبير. إن هدفنا من هذا هو تشجيع الطلبة والأساتذة في الجامعات على تبني الكتاب ككتاب تدريسي.

أخيرا نود أن نشكر الدكتور بوعرفة عبد القادر على اهتمامه بإنجاز هذا الكتاب وكذا الآنسة عزاش أمينة التي بذلت جهدا كبيرا من أجل الإخراج التقني الأفضل له.

د/أسعد الجنابي

2006

الفصل الأول

لغة حساب القضايا Language of Propositional Calculus

1 .1 موضوع المنطق واللغة الرمزية

تحدث المحاجحة كلما قدمت أسباب لدعم قضية ما. فعندما أكد غاليلو قضية أن الأرض تتحرك وقدم أسبابا أو دلائل داعما هذه القضية فإنه بذلك استخدم المحاججة. بشكل مشابه، فعندما يؤكد المحامي قضية أن موكله بريء ويقدم أسبابه ودلائله داعما هذه القضية فإنه بذلك يستخدم المحاججة. عندما يستخدم العالم والمحامي المحاججة فإنهما يفعلان ذلك بواسطة تقديم قضية أو مجموعة قضايا يعتقدان بها من أجل دعم أو إسناد القضية التي يريدان إثباتها. لنسمي القضية المدعومة بواسطة المحاججة بالنتيجة. ولنسمي القضية أو القضايا المستخدمة في المحاججة لدعم النتيجة بالمقدمات. المجموعة التي تضم المقدمات والنتيجة تسمى الحجة. إن معنى كلمة (الحجة) هنا يختلف عن معناه في اللغة العادية، فليس له أي جامع مع الجدالات أو المناظرات. فمثلا، المقدمات والنتيجة التي نجدها في كتاب الهندسة ليس لها ما تفعله مع النزاع أو الاختلاف. وهكذا فإن الحجة هي مجموعة من القضايا، إحداها تسمى نتيجة أما الأخريات فتسمى مقدمات.

من الواضح أنه توجد حجج صحيحة وأخرى خاطئة. تسمى الحجة صحيحة إذا كانت المقدمات فعلا تدعم النتيجة. أو بعبارة أخرى، إذا كانت

النتيجة تنتج من المقدمات. وتسمى الحجة خاطئة إذا كانت المقدمات لا تدعم النتيجة. أو بعبارة أخرى، إذا كانت النتيجة لا تنتج من المقدمات.

مجموعة القضايا في المثال التالي تكوّن حجة صحيحة.

(1) إذا كانت الأرض تدور حول الشمس فإن الأرض تتحرك.

(2) الأرض تدور حول الشمس.

(3) الأرض تتحرك.

القضيتان (1) و(2) في المثال أعلاه تمثلان المقدمات و(3) هي النتيجة.

مجموعة القضايا في المثال التالي تكوّن حجة خاطئة.

(1) إذا كانت الأرض تدور حول الشمس فإن الأرض تتحرك.

(2) الأرض تتحرك.

(3) الأرض تدور حول الشمس.

القضيتان (1) و(2) في المثال تمثلان المقدمات و(3) هي النتيجة.

المنطق هو العلم الذي يدرس الحجج. إن ما يهم المنطق هو الجواب على السؤال: هل أن النتيجة تنتج من المقدمات؟ أي هل أنه عندما تكون المقدمات جميعها صادقة، فالنتيجة تكون صادقة أيضا؟. إذا كان الجواب بنعم، فيقال أن الحجة صحيحة أو أن التفكير الاستدلالي صحيحا. وإذا كان الجواب بلا، أي أنه عندما تكون المقدمات صادقة والنتيجة كاذبة، فيقال أن الحجة خاطئة أو يقال أن التفكير الاستدلالي خاطئ. لهذا يقال أيضا أن

المنطق يبحث في التفكير الاستدلالي[1]. تؤكد س.هاك على أن (إحدى المهام المركزية للمنطق هي التمييز بين الحجج الصحيحة والحجج الخاطئة)[2].

إن التفكير يجد تعبيره في اللغة ولهذا فلا بد له أن يبحث في اللغة التي هي الوسيلة الوحيدة لصياغة وارتقاء الأفكار. وفي الحقيقة، فإن الفكر واللغة يشترطان أحدهما الآخر. وبالرغم من أن اللغة العادية تمثل إنجازا عظيما في تاريخ الفكر البشري ولكنه بسبب من غاياتها العملية، فلم تكن الدقة والوضوح صفة لها. ولهذا فلتجنب المصاعب التي ترتبط بهذه اللغة والتي سنتعرض لها ومنها الغموض وكذلك فإنه من أجل الاقتصاد في الفراغ والوقت فلقد قام المشتغلون في العلوم المختلفة باستخدام رموزا للتعبير عن نظرياتهم، الأمر الذي مكّن العلوم من التطور الهائل.

بشكل مشابه، تم تكوين رموزا للمنطق، وذلك لأن دقة اللغة الرمزية هو الأهم من أجل توضيح التركيب المنطقي لاستدلالاتنا، بينما اللغة العادية تكون عاجزة عن ذلك. وكمثال لنأخذ مجموعتي القضايا (الحجتين) التاليتين، وحيث وضعت (إذن) لفصل المقدمات عن النتيجة.

(أ) أنا صديق أحمد.

أحمد شاعر.

إذن، أنا صديق شاعر.

(ب) أنا صديق أحدهم.

---

[1] د. أسعد الجنابي–المنطق الرياضي: دوره ومكانه في الرياضيات الحديثة، مركز البحوث، عدن، 1976.

[2] Haack, S.- Philosophy of logics, Cambridge University Press, 1999, Ch. 1.

أحدهم نزل على سطح القمر.

إذن، أنا صديق النازل على سطح القمر.

هاتان المجموعتان لهما نفس الشكل من وجهة نظر اللغة العادية، بالرغم من أن التفكير الاستدلالي كان صحيحا فقط في (أ). إن الشكل اللغوي لمجموعتي القضايا ليس متطابقا مع تركيبهما المنطقي. إن هذا يقود إلى ضرورة ابتكار لغة متكاملة للمنطق، بحيث يصبح من غير الممكن التعبير عن استدلالات مختلفة التركيب المنطقي لنفس الشكل اللغوي. بالإضافة إلى ذلك، ففي اللغة المتكاملة هذه توجد رموز ليست مبهمة، وصياغات دقيقة. وهكذا يكون من السهل جدا التحقق من صحة الاستدلالات التي نعملها، وهذه السهولة غير ممكنة في اللغة العادية. وكما يقول وايت هيد: "يمكننا بواسطة اللغة الرمزية الانتقال في الاستدلالات آليا تقريبا بواسطة العين"[1]. لقد أصبحت اللغة الرمزية ضرورة من أجل إنجاز المعالجة العلمية الدقيقة المطلوبة بالمنطق، كما أنها أصبحت أداة اكتشاف وليس مجرد رموز فقط[2]، لأنها تكتشف أفكارا جديدة.

المنطق الرمزي المعاصر يدرس صور الحجج. صور الحجج هي نماذج مجردة تشترك بها العديد من الحجج المختلفة المضمون[3]. وللتوضيح نأخذ الحجج الثلاثة التالية والتي تمتلك نفس الصورة :

---

[1] Copi, I. M.-Symbolic logyc,Macmillan publishing co.Inc.New York, 1979, P. 7

[2] Susane K. Langer- An Introduction tosymbolic logic, Dover pulication, 1976, P. 60.

[3] John, N. And Dennis, R. – Logic, McGraw-Hill co., New York, 1988, P.15.

1. إذ هطل المطر فإن أحمد يفتح المظلة.

هطل المطر.

إذن، أحمد يفتح المظلة.

2. إذا تطابق المثلثان ABC و $A_1B_1C_1$ فإن $AB = A_1B_1$.

تطابق المثلثان ABC و $A_1B_1C_1$.

إذن، $AB = A_1B_1$.

3. إذا حل الصيف فإن درجة الحرارة ترتفع.

حل الصيف.

إذن: درجة الحرارة ترتفع.

إن ما تشترك به الحجج الثلاثة هو الصورة التالية والتي أصبح من الممكن إيجادها باستخدام الرموز:

إذا كان K فإن L

K

إذن، L

القضيتان K وL في هذه الصورة يمكن التعويض فيهما بأي زوج من القضايا للحصول على حجة ما. أي أن K وL متغيران. وبما أن عدد أزواج القضايا لا نهائي فإن صورة الحجج هذه تمثل عدد لانهائي أيضا من الحجج المختلفة والتي لها نفس التركيب، نقصد تركيب المقدمات والنتيجة. كذلك فإن الصورة المذكورة هي استدلال ذو خطوة واحدة بمقدمتين ونتيجة.

1. 2 القضايا والعمليات على القضايا Propositions and Operations on Propositions

مفهوم القضية في المنطق يشبه مفاهيم الهندسة المستوية: النقطة، المستقيم، المستوي إذ سنتقبله بدون تعريف. توصف القضية بأنها الجملة الخبرية التي يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة. سنقوم الآن بتوضيحها بواسطة الأمثلة:

العدد 6 لا يقبل القسمة على 3.

الكندي فيلسوف عربي.

صنعاء عاصمة الجمهورية اليمنة.

نلاحظ في هذه الأمثلة أن القضيتين الثانية والثالثة صادقتان، أو أن قيمة صدق كل منهما T. القضية الأولى كاذبة، أو أن قيمة صدقها F. سندرس العمليات على القضايا وذلك باستخدام روابط لنصل إلى تكوين لغة رمزية لحساب القضايا. سنهتم بجانب النحو أو التركيب[1] لهذه اللغة، أي دراسة اللغة الرمزية دون الالتفات إلى تفسيرها أو دراسة ما نسميه بناء الصيغ وكذا سنهتم بجانب الدلالة[2] لها، أي دراسة كيفية تفسير هذه اللغة.

تقسم القضايا إلى قضايا ذرية (بسيطة) وقضايا مركبة. القضية الذرية هي القضية التي لا يمثل أي جزء منها قضية. أما القضية المركبة فيمكن تجزئتها إلى قضايا أخرى تسمى مركباتها.

---

[1] - Syntax

[2] - Semantics

كبداية لتكوين لغة رمزية لحساب القضايا سنرمز بواسطة الحروف الكبيرة ...,A, B, C (ما عدا T وF) وهذه الحروف ودلائلها $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2\ldots$ للتعبير عن القضايا الذرية ونسميها المتغيرات القضائية.

2.1. 1 دالة النفي **Function of Negation**

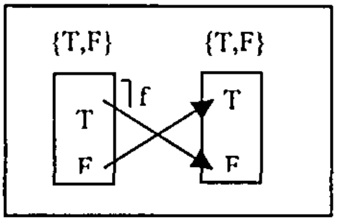
النفي هي العملية الأبسط على القضايا. يعّرف نفي قضية معطاة على أنه قضية تكون صادقة إذا كانت القضية المعطاة كاذبة، وتكون كاذبة إذا كانت القضية المعطاة صادقة. سنرمز لنفي القضية K بواسطة $\urcorner K$. يمكننا إعطاء التعريف التالي: إذا كانتK قضية فإن $\urcorner K$ تقرأ (نفي K)، تعتبر صادقة إذا كانت K كاذبة وتعتبر $\urcorner K$ كاذبة إذا كانت K صادقة. أدوات النفي بالإضافة إلى (ليس) في اللغة العربية هي أيضا: لم، لا، من الخطأ أن... . يعتبر الرمز $\urcorner$ رابطا بالرغم من أنه يؤثر على قضية واحدة ولهذا يسمى رابطا أحاديا. من المفيد كتابة قيم صدق القضايا في جداول الصدق. جدول الصدق $\urcorner K$ يكون على الشكل أدناه .

يتبين من الجدول انه إذا كانت K صادقة، فإن $\urcorner K$ تكون كاذبة وإذا كانت K كاذبة فإن $\urcorner K$ صادقة، وهكذا يعرف هذا الجدول دالة صدق[1].

K	$\urcorner K$
T	F
F	T

[1] – دالة الصدق هي الدالة التي تتكون مجموعة تعريفها من متتاليات قيم صدق ومستقرها المجموعة { T,F }

مجموعة تعريف دالة الصدق هذه هي $\{T,F\}$، أما مستقرها فهو المجموعة نفسها $\{T,F\}$. يمكن التعبير عن دالة الصدق هذه كما هو موضح في المخطط، حيث $\neg f$ يرمز لدالة النفي.



إذا رمزنا لدالة النفي بواسطة $\neg f$ فيكون $\neg f(T) = F$، $\neg f(F) = T$.

إن اعتبار النفي كدالة صدق يملك أهمية خاصة لأنه يعني أننا نستطيع تحديد قيمة صدق $\neg K$ وذلك بمعرفة قيمة صدق القضية المركبة لها K.

2.1.2 دالة الوصل **Conjunctive Function**

إذا ربطت قضيتان بواسطة الرابط (و)، فالقضية الناتجة تسمى قضية وصل هاتين القضيتين. إذا رمزنا بواسطة K للقضية (أحمد داخل الدار) وL للقضية (علي يذاكر دروسه) ورمزنا للرابط (و) بواسطة $\wedge$، فإننا نستطيع كتابة (أحمد داخل الدار وعلي يذاكر دروسه) هكذا $K \wedge L$ والذي يقرأ (K وصل L). تسمى كل من K و L (القضيتين المركبتين للقضية $K \wedge L$) بالمعطوفة.

سنبين الآن كيف تعتمد قيمة صدق $K \wedge L$ على قيم صدق K وL.

فمثلا القضية التالية: (العدد 2 هو عدد أولي وعدد زوجي) هي قضية صادقة لأن كلا من القضيتين المركبتين لها (المعطوفتين) صادقتين. أما القضية: (تونس دولة عربية ودولة آسيوية) فهي كاذبة وذلك لأن المعطوفة الثانية وهي (تونس دولة آسيوية) كاذبة. يمكننا إعطاء التعريف التالي:

إذا كانت K و L قضيتين فإن $K \wedge L$ تسمى (وصل) K و L. تعتبر $K \wedge L$ صادقة فقط إذا كانت القضيتان كلتاهما K و L صادقتين. أما في الحالات الأخرى فتعتبر $K \wedge L$ كاذبة. تسمى K المعطوفة الأولى و L المعطوفة الثانية. يعبر عن الوصل أيضا باللغة العربية بكلمات مثل: (لكن)، (بالرغم من)، (وأكثر من ذلك) ويمكن وضع تعريف الوصل في الجدول أدناه.

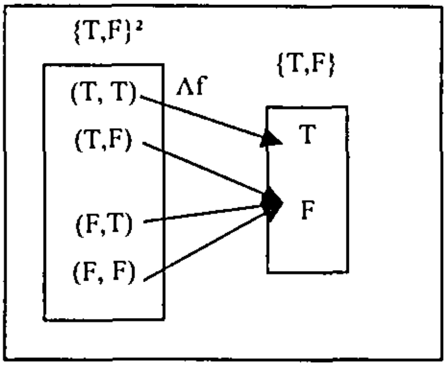
K	L	$K \wedge L$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

تعريف قضية الوصل يمكن تعميمه إلى أي عدد من القضايا. الوصل : $M_1 \wedge M_2 \wedge \ldots \wedge M_n$ والذي عادة يرمز له $\bigwedge_{i=1}^{n} M_i$ يكون صادقا إذا كانت كلا من المعطوفات : $M_1, M_2, \ldots, M_n$ صادقة، ويكون كاذبا إذا كانت معطوفة واحدة على الأقل من المعطوفات كاذبة.

يسمى الرمز $\wedge$ رابطا ثنائيا. جدول صدق قضية الوصل يعرّف دالة صدق. إن مجموعة تعريف هذه الدالة هي المجموعة :

$\{T,F\}^2 = \{T,F\} \times \{T,F\} = \{(T,T), (T,F), (F,T), (F,F)\}$ أو مجموعة متتاليات قيم الصدق TT, TF, FT, FF ، أما مستقرها فهو المجموعة $\{T,F\}$. ويمكن التعبير عن دالة الصدق هذه بواسطة المخطط أدناه. إذا رمزنا لدالة الوصل بواسطة $\wedge f$ فيكون:

$\wedge f(T,T) = T, \wedge f(T,F) = F, \wedge f(F,T) = F, \wedge f(F,F) = F$.



إن اعتبار الوصل كدالة صدق يملك أهمية خاصة لأنه يعني أننا نستطيع تحديد قيمة صدق K Λ L وذلك بمعرفة قيمة صدق مركباتيها K و L.

3 .2.1 دالة الفصل Disjunctive Function

الرابط (أو) يستخدم في الحياة اليومية بمعنيين مختلفين:

1) معنى (العناد غير التام[1]): تعتبر القضية المركبة صادقة إذا كانت على الأقل إحدى القضيتين المركبتين لها صادقة.

2) معنى (العناد التام[2]): تعتبر القضية المركبة صادقة إذا كانت إحدى القضيتين المركبتين لها صادقة ولكن ليس كلاهما. في هذه الحالة نقول أحيانا (إما...أو...). إذا استخدم الرابط (أو) في القضية (هذا التلميذ كفء أو جاد) في معنى العناد غير التام فإن قضية الفصل هذه تكون صادقة إذا كانت على الأقل إحدى القضيتين المركبتين لها صادقة، أي إذا كان هذا التلميذ كفء أو

---

[1] - Inclusive
[2] - Exclusive

جاد أو كلاهما: كفء وجاد. ويكون الفصل كاذبا فقط إذا كانت القضيتان المركبتان كلتاهما كاذبتين، أي إذا كان (التلميذ غير كفء ومهمل).

أما إذا فهم الرابط (أو) في القضية (سعد سيكون كيميائيا أو جغرافيا) بالمعنى الآخر (العناد التام) فإن هذه القضية تعتبر صادقة، إذا كانت إحدى المركبتين كاذبة وتعتبر كاذبة إذا كانت المركبتان كلتاهما صادقتين أو كاذبتين. الكلمة (ما لم) تعبر كذلك عن فصل العناد التام، مثلا يذهب أحمد هذا المساء إلى المسرح ما لم يذهب إلى البحر بعد الظهر. ويسمى فصل العناد التام أيضا: الفصل الصارم، يرمز لفصل العناد غير التام (V) أما العناد التام فيرمز له $\dot{V}$. وبما أننا سنتعامل مع فصل العناد غير التام فسنقول قضية فصل ونعني به الفصل غير التام. كما أن اختيارا واحدا سيؤدي إلى المحافظة على دقة لغتنا الرمزية. تسمى كل من المركبتين في قضية الفصل المفصولة. تعريف فصل العناد التام وغير التام يمكن وضعهما في الجدولين أدناه.

K	L	$L \dot{V} K$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

K	L	K V L
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

يمكن تعميم تعريف قضية الفصل إلى أي عدد من القضايا. الفصل $M_1 V M_2 V \ldots VM_n$ والذي عادة يرمز له $\overset{n}{\underset{i=1}{V}} M_i$ يكون صادقا، إذا كانت واحدة على الأقل من المفصولات $M_1, M_2, \ldots, M_n$ صادقة، ويكون كاذبا إذا كانت جميع المفصولات كاذبة.

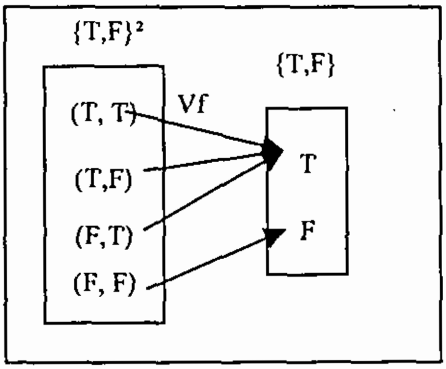
يسمى الرمز V رابطا ثنائيا. جدول صدق قضية الفصل يعرف دالة، مجموعة تعريف الدالة هي :

$\{T,F\}^2 = \{T,F\} x \{T,F\} = \{(T,T), (T,F), (F,T), (F,F)\}$ أما مستقرها فهو المجموعة $\{T,F\}$. يمكن التعبير عن دالة الصدق هذه بواسطة مخطط الصدق أدناه.

إذا رمزنا لدالة الفصل بواسطة Vf فيكون:

$Vf(T,T) = T, Vf(T,F) = T, Vf(F,T) = T, Vf(F,F) = F$.

إن اعتبار الفصل كدالة صدق يملك أهمية خاصة لأنه يعني أننا نستطيع تحديد قيمة صدق K V L وذلك بمعرفة قيمة صدق مركبتيها K و L.



4.2.1 دالة الاستلزام (الشرطية) Implicative (conditional) Function

غالبا ما نستخدم قضايا مركبة من قضيتين مرتبطتين بواسطة (إذا كان...فإن...)، فمثلا:

1) إذا كان الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن قطريه AC وBD يكونان متناصفين.

2) إذا كان الجو معتدلا فإن أحمد يذهب لزيارة أصدقائه.

كل من هاتين القضيتين قد تم الحصول عليها وذلك بوضع (إذا كان) قبل الأولى ووضع (فإن) بين القضيتين. وهكذا نسمي (إذا كان...فإن...) رابطا أيضا. إذا رمزنا بواسطة K إلى (الجو معتدل) وL إلى (أحمد يذهب لزيارة أصدقائه) فإن القضية الثانية أعلاه يمكن كتابتها على الشكل: (إذا كان K فإن L) وإذا رمزنا للرابط (إذا كان...فإن...) بواسطة $\rightarrow$ (يستخدم أيضا الرمز $\supset$)، فإن هذه القضية يمكن كتابتها على الشكل ($K\rightarrow L$). $K\rightarrow L$ تسمى استلزام (شرطية) إلى K و L وتقرأ: (إذا كان K فإن L) أو (K تستلزم L). يسمى K المقدم أما L فيسمى التالي. كذلك نقول : أن K شرط كافي إلى L (إلى صدق L)،وL شرط ضروري إلى K (إلى صدقK). يمكن وضع كل مبرهنة رياضية تقريبا على شكل قضية شرطية وذلك بوضع شرط (معطى) المبرهنة بعد (إذا كان) ووضع (فإن) بين شرط ومطلوب المبرهنة، أي يصبح شرط المبرهنة مقدما ومطلوب المبرهنة تاليا. إن هذا الشكل للتعبير عن المبرهنة يسمى الشكل الشرطي.

حتى ندرس متى تكون القضية الشرطية صادقة ومتى تكون كاذبة سنبدأ من نقطة استخدامها في الحياة اليومية. غالبا ما تستخدم $K \rightarrow L$ للتعبير عن حقيقة أن القضية L تنتج من القضية K. بعبارة أخرى، إننا متعودون في الممارسة اليومية على وجود علاقة سببية بين مقدم وتالي القضية الشرطية، ولهذا فإن القضايا الشرطية التالية، مثلا:

1) إذا كان $2 + 2 = 4$ فإن القاهرة هي عاصمة مصر.

2) إذا كان $2 + 2 = 4$ فإن دمشق هي عاصمة مصر.

3) إذا كان $2 + 2 \neq 4$ فإن القاهرة هي عاصمة مصر.

4) إذا كان $2 + 2 \neq 4$ فإن دمشق هي عاصمة مصر.

تبدو بدون معنى ومجرد عبث ولكن هذا ليس سببا كافيا لرفض دراستها من وجهة نظر دوال الصدق التي هي اكثر شمولا من المعنى الدارج للقضية الشرطية في الحياة اليومية. ولكن ماذا يعني أن قضية ما L تنتج من قضية أخرى K؟. إن هذا يعني عادة بأنه إذا كانت K صادقة فإن L تكون بالتأكيد صادقة أيضا. أما في الحالة المناقضة، أي إذا كانت K صادقة وL كاذبة فعندئذ يعتبر القول بأنه (من K تنتج L كاذبة) كاذبا. وهكذا فإن

$K\rightarrow L$ تعتبر كاذبة عندما تكون K صادقة وL كاذبة. ومن اجل معرفة قيم صدق $K \rightarrow L$ فمن الضروري أخذ $K \rightarrow L$ عندما تكون K كاذبة. ولتوضيح ذلك نستخدم القضية (إذا كان الرباعي ABCD معينا (K) فإن القطرين AC وBD متعامدان (L)). إذا كانت K كاذبة فلا يمكن التأكيد أن قطرا ABCD يكونان متعامدين. كما لا يمكن التأكيد بأنهما ليسا متعامدين. وفي الحقيقة،

وكما هو معروف، فإنه توجد رباعيات ليست معينات ولكن أقطارها متعامدة. أي أنه توجد حالة تكون فيها K كاذبة وL صادقة ويتوجب اعتبار $K \rightarrow L$ صادقة. كذلك توجد رباعيات ليست معينات وأقطارها ليست متعامدة. أي أنه توجد حالة تكون فيها K كاذبة وL كاذبة ويتوجب اعتبار $K \rightarrow L$ صادقة. وحتى نظهر تلك الخواص فإننا نقول، أن القضية الشرطية $K \rightarrow L$ تكون دائما صادقة عندما تكون K كاذبة.

سنعطي مثالا توضيحيا آخر من الحياة اليومية يناقش قيم صدق القضية الشرطية، بسبب أهميتها الكبيرة كما سنرى لاحقا وكذلك لأن اغلب مصاعب دارس المنطق تعود إلى الفهم غير الدقيق للقضية الشرطية ومع الأسف فإن أغلبهم يمتلك فهما خاطئا لها.

مثال

وعد والد ابنه بأنه (إذا نجح في الامتحان فإنه سيستلم هدية منه). يمكن أن نعبر عن هذا الوعد على شكل استلزام $K \rightarrow L$ وذلك بأخذ (نجح الابن في الامتحان (K)) هو المقدم و(الابن يستلم من الوالد هدية (L)) هو التالي. الآن لنفرض أنه:

1) الابن نجح في الامتحان، أي أن K صادقة والابن استلم الهدية من الوالد، L صادقة. في هذه الحالة يكون الوالد قد صدق (وفى) بوعده أو أن $K \rightarrow L$ صادقة.

2) الابن نجح في الامتحان، أن K صادقة والابن لم يستلم الهدية، L كاذبة. في هذه الحالة لم يف الوالد بوعده (كذب) أي أن $K \rightarrow L$ كاذبة.

3) الابن لم ينجح، أي أن K كاذبة والابن استلم الهدية، L صادقة. هنا الوالد قد وفى بوعده أيضا، أي أن $L \rightarrow K$ صادقة.

4) الابن لم ينجح في الامتحان، أي أن K كاذبة والابن لم يستلم الهدية، L كاذبة. هنا الوالد قد وفى بوعده، $L \rightarrow K$ صادقة.

آخذين بنظر الاعتبار ما أوردناه أعلاه فإن جدول الاستلزام يكون على الشكل أدناه. يتبين من الجدول أن الاستلزام $L \rightarrow K$ يكون كاذبا فقط عندما تكون K صادقة و L كاذبة، وفي الحالات الباقية فإن $L \rightarrow K$ تكون صادقة.

لقد جرت العادة على إعطاء هذا الاستلزام اسم (الاستلزام المادي).

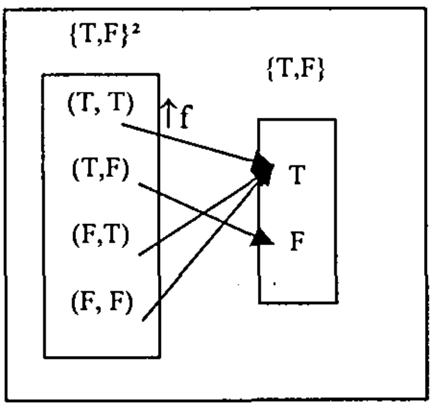
K	L	$K \rightarrow L$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

يسمى الرابط $\rightarrow$ رابطا ثنائيا. جدول صدق الاستلزام يعرف دالة، ومجموعة تعريف الدالة هي:

$$\{T,F\}^2 = \{T,F\} x \{T,F\}$$
$$= \{(T,T), (T,F), (F,T), (F,F)\}$$

أما مستقرها فهو المجموعة $\{T,F\}$.

يمكن التعبير عن دالة الصدق هذه كما هو موضح في المخطط، حيث $\uparrow f$ يرمز لدالة استلزام.



يمكننا التعبير عن دالة الاستلزام ↑f كما يلي :

.↑f (T,T) =T, ↑f (T,F)= F, ↑f (F,T) = T, ↑f (F, F) = T

إن اعتبار الاستلزام كدالة صدق يملك أهمية خاصة لأنه يعني أننا نستطيع تحديد قيمة صدق L → K وذلك بمعرفة قيمة صدق مركبتيها K و L.

وبعبارة أخرى، فإن قيم صدق L → K تعتمد فقط على قيم صدق K وقيم صدق L.

5.2.1 دالة الاستلزام الثنائي Biconditional Function

القضية المركبة: (الرباعي ABCD يكون متوازي أضلاع إذا فقط إذا كان CD = AB و BC = AD) تكون صادقة إذا كانت مركبتاها، أي القضية (الرباعي ABCD يكون متوازي أضلاع (K) والقضية (CD = AB و BC = AD (L)) كلتاهما صادقتان أو كلتاهما كاذبتان.

القضية المركبة المتكونة من قضيتين K و L وبينهما الرابط (إذا وفقط إذا كان) تسمى الاستلزام الثنائي ويرمز له بواسطة L ↔ K حيث يعبر الرابط ↔ عن (إذا وفقط إذا كان) وهذا جدول صدق الاستلزام الثنائي.

K	L	K ↔ L
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

يتم برهان القضية المركبة أعلاه وذلك ببرهان المبرهنتين المتعاكستين: (إذا كان الرباعي ABCD متوازي أضلاع فإن CD = AB وBC = AD) و(إذا كان CD = AB وBC = AD فـــإن الرباعي ABCD يكون متوازي أضلاع).

وهكذا فإن المبرهنتين المتعاكستين يمكن كتابتهما على الشكل: (إذا كانK فإن L) و(إذا كان L فإن K). باستخدام الروابط تكتب هكذا :

.$(K \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow K)$

نستطيع بواسطة الجدول تبيان أن قضية الوصل هذه والاستلزام الثنائي $L \leftrightarrow K$ لهما قيم الصدق نفسها، أي أن لهما المعنى نفسه والجدول يبين ذلك أدناه.

K	L	$K \rightarrow L$	$L \rightarrow K$	$(K \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow K)$	$K \leftrightarrow L$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

مثال

النقاط ,A, B, C تكون على استقامة واحدة إذا وفقط إذا كانت المسافة من A إلى C تساوي مجموع المسافتين من A إلى B ومن B إلى C.

يسمى الرابط $\leftrightarrow$ رابطا ثنائيا. جدول صدق الاستلزام الثنائي يعرف دالة ومجموعة تعريف الدالة هي:

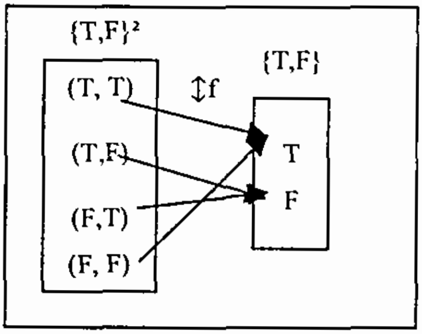
$$\{T,F\}^2 = \{T,F\} x \{T,F\} = \{(T,T), (T,F), (F,T), (F,F)\}$$

أما مستقرها فهو المجموعة $\{T,F\}$. يمكن التعبير عن دالة الصدق هذه بواسطة مخطط الصدق أدناه.

إذا رمزنا لدالة الاستلزام الثنائي بواسطة f ↕ فيكون:

$\updownarrow f(T,T)=T, \updownarrow f(T,F)=F, \updownarrow f(F,T)=F, \updownarrow f(F,F)=T$.

إن اعتبار الاستلزام الثنائي كدالة صدق يملك أهمية خاصة لأنه يعني أننا نستطيع تحديد قيمة صدق $K \leftrightarrow L$ وذلك بمعرفة قيمة صدق مركبتيها K و L. وبعبارة أخرى، فإن قيم صدق $K \leftrightarrow L$ تعتمد فقط على قيم صدق K وقيم صدق L.



2.1. 6 دالة الشطب (نفي الوصل) Stroke (Non-Conjunctive) Function

تتكون قضية مركبة من قضيتين وذلك باستخدام الرابط (إما لا...أو لا...) والذي يسمى (الشطب) أو (نفي الوصل) ويرمز له (|) ويعرف هذا الرابط بواسطة الجدول أدناه.

K	L	K | L
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

يتبين من الجدول أن K|L تكون كاذبة فقط إذا كانت K و L صادقتين معا. **مثال:** نأخذ القضيتين:

أحمد طالب مجد.

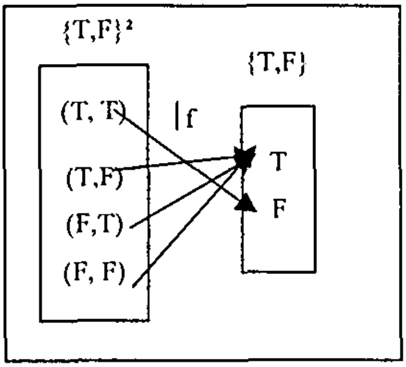
أحمد يبدد وقته هباءا.

لنكوّن قضية باستخدام رابط نفي الوصل: (إما أن أحمد طالب ليس مجد أو أن أحمد لا يبدد وقته هباء). هذه القضية تفيد بأنه: لا يمكن أن يكون أحمد طالبا مجدا ويبدد وقته هباء في نفس الوقت. إن قضية نفي الوصل تكون كاذبة في حالة صدق القضيتين المركبتين لها.

يسمى الرابط | رابطا ثنائيا. جدول صدق قضية نفي الوصل يعرف دالة مجموعة تعريف الدالة هي:

$$\{T,F\}^2=\{T,F\}\times\{T,F\}=\{(T,T),(T,F),(F,T),(F,F)\}$$

أما مستقرها فهو المجموعة $\{T,F\}$. يمكن التعبير عن دالة الصدق هذه بواسطة مخطط الصدق أدناه، حيث يرمز $|f$ لدالة نفي الوصل.



يمكننا التعبير عن لدالة نفي الوصل $|f$ كما يلي :

$|f(T,F)=T,\ |f(F,T)=T,\ |f(F,F)=T$, $|f(T,T)=F$

إن اعتبار نفي الوصل كدالة صدق يملك أهمية خاصة لأنه يعني أننا نستطيع تحديد قيمة صدق $K|L$ وذلك بمعرفة قيمة صدق مركبتيها K وL. وبعبارة أخرى، فإن قيم صدق $K|L$ تعتمد فقط على قيم صدق K وقيم صدق L.

2.1. 7 دالة النفي المشترك (نفي الفصل) Joint-Denial (Non-Disjunctive) Function

تتكون قضية مركبة من قضيتين وذلك باستخدام الرابط (لا...ولا) والذي يسمى (النفي المشترك) ويرمز له (↓) ويعرف هذا الرابط بواسطة الجدول أدناه.

K	L	K↓L
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

يتبين من الجدول أن K ↓ L تكون صادقة فقط إذا كانت K و L كاذبتين معا.

مثال: لنأخذ القضيتين السابقتين ونكون منهما القضية التالية:

أحمد ليس طالبا مجدا واحمد لا يبدد وقته هباء.

هذه القضية تكون صادقة فقط إذا كانت القضيتين اللتين تتكون منهما كاذبتين.

يسمى الرابط ↓ رابطا ثنائيا. جدول صدق قضية نفي الفصل يعرف دالة مجموعة تعريف الدالة هي:

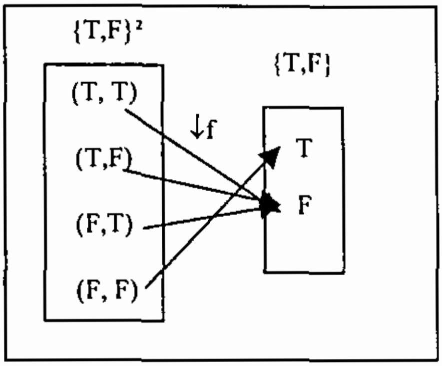
$$\{T,F\}^2=\{T,F\}x\{T,F\}=\{(T,T),(T,F),(F,T),(F,F)\}$$

أما مستقرها فهو المجموعة {T,F}. يمكن التعبير عن دالة الصدق هذه بواسطة مخطط الصدق أدناه.

إذا رمزنا لدالة نفي الفصل بواسطة ↓f فيكون:

$\downarrow f\,(T,T)=F,\ \downarrow f\,(T,F)=F,\ \downarrow f\,(F,T)=F,\ \downarrow f\,(F,F)=T$. إن اعتبار نفي الفصل كدالة صدق يملـــك أهمية خاصة لأنه يعني أننا نستطيع تحديد قيمة صدق K↓ L وذلك بمعرفة قيمة صدق مركبتيها K و L. وبعبارة أخرى،

فإن قيم صدق $K\downarrow L$ تعتمد فقط علي قيم صدق K وقيم صدق L.



إن عدم انتشار استخدام كل من الرابطين | و ↓ يعود إلى تعقيد وطول استخدامها، فمثلا إذا أردنا كتابة $K\rightarrow L$ بواسطة ↓ فقط، فإننا نحصل على :

$$((K\downarrow K)\downarrow((L\downarrow L)\downarrow(L\downarrow L)))\downarrow\ ((K\downarrow K)\downarrow((L\downarrow L)\downarrow(L\downarrow L)))$$

1. 3 اللغة الرمزية لحساب القضايا

تستخدم الحروف x, y, z في رموز اللغة الرياضية للتعبير عن المتغيرات العددية. كذلك تستخدم الرموز $+, -, x, \div$ للتعبير عن العمليات على الأعداد. فمثلا الرمز + يعني إضافة ما يسبقه إلى ما هو بعده. وبالمثل يحدث بالنسبة لبقية هذه الرموز وإذن فهي ثوابت. تستخدم كذلك الحروف $A, B, C, \ldots$ في نظرية المجموعات للتعبير عن المجموعات كمتغيرات. وتستخدم الرموز $\cap, \cup, \ldots$ للتعبير عن العمليات على المجموعات. فمثلا الرمز $\cap$ يعني تقاطع المجموعة التي تسبقه مع المجموعة التي بعده. وبالمثل يحدث بالنسبة إلى بقية الرموز. هذه الرموز إذن ثوابت.

بشكل مشابه نرى متغيرات وثوابت في لغة حساب القضايا. الحروف $A, B, C,...$ وهذه الحروف ودلائلها $A_1, A_2,...$ والتي تختلف عنها وذلك لتشكيل حروف إضافية للتعبير عن المتغيرات القضائية. تتكون ثوابت اللغة الرمزية هذه من رموز الروابط $\rceil, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$. وأخيرا تستخدم الأقواس)،(للتجميع. باختصار نستطيع أن نمثل لغة حساب القضايا بمجموعة الرموز التالية: $\{A, B, ..A_1, A_2,..., \rceil, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow,),(\}$

إذا رمزنا لمجموعة رموز المتغيرات القضائية بالرمز P فإن مجموعة رموز حساب القضايا تصبح[1]:

$$P \cup \{ \rceil, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{),(\}$$

لقد وضعنا القوسين (,(في مجموعة لوحدهما لاختلافهما عن المجموعتين الأخريتين.

1. 4 تركيب (نحو) لغة حساب القضايا (قواعد بناء الصيغ)

Syntax (Grammer) of languge for prepositional calculus

لقد حصلنا من المتغيرات القضائية على تعبيرات أكثر تعقيدا (مركبة) وذلك باستخدام الروابط وكانت على الشكل :

$\rceil K, K \wedge L, K \vee K, K \rightarrow L, K \leftrightarrow L$. ويمكننا أن نشكل من كل منها: نفي، وصل، فصل، استلزام، استلزام ثنائي مثلا :

[1] Cori, R. Mathematical Logic, Oxford University Press, 2000.

$\neg K \wedge L, (K \wedge L) \vee M, (K \rightarrow L) \wedge M, (K \leftrightarrow L) \rightarrow M$ وبنفس الطريقة يمكننا من هذه الأخيرة الحصول على تعبيرات أكثر تعقيدا عندما تحتوي على رموز أكثر وهكذا. مثل هذه التعبيرات سواء كانت بسيطة أم معقدة سنسميها صيغا. إن مفهوم الصيغة هذا يتعرف بواسطة قواعد بناء الصيغ التي تبين كيفية بناء الصيغ في حساب القضايا، ابتداء بالمتغيرات القضائية، وبربط هذه المتغيرات بالروابط والأقواس.

سوف نستخدم الحروف اليونانية $\alpha,\beta,\gamma,\delta,...$ وهذه الحروف ودلائلها $\alpha_1, \alpha_2...,\beta_1, \beta_2...$ للتعبير عن أية صيغة، فمثلا نستخدم الصيغة α لتعوض الصيغة K ، β_1 لتعوض $(K \leftrightarrow L) \rightarrow M$ و $\alpha \wedge \beta$ لتعوض : $\neg K \wedge ((K \leftrightarrow L) \rightarrow M)$. بهذه الطريقة نصل إلى تركيب (نحو) لغة حساب القضايا الذي به نعرف ما نسميه صيغ حساب القضايا وذلك بواسطة القواعد التالية لبناء الصيغ وهي:

(1) كل متغير قضائي يكون صيغة.

(2) إذا كانت α و β صيغتان فإن كلا مما يأتي يكون صيغة.

$$\neg\alpha, (\alpha \wedge \beta), (\alpha \vee \beta), (\alpha \rightarrow \beta), (\alpha \leftrightarrow \beta)$$

(3) أي تتابع آخر من الرموز لا يكون صيغة.

يتم تكوين الصيغ المركبة من الصيغ البسيطة بواسطة تكرار تطبيق القاعدة (2). وهكذا فمثلا بواسطة القاعدة (1) نرى أن K وL صيغتان. وينتج عن هذا وبواسطة القاعدة (2) أن $(K \wedge L)$ صيغة. وإذن بواسطة القاعدة (2) أيضا تكون $\neg(K\wedge L)$ صيغة. كمثال آخر، فإنه بواسطة القاعدة

(1) تكون K صيغة وبالتالي وبواسطة القاعدة (2) تكون $\neg K$ صيغة ومرة أخرى بواسطة (2) تكون $\neg\neg K$ صيغة (نستطيع الاستمرار بإضافة رمز النفي بالعدد الذي نرغبه) وفعلا فإن $\neg\neg\neg\neg\neg\neg K$ تكون صيغة.

نلاحظ أن القاعدة (2) تشترط في كل مرة ندخل فيها أحد الروابط الثنائية (أي أحد الروابط: $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$) ندخل أيضا بالمقابل زوج من الأقواس وهكذا تكون مثلا $(K \wedge \neg L)$ صيغة بينما $K \wedge \neg L$ ليست صيغة، لكن زوج من الأقواس يحصر كل شيء آخر في الصيغة لا يكون في الحقيقة ضروريا لجعل معنى الصيغة أكثر وضوحا. وهكذا فسنتبنى طريقة نحذف بواسطتها الأقواس الخارجية أحيانا في حالة عدم وقوع التباس. إن حذف الأقواس الخارجية هو الانحراف الوحيد عن قواعد بناء الصيغ الذي نسمح به. وهكذا فسنكتب $(K \leftrightarrow L) \rightarrow M$ عوضا عن $((K \leftrightarrow L) \rightarrow M)$.

نشير إلى أن الحروف اليونانية $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$ وهذه الحروف ودلائلها $\alpha_1, \alpha_2\ldots,\beta_1, \beta_2\ldots$ ليست من اللغة الشيئية (لغة حساب القضايا) وإنما من ما وراء لغة[1] حساب القضايا، وهي اللغة التي تشرح لغة حساب القضايا.

إن القواعد الثلاثة أعلاه تمكننا من التمييز بين تتابع الرموز الذي يكون صيغا والتتابع الذي لا يمثل صيغة.

مثال:

كل تتابع من الرموز مما يأتي لا يمثل صيغة $\neg K \rightarrow \wedge L$، $K \vee (L \leftrightarrow K$.

---

[1] - Metalanguage.

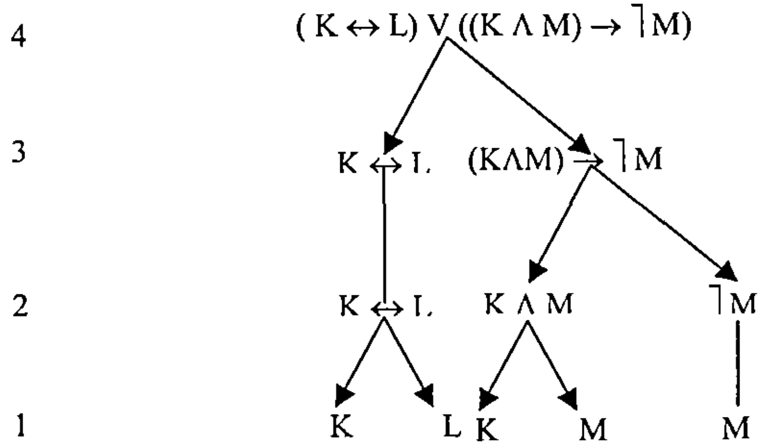
الكثير من المناطقة يستخدمون مصطلح (الصيغة الجيدة التكوين) مقابل (الصيغة) الذي استخدمناه نحن من اجل الاختصار.

إن الفرق بين تتابع الرموز الذي يمثل صيغة والذي لا يمثل صيغة يشابه الفرق بين الكلمات والجمل المقامة حسب قواعد النحو أو التركيب في لغتنا العربية وجمل تتابع الحروف التي ليس لها معنى مثل (الأرض من على أحمد يكون). ويحدث أحيانا أن نجد صعوبة في التفريق في الجمل ذات المعنى والجمل عديمة المعنى في اللغة العادية ولكننا نستطيع بدقة التفريق بين التتابع الذي يمثل صيغة والتتابع الذي لا يمثل صيغة في المنطق.

1. 5 شجرة الصيغة Tree of Formula

إن قواعد بناء الصيغ تحدد كيفية بناء الصيغ من المتغيرات القضائية ولهذا نستطيع بناء (شجرة) لكل صيغة انطلاقا من المتغيرات القضائية.

مثال: سنبني شجرة الصيغة $(K \leftrightarrow L) \vee ((K \wedge M) \rightarrow \urcorner M)$



المستوى (1) من الشجرة يؤلف المتغيرات القضائية وكل مستوى آخر قد تم الحصول عليه بواسطة تطبيق القاعدة (2) من قواعد بناء الصيغ على الصيغ التي تقع في المستوى السابق له أو إعادة كتابة نفس الصيغ التي تم تشكيلها سابقا، فمثلا الصيغة $L \leftrightarrow K$ على المستوى 2 قد تمت إعادة كتابها على المستوى (3).

1. 6 تمارين

(أ) حدد القضايا الذرية ثم ترجم إلى اللغة الرمزية لحساب القضايا مما يأتي:

1) ذهب أحمد وعلي إلى المكتبة.

2) المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين.

3) احمد يذهب إلى المدرسة لكن علي لا يذهب.

4) العدد a أكبر من b أو العدد b أكبر من a.

5) يسافر سالم إلى بيروت أو يبقى في داره للراحة.

6) إذا كان المستقيم a عموديا على c والمستقيم b عموديا على c فإن a يوازي b أو a لا يوازي b.

7) تتدمر الحضارة البشرية إذا اندلعت الحرب الذرية.

8) إذا كان $ab > 0$ فإن $a > 0$ و $b > 0$ أو $a < 0$ و $b < 0$.

9) إذا كان $ab < 0$ فإن $a > 0$ و $b < 0$ أو $a < 0$ و $b > 0$.

10) $b < c$ إذا وفقط إذا كان $-c < -b$.

11) إذا كان مقياس المنطق صعبا، فإن أحمد وفاطمة ينجحان فيه إذا وفقط إذا حضرا المحاضرات.

(ب) لتكن

K: أحمد يحضر الاجتماع.

L: علي يحضر الاجتماع.

M: خلود تحضر الاجتماع.

ترجم إلى اللغة العادية كل من الصيغ التالية:

1) $K \rightarrow L$ 2) $M \rightarrow \neg K$ 3) $K \leftrightarrow M$

4) $(K \vee L) \rightarrow M$ 5) $(K \rightarrow M) \vee (\neg M \rightarrow L)$

(ج) أنشئ جدول صدق كل من الصيغ التالية:

1) $\neg\neg K \rightarrow K$ 2) $(K \vee L) \rightarrow (L \vee K)$

3) $(K \vee L) \rightarrow (\neg K \wedge \neg L)$ 4) $(K \rightarrow L) \wedge \neg L$

5) $(K \rightarrow L) \leftrightarrow (\neg K \vee L)$ 6) $(K \rightarrow (L \rightarrow M)) \leftrightarrow ((K \wedge L) \rightarrow M)$

(د) بين أن كل زوج من الصيغ التالية لهما نفس قيم الصدق:

1) $\neg\neg K , K$ 2) $K \wedge L, L \wedge K$ 3) $\neg(K \wedge L), (\neg K \vee \neg L)$

4) $\neg(K \vee L), (\neg K \wedge \neg L)$ 5) $K \rightarrow L, \neg K \vee L$

6) $K \rightarrow (L \rightarrow M) ,(K \wedge L) \rightarrow M$

(ه) أنشئ شجرة كلا من الصيغتين التاليتين:

1) $(K \wedge L) \rightarrow \neg K$ 　 2) $\neg((K \wedge L) \vee (M \rightarrow L)) \wedge (K \leftrightarrow (L \vee \neg M))$

(و) لتكن K، L، M تعبر عن القضايا التالية:

K: $8 = 2^3$، L: $20 = 4 \times 6$، M: 9 عدد فردي

حدد فيما إذا كانت كل من الصيغ التالية صادقة أو كاذبة بعد ترجمتها إلى اللغة العادية.

أ) $\neg K \vee \neg L$ ، ب) $L \wedge M$ ، ج) $\neg L \rightarrow \neg K$ ، د) $(K \vee L) \wedge M$.

(ز) برهن باستخدام جداول الصدق أن كلا من أزواج الصيغ التالية لها نفس قيم الصدق :

أ) $\neg K ,\ (K \downarrow K)$

ب) $(K \wedge L) ,\ ((K \downarrow K) \downarrow (L \downarrow L)$

ج) $\neg K,\ (K | K)$

د) $(K \vee L),((K | K) | (L | L))$

(ح) لتكن K و L تعبران عن قضايا صادقة و M و N تعبران عن قضايا كاذبة.

حدد قيمة صدق كل من الصيغ التالية :

1) $\neg K$ ، 2) $L\ (K \vee M$ ، 3) $\neg(L \vee M)$ ، 4) $\neg K \wedge \neg(L \vee M)$

5) $\neg N \vee \neg(K \wedge \neg(L \vee M))$ ، 6) $\neg(L \vee M) \rightarrow N$

7) $(K \leftrightarrow L) \rightarrow (L \rightarrow K)$ ، 8) $\neg(K \wedge L) \leftrightarrow (\neg K \vee \neg L)$

(ط) باستخدام قواعد بناء الصيغ، حدد فيما إذا كان كل مما يأتي يمثل صيغة في حساب القضايا. وضح إجابتك.

1) $\neg\neg\neg K$ ، 2) $(\neg K)$ ، 3) $K\ L$ ، 4) $(K \vee L)$ ، 5) $\neg(K \vee L)$

6) $\neg((K \wedge \neg L)$ ، 7) $((K) \leftrightarrow L))$ ، 8) $K \rightarrow L \rightarrow M$

الفصل الثاني

الاستنتاج الطبيعي لحساب القضايا

Natural Deduction of propositional calcalus

لقد سمينا الاستنتاج هنا بالطبيعي بسبب قربه من طريقة إقامة الدليل التي يقوم بها الناس وعلى وجه الخصوص في المجالات القانونية، العلمية والفلسفية وتكون أقرب إلى طريقة الرياضيين في برهان المبرهنات.

طريقة الاستنتاج الطبيعي عبارة عن مجموعة من قواعد الاشتقاق، أما المفهوم المركزي فيها فهو مفهوم البرهان الصوري وهي طريقة تركيبية[1] بحتة. فمن الممكن التحقق من صحة البرهان الصوري بدون الرجوع إلى دلالة الرموز الداخلة في هذا البرهان. ولكن إثبات هذه القواعد يكون دلاليا وهذا ما سنبينه في الخمس الأولى منها. سندرس أيضا أنواع البراهين الصورية ولنبدأ ببعض التعاريف المرتبطة بهذا المفهوم.

2. 1 أنواع الصيغ

1. الصيغة التكرارية Tautology

تكون الصيغة تكرارية إذا كانت صادقة من أجل جميع قيم الصدق الممكنة لمتغيراتها القضائية.

مثال: كل من الصيغتين التاليتين تكون تكرارية: $\rceil(K \wedge \rceil K)$، $K \vee \rceil K$.

---

[1] - Syntactic

K	$\neg K$	$K \vee \neg K$	$\neg(K \wedge \neg K)$
T	F	T	T
F	T	T	T

يتبين من الجدولين أن كلا من $K \vee \neg K$، $\neg(K \wedge \neg K)$ تكون صادقة لجميع قيم الصدق الممكنة لمتغيرها القضائي K. وهكذا فهما صيغتان تكراريتان.

الصيغة $K \vee \neg K$ تسمى قانون الثالث المرفوع والذي ينص في المنطق التقليدي (ثنائي القيمة) كما يلي :

تكون القضية صادقة أو كاذبة وليس ثمة أمرا ثالثا. أما الصيغة الثانية $\neg(K \wedge \neg K)$ فتسمى عادة قانون عدم التناقض والذي ينص على أن القضية لا يمكن أن تكون صادقة وكاذبة في نفس الوقت.

2. الصيغة المتناقضة Contradiction

تسمى الصيغة متناقضة إذا كانت كاذبة من أجل جميع قيم الصدق الممكنة لمتغيراتها القضائية.

مثال: الصيغة التالية متناقضة: $\alpha \equiv \neg((K \vee L) \leftrightarrow (L \vee K))$

K	L	$K \vee L$	$(K \vee L) \leftrightarrow (L \vee K)$	α
T	T	T	T	F
T	F	T	T	F
F	T	T	T	F
F	F	F	T	F

يتبين من الجدول أن $\neg((K \vee L) \leftrightarrow (L \vee K))$ تكون كاذبة لجميع قيم الصدق الممكنة لمتغيراتها القضائية، أي أنها صيغ متناقضة.

3. الصيغة العارضة Contingency

بالإضافة إلى الصيغ التكرارية والصيغ المتناقضة فإنه يوجد نوع ثالث من الصيغ والتي هي ليست تكرارية ولا متناقضة وتسمى الصيغ العارضة.

تسمى الصيغة عارضة إذا كانت صادقة من أجل بعض قيم الصدق الممكنة لمتغيراتها القضائية وكاذبة من أجل قيم أخرى.

مثال: الصيغة التالية عارضة: $(K \vee L) \rightarrow M$

K	L	M	$K \vee L$	$(K \vee L) \rightarrow M$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

يتبين من الجدول أن $(K \vee L) \rightarrow M$ تكون صادقة لبعض قيم الصدق لمتغيراتها القضائية وكاذبة لقيم أخرى.

سوف ندخل طريقة أخرى لكتابة جداول الصدق. وتعتبر هذه الطريقة الأسهل عند كتابة جداول الصيغ المعقدة. المثال أدناه يوضح هذه الطريقة.

مثال: لننشئ جدول صدق الصيغة $((K \rightarrow L) \wedge \neg L) \rightarrow \neg K$

((K	→	L)	Λ	⌉	L)	→	⌉	K
T	T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	F	T
F	T	T	F	F	T	T	T	F
F	T	F	T	T	F	T	T	F
(1)	(5)	(2)	(8)	(6)	(3)	(9)	(7)	(4)

نلاحظ أنه قد تم إنشاء الجدول حسب الخطوات التالية:

أولا: إنشاء أعمدة قيم الصدق الخاصة بالمتغيرات القضائية وهي الأعمدة (1)، (2)، (3)، (4).

ثانيا: إنشاء أعمدة قيم الصدق الخاصة بروابط المجال الأضيق من اليسار إلى اليمين، وفي هذه الحالة يكون الرابط → هو الأول (العمود (5)) في حين يتلوه الرابطان الآخران الدالان على النفي (العمودان (6) و(7)).

ثالثا: إنشاء جدول قيم الصدق الخاصة بالروابط الأخيرة الباقية التي تؤدي وظيفتها ابتداء من المجال الأضيق إلى المجال الأوسع، حيث أنشأنا قيم صدق الرابط Λ بين (K → L) و⌉L (العمود (8))، وأخيرا نكمل الجدول بإنشاء الرابط الخاص بأوسع مجال وهو → (العمود (9)) الذي يقع بين ((K → L) Λ ⌉L) على يساره و⌉K على يمينه.

نلاحظ أن العمود الرئيسي في جدول الصدق وهو عمود الرابط ذي المجال الأوسع (أو الرابط الرئيسي) يحتوي على قيمة الصدق T فقط وبالتالي فإن الصيغة المعطاة في المثال هي صيغة تكرارية.

2 .2 العلاقة (ينتج) والعلاقة (يكافئ)

لقد ناقشنا في الفقرة (4.2.1) العلاقة (ينتج) بين القضايا وسنقوم الآن باعطاء تعريف لها بين الصيغ.

نقول بأنه من الصيغة α تنتج الصيغة β إذا كانت $\alpha \rightarrow \beta$ صيغة تكرارية. وللتعبير رمزيا بأنه من α تنتج β نكتب: $\alpha \Rightarrow \beta$.

مثال: لنأخذ زوجي الصيغ التالية : $K \wedge L$, $K \vee L$ و $K \rightarrow L$, $K \leftrightarrow L$

ولنبني الجدول التالي :

K	L	$K \leftrightarrow L$	$K \rightarrow L$	$K \vee L$	$K \wedge L$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F

يتبين من الجدول أنه إذا كانت $K \leftrightarrow L$ صادقة فإن $K \rightarrow L$ صادقة أيضا وهكذا فإن $(K \leftrightarrow L) \rightarrow (K \rightarrow L)$ تكون صادقة دائما أي أنها صيغة تكرارية. ولهذا يمكننا القول أنه، من $K \leftrightarrow L$ تنتج $K \rightarrow L$. أما بالنسبة إلى $K \vee L$ و $K \wedge L$ فيتبين من الجدول أنه على السطرين 2، 3 فإن $K \vee L$ صادقة ولكن $K \wedge L$ كاذبة وهكذا فإن $(K \vee L) \rightarrow (K \wedge L)$ ليست تكرارية ونقول أنه من $K \vee L$ لا تنتج $K \wedge L$. يتبين من الجدول أنه: من $K \leftrightarrow L$ لا تنتج $K \vee L$ وكذلك من $K \leftrightarrow L$ لا تنتج $K \wedge L$.

يحدث غالبا أن تنتج قضية من قضيتين أو أكثر، لنأخذ المثال أدناه.

من القضيتين:

1) إذا كانت الأرض تدور حول الشمس فإن الأرض تتحرك.

و

2) الأرض تدور حول الشمس.

نقول بأنه تنتج القضية: الأرض تتحرك.

سنقوم الآن بتعميم مفهوم العلاقة (ينتج) إلى أي عدد من الصيغ حسب التعريف التالي:

نقول بأن الصيغة β تنتج من الصيغ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ إذا كانت $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ صيغة تكرارية. بشكل خاص، إذا كانت β نفسها تكرارية فإنها تنتج من مجموعة خالية من الصيغ.

مثال: الصيغة $\rceil K$ تنتج من الصيغتين $\rceil L$ وL $K \rightarrow L$ وذلك لأن $((K\rightarrow L) \wedge \rceil L) \rightarrow \rceil K$ صيغة تكرارية.

نقول بأن الصيغة α تكافئ β (أو أنهما متكافئتان) إذا كانت $\alpha \leftrightarrow \beta$ صيغة تكرارية. رمزيا نكتب $\beta \Leftrightarrow \alpha$.

مثال: الصيغة $K \wedge \rceil L$ تكافئ $\rceil (K \rightarrow L)$ لأن $\rceil (K\rightarrow L) \leftrightarrow (K\wedge \rceil L)$ صيغة تكرارية. الجدول التالي يبين هذا التكافؤ :

K	L	$K \rightarrow L$	$\rceil (K \rightarrow L)$	$K \wedge \rceil L$	$\rceil (K\rightarrow L) \leftrightarrow (K \wedge \rceil L)$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T

نستطيع الآن برهان المبرهنتين التاليتين:

مبرهنة$_1$

إذا كانت $\beta_1 \Leftrightarrow \alpha_1$ (α_1, β_1 صيغتان) فإن $\alpha_1 \Rightarrow \beta_1$ و $\beta_1 \Rightarrow \alpha_1$.

البرهان

بما أن $\beta_1 \Leftrightarrow \alpha_1$ فإذن $\beta_1 \leftrightarrow \alpha_1$ صيغة تكرارية. أي أن قيم صدق α_1 تساوي قيم صدق β_1 من أجل جميع قيم الصدق الممكنة للمتغيرات القضائية المكونة إلى α_1 و β_1. وهذا يعني أن $\beta_1 \rightarrow \alpha_1$ صيغة تكرارية وبالمثل $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$ صيغة تكرارية، وهكذا يكون $\alpha_1 \Rightarrow \beta_1$ وα_1 $\Rightarrow \beta_1$.

مبرهنة$_2$

إذا كانت $\alpha_1 \Rightarrow \beta_1$ وα_1 $\Rightarrow \beta_1$ فإن $\beta_1 \Leftrightarrow \alpha_1$.

البرهان مماثل للبرهان السابق.

2. 3 صورة الحجة وبرهان صحتها Agrument Form and Proving its Validity

صورة الحجة هي مجموعة منتهية من الصيغ إحداها تسمى نتيجة والأخريات تسمى مقدمات.

كذلك يمكننا أن نقول أن صورة الحجة هي متتالية من الصيغ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$، حيث $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ هي المقدمات وα_n هي النتيجة.

تكون صورة الحجة صحيحة إذا كانت النتيجة صادقة عندما تكون جميع المقدمات صادقة، أو أن $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ صيغة تكرارية. أي أن $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \Rightarrow \beta$ (تقرأ: من α_1 و α_2 وإلى α_n تنتج β).

صورة الحجة الصحيحة التي مقدماتها $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ونتيجتها β نكتبها هكذا: $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n \vdash \beta$. الرمز $\vdash$ يقرأ (يقرر) والذي يرمز لكلمة (إذن) التي تفصل المقدمات عن النتيجة. هذا الرمز ليس من لغة حساب القضايا وإنما ينتمي إلى ما وراء اللغة الخاصة بحساب القضايا. وهكذا فالرمز $\vdash$ يقرر أن النتيجة β التي على يمينه تنتج من المقدمات التي على يساره فقط. إذن صورة الحجة في الفقرة (1.1) يمكن كتابتها على الشكل $K\to L, K \vdash L$.

نبين الآن كيفية استخدام جدول الصدق لبرهان صحة صورة حجة مقدماتها $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ونتيجتها β . سنبين ما نريد وذلك بإنشاء جدول مختصر يبرهن صحة صورة الحجة إذا كانت جميع الأسطر التي تكون فيها كل المقدمات صادقة فيجب أن تكون فيها النتيجة صادقة أيضا. إن هذا يكفي لبرهان أن $(\alpha_1 \land \alpha_2 \land\ldots\land \alpha_n) \to \beta$ صيغة تكرارية، لأنه في حالة كون إحدى معطوفات المقدم (أي $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$) تكون كاذبة، على الأقل، فإن هذا يكفي لأن يكون المقدم $\alpha_1 \land \alpha_2 \land\ldots\land \alpha_n$ كاذبا وبالتالي تكون $(\alpha_1 \land \alpha_2 \land\ldots\land \alpha_n) \to \beta$ صادقة. ولهذا وكما سنفعل في المثال أدناه سنقوم في الاستمرار بإيجاد قيم الصدق من المقدمات في كل سطر على التوالي عندما تكون المقدمات صادقة وسنتوقف عن هذا الإيجاد عند ظهور أول قيمة F لمقدمة على السطر وذلك لأن هذا يكفي كما أسلفنا لأن تكون :

$(\alpha_1 \land \alpha_2 \land\ldots\land \alpha_n) \to \beta$ صادقة.

مثال

سنبرهن صحة صورة الحجة التي مقدماتها:

$\alpha_1: M \vee \neg K, \alpha_2: (K \to L) \vee \neg M, \alpha_3: K$ ونتيجتها $\beta: L$ وذلك بإنشاء الجدول المختصر أدناه.

K	L	M	α_1	α_2	α_3	β	$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \to \beta$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F				T
T	F	T	T	F			T
T	F	F	F				T
F	T	T	T	T	F		T
F	T	F	T	T	F		T
F	F	T	T	T	F		T
F	F	F	T	T	F		T

نلاحظ من الجدول أن السطر1 هو الوحيد الذي فيه المقدمات صادقة وعلى نفس السطر يقابلها نتيجة صادقة. أي أنه لا يوجد أي سطر تكون فيه المقدمات جميعها صادقة والنتيجة كاذبة. إذن صورة الحجة صحيحة. ولتطبيق ما ذكرناه حول برهان صحة صورة حجة في هذه الفقرة على هذا المثال، قمنا بإضافة العمود الأخير حيث نلاحظ أن الصيغة $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \to \beta$:

1) تكون على السطر الأول صادقة لأن جميع المعطوفات $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ صادقة والنتيجة صادقة أيضا.

2) تكون على السطر الثاني صادقة لأن المعطوفة الأولى من مقدمها كاذبة.

3) تكون على السطر الثالث صادقة لأن المعطوفة الثانية من مقدمها كاذبة.

4) تكون على السطر الرابع صادقة لأن المعطوفة الأولى من مقدمها كاذبة.

5) تكون على السطر الخامس صادقة لأن المعطوفة الثالثة من مقدمها كاذبة.

وهكذا يمكن ملاحظة أنه على جميع الأسطر الثمانية تكون الصيغة $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3) \rightarrow \beta$ دائما صادقة من أجل جميع قيم الصدق الممكنة لمتغيراتها القضائية K, L, M أي أنها صيغة تكرارية. وإذن :

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$.

2. 4 برهان خطأ صورة حجة **Proving Invalidity of Argument Form**

للتحقق من أن صورة حجة ما صحيحة نقوم باستخدام الجدول والتحقق من أنه عندما تكون جميع مقدمات الحجة صادقة فإن نتيجتها تكون صادقة أيضا. أما للتحقق من خطأ صورة حجة ما فإنه يكفي وجود سطر واحد على الأقل تكون فيه جميع المقدمات صادقة ولكن النتيجة تكون كاذبة. ولهذا سنقوم بإيجاد تعيين واحد لقيم صدق المتغيرات القضائية بحيث تكون جميع المقدمات صادقة والنتيجة كاذبة. إن هذا التعيين يسمى (المثال-المضاد)[1].

مثال

لنأخذ الحجة التالية ونحاول تحديد صحتها

إذا سافر أحمد إلى تونس لقضاء إجازته، فإن ماجد يسافر إلى تونس أيضا وإذا سافر ماجد إلى تونس، فإن فائزة تسافر أيضا. أحمد يسافر إلى تونس لقضاء إجازته أو فائزة تسافر. إذن، ماجد لا يسافر إلى تونس.

القضايا الذرية.

أحمد يسافر إلى تونس لقضاء إجازته. K

[1] - *Counter-example*

ماجد يسافر إلى تونس لقضاء إجازته. L

فائزة تسافر إلى تونس لقضاء إجازتها. M

الترجمة

المقدمات $\alpha_1: (K \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow M), \alpha_2: K \vee M$

النتيجة $\beta: \neg L$

سنحاول أولا إعطاء مثال-مضاد أي إيجاد تعيين قيم صدق للمتغيرات القضائية K, L, M بحيث تكون المقدمات جميعها صادقة والنتيجة كاذبة. نأخذ $\neg L$ كاذبة. حتى تكون $\neg L$ كاذبة يجب أن تكون L صادقة. الآن حتى تكون α_1 صادقة فيجب أن تكون كلتا المعطوفتين صادقتان. حتى تكون المعطوفة الأولى $K \rightarrow L$ صادقة وبما أن L صادقة فإن K يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة. حتى تكون المعطوفة الثانية $L \rightarrow M$ صادقة وبما أن L صادقة فإن M يجب أن تكون صادقة أيضا. وحتى تكون α_2 أي $K \vee M$ صادقة وبما أن M صادقة فإن K يمكن أن تكون صادقة أو كاذبة. وهكذا نحصل، من هذه المناقشة، على السطر المطلوب التالي من الجدول (أي، المثال-المضاد):

K	L	M	α_1	α_2	β	$(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \beta$
T	T	T	T	T	F	F

يستخدم المثال-المضاد في مختلف العلوم. سنجد مثال-مضاد للقضية التالية: لأية ثلاثة مجموعات A, B, C يكون $A \cup (B-C) = (A \cup B) - C$. نعطي المثال-المضاد التالي: لتكن $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{2,4,6\}, C=\{2, 3, 5\}$ وهكذا

فإن $A\cup(B-C)=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ولكن $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وبالتالي $(A\cup B)-C=\{1, 4, 6\}$ وإذن : $A\cup(B-C)\neq(A\cup B)-C$.

يقال أيضا بأن صورة حجة تكون خاطئة إذا كانت على الأقل حالة خاصة واحدة من تلك الصورة خاطئة.

من الأفضل عند تحديد صحة صورة حجة ما البدء بمحاولة البرهان على خطأ صورة الحجة، أي إعطاء مثال-مضاد وذلك لأنه أكثر اختصارا وفعالية وإذا لم ننجح في هذه المحاولة فنقول بأننا وصلنا إلى (طريق مسدود) وهكذا تكون صورة الحجة صحيحة.

من المهم ملاحظة أن صحة صورة حجة تعتمد فقط على تركيبها. أي أن صحة أو خطأ صورة حجة لا تعتمد على معنى قضاياها الذرية، وإنما تعتمد فقط على تركيب مكوناتها (المقدمات والنتيجة). سنوضح ذلك بمقارنة المثالين التاليين:

مثال 1

إذا واظب أحمد على الدراسة فإنه سيحصل على نقاط جيدة. إذا لم يواظب أحمد على الدراسة فإنه يتمتع بوقت فراغ كبير. إذن يحصل أحمد على نقاط جيدة أو يتمتع بوقت فراغ كبير.

القضايا الذرية

أحمد يواظب على الدراسة.	K
يحصل أحمد على نقاط جيدة.	L
يتمتع احمد بوقت فراغ كبير.	M

الترجمة

المقدمات $\alpha_1: K \rightarrow L, \alpha_2: \urcorner K \rightarrow M$

النتيجة $L \vee M$

سنحاول أولا البرهان على خطأ صورة الحجة، أي إعطاء مثال-مضاد. نأخذ النتيجة كاذبة، أي أن L كاذبة و M كاذبة. حتى تكون α_1 صادقة وبما أن L كاذبة فيجب أن تكون K كاذبة. حتى تكون α_2 صادقة وبما أن M كاذبة فإن $\urcorner K$ يجب أن تكون كاذبة، أي أن K يجب أن تكون صادقة. إذن وصلنا إلى طريق مسدود: K يجب أن تكون صادقة وكاذبة في نفس الوقت وهذا غير ممكن. إذن يفشل المثال المضاد والحجة صحيحة.

مثال 2

أحمد يواظب على الدراسة ويحصل على نقاط جيدة. أحمد لا يواظب على الدراسة أو يتمتع بوقت فراغ كبير. إذن، إذا كان احمد يواظب على الدراسة فإنه لن يتمتع بوقت فراغ كبير.

باستخدام نفس الحروف لنفس القضايا الذرية كما في المثال (1) نحصل على الترجمة التالية:

المقدمات $\alpha_1: K \wedge L, \alpha_2: \urcorner K \vee M$

النتيجة $\beta: K \rightarrow \urcorner M$

سنحاول الحصول على مثال-مضاد. نأخذ النتيجة β كاذبة أي يجب أن تكون K صادقة و M صادقة. حتى تكون α_1 صادقة وبما أن K صادقة فيجب

أن تكون L صادقة. α_2 تكون صادقة لأن M صادقة و K صادقة. إذن صورة الحجة خاطئة وسطر الجدول المطلوب الذي يمثل المثال-المضاد هو:

K	L	M	α_1	α_2	β	$(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \beta$
T	T	T	T	T	F	F

نلاحظ أنه بالرغم من أن رموز القضايا الذرية في المثال (2) تحمل نفس معنى القضايا الذرية في المثال (1) ولكن الحجة هنا خاطئة وذلك لأن تركيب الحجة (تركيب المقدمات والنتيجة) في المثال (2) يختلف عن تركيب المثال (1).

2. 5 قواعد الاشتقاق Rules of Derivation

سنكشف في هذه الفقرة عما نعنيه بقواعد الاشتقاق[1] (الاستدلال) وعن كيفية استخدام بعض هذه القواعد وأكثرها أهمية. سنختار أمثلة مختلفة نستطيع بواسطتها توضيح هذا الاستخدام بشكل أفضل. سنبرهن بواسطة جداول الصدق صحة حالات خاصة من بعض قواعد الاشتقاق والتي تمتلك عدد غير محدود من هذه الحالات الخاصة.

قواعد الاشتقاق هي صور حجج أساسية (بسيطة) صحيحة، وأما وظيفتها فهي اشتقاق (استنتاج) نتيجة صورة حجة من مقدماتها، وذلك باستخدام متتالية من هذه القواعد. سنكشف في مثال عن هذه المتتالية في فقرة

[1] - Derivation (Infrerence)

(البراهين الصورية). إن الاشتقاق هو كيفية الانتقال من صيغة أو عدد من الصيغ (تسمى المقدمات) إلى صيغة أخرى (تسمى النتيجة).

1. قاعدة الوضع (إثبات التالي) **Modus Ponens**

سنطبق التعريف المعطى للعلاقة ينتج على المثال التالي:

(1) إذا كانت الأرض تدور حول الشمس فإن الأرض تتحرك.

(2) الأرض تدور حول الشمس.

(3) الأرض تتحرك.

إذا رمزنا بواسطة K للقضية: الأرض تدور حول الشمس، وبواسطة L للقضية الأرض تتحرك فإن القضيتين (1) و(2) في المثال هذا يمكن أن تكتب هكذا :

$K \rightarrow L$ (1

K (2

سنتحقق من أنه حسب تعريف العلاقة (ينتج) فإنه من $K \rightarrow L$ و K تنتج (تشتق) L. ومن أجل ذلك يكفي برهان أن الصيغة $(K \wedge (K \rightarrow L)) \rightarrow L$ تكون تكرارية. أي أنه من $K \rightarrow L$ و K نشتق L. هذا الاشتقاق صحيح لأن $(K \wedge (K \rightarrow L)) \rightarrow L$ صيغة تكرارية والجدول أدناه يبين ذلك. وبتعبير آخر $K \rightarrow L, K \vdash L$.

K	L	$K \to L$	K	L	$(K \land (K \to L)) \to L$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

يتبين من الجدول أنه عندما تكون المقدمتان K و $K \to L$ صادقتين فإن النتيجة L تكون صادقة أيضا وهذا ما يحدث في السطر الأول فقط ولا يوجد أي سطر تكون فيه المقدمتان صادقتان والنتيجة كاذبة. يبين العمود الأخير من الجدول أن وصل المقدمتين يستلزم النتيجة يكون صيغة تكرارية.

مخطط قاعدة اشتقاق النتيجة β من المقدمات $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (حيث α_i, β ($i = 1, 2, \ldots, n$) أية صيغ) تكتب على الشكل التالي: $\dfrac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}{\beta}$

وهكذا فإن مخطط قاعدة الوضع يكتب: $\dfrac{\alpha \to \beta, \alpha}{\beta}$ (حيث α، β أية صيغتان). إن قاعدة الوضع تنص على أن: من استلزام ومقدمه يمكن اشتقاق تاليه، إذن $\alpha \to \beta, \alpha \vdash \beta$.

إن قاعدة الوضع التي هي قاعدة اشتقاق صحيحة عادة ما تخلط بقاعدة الاشتقاق $\dfrac{\alpha \to \beta, \beta}{\alpha}$ (حيث α، β أية صيغتان) الغير صحيحة. يمكن معرفة ذلك بواسطة استخدام جدول الصدق لحالة خاصة منها، مثلا: بأخذ K هي α، وL هي β فتصبح $\dfrac{K \to L, L}{K}$. يكفي لبرهان عدم صحتها تبيان أن

$K \rightarrow (L \wedge (K \rightarrow L))$ ليست صيغة تكرارية وهكذا يكون: من L و $K \rightarrow L$ لا تنتج K. الجدول أدناه يبين ما نريد.

K	L	$K \rightarrow L$	L	K	$(L \wedge (K \rightarrow L)) \rightarrow K$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T

نرى من الجدول أنه على السطر الثالث تكون مقدمتي الحجة L و $K \rightarrow L$ صادقتين بينما النتيجة K كاذبة، أي أن K لا تنتج من المقدمتين المذكورتين أو أن صورة الحجة خاطئة وبالتالي هي ليست قاعدة اشتقاق صحيحة. العمود الأخير من الجدول يبين أن وصل المقدمتين يستلزم النتيجة ليس صيغة تكرارية.

2. قاعدة نفي التالي **Modus Tollens**

سنتعرض لهذه القاعدة بأخذ المثال التالي: من القضيتين

(1) إذا نجح أحمد في الامتحان فإنه يجد عملاً.

و

(2) لم يجد أحمد عملاً.

تنتج القضية (لم ينجح أحمد في الامتحان). إذا رمزنا بواسطة K للقضية (نجح أحمد في الامتحان) وبواسطة L إلى (يجد أحمد عملا)، فإذن يمكننا أن نكتب القضيتين في المثال هكذا :

$K \to L$ (1

$\urcorner L$ (2

سنتحقق من أنه حسب تعريف العلاقة (ينتج) فإنه من $K \to L$ و $\urcorner L$ تنتج $\urcorner K$ ومن أجل ذلك يكفي برهان أن $(\urcorner L \wedge (K \to L)) \to \urcorner K$ صيغة تكرارية، وبعبارة أخرى فإن صورة الحجة المتكونة من المقدمين $\urcorner L$ و $K \to L$ والنتيجة $\urcorner K$ صحيحة. هذا البرهان يمكن تحقيقه بواسطة الجدول أدناه.

K	L	$K \to L$	$\urcorner L$	$\urcorner K$	$(\urcorner L \wedge (K \to L)) \to \urcorner K$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

نرى من الجدول أنه عندما تكون المقدمتان $\urcorner L$ و $K \to L$ صادقتين فإن النتيجة $\urcorner K$ تكون صادقة. هذا يحدث في السطر الرابع ولا يوجد أي سطر تكون فيه المقدمتان صادقتان والنتيجة كاذبة. كذلك يبين العمود الأخير أن وصل المقدمتين يستلزم النتيجة يكون صيغة تكرارية.

بشكل مشابه نستطيع البرهنة على أنه من القضيتين:

1) إذا كانت السماء تمطر فإن السماء تكون غائمة.

و

2) السماء ليست غائمة

تنتج القضية (السماء لا تمطر).

يمكن توضيح قاعدة نفي التالي بأسلوب مبسط أكثر عندما نستخدم قضايا تتعلق بحالات معروفة لدينا وقريبة منا في الحياة اليومية، فمثلا: لنفرض أن أمامنا كمية من الماء ونريد أن نبرهن أن القضية (درجة حرارة الماء تساوي 100°) كاذبة، يمكننا أن نستدل هكذا: إذا كانت درجة حرارة الماء تساوي 100° فإن الماء يجب أن يغلي. ولكننا نرى بوضوح أن الماء لا يغلي. من هنا ينتج أن القضية (درجة حرارة الماء تساوي 100°) كاذبة.

مخطط قاعدة نفي التالي يكتب على الشكل $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \urcorner\beta}{\urcorner\alpha}$ (حيث α، β أية صيغتان). قاعدة نفي التالي تنص على أن: من استلزام ونفي تاليه يمكن اشتقاق نفي مقدمه، أو أن $\alpha \rightarrow \beta, \urcorner\beta \vdash \urcorner\alpha$.

إن قاعدة الاشتقاق الصحيحة هذه عادة ما تخلط بقاعدة الاشتقاق $\frac{\alpha \rightarrow \beta, \urcorner\alpha}{\urcorner\beta}$ الغير صحيحة. ويمكن برهان ذلك بواسطة استخدام جدول الصدق لحالة خاصة مثلا، بأخذ K هي α و L هي β فتصبح $\frac{K \rightarrow L, \urcorner K}{\urcorner L}$.

يكفي لبرهان عدم صحتها تبيان أن $(\urcorner K \wedge (K \rightarrow L)) \rightarrow \urcorner L$ صيغة غير تكرارية. وهكذا يكون: من $\urcorner K$ و $L \rightarrow K$ لا تنتج $\urcorner L$. الجدول أدناه يبين ما نريد.

K	L	$K \to L$	$\rceil K$	$\rceil L$	$(\rceil K \wedge (K \to L)) \to \rceil L$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

نرى أنه على السطر الثالث تكون مقدمتا صورة الحجة $\rceil K$ و $K \to L$ صادقتين بينما النتيجة $\rceil L$ كاذبة، أي أن $\rceil L$ لا تنتج من المقدمتين المذكورتين أو أن صورة الحجة خاطئة وبالتالي فهي ليست قاعدة اشتقاق صحيحة. كذلك فإن العمود الأخير من الجدول يبين أن وصل المقدمتين يستلزم النتيجة ليس صيغة تكرارية.

3. قاعدة القياس الشرطي Rule of Hypothetical Syllogism

من صدق القضيتين :

1) إذا كانت زاويتان من المثلث ADC تساوي زاويتين من المثلث BEC (K) فإن المثلثين ADC وBEC يكونان متشابهين (L).

و

2) إذا كان المثلثان ADC و BEC متشابهين فإن $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}$ (M).

يمكننا أن نقول بأننا قد برهنا صدق القضية (إذا كانت زاويتان من المثلث ADC تساوي زاويتين من المثلث BEC (K) فإن $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}$ (M))،

أي أننا برهنا صدق القضية $K \to M$. لقد أصبح واضحا أنه عندما تكون $K \to L$ و $L \to M$ صادقتان فإن $K \to M$ تكون صادقة أيضا، أي أنه من

$K \to L$ و $L \to M$ تنتج $K \to M$. وبعبارة أخرى فإن صورة الحجة المتكونة من المقدمتين $K \to L$ و $L \to M$ والنتيجة $K \to M$ صحيحة. أي أن :

$K \to M \vdash K \to L, L \to M$. ومن أجل أن نبرهن أن هذا صحيحا يكفي برهان أن $\alpha \equiv ((K \to L) \wedge (L \to M)) \to (K \to M)$ صيغة تكرارية ونستطيع تبيان ذلك بواسطة جدول الصدق أدناه.

K	L	M	$K \to L$	$L \to M$	$K \to M$	α
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T

يتبين من الجدول أنه عندما تكون المقدمتان $K \to L$ و $L \to M$ صادقتين فإن النتيجة $K \to M$ تكون صادقة أيضا. هذا يحدث على الأسطر: الأول والخامس والسابع والثامن ولا يوجد أي سطر تكون فيه المقدمتان صادقتين والنتيجة كاذبة. كذلك يبين العمود الأخير من الجدول أن وصل المقدمتين يستلزم النتيجة يكون صيغة تكرارية.

مخطط قاعدة القياس الشرطي يكتب على الشكل التالي:

$$\frac{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow \alpha_3}{\alpha_1 \rightarrow \alpha_3}$$ (حيث $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ أية صيغ). قاعدة القياس الشرطي

تنص على أنه:

من $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$ و $\alpha_2 \rightarrow \alpha_3$ نشتق $\alpha_1 \rightarrow \alpha_3$ (حيث $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ أية صيغ).

نستطيع أن نكتب: $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \vdash \alpha_1 \rightarrow \alpha_3$.

تعميم قاعدة القياس الشرطي إلى أي عدد من الصيغ يكون على الشكل التالي:

$$\frac{\alpha_1 \rightarrow \alpha_2, \alpha_2 \rightarrow \alpha_3, \ldots, \alpha_{n-2} \rightarrow \alpha_{n-1}, \alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n}{\alpha_1 \rightarrow \alpha_n}$$

يستخدم القياس الشرطي في برهان المبرهنات الرياضية. ذلك لأن المبرهنات على الشكل $M_1 \rightarrow M_n$ لا يمكن برهان صدقها مباشرة وإنما بواسطة برهان القضايا البينية:

$M_1 \rightarrow M_2, M_2 \rightarrow M_3, \ldots, M_{n-2} \rightarrow M_{n-1}, M_{n-1} \rightarrow M_n$. ومن صدق هذه القضايا ينتج صدق $M_1 \rightarrow M_n$. في الاستدلالات الرياضية يقوم صدق القضايا البينية على تعريف، مبرهنة أو بديهية. ومن أجل اكتشاف هذه القضايا البينية فغالبا، وللسهولة، يتم البدء من القضية الأخيرة. فحتى يتم اكتشاف $M_{n-1} \rightarrow M_n$ فإننا نقوم بالبحث عن قضية M_{n-1} بحيث ينتج منها تالي المبرهنة وحتى يتم التأكد من صدق M_{n-1} فإنه يتم البحث عن قضية أخرى هي M_{n-2} والتي تنتج منها M_{n-1} ...إلخ، وإلى أن يتم الوصول إلى القضية M_1. في مثل هذه الحالات نتبع الاستدلالات حسب الأسلوب الآتي:

حتى تكون M_n صادقة، يكفي أن تكون M_{n-1} صادقة،

حتى تكون M_{n-1} صادقة، يكفي أن تكون M_{n-2} صادقة،

. . . .

حتى تكون M_2 صادقة، يكفي أن تكون M_1 صادقة.

M_1 صادقة.

إذن M_n صادقة أيضا.

سنناقش مثالا على برهان يتم فيه استخدام التعميم أعلاه. لندرس برهان المبرهنة التالية: (برهن أنه إذا كان $a > b$ فإن $a + c > b + c$).

حتى تكون (M_5) $a + c > b + c$ صادقة يكفي أن تكون (M_4) $a+c-(b+c)>0$ صادقة.

حتى تكون (M_4) $a+c-(b+c) > 0$ صادقة يكفي أن تكون (M_3) $a+c-b-c>0$ صادقة.

حتى تكون (M_3) $a + c - b - c > 0$ صادقة يكفي أن تكون (M_2) $a-b>0$ صادقة.

حتى تكون (M_2) $a - b > 0$ صادقة يكفي أن تكون (M_1) $a > b$ صادقة.

(M_1) $a > b$ صادقة.

إذن (M_5) $a + c > b + c$ صادقة أيضا.

في الحقيقة استخدمنا هنا أولا القياس الشرطي:

$$\frac{M_1 \to M_2,\ M_2 \to M_3,\ M_3 \to M_4,\ M_4 \to M_5}{M_1 \to M_5}$$

وبعد ذلك استخدمنا قاعدة الوضع: $\dfrac{M_1 \rightarrow M_5,\ M_1}{M_5}$

4. قاعدة العطف **Rule of Conjuction**

لنأخذ القضايا :

(1) المستقيمان a و b يقعان على نفس المستوي مع المستقيم c ‏(K).

(2) المستقيمان a و b يقعان على نفس المسافة من المستقيم c ‏(L).

(3) المستقيمان a و b يقعان على نفس المستوي مع المستقيم c والمستقيمان a و b يقعان على نفس المسافة من المستقيم c ‏$(K \wedge L)$.

من المعروف أنه من صدق المقدمتين الأولى والثانية ينتج صدق القضية الثالثة. أي أنه من K و L تنتج $K \wedge L$، أي أن : $K, L \vdash K \wedge L$.

وللتحقق من ذلك يكفي أن نبرهن أن $(K \wedge L) \rightarrow (K \wedge L)$ صيغة تكرارية وهذا ما يبينه الجدول أدناه.

K	L	$K \wedge L$	$(K \wedge L) \rightarrow (K \wedge L)$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

يتبين من الجدول أنه عندما تكون المقدمتان K و L صادقتين فإن النتيجة $K \wedge L$ صادقة أيضا. هذا ما يحدث على السطر الأول فقط. ولا يوجد سطر

تكون فيه المقدمتان صادقتين والنتيجة كاذبة. كذلك فإن العمود الأخير يبين أن وصل المقدمتين يستلزم النتيجة يكون صيغة تكرارية.

مخطط قاعدة العطف يكون على الشكل التالي: $\dfrac{\alpha, \beta}{\alpha \wedge \beta}$.

تنص قاعدة العطف على أنه: من صيغتين α, β نشتق $\alpha \wedge \beta$، أي أن : $\alpha, \beta \vdash \alpha \wedge \beta$.

5. قاعدة قياس الفصل Rule of Disjuctive Syllogism

لنأخذ الحجة التالية :

اليوم هو الخميس (K) أو اليوم هو الجمعة (L).

اليوم ليس الخميس $\neg K$.

إذن، اليوم هو الجمعة L.

صورة الحجة المذكورة أعلاه هي:

$K \vee L$

$\neg K$

إذن، L

من صدق المقدمتين $K \vee L$ و$\neg K$ ينتج صدق النتيجة L، أي أن $K \vee L, \neg K \vdash L$. ومن أجل إثبات ذلك يكفي أن نبرهن أن $((K \vee L) \wedge \neg K) \rightarrow L$ صيغة تكرارية وهذا ما يبينه الجدول أدناه.

K	L	$K \vee L$	$\urcorner K$	L	$((K \vee L) \wedge \urcorner K) \rightarrow L$
T	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T

يتبين من الجدول أنه عندما تكون المقدمتان $K \vee L$ و $\urcorner K$ صادقتين تكون النتيجة صادقة أيضا وهذا ما يحدث على السطر الثالث فقط ولا يوجد سطر تكون فيه المقدمتان صادقتين والنتيجة كاذبة. كذلك يبين العمود الأخير أن وصل المقدمتين يستلزم النتيجة يكون صيغة تكرارية.

مخطط قاعدة قياس الفصل يكون على الشكل التالي $\dfrac{\alpha \vee \beta, \urcorner\alpha}{\beta}$ (حيث α, β أية صيغتان). تنص قاعدة الفصل على أنه: من $\alpha \vee \beta$ و $\urcorner\alpha$ نشتق β، أو أن $\alpha \vee \beta, \urcorner\alpha \vdash \beta$.

6. قاعدة التبسيط **Rule of Simplification**

من $\alpha \wedge \beta$ نشتق α (β)، أي أن $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$ وكذلك $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$.

7. قاعدة الجمع **Rule of Addition**

من α نشتق $\alpha \vee \beta$ (أي أنه من α نشتق α أو أية صيغة أخرى β). أي أن $\alpha \vdash \alpha \vee \beta$.

قواعد الاشتقاق الباقية أدناه تكون الصيغة التكرارية التي تمثل كلا منها عبارة عن استلزاما ثنائيا. وبما أنه من تكرارية $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ ينتج $\alpha_1 \Leftrightarrow \alpha_2$ وهذا

يعني $\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1$ و $\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$، أي أنه من α_1 تنتج (تشتق) α_2 ومن α_2 تنتج α_1.
قواعد الاشتقاق الباقية أدناه تسمى أيضا قواعد استبعاضية.

8. قاعدة دي مورغان — Rule of De Morgan

1) من $\rceil(\alpha \wedge \beta)$ نشتق $(\rceil\alpha \vee \rceil\beta)$ ومن $(\rceil\alpha \vee \rceil\beta)$ نشتق $\rceil(\alpha \wedge \beta)$.

2) من $\rceil(\alpha \vee \beta)$ نشتق $(\rceil\alpha \wedge \rceil\beta)$ ومن $(\rceil\alpha \wedge \rceil\beta)$ نشتق $\rceil(\alpha \vee \beta)$.

9. قاعدة النفي المضاعف — Rule of Double Negation

من $\rceil\rceil\alpha$ نشتق α ومن α نشتق $\rceil\rceil\alpha$.

10. قاعدة الاستلزام — Rule of Implication

من $\alpha \rightarrow \beta$ نشتق $\rceil\alpha \vee \beta$ ومن $\rceil\alpha \vee \beta$ نشتق $\alpha \rightarrow \beta$.

11. قاعدة عكس النقيض — Rule of Contraposition

من $\alpha \rightarrow \beta$ نشتق $\rceil\beta \rightarrow \rceil\alpha$ ومن $\rceil\beta \rightarrow \rceil\alpha$ نشتق $\alpha \rightarrow \beta$.

12. قاعدة الاستلزام الثنائي — Rule of Biconditional

من $\alpha \leftrightarrow \beta$ نشتق $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ و من $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$ نشتق $\alpha \leftrightarrow \beta$.

13. قاعدة الاستيراد–التصدير — Rule of Exportation-Importation

من $(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3)$ نشتق $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \alpha_3$ ومن $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \alpha_3$ نشتق $(\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3)$.

14. قاعدة التبديل — Commutative Rule

1) من $\alpha \wedge \beta$ نشتق $\beta \wedge \alpha$ ومن $\beta \wedge \alpha$ نشتق $\alpha \wedge \beta$.

2) من $\alpha \vee \beta$ نشتق $\beta \vee \alpha$ ومن $\beta \vee \alpha$ نشتق $\alpha \vee \beta$.

15. قاعدة التجميع — Associative Rule

1 من $\alpha_1 \vee (\alpha_2 \vee \alpha_3)$ نشتق $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \alpha_3$ ومن $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \vee \alpha_3$ نشتق $\alpha_1 \vee (\alpha_2 \vee \alpha_3)$.

2) من $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge \alpha_3)$ نشتق $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3$ ومن $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \wedge \alpha_3$ نشتق $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \wedge \alpha_3)$.

16. قاعدة التوزيع — Distributive Rule

1) من $\alpha_1 \vee (\alpha_2 \wedge \alpha_3)$ نشتق $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \wedge (\alpha_1 \vee \alpha_3)$ ومن $(\alpha_1 \vee \alpha_2) \wedge (\alpha_1 \vee \alpha_3)$ نشتق $\alpha_1 \vee (\alpha_2 \wedge \alpha_3)$.

2) من $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \vee \alpha_3)$ نشتق $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_3)$ ومن $(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \vee (\alpha_1 \wedge \alpha_3)$ نشتق $\alpha_1 \wedge (\alpha_2 \vee \alpha_3)$.

17. قاعدة تحصيل الحاصل — Rule of Tautology

1) من $\alpha \wedge \alpha$ نشتق α ومن α نشتق $\alpha \wedge \alpha$.

2) من $\alpha \vee \alpha$ نشتق α ومن α نشتق $\alpha \vee \alpha$.

2 .6 المجموعات الكافية للروابط Adequate Sets of Connectives

تعريف

المجموعة الكافية للروابط هي المجموعة التي يمكن تمثيل أية دالة صدق بواسطة صيغة تحوي على روابط من هذه المجموعة.

نحن نهدف هنا إلى البرهنة على أن مجموعات أزواج الروابط $\{\neg, \wedge\}$، $\{\neg, \vee\}$، $\{\neg, \rightarrow\}$ هي مجموعات كافية للروابط. وسنقوم بالبرهنة على ذلك على مرحلتين :

(1) البرهان على أن المجموعة $\{\neg, \vee, \wedge\}$ هي مجموعة كافية للروابط.

(2) البرهان على أنه إذا كانت المجموعة $\{\neg, \vee, \wedge\}$ هي مجموعة كافية للروابط فإن مجموعات أزواج الروابط أعلاه هي مجموعات كافية للروابط.

مبرهنة 1

المجموعة $\{\neg, \vee, \wedge\}$ هي مجموعة كافية للروابط.

يكمن البرهان في إنشاء صيغة تحوي الروابط $\neg, \vee, \wedge$ لكل جدول صدق ونحن نعرف أن كل جدول صدق يعرف دالة صدق.

البرهان

لتكن عندنا دالة صدق ذات n متغير قضائي. سوف ننشئ صيغة α تحوي المتغيرات القضائية $K_1, K_2, \ldots, K_n$.

(1) إذا أخذت دالة الصدق القيمة F لكل تركيبة من قيم صدق المتغيرات القضائية، فإن هذه الدالة تكون أية صيغة متناقضة وهكذا فالصيغة التالية يمكن أن تمثل α :

$(K_1 \land \urcorner K_1) \land (K_2 \land K_3 \land \ldots \land K_n)$

(2) إذا أخذت دالة الصدق القيمة T لتركيبة واحدة على الأقل من المتغيرات القضائية، فإن طريقتنا تقوم على بناء صيغة صادقة من أجل تلك التركيبة وكاذبة من أجل التركيبات الأخرى. فمثلا، إذا كانت $n = 3$ ، فإن الصيغة $\urcorner K_1 \land K_2 \land K_3$ تكون صادقة فقط من أجل التركيبة FTT من قيم صدق المتغيرات K_1, K_2, K_3 على الترتيب و$K_1 \land K_2 \land \urcorner K_3$ تكون صادقة فقط من أجل التركيبة TTF. هذه الصيغ الخاصة ندعوها الوصلات الأساسية[1]، فإذا أعطينا تعيين قيم صدق للمتغيرات القضائية $K_1, K_2, \ldots, K_n$ ، فإننا نكتب K_i في الوصل إذا كانت قيمة K_i هي T ونكتب $\urcorner K_i$ إذا كانت قيمة K_i هي F ‏ $(1 \leq i \leq n)$. وإذن، فمن أجل تعيين لقيم الصدق فإن كل معطوفة ستأخذ القيمة T وبالتالي سيأخذ الوصل بأكمله القيمة T.

الآن ومن أجل برهان مبرهنتنا، لنأخذ جميع التركيبات إلى n من قيم الصدق التي من أجلها تأخذ دالة صدقنا القيمة T. خذ α فصلا لجميع الوصلات الأساسية المحصول عليها بواسطة أخذ هذه التركيبات كقيم صدق للمتغيرات $K_1, K_2, \ldots, K_n$. ولرؤية هذا، عين قيم صدق إلى $K_1, K_2, \ldots, K_n$. إذا أخذت دالة صدقنا لهذه التركيبة من قيم الصدق القيم T، فإن الوصل

[1] Basic conjuncions

الأساسي المقابل لهذه التركيبة يكون ضمن α ويأخذ القيمة T لهذا التعيين. وهكذا فإن α تأخذ القيمة T أيضا. أما إذا أخذت دالة صدقنا القيمة F، فإن الوصل الأساسي المقابل لهذه التركيبة لا يكون ضمن α لأن كل الوصلات الأساسية الأخرى المتضمنة في α تأخذ القيمة F أيضا لهذا التركيب وبالتالي، فإن α تأخذ القيمة F. وإذن، فمن أجل كل تعيين لقيم الصدق، فإن قيمة صدق α تكون كما هي معطاة بواسطة دالة الصدق.

سنعطي أدناه مثالا توضيحيا وذلك بأخذ دالة صدق ذات ثلاثة متغيرات معرفة بواسطة جدول الصدق التالي :

T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	F

إن تركيبات قيم الصدق التي من أجلها تأخذ دالة الصدق القيمة T هي FFT, FTF, FTT, TFF وبالتالي فإن الوصلات الأساسية لهذه التركيبات هي :

$K_1 \wedge \neg K_2 \wedge \neg K_3$

$\neg K_1 \wedge K_2 \wedge K_3$

$\rceil K_1 \wedge K_2 \wedge \rceil K_3$

$\rceil K_1 \wedge \rceil K_2 \wedge K_3$

الصيغة α التي أنشأناها في البرهان هي :

$(K_1 \wedge \rceil K_2 \wedge \rceil K_3) \vee (\rceil K_1 \wedge K_2 \wedge K_3) \vee (\rceil K_1 \wedge K_2 \wedge \rceil K_3) \vee (\rceil K_1 \wedge \rceil K_2 \wedge K_3)$

هذه الصيغة، التي تحوي الروابط $\vee, \wedge, \rceil$ ، تقابل دالة الصدق المعرفة بواسطة جدول الصدق المعطى في المثال وجدول الصدق هذا هو جدول صدق هذه الصيغة.

إن شكل الصيغة α هذا يسمى الشكل العادي للفصل[1]، حيث أن α عبارة عن صيغة فصل وكل مفصولة فيها هي صيغة وصل لمعطوفات تمثل كل واحدة منها متغير قضائي أو نفي متغير قضائي.

باستخدام المبرهنة 1 أعلاه سنجد مجموعات أخرى للروابط.

مبرهنة 2

المجموعات: 1. $\{\rceil, \wedge\}$، 2. $\{\rceil, V\}$، 3. $\{\rceil, \rightarrow\}$ هي مجموعات كافية للروابط.

البرهان

1. من أجل أية صيغتين α ، β :

$$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \rceil(\rceil\alpha \wedge \rceil\beta)$$

حسب قاعدة دي مورغان وبالتالي فإن أية صيغة تحوي الروابط $\wedge, V, \rceil$ فقط يمكن تحويلها إلى صيغة تحوي الرابطين $\wedge, \rceil$ فقط.

---

[1] - Disjunctive normal form

2. وبالمثل نستطيع استخدام المتكافئة

$$\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

لنجد أن { $\neg, \vee$ } مجموعة كافية للروابط.

3. يجب أن نجد صيغتين مكافئتين إلى $\alpha \vee \beta$ و $\alpha \wedge \beta$ وتحويان الرابطين $\neg$ و $\rightarrow$ فقط.

عندنا :

$$\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow \neg(\alpha \rightarrow \neg\beta)$$

$$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

يمكن استخدام هاتين المتكافئتين لتحويل أية صيغة تحوي الروابط $\wedge, \vee, \neg$ فقط إلى صيغة تحوي الرابطين $\rightarrow, \neg$ فقط.

توجد مجموعات أخرى كافية للروابط والمبرهنتان التاليتان تبرهنان ذلك.

مبرهنة 3

المجموعة $\{\downarrow\}$ هي مجموعة كافية للروابط.

البرهان

استخدم مبرهنة 2 – الجزء 1 والمتكافئتين :

$$\neg\alpha \Leftrightarrow \alpha \downarrow \alpha$$

و

$$\alpha \wedge \beta \Leftrightarrow (\alpha \downarrow \alpha) \downarrow (\beta \downarrow \beta)$$

سنبرهن هاتين المتكافئتين أدناه.

لتكن $\alpha : K$ و $\beta : L$ ، لننشئ جدولي الصدق :

K	$\rceil K$	$K \downarrow K$	$\rceil K \leftrightarrow (K \downarrow K)$
T	F	F	T
F	T	T	T

K	L	$K \wedge L$	$K \downarrow K$	$L \downarrow L$	$(K \downarrow K) \downarrow (L \downarrow L)$	$(K \wedge L) \leftrightarrow ((K \downarrow K) \downarrow (L \downarrow L))$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	F	T	T	F	T

نلاحظ من الجدول الأول أعلاه أن $(K \downarrow K) \leftrightarrow K\rceil$ صيغة تكرارية وبالتالي $(K \downarrow K) \Leftrightarrow K\rceil$. ومن الجدول الثاني نلاحظ أن:

$(K \wedge L) \leftrightarrow ((K \downarrow K) \downarrow (L \downarrow L))$ صيغة تكرارية وبالتالي:

$(K \wedge L) \Leftrightarrow ((K \downarrow K) \downarrow (L \downarrow L))$.

مبرهنة 4

المجموعة { | } هي مجموعة كافية للروابط.

البرهان

استخدم المبرهنة 2 – الجزء 2 والمتكافئتين

$\rceil\alpha \Leftrightarrow \alpha \mid \alpha$

و

$\alpha \vee \beta \Leftrightarrow (\alpha | \alpha) | (\beta | \beta)$

سنبرهن هاتين المتكافئتين أدناه.

لتكن α : K و β : L ، لننشئ جدولي الصدق :

K	$\neg K$	$K \mid K$	$\neg K \leftrightarrow (K \mid K)$
T	F	F	T
F	T	T	T

K	L	$K \vee L$	$K \mid K$	$L \mid L$	$(K \mid K) \mid (L \mid L)$	$(K \vee L) \leftrightarrow ((K \mid K) \mid (L \mid L))$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T

نلاحظ من الجدول الأول أعلاه أن $\neg K \leftrightarrow (K|K)$ صيغة تكرارية وبالتالي $\neg K \Leftrightarrow (K|K)$. ومن الجدول الثاني نلاحظ أن $(K \vee L) \leftrightarrow ((K|K)|(L|L))$ صيغة تكرارية وبالتالي $(K \vee L) \Leftrightarrow ((K | K) | (L | L))$.

لا توجد مجموعة كافية يمكن اختيارها من بين الروابط الخمسة $\neg, \vee, \wedge, \leftrightarrow, \rightarrow$ ما عدا ما ورد في المبرهنة 2.

مبرهنة 5

أزواج المجموعات $\{\vee, \wedge\}$ ، $\{\leftrightarrow, \vee\}$ ، $\{\wedge, \leftrightarrow\}$ هي مجموعات غير كافية للروابط.

البرهان

نلاحظ أن أيا من أزواج المجموعات المعطاة لا تحوي على رابط النفي $\neg$. وهكذا فإن أية دالة صدق تأخذ دائما القيمة F لا يمكن التعبير عنها بواسطة صيغة باستخدام أي زوج، لأنه بإعطاء جميع المتغيرات القضائية في هذه الصيغة القيمة T ، فإن الصيغة كلها بالضرورة تأخذ القيمة T . ولا توجد طريقة لجعل جزء من الصيغة أو كلها تأخذ القيمة F بواسطة هذا التعيين. وإذن لا توجد صيغة تحوي فقط روابط من $\vee, \wedge, \leftrightarrow, \rightarrow$ وتكون صيغة متناقضة. وإذن لا توجد مجموعة جزئية من مجموعة هذه الروابط تكون مجموعة كافية.

2. 7 البراهين الصورية **Formal Proofs**

عندما يكون عدد المتغيرات القضائية في صورة الحجة كبيرا، فإن طريقة الجدول لبرهان صحة صورة الحجة تكون غير مناسبة، فنحن نعلم أنه إذا كان هذا العدد يساوي n فإن عدد الأسطر في الجدول تكون 2^n. إن هذا السبب يدعونا لإيجاد طريقة أخرى أكثر عملية وسهولة واختصار لبرهان صحة صورة حجة ما. إن هذه الطريقة تسمى البرهان الصوري. هذا البرهان يسمح لنا باشتقاق نتيجة صورة الحجة من مقدماتها في حساب القضايا وذلك باستخدام قواعد الاشتقاق التي مرت بنا.

مثال: لنأخذ الحجة التالية.

هشام ليس في مكتبه أو ليس في داره. لكنه إذا لم يكن في مكتبه فإنه يكون قد ذهب لزيارة أهله. وإذا لم يكن في داره فإنه يكون قد ذهب لزيارة طبيبه. إذن، ذهب هشام لزيارة أهله أو ذهب لزيارة طبيبه.

القضايا الذرية

K: هشام في مكتبه. L: هشام في داره. M: هشام ذهب لزيارة أهله.

N: هشام ذهب لزيارة طبيبه.

الترجمة

المقدمات $\neg K \vee \neg L, \neg K \rightarrow M, \neg L \rightarrow N$

النتيجة $M \vee N$

بما أن عدد التغيرات القضائية أربعة فإن عدد أسطر الجدول الذي يمكن أن نستخدمه لبرهان صحة هذه الحجة يكون $2^4 = 16$. لكننا باستخدام قواعد الاشتقاق التي مرت بنا نستطيع اشتقاق النتيجة $M \vee N$ من المقدمات المذكورة وذلك باشتقاق متتالية من الصيغ تكون آخر صيغة مشتقة فيها هي النتيجة $M \vee N$.

(1) أول صيغة مشتقة هي $K \rightarrow \neg L$ وتنتج من المقدمة $\neg K \vee \neg L$ باستخدام قاعدة الاستلزام.

(2) الصيغة المشتقة $K \rightarrow N$ تنتج من المقدمة $\neg L \rightarrow N$ ومن الصيغة المشتقة في (1) باستخدام قاعدة القياس الشرطي.

(3) الصيغة $K \to M \neg$ تنتج من المقدمة $M \to K \neg$ باستخدام قاعدة عكس النقيض والنفي المضاعف.

(4) $N \to M \neg$ تنتج من الصيغة المشتقة في (2) $N \to K$ والصيغة المشتقة في (3) $K \to M \neg$ باستخدام القياس الشرطي.

(5) آخر صيغة مشتقة وهي النتيجة $M \vee N$ تنتج من $N \to M \neg$ باستخدام قاعدة الاستلزام والنفي المضاعف.

يمكن إنشاء البرهان أعلاه بشكل أكثر صورية وذلك بكتابة المقدمات الثلاثة والصيغ المشتقة الخمسة كما مبين أدناه.

أرقام الخطوط	البرهان	السبب
1.	$\neg K \vee \neg L$	م
2.	$\neg K \to M$	م
3.	$\neg L \to N$	م
4.	$K \to \neg L$	الاستلزام ,1
5.	$K \to N$	القياس الشرطي 3,4
6.	$\neg M \to K$	عكس النقيض ,2
7.	$\neg M \to N$	القياس الشرطي 5,6
8.	$M \vee N$	الاستلزام ,7

البرهان الصوري كما ورد في المثال أعلاه هو المتتالية المنتهية من الصيغ على الخطوط من 1 إلى 8 أي المتتالية $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_8$، حيث β_1 هي المقدمة $\neg K \vee \neg L$، β_2 هي المقدمة $\neg K \to M$، β_3 هي المقدمة $\neg L \to N$، β_4

هي الصيغة المشتقة $L \rceil \rightarrow K$ ، β_5 هي الصيغة المشتقة $K \rightarrow N$، β_6 هي الصيغة المشتقة $K \rightarrow M \rceil$، β_7 هي الصيغة المشتقة $M \rightarrow N \rceil$ β_8 هي الصيغة المشتقة الأخيرة (النتيجة) M V N. نلاحظ بأن الصيغ (حدود) المتتالية إما أن تكون مقدمات وهي صيغ على الخطوط 1، 2، 3 أو صيغ مشتقة على الخطوط من 4 إلى 8، أما الحد الأخير من المتتالية β_8 $(n = 8)$ فهو النتيجة M V N.

بتفصيل أكثر: الخط 4 (نقصد الصيغة على الخط 4) اشتق من الخط 1 وذلك لأن $\beta_1 \rightarrow \beta_4$ صيغة تكرارية واستخدمت قاعدة الاستلزام. الخط 5 اشتق من الخطين 3 و4 وذلك لأن $(\beta_3 \Lambda \beta_4) \rightarrow \beta_5$ صيغة تكرارية واستخدمت قاعدة القياس الشرطي. الخط 6 اشتق من الخط 2 وذلك لأن $\beta_2 \rightarrow \beta_6$ صيغة تكرارية واستخدمت قاعدة عكس النقيض. الخط 7 اشتق من الخطين 5 و6 وذلك لأن $(\beta_5 \Lambda \beta_6) \rightarrow \beta_7$ صيغة تكرارية واستخدمت قاعدة القياس الشرطي. الخط 8 اشتق من الخط 7 وذلك لأن $\beta_7 \rightarrow \beta_8$ صيغة تكرارية واستخدمت قاعدة الاستلزام.

في الحقيقة بالإضافة إلى المتتالية المنتهية من الصيغ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_8$ والتي تمثل البرهان الصوري، فإننا من أجل اشتقاق حدود هذه المتتالية استخدمنا متتالية منتهية من قواعد الاشتقاق $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7$، حيث D_1 هي قاعدة الاستلزام، D_2 هي القياس الشرطي، D_3 هي عكس النقيض، D_4 هي النفي المضاعف، D_5 هي القياس الشرطي، D_6 هي قاعدة الاستلزام، D_7 هي النفي المضاعف.

في إنشاء البرهان أعلاه تم ذكر المقدمات على الخطوط الثلاثة الأولى من البرهان وأضفنا الرمز (م) ليشير إلى كل منها. ثم قمنا باشتقاق النتيجة M V N. الأعداد على اليمين تبين الخطوط التي اشتقت منها كل صيغة مشتقة وعلى يمين هذه الأعداد ذكرنا اسم القاعدة التي استخدمت في كل اشتقاق.

سنعطي الآن تعريف البرهان الصوري.

البرهان الصوري لصورة الحجة التي مقدماتها $\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ونتيجتها β هي متتالية منتهية من الصيغ $\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n$ بحيث أن كل β_i $(i = 1, 2, \ldots,n)$ هي مقدمة أو صيغة مشتقة من الصيغ التي تسبقها في المتتالية باستخدام قاعدة اشتقاق صحيحة. آخر صيغة مشتقة β_n من المتتالية هي النتيجة β.

تسمى عادة حدود المتتالية $\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n$ بخطوات البرهان.

2. 8 أنواع البراهين الصورية

2. 8. 1 البرهان المباشر **Direct Proof**

يقوم البرهان المباشر على اشتقاق النتيجة المطلوبة لصورة حجة وذلك باشتقاق متتالية من الصيغ واحدة بعد الأخرى من المقدمات المعطاة باستخدام قواعد الاشتقاق المعروفة وحيث تكون آخر صورة مشتقة هي نتيجة صورة الحجة. المثال في الفقرة السابقة يمكن اعتباره مثالا لهذا النوع من البراهين.

2. 8. 2 البرهان الشرطي (ب.ش) **Conditional Proof**

يستخدم البرهان الشرطي من أجل تبسيط البرهان التي تكون نتيجة صورة الحجة المطلوبة فيه عبارة عن استلزام. البرهان الشرطي لصحة صورة الحجة هذه يقوم على إضافة مقدم الاستلزام إلى المقدمات الأصلية ثم

نشتق متتالية من الصيغ من المقدمات الأصلية ومن المقدمة المضافة (سنسميها مقدمة البرهان الشرطي (ب.ش)) حتى نصل إلى اشتقاق تالي الاستلزام، وبهذا نكون قد برهنا الاستلزام المطلوب (النتيجة) من المقدمات الأصلية لصورة الحجة فقط. أي أن البرهان الشرطي ينص على ما يلي:

$\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n \vdash \beta_1 \to \beta_2$ إذا كان $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n , \beta_1 \vdash \beta_2$.

إن البرهان الشرطي هو أيضا قاعدة اشتقاق صحيحة ويمكن إضافتها إلى قائمة القواعد المعروفة ولكننا أفردنا فقرة له بسبب خصوصيته. إثبات صحة البرهان الشرطي يكون بواسطة المبرهنة أدناه.

مبرهنة

إذا كان $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n , \beta_1 \vdash \beta_2$ فإن : $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n \vdash \beta_1 \to \beta_2$.

البرهان

بما أن $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n , \beta_1 \vdash \beta_2$ إذن

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n \wedge \beta_1) \to \beta_2 \qquad (1)$$

صيغة تكرارية. حتى نبرهن $\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n \vdash \beta_1 \to \beta_2$، فيكفي أن نبرهن أن

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n) \to (\beta_1 \to \beta_2) \qquad (2)$$

صيغة تكرارية. ولكن $(2) \leftrightarrow (1)$ حسب قاعدة الاستيراد–التصدير. إذن (2) يكون أيضا صيغة تكرارية وبهذا يتم البرهان.

مثال

سنعطي برهانا صوريا لصورة الحجة الصحيحة التالية

المقدمات $M \to N, K \to \urcorner L, K \to (L \vee M)$

النتيجة $K \to N$

سنستخدم البرهان الشرطي لاشتقاق $K \to N$ وذلك بإضافة K (مقدم الاستلزام) إلى المقدمات الأصلية واشتقاق N (تالي الاستلزام). سنقوم بإضافة عمود آخر (أرقام المقدمات) إلى البرهان الصوري. يتشكل هذا العمود وذلك بإعطاء كل مقدمة رقما هو رقم أول ظهور لها في البرهان. سنبين أن المقدمات تظهر على كل سطر من البرهان.

أرقام المقدمات	أرقام الخطوط	البرهان	السبب
{1}	1.	$M \to N$	م
{2}	2.	$K \to \neg L$	م
{3}	3.	$K \to (L \vee M)$	م
{4}	4.	K	(مقدمة ب.ش) م
{3,4}	5.	$L \vee M$	الوضع 3,4
{2}	6.	$L \to \neg K$	عكس النقيض 2,
{4}	7.	$\neg\neg K$	النفي المضاعف 4,
{2,4}	8.	$\neg L$	نفي التالي 6,7
{2,3,4}	9.	M	قياس الفصل 5,8
{1,2,3,4}	10.	N	الوضع 1,9
{1,2,3}	11.	$K \to N$	ب.ش 4,10

نرى أن الصيغة المشتقة على الخط 5 (β_5) تم اشتقاقها من β_3 و β_4 وذلك لأن $(\beta_3 \wedge \beta_4) \to \beta_5$ صيغة تكرارية. فإذن مجموعة أرقام مقدمات β_5

تساوي اتحاد مجموعة أرقام مقدمات β_3 مع مجموعة أرقام مقدمات β_4. أي أن مجموعة أرقام مقدمات β_5 هي $\{3\} \cup \{4\} = \{3,4\}$. مجموعة أرقام مقدمات الصيغة على الخط 6 (β_6) المشتقة من β_2 هي المجموعة $\{2\}$، نفس الشيء بالنسبة إلى β_7. مجموعة أرقام مقدمات الصيغة المشتقة على الخط 8 (β_8) هي $\{2\} \cup \{4\} = \{2, 4\}$ وذلك لأن $(\beta_6 \wedge \beta_7) \rightarrow \beta_8$ صيغة تكرارية، أي أن β_8 اشتقت من β_6 و β_7. مجموع أرقام مقدمات الصيغة على الخط 9 (β_9) تساوي $\{3, 4\} \cup \{2, 3, 4\} = \{2, 3, 4\}$ وذلك لأن β_9 اشتقت من β_5 و β_8، أي أن $(\beta_5 \wedge \beta_8) \rightarrow \beta_9$. مجموعة أرقام مقدمات الصيغة على الخط 10 (β_{10}) تساوي المجموعة $\{1\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$ وذلك لأن $(\beta_1 \wedge \beta_9) \rightarrow \beta_{10}$ صيغة تكرارية، أي أن β_{10} اشتقت من β_1 و β_9. استخدمنا قاعدة البرهان الشرطي على الخط 11. مقدمة (ب.ش)، (K) تقع على الخط 4. لقد تم اشتقاق N على الخط 10. مجموعة أرقام المقدمات على الخط 10 هي $\{1, 2, 3, 4\}$ وهكذا فإن الصيغة على الخط 11 تكون $K \rightarrow N$ (β_{11}) ومجموعة أرقام مقدماتها تكون $\{1, 2, 3, 4\} - \{4\} = \{1, 2, 3\}$.

2. 8. 3 البرهان الغير مباشر (ب.غ) Indirect Proof

طريقة البرهان الغير مباشر معروفة لكل من درس الهندسة الإقليدية، وتمثل إضافة جديدة لتقوية إمكانياتنا على البرهنة. البرهان الغير مباشر لصحة صورة الحجة يقوم على إضافة نفي النتيجة كمقدمة البرهان الغير مباشر (ب.غ) إلى المقدمات الأصلية لصورة الحجة ثم نشتق من المقدمات الأصلية هذه والمقدمة المضافة نشتق صيغة متناقضة، أي صيغة ونفيها وينتج نفي

المقدمة المضافة أي تنتج نتيجة صورة الحجة المعطاة[1]. أي أن البرهان الغير مباشر ينص على ما يأتي: إذا كان

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ فإن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta \vdash \beta_1 \wedge \neg\beta_1$

يتوضح مما سبق أن البرهان الغير مباشر هو أيضا قاعدة اشتقاق صحيحة ويمكن إضافته إلى القواعد المعروفة ولكننا أفردنا فقرة له بسبب خصوصيته. إثبات صحة البرهان الغير مباشر يكون بواسطة المبرهنة أدناه.

مبرهنة

لتكن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ مقدمات صورة الحجة و β نتيجتها. لتكن β_1 أية صيغة. إذا كان $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ فإن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta \vdash \beta_1 \wedge \neg\beta_1$.

البرهان

بما أن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta \vdash \beta_1 \wedge \neg\beta_1$، إذن الاستلزام

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n \wedge \neg\beta) \rightarrow \beta_1 \wedge \neg\beta_1 \qquad (1)$$

صيغة تكرارية. وبما أن تالي (1) $(\beta_1 \wedge \neg\beta_1)$ صيغة متناقضة فإذن إحدى معطوفات المقدم يجب أن تكون كاذبة، أي أن إحدى المعطوفات $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \neg\beta$ يجب أن تكون كاذبة. عندنا حالتين:

1) إذا كانت إحدى المعطوفات $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ كاذبة فإذن يكون

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$$

صيغة تكرارية، وبالتالي يكون $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$.

[1] للمزيد من التفصيل راجع
د.أسعد الجنابي- البرهان غير المباشر، مركز البحوث، عدن، 1976.

2) إذا كانت $\neg\beta$ كاذبة فإن β صادقة فتكون $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow \beta$ صيغة تكرارية. وبالتالي يكون $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ وبهذا يتم البرهان.

مثال

سنعطي برهانا صوريا لصورة الحجة الصحيحة التالية:

المقدمات $(M \vee N) \rightarrow \neg L, (M \vee S) \wedge (S \rightarrow N)$

النتيجة $\neg L$

البرهان الصوري

سنستخدم البرهان الغير مباشر لاشتقاق $\neg L$ وذلك بإضافة نفيها $\neg\neg L$ أو L إلى المقدمات الأصلية واشتقاق صيغة متناقضة، $\beta_1 \wedge \neg\beta_1$ (حيث β_1 أية صيغة).

السبب	البرهان	أرقام الخطوط	أرقام المقدمات
م	$(M \vee N) \rightarrow \neg L$	1.	{1}
م	$(M \vee S) \wedge (S \rightarrow N)$	2.	{2}
(مقدمة ب.غ) م	L	3.	{3}
عكس النقيض ,1	$L \rightarrow \neg(M \vee N)$	4.	{1}
الوضع 3,4	$\neg(M \vee N)$	5.	{1, 3}
دي مورغان ,5	$\neg M \wedge \neg N$	6.	{1, 3}
التبسيط ,2	$S \rightarrow N$	7.	{2}
عكس النقيض ,7	$\neg N \rightarrow \neg S$	8.	{2}

$\{1,2,3\}$	9.	$\neg S$	الوضع 6,8
$\{2\}$	10.	$M \vee S$	التبسيط ,2
$\{2\}$	11.	$\neg M \rightarrow S$	الاستلزام ,10
$\{1,2,3\}$	12.	S	الوضع 6,11
$\{1,2,3\}$	13.	$S \wedge \neg S$	العطف 9, 12
$\{1,2\}$	14.	$\neg L$	ب.غ 3,13

سنبين مرة أخرى كيف أن المقدمات تظهر على كل سطر من البرهان. سنسمي أولا متتالية الصيغ التي تمثل البرهان الصوري في المثال أعلاه كما يلي β_1، β_2، β_3، β_4، β_5، β_6، β_7، β_8، β_9، β_{10}، β_{11}، β_{12}، β_{13}، β_{14} (النتيجة). مجموعتا أرقام المقدمات الأصلية هما $\{1\}$ و $\{2\}$، أما مجموعة أرقام المقدمة المضافة (مقدمة ب.غ) فهي $\{3\}$. (نشير إلى رقم المقدمة المضافة يكون دائما هو رقم الخط الذي تظهر عليه لأول مرة). الصيغة المشتقة β_4 تم اشتقاقها من β_1 وذلك لأن $\beta_1 \rightarrow \beta_4$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة مقدمات β_4 تكون هي نفسها مجموعة أرقام مقدمات β_1، أي $\{1\}$. الصيغة المشتقة β_5 تم اشتقاقها من β_3 وβ_4, ذلك لأن $(\beta_3 \wedge \beta_4) \rightarrow \beta_5$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة مقدمات β_5 تكون تساوي $\{1\} \cup \{3\} = \{1,3\}$. الصيغة المشتقة β_6 تم اشتقاقها من β_5 وذلك لأن $\beta_5 \rightarrow \beta_6$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة أرقام مقدمات β_6 تكون هي نفسها مجموعة أرقام مقدمات β_5، أي $\{1,3\}$. الصيغة المشتقة β_7 تم اشتقاقها من β_2 وذلك لأن $\beta_2 \rightarrow \beta_7$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة أرقام مقدمات β_7 تكون هي نفسها مجموعة أرقام

مقدمات β_2، أي {2}. الصيغة المشتقة β_8 تم اشتقاقها من β_7 وذلك لأن $\beta_7 \rightarrow \beta_8$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة أرقام مقدمات β_8 تكون هي نفسها مجموعة أرقام مقدمات β_7، أي {2}. الصيغة المشتقة β_9 تم اشتقاقها من الصيغتين β_6 و β_8 وذلك لأن $(\beta_6 \wedge \beta_8) \rightarrow \beta_9$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة أرقام مقدمات β_9 تكون {1,3} ∪ {2} = {1,2,3}. الصيغة المشتقة β_{10} تم اشتقاقها من β_2 وذلك لأن $\beta_2 \rightarrow \beta_{10}$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة أرقام مقدمات β_{10} تكون هي نفسها مجموعة أرقام مقدمات β_2، أي {2}. الصيغة المشتقة β_{11} تم اشتقاقها من β_{10} وذلك لأن $\beta_{10} \rightarrow \beta_{11}$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة أرقام مقدمات β_{11} تكون هي نفسها مجموعة أرقام مقدمات β_2، أي {2}. الصيغة المشتقة β_{12} تم اشتقاقها من الصيغتين β_6 و β_{11} وذلك لأن $(\beta_6 \wedge \beta_{11}) \rightarrow \beta_{12}$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة أرقام مقدمات β_{12} تكون {1,3} ∪ {2} = {1,2,3}. الصيغة المشتقة β_{13} تم اشتقاقها من الصيغتين β_9 و β_{12} وذلك لأن $(\beta_9 \wedge \beta_{12}) \rightarrow \beta_{13}$ صيغة تكرارية وإذن مجموعة أرقام مقدمات β_{13} تكون {1,2,3} ∪ {1,2,3} = {1,2,3}. على الخط 14 استخدمنا قاعدة البرهان الغير مباشر ومقدمة (ب.غ) L تقع على الخط 3. لقد تم اشتقاق الصيغة المتناقضة $S \wedge \neg S$ على الخط 13 ومجموعة أرقام المقدمات على هذا الخط هي {1,2,3} وهكذا فإن الصيغة على الخط 14 تكون $\neg L$ (β_{14}) ومجوعة أرقام مقدماتها {1,2,3} − {3} = {1,2}.

يظهر البرهان غير المباشر عموما على شكل ثلاث حالات كما هو مبين أدناه.

الحالة الأولى:

لبرهان أية مبرهنة مطلوبة $K \to L$ حيث K شرطها و L نتيجتها، نقوم عوضا عن ذلك ببرهان صدق القضية $(\neg L \wedge K) \to \neg K$. أي نقوم بافتراض نفي L $(\neg L)$ وبعد ذلك وباستخدام $\neg L$ و K يتم برهان $\neg K$. وبما أن $K \to L$ تكافئ $(\neg L \wedge K) \to \neg K$ فإننا نكون قد برهنا $K \to L$ المطلوبة. جدول الصدق أدناه يبرهن التكافؤ المذكور وذلك ببرهان أن:

$\alpha \equiv (K \to L) \leftrightarrow ((\neg L \wedge K) \to \neg K)$ صيغة تكرارية.

K	L	$\neg L \wedge K$	$K \to L$	$(\neg L \wedge K) \to \neg K$	α
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T

الحالة الثانية:

لبرهان أية مبرهنة مطلوبة $K \to L$ حيث K شرطها و L نتيجتها، نقوم عوضا عن ذلك ببرهان صدق القضية $(\neg L \wedge K) \to L$. أي نقوم بافتراض نفي L $(\neg L)$ وبعد ذلك وباستخدام $\neg L$ و K يتم برهان L. وبما أن $K \to L$ تكافئ $(\neg L \wedge K) \to L$ فإننا نكون قد برهنا $K \to L$ المطلوبة. جدول الصدق أدناه يبرهن التكافؤ المذكور وذلك ببرهان أن:

$\alpha \equiv (K \to L) \leftrightarrow ((\neg L \wedge K) \to L)$ صيغة تكرارية.

K	L	$\neg L \wedge K$	$K \to L$	$(\neg L \wedge K) \to L$	α
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	T
F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T

الحالة الثالثة:

لبرهان أية مبرهنة مطلوبة $L \to K$ حيث K شرطها وL نتيجتها، نقوم عوضا عن ذلك ببرهان صدق القضية $(\neg L \wedge K) \to (R \wedge \neg R)$. أي نقوم بافتراض نفي L ($\neg L$) وبعد ذلك وباستخدام $\neg L$ وK يتم برهان صيغة متناقضة $R \wedge \neg R$. وبما أن $L \to K$ تكافئ $\alpha \equiv (\neg L \wedge K) \to (R \wedge \neg R)$ فإننا نكون قد برهنا $L \to K$ المطلوبة. جدول الصدق أدناه يبرهن التكافؤ المذكور وذلك ببرهان أن: $\beta \equiv (K \to L) \leftrightarrow ((\neg L \wedge K) \to (R \wedge \neg R))$ صيغة تكرارية.

K	L	R	$K \to L$	$K \wedge \neg L$	$R \wedge \neg R$	α	β
T	T	T	T	F	F	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	F	T	T

لقد توصلنا أعلاه إلى المتكافئات الثلاثة التالية:

$$K \to L \Leftrightarrow (\neg L \wedge K) \to \neg K \qquad (1)$$

$$K \to L \Leftrightarrow (\neg L \wedge K) \to L \qquad (2)$$

$$K \to L \Leftrightarrow (\neg L \wedge K) \to (R \wedge \neg R) \qquad (3)$$

وهكذا فحتى نبرهن أن $K \to L$ صادقة فيكفي أن نبرهن صدق إحدى الصيغ:
$(\neg L \wedge K) \to \neg K$، $(\neg L \wedge K) \to L$، $(\neg L \wedge K) \to (R \wedge \neg R)$.

بما أنه في كل الحالات أعلاه يستخدم نفي النتيجة فيقال أن المبرهنة قد برهنت بواسطة (البرهان غير المباشر). يستخدم البرهان بدون معرفة المنطق الرياضي، ولكن بدون المنطق الرياضي لا يمكن إثبات صحة البرهان.

إذا كان شرط المبرهنة المطلوبة (K) هو وصل لقضيتين، أي أن المبرهنة على الشكل $(K_1 \wedge K_2) \to L$ فإن صدقها يمكن برهانه باستخدام المتكافئة:

$$(K_1 \wedge K_2) \to L \Leftrightarrow (\neg L \wedge ((K_1 \wedge K_2) \to \neg K_1)) \qquad (1)$$

أو

$$(K_1 \wedge K_2) \to L \Leftrightarrow (\neg L \wedge ((K_1 \wedge K_2) \to \neg K_2)) \qquad (2)$$

يمكن برهان هاتين المتكافئتين باستخدام جداول الصدق وذلك ببرهان (على الترتيب) أن:

('1) $((K_1 \wedge K_2) \to L) \leftrightarrow (\neg L \wedge ((K_1 \wedge K_2) \to \neg K_1))$ صيغة تكرارية.

('2) $((K_1 \wedge K_2) \to L) \leftrightarrow (\neg L \wedge ((K_1 \wedge K_2) \to \neg K_2))$ صيغة تكرارية.

يمكن إجراء تعميم ليشمل الحالات التي يكون فيها شرط المبرهنة هو وصل لأكثر من قضيتين.

9.2 الاتساق وعدم الاتساق Consistency and Inconsistency

نقول أن مجموعة من مجموعة من الصيغ تكون متسقة إذا لم يكن بالإمكان اشتقاق صيغة متناقضة منها. إذا رمزنا لمجموعة الصيغ بالرمز Γ وبالرمز α لأية صيغة فيمكننا كتابة تعريف الاتساق المذكور رمزيا كالتالي:

$\Gamma \nvdash \alpha \wedge \neg\alpha$ ($\nvdash$ يقرأ لا يقرر)، حيث α أية صيغة.

لتكن $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n\}$ حيث أن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ هي الصيغ. إذن حتى تكون Γ متسقة فيجب أن تكون:

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n \nvdash \alpha \wedge \neg\alpha$، حيث α أية صيغة. أي أن :

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha) \qquad (1)$$

ليست صيغة تكرارية. وبما أن تالي هذا الاستلزام كاذبا دائما فإذن حتى لا تكون (1) صيغة تكرارية فيجب أن يكون مقدمها $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ صادقا. أي أن جميع المعطوفات $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ يجب أن تكون صادقة، وهكذا يمكننا أن نقول: حتى تكون مجموعة من الصيغ متسقة فيجب أن تكون جميعها صادقة في نفس الوقت. وهذا شرط كافي لاتساقها.

مبرهنة

مجموعة من الصيغ تكون متسقة إذا وفقط إذا أمكن تعيين قيم صدق متغيراتها القضائية بحيث تكون جميع الصيغ صادقة في نفس الوقت.

لنرمز للقضية (مجموعة من الصيغ تكون متسقة) بالرمز K وللقضية (يمكن تعيين قيم صدق لمتغيراتها القضائية بحيث تكون جميعها صادقة في نفس الوقت) بالرمز L. إذن يمكن كتابة المبرهنة على شكل استلزام ثنائي $L \leftrightarrow K$. سنبرهن $L \rightarrow K$ أولا ثم نبرهن $K \rightarrow L$.

البرهان 1: سنبرهن صدق $L \rightarrow K$ وذلك ببرهان صدق مكافأتها $\urcorner K \rightarrow \urcorner L$.

لتكن مجموعة الصيغ $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n\}$ ولنفرض أنه لا يمكن تعيين قيم صدق المتغيرات القضائية في Γ بحيث تكون جميع الصيغ صادقة ($\urcorner L$).

وإذن يكون الوصل $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n$ كاذبا. وهكذا يكون الاستلزام $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow \alpha \wedge \urcorner \alpha$ صيغة تكرارية (لأنه سيكون على الشكل $F \rightarrow F$). وهكذا يكون $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \vdash \alpha \wedge \urcorner \alpha$. أي أنه يمكن اشتقاق صيغة α ونفيها $\urcorner \alpha$ من مجموعة الصيغ وبالتالي تكون مجموعة الصيغ غير متسقة ($\urcorner K$).

البرهان 2 : سنستخدم طريقة البرهان المباشر في برهان $K \rightarrow L$. نفرض أنه يمكن تعيين قيم صدق للمتغيرات القضائية بحيث تكون جميع الصيغ صادقة في نفس الوقت. أي أن $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n$ صيغة تكرارية.

وإذن تكون $(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge ... \wedge \alpha_n) \rightarrow (\alpha \wedge \urcorner \alpha)$ كاذبة.

أي أن $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n \vdash \alpha \wedge \urcorner \alpha$ وبالتالي تكون مجموعة الصيغ متسقة(K).

مثال: حدد فيما إذا كانت الصيغتان التاليتان متسقتين أو غير متسقتين:

$$\alpha_1: K \wedge L, \alpha_2: K \rightarrow (\urcorner L \wedge \urcorner M)$$

الحل: سنحاول البرهان على اتساق α_1 و α_2 وذلك بتعيين قيم صدق للمتغيرات القضائية K، L، M بحيث تكون α_1 و α_2 صادقتين. حتى تكون α_1 صادقة فيجب أن تكون K صادقة و L صادقة. حتى تكون α_2 صادقة وبما أن K صادقة فيجب أن تكون $\neg L$ و $\neg M$ صادقتين، أي أن L يجب أن تكون كاذبة و M يجب أن تكون كاذبة. وهكذا وصلنا إلى طريق مسدود: (L يجب أن تكون صادقة وكاذبة في نفس الوقت). إذن لا يمكن تعيين قيم صدق للمتغيرات القضائية بحيث تكون α_1 و α_2 صادقتين. إذن فهما غير متسقتين. سنضع هذه المناقشة على شكل برهان صوري كما يلي:

البرهان

{1}	1.	$K \wedge L$	م
{2}	2.	$K \rightarrow (\neg L \wedge \neg M)$	م
{1}	3.	K	التبسيط 1,
{1,2}	4.	$\neg L \wedge \neg M$	الوضع 2,3
{1,2}	5.	$\neg L$	التبسيط 4,
{1}	6.	L	التبسيط 1,
{1,2}	7.	$L \wedge \neg L$	العطف 5,6

البرهان الصوري أعلاه يبين إمكانية اشتقاق صيغة α (هي L) ونفيها $\neg L$ من الصيغتين α_1 و α_2، أي أنهما فعلا غير متسقتين.

للبرهنة على اتساق الصيغ بطريقة جداول الصدق يكفي أن نجد سطر واحد على الأقل في جدول صدق الصيغ تمتلك فيه كل مقدمة القيمة T (أي

أنها صادقة). وهكذا فإن عدم وجود أي سطر تكون فيه جميع الصيغ صادقة يعني عدم اتساق هذه الصيغ.

مثال 1: الصيغ $K \rightarrow L$, $K \wedge L$, $K \vee L$ متسقة وذلك لوجود سطر واحد على الأقل (هنا السطر الأول) تكون فيه جميع الصيغ صادقة، كما هو مبين في الجدول.

K	L	$K \vee L$	$K \wedge L$	$K \rightarrow L$
T	T	T	T	T
T	F	T	F	F
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

مثال 2: الصيغ $\neg L$, $K \vee L$, $\neg L \rightarrow \neg K$ غير متسقة وذلك لعدم وجود أي سطر تكون فيه جميع الصيغ صادقة، كما هو مبين في الجدول أدناه

K	L	$\neg L \rightarrow \neg K$	$K \vee L$	$\neg L$
T	T	T	T	F
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

2. 10 المبادئ العامة للتوصل إلى البراهين الصورية

إن البرهان عملية ذهنية وبالتالي لا توجد أفضل طريقة نستطيع أن ننصح بها للتوصل إلى البرهان الصوري لأنه توجد أكثر من طريقة واحدة. ولكن الوصول إلى أسهل وأكثر اختصارا لبرهان صحة صورة حجة ما يعتمد بالتأكيد على تركيب نتيجة صورة الحجة. أي هل أنها: متغير قضائي، نفي، وصل، فصل، استلزام، استلزام ثنائي؟. سنورد أدناه مبادئ عامة نراها مفيدة من اجل التوصل إلى البراهين الصورية.

(1) إذا كانت النتيجة متغير قضائي N أو نفي المتغير القضائي N⌉ ولم يكن البرهان المباشر واضحا نستخدم البرهان غير المباشر وذلك بإضافة نفي النتيجة واشتقاق صيغة متناقضة.

(2) إذا كانت النتيجة وصلا $M \wedge N$ نبرهن كل من المعطوفتين حسب (1) ثم نستخدم قاعدة العطف.

(3) إذا كانت النتيجة فصلا $M \vee N$ نبرهن إحدى المفصولتين ثم نستخدم قاعدة الجمع.

(4) إذا كانت النتيجة استلزاما $M \rightarrow N$ نستخدم البرهان الشرطي وذلك بإضافة المقدم M إلى المقدمات الأصلية واشتقاق التالي N.

(5) إذا كانت النتيجة استلزاما ثنائيا $M \leftrightarrow N$ نبرهن $M \rightarrow N$ و $N \rightarrow M$ حسب (4) ثم نستخدم قاعدة الاستلزام الثنائي.

11.2 اكتشاف البراهين الصورية

لقد لاحظنا وجود نوع من الصعوبة لدى الطلبة عند برهان صحة حجة، وعلى وجه الخصوص، ليس واضح لديهم من أين يبدؤون وكيف يستمرون للوصول إلى النتيجة، وبعبارة أخرى هم يعانون من صعوبة اكتشاف المتتالية المطلوبة من الصيغ، والتي تمثل البرهان الصوري. وبشكل أدق، لا يعرفون ما هي الصيغة التي يبدؤون بها وما هي قواعد الاشتقاق، التي يجب تطبيقها على هذه الصيغة وعلى الصيغ الأخرى للوصول إلى النتيجة المثال التوضيحي التالي يبين طريقة اكتشاف البراهين الصورية في حساب القضايا. وتطبق الطريقة نفسها، بخطوطها العامة في الفصل الخامس.

مثال

لنحدد صحة صورة الحجة التالية وذلك بإعطائها برهان صوري

المقدمات : $K \rightarrow (L \vee M), L \rightarrow N, M \rightarrow N, N \rightarrow \rceil O, O$

النتيجة : $\rceil K$

حتى نشتق $\rceil K$ نرى أن المتغير القضائي K موجود في المقدمة الأولى، وهكذا فيمكن اشتقاق $\rceil K$ من هذه المقدمة. ومن أجل ذلك يجب أن تكون لدينا الصيغة $\rceil (L \vee M)$ ونطبق قاعدة النفي التالي على المقدمة الأولى، أي يجب أن تكون لدينا $\rceil M \wedge \rceil L$ المكافئة إلى $\rceil (L \vee M)$. ومن أجل ذلك يجب أن تكون لدينا $\rceil L$ و $\rceil M$ ونطبق قاعدة العطف.

(1) $\rceil L$ يمكن الحصول عليها من المقدمة الثانية، إذا كانت لدينا $\rceil N$ وبتطبيق قاعدة نفي التالي.

(2) $\neg M$ يمكن الحصول عليها من المقدمة الثالثة، إذا كانت لدينا $\neg N$ وبتطبيق قاعدة نفي التالي.

ومن أجل الحصول على $\neg N$ فيجب أن تكون لدينا $\neg\neg O$ ونطبق قاعدة نفي التالي على $\neg\neg O$ والمقدمة الرابعة. وحتى يكون لدينا $\neg\neg O$ فيجب أن تكون لدينا O ونطبق قاعدة النفي المزدوج على O.

الآن نلاحظ أن O تكون لدينا وهي المقدمة الخامسة.

مما ورد أعلاه تبين لنا أن متتالية الصيغ، التي تمثل البرهان الصوري المطلوب هي :

1. $\neg\neg O$ نشتقها من المقدمة الخامسة بتطبيق النفي المزدوج.
2. $\neg N$ نشتقها من $\neg\neg O$ والمقدمة الرابعة بتطبيق نفي التالي.
3. $\neg M$ نشتقها من $\neg N$ والمقدمة الثالثة بتطبيق النفي التالي.
4. $\neg L$ نشتقها من $\neg N$ والمقدمة الثانية بتطبيق النفي التالي.
5. $\neg M \wedge \neg L$ نشتقها من $\neg L$ و $\neg M$ بتطبيق العطف.
6. $\neg(L \vee M)$ نشتقها من $\neg M \wedge \neg L$ بتطبيق دي مورغان.
7. $\neg K$ (النتيجة) نشتقها من $(L \vee M)\neg$ والمقدمة الأولى بتطبيق النفي التالي.

يجد القارئ البرهان الصوري الكامل لهذا المثال في حلول تمارين هذا الفصل.

2. 12 تمارين

(أ) حدد فيما إذا كانت كل صيغة مما يأتي: تكرارية، متناقضة أم عارضة.

(1) $\neg\neg K \rightarrow K$، (2) $\neg(K \vee L) \leftrightarrow (\neg K \wedge \neg L)$

(3) $(K \vee L) \to \neg(L \vee K)$، (4) $(K \to L) \vee \neg L$

(5) $(K \wedge \neg K) \to (L \vee \neg L)$، (6) $(K \to L) \wedge \neg(K \to L)$

(7) $(K \to L) \leftrightarrow (\neg L \to \neg K)$

(ب) في كل زوج من الصيغ التالية وباستخدام جداول الصدق حدد فيما إذا كانت :

(ب) $\Rightarrow$ (أ)

(أ) $\Rightarrow$ (ب)

(ب) $\Leftrightarrow$ (أ)

ليس أيا مما ذكر.

(1) (أ) $\neg K \to L$ (ب) $K \vee L$

(2) (أ) $K \to L$ (ب) $K \wedge (K \to L)$

(3) (أ) $(K \to L) \wedge (L \to R)$ (ب) $L \to R$

(4) (أ) $K \vee (L \vee R)$، (ب) $(K \vee L) \vee \neg R$

(5) (أ) $(K \to R) \to R$، (ب) $(K \wedge R) \to \neg R$

(ج)

(1)جد صيغة تحوي الرابطين $\neg$ ، $\vee$ فقط وتكون مكافئة إلى

$$(\neg K \wedge \neg L) \to (\neg M \wedge N)$$

(2) جد صيغة تحوي الرابطين $\neg$ ، $\wedge$ فقط. وتكون مكافئة إلى

$$K \to (L \to M)$$

(3) جد صيغة تحوي الرابطين $\urcorner$، V فقط وتكون مكافئة إلى $K \leftrightarrow L$

(4) جد صيغة تحوي الرابطين $\urcorner$، $\wedge$ فقط وتكون مكافئة إلى

$$(K \leftrightarrow \urcorner L) \leftrightarrow M$$

(5) جد صيغة تحوي الرابطين $\urcorner$، $\rightarrow$ فقط وتكون مكافئة إلى $(L \wedge M) \wedge K$

(د) ترجم أزواج القضايا التالية إلى لغة حساب القضايا ثم بين باستخدام جداول الصدق إن كانت متكافئة (المصدر، أفلاطون، النواميس)[1]

(1) (أ) إذا كان شيء ما حيا، فإنه ذو روح، وإذا كان ذا روح، كان متحركا بذاته.

(ب) إذا كان شيء ما متحركا بذاته، فإنه ذو روح، وإذا كان ذا روح، كان حيا.

(2) (أ) إذا كانت الروح متحركة بذاتها وكان كل ما هو متحرك بذاته مصدر التغير، كانت الروح مصدر التغير.

(ب) لا يصدق القولان أن الروح ليست مصدر التغير وكذلك أن الروح متحركة بذاتها وأن كل ما هو متحرك بذاته مصدر التغير.

(3) (أ) إما أن تكون الروح ذاتها مصدر كل من الخير والشر أو أن تكون روح واحدة مصدر الخير وروح أخرى مصدر الشر.

(ب) إذا لم تكن الروح ذاتها مصدر كل من الخير والشر، فإن روحا واحدة مصدر الخير وروحا أخرى مصدر الشر.

---

[1] مقتبس عن د. كريم متي – المنطق الرياضي، مؤسسة الرسالة، بيروت 1979، عن :

Purtill, R, L. – Logic for philosofers , Harper & Row, Publishers, New-York, 1971.

(ه) برهن صحة أو خطأ كل من الحجج التالية.

(1) المقدمات $\neg L \rightarrow \neg K,\ L \leftrightarrow \neg M,\ K$

النتيجة $\neg M$

(2) المقدمات $L \rightarrow M,\ \neg(K \leftrightarrow M)$

النتيجة $\neg M \rightarrow K$

(و) أعط براهين صورية مباشرة لكل من الحجج التالية:

(1) المقدمات $K \rightarrow (L \vee M),\ L \rightarrow N,\ M \rightarrow N,\ N \rightarrow \neg O,\ O$

النتيجة $\neg K$

(2) المقدمات $L \leftrightarrow (M \wedge K)$ ، $M \rightarrow \neg K$

النتيجة $\neg L$

(3) المقدمات $K \rightarrow (L \rightarrow M),\ \neg M$

النتيجة $\neg K \vee \neg L$

(ز) أعط برهانا صوريا لكل من الحجج التالية[1]:

(1) إذا كان الموت انفصال الروح عن الجسم، فإنه إذا كانت الروح قادرة على الوجود مستقلة عن الجسم، فإن الروح تصبح حرة حين يموت الجسم. إذن إذا

[1] مقتبس عن المصدر السابق.

لم يكن من الصدق أن الروح تصبح حرة حين يموت الجسم، فإما أن لا يكون الموت انفصال الروح أو أن الروح لا تستطيع أن توجد مستقلة عن الجسم.

(2) إذا فسدت الروح حين يفسد الجسم، فإنه ينبغي أن نخشى الموت، ولكن إذا لم تفسد الروح حين يموت الجسم، فهناك أمل. وبطبيعة الحال إما أن تفسد الروح حين يموت الجسم أو لا تفسد. من هذا يلزم أنه إذا لم يكن هناك أمل، فإنه ينبغي أن نخشى الموت.

(3) إذا ألقيت أسئلة على الناس بصورة صحيحة، فإنهم يظهرون معرفة لم يكتسبوها في هذه الحياة. وما كان في مستطاعهم أن يفعلوا ذلك، لو أنهم لم يكتسبوا معرفتهم في حياة سابقة. وإذا اكتسبوا معرفتهم في حياة سابقة، فإنه يمن البرهنة على أن الروح يمكن أن توجد مستقلة عن الجسم.وعليه إذا ألقيت أسئلة على الناس بصورة صحيحة فإنه يمكن البرهنة على أن الروح يمكن أن توجد مستقلة عن الجسم.

(4) إذا كانت الروح تشبه نغما يعزف على آلة موسيقية، فإنه لا يمكن أن توجد الروح قبل أن يوجد الجسم. ولكن إذا كانت الحجة المستندة إلى التذكر قوية، فإن الروح قد وجدت قبل أن يوجد الجسم. وإذا كانت الروح قد وجدت قبل أن يوجد الجسم، فإن الروح يمكن أن توجد قبل أن يوجد الجسم. وعليه، فإما أن الحجة المستندة إلى التذكر ليست قوية أو أن الروح ليست نغما عزف على آلة موسيقية.

(ح) ترجم إلى اللغة الرمزية لحساب القضايا كلا من الحجج التالية وحدد صحة كل حجة. إذا كانت الحجة خاطئة أعط مثالا مضادا وإذا كانت صحيحة أعط برهانا صوريا.

(1) إذا لم أذهب لقضاء إجازتي أو القيام بعمل إضافي فإني سأبيع سيارتي وأكسب بعض المال. إذن، سأذهب لقضاء إجازتي أو سأبيع سيارتي.

(2) إذا فازت الجزائر أو سوريا بكأس العرب لكرة القدم فإني أكون سعيدا وأقيم احتفالا. إذن، إذا فازت الجزائر بكأس العرب لكرة القدم فإني أكون سعيدا.

(3) علي يذهب إلى المكتبة أو سالم وفاطمة يذهبان إلى المكتبة. إذا ذهب علي الى المكتبة فإن فاطمة تذهب إلى المكتبة. إذن، فاطمة تذهب إلى المكتبة.

(4) إذا تغيب أحمد عن دروس المنطق أو تهاون في مراجعة دروسه فإن أحمد يرسب أو يطرد من الجامعة. إذا تهاون أحمد في مراجعة دروسه أو رسب فإنه سيشعر بالإهانة. لن يشعر أحمد بالإهانة وسيتغيب عن دروس المنطق. إذن، سيطرد أحمد من الجامعة.

(5) إذا هرب سالم من بيته فإنه ليس بريئا من التهمة الموجهة إليه أو لن يكون آمنا من القبض عليه. إذا كان سالم بعيدا عن مكان الجريمة فإنه بريء. إذا كان سالم بريئا فإنه سيكون آمنا من القبض عليه. سالم بعيد عن مكان الجريمة. إذن، لن يهرب سالم من بيته.

(6) إذا أقام علي احتفالا بمناسبة نجاحه فإنه سيدعي للاحتفال سمير وفائزة. إذا دعا علي سمير أو فائزة فإنه يجب أن يدعي أحمد. إذن، إذا أقام علي احتفالا بمناسبة نجاحه فإنه يجب أن يدعي أحمد.

(ط) حدد صحة كل من صور الحجج التالية. إذا كانت خاطئة أعط مثالا مضادا وإذا كانت صحيحة أعط برهانا صوريا.

(1) المقدمات

$$\neg B \vee (M \wedge C),\ \neg B \rightarrow D$$

النتيجة $C \vee D$

(2) المقدمات

$$(C \rightarrow A) \wedge (A \rightarrow B),\ E \rightarrow C$$

النتيجة B

(3) المقدمات

$$(\neg M \wedge \neg L) \rightarrow \neg K,\ \neg K \rightarrow \neg L,\ M$$

النتيجة K

(4) المقدمات

$$A \rightarrow (B \leftrightarrow C),\ B \vee \neg C,\ \neg A \rightarrow D$$

النتيجة D

(5) المقدمات

$$A \rightarrow C,\ \neg C \vee D,\ B \leftrightarrow D,\ B \rightarrow \neg(\neg A \wedge D)$$

النتيجة $A \leftrightarrow B$

(6) المقدمات

$$(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D), (E \wedge B) \rightarrow A$$

النتيجة $(E \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$

(7) المقدمات

$$R \rightarrow (Z \rightarrow X), R \rightarrow (\neg Z \rightarrow S), \neg R \rightarrow O, Z \vee \neg R$$

النتيجة $X \vee O$

(8) المقدمات

$$(A \wedge B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg C), E \rightarrow A$$

النتيجة $(E \wedge C) \rightarrow (D \vee \neg B)$

(ي) أعط برهانا شرطيا لكل من صور الحجج التالية:

(1) المقدمات $K \rightarrow (L \vee M), N \rightarrow K$

النتيجة $N \rightarrow (\neg L \rightarrow M)$

(2) المقدمات $(\neg K \vee \neg L) \rightarrow \neg M, N \rightarrow M$

النتيجة $N \rightarrow (K \wedge L)$

(3) المقدمات $K \rightarrow (L \wedge M), ((N \vee L) \wedge M) \rightarrow O$

النتيجة $K \rightarrow O$

(ك) برهن النتائج التالية من المقدمات وذلك باستخدام طريقة البرهان غير المباشر :

(1) المقدمات $\neg A \rightarrow (B \vee C), C \vee D, \neg B \vee \neg D$

النتيجة $A \vee C$

(2) المقدمات $A \to (D \wedge E), C \vee E, C \to (A \wedge \neg D)$

النتيجة $E \wedge \neg C$

(3) المقدمات $\neg A \to (B \to C), A \to D, B \to \neg C, A \vee B$

النتيجة $A \wedge D$

(ل) املأ نقص المعلومات في كل من البرهانين الصحيحين التاليين:

(1)

السبب	البرهان	أرقام الخطوط	أرقام المقدمات
م	$(L \to M) \wedge (B \to A)$	1.	{1}
(مقدمة ب.ش) م	$L \wedge B$	2.	{2}
	$L \to M$	3.	
	$(B \to A) \wedge (L \to M)$	4.	
	$B \to A$	5.	
	L	6.	
	M	7.	
	$B \wedge L$	8.	
	B	9.	
	A	10.	
	$M \wedge A$	11.	
	$(L \wedge B) \to (M \wedge A)$	12.	

(2)

أرقام المقدمات	أرقام الخطوط	البرهان	السبب
{1}	1.	$K \rightarrow \neg(M \vee L)$	م
{2}	2.	$(\neg L \rightarrow \neg G) \wedge (\neg M \rightarrow G)$	م
{3}	3.	K	(مقدمة ب.غ) م
	4.	$\neg(M \vee L)$	
	5.	$\neg M \wedge \neg L$	
	6.	$\neg L \rightarrow \neg G$	
	7.	$\neg M \rightarrow G$	
	8.	$\neg G$	
	9.	G	
	10.	$G \wedge \neg G$	
	11.	$\neg K$	

(م) ترجم إلى لغة حساب القضايا كل من القضايا التالية ثم حدد فيما إذا كانت متسقة أم غير متسقة. إذا كانت متسقة فعين قيم صدق للمتغيرات القضائية بحيث تكون جميع القضايا صادقة، وإذا كانت غير متسقة فأعطي برهانا صوريا لصيغة متناقضة.

(1) إذا فسدت الروح حين يموت الجسم، فإنه ينبغي أن نخشى الموت.

إذا لم تفسد الروح حين يموت الجسم، فإن هناك أمل. تفسد الروح حين يموت الجسم أو لا تفسد.

(2)إذا تخرج أحمد علي من الجامعة، فإن أحمد أو علي سيحصلان على عمل.إذا حصل أحمد على عمل، فإن علي لن يحصل. وإذا تخرج علي من الجامعة، فإن أحمد لن يتخرج. لن يتخرج أحمد من الجامعة ولن يتخرج علي من الجامعة، ولكن أحمد أو علي سيحصل على عمل.

(3)إذا كان $a < b$ و $b < c$ ، فإن $a < c$. إذا كان $a < b$ و $b \nless c$ ، فإن $a \nless c$. إذا كان $a \nless b$ و $b < c$ ، فإن $a < c$. ولكن $a < c$ إذا وفقط إذا كان $a < b$ و $b < c$ أو $a \nless b$.

(ن) برهن اتساق أو عدم اتساق كل من مجموعات الصيغ التالية :

(1) $K \wedge \neg L$ ، $K \rightarrow (L \vee M)$

(2) $K \wedge \neg N$ ، $\neg M \rightarrow N$ ، $M \rightarrow \neg L$ ، $K \rightarrow L$

(3) $\neg L \vee N$ ، $K \vee \neg N$ ، $K \leftrightarrow (L \vee M)$ ، $L \leftrightarrow \neg K$ ، $M \vee \neg N$

(4) $M \rightarrow N$ ، $\neg K \rightarrow (M \vee N)$ ، $\neg(N \vee K)$

الفصل الثالث

الأنساق الصورية لحساب القضايا

Formal Systems of Propositional Calculus

3. 1 الأنساق الاستنباطية — Deductive Systems

يتكون أي نسق استنباطي من مجموعة من المفاهيم غير المعرفة (الأولية) والتي يتم بواسطتها تعريف مفاهيم أخرى في النسق، غير أولية (معرفة) ومن مجموعة من القضايا يتم تقبلها بدون برهان وتدعى البديهيات. باستخدام المفاهيم المعرفة وغير المعرفة والبديهيات يتم برهان قضايا النسق الأخرى والتي تؤلف مجموعة المبرهنات. والأنساق الاستنباطية يمكن أن تكون رياضية، فيزيائية (جزء من الفيزياء) أو نسق لعلم الحياة[1].

1. مجموعة المفاهيم الأولية — Set of Premitive concepts

توجد ضرورة لأخذ بعض المفاهيم بدون تعريف. سنوضح هذه الضرورة بالمثال التالي: لنأخذ تعريف مفهوم (العدد الأولي) وهو (عدد صحيح أكبر من 1 ولا يقبل القسمة على أي عدد صحيح موجب عدا نفسه والعدد 1). هذا التعريف يربط مفهوم (العدد الأولى) مع مفاهيم أساسية أكثر وهي: (عدد صحيح)، (موجب)، (العدد 1) و(يقبل القسمة). إن أي تعريف يربط المفهوم المعرف بمفاهيم أخرى. بعض أو جميع هذه المفاهيم الأخرى

1Carnap, R.-Introduction to symbolic logic and its application, Dover publication, Inc. 1958.

يجب أن تعرف باستخدام مفاهيم أكثر وهكذا دواليك. من الواضح أن عملية التعريف يجب أن تتوقف في مكان ما لتجنب هذا التراجع اللانهائي أو أن نقضي كل وقتنا معرفين مفاهيم أكثر وأكثر ولن نستطيع بناء أية نظرية. إذن، يجب ترك بعض المفاهيم بدون تعريف وهذه هي المفاهيم الأولية. أما تحديد أي المفاهيم نعتبرها أولية فهي مسألة اختيارية تخص واضع النسق، أي أنه حر في اختيار مفهومه (أو مفاهيمه الأولية).

2. مجموعة البديهيات Set of Axioms

إن بناء النسق الاستنباطي يحتم أيضا عدم الاستمرار ببرهان قضية بواسطة قضية (أو قضايا) أخرى وهكذا دواليك. لتجنب هذا التراجع اللانهائي يجب تقبل قضية (أو قضايا) بدون برهان ونسميها البديهيات. أما تحديد أي القضايا نعتبرها بديهيات فهي مسألة اختيارية تخص واضع النسق، أي أنه حر في اختيار بديهياته ولا يعود هذا الاختيار إلى وضوحها بذاتها كما يعتقد البعض عن جهل. إن العديد من الأنساق الاستنباطية تبدأ بمجموعة بديهيات مختلفة عن بعضها البعض.

لقد ظهرت أنساق استنباطية لاإقليدية استعملت نفي بديهية إقليدس للتوازي بديهية لها. فلقد قام العالم الروسي لوباتشفسكي والهنغاري بولياي في بداية القرن 19 بوضع النسق اللاإقليدي المسمى (هندسة القطع الزائد). نفس الشيء حدث بالنسبة إلى العالم ريمان الذي وضع نسقا هندسيا لاإقليديا آخر هو (الهندسة الإهليجية).

3. 2 النسق الصوري Formal System

لقد كانت عملية الاشتقاق هدفا لدراستنا في الفصل السابق ومن أجل ذلك قمنا بترجمة القضايا إلى اللغة الرمزية لحساب القضايا وذلك من أجل دراسة العلاقات فيما بينها وهما علاقاتي (ينتج) و(يكافئ). كذلك قمنا بترجمة الحجج إلى نفس اللغة الرمزية للحصول على صورها حتى تكون عملية تحديد صحتها ممكنة وسهلة المنال باستخدام جداول الصدق أولا ثم باستخدام البراهين الصورية.

إن ما سنقوم به الآن هو بناء نسقا استنباطيا صوريا ونقصد بصوريته حالة استخدام الرموز التي ليس لها أي معنى. الفرق بين النسق الاستنباطي والنسق الاستنباطي الصوري (اختصارا نقول (النسق الصوري)) هو أن المفاهيم الأولية للنسق الصوري تكون رموز ليس لها أي معنى، أي أنها لا تحمل أي محتوى. أما بديهياته فهي صيغ تتكون حسب قواعد معينة ولا تمثل قضايا أبدا. كما أن مجموعة مبرهنات النسق هي صيغ أيضا.

تظهر الأهمية الحاسمة للأنساق الصورية في المنطق إذا علمنا أنه ما لم يبن المنطق كنسق صوري فإنه يكون من المستحيل على المنطق أن يبلغ هدفه. وذلك لعدم وجود طريقة أخرى (غير بناءه كنسق) لتحديد فيما إذا كان المنطق تاما، أي أنه يحوي كل الصيغ الصادقة دائما وكذلك فيما إذا كان متسقا، أي يحوي أو لا يحوي صيغة ونفيها معا[1]. إن دراسة الأنساق

[1] Hackstaft, L.H.-Systems of Formal Logic, D.Reidel publishing Co.Dordrecht-Holland, 1966, p.11.

المنطقية تعتبر من المهام المركزية للمنطق[1]. سندرس في هذا الفصل نسقا صوريا لحساب القضايا محددين أدناه كيفية بناءه.

مكونات النسق الصوري

يكون النسق الصوري معرفا وذلك بتوفر ما يلي :

(1) رموز النسق (أبجدية النسق).

(2) صيغ هي عبارة عن مجموعة نهائية من تتابع لرموز النسق. يمكن تصور هذه الصيغ مثل كلمات وجمل لغتنا الصورية العادية.

(3) مجموعة جزئية من الصيغ في (2) نسميها البديهيات.

(4) مجموعة نهائية من قواعد الاشتقاق. قواعد الاشتقاق هذه تمكننا من أن نقرر فيما إذا كانت صيغة معلومة تنتج (تشتق) من مجموعة نهائية من صيغ معلومة أخرى.

3 .3 النسق الصوري P

مكونات النسق الصوري P

يكون النسق الصوري لحساب القضايا P معرفا وذلك بتوفر ما يلي :

(1) رموز لانهائية للنسق (أبجدية النسق) وتتكون من :

(أ) الحروف ...,A,B,C وهذه الحروف ودلائلها... $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ وندعوها المتغيرات القضائية. الرمزان $\neg$, $\rightarrow$ وندعوهما الرابطين الأوليين.

(ب) الرمزان (و) وندعوهما قوس الإغلاق وقوس الفتح على الترتيب.

[1] Haack, S.-Philosophy of logic, Cambridge University Press, 1999, ch. 1.

(2)مجموعة الصيغ التي تتكون حسب القاعدتين :

(أ)المتغيرات القضائية في (1) تكون صيغا.

(ب)إذا كانت α , β صيغتان فإن $\rceil\alpha$ و $\alpha \rightarrow \beta$ صيغتين كذلك.

تستخدم الأقواس بنفس الطريقة الموضحة في قواعد بناء الصيغ التي مرت بنا.

(3)مجموعة بديهيات النسق P

يوجد عدد لانهائي من البديهيات وهكذا فلن نستطيع كتابة قائمة البديهيات ولكننا سنعينها أدناه بواسطة ثلاثة أشكال بديهية[1] :

إذا كانت α, β, γ أية صيغ فإن الصيغ التالية هي بديهيات النسق P :

شكل بديهية 1 (A_1)

$$1.\ \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

شكل بديهية 2 (A_2)

$$2.\ (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

شكل بديهي 3 (A_3)

$$3.(\rceil\beta \rightarrow \rceil\alpha) \rightarrow ((\rceil\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$$

(4)قواعد الاشتقاق

قاعدة الاشتقاق المستخدمة في النسق P هي قاعدة الوضع فقط : من α و $\alpha \rightarrow \beta$ نشتق β، حيث أن α، β أية صيغتان من P.

[1] - Axiam Schemes

إن سبب اقتصارنا على الرمزين $\neg$, $\rightarrow$ في P هو جعل اللغة الرمزية للنسق P أكثر سهولة وحتى تكون مجموعة البديهيات و/أو قواعد الاشتقاق موجزة. فإذا نحن أدخلنا الرمز $\vee$ في رموز النسق فإنه سيتوجب علينا أيضا إدخال بديهيات لتتحكم في هذا الرمز ولتكشف علاقته مع الرمز $\rightarrow$ بوضوح.

إن مجموعة البديهيات أعلاه ليست هي المجموعة الوحيدة فيمكن اختيار مجموعة بديهيات أخرى ولكنها مناسبة من أجل برهان مبرهنتي الاستنتاج والتمام كبيرتي الأهمية. سنبين أدناه الطبيعة الاستنتاجية لنسق P.

تعريف

(البرهان) في النسق P هو متتالية منتهية من الصيغ :

$\alpha_1 , \alpha_2 ,\dots , \alpha_n$ حيث أن أية صيغة α_i هي بديهية أو صيغة مشتقة من الصيغ التي تسبقها في المتتالية وذلك باستخدام قاعدة الوضع. هذا البرهان هو برهان الصيغة α_n في النسق P. وتسمى α_n مبرهنة النسق P.

إذا كانت المتتالية المنتهية $\alpha_1 , \alpha_2 ,\dots , \alpha_n$ برهانا في النسق P و $k< n$ فإن المتتالية $\alpha_1 , \alpha_2 ,\dots , \alpha_k$ تكون أيضا برهانا في النسق P لأنها تلبي تعريف (البرهان) وهكذا تكون α_k مبرهنة في النسق P. أن هذا يعني كذلك أن كل بديهيات النسق P هي مبرهنات فيه، حيث يكون برهان كل بديهية من P عبارة عن متتالية ذات حد واحد هو البديهية نفسها.

إذا كانت Γ هي المجموعة المنتهية من الصيغ $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ فإننا نكتب $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \vdash \beta$ عوضا عن $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \vdash \beta$ للاختصار. إذا كانت Γ هي المجموعة الخالية ϕ فإن :

$\phi \vdash \beta$ إذا وفقط إذا كانت β مبرهنة. وعادة نحذف الرمز ϕ ونكتبβ.

وهكذا فإن $\vdash \beta$ يعني أن β مبرهنة. نشير إلى أن الرمز$\vdash$ لا ينتمي إلى رموز النسق P وهكذا فإن أي تعبير يظهر فيه هذا الرمز لا يكن جزءا من P فمثلا $\vdash \beta$ قضية حول P وهي أن الصيغة β من مبرهنات P.

(5) المبرهنات

مبرهنة 1 : $\vdash_P \alpha \rightarrow \alpha$ ، α أية صيغة

أرقام الخطوط	البرهان	السبب
1	$(\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$	بديهية حسب (A_2)
2	$\alpha \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$	بديهية حسب (A_1)
3	$(\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	الوضع 1, 2
4	$\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$	بديهية حسب (A_1)
5	$\alpha \rightarrow \alpha$	الوضع 3, 4

للتوضيح نشير إلى إننا قد حصلنا على الصيغة رقم 1 من البرهان وذلك بالتعويض عن α بـــα وعن β بــ $\alpha \rightarrow \alpha$ وعن γ بــ α في A_2 ، وهكذا فإن هذه الصيغة هي إحدى حالات A_2. أما الصيغة رقم 2 فقد حصلنا

عليها وذلك بالتعويض عن α بـــ α وعن β بـــ $\alpha \to \alpha$ وعن γ بـــ α في A_1، وهكذا فإن هذه الصيغة هي إحدى حالات A_1.

سنبرهن الآن أولى ما وراء مبرهنات[1] P حيث أنها لا تنتمي إلى مبرهنات P ولها مفعول قاعدة اشتقاق. إنها (مبرهنة الاستنتاج) التي غالبا ما سنستخدمها في برهان مبرهنات النسق P. وللتوضيح نقول بأننا غالبا ما نقوم في الرياضيات ببرهان : إذا كان α فإن β وذلك ببرهان β انطلاقا من α.

مبرهنة الاستنتاج **The Deduction Theorm**

إذا كانت $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ فإن $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$، حيث أن α و β صيغتان من P و Γ مجموعة من صيغ P ، Γ يمكن أن تكون خالية.

البرهان : سيكون هذا البرهان بواسطة الاستقراء[2].

الخطوة القاعدية : نفرض أن متتالية البرهان تتكون من حد واحد. هذا الحد يكون β نفسها وهكذا فإما أن تكون β من بديهيات P أو أن β عنصر في $\Gamma \cup \{\alpha\}$.

الحالة 1

إذا كانت β إحدى بديهيات P فإن برهان $\alpha \to \beta$ من Γ يكون كالتالي :

---

[1] -Metatheorms

[2] - Induction

البرهان

1	β	بديهية P
2	$\beta \to (\alpha \to \beta)$	بديهية حسب A_1
3	$\alpha \to \beta$	الوضع 1,2

وهكذا برهنا : $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

الحالة 2

إذا كانت $\beta \in \Gamma$ فإن برهان $\alpha \to \beta$ من Γ يكون كالتالي :

البرهان

1	β	عنصر من Γ
2	$\beta \to (\alpha \to \beta)$	بديهية حسب A_1
3	$\alpha \to \beta$	الوضع 1,2

الحالة 3

إذا كانت β هي α فإنه حسب المبرهنة 1 لدينا $\vdash \alpha \to \alpha$ الذي يصلح لبرهان $\alpha \to \alpha$ من Γ وهنا أيضا لدينا $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ وهكذا تنتهي الخطوة القاعدية.

لنفرض الآن أن برهان β من $\Gamma \cup \{\alpha\}$ هو متتالية عدد حدودها n حيث $1 < n$ وأن مبرهنة الاستنتاج تصح من أجل كل صيغة γ التي يمكن برهانها من $\Gamma \cup \{\alpha\}$ عن طريق متتالية عدد حدودها أصغر من n. هنا توجد أربع حالات يجب أخذها بعين الاعتبار :

الحالة 1

β هي إحدى بديهيات P. نبرهن $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ كما في الحالة 1 أعلاه تماما.

الحالة 2

$\beta \in \Gamma$. هنا أيضا نبرهن $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ كما في الحالة 2 أعلاه تماما.

الحالة 3

β هي α. وهنا أيضا كما في الحالة 3 أعلاه تماما.

الحالة 4

الحصول على β يتم من صيغتين سابقتين لها في البرهان وبتطبيق قاعدة الوضع. هاتان الصيغتان يجب أن تكونا على الشكلين γ و $\gamma \rightarrow \beta$ وكل صيغة من هاتين الصيغتين يمكن برهانها من $\Gamma \cup \{\alpha\}$ بواسطة متتالية عدد حدودها أصغر من n. في كل حالة إحذف حدود المتتالية الجزئية من متتالية البرهان الأصلية وما تبقى هو المتتالية المطلوبة (راجع تعريف (البرهان)، الفقرة الثانية).

عندنا $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ و $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma \rightarrow \beta$ وبتطبيق فرضية الاستقراء نحصل على: $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$ و $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta)$.

إن البرهان المطلوب إلى $\alpha \rightarrow \beta$ من Γ يكون الآن كما يلي :

1		
.		
.		برهان $\alpha \to \gamma$ من Γ
.		
K	$\alpha \to \gamma$	
k + 1		
.		
.		برهان $\alpha \to (\gamma \to \beta)$ من Γ
.		
L	$\alpha \to (\gamma \to \beta)$	
L + 1	$(\alpha \to (\gamma \to \beta)) \to ((\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta))$	بديهية حسب A_2
L + 2	$(\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)$	الوضع L, L+1
L + 3	$\alpha \to \beta$	الوضع k, L+2

وهكذا نحصل على $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ في الحالات الأربع.

سنقوم الآن ببرهان عكس مبرهنة الاستنتاج :

مبرهنة

إذا كان $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ فإن $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ ، حيث α وβ صيغتان من P، أما Γ فمجموعة من الصيغ من P (و يمكن أن تكون خالية).

البرهان : هنا عندنا برهان $\alpha \to \beta$ من Γ ونريد برهان β من $\Gamma \cup \{\alpha\}$ كالتالي :

1		
.		
.		برهان $\alpha \to \beta$ من Γ
.		
K	$\alpha \to \beta$	
K + 1	α	عنصر من $\Gamma \cup \{\alpha\}$
K + 2	β	الوضع k, k + 1

سنستخدم مبرهنة الاستنتاج كقاعدة اشتقاق في البرهان التالي :

مبرهنة 2 $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \gamma$

البرهان

م	$\alpha \to \beta$	1	$\{1\}$
م	$\beta \to \gamma$	2	$\{2\}$
(مقدمة مبرهنة الاستنتاج) م	α	3	$\{3\}$
الوضع 1,3	β	4	$\{1,3\}$
الوضع 2,4	γ	5	$\{1,2,3\}$
مبرهنة الاستنتاج 3,5	$\alpha \to \gamma$	6	$\{1,2\}$

لقد برهنا على الخط 5 الصيغة γ من المقدمتين الأصليتين 1,2 ومن مقدمة مبرهنة الاستنتاج المضافة 3. وعلى الخط 6 وباستخدام مبرهنة الاستنتاج كقاعدة اشتقاق تم برهان $\alpha \to \gamma$ المطلوبة من المقدمتين الأصليتين 2,1 فقط.

نشير إلى أن مبرهنة 2 هي قاعدة الاشتقاق القياس الشرطي والتي سنستخدمها في برهان المبرهنات اللاحقة.

مبرهنة 3 $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta \vdash \alpha \to \gamma$

البرهان

م	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	1	$\{1\}$
م	β	2	$\{2\}$
(مقدمة مبرهنة الاستنتاج) م	α	3	$\{3\}$
الوضع 1,3	$\beta \to \gamma$	4	$\{1,3\}$
الوضع 2,4	γ	5	$\{1,2,3\}$
مبرهنة الاستنتاج 3,5	$\alpha \to \gamma$	6	$\{1,2\}$

$\vdash$

مبرهنة 4 $\neg\neg\alpha \to \alpha$

البرهان

1	$(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha)$	بديهية حسب A_3
2	$\neg\alpha \to \neg\alpha$	مبرهنة 1
3	$(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \alpha$	مبرهنة 3 1,2
4	$\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$	بديهية حسب A_1
5	$\neg\neg\alpha \to \alpha$	القياس الشرطي 3,4

مبرهنة 4 هي أحد أشكال قاعدة الاشتقاق النفي المزدوج.

مبرهنة 5 $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

البرهان

1	$(\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha) \to ((\neg\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha)$	بديهية حسب A_3
2	$\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$	مبرهنة 4
3	$(\neg\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha$	الوضع 1,2
4	$\alpha \to (\neg\neg\neg\alpha \to \alpha)$	بديهية حسب A_1
5	$\alpha \to \neg\neg\alpha$	القياس الشرطي 3,4

المبرهنة 5 هي الشكل الآخر من قاعدة الاشتقاق النفي المزدوج.

مبرهنة 6 $\vdash \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$

البرهان

1	$\neg\alpha$	(مقدمة مبرهنة الاستنتاج) م
2	α	(مقدمة مبرهنة الاستنتاج) م
3	$\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$	بديهية حسب A_1
4	$\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	بديهية حسب A_1

5	$\neg\beta\to\alpha$	الوضع 2,3
6	$\neg\beta\to\neg\alpha$	الوضع 1,4
7	$(\neg\beta\to\neg\alpha)\to((\neg\beta\to\alpha)\to\beta)$	A_3
8	$(\neg\beta\to\alpha)\to\beta$	الوضع 6,7
9	β	الوضع 5,8
10	$\alpha\to\beta$	مبرهنة الاستنتاج 2,9
11	$\neg\alpha\to(\alpha\to\beta)$	مبرهنة الاستنتاج 1,10

مبرهنة 7 $\vdash (\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta)$

البرهان

1	$\neg\beta\to\neg\alpha$	(مقدمة مبرهنة الاستنتاج) م
2	$(\neg\beta\to\neg\alpha)\to((\neg\beta\to\alpha)\to\beta)$	A_3
3	$\alpha\to(\neg\beta\to\alpha)$	بديهية حسب A_1
4	$(\neg\beta\to\alpha)\to\beta$	الوضع 1,2
5	$\alpha\to\beta$	القياس الشرطي 3,4
6	$(\neg\beta\to\neg\alpha)\to(\alpha\to\beta)$	مبرهنة الاستنتاج 1,5

المبرهنة 7 هي أحد أشكال قاعدة الاشتقاق عكس النقيض.

مبرهنة 8 $\vdash (\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$

البرهان

1	$\alpha\to\beta$	(مقدمة مبرهنة الاستنتاج) م
2	$\neg\neg\alpha\to\alpha$	مبرهنة 4
3	$\neg\neg\alpha\to\beta$	القياس الشرطي 1,2
4	$\beta\to\neg\neg\beta$	مبرهنة 5
5	$\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta$	القياس الشرطي 3,4
6	$(\neg\neg\alpha\to\neg\neg\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$	مبرهنة 7
7	$\neg\beta\to\neg\alpha$	الوضع 5,6
8	$(\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$	مبرهنة الاستنتاج 1,7

المبرهنة 8 هي الشكل الآخر لقاعدة الاشتقاق عكس النقيض.

مبرهنة 9 $\vdash \alpha\to(\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta))$

بتطبيق مبرهنة الاستنتاج مرتين على قاعدة الوضع :

$\alpha,\alpha\to\beta\vdash\beta$ نحصل على $\vdash\alpha\to((\alpha\to\beta)\to\beta)$

البرهان

1	$\alpha\to((\alpha\to\beta)\to\beta)$	تطبيق مبرهنة الاستنتاج مرتين على الوضع
2	$((\alpha\to\beta)\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta))$	عكس النقيض
3	$\alpha\to(\neg\beta\to\neg(\alpha\to\beta))$	القياس الشرطي 1,2

مبرهنة 10 $\vdash(\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\beta)\to\beta)$

البرهان

1	$\alpha\to\beta$	فرضية مبرهنة الاستنتاج
2	$\neg\alpha\to\beta$	فرضية مبرهنة الاستنتاج
3	$(\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\alpha)$	مبرهنة 8
4	$\neg\beta\to\neg\alpha$	الوضع 1,3
5	$(\neg\alpha\to\beta)\to(\neg\beta\to\neg\neg\alpha)$	مبرهنة 8
6	$\neg\beta\to\neg\neg\alpha$	الوضع 2,5
7	$(\neg\beta\to\neg\neg\alpha)\to((\neg\beta\to\neg\alpha)\to\beta)$	بديهية حسب A_3
8	$(\neg\beta\to\neg\alpha)\to\beta$	الوضع 6,7
9	β	الوضع 4,8
10	$(\alpha\to\beta)$ و $(\neg\alpha\to\beta)\vdash\beta$	1-9
11	$\alpha\to\beta\vdash(\neg\alpha\to\beta)\to\beta$	مبرهنة الاستنتاج 10
12	$\vdash(\alpha\to\beta)\to((\neg\alpha\to\beta)\to\beta)$	مبرهنة الاستنتاج 11

4.3 استقلال الأشكال البديهية للنسق P — Independence of Axiom schemes of system P

نقول عن الأشكال البديهية لنسق ما بأنها مستقلة إذا كان من المستحيل برهان أيا منها من الأشكال البديهية الأخرى باستخدام قواعد اشتقاق النسق. ولكنه لن يكون عملي محاولة برهان استقلال شكل البديهية الأولى A_1، مثلا من النسق P وذلك بفشل إمكانية برهانها من الأشكال البديهية الأخرى. ولهذا فسنتبع ما يلي :

لتكن شكل البديهية A_m هي المطلوب برهان استقلالها عن الأشكال البديهية الأخرى. إذا أمكننا تبيان أن الأشكال البديهية الأخرى تمتلك صفة تركيبية[1] معينة تحافظ عليها قاعدة اشتقاق النسق وكانت A_m لا تمتلك هذه الصفة فإن A_m تكون مستقلة عن الأشكال البديهية الأخرى للنسق P. ذلك أنه لو كانت شكل البديهية A_m غير مستقلة، أي أنها صيغة يمكن برهنها من الأشكال البديهية الأخرى بتطبيق قاعدة اشتقاق النسق، لوجب أن كل صفة تتصف بها الأشكال البديهية الأخرى وتحافظ عليها قواعد الاشتقاق، تتصف بها A_m كذلك.

وعليه فسنجد مجموعة M من الأعداد الطبيعية، ثلاثة أو أكثر وسنختار منها عددا معينا نسميه القيمة الممتازة تكون قيمة دائمة للأشكال البديهية المغايرة إلى A_m. كما أن قاعدة الاشتقاق (الوضع) تحافظ على هذه

---

[1] - Syntactic

القيمة الممتازة ومع ذلك لا تكون هذه القيمة الممتازة قيمة دائمة إلى A_m.

وإذن تكون A_m مستقلة.

إن هذه الطريقة المتبعة في برهان الاستقلال هي تعميم لطريقة جداول الصدق في حساب القضايا، حيث نكتفي بقيمتين T و F. كما ان القيمة الممتازة هنا تقابل القيمة T في جداول الصدق هذه. (سنسمي الأشكال البديهية التي تأخذ القيمة الممتازة فقط بالصحيحة).

1. برهان استقلال شكل البديهية A_1 عن A_2 و A_3

البرهان

لتكن $M = \{0,1,2\}$ ، ولتكن القيمة الممتازة هي : 0.

سنعرف الرمزين $\urcorner$ و $\rightarrow$ حسب الجدولين التاليين :

K	L	$K \rightarrow L$
0	0	0
0	1	2
0	2	2
1	0	2
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

K	$\urcorner K$
0	1
1	1
2	0

الجداول أدناه تبين أن A_2 و A_3 تأخذان القيمة الممتازة 0. كما أن قاعدة الاشتقاق الوضع تحافظ على هذه القيمة (أو أنها تحافظ على الصحة) لأنه إذا أخذت كل من $L \rightarrow K$ و K القيمة الممتازة 0 فيجب أن تأخذ K هذه القيمة كما يبين جدول تعريف $\rightarrow$ أعلاه. (سنستخدم حالات من A_1, A_2, A_3).

A_1

$K \rightarrow (L \rightarrow K)$

0	0	0	0	0
0	2	1	2	0
0	0	2	0	0
1	0	0	2	1
1	0	1	2	1
1	2	2	0	1
2	0	0	2	2
2	0	1	0	2
2	0	2	0	1

A_2

$(K \rightarrow (L \rightarrow M)) \rightarrow ((K \rightarrow L) \rightarrow (K \rightarrow M))$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	2	0	2	1	0	0	0	0	0	0	2	1
0	2	0	2	2	0	0	0	0	0	0	2	2
0	2	1	2	0	0	0	2	1	0	0	0	0
0	2	1	2	1	0	0	2	1	0	0	2	1
0	0	1	0	2	0	0	2	1	0	0	2	2
0	0	2	0	0	0	0	2	2	0	0	0	0
0	0	2	0	1	0	0	2	2	0	0	2	1
0	0	2	0	2	0	0	2	2	0	0	2	2
1	2	0	0	0	0	1	2	0	0	1	2	0
1	0	0	2	1	0	1	2	0	2	1	2	1
1	0	0	2	2	0	1	2	0	2	1	0	2
1	0	1	2	0	0	1	2	1	0	1	2	0
1	0	1	2	1	0	1	2	1	0	1	2	1
1	2	1	0	2	0	1	2	1	0	1	0	2
1	2	2	0	0	0	1	0	2	0	1	2	0
1	2	2	0	1	0	1	0	2	0	1	2	1
1	2	2	0	2	0	1	0	2	0	1	0	2
2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0
2	0	0	2	1	0	2	0	0	0	2	0	1
2	0	0	2	2	0	2	0	0	0	2	0	2
2	0	1	2	0	0	2	0	1	0	2	0	0
2	0	1	2	1	0	2	0	1	0	2	0	1
2	0	1	0	2	0	2	0	1	0	2	0	2
2	0	2	0	0	0	2	0	2	0	2	0	0
2	0	2	0	1	0	2	0	2	0	2	0	1
2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2	0	2

A_3

$(\rceil L \to \rceil K) \to ((\rceil L \to K) \to L)$

1	0	2	1	0	0	1	0	2	0	0	0
1	1	2	1	0	0	1	1	2	0	0	1
0	2	2	1	0	0	0	2	0	0	2	2
1	0	2	1	1	0	1	0	2	1	0	0
1	1	2	1	1	0	1	1	2	1	0	1
0	2	2	1	1	0	0	2	2	1	0	2
1	0	2	0	2	0	1	0	0	2	0	0
1	1	2	0	2	0	1	1	0	2	2	1
0	2	0	0	2	0	0	2	2	2	0	2

نلاحظ أن A_1 تأخذ القيمة 2 بالإضافة إلى القيمة 0، وذلك عندما تأخذ K القيمة 0 و L القيمة 1، بينما تأخذ A_2 و A_3 القيمة 0 دائما.

2.برهان استقلال شكل البديهية A_2 عن A_1 و A_3

البرهان

لتكن $M = \{0,1,2\}$ ، ولتكن القيمة الممتازة هي : 0.

سنعرف الرمزين $\rceil$ و $\to$ حسب الجدولين التاليين :

K	L	K→L
0	0	0
0	1	2
0	2	1
1	0	0
1	1	2
1	2	0
2	0	0
2	1	0
2	2	0

K	⌉K
0	1
1	0
2	1

بإنشاء جداول A_1, A_2, A_3 نجد أن A_1 و A_3 تأخذان القيمة الممتازة 0 دائما (صحيحتان). كما أن قاعدة الوضع تحافظ على الصحة، بينما نجد أن A_2 تأخذ القيمة 2 بالإضافة إلى القيمة 0، وذلك عندما تأخذ K القيمة 0، L القيمة 0 و M القيمة 1. إذن A_2 مستقلة عن A_1 و A_3.

3.برهان استقلال A_3 عن A_1 و A_2

البرهان

سنستخدم طريقة أخرى في البرهان. لتكن A^* هي شكل البديهية الناتج من الشكل A بواسطة حذف جميع رموز النفي ˥ من A. وهكذا فإذا كانت A هي $K \urcorner\to L \urcorner$ فإن A^* هي $K \to L$. لنسمي A^* بالشكل المرافق إلى A. إذن :

1.الأشكال البديهية المرافقة لكل من A_1 و A_2 تكون صيغة تكرارية، حيث أن A_1 هي نفسها A_1^* و A_2 هي نفسها A_2^*.

2.قاعدة الوضع تحافظ على تكرارية الأشكال المرافقة لأنه إذا كانت $(K\to L)^*$ و K^* صيغتان تكراريتان فإن L^* تكون صيغة تكرارية (لاحظ أن $(K\to L)^*$ هي $K^*\to L^*$). ونستخدم مبرهنة سابقة : قاعدة الوضع تقود من صيغتين تكراريتين إلى صيغة تكرارية أخرى.

3.الشكل البديهي المرافق A_3^* ليس شكلا تكراريا، ذلك أن $(L\to K) \to((L\to K) \to L)$ ليست صيغة تكرارية. وبالتالي فإن A_3 مستقلة عن A_1 و A_2.

من المستحسن توفر هذا الشرط في مجموعة بديهيات النسق وذلك لأنه إذا لم تكن المجموعة مستقلة، أي إذا أمكن اشتقاق واحدة منها مثلا من البديهيات الأخرى فإنها تكون بديهية زائدة، لأنها بذلك تصبح صيغة مشتقة (مبرهنة) من بقية البديهيات وبذلك تكون بديهية زائدة. في هذه الحالة يصعب الفصل بين قائمة البديهيات وقائمة المبرهنات. أما من الناحية المنطقية فلا حرج من عدم توفر شرط الاستقلال.

5.3 تمامية النسق P Completeness of system P

بشكل عام، نقول عن نسق ما بأنه يتصف بالتمامية الدلالية إذا كانت كل صيغة تكرارية يمكن البرهان عليها فيه. وبالرموز نكتب

$$\models \alpha \rightarrow \vdash \alpha .$$

النسق P يتصف بالتمامية ولبرهان ذلك سنقوم اولا ببرهان المبرهنة التالية :

مبرهنة

إذا كانت α و $\alpha \rightarrow \beta$ صيغتان تكراريتان فإن β تكون صيغة تكرارية أيضا.

نستطيع صياغة هذه المبرهنة كالتالي :

قاعدة الاشتقاق الوضع تقود من صيغتين تكراريتين إلى صيغة تكرارية أخرى.

البرهان

لنفرض α و $\alpha \rightarrow \beta$ صيغتان تكراريتان. إذا أخذت β القيمة F لتعيين قيم صدق المتغيرات القضائية في α و β، وبما أن α صيغة تكرارية فإن α تأخذ القيمة T وبالتالي فإن $\alpha \rightarrow \beta$ ستأخذ القيمة F لهذا التعيين وهذا يناقض فرضيتنا بأن $\alpha \rightarrow \beta$ صيغة تكرارية. وهكذا فإن β لا يمكن أن تأخذ القيمة F.

الآن سنبرهن المبرهنة التالية :

مبرهنة الصحة **Soundness theorm**

كل مبرهنة تكون صيغة تكرارية.

رمزيا نكتب هذه المبرهنة على الشكل $\vdash \alpha \rightarrow \models \alpha$

البرهان

نستطيع التحقق من أن كل بديهيات P صيغ تكرارية وذلك بواسطة جدول الصدق وهي كذلك ويستطيع القارئ التحقق من ذلك. وبما أن قاعدة الاشتقاق الوضع تقود من صيغ تكرارية إلى صيغ تكرارية أيضا حسب المبرهنة أعلاه، فإذن كل مبرهنة من P تكون صيغة تكرارية.

سنبرهن الآن المسألة التالية :

المسألة 1

لتكن α أية صيغة ولتكن $A_1, A_2,\ldots, A_k$ هي المتغيرات القضائية التي تظهر في α. من أجل تعيين I معلوم لقيم صدق $A_1, A_2,\ldots, A_k$، لندع A'_j تكون A_j إذا أخذت A_j القيمة T ولندع A'_j تكون $\urcorner A_j$ إذا أخذت A_j القيمة F. لندع α' تكون α إذا أخذت α القيمة T حسب التعيين I. ولندع α' تكون $\urcorner\alpha$ إذا أخذت α القيمة F . إذن

$$A'_1, A'_2,\ldots, A'_k \vdash \alpha'$$

ومن أجل توضيح أهمية هذه المسألة سنعطي المثال التالي :

لتكن α هي $(\urcorner A_1 \to A_2) \to A_3$. إذن في كل سطر من أسطر جدول صدق α فإن المسألة تقرر صحة 8 علاقات اشتقاق بالنسبة إلى α.

جدول صدق الصيغة $(\urcorner A_1 \to A_2) \to A_3$ يكون كما هو مبين أدناه :

A1	A_2	A3	$\urcorner A_1 \to A_2$	$(\urcorner A_1 \to A_2) \to A_3$
T	T	T	T	T
T	T	F	T	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	F
F	F	T	F	T
F	F	F	F	T

المسألة تقرر العلاقات التالية في كل سطر من الأسطر

1-السطر الأول :

$$A_1, A_2, A_3 \vdash (\neg A_1 \to A_2) \to A_3$$

2-السطر الثاني :

$$A_1, A_2, \neg A_3 \vdash \neg((\neg A_1 \to A_2) \to A_3)$$

3-السطر الثالث :

$$A_1, \neg A_2, A_3 \vdash (\neg A_1 \to A_2) \to A_3$$

4-السطر الرابع :

$$A_1, \neg A_2, \neg A_3 \vdash \neg((\neg A_1 \to A_2) \to A_3)$$

5-السطر الخامس :

$$\neg A_1, A_2, A_3 \vdash (\neg A_1 \to A_2) \to A_3$$

6-السطر السادس :

$$\neg A_1, A_2, \neg A_3 \vdash \neg((\neg A_1 \to A_2) \to A_3)$$

7-السطر السابع :

$$\neg A_1, \neg A_2, A_3 \vdash (\neg A_1 \to A_2) \to A_3$$

8-السطر الثامن :

$$\neg A_1, \neg A_2, \neg A_3 \vdash (\neg A_1 \to A_2) \to A_3$$

الآن سنقوم ببرهان المسألة 1 :

البرهان

سيتم البرهان بواسطة الاستقراء على عدد n لظهور الرابطين $\neg$ و $\rightarrow$ في α.

1.خطوة قاعدة الاستقراء $(n = 0)$: في هذه الحالة تكون الصيغة α متغير واحد غير منفي A_1 . وهكذا فإن المبرهنة ستتحول إلى $A_1 \vdash A_1$ بالنسبة إلى الحالة التي يعين فيها I القيمة T إلى A_1 (نعني بالنسبة إلى سطر جدول الصدق التي تكون فيه قيمة A_1 هي T). كما أن المبرهنة ستتحول إلى $\neg A_1 \vdash \neg A_1$ بالنسبة إلى الحالة التي يعين فيها I القيمة F إلى A_1.

2.خطوة الاستقراء : لنفرض أن المبرهنة تصح لكل صيغة α تحتوي على عدد لظهور الرابطين $\neg$ و $\rightarrow$ أصغر من n (هذه هي فرضية الاستقراء). ولنبرهن أنها تصح بالنسبة لكل صيغة في α ذات العدد n لظهور الرابطين المذكورين.

سندرس الحالتين التاليتين :

الحالة 1

α هي $\neg \beta$ ، حيث تحتوي الصيغة β على عدد لظهور الرابطين $\neg$ و $\rightarrow$ أصغر من n .

الحالة 2

α هي $\beta \to \gamma$ حيث تحتوي كل من β و γ على عدد لظهور الرابطين $\neg$ و $\to$ أصغر من n . إذن حسب فرضية الاستقراء يكون $A'_1, A'_2,\dots, A'_k \vdash \beta'$ و $A'_1, A'_2,\dots, A'_k \vdash \gamma'$.

عند دراستنا للحالة 1 نواجه الحالتين التاليتين :

الحالة 1 أ)

1. β صادقة حسب I، وإذن α تكون كاذبة حسب I وبالتالي β' هي β و α' هي $\neg\alpha$. بواسطة فرضية الاستقراء المطبقة على β يكون لدينا :

$$A'_1, A'_2,\dots, A'_k \vdash \beta$$

الآن وبواسطة المبرهنة 5 $(\beta \to \neg\neg\beta)$ وقاعدة الوضع يكون :

$$A'_1, A'_2,\dots, A'_k \vdash \neg\neg\beta$$

ولكن $\neg\neg\beta$ هي α' .

وهو المطلوب.

الحالة 1 ب)

β كاذبة حسب I. وإذن α صادقة حسب I وبالتالي β' هي $\neg\beta$ وα' هي α . بواسطة فرضية الاستقراء يكون لدينا :

$$A'_1, A'_2,\dots, A'_k \vdash \neg\beta$$

ولكن $\neg\beta$ هي α' . وهو المطلوب.

الآن، عند دراستنا للحالة 2 نواجه الحالات الثلاث التالية :

الحالة 2 أ)

β كاذبة حسب I

الحالة 2 ب)

γ صادقة حسب I

الحالة 2 ج)

β صادقة حسب I و γ كاذبة حسب I

سندرس كل من الحالات أعلاه.

الحالة 2 أ)

β كاذبة حسب I .

إذن α تكون صادقة حسب I و β' هي $\neg\beta$ و α' هي α . إذن :

$$A'_1, A'_2,\ldots, A'_k \vdash \neg\beta$$

ولكن حسب المبرهنة 6 $(\beta \to \gamma) \to \beta\neg$ وباستخدام قاعدة الوضع :

$$A'_1, A'_2,\ldots, A'_k \vdash \beta \to \gamma$$

ولكن $\beta \to \gamma$ هي α' .

وهو المطلوب.

الحالة 2ب)

γ صادقة حسب I .

إذن α تكون صادقة حسب I وإذن γ' هي γ و α' هي α. إذن :

$$A'_1, A'_2,\ldots, A'_k \vdash \gamma$$

ولكن $\gamma \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ حسب شكل البديهية (A_1) وباستخدام قاعدة الوضع :

$$A'_1, A'_2,\ldots, A'_k \vdash \beta \rightarrow \gamma$$

ولكن $\beta \rightarrow \gamma$ هي α' .

وهو المطلوب.

الحالة 2ج)

β صادقة حسب I و γ كاذبة حسب I .

إذن α تكون كاذبة حسب I و β' هي β و γ' هي $\rceil\gamma$ و α' هي $\rceil\alpha$.

إذن :

$$A'_1, A'_2,\ldots, A'_k \vdash \beta \quad \text{و}$$

$$A'_1, A'_2,\ldots, A'_k \vdash \rceil\gamma$$

ولكن $\beta \rightarrow (\rceil\gamma \rightarrow \rceil(\beta \rightarrow \gamma))$ (حسب المبرهنة 9) وباستخدام قاعدة الوضع :

$$A'_1, A'_2,\ldots, A'_k \vdash \rceil(\beta \rightarrow \gamma)$$

ولكن $\rceil(\beta \rightarrow \gamma)$ هي α' .

وهو المطلوب.

مبرهنة التمامية Completeness theorm

إذا كانت أية صيغة α من النسق P تكرارية فإنها تكون مبرهنة في النسق P.

رمزيا نكتب هذه المبرهنة على الشكل : $\models \alpha \rightarrow \vdash \alpha$

البرهان

لتكن α صيغة تكرارية ولتكن $A_1, A_2,\ldots, A_k$ هي المتغيرات القضائية التي تظهر في α . من أجل أي تعيين لقيم صدق $A_1, A_2,\ldots, A_k$ فإنه حسب المسألة 1 يكون لدينا $A'_1, A'_2,\ldots, A'_k \vdash \alpha$ (α' هي α ذلك أن α تأخذ دائما القيمة T). وهكذا فعندما يعطي A'_k القيمة T فإننا نحصل على $A'_1, A'_2,\ldots, A'_{k-1}, A_k \vdash \alpha$. وعندما يعطي A'_k القيمة F فإننا نحصل على $A'_1, A'_2,\ldots, A'_{k-1}, \neg A_k \vdash \alpha$. وإذن باستخدام نظرية الاستنتاج نحصل على $A'_1, A'_2,\ldots, A'_{k-1} \vdash A_k \rightarrow \alpha$

وعلى $A'_1, A'_2,\ldots, A'_{k-1} \vdash \neg A_k \rightarrow \alpha$

الآن، وحسب المبرهنة 10 $(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\neg\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\beta)$

وباستخدام قاعدة الوضع مرتين نحصل على :

$$A'_1, A'_2,\ldots, A'_{k-1} \vdash \alpha$$

وبالمثل فإن A'_{k-1} يمكن أن تكون قيمته T أو F ومرة أخرى نستخدم نظرية الاستنتاج والمبرهنة 10 بالإضافة إلى قاعدة الوضع وهكذا نستطيع

حذف A'_{k-1} كما هو الحال بالنسبة إلى A'_k . وبعد k من مثل هذه الخطوات نحصل في النهاية على $\vdash \alpha$.

6.3 اتساق النسق P — Consistency of system P

نقول عن نسق ما أنه متسق إذا وفقط إذا كان من المستحيل البرهان على صيغة α وعلى نفيها $\neg\alpha$ معا فيه.

نسقنا P هو نسق متسق. وسنبرهن هذا بواسطة المبرهنة التالية :

مبرهنة : النسق P هو نسق متسق.

البرهان

لنفرض أن P ليس متسق. إذن يمكننا برهان صيغة α ونفيها $\neg\alpha$ معا فيه، أي أن α ونفي $\neg\alpha$ مبرهنتان في P. إذن حسب مبرهنة (صحة النسق) تكون α و $\neg\alpha$ صيغتان تكراريتان. وهذا مستحيل لأنه إذا كانت α تكرارية فإن $\neg\alpha$ متناقضة. إذن النسق P متسق.

7.3 أنساق صورية أخرى

بالإضافة إلى النسق الصوري الذي درسناها في هذا الفصل، فإنه توجد أنساق صورية أخرى عديدة لا تقل أهمية عنه[1]. سنورد بعضا من هذه الأنساق باختصار وبدون برهان المبرهنات المعطاة.

1. نسق هلبرت وأكرمان (1950)

(ا) الرموز الأولية : $\neg$ و $\vee$

[1] المرجع Mendelson.E- Introduction to mathematical logic, Chapman & Hall, London,1997.

يعطى التعريف التالي:

$\alpha \rightarrow \beta \equiv_{\text{تع}} \neg\alpha \vee \beta$

الرمز تع ≡ الذي هو اختصار لكلمة (تعريف) يعني أن كل ما هو على يساره وعلى يمينه يمكن أن يعوض أحدهما الآخر في البرهان الصوري، أي أن أحدهما يكافئ الآخر وأن ما هو على اليسار هو اختصار لما هو على اليمين.

(ب) قواعد الاشتقاق: الوضع.

(ج) أشكال البديهيات:

شكل البديهية A_1 $(\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$

شكل البديهية A_2 $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

شكل البديهية A_3 $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

شكل البديهية A_4 $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma))$

المبرهنات

(1) $\alpha \rightarrow \beta \vdash (\gamma \vee \alpha) \rightarrow (\gamma \vee \beta)$

(2) $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\gamma \rightarrow \beta))$

(3) $\gamma \rightarrow \alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash \gamma \rightarrow \beta$

(4) $\alpha \rightarrow \alpha$

(5) $\neg\alpha \vee \alpha$

(6) $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

(7) $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

(8) $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \rightarrow ((\beta \vee (\alpha \vee \gamma)) \vee \alpha)$

2. نسق كلين (1952)

(أ) الرموز الأولية : $\urcorner$ ، $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$

(ب) قواعد الاشتقاق : الوضع

(ج) اشكال البديهيات:

شكل البديهية A_1	$\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\alpha)$
شكل البديهية A_2	$(\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow\gamma))\rightarrow((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha\rightarrow\gamma))$
شكل البديهية A_3	$(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\alpha$
شكل البديهية A_4	$(\alpha\wedge\beta)\rightarrow\beta$
شكل البديهية A_5	$\alpha\rightarrow(\beta\rightarrow(\alpha\wedge\beta))$
شكل البديهية A_6	$\alpha\rightarrow(\alpha\vee\beta)$
شكل البديهية A_7	$\beta\rightarrow(\alpha\vee\beta)$
شكل البديهية A_8	$(\beta\rightarrow\gamma)\rightarrow((\alpha\vee\beta)\rightarrow\gamma)\rightarrow((\alpha\vee\beta)\rightarrow\gamma)$
شكل البديهية A_9	$(\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow((\alpha\rightarrow\urcorner\beta)\rightarrow\urcorner\alpha)$
شكل البديهية A_{10}	$\urcorner\urcorner\alpha\rightarrow\alpha$

توجد أنساق تتكون مجموعة بديهياتها من بديهية واحدة فقط وهي عديدة، نورد منها ما يلي:

3. نسق ميريديث (1953)

(أ) الرموز الأولية : $\urcorner$ و $\rightarrow$

(ب) قواعد الاشتقاق : الوضع

(ج) شكل البديهية:

$$((((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow(\urcorner\gamma\rightarrow\urcorner\delta))\rightarrow\gamma)\rightarrow\varphi)\rightarrow((\varphi\rightarrow\alpha)\rightarrow(\delta\rightarrow\alpha))$$

4. نسق نيكود (1917)

(أ) الرموز الأولية : |

(ب) قواعد الاشتقاق : من $\alpha|(\beta|\gamma)$ و α نشتق γ

(ج) شكل البديهية:

$$(\alpha|(\beta|\gamma))\,|\,((\delta|(\delta|\delta))\,|\,((\varphi|\beta)|((\alpha|\varphi)\,|\,(\alpha|\varphi)))).$$

8.3 تمارين

(أ) برهن في النسق P أن :

$$\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash_{p} \beta \to (\alpha \to \gamma)$$

حيث α, β, γ أية صيغ من P .

(ب) برهن الصيغ التالية في النسق P :

$$\vdash_{p} ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \beta)) \to ((\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$$

(ج) خذ نسق لوكاتشيفيج L والذي يمتلك نفس مكونات نسقنا P ، ما عدا أشكال البديهيات التالية :

شكل البديهية A_1

$$(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$$

شكل البديهية A_2

$$(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$$

شكل البديهية A_3

$$\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$$

برهن كل من المبرهانت التالية في ُالنسق L :

1) $\vdash_L ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)) \to \delta) \to ((\alpha \to \beta) \to \delta)$

2) $\vdash_L (\alpha \to (\beta \to \gamma) \to ((\delta \to \beta) \to ((\alpha \to (\delta \to \gamma)))$

3) $\vdash_L (\alpha \to \beta) \to (((\alpha \to \gamma) \to \delta) \to ((\beta \to \gamma) \to \delta))$

4) $\vdash_L ((\urcorner \alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$

5) $\vdash_L (\alpha \to (((\urcorner \alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha))$

6) $\vdash_L (\beta \to ((\urcorner \alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\urcorner \alpha \to \alpha) \to \alpha))$

7) $\vdash_L \alpha \to ((\urcorner \alpha \to \alpha) \to \alpha)$

(د) خذ نسق راسل R أدناه.

1)الرموز الأولية : $\urcorner$ ، V

2)قواعد الاشتقاق : الوضع

التعاريف

تعريف$_1$

$\alpha \to \beta \equiv$ تع $\urcorner \alpha \vee \beta$

تعريف$_2$

$\alpha \wedge \beta \equiv$ تع $\urcorner (\urcorner \alpha \vee \urcorner \beta)$

تعريف$_3$

$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv$ تع $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

3)أشكال البديهيات :

شكل بديهية A_1 $(\alpha \vee \alpha) \rightarrow \alpha$

شكل بديهية A_2 $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

شكل بديهية A_3 $(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\beta \vee \alpha)$

شكل بديهية A_4 $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\beta \vee (\alpha \vee \gamma))$

شكل بديهية A_5 $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma))$

برهن كل من المبرهنات التالية في النسق R :

(1 $\vdash_R (\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$

(2 $\vdash_R \beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

(3 $\vdash_R (\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$

(4 $\vdash_R (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(5 $\vdash_R (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(6 $\vdash_R (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(7 $\vdash_R \alpha \rightarrow (\alpha \vee \alpha)$

(8 $\vdash_R \alpha \rightarrow \alpha$

(9 $\vdash_R \neg\alpha \vee \alpha$

(10 $\vdash_R \alpha \vee \neg\alpha$

(11 $\vdash_R \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

(ه) برهن استقلال أشكال بديهيات النسق R .

(و) خذ نسق روصر R_O أدناه.

1)الرموز الأولية : : $\urcorner$ ، $\wedge$

2)قواعد الاشتقاق : الوضع

3)أشكال البديهيات :

شكل بديهية A_1 $\qquad \alpha \to (\alpha \wedge \alpha)$

شكل بديهية A_2 $\qquad (\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

شكل بديهية A_3 $\qquad (\alpha \to \beta) \to (\urcorner(\beta \wedge \gamma) \to \urcorner(\gamma \wedge \alpha))$

برهن كل من البمرهنات التالية في النسق R_O :

1) $\vdash_{R_o} \urcorner(\urcorner\alpha \wedge \alpha)$

2) $\vdash_{R_o} \urcorner\urcorner\alpha \to \alpha$

3) $\vdash_{R_o} \urcorner(\beta \wedge \gamma) \to (\gamma \to \urcorner\beta)$

4) $\vdash_{R_o} \alpha \to \urcorner\urcorner\alpha$

5) $\vdash_{R_o} (\beta \to \alpha) \to (\urcorner\alpha \to \urcorner\beta)$

(ز) برهن استقلال الأشكال البديهية لنسق هلبرت وأكرمان.

الفصل الرابع

لغة ودلالة حساب المحمولات Language and Semantics of predicate calculus

4. 1 ضرورة توسيع لغة حساب القضايا

نستطيع أن نرى بسهولة، أنه في اشتقاق قضايا معينة من قضايا أخرى، آخذين بعين الاعتبار التركيب الداخلي للقضايا الذرية، فإن وسائل حساب القضايا تكون غير كافية لتبيان صحة هذا الاشتقاق. لنأخذ المثال التالي.

مثال: إن صحة الاشتقاق

بعض الثعابين تكون مؤذية M_1

كل مؤذي يكون عشبي M_2

إذن، بعض الثعابين تكون عشبية N

لا يمكن إثباته بوسائل حساب القضايا وذلك لأن المقدمات والنتيجة يتم التعامل معها على أنها وحدات غير قابلة للتجزئة وبدون الأخذ بنظر الاعتبار التركيب الداخلي لها. إن صورة هذا الاشتقاق بوسائل حساب القضايا هي

M_1

M_2

إذن N

أي أنه من M_1 و M_2 تنتج N. ولكن كيف لنا أن نعرف أن N تنتج أولا تنتج من M_1 و M_2 فعلا؟ وحيث أن تركيب المقدمات والنتيجة ليس ظاهرا في صورة الاشتقاق هذه. إن تفسير هذا هو أن حساب القضايا، هنا، لا يحلل القضايا الذرية بالرغم من أن القضايا الذرية ليست هي أبسط عناصر استدلالاتنا، لأنها تمتلك تركيبا داخليا يلعب دورا هاما في هذه الاستدلالات. أي أن صحة الحجة في المثال أعلاه تعتمد على معنى الكلمتين (بعض) و(كل) وعلى الكيفية التي ارتبطت بهما الكلمات (ثعبان)، (مؤذي)، (عشبي). نستطيع بسهولة إعطاء مثال-ضاد للاشتقاق أعلاه وذلك بأخذ N كاذبة، بينما تكون كل من M_1 و M_2 صادقتين، وهكذا تكون الحجة خاطئة.

إن التركيب الداخلي للقضايا الثلاثة في المثال أعلاه تكون بين أشياء تمثل مجموعات داخل القضايا نفسها. فصورة الحجة، في المثال، يمكن توضيحها كالتالي.

بعض K تكون L

كل L تكون M

إذن بعض K تكون M

حيث K، L، M تمثل مجموعة من الأشياء: مجموعة كل الثعابين، مجموعة كل المؤذين ومجموعة كل العشبيين على الترتيب. سنرى لاحقا أن هذه الحجة صحيحة.

إن هذا القصور في لغة حساب هذه القضايا يدعونا إلى توسيعها إلى لغة أخرى نستطيع بواسطتها التدقيق في تركيب القضايا الذرية، وعلى وجه

التحديد تحليلها إلى ما نسميه حد ومحمول. هذه اللغة الجديدة تسمى لغة حساب المحمولات والتي تكون لغة حساب القضايا جزءا منها.

4. 2 المحمولات Predicates

في المنطق التقليدي يتم القيام بتحليل القضية الذرية إلى حد ومحمول حتى يظهر تركيبها الداخلي. فمثلا في القضية (الكندي فيلسوف عربي) يكون (الكندي) هو الحد و(فيلسوف عربي) هو المحمول. القضية هنا تؤكد بأن الكندي (يمتلك صفة) أنه (فيلسوف عربي).

إن هذا التحليل يمكن أن يكون ممكنا وكافيا فقط في الحالة التي تعكس فيها القضية صفة الحد، أما إذا كانت القضية الذرية تعكس العلاقة بين الحدود فعندها لا يكون هذا التحليل مناسبا، حيث لا يمكن وصف القضية الذرية على الشكل: x يكون P، حيث x الحد وP المحمول. هذا يحدث مثلا في القضية التالية: الجزائر أكبر مساحة من تونس.

في هذه الفقرة سنعالج المحمول على أنه دالة قضائية (تسمى أيضا دالة منطقية) بمتغير أو متغيرين أو أكثر بالاعتماد على ما تعكسه القضية من صفة لحد أو علاقة بين حدين أو أكثر. سميت دالة قضائية وذلك لتفريقها عن الدوال المستخدمة في الجبر، مثلا: الدوال العددية وعن الدوال المستخدمة في حساب القضايا والتي هي دوال صدق كما مر بنا في الفصل الأول.

إن هذه المعالجة لمحمولات تكون مناسبة عندما تعكس القضية صفة أو علاقة بين الحدود. سنرمز للمحمولات بالحروف الكبيرة مع فراغ واحد أو أكثر أو نرمز لها بالحروف الكبيرة مع متغير واحد أو أكثر لتشمل هذا

الفراغ. لنأخذ المثال: x عدد زوجي أو (...عدد زوجي). هذه ليست قضية لأنه لا يمكن القول أنها صادقة أو كاذبة. إنها دالة قضائية وتصبح هذه القضية صادقة أو كاذبة عندما يتم تعويض المتغير بعدد طبيعي أو نستبدل النقاط بعدد طبيعي. هذه الدالة القضائية تسمى أيضا محمولا أحاديا ويرمز له بواسطة P_x وذلك باستخدام رمز الدالة P والمتغير x المعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية. وهكذا، فإننا بواسطة P_6 نرمز إلى القضية الصادقة (6 عدد زوجي). ونرمز بواسطة P_9 إلى القضية الكاذبة (9 عدد زوجي). إن المحمول P_x يصبح قضية صادقة أو كاذبة بالاعتماد على القيمة المعوض بها المتغير. مجموعة تعريف هذه الدالة القضائية (قيم x في P_x) هي مجموعة الأعداد الطبيعية N أما مستقر الدالة فهي المجموعة {T, F}.
رمزيا نكتب الدالة هكذا :

بشكل عام الدالة القضائية أو المحمول P_x يجزئ مجموعة التعريف M إلى مجموعتين جزئيتين، بحيث أن كل عنصر a ينتمي إلى إحدى المجموعتين الجزئيتين تكون P_a قضية صادقة. وكل عنصر b ينتمي إلى المجموعة الثانية تكون P_b قضية كاذبة. إن عناصر المجموعة الجزئية للمجموعة M والتي نحصل بواسطتها من الدالة القضائية P_x على قضية صادقة تسمى مجموعة صدق هذه الدالة. مجموعة صدق الدالة هي المجموعة التي تهمنا عند دراسة أية دالة قضائية.

مثال

ليكن P_x رمزا للمحمول: (x عاصمة اليمن). إن $P_{صنعاء}$ يرمز إلى القضية الصادقة (صنعاء عاصمة اليمن)، أما $P_{طرابلس}$ فيرمز إلى القضية الكاذبة (طرابلس عاصمة اليمن). إن مجموعة تعريف هذه الدالة هي مجموعة مدن، أو إن قيم x في P_x تكون مدن. أما مجموعة صدق الدالة فتتكون من مدينة واحدة-صنعاء.

بشكل عام، إن مجموعة تعريف المحمول (الدالة القضائية) P_x هي المجموعة التي يمكننا اختيار عنصر منها لتعويض x . غالبا لا تذكر هذه المجموعة عندما تكون واضحة من طبيعة المحمول

في المثالين السابقين كان المحمول أحاديا وهو يعكس صفة لحد. وبتعميم مفهوم هذا المحمول نحصل على محمول (متعدد المواضع) وهو الذي يعكس عادة علاقة بين الحدود. كل علاقة هي مجموعة من الأزواج المرتبة. العلاقات: (أكبر سنا من)، (يساوي)، (أصغر من) تمثل محمولات ثنائية. ومثلا العلاقة (المحمول) $x < y$ المعرفة على المجموعة M^2، حيث $M = \{1, 2, 3\}$ هي مجموعة كل الأزواج المرتبة من الأعداد الطبيعية التي تكون المركبة الأولى لكل زوج أصغر من المركبة الثانية من الزوج نفسه، أي أنها المجموعة $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$.

أمثلة

لنجد الحد (أو الحدود) والمحول في كل من القضايا الذرية التالية :

(1) احمد يذهب إلى المكتبة.

الحد : أحمد، المحمول : يذهب إلى المكتبة.

(2) أكبر كرة في حانوت علي هي حمراء.

الحد : أكبر كرة في حانوت علي، المحمول : هي حمراء.

(3) هو يكون رياضي.

الحد : هو، المحمول : رياضي.

(4) x عدد طبيعي.

الحد : x ، المحمول : عدد طبيعي.

(5) مشتقة الدالة f معرفة.

الحد : مشتقة الدالة f، المحمول : معرفة.

(6) $2 < 5$

الحدود : 5 و2، المحمول : $<$

الأسماء، كما في (1) والضمائر، كما في (3)، والمتغيرات كما في(4) وكذلك الأوصاف، كما في (2) والدوال، كما في (5) والثوابت كما في (6) تسمى حدودا. وبما أننا عاملنا الضمير معمالة المتغير والأسماء معاملة الثوابت فيمكننا إعطاء تعريفا أكثر دقة للحد وهو : الثوابت والمتغيرات والدوال تسمى حدودا.

في المثال (1) يمتلك أحمد صفة أنه (يذهب إلى المكتبة). وفي (2) نجد أن أكبر كرة في حانوت علي تمتلك صفة أنها حمراء. كذلك نجد الصفات : رياضي، عدد طبيعي، معرفة، وهذه كلها محمولات أحادية. أما العلاقة $<$ في (6) فتمثل محمولا ثنائيا يربط الحدين 2 و 3. ويمكن تطبيق محمولات أخرى على حدين أو أكثر مثل : أكبر سنا من، أذكى من، وهذان

محمولان ثنائيان. أما العلاقة (بين) فتمثل محمولا ثلاثيا لأنه يربط ثلاثة حدود مثل : تونس بين الجزائر وليبيا، وكذا النقطة A بين النقطتين B و C.

4. 3 العمليات على المحمولات Operations on Predicates

لقد بينا في الفقرة السابقة بأن المحمولات هي دوال قضائية وأنها تأخذ قيم الصدق T وقيم الكذب F وهكذا يمكننا تطبيق العمليات التي استخدمناها في حساب القضايا: ⌉، ∧، V، →، ↔ على المحمولات وبذلك نكون من المحمولات الذرية (وهي المحمولات التي لا يمكن تجزئتها إلى محمولات أخرى) محمولات أخرى مركبة.

1. النفي

ليكن P_x محمولا مجموعة تعريفه M (نقول أيضا معرفا على M). إذن نفي P_x ونرمز له $\rceil P_x$ يصبح قضية صادقة من أجل قيم x من M التي يصبح من أجلها P_x قضية كاذبة. إذن تكون مجموعة قيم صدق $\rceil P_x$ متممة (مكملة) مجموعة صدق P_x بالنسبة إلى المجموعة M. أي أن

$$\{x : \rceil P_x\} = \overline{\{x : P_x\}}$$

2. الوصل

ليكن P_x، Q_x محمولين معرفين على المجموعة M. يمكننا تعريف الوصل $P_x \wedge Q_x$ المعرف على M. الوصل $P_x \wedge Q_x$ يصبح قضية صادقة لكل قيم x من M التي يصبح من أجلها كل من المحمولين P_x و Q_x قضية صادقة أي أن

$$\{x : P_x \wedge Q_x\} = \{x : P_x\} \cap \{x : Q_x\}$$

مجموعة قيم صدق تعريف الوصل $P_x \wedge Q_x$ هي تقاطع مجموعتي صدق المحمولين P_x وQ_x.

3. الفصل

ليكن P_x، Q_x محمولين معرفين على المجموعة M. يمكنا تعريف الفصل $P_x \vee Q_x$ المعرف على M. الفصل $P_x \vee Q_x$ يصبح قضية صادقة لكل قيم x من M التي يصبح من أجلها على الأقل أحد المحمولين P_x و Q_x قضية صادقة أي أن

$$\{x : P_x \vee Q_x\} = \{x : P_x\} \cup \{x : Q_x\}$$

4. الاستلزام

ليكن P_x، Q_x محمولين معرفين على المجموعة M. يمكننا تعريف الاستلزام $P_x \rightarrow Q_x$ المعرف على M. الاستلزام $P_x \rightarrow Q_x$ يصبح قضية كاذبة لكل قيم x من M التي يصبح من أجلها P_x قضية صادقة و Q_x يصبح قضية كاذبة. جميع قيم x الأخرى من M يصبح من أجلها $P_x \rightarrow Q_x$ قضية صادقة. المحمول $\rceil P_x \vee Q_x$ يأخذ نفس قيم الصدق من أجل قيم x هذه (المحمول $\rceil P_x \vee Q_x$ يصبح قضية كاذبة لقيم x التي من أجلها P_x صادقة وQ_x وكاذبة ويصبح قضية صادقة من أجل القيم الباقية إلى x من M).
وهكذا يكون

$$(P_x \rightarrow Q_x) \Leftrightarrow (\rceil P_x \vee Q_x)$$

و

$$\{x:P_x\rightarrow Q_x\}=\{x:\urcorner P_x\vee Q_x\}=\{x:\urcorner P_x\}\cup\{x:Q_x\}$$
$$=\overline{\{x:P_x\}}\cup\{x:Q_x\}$$

5. الاستلزام الثنائي

ليكن P_x، Q_x محمولين معرفين على المجموعة M. يمكنا تعريف الاستلزام الثنائي $Q_x \leftrightarrow P_x$ المعرف على M. الاستلزام الثنائي $P_x{\leftrightarrow}Q_x$ يصبح قضية صادقة لكل قيم x من M التي يصبح من أجلها P_x و Q_x كليهما قضيتين صادقتين أو يصبح كليهما قضيتين كاذبتين. بما أن

$$(P_x\leftrightarrow Q_x)\Leftrightarrow(P_x\rightarrow Q_x)\wedge(Q_x\rightarrow P_x)$$

إذن نحصل على :

$$(P_x\leftrightarrow Q_x)\Leftrightarrow(\urcorner P_x\vee Q_x)\wedge(\urcorner Q_x\vee P_x)$$
$$\Leftrightarrow(\urcorner P_x\wedge\urcorner Q_x)\vee(P_x\wedge Q_x)$$

وبالتالي يكون :

$$\{x:P_x\leftrightarrow Q_x\}=(\overline{\{x:P_x\}}\cup\{x:Q_x\})\cap(\overline{\{x:Q_x\}}\cup\{x:P_x\})$$
$$=(\overline{\{x:P_x\}}\cap\overline{\{x:Q_x\}})\cup(\{x:P_x\}\cap\{x:Q_x\})$$

4 .4 المكممات **Quantifiers**

سنقوم بإجراء عمليتين على المحمولات حيث نحولها إلى قضايا. العملية الأولى هي التكميم الكلي (الشمولي) وعملية التكميم الوجودي (الجزئي). لنأخذ المحمول P_x. من الممكن أن تمتلك الصفة P جميع العناصر

التي تنتمي إلى المجموعة المعرف عليها هذا المحمول أو على الأقل بعض هذه العناصر.

1) إذا كانت الصفة P تمتلكها جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة المعرف عليها P، فإن القضية لكل x، P_x تكون صادقة.

2) إذا كانت الصفة P يمتلكها بعض العناصر التي تنتمي إلى المجموعة المعرفة عليها P، فإن القضية بعض x، P_x تكون صادقة.

يرمز للتعابير (لكل x)، (مهما يكن x)، (جميع x)، (لأي x) بواسطة: $(\forall x)$ ويسمى المكمم الكلي. ويرمز للتعابير (بعض x)، (يوجد x)، (يوجد على الأقل x) بواسطة: $(\exists x)$ ويسمى المكمم الوجودي. إن تركيب قضية المكمم الكلي تكون عادة على الشكل $(\forall x)$ $(\ldots\rightarrow\ldots)$، أما تركيب قضية المكمم الوجودي فتكون عادة على الشكل $(\exists x)$ $(\ldots\wedge\ldots)$.

إذا تكونت مجموعة التعريف M للمحمول P_x من عنصر واحد a، أي أن $M = \{a\}$ فإن $(\forall x)\ P_x$ يكافئ P_a، أي أن:

$$(\forall x)\ P_x \Leftrightarrow P_a$$

أما إذا كانت $M = \{a_1, a_2\}$ فإن القضية $(\forall x)\ P_x$ تكافئ $P_{a1} \wedge P_{a2}$، أو أن:

$$(\forall x)\ P_x \Leftrightarrow P_{a1} \wedge P_{a2}$$

إذا كانت M نهائية وتتكون من k من العناصر، أي أن :

$M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ فإن

$$(\forall x)\ P_x \Leftrightarrow P_{a1} \wedge P_{a2} \wedge \ldots \wedge P_{ak}$$

وباختصار نكتب:

$$(\forall x)P_x \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{k} P_{a_i} \qquad (1)$$

إذا تكونت مجموعة التعريف M للمحمول P_x من عنصر واحد a، أي أن $M = \{a\}$ فإن القضية $(\exists x)P_x$ تكافئ P_a، أي أن:

$$(\exists x)P_x \Leftrightarrow P_a$$

أما إذا كانت $M = \{a_1, a_2\}$، فإن القضية $(\exists x)P_x$ تكافئ $P_{a1} \vee P_{a2}$. وإذا كانت M نهائية وتتكون من k من العناصر، أي أن: $M=\{ a_1, a_2,\dots, a_k\}$ فإن

$$(\exists x)P_x \Leftrightarrow P_{a1} \vee P_{a2} \vee \dots \vee P_{ak}$$

وباختصار نكتب :

$$(\exists x)P_x \Leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{k} P_{a_i} \qquad (2)$$

4. 5 اللغة الرمزية والترجمة لحساب المحمولات

لقد بينا في بداية هذا الفصل الحاجة لتوسيع حساب القضايا إلى حساب المحمولات. وبعبارة أخرى فإن حساب المحمولات يمثل توسيعا لحساب القضايا. وبهذا تكون لغة حساب القضايا جزءا من لغة حساب المحمولات. وعليه، فإن هذه الأخيرة ستشمل رموزا جديدة بالإضافة إلى رموز لغة حساب القضايا. وهكذا فاللغة الرمزية لحساب المحمولات تتكون من:

1) الحروف الكبيرة ...,A, B, C وهذه الحروف مع دلائلها $A_1,A_2,\dots,B_1,B_2,\dots$ للتعبير عن متغيرات المحمولات.

2) الحروف f ، g ، h ، وهذه الحروف ودلائلها للتعبير عن الدوال.

3) رموز الروابط $\urcorner$، $\wedge$، $\vee$، $\rightarrow$، $\leftrightarrow$.

4) الأقواس ()، وهي قوس الإغلاق وقوس الفتح على الترتيب.

5) الحروف الصغيرة ...a, b, c, وهذه الحروف ودلائلها ...$a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ للتعبير عن الحدود التي هي ثوابت والحروف الصغيرة x, y, z للتعبير عن الحدود التي هي متغيرات.

6) المكممان ∃، ∀.

إن الترجمة من اللغة العربية العادية إلى لغة حساب المحمولات لا تخضع لقواعد معينة وإنما يتوجب علينا فهم معنى القضية باللغة العربية ومن ثم نعيد التعبير عن هذا المعنى باستخدام رموز حساب المحمولات. ولتوضيح كيفية القيام بهذه الترجمة يجب أولا تعيين الحدود والمحمولات. وكما مر بنا سنقوم بترميز الحدود باستخدام الحروف الصغيرة وترميز المحمولات بالرموز الكبيرة، وحيث نكتب رمز المحمول على يسار رمز الحد أو الحدود. الآن سنعطي أمثلة عديدة ومختلفة لممارسة الترجمة إلى لغة حساب المحمولات.

(1) أحمد يعمل محاميا.

الحد: أحمد−a، المحمول: x يعمل محاميا− M_x.

الترجمة: M_a.

(2) أحمد لا يعمل محاميا.

الترجمة: $\neg M_a$ (باستخدام نفس الرموز في (1)).

(3) هو يعمل محاميا.

الحد: هو−x، المحمول: x يعمل محاميا−M_x.

الترجمة: M_x.

(4) x عدد زوجي.

الحد: x–x، المحمول: x عدد زوجي–E_x.

الترجمة: E_x.

(5) أحمد وعلي محاميان.

الحد الأول: أحمد–a، الحد الثاني: علي–b، المحمول: x محامي–M_x.

الترجمة: $M_a \wedge M_b$.

(6) أحمد يكون محاميا أو رياضيا.

الحد: أحمد–a، المحمول الأول: x يكون محاميا–M_x ، المحمول الثاني: x يكون رياضيا–N_x.

الترجمة: $M_a \vee N_a$.

(7) إذا كان سالم محاميا فإنه لن يكون طبيبا.

الحد: سالم–a، المحمول الأول: x محاميا– M_x، المحمول الثاني: x طبيبا–R_x.

الترجمة: $M_a \rightarrow \neg R_a$

(8) يكون سالم محترما إذا وفقط إذا كان صادقا.

الحد: سالم–a، المحمول الأول: x يكون محترما–L_x، المحمول الثاني: x يكون صادقا–R_x.

الترجمة: $L_a \leftrightarrow R_a$.

(9) $x > y$

الحد الأول: x، الحد الثاني: y، المحمول: $x > y - C_{xy}$.

الترجمة: C_{xy}.

(10) كل المعادن ناقلة للحرارة.

كما ذكرنا سابقا يمكن ان تكتب هذه القضية على الشكل:

كل N تكون L

وبما أنه لم يذكر اسم لمعدن معين، فسنستخدم المتغير x ليعبر عن أي معدن، وبذلك يمكننا كتابة القضية كما يلي:

كل x، إذا كان x معدن فإن x يكون ناقلا للحرارة.

والآن عوضا عن (كل x) نكتب الرمز $(\forall x)$. المحمول الأول: x يكون معدن$-L_x$، المحمول الثاني: x ناقلا للحرارة$-Z_x$.

الترجمة: $(\forall x)\ (L_x \rightarrow Z_x)$

(11) بعض التجار جشعون.

يمكننا أن نكتب هذه القضية على الشكل:

بعض C يكون G.

بما أنه لم يذكر اسم لتاجر معين، فسنستخدم المتغير x ليعبر عن أي تاجر. وبذلك يمكننا كتابة القضية كما يلي:

بعض x، x يكون C_x و x يكون G_x (حيث C_x هو المحمول: x يكون تاجر، G_x هو المحمول: x يكون جشع).

والآن عوضا عن (بعض x) نكتب الرمز $(\exists x)$.

الترجمة: $(\exists x)\ (C_x \wedge G_x)$.

(12) لا دلفين يكون سمكا.

هذه القضية يمكن ترجمتها بإحدى القضيتين التاليتين:

1) كل x، إذا كان x دلفين فإن x لا يكون سمك.

إذا رمزنا للمحمول: x يكون دلفين بواسطة D_x ورمزنا للمحمول x يكون سمكا بواسطة F_x، نستطيع بذلك ترجمة القضية هكذا:

الترجمة: $(\forall x)\ (D_x \rightarrow \neg F_x)$

2) لا يوجد x، بحيث أن x يكون دلفين و x يكون سمك.

الترجمة: $\neg(\exists x)\ (D_x \wedge F_x)$

إن هذا المثال يقودنا إلى توضيح العلاقة بين المكممين الكلي والوجودي كما يلي : إذا قلنا (ليست كل الطيور تطير) فمن المعروف أن هذه القضية صادقة وذلك لوجود طيور مثل : النعامة وطائر البطريق لا يطيران، أي أننا نقرر صدق القضية (يوجد طير لا يطير). سنترجم هتين القضيتين المتكافئتين :

(1) $\neg\ (\forall x)\ (K_x \rightarrow\ L_x)$

(2) $(\exists x)\ (K_x \wedge \neg L_x)$

حيث K_x : x طير، L_x : x هي يطير.

وللمقارنة بينهما سنحول الأولى إلى :

(3) $\neg\ (\forall x)\ (\neg K_x \vee\ L_x)$

وذلك بتطبيق قاعدة الاستلزام على الصيغة الشرطية في (1). الان وبتطبيق قانون د ي مورغان نحصل على :

(4) $\neg\ (\forall x)\ \neg(K_x \wedge \neg\ L_x)$

وهذه الأخيرة تشبه (2) ولكن مع $\neg(\forall x)$ $\neg$ عوضا عن $(\exists x)$ ، أي أن

(1) $\neg(\forall x)\,\alpha \Leftrightarrow (\exists x)\,\neg\alpha$

حيث α أية صيغة.

كذلك فإن :

(2) $\neg(\exists x)\,\alpha \Leftrightarrow (\forall x)\,\neg\alpha$

(3) $(\forall x)\,\alpha \Leftrightarrow \neg(\exists x)\,\neg\alpha$

(4) $(\exists x)\,\alpha \Leftrightarrow \neg(\forall x)\,\neg\alpha$

(13) جميع الطلبة الذين يمارسون الرياضة يكونون أقوياء البنية.

يمكننا كتابة القضية كما يلي:

مهما يكن x، إذا x طالب و x يمارس الرياضة فإن x يكون قوي البنية.

الترجمة: $(\forall x)\,((S_x \wedge R_x) \to H_x)$

حيث S_x: x يكون طالب، R_x: x يمارس الرياضة، H_x: x قوي البنية. ويمكن كتابة هذه القضية كالتالي: $(\forall x)\,(S_x \to (R_x \to H_x))$

استخدمنا هنا قاعدة (الاستيراد–التصدير).

(14) ليس كل ما نفضله نحصل عليه. ليكن: x يكون شخصا–P_x، x يفضل y–L_{xy}، x يحصل على y–R_{xy}. يمكننا كتابة القضية كما يلي:

ليس كل x، إذا كان x شخصا، فإنه لكل شيء y إذا كان x يفضل y فإن x يحصل على y.

الترجمة: $\neg(\forall x)\,(P_x \to (\forall y)\,(L_{xy} \to R_{xy}))$

(15) مشتقة الدالة f معرفة.

الحدود :

$f : f$ ، $g(x)$: مشتقة x

المحمولات :

Kx : x معرف

الترجمة : $K_{g(f)}$

(16) أكبر كرة في حانوت علي حمراء

الحدود :

أكبر كرة في حانوت علي : a

المحمولات :

K_x : حمراء x

الترجمة :

K_a

إن المكمم الجزئي $\exists$ يعني، في حساب المحمولات، أنه يوجد على الأقل واحد يمتلك الصفة K. ولكن، كيف يمكننا التعبير عن (على الأقل اثنين يمتلكان الصفة K) ؟. يمكننا استخدام مكممين جزئيين، ولكن هذا لا يكفي لأن $(\exists x)(\exists y)(Kx \wedge Ky)$ لا تستبعد إمكانية أن يكون x وy يمثلان نفس الشيء. للقول أنه يوجد على الأقل اثنين، نحن نحتاج إلى القول أنه يوجد شيء x وشيء آخر مختلف y والاثنان يمتلكان الصفة K. نستطيع أن نقول أن x يختلف عن y بواسطة كتابة $x \neq y$. وبالتالي، فإن الترجمة الصحيحة

تصبح $(\exists x)\ (\exists y)\ (Kx \wedge Ky \wedge x \neq y)$. وبشكل مماثل نعبر عن يوجد على الأقل ثلاثة تمتلك الصفة K :

$$(\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (Kx \wedge Ky \wedge Kz \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z)$$

وهكذا.

يمكننا أيضا ترجمة قضايا تحوي (على الأكثر n). فمثلا، إذا أردنا القول أنه يوجد فرد خارق القوة على الأكثر وهذا ينص على عدم وجود أكثر من فرد خارق للقوة. وبالتالي فهو نفي إلى : يوجد اثنان خارقا القوة على الأقل، وهكذا يمكننا أن نقوم بنفي صيغة من النوع الذي مر بنا أعلاه فنحصل على :

$$\neg (\exists x)\ (\exists y)\ ((Kx \wedge Ky) \wedge x \neq y)$$

وهذه تكافئ :

$$(\forall x)\ (\forall y)\ ((Kx \wedge Ky) \rightarrow x = y)$$

والتي تنص على أنه : من أجل كل x وكل y، إذا كان x و y خارقا القوة فإن x هو y. إنها تنص على أن جميع خارقي القوة هم الفرد نفسه تماما. ولكن هذا يعني أنه يوجد على الأكثر فرد خارق القوة.

وبالمثل نعبر عن القضية : يوجد على الأكثر اثنين خارقي القوة وذلك باعتبارها نفي إلى يوجد على الأقل ثلاثة خارقي القوة، فنحصل على :

$$\neg (\exists x)\ (\exists y)\ (\exists z)\ (Kx \wedge Ky \wedge Kz \wedge x \neq y \wedge y \neq z \wedge x \neq z)$$

وهذه تكافئ :

$$\neg (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((Kx \wedge Ky \wedge Kz) \rightarrow x = y \vee y = z \vee y = z)$$

والتي تنص على أنه، إذا كان x و y و z جميعهم خارقي القوة فإن اثنين منهم يجب أن يكونا الفرد نفسه.

كذلك، يمكننا ترجمة قضايا تحوي (n تماما، ... ,$n = 0, 1$). وبما أن القضية: يوجد n تماما يمتلك الصفة K، مكافئة إلى وصل يوجد على الأقل n يمتلك الصفة K ويوجد على الأكثر n يمتلك الصفة K، فيمكننا القيام بالترجمة، وذلك بربط الترجمتين المذكورتين أعلاه. ولكن، هنالك طريقة أسهل، فإذا أردنا القول بوجود قمر واحد تماما، فإننا نقول بأنه يوجد قمر وأي شيء يكون قمر يكون مطابقا له. وإذا أردنا القول بوجود رياضيين اثنين عربيين ممتازين، فإننا نقول بأنه يوجد على الأكثر اثنين وكل رياضي عربي ممتاز آخر يجب أن يكون مطابق إلى الأول أو الثاني.

سندرس أدناه الترجمات من هذا النوع حسب قيم n :

1) $n = 0$ $\quad (\forall x) \neg Kx$

2) $n = 1$ $\quad (\exists x) (\forall y) ((Kx \wedge Ky) \rightarrow x = y)$

3) $n = 2$ $\quad (\exists x) (\exists y) (\forall z) (Kx \wedge Ky \wedge x \neq y \wedge (Kz \rightarrow (z = x \vee z = y)))$

وهكذا.

4. 6 قواعد بناء الصيغ

تعريف: إذا كان P محمولا ذو n موضع وكانت $a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي n من الحدود، فإن $P_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ يسمى صيغة ذرية.

مثال: البصرة تقع إلى الجنوب من بغداد

الحدود : البصرة–b، بغداد–d.

المحمول: x إلى الجنوب من y: P_{xy}.

الترجمة: P_{bd}. هذه صيغة ذرية.

سنبني الآن الصيغ في حساب المحمولات حسب القواعد الأربعة التالية:

1) الصيغة الذرية تكون صيغة.

2) إذا كانت α_1, α_2 صيغتان فإن:

$\rceil \alpha_1, (\alpha_1 \wedge \alpha_2), (\alpha_1 \vee \alpha_2), (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2), (\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2)$ تكون صيغ.

3) إذا كان x متغير و α صيغة فإن:

$(\forall x)\, \alpha, (\exists x)\, \alpha$

تكون صيغتان.

4) أي تتابع آخر من الرموز لا يكون صيغة.

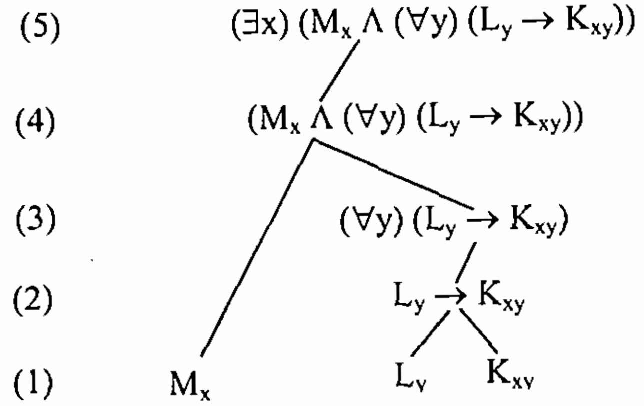
الكثير من المناطقة يستخدمون مصطلح (الصيغة الجيدة التكوين) مقابل (الصيغة) الذي استخدمناه نحن من أجل الاختصار.

4. 7 شجرة الصيغة

لقد حصلنا على الصيغ انطلاقا من الصيغة الذرية وهكذا نستطيع إنشاء شجرة الصيغة التي تبين كيفية الحصول على الصيغة انطلاقا من الصيغة الذرية التي تقع على مستوى (1). كل مستوى أعلى من (1) يتم الحصول عليه من المستويات التي تسبقه بواسطة الجزء (2) أو (3) من (قواعد بناء الصيغ) أعلاه.

مثال: شجرة الصيغة $(\exists_x)\, (M_x \wedge (\forall_y)\, (L_y \rightarrow K_{xy}))$

تكون كما يلي:



4. 8 المتغيرات الحرة والمتغيرات المقيدة **Free and Bound Variables**

ذكرنا سابقا بأن تكميم المحمولات يحولها إلى قضايا. إن أدوات التكميم $\forall$، $\exists$ تؤثر على متغيرات المحمولات.

تعريف: نطاق مكمم في صيغة ما هو المكمم نفسه مع أقصر صيغة تلي المكمم مباشرة.

أمثلة على نطاق المكمم $(\forall x)$

(1) $(\forall x)\ (M_x \rightarrow (\forall y)(R_y \rightarrow \neg H_{xy}))$

(2) $(\forall x)\ R_x \rightarrow (\forall y)(R_y \rightarrow M_{xy})$

نطاق المكمم الكلي في (1) هو (1) كلها، أما النطاق في (2) فهو $(\forall x)\ R_x$.

تعريف: يسمى المتغير x في صيغة ما مقيدا إذا وفقط إذا كان ضمن نطاق المكمم $(\forall x)$ أو $(\exists x)$ وإذا لم يكن كذلك في حالة واحدة على الأقل فيسمى المتغير x حرا.

المتغيران x وy في المثال (1) مقيدان. المتغير x مقيد وحر في المثال (2)، أما المتغير y فمقيد.

مثال

(1) المتغير x في $(\exists x)\ P_{xy}$ مقيد أما y فحر.

(2) في الصيغة $(\forall x)\ (x > y)\ V\ (\exists x)\ (x < 1)$ المتغير x مقيد لأنه مرة ضمن نطاق المكمم $(\forall x)$ ومرة ضمن نطاق المكمم $(\exists x)$.

تعريف: تسمى الصيغة قضية إذا لم تمتلك أية متغيرات حرة.

9.4 دلالة حساب المحمولات

إن دلالة حساب المحمولات معنية بكيفية بلوغ الصيغ – كما في حساب القضايا – قيم صدقها بالاعتماد على دلالة أجزائها المركبة لها. ولكن، بما أن هذه الأجزاء يمكن أن تكون متغيرات محمولات، ثوابت أو متغيرات، فإننا لن نكون قادرين، هنا، على أن نقيد أنفسنا بقيم صدق عندما يتعلق الأمر باللغات التفسيرية لحساب المحمولات. الصيغ هنا يجب أن تؤول إلى تفسيرات متغيرات المحمولات والثوابت وأي شيء آخر يظهر في هذه الصيغ.

1.9.4 تفسير الصيغ في حساب المحمولات

أولا : تفسير الصيغ ذات المتغيرات المقيدة

لنأخذ الصيغة الوجودية :

$$(1) \qquad (\exists x)(K_x \wedge L_{xa})$$

لا يمكننا القول بصدق أو كذب هذه الصيغة قبل أن نفسر رموزها.

هنا يجب :

(1) تفسير مجموعة القيم التي يأخذها المتغير x، وسنسميها المجموعة الشاملة. وبما أن الصيغة الوجودية تعني بالنسبة لنا أنه يوجد شيء ما، فإننا بواسطة تفسير المجموعة الشاملة إنما نفسر ماذا يمكن أن يعني هذا الشيء : أعداد، بشر، أشجار، دوال، أطباء، وهكذا.

(2) تفسير ماذا تعني رموز الممولات، الثوابت، رموز الدوال (إن وجدت) في المجموعة الشاملة. وهكذا فإن تفسير الصيغة (1) يكون على الشكل :

$$O_1 = (M_1, K_1, L_1, a_1)$$

حيث أن M_1 هي المجموعة الشاملة (مجموعة غير خالية)، K_1,L_1,a_1 هي تفسيرات إلى K, L, a على الترتيب .

الآن ليكن M_1 هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، K_1x : x عدد صحيح، L_{1xy} : $x > y$، a_1 : 0. وهكذا فإن تفسير الصيغة (1) في O_1 يكون القضية :

(2) بعض الأعداد الحقيقية تكون صحيحة وموجبة.

من الواضح أن القضية (2) صادقة في O_1 (خذ مثلا 5 عدد حقيقي صحيح وموجب). ولكننا إذا أخذنا تفسير آخر :

$O_2 = (M_1, K_2, L_1, a_1)$

نلاحظ أن الموجوعة الشاملة M_1 ، وكذلك L_1، a_1 بقيت على حالها بينما غيرنا K_1 إلى K_2 حيث أن K_2x : x سالب. وإذن تفسير الصيغة (1) في O_2 يكون القضية :

(3) بعض الأعداد الحقيقية تكون سالبة وموجبة.

من الواضح أن (3) هنا كاذبة.

إن تفسير صيغة في حساب المجمولات هو تعميم لتعيين قيم الصدق للمتغيرات القضائية للصيغة في حساب القضايا.

لنأخذ الصيغة الكلية (المكممة كليا) التالية :

$$(4) \quad (\forall x)\,((Kx \wedge Lx) \rightarrow Nxf(a))$$

تفسير الصيغة (4) يأخذ الشكل التالي :

$O_1 = (M_1, K_1, L_1, N_1, f_1, a_1)$

(f_1 هو تفسير للدالة f). لنأخذ التفسيرات التالية :

M_1 : مجموعة الأعداد الصحيحة

K_1x : x موجب

L_1x : x زوج

N_1xy : x < y

a_1 : 0

$f_1(x)$: x + 1

وإذن، فإن تفسير الصيغة (4) في O_1 يصبح القضية :

(5) كل عدد صحيح زوجي موجب يكون أكبر من 1

و من الواضح أن (5) هنا صادقة.

سنستبدل O_1 بتفسير آخر O_2 حيث

$$O_2 = (M_1, K_1, L_1, N_1, f_1, a_2)$$

نلاحظ أن الفرق بين O_1 و O_2 هو التغيير من a_1 إلى a_2 فقط، وليكن a_2 :

6. الآن يصبح تفسير (4) في O_2 القضية :

(6) كل عدد صحيح زوجي موجب يكون أكبر من 7

ومن الواضح أن (6) هنا كاذبة.

ثانيا : تفسير الصيغ ذات المتغيرات الحرة

لنأخذ الصيغة :

$$(7) \quad K_{xa} \rightarrow (\exists y)\, L_{f(x,y)b}$$

المتغير x في هذه الصيغة حر. إن تفسير الصيغة (7) يكون على الشكل التالي :

$$O_1 = (M_1, K_1, L_1, N_1, f_1, a_1, b_1)$$

نلاحظ أن K_1 ، L_1 محمولين ثنائيين على M_1 ، f_1 دالة ذات متغيرين (أي أن $f_1 : M_1 \times M_1 \longrightarrow M_1$) والثابتين a_1 و b_1 عنصرين من M_1. سنعطي الآن تفسيرا إلى (7).

لتكن M_1 هي مجموعة الأعداد الحقيقية R ، K_1xy : $x < y$ ، L_1xy :

$x = y$ ، $f_{1(x,y)} = x \cdot y$ ، $a_1 = 2$ ، $b_1 = 1$.

إذا قمنا بتفسير الصيغة (7) بدون إعطاء أي تفسير إلى x فإنها تؤول إلى ما يلي :

(8) إذا كانت $x > 2$ فإنه يوجد حقيقي y بحيث أن $x . y = 1$.

أو أن

(9) إذا كنت $x > 2$ فإن x تمتلك نظير ضربي.

(8) (والمكافئة لها (9)) تكون صادقة أحيانا وكاذبة أحيانا أخرى. فإذا كانت $x = -4$ فإن (8) تكون صادقة لأنه يوجد عدد حقيقي $y = -¼$ حيث أن $x . y = 1$. و(8) صادقة أيضا عندما $x = 3$ لأنه في هذه الحالة يكون مقدم (8) كاذبا. ولكن إذا كانت $x = 0$ فإن (8) تكون كاذبة لأن مقدمها يكون صادقا بينما تاليها كاذبا لعدم وجود عدد حقيقي y بحيث أن $0 . y = 1$.

سنعطي الآن التعريف التالي :

ليكن O_1 تفسيرا للصيغة α ولتكن α ذات n من المتغيرات الحرة $x_1, x_2, ..., x_n$ ولتكن $a_1 = (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ نونية مرتبة تنتمي إلى الموجوعة الشاملة M_1 للتفسير O_1. نقول أن a_1 تحقق α إذا آلت α إلى قضية صادقة في O_1 كلما فسرت α في O_1 وذلك بتفسير كل متغير حر x_i على أنه a'_i.

إن كل مما يأتي هو تفسير للصيغة (7) في O_1 :

(1) إذا كنت $-4 > 2$ فإنه يوجد عدد حقيقي y بحيث أن $-4 . y = 1$

(2) إذا كنت $3 > 2$ فإنه يوجد عدد حقيقي y بحيث أن $3 . y = 1$

(3) إذا كنت $0 > 2$ فإنه يوجد عدد حقيقي y بحيث أن $0 . y = 1$

وكما ذكرنا أعلاه فإن (1) و (2) صادقتين، أما (3) فكاذبة. هنا نقول أن -4 تحقق الصيغة (7) في O_1 وكذلك بالنسبة 3، أما 0 فلا يحقق الصيغة (7) في O_1.

التفسيرات التي مرت بنا لحد الآن كانت عددية، أي أن مداها مجموعة عددية. ولكنه ليس من الضروري أن يكون التفسير عدديا. سوف نقوم بإنشاء تفسيرات تكون مشابهة إلى جداول الصدق في حساب القضايا.

لنفرض أننا نريد إيجاد تفسير تكون فيه الصيغتين

$$(1) \qquad (\exists x)(K_x \wedge L_x)$$

$$(2) \qquad (\exists x)(L_x \wedge N_x)$$

صادقتين، أما الصيغة

$$(3) \qquad (\exists x)(K_x \wedge N_x)$$

فكاذبة.

حتى تكون (3) كاذبة في التفسير $O_1 = (M_1, K_1, L_1, N_1)$، فإنه يجب أن لا يوجد عنصر a_1 في M_1 بحيث يمتلك الصفة K_1 ويمتلك الصفة N_1.

وحتى تكون كل من (1) و (2) صادقة فإنه لا يجب أن لا تكون أي من K_1، L_1، N_1 خالية (أي يجب أن توجد عناصر تنتمي إلى M_1 وتمتلك الصفات K_1، L_1، N_1). وهكذا فإن M_1 يمتلك عنصرين على الأقل.

ليكن $M_1 = \{a_1 , b_1\}$، $K_1 = \{a_1\}$، $L_1 = \{a_1 , b_1\}$، $N_1 = \{b_1\}$.

هذه الحالة يمكن وضعها على شكل جدول صدق كما يلي :

$M_1 = \{ a_1, b_1 \}$

	K_1	L_1	N_1
a_1	T	T	F
b_1	F	T	T

الشكل (1)

نلاحظ من الجدول أن الصيغة (1) صادقة في O_1 لأن K_1a_1 و L_1a_1 صادقتين. الصيغة (2) صادقة في O_1 لأن L_1b_1 و N_1b_1 صادقتين. ولكن الصيغة (3) كاذبة لعدم وجود $x \in M_1$ بحيث أن كل من K_1x و M_1x صادقة.

2.9.4 صدق وكذب الصيغ في حساب المحمولات

الصيغة α في حساب المحمولات تكون صادقة أو كاذبة في تفسير O_1 إلى α. ولقد قمنا في الفقرة السابقة بتوضيح كيفية تحديد صدق أو كذب الصيغ في حساب المحمولات بواسطة الأمثلة وسنقوم الآن بإعطاء تعريف التحقق[1] وكذا تعريف صدق وكذب الصيغ.

لقد مرت بنا قواعد بناء الصيغ في حساب المحمولات وهنا نذكر بأن هذه الصيغ إما أن تكون صيغ ذرية، أي تتكون من متغير محمول وحدود، أو أن تكون صيغة مركبة بواسطة استخدام الروابط، أو صيغا مكممة باستخدام المكممين بالطريقة الذي ذكرناها.

[1] - Satisfaction

أولا : الصيغة α ذرية.

إذن α ستأخذ الشكل : $Kt_1t_2...t_n$ حيث $t_1, t_2, ..., t_n$ هي n من الحدود. وليكن K_1 هو تفسير K في O_1 ولتكن $t'_1, t'_2, ..., t'_n$ هي تفسيرات $t_1, t_2, ..., t_n$ على الترتيب. إذن النونية المرتبة $a_1 = (t'_1, t'_2, ..., t'_n)$ تحقق α في O_1 إذا وفقط إذا كان كل من $t'_1, '_2, ..., t'_m$ يمتلك الصفة K_1.

في حالة عدم امتلاك α لأية متغيرات حرة، أي في حالة كون α قضية فإن تفسير α لا يعتمد على a_1. وهكذا، فإما أن كل نونية مرتبة تحقق α أو عدم وجود نونية مرتبة تحقق α.

ثانيا : الصيغة α مركبة من الصيغتين β و γ باستخدام الروابط.

لتكن $a_1 = (a'_1, a'_2, ..., a'_n)$ نونية مرتبة تنتمي إلى M_1 المجموعة الشاملة للتفسير O_1. عندنا الحالات التالية :

1. α هي $\neg\beta$

a_1 تحقق α في التفسير O_1 إذا وفقط إذا كانت a_1 لا تحقق β في O_1.

2. α هي $\beta \vee \gamma$

a_1 تحقق α في التفسير O_1 إذا وفقط إذا كانت a_1 تحقق β في O_1 أو a_1 تحقق γ في O_1.

3. α هي $\beta \wedge \gamma$

a_1 تحقق α في التفسير O_1 إذا وفقط إذا كانت a_1 تحقق β في O_1 و a_1 تحقق γ في O_1.

4. α هي $\beta \to \gamma$

a_1 تحقق α في التفسير O_1 إذا وفقط إذا كانت a_1 لا تحقق β في O_1 أو a_1 تحقق γ في O_1.

5. α هي $\beta \leftrightarrow \gamma$

a_1 تحقق α في التفسير O_1 إذا وفقط إذا كانت a_1 تحقق β و γ في O_1 أو a_1 لا تحقق β ولا تحقق γ في O_1.

مثال

في التفسير المعرف في الشكل (2)، (a_1, c_1) تحقق $\neg Lxy$ ، (b_1, c_1) تحقق $Kx \vee Lxy$ ، (b_1, a_1, c_1) تحقق $Kx \to Lyz$ و (a_1, c_1, b_1) تحقق $Kx \leftrightarrow (Ky \vee Lxz)$.

ثالثا : α هي $(\forall x)\,\beta$ أو $(\exists x)\,\beta$

لتكن $a'_1 = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1)$. (الصيغة β يمكن أن تمتلك x كمتغير حر. b_1 تعوض x في التفسير أدناه)

1. α هي $(\forall x)\,\beta$

a_1 تحقق α في التفسير O_1 إذا وفقط إذا كانت a'_1 تحقق β من أجل جميع $b_1 \in M_1$.

2. α هي $(\exists x)\,\beta$

a_1 تحقق α في التفسير O_1 إذا وفقط إذا كانت a'_1 تحقق β من أجل بعض $b_1 \in M_1$.

تعريف (1)

لتكن α صيغة ذات n من المتغيرات الحرة على الأكثر، O_1 تفسير الصيغة α و M_1 هو المجموعة الشاملة إلى O_1 .

1. α تكون صادقة في O_1 إذا وفقط إذا كانت كل نونية مرتبة من العناصر المنتمية إلى M_1 تحقــق α.

2. α تكون كاذبة في O_1 إذا وفقط إذا لم توجد نونية مرتبة من العناصر المنتمية إلى M_1 تحقق α.

تعريف (2)

الصيغة α تكون صحيحة كليا[1] إذا كانت α صادقة في كل تفسير لها.

الصيغ الصحيحة في حساب المحمولات تقابل الصيغ التكرارية في حساب القضايا. الصيغ التالية هي صحيحة :

$(\forall x)\,(Kx \to Lx) \to ((\exists x)\,Kx \to (\exists x)\,Lx)$ ، $(\forall x)\,(K_x \vee \rceil K_x)$

سنعطي أمثلة توضيحية إضافية حول صدق الصيغ حيث التفسير هو نفسه كما في الشكل (2) أعلاه.

مثال (1) لنأخذ الصيغة

(1) $(\forall x)\,(Kx \to \rceil L_{x f(c)})$

نعلم أن الصيغ المكممة كليا تكون صادقة في تفسير O_1 إذا وفقط إذا كانت صادقة من أجل كل العناصر x المنتمية إلى المجموعة الشاملة M_1.

هنا عندنا 3 حالات : x هي a_1 ، b_1 أو c_1.

[1] - Universally valid

$a_1 = x$ .1

بما أن $L_1a_1a_1$ كاذبة $(a = f_1(c_1))$، إذن $\rceil Laa$ تكون صادقة. وإذن عندما $a_1 = x$ فإن الصيغة التالية صادقة :

$$(Kx \rightarrow \rceil L_{xf(c)}) \quad (2)$$

$b_1 = x$ .2

هنا الصيغة (2) تكون صادقة أيضا ذلك أن مقدمها K_{1b1} يكون كاذب.

$c_1 = x$ .3

هذه الحالة مشابهة للحالة 1 ذلك أن L_{1c1a1} كاذبة وبالتالي تكون الصيغة (2) صادقة.

إذن الصيغة (1) صادقة في O_1 .

نستطيع الآن إعطاء التلخيص أدناه.

الصيغ المكممة كليا α $(\forall x)$ تكون صادقة في تفسير O_1 إلى α إذا وفقط إذا كانت α صادقة من أجل كل تفسير إلى x في O_1 .

الصيغة α $(\forall x)$ تكون كاذبة في تفسير O_1 إلى α إذا وفقط إذا كانت α كاذبة في تفسير O_1 من أجل تفسير ما إلى x في O_1 .

الصيغة المكممة وجوديا α $(\exists x)$ تكون صادقة في تفسير O_1 إلى α إذا وفقط إذا كانت α صادقة في O_1 من أجل تفسير ما إلى x في O_1 .

الصيغة المكممة وجوديا α $(\exists x)$ تكون كاذبة في تفسير O_1 إلى α إذا وفقط إذا كانت α كاذبة في كل تفسير إلى x في O_1 .

10.4 تمارين

(أ) ترجم إلى لغة حساب المحمولات كلا من القضايا التالية.

(1) جميع الطلبة يتقدمون إلى الامتحانات.

(2) بعض الأحياء نباتات وبعض النباتات مفيدة.

(3) ليست كل المعادن ثمينة.

(4) إذا كان بعض الطلبة أكبر سنا من أحمد فإن أحمد أكبر سنا من سالم.

(5) بعض الأطفال الذين يذهبون إلى مدارسهم يكونون مرفوقين بأمهاتهم.

(6) كل طبيب أكبر سنا من علي يكون أيضا أكبر سنا من بعض المرضى.

(7) جميع الأبقار ثدييات.

(8) ليس كل الطلبة يحتاجون إلى الراحة.

(9) بعض النباتات ليست سامة.

(10) بعض الطلبة يفضلون المنطق وبعض الطلبة يفضلون التاريخ.

(11) كل طالب أكبر سنا من كريم يكون أكبر سنا من فائزة أيضا.

(12) لا أحد أطول من نفسه.

(13) أي طالب يحترم كل أستاذ يحترم نفسه أيضا.

(14) بعض أصدقاء حامد فوضويون.

(15) إذا كان بعضهم أكبر سنا من أحمد فإن جميع الطلبة أكبر سنا من علي.

(16) سالم يحب كل شيء.

(17) كل شيء يحب نفسه.

(18) بعض الأشياء تحب نفسها.

(19) إذا كان سالم يحب نفسه فإنه يحب بعض الأشياء.

(20) إذا كان سالم لا يحب نفسه فإنه لا يحب أي شيء.

(21) بعض الأعداد الصحيحة تكون من مضاعفات العدد 5.

(22) كل عدد صحيح له نظير جمعي.

(ب) ترجم كل من الصيغ التالية إلى اللغة العادية باستخدام تفسيرات الحدود والمحمولات المذكورة أدناه.

الحدود: a- أحمد، b- باسم.

المحمولات:

M_{xy}-x مسألة في الامتحان y.

I_x-x امتحان.

R_x-x رجل.

N_x-x امرأة.

T_{xy}-x يحل y.

(1) $(\exists x)\,(\exists y)\,(I_x \land M_{yx} \land T_{by}) \rightarrow (\exists z)\,(\exists u)(I_z \land M_{uz} \land T_{au})$

(2) $(\exists x)\,((R_x \land (\exists_y)\,(\forall z)\,(I_z \land M_{yz} \rightarrow T_{xy}))$

(ج) أنشئ شجرة كل صيغة مما يأتي مبتدئا من الصيغ الذرية.

(1) $(\forall x)\,(M_x \rightarrow (\exists y)\,(R_x \rightarrow L_{xy}))$

(2) $(\forall x)\,((\exists y)\,((M_{xy} \land K_{xyx}) \rightarrow (M_{nx} \land S_{nbx})))$

(3) $(\exists x)\,((\forall y)(L_x \land L_y \rightarrow R_{xy}) \land (L_x \lor R_{xy})))$

(د) في كل من الصيغ التالية ضع خطا تحت المتغيرات الحرة.

$(\forall x)\ R_{xx} \wedge (M_x \vee L_{xy})$ (1)

$(\exists x)\ (M_{xy} \wedge R_{ax} \wedge L_{ay})$ (2)

$(\forall y)\ ((\exists x)\ M_{xy} \rightarrow L_{xy})$ (3)

$M_x \vee L_{xy} \rightarrow (\exists x)\ (R_x \wedge M_x)$ (4)

$(\forall x)\ P_{xa} \rightarrow Q_{xa}$ (5)

$(P_x \wedge Q_{xy}) \rightarrow (\forall x)\ (R_x \rightarrow P_x)$ (6)

(ه)جد لكل من الصيغ التالية تفسيرا تكون فيه الصيغة صادقة وتفسير آخر تكون فيه كاذبة :

1) $(\forall_x)\ ((K_x \wedge L_x) \rightarrow M_x)$

2) $K_a \wedge (\exists_x)\ (K_x \wedge \neg L_{x\,b})$

3) $(\exists_x)\ (K_a \wedge \neg L_x) \wedge (\forall_y)\ (N_{x\,y} \rightarrow \neg O_{x\,y})$

4) $(\forall_y)\ (K_x \rightarrow L_{x\,a}) \rightarrow (\exists_y)\ (K_y \wedge N_y \wedge \neg L_{x\,y})$

5) $(\forall_x)\ (\forall_y)\ (Rxy \vee Ryx) \wedge (\forall_x)\ (\exists_y)\ Rxy \wedge (\forall_y)\ (\exists_x) \neg Rxy$

(و)جد لكل من المجموعات الصيغ التالية تفسيرا تكون فيه الصيغة الأخيرة كاذبة وبقية الصيغ صادقة :

1) $(\forall_x)\ (K_x \rightarrow L_x),\ (\exists_y)\ (K_x \wedge L_x)$

2) $(\forall_x)\ (K_x \rightarrow L_x)\ ,\ \neg K_a\ ,\ \neg L_a$

$$(\forall_x)\,(K_x \rightarrow \urcorner L_{x\,b}),\ (\forall_x)\ (\exists_y)\,L_{x\,y},\ (\exists_y)\,\urcorner L_{x\,b}$$ (.

$$(\forall_x)\,(\forall_y)\,((K_x \wedge K_y) \rightarrow K\,f\,(x,y))$$ (4

$$(\exists_x)\,(Kx \wedge \urcorner L_x)$$

$$(\forall_x)\,(K_x \rightarrow (\exists y)\,(K_y \ \wedge \urcorner L\,f\,(x,y))$$

الفصل الخامس

الاستنتاج الطبيعي لحساب المحمولات Natural Deduction of Predicate Calculus

5. 1 البراهين الصورية في حساب المحمولات

يمكن بسهولة توسيع الاستنتاج الطبيعي لحساب القضايا إلى الاستنتاج الطبيعي لحساب المحمولات. فجميع قواعد الاشتقاق في الأول تطبق في الثاني. ولكنه من أجل التعامل مع المكممين، يتم إدخال 4 قواعد اشتقاق جديدة، كما أن تعريف البرهان الصوري الذي مر بنا يصح في الاستنتاج الطبيعي أيضا.

قبل أن نعطي القواعد الأربعة الجديدة سنتوقف عند التعريف التالي:

إذا كانت α صيغة، x متغير، a حد فإن $\alpha\,(a / x)$ تكون صيغة ناتجة من α وذلك باستبدال كل ظهور حر للمتغير x بواسطة a.

مثال 1: لتكن α هي الصيغة $(\forall y)\,(M_x \to L_{xy})$. سنجد الصيغ الناتجة من α بواسطة الاستبدالات التالية: 1. $\alpha\,(a / x)$، 2. $\alpha\,(x / x)$.

الحل: 1. $(\forall y)\,(M_a \to L_{ay})$، 2. $(\forall y)\,(M_x \to L_{xy})$.

مثال 2: لتك α هي الصيغة $(\exists y)(y>x)$. سنورد أدناه بعض الحدود ويقابل كل حد نتيجة استبدال المتغير x بهذه الحدود.

2	$(\exists y)\,(y > 2)$	$\alpha\,(2/x)$

z	$(\exists y)(y > z)$	$\alpha(z/x)$
$2z$	$(\exists y)(y > 2z)$	$\alpha(2z/x)$
$z+2$	$(\exists y)(y > z+2)$	$\alpha(z+2/x)$
$x+z$	$(\exists y)(y > x+z)$	$\alpha(x+z/x)$
y	$(\exists y)(y > y)$	$\alpha(y/x)$

الصيغة $\alpha(2/x)$ تنص على أنه يوجد عدد أكبر من 2 و$\alpha(z/x)$ تنص على أنه يوجد عدد أكبر من z. ولكن $\alpha(y/x)$ تنص أنه يوجد عدد أكبر من نفسه. عندما يتم استبدال المتغير x بواسطة y فإن y يصبح ضمن نطاق المكمم $(\exists y)$ ويصبح مقيد. وبالتالي فإن الصيغة $\alpha(y/x)$ لا تقول عن y نفس ما تقوله α عن x. هذا النوع من الاستبدال لا يستخدم في حساب المحمولات ويمكن أن يقود إلى الخطأ. الاستبدال الصحيح يكون حسب التعريف أدناه.

ليكن x، y متغيران، α صيغة، يستبدل x بواسطة y إذا وفقط إذا أصبح كل ظهور حر للمتغير x في α ظهور حر للمتغير y في $\alpha(y/x)$.

في الصيغة α، المثال 2، لا يمكن استبدال x بواسطة y، ولكن يمكن استبدال x بواسطة أي متغير آخر عدا y.

مثال 3 : لتكن α هي الصيغة :

$$(\forall y)(x < y) \vee (\exists z)(y = z)$$

أي من الاستبدالات التالية صحيحة إلى x : $x_1, y, z, 2x, x+y, 3+y$ ؟

الجواب :

$x_1, z, 2x$

1. قاعدة التكميم الكلي (تك.ك) Universal Quantification
(إضافة المكمم الكلي) (Adding a Universal Quantifier)

قاعدة التكميم الكلي (تك.ك)
إذا كانت α صيغة، a حد، x متغير فإن $(\forall x)\alpha$ تشتق من $\alpha(a/x)$.
a يجب أن يكون عنصرا عشوائيا من مجموعة تعريف[1] المتغير x .

رمزيا نكتب: $(\forall x)\alpha \vdash \alpha(a/x)$.

تخطيط القاعدة (تك.ك) $\dfrac{\alpha(a/x)}{(\forall x)\alpha}$

إن فكرة هذه القاعدة هي أنه إذا كانت α صادقة من أجل a، حيث أن a عنصرا عشوائيا من مجموعة التعريف، فإن α تكون صادقة من اجل كل عنصر من مجموعة التعريف. والتسمية (إضافة المكمم الكلي) تبين أن ما نفعله عند استخدام هذه القاعدة هو إضافة المكمم الكلي واستبدال الحد العشوائي بالمتغير.

2. قاعدة التكميم الوجودي (تك.و) Rule of Existential Quantification
(إضافة المكمم الوجودي) (Adding a Existential Quantifier)

[1]- مجموعة تعريف x هي المجموعة التي نختار منها الأشياء لاستبدال x بواسطتها.

قاعدة التكميم الوجودي (تك.و)

إذا كانت α صيغة، a حد، x متغير فإن $(\exists x)\alpha$ تشتق من $\alpha(a/x)$.

رمزيا نكتب: $(\exists x)\alpha \vdash \alpha(a/x)$.

تخطيط القاعدة (تك.و): $\dfrac{\alpha(a/x)}{(\exists x)\alpha}$

إن فكرة هذه القاعدة هي أنه إذا كانت α صادقة من أجل a من مجموعة التعريف، فإنه يوجد x الذي من أجله تكون α صادقة. والتسمية (إضافة المكمم الوجودي) تبين أن ما نفعله عند استخدام هذه القاعدة هو إضافة المكمم الوجودي واستبدال الحد بالمتغير.

إن ما نحتاجه الآن، هو بعض قواعد تمكننا من اشتقاق صيغ غير مكممة من صيغ أخرى مكممة. ولهذا الغرض تتوفر لنا قاعدتين. الأولى تطبق على الصيغ المكممة كليا وتسمى (التخصيص الكلي) والثانية تطبق على الصيغ المكممة جزئيا وتسمى (التمثيل الجزئي).

3. قاعدة التخصيص الكلي (تخ.ك) Rule of Universal Specification

(حذف المكمم الكلي) (Elimination of Universal Quantifier)

قاعدة التخصيص الكلي (تخ.ك)

إذا كانت α صيغة، a حد، x متغير فإن $\alpha(a/x)$ تشتق من $(\forall x)\alpha$.

رمزيا نكتب: $\alpha(a/x) \vdash (\forall x)\alpha$.

تخطيط القاعدة (تخ.ك) $\dfrac{(\forall x)\alpha}{\alpha(a/x)}$

إن فكرة هذه القاعدة هي أنه إذا كانت α صادقة من أجل كل x من مجموعة التعريف، فإن $\alpha(a/x)$، تكون صادقة من اجل أي a من مجموعة تعريف x. والتسمية (حذف المكمم الكلي) تبين أن ما نفعله عند استخدام هذه القاعدة هو حذف المكمم الكلي واستبدال المتغير بأي حد. تسمى هذه القاعدة أيضا (التمثيل الكلي).

مثال1 : كل الحيتان ثديية. لا واحد من الثدييات يكون سمك. إذن لا سمكة تكون حوت.

الحل: المحمولات الذرية

x يكون حوت: H_x ، x يكون ثديي: L_x، x يكون سمك: S_x.

الترجمة

المقدمات $(\forall_x)(H_x \to L_x), (\forall_x)(L_x \to \neg S_x)$

النتيجة $(\forall_x)(S_x \to \neg Hx)$

البرهان

{1}	1.	$(\forall_x)(H_x \to L_x)$	م
{2}	2.	$(\forall_x)(L_x \to \neg S_x)$	م
{1}	3.	$H_a \to L_a$	1, (a / x)تخ.ك
{1}	4.	$\neg L_a \to \neg H_a$	3,عكس النقيض
{2}	.5	$L_a \to \neg S_a$	2, (a / x)تخ.ك
{2}	.6	$S_a \to \neg L_a$	5,عكس النقيض
{1, 2}	.7	$S_a \to \neg H_a$	4, 6القياس الشرطي
{1, 2}	.8	$(\forall x)(S_x \to \neg H_x)$	7,تك.ك

مثال 2 : كل الأسماك تتنفس بالغلاصم. السلحفاة لا تتنفس بالغلاصم. إذن، السلحفاة ليست سمكة.

الحل: المحمولات الذرية

x يكون سمكة: S_x ، x يتنفس بالغلاصم: H_x.

الحدود

السلحفاة: a.

الترجمة

المقدمات $(\forall x)\,(S_x \rightarrow H_x),\ \neg H_a$

النتيجة $\neg S_a$

البرهان

م	$(\forall x)\,(S_x \rightarrow H_x)$	1.	{1}
م	$\neg H_a$	2.	{2}
تخ.ك $1,\ (a / x)$	$S_a \rightarrow H_a$	3.	{1}
نفي التالي $2, 3$	$\neg S_a$	4.	{1,2}

مثال 3 : كل أساتذة الجامعة مثقفون. ناصر أستاذ جامعة. إذن، يوجد أستاذ جامعة مثقف.

الحل: المحمولات الذرية

x يكون أستاذ جامعة: P_x، x يكون مثقف: C_x.

الحد

ناصر: n.

الترجمة

المقدمات $(\forall_x)(P_x \rightarrow C_x), P_n$

النتيجة $(\exists_x)(P_x \wedge C_x)$

البرهان

م	$(\forall x)(P_x \rightarrow C_x)$	1.	{1}
م	P_n	2.	{2}
1, (n / x) اتخ.ك	$P_n \rightarrow C_n$	3.	{1}
2, 3 الوضع	C_n	4.	{1, 2}
2, 4 العطف	$P_n \wedge C_n$	.5	{1, 2}
5, تك.و	$(\exists x)(P_x \wedge C_x)$	.6	{1, 2}

4. قاعدة التمثيل الوجودي (تم.و) (حذف المكمم الوجودي)

Rule of Existential Instantiation (Elimination of Existential Quantifier)

> قاعدة التمثيل الوجودي (تم.و)
>
> إذا كانت α صيغة، a حد، x متغير فإن $\alpha\,(a / x)$ تشتق من $(\exists x)\alpha$.

رمزيا نكتب: $\alpha\,(a / x) \vdash (\exists x)\alpha$.

تخطيط القاعدة (تم.و): $\dfrac{(\exists x)\alpha}{\alpha(a / x)}$

إن فكرة هذه القاعدة هي أنه إذا كانت $(\exists x)\alpha$ صادقة فإن $\alpha\,(a / x)$ تكون صادقة من أجل حد واحد على الأقل من مجموعة التعريف. والتسمية (حذف المكمم الوجودي) تبين أن ما نفعله عند استخدام هذه القاعدة هو حذف المكمم الوجودي واستبدال المتغير بحد.

مثال1 : بعض الرياضيين أساتذة جامعة. كل أساتذة الجامعة مثقفون. إذن، بعض الرياضيين مثقفين.

الحل: المحمولات الذرية

x رياضي: S_x ، x أستاذ جامعة: P_x، x مثقف: C_x.

الترجمة

المقدمات $(\exists_x)\ (S_x \wedge P_x),\ (\forall x)\ (P_x \rightarrow C_x)$

النتيجة $(\exists_x)\ (S_x \wedge C_x)$

البرهان

{1}	1.	$(\exists x)\ (S_x \wedge P_x)$	م
{2}	2.	$(\forall x)\ (P_x \rightarrow C_x)$	م
{1}	3.	$S_a \wedge P_a$	اتم.و 1, (a / x)
{1}	4.	P_a	التبسيط 1,
{2}	.5	$P_a \rightarrow C_a$	تخ. ك 2, (a / x)
{1, 2}	.6	C_a	الوضع 4, 5
{1}	7.	S_a	التبسيط 3,
{1, 2}	8.	$S_a \wedge C_a$	العطف 6, 7
{1, 2}	9.	$(\exists x)\ (S_a \wedge C_a)$	تك.و 8,

سنعطي الآن أمثلة عامة على البراهين الصورية لصحة صور الحجج في حساب المحمولات.

مثال 2 : جميع الأفيال لبونة. بعض الأفيال مشاكسة. إذن، بعض اللبائن مشاكسة.

المحمولات الذرية

x فيل : K_x ، x لبون : L_x ، x مشاكس : M_x

الترجمة

المقدمات $(\forall_x) (K_x \rightarrow L_x) , (\exists_x) (K_x \wedge M_x)$

النتيجة $(\exists_x) (L_x \wedge M_x)$

نستطيع أن نطبق قاعدة التخصيص الكلي على المقدمة الأولى وقاعدة التمثيل الوجودي على المقدمة الثانية، ولكننا هنا يجب أن نكون حذرين، فإذا طبقنا (تخ.ك) أولا، فإننا نحصل على $K_a \rightarrow L_a$ ، حيث a عنصرا عشوئيا من مجموعة التعريف. ولكن لا يمكننا الافتراض أن هذا العنصر المعين a هو أيضا عنصر تكون من أجله $K_a \wedge M_a$ قضية صادقة. إن المقدمة الثانية $(\exists_x) (K_x \wedge M_x)$ تضمن وجود على الأقل عنصر واحد من مجموعة التعريف يمتلك الصفتين التاليتين معا : يكون فيل ويكون مشاكس، ولكن لا يمكننا الافتراض أن a يمتلك هاتين الصفتين.

ومن أجل تجنب هذه المشكلة فإننا نقوم بتطبيق القاعدة تم.و أولا. إن المقدمة $(\exists_x) (K_x \wedge M_x)$ تسمح باشتقاق $K_a \wedge M_a$ من أجل a من مجموعة التعريف. اما المقدمة $(\forall_x) (K_x \rightarrow L_x)$ فتسمح باستبدال قيم المتغير x في $K_x \rightarrow L_x$ بأي عنصر من مجموعة التعريف والحصول على قضية صادقة. وعلى وجه الخصوص يمكننا استبدال x بواسطة a والحصول على

$K_a \rightarrow L_a$. ولكن يجب أن نتذكر أن a ليس عنصر عشوائي، وإنما أحد (الأفيال المشاكسة).

البرهان

1.	$(\forall_x)\,(K_x \rightarrow L_x)$		م
2.	$(\exists_x)\,(K_x \wedge M_x)$		م
3.		$K_a \wedge M_a$	تم.و 2,
4.		$K_a \rightarrow L_a$	تخ.ك 1,
5.	K_a		التبسيط 3,
6.	M_a		التبسيط 3,
7.	L_a		الوضع 4,5
8.		$L_a \wedge M_a$	العطف 6,7
9.	$(\exists_x)\,(L_x \wedge M_x)$		تك.و 8

إن كون a ليس عنصر عشوائي من مجموعة التعريف لا يسمح لنا بتطبيق تك.ك على $L_a \wedge M_a$ لاشتقاق $(\forall_x)\,(L_x \wedge M_x)$.

مثال 2

الأساتذة والأستاذات يحبون الطلاب. الأستاذ حافظ لا يحب سلمان. لا أستاذة تحب حميد. نوال أستاذة. إذن، لا سلمان يكون طالب ولا حميد يكون طالب.

الحل: المحمولات الذرية

x يكون أستاذ: P_x، x تكون أستاذة: R_x، x يكون طالب: S_x، x يحب y: N_{xy}

الحدود

حافظ: h، سلمان: m، حميد: o، نوال: r.

الترجمة

المقدمات

$(\forall x)\ ((P_x \vee R_x) \rightarrow (\forall y)\ (S_y \rightarrow N_{xy})),\ P_h \wedge \neg N_{hm},\ (\forall x)\ (R_x \rightarrow \neg N_{xo}),\ R_r$

النتيجة $\neg S_o \wedge \neg S_m$

البرهان

م	$(\forall x)((P_x \vee R_x) \rightarrow (\forall y)(S_y \rightarrow N_{xy}))$	1.	{1}
م	$P_h \wedge \neg N_{hm}$	2.	{2}
م	$(\forall x)\ (R_x \rightarrow \neg N_{xo})$	3.	{3}
م	R_r	4.	{4}
تخ. ك 3, (r / x)	$R_r \rightarrow \neg N_{ro}$	.5	{3}
الوضع 4, 5	$\neg N_{ro}$	.6	{3, 4}
تخ. ك 1, (r / x)	$((P_r \vee R_r) \rightarrow (\forall y)\ (S_y \rightarrow N_{ry}))$	7.	{1}
الجمع 4,	$P_r \vee R_r$	8.	{4}
الوضع 7, 8	$(\forall y)\ (S_y \rightarrow N_{ry})$	9.	{1,4}
تخ. ك 9, (o / y)	$S_o \rightarrow N_{ro}$	10.	{1, 4}
نفي التالي 6,10	$\neg S_o$	11.	{1,3,4}
تخ. ك 1, (h / x)	$((P_h \vee R_h) \rightarrow (\forall y)\ (S_y \rightarrow N_{hy}))$	12.	{1}
الجمع 2,	$P_h \vee R_h$	13.	{2}
الوضع 12, 13	$(\forall y)\ (S_y \rightarrow N_{hy})$	14.	{1, 2}
تخ. ك 14, (m / y)	$S_m \rightarrow N_{hm}$	15.	{1, 2}
نفي التالي 2, 15	$\neg S_m$	16.	{1, 2}
العطف 11, 16	$\neg S_o \wedge \neg S_m$	17.	{1,2,3,4}

5. 2 البرهنة على خطأ صور الحجج **Proving Invalidity of Argument Forms**

(طريقة المثال-المضاد)

لقد استخدمنا طريقة المثال-المضاد في حساب القضايا للبرهنة على أن صورة حجة ما خاطئة. وكما نعلم فإن هذه الطريقة تقوم على إيجاد تعيين قيم صدق للمتغيرات القضائية بحيث تكون جميع المقدمات صادقة والنتيجة كاذبة. سوف نستخدم طريقة مشابهة تقوم على نفس المبدأ لبرهنة خطأ صورة حجة في حساب المحمولات، حيث تحوي مقدمات صورة الحجة ونتيجتها على المكممين $\forall$, $\exists$. الطريقة المشابهة تقوم على إيجاد مجموعة تحوي على قيمة واحدة على الأقل للمتغير تكون من أجلها صورة الحجة خاطئة، أي تكون جميع المقدمات صادقة والنتيجة كاذبة. أي أننا:

1) نجد صورة الحجة الناتجة من تعويض المتغير بقيمة واحدة ولتكن t_1 ونحاول إثبات خطأ صورة الحجة في هذه الحالة. حسب تعريف المكممين يكون:

$$P_{t_1} , (\exists x)\, P_x \Leftrightarrow P_{t_1}\ (\forall x)\, P_x \Leftrightarrow$$

إذا لم نثبت خطأ صورة الحجة في هذه الحالة فننتقل إلى الحالة الثانية أدناه.

2) نجد صورة الحجة الناتجة من تعويض المتغير في صورة الحجة المعطاة بقيمتين ولتكن t_1 وt_2 ونحاول إثبات خطأ صورة الحجة. في هذه الحالة وحسب تعريف المكممين يكون:

$$P_{t_1} \vee P_{t_2} , (\exists x)\, P_x \Leftrightarrow P_{t_1} \wedge P_{t_2}\ (\forall x)\, P_x \Leftrightarrow$$

وإذا لم نثبت خطأ صورة الحجة فننتقل إلى الحالة الثالثة أدناه.

3) نجد صورة الحجة الناتجة من تعويض المتغير في صورة الحجة المعطاة بثلاثة قيم ولتكن t_1 وt_2 وt_3 ونحاول إثبات خطأ صورة الحجة. في هذه الحالة وحسب تعريف المكممين يكون:

$$(\forall x)\, P_x \Leftrightarrow P_{t_1} \wedge P_{t_2} \wedge P_{t_3},\ (\exists x)\, P_x \Leftrightarrow P_{t_1} \vee P_{t_2} \vee P_{t_3}$$

4) بشكل عام، إذا كان عدد قيم المتغير المأخوذة k، أي $t_1, t_2, \ldots, t_k$ فإذن يكون :

$$(\forall x)\, P_x \Leftrightarrow P_{t_1} \wedge P_{t_2} \wedge \ldots \wedge P_{t_k},$$

$$(\exists x)\, P_x \Leftrightarrow P_{t_1} \vee P_{t_2} \vee \ldots \vee P_{t_k}$$

مثال: لنأخذ الحجة

كل الأبقار ثديية. كل الحيتان ثديية. إذن، كل الأبقار حيتان.

المحمولات الذرية

x حوت:	H_x
x ثديي:	T_x
x بقرة:	C_x

الترجمة

المقدمات $(\forall x)\,(C_x \rightarrow T_x), (\forall x)\,(H_x \rightarrow T_x)$

النتيجة $(\forall x)\,(C_x \rightarrow H_x)$

سنحاول البرهان على خطأ صورة الحجة هذه باستخدام المثال-المضاد. ليكن t_1 هو قيمة المتغير الذي نحاول إثبات خطأ الحجة من أجله، وهكذا تكون:

المقدمات

$$H_{t_1} \to T_{t_1}, \alpha_2: C_{t_1} \to T_{t_1}\ \alpha_1:$$

النتيجة

$$C_{t_1} \to H_{t_1}\ \beta:$$

قبل أن نبدأ بالبرهنة على خطأ الحجة نشير إلى أنه يمكننا أن نستعيض عن القضية C_{t_1} بالرمز K و T_{t_1} بالرمز L و H_{t_1} بالرمز M وهكذا نستطيع إعادة كتابة صورة الحجة كما يلي:

المقدمات $\alpha_1: K \to L, \alpha_2: M \to L$

النتيجة $\beta: K \to M$

وبهذا حولنا صورة الحجة إلى لغة حساب القضايا. يمكننا استخدام ما كنا نستخدمه من أسلوب للبرهنة على خطئها.

الآن للبرهنة على خطأ صحة الحجة وباستخدام طريقة المثال-المضاد، نأخذ النتيجة $C_{t_1} \to H_{t_1}$ كاذبة. إذن، يجب أن تكون C_{t_1} صادقة و H_{t_1} كاذبة. حتى تكون α_1 صادقة وبما أن C_{t_1} صادقة فيجب أن تكون T_{t_1} صادقة. α_2 صادقة وذلك لأن H_{t_1} كاذبة و T_{t_1} صادقة. إذن السطر المطلوب هو:

C_{t_1}	T_{t_1}	H_{t_1}	α_1	α_2	β	$(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \to \beta$
T	T	F	T	T	F	F

العمود الأخير من الجدول يبين انه، من المقدمتين α_1 و α_2 لا تنتج النتيجة β.

إذن، صورة الحجة هذه خاطئة وهكذا تكون الحجة الأصلية خاطئة.

يحدث أن تكون صورة حجة صحيحة في حساب المحمولات من أجل قيمة واحدة للمتغير، ولهذا علينا الانتقال إلى الحالة الثانية أي محاولة برهان خطئها من أجل قيمتين للمتغير كما هو في المثال أدناه.

مثال: لنأخذ الحجة التالية

كل الأبقار ثدييات. بعض الحيتان ثدييات. إذن، كل الأبقار حيتان.

سنجد صورة الحجة باستخدام نفس رموز المثال السابق.

المقدمات $(\forall x)\ (C_x \rightarrow T_x),\ (\exists x)\ (H_x \wedge T_x)$

النتيجة $(\forall x)\ (C_x \rightarrow H_x)$

عند التعويض بقيمة واحد t_1 للمتغير x تكون صورة الحجة هذه مكافئة إلى صورة حجة صادقة والتي مقدماتها الأولى α_1 : $C_{t_1} \rightarrow T_{t_1}$ ومقدمتها الثانية α_2 : $H_{t_1} \wedge T_{t_1}$ ونتيجتها: $C_{t_1} \rightarrow H_{t_1}$ وذلك لأنه إذا حاولنا إعطاء مثال-مضاد فسنصل إلى طريق مسدود كالتالي: نأخذ النتيجة: $C_{t_1} \rightarrow H_{t_1}$ كاذبة. إذن C_{t_1} يجب أن تكون صادقة و H_{t_1} يجب أن تكون كاذبة. حتى تكون α_1 صادقة، وبما أن C_{t_1} صادقة فيجب أن تكون T_{t_1} صادقة. حتى تكون α_2 صادقة فيجب أن تكون H_{t_1} صادقة و T_{t_1} صادقة. وهنا وصلنا إلى طريق مسدود (H_{t_1} يجب أن تكون كاذبة و H_{t_1} يجب أن تكون صادقة في نفس الوقت). وإذن صورة الحجة تكون صحيحة من أجل قيمة واحدة t_1 للمتغير x. ننتقل الآن إلى الحالة الثانية وهي التعويض بقيمتين للمتغير x.

نحصل على صورة الحجة التي مقدماتها :

$\alpha_1: (C_{t_1} \rightarrow T_{t_1}) \wedge (C_{t_2} \rightarrow T_{t_2}), \alpha_2: (H_{t_1} \wedge T_{t_1}) \vee (H_{t_2} \wedge T_{t_2})$

ونتيجتها :

$\beta: (C_{t_1} \rightarrow H_{t_1}) \wedge (C_{t_2} \rightarrow H_{t_2})$

سنبرهن خطؤها وذلك بإعطاء مثال-مضاد كالتالي. نأخذ النتيجة كاذبة، إذن يجب أن تكون إحدى معطوفتيها على الأقل كاذبة. لنأخذ المعطوفة الأولى كاذبة. إذن يجب أن تكون C_{t_1} صادقة و H_{t_1} كاذبة. ولتكن C_{t_2} و H_{t_2} صادقتين. حتى تكون α_1 صادقة فيجب أن تكون كلتا معطوفتيها صادقتين. وبما أن C_{t_1} صادقة فيجب أن تكون T_{t_1} صادقة. وبما أن C_{t_2} صادقة فيجب أن تكون T_{t_2} صادقة. حتى تكون α_2 صادقة فيجب أن تكون إحدى مفصولتيها على الأقل صادقة. وبما أن H_{t_2} وT_{t_2} صادقتين فإذن α_2 تكون صادقة. هكذا تكون صورة الحجة خاطئة. السطر المطلوب هو:

C_{t_1}	C_{t_2}	T_{t_1}	T_{t_2}	H_{t_1}	H_{t_2}	α_1	α_2	β	$(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \rightarrow \beta$
T	T	T	T	F	T	T	T	F	F

العمود الأخير من الجدول يبين انه، من المقدمتين α_1 وα_2 لا تنتج النتيجة β. إذن، صورة الحجة هذه خاطئة وهكذا تكون الحجة الأصلية خاطئة.

إن طريقة المثال-المضاد للبرهنة على خطأ صور الحجج في حساب المحمولات تكون عملية عندما تكون عدد قيم المتغير المأخوذة ليس أكثر من

ثلاثة. بالنسبة إلى صور الحجج التي تحوي على أكثر من مكمم واحد فيمكننا تكييف نفس الطريقة (المثال-المضاد) وبسهولة. المثال التالي يبين ذلك.

مثال

المقدمات $\alpha_1: (\exists x)(\forall y)(M_x \to L_x)$

$\alpha_2: (\forall y)(\exists z)(L_y \to N_z)$

النتيجة $\beta: (\forall x)(\exists z)(M_x \to N_z)$

سنحاول البرهان على خطأ صورة الحجة بواسطة المثال-المضاد. صورة الحجة هذه تؤول إلى صورة صحيحة عند التعويض بقيمة واحدة t_1 للمتغير x وهي صورة الحجة التالية:

المقدمات $L_{t_2} \to N_{t_2} , M_{t_1} \to L_{t_1}$

النتيجة $M_{t_1} \to N_{t_1}$

صورة الحجة الأصلية تؤول إلى صورة حجة خاطئة عند التعويض بقيمتين t_1 و t_2 للمتغير x والتي مقدماتها :

$$\alpha_1: ((M_{t_1} \to L_{t_1}) \land (M_{t_1} \to L_{t_2})) \lor ((M_{t_2} \to L_{t_1}) \land (M_{t_2} \to L_{t_2}))$$

$$\alpha_2: ((L_{t_1} \to N_{t_1}) \lor (L_{t_1} \to N_{t_2})) \land ((L_{t_2} \to N_{t_1}) \land (L_{t_2} \to N_{t_2}))$$

ونتيجتها :

$$\beta: ((M_{t_1} \to N_{t_1}) \lor (M_{t_1} \to N_{t_2})) \land ((M_{t_2} \to N_{t_1}) \land (M_{t_2} \to N_{t_2}))$$

المثال-المضاد يوضحه السطر المطلوب التالي:

M_{t_1}	M_{t_2}	L_{t_1}	L_{t_2}	N_{t_1}	N_{t_2}	α_1	α_2	β	$(\alpha_1 \land \alpha_2) \to \beta$
T	F	F	F	F	F	T	T	F	F

العمود الأخير من الجدول يبين انه، من المقدمتين α_1 وα_2 لا تنتج النتيجةβ.
إذن، صورة الحجة هذه خاطئة وهكذا تكون الحجة الأصلية خاطئة.

5. 3 العلاقات Relations

عند تعرضنا لمفهوم المحمول (الفقرة 4. 2) ذكرنا أن المحمول متعدد المواضع (اثنان أو أكثر) يمثل علاقة والحقيقة أن العلاقات هذه من المواضيع الهامة في المنطق. سنقوم بدراسة العديد من خصائصها وسنتعامل مع العلاقات الثنائية أو المحمولات الثنائية.

لتكن R علاقة مجموعة تعريفها M:

1) العلاقة الانعكاسية Reflexive Relation

العلاقة R تسمى انعكاسية على M إذا وفقط إذا كانت $(\forall x)\ R_{xx}$

علاقة المساواة (=) المعرفة على مجوعة الأعداد الحقيقية تكون انعكاسية وذلك لأن كل عدد يساوي نفسه $(x = x)$.

2) العلاقة غير الانعكاسية Irreflexive Relation

العلاقة R تسمى غير انعكاسية على M إذا وفقط إذا كانت $(\forall x)\ \urcorner R_{xx}$

علاقة (أكبر سنا من) غير انعكاسية وذلك لأن أي شخص ليس أكبر سنا من نفسه.

3) العلاقة المتماثلة Symetric Relation

العلاقة R تسمى متماثلة على M إذا وفقط إذا كانت$(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow R_{yx})$

علاقة (معاصر إلى) تماثلية وذلك لأنه إذا كان x معاصر إلى y فإن y معاصر إلى x. علاقة (الأخوة) علاقة تماثلية أيضا وذلك لأنه إذا كان x أخ y فإن y أخ x.

4) العلاقة اللاتماثلية **Asymetric Relation**

العلاقة R تسمى لاتماثلية على M إذا وفقط إذا كانت

$(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow \neg R_{yx})$

علاقة (أقصر من) المعرفة على مجموعة البشر لاتماثلية وذلك لأنه إذا كان x أقصر من y فإن y ليس أقصر من x.

5) العلاقة ضد تماثلية **Antisymetric Relation**

العلاقة R تسمى ضد تماثلية على M إذا وفقط إذا كانت

$(\forall x)\ (\forall y)\ ((R_{xy} \wedge R_{yx}) \rightarrow x = y)$

علاقة أصغر أو يساوي (≥) المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية هي ضد تماثلية وذلك لأنه إذا كان العدد $x \geq y$ و $y \geq x$ فإن $x = y$.

6) العلاقة المتعدية **Transitive Relation**

العلاقة R تسمى متعدية على M إذا وفقط إذا كانت

$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$

علاقة (على يمين من) علاقة متعدية وذلك لأنه إذا كان x على يمين y و y على يمين z فإن x على يمين z.

7) علاقة التكافؤ **Equivalance Relation**

تسمى العلاقة R علاقة تكافؤ إذا وفقط إذا كان R انعكاسية، متماثلة ومتعدية على M. علاقة التساوي (=) المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية هي علاقة تكافؤ.

8) علاقة الترتيب الجزئي Partial Ordering Relation

تسمى العلاقة R علاقة ترتيب جزئي إذا وفقط إذا كانت انعكاسية وضد تماثلية ومتعدية على M. علاقة أصغر أو يساوي (≥) هي علاقة ترتيب جزئي.

9) علاقة الترابط Connected Relation

العلاقة R تسمى علاقة مترابطة على M إذا وفقط إذا كانت

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \vee R_{yx} \vee x = y)$$

العلاقة أكبر من (>) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية تكون علاقة مترابطة لأن كل عدديين طبيعيين x و y، إما $x < y$ أو $y < x$ أو $x = y$.

مثال 1

برهن أن العلاقة اللاتماثلية تكون غير انعكاسية.

الترجمة

المقدمات $(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow \urcorner R_{yx})$

النتيجة $(\forall x)\ \urcorner R_{xx}$

البرهان

{1}	1.	$(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow \urcorner R_{yx})$	م
{1}	2.	$(\forall y)\ (R_{ay} \rightarrow \urcorner R_{ya})$	1, (a / x) تخ.ك
{1}	3.	$R_{aa} \rightarrow \urcorner R_{aa}$	2, (a / y) تخ.ك

{1}	4.	$\neg R_{aa} \vee \neg R_{aa}$	3,الاستلزام
{1}	.5	$\neg R_{aa}$	4,تحصيل حاصل
{1}	.6	$(\forall x) \neg R_{xx}$	5,تك.ك

مثال 2 : برهن أن الحجة التالية صحيحة.

كل أب أكبر تجربة من كل ابن. أحمد ليس أكبر تجربة من علي الابن. إذن أحمد ليس أبا.

المحمولات الذرية: x يكون أب–F_x، x يكون ابن–S_x، x أكبر تجربة من y –E_{xy}.

الحدود: أحمد–a، علي–b.

الترجمة

المقدمات $(\forall x)(\forall y)((F_x \wedge S_y) \to E_{xy}), \neg E_{ab} \wedge S_b$

النتيجة $\neg F_a$

البرهان

{1}	1.	$(\forall x)(\forall y)((F_x \wedge S_y) \to E_{xy})$	م
{2}	2.	$\neg E_{ab} \wedge S_b$	م
{1}	3.	$(F_a \wedge S_b) \to E_{ab}$	1, (a / x) (b / y) تخ.ك
{2}	4.	$\neg E_{ab}$	2, التبسيط
{1,2}	5.	$\neg(F_a \wedge S_b)$	3, 4, نفي التالي
{1,2}	6.	$\neg F_a \vee \neg S_b$	5, دي مورغان
{2}	7.	S_b	2, التبسيط
{2}	8.	$\neg\neg S_b$	7, النفي المضاعف
{1,2}	9.	$\neg F_a$	6, 8 قياس الفصل

مثال 3

أعط برهانا صوريا للحجة التالية :

المقدمات العلاقة R متماثلة على M. العلاقة R متعدية على M.

النتيجة $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{xz}) \rightarrow R_{yz})$

البرهان

م	$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow R_{yx})$	1.	{1}
م	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$	2.	{2}
مقدمة (ب.ش) م	$R_{xy} \wedge R_{xz}$	3.	{3}
1, (x / x) (y / y) تخ.ك	$R_{xy} \rightarrow R_{yx}$	4.	{1}
3,التبسيط	R_{xy}	.5	{3}
4,5الوضع	R_{yx}	.6	{1}
2,(u / x) (v / y) تخ.ك	$R_{uv} \wedge R_{vz} \rightarrow R_{uz}$	7.	{2}
7,تك.ك	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{uv} \wedge R_{vz}) \rightarrow R_{uz})$	8.	{2}
8, (x/v) (y/u) (z/z) تخ.ك	$(R_{yx} \wedge R_{xz}) \rightarrow R_{yz}$	9.	{2}
3,التبسيط	R_{xz}	10.	{3}
6, 10العطف	$R_{yx} \wedge R_{xz}$	11.	{1,3}
9, 11الوضع	R_{yz}	12.	{1,2,3}
3, 12ب.ش	$(R_{xy} \wedge R_{xz}) \rightarrow R_{yz}$	13.	{1,2}
13,تك.ك	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{xz}) \rightarrow R_{yz})$	14.	{1,2}

لاحظ أننا استخدمنا القاعدة (تخ.ك) مرتين على الخط 4 والخط 7 وثلاث مرات على الخط9. أما القاعدة (تك.ك) فاستخدمناها ثلاث مرات على الخط

8 وثلاث مرات على الخط 14 ولقد أبقينا على المتغيرات أو استبدلناها بمتغيرات أخرى عندما استخدمنا القاعدة (تخ.ك).

مثال 4

أعط برهانا صوريا للحجة التالية

المقدمات: العلاقة R المعرفة على M هي علاقة تكافؤ.

النتيجة $(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow R_{xz})$

البرهان

م	$(\forall x)\ R_{xx}$	1.	{1}
م	$(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow R_{yx})$	2.	{2}
م	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$	3.	{3}
(مقدمة ب.ش) م	R_{xy}	4.	{4}
2, (x/x), (y/y) تخ. ك	$R_{xy} \rightarrow R_{yx}$	.5	{2}
4,5الوضع	R_{yx}	.6	{2,4}
3,(x/x), (y/y), (z/z) تخ.ك	$(R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz}$	7.	{3}
4,6العطف	$R_{xy} \wedge R_{yz}$	8.	{2,4}
7, 8الوضع	R_{xz}	9.	{2,3,4}
94, ب.ش	$R_{xy} \rightarrow R_{xz}$	10.	{2,3}
10,تك.ك	$(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow R_{xz})$	11.	{2,3}

5. 4 الهوية Identity

الهوية أو المساواة (=) هو مفهوم شائع يستخدم عادة لإثبات الشخصية ويعبر عنه في اللغة العربية بواسطة الكلمة (يكون). يستخدم في الرياضيات،

مثلا كعلاقة ثنائية بين الأعداد ولكنه يستخدم بشكل أوسع في المنطق حيث يمثل علاقة بين أي نوعين من الأشياء. إن استخدام رمز الهوية (=) كعلاقة في حساب المحمولات يعني إضافة صيغة ذرية جديدة نتيجة وضع الرمز (=) بين حدين، وهكذا فالصيغة الذرية هذه تكون على الشكل $a = b$.

أما فيما يخص دلالة الهوية ففي كل تفسير : $a = b$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كان a وb يمثلان نفس العنصر في مجموعة التعريف. وبالتالي فإن دراسة (الهوية) تمثل توسيعا لحساب المحمولات. إن هذه الصيغة الذرية الجديدة تؤدي إلى إغناء حساب المحمولات بصيغ جديدة، حيث تمكننا الهوية من ترجمة أنواع مختلفة من البناءات اللغوية.

أمثلة

1) كان ابن النفيس مكتشف الدورة الدموية

تؤكد (كان) هنا بأن ابن النفيس هو ومكتشف الدورة الدموية لهما نفس الهوية. إذن يمكننا وضع علامة المساواة بين الحد (ابن النفيس) والوصف (مكتشف الدورة الدموية)، هكذا:

ابن النفيس = مكتشف الدورة الدموية

2) أحمد يحب علي فقط

المحمولات الذرية: x يحب y $-R_{xy}$. الحدود: أحمد- a، علي- b.

الترجمة: $R_{ab} \wedge (\forall x) (R_{ax} \rightarrow x = b)$

3) أحمد فقط يكون عَبَرَ البحر.

المحمولات الذرية: x عبر البحر- R_x. الحدود: أحمد- a.

الترجمة: $R_a \wedge (\forall x)(R_x \rightarrow x = a)$

4) يوجد شيء واحد على الأكثر.

الترجمة: $(\forall x)(\forall y)(y = x)$

5) يوجد شيء واحد بالضبط.

الترجمة: $(\exists x)(\forall y)(y = x)$

5. 4. 1 قواعد اشتقاق علاقة الهوية

1. قاعدة الهوية :

من المقدمتين $x = y$ وصيغة α_x (α تحوي المتغير x) نشتق صيغة α_y تكون بواسطة استبدال كل ظهور للمتغير x في المقدمة الثانية بواسطة المتغير y. رمزيا نكتب $x = y,\ \alpha_x \vdash \alpha_y$.

مخطط قاعدة الهوية

$$\frac{\begin{array}{c} x = y \\ \alpha_x \end{array}}{\alpha_y}$$

مثال: لنأخذ الحجة التالية

كان ابن النفيس مكتشف الدورة الدموية. مكتشف الدورة الدموية كان عظيما. إذن، ابن النفيس كان عظيما.

المحمولات الذرية: x عظيم ‒Rx. الحدود: ابن النفيس‒n ، مكتشف الدورة الدموية‒ m.

الترجمة

المقدمات	$n = m, R_m$
النتيجة	R_n

البرهان

{1}	1.	$n = m$	م
{2}	2.	R_m	م
{1,2}	3.	R_n	1,2 الهوية

2. قاعدة نفي الهوية :

من المقدمتين α_x و $\neg\alpha_y$ نشتق الصيغة $\neg(x = y)$. رمزيا نكتب:

$$\alpha_x , \neg\alpha_y \vdash \neg(x = y)$$

مخطط قاعدة نفي الهوية
$$\frac{\alpha_x \quad \neg\alpha_y}{\neg(x = y)}$$

نعتبر أن $x \neq y$ هي اختصار إلى $\neg(x = y)$. وكما استخدمنا في المثال أعلاه (الهوية) على الخط 3 كقاعدة اشتقاق فإننا سنستخدم هنا أيضا نفي الهوية كقاعدة اشتقاق في المثال أدناه.

مثال

الرجال الذين يقاومون المرض يكونون رياضيين. أحمد رجل يقاوم المرض. هذا الرجل ليس رياضيا. إذن، هذا الرجل ليس أحمد.

الحل: المحمولات الذرية

K_x – يكون رجل x

L_x – يكون رياضي x

M_x – يقاوم المرض x

الحدود

هذا الرجل – m

أحمد – n

الترجمة

المقدمات $(\forall x)((K_x \wedge M_x) \rightarrow L_x), K_n \wedge M_n, \neg L_m$

النتيجة $\neg(n = m)$

البرهان

م	$(\forall x)(K_x \wedge M_x) \rightarrow L_x)$	1.	{1}
م	$K_n \wedge M_n$	2.	{2}
م	$\neg L_m$	3.	{3}
1, (n / x) تخ.ك	$(K_n \wedge M_n) \rightarrow L_n$	4.	{1}
2,4 الوضع	L_n	.5	{1,2}
3,5 نفي الهوية	$\neg(n = m)$	.6	{1,2,3}

5 .5 تمارين

(أ) ترجم إلى لغة حساب المحمولات كلا من الحجج الصحيحة التالية وأعط برهانا صوريا لها.

(1) جميع المناطقة فلاسفة. احمد ليس فيلسوف. إذن، أحمد ليست منطقي.

(2) كل شخص يسكن تونس أو طرابلس يكون جادا ومتحضرا. إذن، كل شخص يسكن طرابلس يكون جادا.

(3) كل الحيوانات ذات الريش لا تنمو في الماء. توجد حيوانات تنمو في الماء وتعيش في البحر. إذن، توجد حيوانات تعيش في البحر وليست من ذوات الريش.

(4) كل فيزيائي يفضل كل كيميائي. لا فيزيائي يفضل أي فيلسوف. أحمد فيزيائي. إذن، لا فيلسوف يكون كيميائي.

(5) بعض الروايات الحديثة رائعة. كل شيء رائع يكون ممتع. لا شيء ممتع يكون سخيف. إذن بعض الروايات الحديثة ليست سخيفة.

(6) إذا كانت R علاقة تكافؤ على M فإذن

$$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ \ (R_{xy} \wedge R_{yz} \rightarrow R_{yz})$$

(ب) برهن خطأ كل من الحجج التالية.

(1) كل الأطباء كفوئين. أحمد كفء. إذن، أحمد طبيب.

(2) كل هرة تكون كبيرة. بعض الثدييات تكون كبيرة. إذن، لا هرات تكون ثدييات.

(ج) أعط برهانا صوريا لكل من صور الحجج التالية.

(1) المقدمات

$$(\forall x)\ (R_x \rightarrow S_x)$$

$$(\forall x)\ ((R_x \wedge S_x) \rightarrow T_x)$$

النتيجة

$$(\forall x)\ (R_x \rightarrow T_x)$$

(2) المقدمات

$$(\forall x)\ (K_x \rightarrow L_x)$$

$$(\forall x)\ (M_x \rightarrow L_x)$$

النتيجة

$$(\forall x)\ ((K_x \wedge M_x) \rightarrow L_x)$$

(3) المقدمات

$(\forall x)\ (L_x \rightarrow \urcorner M_x)$

$(\exists x)\ (N_x \wedge M_x)$

النتيجة

$(\exists x)\ (N_x \wedge \urcorner L_x)$

(4) المقدمات

$(\forall x)\ ((K_x \wedge \urcorner M_x) \rightarrow \urcorner O_x)$

$(\forall x)\ ((K_x \wedge L_x) \rightarrow N_x)$

$(\forall x)\ (K_x \rightarrow (L_x \vee \urcorner M_x))$

النتيجة

$(\forall x)\ ((K_x \wedge O_x) \rightarrow N_x)$

(5) المقدمات

$(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow R_{yx})$

$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$

النتيجة $(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow R_{xx})$

(6) المقدمات

$(\forall x)\ (K_x \rightarrow (\forall y)\ (L_y \wedge M_y) \rightarrow R_{xy}))$

$(\forall x)\ (M_x \rightarrow L_z)$

$K_n \wedge L_m$

$(\forall x)\ (K_x \rightarrow \urcorner R_{xm})$

النتيجة

$\urcorner M_m$

(7) المقدمات

$(\forall x)\ (L_x \rightarrow M_x)$
$(\forall x)\ (L_x \rightarrow \neg M_z)$
K_a

النتيجة

$M_a \land \neg M_a$

(د) برهن خطأ كل من صور الحجج التالية :

(1) المقدسات:

$(\forall x)\ (K_x \rightarrow L_x)$

$(\forall x)\ (M_x \rightarrow N_x)$

$(\forall x)\ (\neg L_x \rightarrow \neg N_x)$

النتيجة

$(\forall x)\ (M_x \rightarrow K_x)$

(2) المقدمات

$(\forall x)\ (K_x \rightarrow \neg L_x)$

$(\forall x)\ (M_x \rightarrow \neg N_x)$

$(\forall x)\ (\neg K_x \rightarrow N_x)$

النتيجة

$(\forall x)\ (M_x \rightarrow \neg K_x)$

(3) المقدمات

$(\forall x)\ (K_x \rightarrow \neg L_x)$
$(\forall x)\ (M_x \rightarrow \neg L_x)$

النتيجة

$(\forall x)\ (M_x \rightarrow \neg K_x)$

(4) المقدمات

$(\exists x)\ (K_x \wedge \neg L_x)$

$(\forall x)\ (M_x \rightarrow K_x)$

النتيجة

$(\exists x)\ (M_x \wedge \neg K_x)$

(5) المقدمات

$(\forall x)\ (K_x \rightarrow \neg L_x)$

$(\exists x)\ (M_x \wedge L_x)$

النتيجة

$(\exists x)\ (K_x \wedge \neg M_x)$

(6) المقدمات

$(\exists x)\ (K_x \wedge L_x)$

$(\forall x)\ (M_x \rightarrow K_x)$

النتيجة

$(\exists x)\ (M_x \wedge L_x)$

(هـ) أعط برهانا صوريا لكل من صور الحجج التالية مستخدما قاعدتي الهوية :

(1) المقدمات

$(\forall x)\ (K_x \rightarrow L_x)$

K_a

$a = n$

النتيجة

L_n

(2) المقدمات

$K_a, L_b, a=b, (\forall x) (L_x \rightarrow M_x)$

النتيجة

$(\exists x) (K_x \wedge M_x)$

(3) المقدمات

$(\forall x) (L_x \rightarrow \urcorner M_x), M_m , m = n$

النتيجة

$\urcorner L_n$

(4) المقدمات

$(\forall x) ((K_x \wedge L_x) \rightarrow M_x), K_m , L_n, n = m, \urcorner M_o$

النتيجة

$o \neq n$

(و) برهن أن كل من مجموعات الصيغ التالية غير متسقة وذلك بإعطاء برهان صوري لصيغة متناقضة.

(1) $(\forall x) (K_x \rightarrow L_x) , (\forall x) (K_x \rightarrow \urcorner L_x), K_a$

(2) $(\forall x) (K_x \rightarrow (L_x \wedge M_x)) , (\forall x) (N_x \rightarrow \urcorner M_x), \urcorner (\forall x) (N_x \rightarrow \urcorner M_x)$

(3) $(\forall x) (\forall y) (\forall z) ((R_x y \wedge R_y z) \rightarrow R_x z), (\forall x) (\forall y) (R_x y \wedge R_{yx})$,
$Rab, \urcorner Rab$

(4) $Ka, Lb, (\forall x) (K_x \rightarrow M_x), (\forall x) (L_x \rightarrow \urcorner M_x) , a = b$

الفصل السادس

الأنساق الصورية لحساب المحمولات Formal systems of predicate calculus

تمثل جداول الصدق في حساب القضايا طريقة فعالة لتحديد فيما إذا كانت صيغة معطاة هي صيغة تكرارية. ولكن لا توجد أية عملية فعالة يمكنها في حساب المحمولات من تحديد فيما إذا كانت صيغة معطاة صحيحة، لأنه يتوجب علينا هنا التحقق من صدق الصيغة في تفسيرات ذات مجالات منتهية أو غير منتهية. وهكذا فإن بناء الأنساق الصورية في حساب المحمولات يصبح ضروريا في دراسة الصيغ التي تحوي على مكممات وهذا ما سنفعله أدناه.

1.6 مكونات النسق الصوري لحساب المحمولات

النسق Q

(1) رموز النسق (أبجدية النسق)

أ- المتغيرات x، y، z ودلائلها ... $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$

ب- الثوابت a، b، c ودلائلها ... $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$

ج- متغيرات المحمولات

1. الأحادية ... $K_1^1, K_2^1, \ldots, L_1^1, L_2^1, \ldots, M_1^1, M_2^1, \ldots$
2. الثنائية ... $K_1^2, K_2^2, \ldots, L_1^2, L_2^2, \ldots, M_1^2, M_2^2, \ldots$
3. الثلاثية ... $K_1^3, K_2^3, \ldots, L_1^3, L_2^3, \ldots, M_1^3, M_2^3, \ldots$

وهكذا.

د-رموز الدوال

1.ذات المتغير الواحد $f_1^1, f_2^1, \ldots$

2.ذات المتغيرين $f_1^2, f_2^2, \ldots$

3.ذات الثلاث متغيرات $f_1^3, f_2^3, \ldots$

وهكذا.

هـــ-الرمزان $\urcorner$ ، $\rightarrow$ ندعوهما الرابطين الأوليين.

و- الرمزان (و) ندعوهما قوس الإغلاق وقوس الفتح على الترتيب. رمز المتمم الكلي $\forall$

(2)مجموعة الصيغ التي تتكون حسب القاعدتين :

أ-كل صيغة ذرية تكون صيغة.

(تعـــريف الـــصيغة الذرية هو نفسه الذي ورد سابقا في فقرات (قواعد بناء الصيغ)).

ب-إذا كانـــت α و β صيغتان و x متغير فإن $\urcorner\alpha$ ، $\alpha \rightarrow \beta$ و $(\forall x)\ \alpha$ تكون صيغا.

كل من $\alpha \wedge \beta$ ، $\alpha \vee \beta$ و $\alpha \leftrightarrow \beta$ نعرفها كما يلي :

تعريف 1

$\alpha \wedge \beta \equiv$ تع $\urcorner(\alpha \rightarrow \urcorner\beta)$

تعريف 2

$\alpha \vee \beta \equiv$ تع $\urcorner\alpha \rightarrow \beta$

تعريف 3

$$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv_{\text{تع}} (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

إن معنى التعريف 1 ، مثلا ، هو أنه : من أجل كل صيغتين α و β فإن β $\wedge$ α هو اختصار إلى $\urcorner(\alpha \rightarrow \urcorner\beta)$.

ليس من الضروري وضع الرمز $\exists$ كرابط أولي لأنه يمكننا تعريفه باستخدام الرابط الأولي $\forall$ كالتالي :

تعريف 4

$$(\exists x)\,\alpha \equiv_{\text{تع}} \urcorner(\forall x)\urcorner\alpha$$

(3)مجموعة الأشكال البديهية (حيث α ، β ، γ أية صيغ من النسق Q)

شكل البديهية 1 (A_1)

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$$

شكل البديهية 2 (A_2)

$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

شكل البديهية 3 (A_3)

$$(\urcorner\alpha \rightarrow \urcorner\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

شكل بديهية 4 (A_4)

$$(\forall x)\,\alpha(x) \rightarrow \alpha\,(t/x)$$

شرط أن يكون t حرا إلى x في α (x) .

شكل البديهية 5 (A_5)

$$(\forall x)\,(\alpha \rightarrow \beta(x)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\forall x)\,\beta\,(x))$$

شرط أن لا يكون x حرا في α .

(4)مجموعة قواعد الاشتقاق

تتكون هذه المجموعة من قاعدتي الاشتقاق :

1.قاعدة الوضع : من α و $\beta \to \alpha$ نشتق β .

2.قاعدة التعميم : من $\alpha(x)$ نشتق $(\forall x)\ \alpha(x)$.

سنقوم بتوضيح يتعلق بالشريطين اللذين وردا في شكل البديهية (A_4) وشكل البديهية (A_5). فبالنسبة إلى (A_4) إذا كان t ليس حرا إلى x في $\alpha(x)$ فإن ذلك يؤدي إلى عدم صدق (A_4) ، فمثلا لتكن $\alpha(x_1)$ هي $\neg(\forall x_2)\ K_1^2(x_1, x_2)$ وليكن t هو x_2 . لاحظ أن t ليس حرا إلى x_1 في $\alpha(x_1)$. خذ الآن الحالة غير الصحيحة من حالات (A_4) :

$$(1)\quad (\forall x_1)\ (\neg(\forall x_2)\ K_1^2(x_1, x_2)) \to \neg(\forall x_2)\ K_1^2(x_1, x_2)$$

خذ الآن التفسير الذي مداه عنصرين على الأقل وليكن K_1^2 هو علاقة المساواة. إن مقدم الاستلزام (1) صادقا وتاليه كاذبا. وهكذا فإن (1) كاذبا في هذا التفسير.

في حالة (A_5) فإن عدم التقيد بشرط أن لا يكون x حرا في α سيؤدي إلى الخطأ التالي. لتكن كل من α و β هي الصيغة $K_1^1(x_1)$. هنا x حر في α . لنأخذ الحالة الخاطئة التالية لشكل البديهية (A_5) :

$$(2)\quad (\forall x_1)\ (K_1^1(x_1) \to K_1^1(x_1)) \to (K_1^1(x_1) \to (\forall x_1)\ K_1^1(x_1))$$

مقدم الاستلزام (2) صادق. الآن لنأخذ تفسير مداه هو مجموعة الأعداد الصحيحة وليكن $K_1^1(x)$: x عدد فردي. إذن $(\forall x_1)\ (K_1^1(x_1)$ كاذبة. وبالتالي فإن تالي (2) كاذبة وهكذا فإن (2) تكون كاذبة في هذا التفسير.

نشير إلى أن الأشكال البديهية 1، 2 و3 تشكل مع قاعدة الوضع أساس النسق الصوري لحساب القضايا وهكذا فإن كل المبرهنات التي تبرهن في حساب القضايا هي أيضا مبرهنات نبرهن عليها في حساب المحمولات. كذلك فإن الصيغ التي تنتج من مبرهنات حساب القضايا عن طريق إبدال المتغيرات القضائية بصيغ من صيغ حساب المحمولات هي من مبرهنات حساب المحمولات. أي أنه، إذا كانت الصيغة α التي تحتوي على n من المتغيرات القضائية $k_1, k_2, \ldots, k_n$ (سنكتبها هكذا $\alpha\ (k_1, k_2, \ldots, k_n)$) هي صيغة من حساب القضايا فإن الصيغة $\alpha\ (\beta_1/k_1, \beta_2/k_2, \ldots, \beta_n/k_n)$ الناتجة عن الأولى وذلك بإبدال أي متغير قضائي k_m بالصيغة β_m من حساب المحمولات هي مبرهنة في حساب المحمولات والتي يمكننا التوصل لبرهانها بواسطة أشكال البديهيات الثلاثة الأولى بالإضافة إلى قاعدة الوضع فقط.

(البرهان) في النسق Q هو متتالية من الصيغ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ حيث أن أية صيغة α_i $(1 \leq i \leq n)$ هي بديهية من بديهيات النسق Q أو أن α_i صيغة مشتقة من الصيغ التي تسبقها في المتتالية وذلك باستخدام قاعدة الوضع أو التعميم.

سوف نكتب $\vdash_{Q} \alpha$ للتعبير عن (α مبرهنة في النسق Q) ونكتب $\Gamma \vdash_{Q} \alpha$ للتعبير عن (α هي نتيجة Γ في النسق Q وحيث أن Γ مجموعة من صيغ Q).

(5) مبرهنات النسق Q

مبرهنة 1 $(\forall x)\,(\alpha(x) \to (\beta(x)) \to ((\forall x)\,\alpha(x) \to (\forall x)\,\beta(x))$

البرهان

$\vdash_Q$ 1.	$(\forall x)\,(\alpha(x) \to \beta(x)) \to (\,\alpha(x) \to \beta(x))$	
2.	$(\forall x)\,(\alpha\,(x) \to \alpha\,(x))$	شكل بديهية (A_4)
3.	$((\forall x)\,(\alpha(x)\to \beta(x))\to(\,\alpha(x)\to\beta(x)))\to((\forall x)\alpha(x)\to \alpha(x))\to ((\forall x)\,(\alpha(x) \to \beta(x)) \to ((\forall x)\,\alpha(x) \to \beta(x)))$	حق[1]
4.	$((\forall x)\alpha(x)\to\alpha(x))\to ((\forall x)\,(\alpha(x) \to \beta(x)) \to ((\forall x)\,\alpha(x) \to \beta(x)))$	الوضع 3،1
5.	$((\forall x)\,(\alpha(x) \to \beta(x)) \to((\forall x)\,\alpha(x) \to \beta(x)))$	الوضع 2,4
6.	$(\forall x)\,(((\forall x)\,(\alpha(x) \to \beta(x)) \to((\forall x)\,\alpha(x) \to \beta(x)))$	تعميم 5
7.	$(\forall x)\,((\forall x)\,(\alpha(x)\to \beta(x))\to((\forall x)\alpha(x)\to\beta(x)))\to ((\forall x)(\alpha(x)\to\beta(x))\to((\forall x)\,(\forall x)\,\alpha(x) \to \beta(x)))$	شكل بديهية(A_5)
8.	$((\forall x)(\alpha(x)\to\beta(x))\to \;((\forall x)\;(\forall x)\;\alpha(x) \;\to \beta(x)))$	الوضع 6,7
9.	$(\forall x)(\;(\forall x)\alpha(x)\to\beta(x))\to \;((\forall x)\;\alpha(x) \;\to (\forall x)\beta(x)))$	شكل بديهية(A_5)
10.	$(\forall x)\,(\alpha(x) \to (\beta(x)) \to ((\forall x)\,\alpha(x) \to (\forall x)\,\beta(x))$	حق 8,9

مبرهنة 2 $\vdash_Q (\forall x)\,(\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x)) \to ((\forall x)\,(\alpha(x) \leftrightarrow (\forall x)\,\beta(x))$

البرهان

1. $(\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x)) \to (\alpha(x) \to \beta(x))$ حق

---

[1] ـ استبدال في الصيغة $((K \to(L\to M)) \to(N\to L)) \to(K\to(N\to M))$ من حساب القضايا (حق).

2. $(\forall x)(\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x)) \rightarrow (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)))$	تعميم 1,
3. $(\forall x)\ (\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x))\rightarrow(\alpha(x)\rightarrow\beta(x)))\rightarrow((\forall x)\alpha(x) \leftrightarrow \beta\ (x))\rightarrow ((\forall x)\ (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$	مبرهنة 1
4. $((\forall x)(\alpha(x) \leftrightarrow \beta\ (x))\rightarrow ((\forall x)\ (\alpha(x) \rightarrow \beta(x))$	الوضع2,3
5. $((\forall x)\ (\alpha(x) \rightarrow \beta(x)) \rightarrow((\forall x)\ (\alpha(x) \rightarrow (\forall x)\beta(x)))$	مبرهنة 1
6. $((\forall x)(\alpha(x) \leftrightarrow \beta\ (x))\rightarrow ((\forall x)\ (\alpha(x) \rightarrow (\forall x)\beta(x)))$	حق 4,5
7. $((\forall x)(\alpha(x) \leftrightarrow \beta\ (x))\rightarrow ((\forall x)\ \beta(x) \rightarrow (\forall x)\ \alpha(x)))$	تبرهن بنفس الخطوات من 1 إلى 6
8. $(\forall x)\ (\alpha(x) \leftrightarrow \beta(x))\rightarrow ((\forall x)(\alpha(x) \leftrightarrow (\forall x)\ \beta(x))$	حق 6,7

مبرهنة الاستنتاج

لتكن α ، β صيغتان من Q و Γ مجموعة غير خالية من صيغ Q.

إذا كانت $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_Q \beta$ وكان البرهان لا يحتوي على تطبيق لقاعدة التعميم المحتوية على متغير حر في α ، فإن $\Gamma \vdash_Q \alpha \rightarrow \beta$.

البرهان : سنستخدم في هذا البرهان طريقة الاستقراء على عدد n من الصيغ التي تؤلف اشتقاق β من $\Gamma \cup \{\alpha\}$.

الخطوة القاعدية : $n = 1$

إذن β تكون بديهية من Q أو β تكون α أو β تنتمي إلى Γ. في هذه

$\vdash_Q$

الحالة نقوم باشتقاق $\alpha \to \beta$ Γ تماما بنفس الطريقة التي قمنا بها في برهان نظرية الاستنتاج في نفس حساب القضايا P.

خطوة الاستقرار : $n > 1$

لنفرض أنه إذا كانت β صيغة من Q والتي يمكن اشتقاقها من $\Gamma \cup \{\alpha\}$، بدون تطبيق قاعدة التعميم على متغير حر في α، في اشتقاق يحتوي أقل من n من الصيغ، فإن $\Gamma \vdash_{Q} \alpha \to \beta$.

الحالة 1 : β تنتج من الصيغ السابقة لها في البرهان باستخدام قاعدة الوضع. هنا أيضا يكون البرهان مماثلا لبرهان نسق حساب القضايا P.

الحالة 2 : β هي بديهية أو α تنتمي إلى Γ. هنا أيضا يكون البرهان مماثلا لبرهان نسق حساب القضايا P.

الحالة 3 : β تنتج من الصيغ السابقة لها في البرهان باستخدام قاعدة التعميم. إذن β هي $(\forall x)\gamma$ و γ تظهر مسبقا في البرهان. وهكذا فإن $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{Q} \gamma$ والبرهان يحتوي على عدد من الصيغ أصغر من n إذن $\Gamma \vdash_{Q} \alpha \to \beta$ بسبب عدم وجود تطبيق لقاعدة التعميم يحوي على متغير حر في α.كذلك فإن x لا يمكن أن يكون حرا في α لأنه متضمن في تطبيق بقاعدة التعميم في برهان β من $\Gamma \cup \{\alpha\}$. إذن برهان $\alpha \to \beta$ من Γ يكون كما يلي :

$$\left.\begin{array}{l} 1 \\ . \\ . \\ . \\ k\ \alpha \to \beta \end{array}\right\} \text{اشتقاق } \alpha \to \beta \text{ من } \Gamma$$

$k + 1\ (\forall x)(\alpha \to \beta)$ التعميم ،k

$k + 2\ (\forall x)(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to (\forall x)\beta)$ (A_5) شكل البديهية

الوضع $k+1\,,\,k+2$ $\quad(\alpha\rightarrow(\forall x)\beta)\quad k+3$

إذن $\Gamma\vdash_{Q}\alpha\rightarrow\beta$.

نستخدم في المبرهنة التالية تطبيقا لنظرية الاستنتاج.

مبرهنة 3 $\quad\vdash_{Q}(\forall x)\,(\alpha(x)\rightarrow\beta)\rightarrow((\exists x)\,\alpha(x)\rightarrow\beta)$

البرهان

1.	$(\forall x)\,(\alpha(x)\rightarrow\beta)$	م
2.	$(\forall x)\,(\alpha(x)\rightarrow\beta)\rightarrow(\alpha(x)\rightarrow\beta)$	(A_4)
3.	$(\alpha(x)\rightarrow\beta)$	الوضع 1,2
4.	$(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x))$	حق 3
5.	$(\forall x)\,(\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x))$	التعميم 4
6.	$(\forall x)\,\neg\beta\rightarrow\neg\alpha(x))\rightarrow\ (\neg\beta\rightarrow(\forall x)\,\neg\alpha(x))$	(A_5)
7.	$(\neg\beta\rightarrow(\forall x)\,\neg\alpha(x))$	الوضع 5,6
8.	$\neg(\forall x)\,\neg\alpha\rightarrow\ \beta$	حق 7
9.	$(\exists x)\,\alpha(x)\rightarrow\beta$	تعريف 4
10.	$(\forall x)\,(\alpha(x)\rightarrow\beta)\rightarrow((\exists x)\,\alpha(x)\rightarrow\beta)$	نظرية الاستنتاج 1,9

المبرهنة 4 بشرط أن يكون $\alpha(x)$ حرا إلى x في $\alpha(x)$.

مبرهنة 4 $\quad\alpha(a/x)\vdash(\exists x)\,\alpha(x)$

البرهان

1.	$\alpha(a/x)$	م
2.	$(\forall x)\neg(\alpha(x)\rightarrow\neg\alpha(a/x)$	(A_4)
3.	$\neg\neg\,\alpha\,(a/x)\rightarrow\neg(\forall x)\neg\alpha\,(x)$	ص ,2
4.	$\alpha\,(a/x)\,(\beta\leftrightarrow\ \neg(\forall x)\,\neg\ \alpha\,(x)$	حق ,3
5.	$\alpha\,(a/x)\rightarrow(\exists x)\,\alpha\,(x)$	تعريف 4
6.	$(\exists x)\,\alpha(x)$	الوضع 1,6

المبرهنة 4 هي قاعدة التكميم الوجودي (تك. و).

المبرهنة 5 بشرط أن يكون α حرا إلى x في $\alpha(x)$.

مبرهنة 5 $(\forall x)\alpha(x) \vdash \alpha(a/x)$

البرهان

1. $(\forall x)\,\alpha(x)$	م
2. $(\forall x)\,(\alpha(x) \rightarrow \alpha(a/x)$	(A_4)
3. $\alpha(a/x)$	الوضع 1,2

المبرهنة 5 هي قاعدة التخصيص الكلي (تخ. ك).

مبرهنة 6 $(\forall x)\,(\forall y)\,\alpha(x,y) \leftrightarrow (\forall x)\,(\forall y)\,\alpha(x,y)$

البرهان

1. $(\forall x)\,(\forall y)\,\alpha(x,y)$	م
2. $(\forall y)\,\alpha(x,y)$	(A_4)
3. $\alpha(x,y)$	الوضع 1,2
4. $(\forall x)\,\alpha(x,y)$	حق 3
5. $(\forall y)\,(\forall x)\,\alpha(x,y)$	التعميم 4
6. $(\forall x)\,(\forall y)\,\alpha(x,y) \rightarrow (\forall y)\,(\forall x)\,\alpha(x,y)$	(A_5)
7. $(\forall y)\,(\forall x)\,\alpha(x,y) \rightarrow (\forall x)\,(\forall y)\,\alpha(x,y)$	الوضع 5,6
8. $(\forall x)\,(\forall y)\,\alpha(x,y) \leftrightarrow (\forall y)\,(\forall x)\,\alpha(x,y)$	حق 7

2.6 النسق الصوري لحساب المحمولات مع المساواة

النسق الصوري Q الذي مر بنا يمكننا توسيعه ليصبح نسقا صوريا لحساب المحمولات مع المساواة (الهوية)، وذلك بإضافة صيغة الهوية التي تكون على شكل $a = b$ (a و b حدان) إلى صيغ النسق Q. وكذلك بإضافة

شكلي البديهيتين التاليتين إلى الأشكال البديهية السابقة A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 للنسق Q :

شكل البديهية6 (A_6)

(الخاصية الانعكاسية للمساواة) $(\forall x)(x = x)$

شكل البديهية7 (A_7)

$$(x = y) \rightarrow (\alpha(x) \rightarrow \alpha(y/x))$$

شرط أن يكون y حرا إلى x وحيث x, y هما أي متغيرين، $\alpha(x)$ أية صيغة و$\alpha(y/x)$ تنتج من $\alpha(x)$ وذلك باستبدال بعض (وليس بالضرورة كل) ظهور إلى x بواسطة y شرط أن يكون y حرا في $\alpha(y/x)$. وهكذا، فإن $\alpha(y/x)$ يمكن أن تحوي أو لا تحوي ظهور حر إلى x.

يمكننا، في النسق الموسع هذا، من البرهان على مبرهنات النسق Q، التي برهناها سابقا بالإضافة إلى مبرهنات جديدة تتعلق بالمساواة. سنبرهن أدناه اثنتين منها.

مبرهنة 1 $\quad y = x \rightarrow x = y$

البرهان

1. $x = y \rightarrow (x = x \rightarrow y = x)$	A_7، حيث $\alpha(x)$ هي $x = x$ و$\alpha(y/x)$ هي $y = x$
2. $(x = x) \rightarrow (x = y \rightarrow y = x)$	حق[1]، 1
3. $(\forall x)(x = x)$	التخصيص الكلي، 3 (مبرهنة4)
4. $x = x$	A_6
5. $x = y \rightarrow y = x$	الوضع 2,4

---

[1] - باستخدام $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

هذه المبرهنة هي خاصية التماثل لعلاقة المساواة.

مبرهنة 2 $(x = y) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)$

البرهان

1. $(x = y) \wedge (y = x)$	م (مقدمة نظرية الاستنتاج)
2. $x = y$	حق ،1
3. $y = z$	حق ،1
4. $x = y \rightarrow y = x$	مبرهنة 1
5. $y = x$	الوضع 2,4
6. $y = x \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$	A_7
7. $y = z \rightarrow x = z$	الوضع 5,6
8. $x = z$	الوضع 3,7
9. $(x = z) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)$	نظرية الاستنتاج 1,8

هذه المبرهنة هي خاصية التعدي لعلاقة المساواة.

3.6 تمارين

برهن المبرهنات التالية في النسق Q.

(1) $(\forall x)\, \alpha \leftrightarrow \alpha$

(2) $(\exists x)\, \alpha \leftrightarrow \alpha$

(3) $(\forall x)\, \alpha(x) \leftrightarrow (\exists x)\, \alpha(x)$

الفصل السابع

أشجار الصدق Truth Trees

لقد استخدمنا جداول الصدق للأغراض التالية :

أولا، تحديد نوع الصيغ، أي في ما إذا كانت : تكرارية، عارضة، أم متناقضة.

ثانيا، تحديد صحة الحجج في ما إذا كانت : صحيحة أم خاطئة.

ثالثا، تحديد اتساق أو عدم اتساق الصيغ.

رابعا، تحديد العلاقتين (ينتج) و(يكافئ) بين الصيغ.

إن استخدام جداول الصدق يكون ممكنا وعمليا، إذا كان عدد المتغيرات القضائية 3 على الأكثر، ذلك أننا نعلم أن عدد أسطر الجدول يكون 2^n (حيث n عدد المتغيرات القضائية). وهكذا فإذا كان $n = 6$ فإن عدد أسطر الجدول يكون $2^6 = 64$. أما إذ كان $n = 18$ فإن عدد أسطر الجدول يساوي 144, 262 سطرا وسيحتوي الجدول في هذه الحالة على 31 مليون T وF . أما الشخص الذي يملئ الجدول في هذه الحالة بمعدل رمز لكل ثانية وبدون توقف فإنه سيقضي سنة من أجل تكملة الجدول. كذلك فإن الجداول لا تكن نافعة (كما رأينا سابقا) في حساب المحمولات.

إن التغلب على نواقص جداول الصدق في عدم عمليتها وعدم شموليتها يتم باستخدام طريقة أشجار الصدق، حيث يتم التغلب على مسألة

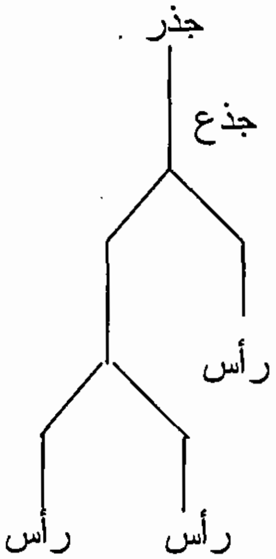
عدد المتغيرات القضائية وكذلك فإن هذه الطريقة تشمل حساب المحمولات أيضا بالإضافة إلى حساب القضايا.

إن تبديد الوقت الذي يتم باستخدام الجداول لتحديد صحة الحجج يكون عن طريق النظر إلى جميع قيم الصدق الممكنة، الصادقة والكاذبة، للمتغيرات القضائية. ولكن أكثر قيم الصدق هذه لا تهمنا مثلا، عند تحديد صحة الحجج. إن ما يهمنا هو تلك القيم التي تجعل جميع المقدمات صادقة والنتيجة كاذبة. وهكذا فلا تهمنا قيم الصدق الممكنة للمتغيرات القضائية التي تجعل المقدمات كاذبة أو تجعل النتيجة صادقة.

تقوم أشجار الصدق بعمل معاكس لما نفعله عند إعطاء مثال مضاد، الذي يقوم على أخذ النتيجة كاذبة وإعطاء قيم صدق للمتغيرات القضائية، بحيث تكون المقدمات صادقة. العمل المعاكس لهذا المثال المضاد يقوم على أخذ النتيجة كاذبة والمقدمات صادقة ثم البحث عن قيم الصدق الممكنة للمتغيرات القضائية التي تقود إلى ذلك. فإذا وجدت مثل هذه القيم فالحجة خاطئة وإذا لم توجد فالحجة صحيحة.

1.7 بناء أشجار الصدق Construction of Truth Trees

في قمة شجرة الصدق يكون (الجذر) وفي أسفلها تكون (الرؤوس) أو (الأوراق). الطريق الذي يتجه مباشرة من الجذر إلى الرأس يسمى (الفرع). والشجرة التي تمتلك أكثر من فرع تتفرع حيث تتفرق الطرق. وتتلك الشجرة عددا من الفروع مساوي لعدد الرؤوس. أما جزء الشجرة فوق جميع التفرعات فيسمى (جذعا).



الصيغ على جذع الشجرة تظهر على كل فرع. بعض الصيغ يشار إليها بواسطة علامة الإنجاز ✓ وذلك للدلالة على أنه قد تم إنجاز (تطبيق) قواعد اشتقاق على تلك الصيغ. وهكذا يمكننا إهمال الصيغ المنجزة وتبقى الصيغ غير المنجزة. والفروع التي تظهر عليها صيغ ونفيها غير منجزة تسمى فروعا مغلقة. الأشجار التي تكون جميع فروعها مغلقة تسمى أشجار مغلقة.

نستطيع الآن إعطاء ما يلي :

1.يكون فرع الشجرة مغلقا إذا وفقط إذا كانت صيغة ونفيها تظهران غير منجزتين عليه.

2.تكون الشجرة مغلقة إذا وفقط إذا كانت جميع فروعها مغلقة، وإلا تكون مفتوحة.

سنشير إلى الفرع المغلق بواسطة العلامة ×. والإغلاق يبين نهاية عملية بناء الشجرة.

إننا نقوم ببناء أشجار الصدق وذلك باستخدام قواعد اشتقاق.

مثال

سنستخدم شجرة الصدق لتحديد في ما إذا كانت صورة الحجة التي تسمى قاعدة الوضع $\dfrac{K \rightarrow L, K}{L}$ صحيحة كالتالي :

$K \rightarrow L$

K

$\urcorner L$

تقوم شجرة الصدق على افتراض أن $K \rightarrow L$ و K صادقتين وأن L كاذبة. فإذا كان ممكنا تعيين قيم صدق بحيث تكون الصيغ $K \rightarrow L$، K، $\urcorner L$ صادقة في نفس الوقت، فصورة الحجة خاطئة وبالتالي فإن قاعدة الوضع ليست صحيحة وإذا كان مستحيلا الحصول على هذا التعيين فإذن صورة الحجة خاطئة وقاعدة الوضع صحيحة. إن قواعد اشتقاق أشجار الصدق تبين فيما إذا كان ممكنا إيجاد تعيين قيم صدق بحيث تكون الصيغ الأولية (التي نبدأ بها) صادقة. وهكذا فإن شجرة الصدق تبدأ بمجموعة افتراضات حول صدق أو كذب صيغ معينة (في مثالنا هذا، تم افتراض صدق $K \rightarrow L$ و K وافتراض كذب L).

نحن نضع هذا الافتراض على شكل صيغ على شجرة الصدق وبتطبيق قواعد اشتقاق نحصل على صيغ أخرى تقوم بتحديد فروع الشجرة. سنستخدم شجرة الصدق لمعرفة ذلك التعيين لقيم الصدق الذي يجعل افتراضاتنا الأولية ممكنة (وفي حالتنا نحاول إيجاد تعيين قيم صدق إلى K و L بحيث تكون كل من الصيغتين $K \to L$ و K صادقة و L كاذبة). إن فرع الشجرة يناظر سطر من جدول الصدق.

إن ما نقوم به هو تطبيق قواعد اشتقاق والتأشير على الصيغ بعلامة الإنجاز ✓ . فبالنسبة إلى قاعدة الوضع، مثلا نقوم بتطبيق قاعدة الاستلزام (كما سنرى في الفقرة القادمة) ونحصل على شجرة الصدق التالية :

✓ $K \to L$

K

$\neg L$

$\neg K$ L

لقد قمنا بالتحقق (أي بوضع علامة الإنجاز✓) من الصيغة $K \to L$ لتبيان أننا قد طبقنا قاعدة اشتقاق عليها وهكذا فلن يكون لها لاحقا أي دور في شجرة الصدق. كذلك قمنا بتفريع الشجرة إلى فرعين وذلك للإشارة إلى أنه يجب علينا دراسة إمكانيتين. فإذا كانت $K \to L$ صادقة فإنه (حسب جدول

صدق الاستلزام) $\neg K$ أو L صادقة. وبما أن الفروع تكون مغلقة إذا ظهرت عليها صيغة ونفيها فإن الفرعين مغلقين. فالفرع الأيسر عليه K و$\neg K$ والفرع الأيمن عليه L و $\neg L$:

$$
\begin{array}{ccc}
\checkmark & K \rightarrow L & \\
 & K & \\
 & \neg L & \\
 & \diagup \quad \diagdown & \\
\neg K & & L \\
x & & x
\end{array}
$$

أشجار الصدق، مثل تلك أعلاه، حيث جميع فروعها مغلقة تسمى مغلقة أيضا. عندما تغلق جميع الفروع فإن ما نستنتجه هو أنه لا توجد إمكانية لجعل جميع الصيغ الأولية صادقة في نفس الوقت. إن مثالنا أعلاه يبين أن شجرة صدق الوضع مغلقة وهذا يبين أنه لا توجد إمكانية لجعل كل من K و$K \rightarrow L$ صادقة و L كاذبة وهذا يبرهن أن الوضع هي صورة حجة صحيحة.

2.7 قواعد اشتقاق أشجار الصدق

1.قاعدة النفي $\neg$

إن قواعد اشتقاق أشجار الصدق تعكس تعاريف دوال الصدق. وهنا يمكننا أن نعبر عن تعريف النفي بواسطة الجدول على الشكل التالي:

$\neg K$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K كاذبة.

إن هذا يعني أن $\neg\neg K$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت $\neg K$ كاذبة, وإن $\neg K$ كاذبة إذا وفقط إذا كانت K صادقة. وإذن $\neg\neg K$ صادقة إذا وفقط إذا كانت K صادقة. كما أن K تكافئ $\neg\neg K$, وهكذا يمكننا حذف رموز أزواج النفي المتجاورة. الآن يمكننا إعطاء القاعدة التالية:

2. قاعدة النفي المزدوج $\neg\neg$

$\neg\neg K$ ✓

K

3. قاعدة الوصل $\wedge$

قاعدة الوصل تشتق من تعريف دالة صدق الوصل:

$K \wedge L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K صادقة و L صادقة.

✓ $K \wedge L$

K

L

4. قاعدة نفي الوصل $\neg\wedge$

يجب علينا هنا الجواب على السؤال التالي: متى تكون الصيغة $\neg(K \wedge L)$ صادقة ؟ أو، متى تكون $K \wedge L$ كاذبة ؟. هنالك إمكانيتان هما: K كاذبة أو L كاذبة. وللتعبير عن هذين الاختيارين فإننا نقوم بالتفريع إلي فرعين أحدهما يعكس إمكانية أن K كاذبة وذلك بكتابة $\neg K$ وعلى الثاني نكتب $\neg L$ للتعبير عن إمكانية أن L كاذبة. وهكذا فإن هذه القاعدة تأخذ الشكل:

$$\begin{array}{ccc} & \checkmark\ \neg(K \wedge L) & \\ / & & \backslash \\ \neg K & & \neg L \end{array}$$

5. قاعدة الفصل $\vee$

$K \vee L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K صادقة أو L صادقة.

$$\begin{array}{ccc} & \checkmark\ K \vee L & \\ / & & \backslash \\ K & & L \end{array}$$

6. قاعدة نفي الفصل $\neg\vee$

يجب علينا الآن الجواب على السؤال: متى تكون الصيغة $\neg(K \vee L)$ صادقة ؟، أو متى تكون $K \vee L$ كاذبة ؟. الجواب: عندما تكون K كاذبة و L كاذبة.

$$\begin{array}{ll} \checkmark & \neg(K \vee L) \\ & \quad \neg K \\ & \quad \neg L \end{array}$$

7. قاعدة الاستلزام →

نستطيع التعبير عن تعريف دالة صدق الاستلزام على الشكل التالي:

$K \to L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا كانت K كاذبة أو L صادقة.

تطبق هذه القاعدة على الصيغ الشرطية (الاستلزامات). الآن سؤالنا هو: متى يكون الاستلزام صادقا ؟. جدول صدق تعريف الاستلزام يشير إلي أن $K \to L$ تكون كاذبة إذا كانت K صادقة و L كاذبة. وإذن $K \to L$ تكون صادقة إذا كانت K كاذبة أو L صادقة. هاتان الإمكانيتان تقودان إلي التفريع التالي:

$$\begin{array}{ccc} & \checkmark\ K \to L & \\ \swarrow & & \searrow \\ \neg K & & L \end{array}$$

8. قاعدة نفي الاستلزام $\neg \rightarrow$

الصيغة $\neg(K \rightarrow L)$ تكون صادقة أو أن $K \rightarrow L$ تكون كاذبة في الحالة التي تكون فيها K صادقة و L كاذبة :

$$\begin{array}{l} \checkmark \neg(K \rightarrow L) \\ \quad K \\ \quad \neg L \end{array}$$

9. قاعدة الاستلزام الثنائي $\leftrightarrow$

قاعدة الاستلزام الثنائي تعكس أيضا تعريفه.

الصيغة $K \leftrightarrow L$ تكون صادقة إذا وفقط إذا تساوت قيم صدق K مع قيم صدق L.

إذا كانت $K \leftrightarrow L$ صادقة فإن K و L يجب أن تمتلكان نفس قيم الصدق, أي أن K و L يجب أن تكونا صادقتين معا أو كاذبتين معا. أي أن هنالك إمكانيتان ويجب التفريع:

$$\begin{array}{c} \checkmark K \leftrightarrow L \\ \diagup \qquad \diagdown \\ \begin{array}{ll} K & \neg K \\ L & \neg L \end{array} \end{array}$$

10. قاعدة نفي الاستلزام الثنائي $\neg \leftrightarrow$

إذا كانت $K \leftrightarrow L$ كاذبة فإن K و L يجب أن تمتلكان قيم صدق مختلفة. أي أن K صادقة و L كاذبة أو أن L صادقة و K كاذبة. هنا أيضا يجب التفريع للتعبير عن هاتين الإمكانيتين.

✓ $\neg(K \leftrightarrow L)$

K	$\neg K$
$\neg L$	L

3.7 تطبيقات أشجار الصدق

1. تحديد صحة صور الحجج

أمثلة

1. أنشئ شجرة الصدق وحدد صحة صورة الحجة التالية.

المقدمات: $K \rightarrow L, L \rightarrow N, K$

النتيجة: N

1 ✓ $K \rightarrow L$

2 ✓ $L \rightarrow N$

3 K

4 $\neg N$

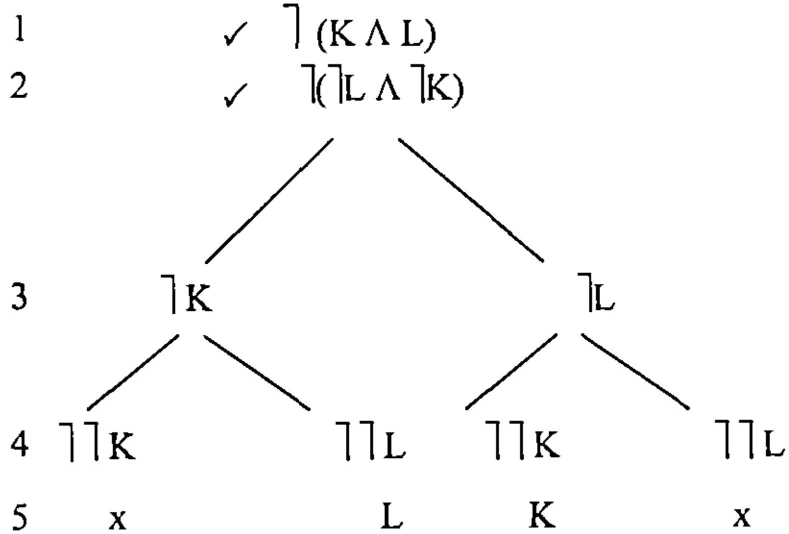
5	$\neg K$	L	
6	x		
7		$\neg L$	N
8		x	x

لقد بدأنا بكتابة المقدمات ونفي النتيجة. وقمنا بتطبيق قاعدة الاستلزام على الخط 1 فحصلنا على الخط 5 . الفرع الأيسر أغلق على الخط 6 لوجود K و $\neg K$ عليه. ولكن الفرع الأيمن بقي مفتوحا ولهذا طبقنا قاعدة الاستلزام على الخط 2 فحصلنا على الخط 7. الفرعان الباقيان تم غلقهما لوجود L و $\neg L$ على الأيسر ولوجود N و $\neg N$ على الأيمن. وهكذا تكون الشجرة مغلقة وبالتالي فلا توجد إمكانية لجعل المقدمات صادقة والنتيجة كاذبة. إذن صورة الحجة صحيحة.

2.أنشئ شجرة الصدق وحدد صحة صورة الحجة التالية :

المقدمات : $\neg(K \wedge L)$

النتيجة $\neg K \wedge \neg L$

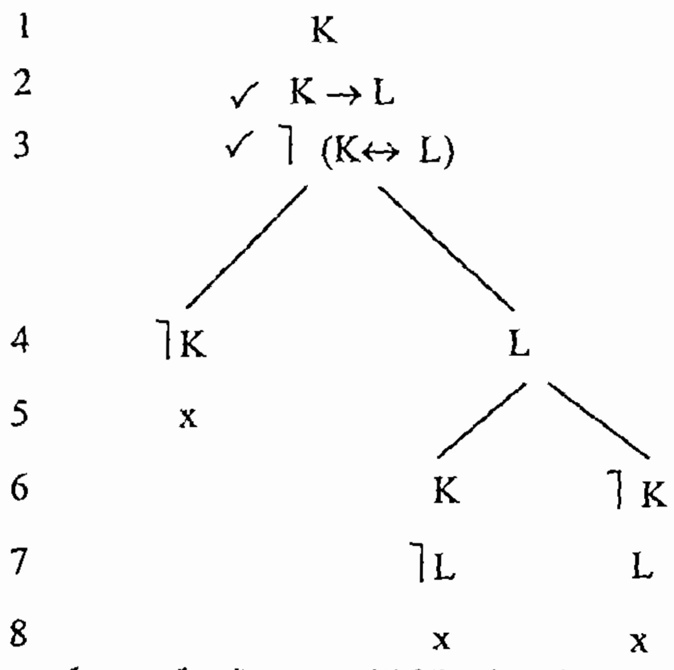


هنا أيضا بدأنا بالمقدمة ونفي النتيجة وقمنا بتطبيق قاعدة نفي الوصل عليهما فحصلنا على الخطين 3 و4. وقد تم غلق الفرعين في أقصى اليسار لوجود $\neg K$ و $\neg\neg K$ وفي أقصى اليمين لوجود $\neg L$ و $\neg\neg L$. وبقي فرعان مفتوحان حتى بعد تطبيق النفي المزدوج. وبما أنه لا يمكننا تطبيق أكثر لقواعد اشتقاق فالشجرة منتهية وهذا يعني وجود إمكانية لجعل المقدمة ونفي النتيجة صادقتين في نفس الوقت وبالتالي فصورة الحجة خاطئة.

3.أنشئ شجرة الصدق وحدد فيما إذا كانت صورة الحجة التالية صحيحة

المقدمات: $K, K \rightarrow L$

النتيجة : $K \leftrightarrow L$



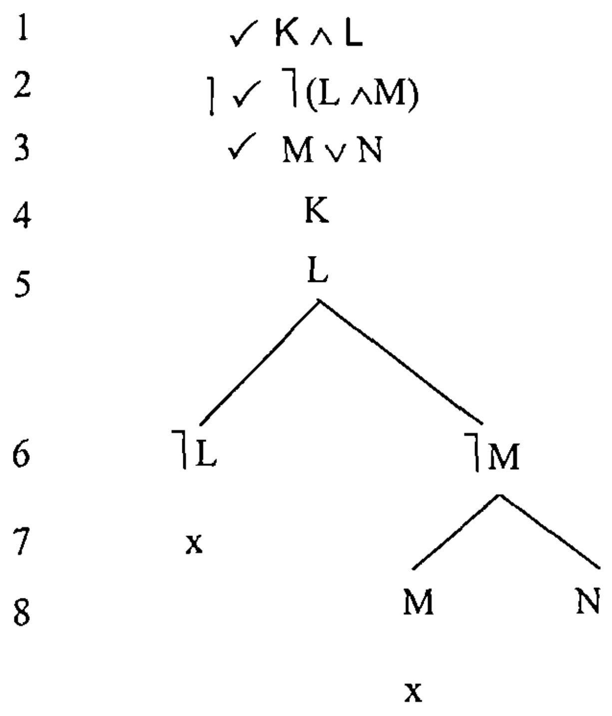
بما أن الشجرة المنتهية مغلقة فإذن صورة الحجة صحيحة.

2.تحديد اتساق أو عدم اتساق الصيغ

تعتبر شجرة الصدق مفيدة لأغراض أخرى غير تحديد صحة صور الحجج. فمجموعة من الصيغ تكون متسقة إذا احتوت شجرة الصدق على الأقل على فرع واحد منتهي مفتوح لأن هذا يعني وجود إمكانية جعل جميع الصيغ صادقة في نفس الوقت أو أنها متسقة. وإذا كانت الشجرة المنتهية لا تحتوي على أي طريق مفتوح فإن مجموعة الصيغ المعطاة تكون غير متسقة.

مثال 1

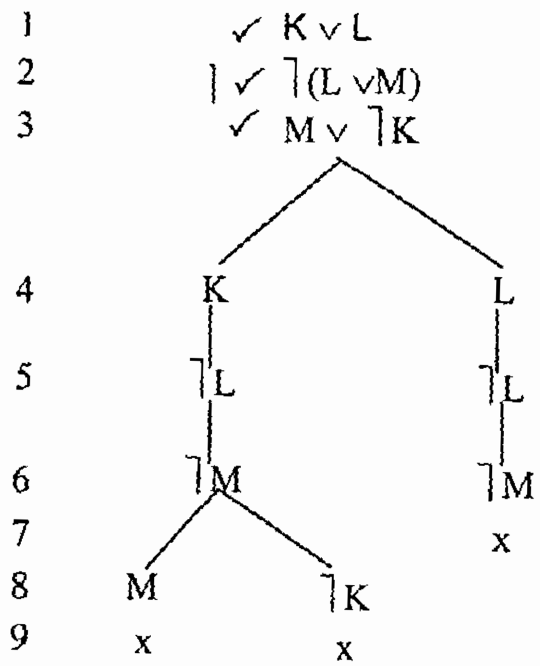
لنأخذ الصيغ التالية : $K \wedge L, \neg(L \wedge M), M \vee N$



لقد قمنا بتطبيق قاعدة $\wedge$ على الخط 1 فحصلنا على الخطين 4 و5، ثم طبقنا قاعدة $\neg\wedge$ على الخط 2 فحصلنا على الخط 6، وأخيرا طبقنا قاعدة $\vee$ على الخط 3 فحصلنا على الخط 8. لا نستطيع الآن القيام بتطبيق أكثر لقواعد الاشتقاق. نرى أن الفرع في أقصى اليسار مغلقا لوجود L و$\neg$L عليه وكذلك، فإن الفرع الأوسط مغلقا لوجود M و$\neg$M عليه. ولكن، الفرع في أقصى اليمين مفتوح لعدم وجود صيغة ذرية ونفيها عليه. وبما أن هذا الفرع يقول بوجود إمكانية أن تكون الصيغ الأولية كلها صادقة في نفس الوقت فإن هذه الصيغ تكون متسقة (حسب تعريف الاتساق).

مثال 2

لنأخذ الصيغ التالية : $K \vee L, \neg(L \vee M), M \vee \neg K$



لقد قمنا بتطبيق قاعدة $\vee$ على الخط 1 فحصلنا على الخط 4، ثم طبقنا قاعدة $\neg\vee$ على الخط 2 فحصلنا على الخطين 5 و6، وأخيرا طبقنا قاعدة $\vee$ على الخط 3 فحصلنا على الخط 8. نرى أن الفرع في أقصى اليسار مغلقا لوجود M و$\neg M$ عليه وكذلك، فإن الفرع الأوسط مغلقا لوجود K و$\neg K$ عليه. كما أن الفرع في أقصى اليمين مغلقا لوجود L و$\neg L$ عليه. وهكذا، فالشجرة المنتهية مغلقة. إذن لا توجد إمكانية لجعل جميع الصيغ الأولية كلها صادقة في نفس الوقت وبالتالي، فإن هذه الصيغ تكون غير متسقة.

3. تحديد نوع الصيغ

I.تكون الصيغة α تكرارية إذا وفقط إذا كانت جميع الفروع على الشجرة المنتهية للصيغة $\neg\alpha$ مغلقة.

مثال أنشئ شجرة الصدق وحدد تكرارية الصيغة :

$(K \rightarrow L) \vee (K \wedge \neg L)$

1 ✓ $\neg((K \rightarrow L) \vee (K \wedge \neg L))$

2 ✓ $\neg(K \rightarrow L)$

3 ✓ $\neg(K \wedge \neg L)$

4 K

5 $\neg L$

6 $\neg K$ | $\neg\neg L$

7 x | x

بدأنا بكتابة نفي الصيغة المعطاة على الخط 1 ثم تطبيق القاعدة $\neg\vee$ على الخط 1 فحصلنا على الخطين 2 و3. وطبقنا القاعدة $\neg\rightarrow$ على الخط 2 فحصلنا الخطين 4 و5. بتطبيق القاعدة $\neg\wedge$ على الخط 3 حصلنا على الخط 6. الفرع الأيسر مغلق لوجود $\neg K$ وK عليه والفرع الأيمن مغلق لوجود $\neg\neg L$ و $\neg L$ عليه وبما أن جميع الفروع مغلقة فإنه لا توجد إمكانية لجعل نفي الصيغة صادقة وبالتالي فالصيغة تكرارية.

2..تكون الصيغة α متناقضة إذا وفقط إذا كانت جميع فروع شجرة الصدق المنتهية للصيغة α مغلقة.

3.تكون الصيغة α عارضة إذا وفقط إذا كانت جميع فروع شجرة الصدق المنتهية للصيغة α مفتوحة وكانت شجرة الصدق المنتهية للصيغة $\neg\alpha$ مفتوحة أيضا.

مثال

أنشئ شجرة الصدق للصيغة $K\leftrightarrow L$ وحدد فيما إذا كانت عارضة أم غير عارضة.

(1) شجرة صدق الصيغة

1	$\checkmark\ K\leftrightarrow L$	
2	K	$\neg K$
3	L	$\neg L$

(2) شجرة صدق نفي الصيغة

1	✓	$\neg(K \leftrightarrow L)$	
2		K	L
3		$\neg L$	$\neg K$

نرى أن شجرة الصيغة $K \leftrightarrow L$ المنتهية مفتوحة لوجود فرعين مفتوحين فيها. نرى كذلك أن شجرة الصيغة $\neg(K \leftrightarrow L)$ مفتوحة أيضا وإذن، تكون الصيغة $K \leftrightarrow L$ عارضة.

4.تستخدم أشجار الصدق أيضا لتحديد التكافؤ.

الصيغتان المتكافئتان هما اللتان تمتلكان نفس قيم الصدق. أي أنه لا يوجد تعيين قيم صدق لمتغيراتهما القضائية يجعل أحدهما صادقة والأخرى كاذبة. ولاختبار ذلك نقوم بإنشاء شجرتين. لنأخذ الصيغتين α وβ. شجرة الصدق الأولى تبدأ بفرض أن β صادقة وα كاذبة وشجرة الصدق الثانية تبدأ بفرض أن β كاذبة و α صادقة. إذا كانت الشجرتان مغلقتين فهذا يعني عدم وجود تعيين يجعل للصيغتين قيم مختلفة وهكذا يتحقق التكافؤ. وإذا كانت إحدى الشجرتين على الأقل مفتوحة فهذا يعني وجود تعيين يجعل إحدى الصيغتين صادقة والأخرى كاذبة وبالتالي تكون الصيغتان غير متكافئتين.

مثال

حدد فيما إذا كانت الصيغتان $\neg L \to \neg K$ ، $K \to L$ متكافئتين أم غير متكافئتين.

1. الشجرة الأولى

1	✓	$\neg L \to \neg K$	
2	✓	$\neg (K \to L)$	
3		K	
4		$\neg L$	
5		$\neg\neg L$	$\neg K$
6		x	x

طبقنا قاعدة $\neg \to$ على الخط 2 فحصلنا الخطين 3 و4. وطبقنا قاعدة $\to$ على الخط 1 فحصلنا على الخط 5 الشجرة مغلقة.

2. الشجرة الثانية

1	✓	$K \to L$	
2	✓	$\neg(\neg L \to \neg K)$	
3		$\neg L$	
4		$\neg\neg K$	
5		$\neg K$	L
6		x	x

وهذه أيضا مغلقة وإذن يتحقق التكافؤ.

4.7 أشجار الصدق في حساب المحمولات

نستطيع تعميم استخدام طريقة أشجار الصدق ليشمل حساب المحمولات. نشير هنا أننا تمكنا من تفسير $(\forall \times)Px$ على أنه وصل لا نهائي من المعطوفات حيث أن مجموعة تعريف Px هي المجموعة اللانهائية $M = \{ a_1, a_2, \ldots\}$:

$$(\forall \times)Px \Leftrightarrow Pa_1 \wedge \ Pa_2 \wedge \ldots$$

إن كل من هذه المعطوفات تمثل جزء من شروط صدق الصيغة $(\forall \times)Px$. ولكنه من المستحيل كتابة هذه الشروط كلها في شجرة الصدق لأنها لا نهائية.

نشير هنا إلى أنه حتى شجرة الصدق لا تعطينا طريقة كاملة لتحديد صحة الحجج في حساب المحمولات.

سنحاول الآن كتابة شروط الصدق بالنسبة للمكمم الكلي $(\forall \times)Px$:

$$(\forall \times)Px$$

$$Pa_1$$

$$Pa_2$$

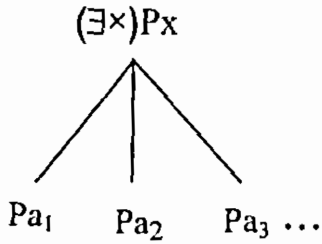
$$Pa_3$$

$$\ldots$$

وبالمثل نستطيع تفسير $(\exists x)\ Px$ على أنه فصل لا نهائي من المفصولات حيث أن مجموعة تعريف Px هي المجموعة اللانهائية $M = \{a_1, a_2, \ldots\}$:

$$(\exists x)Px \Leftrightarrow Pa_1 \vee Pa_2 \vee \ldots$$

شروط الصدق بالنسبة للمكمم الجزئي $(\exists x)Px$:



مثال 1

أنشئ شجرة صدق الحجة التالية :

<u>كل شيء جميل</u>

الورد جميل

الترجمة :

$$\frac{(\forall x)Px}{Pa}$$

حيث Px : x يكون جميل، a: الورد، Pa: الورد جميل.

شجرة الصدق كاملة تكون كما يلي :

$(\forall x)Px$

$\neg Pa$

Pa

x

إن قواعد شجرة الصدق المعممة تستخدم قواعد شجرة حساب القضايا التي مرت بنا بالإضافة إلى 6 قواعد جديدة وهي المتعلقة بالصيغ المحتوية على المكممين وعلى الهوية.

بما أن حساب المحمولات مع الهوية يمتلك 3 رموز لا يتضمنها حساب القضايا وهي $\forall$، $\exists$، $=$ ونحن نحتاج إلى قاعدتين لكل منهم (واحدة للصيغة المنفية وأخرى للصيغة غير المنفية) التي تظهر فيهم فإذن، توجد 6 قواعد جديدة في أشجار حساب المحمولات. سنبدأ أولا بقاعدة التكميم الكلي.

1.قاعدة المكمم الكلي $\forall$

إذا ظهرت صيغة على الشكل α $(\forall x)$ على فرع مفتوح فإنه إذا كان a حدا ثابتا في صيغة ما على هذا الفرع فنكتب $\alpha(a/x)$ (التي هي نتيجة استبدال كل ظهور للمتغير x في α بواسطة a) أسفل الفرع. إذا لم تظهر أية صيغة تحوي حدا ثابتا فإننا نختار حدا ثابتا a ونكتب $\alpha(a/x)$ أسفل الفرع. وفي كل الحالات لا نحقق (لا نكتب ✓) $(\forall x)\ \alpha$).

إننا لا نحقق هذه الصيغة، وذلك لأنه مهما اشتققنا من صيغ بواسطة القاعدة $\forall$ فإننا لا نستنفذ كل تطبيقاتنا. ولكن بالرغم من أن الصيغ المكممة كليا لا تحقق أبدا فإن أشجارها يمكن أن تغلق (في هذه الحالة صورة الحجة تكون صحيحة) أو يمكن الوصول إلى نقطة تكون عندها الشجرة غير مغلقة ولا توجد قواعد أكثر يمكن تطبيقها (في هذه الحالة تكون صورة الحجة خاطئة).

مثال 2

أنشئ شجرة صدق صورة الحجة التالية وحدد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة:

$$\frac{(\forall x)(Kx \rightarrow Lx), (\forall x)Kx}{La}$$

1	$(\forall x)(Kx \rightarrow Lx)$	
2	$(\forall x)Kx$	
3	$\neg La$	
4	✓ $Ka \rightarrow La$	
5	Ka	
6	$\neg Ka$	La
7	x	x

بما أن الحد الثابت a يظهر على $\neg La$ (الخط 3) فإنه يكون الحد الذي نستخدمه للحصول على الخطين 4 و5 باستخدام قاعدة التكميم الكلي. ولكن الشجرة أصبحت مغلقة بعد تطبيق قاعدة الاستلزام وهذا يبين أن صورة الحجة صحيحة.

2.قاعدة نفي المكمم الجزئي $\neg\exists$

إذا ظهرت صيغة غير محققة على الشكل $\neg(\exists x)\ \alpha$ على فرع مفتوح فإننا نقوم بتحقيقها ونكتب $(\forall x)\ \neg\alpha$ أسفل كل فرع مفتوح يحوي الصيغة المحققة.

3.قاعدة نفي المكمم الكلي $\neg\forall$

إذا ظهرت صيغة غير محققة على الشكل $\neg(\forall x)\ \alpha$ على فرع مفتوح فإننا نقوم بتحقيقها ونكتب $(\exists x)\ \neg\alpha$ أسفل كل فرع مفتوح يحوي الصيغة المحققة.

مثال 3

أنشئ شجرة صورة الحجة التالية وحدد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة :

$$\frac{(\forall x)(Kx \rightarrow Lx),\ \neg(\exists x)\, Lx}{\neg Ka}$$

1 $(\forall x)(Kx \rightarrow Lx)$

2 ✓ $\neg(\exists x)\, Lx$

3 $\neg\neg Ka$

4 $(\forall x)\, \neg Lx$

5 $\neg La$

6 ✓ $Ka \rightarrow La$

7 $\neg Ka$ | La

8 x | x

لقد طبقنا قاعدة نفي التكميم الجزئي على الخط 2 وحصلنا على الخط 4. وطبقنا قاعدة التكميم الكلي على 4 فحصلنا على الخط 5 ثم طبقنا قاعدة

التكميم الكلي على الخط 1 فحصلنا على الخط 6. وأخيرا طبقنا قاعدة الاستلزام على الخط 6 فحصلنا على الخط 7. صورة الحجة صحيحة.

4.قاعدة المكمم الجزئي ∃

إذا ظهرت الصيغة على الشكل $(\exists x)\alpha$ على فرع مفتوح فإننا نقوم بتحقيقها ثم نقوم باختيار حد ثابت والذي لم يظهر لحد الآن على هذا الفرع ونكتب $\alpha(a/x)$ (التي هي نتيجة استبدال كل ظهور للمتغير x في α بواسطة a) أسفل كل فر ع مفتوح يحتوي الصيغة المحققة.

مثال 4

أنشئ شجرة صدق صورة الحجة التالية وحدد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة :

$$\frac{(\exists x)Kx}{(\forall x)Kx}$$

1	✓	$(\exists x)Kx$
2	✓	$\neg(\forall x)Kx$
3		Ka
4	✓	$(\exists x)\neg Kx$
5		$\neg Kb$

لقد أدخلنا الحد الثابت a باستخدام القاعدة ∃ على الخط 3. واستبدلنا الصيغة $\neg(\forall x)Kx$ بواسطة مكافئتها الجزئية على الخط 4. كما أدخلنا بعد ذلك حدا ثابتا آ خر b مع تطبيق ثاني للقاعدة ∃ (قاعدة المكمم الجزئي تتطلب أن يكون الحد الثابت الثاني مختلفا عن الأول). لا يوجد تطبيق لقواعد

أخرى والشجرة المنتهية تحوي على فرع واحد مفتوح. وهكذا فإن المقدمة ونفي النتيجة تكون صيغ متسقة وبهذا فإن صورة الحجة خاطئة.

مثال 5

أنشئ شجرة صدق صورة الحجة التالية وحدد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة :

$$\frac{(\forall x)(\forall y)(Kxy \rightarrow \neg Kyx)}{\neg(\exists x)\,Kxx}$$

1		$(\forall x)(\forall y)(Kxy \rightarrow \neg Kyx)$	
2	✓	$\neg\neg(\exists x)\,Kxx$	
3	✓	$(\exists x)\,Kxx$	
4		Kaa	
5		$(\forall y)(Kay \rightarrow \neg Kya)$	
6	✓	$(Kaa \rightarrow \neg Kaa)$	
7		$\neg Kaa$	$\neg Kaa$
8		x	x

لقد طبقنا قاعدة المكمم الوجودي على الخط 3 قبل تطبيق قاعدة المكمم الكلي على الخطين 5 و6 لأن هذا يقلل من طول الأشجار بشكل عام. وصورة الحجة صحيحة.

مثال 6

أنشئ شجرة صدق صورة الحجة التالية وحدد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة :

$$\frac{(\forall x)(\exists y) Lxy}{Laa}$$

1		$(\forall x)(\exists y) Lxy$
2		$\neg Laa$
3	✓	$(\exists y) Lay$
4		Lab
5	✓	$(\exists y) Lby$
6		Lbc
7	✓	$(\exists y) Lcy$
8		Lcd

.
.
.

الشجرة أعلاه لن تصل إلى نهايتها لأنها لا نهائية الطول. لقد طبقنا قاعدة التكميم الكلي على الخط 1 وهكذا نتجت صيغة مكممة جزئية جديدة على الخط 3. تطبيق القاعدة∃ على هذه الصيغة الجديدة على الخط 4 أنتج

حد ثابت b. وبما أن الصيغة المكممة كليا على الخط 1 غير محققة فيجب تطبيق القاعدة $\forall$ مرة أخرى بالنسبة إلى b وبهذا نتجت صيغة مكممة جزئية جديدة وهذه بدورها أدخلت حدا ثابتا جديدا c على الخط 6 لكن هذا يتطلب تطبيق القاعدة $\forall$ على الخط 1 بالنسبة إلى c وهكذا دواليك. وهكذا فالشجرة لا يمكن أن تنتهي وبالتالي لا تعطي جوابا. المثال أعلاه يبين أن حساب المحمولات غير قابل للحكم (أي لا توجد طريقة فعالة للحكم على صحة صورة حجة فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة).

5.7 أشجار صدق الهوية

يمكن استخدام أشجار الصدق في صور الحجج المحتوية على علاقة الهوية (=). إن هذا يتطلب إدخال قاعدتين جديدتين.

1.قاعدة الهوية =

إذا ظهرت صيغة على الشكل $a = b$ على فرع مفتوح، فإنه إذا ظهرت صيغة γ غير محققة وتحوي الحدين a أو b فإننا نقوم أسفل الفرع بكتابة أية صيغة ليست على الفرع والتي تكون نتيجة استبدال ظهور واحد أو أكثر لأي من هذين الحدين بواسطة الحد الآخر في γ . لا يتم تحقيق أي من $a = b$ أو γ .

مثال 7

أنشئ شجرة صدق صورة الحجة التالية وحدد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة :

$$\frac{a = b}{Kab \rightarrow Kba}$$

1		$a = b$
2		$\neg (Kab \rightarrow Kba)$
3	✓	$\neg (Kaa \rightarrow Kaa)$
4		Kaa
5		$\neg Kaa$
6		x

لقد قمنا على الخط 3 باستبدال ظهور b في الصيغة على الخط 2 بواسطة a باستخدام قاعدة الهوية. صورة الحجة صحيحة.

2.قاعدة نفي الهوية = $\neg$

يغلق أب فرع مفتوح تكون عليه صيغة على الشكل $(\alpha = \alpha) \neg$

مثال 8

أنشئ شجرة صدق صورة الحجة التالية وحدد فيما إذا كانت صحيحة أم خاطئة :

$$\frac{a = b}{b = a}$$

1	$a = b$
2	$\neg (b = a)$
3	$\neg (a = a)$
4	x

لقدم قمنا على الخط 3 باستبدال ظهور b على الخط 2 بواسطة a وهكذا حصلنا على الصيغة $\urcorner(a = a)$ التي أغلقت الشجرة باستخدام قاعدة نفي الهوية.

6.7 تمارين

(أ) باستخدام أشجار الصدق حدد، فيما إذا كانت كل من الصيغ التالية تكرارية، عارضة أم متناقضة.

1) $\urcorner(L \rightarrow (K \wedge \urcorner K))$

2) $(K \leftrightarrow (\urcorner K \rightarrow K)$

3) $(K \rightarrow K) \rightarrow (L \wedge \urcorner L)$

4) $((K \rightarrow L) \leftrightarrow \urcorner(K \wedge \urcorner L))$

5) $(K \rightarrow (L \rightarrow M)) \rightarrow ((K \rightarrow L) \rightarrow (K \rightarrow M))$

(ب) حدد فيما إذا كانت كل من مجموعات الصيغ التالية متسقة أم غير متسقة، وذلك باستخدام أشجار الصدق :

1) $\urcorner K \vee L, \ \urcorner((\urcorner L \wedge M) \rightarrow \urcorner K)$

2) $(\urcorner L \wedge M) \rightarrow \urcorner K, \ \urcorner(\urcorner K \vee L)$

3) $K \rightarrow L, M \rightarrow L, \urcorner(K \rightarrow M)$

4) $K \vee L, K \rightarrow L, \ \urcorner L$

5) $K \leftrightarrow L, \ \urcorner\urcorner(K \leftrightarrow M)$

(ج) باستخدام أشجار الصدق حدد فيما إذا كانت صور التالية صحيحة أم خاطئة.

(1)المقدمات $K \rightarrow (L \wedge (M \vee))$

النتيجة $K \rightarrow L$

(2)المقدمات $K \rightarrow (L \vee M) , \neg L \wedge K$

النتيجة M

(3)المقدمات $K \vee (L \wedge M) , K \rightarrow L$

النتيجة $L \wedge N$

(4)المقدمات $K \rightarrow (L \rightarrow M)$

النتيجة $(K \wedge L) \rightarrow M$

(5)المقدمات $(K \wedge L) \rightarrow M$

النتيجة $K \rightarrow (L \rightarrow M)$

(د) باستخدام أشجار الصدق حدد فيما إذا كانت أزواج الصيغ التالية متكافئة أم غير متكافئة.

(1 $\neg K \rightarrow L , \neg(K \rightarrow L)$

(2 $\neg(K \wedge L) , \neg K \wedge \neg L$

(3 $((K \leftrightarrow L) \wedge K) , L$

(هـ) باستخدام أشجار الصدق، حدد فيما إذا ما كنت كل من مجموعات الصيغ التالية متسقة أم غير متسقة.

1) $(\forall x)(K_x \to Lx), (\exists x) K_x, \neg(\exists x) L_x$

2) $K_{ab}, (\exists x) K_x, (\forall x)(K_x \to L_{xx})$

3) $(\exists x)(K_x \wedge \neg Lx), (\forall x)(M_x \to Lx), (\forall x)(K_x \to Mx)$

4) $\neg((\exists x) K_x \to (\exists y) L_y), (\forall x)(K_x \to Lx)$

(و) باستخدام أشجار الصدق حدد فيما إذا كانت صور التالية صحيحة أم خاطئة.

1) $$\frac{(\forall x) K_x \to (\forall x) L_x, \neg(\exists x) L_x}{(\exists x)\neg K_x}$$

2) $$\frac{(\exists x) K_x , (\exists x) L_x}{(\exists x)(K_x \wedge L_x)}$$

3) $$\frac{(\exists x)(\forall x) K_{xy}}{(\forall x)(\exists x)\ K_{yx}}$$

4) $$\frac{K_a \wedge (L_a \wedge M_a), (\forall x)(L_x \to N_x), (\forall x)(L_x \to O_x)}{P_a}$$

5) $$\frac{a = b}{K_{ab} \to K_{ba}}$$

6) $a = b \vdash b = a$

حلول التمارين

الفصل الأول – 6.1

(أ)

1)ذهب أحمد إلى المكتبة : K ، ذهب علي إلى المكتبة : L

الترجمة : $K \wedge L$.

2)المثلث ABC قائم الزاوية : K ، المثلث ABC متساوي الساقين : L

الترجمة : $K \wedge L$.

3)أحمد يذهب إلى المدرسة : K ، علي يذهب إلى المدرسة : L

الترجمة : $K \wedge \neg L$.

4)العدد $a > b$: K ، العدد $b > a$: L

الترجمة : $K \vee L$.

5)مماثل إلى 4)

6)المستقيم a عمودي على c : K ، المستقيم b عمودي على c : L ،
$M: \ a // b$

الترجمة : $(K \wedge L) \rightarrow (M \vee \neg M)$.

7)تتدمر الحضارة البشرية : K ، اندلعت الحرب الذرية : L

الترجمة : $L \rightarrow K$.

8) $K : ab > o$ ، $L : a > o$ ، $M : b > o$ ، $N : a < o$ ،
$O : b < o$

الترجمة : $K \to ((L \wedge M) \vee (N \wedge O))$.

9)مماثلة إلى 8)

10) $K : b < c$ ، $L : -c < -b$

الترجمة : $K \leftrightarrow L$.

11)مقياس المنطق صعب : K ، احمد ينجح في المنطق : L ، فاطمة تنجح في المنطق : M ، حضرا المحاضرات : N

الترجمة : $K \to ((L \wedge M) \leftrightarrow N)$.

(ب)

1)إذا حضر أحمد الاجتماع، فإن علي يحضر الاجتماع.

2)إذا حضرت خلود الاجتماع، فإن أحمد لن يحضر الاجتماع.

3)أحمد يحضر الاجتماع إذا وفقط إذا حضرت خلود الاجتماع.

4)إذا حضر أحمد أو علي الاجتماع، فإن خلود تحضر الاجتماع.

5)إذا حضر أحمد الاجتماع، فإن خلود تحضر أو إذا لم تحضر خلود الاجتماع فإن علي يحضر.

(ج)

(1

K	$\neg K$	$\neg\neg K \to K$
T	F	T
F	T	F

(2

K	L	$K \vee L$	$L \vee K$	$(K \vee L) \to (L \vee K)$
T	T	T	T	T
T	F	T	T	T
F	T	T	T	T
F	F	F	F	T

(3

K	L	K∨L	⌉K	⌉L	⌉K∧⌉L	(K∨L)→ (⌉K∧ ⌉L)
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T

(4

K	L	K→L	⌉L	(K→ L) ∧⌉L
T	T	T	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(5

K	L	K→L	⌉K	⌉K∨ L	(K→L)↔ (⌉K∨ L)
T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

(6

K	L	M	L→M	K→(L→M)	K∧ L	(K∧ L) → M	(K→(L→M))↔ ((K∧ L) → M)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T

(د)

1)

K	$\neg K$	$\neg\neg K$
T	F	T
F	T	F

قارن بين العمودين الأول والثالث

2)

K	L	$K\wedge L$	$L\wedge K$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

قارن بين العمودين الأخيرين

3)

K	L	$\neg K$	$\neg L$	$K\wedge L$	$\neg(K\wedge L)$	$\neg K \vee \neg L$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

قارن بين العمودين الأخيرين

4) مماثل إلى 3)

5)

K	L	$\neg K$	$\neg K\vee L$	$K \rightarrow L$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

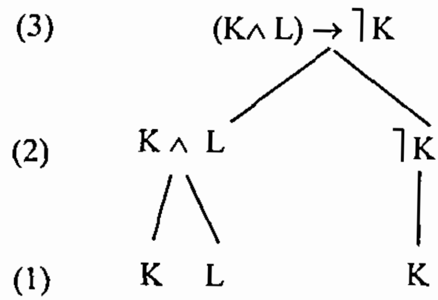
قارن بين العمودين الأخيرين

6)

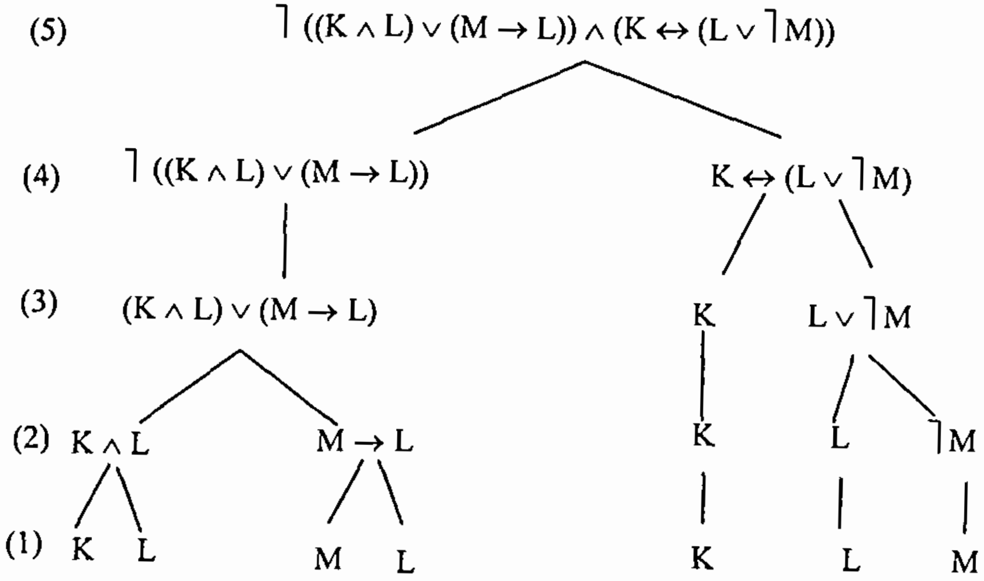
K	L	M	$K \wedge L$	$L\rightarrow M$	$(K\wedge L) \rightarrow M$	$K\rightarrow (L\rightarrow M)$	$((K\wedge L)\rightarrow M)\leftrightarrow ((K\rightarrow L) \rightarrow M)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T

(هـ)

1)



(2



(و)

أ) $2^3 \neq 3$ أو $6 \times 4 \neq 20$: صادقة ، ب) $6 \times 4 = 20$ و 9 عدد فردي:

كاذبة ، ج) إذا كان $6 \times 4 \neq 20$ فإن $2^3 \neq 8$: كاذبة.

د) $2^3 = 8$ أو $6 \times 4 = 20$ و 9 عدد فردي : صادقة

الفصل الثاني – 12.2

(أ) ننشئ أولا جدول صدق كل صيغة.

(1) تكرارية ، (2) تكرارية ، (3) عارضة ، (4) عارضة ،

(5) تكرارية ، (6) متناقضة ، (7) تكرارية.

(ب)

(1)للتحقق من (ب) $\Rightarrow$ (أ) نقوم بإنشاء جدول صدق الصيغة (ب) $\rightarrow$ (أ)

أي : $(K \vee L) \rightarrow (\urcorner K \rightarrow L)$ ، فإذا كانت هذه الصيغة تكرارية فإن

ب $\Rightarrow$ (أ).

K	L	$\urcorner K$	$K \vee L$	$\urcorner K \rightarrow L$	$(\urcorner K \rightarrow L) \rightarrow (K \vee L)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	F	T

بما أن (ب) $\rightarrow$ (أ) صيغة تكرارية، فإن (ب) $\Rightarrow$ (أ).

للتحقق من (أ) $\Rightarrow$ (ب) نقوم بإنشاء جدول صدق الصيغة (أ)$\rightarrow$ (ب)، أي

$(\urcorner K \rightarrow L) \rightarrow (K \vee L)$ ، فإذا كانت هذه الصيغة تكرارية فإن (أ) $\Rightarrow$ (ب).

سنستخدم الأعمدة الخمسة الأولى من الجدول أعلاه ونضيف لهم العمود السادس التالي :

	$(K \vee L) \rightarrow (\urcorner K \rightarrow L)$
	T
	T
	T
	T

بما أن (أ) $\rightarrow$ (ب) صيغة تكرارية، فإن، (أ) $\Rightarrow$ (ب).

للتحقق من (ب) $\Leftarrow$ (أ) نقوم بإنشاء جدول صدق الصيغة (ب) $\leftrightarrow$ (أ) أي $(\neg K \to L) \leftrightarrow (K \vee L)$ ، فإذا كانت هذه الصيغة تكرارية فإن (ب)$\Leftrightarrow$ (أ).

سنستخدم هنا أيضا الأعمدة الخمسة الأولى أعلاه ونضيف لهم العمود السادس التالي :

	$(\neg K \to L) \leftrightarrow (K \vee L)$
	T
	T
	T
	T

(2) للتحقق من (ب) $\Leftarrow$ (أ) نقوم بإنشاء جدول صدق الصيغة (ب)$\to$ (أ)، أي $(K \to L) \to (K \wedge (K \to L))$ ، فإذا كانت هذه الصيغة تكرارية فإن (ب) $\Rightarrow$ (أ) :

K	L	$K \to L$	$(K \wedge (K \to L)$	$(K \to L) \to (K \wedge (K \to L))$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

نلاحظ أن الصيغة في العمود الأخير ليست تكرارية وإذن فإن (ب) $\not\Rightarrow$ (أ).

للتحقق من (أ) $\Rightarrow$ (ب) نقوم بإضافة عمود آخر ونجد قيم صدق الصيغة (أ)$\to$ (ب)، فإذا كانت هذه الصيغة تكرارية فإن (أ) $\Rightarrow$ (ب).

	$(K \wedge (K \to L)) \to (K \to L)$
	T
	T
	T
	T

نلاحظ أن الصيغة في هذا العمود تكرارية، وإذن، (أ) $\Rightarrow$ (ب).

للتحقق من (ب) $\Leftrightarrow$ (أ) نقوم بإضافة عمود جديد ونجد قيم صدق الصيغة (ب) $\leftrightarrow$ (أ)، فإذا كانت هذه الصيغة تكرارية فإن (ب) $\Leftrightarrow$ (أ) :

	$(K \to L) \leftrightarrow (K \wedge (K \to L))$
	T
	T
	F
	F

نلاحظ أن الصيغة في هذا العمود ليست تكرارية وإذن (ب)$\not\Leftrightarrow$ (أ).

حل (3)، (4)، (5) مماثل إلى (1) و(2) أعلاه.

(ج)

(1) $(K \vee L) \vee \neg(M \vee \neg N)$ ، (2) $\neg(K \wedge (L \wedge \neg M)$

(3) $\neg((\neg(\neg K \vee L)) \vee \neg(\neg L \vee K))$

(4)$(((K \to \neg L) \wedge (\neg L \to K)) \to M) \wedge (M \to ((\neg L \to K) \wedge (K \to \neg L)))$

(5)$\neg(K \to (L \to \neg M))$

(د)

(1)القضايا الذرية : شيء ما حي : K ، شيء ذو روح : L ، شيء متحرك بذاته : M .

الترجمة

(أ) $(K \to L) \wedge (L \to M)$

(ب) $(M \to L) \wedge (L \to K)$

الآن ننشئ جدول صدق الصيغة (أ) $\leftrightarrow$ (ب) :

K	L	M	K→L	L→M	(أ)	M→ L	L → K	(ب)	(أ) ↔ (ب)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	T	T	F
T	F	T	F	T	F	F	T	F	T
T	F	F	F	T	F	T	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	F	F	F
F	T	F	T	F	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T	T	T	T

نلاحظ أن الصيغة في العمود الأخير (ب) ↔ (أ) ليست صيغة تكرارية

وإذن (أ) لا تكافئ (ب).

(2)القضايا الذرية

الروح متحركة بذاتها : K ، كل ما هو متحرك بذاته مصدر التغير : L ،

الروح مصدر التغير : M

الترجمة

(أ) $(K \wedge L) \rightarrow M$

(ب) $\neg(\neg M \wedge (K \wedge L))$

الآن ننشئ جدول صدق الصيغة (أ) ↔ (ب)، فإذا كانت الصيغة (أ)↔ (ب) تكرارية فإن (أ) تكافئ (ب). النتيجة هي أن (أ) تكافئ (ب).

(ه)

(1) سنحاول أولا البرهان على خطأ صحة صورة الحجة وذلك بإعطاء مثال مضاد.

لنأخذ النتيجة كاذبة، إذن يجب أن تكون M صادقة. الآن، حتى تكون المقدمة الثالثة صادقة يجب أن تكون K صادقة. وحتى تكون المقدمة الثانية صادقة وبما أن M صادقة، أي $\neg M$ كاذبة، فيجب أن تكون L كاذبة. حتى تكون المقدمة الأولى صادقة وبما أن L كاذبة، أي أن $\neg L$ صادقة، فيجب أن تكون K كاذبة. وهنا وصلنا إلى تناقض : K صادقة وK كاذبة. إذن يفشل المثال المضاد وصورة الحجة صحيحة.

وحتى نبرهن أن هذه الصورة صحيحة سنعطي برهانا صوريا لها.

البرهان

1. $\neg L \to \neg K$	م
2. $L \leftrightarrow \neg M$	م
3. K	م
4. $\neg\neg K$	النفي المضاعف 3,
5. $\neg\neg L$	نفي التالي 1,4
6. L	النفس المضاعف 5,
7. $(L \to \neg M) \wedge (\neg M \to L)$	الاستلزام الثنائي 2,
8. $L \to \neg M$	التبسيط 7,
9. $\neg M$	الوضع 6, 8

(2)سنحاول أولا البرهان على خطأ صورة الحجة وذلك بإعطاء مثال مضاد. نأخذ النتيجة كاذبة. إذن يجب أن تكون M كاذبة وK كاذبة. حتى تكون المقدمة الأولى صادقة وبما أن M كاذبة فإن L يجب أن تكون كاذبة. حتى تكون المقدمة الثانية صادقة فيجب أن تكون $M \leftrightarrow K$ كاذبة. وبما أن K

كاذبة فيجب أن تكون M صادقة وهنا وصلنا إلى تناقض : M كاذبة و M صادقة. إذن يفشل المثال المضاد وصورة الحجة صحيحة.

وحتى نبرهن أن هذه الصورة صحيحة سنعطي برهانا صوريا لها.

البرهان

1. $L \to M$	م
2. $\neg(K \leftrightarrow M)$	م
3. $\neg M$	(مقدمة ب.ش) م
4. $\neg((K \to M) \wedge (M \to K))$	2, استلزام ثنائي
5. $\neg(K \to M) \vee \neg(M \to K)$	4, دي مورغان
6. $\neg M \vee K$	3, الجمع
7. $M \to K$	6, الاستلزام
8. $\neg(K \to M)$	5,7 نفي الفصل
9. $\neg(\neg K \vee M)$	8, الاستلزام
10. $K \wedge \neg M$	9, دي مورغان
11. K	10, التبسيط
12. $\neg M \to K$	3,11 ب.ش

(و)(1)

البرهان

1. $K \to (L \vee M)$	م
2. $L \to N$	م
3. $M \to N$	م
4. $N \to \neg O$	م
5. O	م
6. $\neg\neg O$	5, نفي المضاعف
7. $\neg N$	4,6 نفي التالي
8. $\neg M$	3,7 نفي التالي
9. $\neg L$	2,7 نفي التالي

10. $\neg L \wedge \neg M$	العطف 8,9
11. $\neg(L \vee M)$	دي مورغان,10
12. $\neg K$	نفي التالي 1,11

(2)

البرهان

1. $L \leftrightarrow (M \wedge K)$	م
2. $M \rightarrow \neg K$	م
3. $(L \rightarrow (M \wedge K)) \wedge ((M \wedge K) \rightarrow L)$	الاستلزام الثنائي 1,
4. $L \rightarrow (M \wedge K)$	التبسيط 3,
5. $\neg M \vee \neg K$	الاستلزام 2,
6. $\neg(M \wedge K)$	دي مورغان,5
7. $\neg L$	نفي التالي 4,6

(3)

البرهان

1. $K \rightarrow (L \rightarrow M)$	م
2. $\neg M$	م
3. $(K \wedge L) \rightarrow M)$	الاستيراد والتصدير 1,
4. $\neg(K \wedge L)$	نفي التالي 2,3
5. $\neg K \vee \neg L$	دي مورغان 4,

(ز)

(1)القضايا الذرية

الموت انفصال الروح عن الجسم : K

الروح قادرة على الوجود مستقلة عن الجسم : L

الروح تصبح حرة حين يموت الجسم : M

الترجمة

المقدمات $K \to (L \to M)$

النتيجة $\neg M \to (\neg K \vee \neg L)$

البرهان

1. $K \to (L \to M)$	م
2. $(K \wedge L) \to M)$	الاستيراد والتصدير, 1
3. $\neg M \to \neg(K \wedge L)$	عكس النقيض, 2
4. $\neg M \to (\neg K \vee \neg L)$	دي مورغان, 3

(2) القضايا الذرية

تفسد الروح حين يموت الجسم : K

ينبغي أن نخشى الموت : L

هناك أمل : M

الترجمة

المقدمات $K \to L,\ \neg K \to M,\ K \vee \neg K$

النتيجة $\neg M \to L$

البرهان

1. $K \to L$	م
2. $\neg K \to M$	م
3. $K \vee \neg K$	م
4. $\neg L \to \neg K$	عكس النقيض, 1
5. $\neg L \to M$	القياس الشرطي 2,4
6. $\neg M \to \neg\neg L$	عكس النقيض, 5
7. $\neg M \to L$	النفي المضاعف, 6

(3) القضايا الذرية

ألقيت أسئلة على الناس بصورة صحيحة : K

الناس يظهرون معرفة لم يكتسبوها في هذه الحياة : L

الناس اكتسبوا معرفة في حياة سابقة : M

الروح يمكن أن توجد مستقلة عن الجسم : N

الترجمة

المقدمات $K \rightarrow L,\ \neg M \rightarrow \neg L,\ M \rightarrow N$

النتيجة $K \rightarrow N$

البرهان

م	1. $K \rightarrow L$
م	2. $\neg M \rightarrow \neg L$
م	3. $M \rightarrow N$
2, عكس النقيض	4. $\neg\neg L \rightarrow \neg\neg M$
4, الفني المضاعف	5. $L \rightarrow M$
1,3,5 القياس الشرطي	6. $K \rightarrow N$

(4) القضايا الذرية

الروح تشبه نغم يعزف على آلة موسيقية : K

يمكن أن توجد الروح قبل أن يوجد الجسم : L

الحجة المستندة إلى الروح قوية : M

الروح قد وجدت قبل أن يوجد الجسم : N

الترجمة

المقدمات $K \rightarrow \neg N,\ M \rightarrow L,\ L \rightarrow N$

النتيجة $\neg M \vee \neg K$

البرهان

1. $K \rightarrow \neg N$	م
2. $M \rightarrow L$	م
3. $L \rightarrow N$	م
4. $M \rightarrow N$	القياس الشرطي 2,3
5. $\neg\neg N \rightarrow \neg K$	عكس النقيض 1,
6. $N \rightarrow \neg K$	النفي المضاعف 5,
7. $M \rightarrow \neg K$	القياس الشرطي 4,6
8. $\neg M \vee \neg K$	الاستلزام 7,

(ح)

(أ)القضايا الذرية

أذهب لقضاء إجازتي : K

القيام بعمل إضافي : L

أبيع سيارتي : M

أكسب بعض المال : N

الترجمة

المقدمات $(\neg K \vee L) \rightarrow (M \wedge N)$

النتيجة $K \vee M$

سنحاول أولا البرهنة على خطأ الحجة وذلك بإعطاء مثال مضاد. نأخذ النتيجة كاذبة. إذن K يجب أن تكون كاذبة و M يجب أن تكون كاذبة. حتى

تكون المقدمة صادقة وبما أن M كاذبة فإن تالي المقدمة كاذبا، وهكذا فيجب أن يكون مقدمها كاذبا أيضا. وإذن يجب أن تكون K صادقة و L كاذبة. وهنا وصلنا إلى تناقض : K كاذبة وصادقة. إذن يفشل المثال المضاد والحجة صحيحة. وحتى نبرهن صحة الحجة سنعطي برهانا صوريا، باستخدام طريقة البرهان غير المباشر.

البرهان

1.	$(\neg K \vee L) \rightarrow (M \wedge N)$	م
2.	$K \vee M$	م
3.	$\neg(K \vee M)$	م (مقدمة ب.غ)
4.	$\neg K \wedge \neg M$	3, دي مورغان
5.	$\neg K$	4, التبسيط
6.	$\neg K \vee L$	5, الجمع
7.	$M \wedge N$	1,6 الوضع
8.	$\neg M$	4, التبسيط
9.	M	7, التبسيط
10.	$M \wedge \neg M$	8,9 العطف
11.	$K \vee M$	3,10 ب.غ

(2) القضايا الذرية

فازت الجزائر بكأس العرب لكرة القدم : K

فازت سوريا بكأس العرب لكرة القدم : L

أكون سعيدا : M

أقيم احتفالا : N

الترجمة

المقدمات $(K \vee L) \rightarrow (M \wedge N)$

النتيجة $K \rightarrow M$

سنحاول البرهان أولا على خطأ الحجة وذلك بإعطاء مثال مضاد. نأخذ النتيجة $K \rightarrow M$ كاذبة. إذن يجب أن تكون K صادقة وM كاذبة. حتى تكون المقدمة صادقة، وبما أن M كاذبة فإن تاليها يكون كاذبا وبالتالي يجب أن يكون مقدمها كاذبا. إذن يجب أن تكون K كاذبة وL كاذبة. وصلنا إلى تناقض : K صادقة وK كاذبة. إذن يفشل المثال المضاد والحجة صحيحة.

للبرهنة على أن الحجة صحيحة سنعطي البرهان التالي :

البرهان

1. $(K \vee L) \rightarrow (M \wedge N)$	م
2. K	(مقدمة ب. ش) م
3. $K \vee L$	الجمع ,2
4. $M \wedge N$	الوضع 1,3
5. M	التبسيط ,4
6. $K \rightarrow M$	ب. ش 2,5

(3)القضايا الذرية

علي يذهب إلى المكتبة : K

سالم يذهب إلى المكتبة : L

فاطمة تذهب إلى المكتبة : M

الترجمة

المقدمات $K \vee (L \wedge M)$

النتيجة $\neg M$

سنحاول البرهان أولا على خطأ الحجة وذلك بإعطاء مثال مضاد. نأخذ النتيجة $\neg M$ كاذبة. إذن يجب أن تكون M صادقة. حتى تكون المقدمة

الأولى صادقة وبما أن M صادقة فيمكن أن نأخذ K صادقة و L صادقة. حتى تكون المقدمة الثانية صادقة وبما أن M صادقة فيمكن أن نأخذ K صادقة. إذن ينجح المثال المضاد والحجة خاطئة.

السطر المطلوب

K	L	M	$K \vee (L \wedge M)$	$K \rightarrow M$	$\neg M$
T	T	T	T	T	F

(4)القضايا الذرية

يغيب أحمد عن دروس المنطق : K

تهاون أحمد في مراجعة دروسه : L

أحمد يرسب : M

أحمد يطرد من الجامعة : N

أحمد يشعر بالإهانة : O

الترجمة

المقدمات $(K \vee L) \rightarrow (M \vee N), (L \vee M) \rightarrow O, \neg O \wedge K$

النتيجة N

الحجة صحيحة وللبرهنة عن صحة الحجة سنعطي برهانا صوريا.

البرهان

1.	$(K \vee L) \rightarrow (M \vee N)$	م
2.	$(L \vee M) \rightarrow O$	م
3.	$\neg O \wedge K$	م
4.	K	التبسيط ,3
5.	$K \vee L$	الجمع ,4
6.	$M \vee N$	الوضع 1,5

7. $\urcorner O$	التبسيط ,3
8. $\urcorner (L \vee M)$	نفي التالي 2,7
9. $\urcorner L \wedge \urcorner M$	دي مورغان ,8
10. $\urcorner M$	التبسيط ,9
11. N	قياس الفصل 6,10

(5)القضايا الذرية

هرب سالم من بيته : K

سالم برئ من التهمة الموجهة إليه : L

سالم يكون أمنا من القبض عليه : M

سالم بعيد عن مكان الجريمة : N

الترجمة

المقدمات $K \rightarrow (\urcorner L \vee \urcorner M), N \rightarrow L, L \rightarrow M, N$

النتيجة $\urcorner K$

البرهان

1. $K \rightarrow (\urcorner L \vee \urcorner M)$	م
2. $N \rightarrow L$	م
3. $L \rightarrow M$	م
4. N	م
5. L	الوضع 2,4
6. M	الوضع 3,5
7. $L \wedge M$	العطف 5,6
8. $\urcorner (\urcorner L \vee \urcorner M)$	دي مورغان ,7
9. $\urcorner K$	نفي التالي 1,8

(6)القضايا الذرية

أقام علي احتفالا بمناسبة نجاحه : K

علي يدعي سمير : L

علي يدعي فائزة : M

علي يجب أن يدعي أحمد : N

الترجمة

المقدمات $K \to (L \wedge M), (L \vee M) \to N$

النتيجة $K \to N$

وللبرهنة عن صحة الحجة سنعطي برهانا صوريا.

البرهان

1. $K \to (L \wedge M)$	م
2. $(L \vee M) \to N$	م
3. K	(مقدمة ب.ش) م
4. $L \wedge M$	الوضع 1,3
5. L	التبسيط 4,
6. $L \vee M$	الجمع 5,
7. N	الوضع 2,7
8. $K \to N$	ب.ش 3,7

(ط)

(1) سنعطي برهانا صوريا. سنكتب النتيجة على الشكل $\neg C \to D$.

البرهان

1.	$\neg B \vee (M \wedge C)$	م
2.	$\neg B \rightarrow D$	م
3.	$\neg C$	(مقدمة ب.ش) م
4.	$\neg C \vee \neg M$	الجمع 3,
5.	$\neg M \vee \neg C$	التبديل 4,
6.	$\neg (M \wedge C)$	دي مورغان 5,
7.	$\neg B$	قياس الفصل 1,6
8.	D	الوضع 2,7
9.	$\neg C \rightarrow D$	ب.ش 3,9
10.	$C \vee D$	الاستلزام 9,

(2) سنحاول البرهان أولا على خطأ صورة الحجة وذلك بإعطاء مثال مضاد.

نأخذ النتيجة كاذبة. إذن يجب أن تكونB كاذبة. حتى تكون المقدمة الأولى صادقة فيجب أن تكون A كاذبة وC كاذبة. حتى تكون المقدمة الثانية كاذبة نأخذ E كاذبة. إذن، ينجح المثال المضاد والحجة خاطئة.

السطر المطلوب

A	B	C	E
F	F	F	F

(3) سنحاول أولا البرهان على خطأ صورة الحجة وذلك بإعطاء مثال مضاد.

نأخذ النتيجة كاذبة. إذن يجب أن تكون K كاذبة. حتى تكون المقدمة الأخيرة صادقة، فيجب أن تكون M صادقة. حتى تكون المقدمة الثانية صادقة وبما

أن K كاذبة، فيجب أن تكون L كاذبة. حتى تكون المقدمة الأولى صادقة وبما أن K كاذبة، أي أن التالي $\neg K$ صادق، فإن المقدم يمكن أن يكون صادق أو كاذب. عندنا هنا المقدم كاذب. إذن ينجح المثال المضاد والحجة خاطئة.

السطر المطلوب

K	L	M	$(\neg M \wedge \neg M) \rightarrow \neg K$	$\neg K \rightarrow \neg L$	M
F	F	T	T	T	T

(4)

نبرهن أن صورة الحجة صحيحة، سنعطي البرهان التالي.

البرهان

1.	$A \rightarrow (B \leftrightarrow C)$	م
2.	$B \wedge \neg C$	م
3.	$\neg A \rightarrow D$	م
4.	$\neg(\neg B \vee \neg\neg C)$	2, دي مورغان
5.	$\neg(\neg B \vee C)$	4, النفس المضاعف
6.	$\neg(B \rightarrow C)$	5, الاستلزام
7.	$\neg(B \rightarrow C) \vee \neg(C \rightarrow B)$	6, الجمع
8.	$\neg((B \rightarrow C) \wedge \neg(C \rightarrow B))$	7, دي مورغان
9.	$\neg(B \leftrightarrow C)$	8, الاستلزام الثنائي
10.	$\neg A$	1,9 نفس التالي
11.	D	3,10 الوضع

(5)

البرهان

1.	$A \rightarrow C$	م
2.	$\neg C \vee D$	م
3.	$B \leftrightarrow D$	م
4.	$B \rightarrow \neg(\neg A \wedge D)$	م
5.	A	(مقدمة ب.ش) م
6.	C	الوضع 1,5
7.	D	قياس الفصل 2,6
8.	B	الوضع 3,7
9.	$A \rightarrow B$	ب.ش 5,8
10.	B	(مقدمة ب.ش) م
11.	$\neg(\neg A \wedge D)$	الوضع 4,10
12.	$A \vee \neg D$	دي مورغان 11,
13.	D	الوضع 3,10
14.	A	قياس الفصل 12,13
15.	$B \rightarrow A$	ب.ش 10,14
16.	$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$	الوضع 9,15
17.	$A \leftrightarrow B$	الاستلزام الثنائي 16,

(6)

البرهان

1.	$(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$	م
2.	$E \wedge B \rightarrow A$	م
3.	$\neg(A \wedge B) \vee (C \vee D)$	الاستلزام
4.	$(\neg A \vee \neg B) \vee (C \vee D)$	دي مورغان 3,
5.	$\neg A \vee (\neg B \vee (C \vee D))$	التجميع 4,
6.	$A \rightarrow (\neg B \vee (C \vee D))$	الاستلزام 5,
7.	$(E \wedge B) \rightarrow (\neg B \vee (C \vee D))$	القياس الشرطي 2,6

8. $(E \wedge B) \rightarrow (B \rightarrow (C \vee D))$	7, الاستلزام
9. $(E \wedge B) \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$	8, الاستيراد والتصدير
10. $(E \wedge (B \wedge B)) \rightarrow (C \vee D)$	9, التجميع
11. $(E \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$	10, تحصيل حاصل

(7)

البرهان

1. $R \rightarrow (Z \rightarrow X)$	م
2. $R \rightarrow (\neg Z \rightarrow S)$	م
3. $\neg R \rightarrow O$	م
4. $Z \vee \neg R$	م
5. $\neg(X \vee O)$	م (مقدمة ب.غ)
6. $\neg X \wedge \neg O$	5, دي مورغان
7. $\neg O$	6, التبسيط
8. $\neg\neg R$	3,7 نفي التالي
9. Z	4,8 قياس الفصل
10. R	8, النفس المضاعف
11. $Z \rightarrow X$	9,10 الوضع
12. X	9,11 الوضع
13. $\neg X$	6, التبسيط
14. $X \wedge \neg X$	13,14 العطف
15. $X \vee O$	5,14 ب.غ

(8)

البرهان

1. $(A \wedge B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg C)$	م
2. $E \rightarrow A$	م
3. $A \rightarrow (B \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg C))$	1,الاستيراد والتصدير
4. $E \rightarrow (B \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg C))$	2,3 القياس الشرطي
5. $E \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow D))$	4, عكس النقيض

6. $E \to ((B \wedge C) \to O)$	الاستيراد والتصدير ,5
7. $(E \wedge B) \to (\neg B \vee (C \vee D))$	التبديل ,6
8. $E \to (C \to (B \to D)$	الاستيراد والتصدير ,7
9. $(E \wedge C) \to (B \to D)$	الاستيراد والتصدير ,8
10. $(E \wedge C) \to (\neg B \vee D)$	الاستلزام ,9
11. $(E \wedge C) \to (D \vee \neg B)$	التبديل ,10

(ي)

(1)

البرهان

1. $K \to (L \vee M)$	م
2. $N \to K$	م
3. N	(مقدمة ب.ش) م
4. K	الوضع 2,3
5. $L \vee M$	الوضع 1,4
6. $\neg L \to M$	الاستلزام ,5
7. $N \to (\neg L \to M)$	ب.ش 3,6

(2)

البرهان

1. $(\neg K \vee \neg L) \to \neg M$	م
2. $N \to M$	م
3. N	(مقدمة ب.ش) م
4. M	الوضع 2,3
5. $\neg(\neg K \vee \neg L)$	نفي التالي 1,4
6. $K \wedge L$	دي مورغان ,5
7. $N \to (K \wedge L)$	ب.ش 3,6

(3)

البرهان

1.	$K \rightarrow (L \wedge M)$	م
2.	$((N \vee L) \wedge M) \rightarrow O$	م
3.	K	م (مقدمة ب.ش)
4.	$L \wedge M$	1,4الوضع
5.	$(N \wedge M) \vee (L \wedge M)$	التوزيع ,2
6.	$(L \wedge M) \vee (N \wedge M)$	الجمع,4
7.	$(N \wedge M) \vee (L \wedge M)$	التبديل ,6
8.	O	الوضع 5,7
9.	$K \rightarrow O$	ب.ش 3,9

(ك)

(ل)

البرهان

1.	$\rceil A \rightarrow (B \vee C)$	م
2.	$C \vee D$	م
3.	$\rceil B \vee \rceil D$	م
4.	$\rceil (A \vee C)$	م (مقدمة ب.غ)
5.	$\rceil A \wedge \rceil C$	دي مورغان ,4
6.	$\rceil A$	التبسيط ,5
7.	$B \vee C$	الوضع 1,6
8.	$\rceil C$	التبسيط ,5
9.	B	قياس الفصلي 7,8
10.	$\rceil\rceil B$	النفي المضاعف ,9
11.	$\rceil D$	قياس الفصل 3,10
12.	C	قياس الفصل 2,11
13.	$C \wedge \rceil C$	العطف 8,12
14.	$A \vee C$	ب.غ 4,13

(2)

البرهان

1. $A \rightarrow (D \wedge E)$	م
2. $C \vee E$	م
3. $C \rightarrow (A \wedge \neg D)$	م
4. C	م (مقدمة ب.غ)
5. $A \wedge \neg D$	الوضع 3,4
6. A	التبسيط ,5
7. D	الوضع 1,6
8. $\neg C$	التبسيط ,7
9. $\neg D$	التبسيط ,5
10. $D \wedge \neg D$	العطف 8,9
11. $\neg C$	ب.غ 4,10
12. E	قياس الفصل 2,11
13. $E \wedge \neg C$	العطف 11,12

(3)

البرهان

1. $\neg A \rightarrow (B \rightarrow C)$	م
2. $A \vee B$	م
3. $B \rightarrow \neg C$	م
4. $A \rightarrow C$	م
5. $\neg A$	م (مقدمة ب.غ)
6. B	قياس الفصل 2,5
7. $\neg C$	الوضع 3,6
8. $B \rightarrow C$	الوضع 1,5
9. C	الوضع 6,8

10. $C \wedge \neg C$	العطف 7,9
11. A	ب.غ 5,10
12. D	الوضع 4,11
13. $A \wedge D$	العطف 11,12

(ل)

(1)

أرقام المقدمات	أرقام الخطوط	البرهان	السبـــب
{1}	1.	$(L \rightarrow M) \wedge (B \rightarrow A)$	م
{2}	2.	$L \wedge B$	(مقدمة ب.ش) م
{1}	3.	$L \rightarrow M$	التبسيط,1
{1}	4.	$(B \rightarrow A) \wedge (L \rightarrow M)$	التبديل ,1
{1}	5.	$B \rightarrow A$	التبسيط,4
{2}	6.	L	التبسيط,2
{1,2}	7.	M	الوضع 3,6
{2}	8.	$B \wedge L$	التبديل ,2
{2}	9.	B	التبسيط,8
{1,2}	10.	A	الوضع 5,9
{1,2}	11.	$M \wedge A$	العطف 7,10
{1}	12.	$(L \wedge B) \rightarrow (M \wedge A)$	ب.ش 2,11

(2)

أرقام المقدمات	أرقام الخطوط	البرهان	السبـــب
{1}	1.	$K \rightarrow \neg(M \vee L)$	م
{2}	2.	$(\neg L \rightarrow \neg G) \wedge (\neg M \rightarrow G)$	م
{3}	3.	K	(مقدمة ب.غ) م
{1,3}	4.	$\neg(M \vee L)$	الوضع 1,3

{1,3}	5. $\neg M \wedge \neg L$	دي مورغان ,4
{2}	6. $\neg L \rightarrow \neg G$	التبسيط ,2
{2}	7. $\neg M \rightarrow G$	التبسيط ,2
{1,2,3}	8. $\neg G$	الوضع 5,6
{1,2,3}	9. G	الوضع 5,7
{1,2,3}	10. $G \wedge \neg G$	العطف 8,9
{1,2}	11. $\neg K$	ب.غ 3,10

(م)

(1) القضايا الذرية

تفسد الروح حين يموت الجسم : K

ينبغي أن نخشى الموت : L

هناك أمل : M

الترجمة

المقدمات $K \rightarrow L,\ \neg K \rightarrow M,\ K \vee \neg K$

K	L	M	$K \rightarrow L$	$\neg K$	$\neg K \rightarrow M$	$K \vee \neg K$
T	T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F	T	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T
F	F	F	T	T	F	T

نلاحظ من الجدول أن الصيغ الثلاث جميعها صادقة في السطر الأول وإذن فهي متسقة.

(3) القضايا الذرية

$M: a<c$ ، $L: b<c$ ، $K: a<b$

الترجمة

$(K \wedge L) \rightarrow M,\quad (K \wedge \neg L) \rightarrow \neg M,\quad (\neg K \wedge L) \rightarrow M,$

$M \leftrightarrow ((K \wedge L) \vee \neg K))$

الصيغ متسقة وسطر الجدول التالي يبين ذلك.

K	L	M	$(K \wedge L) \rightarrow M$	$(K \wedge \neg L) \rightarrow \neg M$	$(\neg K \wedge L) \rightarrow M$	$M \leftrightarrow ((K \wedge L) \vee \neg K))$
F	F	T	T	T	T	T

(ن)

(1) متسقة

K	L	M	$K \rightarrow (L \vee M)$	$K \wedge \neg L$
T	F	T	T	T

(2) غير متسقة

البرهان

1. $K \rightarrow L$	م
2. $M \rightarrow \neg L$	م
3. $\neg M \rightarrow N$	م
4. $K \wedge \neg N$	م
5. L	الوضع 1,4

6. $\neg M$	نفي التالي,2,5
7. N	الوضع 3,6
8. $N \wedge \neg N$	العطف 4,7

(4) غير متسقة

البرهان

1. $\neg(N \vee K)$	م
2. $\neg K \rightarrow (M \vee N)$	م
3. $M \rightarrow N$	م
4. $\neg N \wedge \neg K$	دي مورغان 1,
5. $M \vee N$	الوضع 2,4
6. M	قياس الفصل,4,5
7. N	الوضع 3,6
8. $N \wedge \neg N$	العطف 4,7

الفصل الثالث – 8.3

(أ)

البرهان

1. $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$	م
2. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	شكل البديهية A_2
3. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	الوضع 1,2
4. $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	شكل البديهية A_1
5. $\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$	القياس الشرطي 3.4

(ب)

البرهان

1.	$(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma))$	شكل البديهية A_2
2.	$((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\alpha\to\beta)\to(\alpha\to\gamma)))\to$ $(((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\beta))\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))$ $\to(\alpha\to\gamma)))$	شكل البديهية A_2
3.	$((\alpha\to(\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\beta))\to((\alpha\to(\beta\to\gamma))$ $\to(\alpha\to\gamma)$	الوضع 1,2

(ج)

(1)

البرهان

1.	$(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))$	شكل البديهية A_1
2.	$((\alpha\to\beta)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma)))\to(((L\to\gamma)$ $\to(\alpha\to\gamma))\to\delta)\to((\alpha\to\beta)\to\delta))$	$1,(\alpha\to\beta/\alpha)$, $((\beta\to\gamma))\to(\alpha\to\gamma))$ $/\beta),(\delta/\gamma))$استبدال
3.	$(((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))\to\delta)\to((\alpha\to\beta)\to\delta)$	الوضع 1,2

لقد أوضحنا أعلاه كيفية استخدام الأشكال البديهية، وذلك بتوضيح الاستبدالات وسنستمر على ذلك أدناه.

(2)

البرهان

1.	$(((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))\to\delta)\to((\alpha\to\beta)\to\delta)$	مبرهنة$_1$
2.	$((\beta\to\gamma)\to(\delta\to\gamma))\to((\alpha\to(\delta\to\gamma))$ $\to((\delta\to\beta)\to((\alpha\to(\delta\to\gamma))\to$ $(\alpha\to(\beta\to\gamma)\to((\delta\to\beta)\to((\alpha\to(\delta\to\gamma))$	$1, (\beta\to\gamma/\beta), ((\delta\to$ $\gamma)/\gamma), ((\delta\to\beta)\to(\alpha\to$ $(\delta\to\gamma)/\delta)$ استبدال
3.	$((\beta\to\gamma)\to(\delta\to\gamma))\to(\alpha\to(\delta\to\gamma))\to((\delta\to$	$1, (\delta/\alpha), (\alpha\to(\delta\to$

$\beta) \to (\alpha \to (\delta \to \gamma)))$ استبدال $(\delta/(\gamma$

4. $(\alpha\to(\beta\to\gamma))\to((\delta\to\beta)\to((\alpha\to(\delta\to\gamma)))$ الوضع 2,3

(3)

البرهان

1. $(((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))\to\delta)\to((\alpha\to\beta)\to\delta)$ مبرهنة$_1$
2. $(((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))\to(((\alpha\to\gamma)\to\delta)$
$\to((\beta\to\gamma)\to\delta))\to(\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\gamma)$
$\to\delta)\to((\beta\to\gamma)\to\delta)$ $1,((\alpha\to\gamma))\to\delta)\to$ $((\beta\to\gamma))\to\delta)/\delta)$ استبدال
3. $(\alpha\to\beta)\to((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))$ بديهية$_1$
4. $(((\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\gamma))\to(((\alpha\to\gamma)\to\delta)$
$\to((\beta\to\gamma)\to\delta))$ $3,(\beta\to\gamma)/\alpha),$ $(\alpha\to\gamma)/\beta),$ $(\delta/\gamma))$استبدال
5. $(\alpha\to\beta)\to(((\alpha\to\gamma)\to\delta)\to((\beta\to\gamma)\to\delta))$ الوضع 2,4

(4)

البرهان

1. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ بديهية$_1$
2. $(\alpha \to (\neg\alpha \to \beta) \to (((\neg\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ $1,(\neg\alpha \to \beta/\beta)$ استبدال
3. $(\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ بديهية$_3$
4. $((\neg\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ الوضع 2,3

(5)

البرهان

1. $((\neg\alpha\to\beta) \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$ مبرهنة$_4$
2. $((\neg\alpha \to \beta) \to (((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to ((\beta \to$
$\alpha) \to \alpha))) \to (\alpha \to (\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to$ $1,((\neg\alpha\to\alpha)\to$ $\alpha)\to((\beta\to\alpha)\to$

	$((\beta \to \alpha) \to \alpha)$	استبدال $(\alpha)/\gamma)$
3.	$(\alpha\to\beta)\to(((\alpha\to\gamma)\to\delta)\to((\beta\to\gamma)\to\delta))$	مبرهنة$_3$
4.	$(\urcorner\alpha \to \beta) \to (((\urcorner\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)$	$3,(\urcorner\alpha/\alpha), (\alpha/\gamma), (\alpha/\delta)$ استبدال
5.	$(\alpha\to(((\urcorner\alpha\to\alpha)\to\alpha))\to((\beta\to\alpha)\to\alpha))$	الوضع $2, 4$

(د)

(1)

البرهان

1.	$(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$	شكل البديهية A_1
2.	$(\urcorner\alpha \vee \urcorner\alpha) \to \urcorner\alpha$	استبدال $1, (\urcorner\alpha / \alpha)$
3.	$(\alpha \to \urcorner\alpha) \to \urcorner\alpha$	تعريف$_1$ $2,$

(2)

البرهان

1.	$\beta \to (\alpha \vee \beta)$	شكل البديهية A_2
2.	$\beta \to (\urcorner\alpha \vee \beta)$	استبدال $1, (\urcorner\alpha/\alpha)$
3.	$\beta \to (\alpha \to \beta)$	تعريف$_1$ $2,$

(3)

البرهان

1.	$(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$	شكل البديهية A_3
2.	$(\urcorner\alpha \vee \urcorner\beta) \to (\urcorner\beta \vee \urcorner\alpha)$	استبدال $1, (\urcorner\alpha/\alpha)\ (\urcorner\beta/\beta)$
3.	$(\alpha \to \urcorner\beta) \to (\beta \to \urcorner\alpha)$	تعريف$_1$ $2,$

(4)

البرهان

1.	$(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\beta \vee (\alpha \vee \gamma))$	شكل البديهية A_4
2.	$(\neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \gamma)) \rightarrow (\neg\beta \vee (\neg\alpha \vee \gamma))$	$1, (\neg\alpha/\alpha)$ استبدال $(\neg\beta/\beta)$
3.	$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	$2,$ تعريف$_1$

(5)

البرهان

1.	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma))$	شكل البديهية A_5
2.	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \gamma))$	$1, (\neg\alpha/\alpha)$ استبدال
3.	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$	$2,$ تعريف$_1$

(٥)

أولا: برهان استقلال شكل البديهية A_1 عن A_2 وA_3 وA_4

البرهان

لتكن $M = \{0,1,2\}$ ، ولتكن القيمة الممتازة هي : 0.

سنعرف الرمزين $\neg$ و V حسب الجدولين التاليين :

V	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	0

	$\neg$
0	1
1	0
2	2

سنكتب الآن الأشكال البديهية الأربعة للنسق R باستخدام الرمزين الأوليين $\neg$ و V وحسب تعريف الرمز $\to$ التالي :

$$\alpha \to \beta \equiv_{\text{تع}} \neg\alpha \vee \beta$$

(1) شكل البديهية A_1

$(\alpha \vee \alpha) \to \alpha$ تصبح $\neg(\alpha \vee \alpha) \vee \alpha$

(2) شكل البديهية A_2

$\beta \to (\alpha \vee \beta)$ تصبح $\neg\beta \vee (\alpha \vee \beta)$

(3) شكل البديهية A_3

$(\alpha \vee \beta) \to (\beta \vee \alpha)$ تصبح $\neg(\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \alpha)$

(4) شكل البديهية A_4

$(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \gamma))$ تصبح

$\neg(\neg\beta \vee \gamma) \vee ((\neg(\alpha \vee \beta) \vee (\alpha \vee \gamma))$

جداول صدق هذه الأشكال البديهية حسب جدولي $\neg$ و V السابقين تكون كما يلي أدناه مستخدمين الطريقة الثانية لبناء جداول الصدق المعطاة في الفصل الثاني. سنستخدم حالات من A_1، A_2 ، A_3، A_4 .

(1) شكل البديهية A_1

$\neg$	(K	V	K)	V	K
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	1
1	2	0	2	2	2

(2) شكل البديهية A_2

⌉	L	V	(K	V	L)
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1
2	2	0	0	0	2
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1
2	2	0	1	2	2
1	0	0	2	0	0
0	1	0	2	2	1
2	2	0	2	0	2

(3) شكل البديهية A_3

⌉	(K	V	L)	V	(L	V	K)
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	2	0	2	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1
2	1	2	2	0	2	2	1
1	2	0	0	0	0	0	2
2	2	2	1	0	1	2	2
1	2	0	2	0	2	0	2

(4) شكل البديهية A_4

⌉	(⌉	L	V	M)	V	⌉	(K	V	L)	V	(K	V	M)
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
2	1	0	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	2
1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	2	0	1	0	0	1	0	0	0	2

1	2	2	0	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0
2	2	2	2	1	0	1	0	0	2	0	0	0	1
1	2	2	0	2	0	1	0	0	2	0	0	0	2
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
2	1	0	2	2	0	1	1	0	0	2	1	2	2
1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	2	0	0	1	1	1	0	1	2	2
1	2	2	0	0	0	2	1	2	2	0	1	0	0
2	2	2	2	1	0	2	1	2	2	2	1	1	1
1	2	2	0	2	0	2	1	2	2	0	1	2	2
1	1	0	0	0	0	1	2	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	2	0	0	2	2	2	1
2	1	0	2	2	0	1	2	0	0	0	2	0	2
1	0	1	0	0	0	2	2	2	1	0	2	0	0
1	0	1	0	2	0	2	2	2	1	0	2	0	2
1	2	2	0	0	0	1	2	0	2	0	2	0	0
2	2	2	2	1	0	1	2	0	2	2	2	2	1
1	2	2	0	2	0	1	2	0	2	0	2	0	2

نلاحظ من جداول الأشكال البديهية الأربعة أن القيمة الممتازة تتوفر في الأشكال البديهية : الثانية والثالثة والرابعة ولا تتوفر في الأولى حيث توجد القيمة 2 بالإضافة إلى القيمة 0. وأخيرا نبرهن انتقال القيمة الممتازة إلى قواعد اشتقاق النسق. الرمز → جدوله كما هو موضح أدناه.

K	L	$K \to L$
0	0	0
0	1	1
0	2	2

1	0	0
1	1	0
1	2	0
2	0	0
2	1	2
2	2	0

نلاحظ من الجدول انتقال القيمة الممتازة لقاعدة الوضع، حيث أن السطر الوحيد (الأول) الذي تمتلك فيه K و $K \rightarrow L$ القيمة 0 فإن L تمتلك القيمة 0 أيضا. وهكذا فإذا توفر 0 في أية صيغ فإن 0 يتوفر أيضا في الصيغة المشتقة منها بواسطة قاعدة الوضع. أي أن الأشكال البديهية الثانية والثالثة والرابعة لا يمكن أن يشتق منها إلا صيغا يتوفر فيها القيمة الممتازة، أي لا تمتلك إلا القيمة 0 فقط. وهكذا فلا يمكن اشتقاق شكل البديهية الأولى منها لأنها تمتلك القيمة 2 بالإضافة إلى القيمة 0، أي أن شكل البديهية الأولى مستقلة.

ثانيا: برهان استقلال شكل البديهية A_2

لتكن $M=\{0,1,2\}$ ، ولتكن القيمة الممتازة هي : 0.

سنعرف الرمزين ¬ و V حسب الجدولين التاليين :

V	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	2

	¬
0	2
1	1
2	0

بعد إنشاء جداول الأشكال البديهية (والذي نعتبره تفصيلا نتركه للقارئ) يتبين أن الأشكال البديهية: الأولى والثالثة والرابعة تمتلك القيمة 0 ,1 فقط، أما الثانية فإنها تمتلك القيمة 2 أيضا وإذن فهي مستقلة.

ثالثا: برهان استقلال شكل البديهية A_3

سنبرهن استقلال البديهية الثالثة وذلك باستخدام مجموعة من أربعة عناصر هي 0, 1, 2, 3 ونعرف الرمزيين الأوليين ⌉، V حسب الجدولين التاليين:

	⌉
0	1
1	0
2	0
3	2

V	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	2	0
3	0	3	3	3

بعد إنشاء جداول الأشكال البديهية يتبين أن : الأولى والثانية والرابعة تمتلك القيمة 0 فقط، أما شكل البديهية الثالثة فتمتلك القيمة 3 بالإضافة إلى القيمة 0 وإذن فهي مستقلة.

رابعا: برهان استقلال شكل البديهية A_4

لتكن $M = \{0,1,2\}$ ، ولتكن القيمة الممتازة هي : 0.

سنعرف الرمزين ⌉ وV حسب الجدولين التاليين :

	⌉

V	0	1	2

0	0	0	0
1	0	0	0
2	0	0	2

0	2
1	1
2	0

بعد إنشاء جداول الأشكال البديهية يتبين أن : الأولى والثانية والثالثة تمتلك القيمة 0 فقط، أما الرابعة فتمتلك القيمة 2 بالإضافة إلى القيمة 0 وإذن فهي مستقلة.

لقد برهنا أن كل من الأشكال البديهية الأربعة لنسق رسل تكون مستقلة وبالتالي نكون قد برهنا استقلال مجموعة الأشكال البديهية لنسق رسل.

(و)

(1)

البرهان

1.	$\alpha \rightarrow \beta$	م
2.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \neg(\gamma \wedge \alpha))$	A_3
3.	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg(\neg\gamma \wedge \alpha))$	2, ,$(\neg\gamma/\gamma)$
4.	$\neg(\beta \wedge \neg\gamma) \rightarrow \neg(\neg\gamma \wedge \alpha)$	الوضع 1,3
5.	$(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg(\neg\gamma \wedge \alpha)$	4, تعريف$_1$
6.	$\beta \rightarrow \gamma$	م
7.	$\neg(\neg\gamma \wedge \alpha)$	الوضع 5,6

(2)

البرهان

1.	$\alpha \rightarrow (\alpha \wedge \alpha)$	بديهية$_1$

2. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$ بديهية$_2$

3. $(\alpha \wedge \alpha) \rightarrow \alpha$ استبدال (α/β) ,2

4. $\neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$ مبرهنة$_1$ 1,3

(3)

البرهان

1. $\neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$ مبرهنة$_2$

2. $\neg(\neg\neg\alpha \wedge \neg\alpha)$ استبدال $(\neg\alpha/\alpha)$,1

3. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ تعريف$_1$,3

المبرهنة$_3$ هي إحدى صيغ النفي المضاعف.

(4)

البرهان

1. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ مبرهنة$_3$

2. $\neg\neg\beta \rightarrow \beta$ استبدال (β/α) ,1

3. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \neg(\gamma \wedge \alpha))$ بديهية$_3$

4. $(\neg\neg\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg(\beta\wedge\gamma) \rightarrow \neg(\gamma\wedge\neg\neg\beta))$ استبدال $(\neg\neg\beta/\alpha)$,3

5. $\neg(\beta \wedge \gamma) \rightarrow \neg(\gamma \wedge \neg\neg\beta)$ الوضع 2,4

6. $\neg(\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\gamma \rightarrow \neg\beta)$ تعريف$_1$,5

(5)

البرهان

1. $\neg(\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\gamma \rightarrow \neg\beta)$ مبرهنة$_4$

2. $\neg(\neg\alpha \wedge \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ استبدال (α/γ), $(\neg\alpha/\beta)$,1

3. $\neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$ مبرهنة$_2$

4. $(\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ الوضع 2,3

المبرهنة$_5$ هي الصيغة الثانية للنفي المضاعف.

(6)

البرهان

1. $\neg(\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\gamma \rightarrow \neg\beta)$ مبرهنة$_4$

2. $\neg(\beta \wedge \neg\alpha) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$ استبدال $1,(\neg\alpha/\gamma)$

3. $(\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$ تعريف$_1$,2

(ز)

1) برهان استقلال شكل البديهية A_1

لتكن $M= \{ 0,1,2\}$ ، ولتكن القيمة الممتازة هي : 0. ولتأخذ الصيغ قيم صدقها حسب الجدولين التاليين :

K	L	$K \vee L$	$K \rightarrow L$
0	0	0	0
0	1	0	1
0	2	0	2
1	0	0	0
1	1	0	0
1	2	1	1
2	0	0	0
2	1	1	0
2	2	2	0

K	$\neg$ K
0	2
1	1
2	0

2) برهان استقلال شكل البديهية A_2

لتكن $M= \{ 0,1,2\}$ ، ولتكن القيمة الممتازة هي : 0. ولتأخذ الصيغ قيم صدقها حسب الجدولين التاليين :

K	L	$K \vee L$	$K \rightarrow L$
0	0	0	0
0	1	0	1

K	$\neg$ K
0	1
1	0
2	2

0	2	0	1
1	0	0	0
1	1	1	0
1	2	1	0
2	0	0	0
2	1	1	1
2	2	1	1

3) برهان استقلال شكل البديهية A_3

لتكن $M=\{0,1,2\}$ ، ولتكن القيمة الممتازة هي : 0. ولتأخذ الصيغ قيم صدقها حسب الجدولين التاليين :

K	L	$K \vee L$	$K \to L$
0	0	0	0
0	1	0	2
0	2	0	2
1	0	0	0
1	1	1	0
1	2	0	0
2	0	0	0
2	1	2	1
2	2	2	0

K	$\neg K$
0	2
1	0
2	1

4) برهان استقلال شكل البديهية A_4

لتكن $M=\{0,1,2,3\}$ ، ولتكن القيمة الممتازة هي : 0. ولتأخذ الصيغ قيم صدقها حسب الجدولين التاليين :

K	L	$K \vee L$	$K \to L$
0	0	0	0
0	1	0	1
0	2	0	2
0	3	0	3

K	$\neg K$
0	1
1	0
2	3
3	0

1	0	0	0
1	1	1	0
1	2	2	0
1	3	3	0
2	0	0	0
2	1	2	3
2	2	2	0
2	3	0	3
3	0	0	0
3	1	3	0
3	2	0	0
3	3	3	0

الفصل الرابع – 10.4

(أ) (1)

المحمولات

x طالب : K_x ، x يتقدم إلى الامتحان : L_x

جميع x ، إذا كان x طالب فإن x يتقدم إلى الامتحان

الترجمة

$(\forall_x)\ (K_x \rightarrow L_x)$

(2)المحمولات،

x حي : K_x ، نبات : L_x ، x مفيد : M_x

الترجمة $(\exists_x)\ (K_x \wedge L_x) \wedge (\exists_x)\ (L_x \wedge M_x)$

(3)المحمولات،

x معدن : Kx ، x ثمين : Lx

ليس جميع x ، إذا كان x معدن فإن x ثمين

الترجمة

$\neg(\forall x)\ (Kx \rightarrow Lx)$

(4)المحمولات،

x طالب : K_x ، x أكبر سنا من y : L_{xy}

الحدود أحمد : a ، سالم : b

إذا كان بعض x ، x طالب و x أكبر سنا من أحمد فإن أحمد أكبر سنا من سالم

الترجمة

$$(\exists_x)\ (K_x \wedge L_{xa}) \rightarrow L_{ab}$$

(5)المحمولات،

x طفل : K_x ، x يذهب إلى مدرسته : L_x ، x يرافق y : M_{xy} ، x والد y : N_{xy}

كل x ، إذا كان x طفل و x يذهب إلى المدرسة فإنه يوجد y ، x يرافق y و y أحد والدي x

الترجمة،

$$(\forall_x)\ ((K_x \wedge L_x) \rightarrow (\exists_y)\ (M_{xy} \wedge N_{yx}))$$

(6)المحمولات،

x طبيب : K_x ، x أكبر سنا من y : L_{xy} ، x مريض : M_x.

كل x ، إذا كان x طبيب و x أكبر سنا من y فإنه يوجد y ، y مريض و x أكبر سنا من y

الترجمة،

$$(\forall_x)\ ((K_x \wedge L_{xa}) \rightarrow (\exists_y)\ (M_y \wedge L_{xy}))$$

(7)المحمولات،

x بقرة : K_x ، ثديي : L_x

جميع x ، إذا كان x بقرة فإن x ثديي

الترجمة،

$$(\forall_x)\ (K_x \to L_x)$$

(8)المحمولات، x طالب : K_x ، x يحتاج إلى الراحة : L_x

ليس جميع x ، إذا كان x طالب فإن x يحتاج إلى الراحة

الترجمة،

$$\neg(\forall_x)\ (K_x \to L_x)$$

(9)المحمولات، x نبات : K_x ، x سام : L_x

بعض x ، x نبات وx ليس سام

الترجمة،

$$(\exists_x)\ (K_x \wedge \neg L_x)$$

(10)المحمولات،

x طالب : K_x ، x يفضل y : L_{xy}

الحدود، المنطق : a ، التاريخ : b

الترجمة،

$$(\exists_x)\ ((K_x \wedge L_{xa}) \wedge (\exists_y)\ (K_y \wedge L_{ya}))$$

(11)المحمولات،

x طالب : K_x ، x أكبر سن من y : L_{xy}

الحدود، كريم : a ، فائزة : b

كل x ، إذا كان x طالب و x أكبر سنا من كريم فإن x أكبر سنا من فائزة

الترجمة،

$$(\forall_x)\ ((K_x \wedge L_{xa}) \rightarrow L_{ab})$$

(12)المحمولات،

x أطول من y : K_{xy} ، x شخص : L_x

جميع x ، إذا كان x شخص فإن x ليس أطول من x

الترجمة،

$$(\forall_x)\ (K_x \rightarrow \urcorner K_{xx})$$

(13)المحولات،

x طالب : K_x ، x يحترم y : L_{xy} ، x أستاذ : M_x

كل x ، إذا كان x طالب وكل y ، إذا كان y أستاذ فإن x يحترم y ،

فإن x يحترم x.

الترجمة،

$$(\forall_x)\ ((K_x \wedge \forall_y)\ (M_y \rightarrow L_{xy})) \rightarrow L_{xx})$$

(14)المحمولات،

x صديق y : K_{xy} ، x فوضوي : L_x

الحدود، حامد : a

بعض x ، x صديق a و x فوضوي

الترجمة،

$$(\exists_x)\ (K_{xa} \wedge L_x)$$

(15)المحمولات،

x طالب : K_x ، x أكبر سنا من y : L_{xy}

الحدود، أحمد : a ، علي : b

إذا كان بعض x أكبر سنا من أحمد فإن جميع y، إذا كان y طالب فإن y أكبر سنا من علي.

الترجمة،

$$(\exists_x)\ L_{xa} \rightarrow (\forall_y)\ (K_y \rightarrow L_{by})$$

(16)المحمولات،

x يحب y : K_{xy}. الحدود، سالم : a

الترجمة،

$$(\forall_x)\ K_{ax}$$

(17)المحمولات،

x يحب y : K_x

الترجمة،

$$(\forall_x)\ K_{xx}$$

(18)المحمولات،

x يحب y : K_{xy}

الترجمة،

$$(\exists_x)\ K_{xx}$$

(19)المحمولات،

x يحب y : K_{xy}. الحدود، سالم : a

الترجمة،

$$K_{aa} \rightarrow (\exists_x)\ K_{ax}$$

(20)المحمولات،

x يحب y : K_{xy}

الترجمة، $\neg K_{aa} \rightarrow (\forall_x) \neg K_{ax}$

(21)الترجمة، $(\exists_x)\ (\exists_y)\ (x = 5 \times y)$

(22)الترجمة، $(\forall_x)\ (\exists_y)\ (x + y = 0)$

(ب)

(1)إذا كان باسم يحل مسألة في امتحان فإن أحمد يحل أيضا مسألة في امتحان.

(2)يوجد رجل يحل نفس المسألة في كل امتحان.

(ج)

(5) $(\forall_y)\ ((\exists_y)\ ((M_{xy} \wedge K_{xyx}) \rightarrow (M_{nx} \wedge S_{nbx})))$ (2)

(4) $(\exists_y)\ ((M_{xy} \wedge K_{xyx}) \rightarrow (M_{nx} \wedge S_{nbx}))$

(3) $(M_{xy} \wedge K_{xyx}) \rightarrow (M_{nx} \wedge S_{nbx})$

(2) $M_{xy} \wedge K_{xyx}$ $\qquad$ $M_{nx} \wedge S_{nbx}$

(1) M_{xy} $\quad$ K_{xyx} $\qquad$ M_{nx} $\quad$ S_{nbx}

(د)

$(\forall_x)\ R_{xx} \wedge (M_{\underline{x}} \vee L_{\underline{xy}})$ (1)

$(\exists_x)\ (M_{\underline{xy}} \wedge R_{ax} \wedge L_{\underline{ay}})$ (2)

$(\forall_y)\ ((\exists_x)\ M_{xy} \rightarrow L_{\underline{x}y})$ (3)

(هـ) (1) $O_1 = (M_1, K_1, L_1, N_1)$

(أ)صادقة

$$M_1 = \{ a_1 \}$$

	K_1	L_1	N_1
a	T	T	T

(ب)كاذبة

$$M_1 = \{ a_1 \}$$

	K_1	L_1	N_1
a_1	T	T	F

(2) $O_1 = (M_1, K_1, L_1, a_1, b_1)$

(أ)صادقة

$M_1 = \{ a_1, b_1\}$

	K_1
a_1	T

(ب)كاذبة

L_1	b_1
a_1	F

$M_1 = \{ a_1, b_1\}$

	K_1
a_1	F

(3) $O_1 = (M_1, K_1, L_1, N_1, O_1)$

$M_1 = \{ a\}$

(أ)صادقة

N_1	a_1
a_1	F

	K_1	L_1
a_1	T	F

(ب)كاذبة

$M_1 = \{ a_1\}$

	K_1
a_1	F

(4) $O_1 = (M_1, K_1, L_1, N_1, a_1)$

(أ)صادقة

$M_1 = \{ a\}$

	K_1
a_1	T

L_1	a_1
a_1	F

(ب)كاذبة

$M_1 = \{ a_1 \}$

	K_1
a_1	F

$O_1 = (M_1, R_1)$ (5)

(أ)صادقة

$R_{1\,xy} : x \leq y$, $M_1 = \mathbf{R}$ (حيث $\mathbf{R}$ هي مجموعة الأعداد الحقيقية).

(ب)كاذبة

R_1	a_1
a_1	F

$M_1 = \{ a \}$

(و)

$O_1 = (M_1, K_1, L_1, a_1)$ (1)

$M_1 = \{ a_1 \}$

	K_1
a_1	F

$O_1 = (M_1, K_1, L_1, a_1)$ (2)

$M_1 = \{ a_1 \}$

	K_1	L_1
a_1	F	T

$O_1 = (M_1, L_1, a_1, b_1)$ (3)

$M_1 = \{ a_1, b_1\}$

L_1	a_1	b_1
a_1	F	T
b_1	F	T

$O_1 = (M_1, K_1, L_1, f_1)$ (4)

$M_1 = \{ a_1, b_1\}$

	K_1	L_1
a_1	T	T
b_1	T	F

الفصل الخامس – 5.5

(أ)

(1) المحمولات، K_x : x منطقي ، L_x : x فيلسوف. الحدود، a : أحمد

الترجمة،

المقدمات $(\forall_x)(K_x \rightarrow L_x),\ \urcorner L_a$

النتيجة $\urcorner K_a$

البرهان

1.	$(\forall_x)(K_x \rightarrow L_x)$	م
2.	$\urcorner L_a$	م
3.	$K_x \rightarrow L_x$	1, (a/x) تخ ك
4.	$\urcorner K_a$	2,3 نفي التالي

(3)المحمولات،

x حيوان ذو ريش : K_x ، x ينمو في الماء : L_x ، x يعيش في البحر: M_x

الترجمة،

المقدمات $(\forall_x)\ (K_x \to \urcorner L_x),\ \ (\exists_x)\ (L_x \wedge M_x)$

النتيجة $(\exists_x)\ (M_x \wedge \urcorner K_x)$

البرهان

1.	$(\forall_x)\ (K_x \to \urcorner L_x)$	م
2.	$(\exists_x)\ (L_x \wedge M_x)$	م
3.	$K_a \to \urcorner L_a$	تخ ك (a/x) ,1
4.	$L_a \wedge M_a$	تم.و (a/x) ,3
5.	$\urcorner K_a$	نفي التالي 3,4
6.	$M_a \wedge \urcorner K_a$	العطف 4,5
7.	$(\exists_x)\ (M_x \wedge \urcorner K_x)$	تم.و ,6

(4)المحمولات، x فيزيائي : K_x ، x كيميائي : L_x ، x فيلسوف : M_x ،

x يفضيل y : M_{xy} ، الحدود أحمد : a

الترجمة،

المقدمات

$$(\forall_x)\ ((K_x \to (\forall_y)\ (L_y \to N_{xy})),\ (\forall_x)\ ((K_x \to (\forall_x)\ (M_y \to \urcorner N_{xy})),\ \ K_a$$

النتيجة، $(\forall_x)(M_x \to \urcorner K_x)$

البرهان

1.	$(\forall_x)(K_x \to (\forall_x)(L_y \to N_{xy})$	م
2.	$(\forall_x)(K_x \to (\forall_x)(M_y \to \urcorner N_{xy})$	م
3.	K_a	م
4.	$K_a \to (\forall_x)(L_y \to N_{ay})$	1, (a/x) تخ ك
5.	$K_a \to (\forall_x)(M_y \to \urcorner N_{ay})$	2, (a/x) تخ ك
6.	$(\forall_x)(L_y \to N_{ay})$	3,4 الوضع
7.	$L_y \to N_{ay}$	6, (y/y) تخ ك
8.	$(\forall_x)(M_y \to \urcorner N_{ay})$	3,5 الوضع
9.	$M_y \to \urcorner N_{ay}$	8, (y/y) تخ ك
10.	$N_{ay} \to \urcorner M_y$	9, عكس النقيض
11.	$L_y \to \urcorner M_y$	7,10 القياس الشرطي
12.	$M_y \to \urcorner L_y$	11, عكس النقيض
13.	$(\forall_x)(M_x \to \urcorner L_x)$	12, ت.ك

(5)المحمولات،

x رواية : K_x ، x حديثة : L_x ، x ممتع : M_x ، x سخيف : N_x ،

x رائع : O_x

الترجمة

المقدمات $(\forall_x)(M_x \to \urcorner N_x), (\exists_x)(K_x \wedge L_x \wedge O_x), (\forall_x)(O_x \to M_x)$

النتيجة $(\exists_x)(K_x \wedge L_x \wedge \urcorner N_x)$

البرهان

1.	$(\exists_x)(K_x \wedge L_x \wedge O_x)$	م
2.	$(\forall_x)(O_x \rightarrow M_x)$	م
3.	$(\forall_x)(M_x \rightarrow \neg N_x)$	م
4.	$K_a \wedge L_a \wedge O_a$	1, (a/x) تخ ك
5.	$O_a \rightarrow M_a$	2, (a/x) تخ ك
6.	$M_a \rightarrow \neg N_a$	3, (a/x) تخ ك
7.	O_a	4, التبسيط
8.	M_a	5,7 الوضع
9.	$\neg N_a$	6,8 الوضع
10.	$K_a \wedge L_a \wedge \neg N_a$	4,9 العطف
11.	$(\exists_x)(K_x \wedge L_x \wedge \neg N_x)$	10, تك.و

(6)

البرهان

1.	$(\forall_x) R_{xx}$	م
2.	$(\forall_x)(\forall_y)(R_{xy} \rightarrow R_{yx})$	م
3.	$(\forall_x)(\forall_y)(\forall_z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$	م
4.	$R_{xy} \wedge R_{xz}$	(مقدمة ب.ش) م
5.	$R_{xy} \rightarrow R_{yx}$	2, (y/y) (x/x) تخ ك
6.	R_{yx}	4,5 الوضع
7.	$(\forall_z)((R_{uv} \wedge R_{vz}) \rightarrow R_{uz})$	3, (v/y) (u/x) تخ ك
8.	$(\forall_u)(\forall_v)(\forall_z)((R_{uv} \wedge R_{vz}) \rightarrow R_{uz})$	7, تك.ك
9.	$(R_{yx} \wedge R_{xz}) \rightarrow (R_{yz})$	8, (y/u) (x/v) (z/z) تخ ك
10.	R_{yz}	4, 6, 9 الوضع
11.	$(R_{xy} \wedge R_{xz}) \rightarrow (R_{yz})$	4,10 ب.ش
12.	$(\forall_x)(\forall_y)(\forall_z)((R_{xv} \wedge R_{xz}) \rightarrow R_{yz})$	11 تك.ك (3)

(ب) (1)

المحمولات، x طبيب : K_x ، x كفء: L_x. الحدود أحمد : t

الترجمة،

المقدمات L_t, $(\forall_x)(K_x \rightarrow L_x)$.

النتيجة K_t

سنحاول البرهان على خطأ الحجة باستخدام المثال المضاد.

ليكن t هو قيمة المتغير الذي نحاول برهان خطأ الحجة من أجله، وهكذا تكون : المقدمات $K_t \rightarrow L_t, L_t$. النتيجة K_t

الآن يمكننا أن نستعيض عن القضية K_t بالرمز M وعن القضية L_t بالرمز N وهكذا نستطيع إعادة كتابة صورة الحجة كما يلي :

المقدمات $M \rightarrow N, N$. النتيجة M

لإعطاء مثال مضاد، نأخذ النتيجة كاذبة، إذن يجب أن تكون M كاذبة. حتى تكون المقدمة الأولى صادقة. وبما أن M كاذبة، فيمكن أن تكون N صادقة أو كاذبة. حتى تكون المقدمة الثانية صادقة يجب أن تكون N صادقة. إذن، ينجح المثال المضاد والحجة خاطئة.

السطر المطلوب

K_t	L_t	$K_t \rightarrow L_t$
F	F	T

(2)المحمولات، x هرة : K_x ، x كبيرة : L_x ، x ثدي : M_x

الترجمة،

المقدمات $(\forall_x)(K_x \rightarrow L_x), (\exists_x)(M_x \wedge L_x)$

النتيجة $(\forall_x)(K_x \rightarrow \neg M_x)$

ليكن $x : t_1$. إذن تكون صور الحجة كما يلي :

المقدمات $K_{t1} \rightarrow L_{t1}, M_{t1} \wedge L_{t1}$

النتيجة $K_{t1} \rightarrow \neg M_{t1}$

المثال المضاد : نأخذ النتيجة كاذبة، إذن يجب أن تكون K_{t1} صادقة و $\neg M_{t1}$ كاذبة أو M_{t1} صادقة. حتى تكون المقدمة الثانية صادقة فيجب أن تكون M_{t1} صادقة و L_{t1} صادقة. حتى تكون المقدمة الأولى صادقة وبما أن K_{t1} صادقة فيجب أن تكون L_{t1} صادقة. إذن ينجح المثال المضاد والحجة خاطئة.

السطر المطلوب

K_{t1}	L_{t1}	M_{t1}	$K_{t1} \rightarrow L_{t1}$	$M_{t1} \wedge L_{t1}$	$K_{t1} \rightarrow \neg M_{t1}$
T	T	T	T	T	F

(ج)

(1)

البرهان

1.	$(\forall_x)\ (R_x \rightarrow S_x)$	م
2.	$(\forall_x)\ ((R_x \wedge S_x) \rightarrow T_x)$	م
3.	R_a	(مقدمة ب.ش) م
4.	$K_a \rightarrow S_a$	1, (a/x) تخ ك
5.	S_a	3,4 الوضع
6.	$(R_a \wedge S_a) \rightarrow T_a)$	2, (a/x) تخ ك
7.	$R_a \wedge S_a$	3,5 العطف
8.	T_a	6,7 الوضع
9.	$R_a \rightarrow T_a$	3,8 العطف
10.	$(\forall_x(R_x \rightarrow T_x)$	9, تك.ك

(2) استخدام طريقة البرهان الشرطي والحل مماثل إلى (1).

(3)

البرهان

1.	$(\forall_x)\ (L_x \rightarrow \neg M_x)$	م
2.	$(\exists_x)\ (N_x \wedge M_x)$	م
3.	$L_a \rightarrow \neg M_a$	1, (a/x) تخ ك
4.	$N_a \wedge M_a$	2, (a/x) تخ ك
5.	$\neg L_a$	3,4 نفي التالي
6.	$N_a \wedge \neg L_a$	4,5 العطف
7.	$(\exists_x)(N_x \wedge \neg L_x)$	6, تك.و

(4)

البرهان

1.	$(\forall_x)((K_x \wedge \urcorner M_x) \rightarrow \urcorner O_x)$	م
2.	$(\forall_x)((K_x \wedge L_x) \rightarrow N_x)$	م
3.	$(\forall_x)(K_x \rightarrow (L_x \vee \urcorner M_x))$	م
4.	$K_a \wedge O_a$	م (مقدمة ب.ش)
5.	$(K_a \wedge \urcorner M_a) \rightarrow \urcorner O_a$	1, (a/x) تخ ك
6.	$\urcorner(K_a \wedge \urcorner M_a)$	4,5 نفي التالي
7.	$\urcorner K_a \vee M_a$	6, دي مورغان
8.	$(K_a \wedge L_a) \rightarrow N_a$	2, (a/x) تخ ك
9.	$K_a \rightarrow (L_a \vee \urcorner M_a)$	3, (a/x) تخ ك
10.	M_a	4,7 قياس الفصل
11.	$L_a \vee \urcorner M_a$	4,9 الوضع
12.	L_a	10,11 قياس الفصل
13.	$K_a \wedge L_a$	4,12 العطف
14.	N_a	8,13 الوضع
15.	$(K_a \wedge O_a) \rightarrow N_a$	4,14 ب.ش
16.	$(\forall_x)((K_x \wedge O_x) \rightarrow N_x)$	15, تك.ك

(5)

البرهان

1.	$(\forall x)(\forall y)(R_{xy} \rightarrow R_{yx})$	م
2.	$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((R_{xy} \wedge R_{yz}) \rightarrow R_{xz})$	م
3.	R_{xy}	م (مقدمة ب.ش)
4.	$R_{xy} \rightarrow R_{yx}$	2, (y/y) (x/x) تخ ك

5.	R_{yx}	3,4 الوضع
6.	$(R_{xy} \wedge R_{yx}) \rightarrow R_{xx}$	1, (x/x)(y/y) (x/z) تخ ك
7.	$R_{xy} \wedge R_{yx}$	3,5 العطف
8.	R_{xx}	6,7 الوضع
9.	$R_{xy} \rightarrow R_{xx}$	3,8 ب.ش
10.	$(\forall x)\ (\forall y)\ (R_{xy} \rightarrow R_{xx})$	9, تك.ك (2)

(6)

البرهان

1.	$(\forall x)\ (K_x \rightarrow (\forall y)\ ((L_y \wedge M_y) \rightarrow R_{xy}))$	م
2.	$(\forall x)\ (M_x \rightarrow L_x)$	م
3.	$K_n \wedge L_m$	م
4.	$(\forall x)\ (K_x \rightarrow \neg R_{xm})$	م
5.	$K_n \rightarrow (\forall y)\ ((L_y \wedge M_y) \rightarrow R_{ny})$	1, (n/x) تخ ك
6.	$(\forall y)\ ((L_y \wedge M_y) \rightarrow R_{ny})$	3,5 الوضع
7.	$(L_m \wedge M_m) \rightarrow R_{nm}$	6, (m/y) تخ ك
8.	$M_m \rightarrow L_m$	2, (m/x) تخ ك
9.	$K_n \rightarrow \neg R_{nm}$	4, (n/x) تخ ك
10.	$\neg R_{nm}$	3,9 الوضع
11.	$\neg (L_m \wedge M_m)$	7,10 نفي التالي
12.	$\neg L_m \vee \neg M_m$	11, دي مورغان
13.	$\neg M_m$	3,12 قياس الفصل

(7) تطبيق تخ ك (a/x) على المقدمتين ثم تستخدم قاعدة الوضع مرتين.

(د)

(1)

ليكن x : t_1 . إذن تكون صورة الحجة كما يلي :

المقدمات،

$$\alpha_1 : K_{t1} \rightarrow L_{t1} \text{ , } \alpha_2 : M_{t1} \rightarrow N_{t1} \text{ , } \alpha_3 : \neg L_{t1} \rightarrow \neg N_{t1}$$

النتيجة

$$\beta : M_{t1} \rightarrow K_{t1}$$

صورة الحجة خاطئة.

السطر المطلوب

K_{t1}	L_{t1}	M_{t1}	N_{t1}	α_1	α_2	α_3	β
F	T	T	T	T	T	T	F

(2)

ليكن x : t_1 . إذن تكون صورة الحجة خاطئة والسطر المطلوب.

M_{t1}	K_{t1}	L_{t1}	N_{t1}	α_1	α_2	α_3	β
T	T	F	F	T	T	T	F

α_1 ، α_2 ، α_3 ، β هي المقدمات الأولى، الثانية، الثالثة والنتيجة على الترتيب.

(3)

ليكن x : t_1 . إذن تكون صورة الحجة خاطئة والسطر المطلوب.

M_{t1}	K_{t1}	L_{t1}	α_1	α_2	β
T	T	F	T	T	F

(4)

ليكن $x : t_1$. صورة الحجة خاطئة والسطر المطلوب.

M_{t1}	K_{t1}	L_{t1}	α_1	α_2	β
F	T	F	T	T	F

(5)

ليكن $x : t_1$. صورة الحجة خاطئة والسطر المطلوب.

K_{t1}	M_{t1}	L_{t1}	α_1	α_2	β
F	T	T	T	T	F

(6) ليكن $x : t_1$. صورة الحجة خاطئة والسطر المطلوب.

K_{t1}	L_{t1}	M_{t1}	α_1	α_2	β
T	T	F	T	T	F

(هـ) (1)

البرهان

1.	$(\forall x)(K_x \rightarrow L_x)$	م
2.	K_a	م
3.	$a = n$	م
4.	$K_n \rightarrow L_n$	تخ ك (n/x) ,1
5.	K_n	الهوية 2,3
6.	L_n	الوضع 4,5

(2)

البرهان

1.	K_a	م
2.	L_b	م
3.	$a = b$	م
4.	$(\forall x)\ (L_x \rightarrow M_x)$	م
5.	L_n	الهوية 2,3
6.	$L_n \rightarrow M_n$	تخ ك (a/x) ,4
7.	M_n	الوضع 5,6
8.	$K_n \wedge M_n$	العطف 1,7
9.	$(\exists x)\ (K_x \wedge M_x)$	تك.و ,8

(3)

البرهان

1.	$(\forall x)\ (L_x \rightarrow \neg M_x)$	م
2.	M_m	م
3.	$m=n$	م
4.	M_n	الهوية 2,3
5.	$L_n \rightarrow \neg M_n$	تخ ك (n/x) ,1
6.	$\neg L_n$	نفي التالي 4,5

(4)

البرهان

1.	$(\forall x)\ ((K_x \wedge L_x) \rightarrow M_x)$	م
2.	K_m	م
3.	L_n	م

4.	$n = m$	م
5.	$\neg M_o$	م
6.	$(K_n \wedge L_n) \rightarrow M_n$	1, (n/x) تخ ك
7.	K_n	2,4 الهوية
8.	$K_n \wedge L_n$	3,7 العطف
9.	M_n	6,8 الوضع
10.	$o \neq n$	5,9 نفي الهوية

(و)

(1)

البرهان

1.	$(\forall x)(K_x \rightarrow L_x)$	م
2.	$(\forall x)(K_x \rightarrow \neg L_x)$	م
3.	K_a	م
4.	$K_a \rightarrow L_a$	1, (a/x) تخ ك
5.	$K_a \rightarrow \neg L_a$	2, (a/x) تخ ك
6.	L_a	3,4 الوضع
7.	$\neg L_a$	3,5 الوضع
8.	$L_a \wedge \neg L_a$	6,7 العطف

(2)

البرهان

1.	$(\forall x)\ (K_x \to (L_x \wedge M_x))$	م
2.	$(\forall x)\ (N_x \to \neg M_x)$	م
3.	$\neg(\forall x)\ (K_x \to \neg N_x)$	م
4.	$K_x \to (L_x \wedge M_x)$	1, (x/x) تخ ك
5.	$N_x \to \neg M_x$	2, (x/x) تخ ك
6.	$M_x \to \neg N_x$	5, عكس النقيض
7.	$(L_x \wedge M_x) \to M_x$	صيغة صحيحة
8.	$K_x \to \neg N_x$	4,6,7 القياس الشرطي
9.	$(\forall x)\ (K_x \to \neg N_x)$	8, تك.ك
10.	$(\forall x)\ (K_x \to \neg N_x) \wedge \neg(\forall x)\ (K_x \to \neg N_x)$	3,9 العطف

(3)

البرهان

1.	$(\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ ((R_{xy} \wedge R_{yz}) \to R_{xz})$	م
2.	$(\forall x)\ (\forall y)\ ((R_x y \to R_y z)$	م
3.	R_{ab}	م
4.	$\neg R_{bb}$	م
5.	$R_{ab} \to R_{ba}$	2, (b/y)(a/x) تخ ك
6.	R_{ba}	3,5 الوضع
7.	$(R_{ba} \wedge R_{ab}) \to R_{bb}$	1, (b/x) (a/y) (b/z) تخ ك
8.	R_{bb}	3,6,7 الوضع
9.	$R_{bb} \wedge \neg R_{bb}$	4,8 العطف

(4)

البرهان

1.	Ka	م
2.	Lb	م
3.	$(\forall x)(K_x \rightarrow M_x)$	م
4.	$(\forall x)(L_x \rightarrow \rceil M_x)$	م
5.	$a = b$	م
6.	$K_a \rightarrow M_a$	3, (a/x) تخ ك
7.	M_a	1,6 الوضع
8.	$L_b \rightarrow \rceil M_b$	4, (b/x) تخ ك
9.	$\rceil M_b$	2,8 الوضع
10.	$\rceil M_a$	5,9 الهوية
11.	$M_a \wedge \rceil M_a$	7,10 العطف

الفصل السادس – 3.6

(1)

البرهان

1.	α	م
2.	$(\forall x)\alpha$	1, تعميم
3.	$\alpha \rightarrow (\forall x)\alpha$	1,2 نظرية الاستنتاج
4.	$(\forall x)\alpha \rightarrow \alpha$	A_5
5.	$(\forall x)\alpha \leftrightarrow \alpha$	3,4 حق

(2)	البرهان
المبرهنة السابقة	1. $(\forall x) \neg\alpha \leftrightarrow \neg\alpha$
حق ,1	2. $\neg(\forall x) \neg\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$
تعريف 2,4	3. $(\exists x)\, \alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$
حق ,3	4. $(\exists x)\, \alpha \leftrightarrow \alpha$

(3)	البرهان	
م	$(\forall x)\, \alpha (x)$	1.
تخ. ك ,1	$\alpha (x)$	2.
تك. و ,2	$(\exists x)\, \alpha (x)$	3.
نظرية الاستنتاج 1,3	$(\forall x)\, \alpha (x) \rightarrow (\exists x)\, \alpha (x)$	4.

الفصل السابع – 6.7

(أ)

(1)

ننشئ شجرة نفي الصيغة وشجرة الصيغة المعطاة

شجرة الصيغة $\neg\neg(L \rightarrow (K \wedge \neg K))$

$$
\begin{array}{lccc}
1) & \checkmark & \neg\neg(L \to (K \wedge \neg K)) & \\
2) & \checkmark & L \to (K \wedge \neg K) & \\
3) & & \neg L \qquad\qquad & K \wedge \neg K \\
4) & & & K \\
5) & & & \neg K \\
6) & & & x
\end{array}
$$

شجر ة نفي الصيغة المعطاة مفتوحة. الفرع الأيسر مفتوح وهذا يبين أن $\neg\neg(L \to (K \wedge \neg K))$ تكون صادقة إذا كان L كاذبا وإذن فالصيغة $\neg(L \to (K \wedge \neg K))$ ليست تكرارية. لقد طبقنا القاعدة $\neg\neg$ عن الخط الأول فحصلنا على الخطأ الثاني. وطبقنا القاعدة $\to$ على الثاني فحصلنا على الثالث. وطبقنا القاعدة $\wedge$ على الخط الثالث فحصلنا على الرابع والخامس.

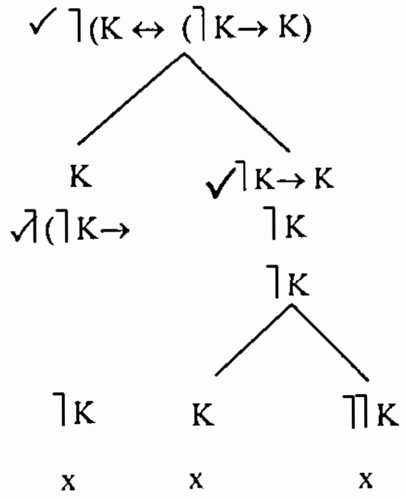
شجرة الصيغة $\neg(L \to (K \wedge \neg K))$

$$
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\neg(L \to (K \wedge \neg K))} \\
\multicolumn{2}{c}{L} \\
\multicolumn{2}{c}{\neg(K \wedge \neg K)} \\
\neg K & \neg\neg K
\end{array}
$$

شجرة الصيغة مفتوحة أيضا،

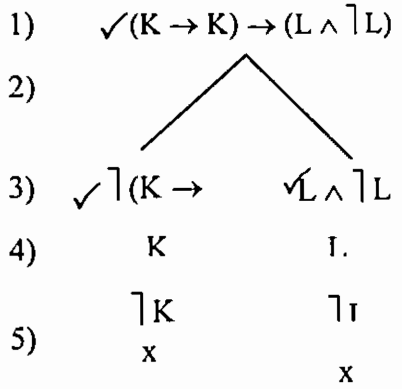
وإذن فالصيغة عارضة.

(2)



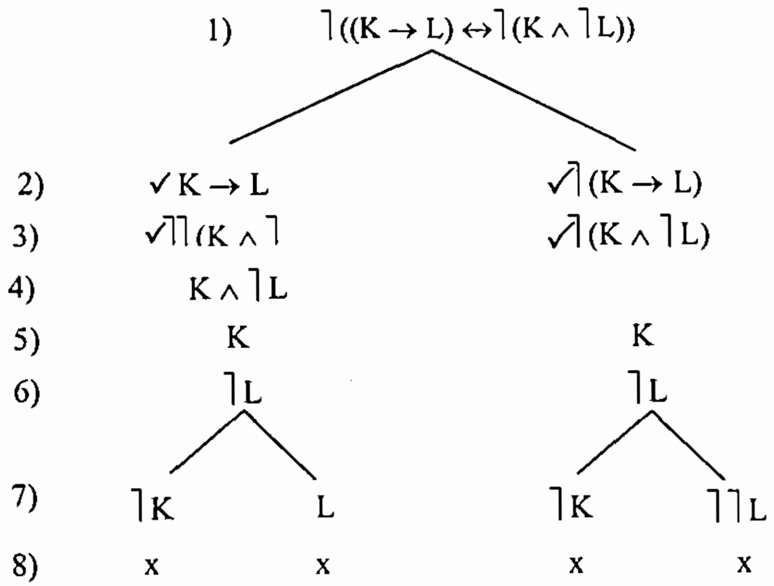
الصيغة تكرارية.

(3)



الصيغة متناقضة.

(4)



لقد طبقنا القاعدة $\leftrightarrow\neg$ على الخط الأول فحصلنا على الخطين الثاني والثالث. وطبقنا القاعدة $\to\neg$ على الخط الثاني (الفرع الأيمن) فحصلنا على الخطين الخامس والسادس (الفرع الأيمن). وطبقنا القاعدة $\neg\neg$ على الخط الثالث (الفرع الأيسر) فحصلنا على الخط الرابع. طبقنا القاعدة $\wedge\neg$ على الخط الثالث (الفرع الأيمن) فحصلنا على الخط السابع (الفرع الأيمن) وأخيرا طبقنا القاعدة $\to$ على الخط الثاني (الفرع الأيسر) فحصلنا على الخط السابع (الفرع الأيسر). الشجرة مغلقة، وإذن الصيغة المعطاة تكرارية.

(5) $\neg(((K \to (L \to M)) \to ((K \to L) \to (K \to M)))$

1)	✓ $K \to (L \to M)$			
2)	✓ $\neg((K \to L) \to (K \to M))$			
3)	✓ $K \to L$			
4)	✓ $\neg(K \to M)$			
5)	K			
6)	$\neg M$			
7)	$\neg K$	L		الصيغة تكرارية.
8)	x			
9)		$\neg K$	$L \to M$	
10)		x		
11)			$\neg L$ / M	
12)			x / x	

(ب)

(1)

1) ✓ $\neg K \vee L$

2) ✓ $\neg((\neg L \wedge M) \rightarrow \neg K)$

3) ✓ $\neg L \wedge M$

4) $\neg\neg K$

5) K

$\neg L$

6) M

7) $\neg K$ $\qquad$ L

8) x $\qquad$ x

الصيغتان غير متسقتين إذ أن الشجرة المنتهية مغلقة، أي أنه لا توجد إمكانية لجعل الصيغتين صادقتين في نفس الوقت.

(2)

1) $(\neg L \wedge M) \rightarrow \neg K$

2) $\neg(\neg K \vee L)$

3) $\neg\neg K$

4) $\neg L$

5) K

6) $\neg(\neg L \wedge M)$ $\qquad$ $\neg K$

x

7) $\neg\neg L$ $\qquad$ $\neg M$

8) x

والصيغتان متسقتان وذلك أن الشجرة المنتهية مفتوحة لوجود فرع مفتوح وهذا يعني وجود إمكانية جعل الصيغتين صادقتين في نفس الوقت.

(3)

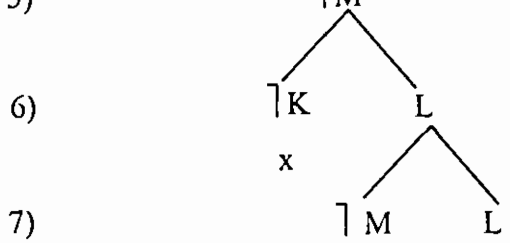
1) $K \to L$

2) $M \to L$

3) $\neg(K \to M)$

4) K

5) $\neg M$



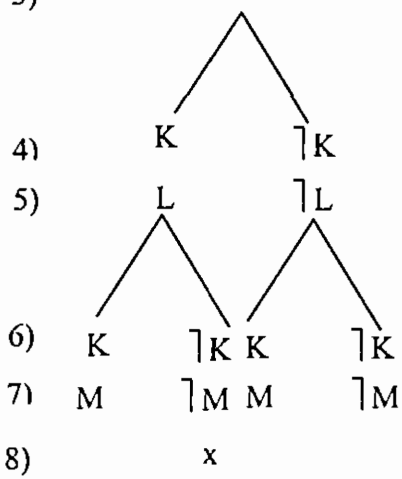
الشجرة مفتوحة، وإذن الصيغ متسقة.

(5)

1) ✓ $K \leftrightarrow L$

2) ✓ $\neg\neg(K \leftrightarrow M)$

3) ✓ $K \leftrightarrow M$



لقد أغلق فرع واحد من الشجرة لوجود $\neg K$ وK عليه وبقيت الفروع الأخرى مفتوحة. هكذا فالشجرة مفتوحة وتوجد على الأقل إمكانية واحدة لجعل الصيغتين صادقتين في نفس الوقت وإذن فهما متسقتين.

(ج)

(1)

1)	$K \to (L \wedge (M \vee N))$	
2)	$\neg(K \to L)$	
3)	K	
4)	$\neg L$	
5)	$\neg K$	$L \wedge (M \vee N)$
6)	x	L
7)		$M \vee N$
8)		x

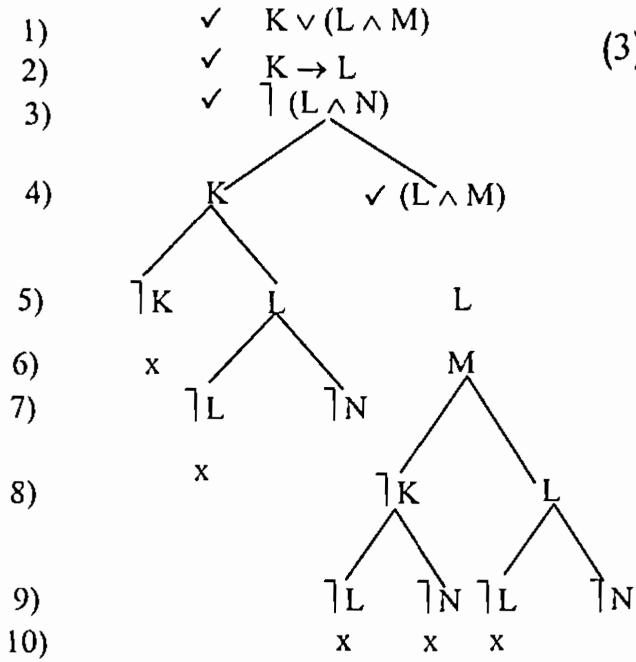
الفرع الأيسر مغلق لوجود K و$\neg K$ عليه والفرع الأيمن مغلق لوجود L و$\neg L$ عليه وهكذا فالشجرة مغلقة وصورة الحجة صحيحة.

(2)

1)	✓ $K \to (L \vee M)$		
2)	✓ $\neg L \wedge K$		
3)	$\neg M$		
4)	$\neg L$		
5)	K		
6)	$\neg K$	$L \vee M$	
	x		
7)		L	M
8)		x	x

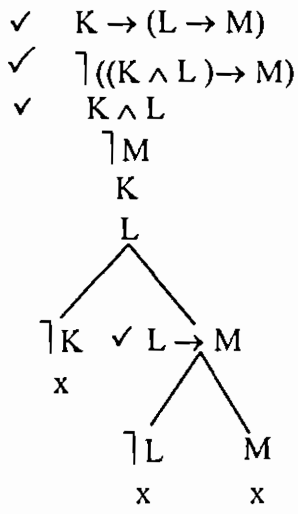
صورة الحجة صحيحة.

(3)



الشجرة مفتوحة وبالتالي فصورة الحجة خاطئة.

(4)



صورة الحجة صحيحة.

(د)

(1)

1) ✓ $\neg K \to L$

2) ✓ $\neg\neg(K \to L)$

3) ✓ $K \to L$

4) $\neg\neg K$ $\qquad\qquad$ L

5) K $\qquad\qquad$ $\neg K$ $\quad$ L

6) $\neg K$ $\quad$ L

7) x

الصيغتان ليستا متكافئتين وذلك لوجود فرع مفتوح واحد على أقل، وهكذا فإنه توجد على الأقل إمكانية واحدة، لجعل $\neg K \to L$ صادقة بينما تكون $\neg(K \to L)$ كاذبة.

(2) الشجرة الأولى

1) ✓ $\neg(K \wedge L)$

2) ✓ $\neg(\neg K \vee \neg L)$

3) ✓ $\neg\neg K$

4) ✓ $\neg\neg L$

5) K

6) L

7) $\neg K$ $\quad$ $\neg L$

8) x $\quad$ x

الشجرة الثانية

1) ✓ $\neg K \vee \neg L$

2) ✓ $\neg\neg(K \wedge L)$

3) ✓ $K \wedge L$

4) K

5) L

6) $\neg K$ $\quad$ $\neg L$

7) x $\quad$ x

الشجرتان مغلقتان، وإذن الصيغتان متكافئتان.

(3)

الشجرة الأولى

1)	✓ $(K \leftrightarrow L) \wedge K$	
2)	$\neg L$	
3)	✓ $K \leftrightarrow L$	
4)	K	
5)	$\neg K$	K
6)	$\neg L$	L
7)	x	x

الشجرة الثانية

1)	L	
2)	$\neg((K \leftrightarrow L) \wedge K)$	
3)	$\neg(K \leftrightarrow L)$	$\neg K$
4)		x

الشجرة الأولى مغلقة، بينما الشجرة الثانية مفتوحة وبالتالي فالصيغتان غير متكافئتين.

(هـ)

(1)

1)	$(\forall x)(K_x \rightarrow L_x)$	
2)	$(\exists x) K_x$	
3)	$\neg(\exists x) L_x$	
4)	$(\forall x) \neg L_x$	
5)	K_a	
6)	$K_a \rightarrow$	
7)	$\neg L_a$	
8)	$\neg K_a$	L_a
9)	x	x

(2)

1)	K_{ab}			
2)	✓ $(\exists x) K_x$			
3)	$(\forall x)(K_x \rightarrow L_{xx})$			
4)	K_c			
5)	✓ $K_a \rightarrow K_{aa}$			
6)	✓ $K_b \rightarrow K_{bb}$			
7)	✓ $K_c \rightarrow K_{cc}$			
8)	$\neg K_c$	K_{cc}		
	x			
9)	$\neg K_b$	K_b		
10)	$\neg K_a$	K_{aa}	$\neg K_a$	K_{aa}

الصيغ غير متسقة الصيغ متسقة

(3) غير متسقة. (4)غير متسقة.

(و)

(1)

1)	✓ $(\forall x) K_x \rightarrow (\forall x) L_x$	
2)	✓ $\neg(\exists x) L_x$	
3)	$\neg(\exists x) \neg K_x$	
4)	$(\forall x) \neg L_x$	
5)	✓ $\neg(\forall x) K_x$	$(\forall x) L_x$
6)	$(\exists x) \neg K_x$	L_a
7)	x	$\neg L_a$
		x

لقد طبقنا القاعدة $\exists \neg$ على الخط الثاني فحصلنا على الخط الرابع. وطبقنا القاعدة $\rightarrow$ على الخط الأول فحصلنا على الخامس. الفرع الأيسر مغلق لوجود $(\exists x)\neg K_x$ و$(\exists x)\neg K_x$ $\neg$ عليه. الأيمن مغلق لوجود L_a $\neg$ و L_a عليه. الشجرة مغلقة وصورة الحجة صحيحة.

(2)

1) ✓ $(\exists x)\, K_x$

2) ✓ $(\exists x)\, L_x$

3) ✓ $\neg(\exists x)\, (K_x \wedge L_x)$

4) K_a

5) L_b

6) $(\forall x)\, \neg(K_x \wedge L_x)$

7) ✓ $\neg(K_a \wedge L_a)$

8) ✓ $\neg(K_b \wedge L_b)$

9) $\neg K_a$ $\quad\quad$ $\neg L_a$

x

10) $\neg K_b$ $\quad\quad$ $\neg L_b$

x

صورة الحجة خاطئة، ذلك أن الشجرة المنتهية مفتوحة لوجود فرع مفتوح، وعندما طبقنا القاعدة ∃ أدخلنا الحد a على الخط الرابع وحد آخر b على الخط الخامس في التطبيق الثاني لهذه القاعدة.

(3)

1) ✓ $(\exists x)\, (\forall x)\, K_{xy}$

2) ✓ $\neg(\forall x)\, (\exists_{v})\; K_{vx}$

3) $(\forall y)\, K_{ay}$

4) ✓ $(\exists x)\, \neg(\exists y)\; K_{yx}$

5) ✓ $\neg(\exists y)\; K_{yb}$

6) $(\forall y)\neg K_{yb}$

7) $\neg K_{ab}$

8) K_{ab}

9) x

صورة الحجة صحيحة، لقد طبقنا القاعدة ∃ على الخط الأول فحصلنا على الخط الثالث. وطبقنا ∀ ⌉ على الخط الثاني فحصلنا على الرابع. وطبقنا القاعدة ∃ على الرابع فحصلنا على الخامس. وطبقنا ∃ ⌉على الخامس فحصلنا على السادس. طبقنا ∀ على السادس فحصلنا على السابع. ثم طبقنا ∀ على الثالث فحصلنا على الثامن. أخذنا السابع والثامن فغلقنا الشجرة على الخط التاسع.

(4)صورة الحجة صحيحة.

(5)

1) $a = b$

2) $\urcorner(Kab \rightarrow Kba)$

3) ✓ $\urcorner(Kaa \rightarrow Kaa)$

4) Kaa

5) $\urcorner Kaa$

6) x

لقد استبدلنا على الخط 3 ظهور b على الخط 2 مرتين بواسطة a ، وذلك باستخدام قاعدة الهوية. والحجة صحيحة.

(6)

1) $a = b$

2) $\urcorner(b = a)$

3) $\urcorner(a = a)$

x

صورة الحجة صحيحة.

المراجع

أولا: المراجع العربية

1. د. أسعد الجنابي- المنطق الرياضي والرياضيات، أطروحة للدكتوراه، صوفيا، 1975.

2. د. أسعد الجنابي- المنطق الرياضي: دوره ومكانه في الرياضيات الحديثة، مركز البحوث، عدن، 1976.

3. د. أسعد الجنابي- البرهان غير المباشر، مركز البحوث، عدن، 1976.

4. د. أسعد الجنابي- الطريقة البديهية، مركز البحوث، عدن، 1976.

5. د. حسان الباهي-اللغة والمنطق (بحث في المفارقات)، دار الأمان للنشر، الرباط، 2000.

6. د. كريم متى- المنطق الرياضي، مؤسسة الرسالة، بيروت، 1979.

7. محمد مرسلي- دروس في المنطق الاستدلالي الرمزي، دار توبقال للنشر، الدار البيضاء، 1989.

8. د. صلاح عثمان - المنطق المتعدد القيم، منشأة المعارف، الإسكندرية، 2002.

9. د.عادل فاخوري - المنطق الرياضي، المؤسسة الجامعية للدراسات والنشر والتوزيع، بيروت 1988.

10.د. نجيب الحصادي - أسس المنطق الرمزي المعاصر، دار النهضة العربية، بيروت 1993.

ثانيا: المراجع الأجنبية

11. Cori,R. and Lascar, D.- Mathematical logic, Oxford University Press, Inc. New York, 2000.

12. Copi, J.- Symbolic logic, Macmillan publishing Co., Inc., New york, 5 ed., 1979.

13. Crossley, J.N.-Wath is mathematical logic?, Dover publications, Inc., New York, 1990.

14. Curry, H.B.- Foundations of Mathematical Logic, Dover Publications, Inc. New York, 1977.

15. Dale, J. – Philosophy of mathematics, an Anthology, Blackwell publishers, Massachusetts, USA 2001.

16. Daniel, B. – Deduction, Blackwell, publishers, MA, USA,2003.

17.Gamut, L.T.F. – Logic language and meaning, vol.1, the university of Chicago press, Chicago, 1991.

18.Gamut, L.T.F. – Logic language and meaning, vol.2, the university of Chicago press, Chicago, 1991.

19.Ganchev, I. – Mathematical logic, Sofia, 1968.

20.Geoffrey, H. – Metalogic, university of California press, USA, 1996.

21.Grayling, A. C. – Philosophical logic, Blackwell publishers, Oxford, UK, 2001.

22. Hamilton, A.G.- Logic for mathematicians, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

23. Hao, W.-Mathematical Logic, Litton Educational Publishing Inc., 1981.

24. Hackstaff, L.H.-Systems of formal logic, D. Reidel publishing, Co., Dordrecht-Holland, 1966.

25. Haack, S.-Philosophy of logics, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

26. Halmos, P. and Givant, S.-Logic as Algebra, the mathematical association of America, 1998.

27. John, N. – Logics, wadsworth, London, 1997.

28. Langer, S.K.-An Introduction to symbolic logic, Dover publications, Inc., New York, 1967.

29. Lou, B. – Philosophical logic, Blackwell publishers, MA, USA, 2001.

30. Machover, M. – Set theory, logic and their limitations, Cambridge university press, Cambridge, UK, 2003.

31. Mark, S. – Logical forms, Blackwell publishers, Massachusetts, USA, 2001.

32. Martin, N.M.- Systems of logic, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

33. Mendelson, E.-Introduction to mathematical logic, Chapman & Hall, London, 4 ed.; 1997.

34. Magaris, A.-First Order mathematical logic, Dover publications, Inc., New York, 1990.

35. Nolt, J. and Rohatyn, D.-Logic, MaGraw-Hill Book Company, New York, 1988.

36. Purtill, R,L, Logic for philosophers, Harper a Row, publishers, New York , 1971.

37. Rubin, J.E.- Mathematical logic, Saunders college publishing, 1990.

38. Samuel, G. – The languages of logic, Blackwell, London, 1997.

39. Stolyar, A.A.-Introduction to Elementary mathematical logic, Dover publications, Inc., New York, 1970.

المنطق الرمزي المعاصر

يمثل هذا الكتاب مدخلا إلى المنطق الرمزي المعاصر ويعرض بأسلوب مبسط ودقيق حساب القضايا . حيث تدرس دلالته وتركيبه. الاستنتاج الطبيعي. هنا. يتناول قواعد الاشتقاق وأنواع البراهين الصورية ثم يتم بناء نسق لحساب القضايا مع براهين صفات هذا النسق.

حساب المحمولات يتم إدخاله كتوسيع لحساب القضايا. حيث تدرس دلالته من خلال البناءات التفسيرية وتركيبه. الاستنتاج الطبيعي لحساب المحمولات يقوم على إضافة قواعد اشتقاق جديدة. ثم يتم توسيعه بدراسة مفهوم الهوية وأخيراً يبنى النسق الصوري لحساب المحمولات.

تدرس أشجار الصدق كطريقة أخرى فعالة وسلسة في حساب القضايا لتحديد: أنواع الصيغ. تكافئها. اتساقها وعدم اتساقها. كما يتم تعميمها على حساب المحمولات.

إنه أول كتاب باللغة العربية يحوي حلولاً مفصلة لمئات التمارين. التي تمثل مساعدة حقيقية للقارىء لتثبيت المعالجات النظرية المعاصرة في هذا الكتاب.

المؤلف:

أستاذ جامعي للمنطق وقام بتدريسه في عدة جامعات عربية. كما وعمل في مراكز أبحاث عربية وأوروبية. ونشر أكثر من ١٦ مقال وكتاب في المنطق .

د

المركز الرئيسي

فاكس

E-mail: shorokjo@nol.com.jo

www.shorok.com

ISBN 9957-00-306-2

9789957003067