Notions de Logique*

Marcel Crabbé

* La dernière version de ce texte est accessible à partir de `www.librecours.org`

Première partie

Correspondance et démonstration

1 Introduction

1 La notion de loi logique

En première approximation, une loi logique est une vérité nécessaire et, partant, absolument générale. Examinons les cinq phrases vraies [1] suivantes, rangées par ordre croissant de généralité :

(1) Il pleut

(2) Descartes est mort le 11 février 1650

(3) Tous les corbeaux sont noirs

(4) $1 + 1 \neq 0$

(5) La neige est blanche ou n'est pas blanche

(1) est vraie ici et maintenant en raison de la note [1]. Mais elle ne l'est pas ailleurs, elle ne l'a pas toujours été ici, ni ne le sera probablement pas toujours.

La phrase (2), en revanche, est partout vraie et elle le restera toujours. On peut même soutenir qu'elle l'a toujours été. Cette phrase est, en ce sens, plus générale que la première, car elle se réfère à un état de fait qui ne peut être changé que si l'on envisage une situation ou un **monde** différent du monde usuel. Toutefois, il est facilement concevable que la mort de Descartes ait eu lieu le 10 février 1650 ou le 12 février 1650. Dans ces deux cas, la phrase (2) n'est pas vraie.

(3) énonce une loi **empirique**. Comme les deux phrases précédentes elle est vraie, mais on ne peut lui enlever cette qualité aussi aisément. Pour cela, il faudrait, par exemple, se placer dans un monde où certains corbeaux sont blancs ou vert pomme. Dans la mesure où un tel monde doit être sensiblement plus étrange que celui dans lequel nous vivons ou que certaines des situations ou mondes qui rendent la phrase (2) non vraie, la phrase (3) est considérée comme étant davantage *nécessaire* que la phrase (2).

Dans le cas de la phrase (4), il semble tout à fait impossible qu'il y ait un monde dans lequel elle puisse ne pas être vraie. Cela vient de ce que le sens des symboles

1. À lire par temps pluvieux.

1, +, $\neq$ et 0 est tel que cette phrase décrit un état de fait indépendant de toute expérience. Supposons cependant que l'on modifie l'**interprétation** donnée à ces symboles, en interprétant +, par exemple, par l'opération de soustraction. Alors (4) n'est pas vraie. Il en va de même si l'on convient que le symbole 1 désigne le nombre 0 ou si on calcule modulo 2. Ici, nous avons affaire à une vérité **mathématique** : il est impossible de ne pas la supposer vraie sans changer le sens des symboles utilisés. De même, on voit que, si on modifie l'interprétation usuelle du mot 'Descartes', le sens du mot 'mort', le calendrier ou encore le sens de 'corbeaux' ou de 'noirs', on peut facilement enlever leur vérité aux phrases (2) et (3).

Aucune des quatre phrases, examinées jusqu'ici, n'est donc invariante, quant à sa vérité, relativement aux situations différentes de la nôtre ou aux interprétations non courantes.

Par contre, la phrase (5) demeure invariablement vraie, quel que soit le monde envisagé et quelle que soit l'interprétation que l'on donne dans ce monde aux mots 'neige', ou 'blanche'. En d'autres termes, elle est **logiquement** vraie. Il en est de même pour des phrases comme 'Il n'est pas vrai que la neige est noire et n'est pas noire' ou 'S'il pleut, alors il pleut'.

Une première définition de la notion de loi logique peut donc être avancée :

> Une **loi logique** est une phrase qui est vraie dans tous les mondes possibles quelle que soit la manière dont on l'interprète.

Cette définition peut être complètement explicitée [2]. Il suffit pour cela de préciser d'abord ce qu'il convient d'entendre par « phrase » (ou « énoncé »), d'introduire ensuite un concept de « modèle », qui rendra précises les notions de monde possible et d'interprétation dans un monde possible et enfin, d'expliquer ce qu'on entend par :

l'énoncé A est vrai dans le modèle $\mathcal{M}$,

ou plus brièvement :

$\mathcal{M}$ est modèle de A,

ce qui se note :

$$\mathcal{M} \models A$$

La définition précédente peut alors être formulée comme suit :

Une loi logique est un énoncé qui est vrai dans tous les modèles.

Notons

$$\models A$$

2. Cela a été fait par les logiciens contemporains, principalement par Tarski.

l'expression 'A est une loi logique'. On a donc :

$$\models A \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \models A, \text{ pour tout modèle } \mathcal{M}.$$

▷ 1. *Quand on fait varier l'interprétation d'une phrase, on ne fait pas varier l'interprétation de toutes ses composantes. Des expressions comme 'est', 'ou', 'il n'est pas vrai que', 'tous', 'et', etc. s'interprètent toujours de la même manière dans tous les mondes possibles. Pour cette raison, on les considère comme des expressions* ***logiques****. D'autre part, des expressions qui, comme 'neige', 'corbeau', 'noir', etc. peuvent recevoir diverses interprétations, dans ce monde-ci ou dans d'autres mondes, sont des expressions réputées non logiques.*

2. *L'interprétation des éléments non logiques d'une phrase ne peut cependant être totalement arbitraire. On peut sans doute interpréter 'la neige' par « Socrate » et 'noir' par le concept « grec », mais l'inverse n'est pas admis. Les règles d'interprétation étant assez compliquées, bornons-nous à signaler qu'une interprétation doit seulement respecter la structure, les catégories et les fonctions grammaticales dans les grandes lignes. En particulier, l'interprétation d'un syntagme nominal, comme un nom propre, doit être un objet ou un individu et l'interprétation d'un syntagme verbal doit être une propriété.*

3. *Si on fixe, une fois pour toutes, le sens de certains mots, comme on l'a fait ci-dessus, alors il y a des énoncés qui sont toujours vrais et d'autres qui parfois ne le sont pas. En distinguant ainsi deux sortes de mots, les mots logiques et les mots non logiques, ceux qui recevront une même interprétation dans tout modèle et ceux dont l'interprétation sera variable, on distingue également deux types d'énoncés.*

Si on définit un ***connecteur logique*** *comme étant une expression qui est interprétée de la même façon dans tout modèle, on définit également un modèle comme un monde dans lequel une expression logique reçoit un sens dit « standard ». L'extension de la notion de modèle varie donc avec celle de la notion de mot logique.*

Plus généralement, supposons qu'en fixant le sens d'un mot, on le promeuve au rang de constante logique. En ce cas, on ne considérera comme modèle que ceux qui satisfont à cette définition. Par exemple, si on décide que 'homme' est une constante logique en assimilant son extension à ce qui est vérifié par 'animal' et par 'raisonnable', alors 'Tout homme est animal' devient une loi logique, à condition bien sûr que 'tout' et 'est' aient leur rôle usuel de constante logique. On a ainsi fait ce qu'on pourrait appeler une logique du mot 'homme'. Celle-ci peut ensuite être complétée par une logique de 'animal' et de 'raisonnable'. En général, faire la ou une logique d'un mot, c'est en fixer le sens intégralement (définition explicite) ou partiellement (définition implicite).

Il paraît dès lors pratiquement impossible d'énumérer les mots logiques et les lois logiques d'une manière absolue. On contourne cette difficulté en ne retenant comme logiques que certaines expressions explicitement données. Ainsi, la logique des propositions (des connecteurs propositionnels) est celle qui ne retient comme mots logiques que les mots 'ne ... pas', 'et', 'ou', 'si ... alors'..., la logique des prédicats y ajoute 'est', 'est identique à', 'tout', 'au moins un'. 'Si tout est vain, alors au moins une chose est vaine' est une loi de la logique des prédicats, mais non de la logique propositionnelle.

4. *On peut également comprendre la notion de loi logique par le biais des* ***structures logiques****. Une loi logique est, dans ce contexte, une phrase vraie en vertu de sa structure ou de sa forme et non de son contenu ou de sa matière. La structure logique est la manière dont les constituants d'un énoncé sont agencés à l'aide des mots 'si', 'et', 'ou', 'il n'est pas vrai que', 'tout', 'quelque', etc. Ainsi, les phrases :*

(1′) *Il neige*

(2′) *Napoléon est né le 3 octobre 2012,*

(3′) *Tous les chats sont gris*

(4′) $5 + 5 \neq 10$

(5′) *La pluie est jaune ou n'est pas jaune*

ont la même structure logique que les phrases (1), (2), (3), (4) et (5), respectivement. Mais cette fois, aucune des quatre premières n'est vraie tandis que la dernière est vraie. On en conclut que si les phrases (1), (2), (3) et (4) sont vraies, ce n'est pas en raison de leur structure ou de leur forme.

Si une phrase est vraie dans tous les modèles, toutes les phrases de même structure sont vraies. En effet, à chaque phrase B ayant une même structure qu'une phrase A, on peut associer une interprétation de A dans un monde possible, telle que cette interprétation rende A vraie ssi B est vraie. La phrase (3′) par exemple est liée à l'interprétation de (3) qui associe le concept « chat » au mot 'corbeau' et « gris » à 'noir'.

2 La notion de raisonnement valide

Un raisonnement comprend deux parties : les prémisses et la conclusion. Généralement, les prémisses et la conclusion peuvent s'exprimer par des énoncés, c'est-à-dire par des phrases qui sont vraies ou fausses. En revanche, le raisonnement, qui n'est pas un énoncé, n'est ni vrai ni faux, mais seulement valide ou invalide, correct ou incorrect.

Nous définirons un raisonnement comme étant une suite finie [3] non vide d'énoncés. Le dernier énoncé de cette suite est la **conclusion**, les autres énoncés sont les **prémisses**. Nous utiliserons les notations :

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C$$

ou

$$\frac{A_1, \cdots, A_n}{C}$$

ou

$$\begin{array}{c} A_1 \\ . \\ . \\ . \\ A_n \\ \hline C \end{array}$$

pour désigner le raisonnement dont la conclusion est C et dont les prémisses sont A_1 et ... et A_n.

La validité d'un raisonnement n'est pas directement liée à la vérité de sa conclusion. Ainsi, un raisonnement correct peut avoir une conclusion qui n'est pas vraie, par exemple :

$$\begin{array}{c} \text{Aucun animal n'est raisonnable} \\ \text{Tout homme est animal} \\ \hline \text{Aucun homme n'est raisonnable} \end{array}$$

Et un raisonnement incorrect peut avoir une conclusion vraie, par exemple :

$$\begin{array}{c} \text{Tout homme est mammifère} \\ \text{Tout homme est animal} \\ \hline \text{Tout mammifère est animal} \end{array}$$

Le seul lien manifeste entre la vérité des énoncés constituant un raisonnement et sa validité est qu'un raisonnement correct ne **peut** avoir à la fois des prémisses vraies et une conclusion qui ne l'est pas ; et réciproquement, qu'un raisonnement incorrect *peut* avoir des prémisses vraies et une conclusion qui ne l'est pas. En d'autres termes, un raisonnement est valide ssi il est **impossible** que ses prémisses soient vraies sans que sa conclusion le soit. Pour clarifier cette définition, il faut préciser le sens du mot 'impossible' qui y figure. Cela peut se faire par le biais de la notion de modèle : 'impossible' signifiant « il n'existe pas de modèle ». Dès lors, un raisonnement est

3. Les raisonnements ayant un nombre infini de prémisses ne seront pas abordés ici.

correct ssi il n'existe pas de modèle des prémisses qui ne soit pas modèle de la conclusion. Autrement dit :

> Un raisonnement est valide (ou correct) ssi tout modèle des prémisses est modèle de la conclusion.

Familièrement, cette définition affirme qu'un raisonnement est valide si sa conclusion est vraie *chaque fois* que ses prémisses le sont. Un raisonnement valide a donc une signification pratique : si les prémisses sont vraies, la conclusion est vraie également ; si la conclusion n'est pas vraie, une au moins des prémisses ne l'est pas. Par contre, si une des prémisses n'est pas vraie, on ne peut rien en inférer quant à la vérité de la conclusion ; et si la conclusion est vraie, on ne peut rien en conclure quant à la vérité des prémisses.

À la lumière de cette définition, on peut donner la raison pour laquelle l'exemple de raisonnement ci-dessus est incorrect. Modifions l'interprétation du mot 'animal' qui figure dans la seconde prémisse, en lui donnant le sens du mot 'bipède'. On obtient alors un modèle dans lequel 'Tout homme est mammifère' et 'Tout homme est animal' sont vrais, mais 'Tout mammifère est animal' ne l'est pas.

Systématisons cela. Si un raisonnement est correct et

- si ses prémisses sont vraies, alors sa conclusion est vraie ;
- si sa conclusion n'est pas vraie, alors une de ses prémisses n'est pas vraie ;
- si une de ses prémisses est n'est pas vraie, alors sa conclusion peut être vraie ou non ;
- si sa conclusion est vraie, alors toutes ses prémisses peuvent être vraies simultanément ou l'une d'entre elles peut ne pas l'être.

Le tableau suivant illustre, par des exemples simples, les différentes répartitions possibles de la vérité et de la non-vérité entre prémisses et conclusion d'un raisonnement et ce qui en résulte concernant sa validité.

$\langle$`mardi`$\rangle$ et $\langle$`après-midi`$\rangle$ sont les deux phrases vraies[4] : « on est mardi », « on est l'après-midi » et $\langle$`jeudi`$\rangle$, $\langle$`matin`$\rangle$, les deux phrases non vraies : « on est jeudi », « on est le matin ». PV, PF, CV et CF signifient respectivement « les prémisses sont toutes vraies », « les prémisses ne sont pas toutes vraies », « la conclusion est vraie » et « la conclusion n'est pas vraie ».

4. À lire le mardi après-midi.

	Correct	Incorrect	Contre-modèle
PV $\Downarrow$ CV	$\dfrac{\langle\texttt{mardi}\rangle}{\langle\texttt{mardi}\rangle}$	$\dfrac{\langle\texttt{mardi}\rangle}{\langle\texttt{après-midi}\rangle}$	mardi matin
PF $\Downarrow$ CF	$\dfrac{\langle\texttt{jeudi}\rangle}{\langle\texttt{jeudi}\rangle}$	$\dfrac{\langle\texttt{jeudi}\rangle}{\langle\texttt{matin}\rangle}$	jeudi après-midi
PF $\Downarrow$ CV	$\dfrac{\langle\texttt{mardi}\rangle \; \langle\texttt{jeudi}\rangle}{\langle\texttt{mardi}\rangle}$	$\dfrac{\langle\texttt{jeudi}\rangle}{\langle\texttt{après-midi}\rangle}$	jeudi matin
PV $\Downarrow$ CF	$\emptyset$	$\dfrac{\langle\texttt{mardi}\rangle}{\langle\texttt{matin}\rangle}$	maintenant [4]

$\triangleright$ 1. *Si on ne considère aucune expression comme logique, les seuls raisonnements valides sont ceux de la forme* $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash C$*, où* C *est l'un des* A_i.

Les principes suivants, gouvernant les raisonnements valides, peuvent également être établis sans faire appel aux connecteurs logiques :

– *si* $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ *est valide, alors* $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$ *est valide ;*

– *si* $A_1, \ldots, A_n, B, B \vdash C$ *est valide, alors* $A_1, \ldots, A_n, B \vdash C$ *est valide ;*

– *si* $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ *et* $B_1, \ldots, B_m, C \vdash D$ *sont valides,*
alors $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \vdash D$ *l'est aussi.*

2. *On peut formuler la définition de validité dans un style ensembliste. Pour cela, si* A *est un énoncé, désignons par* $\mathrm{Mod}(A)$ *la classe des modèles de* A*. On aura alors que :* $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ *est valide ssi* $\bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Mod}(A_i) \subseteq \mathrm{Mod}(C)$.

3. *Habituellement, un raisonnement est conçu comme un cheminement, un passage, qui d'un certain nombre de points de départ conduit à une conclusion. Quand le passage est autorisé ou fonctionne, le raisonnement est correct ou valide. Sinon il est non valide. Pour élaborer à partir de là une définition plus nette, on peut se contenter, comme on l'a fait ci-dessus, d'expliquer en quoi consiste l'**existence** d'un tel passage. C'est l'approche sémantique : la validité y est définie à partir de la notion de vérité. Il existe cependant une autre approche. C'est celle qui ne se contente pas de spécifier ce qu'est l'existence d'un passage autorisé entre prémisses et conclusion, mais qui souhaite encore préciser ce qu'est un tel passage. C'est la méthode axiomatique. Elle aboutit à*

définir tout raisonnement valide comme pouvant être associé à une suite d'étapes, qui sont des règles ou raisonnements primitifs, explicitement décrits. Ainsi, si on adopte comme règles le modus ponens (Si A, alors B, $A \vdash B$) et la règle d'instantiation universelle (Tout x est $P \vdash a$ est P), on peut construire un cheminement qui conduit de 'Tout homme est mortel' et de 'Socrate est homme' à 'Socrate est mortel' : supposons que tout homme est mortel, autrement dit supposons que tout x est tel que si x est un homme, alors x est mortel ; par instantiation, on obtient que si Socrate est homme, alors Socrate est mortel ; par modus ponens et la supposition que Socrate est homme, on conclut que Socrate est mortel. Le théorème de complétude[5] *— le théorème fondamental de la logique — est l'affirmation que ces deux approches, la sémantique et l'axiomatique, définissent extensionnellement une même classe de raisonnements valides. Ces différences entre notions de validité et de vérité seront prises en compte à partir du chapitre 4.*

4. *Les exemples qui illustrent la notion de raisonnement dans les cours de logique apparaissent souvent comme étant gratuits et/ou triviaux. Ils ne manifestent pas toujours l'importance que peut revêtir cette notion par ailleurs ni la difficulté qu'il peut y avoir à montrer la validité de certains raisonnements. Ainsi, la question de savoir si l'axiome des parallèles est dérivable des autres axiomes de la géométrie d'Euclide peut être ramenée à la question de savoir si le raisonnement ayant comme prémisses certains énoncés de la géométrie et comme conclusion l'énoncé affirmant que tout point hors d'une droite est incident à exactement une parallèle à cette droite, est valide. Ce problème, qui eut son heure de gloire, fut résolu en interprétant les notions géométriques de droite, points, congruence, etc., de manière à rendre vraies les prémisses et la conclusion non vraie. Conformément à la définition de validité, ces modèles de géométrie non euclidienne montrent que le raisonnement en question n'est pas valide. La plupart des problèmes scientifiques théoriques, sinon tous, peuvent, comme dans cet exemple, être considérés comme des questions à propos de la validité de certains raisonnements.*

2.1 La notion de contradiction

On définit généralement une contradiction comme un énoncé de la forme 'A et non A', qui affirme et qui nie un même énoncé A. Il y a cependant des énoncés comme 'Il pleut ssi il ne pleut pas', qui n'ont pas cette forme 'A et non A', mais qu'il n'y a pas de raison pour autant de ne pas considérer comme contradictoires. Comment alors définir une notion générale de contradiction ? Une contradiction est bien sûr fausse. Mais tout énoncé faux n'est pas une contradiction. C'est qu'une contradiction

5. Démontré par Gödel en 1930.

n'est pas simplement fausse, mais elle est plus que fausse, elle ne peut être vraie. Et inversement, un énoncé toujours faux est contradictoire. On généralisera donc utilement la notion usuelle de contradiction en donnant la définition suivante :

Une **contradiction** est un énoncé qui est faux dans tous les modèles.

Une contradiction n'est donc certainement pas une loi logique. Mais cela ne signifie nullement que les énoncés qui ne sont pas des lois logiques soient automatiquement des contradictions. Ainsi, les phrases (1), (2), (3) et (4) de la section 1 ne sont ni des lois logiques ni des contradictions.

Parmi les phrases courantes, les lois logiques et les contradictions sont l'exception plutôt que la règle.

▷ *Si A est une loi logique l'énoncé « on n'a pas que A » est une contradiction, et si A est une contradiction, « on n'a pas que A » est une loi logique. En un sens, il y a donc autant de lois logiques que de contradictions.*

2.2 La notion de cohérence

Alors que la notion de nécessité logique a été précisée à l'aide de celle de loi logique, celle de possibilité peut être définie semblablement à partir de la notion d'existence de modèle : un énoncé logiquement nécessaire est un énoncé vrai dans tous les modèles ; un énoncé logiquement possible est un énoncé vrai dans au moins un modèle. La notion d'existence de modèle est particulièrement utile quand on l'applique à des ensembles d'énoncés. Nous dirons qu'un ensemble d'énoncés a un modèle ssi il existe un modèle qui vérifie chacun des énoncés de l'ensemble.

Si, anticipant sur la logique des propositions, on appelle 'négation de A' l'énoncé 'non A', on vérifie facilement que :

- toute partie d'un ensemble ayant un modèle a un modèle ;
- les ensembles de la forme $\{A,\ \text{non } A\}$ n'ont pas de modèle ;
- l'ensemble de tous les énoncés n'a pas de modèle : cet ensemble contient en effet à la fois A et non A ;
- l'ensemble vide a un modèle : tous les modèles vérifient chaque énoncé de cet ensemble ;
- un raisonnement est valide ssi l'ensemble ayant pour éléments les prémisses et la négation de la conclusion n'a pas de modèle.

Cette notion d'existence de modèle est liée à la notion intuitive de cohérence. Un ensemble cohérent est un ensemble dont on ne peut déduire, à l'aide d'axiomes et de règles, n'importe quel énoncé. Le théorème de complétude déjà évoqué aura pour effet d'identifier ensembles cohérents et ensembles ayant un modèle.

On voit donc qu'un raisonnement est valide ssi l'ensemble formé des prémisses et de la négation de la conclusion est contradictoire. Autrement dit, un raisonnement est non valide ssi l'ensemble formé des prémisses et de la négation de la conclusion est cohérent. Un ensemble cohérent est aussi appelé consistant ou non contradictoire.

▷ *Certaines notions traditionnelles, dont le sens varie quelquefois selon les époques, sont réinterprétables comme suit :*

énoncé nécessaire	=	*loi logique ;*
énoncé possible	=	*énoncé ayant un modèle ;*
énoncé contradictoire	=	*contradiction ;*
	=	*énoncé impossible ;*
énoncé contingent	=	*énoncé non nécessaire et non contradictoire ;*
	=	*énoncé possible et non nécessaire ;*
vérité contingente	=	*énoncé contingent vrai ;*
fausseté contingente	=	*énoncé contingent faux.*

Si on note $\Box A$ *et* $\Diamond A$*, les énoncés « il est nécessaire que* A *» et « il est possible que* A *», on peut établir la validité des raisonnements suivants :*

$\Box A \vdash A$, $A \vdash \Diamond A$, $\Box A \vdash \Box\Box A$, $\Diamond\Diamond A \vdash \Diamond A$, $\Diamond\Box A \vdash \Box A$, $\Diamond A \vdash \Box\Diamond A$.

3 Raisonnements valides et lois logiques

Considérons le cas particulier d'un raisonnement n'ayant pas de prémisses : $\vdash C$ (Donc C). Par définition, ce raisonnement est valide ssi tout modèle des prémisses est modèle de la conclusion. Comme il n'y a pas de prémisse, il n'y a pas de prémisse qui ne soit vérifiée par tout modèle. Tout modèle est donc modèle des prémisses [6]. Par conséquent, $\vdash C$ est valide ssi tout modèle est modèle de C. [7] L'étude des raisonnements valides devient par là également une étude des lois logiques.

6. S'il n'y a pas de prémisse, il n'y a pas de prémisse qui ne soit pas non vraie dans tout modèle. Donc, alors que tout modèle vérifie les prémisses, on a également qu'aucun modèle ne les vérifie ! En adoptant la terminologie de la logique ancienne, on dira qu'il y a là deux propositions contraires vraies simultanément, ce qui est admis dans l'exacte mesure où on n'a pas présupposé l'existence de prémisses.

7. En style ensembliste : ce raisonnement est valide ssi $\bigcap \emptyset \subseteq \mathrm{Mod}(C)$, c'est-à-dire ssi $\models C$.

Les lois logiques sont donc des cas dégénérés de raisonnements valides. Inversement, tout raisonnement peut-il être assimilé à une loi logique ? Considérons cette question en commençant, pour fixer les idées, par les raisonnements à deux prémisses. Par définition, le raisonnement $A_1, A_2 \vdash C$ est valide ssi tout modèle de A_1 et de A_2 est un modèle de C. Considérons d'autre part l'énoncé : *Si* A_1 *et* A_2*, alors* C. Cet énoncé est une loi logique ssi il est vrai dans tout modèle. Cela se produit ssi chaque modèle qui vérifie A_1 et A_2 vérifie également C. En général, si $n > 0$, le raisonnement $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ est valide ssi la phrase *Si* A_1 *et* $\ldots$ *et* A_n*, alors* C est une loi logique. L'étude des lois logiques inclut donc celle des raisonnements valides.

$\triangleright$ 1. *On a déjà noté qu'un raisonnement valide le reste si on lui ajoute des prémisses. Donc si* C *est une loi logique, le raisonnement* $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ *est valide.*

2. *Si* A *est une contradiction, alors aucun raisonnement comptant* A *parmi ses prémisses n'est incorrect, car comme il n'y a pas de modèle qui vérifie* A*, il n'y a pas de modèle qui vérifie les prémisses et ne vérifie pas la conclusion.*

3.1 La définition de l'implication comme foncteur de vérité

On se propose de définir un connecteur logique, noté $\rightarrow$, qui précise le sens de la conjonction « si...alors... » de la langue naturelle telle qu'elle a été utilisée ci-dessus[8]. Cette définition devra donc être telle que le raisonnement $A \vdash B$ est valide ssi $A \rightarrow B$ est une loi logique. De plus, il est souhaitable que cette définition soit uniforme, c'est-à-dire qu'elle soit invariante par rapport aux classes de modèles envisagées ou aux notions de validité, variant avec la détermination des connecteurs logiques.

On devra donc avoir que, pour toute classe K de modèles, tout modèle de A appartenant à K est modèle de B ssi $A \rightarrow B$ est vrai dans tous les modèles de la classe K. Ou, en considérant la négation : pour toute classe K de modèles, il y a un modèle de A appartenant à K qui n'est pas modèle de B ssi $A \rightarrow B$ n'est pas vrai dans tous les modèles de la classe K.

Dans le cas limite où K ne comprendrait qu'un seul modèle $\mathcal{U}$, on devra donc avoir que $\mathcal{U}$ est modèle de A et pas modèle de B ssi $A \rightarrow B$ n'est pas vrai dans $\mathcal{U}$. En d'autres termes, toute définition satisfaisante devra être telle que $\mathcal{M}$ est modèle de $A \rightarrow B$ ssi $\mathcal{M}$ n'est pas modèle de A et/ou est modèle de B.

Il reste à voir que cette seule possibilité satisfait bien aux conditions imposées. Pour cela supposons le raisonnement $A \vdash B$ non $K-$valide. Dès lors, il y a dans K

8. Les explications qui suivent sont à mettre en parallèle avec celles de la page 25.

un modèle de A qui n'est pas modèle de B. Donc, par la définition, ce modèle ne vérifie pas $A \rightarrow B$, qui par conséquent n'est pas $K-$valide.

Réciproquement, s'il y a un modèle, $\mathcal{M}$, dans K qui ne vérifie pas $A \rightarrow B$, alors, par la définition, $\mathcal{M}$ vérifie A et ne vérifie pas B. Par conséquent, $A \vdash B$ n'est pas $K-$valide.

$\triangleright$ *On distinguait, dans la logique traditionnelle, l'implication matérielle et l'implication formelle. L'implication matérielle est celle que l'on vient de décrire, l'implication formelle affirme que l'antécédent ne* **peut** *pas être vrai quand le conséquent ne l'est pas. En interprétant diversement le mot 'peut', on obtient différentes notions d'implication formelle.*

4 Les paradoxes

Les paradoxes sont des raisonnements qui mettent en question certains principes de base présumés évidents. Ils peuvent se présenter sous la forme de raisonnements corrects dont la conclusion n'est pas vraie, alors que les prémisses le sont ! La plupart des paradoxes exposés ci-dessous posent des problèmes logiques majeurs. Ils ont par conséquent suscité des théories nouvelles et ils restent à l'heure actuelle une source importante de recherche. Les solutions proposées pour éviter un paradoxe sont souvent diverses et s'excluent parfois les unes les autres.

4.1 **Le paradoxe de Russell** (le problème de la notion de propriété ou d'ensemble)

• Première version (Russell)

Appelons 'prédicable' la propriété qu'a une propriété de s'appliquer à elle-même. Par exemple, la propriété *abstraite* est abstraite, donc prédicable.
Appelons 'imprédicable' la propriété de n'être pas prédicable. Ainsi *rouge* n'est pas rouge et donc imprédicable. On remarque alors que, paradoxalement, la propriété *imprédicable* est imprédicable ssi elle n'est pas imprédicable.

• Deuxième version (Russell)

Soit R l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas membres d'eux mêmes. Alors R est membre de R ssi R n'est pas membre de R. En notation ensembliste :

$$\{\, x \mid x \notin x \,\} \in \{\, x \mid x \notin x \,\} \qquad \text{ssi} \qquad \{\, x \mid x \notin x \,\} \notin \{\, x \mid x \notin x \,\}$$

• Troisième version (Gonseth)

Le catalogue de tous les catalogues doit se mentionner lui-même. La plupart des autres catalogues ne se mentionnent pas eux-mêmes. Qu'en est-il du catalogue des catalogues qui ne se mentionnent pas eux-mêmes ? Il a la propriété paradoxale de se mentionner lui-même ssi il ne se mentionne pas lui-même.

• Quatrième version (Russell)

Le seul barbier d'un village rase toutes les personnes du village qui ne se rasent pas elles-mêmes. Qui rase le barbier ?

4.2 **Le paradoxe de Mirimanoff** (le problème de la notion d'ensemble)

• Première version

Une descente d'un ensemble x est une suite x_1, x_2, x_3, ... telle que x_1 est élément de x, x_2 élément de x_1, x_3 élément de x_2, etc. Un ensemble est dit ordinaire ssi toutes ses descentes sont finies. Soit M l'ensemble des ensembles ordinaires. S'il avait une descente infinie x_1, x_2, x_3, ..., alors x_1 ne serait pas ordinaire, contrairement à la supposition que M est l'ensemble des ensembles ordinaires. Donc M est ordinaire. Mais alors M, M, M, ... est une descente infinie de M. Par conséquent M n'est pas ordinaire.

• Deuxième version : l'hyperjeu

Un jeu est normal ssi toutes ses parties sont finies. Pour jouer à l'hyperjeu, l'un des deux joueurs commence par choisir un jeu normal et ils continuent avec ce jeu.

L'hyperjeu est un jeu normal car toute partie en est finie. Dès lors, il n'est pas normal, car on peut y jouer indéfiniment en choisissant chaque fois l'hyperjeu.

4.3 Le paradoxe du menteur (le problème de la notion de vérité)

• PREMIÈRE VERSION

Épiménide le Crétois dit que les crétois sont des menteurs. Or, Épiménide est crétois. Donc s'il dit vrai, il ment. S'il ment, alors les crétois ne sont pas des menteurs, et donc il dit vrai. Cette forme du paradoxe contient une erreur de raisonnement qui disparaît dans les versions suivantes.

• DEUXIÈME VERSION

La seule phrase dite par Paul le 1 janvier 2000 à 1 heure est :

'Le 1 janvier 2000 à 1 heure, Paul ment.'

Cette phrase est vraie ssi elle ne l'est pas.

• TROISIÈME VERSION (TARSKI)

La phrase 'il pleut' est vraie ssi il pleut. En général, on a :

$$`\ldots\text{' est vraie ssi } ---.$$

lorsqu'on remplace les blancs par un énoncé.

Donc, en particulier, 'La phrase écrite à la page 17 n'est pas vraie' est vraie ssi la phrase écrite à la page 17 n'est pas vraie. Mais 'La phrase écrite à la page 17 n'est pas vraie' est précisément la phrase écrite à la page 17.

On en déduit la conséquence paradoxale que la phrase écrite à la page 17 est vraie ssi la phrase écrite à la page 17 n'est pas vraie.

• QUATRIÈME VERSION

Appelons 'Sophie' la phrase 'Sophie n'est pas vraie'. Alors, Sophie est vraie ssi Sophie n'est pas vraie.

La phrase écrite à la page 17 n'est pas vraie.

• Cinquième version

On lit sur les deux faces d'une feuille de papier les inscriptions suivantes :

–Recto–	–Verso–
La phrase écrite au verso n'est pas vraie.	La phrase écrite au recto est vraie.

4.4 Le paradoxe de Grelling

Par définition, un nom de propriété est *autologique* ssi il vérifie la propriété qu'il désigne (le mot 'court' est autologique, car il est court). Un nom de propriété est *hétérologique* dans le cas contraire ('long' n'est pas long, donc il est hétérologique). On constate que 'hétérologique' est hétérologique ssi il n'est pas hétérologique.

4.5 Le paradoxe de la définition (Berry)

'Le plus petit nombre naturel qui ne peut pas être défini en français en utilisant moins de cent lettres' est une définition française comprenant moins de cent lettres, du plus petit nombre naturel qui ne peut pas être défini en français en utilisant moins de cent lettres.

4.6 Le paradoxe du tas de sable (problème de l'induction)

On admet facilement que si l'on ôte un grain d'un tas de sable, il reste un tas de sable. En répétant ce raisonnement un certain nombre de fois, on arrivera à la conclusion absurde qu'un grain de sable est encore un tas de sable.

5 Langage et métalangage : la solution orthodoxe du paradoxe du menteur

Le paradoxe du menteur doit nous mettre en garde contre des définitions globales de la vérité. Les problèmes posés par de telles définitions proviennent de ce qu'elles valent uniformément à la fois pour les énoncés d'un langage et pour les énoncés métalinguistiques qui parlent de ces énoncés. Force nous est donc de distinguer **langage** et **métalangage** et de ne pas exprimer la propriété de vérité pour les énoncés d'un langage dans ce même langage, mais dans un métalangage.

Précisons cela. Nous pouvons concevoir une suite de langages emboîtés $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2 \subseteq \cdots$ de sorte que chaque $\mathcal{L}_{i+1}$ est un langage contenant tous les énoncés de $\mathcal{L}_i$ ainsi que les énoncés les ayant pour objet. Donc $\mathcal{L}_1$ est un métalangage par rapport à $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_2$ un métalangage par rapport à $\mathcal{L}_1$ (ou un métamétalangage par rapport à $\mathcal{L}_0$) et ainsi de suite.

Tenant compte de ces distinctions, reformulons la version de Tarski du paradoxe du menteur. Si 'k-vrai' désigne la notion de vérité applicable aux énoncés de $\mathcal{L}_k$, on aura :

$$\text{`}\ldots\text{' est } k\text{-vraie ssi } ---.$$

à condition de remplacer les blancs par une phrase de $\mathcal{L}_k$.

La phrase écrite à la page 20 appartient au langage $\mathcal{L}_1$ puisqu'elle fait référence à une propriété des énoncés de $\mathcal{L}_0$, à savoir la vérité (la 0–vérité). Nous obtenons alors :
'La phrase écrite à la page 20 n'est pas 0–vraie' est 1–vraie ssi la phrase écrite à la page 20 n'est pas 0–vraie. Or, 'La phrase écrite à la page 20 n'est pas 0–vraie' est précisément la phrase écrite à la page 20. Donc la phrase écrite à la page 20 est 1–vraie ssi la phrase écrite à la page 20 n'est pas 0–vraie.

Il n'y a donc plus de paradoxe à supposer que la notion de vérité a un sens, pourvu que l'on restreigne son extension aux énoncés d'un langage $\mathcal{L}_k$.

Nous tenterons, dans la suite, de formuler une notion de vérité. Nous le ferons pour deux types de langages, qui se distingueront essentiellement par les symboles que nous déciderons de considérer comme logiques. Ces deux sortes de langages correspondront à des fragments des langages courants et scientifiques. Il s'agit des langages propositionnels et des langages prédicatifs. Une fois les grammaires de ces langages décrites, nous formulerons les notions de vérité correspondantes. Cela nous permettra d'étudier les lois logiques et les raisonnements valides liés à ces langages. Toutes les considérations que nous ferons à propos de ces langages relèveront d'un métalangage qui est, en l'occurrence, un fragment du français augmenté de quelques lettres et symboles abréviatifs.

La phrase écrite à la page 20 n'est pas 0–vraie.

2 Énoncés et lois logiques des langages propositionnels

1 Syntaxe

La grammaire des langages propositionnels est fort simple. Elle se compose de la description d'un *alphabet* et de *règles syntaxiques*.

L'alphabet comprend d'une part, des symboles propositionnels, dont la liste diffère d'un langage propositionnel à l'autre. D'autre part, il possède des symboles logiques et des parenthèses, qui sont communs à tous ces langages.

Les règles syntaxiques indiquent la manière de former des énoncés en combinant les symboles de l'alphabet. Elles sont supposées exhaustives, en ce sens qu'il n'y a pas d'autres énoncés que ceux construits en se conformant à ces règles.

1.1 Alphabet

— un ensemble non vide de symboles propositionnels, à choisir dans la suite infinie : p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, q_2, r_2, s_2, $p_3 \ldots$

— symboles logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

— parenthèses :), (

1.2 Règles de syntaxe

— Tout symbole propositionnel est un énoncé.

— Si A et B sont des énoncés, alors $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ et $(A \leftrightarrow B)$ sont des énoncés.

Notons que les lettres 'A' et 'B' ne sont pas elles-mêmes des expressions d'un langage propositionnel. Elles sont destinées à formuler les règles syntaxiques des langages propositionnels. En ce sens, elles relèvent d'un métalangage. On peut éventuellement s'en dispenser en récrivant les règles d'une manière un peu moins lisible. Par exemple, la troisième règle syntaxique pourrait s'écrire :

— Toute expression obtenue en écrivant successivement la parenthèse (, un énoncé, un des symboles $\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$, $\leftrightarrow$, un énoncé et la parenthèse) est un énoncé.

Les symboles logiques et les parenthèses sont communs à tous les langages propositionnels. Ces symboles ne caractérisent donc aucun langage propositionnel particulier.

La liste des symboles propositionnels est arbitraire. Tout ensemble non vide de ces symboles constitue, pour ainsi dire, un vocabulaire non logique. Ces symboles sont *propres* au langage qu'ils déterminent complètement.

Exemple. *Dans le langage dont le seul symbole propre est le symbole propositionnel 'p', on peut former les énoncés suivants :*

p, $\neg p$, $(p \wedge p)$, $(p \vee p)$, $(p \rightarrow p)$, $(p \leftrightarrow p)$, $(p \wedge \neg p)$, $(p \wedge (p \wedge p))$, $(p \wedge (p \vee p))$, $(p \wedge (p \rightarrow p))$, $(p \wedge (p \leftrightarrow p))$, $(\neg p \wedge p)$, $(\neg p \wedge (p \wedge p))$.

Ne sont pas des énoncés de ce langage, les expressions :

q, p_1, $\neg q$, $(p \wedge p_1)$, $p \rightarrow p$, $(\neg p)$, (p), $(p \vee p($, $\rightarrow p$.

2 Sémantique

2.1 Le concept de modèle

Il n'y a qu'une seule **valeur de vérité** et cette valeur est le vrai. Seuls les énoncés peuvent recevoir la valeur vrai. Un énoncé a la valeur vrai ssi il est vrai. Nous désignerons cette unique valeur de vérité par 1 et, pour nous conformer à l'usage en la matière, nous introduisons conventionnellement la valeur refuge 0 (ou « faux classique ») que l'on attribuera aux énoncés qui ne sont pas vrais [1].

▷ *Cette présentation de la logique dite « classique » — la seule étudiée dans ces notes — comme une logique à deux valeurs, exprimant en réalité une logique partielle à une valeur de vérité, permet d'en dériver certains des principes qui la gouvernent.*

Tout d'abord, il n'y a que deux valeurs imputables à un énoncé — la seule valeur de vérité et la valeur refuge — et non pas plus,... ou moins ! C'est le principe de ***bivalence****.*

1. Nous suivons en cela partiellement Frege, qui a distingué « le vrai » comme objet et « vrai » comme propriété.

Ensuite, même si tout énoncé ne reçoit pas la valeur de vérité, l'introduction de la valeur 0*, pour compléter cette lacune, donne immédiatement une valeur à chaque énoncé ; autrement dit, il n'y a pas d'énoncé dépourvu de valeur. Combiné avec la bivalence, on en tire que tout énoncé est vrai et/ou (classiquement) faux. C'est le principe du* ***tiers-exclu****.*

Enfin, aucun énoncé ne peut avoir plus d'une valeur. Au cas présent, où il y a deux valeurs, cela signifie qu'un énoncé ne peut être vrai et faux (classiquement) à la fois. C'est le principe de ***non-contradiction****.*

Les logiques non classiques s'obtiennent en transgressant l'un ou l'autre de ces principes. Ainsi, on trouve des logiques à plus d'une valeur de vérité qui engendrent, par introduction d'une valeur refuge, des logiques non binaires à plus de deux valeurs. Ces logiques peuvent encore être « partielles » lorsqu'un énoncé n'y a aucune des valeurs de vérité, ou « gloutonnes » lorsqu'elles tolèrent des énoncés pouvant recevoir plusieurs valeurs de vérité, comme celles violant le principe de non-contradiction.

Remarquons enfin qu'on aurait pu symétriquement partir d'une valeur de fausseté, comme nous l'avons esquissé à la section 2.1, et traiter cette fois le vrai comme valeur refuge d'une logique partielle monovalente.

Un **modèle** pour un langage propositionnel $\mathcal{L}$ est une assignation d'une des valeurs 1 ou 0 aux différents symboles propositionnels de $\mathcal{L}$. En d'autres termes, un modèle pour $\mathcal{L}$ est une fonction de l'ensemble des symboles propositionnels de $\mathcal{L}$ dans l'ensemble $\{0, 1\}$. $A_{\mathcal{M}}$ est la valeur associée à l'énoncé A.

$\triangleright$ *Cette définition de modèle est bien entendu une formulation équivalente, mais plus pratique, de la notion d'attribution partielle de la valeur de vérité aux symboles propositionnels du langage. Elle correspond à la présentation usuelle de la logique classique comme gloutonne et partielle à deux valeurs (de vérité !).*

Nous interpréterons les symboles logiques de telle manière que la valeur d'un énoncé complexe soit déterminée uniquement par la valeur des énoncés moins complexes qui le composent. Les symboles logiques d'un langage propositionnel seront pour cette raison appelés **foncteurs de vérité**. Nous pourrons donc déterminer la valeur d'un énoncé à partir de la valeur des symboles propositionnels qui apparaissent dans cet énoncé.

2.2 Les symboles propositionnels

Pour tout symbole propositionnel A, et tout modèle $\mathcal{M}$, on pose :

$$\mathcal{M} \models A \qquad \text{ssi} \qquad A_{\mathcal{M}} = 1$$

On a donc également :

$$\mathcal{M} \not\models A \qquad \text{ssi} \qquad A_{\mathcal{M}} = 0$$

2.3 Les énoncés complexes (Interprétation des symboles logiques)

• LE NÉGATEUR : ¬

Pour tout énoncé A, et tout modèle $\mathcal{M}$, on pose :

$$\mathcal{M} \models \neg A \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \not\models A$$

On a donc également :

$$\mathcal{M} \not\models \neg A \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \models A$$

Un énoncé de la forme $\neg A$ est une **négation** et se lit « non A ». Le symbole $\neg$ est le *négateur*.

• LE CONJONCTEUR : ∧

Pour tout couple d'énoncés A et B, on pose :

$$\mathcal{M} \models (A \wedge B) \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \models A \text{ et } \mathcal{M} \models B$$

On a donc :

$$\mathcal{M} \not\models (A \wedge B) \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \not\models A \text{ et/ou } \mathcal{M} \not\models B$$

Un énoncé de la forme $(A \wedge B)$ est une **conjonction** et se lit « A et B ». Le symbole $\wedge$ est le *conjoncteur*.

• Le disjoncteur : $\vee$

Si A et B sont des énoncés, on pose :

$$\mathcal{M} \models (A \vee B) \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \models A \text{ et/ou } \mathcal{M} \models B$$

On a également :

$$\mathcal{M} \not\models (A \vee B) \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \not\models A \text{ et } \mathcal{M} \not\models B$$

Un énoncé de la forme $(A \vee B)$ est une **disjonction** et se lit « A et/ou B ». Le symbole $\vee$ est le *disjoncteur*.

• L'implicateur : $\rightarrow$

Si A et B sont des énoncés, on pose :

$$\mathcal{M} \models (A \rightarrow B) \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \not\models A \text{ et/ou } \mathcal{M} \models B$$

Donc :

$$\mathcal{M} \not\models (A \rightarrow B) \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \models A \text{ et } \mathcal{M} \not\models B$$

Un énoncé de la forme $(A \rightarrow B)$ est une **implication** et se lit « A implique B » ou « Si A, alors B ». Le symbole $\rightarrow$ est l'*implicateur*.

$\triangleright$ *Cette définition de la vérité des implications peut paraître étrange eu égard à ce qu'évoquent le symbole $\rightarrow$ et les mots 'implicateur' et 'implication'. En réalité, comme nous allons le voir maintenant*[2]*, nous avons bien :*

$$\mathcal{M} \models (A \rightarrow B) \qquad \text{ssi} \qquad \text{si } \mathcal{M} \models A \text{ alors } \mathcal{M} \models B.$$

En effet, supposons d'abord que si $\mathcal{M} \models A$ alors $\mathcal{M} \models B$ et déduisons-en $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$. D'une part, si $\mathcal{M} \models A$, alors $\mathcal{M} \models B$ et donc $\mathcal{M} \not\models A$ et/ou $\mathcal{M} \models B$. D'autre part, si $\mathcal{M} \not\models A$, alors également $\mathcal{M} \not\models A$ et/ou $\mathcal{M} \models B$. Or, $\mathcal{M} \models A$ ou $\mathcal{M} \not\models A$. Donc, le fait que si $\mathcal{M} \models A$ alors $\mathcal{M} \models B$ entraîne $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$.

Supposons ensuite que $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$ et montrons que si $\mathcal{M} \models A$ alors $\mathcal{M} \models B$. Puisque $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$, on a $\mathcal{M} \not\models A$ et/ou $\mathcal{M} \models B$. Si $\mathcal{M} \models A$, on élimine la première possibilité et il reste la seconde, à savoir que $\mathcal{M} \models B$. Donc $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$ entraîne que si $\mathcal{M} \models A$ alors $\mathcal{M} \models B$.

2. Ce qui suit est à comparer à ce qui est dit en 3.1.

• L'ÉQUIVALUATEUR : $\leftrightarrow$

Si A et B sont des énoncés,

$$\mathcal{M} \models (A \leftrightarrow B) \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \models A \text{ et } \mathcal{M} \models B \quad \text{ou} \quad \mathcal{M} \not\models A \text{ et } \mathcal{M} \not\models B$$

Donc

$$\mathcal{M} \not\models (A \leftrightarrow B) \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \models A \text{ et } \mathcal{M} \not\models B \quad \text{ou} \quad \mathcal{M} \not\models A \text{ et } \mathcal{M} \models B$$

$(A \leftrightarrow B)$ est une **équivalence** et se lit « A équivaut à B », « A est équivalent à B » ou encore « A ssi B ». $\leftrightarrow$ est l'*équivaluateur*.

Les tables suivantes résument ces interprétations :

A	$\neg A$
1	*0*
0	*1*

A	B	$(A \wedge B)$	$(A \vee B)$	$(A \to B)$	$(A \leftrightarrow B)$
1	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*1*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*	*1*	*0*
0	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*

Les définitions précédentes montrent que la valeur d'un énoncé dans un modèle est complètement déterminée quand on connaît la valeur des symboles propositionnels qui apparaissent dans cet énoncé. Pour calculer la valeur d'un énoncé complexe, on part de la valeur des symboles propositionnels et on calcule de proche en proche la valeur des composantes de l'énoncé jusqu'à ce qu'on arrive à l'énoncé lui-même.

Exemple. *Calculons la valeur de l'énoncé*

$$((\neg(p \to q) \vee r) \wedge (\neg p \to r))$$

dans $\mathcal{M}$*, sachant que* $p_{\mathcal{M}} = 1$*,* $q_{\mathcal{M}} = 0$ *et que* $r_{\mathcal{M}} = 1$*.*

Partant de $\mathcal{M} \models p$*,* $\mathcal{M} \not\models q$ *et* $\mathcal{M} \models r$*, on obtient successivement :*

$\mathcal{M} \not\models \neg p$

$\mathcal{M} \models (\neg p \to r)$

$\mathcal{M} \not\models (p \to q)$

$\mathcal{M} \models \neg(p \to q)$

$\mathcal{M} \models (\neg(p \to q) \vee r)$

$\mathcal{M} \models ((\neg(p \to q) \vee r) \wedge (\neg p \to r))$

3 Tautologies et contradictions

Une **tautologie** est une loi logique d'un langage propositionnel. Si l'on se rappelle qu'une loi logique est un énoncé vrai dans tous les modèles, il suffira par conséquent, pour montrer qu'un énoncé est une tautologie, d'envisager les différents modèles possibles. Or, la valeur d'un énoncé propositionnel dépend uniquement de la valeur des symboles propositionnels qui interviennent dans cet énoncé. Donc, pour montrer qu'un énoncé est une tautologie, il suffira d'envisager les différentes valeurs que l'on peut assigner aux symboles propositionnels qui apparaissent effectivement dans cet énoncé.

Si nous convenons de désigner par $\mathcal{L}(A)$, le langage dont les symboles propositionnels sont exactement ceux qui figurent dans l'énoncé A, il suffira donc, pour montrer que A est une loi logique, de considérer les différents modèles pour $\mathcal{L}(A)$.

Le nombre de ces modèles dépend du nombre de symboles propositionnels se trouvant dans A.

Si A ne contient qu'un symbole propositionnel, disons 'p', alors il y a deux modèles pour $\mathcal{L}(A)$, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, tels que

$$p_{\mathcal{M}_1} = 1 \quad \text{et} \quad p_{\mathcal{M}_2} = 0$$

Si A contient exactement deux symboles propositionnels, disons 'p' et 'q', il y a quatre modèles pour $\mathcal{L}(A)$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ et $\mathcal{M}_4$, tels que :

$$\begin{array}{lcl} p_{\mathcal{M}_1} = 1 & \text{et} & q_{\mathcal{M}_1} = 1 \\ p_{\mathcal{M}_2} = 1 & \text{et} & q_{\mathcal{M}_2} = 0 \\ p_{\mathcal{M}_3} = 0 & \text{et} & q_{\mathcal{M}_3} = 1 \\ p_{\mathcal{M}_4} = 0 & \text{et} & q_{\mathcal{M}_4} = 0 \end{array}$$

En général, si A contient exactement n symboles propositionnels distincts, il y a 2^n modèles pour $\mathcal{L}(A)$. Et comme il n'y a qu'un nombre fini de modèles à envisager, on peut en principe décider, pour chaque énoncé, s'il est une tautologie ou non.

$\triangleright$ *Quoique possible* a priori*, un tel calcul n'est pas toujours réalisable rapidement (un énoncé comprenant* 30 *symboles propositionnels distincts demanderait l'examen de* 1.073.741.824 *modèles).*

En vue de simplifier la présentation des calculs, nous utilisons des tables de vérité. Pour dresser une telle table, nous écrivons sur une première ligne les n différents symboles propositionnels apparaissant dans l'énoncé, suivis des différentes composantes de cet énoncé, ainsi que de l'énoncé lui-même. En dessous, nous écrivons 2^n lignes de 0 et de 1, correspondant aux différents modèles possibles. Ces lignes s'obtiennent en écrivant sous chaque expression sa valeur qui est calculée de proche en proche. Pour que l'énoncé soit une tautologie, il faut et il suffit que sa valeur soit 1 à toutes les lignes.

Exemples de tautologies

Principe d'identité

p	$(p \rightarrow p)$
1	*1*
0	*1*

Tiers-exclu

q	$\neg q$	$(q \vee \neg q)$
1	*0*	*1*
0	*1*	*1*

Non-contradiction

p	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$	$\neg(p \wedge \neg p)$
1	*0*	*0*	*1*
0	*1*	*0*	*1*

Loi de Peirce

p	q	$(p \to q)$	$((p \to q) \to p)$	$(((p \to q) \to p) \leftrightarrow p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

$p\ q\ r$	$(p \wedge q)$	$((p \wedge q) \to r)$	$(q \to r)$	$(p \to (q \to r))$	$(((p \wedge q) \to r) \leftrightarrow (p \to (q \to r)))$
1 1 1	1	1	1	1	1
1 1 0	1	0	0	0	1
1 0 1	0	1	1	1	1
1 0 0	0	1	1	1	1
0 1 1	0	1	1	1	1
0 1 0	0	1	0	1	1
0 0 1	0	1	1	1	1
0 0 0	0	1	1	1	1

La contraposition

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(p \to q)$	$(\neg q \to \neg p)$	$((p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p))$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

Une **contradiction** est un énoncé qui n'est vrai dans aucun modèle.

Par conséquent, un énoncé est contradictoire s'il a la valeur 0 à toutes les lignes de sa table de vérité. Donc la négation d'une tautologie est une contradiction et la négation d'une contradiction est une tautologie.

Exemples de contradictions

$(p \wedge \neg p)$, $(p \leftrightarrow \neg p)$, $((\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q))$, $\neg(p \leftrightarrow p)$.

4 Raisonnement valide et implication

4.1 Le modus ponens

Théorème 2.1 *Si $A_1, \ldots, A_n \vdash (B \to C)$ et $A'_1, \ldots, A'_m \vdash B$ sont des raisonnements valides, alors $A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m \vdash C$ est également valide.*

DÉMONSTRATION

Supposons que

$$A_1, \ldots, A_n \vdash (B \to C) \text{ est valide} \tag{1}$$

et que

$$A'_1, \ldots, A'_m \vdash B \text{ est valide} \tag{2}$$

Soit un modèle $\mathcal{M}$ de chacun des énoncés $A_1, \ldots, A_n, A'_1, \ldots, A'_m$. Il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est aussi modèle de C.

Puisque $\mathcal{M} \models A_1, \ldots, \mathcal{M} \models A_n$, on a $\mathcal{M} \models (B \to C)$, par (1). Par la définition de la vérité de l'implication,

$$\mathcal{M} \not\models B \text{ et/ou } \mathcal{M} \models C \tag{3}$$

D'autre part, comme $\mathcal{M} \models A'_1, \ldots, \mathcal{M} \models A'_m$, on a, par (2),

$$\mathcal{M} \models B \tag{4}$$

(3) et (4) entraînent $\mathcal{M} \models C$. ∎

Vu l'équivalence de $\models C$ et de la validité de $\vdash C$, indiquée dans la section 3, le théorème permet de déduire le :

Corollaire 2.2

Si $\models (B \to C)$ et si $A'_1, \ldots, A'_m \vdash B$ est valide, alors $A'_1, \ldots, A'_m \vdash C$ est valide.

Si $A_1, \ldots, A_n \vdash (B \to C)$ est valide et si $\models B$, alors $A_1, \ldots, A_n \vdash C$ est valide.

Si $\models (B \to C)$ et si $\models B$, alors $\models C$.

4.2 Conjonctions

Soit une suite d'énoncés $A_1, \ldots, A_n$, nous définissons la conjonction généralisée de ces énoncés, notée

$$\bigwedge(A_1, \ldots, A_n)$$

par récurrence sur n :

$$\begin{array}{ll} \text{si } n = 1, & \bigwedge(A_1) \equiv A_1, \\ \text{si } n > 1, & \bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \equiv (\bigwedge(A_1, \ldots, A_{n-1}) \wedge A_n). \end{array}$$

Exemple

$\bigwedge(p, q, r, s)$ *est* $(((p \wedge q) \wedge r) \wedge s)$

$\bigwedge(A, B)$ *n'est autre que* $(A \wedge B)$

On prouvera facilement que :

$$\mathcal{M} \models \bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \ \text{ ssi } \ \mathcal{M} \models A_i, \text{pour tout } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq n.$$

De là on tire que :

$$\mathcal{M} \not\models \bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \ \text{ ssi } \ \mathcal{M} \not\models A_i, \text{pour au moins un } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq n.$$

Nous pouvons maintenant justifier les affirmations de l'introduction (section 3).

Théorème 2.3 *Si* $n > 0$, *alors*

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C \textit{ est valide ssi } \models (\bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \rightarrow C).$$

Démonstration

Raisonnons par l'absurde.

a. Supposons que

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C \text{ est valide} \tag{1}$$

et que

$$\not\models (\bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \rightarrow C) \tag{2}$$

D'après (2), il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que :

$$\mathcal{M} \models \bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \tag{3}$$

et

$$\mathcal{M} \not\models C \tag{4}$$

(3) entraîne que $\mathcal{M} \models A_i$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$.

D'où $\mathcal{M} \models C$, par la supposition (1). Ce qui contredit (4).

b. Supposons que

$$\models (\bigwedge\!\!\!\bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \to C) \tag{1}$$

et que

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C \text{ n'est pas valide} \tag{2}$$

D'après (2), il existe un modèle $\mathcal{M}$ tel que :

$$\mathcal{M} \models A_i, \qquad 1 \leq i \leq n \tag{3}$$

et

$$\mathcal{M} \not\models C \tag{4}$$

(3) entraîne que

$$\mathcal{M} \models \bigwedge\!\!\!\bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \tag{5}$$

(4) et (5) contredisent la supposition (1). ■

▷ *En utilisant la remarque faite à la section 2.3, on peut encore donner la démonstration suivante. Si $n > 0$, alors dire que*

$$A_1, \ldots, A_n \vdash C \textit{ est valide}$$

équivaut à chacune des affirmations suivantes :

- *si $\mathcal{M} \models A_i$, pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$, alors $\mathcal{M} \models C$, pour tout $\mathcal{M}$;*
- *si $\mathcal{M} \models \bigwedge\!\!\!\bigwedge(A_1, \ldots, A_n)$ alors $\mathcal{M} \models C$, pour tout $\mathcal{M}$;*
- *$\mathcal{M} \models (\bigwedge\!\!\!\bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \to C)$, pour tout $\mathcal{M}$;*
- *$\models (\bigwedge\!\!\!\bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \to C)$.*

3 Énoncés et lois logiques des langages prédicatifs

1 Grammaire des langages prédicatifs

Les langages prédicatifs sont une généralisation des langages propositionnels. La liste des signes *propres* de l'alphabet peut comprendre, outre des symboles propositionnels, des symboles fonctionnels et des symboles prédicatifs. Aux symboles communs à tous ces langages, il faut ajouter les variables, les constantes, ainsi que deux nouveaux signes logiques. La syntaxe décrit exhaustivement les règles qui permettent de construire les énoncés de ces langages. Elle le fera par le biais de la notion de formule.

1.1 Alphabet

— Un ensemble non vide de symboles à choisir dans les listes infinies suivantes :
  – symboles propositionnels : p, q, r, s, p_1, q_1, r_1, s_1, p_2, $q_2, \ldots$
  – symboles prédicatifs n–aires ($n > 0$) : p^n, q^n, r^n, s^n, p_1^n, q_1^n, r_1^n, s_1^n, p_2^n, $q_2^n, \ldots$

— Pour tout $n > 0$, un ensemble de symboles fonctionnels n–aires, à choisir dans la liste infinie suivante : f^n, g^n, h^n, f_1^n, g_1^n, h_1^n, f_2^n, $g_2^n, \ldots$

— constantes : a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1, $a_2, \ldots$

— variables : x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, y_2, x_3, y_3, $z_3, \ldots$

— symboles logiques : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$

— parenthèses : (,)

1.2 Syntaxe

La notion de terme

— Toute variable ou constante est un terme.

— Une suite constituée d'un symbole fonctionnel n–aire suivi de n termes est un terme[1].

La notion de formule

— Tout symbole propositionnel[2] est une formule.

— Une suite constituée d'un symbole prédicatif n–aire suivi de n termes est une formule.

— Si A et B sont des formules, alors $\neg A$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ et $(A \leftrightarrow B)$ sont des formules.

— Si A est une formule, et si α est une variable, alors $\forall \alpha A$ et $\exists \alpha A$ sont des formules.

Les notions de terme clos et d'énoncé

Un **terme clos** est un terme dans lequel ne figure aucune variable.

Une occurrence d'une variable α dans une formule de la forme $\forall \alpha A$ ou $\exists \alpha A$ est dite *quantifiée* ou **liée**. Elle est **libre** sinon.

Un **énoncé** est une formule dont toutes les occurrences de variables sont quantifiées.

Exemples de formules

$p^1 x$, $r^2_{27} y_{64} a$, $\neg(p^1 x \rightarrow r^2_{27} y_{64} a)$, $\forall x\, (\neg p^1 x \rightarrow r^2_{27} y_{64} a)$, $\exists y_{64} \forall x\, (p^1 x \rightarrow r^2_{27} y_{64} a)$, $\forall x \exists y_{63}\, (p^1 x \rightarrow r^2_{27} y_{64} a)$, $\forall x \exists y \exists z\, p$, $(\forall x\, p^1 x \wedge p^1 x)$, $\forall x\, (p^1 x \wedge p^1 x)$, $\forall x\, (p^1 x \wedge p^1 a_7)$, $\forall x\, (\forall x\, p^1 x \wedge p^1 x)$.

Dans la première de ces formules, il y a une occurrence libre de x, dans la deuxième et dans la quatrième, une occurrence libre de y_{64}, dans la troisième, une occurrence libre de x et de y_{64}. Aucune de ces quatre formules n'est un énoncé. Dans la cinquième formule, toutes les occurrences des variables sont quantifiées. Cette formule est donc un énoncé. La sixième formule n'est pas un énoncé car la variable y_{64} y figure librement. La septième est un énoncé. Dans la huitième, les deux premières occurrences de x sont liées alors que la troisième est libre. Cette formule n'est pas un énoncé. Les trois dernières formules sont des énoncés.

1. Si le langage n'a pas de symbole fonctionnel, les seuls termes clos sont les constantes. Pour la suite, il est d'ailleurs recommandé de se limiter, en première lecture, à un tel langage.
2. Les symboles propositionnels peuvent être identifiés à des symboles prédicatifs nulaires.

La substitution

Soient une formule A, une constante ou variable α et un terme clos t. On écrira :

$$A[\alpha := t]$$

pour désigner la formule obtenue en substituant, dans A, t à α, si α est une constante, et t aux occurrences libres de α, si α est une variable.

Deux propriétés fondamentales de la substitution :

$A[\alpha := \alpha]$ *est identique à* A ;

$A[\alpha := t]$ *est identique à* A*, si* α *n'a pas d'occurrences libres dans* A*.*

Exemples

$p^1x[x := a]$ *est identique à* p^1a

$(\exists xp^1x \vee p^1x)[x := a]$ *est identique à* $(\exists xp^1x \vee p^1a)$

$(\exists xp^1x \vee r^2ax)[x := a]$ *est identique à* $(\exists xp^1x \vee r^2aa)$

$(\exists xp^1x \vee r^2ax)[x := a][a := b][y := c]$ *est identique à*
$(\exists xp^1x \vee r^2bb)$

$(\exists xp^1x \vee r^2ax)[a := b][x := a][y := c]$ *est identique à*
$(\exists xp^1x \vee r^2ba)$

2 Modèles

À chaque symbole propositionnel, nous ferons correspondre une des valeurs 1 ou 0. À chaque constante correspondra un objet pris dans un certain ensemble appelé **univers**. À chaque symbole fonctionnel n–aire correspondra une fonction n–aire définie sur l'univers et à valeurs dans l'univers. À chaque symbole prédicatif unaire (1–aire) correspondra un ensemble d'objets de l'univers. À chaque symbole prédicatif binaire (2–aire) correspondra un ensemble de couples d'objets de l'univers.

En général, à chaque symbole prédicatif n–aire, on associera un ensemble de n–uples de l'univers. Ces ensembles de n–uples sont appelés **prédicats** n*–aires.*

▷ 1. *Toute propriété définie sur un ensemble possède une* ***extension****. L'extension est l'ensemble des objets qui vérifient cette propriété. Ainsi, à la propriété*

« pair », définie sur l'ensemble des nombres entiers, correspond l'ensemble des nombres pairs, qui en est l'extension. À la propriété « jaune », définie sur l'ensemble des objets colorés, correspond l'ensembles des objets jaunes. Cependant, tout ensemble ne correspond pas nécessairement à une propriété. On ne dispose pas nécessairement d'un concept qui qualifie les objets d'un ensemble donné et ceux-là seulement. Rien n'empêche pourtant de supposer qu'il en est ainsi. C'est ce que nous ferons en considérant ***tout*** *sous-ensemble d'un ensemble comme un prédicat unaire défini sur cet ensemble.*

*De même, l'ensemble des couples d'objets tel que le premier est dans une certaine relation avec le second est l'****extension*** *de cette relation. L'ensemble des couples de nombres tel que le premier est inférieur au second est l'extension de la relation d'ordre ; l'ensemble des couples d'individus tel que le premier aime le second est l'extension de la relation d'amour. De même que dans le cas des propriétés, on appellera relation ou prédicat binaire sur un ensemble tout ensemble de couples formés d'éléments de cet ensemble.*

Ces remarques peuvent être généralisées aux prédicats n–aires : un prédicat n–aire est un ensemble de n–uples.

2. Le couple formé par les objets α et β est noté : $\langle\alpha,\beta\rangle$. $\langle\alpha,\beta\rangle$ n'est pas toujours la même chose que $\langle\beta,\alpha\rangle$, ni $\langle\alpha,\alpha\rangle$ la même chose que α. Pour que la notion de couple soit convenablement définie, il faut que, quels que soient α, β, α', β', $\langle\alpha,\beta\rangle = \langle\alpha',\beta'\rangle$ implique que $\alpha = \alpha'$ et $\beta = \beta'$. La définition ensembliste de Wiener-Kuratowski qui identifie $\langle\alpha,\beta\rangle$ à l'ensemble $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$ a cette propriété.

Le n–uple, pour $n > 2$, est définissable par récurrence à partir du couple comme suit : $\langle\alpha_1,\dots\alpha_n\rangle = \langle\langle\alpha_1,\dots\alpha_{n-1}\rangle,\alpha_n\rangle$. On vérifie que $\langle\alpha_1,\dots\alpha_n\rangle = \langle\alpha'_1,\dots\alpha'_n\rangle$ implique $\alpha_i = \alpha'_i$, pour $1 \leq i \leq n$.

Le 1-uple $\langle\alpha\rangle$ peut être identifié à α et le 0-uple $\langle\quad\rangle$ à l'ensemble vide[3].

Soit un langage $\mathcal{L}$. Un **modèle** pour $\mathcal{L}$ est la donnée d'une structure pour $\mathcal{L}$ et d'une interprétation des symboles propres de $\mathcal{L}$ dans cette structure.

Un **univers** est un ensemble non vide. Une **structure** pour $\mathcal{L}$ est composée d'un univers, d'un ensemble de prédicats sur cet univers et d'un ensemble de fonctions définies sur cet univers et à valeurs dans cet univers. Pour chaque $n > 0$, si $\mathcal{L}$ possède des symboles prédicatifs n-aires, la structure doit posséder au moins un prédicat n–aire. Pour chaque $n > 0$, si $\mathcal{L}$ possède des symboles fonctionnels n–aires, la structure

3. Si par souci d'uniformité, on avait assimilé les symboles propositionnels à des symboles prédicatifs nulaires, on aurait pu définir les prédicats nulaires comme des ensembles de 0–uples. Comme il n'y a qu'un seul 0–uple, il y a exactement deux prédicats 0–aires, à savoir $\emptyset$ et $\{\emptyset\}$ que l'on aurait pu considérer comme étant le faux et le vrai, respectivement.

doit posséder au moins une fonction n-aire.

Une **interprétation** de $\mathcal{L}$ assigne à chaque constante un objet de l'univers, à chaque symbole fonctionnel n–aire de $\mathcal{L}$ une fonction n–aire définie sur l'univers, à chaque symbole prédicatif n–aire de $\mathcal{L}$ un prédicat n–aire et à chaque symbole propositionnel de $\mathcal{L}$ une des valeurs 1 ou 0.

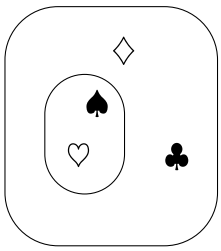
L'univers du modèle $\mathcal{M}$ est noté $|\mathcal{M}|$; l'interprétation du symbole α est notée $\alpha_{\mathcal{M}}$.

Exemples

1. *Soit $\mathcal{L}_1$ le langage ayant pour seul symbole propre, le symbole prédicatif unaire p^1. Le couple*

$$\langle\{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}, \{\spadesuit, \heartsuit\}\rangle$$

est une structure pour $\mathcal{L}_1$, dont l'univers est l'ensemble $\{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ et dont le seul prédicat (unaire) est $\{\spadesuit, \heartsuit\}$:

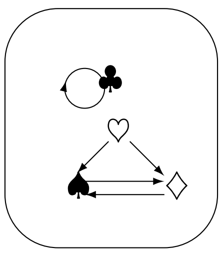


En faisant correspondre, d'une part, $\clubsuit$ à la constante a, $\diamondsuit$ à b, $\spadesuit$ à c, $\heartsuit$ aux autres constantes et, d'autre part, $\{\spadesuit, \heartsuit\}$ à p^1, on obtient un modèle, $\mathcal{N}$, pour $\mathcal{L}_1$.

2. *Soit $\mathcal{L}_2$ le langage ayant pour seul symbole propre, le symbole prédicatif binaire p^2. La structure*

$$\langle\{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}, \{\langle\spadesuit, \diamondsuit\rangle, \langle\heartsuit, \diamondsuit\rangle, \langle\clubsuit, \clubsuit\rangle, \langle\heartsuit, \spadesuit\rangle, \langle\diamondsuit, \spadesuit\rangle\}\rangle$$

est une structure pour $\mathcal{L}_2$, dont l'univers est à nouveau l'ensemble $\{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ et dont le seul prédicat est cette fois le prédicat binaire $\{\langle\spadesuit, \diamondsuit\rangle, \langle\heartsuit, \diamondsuit\rangle, \langle\clubsuit, \clubsuit\rangle, \langle\heartsuit, \spadesuit\rangle, \langle\diamondsuit, \spadesuit\rangle\}$:



On obtiendra un modèle, $\mathcal{C}$, pour $\mathcal{L}_2$ si on fait correspondre ce prédicat au symbole p^2 et si on associe à chaque constante un objet de l'univers.

3. *Soit $\mathcal{L}_3$ le langage dont les symboles propres sont p^1, r^2, f^1 et g^2. La structure*

$$\langle \mathbb{Z}, P, S, Q, R \rangle$$

où $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers, P l'ensemble des nombres pairs, S la fonction successeur *($S(n) = n+1$), Q la fonction* addition *($Q(n,m) = n+m$), et R la relation d'égalité ($\{ \langle n,m \rangle \mid n = m \}$), est une structure pour $\mathcal{L}_3$. On définit une interprétation de $\mathcal{L}_3$ dans cette structure, en faisant correspondre le nombre 0 aux constantes a, b, c, d, c_1, d_1, c_2, d_2, ..., le nombre i à la constante a_i, le nombre $-i$ à la constante b_i (pour tout $i \geq 1$) ; les prédicats P et R aux symboles p^1 et r^2 et les fonctions S et Q aux symboles f^1 et g^2, respectivement. On a ainsi défini un modèle $\mathcal{Z}$ pour $\mathcal{L}_3$.*

Modifions l'interprétation de $\mathcal{Z}$ en faisant correspondre à chaque constante le nombre 0. Nous obtenons ainsi un autre modèle, $\mathcal{Z}^*$, pour $\mathcal{L}_3$.

3 La notion de vérité

La définition inductive de $\mathcal{M} \models A$ que nous allons élaborer prolonge celle de la section 2.

3.1 Interprétation des termes clos [4]

Nous étendons l'interprétation constitutive du modèle à tous les termes clos du langage. Cette interprétation sera encore notée $..._{\mathcal{M}}$. Elle se définit inductivement comme suit :

$$Ft_1 \dots t_{n\mathcal{M}} = F_{\mathcal{M}}(t_{1\mathcal{M}}, \dots, t_{n\mathcal{M}}),$$

pour tout symbole fonctionnel n–aire F et tous termes clos $t_1, \dots, t_n$.

3.2 Énoncés élémentaires

Les énoncés élémentaires sont ceux définis par les deux premières règles de syntaxe.

Si A est un symbole propositionnel, alors

$$\mathcal{M} \models A \text{ ssi } A_{\mathcal{M}} = 1$$

4. Comme signalé en note 1 de la page 34, on est dispensé de cette étape quand le langage ne contient pas de symbole fonctionnel.

Si A est de la forme $Pt_1 \dots t_n$, où P est un symbole prédicatif n-aire et $t_1, \dots, t_n$ des termes clos, alors

$$\mathcal{M} \models Pt_1 \dots t_n \text{ ssi } \langle t_{1\mathcal{M}}, \dots, t_{n\mathcal{M}} \rangle \in P_{\mathcal{M}}$$

On a donc également :

$$\mathcal{M} \not\models Pt_1 \dots t_n \text{ ssi } \langle t_{1\mathcal{M}}, \dots, t_{n\mathcal{M}} \rangle \notin P_{\mathcal{M}}$$

Exemples. *Considérons à nouveau les modèles $\mathcal{N}$, $\mathcal{Z}$ et $\mathcal{Z}^*$. On a :*

$\mathcal{N} \not\models p^1a$, $\mathcal{N} \not\models p^1b$, $\mathcal{N} \models p^1c, \mathcal{N} \models p^1a_1$;

$\mathcal{Z} \models p^1a$, $\mathcal{Z} \not\models r^2f^1aa$, $\mathcal{Z} \not\models r^2f^1ab$, $\mathcal{Z} \models r^2f^1b_1a$, $\mathcal{Z} \models r^2g^2b_{27}a_{32}a_5$, $\mathcal{Z} \not\models r^2g^2a_2a_3a_6$;

$\mathcal{Z}^* \models p^1a$, $\mathcal{Z}^* \not\models r^2f^1aa$, $\mathcal{Z}^* \not\models r^2f^1ab$, $\mathcal{Z}^* \not\models r^2f^1b_1a$, $\mathcal{Z}^* \models r^2g^2b_{27}a_{32}a_5$, $\mathcal{Z}^* \models r^2g^2a_2a_3a_6$, $\mathcal{Z}^* \not\models r^2g^2f^1f^1af^1f^1f^1af^1f^1f^1f^1f^1f^1a$.

3.3 Foncteurs de vérité

Les définitions ci-après reprennent (pour les nouveaux types de langages et de modèles) celles de la section 2 :

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M} \models \neg B & \text{ssi} & \mathcal{M} \not\models B, \\
\mathcal{M} \models (B \wedge C) & \text{ssi} & \mathcal{M} \models B \text{ et } \mathcal{M} \models C, \\
\mathcal{M} \models (B \vee C) & \text{ssi} & \mathcal{M} \models B \text{ et/ou } \mathcal{M} \models C, \\
\mathcal{M} \models (B \rightarrow C) & \text{ssi} & \mathcal{M} \not\models B \text{ et/ou } \mathcal{M} \models C, \\
\mathcal{M} \models (B \leftrightarrow C) & \text{ssi} & \mathcal{M} \models B \text{ et } \mathcal{M} \models C \quad \text{ou} \quad \mathcal{M} \not\models B \text{ et } \mathcal{M} \not\models C.
\end{array}$$

3.4 Énoncés généraux

Un énoncé est **général** s'il commence par un des symboles $\forall$, $\exists$. Il est *universel*, s'il commence par $\forall$ et *existentiel*, s'il commence par $\exists$. Si α est une variable, l'expression $\forall\alpha$ est un **quantificateur universel** et $\exists\alpha$ est un **quantificateur existentiel**.

La définition de la vérité des énoncés généraux que nous allons donner est délicate. Quelques propos introductifs s'imposent. Considérons, par exemple, l'énoncé universel $\forall x\, r^2ax$. Nous pouvons définir $\mathcal{M} \models \forall x\, r^2ax$ comme signifiant que pour tout objet o de $|\mathcal{M}|$, $\langle a_{\mathcal{M}}, o \rangle \in r^2_{\mathcal{M}}$; autrement dit, $\{a_{\mathcal{M}}\} \times |\mathcal{M}| \subseteq r^2_{\mathcal{M}}$. Malheureusement, une définition de ce type ne peut pas s'étendre à tous les énoncés généraux, $\forall\alpha A$, car ces énoncés n'ont pas toujours une structure aussi simple.

Cependant, quand nous disons que $\forall\alpha\, A$ est vrai dans $\mathcal{M}$, nous entendons signifier que, dans $\mathcal{M}$, *tout objet vérifie ce que* A raconte *à propos de* α, ou mieux, *tout objet vérifie l'énoncé que l'on obtient en remplaçant, dans* A*,* α *par un nom de cet objet.* Ceci peut encore se formuler comme suit : $\mathcal{M} \models \forall\alpha\, A$ ssi pour tout objet $o \in |\mathcal{M}|$ et pour tout terme clos t tel que $t_{\mathcal{M}} = o$, on a $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$ ou, plus brièvement : $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$, pour tout terme clos t. Cette définition serait acceptable si tout objet de $|\mathcal{M}|$ avait un nom dans le langage, c'est-à-dire si pour chaque o de $|\mathcal{M}|$ il y avait un terme clos t tel que $t_{\mathcal{M}} = \heartsuit$. Or, il n'en est pas toujours ainsi : le modèle $\mathcal{Z}^*$ est un contre-exemple. Cette définition n'est donc pas bonne. Pour s'en convaincre rapidement, supposons que dans $\mathcal{C}$, chaque constante soit envoyée sur $\diamondsuit$. Alors $\mathcal{C} \models \neg p^2tt$, soit $\mathcal{C} \models \neg p^2xx[x := t]$, pour tout terme clos t. Et pourtant, on ne s'attendra pas à ce que $\mathcal{C} \models \forall x\, \neg p^2xx$, puisque $\langle \clubsuit, \clubsuit \rangle \in p^2_{\mathcal{C}}$.

Nous avons tenté, en la formulant, de parcourir la totalité des objets de l'univers en parcourant la totalité des noms du langage. Nous nous sommes alors heurtés au fait qu'il pourrait y avoir des objets sans nom. Cependant rien n'est absolument ineffable, car il est toujours possible de viser n'importe quel objet de l'univers, même s'il n'est pas nommé dans le langage. Il suffit simplement pour cela de varier l'interprétation d'une constante. La définition que nous donnerons sera alors une version légèrement améliorée de :

> $\mathcal{M} \models \forall\alpha\, A$ ssi pour tout élément o de $|\mathcal{M}|$, la variante de $\mathcal{M}$ qui envoie β sur o est modèle de $A[\alpha := \beta]$ — β étant une constante qui ne figure pas dans $\forall\alpha\, A$.

La condition que β ne figure pas dans $\forall\alpha\, A$ vise à préserver l'interprétation donnée aux constantes de $\forall\alpha\, A$.

Remarquons à ce propos que, quel que soit l'énoncé A, il y a toujours une constante qui n'apparaît pas dans A, car le nombre de constantes est infini, alors que celui des symboles de A est fini. C'est du reste en partie pour cette raison que l'on a introduit une infinité de constantes dans *chaque* langage. Afin que la définition ne soit pas suspecte d'ambiguïté, nous conviendrons que la constante β est la première de la liste de l'alphabet qui ne figure pas dans $\forall\alpha\, A$ ou, ce qui revient au même, dans A.

Revenons à notre exemple initial pour éprouver la définition que nous allons donner. On voit clairement que :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models \forall x\, r^2ax & \text{ssi} & \text{pour tout } o \in |\mathcal{M}|, \text{ la variante de } \mathcal{M} \text{ envoyant} \\ & & b \text{ sur } o \text{ est modèle de } r^2ab\,; \\ & \text{ssi} & \text{pour tout } o \in |\mathcal{M}|,\ \langle a_{\mathcal{M}'}, b_{\mathcal{M}'}\rangle \in r^2_{\mathcal{M}'}, \\ & & \text{pour la variante } \mathcal{M}' \text{ de } \mathcal{M} \text{ envoyant } b \text{ sur } o\,; \\ & \text{ssi} & \text{pour tout } o \in |\mathcal{M}|,\ \langle a_{\mathcal{M}}, b_{\mathcal{M}'}\rangle \in r^2_{\mathcal{M}}, \\ & & \text{pour la variante } \mathcal{M}' \text{ de } \mathcal{M} \text{ envoyant } b \text{ sur } o\,; \\ & \text{ssi} & \text{pour tout } o \in |\mathcal{M}|,\ \langle a_{\mathcal{M}}, o\rangle \in r^2_{\mathcal{M}}. \end{array}$$

Dans cet exemple b joue le rôle de β, on aurait pu prendre aussi bien c, d, ... mais pas a.

Si α est une constante et o est un élément de $|\mathcal{M}|$, nous noterons

$$\mathcal{M}[\alpha \mapsto o]$$

le modèle qui ne peut différer de $\mathcal{M}$ que par le fait que $\alpha_{\mathcal{M}} = o$. Plus exactement, $\mathcal{M}[\alpha \mapsto o]$ est le modèle de même structure sous-jacente que $\mathcal{M}$ et dont l'interprétation est définie par $\alpha_{\mathcal{M}[\alpha\mapsto o]} = o$ et $\beta_{\mathcal{M}[\alpha\mapsto o]} = \beta_{\mathcal{M}}$, si β est un symbole propre du langage ou une constante autre que α. On constate que $\mathcal{M}[\alpha \mapsto \alpha_{\mathcal{M}}]$ est identique à $\mathcal{M}$.

Énoncés universels

Si A est de la forme $\forall\alpha\, B$ et si β est la première constante de la liste des constantes qui ne figure pas dans B, alors $\mathcal{M} \models A$ est défini comme suit :

$$\mathcal{M} \models \forall\alpha\, B \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models B[\alpha := \beta], \text{ pour tout } o \in |\mathcal{M}|.$$

Énoncés existentiels

Si A est de la forme $\exists\alpha\, B$ et si β est la première constante qui ne figure pas dans B, alors $\mathcal{M} \models A$ est défini comme suit :

$$\mathcal{M} \models \exists\alpha\, B \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models B[\alpha := \beta], \text{ pour au moins un } o \in |\mathcal{M}|.$$

Exemples

$\mathcal{N} \models \exists x\, p^1 x$, $\mathcal{N} \models \neg\forall x\, p^1 x$.

$\mathcal{C} \models \forall y \exists x\, p^2 yx$, $\mathcal{C} \models \neg\exists x \forall y\, p^2 yx$,
$\mathcal{C} \models \forall x \forall y\, (\forall z\, (p^2 zx \leftrightarrow p^2 zy) \rightarrow \forall z\, (p^2 xz \leftrightarrow p^2 yz))$,
$\mathcal{C} \models \exists y \forall x\, (p^2 xy \leftrightarrow p^2 xx)$.

$\mathcal{Z} \models \forall y\, \exists x\, r^2 f^1 yx$, $\mathcal{Z} \models \neg\exists x \forall y\, r^2 f^1 yx$, $\mathcal{Z} \models \forall x \forall y\, (r^2 f^1 xy \rightarrow \exists z\, r^2 g^2 xzy)$,
$\mathcal{Z} \models \forall x \forall y\, (f^1 x = y \leftrightarrow \forall z (r^2 f^1 az \rightarrow r^2 g^2 xzy))$,
$\mathcal{Z} \models \forall x \forall y\, (r^2 f^1 xy \leftrightarrow \exists z (f^1 a = z \wedge r^2 g^2 xzy))$,
$\mathcal{Z} \models \forall x \forall y\, (f^1 x = y \leftrightarrow r^2 g^2 x f^1 ay)$, $\mathcal{Z} \models \forall x\, r^2 f^1 x g^2 x f^1 a$.

Ces définitions entraînent que, si β est la première constante ne figurant pas dans B,

$$\mathcal{M} \not\models \forall\alpha\, B \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M}[\beta \mapsto o] \not\models B[\alpha := \beta], \text{ pour au moins un } o \in |\mathcal{M}|,$$

et

$$\mathcal{M} \not\models \exists\alpha\, B \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M}[\beta \mapsto o] \not\models B[\alpha := \beta], \text{ pour tout } o \in |\mathcal{M}|.$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
&\models (\neg\forall\alpha\, B \leftrightarrow \exists\alpha\, \neg B),\\
&\models (\neg\exists\alpha\, B \leftrightarrow \forall\alpha\, \neg B),\\
&\models (\forall\alpha\, B \leftrightarrow \neg\exists\alpha\, \neg B),\\
&\models (\exists\alpha\, B \leftrightarrow \neg\forall\alpha\, \neg B).
\end{aligned}$$

4 Tautologies

Nous étendons ici aux langages prédicatifs la notion de tautologie du chapitre 2.

Une *combinaison propositionnelle* des énoncés $A_1, \ldots, A_n$ est un énoncé formé en combinant ces énoncés (pas obligatoirement tous) à l'aide des symboles logiques des langages propositionnels : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$.

Ainsi les énoncés

$$\begin{gathered}
((\neg\forall x\, p^1 x \vee \exists x\, p^1 x) \wedge ((p^2 ac \rightarrow q^3 cda) \leftrightarrow \forall x\, (\neg p^1 ax \leftrightarrow p^1 x)))\\
((\exists x\, p^1 x \vee (\exists x\, p^1 x \wedge \neg\forall x\, p^1 x)) \rightarrow (p^2 ac \leftrightarrow \exists x\, p^1 x))\\
((\forall x\, p^1 x \rightarrow \neg p^2 ac) \vee \exists x\, p^1 x)\\
\exists x\, p^1 x
\end{gathered}$$

sont des combinaisons propositionnelles des énoncés $\forall x\, (\neg p^1 ax \leftrightarrow p^1 x)$, $\forall x\, p^1 x$, $\exists x\, p^1 x$, $p^2 ac$ et $q^3 cda$.

Une combinaison propositionnelle des $A_1, \ldots, A_n$ n'est donc rien d'autre qu'un énoncé résultant de la substitution de (certains des) $A_1, \ldots, A_n$ aux symboles propositionnels d'un énoncé propositionnel donné.

$\triangleright$ *Tout énoncé est une combinaison propositionnelle de lui-même.*

Tout énoncé est une combinaison propositionnelle d'un unique ensemble d'énoncés dont chacun est soit élémentaire soit général.

Si à chacun des énoncés $A_1, \ldots, A_n$ on associe soit le nombre 0 soit le nombre 1, on peut utiliser les tables de vérité pour associer un des nombres 0 ou 1 à toute combinaison propositionnelle de ces énoncés. Cette fois, les valeurs 0 et 1 ne peuvent plus symboliser le faux et le vrai. Il n'est par exemple pas interdit d'associer 0 à une loi logique et d'associer 1 à l'énoncé $\forall x\, p^1 x$ et 0 à $\exists x\, p^1 x$.

Toutefois, si on connaît la vérité ou la fausseté des énoncés $A_1, \ldots, A_n$ dans un modèle $\mathcal{M}$, on peut calculer la vérité ou la fausseté dans $\mathcal{M}$ de toute combinaison propositionnelle A de ces énoncés en utilisant seulement les tables de vérité. Plus précisément, si on donne à A_i la valeur 1 si $\mathcal{M} \models A_i$ et la valeur 0 si $\mathcal{M} \not\models A_i$ $(1 \leq i \leq n)$, alors la valeur de A sera 1 si $\mathcal{M} \models A$ et 0 si $\mathcal{M} \not\models A$.

Définition. *Une* tautologie *est une combinaison propositionnelle d'énoncés telle que sa valeur est* 1*, quelles que soient les valeurs données à ces énoncés.*

Le théorème suivant a pour effet d'étendre immédiatement à la logique des prédicats la plupart des résultats obtenus dans le cadre de la logique des propositions.

Théorème 3.1 *Une tautologie est une loi logique.*

Démonstration

Soit A une tautologie. Il y a donc un ensemble $A_1, \ldots, A_n$ d'énoncés tel que

– A est une combinaison propositionnelle des $A_1, \ldots, A_n$,

– la valeur de A est 1 pour toutes valeurs de $A_1, \ldots, A_n$.

Montrons que A est une loi logique. Soit un modèle $\mathcal{M}$ quelconque. Donnons aux A_i la valeur 1, si $\mathcal{M} \models A_i$ et 0, si $\mathcal{M} \not\models A_i$ $(1 \leq i \leq n)$. En ce cas, la valeur de A est 1, car A est une tautologie. Par conséquent $\mathcal{M} \models A$. ∎

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie car les lois logiques qui font intervenir les quantificateurs d'une manière essentielle ne sont généralement pas des tautologies. Ainsi la loi logique $(\forall x\, p^1x \to p^1a)$ n'est pas une tautologie car les deux tables de vérité possibles pour cet énoncé sont :

$(\forall x\, p^1x \to p^1a)$
1
0

et

$\forall x\, p^1x$	p^1a	$(\forall x\, p^1x \to p^1a)$
1	*1*	*1*
1	*0*	*0*
0	*1*	*1*
0	*0*	*1*

5 Notations

Nous avons utilisé la notation préfixe pour les termes et les formules élémentaires. C'est-à-dire que nous avons placé les symboles relationnels ou fonctionnels devant leurs arguments. Cette notation présente l'avantage d'être uniforme quelle que soit l'arité des symboles et en cela elle facilite grandement les considérations théoriques. Elle n'est, par contre, pas commode quand il s'agit de manipuler des expressions avec des symboles fonctionnels ou relationnels binaires, destinés à être interprétés comme des relations ou fonctions familières. En ce cas, la notation usuelle est préférable car elle rend les expressions plus lisibles. Cette notation est le plus souvent infixe, c'est-à-dire que le symbole est placé entre ses arguments. Il faut alors lever l'ambiguïté en entourant les expressions ainsi composées de parenthèses ; cette mise entre parenthèses n'est toutefois pas nécessaire pour les symboles relationnels car ceux-ci ne peuvent être emboîtés. Donc, si on souhaite que r^2, f^2 et g^2 évoquent l'égalité, la somme et le produit, on pourra les noter $=$, $+$ et $\times$ et la formule $r^2g^2f^2abcf^2g^2acg^2bc$ sera notée de façon plus parlante $((a+b)\times c) = ((a\times c)+(b\times c))$.

Des simplifications supplémentaires peuvent être apportées :

– en supprimant des parenthèses de sorte qu'on puisse les restaurer d'une seule façon, notamment en supprimant les parenthèses extérieures ;

– en omettant les exposants des symboles relationnels préfixes, mais pas des symboles fonctionnels : r^2fagab et $rfagab$ sont ambigus mais rf^2ag^1ab et rf^2ag^2ab ne le sont pas ;

– en hiérarchisant une partie des symboles : comme on écrit $(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$ au lieu de $((a+b)\cdot c) = ((a\cdot c)+(b\cdot c))$, on écrit $p \wedge q \to r$ au lieu de $((p \wedge q) \to r)$ si $\to$ l'emporte sur $\wedge$.

La notation préfixe est qualifiée de « polonaise », car c'est le logicien polonais Jan Łukasiewicz qui l'a introduite vers 1920 pour écrire les formules sans utiliser de parenthèses tout en évitant l'ambiguïté. Il a remarqué que pour éviter l'utilisation de parenthèses pour distinguer entre des énoncés comme $(\neg p \to q)$ et $\neg(p \to q)$ ou comme $((p \wedge q) \vee r)$ et $(p \wedge (q \vee r))$, il suffisait de faire suivre les connecteurs à deux arguments de tous leurs arguments au lieu de les placer entre eux. On ne confond pas $\to \neg pq$ et $\neg \to pq$ ni $\vee \wedge pqr$ et $\wedge p \vee qr$.

La forme la plus courante de cette notation s'obtient en écrivant :

$$\begin{array}{lll} \mathsf{N}A & \text{pour} & \neg A, \\ \mathsf{K}AB & \text{pour} & (A \wedge B), \\ \mathsf{A}AB & \text{pour} & (A \vee B), \\ \mathsf{C}AB & \text{pour} & (A \to B), \\ \mathsf{E}AB & \text{pour} & (A \leftrightarrow B), \\ \Pi\alpha A & \text{pour} & \forall\alpha\, A, \\ \Sigma\alpha A & \text{pour} & \exists\alpha\, A. \end{array}$$

Exemples

En notation polonaise,

$$\begin{array}{lll} (\neg p \to q) & \text{s'écrit} & \mathsf{CN}pq, \\ \neg(p \to q) & \text{s'écrit} & \mathsf{NC}pq, \\ ((p \wedge q) \vee r) & \text{s'écrit} & \mathsf{AK}pqr, \\ (p \wedge (q \vee r)) & \text{s'écrit} & \mathsf{K}p\mathsf{A}qr, \\ \neg((\neg p \to q) \wedge r) & \text{s'écrit} & \mathsf{NKCN}pqr, \\ (p \vee (q \to r)) & \text{s'écrit} & \mathsf{A}p\mathsf{C}qr, \\ \exists y \forall x\, (r^2xy \leftrightarrow (s^2xa \wedge s^2xb)) & \text{s'écrit} & \Sigma y \Pi x \mathsf{E} r^2xy\mathsf{K}s^2xas^2xb, \\ \multicolumn{3}{l}{\forall x\, (\neg((\neg p^1x \to q^2xa) \wedge r) \leftrightarrow (p^1x \vee \exists y\, (q^2xy \to r)))} \\ & \text{s'écrit} & \Pi x\mathsf{ENKCN}p^1xq^2xar\mathsf{A}p^1x\Sigma y\mathsf{C}q^2xyr. \end{array}$$

6 L'égalité

Si nous souhaitons considérer l'égalité comme une notion logique, nous devons modifier d'abord la définition des langages prédicatifs en ajoutant le symbole $=$ à la liste des symboles logiques ainsi que la règle syntaxique suivante :

si t et u sont des termes, alors $t = u$ est une formule.

Nous ne devons pas modifier la notion de modèle, mais nous devons ajouter à la définition de la vérité la condition suivante qui spécifie le sens standard du symbole $=$

$$\mathcal{M} \models t = u \text{ ssi } t_{\mathcal{M}} \text{ est identique à } u_{\mathcal{M}}.$$

Nous pouvons alors formuler quelques lois logiques parmi les plus caractéristiques de l'égalité :

$$\begin{array}{ll} \forall x\, x = x & \text{réflexivité} \\ \forall x \forall y\, (x = y \to y = x) & \text{symétrie} \\ \forall x \forall y \forall z\, ((x = y \wedge y = z) \to x = z) & \text{transitivité} \\ \forall x \forall y\, (x = y \to (p^3xyx \leftrightarrow p^3yyx)) & \text{indiscernabilité} \end{array}$$

▷ *Si l'égalité n'est pas envisagé comme un symbole logique et si on veut néanmoins traduire des énoncés de la langue courante qui le mentionnent, il faut alors le considérer comme un simple prédicat binaire.*

7 Les valuations

Il est possible, comme l'a fait Tarski, de définir une notion, plus générale que la vérité, qui s'applique également aux formules qui ne sont pas des énoncés. C'est la notion de satisfaction, qui demande que l'on introduise des valuations. Quoique nous n'en ayons pas fait usage, nous indiquons ici les différences entre notre présentation et celle qui en appelle à ces notions.

Une *valuation* est une fonction qui assigne à chaque variable un objet de l'univers. La notion de satisfaction d'une formule sera définie dans un modèle relativement à une valuation. On écrit $\mathcal{M} \models_v A$ pour indiquer que A est satisfaite par v dans $\mathcal{M}$.

Une valuation v, combinée avec l'interprétation des constantes et des symboles fonctionnels, fournie par le modèle, permet d'interpréter tous les termes, qu'ils soient clos ou non. On note $v_{\mathcal{M}}$ cette extension conjointe de l'interprétation et de la valuation et on pose :

$$\begin{gathered} v_{\mathcal{M}}(\alpha) = \alpha_{\mathcal{M}}, \\ v_{\mathcal{M}}(\beta) = v(\beta), \\ v_{\mathcal{M}}(Ft_1 \dots t_n) = F_{\mathcal{M}}(v_{\mathcal{M}}(t_1), \dots, v_{\mathcal{M}}(t_n)), \end{gathered}$$

pour toute constante α, toute variable β, tout symbole fonctionnel n–aire F et tous termes $t_1, \dots, t_n$.

La définition de la satisfaction pour les formules élémentaires est assez évidente :

$$\begin{gathered} \mathcal{M} \models_v A \text{ ssi } A_{\mathcal{M}} = 1, \\ \mathcal{M} \models_v Pt_1 \dots t_n \text{ ssi } \langle v_{\mathcal{M}}(t_1), \dots, v_{\mathcal{M}}(t_n) \rangle \in P_{\mathcal{M}}. \end{gathered}$$

Dans le cas des connecteurs propositionnels, on remplace simplement $\models$ par $\models_v$:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models_v \neg B & \text{ssi} & \mathcal{M} \not\models_v B, \\ \mathcal{M} \models_v (B \wedge C) & \text{ssi} & \mathcal{M} \models_v B \text{ et } \mathcal{M} \models_v C, \\ \mathcal{M} \models_v (B \vee C) & \text{ssi} & \mathcal{M} \models_v B \text{ et/ou } \mathcal{M} \models_v C, \\ \mathcal{M} \models_v (B \to C) & \text{ssi} & \mathcal{M} \not\models_v B \text{ et/ou } \mathcal{M} \models_v C, \\ \mathcal{M} \models_v (B \leftrightarrow C) & \text{ssi} & \mathcal{M} \models_v B \text{ et } \mathcal{M} \models_v C \quad \text{ou} \quad \mathcal{M} \not\models_v B \text{ et } \mathcal{M} \not\models_v C. \end{array}$$

Enfin, après avoir introduit la valuation $v[\alpha \mapsto o]$ en spécifiant que $v[\alpha \mapsto o](\alpha) = o$ et $v[\alpha \mapsto o](\beta) = v(\beta)$, lorsque β est une autre variable que α, la satisfaction des formules générales est définie comme ceci :

$$\mathcal{M} \models_v \forall\alpha\, B \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M} \models_{v[\alpha\mapsto o]} B, \;\; \text{pour tout } o \in |\mathcal{M}|,$$
$$\mathcal{M} \models_v \exists\alpha\, B \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M} \models_{v[\alpha\mapsto o]} B, \;\; \text{pour au moins un } o \in |\mathcal{M}|.$$

On peut montrer que $\mathcal{M} \models_v A$ équivaut à $\mathcal{M} \models A$, lorsque A est un énoncé et cela quel que soit v.

Le seul prix que nous avons eu à payer pour pouvoir définir la vérité directement sans faire le détour par les valuations et la notion de satisfaction est l'introduction d'une infinité de constantes dans chaque langage prédicatif — sans quoi il ne serait pas possible de définir aussi simplement la vérité des énoncés généraux.

4 Parenthèse : deux conceptions de la vérité

Le concept de vérité, que nous avons élaboré dans les chapitres 2 et 3, est celui qui a contribué le plus à clarifier les notions fondamentales de loi logique, raisonnement valide, contradiction... telles que nous les avons définies dans l'introduction.

1 La vérité-correspondance

Nous avons utilisé jusqu'à présent la conception de la vérité la plus naïve et la plus répandue, celle qui comprend la vérité comme une correspondance de la pensée/langage et de la réalité, ainsi qu'exprimé par l'adage « Veritas est adaequatio intellectus et rei ». Toutefois, confrontés au paradoxe du menteur à la section 4.3, nous avons, en optant pour la solution orthodoxe, dû renoncer à une utilisation d'un concept global de vérité, ce qui ne nous a pas empêché par la suite d'en donner des définitions partielles pour les énoncés de langages déterminés. Quoique ce problème du menteur est sans doute le plus important auquel doit faire face toute élucidation de la vérité, d'autres problèmes soulevés par la tradition philosophique ont été, dans les chapitres 2 et 3, soit résolus, soit contournés.

1.1 Les entités mises en correspondance sont hétérogènes

Une première série de difficultés concerne la signification des termes utilisés : *intellectus*, *res* et *adaequatio*.

L'entendement (*intellectus*), la pensée peut s'interpréter comme ce qui le manifeste : jugement, proposition ou, comme nous l'avons fait, énoncé.

La réalité (*res*) visée dans la définition peut de prime abord renvoyer au monde, lequel a été dans la section 2 assimilé à une structure formée d'objets, de prédicats et de fonctions. Cependant si la réalité est ce à quoi correspond l'énoncé, celle-ci devrait de second abord être plutôt un fait du monde. L'énoncé serait relié au monde car relié à un fait de ce monde. Cette notion de fait pose à son tour problème dès que l'on quitte les exemples simples. Alors qu'on peut facilement comprendre ce qu'est le fait qu'il neige ou que Pierre est présent, il est contestable que la circonstance qu'il ne neige pas, que Pierre est absent, que s'il neige, alors Pierre est absent etc... sont des faits.

La correspondance (*adaequatio*) est la plus problématique des trois notions, car il y a hétérogénéité des deux termes mis en correspondance. Il y a d'une part plus de lien entre deux énoncés ou entre deux faits qu'entre un énoncé et un fait. Et, d'autre part, une propriété, comme la vérité, dépendant d'une relation entre un énoncé (intellectus) et un fait (res), est une propriété relative externe ; car une phrase A peut acquérir la propriété d'être vraie sans se modifier : dès qu'il neige, la phrase « il neige » est vraie. Sans cesser d'être ce qu'elle est la phrase se trouve ainsi être autre que ce qu'elle était [1].

Suivant la définition de Tarski, que nous avons retenue jusqu'à présent, on ne dira pas que l'énoncé 's'il neige, alors Pierre n'est pas présent' est vrai ssi il correspond au fait que s'il neige, alors Pierre n'est pas présent, mais que cet énoncé est vrai ssi si 'il neige' est vrai, alors 'Pierre est présent' n'est pas vrai. Il est entendu cependant que dans le cas de l'énoncé simple 'il neige' est vrai ssi il correspond au fait qu'il neige.

La solution adoptée consiste donc à limiter la question de la correspondance aux énoncés simples représentés par des symboles propositionnels ou des symboles prédicatifs suivis d'une suite de termes et ensuite à montrer comment la vérité de ces énoncés simples se propage inductivement à l'ensemble des énoncés, construits à partir d'eux avec les symboles logiques.

La vérité des énoncés simples est directement relative à un modèle, qui comprend non seulement une structure, mais encore une interprétation des expressions non logiques. C'est précisément dans cette interprétation que se noue la correspondance proprement dite. La définition :

$$\mathcal{M} \models Pt_1 \ldots t_n \text{ ssi } \langle t_{1\mathcal{M}}, \ldots, t_{n\mathcal{M}} \rangle \in P_{\mathcal{M}}$$

montre la correspondance entre l'énoncé $Pt_1 \ldots t_n$ et le « fait » que l'interprétation des termes t_i est dans la relation interprétant P.

L'extension aux énoncés complexes se fait en partie indépendamment du modèle — comme dans A et B est vrai ssi A est vrai et B est vrai — et par référence à la totalité des objets de l'univers du modèle dans le cas de la définition de la vérité des énoncés généraux [2], donnée dans la section 3.4.

1. « ...Je suis en effet dans la suite ce que je n'étais pas auparavant, bien que je ne le sois pas devenu » (Théétète 155a-d).

2. Il est remarquable que cette difficulté majeure de la définition de la vérité n'est pas évoquée à ce propos par la tradition philosophique.

Cette définition sémantique de la vérité des énoncés d'un langage ressemble donc à la définition syntaxique d'énoncé d'un langage. Mais au lieu d'engendrer inductivement les énoncés grammaticaux, on en définit le sous-ensemble des énoncés vrais.

1.2 Une définition rigoureuse mène à une régression indéfinie

Le problème que nous soulevons maintenant est un corollaire du précédent. Si je dis qu'il y a adéquation entre un énoncé et un fait, je prétends énoncer un jugement (énoncé) vrai. Il y aurait donc non seulement adéquation entre l'énoncé et le fait, mais aussi entre ce que je prétends et le *fait* de l'adéquation, qui peut faire l'objet d'un nouveau jugement qui sera vrai en raison de son adéquation à cette adéquation etc. . .

Pour essayer de formuler cette objection de manière convaincante, partons de la constatation que si A est un énoncé, “A est vrai” est également un énoncé. On a alors :

Il pleut	ssi	‘Il pleut' est vrai
	ssi	‘ ‘Il pleut' est vrai' est vrai
	ssi	‘ ‘ ‘Il pleut' est vrai' est vrai' est vrai
	ssi	...

Si la vérité est correspondance entre entités hétérogènes, on peut en déduire que la définition de la vérité d'un énoncé est impossible, car elle engendrerait une ascendance indéfinie. Le critère extérieur pour que “A” soit vrai n'est pas seulement le fait que A, mais surtout le fait que “A” s'accorde avec le fait que A. Or l'accord de “A” avec le fait que A est quelque chose de tellement mystérieux qu'on n'a pas d'autres ressources que de l'exprimer par ““A” s'accorde avec le fait que A” est vrai, c'est-à-dire par “A est vrai” est vrai [3]. Autrement dit, déterminer si un énoncé A est vrai, c'est déterminer s'il correspond à la réalité, c'est-à-dire déterminer si “A correspond à la réalité” est vrai etc...

Cet argument n'affecte pas les partisans de la vérité-correspondance qui y voient une relation objective entre un énoncé et un fait extérieur, relation qui n'a pas besoin d'être clarifiée davantage pour exister. Il n'y a aucune régression ascendante quand on présente la définition de manière descendante : ‘Il pleut' est vrai ssi il pleut et ‘ ‘Il pleut' est vrai' est vrai se ramène au fait que ‘Il pleut' est vrai, lequel se réduit à il pleut. Définir la vérité de “A”, c'est-à-dire A est vrai ne suppose pas que l'on définisse la vérité de “A est vrai”.

3. Ne peut-on pas envisager qu'il y a vérité si l'accord a lieu d'un certain point de vue ? Mais lequel ? Que devrions-nous alors faire, pour décider si quelque chose est vrai ? Nous devrions examiner s'il est vrai qu'une représentation et un fait — par exemple — s'accordent du point de vue envisagé. Et de cette façon nous nous trouverions devant une question du même type et le jeu pourrait recommencer. Frege, *La pensée.*

Quoiqu'il en soit de la question de savoir si cette régression indéfinie est un vrai problème ou non, elle a laissé comme trace la hiérarchie[4] des langages. On ne peut pas définir la vérité des énoncés d'un langage dans ce même langage, mais il y faut un métalangage. Ce qui ne veut pas dire que pour définir la vérité des énoncés d'un langage, il faut d'abord définir la vérité des énoncés du métalangage.

En fin de compte, la difficulté majeure de la notion de vérité-correspondance est que la vérité n'est pas définissable. Bien qu'on puisse définir la vérité de chaque énoncé, voire de tous les énoncés de chaque langue, il est impossible de définir rigoureusement la vérité pour tous les énoncés, tous langages confondus.

2 La vérité-cohérence

Nous avons sommairement indiqué comment peuvent être résolus ou traités les problèmes soulevés dans le cadre d'une définition de la vérité-correspondance, par l'introduction d'un critère extérieur (le modèle) qui bloque la régression indéfinie en recourant à l'immédiateté de la vérité des énoncés simples, laquelle s'étend aux complexes.

Cependant, pour remédier plus radicalement à ces deux types de problèmes — le caractère relationnel et la régression indéfinie —, on a tenté de trouver un « critère » interne, c'est-à-dire au fond pas un critère.

2.1 Les énoncés vrais par eux-mêmes ou dérivables d'énoncés déjà réputés vrais
Le faux et les énoncés qui sont réputés faux en raison de leur incohérence

Il y a des énoncés, comme « s'il pleut, il pleut », dont la vérité ne dépend pas de leur rapport au monde, car ils sont vrais a priori (indépendamment de l'expérience), voire analytiques (vrais en raison du sens des mots). Ils sont vrais dans tout monde, parce qu'ils ne dépendent d'aucun monde.

En outre, il est admis qu'un énoncé qui découle d'un énoncé vrai, ou d'un ensemble d'énoncés vrais, est également vrai.

De cette façon, on peut engendrer un ensemble d'énoncés vrais, sans recourir au moindre critère externe. Nous obtenons ainsi une définition encore partielle de la vérité, que l'on pourra chercher à étendre le plus possible.

4. Cette hiérarchie a été introduite en 5 dans le cadre de la solution orthodoxe au paradoxe du menteur, lequel n'est pas généralement évoqué dans la tradition.

Sans pour autant affirmer que c'est là une condition nécessaire, on admettra donc, par exemple, qu'un jugement est vrai s'il est évident en lui-même ou démontrable à partir d'évidences premières ou d'énoncés déjà obtenus ainsi. Ce critère qui semble n'être interne que pour les énoncés qui montrent par eux-mêmes qu'ils sont vrais l'est en réalité pour tous les énoncés car il ne repose que sur une relation homogène entre énoncés et non sur une relation hétérogène entre énoncé et monde extérieur.

De façon analogue, un énoncé incohérent avec ce qui est déjà considéré comme vrai, sera réputé faux. Il y a aussi des énoncés absolument ou immédiatement incohérents comme « il pleut et il ne pleut pas ». De même que dans le cas de la vérité et sans affirmer la réciproque, on admettra que A est faux s'il est immédiatement ou médiatement incohérent.

2.2 Lien entre démonstrabilité et incohérence

Que sont l'incohérence et la démonstrabilité en logique classique et quel lien y a-t-il là entre l'incohérence et la démonstrabilité ?

On a, par définition [5],

$$A \text{ est incohérent ssi } \neg A \text{ est démontrable.}$$

Donc, en mettant $\neg A$ à la place de A :

$$\neg\neg A \text{ est démontrable ssi } \neg A \text{ est incohérent.}$$

Finalement, à supposer que $\neg\neg A$ est démontrable ssi A l'est :

$$A \text{ est démontrable ssi } \neg A \text{ est incohérent.}$$

Moyennant un détour par la négation et quelques hypothèses naturelles, les notions de démonstrabilité et d'incohérence sont donc interdéfinisables.

Plus généralement, en admettant que :

$$A \text{ est incohérent avec l'ensemble d'énoncés } X \text{ ssi } \neg A \text{ est démontrable à partir de } X,$$

on voit que :

$$A \text{ est démontrable à partir de } X \text{ ssi } \neg A \text{ est incohérent avec } X.$$

5. Comparez cette définition spontanée avec celle d'ensemble cohérent donnée en 2.2.

2.3 L'identification de la vérité et de la cohérence entraîne l'identification de la cohérence et de la démonstrabilité

Les considérations précédentes incitent à risquer deux définitions internes de la vérité : un énoncé est vrai ssi il est démontrable ; un énoncé est vrai ssi il est cohérent [6].

Concernant la vérité, on a classiquement la propriété suivante de la négation :

$$A \text{ est vrai} \;\text{ ssi } \neg A \text{ n'est pas vrai.}$$

Et si nous convenons de déclarer A faux [7] ssi $\neg A$ est vrai, il vient

$$A \text{ est vrai} \;\text{ ssi } A \text{ n'est pas faux;} \qquad (1)$$
$$A \text{ est faux} \;\text{ ssi } A \text{ n'est pas vrai.} \qquad (2)$$

Si nous supposons maintenant que la vérité est identique à la démonstrabilité, alors, par 1,

$$A \text{ est démontrable} \;\text{ ssi } A \text{ est cohérent.}$$

Donc en identifiant vérité et démonstrabilité, la cohérence devient identique à la démonstrabilité.

De même, si on identifiait vérité et cohérence, on aurait, par 2,

$$A \text{ est incohérent} \;\text{ ssi } A \text{ n'est pas démontrable.}$$

Il est également facile de montrer que, suite à cette identification,

$$A \text{ est démontrable à partir de } X \;\text{ ssi } A \text{ est cohérent avec } X\,;$$
$$A \text{ est incohérent avec } X \;\text{ ssi } A \text{ n'est pas démontrable à partir de } X.$$

2.4 Le rapport de la vérité à la non-vérité devient problématique

Le rapport de la non-vérité à la vérité, ou d'un énoncé à sa négation est régi par le

– tiers exclu : un énoncé est vrai ou faux : si A n'est pas vrai, $\neg A$ est vrai ;

6. Cohérent veut dire ici non incohérent.

7. Il semble que la vérité de la négation est, sinon une des vraies définitions du faux, du moins une des vraies raisons de l'introduire.

– et le principe de non-contradiction : A ne peut être à la fois vrai et faux : si $\neg A$ est vrai, A n'est pas vrai.

En ce qui concerne la vérité, nous devons donc — comme on l'a dit — admettre que A est vrai ssi $\neg A$ n'est pas vrai.

Les identifications de la vérité et de la démonstrabilité/cohérence provoquent alors des conséquences non souhaitées. On constate certes que le tiers exclu est intuitivement valable pour la notion de cohérence : pour tout énoncé A, A est cohérent ou $\neg A$ est cohérent. En revanche, dans certains cas A et $\neg A$ peuvent être simultanément cohérents. Semblablement, la non-contradiction vaut pour la démonstrabilité. On ne tolère pas que A et que $\neg A$ soient démontrables, mais il se pourrait que ni A ni $\neg A$ ne le soient.

Pour que la démonstrabilité/cohérence puisse servir de notion de vérité, on devra avoir que, pour tout énoncé A, A est démontrable ou $\neg A$ est démontrable (tiers exclu) ; A est incohérent ou $\neg A$ l'est (non-contradiction).

2.5 Le paradoxe du menteur revisité

Sachant que la vérité n'est pas assimilable à la démonstrabilité ou à la cohérence en logique classique, il est intéressant de réexaminer le paradoxe du menteur, lorsqu'on tente d'identifier la vérité à la démonstrabilité, laquelle doit, par définition, être définissable, alors que la vérité ne saurait l'être dans la solution orthodoxe. Les considérations que nous venons de faire et l'argument de la page 16 nous interdisent de supposer comme nous l'avons fait que '...' est démontrable ssi $---$. Il n'est du reste pas surprenant que l'on puisse avoir A sans que cela soit démontré ou démontrable. Si on se contente d'avoir :

si '...' est démontrable, alors $---$.

lorsqu'on remplace les blancs par un énoncé, il semble bien que l'on soit à l'abri du paradoxe.

Toutefois — semblablement à ce qui est exposé page 16 — la phrase écrite à la page 55 n'est pas démontrable, car si elle l'était, elle ne le serait pas. En effet, si la phrase écrite à la page 55, c'est-à-dire 'La phrase écrite à la page 55 n'est pas démontrable' est démontrable, alors la phrase écrite à la page 55 n'est pas démontrable.

'La phrase écrite à la page 55 n'est pas démontrable' est donc démontrable, car nous venons de la démontrer. Et comme elle est précisément la phrase écrite à la page 55, la phrase écrite à la page 55 est démontrable.

La phrase écrite à la page 55 n'est pas démontrable.

La phrase écrite à la page 56 n'est pas V–démontrable.

La solution orthodoxe

La notion de démonstration doit, on l'a dit, être définissable. Pour cela il suffit qu'elle soit relative à un système V, constitué d'axiomes et de règles de dérivation définissables. En effet, qu'est-ce qu'une démonstration si ce n'est un enchaînement d'énoncés partant d'axiomes et procédant suivant des règles. On ne dira donc pas absolument que A est démontrable, mais que A est V-démontrable. En admettant alors que

$$\text{si `\ldots' est } V\text{-démontrable, alors } ---.$$

lorsqu'on remplace les blancs par un énoncé, cela permet de montrer comme ci-dessus que la phrase écrite à la page 56 n'est pas V-démontrable, mais il devient impossible d'en inférer qu'elle est V-démontrable, car alors même que nous avons le sentiment de l'avoir démontrée, rien ne nous permet d'affirmer que nous l'avons fait dans V. Nous pouvons seulement soutenir que 'La phrase écrite à la page 56 n'est pas V-démontrable' est démontrable dans un système V^*, autrement dit que la phrase écrite à la page 56 est V^*-démontrable.

En conséquence, nous ne pouvons plus conclure cette fois que la phrase écrite à la page 56 est à la fois non démontrable et démontrable, mais seulement qu'elle est non V-démontrable et V^*-démontrable.

On en tire comme conséquence qu'aucun système V ne peut épuiser la notion de démonstration [8]. Autrement dit, par la voie démonstrative, on ne peut obtenir qu'une partie de l'ensemble des vérités.

Dans le cadre de cette solution orthodoxe, il est clair que seule la notion de V-démonstration est définissable, mais non celle de démonstration. Et on retrouve le même genre de difficulté qu'avec la notion correspondantiste.

La recherche de la vérité par le biais de la démonstrabilité/cohérence reste néanmoins souvent théoriquement préférable, car elle résout le problème de l'hétérogénéité. De plus, quoique nous ne pourrons obtenir toutes les vérités — même d'un langage donné — par cette méthode, elle suffira pour les vérités logiques. Dans le chapitre 5, nous allons présenter la notion de démonstration pour les lois logiques via les systèmes axiomatiques. Ces systèmes seront donc incomplets en ce sens qu'il y a des vérités non logiques ou qu'il y a des énoncés qui ne sont ni des lois logiques ni des contradictions. On les qualifie cependant de complet en ce qu'ils épuisent non la vérité, mais la vérité logique (qui n'est pas complète).

Ensuite, dans la deuxième partie, nous le ferons avec les systèmes de Gentzen qui, tout en introduisant la vérité logique par le biais d'une axiomatique du raisonnement, constituent en quelque sorte un interface de l'axiomatique et de la sémantique.

8. C'est l'une des conséquences du théorème d'incomplétude qui a été explicitement formulé et démontré par Gödel en 1931.

Cela nous conduira enfin au théorème fondamental de la logique (de complétude) qui énonce l'identité extensionnelle de la vérité logique comme vérité dans tous les modèles et comme vérité démontrable. Ce théorème de complétude — également dû à Gödel — recevra différentes formulations et démonstrations.

▷ **La conception pragmatique de la vérité.** *La notion qualifiée de* pragmatique *de vérité combine correspondance et cohérence. L'adjectif pragmatique se réfère ici autant à ce courant de la philosophie américaine, issu de Charles Sanders Peirce (1839–1914) et de William James (1842–1910), qu'à ce niveau d'analyse du langage désigné par Charles Morris, à la suite, il est vrai, des idées linguistiques de Peirce.*

Selon William James, la notion de vérité est formellement celle de correspondance (accord avec la réalité), mais cet accord peut dans certains cas signifier cohérence. Le type d'accord et de réalité dépend du type de jugement. Il y a en fait autant de notions de vérité, que de types de jugements. La vérité empirique n'est pas la vérité mathématique, ni la vérité métaphysique. De par sa grande souplesse, la théorie de James est particulièrement indiquée pour des énoncés rejetés hors du domaine strictement ou étroitement scientifique, comme ceux de valeur ou métaphysiques, par exemple, comme 'la démocratie est la meilleure forme de gouvernance', 'la machine est inférieure à l'homme', 'tout phénomène a une cause'... Pour de tels énoncés la vérité dépend de leur fécondité, résultant des conséquences produites par leur interprétation, ce qui a fait se réduire à tort toute la conception pragmatique au slogan« est vrai ce qui est utile ».

En se restreignant au domaine du langage, certains pragmatistes soutiennent que la vérité est liée aux conséquences que l'énoncé produit sur ses interprètes et non aux antécédences ou aux raisons qui président à son établissement. La vérité deviendra alors relative, non seulement au monde, mais aussi au couple locuteur-allocutaire. Pour les tenants de cette conception, la propriété de vérité ne s'applique dès lors qu'à des énoncés énoncés par un locuteur s'adressant à un allocutaire, et la théorie du raisonnement se voit indûment confinée dans celle de l'argumentation rhétorique.

5 L'axiomatique

1 La notion générale de système axiomatique

Un système axiomatique comprend un ensemble d'énoncés appelés 'axiomes' et un ensemble de règles. Une démonstration dans un système axiomatique sera définie comme étant une suite finie d'énoncés telle que chaque énoncé de la suite est :

– soit un axiome ;

– soit un énoncé C tel qu'il existe des (occurrences d') énoncés $A_1, \ldots, A_n$ le précédant dans la suite et une règle « autorisant le passage » de $A_1, \ldots, A_n$ à C.

Le dernier énoncé d'une démonstration est dit *démontrable* (dans le système) et est appelé *théorème* (du système).

Pour que l'on ait un système axiomatique, il faut en outre que l'on puisse décider si une suite finie d'énoncés est une démonstration ou non. Pour cela il suffit que l'on puisse effectivement déterminer quels sont les axiomes et les règles. Il n'est pas utile ici de préciser davantage ce que cela veut dire exactement puisque les exemples que nous donnons seront suffisamment clairs à cet égard.

▷ *La notion intuitive de méthode effective et les notions associées de méthode mécanique et de calculabilité sont à l'origine du concept technique de fonction récursive et de celui équivalent de machine de Turing. Cette exigence d'effectivité précise l'idée que la notion de démonstration doit être définissable, au sens où il doit être possible de décider si on a affaire à une démonstration ou non. Il s'agit là d'un avatar de la conception traditionnelle que les démonstrations doivent se baser sur des premiers principes, que l'on reconnaît à ce qu'ils ne nécessitent pas d'autre justification.*

Nous avons vu que la solution orthodoxe du paradoxe du menteur interdit une définition globale de la vérité, mais n'interdit pas que l'on en donne une définition pour les énoncés d'un langage déterminé, relativement à un modèle. Or il se trouve qu'une telle définition ne saurait être récursive, alors que celle *de démonstration doit l'être. On doit pouvoir reconnaître effectivement en un nombre fini d'étapes qu'une démonstration est une démonstration quand on en a une. On ne peut pas exiger que l'on puisse, pour chaque phrase, décider en un temps fini si elle est vraie ou non.*

Si nous nous limitons aux langages propositionnels, nous pouvons prendre comme axiomes l'ensemble des tautologies et aucune règle. Cela constitue en effet un système axiomatique car la méthode des tables de vérité permet de déterminer effectivement si un énoncé est une tautologie ou non.

Voici un système où les axiomes sont présentés sous forme de schémas [1] : un axiome est un énoncé d'une des formes suivantes.

$(A \to (B \to A))$

$((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$

$((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$

$((A \wedge B) \to A)$

$((A \wedge B) \to B)$

$(A \to (B \to (A \wedge B)))$

$(A \to (A \vee B))$

$(B \to (A \vee B))$

$((A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C)))$

$((A \leftrightarrow B) \to (A \to B))$

$((A \leftrightarrow B) \to (B \to A))$

$((A \to B) \to ((B \to A) \to (A \leftrightarrow B)))$

La seule règle est le modus ponens

$$\frac{(A \to B) \quad A}{B}$$

La suite $((p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p)))$, $(p \to ((p \to p) \to p)), ((p \to (p \to p)) \to (p \to p)), (p \to (p \to p)), (p \to p)$ est une démonstration dans ce système. Cet exemple célèbre montre que l'on peut déduire le principe d'identité à partir des deux premiers axiomes.

1. Les trois premiers engendrent le fragment de l'implication et de la négation et sont attribués à J. Łukasiewicz (1878–1956).

Il est d'usage de présenter les démonstrations en numérotant les formules et en indiquant les justifications :

1. $((p \to ((p \to p) \to p)) \to ((p \to (p \to p)) \to (p \to p)))$ (tautologie)
2. $(p \to ((p \to p) \to p))$ (tautologie)
3. $((p \to (p \to p)) \to (p \to p))$ (par 1, 2 et modus ponens)
4. $(p \to (p \to p))$ (tautologie)
5. $(p \to p)$ (par 3, 4 et modus ponens)

Il est possible de montrer que toutes les tautologies sont démontrables dans ce système. Les deux systèmes ont donc les mêmes théorèmes. C'est ce qu'on appelle la complétude de la logique des propositions. Le théorème de complétude (relativement à un système axiomatique donné) du calcul propositionnel est donc en réalité un théorème qui énonce l'équivalence de deux systèmes axiomatiques.

En revanche on serait mal avisé de former un système axiomatique dont les axiomes sont les lois logiques d'un langage prédicatif quelconque. En effet, par le théorème de Church il n'existe pas de méthode effective permettant de décider en général si un énoncé est une loi logique ou non.

2 Le système

Nous limiterons nos considérations au seul système que nous introduisons maintenant.

2.1 Les axiomes

0. Les tautologies [2]

Les autres axiomes sont présentés sous forme de schémas. Un axiome est un énoncé d'une des formes suivantes.

1. $(\forall\alpha\, A \to A[\alpha := t])$
2. $(\forall\alpha\, (A \to B) \to (A \to \forall\alpha\, B))$
3. $(\exists\alpha\, A \leftrightarrow \neg\forall\alpha\, \neg A)$

Notons que les tautologies peuvent être remplacés par l'ensemble des schémas présentés page 60.

2. Au sens général de la section 4 du chapitre 3.

2.2 Les règles

• Modus ponens

$$\frac{(A \to B) \quad A}{B}$$

• La généralisation universelle

$$\frac{A[\alpha := \beta]}{\forall\alpha\, A}$$

(β est une constante ne figurant pas dans $\forall\alpha\, A$).

Définitions. *Une* démonstration *(dans le système) est une suite finie d'énoncés telle que chaque énoncé de la suite est*

- *soit un axiome ;*
- *soit un énoncé B tel qu'il existe un énoncé A de sorte que les deux énoncés $(A \to B)$ et A précèdent B dans la suite ;*
- *soit un énoncé $\forall\alpha\, A$ tel qu'il existe une constante β ne figurant pas dans $\forall\alpha\, A$ de sorte que l'énoncé $A[\alpha := \beta]$ le précède dans la suite.*

Une démonstration de C *est une démonstration dont le dernier énoncé est C.*

C est démontrable *(dans le système), s'il y a une démonstration de C.*

Un théorème *(du système) est un énoncé démontrable (dans le système).*

3 Le théorème de la déduction

Définitions. *Une* dérivation *(dans le système),* à partir d'un ensemble d'hypothèses $\mathcal{H}$, *est une suite finie d'énoncés telle que chaque énoncé de la suite est*

- *soit un axiome ;*
- ***soit un énoncé de $\mathcal{H}$;***
- *soit un énoncé B tel qu'il existe un énoncé A de sorte que les deux énoncés $(A \to B)$ et A le précèdent dans la suite ;*

– *soit un énoncé $\forall\alpha\, A$ tel qu'il existe une constante β ne figurant ni dans $\forall\alpha\, A$,* **ni dans un énoncé de $\mathcal{H}$, présent dans la suite**[3]*, de sorte que l'énoncé $A[\alpha := \beta]$ le précède dans la suite.*

Une dérivation de C à partir de $\mathcal{H}$ *est une dérivation à partir de $\mathcal{H}$ dont le dernier énoncé est C.*

C est dérivable à partir de $\mathcal{H}$ *(dans le système), s'il y a une dérivation de C (à partir) de $\mathcal{H}$.*

On remarquera qu'un théorème est dérivable à partir de n'importe quelle suite d'énoncés.

La restriction imposée à l'application de la règle de généralisation traduit le fait intuitif que $\forall\alpha\, A$ peut être obtenu à partir de $A[\alpha := \beta]$ si β est quelconque ; être quelconque signifiant que rien n'est dit à propos de β dans les hypothèses. Il n'est donc pas permis de conclure $\forall x\, p^1 x$ à partir de $p^1 a$.

Proposition 5.1 (Théorème de la déduction) *Si C est dérivable à partir de $\mathcal{H}, A$ (l'ensemble formé des éléments de $\mathcal{H}$ et de A), alors $(A \to C)$ est dérivable à partir de $\mathcal{H}$.*

Démonstration

Soit une dérivation à partir de $\mathcal{H}, A$ de la forme

$$\begin{array}{c} \vdots \\ (B \to C) \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ C \end{array} \qquad \text{ou de la forme} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ B \\ \vdots \\ (B \to C) \\ \vdots \\ C \end{array}$$

Nous en extrayons deux dérivations à partir de $\mathcal{H}, A$ plus courtes :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ B \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ (B \to C) \end{array}$$

Supposons que nous ayons déjà démontré le théorème pour ces dérivations, c'est-à-dire supposons que nous ayons obtenu deux dérivations à partir de $\mathcal{H}$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ (A \to B) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ (A \to (B \to C)) \end{array}$$

3. Une telle constante est toujours disponible, car le nombre de constantes figurant dans un énoncé de la suite est fini, alors que celui des constantes est infini.

Alors nous obtenons, en utilisant une tautologie et le modus ponens, la dérivation suivante :

$$\begin{gathered} \vdots \\ (A \to (B \to C)) \\ \vdots \\ (A \to B) \\ ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))) \\ ((A \to B) \to (A \to C)) \\ (A \to C) \end{gathered}$$

Soit une dérivation à partir de $\mathcal{H}, A$ de la forme

$$\begin{gathered} \vdots \\ B[\alpha := \beta] \\ \vdots \\ \forall\alpha\, B \end{gathered}$$

Elle contient une dérivation à partir de $\mathcal{H}, A$ plus courte :

$$\begin{gathered} \vdots \\ B[\alpha := \beta] \end{gathered}$$

Supposons que nous ayons déjà démontré le théorème pour cette dérivation, c'est-à-dire supposons que nous ayons une dérivation à partir de $\mathcal{H}$:

$$\begin{gathered} \vdots \\ (A \to B[\alpha := \beta]) \end{gathered}$$

Alors nous obtenons, en utilisant la règle de généralisation, l'axiome 2 et le modus ponens, la dérivation suivante :

$$\begin{gathered} \vdots \\ (A \to B[\alpha := \beta]) \\ \forall\alpha\, (A \to B) \\ (\forall\alpha\, (A \to B) \to (A \to \forall\alpha\, B)) \\ (A \to \forall\alpha\, B) \end{gathered}$$

Nous pouvons donc nous ramener ainsi à des dérivations de plus en plus courtes et finalement, car une dérivation est une suite finie, à des dérivations réduites au seul énoncé C, qui est alors un axiome ou un énoncé de $\mathcal{H}, A$.

Supposons que C est un axiome ou un énoncé de $\mathcal{H}$. Alors la suite

$$(C \to (A \to C)), C, (A \to C)$$

utilisant une tautologie et le modus ponens est une dérivation de $(A \to C)$ à partir de $\mathcal{H}$.

Enfin, si C n'est autre que l'énoncé A, alors la suite constituée du seul axiome $(A \to A)$ est une démonstration de $(A \to C)$ et donc aussi une dérivation à partir de $\mathcal{H}$. ∎

▷ 1. *La preuve ci-dessus reste valable pour tout système d'axiomes dont les règles sont le modus ponens et la généralisation et qui contient les deux premiers schémas de Łukasiewicz et l'axiome 2. En effet le seul autre schéma utilisé dans la preuve, à savoir $(A \to A)$, se prouve, on l'a deviné, comme suit :*
$((A \to ((B \to A) \to A)) \to ((A \to (B \to A)) \to (A \to A)))$
$(A \to ((B \to A) \to A))$
$((A \to (B \to A)) \to (A \to A))$
$(A \to (B \to A))$
$(A \to A)$

2. *Le théorème de la déduction n'est bien entendu pas un théorème du système axiomatique, puisque c'est un énoncé de la métalangue. C'est pour cette raison qu'on le qualifie souvent pompeusement de « métathéorème ». Il a été formulé et prouvé pour la première fois en 1930 par Jacques Herbrand (1908–1931).*

Quelques théorèmes et leurs démonstrations

$(p \to \forall x\, p)$:

1. $(p \to p)$ *(tautologie)*

2. $\forall x\, (p \to p)$ *(de 1, par généralisation)*

3. $(\forall x\, (p \to p) \to (p \to \forall x\, p))$ *(axiome 2)*

4. $(p \to \forall x\, p)$ *(de 3 et 2, par modus ponens)*

$p^1 a \to \exists x\, p^1 x$:

1. $((\exists x\, p^1 x \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg p^1 x) \to ((\forall x\, \neg p^1 x \to \neg p^1 a) \to (p^1 a \to \exists x\, p^1 x)))$ *(tautologie)*

2. $(\exists x\, p^1x \leftrightarrow \neg\forall x\, \neg p^1x)$ *(axiome 3)*

3. $((\forall x\, \neg p^1x \rightarrow \neg p^1a) \rightarrow (p^1a \rightarrow \exists x\, p^1x))$ *(de 1 et 2, par modus ponens)*

4. $(\forall x\, \neg p^1x \rightarrow \neg p^1a)$ *(axiome 1)*

5. $(p^1a \rightarrow \exists x\, p^1x)$ *(de 3 et 4, par modus ponens)*

$(\forall x\,(p^1x \rightarrow q^1x) \rightarrow (\forall x\, p^1x \rightarrow \forall x\, q^1x))$ *: nous construisons d'abord une dérivation sous les hypothèses* $\forall x\,(p^1x \rightarrow q^1x)$ *et* $\forall x\, p^1x$.

1. $\forall x\,(p^1x \rightarrow q^1x)$ *(hypothèse)*

2. $(\forall x\,(p^1x \rightarrow q^1x) \rightarrow (p^1a \rightarrow q^1a))$ *(axiome 1)*

3. $(p^1a \rightarrow q^1a)$ *(de 1 et 2, par modus ponens)*

4. $\forall x\, p^1x$ *(hypothèse)*

5. $(\forall x\, p^1x \rightarrow p^1a)$ *(axiome 1)*

6. p^1a *(de 4 et 5, par modus ponens)*

7. q^1a *(de 3 et 6, par modus ponens)*

8. $\forall x\, q^1x$ *(généralisation de 7)*

Il existe donc une dérivation de $\forall x\, q^1x$ *à partir de* $\forall x\,(p^1x \rightarrow q^1x)$ *et* $\forall x\, p^1x$. *Par le théorème de la déduction, il existe une dérivation de* $(\forall x\, p^1x \rightarrow \forall x\, q^1x)$ *sous l'hypothèse* $\forall x\,(p^1x \rightarrow q^1x)$. *Le théorème de la déduction peut à nouveau être appliqué pour conclure à l'existence d'une dérivation de* $(\forall x\,(p^1x \rightarrow q^1x) \rightarrow (\forall x\, p^1x \rightarrow \forall x\, q^1x))$ *sans hypothèses, c'est-à-dire d'une démonstration.*

4 Axiomes pour l'égalité

Pour prolonger la section 6, on peut ajouter les axiomes suivants au système de 2 :

4. $t = t$
5. $((\bigwedge (t_1 = u_1, ..., t_n = u_n) \wedge A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n]) \rightarrow A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n])$

Démonstrations des lois logiques de la section 6

$\forall x\, x = x$ *:*

1. $a = a$ *(axiome 4)*

2. $\forall x\, x = x$ *(de 1, par généralisation)*

$\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)$ *:*

1. $((a = b \wedge a = a) \rightarrow b = a)$ *(axiome 5)*

2. $(((a = b \wedge a = a) \rightarrow b = a) \rightarrow (a = a \rightarrow (a = b \rightarrow b = a)))$ *(tautologie)*

3. $(a = a \rightarrow (a = b \rightarrow b = a))$ *(de 1 et 2, par modus ponens)*

4. $a = a$ *(axiome 4)*

5. $(a = b \rightarrow b = a)$ *(de 3 et 4, par modus ponens)*

6. $\forall y\, (a = y \rightarrow y = a)$ *(de 5, par généralisation)*

7. $\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)$ *(de 6, par généralisation)*

$\forall x \forall y \forall z\, ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$ *:*

1. $((b = c \wedge a = b) \rightarrow a = c)$ *(axiome 5)*

2. $(((b = c \wedge a = b) \rightarrow a = c) \rightarrow ((a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c))$ *(tautologie)*

3. $((a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c)$ *(de 1 et 2, par modus ponens)*

4. $\forall z\, ((a = b \wedge b = z) \rightarrow a = z)$ *(de 3, par généralisation)*

5. $\forall y \forall z\, ((a = y \wedge y = z) \rightarrow a = z)$ *(de 4, par généralisation)*

6. $\forall x \forall y \forall z\, ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$ *(de 5, par généralisation)*

$\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow (p^3xyx \leftrightarrow p^3yyx))$ *:*

1. $((a = b \wedge p^3aba) \rightarrow p^3bba)$ *(axiome 5)*

2. $((a = b \wedge \neg p^3aba) \rightarrow \neg p^3bba)$ *(axiome 5)*

3. $(((a = b \wedge p^3aba) \rightarrow p^3bba) \rightarrow (((a = b \wedge \neg p^3aba) \rightarrow \neg p^3bba) \rightarrow$
$(a = b \rightarrow (p^3aba \leftrightarrow p^3bba))))$ *(tautologie)*

4. $(((a = b \wedge \neg p^3aba) \rightarrow \neg p^3bba) \rightarrow (a = b \rightarrow (p^3aba \leftrightarrow p^3bba)))$ *(de 1 et 3, par modus ponens)*

5. $(a = b \rightarrow (p^3aba \leftrightarrow p^3bba))$ *(de 2 et 4, par modus ponens)*

6. $\forall y\, (a = y \rightarrow (p^3aya \leftrightarrow p^3yya))$ *(de 5, par généralisation)*

7. $\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow (p^3xyx \leftrightarrow p^3yyx))$ *(de 6, par généralisation)*

Deuxième partie

Sémantique déductive

6 Les séquents propositionnels

Si Γ et Δ sont des suites finies d'énoncés, alors $\Gamma \Vdash \Delta$ est un *séquent*. Cette notion de séquent généralise la notion de raisonnement en ceci que la « conclusion » d'un séquent est une suite d'énoncés, alors que la conclusion d'un raisonnement est un énoncé [1].

1 Les règles d'inférence

Les règles d'inférence entre séquents, que nous présentons ci-dessous, se répartissent en règles principales et en une règle secondaire. Chaque règle principale a pour effet d'introduire un foncteur dans la partie gauche ou dans la partie droite du séquent qui se trouve en dessous de la ligne de séparation. Le sens de chaque connecteur se trouve ainsi précisé d'une manière qui n'est pas sans évoquer les définitions de la vérité des sections 2.3 et 3.4. Cette analogie transparaît assez bien dans la démonstration par l'absurde du lemme 6.2. Le calcul des séquents est donc non seulement une sorte de système d'axiomes et de règles, mais aussi une véritable théorie sémantique.

1.1 Règles principales

pour introduire à gauche	pour introduire à droite
$\dfrac{\Gamma \Vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Vdash \Delta}\,\neg_G$	$\dfrac{\Gamma, A \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash \neg A, \Delta}\,\neg_D$
$\dfrac{\Gamma, A, B \Vdash \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Vdash \Delta}\,\wedge_G$	$\dfrac{\Gamma \Vdash A, \Delta \quad \Gamma \Vdash B, \Delta}{\Gamma \Vdash (A \wedge B), \Delta}\,\wedge_D$
$\dfrac{\Gamma, A \Vdash \Delta \quad \Gamma, B \Vdash \Delta}{\Gamma, (A \vee B) \Vdash \Delta}\,\vee_G$	$\dfrac{\Gamma \Vdash A, B, \Delta}{\Gamma \Vdash (A \vee B), \Delta}\,\vee_D$

1. Les séquents ont été découverts par Gerhard Gentzen (1909-1945) et présentés en 1934 dans ses *Untersuchungen über das logische Schliessen.*

$$\frac{\Gamma \Vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \Vdash \Delta}{\Gamma, (A \to B) \Vdash \Delta} \to_G \qquad \frac{\Gamma, A \Vdash B, \Delta}{\Gamma \Vdash (A \to B), \Delta} \to_D$$

$$\frac{\Gamma \Vdash A, B, \Delta \quad \Gamma, A, B \Vdash \Delta}{\Gamma, (A \leftrightarrow B) \Vdash \Delta} \leftrightarrow_G \qquad \frac{\Gamma, A \Vdash B, \Delta \quad \Gamma, B \Vdash A, \Delta}{\Gamma \Vdash (A \leftrightarrow B), \Delta} \leftrightarrow_D$$

1.2 La seule règle structurelle

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma' \Vdash \Delta'} \mathrm{Perm}$$

Les suites Γ' et Δ' sont des permutations des suites Γ et Δ, respectivement.

> $\rhd$ *Par abus de langage, nous appellerons 'prémisse' d'une inférence un (une occurrence de) séquent qui se trouve au-dessus de la ligne de séparation et 'conclusion' un (une occurrence de) séquent qui se trouve en dessous.*
>
> *Tous les symboles logiques apparaissant dans une prémisse d'une inférence permise par une règle se retrouvent dans la conclusion.*
>
> *Une prémisse d'une inférence permise par une règle (principale) contient strictement moins (d'occurrences) de symboles logiques que sa conclusion.*

2 Les dérivations

Définition. *Un* séquent axiomatique *est un séquent dont la partie gauche et la partie droite ont au moins un énoncé en commun.*

La notion de dérivation. *La notion de* dérivation *est définie inductivement :*

- *tout séquent axiomatique est une dérivation ;*
- *si*

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \Vdash \Delta \end{array}$$

est une dérivation et si

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma' \Vdash \Delta'}$$

est une application d'une règle à une prémisse[2]*, alors*

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Vdash \Delta\end{array}}{\Gamma' \Vdash \Delta'}$$

est encore une dérivation ;

– *si*

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Vdash \Delta_1\end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2\end{array}$$

sont des dérivations et si

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash \Delta_1 \quad \Gamma_2 \Vdash \Delta_2}{\Gamma \Vdash \Delta}$$

est une application d'une règle à deux prémisses[3]*, alors*

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_1 \Vdash \Delta_1\end{array} \quad \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma_2 \Vdash \Delta_2\end{array}}{\Gamma \Vdash \Delta}$$

est encore une dérivation.

Le séquent inférieur d'une dérivation est dit *dérivable* (dans le calcul des séquents).

En langage plus familier, un séquent est dérivable ssi on peut l'obtenir à partir des séquents axiomatiques en appliquant les règles.

Exemples de dérivations

$$\frac{p \Vdash p, q \qquad p, q \Vdash q}{p, (p \to q) \Vdash q} \to_G$$

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\neg q, p \Vdash p}{\neg q \Vdash \neg p, p}\neg_D}{\neg q \Vdash p, \neg p}\mathit{Perm} \qquad \dfrac{\dfrac{q \Vdash q, \neg p}{q, \neg q \Vdash \neg p}\neg_G}{\neg q, q \Vdash \neg p}\mathit{Perm}}{\neg q, (p \to q) \Vdash \neg p} \to_G$$

2. $\neg_G$, $\neg_D$, $\wedge_G$, $\vee_D$, $\to_D$ ou Perm
3. $\wedge_D$, $\vee_G$, $\to_G$, $\leftrightarrow_G$ ou $\leftrightarrow_D$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Vdash p, q \qquad p, q \Vdash q}{p, (p \to q) \Vdash q}\to_G}{p, (p \to q), \neg q \Vdash}\neg_G}{\neg q, (p \to q), p \Vdash}\mathit{Perm}}{\neg q, (p \to q) \Vdash \neg p}\neg_D$$

$$\dfrac{\dfrac{p \Vdash p, \neg q \qquad \dfrac{\dfrac{p, q \Vdash q}{p \Vdash \neg q, q}\neg_D}{p \Vdash q, \neg q}\mathit{Perm}}{p \Vdash (p \wedge q), \neg q}\wedge_D}{p, \neg(p \wedge q) \Vdash \neg q}\neg_G$$

$$\dfrac{\dfrac{p \Vdash p, q \qquad q \Vdash p, q}{(p \vee q) \Vdash p, q}\vee_G}{(p \vee q), \neg p \Vdash q}\neg_G$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p, q, p \Vdash q \qquad p, q, q \Vdash p}{p, q \Vdash (p \leftrightarrow q)}\leftrightarrow_D}{p, q, \neg(p \leftrightarrow q) \Vdash}\neg_G}{\neg(p \leftrightarrow q), p, q \Vdash}\mathit{Perm}}{\neg(p \leftrightarrow q), p \Vdash \neg q}\neg_D$$

$$\dfrac{p \Vdash p}{\Vdash (p \to p)}\to_D$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \Vdash q, p}{\Vdash (p \to q), p}\to_D \qquad p \Vdash p}{((p \to q) \to p) \Vdash p}\to_G}{\Vdash (((p \to q) \to p) \to p)}\to_D$$

3 La validité

La notion de validité s'étend du raisonnement au séquent.

Un séquent $\Gamma \Vdash \Delta$ est *valide* ssi tout modèle de tous les énoncés de Γ est modèle d'au moins un des énoncés de Δ. En d'autres termes, si chaque fois que les énoncés de Γ sont vrais (dans un modèle), au moins un des énoncés de Δ est vrai (dans ce même modèle).

Inversement, $\Gamma \Vdash \Delta$ n'est pas valide ssi il y a un modèle vérifiant tous les énoncés de Γ et aucun de Δ.

Cas particuliers

a. *Γ est la suite vide. $\Vdash \Delta$ est valide ssi tout modèle vérifie au moins un des énoncés de Δ.*

b. *Δ est la suite vide. $\Gamma \Vdash$ est valide ssi aucun énoncé de Γ n'est vrai dans un modèle.*

c. $\Vdash$ est valide ssi tout modèle vérifie au moins un des énoncés de la suite vide. Le séquent vide n'est donc pas valide[4].

d. Δ se réduit à un seul énoncé. $\Gamma \Vdash C$ est assimilable au raisonnement $\Gamma \vdash C$.

Proposition 6.1 *Tout séquent axiomatique est valide.*

DÉMONSTRATION

Soit A un énoncé commun aux deux parties et soit $\mathcal{M}$ un modèle vérifiant tous les énoncés de la partie gauche. $\mathcal{M}$ vérifie donc A et partant un des énoncés de la partie droite. ∎

Lemme 6.2 (VALIDITÉ DES RÈGLES D'INFÉRENCE) *Si les prémisses d'une (inférence autorisée par une) des règles sont valides, alors sa conclusion est également valide.*

4. Rappelons que $\mathrm{Mod}(A)$ est la classe des modèles de A. La définition et ses cas particuliers se formulent donc comme suit en style ensembliste :
$A_1, \ldots, A_n \Vdash C_1, \ldots, C_m$ est valide ssi $\bigcap_{1 \le i \le n} \mathrm{Mod}(A_i) \subseteq \bigcup_{1 \le j \le m} \mathrm{Mod}(C_j)$;
$\Vdash C_1, \ldots, C_m$ est valide ssi $\bigcap \emptyset \subseteq \bigcup\limits_{1 \le j \le m} \mathrm{Mod}(C_j)$;
$A_1, \ldots, A_n \Vdash$ est valide ssi $\bigcap\limits_{1 \le i \le n} \mathrm{Mod}(A_i) \subseteq \bigcup \emptyset = \emptyset$;
$\Vdash$ est valide ssi $\bigcap \emptyset \not\subseteq \bigcup \emptyset$.

Démonstration

Comme le cas de la règle de permutation est évident, nous nous limiterons aux règles principales.

a. Les règles pour introduire à gauche.

Soit un modèle, $\mathcal{M}$, dans lequel tous les énoncés de la partie gauche de la conclusion sont vrais. En particulier, tous les énoncés de Γ sont vrais dans $\mathcal{M}$. Il s'agit de montrer qu'un des énoncés de Δ est vrai dans $\mathcal{M}$. Nous montrons cela règle par règle en utilisant la validité des prémisses.

$\neg_G$ Comme $\neg A$ est vrai dans $\mathcal{M}$, A ne l'est pas. Par ailleurs, un des énoncés de A, Δ est vrai dans $\mathcal{M}$. Ce ne peut être A. Donc c'est un des énoncés de Δ.

$\wedge_G$ $(A \wedge B)$ est vrai dans $\mathcal{M}$. Donc A est vrai dans $\mathcal{M}$ et B est vrai dans $\mathcal{M}$. Dès lors tous les énoncés de Γ, A, B sont vrais dans $\mathcal{M}$. Donc un des énoncés de Δ est vrai dans $\mathcal{M}$.

$\vee_G$ $(A \vee B)$ est vrai dans $\mathcal{M}$. Alors A est vrai dans $\mathcal{M}$ et/ou B est vrai dans $\mathcal{M}$. Dès lors tous les énoncés de Γ, A et/ou tous ceux de Γ, B sont vrais dans $\mathcal{M}$. Cela montre en tous cas qu'un des énoncés de Δ est vrai dans $\mathcal{M}$.

$\rightarrow_G$ $(A \rightarrow B)$ est vrai dans $\mathcal{M}$. Alors A n'est pas vrai dans $\mathcal{M}$ et/ou B est vrai dans $\mathcal{M}$. Si A n'est pas vrai dans $\mathcal{M}$, c'est que l'un des énoncés de Δ l'est. Si B est vrai dans $\mathcal{M}$, tous les énoncés de Γ, B sont vrais dans $\mathcal{M}$. Donc, à nouveau, un des énoncés de Δ est vrai dans $\mathcal{M}$.

$\leftrightarrow_G$ Puisque $(A \leftrightarrow B)$ est vrai dans $\mathcal{M}$, il faut envisager deux possibilités. Si A et B sont vrais dans $\mathcal{M}$, tous les énoncés de Γ, A, B sont vrais dans $\mathcal{M}$ et donc il y a un énoncé de Δ qui est vrai dans $\mathcal{M}$. Si ni A ni B ne sont vrais dans $\mathcal{M}$, il y a également un énoncé de Δ qui est vrai dans $\mathcal{M}$, car tous les énoncés de Γ sont vrais dans $\mathcal{M}$.

b. Les règles pour introduire à droite.

Soit un modèle $\mathcal{M}$. Nous supposons que tous les énoncés de la partie gauche, et en particulier ceux de Γ, sont vrais dans $\mathcal{M}$. Il faut montrer qu'un des énoncés de la partie droite de la conclusion est vrai dans $\mathcal{M}$. Si un des énoncés de Δ est vrai dans $\mathcal{M}$, c'est terminé. Nous supposerons donc qu'aucun des énoncés de Δ n'est vrai dans $\mathcal{M}$.

$\neg_D$ Si A est vrai dans $\mathcal{M}$, un des énoncés de Δ est vrai, par la validité de la prémisse. Ceci a été exclu. Donc A n'est pas vrai et $\neg A$ est vrai dans $\mathcal{M}$.

$\wedge_D$ A et B sont vrais dans $\mathcal{M}$, en vertu de la validité des prémisses. Donc $(A \wedge B)$ est vrai dans $\mathcal{M}$.

$\vee_D$ A et/ou B sont vrais dans $\mathcal{M}$, par la validité de la prémisse. Donc $(A \vee B)$ est vrai dans $\mathcal{M}$.

$\rightarrow_D$ La prémisse étant supposée valide, A ne peut être vrai dans $\mathcal{M}$ sans que B le soit. $(A \rightarrow B)$ est donc vrai dans $\mathcal{M}$.

$\leftrightarrow_D$ On utilisera le cas précédent. $(A \rightarrow B)$ est vrai, par la validité de la première prémisse et $(B \rightarrow A)$ est vrai, par la validité de la seconde prémisse. Dès lors, $(A \leftrightarrow B)$ est vrai dans $\mathcal{M}$.

La démonstration qu'on vient de donner est une démonstration directe : nous supposons les prémisses valides et nous prouvons que la conclusion l'est aussi.

Nous présentons maintenant une démonstration par l'absurde, qui présente l'inconvénient de ne pas être directe, mais qui a l'avantage d'être plus rapide.

Nous supposons cette fois que la conclusion n'est pas valide et nous prouvons qu'une au moins des prémisses ne l'est.

Si la conclusion n'est pas valide, il y a un modèle $\mathcal{M}$ qui vérifie tous les énoncés de la partie gauche et aucun de la partie droite. En particulier, $\mathcal{M}$ vérifie tous les énoncés de Γ et aucun de Δ. Il suffira donc de montrer, pour au moins une prémisse, que $\mathcal{M}$ vérifie tous les énoncés de la partie gauche qui ne se trouvent pas dans Γ et aucun de ceux de la partie droite qui ne se trouvent pas dans Δ.

a. Règles comportant une seule prémisse.

$\neg_G$ $\mathcal{M} \models \neg A$, donc $\mathcal{M} \not\models A$.

$\neg_D$ $\mathcal{M} \not\models \neg A$, donc $\mathcal{M} \models A$.

$\wedge_G$ $\mathcal{M} \models (A \wedge B)$, donc $\mathcal{M} \models A$ et $\mathcal{M} \models B$.

$\vee_D$ $\mathcal{M} \not\models (A \vee B)$, donc $\mathcal{M} \not\models A$ et $\mathcal{M} \not\models B$.

$\rightarrow_D$ $\mathcal{M} \not\models (A \rightarrow B)$, donc $\mathcal{M} \models A$ et $\mathcal{M} \not\models B$.

b. Règles comportant deux prémisses.

$\wedge_D$ $\mathcal{M} \not\models (A \wedge B)$, donc $\mathcal{M} \not\models A$ et/ou $\mathcal{M} \not\models B$.

$\vee_G$ $\mathcal{M} \models (A \vee B)$, donc $\mathcal{M} \models A$ et/ou $\mathcal{M} \models B$.

$\rightarrow_G$ $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$, donc $\mathcal{M} \not\models A$ et/ou $\mathcal{M} \models B$.

$\leftrightarrow_G$ $\mathcal{M} \models (A \leftrightarrow B)$, donc $\mathcal{M} \models A$, $\mathcal{M} \models B$ et/ou $\mathcal{M} \not\models A$, $\mathcal{M} \not\models B$.

$\leftrightarrow_D$ $\mathcal{M} \not\models (A \leftrightarrow B)$, donc $\mathcal{M} \models A$, $\mathcal{M} \not\models B$ et/ou $\mathcal{M} \not\models A$, $\mathcal{M} \models B$. ∎

Théorème 6.3 (Théorème de validité) *Tout séquent dérivable est valide.*

Démonstration

Ceci résulte du fait que tout séquent axiomatique est valide et de la validité des règles d'inférence (lemme 6.2). ∎

4 L'inversion

Proposition 6.4 (Inversion des règles d'inférence) *Si la conclusion d'une inférence autorisée par une règle est valide, alors sa ou ses prémisses sont également valides.*

Démonstration

Le cas de la règle de permutation est immédiat.

Comme dans le cas du lemme 6.2, nous pouvons démontrer cela pour les règles principales de deux façons différentes. Nous nous contenterons ici de la preuve par l'absurde, plus rapide.

Supposons que tous les énoncés gauches d'une ou de la prémisse soient vrais dans $\mathcal{M}$ et qu'aucun des énoncés droits de cette prémisse n'est vrai dans $\mathcal{M}$. En particulier tous les énoncés de Γ seront supposés vrais dans $\mathcal{M}$ et aucun de ceux de Δ ne sera supposé vrai dans $\mathcal{M}$. Montrons qu'il en va de même pour la conclusion. Il suffira naturellement de prouver cela pour les énoncés qui ne sont ni dans Γ ni dans Δ.

a. Examinons d'abord les règles principales qui n'ont qu'une prémisse.

$\neg_G$ $\mathcal{M} \not\models A$, donc $\mathcal{M} \models \neg A$.

$\neg_D$ $\mathcal{M} \models A$, donc $\mathcal{M} \not\models \neg A$.

$\wedge_G$ $\mathcal{M} \models A$, $\mathcal{M} \models B$, donc $\mathcal{M} \models (A \wedge B)$.

$\vee_D$ $\mathcal{M} \not\models A$, $\mathcal{M} \not\models B$, donc $\mathcal{M} \not\models (A \vee B)$.

$\rightarrow_D$ $\mathcal{M} \models A$, $\mathcal{M} \not\models B$, donc $\mathcal{M} \not\models (A \rightarrow B)$.

b. Passons ensuite aux règles qui ont deux prémisses.

Montrons d'abord le théorème pour la prémisse de gauche.

$\wedge_D$ $\mathcal{M} \not\models A$, donc $\mathcal{M} \not\models (A \wedge B)$.

$\vee_G$ $\mathcal{M} \models A$, donc $\mathcal{M} \models (A \vee B)$.

$\rightarrow_G$ $\mathcal{M} \not\models A$, donc $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$.

$\leftrightarrow_G$ $\mathcal{M} \not\models A$, $\mathcal{M} \not\models B$, donc $\mathcal{M} \models (A \leftrightarrow B)$.

$\leftrightarrow_D$ $\mathcal{M} \models A$, $\mathcal{M} \not\models B$, donc $\mathcal{M} \not\models (A \leftrightarrow B)$.

Terminons par la prémisse de droite.

$\wedge_D$ $\mathcal{M} \not\models B$, donc $\mathcal{M} \not\models (A \wedge B)$.

$\vee_G$ $\mathcal{M} \models B$, donc $\mathcal{M} \models (A \vee B)$.

$\rightarrow_G$ $\mathcal{M} \models B$, donc $\mathcal{M} \models (A \rightarrow B)$.

$\leftrightarrow_G$ $\mathcal{M} \models A$, $\mathcal{M} \models B$, donc $\mathcal{M} \models (A \leftrightarrow B)$.

$\leftrightarrow_D$ $\mathcal{M} \not\models A$, $\mathcal{M} \models B$, donc $\mathcal{M} \not\models (A \leftrightarrow B)$.

7 La substitution

Ce chapitre a un caractère essentiellement technique. Il permettra de simplifier grandement la logique des prédicats en établissant à partir de la définition de la vérité, les propriétés consignées dans le théorème 7.3. Ces propriétés ne sont d'ailleurs pas tellement surprenantes tant elles paraissent attendues, voire évidentes.

La notion de substitution de termes clos à des occurrences de variables ou de constantes, que nous avons jusqu'à présent limitée aux formules, s'étend évidemment aux termes. Comme on n'est plus tenu dans ce cas de se préoccuper d'occurrences liées de variables, $t[\alpha := u]$ désignera le résultat de la substitution du terme clos u aux occurrences de α dans le terme t.

Outre les deux propriétés de la substitution mentionnées dans la section 1.2, on notera encore que, si E est une formule ou un terme,

si α est distinct de β et n'est pas dans u,

$$E[\alpha := t][\beta := u] \text{ est identique à } E[\beta := u][\alpha := t[\beta := u]];$$

si β est identique à α ou n'est pas dans E,

$$E[\alpha := t][\beta := u] \text{ est identique à } E[\alpha := t[\beta := u]];$$

si α est distinct de β et n'est pas dans u et β n'est pas dans t,

$$E[\alpha := t][\beta := u] \text{ est identique à } E[\beta := u][\alpha := t].$$

Dans ce dernier cas, la substitution consécutive de t à α et de u à β peut également être considérée comme une substitution simultanée de t, u à α, β.

1 La substitution simultanée

Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des variables ou des constantes *distinctes* et $t_1, ..., t_n$ des termes clos. Si E est une formule ou un terme, $E[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n]$ désigne la formule ou le terme obtenu en remplaçant simultanément dans E, pour chaque i, α_i (en ses occurrences libres si c'est une variable) par t_i.

La substitution simple est le cas particulier de la substitution précédemment définie où $n = 1$.

On a les propriétés suivantes :

$$E[\alpha_1 := \alpha_1, \ldots, \alpha_n := \alpha_n] \text{ est identique à } E;$$

$$\text{en particulier, } E[\quad] \text{ est identique à } E;$$

si les β_j $(1 \leq j \leq m)$ ne figurent pas librement dans E, alors

$$E[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n, \beta_1 := s_1, ..., \beta_m := s_m] \text{ est identique à } E[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n];$$

si π est une permutation de la suite $1, \ldots, n$, alors

$$E[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n] \text{ est identique à } E[\alpha_{\pi(1)} := t_{\pi(1)}, \ldots, \alpha_{\pi(n)} := t_{\pi(n)}];$$

si β est distinct de α et n'est pas dans t,

$$E[\alpha := t][\beta := u] \text{ est identique à } E[\alpha := t, \beta := u].$$

Exemples

$$\begin{array}{rll}
p^2ab[a := f^2ab][b := g^1b] & \text{est identique à} & p^2f^2ag^1bg^1b, \\
p^2ab[b := g^1b][a := f^2ab[b := g^1b]] & \text{est identique à} & p^2f^2ag^1bg^1b, \\
q^1a[a := h^1a][a := g^1a] & \text{est identique à} & q^1h^1g^1a, \\
q^1a[a := h^1x[x := g^1a]] & \text{est identique à} & q^1h^1g^1a, \\
q^1a[a := f^2ab][b := c] & \text{est identique à} & q^1f^2ac, \\
q^1a[a := f^2ab[b := c]] & \text{est identique à} & q^1f^2ac, \\
p^2xy[x := h^1x][y := g^1y] & \text{est identique à} & p^2h^1xg^1y, \\
p^2ab[b := g^1b][a := h^1a] & \text{est identique à} & p^2h^1ag^1b, \\
(\exists x\, p^1x \vee r^2ax)[x := a] & \text{est identique à} & (\exists x\, p^1x \vee r^2aa), \\
(\exists x\, p^1x \vee r^2ax)[x := a, a := b, y := c] & \text{est identique à} & (\exists x\, p^1x \vee r^2ba), \\
(\exists x\, p^1x \vee r^2ax)[x := a][a := b][y := c] & \text{est identique à} & (\exists x\, p^1x \vee r^2bb), \\
(\exists x\, p^1x \vee r^2ax)[a := b, y := c][x := a] & \text{est identique à} & (\exists x\, p^1x \vee r^2ba), \\
(\exists x\, p^1x \vee r^2ax)[a := b, x := c][c := b, b := a] & \text{est identique à} & (\exists x\, p^1x \vee r^2ab).
\end{array}$$

Lorsque le contexte permet de lever l'ambiguïté, il est commode d'écrire $[\vec{\alpha} := \vec{t}]$ au lieu de $[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n]$.

2 Variantes et substitution

Définition. *Le modèle $\mathcal{M}'$ est une* variante *de $\mathcal{M}$ ssi $\mathcal{M}'$ ne* peut *différer de $\mathcal{M}$ que par l'interprétation donnée aux constantes. Plus précisément, $\mathcal{M}'$ est une variante de $\mathcal{M}$ ssi $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$ ont même structure sous-jacente et si $\alpha_{\mathcal{M}} = \alpha_{\mathcal{M}'}$, pour chaque symbole propre, α, du langage.*

Par exemple, les modèles du genre $\mathcal{M}[\alpha \mapsto o]$ sont des variantes de $\mathcal{M}$. Notons également que rien n'interdit que $\mathcal{M}'$ soit le même modèle que $\mathcal{M}$. En réalité, être une variante de *est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive).*

Lemme 7.1 *Soient une formule A et un terme t, une liste de constantes ou variables distinctes, $\alpha_1, ..., \alpha_n$, comprenant* toutes *celles qui figurent librement dans A ou t et deux listes de termes clos, $t_1, ..., t_n$ et $u_1, ..., u_n$. Soient également un modèle $\mathcal{M}$ et une variante $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tels que $t_{i\mathcal{M}} = u_{i\mathcal{N}}$, si $1 \leq i \leq n$. Alors,*

1. $t[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n]_{\mathcal{M}} = t[\alpha_1 := u_1, \ldots, \alpha_n := u_n]_{\mathcal{N}}$, en particulier, $t_{\mathcal{M}} = t_{\mathcal{N}}$, si t est clos et que toute constante de t a la même interprétation dans $\mathcal{M}$ et dans $\mathcal{N}$;

2. $\mathcal{M} \models A[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n]$ ssi $\mathcal{N} \models A[\alpha_1 := u_1, \ldots, \alpha_n := u_n]$.

Démonstration

1. On raisonne par induction sur la longueur de t. Si t est une constante ou une variable, disons α_i, c'est immédiat.

Si t est $Ft'_1 \ldots t'_k$, alors, par hypothèse d'induction, $t'_j[\vec{\alpha} := \vec{t}]_{\mathcal{M}} = t'_j[\vec{\alpha} := \vec{u}]_{\mathcal{N}}$, si $1 \leq j \leq k$. Donc, par la définition de variante,

$$\begin{aligned} Ft'_1[\vec{\alpha} := \vec{t}] \ldots t'_k[\vec{\alpha} := \vec{t}]_{\mathcal{M}} &= F_{\mathcal{M}}(t'_1[\vec{\alpha} := \vec{t}]_{\mathcal{M}}, \ldots, t'_k[\vec{\alpha} := \vec{t}]_{\mathcal{M}}), \\ &= F_{\mathcal{N}}(t'_1[\vec{\alpha} := \vec{u}]_{\mathcal{M}}, \ldots, t'_k[\vec{\alpha} := \vec{u}]_{\mathcal{M}}), \\ &= F_{\mathcal{M}}(t'_1[\vec{\alpha} := \vec{u}]_{\mathcal{N}}, \ldots, t'_k[\vec{\alpha} := \vec{u}]_{\mathcal{N}}), \\ &= Ft'_1[\vec{\alpha} := \vec{u}] \ldots t'_k[\vec{\alpha} := \vec{u}]_{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

2. Nous illustrons la preuve (facile mais ennuyeuse) par induction sur la complexité de A par quelques cas significatifs.

2.a. Si A est $Pt'_1 \ldots t'_k$, où P est un symbole prédicatif k-aire, $A[\vec{\alpha} := \vec{t}]$ est $Pt'_1[\vec{\alpha} := \vec{t}] \ldots t'_k[\vec{\alpha} := \vec{t}]$ et $A[\vec{\alpha} := \vec{u}]$ est $Pt'_1[\vec{\alpha} := \vec{u}] \ldots t'_k[\vec{\alpha} := \vec{u}]$. Par 1, $t'_i[\vec{\alpha} := \vec{t}]_{\mathcal{M}} = t'_i[\vec{\alpha} := \vec{u}]_{\mathcal{N}}$, si $1 \leq i \leq k$. Donc $\mathcal{M} \models Pt'_1[\vec{\alpha} := \vec{t}] \ldots t'_k[\vec{\alpha} := \vec{t}]$ ssi $\mathcal{N} \models Pt'_1[\vec{\alpha} := \vec{u}] \ldots t'_k[\vec{\alpha} := \vec{u}]$.

2.b. Si A est de la forme $(B \to C)$. Il est évident que $(B \to C)[\vec{\alpha} := \vec{t}]$ et $(B \to C)[\vec{\alpha} := \vec{u}]$ sont respectivement identiques à $(B[\vec{\alpha} := \vec{t}] \to C[\vec{\alpha} := \vec{t}])$ et $(B[\vec{\alpha} := \vec{u}] \to C[\vec{\alpha} := \vec{u}])$.

Donc, par hypothèse d'induction,

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \models (B \to C)[\vec{\alpha} := \vec{t}] \quad &\text{ssi} \quad \mathcal{M} \not\models B[\vec{\alpha} := \vec{t}] \text{ et/ou } \mathcal{M} \models C[\vec{\alpha} := \vec{t}],\\ &\text{ssi} \quad \mathcal{N} \not\models B[\vec{\alpha} := \vec{u}] \text{ et/ou } \mathcal{N} \models C[\vec{\alpha} := \vec{u}],\\ &\text{ssi} \quad \mathcal{N} \models (B \to C)[\vec{\alpha} := \vec{u}].\end{aligned}$$

2.c. A est de la forme $\exists\alpha\, B$. Soit β la première constante qui ne figure pas dans $A[\vec{\alpha} := \vec{t}]$ et γ la première constante qui ne figure pas dans $A[\vec{\alpha} := \vec{u}]$.

Nous pouvons nous limiter à la considération des α_i qui apparaissent effectivement (librement, s'il s'agit de variables) dans A, autrement dit nous pouvons supposer sans restriction que

– β n'est dans aucun t_i ;

– γ n'est dans aucun u_i ;

– $B[\vec{\alpha} := \vec{t}][\alpha := \beta]$ est le même énoncé que $B[\vec{\alpha} := \vec{t}, \alpha := \beta]$;

– $B[\vec{\alpha} := \vec{u}][\alpha := \gamma]$ est le même énoncé que $B[\vec{\alpha} := \vec{u}, \alpha := \gamma]$.

Il est clair que $A[\vec{\alpha} := \vec{t}]$ est identique à $\exists\alpha(B[\vec{\alpha} := \vec{t}])$ et que $A[\vec{\alpha} := \vec{u}]$ est identique à $\exists\alpha(B[\vec{\alpha} := \vec{u}])$, car α est une variable ayant ses occurrences liées dans A et les $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont des constantes ou des variables ayant leurs occurrences libres dans A.

Si $\mathcal{M} \models A[\vec{\alpha} := \vec{t}]$, il y a un $o \in |\mathcal{M}|$ tel que $\mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models B[\vec{\alpha} := \vec{t}][\alpha := \beta]$, c'est-à-dire $\mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models B[\vec{\alpha} := \vec{t}, \alpha := \beta]$. Par 1, $t_{i\mathcal{M}[\beta\mapsto o]} = ti_{\mathcal{M}}$ et $u_{i\mathcal{N}[\gamma\mapsto o]} = u_{i\mathcal{N}}$. Donc, par hypothèse, $t_{i\mathcal{M}[\beta\mapsto o]} = u_{i\mathcal{N}[\gamma\mapsto o]}$. En outre $\mathcal{M}[\beta \mapsto o](\beta) = \mathcal{N}[\gamma \mapsto o](\gamma) = o$. Donc, en utilisant l'hypothèse d'induction, $\mathcal{N}[\gamma \mapsto o] \models B[\vec{\alpha} := \vec{u}, \alpha := \gamma]$, c'est-à-dire que $\mathcal{N}[\gamma \mapsto o] \models B[\vec{\alpha} := \vec{u}][\alpha := \gamma]$. Par conséquent, $\mathcal{N} \models A[\vec{\alpha} := \vec{u}]$.

La réciproque se montre de la même façon. ∎

Proposition 7.2

1. *Soient une formule A, une liste de constantes ou variables distinctes $\alpha_1, ..., \alpha_n$, comprenant toutes les variables qui figurent librement dans A et deux listes de termes clos $t_1, ..., t_n$ et $u_1, ..., u_n$. Soient également un modèle $\mathcal{M}$ et une variante $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tels que $t_{i\mathcal{M}} = u_{i\mathcal{N}}$ $(1 \leq i \leq n)$ et $\beta_{\mathcal{M}} = \beta_{\mathcal{N}}$, pour toute constante β se trouvant dans A, mais pas dans la liste $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Alors,*

$$\mathcal{M} \models A[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n] \textit{ ssi } \mathcal{N} \models A[\alpha_1 := u_1, \ldots, \alpha_n := u_n].$$

2. *Soient un énoncé A, une liste de constantes distinctes $\alpha_1, ..., \alpha_n$ et une liste de termes clos $t_1, ..., t_n$. Soient également un modèle $\mathcal{M}$ et une variante $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tels*

que $\alpha_{i\mathcal{M}} = t_{i\mathcal{N}}$ $(1 \leq i \leq n)$ *et* $\beta_{\mathcal{M}} = \beta_{\mathcal{N}}$, *pour toute constante* β *se trouvant dans* A, *mais pas dans la liste* $\alpha_1, ..., \alpha_n$. *Alors,*

$$\mathcal{M} \models A \text{ ssi } \mathcal{N} \models A[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n].$$

En particulier,

$$\mathcal{M}[\alpha \mapsto t_{\mathcal{M}}] \models A \text{ ssi } \mathcal{M} \models A[\alpha := t].$$

Démonstration

1 découle immédiatement du lemme précédent en remarquant que $A[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n]$ et $A[\alpha_1 := u_1, \ldots, \alpha_n := u_n]$ sont respectivement identiques à $A[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n, \beta_1 := \beta_1, \ldots, \beta_m := \beta_m]$ et à $A[\alpha_1 := u_1, \ldots, \alpha_n := u_n, \beta_1 := \beta_1, \ldots, \beta_m := \beta_m]$.

2 suit de 1, car A est identique à $A[\alpha_1 := \alpha_1, \ldots, \alpha_n := \alpha_n]$. ∎

En guise de corollaires immédiats de la proposition 7.2, nous obtenons :

– si A ne contient aucune constante et si $\mathcal{N}$ est une variante de $\mathcal{M}$, alors $\mathcal{M} \models A$ ssi $\mathcal{N} \models A$.

– si la variable α n'a pas d'occurrences libres dans A, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models A \quad &\text{ssi} \quad \mathcal{M} \models \forall \alpha A, \\ \mathcal{M} \models A \quad &\text{ssi} \quad \mathcal{M} \models \exists \alpha A. \end{aligned}$$

Théorème 7.3

1. *Si* $\mathcal{N}$ *est une variante de* $\mathcal{M}$ *et si* $\alpha_{\mathcal{M}} = \alpha_{\mathcal{N}}$, *pour toute constante de* A, *alors* $\mathcal{M} \models A$ *ssi* $\mathcal{N} \models A$.

2. *Si* β *est une constante ne figurant pas dans* A, *alors :*

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \forall \alpha\, A \quad &\textit{ssi} \quad \mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models A[\alpha := \beta],\ \textit{pour tout } o \in |\mathcal{M}|\ ; \\ \mathcal{M} \models \exists \alpha\, A \quad &\textit{ssi} \quad \mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models A[\alpha := \beta],\ \textit{pour au moins un } o \in |\mathcal{M}|. \end{aligned}$$

3. *S'il y a un terme clos* t *tel que* $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$, *alors* $\mathcal{M} \models \exists \alpha A$.

Si $\mathcal{M} \models \forall \alpha A$, *alors* $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$, *pour tout terme clos* t.

4. *Si* β *est une constante ne figurant pas dans l'énoncé* $\forall \alpha\, A$, *alors* $A[\alpha := \beta]$ *est une loi logique ssi* $\forall \alpha\, A$ *est une loi logique.*

5. *Si tout élément de* $|\mathcal{M}|$ *a un nom, c'est-à-dire est* $t_{\mathcal{M}}$ *pour au moins un terme clos* t*, alors :*

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models \forall\alpha A & \textit{ssi} & \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \textit{ pour tout terme clos } t\,; \\ \mathcal{M} \models \exists\alpha A & \textit{ssi} & \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \textit{ pour au moins un terme clos } t. \end{array}$$

Démonstration

1 est un cas particulier de la proposition 7.2.2.

2. Soient β et γ des constantes ne figurant pas dans A. Par la proposition 7.2, $\mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models A[\alpha := \beta]$ ssi $\mathcal{M}[\gamma \mapsto o] \models A[\alpha := \gamma]$. La conclusion s'obtient en appliquant la définition de la vérité des énoncés généraux, avec γ comme première constante ne figurant pas dans A.

3. Supposons que $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$ et soit β la première constante non dans A. Donc, $A[\alpha := t]$ est identique à $A[\alpha := \beta][\beta := t]$. Par la proposition 7.2.2, $\mathcal{M}[\beta \mapsto t_{\mathcal{M}}] \models A[\alpha := \beta]$. Donc, $\mathcal{M} \models \exists\alpha\, A$.

On peut donner une démonstration analogue pour $\forall\alpha\, A$ ou utiliser son équivalence à $\neg\exists\alpha\neg A$.

4. En raison du point 3, il suffit de montrer que $\forall\alpha\, A$ est une loi logique si $A[\alpha := \beta]$ en est une. Si $A[\alpha := \beta]$ est une loi logique, alors $\mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models A[\alpha := \beta]$, quels que soient $\mathcal{M}$ et $o \in |\mathcal{M}|$. Donc $\mathcal{M} \models \forall\alpha\, A$, par le point 2.

5. Si $\mathcal{M} \models \exists\alpha\, A$, alors il existe un élément $o \in |\mathcal{M}|$ tel que $\mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models A[\alpha := \beta]$ (β étant la première constante non dans A). Par hypothèse, il y a un terme clos t tel que $o = t_{\mathcal{M}}$. Donc $\mathcal{M}[\beta \mapsto t_{\mathcal{M}}] \models A[\alpha := \beta]$, ce qui permet d'utiliser la proposition 7.2.2 pour obtenir $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$.
Le point 3, nous assure que réciproquement $\mathcal{M} \models \exists\alpha\, A$, s'il y a un terme clos t tel que $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$.

Le cas du quantificateur universel se traite de la même manière ou en utilisant la loi $\forall\alpha\, A \leftrightarrow \neg\exists\alpha\neg A$. ∎

8 Les séquents d'énoncés prédicatifs

Nous introduisons ici des séquents d'énoncés de langages prédicatifs. Le calcul des séquents s'en trouve enrichi. Les deux nouveaux symboles logiques $\forall$ et $\exists$ demandent chacun deux règles d'inférences.

introduction à gauche	introduction à droite
$\dfrac{\forall\alpha A, \Gamma, A[\alpha := t] \Vdash \Delta}{\Gamma, \forall\alpha A \Vdash \Delta}\,\forall_G$	$\dfrac{\Gamma \Vdash A[\alpha := \beta], \Delta}{\Gamma \Vdash \forall\alpha A, \Delta}\,\forall_D$
$\dfrac{\Gamma, A[\alpha := \beta] \Vdash \Delta}{\Gamma, \exists\alpha A \Vdash \Delta}\,\exists_G$	$\dfrac{\Gamma \Vdash A[\alpha := t], \Delta, \exists\alpha A}{\Gamma \Vdash \exists\alpha A, \Delta}\,\exists_D$

La constante β mentionnée dans $\forall_D$ et $\exists_G$ ne peut pas figurer dans la conclusion d'une inférence faite par ces règles — à savoir $\Gamma \Vdash \forall\alpha A, \Delta$ ou $\Gamma, \exists\alpha A \Vdash \Delta$. Cette constante est appelée *propre*.

$\triangleright$ *La restriction à laquelle sont soumises les règles $\forall_D$ et $\exists_G$ est nécessaire pour que ces règles soient valides. Les règles $\forall_G$ et $\exists_D$ ne sont pas soumises à des conditions particulières. Mais, par contre, la prémisse contient plus d'énoncés que la conclusion.*

La définition de la notion de *dérivation* donnée à la section 2 se prolonge en ajoutant la clause suivante :

– Soit une dérivation

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Vdash \Delta\end{array}$$

et une instance d'une des règles $\forall_G$, $\forall_D$, $\exists_G$ ou $\exists_D$,

$$\frac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma' \Vdash \Delta'}$$

alors

$$\cfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \Gamma \Vdash \Delta\end{matrix}}{\Gamma' \Vdash \Delta'}$$

est encore une dérivation.

Exemples de dérivations

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x\,\neg p^1x, p^1a \Vdash p^1a}{\forall x\,\neg p^1x, p^1a, \neg p^1a \Vdash}\,\neg_G}{p^1a, \forall x\,\neg p^1x \Vdash}\,\forall_G}{\forall x\,\neg p^1x, p^1a \Vdash}\,\mathit{Perm}}{\forall x\,\neg p^1x, \exists x\, p^1x \Vdash}\,\exists_G}{\forall x\,\neg p^1x \Vdash \neg\exists x\, p^1x}\,\neg_D$$

Voici une autre dérivation du même séquent :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x\,\neg p^1x, p^1b \Vdash p^1b, p^1a}{\forall x\,\neg p^1x, p^1b, \neg p^1b \Vdash p^1a}\,\neg_G}{p^1b, \forall x\,\neg p^1x \Vdash p^1a}\,\forall_G}{\forall x\,\neg p^1x, p^1b \Vdash p^1a}\,\mathit{Perm}}{\forall x\,\neg p^1x, \exists x\, p^1x \Vdash p^1a}\,\exists_G}{\forall x\,\neg p^1x \Vdash \neg\exists x\, p^1x, p^1a}\,\neg_D}{\forall x\,\neg p^1x \Vdash p^1a, \neg\exists x\, p^1x}\,\mathit{Perm}}{\forall x\,\neg p^1x, \neg p^1a \Vdash \neg\exists x\, p^1x}\,\neg_G}{\forall x\,\neg p^1x \Vdash \neg\exists x\, p^1x}\,\forall_G$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x\,(p^1x \to q^1x), p^1a \Vdash p^1a, q^1a \qquad \forall x\,(p^1x \to q^1x), p^1a, q^1a \Vdash q^1a}{\forall x\,(p^1x \to q^1x), p^1a, (p^1a \to q^1a) \Vdash q^1a}\,\to_G}{p^1a, \forall x\,(p^1x \to q^1x) \Vdash q^1a}\,\forall_G}{\forall x\,(p^1x \to q^1x), p^1a \Vdash q^1a}\,\mathit{Perm}$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x\, r^2xb, r^2ab \Vdash r^2ab, \exists y\, r^2ay$}
\RightLabel{$\exists_D$}
\UnaryInfC{$\forall x\, r^2xb, r^2ab \Vdash \exists y\, r^2ay$}
\RightLabel{$\forall_G$}
\UnaryInfC{$\forall x\, r^2xb \Vdash \exists y\, r^2ay$}
\RightLabel{$\exists_G$}
\UnaryInfC{$\exists y \forall x\, r^2xy \Vdash \exists y\, r^2ay$}
\RightLabel{$\forall_D$}
\UnaryInfC{$\exists y \forall x\, r^2xy \Vdash \forall x \exists y\, r^2xy$}
\end{prooftree}
$$

Le barbier de Russell *(r^2yx se lisant « y rase x »)*

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx), r^2aa \Vdash r^2aa$}
\doubleLine
\RightLabel{$\neg_D + Perm$}
\UnaryInfC{$\forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx) \Vdash r^2aa, \neg r^2aa$}
\AxiomC{$\forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx), r^2aa \Vdash r^2aa$}
\RightLabel{$\neg_G$}
\UnaryInfC{$\forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx), r^2aa, \neg r^2aa \Vdash$}
\RightLabel{$\leftrightarrow_G$}
\BinaryInfC{$\forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx), (r^2aa \leftrightarrow \neg r^2aa) \Vdash$}
\RightLabel{$\forall_G$}
\UnaryInfC{$\forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx) \Vdash$}
\RightLabel{$\exists_G$}
\UnaryInfC{$\exists y \forall x\,(r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx) \Vdash$}
\end{prooftree}
$$

Paradoxe de la tournée générale

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$p^1a, p^1b \Vdash \forall x\, p^1x, p^1b, \exists x\,(p^1x \to \forall x\, p^1x)$}
\RightLabel{$\to_D$}
\UnaryInfC{$p^1a \Vdash (p^1b \to \forall x\, p^1x), p^1b, \exists x\,(p^1x \to \forall x\, p^1x)$}
\doubleLine
\RightLabel{$\exists_D + Perm$}
\UnaryInfC{$p^1a \Vdash p^1b, \exists x\,(p^1x \to \forall x\, p^1x)$}
\RightLabel{$\forall_D$}
\UnaryInfC{$p^1a \Vdash \forall x\, p^1x, \exists x\,(p^1x \to \forall x\, p^1x)$}
\RightLabel{$\to_D$}
\UnaryInfC{$\Vdash (p^1a \to \forall x\, p^1x), \exists x\,(p^1x \to \forall x\, p^1x)$}
\RightLabel{$\exists_D$}
\UnaryInfC{$\Vdash \exists x\,(p^1x \to \forall x\, p^1x)$}
\end{prooftree}
$$

Le dernier exemple montre l'intérêt pratique d'une bonne stratégie.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y), p^1d, p^1b \Vdash p^1b, q^1a, q^1c, \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\AxiomC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y), p^1d, p^1b, q^1c \Vdash q^1a, q^1c, \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\doubleLine
\RightLabel{$\to_G + Perm$}
\BinaryInfC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y), (p^1b \to q^1c), p^1d, p^1b \Vdash q^1a, q^1c, \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\doubleLine
\RightLabel{$\to_D + Perm$}
\UnaryInfC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y), (p^1b \to q^1c), p^1d \Vdash q^1c, (p^1b \to q^1a), \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\RightLabel{$\to_D$}
\UnaryInfC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y), (p^1b \to q^1c) \Vdash (p^1d \to q^1c), (p^1b \to q^1a), \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\RightLabel{$\forall_D$}
\UnaryInfC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y), (p^1b \to q^1c) \Vdash \forall x\,(p^1x \to q^1c), (p^1b \to q^1a), \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\doubleLine
\RightLabel{$\exists_D + Perm$}
\UnaryInfC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y), (p^1b \to q^1c) \Vdash (p^1b \to q^1a), \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\RightLabel{$\exists_G$}
\UnaryInfC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y), \exists y\,(p^1b \to q^1y) \Vdash (p^1b \to q^1a), \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\RightLabel{$\forall_G$}
\UnaryInfC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y) \Vdash (p^1b \to q^1a), \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\RightLabel{$\forall_D$}
\UnaryInfC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y) \Vdash \forall x (p^1x \to q^1a), \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\RightLabel{$\exists_D$}
\UnaryInfC{$\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y) \Vdash \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)$}
\end{prooftree}
$$

1 Le théorème de validité

Nous complétons les démonstrations de la validité des règles d'inférences (lemme 6.2) par l'examen des quatre nouvelles règles.

$\forall_G$ Soit un modèle $\mathcal{M}$ des énoncés de Γ et de $\forall\alpha A$. Par le théorème 7.3.3, $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$. La prémisse de la règle étant supposée valide, $\mathcal{M}$ est modèle d'un énoncé de Δ.

$\exists_D$ Soit un modèle $\mathcal{M}$ des énoncés de Γ. La validité de la prémisse nous assure qu'un des énoncés de $A[\alpha := t], \Delta, \exists\alpha A$ est vrai dans $\mathcal{M}$. Par le théorème 7.3.3, un des énoncés de $\exists\alpha A, \Delta$ est vrai dans $\mathcal{M}$.

$\forall_D$ Supposons que $\mathcal{M}$ est modèle de tous les énoncés de Γ et d'aucun énoncé de Δ et montrons que $\mathcal{M}$ est modèle de $\forall\alpha A$. Soit o un élément quelconque de $|\mathcal{M}|$. Comme β ne figure ni dans Γ ni dans Δ, $\mathcal{M}[\beta \mapsto o]$ est encore modèle de tous les énoncés de Γ et d'aucun énoncé de Δ (théorème 7.3.1). Si nous supposons que la prémisse est valide, nous devons en conclure que $\mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models A[\alpha := \beta]$. Donc $\mathcal{M} \models \forall\alpha A$ (théorème 7.3.2).

$\exists_G$ Si $\mathcal{M}$ vérifie tous les énoncés de Γ ainsi que $\exists\alpha A$, il existe un élément o dans $|\mathcal{M}|$ de $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models A[\alpha := \beta]$ (théorème 7.3.2.). Par la condition imposée à la règle et le théorème 7.3.1, $\mathcal{M}[\beta \mapsto o]$ est encore modèle de tous les énoncés de Γ. Donc la validité de la prémisse entraîne qu'un des énoncés de Δ est vrai dans $\mathcal{M}[\beta \mapsto o]$ et donc dans $\mathcal{M}$ (théorème 7.3.1).

La preuve par l'absurde est tout aussi éclairante que dans le cas propositionnel. Nous supposons qu'il y a un modèle $\mathcal{M}$ qui vérifie tous les énoncés de Γ et aucun de Δ.

$\forall_G$ Si $\mathcal{M} \models \forall\alpha A$. Par le théorème 7.3.3, $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$.

$\exists_D$ Si $\mathcal{M} \not\models \exists\alpha A$, $\mathcal{M} \not\models A[\alpha := t]$, par le théorème 7.3.3.

$\forall_D$ Si $\mathcal{M} \not\models \forall\alpha\, A$. Il existe, par le théorème 7.3.2, un élément o de $|\mathcal{M}|$ tel que $\mathcal{M}[\beta \mapsto o] \not\models A[\alpha := \beta]$. Comme β ne figure ni dans Γ ni dans Δ, $\mathcal{M}[\beta \mapsto o]$ est encore modèle de tous les énoncés de Γ et d'aucun énoncé de Δ (théorème 7.3.1).

$\exists_G$ Si $\mathcal{M} \models \exists\alpha\, A$. Il existe, par le théorème 7.3.2, un élément o dans $|\mathcal{M}|$ tel que $\mathcal{M}[\beta \mapsto o] \models A[\alpha := \beta]$. Comme β ne figure ni dans Γ ni dans Δ, $\mathcal{M}[\beta \mapsto o]$ est encore modèle de tous les énoncés de Γ et d'aucun énoncé de Δ (théorème 7.3.1). ∎

Les règles d'inférences préservant la validité, on obtient le théorème 6.3 pour les séquents d'énoncés prédicatifs.

Théorème 8.1 (Théorème de validité) *Tout séquent dérivable est valide.*

2 L'inversion

L'inversion des règles d'inférences (proposition 6.4) reste valable pour les séquents d'énoncés des langages prédicatifs. Il suffit de compléter la preuve qui a été donnée à la section 4 pour les nouvelles règles.

Les cas de $\forall_G$ et $\exists_D$ sont évidents [1].

$\forall_D$ Si $\mathcal{M}$ est un modèle de tous les énoncés de Γ et d'aucun énoncé de $A[\alpha := t], \Delta$, alors $\forall\alpha\, A$ n'est pas vrai dans $\mathcal{M}$ (théorème 7.3.3).

$\exists_G$ Si $\mathcal{M}$ est un modèle de tous les énoncés de Γ et de $A[\alpha := t]$ et d'aucun énoncé de Δ, alors $\mathcal{M}$ est modèle de $\exists\alpha\, A$ (théorème 7.3.3).

3 Égalité

Nous formulerons la logique avec égalité de la section 6 en calcul des séquents sans ajouter des règles d'inférences, mais en compliquant la définition de séquent axiomatique.

Soit E, un ensemble d'énoncés de la forme $t = u$. On définit une relation $=_E$ sur les termes clos du langage comme suit.

$t =_E u$ ssi on peut le dériver avec les règles suivantes :

- si $t = u$ est dans E, alors $t =_E u$;
- $t =_E t$;
- si $t =_E u$, alors $u =_E t$;
- si $t =_E u$ et $u =_E t'$, alors $t =_E t'$;
- si $t_1 =_E u_1$, ..., $t_n =_E u_n$, alors $f^n t_1 ... t_n =_E f^n u_1 ... u_n$.

Soit E, l'ensemble des énoncés de la forme $u = u'$ se trouvant dans Γ, alors $\Gamma \Vdash \Delta$ est un *séquent axiomatique* ssi

- il y a un énoncé $t = t'$ de Δ, tel que $t =_E t'$;

ou

- il y a un énoncé $A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n]$ dans Γ et un énoncé $A[\alpha_1 := t'_1, ..., \alpha_n := t'_n]$ dans Δ, tel que $t_i =_E t'_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

1. Notons que le théorème ne serait pas vrai si on n'avait pas placé dans la prémisse l'énoncé « introduit » dans la conclusion. Sans cette précaution, la prémisse contiendrait en effet plus d'informations que la conclusion.

Les séquents axiomatiques usuels sont bien évidemment des séquents de cette seconde espèce.

Le fait que tout séquent axiomatique est valide suit de la proposition 7.2 et le théorème 8.1 (de validité) s'étend donc automatiquement.

Les séquents associés aux lois de la section 6 se dérivent ainsi :

$$\dfrac{\Vdash a = a}{\Vdash \forall x\, x = x}\ \forall_D$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{a = b \Vdash b = a}{\Vdash (a = b \to b = a)}\ \to_D}{\Vdash \forall y\, (a = y \to y = a)}\ \forall_D}{\Vdash \forall x \forall y\, (x = y \to y = x)}\ \forall_D$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a = b, b = c \Vdash a = c}{(a = b \wedge b = c) \Vdash a = c}\ \wedge_D}{\Vdash ((a = b \wedge b = c) \to a = c)}\ \to_D}{\Vdash \forall z\, ((a = b \wedge b = z) \to a = z)}\ \forall_D}{\Vdash \forall y \forall z\, ((a = y \wedge y = z) \to a = z)}\ \forall_D}{\Vdash \forall x \forall y \forall z\, ((x = y \wedge y = z) \to x = z)}\ \forall_D$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a = b, p^3aba \Vdash p^3bba \qquad a = b, p^3bba \Vdash p^3aba}{a = b \Vdash (p^3aba \leftrightarrow p^3bba)}\ \leftrightarrow_D}{\Vdash (a = b \to (p^3aba \leftrightarrow p^3bba))}\ \to_D}{\Vdash \forall y\, (a = y \to (p^3aya \leftrightarrow p^3yya))}\ \forall_D}{\Vdash \forall x \forall y\, (x = y \to (p^3xyx \leftrightarrow p^3yyx))}\ \forall_D$$

9 Compléments de logique propositionnelle

1 Le théorème de remplacement

Il est courant de baptiser « équivalents » (ou matériellement équivalents) des énoncés dont l'équivalence est vraie : A et B sont équivalents dans $\mathcal{M}$ ssi $\mathcal{M} \models (A \leftrightarrow B)$; et « logiquement équivalents » des énoncés dont l'équivalence est une loi logique : A et B sont logiquement équivalents ssi $\models (A \leftrightarrow B)$.

Théorème 9.1 *Si A^* est un énoncé obtenu en remplaçant dans A certaines (zéro, une ou plusieurs) occurrences de l'énoncé B par l'énoncé B^*, alors*

$$((B \leftrightarrow B^*) \rightarrow (A \leftrightarrow A^*))$$

est une loi logique. Autrement dit, si B et B^* sont équivalents, alors A et A^* le sont aussi.

En conséquence, si $(B \leftrightarrow B^*)$ est une loi logique, $(A \leftrightarrow A^*)$ est également une loi logique. Autrement dit, si B et B^* sont logiquement équivalents, A et A^* le sont aussi.

Démonstration

Comme le résultat sera intégré dans celui plus général du théorème 10.3, nous nous contenterons ici de l'argument intuitif suivant.

Dans une table de vérité de $((B \leftrightarrow B^*) \rightarrow (A \leftrightarrow A^*))$, il n'y a pas de ligne où $(B \leftrightarrow B^*)$ a la valeur 1 et $(A \leftrightarrow A^*)$ la valeur 0. Car à une telle ligne B et B^* auraient même valeur et le calcul de la valeur de A, donnera le même résultat que celui de la valeur de A^*, puisque ce qui le diffère de celui-là c'est qu'on y rencontre éventuellement B^* là où on avait B. ∎

2 Réductions des foncteurs de vérité

Proposition 9.2 *Tout énoncé d'un langage propositionnel est logiquement équivalent à un énoncé dont les symboles logiques sont au plus le négateur et le conjoncteur.*

Démonstration

Les énoncés d'une des formes suivantes sont des tautologies :

$$((A \vee B) \leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B))$$
$$((A \rightarrow B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B))$$
$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(\neg A \wedge B)))$$

Par le théorème de remplacement, tout énoncé se transforme en un énoncé équivalent lorsqu'on y remplace un énoncé ayant la forme du membre de gauche d'une de ces trois équivalences par l'énoncé qui lui correspond à droite. On peut donc ainsi faire disparaître progressivement de chaque énoncé les symboles logiques autres que $\neg$ et $\wedge$. ■

Exemple. *L'énoncé* $((p \vee q) \rightarrow p)$ *équivaut successivement à* $(\neg(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow p)$ *et à* $\neg(\neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg p)$.

Cette proposition est aussi valable pour les paires de symboles $\neg$, $\vee$ et $\neg$, $\rightarrow$. En effet, on a les tautologies :

pour $\neg$ et $\vee$

$$((A \wedge B) \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B))$$
$$((A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg A \vee B))$$
$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg B)))$$

pour $\neg$ et $\rightarrow$

$$((A \wedge B) \leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B))$$
$$((A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B))$$
$$((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow \neg((A \rightarrow B) \rightarrow \neg(B \rightarrow A)))$$

Exemple. *L'énoncé* $((p \vee q) \rightarrow p)$ *équivaut logiquement à* $(\neg(p \vee q) \vee p)$ *et à* $((\neg p \rightarrow q) \rightarrow p)$.

2.1 La « barre » de Sheffer

Ajoutons à la liste des symboles logiques la barre verticale '$|$'. Complétons la syntaxe par la règle :

Si A et B sont des énoncés, alors $(A \mid B)$ est un énoncé.

Enfin, interprétons $(A \mid B)$ comme signifiant que A et B sont incompatibles :

$$\mathcal{M} \models (A \mid B) \qquad \text{ssi} \qquad \mathcal{M} \not\models A \ \text{ et/ou } \ \mathcal{M} \not\models B$$

Ce qui donne la table :

A	B	$(A \mid B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

$(A \mid B)$ a donc la même table que $\neg(A \wedge B)$.

Proposition 9.3 *Tout énoncé d'un langage élargi par addition du symbole $|$ est équivalent à un énoncé ne contenant pas d'autres symboles logiques que cette barre.*

DÉMONSTRATION

Cela suit des tautologies suivantes :

$$\begin{gathered}
(\neg A \leftrightarrow (A \mid A)) \\
((A \wedge B) \leftrightarrow ((A \mid B) \mid (A \mid B))) \\
((A \vee B) \leftrightarrow ((A \mid A) \mid (B \mid B))) \\
((A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \mid (B \mid B))) \\
((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \mid B) \mid ((A \mid A) \mid (B \mid B))))
\end{gathered}$$

∎

Exemple. *L'énoncé $((p \vee q) \rightarrow p)$ équivaut logiquement à $(((p \mid p) \mid (q \mid q)) \mid (p \mid p))$.*

▷ *Cette proposition est également valable pour le foncteur de vérité 'ni...ni...', représenté par le symbole de Peirce-Nicod : '$\downarrow$'.*

Posons

$$\mathcal{M} \models (A \downarrow B) \qquad \textit{ssi} \qquad \mathcal{M} \not\models A \ \textit{ et } \mathcal{M} \not\models B$$

Ce qui donne la table :

A	B	$(A \downarrow B)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$(A \downarrow B)$ signifie donc la même chose que $(\neg A \wedge \neg B)$ ou $\neg(A \vee B)$.

On constate que

$$\begin{gathered}
(\neg A \leftrightarrow (A \downarrow A)) \\
((A \wedge B) \leftrightarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B))) \\
((A \vee B) \leftrightarrow ((A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B))) \\
((A \rightarrow B) \leftrightarrow (((A \downarrow A) \downarrow B) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow B)) \\
((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (((A \downarrow A) \downarrow B) \downarrow (A \downarrow (B \downarrow B)))
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
((A \mid B) \leftrightarrow (((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)) \downarrow ((A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B)))) \\
((A \downarrow B) \leftrightarrow (((A \mid A) \mid (B \mid B)) \mid ((A \mid A) \mid (B \mid B))))
\end{gathered}$$

sont des tautologies.

'ni…ni…' est une négation conjointe de deux énoncés. La généralisation à un nombre quelconque d'arguments 'ni…ni…, …, ...ni…ni...' est utilisée par Wittgenstein dans le Tractatus.

3 Formes canoniques

3.1 Disjonctions et conjonctions

Soit une suite d'énoncés $A_1, \ldots, A_n$. Nous définissons, en complément à la définition de la conjonction généralisée en 4.2, la disjonction généralisée de ces énoncés, notée

$$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(A_1, \ldots, A_n)$$

par récurrence sur n :

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n = 1, & \bigvee\!\!\!\!\bigvee(A_1) \equiv A_1, \\
\text{si } n > 1, & \bigvee\!\!\!\!\bigvee(A_1, \ldots, A_n) \equiv (\bigvee\!\!\!\!\bigvee(A_1, \ldots, A_{n-1}) \vee A_n)
\end{array}$$

Exemples

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(p, q, r, s)$ *est* $(((p \vee q) \vee r) \vee s)$,

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(A, B)$ *n'est autre que* $(A \vee B)$.

Comme dans le cas des conjonctions, on prouvera sans trop de peine que :

$$\mathcal{M} \models \bigvee\!\!\!\!\bigvee(A_1, \ldots, A_n) \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M} \models A_i, \text{ pour au moins un } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq n.$$

$$\mathcal{M} \not\models \bigvee\!\!\!\!\bigvee(A_1, \ldots, A_n) \quad \text{ssi} \quad \mathcal{M} \not\models A_i, \text{ pour tout } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq n.$$

Le conjoncteur et le disjoncteur vérifient l'associativité, la commutativité et l'idempotence :

$\models (((A \wedge B) \wedge C) \leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C)))$	$\models (((A \vee B) \vee C) \leftrightarrow (A \vee (B \vee C)))$
$\models ((A \wedge B) \leftrightarrow (B \wedge A))$	$\models ((A \vee B) \leftrightarrow (B \vee A))$
$\models ((A \wedge A) \leftrightarrow A)$	$\models ((A \vee A) \leftrightarrow A)$

Plus généralement, on prouve que si un énoncé A est formé exclusivement à partir du conjoncteur et de *tous* les énoncés $A_1, \ldots, A_n$, alors

$$\models A \leftrightarrow \bigwedge\!\!\!\!\bigwedge(A_1, \ldots, A_n),$$

et si A est formé exclusivement à partir du disjoncteur et de *tous* les $A_1, \ldots, A_n$, alors

$$\models A \leftrightarrow \bigvee\!\!\!\!\bigvee(A_1, \ldots, A_n).$$

Théorème 9.4

1. *Si* Γ *et* Δ *sont des suites non vides et si* $\Gamma \Vdash \Delta$ *est valide, alors* $\models (\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge \Gamma \to \bigvee\!\!\!\!\bigvee \Delta)$;
2. *Si* Δ *est non vide et si* $\Vdash \Delta$ *est valide, alors* $\models \bigvee\!\!\!\!\bigvee \Delta$ *;*
3. *Si* Γ *est non vide et si* $\Gamma \Vdash$ *est valide, alors* $\models \neg \bigwedge\!\!\!\!\bigwedge \Gamma$.

Démonstration

1. En vertu du théorème 2.3, il suffira de montrer que la validité de $\Gamma \Vdash \Delta$ entraîne celle de $\Gamma \vdash \bigvee\!\!\!\!\bigvee \Delta$. Si $\mathcal{M}$ est un modèle de tous les énoncés de Γ, $\mathcal{M}$ vérifie également un des énoncés de Δ, car $\Gamma \Vdash \Delta$ est valide, donc $\mathcal{M} \models \bigvee\!\!\!\!\bigvee \Delta$.

2 et 3 sont immédiats par les remarques faites ci-dessus et en 4.2. ∎

3.2 Négations, conjonctions et disjonctions

Proposition 9.5

1. $\models \neg \bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \leftrightarrow \bigvee(\neg A_1, \ldots, \neg A_n)$
2. $\models \neg \bigvee(A_1, \ldots, A_n) \leftrightarrow \bigwedge(\neg A_1, \ldots, \neg A_n)$

DÉMONSTRATION

Fixons un modèle afin de donner un sens à la notion de vérité.

1. $\neg \bigwedge(A_1, \ldots, A_n)$ est vrai ssi $\bigwedge(A_1, \ldots, A_n)$ n'est pas vrai;
ssi un des A_i n'est pas vrai $(1 \leq i \leq n)$;
ssi un des $\neg A_i$ est vrai;
ssi $\bigvee(\neg A_1, \ldots, \neg A_n)$ est vrai.

2. $\neg \bigvee(A_1, \ldots, A_n)$ est vrai, ssi $\bigvee(A_1, \ldots, A_n)$ n'est pas vrai;
ssi aucun A_i n'est vrai $(1 \leq i \leq n)$;
ssi tous les $\neg A_i$ sont vrais;
ssi $\bigwedge(\neg A_1, \ldots, \neg A_n)$ est vrai.

■

3.3 Disjonctions de conjonctions

Appelons 'énoncé de base' tout symbole propositionnel ainsi que toute négation d'un symbole propositionnel.

Théorème de la forme canonique disjonctive. *Tout énoncé propositionnel est logiquement équivalent à une disjonction de conjonctions d'énoncés de base.*

DÉMONSTRATION

Soient un énoncé A et $P_1, \ldots, P_n$ les différents symboles propositionnels qui y apparaissent. Nous éliminons le cas où A est contradictoire, car une contradiction équivaut logiquement à $(P_1 \wedge \neg P_1)$.

a. Construction de la disjonction de conjonctions.

À chacun des 2^n modèles pour $\mathcal{L}(A)$: $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_{2^n}$, nous associons une conjonction C_l $(1 \leq l \leq 2^n)$ d'énoncés de base, comme suit :

C_l est la conjonction de P_{l_1},...,P_{l_n} : $\bigwedge\!\!\!\bigwedge(P_{l_1}, \ldots, P_{l_n})$, où P_{l_j} est P_j si $P_{j\mathcal{M}_l} = 1$ et P_{l_j} est $\neg P_j$ si $P_{j\mathcal{M}_l} = 0$ $(1 \leq j \leq n)$.

Soit D la disjonction de tous les C_l ainsi obtenus tels que $\mathcal{M}_l \models A$ — comme A n'est pas contradictoire, il y a au moins un tel C_l.

b. Preuve que A équivaut logiquement à D.

Par construction, chaque C_l est vrai dans $\mathcal{M}_l$ et dans aucun des $2^n - 1$ modèles restants. D est donc vrai dans tous les $\mathcal{M}_l$ tels que $\mathcal{M}_l \models A$ et dans aucun $\mathcal{M}_l$ tel que $\mathcal{M}_l \not\models A$. Dès lors $\models (A \leftrightarrow D)$. ∎

Exemple. *L'énoncé $(p \to (p \wedge q))$ a pour table de vérité :*

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \to (p \wedge q))$
1	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*
0	*1*	*0*	*1*
0	*0*	*0*	*1*

Il équivaut donc logiquement à

$$\bigvee\!\!\!\bigvee((p \wedge q), (\neg p \wedge q), (\neg p \wedge \neg q))$$

soit à $(((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)) \vee (\neg p \wedge \neg q))$.

3.4 Conjonctions de disjonctions

Théorème de la forme canonique conjonctive. *Tout énoncé propositionnel est logiquement équivalent à une conjonction de disjonctions d'énoncés de base.*

Démonstration

Soient P_1,...,P_n les différents symboles propositionnels qui apparaissent dans l'énoncé A. Comme une tautologie équivaut logiquement à $(P_1 \vee \neg P_1)$, nous supposerons pour la suite que A n'en est pas une.

a. Construction de la conjonction de disjonctions.

À chacun des 2^n modèles possibles pour $\mathcal{L}(A)$: $\mathcal{M}_1$,...,$\mathcal{M}_{2^n}$, nous associons une disjonction D_l $(1 \leq l \leq 2^n)$ d'énoncés de base de $\mathcal{L}(A)$ comme suit :

D_l est la disjonction de P_{l_1},...,P_{l_n} : $\bigvee\!\!\!\bigvee(P_{l_1}, \ldots, P_{l_n})$, où P_{l_j} est $\neg P_j$ si $P_{j\mathcal{M}_l} = 1$ et P_{l_j} est P_j si $P_{j\mathcal{M}_l} = 0$ $(1 \leq j \leq n)$.

Soit C la conjonction de tous les D_l ainsi obtenus tels que $\mathcal{M}_l \not\models A$ — comme A n'est pas une tautologie, il y a au moins un tel D_l.

b. Preuve que A équivaut logiquement à D.

Par construction, D_l n'est pas vrai dans $\mathcal{M}_l$, mais bien dans les $2^n - 1$ modèles restants. La conjonction C n'est donc pas vraie dans les $\mathcal{M}_l$ tels que $\mathcal{M}_l \not\models A$, mais bien dans les $\mathcal{M}_l$ tels que $\mathcal{M}_l \models A$. Autrement dit $\models (A \leftrightarrow C)$. ■

Ce théorème de la forme conjonctive peut encore se déduire du théorème de la forme disjonctive comme ceci : on sait par ce théorème que $\neg A$ équivaut logiquement à une disjonction de conjonctions d'énoncés de base :

$$\models \neg A \leftrightarrow \bigvee(C_1, \ldots, C_k)$$

Dès lors, par la proposition 9.5 :

$$\begin{aligned} \models A \quad &\leftrightarrow \quad \neg \bigvee(C_1, \ldots, C_k) \\ &\leftrightarrow \quad \bigwedge(\neg C_1, \ldots, \neg C_k) \end{aligned}$$

Chaque C_l $(1 \leq l \leq k)$ étant de la forme $\bigwedge(P_{l_1}, \ldots, P_{l_n})$, $\neg C_l$ équivaut logiquement donc à $\bigvee(\neg P_{l_1}, \ldots, \neg P_{l_n})$, par la proposition 9.5. Remplaçons-y les expressions de la forme $\neg\neg P$ par P. Nous obtenons une disjonction D_l d'énoncés de base. Par le théorème de remplacement, D_l équivaut logiquement à $\neg C_l$ et A équivaut logiquement à $\bigwedge(D_1, \ldots, D_k)$.

Exemples. *L'énoncé* $(p \rightarrow (p \wedge q))$ *équivaut logiquement à* $(\neg p \vee q)$.

L'énoncé $\neg(p \vee (p \leftrightarrow q))$, *qui a pour table de vérité*

p	q	$(p \leftrightarrow q)$	$(p \vee (p \leftrightarrow q))$	$\neg(p \vee (p \leftrightarrow q))$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

équivaut logiquement à $(((\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)) \wedge (p \vee q))$.

▷ *Les théorèmes de la forme canonique sont valables pour toute extension de la notion de langage propositionnel par addition de foncteurs de vérité à un nombre quelconque d'arguments. On en tire comme conséquence que tous les foncteurs de vérité sont définissables à l'aide* $\neg$, $\wedge$, $\vee$ *et donc, également, à l'aide de* $\neg$, $\wedge$ *ou de la barre de Sheffer.*

10 Énoncés prénexes

Nous commençons ce chapitre par une généralisation du théorème 2.3.

Théorème 10.1 *Soient des formules A_1, ..., A_n, C, une liste de variables distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ comprenant celles qui ont au moins une occurrence libre dans A_1,..., A_n, C et une liste de constantes distinctes $\beta_1, \ldots, \beta_m$ ne figurant dans aucune des formules A_1,..., A_n, C.*

Alors le raisonnement,

$$\frac{A_1[\alpha_1 := \beta_1, \ldots, \alpha_m := \beta_m], \ \ldots \ , A_n[\alpha_1 := \beta_1, \ldots, \alpha_m := \beta_m]}{C[\alpha_1 := \beta_1, \ldots, \alpha_m := \beta_m]}$$

est valide ssi

$$\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_m\, (\bigwedge\!\!\!\bigwedge(A_1, \ldots, A_n) \to C)$$

est une loi logique.

Démonstration

Par le théorème 2.3, le raisonnement

$$A_1[\vec{\alpha} := \vec{\beta}], \ldots, A_n[\vec{\alpha} := \vec{\beta}] \vdash C[\vec{\alpha} := \vec{\beta}]$$

est valide ssi l'énoncé

$$(\bigwedge\!\!\!\bigwedge(A_1[\vec{\alpha} := \vec{\beta}], \ldots, A_n[\vec{\alpha} := \vec{\beta}]) \to C[\vec{\alpha} := \vec{\beta}])$$

est une loi logique.

Si nous notons $B[\vec{\alpha} := \vec{\beta}]$ cet énoncé, il nous suffira de montrer qu'il est une loi logique ssi $\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_m\, B$ en est une.

Pour ce faire, remarquons que, en vertu des conditions imposées sur les listes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ et $\beta_1, \ldots, \beta_m$, $B[\alpha_1 := \beta_1], \ldots, [\alpha_m := \beta_m]$ est identique à $B[\vec{\alpha} := \vec{\beta}]$. Donc, par le théorème 7.3.4, $B[\vec{\alpha} := \vec{\beta}]$ est une loi logique ssi $\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_m\, B$ en est une. ∎

1 Le théorème de remplacement pour la logique des prédicats

Nous étendons ici le théorème 9.1 à la logique des prédicats.

Lemme 10.2 *Les raisonnements suivants sont valides :*

1. $(A \leftrightarrow A') \vdash (\neg A \leftrightarrow \neg A')$;
2. $(A_1 \leftrightarrow A'_1), (A_2 \leftrightarrow A'_2) \vdash ((A_1 \wedge A_2) \leftrightarrow (A'_1 \wedge A'_2))$;
3. $(A_1 \leftrightarrow A'_1), (A_2 \leftrightarrow A'_2) \vdash ((A_1 \vee A_2) \leftrightarrow (A'_1 \vee A'_2))$;
4. $(A_1 \leftrightarrow A'_1), (A_2 \leftrightarrow A'_2) \vdash ((A_1 \rightarrow A_2) \leftrightarrow (A'_1 \rightarrow A'_2))$;
5. $(A_1 \leftrightarrow A'_1), (A_2 \leftrightarrow A'_2) \vdash ((A_1 \leftrightarrow A_2) \leftrightarrow (A'_1 \leftrightarrow A'_2))$;
6. $\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A') \vdash (\forall\alpha\, A \leftrightarrow \forall\alpha\, A')$;
7. $\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A') \vdash (\exists\alpha\, A \leftrightarrow \exists\alpha\, A')$.

Démonstration

Les points 1 à 5 sont des exercices de logique propositionnelle : on peut utiliser par exemple les théorèmes 2.3 et 3.1.

On dérive 6 en prolongeant, par une application de $\leftrightarrow_D$, les dérivations suivantes :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A^\sigma \Vdash A^\sigma, A'^\sigma, A'^\sigma \qquad \Gamma, A^\sigma, A^\sigma, A'^\sigma \Vdash A'^\sigma}{\Gamma, A^\sigma, (A^\sigma \leftrightarrow A'^\sigma) \Vdash A'^\sigma}\leftrightarrow_G}{\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), \forall\alpha\, A \Vdash \forall\alpha\, A'}\;\forall_D, \forall_G, \mathrm{Perm}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A'^\sigma \Vdash A^\sigma, A'^\sigma, A^\sigma \qquad \Gamma, A'^\sigma, A^\sigma, A'^\sigma \Vdash A^\sigma}{\Gamma, A'^\sigma, (A^\sigma \leftrightarrow A'^\sigma) \Vdash A^\sigma}\leftrightarrow_G}{\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), \forall\alpha\, A' \Vdash \forall\alpha\, A}\;\forall_D, \forall_G, \mathrm{Perm}$$

où Γ est $\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), \forall\alpha\, A$, β est une constante non dans $\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), \forall\alpha\, A \Vdash \forall\alpha\, A'$ et $^\sigma$ représente l'application de la substitution $[\alpha := \beta]$ à l'expression qui précède.

On obtient de même 7 à partir de

$$\dfrac{\dfrac{\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), A^\sigma \Vdash A^\sigma, A'^\sigma, A'^\sigma \qquad \forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), A^\sigma, A^\sigma, A'^\sigma \Vdash A'^\sigma}{\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), A^\sigma, (A^\sigma \leftrightarrow A'^\sigma) \Vdash A'^\sigma}\leftrightarrow_G}{\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), \exists\alpha\, A \Vdash \exists\alpha\, A'}\;\exists_G, \exists_D, \forall_D, \mathrm{Perm}$$

et de

$$\cfrac{\cfrac{\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), A'^{\sigma} \Vdash A^{\sigma}, A'^{\sigma}, A^{\sigma} \qquad \forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), A'^{\sigma}, A^{\sigma}, A'^{\sigma} \Vdash A^{\sigma}}{\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), A'^{\sigma}, (A^{\sigma} \leftrightarrow A'^{\sigma}) \Vdash A^{\sigma}}\leftrightarrow_G}{\forall\alpha\,(A \leftrightarrow A'), \exists\alpha\, A' \Vdash \exists\alpha\, A}\;\exists_G, \exists_D, \forall_D, \mathrm{Perm}$$

Par le théorème de validité, les raisonnements 6 et 7 sont donc valides. ∎

Théorème 10.3 *Soient B, B^* des formules, telles que A^* résulte du remplacement dans A de B par B^* en certaines de ses occurrences. Alors tout raisonnement de la forme*

$$\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_n\,(B \leftrightarrow B^*) \vdash (A \leftrightarrow A^*)[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n]$$

est valide.

En particulier, si A et A^* sont des énoncés, alors

$$\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_n\,(B \leftrightarrow B^*) \vdash (A \leftrightarrow A^*)$$

est valide.

Démonstration

On montre par induction sur la construction de A, que le raisonnement

$$\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_n\,(B \leftrightarrow B^*) \vdash (A \leftrightarrow A^*)[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n]$$

est valide.

Étapes de base

a. A est B et A^* est B^*. La validité de

$$\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_n\,(B \leftrightarrow B^*) \vdash (B \leftrightarrow B^*)[\alpha_1 := t_1, \ldots, \alpha_n := t_n]$$

est une conséquence du théorème 7.3.3.

b. A^* est A.

$$\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_n\,(A \leftrightarrow A) \vdash (A[\vec{\alpha} := \vec{t}] \leftrightarrow A[\vec{\alpha} := \vec{t}])$$

est clairement valide.

Étapes inductives. L'énoncé $\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_n\,(B \leftrightarrow B^*)$ sera noté E.

a. A est de la forme $\neg A_1$, $(A_1 \wedge A_2)$, $(A_1 \vee A_2)$, $(A_1 \to A_2)$ ou $(A_1 \leftrightarrow A_2)$

Puisque, par hypothèse d'induction,

$$E \vdash (A_1[\vec{\alpha} := \vec{t}] \leftrightarrow A_1^*[\vec{\alpha} := \vec{t}])$$

et

$$E \vdash (A_2[\vec{\alpha} := \vec{t}] \leftrightarrow A_2^*[\vec{\alpha} := \vec{t}])$$

sont valides,

$$E \vdash (A[\vec{\alpha} := \vec{t}] \leftrightarrow A^*[\vec{\alpha} := \vec{t}])$$

est valide en raison des points 1 à 5 du lemme.

b. A est $\forall\alpha\, C$ ou $\exists\alpha\, C$. Soient $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_k$ les variables qui figurent librement dans A ou A^* et $t'_1, \ldots, t'_k$ les termes qu'on leur substitue. Clairement $(A[\vec{\alpha}' := \vec{t}'] \leftrightarrow A^*[\vec{\alpha}' := \vec{t}'])$ est le même énoncé que $(A[\vec{\alpha} := \vec{t}] \leftrightarrow A^*[\vec{\alpha} := \vec{t}])$. Choisissons une constante β qui n'apparaît pas dans un des énoncés E, $A[\vec{\alpha}' := \vec{t}']$, $A^*[\vec{\alpha}' := \vec{t}']$. L'hypothèse d'induction nous assure de la validité de

$$E \vdash (C[\alpha := \beta, \vec{\alpha}' := \vec{t}'] \leftrightarrow C^*[\alpha := \beta, \vec{\alpha}' := \vec{t}']).$$

Le raisonnement

$$E \vdash \forall\alpha\, (C[\vec{\alpha}' := \vec{t}'] \leftrightarrow C^*[\vec{\alpha}' := \vec{t}'])$$

est aussi valide car la règle $\forall_D$ préserve la validité (section 1).

Les points 6 et 7 du lemme montrent donc que le raisonnement

$$E \vdash (A[\vec{\alpha}' := \vec{t}'] \leftrightarrow A^*[\vec{\alpha}' := \vec{t}'])$$

est valide, lequel n'est autre que $E \vdash (A[\vec{\alpha} := \vec{t}] \leftrightarrow A^*[\vec{\alpha} := \vec{t}])$. ∎

Corollaire 10.4 *Si l'énoncé $(B \leftrightarrow B^*)[\alpha_1 := \beta_1, \ldots, \alpha_n := \beta_n]$ est une loi logique, où les constantes $\beta_1, ..., \beta_n$ sont distinctes et ne figurent pas dans B, B^*, alors l'énoncé $(A \leftrightarrow A^*)$ est également une loi logique.*

Démonstration

Si l'énoncé $(B \leftrightarrow B^*)[\alpha_1 := \beta_1, \ldots, \alpha_n := \beta_n]$ est une loi logique, $\forall\alpha_1 \ldots \forall\alpha_n\, (B \leftrightarrow B^*)$ est aussi une loi logique, par le théorème 7.3.4. La conclusion découle donc du théorème 10.3 et du corollaire au théorème 2.1. ∎

2 Changement des variables liées

Si $\forall\alpha\, A$ et $\exists\alpha\, A$ sont des énoncés, alors $\forall\beta\, A[\beta_\alpha]$ et $\exists\beta\, A[\beta_\alpha]$ sont les énoncés résultant de la substitution de la variable β à la variable α.

Lemme de changement des variables liées. *Si β ne figure pas dans $\forall\alpha\, A$ alors les énoncés $(\forall\alpha\, A \leftrightarrow \forall\beta\, A[\beta_\alpha])$ et $(\exists\alpha\, A \leftrightarrow \exists\beta\, A[\beta_\alpha])$ sont des lois logiques.*

Démonstration

Soit γ une constante ne figurant pas dans A. Alors $A[\alpha := \gamma]$ est identique à $A[\beta_\alpha][\beta := \gamma]$. Donc :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall\alpha\, A, A[\alpha := \gamma] \Vdash A[\beta_\alpha][\beta := \gamma]}{\forall\alpha\, A \Vdash A[\beta_\alpha][\beta := \gamma]}\,\forall_G}{\forall\alpha\, A \Vdash \forall\beta\, A[\beta_\alpha]}\,\forall_D \qquad \dfrac{\dfrac{\forall\beta\, A[\beta_\alpha], A[\beta_\alpha][\beta := \gamma] \Vdash A[\alpha := \gamma]}{\forall\beta\, A[\beta_\alpha] \Vdash A[\alpha := \gamma]}\,\forall_G}{\forall\beta\, A[\beta_\alpha] \Vdash \forall\alpha\, A}\,\forall_D}{\Vdash (\forall\alpha\, A \leftrightarrow \forall\beta\, A[\beta_\alpha])}\,\leftrightarrow_D$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{A[\alpha := \gamma] \Vdash A[\beta_\alpha][\beta := \gamma], \exists\beta\, A[\beta_\alpha]}{A[\alpha := \gamma] \Vdash \exists\beta\, A[\beta_\alpha]}\,\exists_D}{\exists\alpha\, A \Vdash \exists\beta\, A[\beta_\alpha]}\,\exists_G \qquad \dfrac{\dfrac{A[\beta_\alpha][\beta := \gamma] \Vdash A[\alpha := \gamma], \exists\alpha\, A}{A[\beta_\alpha][\beta := \gamma] \Vdash \exists\alpha\, A}\,\exists_D}{\exists\beta\, A[\beta_\alpha] \Vdash \exists\alpha\, A}\,\exists_G}{\Vdash (\exists\alpha\, A \leftrightarrow \exists\beta\, A[\beta_\alpha])}\,\leftrightarrow_D$$

On obtient la conclusion cherchée, par le théorème de validité. ■

3 Lois d'exportation

Les énoncés d'une des formes suivantes sont des lois logiques :

1. $(\neg\forall\alpha\, A \leftrightarrow \exists\alpha\neg A)$;
2. $(\neg\exists\alpha\, A \leftrightarrow \forall\alpha\neg A)$;
3. $((\forall\alpha\, A \wedge B) \leftrightarrow \forall\alpha\, (A \wedge B))$;
4. $((\exists\alpha\, A \wedge B) \leftrightarrow \exists\alpha\, (A \wedge B))$;
5. $((\forall\alpha\, A \vee B) \leftrightarrow \forall\alpha\, (A \vee B))$;
6 $((\exists\alpha\, A \vee B) \leftrightarrow \exists\alpha\, (A \vee B))$;
7. $((\forall\alpha\, A \rightarrow B) \leftrightarrow \exists\alpha\, (A \rightarrow B))$;
8 $((\exists\alpha\, A \rightarrow B) \leftrightarrow \forall\alpha\, (A \rightarrow B))$;
9. $((B \wedge \forall\alpha\, A) \leftrightarrow \forall\alpha\, (B \wedge A))$;
10. $((B \wedge \exists\alpha\, A) \leftrightarrow \exists\alpha\, (B \wedge A))$;

11. $((B \vee \forall\alpha\, A) \leftrightarrow \forall\alpha\,(B \vee A))$;
12. $((B \vee \exists\alpha\, A) \leftrightarrow \exists\alpha\,(B \vee A))$;
13. $((B \to \forall\alpha\, A) \leftrightarrow \forall\alpha\,(B \to A))$;
14. $((B \to \exists\alpha\, A) \leftrightarrow \exists\alpha\,(B \to A))$.

En résumé, si $\overline{\forall}$ est $\exists$ et si $\overline{\exists}$ est $\forall$, on a :

– $(\neg Q\alpha\, A \leftrightarrow \overline{Q}\alpha\, \neg A)$;
– $((Q\alpha\, A \diamondsuit B) \leftrightarrow Q\alpha\,(A \diamondsuit B))$, si $\diamondsuit$ n'est pas $\to$;
– $((B \heartsuit Q\alpha\, A) \leftrightarrow Q\alpha\,(B \heartsuit A))$;
– $((Q\alpha\, A \to B) \leftrightarrow \overline{Q}\alpha\,(A \to B))$.

Ces lois ont pour effet d'« exporter » un quantificateur hors du membre de gauche de l'équivalence et d'en placer un en tête de l'énoncé.

Notons que les formules A ne sont pas nécessairement des énoncés et que les formules B, étant des énoncés, ne contiennent pas d'occurrence libre des variables α.

Donc, par le théorème 7.3.4, si α n'est pas dans B, les *énoncés* suivants sont des lois logiques.

– $\forall\vec{\beta}\,(\neg Q\alpha\, A \leftrightarrow \overline{Q}\alpha\, \neg A)$;
– $\forall\vec{\beta}\,((Q\alpha\, A \diamondsuit B) \leftrightarrow Q\alpha\,(A \diamondsuit B))$, si $\diamondsuit$ n'est pas $\to$;
– $\forall\vec{\beta}\,((B \heartsuit Q\alpha\, A) \leftrightarrow Q\alpha\,(B \heartsuit A))$;
– $\forall\vec{\beta}\,((Q\alpha\, A \to B) \leftrightarrow \overline{Q}\alpha\,(A \to B))$.

Nous nous contenterons de la démonstration de la septième loi, une des plus significatives. Les autres sont laissées à titre d'exercice.

Par le théorème de validité, il suffit de dériver les séquents

$$(\forall\alpha\, A \to B) \Vdash \exists\alpha\,(A \to B)$$

et

$$\exists\alpha\,(A \to B) \Vdash (\forall\alpha\, A \to B)$$

et d'appliquer la règle $\leftrightarrow_D$.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A[\alpha := \beta] \Vdash B, A[\alpha := \beta], \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$}
\RightLabel{$\rightarrow_D$}
\UnaryInfC{$\Vdash (A[\alpha := \beta] \rightarrow B), A[\alpha := \beta], \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$}
\RightLabel{$\exists_D$}
\UnaryInfC{$\Vdash \exists\alpha\,(A \rightarrow B), A[\alpha := \beta]$}
\RightLabel{Perm}
\UnaryInfC{$\Vdash A[\alpha := \beta], \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$}
\RightLabel{$\forall_D$}
\UnaryInfC{$\Vdash \forall\alpha\, A, \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$}
\AxiomC{$B, A[\alpha := \beta] \Vdash B, \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$}
\RightLabel{$\rightarrow_D$}
\UnaryInfC{$B \Vdash (A[\alpha := \beta] \rightarrow B), \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$}
\RightLabel{$\exists_D$}
\UnaryInfC{$B \Vdash \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$}
\RightLabel{$\rightarrow_G$}
\BinaryInfC{$(\forall\alpha\, A \rightarrow B) \Vdash \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\forall\alpha\, A, A[\alpha := \beta] \Vdash A[\alpha := \beta], B$}
\RightLabel{$\forall_G$}
\UnaryInfC{$\forall\alpha\, A \Vdash A[\alpha := \beta], B$}
\AxiomC{$\forall\alpha\, A, B \Vdash B$}
\RightLabel{$\rightarrow_G$}
\BinaryInfC{$\forall\alpha\, A, (A[\alpha := \beta] \rightarrow B) \Vdash B$}
\RightLabel{Perm}
\UnaryInfC{$(A[\alpha := \beta] \rightarrow B), \forall\alpha\, A \Vdash B$}
\RightLabel{$\rightarrow_D$}
\UnaryInfC{$(A[\alpha := \beta] \rightarrow B) \Vdash (\forall\alpha\, A \rightarrow B)$}
\RightLabel{$\exists_G$}
\UnaryInfC{$\exists\alpha\,(A \rightarrow B) \Vdash (\forall\alpha\, A \rightarrow B)$}
\end{prooftree}
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$(\forall\alpha\, A \rightarrow B) \Vdash \exists\alpha\,(A \rightarrow B)$}
\AxiomC{$\vdots$}
\noLine
\UnaryInfC{$\exists\alpha\,(A \rightarrow B) \Vdash (\forall\alpha\, A \rightarrow B)$}
\RightLabel{$\leftrightarrow_D$}
\BinaryInfC{$\Vdash ((\forall\alpha\, A \rightarrow B) \leftrightarrow \exists\alpha\,(A \rightarrow B))$}
\end{prooftree}
$$

■

4 Le théorème des formes prénexes

Un énoncé est **prénexe** ssi il ne contient pas de quantificateurs ou est obtenu en préfixant (prénexant) une série de quantificateurs à une formule sans quantificateurs.

Théorème 10.5 *Tout énoncé équivaut logiquement à un énoncé prénexe.*

Démonstration

Le corollaire 10.4 permet de remplacer dans un énoncé une formule de la forme $(B \leftrightarrow C)$ par $((B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B))$ tout en conservant un énoncé logiquement équivalent. On peut ainsi éliminer les équivaluateurs un à un.

Le lemme de changement des variables liées, conjointement avec le corollaire 10.4, produit un énoncé équivalent dont tous les quantificateurs sont distincts. On peut alors utiliser les lois d'exportation pour « faire sortir » les quantificateurs. ■

Exemples. *L'énoncé*

$$(\forall x \exists y\, r^2xy \to \exists y \forall x\, r^2xy)$$

n'est pas prénexe. On le transforme progressivement comme suit :

$$\begin{gathered}(\forall x \exists y\, r^2xy \to \exists y_1 \forall x_1\, r^2x_1y_1)\\ \exists x \forall y\, (r^2xy \to \exists y_1 \forall x_1\, r^2x_1y_1)\\ \exists x \forall y \exists y_1 \forall x_1\, (r^2xy \to r^2x_1y_1)\end{gathered}$$

L'énoncé

$$(\forall x p^1x \leftrightarrow p^1a)$$

devient :

$$\begin{gathered}((\forall x\, p^1x \to p^1a) \wedge (p^1a \to \forall x\, p^1x))\\ ((\forall x\, p^1x \to p^1a) \wedge (p^1a \to \forall y\, p^1y))\\ (\exists x\, (p^1x \to p^1a) \wedge (p^1a \to \forall y\, p^1y))\\ (\exists x\, (p^1x \to p^1a) \wedge \forall y\, (p^1a \to p^1y))\\ \exists x\, ((p^1x \to p^1a) \wedge \forall y\, (p^1a \to p^1y))\\ \exists x \forall y\, ((p^1x \to p^1a) \wedge (p^1a \to p^1y))\end{gathered}$$

La tournée générale de la page 86

$$\exists x\, (p^1x \to \forall x\, p^1x)$$

devient, en exportant, $\exists x\, (p^1x \to \forall y\, p^1y)$ et $\exists x \forall y\, (p^1x \to p^1y)$ et, en « important », $(\forall x\, p^1x \to \forall y\, p^1y)$ et $(\forall x\, p^1x \to \forall x\, p^1x)$.

En combinant les théorèmes des formes canoniques de la section 3, le théorème de remplacement 10.3 et le théorème 10.5, on obtient le

Théorème 10.6 *Tout énoncé équivaut logiquement à un énoncé constitué d'une suite de quantificateurs suivi d'une disjonction de conjonctions (ou d'une conjonction de disjonctions) de formules de base*[1].

1. Une formule de base est bien évidemment une formule atomique ou la négation d'une formule atomique.

Troisième partie

Le théorème fondamental de la logique

11 Les théorèmes de complétude

1 Complétude du calcul des séquents propositionnels

Un séquent est *atomique* ssi il ne contient pas de symboles logiques. Donc, dans un séquent $\Gamma \Vdash \Delta$ atomique, Γ et Δ sont des suites de symboles propositionnels.

Proposition 11.1 *Un séquent atomique est valide ssi il est axiomatique.*

Démonstration

Par la proposition 6.1, il suffit de montrer qu'un séquent atomique non axiomatique n'est pas valide. Et pour prouver cela, on choisit un modèle qui donne à tous les énoncés (symboles propositionnels) qui se trouvent à gauche la valeur 1 et la valeur 0 aux autres symboles propositionnels du langage. En ce cas, les énoncés se trouvant à droite ont la valeur 0, car le séquent n'est pas axiomatique. ∎

Pratiquement, quand on cherche une dérivation d'un séquent, il n'est pas conseillé de partir de séquents axiomatiques et d'en dériver le séquent à l'aide des règles, c'est à dire de construire la dérivation à partir du dessus. Il est préférable de le faire de bas en haut en partant du séquent à dériver et d'écrire au-dessus des prémisses qui permettent de l'obtenir, puis des prémisses pour ces prémisses, et ainsi de suite.

En examinant les règles, on a constaté que le passage (dans les règles principales) d'un séquent conclusion à un séquent prémisse a pour effet de réduire le nombre de connecteurs logiques. Donc, le processus qui consiste à fabriquer la dérivation en remontant (sans répéter inutilement la règle de permutation) doit nécessairement s'arrêter et aboutir à des séquents qui ne contiennent plus de symboles logiques. Et de tels séquents ne sont valides que s'ils sont axiomatiques (proposition 11.1). Mais par la proposition 6.4 (le théorème d'inversion), ces séquents doivent être valides — donc axiomatiques — si on avait un séquent valide au départ.

Donc, en remontant, à partir d'un séquent valide, de prémisses en prémisses, tout en s'interdisant des applications consécutives de la règle de permutation, on doit nécessairement s'arrêter à des séquents axiomatiques, c'est-à-dire que l'on obtient nécessairement une dérivation. Nous avons ainsi indiqué une démonstration de la complétude du calcul propositionnel des séquents :

Théorème 11.2 *Tout séquent propositionnel valide est dérivable dans le calcul des séquents propositionnels.*

2 Complétude du calcul des séquents prédicatifs

Le procédé qui consiste à construire les dérivations de bas en haut reste valable dans le cas des séquents d'énoncés prédicatifs, mais il se complique singulièrement du fait de la répétition dans la prémisse de l'énoncé « introduit » dans la conclusion des règles $\forall_G$ et $\exists_D$.

Il n'est donc plus certain que si on part d'un séquent et qu'on remonte de prémisses en prémisses (sans trop permuter), on aboutira à un séquent atomique. Au contraire, un énoncé existentiel qui apparaîtra à droite dans un séquent apparaîtra nécessairement à droite dans tous les séquents ultérieurs et il en va de même pour les énoncés universels à gauche. La recherche d'une dérivation est affaire de stratégie. Il a d'ailleurs été démontré [1] qu'il n'existe pas de méthode mécanique même au sens le plus théorique (machine de Turing, par exemple) qui, appliquée à un séquent quelconque, permette de décider s'il est dérivable ou non.

Nous généralisons la notion de séquent atomique de la section 1 pour pallier le fait que non seulement les énoncés élémentaires, mais aussi les universels à gauche et existentiels à droite ne disparaissent jamais quand on remonte dans les dérivations.

Définitions

Un séquent est irréductible *ssi chacun de ses énoncés non élémentaires est universel à gauche ou existentiel à droite.*

Une suite de séquents est complète *ssi*

1. *si un énoncé existentiel $\exists\alpha\, A$ est à droite dans un séquent de la suite, alors tous les énoncés $A[\alpha := t]$ (où t est un terme clos figurant dans un énoncé d'un séquent de la suite ; ou, s'il n'y pas de terme clos dans un énoncé de la suite, t est la constante a) sont également à droite et*

1. Le théorème de Church dont la démonstration fait appel au fameux théorème d'incomplétude de Gödel énonce l'indécidabilité du calcul des prédicats pour les langages comprenant au moins un symbole prédicatif binaire.

2. *si un énoncé universel $\forall\alpha\, A$ est à gauche, alors tous les énoncés $A[\alpha := t]$ (t dans un énoncé d'un séquent de la suite ; ou a s'il n'y pas de terme clos dans la suite) sont également à gauche.*

Lemme 11.3 *Soit $\Gamma_0 \Vdash \Delta_0$, $\Gamma_1 \Vdash \Delta_1$,... une suite complète de séquents telle que :*

1. *aucun séquent de la suite n'est dérivable ;*

2. *tout énoncé élémentaire dans un séquent de la suite reste du même côté dans tous les séquents ultérieurs ;*

3. *et si un séquent non irréductible $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ est dans la suite, alors il est suivi d'un séquent $\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$ qui est prémisse d'une règle principale (autre que $\forall_G$ et $\exists_D$) dont $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ est la conclusion (éventuellement après permutation).*

Alors il y a un modèle $\mathcal{M}$ qui vérifie tous les énoncés de $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ et aucun de ceux de $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$.

Démonstration

On peut se représenter une telle suite de séquents comme ceci. Partant d'un séquent $\Gamma_0 \Vdash \Delta_0$, on « remonte » de prémisses en prémisses (moyennant si nécessaire des permutations et sans utiliser $\forall_G$ ni $\exists_D$) réduisant ainsi le nombre de connecteurs logiques pour aboutir finalement à un séquent irréductible (condition 3). Ce séquent ne contient que des énoncés élémentaires et/ou des énoncés universels dans sa partie gauche et/ou des énoncés existentiels dans sa partie droite. Ensuite on « recharge les batteries » par addition d'un séquent approprié (visant à compléter la suite) et on continue la remontée à partir de ce séquent.

Construction du modèle $\mathcal{M}$. L'univers $|\mathcal{M}|$ est l'ensemble de tous les termes clos du langage qui figurent dans la suite. S'il n'y a pas de tels termes, alors l'univers est l'ensemble dont le seul élément est la première constante a.

Soit δ la première constante de l'univers et posons $\alpha_{\mathcal{M}} = \alpha$, si α est une constante appartenant à $|\mathcal{M}|$; $\alpha_{\mathcal{M}} = \delta$, si α est une constante n'appartenant pas à $|\mathcal{M}|$; et $F^n_{\mathcal{M}}$ comme étant la fonction définie par :

– $F^n_{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n) = Ft_1 \ldots t_n$, si $Ft_1 \ldots t_n$ est dans $|\mathcal{M}|$;

– $F^n_{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n) = \delta$, sinon.

Enfin, $R^n_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des n-uples $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle$ tels que l'énoncé $Rt_1 \ldots t_n$ est à gauche dans un séquent de la suite.

Remarquons que l'univers est un ensemble de termes clos du langage et que $t_{\mathcal{M}} = t$, pour tout terme t de $|\mathcal{M}|$, et que $t_{\mathcal{M}} = \delta$, pour les termes clos t qui ne sont pas dans $\mathcal{M}$.

On est donc en droit d'invoquer le théorème 7.3.5 et la proposition 7.2.2 pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \forall\alpha A \quad & \text{ssi} \quad \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \\
& \qquad\ \text{pour tout terme clos } t, \\
& \text{ssi} \quad \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \\
& \qquad\ \text{pour tout terme clos } t \text{ de } |\mathcal{M}|\,;
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} \models \exists\alpha A \quad & \text{ssi} \quad \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \\
& \qquad\ \text{pour au moins un terme clos } t, \\
& \text{ssi} \quad \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \\
& \qquad\ \text{pour au moins un terme clos } t \text{ de } |\mathcal{M}|.
\end{aligned} \tag{2}$$

Nous montrons maintenant que tout énoncé gauche (c'est-à-dire dans Γ_0, Γ_1,...) est vrai et qu'aucun énoncé droit (c'est-à-dire dans Δ_0, Δ_1,...) n'est vrai (dans $\mathcal{M}$), par induction sur le nombre de symboles logiques présents dans l'énoncé.

Si A est élémentaire et à gauche, il est vrai par définition de $\mathcal{M}$.

Si A est élémentaire et à droite, il n'est pas à gauche par les conditions 2 et 1. Il n'est donc pas vrai par définition de $\mathcal{M}$.

Si l'énoncé $(A \to B)$ est à gauche, alors un séquent qui le contient est non irréductible et sera suivi (immédiatement ou non) d'un séquent qui contient A à droite ou B à gauche (condition 3 et règle $\to_G$). Donc, par hypothèse d'induction, $\mathcal{M} \not\models A$ et/ou $\mathcal{M} \models B$ et $(A \to B)$ est vrai.

Si l'énoncé $(A \to B)$ est à droite, alors un séquent qui le contient sera suivi (immédiatement ou non) d'un séquent qui contient A à gauche et B à droite (condition 3 et règle $\to_D$). Donc, par hypothèse d'induction, $\mathcal{M} \models A$ et $\mathcal{M} \not\models B$ et $(A \to B)$ n'est pas vrai.

$\exists\alpha\, A$ est à gauche dans un séquent de la suite. Un séquent qui le contient sera suivi d'un séquent qui contient $A[\alpha := \beta]$ à gauche, pour une constante β. Donc, par hypothèse d'induction, $\mathcal{M} \models A[\alpha := \beta]$ et $\mathcal{M} \models \exists\alpha\, A$, par le théorème 7.3.3.

Si $\forall\alpha\, A$ est à gauche dans un séquent de la suite, alors, comme la suite est complète, $A[\alpha := t]$ est à gauche et, par hypothèse d'induction, $\mathcal{M} \models A[\alpha := t]$, pour tout terme clos t de la suite. $\forall\alpha\, A$ est donc vrai, par (1).

Les autres cas se vérifient de façon analogue. ∎

Théorème 11.4 (Complétude) *Tout séquent valide est dérivable.*

Démonstration

Nous raisonnons par l'absurde en supposant que le séquent $\Gamma \Vdash \Delta$ n'est pas dérivable et nous construisons une suite vérifiant les conditions du lemme 11.3.

Étape 1. $\Gamma_0 \Vdash \Delta_0$ est le séquent $\Gamma \Vdash \Delta$.

Étape 2. Si $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ n'est pas irréductible, $\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$ est une prémisse non dérivable d'une règle principale, autre que $\forall_G$, $\exists_D$, dont $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ est la conclusion (éventuellement après permutation).

Étape 3. Si $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ est *irréductible* et si la suite $\Gamma_0 \Vdash \Delta_0, \ldots, \Gamma_i \Vdash \Delta_i$ est complète, on s'arrête.

Étape 4. Si $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ est *irréductible* et si la suite $\Gamma_0 \Vdash \Delta_0, \ldots, \Gamma_i \Vdash \Delta_i$ n'est pas complète, on la prolonge en lui adjoignant un séquent non dérivable $\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$, obtenu comme ceci.
Partant de $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$, « remontons » en utilisant uniquement les règles $\forall_G$, $\exists_D$ et Perm et en n'introduisant aucun terme clos qui n'est pas dans un énoncé de la suite, si ce n'est la constante a au cas où il n'y pas de terme clos dans la suite. Si on ne répète pas inutilement les mêmes étapes, on obtiendra un séquent $\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$ tel que la suite $\Gamma_0 \Vdash \Delta_0, \ldots, \Gamma_i \Vdash \Delta_i, \Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$ est complète et tel que $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ peut s'obtenir à partir de $\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}$ en appliquant uniquement les règles $\forall_G$, $\exists_D$ et/ou Perm :

$$\begin{array}{c}
\dfrac{\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}}{\Gamma'_{i+1} \Vdash \Delta'_{i+1}} \ (\forall_G, \exists_D, \text{ ou Perm}) \\
\vdots \quad (\forall_G, \exists_D, \text{ ou Perm}) \\
\Gamma_i \Vdash \Delta_i
\end{array}$$

La suite ainsi construite vérifie bien les conditions du lemme 11.3. De plus elle est complète. Supposons en effet que $\forall\alpha\, A$ est à gauche dans un séquent $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ et soit un terme clos t figurant dans la suite. Comme $\forall\alpha\, A$ reste à gauche dans tout séquent ultérieur, il y a nécessairement un séquent et donc un séquent irréductible qui contient $\forall\alpha\, A$ à gauche, tel que t se trouve dans un séquent qui le précède. Ainsi $A[\alpha := t]$ se trouve à gauche dans un séquent précédent (c'est notamment le cas si l'étape 3 s'applique) ou sinon, après application de l'étape 4, $A[\alpha := t]$ apparaîtra nécessairement à gauche dans le séquent qui suit.

Par le lemme 11.3 il y a un modèle de tous les énoncés de Γ et d'aucun énoncé de Δ. Ce qui montre la non validité de $\Gamma \Vdash \Delta$ et conclut la preuve par l'absurde. ∎

3 Redondance des coupures, des règles structurelles et du modus ponens

Proposition 11.5 (Théorème d'élimination des coupures) *Si* $\Gamma \Vdash A, \Delta$ *et* $\Gamma, A \Vdash \Delta$ *sont dérivables, alors* $\Gamma \Vdash \Delta$ *l'est aussi.*

Démonstration

Comme on a

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma \Vdash A, \Delta\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma, A \Vdash \Delta\end{array}}{\Gamma, (A \to A) \Vdash \Delta} \to_G$$

le séquent $\Gamma, (A \to A) \Vdash \Delta$ est valide, par le théorème de validité. Tout modèle des énoncés de Γ — qui est aussi modèle de la loi logique $(A \to A)$ — est donc modèle d'un énoncé de Δ. Étant valide, le séquent $\Gamma \Vdash \Delta$ est dérivable par le théorème de complétude. ∎

▷ *Gentzen, le créateur du calcul des séquents, a démontré ce théorème, qu'il considérait comme son* Hauptsatz, *en décrivant des manipulations formelles qui aboutissent à l'élimination des règles de coupures dans un système comprenant cette règle. Sa démonstration fait l'économie des notions de modèle et de validité. Elle a aussi le mérite de s'appliquer sans grandes modifications à d'autres formulations de la logique classique en calcul des séquents et à des calculs pour d'autres logiques comme la logique intuitionniste, ce qui n'est pas le cas de la preuve sémantique, plus simple, donnée ici.*

Proposition 11.6 *Les règles d'atténuation sont admissibles : si un séquent* $\Gamma \Vdash \Delta$ *est dérivable alors les séquents* $\Gamma, A \Vdash \Delta$ *et* $\Gamma \Vdash A, \Delta$ *le sont également.*

Démonstration

On peut bien sûr utiliser la complétude et la validité, mais on peut aussi donner la preuve par manipulation de symboles suivante.

Nous commençons par montrer qu'on peut changer les constantes propres d'une dérivation de sorte qu'elles soient toutes distinctes et qu'aucune n'appartienne à un ensemble fini X donné.

Si dans une dérivation de $\Gamma \Vdash \Delta$, on remplace dans une sous-dérivation de la forme

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma^*, B[\alpha := \beta] \Vdash \Delta^*\end{array}}{\Gamma^*, \exists\alpha B \Vdash \Delta^*}\,\exists_G \qquad \text{ou} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma^* \Vdash B[\alpha := \beta], \Delta^*\end{array}}{\Gamma^* \Vdash \forall\alpha B, \Delta^*}\,\forall_D$$

la constante propre β (on suppose que α figure dans B et β dans X) par une constante γ, qui ne figure nulle part dans la dérivation, ni dans X, on obtient encore une dérivation de $\Gamma \Vdash \Delta$, laquelle contient moins de constantes propres non distinctes ou figurant dans X. On peut ainsi progressivement obtenir une dérivation de $\Gamma \Vdash \Delta$, dont toutes les constantes propres sont distinctes et hors de X. ■

On remarque que $A, \Gamma^* \Vdash \Delta^*$ est un séquent axiomatique, si $\Gamma^* \Vdash \Delta^*$ en est un, et que si on remplace dans une (inférence permise par une) règle propositionnelle les divers séquents $\Gamma^* \Vdash \Delta^*$ qui y figurent par les séquents atténués $A, \Gamma^* \Vdash \Delta^*$, on a encore une inférence permise par la même règle. Ceci vaut également dans le cas des inférences faites par la règle $\exists_D$ et par les règles $\forall_D$ et $\exists_G$, à condition que A ne contienne pas la constante propre, ce qu'on peut toujours supposer après changement de ces constantes.

Dans le cas des inférences du type

$$\dfrac{\forall\alpha B, \Gamma^*, B[\alpha := t] \Vdash \Delta^*}{\Gamma^*, \forall\alpha B \Vdash \Delta^*}\,\forall_G$$

on peut déduire la conclusion atténuée de la prémisse atténuée comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{A, \forall\alpha B, \Gamma^*, B[\alpha := t] \Vdash \Delta^*}{\forall\alpha B, A, \Gamma^*, B[\alpha := t] \Vdash \Delta^*}\,\text{Perm}}{A, \Gamma^*, \forall\alpha B \Vdash \Delta^*}\,\forall_G$$

Une dérivation de $\Gamma \Vdash \Delta$ se transforme donc ainsi en une dérivation de $A, \Gamma \Vdash \Delta$, qui peut finalement être prolongée en une dérivation de $\Gamma, A \Vdash \Delta$, par la règle de permutation.

Pour prouver que $\Gamma \Vdash A, \Delta$ est dérivable si $\Gamma \Vdash \Delta$ l'est, on procède de la même façon à ceci près que cette fois la règle $\forall_G$ ne fait plus obstacle et que le cas de la règle $\exists_D$ se traite en remplaçant les inférences du type

$$\dfrac{\Gamma^* \Vdash B[\alpha := t], \Delta^*, \exists\alpha B}{\Gamma^* \Vdash \exists\alpha B, \Delta^*}\,\exists_D$$

par

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma^* \Vdash B[\alpha := t], \Delta^*, \exists\alpha B, A}{\Gamma^* \Vdash B[\alpha := t], \Delta^*, A, \exists\alpha B}\,\text{Perm}}{\Gamma^* \Vdash \exists\alpha B, \Delta^*, A}\,\exists_D$$

■

Proposition 11.7 *Les règles de contraction sont admissibles : si $\Gamma, A, A \Vdash \Delta$ est dérivable, alors $\Gamma, A \Vdash \Delta$ l'est aussi ; si $\Gamma \Vdash A, A, \Delta$ est dérivable, alors $\Gamma \Vdash A, \Delta$ l'est aussi.*

Démonstration

$\Gamma, A \Vdash A, \Delta$ est un séquent axiomatique. Donc si $\Gamma, A, A \Vdash \Delta$ est dérivable, on peut appliquer l'élimination des coupures pour obtenir $\Gamma, A \Vdash \Delta$.

Le cas de $\Gamma \Vdash A, A, \Delta$ est semblable. ■

Proposition 11.8 (Modus ponens) *Si $\Vdash (A \to B)$ et $\Vdash A$ sont dérivables, alors $\Vdash B$ l'est aussi.*

Plus généralement, si $\Gamma \Vdash (A \to B), \Delta$ et $\Gamma \Vdash A, \Delta$ sont dérivables, alors $\Gamma \Vdash B, \Delta$ l'est aussi.

Démonstration

On peut utiliser le théorème de complétude ou déduire ce résultat par atténuation et élimination des coupures ainsi :

$$
\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Vdash (A \to B), \Delta\end{array}}{\Gamma \Vdash (A \to B), B, \Delta}\text{atténuation} \qquad \cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \Vdash A, \Delta\end{array}}{\Gamma \Vdash A, B, \Delta}\text{atténuation} \qquad \Gamma, B \Vdash B, \Delta}{\Gamma, (A \to B) \Vdash B, \Delta}\to_G}{\Gamma \Vdash B, \Delta}\text{coupure}
$$

■

4 Propriété des sous-énoncés

Une des propriétés les plus puissantes des dérivations sans coupures est que tout énoncé se trouvant dans une dérivation est un sous-énoncé (strict ou non) d'un énoncé de la conclusion. Cette propriété n'est toutefois vérifiée que si on inclut tous les énoncés de la forme $A[\alpha := t]$ parmi les sous-énoncés de $\forall\alpha\, A$ et $\exists\alpha\, A$ et que tout sous-énoncé d'un sous-énoncé d'un énoncé est considéré comme un sous-énoncé de cet énoncé [2].

2. E est le seul sous-énoncé de l'énoncé élémentaire E ; les sous-énoncés de $\neg A$ sont $\neg A$ et ceux de A ; si $\heartsuit$ représente $\to$, $\wedge$, $\vee$ ou $\leftrightarrow$, les sous-énoncés de $(A \heartsuit B)$ sont $(A \heartsuit B)$ et ceux de A et de B ; si Q est $\forall$ ou $\exists$, les sous-énoncés de $Q\alpha\, A$ sont $Q\alpha\, A$ ainsi que les sous-énoncés de chaque énoncé de la forme $A[\alpha := t]$.

En particulier, tout symbole logique ou prédicatif (mais pas fonctionnel !) apparaissant dans une dérivation se retrouve dans la conclusion.

Ainsi une dérivation d'un séquent propositionnel ne contient que des séquents propositionnels ; une dérivation d'un séquent qui ne contient que des symboles prédicatifs unaires ne contient que des symboles prédicatifs unaires etc.

La propriété des sous-énoncés est une caractéristique de la logique du premier ordre, la seule que nous considérons dans ces notes. Elle n'est plus valable dans les logiques où les termes peuvent contenir des formules comme c'est le cas en second ordre.

5 Un système de règles équivalent

Le système suivant est plus souple pour construire les preuves de haut en bas et se prête mieux à certaines manipulations formelles. En revanche, il présente l'inconvénient sur le plan théorique de ne pas vérifier le théorème d'inversion et de posséder plus de règles structurelles. Il est équivalent au système précédent en ce qu'il dérive exactement les mêmes séquents.

Règles principales

pour introduire à gauche

$$\frac{\Gamma \Vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \Vdash \Delta}\ \neg_G$$

$$\frac{\Gamma, A \Vdash \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Vdash \Delta}\ \wedge_{1G}$$

$$\frac{\Gamma, B \Vdash \Delta}{\Gamma, (A \wedge B) \Vdash \Delta}\ \wedge_{2G}$$

$$\frac{\Gamma_1, A \Vdash \Delta_2 \quad \Gamma_2, B \Vdash \Delta_1}{\Gamma_1, \Gamma_2, (A \vee B) \Vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \vee_G$$

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \Vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, (A \rightarrow B) \Vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \rightarrow_G$$

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash A, B, \Delta_1 \quad \Gamma_2, A, B \Vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, (A \leftrightarrow B) \Vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \leftrightarrow_G$$

pour introduire à droite

$$\frac{\Gamma, A \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash \neg A, \Delta}\ \neg_D$$

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2 \Vdash B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash (A \wedge B), \Delta_1, \Delta_2}\ \wedge_D$$

$$\frac{\Gamma \Vdash A, \Delta}{\Gamma \Vdash (A \vee B), \Delta}\ \vee_{1D}$$

$$\frac{\Gamma \Vdash B, \Delta}{\Gamma \Vdash (A \vee B), \Delta}\ \vee_{2D}$$

$$\frac{\Gamma, A \Vdash B, \Delta}{\Gamma \Vdash (A \rightarrow B), \Delta}\ \rightarrow_D$$

$$\frac{\Gamma_1, A \Vdash B, \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \Vdash A, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash (A \leftrightarrow B), \Delta_1, \Delta_2}\ \leftrightarrow_D$$

$$\frac{\Gamma, A[\alpha := t] \Vdash \Delta}{\Gamma, \forall\alpha A \Vdash \Delta}\ \forall_G \qquad \frac{\Gamma \Vdash A[\alpha := \beta], \Delta}{\Gamma \Vdash \forall\alpha A, \Delta}\ \forall_D$$

$$\frac{\Gamma, A[\alpha := \beta] \Vdash \Delta}{\Gamma, \exists\alpha A \Vdash \Delta}\ \exists_G \qquad \frac{\Gamma \Vdash A[\alpha := t], \Delta}{\Gamma \Vdash \exists\alpha A, \Delta}\ \exists_D$$

La constante β de $\forall_D$ et $\exists_G$ n'est pas dans la conclusion.

Règles structurelles

Permutation : $\dfrac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma' \Vdash \Delta'}\ \text{Perm}$

(les suites Γ' et Δ' sont des permutations des suites Γ et Δ, respectivement)

Atténuation : $\dfrac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma, A \Vdash \Delta}\ \text{att} \qquad \dfrac{\Gamma \Vdash \Delta}{\Gamma \Vdash A, \Delta}\ \text{att}$

Contraction : $\dfrac{\Gamma, A, A \Vdash \Delta}{\Gamma, A \Vdash \Delta}\ \text{contr} \qquad \dfrac{\Gamma \Vdash A, A, \Delta}{\Gamma \Vdash A, \Delta}\ \text{contr}$

La règle de coupure est redondante (*Hauptsatz* de Gentzen). Elle peut encore se formuler dans le même style que les autres règles :

$$\frac{\Gamma_1 \Vdash A, \Delta_1 \quad \Gamma_2, A \Vdash \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash \Delta_1, \Delta_2}\ \text{coup}$$

6 Égalité

Pour montrer que le théorème 11.4 est valable pour le calcul des prédicats avec égalité, il suffit essentiellement de modifier la construction du modèle $\mathcal{M}$ dans la preuve du lemme 11.3.

Considérons à cet effet la relation $=_E$, où E est l'ensemble des énoncés $t = u$ figurant dans la suite construite dans la preuve de ce lemme. Appelons *E-classe* d'un terme t, l'ensemble des termes u tels que $t =_E u$ et notons-la $[t]$. L'univers $|\mathcal{M}|$ est l'ensemble de toutes les E-classes des termes clos du langage qui figurent dans la suite. S'il n'y a pas de tels termes, alors l'univers est l'ensemble dont le seul élément est la E-classe de la première constante du langage, c'est-à-dire $\{a\}$.

Soit δ la première constante telle que sa E-classe soit dans l'univers et posons

– $\alpha_{\mathcal{M}} = [\alpha]$, si α est une constante appartenant à $|\mathcal{M}|$;

– $\alpha_{\mathcal{M}} = [\delta]$, si α est une constante n'appartenant pas à $|\mathcal{M}|$;

et, le fait que $F^n t_1, \ldots, t_n =_E F^n t'_1, \ldots, t'_n$, si $t_i =_E t'_i$ $(1 \leq i \leq n)$ permettant de le faire sans ambiguïté, posons :

– $F^n_{\mathcal{M}}(o_1, \ldots, o_n) = [Ft_1 \ldots t_n]$, si $[Ft_1 \ldots t_n]$ est dans $|\mathcal{M}|$ et $t_i \in o_i$ $(1 \leq i \leq n)$;

– $F^n_{\mathcal{M}}(o_1, \ldots, o_n) = [\delta]$, sinon.

$R^n_{\mathcal{M}}$ est l'ensemble des n-uples $\langle o_1, \ldots, o_n\rangle$ tels qu'il y a un énoncé $Rt_1 \ldots t_n$ à gauche dans un séquent de la suite, avec $t_i \in o_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Dans ce modèle, $t_{\mathcal{M}} = [t]$, pour tout $[t]$ de $|\mathcal{M}|$, et $t_{\mathcal{M}} = [\delta]$, pour les $[t]$ qui ne sont pas dans $\mathcal{M}$.

Ceci étant, nous savons que :

$$\mathcal{M} \models Rt_1 \ldots t_n \text{ ssi } \langle t_{1\mathcal{M}}, \ldots, t_{n\mathcal{M}}\rangle \in R_{\mathcal{M}} \text{ ssi } \langle [t_1], \ldots, [t_n]\rangle \in R_{\mathcal{M}};$$
$$\mathcal{M} \models t = u \text{ ssi } t_{\mathcal{M}} = u_{\mathcal{M}} \text{ ssi } [t] = [u] \text{ ssi } t =_E u.$$

Donc, pour montrer que tout énoncé élémentaire à gauche est vrai et qu'aucun énoncé élémentaire à droite n'est vrai dans $\mathcal{M}$, il suffit d'observer, d'une part, que :

– si $Rt_1 ... t_n$ est à gauche, $\langle [t_1], \ldots, [t_n]\rangle \in R_{\mathcal{M}}$, par définition de $\mathcal{M}$;

– si $Rt_1 ... t_n$ est à droite, alors, comme il n'y a pas de séquent axiomatique dans la suite, aucun $Rt'_1 ... t'_n$, avec $t_i =_E t'_i$, n'est à gauche et donc $\langle [t_1], \ldots, [t_n]\rangle \notin R_{\mathcal{M}}$;

et, d'autre part, que

– si $t = u$ est à gauche, $t =_E u$ et donc $\mathcal{M} \models t = u$;

– si $t = u$ est à droite, on n'a pas $\mathcal{M} \models t = u$, c'est-à-dire $t =_E u$, car il n'y a pas de séquent axiomatique dans la suite.

Enfin, par le théorème 7.3.5 et la proposition 7.2.2 on a :

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models \forall\alpha A & \text{ssi} & \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \\ & & \text{pour tout terme clos } t, \\ & \text{ssi} & \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \\ & & \text{pour tout terme clos } t \text{ tel que } [t] \text{ est dans } |\mathcal{M}| \,; \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{lll} \mathcal{M} \models \exists\alpha A & \text{ssi} & \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \\ & & \text{pour au moins un terme clos } t, \\ & \text{ssi} & \mathcal{M} \models A[\alpha := t], \\ & & \text{pour au moins un terme clos } t \text{ tel que } [t] \text{ est dans } |\mathcal{M}|. \end{array} \quad (2)$$

Le reste de la preuve du lemme est quasiment inchangé.

12 Équivalences entre systèmes axiomatiques et calcul des séquents

Après avoir, dans le chapitre 11, montré que l'approche déductive et les définitions sémantiques en termes de modèles définissent le même ensemble de lois logiques et donc le même ensemble de raisonnements valides, il reste à montrer l'équivalence de ces définitions avec celles fournies par l'approche axiomatique. L'objet de ce chapitre est d'établir l'équivalence entre le système de la section 2 et le calcul des séquents d'énoncés prédicatifs et d'en conclure le théorème fondamental de la logique.

Proposition 12.1 *Si A est démontrable dans le système axiomatique, alors $\Vdash A$ est dérivable dans le calcul des séquents.*

Démonstration

Par induction sur la longueur d'une démonstration dans le système axiomatique.

On montre d'abord que $\Vdash A$ est dérivable, pour tout axiome A.

Pour les tautologies, on adapte la complétude du calcul des séquents propositionnel.

Pour les schémas 1, 2 et 3 on a les dérivations :

$$\dfrac{\dfrac{\forall\alpha\, A, A[\alpha := t] \Vdash A[\alpha := t]}{\forall\alpha\, A \Vdash A[\alpha := t]}\,\forall_G}{\Vdash (\forall\alpha\, A \to A[\alpha := t])}\,\to_D$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \Vdash A, B[\alpha := \beta] \qquad A, B[\alpha := \beta] \Vdash B[\alpha := \beta]}{A, (A \to B[\alpha := \beta]) \Vdash B[\alpha := \beta]}\,\to_G}{\forall\alpha\,(A \to B), A \Vdash B[\alpha := \beta]}\,\forall_G + \text{Perm}}{\forall\alpha\,(A \to B), A \Vdash \forall\alpha\, B}\,\forall_D}{(\forall\alpha\,(A \to B) \Vdash (A \to \forall\alpha\, B))}\,\to_D}{\Vdash (\forall\alpha\,(A \to B) \to (A \to \forall\alpha\, B))}\,\to_D$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall\alpha\,\neg A, A[\alpha:=\beta] \Vdash A[\alpha:=\beta]}{\forall\alpha\,\neg A, A[\alpha:=\beta], \neg A[\alpha:=\beta] \Vdash}\,\neg_G}{\forall\alpha\,\neg A, A[\alpha:=\beta] \Vdash}\,\forall_G+\text{Perm}}{\exists\alpha\, A, \forall\alpha\,\neg A \Vdash}\,\exists_G+\text{Perm}}{\exists\alpha\, A \Vdash \neg\forall\alpha\,\neg A}\,\neg_D \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A[\alpha:=\beta] \Vdash A[\alpha:=\beta], \exists\alpha\, A}{A[\alpha:=\beta] \Vdash \exists\alpha\, A}\,\exists_D}{\Vdash \neg A[\alpha:=\beta], \exists\alpha\, A}\,\neg_D}{\Vdash \forall\alpha\,\neg A, \exists\alpha\, A}\,\forall_D}{\neg\forall\alpha\,\neg A \Vdash \exists\alpha\, A}\,\neg_G}{\Vdash (\exists\alpha\, A \leftrightarrow \neg\forall\alpha\,\neg A)}\,\leftrightarrow_D$$

On remarque ensuite que le modus ponens est préservé, par la proposition 11.8.

Enfin, si $\Vdash A[\alpha := \beta]$ est dérivable dans le calcul des séquents et si β ne figure pas dans $\forall\alpha\, A$, alors $\Vdash \forall\alpha\, A$ l'est aussi en appliquant la règle $\forall_D$. ∎

▷ *Il est important de remarquer que cette proposition n'est pas aussi anodine qu'il y paraît. Le modus ponens joue en effet un rôle capital dans sa démonstration. Or celui-ci n'est qu'une forme de l'élimination des coupures, dont les preuves sont loin d'être aisées : nous l'avons établi dans la section 3 à partir de la complétude du calcul des séquents. C'est cette proposition, plus que la suivante, qui fondamentalement relie le système axiomatique et le calcul des séquents.*

Proposition 12.2 *Si $\Vdash A$ est dérivable dans le calcul des séquents, A est dérivable dans le système axiomatique.*

Démonstration

On déduira cela de la proposition plus générale suivante :

si Γ, Δ est une suite non vide et si $\Gamma \Vdash \Delta$ est démontrable dans le calcul des séquents, alors $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \Delta)$ est démontrable dans le système axiomatique (si Γ est la suite $C_1, \dots, C_n$, $\neg\Gamma$ est la suite $\neg C_1, \dots, \neg C_n$).

La preuve est une induction sur la longueur des dérivations dans le calcul des séquents.

Si $\Gamma \Vdash \Delta$ est un séquent axiomatique et A un énoncé commun à Γ et à Δ, alors $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \Delta)$ est une tautologie de la forme $\bigvee\!\!\!\bigvee(\dots, \neg A, \dots, A, \dots)$.

Si $\Gamma \Vdash \Delta$ est $\Gamma^*, (A \to B) \Vdash \Delta$ et résulte d'une application de la règle $\to_G$, alors, par hypothèse d'induction, $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, A, \Delta)$ et $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg B, \Delta)$ sont démontrables dans le système axiomatique. On démontre alors $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg(A \to B), \Delta)$ comme suit :

$$\vdots$$

$$\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, A, \Delta)$$

$$\vdots$$

$$\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg B, \Delta)$$

$(\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, A, \Delta) \rightarrow (\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg B, \Delta) \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg(A \rightarrow B), \Delta)))$ (tautologie)

$(\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg B, \Delta) \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg(A \rightarrow B), \Delta))$ (modus ponens)

$\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg(A \rightarrow B), \Delta)$ (modus ponens)

Supposons que $\Gamma \Vdash \Delta$ est le séquent $\exists\alpha\, A \Vdash$ et qu'il est conclusion de la règle $\exists_G$. Par hypothèse d'induction, il y a une constante β ne figurant pas dans $\neg\exists\alpha\, A$ telle que $\neg A[\alpha := \beta]$) est démontrable dans le système axiomatique. $\neg\exists\alpha\, A$ est alors démontré comme ceci.

$$\vdots$$

$\neg A[\alpha := \beta]$

$\forall\alpha\, \neg A$ (généralisation)

$((\exists\alpha\, A \leftrightarrow \neg\forall\alpha\, \neg A) \rightarrow (\forall\alpha\, \neg A \rightarrow \neg\exists\alpha\, A))$ (tautologie)

$(\exists\alpha\, A \leftrightarrow \neg\forall\alpha\, \neg A)$ (axiome 3)

$(\forall\alpha\, \neg A \rightarrow \neg\exists\alpha\, A)$ (modus ponens)

$\neg\exists\alpha\, A$ (modus ponens)

Supposons que Γ^*, Δ est non vide et que $\Gamma \Vdash \Delta$ est le séquent $\Gamma^*, \exists\alpha\, A \Vdash \Delta$, obtenu par la règle $\exists_G$. Par hypothèse d'induction, $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg A[\alpha := \beta], \Delta)$ est démontrable dans le système axiomatique — où β est une constante non dans $\neg\Gamma^*$, $\neg\exists\alpha\, A$, Δ. On démontre $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg\exists\alpha\, A, \Delta)$ comme suit (pour alléger la présentation, $\bigvee\!\!\!\bigvee(\Gamma^*, \neg\Delta)$ sera noté D) :

$$\vdots$$

$$\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg A[\alpha := \beta], \Delta)$$

$(\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg A[\alpha := \beta], \Delta) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A[\alpha := \beta]))$ (tautologie)

$(\neg D \rightarrow \neg A[\alpha := \beta])$ (modus ponens)

$\forall\alpha(\neg D \rightarrow \neg A)$ (généralisation)

$(\forall\alpha(\neg D \to \neg A) \to (\neg D \to \forall\alpha\, \neg A))$ (axiome 2)

$(\neg D \to \forall\alpha\, \neg A)$ (modus ponens)

$((\exists\alpha\, A \leftrightarrow \neg\forall\alpha\, \neg A) \to ((\neg D \to \forall\alpha\, \neg A) \to (\neg D \to \neg\exists\alpha\, A)))$ (tautologie)

$(\exists\alpha\, A \leftrightarrow \neg\forall\alpha\, \neg A)$ (axiome 3)

$((\neg D \to \forall\alpha\, \neg A) \to (\neg D \to \neg\exists\alpha\, A))$ (modus ponens)

$(\neg D \to \neg\exists\alpha\, A)$ (modus ponens)

$((\neg D \to \neg\exists\alpha\, A) \to \bigvee(\neg\Gamma^*, \neg\exists\alpha\, A, \Delta))$ (tautologie)

$\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg\exists\alpha\, A, \Delta)$ (modus ponens)

Si $\Gamma \Vdash \Delta$ est $\Gamma^*, \forall\alpha\, A \Vdash \Delta$ et est obtenu par la règle $\forall_G$, alors, par hypothèse d'induction, $\bigvee(\neg\forall\alpha\, A, \neg\Gamma^*, \neg A[\alpha := t], \Delta)$ est démontrable dans le système axiomatique, pour un terme clos t. On démontre $\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg\forall\alpha\, A, \Delta)$ comme suit

$$\vdots$$

$\bigvee(\neg\forall\alpha\, A, \neg\Gamma^*, \neg A[\alpha := t], \Delta)$

$(\forall\alpha\, A \to A[\alpha := t])$ (axiome 1)

$((\forall\alpha\, A \to A[\alpha := t]) \to (\bigvee(\neg\forall\alpha\, A, \neg\Gamma^*, \neg A[\alpha := t], \Delta) \to \bigvee(\neg\Gamma^*, \neg\forall\alpha\, A, \Delta)))$ (tautologie)

$\bigvee(\neg\forall\alpha\, A, \neg\Gamma^*, \neg A[\alpha := t], \Delta) \to \bigvee(\neg\Gamma^*, \neg\forall\alpha\, A, \Delta))$ (modus ponens)

$\bigvee(\neg\Gamma^*, \neg\forall\alpha\, A, \Delta)$ (modus ponens)

Toutes les particularités de la démonstration ont été exemplifiées et les autres cas se prouvent par les mêmes méthodes. ∎

1 Le théorème fondamental de la logique

En combinant les propositions 12.2 et 12.1 avec la complétude (théorème 11.4) et la validité (théorème 8.1) du calcul des séquents, on obtient le :

Théorème de complétude. *A est une loi logique ssi A est démontrable dans le système axiomatique ssi $\Vdash A$ est dérivable dans le calcul des séquents.*

2 L'égalité

Le fait que les axiomes d'égalité de la section 4 sont dérivables en calcul des séquents avec égalité est assez immédiat, car les axiomes 4 sont des séquents axiomatiques et les axiomes 5 en sont très proches :

$$\dfrac{\dfrac{t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n]) \Vdash A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n]}{\bigwedge\!\!\!\bigwedge (t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n]) \Vdash A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n]} \wedge_G}{\Vdash (\bigwedge\!\!\!\bigwedge (t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n]) \rightarrow A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n])} \rightarrow_D$$

Puisqu'on a démontré dans la section 6 que la logique avec égalité est complète, on peut utiliser le modus ponens pour achever la preuve de la proposition 12.1.

Pour obtenir la proposition 12.2, à savoir que tout séquent dérivable est démontrable dans le système axiomatique, il suffit de considérer les cas des séquents axiomatiques introduits dans la section 3.

Pour les séquents axiomatiques de première espèce, nous montrons que si $\Gamma \Vdash \Delta$ est un tel séquent, avec $t =_E t'$ et $t = t'$ dans Δ, alors $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \Delta)$ est un théorème. Il suffit clairement de montrer que $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t')$ est un théorème, car $(\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t') \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \Delta))$ est une tautologie. Nous procédons par induction sur le nombre d'étapes utilisées pour obtenir $t =_E t'$.

Si $t = t'$ est dans Γ, le séquent $\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t')$ est une tautologie.

$t = t$ (axiome 4)

$(t = t \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t))$ (tautologie)

$\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t)$ (modus ponens)

$$\begin{array}{ll} \quad\vdots & \\ \quad\vdots & \text{(hypothèse d'induction)} \\ \bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t' = t) & \end{array}$$

$((t' = t \wedge t' = t') \rightarrow t = t')$ (axiome 5)

$(((t' = t \wedge t' = t') \rightarrow t = t') \rightarrow$

$(t' = t' \rightarrow (\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t' = t) \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t'))))$ (tautologie)

$(t' = t' \rightarrow (\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t' = t) \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t')))$ (modus ponens)

$t' = t'$ (axiome 4)

$(\bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t' = t) \rightarrow \bigvee\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t'))$ (modus ponens)

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t')$ (modus ponens)

$\vdots$

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = u)$

(hypothèses d'induction)

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, u = t')$

$((u = t' \wedge t = u) \to t = t')$ (axiome 5)

$(((u = t' \wedge t = u) \to t = t') \to$

$(\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = u) \to (\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, u = t') \to \bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t'))))$ (tautologie)

$(\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = u) \to (\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, u = t') \to \bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t')))$ (modus ponens)

$(\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, u = t') \to \bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t'))$ (modus ponens)

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t = t')$ (modus ponens)

$\vdots$

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t_1 = u_1)$

$\vdots$ (hypothèses d'induction)

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t_n = u_n)$

$(\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge(t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, f^n t_1...t_n = f^n t_1...t_n) \to f^n t_1...t_n = f^n u_1...u_n)$ (axiome 5)

$(\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t_1 = u_1)... \to (\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t_n = u_n) \to$

$(f^n t_1...t_n = f^n t_1...t_n \to$

$((\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge(t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, f^n t_1...t_n = f^n t_1...t_n) \to f^n t_1...t_n = f^n u_1...u_n) \to$

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, f^n t_1...t_n = f^n u_1...u_n)...)$ (tautologie)

$\vdots$

$(f^n t_1...t_n = f^n t_1...t_n \to$

$((\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge(t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, f^n t_1...t_n = f^n t_1...t_n) \to f^n t_1...t_n = f^n u_1...u_n) \to$

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, f^n t_1...t_n = f^n u_1...u_n))$ (modus ponens)

$f^n t_1...t_n = f^n t_1...t_n$ (axiome 4)

$((\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge(t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, f^n t_1...t_n = f^n t_1...t_n) \to f^n t_1...t_n = f^n u_1...u_n) \to$

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, f^n t_1...t_n = f^n u_1...u_n))$ (modus ponens)

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, f^n t_1...t_n = f^n u_1...u_n)$ (modus ponens)

Supposons pour terminer que $\Gamma \Vdash \Delta$ est un séquent axiomatique de la seconde espèce, avec $A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n]$ dans Γ, $A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n]$ dans Δ et $t_i =_E u_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Nous montrons que $\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \Delta)$ est un théorème du système axiomatique.

$\vdots$

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t_1 = u_1)$ ($\Gamma \Vdash t_i = u_i$ est un séquent axiomatique de première espèce)

$\vdots$

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t_n = u_n)$

$(\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge(t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n]) \to A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n])$ (axiome 5)

$(\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t_1 = u_1)... \to (\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, t_n = u_n) \to$

$((\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge(t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n]) \to A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n]) \to$

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \neg A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n], A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n]) \ldots)$ (tautologie)

$\vdots$

$((\bigwedge\!\!\!\!\bigwedge(t_1 = u_1, ..., t_n = u_n, A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n]) \to A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n]) \to$

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \neg A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n], A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n]))$ (modus ponens)

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \neg A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n], A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n])$ (modus ponens)

$(\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \neg A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_n := t_n], A[\alpha_1 := u_1, ..., \alpha_n := u_n]) \to \bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \Delta))$ (tautologie)

$\bigvee\!\!\!\!\bigvee(\neg\Gamma, \Delta)$ (modus ponens)

13 Théories et généralisation du théorème de complétude

1 À propos du nombre d'énoncés

Un ensemble est dit *dénombrable* ssi il est équipotent à l'ensemble des nombres naturels $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Un ensemble E est *fini* ssi il existe un nombre naturel n tel que E est équipotent à l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Tout ensemble dénombrable est infini, mais Cantor (1845–1918) a montré qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables.

Proposition 13.1 *Tout ensemble d'énoncés ou de termes est fini ou dénombrable.*

Démonstration

On montre en premier lieu que l'ensemble des suites finies d'éléments d'un ensemble à n éléments est dénombrable. En effet, pour chaque k, il y a n^k suites de longueur k et en rangeant les suites d'une longueur donnée dans l'ordre lexicographique (alphabétique), relativement à un ordre fixé des éléments de l'ensemble, on peut former une liste (i.e. une suite) infinie de toutes les suites finies : σ_0, σ_1, ..., σ_n, σ_{n+1}, ..., σ_{n+n^2}, σ_{n+n^2+1},..., $\sigma_{n+n^2+n^3}$,...

Ensuite, on code univoquement chaque expression d'un langage prédicatif comme une suite finie de l'alphabet fini (de 33 lettres) suivant : p, q, r, s, f, g, h, a, b, c, d, x, y, z, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, (,), 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Les symboles logiques et les parenthèses restent tels quels (sont codés par eux-mêmes) ; les autres symboles S_m, S^n ou S^n_m sont associés à une suite $(S(n^*)(m^*))$, où n^* est la représentation décimale de l'exposant et m^* celle de l'indice et où on met 0 s'il n'y pas d'exposant ou d'indice. Par exemple $\neg(\forall x_{4789}\, p^2_{1894} d_{13} x_{4789} \rightarrow q)$ se convertit en la suite $\neg(\forall(x(0)(4789))\,(p(2)(1894))(d(0)(13))(x(0)(4789)) \rightarrow (q(0)(0)))$.

Comme tout terme ou énoncé est une suite finie de symboles de l'alphabet — assimilable à une suite finie sur un alphabet fini — et que toute partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable ou fini, il s'ensuit que tout ensemble de termes ou d'énoncés est fini ou dénombrable. ∎

Notons qu'il y a dans chaque langage prédicatif une infinité de variables et que par conséquent l'ensemble des symboles de l'alphabet est aussi dénombrable. Celui d'un langage propositionnel, en revanche, peut être fini.

2 Généralisation du théorème de complétude

Proposition 13.2 *Soit une suite (finie ou non) d'énoncés :* $A_0, A_1, A_2, \ldots$, *aucun d'eux ne contenant une des constantes*[1] d, d_2, d_4, $\ldots$, d_{2i},..., *telle qu'aucun des séquents* $\Gamma \Vdash \Delta$; $A_0, \Gamma \Vdash \Delta$; $A_0, A_1, \Gamma \Vdash \Delta$; $A_0, A_1, A_2, \Gamma \Vdash \Delta$; $A_0, A_1, A_2, A_3, \Gamma \Vdash \Delta$ *etc. n'est dérivable. Alors il y a un modèle qui vérifie tous les énoncés de la suite ainsi que ceux de* Γ *et aucun des énoncés de* Δ.

Démonstration

Nous enrichissons les étapes de la démonstration du théorème 11.4 en construisant une suite de séquents qui vérifie les conditions du lemme 11.3 et qui comprend tous les A_i à gauche. Ce lemme nous garantira alors l'existence d'un modèle de ces énoncés et de ceux de Γ, qui ne vérifie pas ceux de Δ.

L'idée de la preuve est fort simple : nous partons du séquent $\Gamma \Vdash \Delta$ et nous ajoutons à gauche un à un les énoncés A_i après les étapes 3 et 4. Les indications que nous donnons suffiront pour une vérification exhaustive.

Nous construisons la suite de séquents comme une succession de suites finies, $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$, ... :

$$\overbrace{\Gamma_0 \Vdash \Delta_0; \Gamma_1 \Vdash \Delta_1; \ldots; \Gamma_k \Vdash \Delta_k}^{\mathcal{S}_0}; \overbrace{\Gamma_{k+1} \Vdash \Delta_{k+1}; \Gamma_{k+2} \Vdash \Delta_{k+2}; \ldots}^{\mathcal{S}_1};$$
$$\overbrace{\ldots; \Gamma_i \Vdash \Delta_i}^{\mathcal{S}_j}; \overbrace{\Gamma_{i+1} \Vdash \Delta_{i+1}; \Gamma_{i+2} \Vdash \Delta_{i+2}; \ldots}^{\mathcal{S}_{j+1}}; \ldots,$$

que nous représenterons comme ceci :
$\Gamma_0 \Vdash^0 \Delta_0; \Gamma_1 \Vdash^0 \Delta_1; \ldots; \Gamma_k \Vdash^0 \Delta_k; \Gamma_{k+1} \Vdash^1 \Delta_{k+1}; \Gamma_{k+2} \Vdash^1 \Delta_{k+2}; \ldots; \ldots; \Gamma_i \Vdash^j \Delta_i; \Gamma_{i+1} \Vdash^{j+1} \Delta_{i+1}; \Gamma_{i+2} \Vdash^{j+1} \Delta_{i+2}; \ldots; \ldots$, et qui sera telle que :

a. aucun des séquents $\Gamma_i \Vdash^j \Delta_i$; $A_j, \Gamma_i \Vdash^j \Delta_i$; $A_{j+1}, A_j, \Gamma_i \Vdash^j \Delta_i$; $A_{j+2}, A_{j+1}, A_j, \Gamma_i \Vdash^j \Delta_i$; ... n'est dérivable — ce qui renforce la condition 1 du lemme 11.3 — et

b. A_j est à gauche dans le premier séquent de $\mathcal{S}_{j+1}$.

Étape 1. $\Gamma_0 \Vdash \Delta_0$ est $\Gamma \Vdash \Delta$.

1. Cette exigence a pour fonction de fournir une réserve infinie de constantes non dans $\mathcal{T}$.

Étape 2. Si $\Gamma_i \Vdash^j \Delta_i$ n'est pas irréductible, $\Gamma_{i+1} \Vdash^j \Delta_{i+1}$ est une prémisse d'une règle principale, autre que $\forall_G$, $\exists_D$, dont $\Gamma_i \Vdash^j \Delta_i$ est la conclusion (éventuellement après permutation) et vérifiant la condition a. Nous montrons qu'un tel séquent existe.

– Examinons d'abord le cas où le séquent peut être conclusion d'une inférence faite par une règle à une prémisse (et/ou permutation) et choisissons l'une des situations les plus critiques, à savoir la règle $\exists_G$: à permutation près, Γ_i est, disons, $\Gamma_i^*, \exists\alpha\, A$. En prenant une constante d_{2n} qui ne se trouve pas dans $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$, on ne pourra dériver $A_{j+k}, \ldots, A_{j+1}, A_j, \exists\alpha\, A, \Gamma_i^*, A[\alpha := d_{2n}] \Vdash \Delta_i^*$, pour aucun k, car sinon $A_{j+k}, \ldots, A_{j+1}, A_j, \Gamma_i^*, \exists\alpha\, A \Vdash \Delta_i^*$ pourrait l'être aussi, par une permutation et la même règle (car d_{2n} n'est dans aucun A_i).

– Considérons ensuite le cas où l'on peut conclure $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ par une règle à partir des prémisses $\Gamma_i^* \Vdash \Delta_i^*$ et $\Gamma_i^{**} \Vdash \Delta_i^{**}$ et supposons qu'aucune d'elles ne satisfasse la condition a, c'est-à-dire supposons qu'il y ait des nombres k^* et k^{**} tels que les séquents $A_{j+k^*}, \ldots, A_{j+1}, A_j, \Gamma_i^* \Vdash \Delta_i^*$ et $A_{j+k^{**}}, \ldots, A_{j+1}, A_j, \Gamma_i^{**} \Vdash \Delta_i^{**}$ soient dérivables. Si k est le maximum de k^* et de k^{**}, il existe, par atténuation [2], des dérivations des séquents $A_{j+k}, \ldots, A_{j+1}, A_j, \Gamma_i^* \Vdash \Delta_i^*$ et $A_{j+k}, \ldots, A_{j+1}, A_j, \Gamma_i^{**} \Vdash \Delta_i^{**}$, dont nous pouvons dériver $A_{j+k}, \ldots, A_{j+1}, A_j, \Gamma_i \Vdash \Delta_i$, par la même règle. Ceci est impossible car $\Gamma_i \Vdash \Delta_i$ vérifie la condition a.

Étape 3. Si $\Gamma_i \Vdash^j \Delta_i$ est *irréductible* et si la suite formée des séquents précédents suivie de ce séquent est complète, alors

– au cas où A_{j-1} est le dernier énoncé de la suite, on s'arrête,

– sinon $\Gamma_{i+1} \Vdash^{j+1} \Delta_{i+1}$, est $A_j, \Gamma_i \Vdash \Delta_i$.

Étape 4. Si $\Gamma_i \Vdash^j \Delta_i$ est *irréductible* et si la suite formée des séquents précédents suivis de ce séquent n'est pas complète, $\Gamma_{i+1} \Vdash^{j+1} \Delta_{i+1}$, est obtenu en ajoutant A_j à gauche d'un séquent déterminé comme dans le lemme 11.3. ∎

Définitions. *Une* théorie *est un ensemble d'énoncés.*

Une théorie est consistante *ou cohérente ssi il n'existe pas de suite finie Γ composée d'énoncés de la théorie telle que $\Gamma \Vdash$ soit dérivable* [3].

Un modèle d'une théorie *est un modèle de tous les énoncés de la théorie.*

▷ *Il importe de ne pas confondre la notion de théorie avec celle de système axiomatique. Une théorie est un ensemble d'énoncés, alors qu'un système est un*

2. Que nous supposons avoir démontré comme dans la preuve de 11.6, pour ne pas invoquer la complétude.

3. Une théorie est donc consistante ssi chacune de ses sous-théories finies l'est.

ensemble d'axiomes et de règles. L'ensemble des théorèmes d'un système est une théorie. Une théorie est axiomatisable (ou axiomatisée) s'il existe un système axiomatique tel que l'ensemble de ses théorèmes est identique à la théorie. Le théorème de complétude, sous la forme donnée à la fin du chapitre 11, a pour conséquence que l'ensemble des lois logiques est axiomatisable.

Théorème 13.3 (Théorème d'existence de modèles (Henkin)) *Une théorie est consistante ssi elle a un modèle.*

Démonstration

Par le théorème de validité (1), une théorie ayant un modèle est consistante.

Si $\mathcal{T}$ est une théorie, $\mathcal{T}'$ est la théorie, ne mentionnant aucune des constantes d_{2i}, qui résulte de $\mathcal{T}$ en substituant simultanément les constantes d_{2i+1} aux d_i. $\mathcal{T}'$ est consistante si $\mathcal{T}$ l'est, car toute dérivation de $\Gamma' \Vdash$ devient une dérivation de $\Gamma \Vdash$ en effectuant la substitution inverse.

Comme nous savons, par la proposition 13.1, que $\mathcal{T}'$ est dénombrable ou finie, nous pouvons former une suite comprenant tous les énoncés de $\mathcal{T}'$. Cette suite, avec le séquent $\Vdash$, vérifie les conditions de la proposition 13.2. Cette théorie a donc un modèle $\mathcal{M}$, dont la variante $\mathcal{N}$, définie en posant $d_{i\mathcal{N}} = d_{2i+1\mathcal{M}}$ est modèle de $\mathcal{T}$, par la proposition 7.2.2.

■

3 Théorèmes de Löwenheim-Skolem et de compacité

Théorème 13.4 (Théorème de Löwenheim-Skolem) *Si une théorie a un modèle, alors elle a un modèle (dont l'univers est) fini ou dénombrable.*

Démonstration

Si une théorie a un modèle, elle est consistante, par le théorème de validité. Il suffit alors de remarquer que le modèle $\mathcal{M}$ invoqué dans la démonstration du théorème de Henkin a pour univers un ensemble de termes et est donc fini ou dénombrable, par la proposition 13.1. ■

Le paradoxe de Skolem. D'après ce théorème, aucune théorie consistante ne peut contraindre ses modèles à être plus que dénombrables. Cependant il existe des théories consistantes qui disent que l'univers est infini non dénombrable. Donc, par le théorème de Löwenheim-Skolem, ces théories du non dénombrable ont un modèle dénombrable.

> $\triangleright$ *Ce paradoxe a été extrait de son contexte logico-mathématique par Hilary Putnam (dans* Models and Reality*), qui — sous la forme des cerveaux dans une cuve (dans* Reason, Truth and History*) — en a fait l'argument majeur en faveur de son réalisme interne.*

Théorème 13.5 (Théorème de compacité) *Si toute partie finie d'une théorie a un modèle, alors elle a également un modèle.*

Démonstration

En raison du théorème de Henkin, il suffit de montrer que la théorie est consistante, si toute partie finie est consistante. Cela est évident, par la définition de consistance. ∎

> $\triangleright$ **Un modèle non standard de l'arithmétique.** *Soit le langage prédicatif dont les symboles propres sont le symbole prédicatif r^2 et les deux symboles fonctionnels f^2 et g^2. Soit la structure dont l'univers est l'ensemble des nombres naturels muni de l'addition et la multiplication. Définissons le modèle $\mathcal{N}$ en interprétant le langage dans cette structure comme suit : $f^2_{\mathcal{N}}$ est l'addition ; $g^2_{\mathcal{N}}$ est la multiplication ; $a_{\mathcal{N}}$ est le nombre 0, $a_{1\mathcal{N}}$ est le nombre 1, $a_{2\mathcal{N}}$ le nombre 2, $a_{3\mathcal{N}}$ le nombre 3,… les autres constantes sont interprétées arbitrairement, disons par le nombre 0 ; $r^2_{\mathcal{N}}$ est la relation d'égalité.*
>
> *Soit $\mathcal{T}$, l'ensemble de tous les énoncés de ce langage qui sont vrais dans $\mathcal{N}$ et qui ne mentionnent que les constantes $a,\ldots,a_i,\ldots$. Ajoutons à $\mathcal{T}$ l'ensemble des énoncés $\neg r^2ab$, $\neg r^2a_1b,\ldots,\neg r^2a_ib,\ldots$ Il est facile de voir que toute partie finie de cette nouvelle théorie a un modèle : il suffit de prendre chaque fois $\mathcal{N}[b \mapsto n]$ avec un nombre n plus grand que ceux associés aux constantes a_i (qui sont en nombre fini) figurant dans la partie. Par le théorème de compacité, la théorie enrichie a un modèle. Donc il existe un modèle qui vérifie* ***tous*** *les énoncés vrais dans $\mathcal{N}$, mais dans lequel il y a néanmoins un « nombre » différent de tous les nombres standard* 0, 1, 2,…

14 Les arbres de dérivations Une présentation plus commode du calcul des séquents

Les permutations. La règle de permutation du calcul des séquents, qui permet de modifier l'ordre des énoncés, a surtout un intérêt théorique. Elle permet de rendre les autres règles déterministes — et c'est pourquoi nous la gardons — en ce sens que la donnée des prémisses et de la règle suffit à déterminer la conclusion. Pratiquement, elle n'est pas indispensable et on l'écrit rarement dans les dérivations concrètes. Pour la supprimer, il faut modifier les règles de façon à permettre d'introduire un connecteur logique n'importe où dans la suite gauche ou droite du séquent, à partir d'énoncés qui se trouvent n'importe où dans les suites correspondantes des prémisses. Les règles pour l'implicateur se formuleraient donc ainsi :

$$\frac{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash \Delta_1, A, \Delta_2 \quad \Gamma_1, B, \Gamma_2 \Vdash \Delta_1, \Delta_2}{\Gamma_1, (A \to B), \Gamma_2 \Vdash \Delta_1, \Delta_2} \to_G \qquad \frac{\Gamma_1, A, \Gamma_2 \Vdash \Delta_1, B, \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Vdash \Delta_1, (A \to B), \Delta_2} \to_D$$

Les contextes. Un autre désagrément du point de vue pratique est le fait que dans la construction des dérivations de bas en haut, les énoncés contextuels de la conclusion — ceux des Γ, Δ — se voient reproduits dans les prémisses.

1 Les arbres

La technique des arbres de dérivations permet de contourner ces deux inconvénients. Ces arbres sont conçus ici seulement comme des moyens pratiques de construire et d'écrire les dérivations, quoique en réalité notre système de règles est une présentation commode (sur le plan théorique) de la technique des arbres.

Commençons par remplacer les séquents par des suites d'énoncés signés, qui seront appelées « séquents signés ». Pour ce faire, numérotons de façon distincte leurs énoncés et donnons leur une signature en les affectant de l'exposant V ou F

selon qu'ils sont à gauche ou à droite. Nous écrivons les séquents signés de haut en bas. Par exemple, le séquent $\forall x\ pxy, q \Vdash \exists y\ qxy, r, \exists z \forall x\ qxy$ devient :

$$\begin{array}{c} 1.\, \forall x\ pxy^V \\ 2.\, q^V \\ 3.\, \exists y\, qxy^F \\ 4.\, r^F \\ 5.\, \exists z \forall x\, qxy^F \end{array}$$

Pour que la description de la méthode que nous ferons maintenant paraisse moins ardue, nous recommandons de lire en parallèle l'exemple expliqué en 1.4.

1.1 Les branches non closes

Un séquent signé est une *branche non close*. Les autres branches non closes sont produites par les règles exposées ci-dessous.

▷ *Comme on le verra, ces règles sont soit de la forme :*

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \bullet \\ \cdot \\ \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} \cdot \\ * \\ \cdot \\ \times \end{array}$$

soit de la forme :

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \bullet \\ \cdot \\ \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{ccc} & \cdot & \\ & * & \\ & \cdot & \\ \times & & \circ \end{array}$$

indiquant que si la partie gauche est une branche non close, alors la partie droite est soit la branche non close :

$$\begin{array}{c} \cdot \\ * \\ \cdot \\ \times \end{array}$$

soit une ramification composée des deux branches non closes :

$$\begin{array}{c} \cdot \\ * \\ \cdot \\ \times \end{array} \qquad \textit{et} \qquad \begin{array}{c} \cdot \\ * \\ \cdot \\ \circ \end{array}$$

Les règles du premier type sont des reformulations des règles à une prémisse du calcul des séquents, celles du second type des reformulations des règles à deux prémisses. On peut les interpréter comme donnant l'instruction de prolonger une branche non close en y ajoutant des énoncés signés, qui sont reliés à un énoncé signé de la branche non close de départ. Cet énoncé signé est alors raturé ou, dans les cas $\forall_V$ et $\exists_F$, gardé en réserve. Il est entendu que m est le numéro du dernier énoncé signé de la branche non close de départ et que les nombres entre parenthèses indiquent la provenance des énoncés signés. Les crochets entourent des éléments optionnels : [O] est mis pour O ou pour rien.

• Règles d'élimination du vrai

Les règles d'introduction à gauche deviennent des règles pour éliminer le vrai.

$$\neg_V \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \neg A^V\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \cancel{\neg A}^V\ [(k)] \\ \vdots \\ m+1.\ A^F\ (n) \end{array}$$

$$\wedge_V \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ (A \wedge B)^V\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \cancel{(A \wedge B)}^V\ [(k)] \\ \vdots \\ m+1.\ A^V\ (n) \\ m+2.\ B^V\ (n) \end{array}$$

$$\vee_V \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ (A \vee B)^V\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{2}{c}{n.\ \cancel{(A \vee B)}^V\ [(k)]} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ m+1.\ A^V\ (n) & m+1.\ B^V\ (n) \end{array}$$

$$\to_V \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ (A \to B)^V\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{2}{c}{n.\ \cancel{(A \to B)}^V\ [(k)]} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ m+1.\ A^F\ (n) & m+1.\ B^V\ (n) \end{array}$$

$$\leftrightarrow_V \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ (A \leftrightarrow B)^V\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{2}{c}{n.\ \cancel{(A \leftrightarrow B)}^V\ [(k)]} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ m+1.\ A^F\ (n) & m+1.\ A^V\ (n) \\ m+2.\ B^F\ (n) & m+2.\ B^V\ (n) \end{array}$$

$$\forall_V \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \forall\alpha\, A^V\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \forall\alpha\, A^V\ [(k)] \\ \vdots \\ m+1.\ A[\alpha := t]^V\ (n) \end{array}$$

$$\exists_V \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \exists\alpha\, A^V\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \cancel{\exists\alpha\, A}^V\ [(k)] \\ \vdots \\ m+1.\ A[\alpha := \beta]^V\ (n) \end{array}$$

(la constante β ne se trouve dans aucun énoncé
non raturé de la branche non close de gauche)

• Règles d'élimination du faux

Les introductions à droite se présentent comme des éliminations du faux (ou non vrai).

$$\neg_F \qquad n.\ \neg A^F\ [(k)] \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \cancel{\neg A}^F\ [(k)] \\ \vdots \\ m+1.\ A^V\ (n) \end{array}$$

$$\wedge_F \qquad n.\ (A \wedge B)^F\ [(k)] \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{2}{c}{n.\ \cancel{(A \wedge B)}^F\ [(k)]} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ m+1.\ A^F\ (n) & m+1.\ B^F\ (n) \end{array}$$

$$\vee_F \qquad n.\ (A \vee B)^F\ [(k)] \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \cancel{(A \vee B)}^F\ [(k)] \\ \vdots \\ m+1.\ A^F\ (n) \\ m+2.\ B^F\ (n) \end{array}$$

$$\rightarrow_F \qquad n.\ (A \rightarrow B)^F\ [(k)] \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \cancel{(A \rightarrow B)}^F\ [(k)] \\ \vdots \\ m+1.\ A^V\ (n) \\ m+2.\ B^F\ (n) \end{array}$$

$$\leftrightarrow_F \qquad n.\ (A \leftrightarrow B)^F\ [(k)] \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{2}{c}{n.\ \cancel{(A \leftrightarrow B)}^F\ [(k)]} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ m+1.\ A^V\ (n) & m+1.\ A^F\ (n) \\ m+2.\ B^F\ (n) & m+2.\ B^V\ (n) \end{array}$$

$$\forall_F \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \forall\alpha\, A^F\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \cancel{\forall\alpha\, A}^F\ [(k)] \\ \vdots \\ m+1.\ A[\alpha := \beta]^F\ (n) \end{array}$$

(la constante β ne se trouve dans aucun énoncé non raturé de la branche non close de gauche)

$$\exists_F \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \exists\alpha\, A^F\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ \exists\alpha\, A^F\ [(k)] \\ \vdots \\ m+1.\ A[\alpha := t]^F\ (n) \end{array}$$

1.2 Comment clôturer une branche non close

Les séquents axiomatiques deviennent des règles pour clore les branches :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ n.\ A^X\ [(k)] \\ \vdots \\ n'.\ A^{\overline{X}}\ [(k')] \\ \vdots \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ A^X\ [(k)] \\ \vdots \\ n'.\ A^{\overline{X}}\ [(k')] \\ \vdots \\ n \rightleftharpoons n' \end{array}$$

en ce sens que si la partie gauche est une branche non close, la partie droite est une branche *close*. $\overline{X}$ est F si X est V et V si X est F.

1.3 La notion d'arbre de dérivation

Tout séquent signé est une branche non close et aussi un arbre dont il est le *tronc* et la seule branche.

Soit un arbre T dont B est une branche non close et soit R une règle de la forme $B \Rightarrow B'$. Si on remplace dans T la branche non close B par la branche B' ou par les deux branches non closes de B', si B' est une ramification, on obtient un arbre T' de même tronc que T et dont les branches sont celles de T moins la branche B, plus B' ou les deux branches constituant B'.

Un arbre est *clos* ssi toutes ses branches sont closes.

Un séquent signé est *dérivable (en arbre)* ssi il est le tronc d'un arbre clos.

On peut montrer qu'un séquent est dérivable dans le calcul des séquents ssi son compagnon signé est dérivable (en arbre).

1.4 Un exemple expliqué

Nous indiquons, étape par étape, une construction commentée, de l'arbre représentant la dérivation du paradoxe de Russell donnée à la section 2 :

On suppose que $\exists y \forall x\,(r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)$ est vrai (dans un modèle). C'est le tronc de l'arbre :

$$1.\ \exists y \forall x\,(r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)^V$$

Il existe donc un objet que nous nommons a tel que cette supposition puisse être remplacée par la vérité de $\forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx)$. Nous écrivons donc $\forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx)^V$ et raturons 1.

$$1.\ \cancel{\exists y \forall x\,(r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)}^V$$
$$2.\ \forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx)^V\ (1)$$

2 implique que $(r^2at \leftrightarrow \neg r^2tt)$ est vrai, pour tout terme clos t. Donc aussi pour le terme a.

$$1.\ \cancel{\exists y \forall x\,(r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)}^V$$
$$2.\ \forall x\,(r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx)^V\ (1)$$
$$3.\ (r^2aa \leftrightarrow \neg r^2aa)^V\ (2)$$

La supposition 3 ne peut remplacer 2, c'est pourquoi elle est gardée en réserve (inutilement dans cet exemple) et n'est pas raturée.

La supposition que $(r^2aa \leftrightarrow \neg r^2aa)$ est vrai équivaut à r^2aa et $\neg r^2aa$ non vrais et/ou r^2aa et $\neg r^2aa$ vrais. La seule branche de l'arbre se ramifie en chacune de ces deux possibilités qui épuisent la supposition 3, que nous raturons.

$$\begin{array}{c}
1.\ \cancel{\exists y \forall x\, (r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)}^V \\
2.\ \forall x\, (r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx)^V\ (1) \\
3.\ \cancel{(r^2aa \leftrightarrow \neg r^2aa)}^V\ (2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
4.\ r^2aa^F\ (3) & 4.\ r^2aa^V\ (3) \\
5.\ \neg r^2aa^F\ (3) & 5.\ \neg r^2aa^V\ (3)
\end{array}$$

$\neg r^2aa$ non vrai équivaut à r^2aa vrai :

$$\begin{array}{c}
1.\ \cancel{\exists y \forall x\, (r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)}^V \\
2.\ \forall x\, (r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx)^V\ (1) \\
3.\ \cancel{(r^2aa \leftrightarrow \neg r^2aa)}^V\ (2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
4.\ r^2aa^F\ (3) & 4.\ r^2aa^V\ (3) \\
5.\ \cancel{\neg r^2aa}^F\ (3) & 5.\ \neg r^2aa^V\ (3) \\
6.\ r^2aa^V\ (5) &
\end{array}$$

Comme 4 et 6 se contredisent, la première possibilité est exclue et cette branche est close :

$$\begin{array}{c}
1.\ \cancel{\exists y \forall x\, (r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)}^V \\
2.\ \forall x\, (r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx)^V\ (1) \\
3.\ \cancel{(r^2aa \leftrightarrow \neg r^2aa)}^V\ (2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
4.\ r^2aa^F\ (3) & 4.\ r^2aa^V\ (3) \\
5.\ \cancel{\neg r^2aa}^F\ (3) & 5.\ \neg r^2aa^V\ (3) \\
6.\ r^2aa^V\ (5) & \\
4 \rightleftharpoons 6 &
\end{array}$$

$\neg r^2aa$ vrai équivaut à r^2aa non vrai :

$$\begin{array}{c}
1.\ \cancel{\exists y \forall x\, (r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)}^V \\
2.\ \forall x\, (r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx)^V\ (1) \\
3.\ \cancel{(r^2aa \leftrightarrow \neg r^2aa)}^V\ (2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
4.\ r^2aa^F\ (3) & 4.\ r^2aa^V\ (3) \\
5.\ \cancel{\neg r^2aa}^F\ (3) & 5.\ \cancel{\neg r^2aa}^V\ (3) \\
6.\ r^2aa^V\ (5) & 6.\ r^2aa^F\ (5) \\
4 \rightleftharpoons 6 &
\end{array}$$

Ici les suppositions 4 et 6 se contredisent, la seconde possibilité est donc également exclue et toutes les branches sont closes :

$$1.\ \cancel{\exists y \forall x\, (r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)}^V$$

$$2.\ \forall x\, (r^2ax \leftrightarrow \neg r^2xx)^V\ (1)$$

$$3.\ \cancel{(r^2aa \leftrightarrow \neg r^2aa)}^V\ (2)$$

4. r^2aa^F (3)	4. r^2aa^V (3)
5. $\cancel{\neg r^2aa}^F$ (3)	5. $\cancel{\neg r^2aa}^V$ (3)
6. r^2aa^V (5)	6. r^2aa^F (5)
$4 \rightleftharpoons 6$	$4 \rightleftharpoons 6$

La moralité qu'on en tire est que si on développe suffisamment la supposition que $\exists y \forall x\, (r^2yx \leftrightarrow \neg r^2xx)$ est vrai, alors on aboutit dans tous les cas à une contradiction. On a ainsi établi que cet énoncé est contradictoire.

2 Exemples

Les exemples propositionnels donnés en 2 se transposent comme suit.

Dérivation de $p, (p \to q) \Vdash q$:

$$1.\ p^V$$

$$2.\ \cancel{(p \to q)}^V$$

$$3.\ q^F$$

4. p^F (2)	4. q^V (2)
$1 \rightleftharpoons 4$	$3 \rightleftharpoons 4$

Dérivation de $\neg q, (p \to q) \Vdash \neg p$:

$$1.\ \cancel{\neg q}^V$$

$$2.\ \cancel{(p \to q)}^V$$

$$3.\ \cancel{\neg p}^F$$

4. p^F (2)	4. q^V (2)
5. p^V (3)	5. q^F (1)
$4 \rightleftharpoons 5$	$4 \rightleftharpoons 5$

Une autre dérivation de $\neg q, (p \to q) \Vdash \neg p$:

$$1.\ \cancel{\neg q}^V$$
$$2.\ \cancel{(p \to q)}^V$$
$$3.\ \cancel{\neg p}^F$$
$$4.\ p^V\ (3)$$
$$5.\ q^F\ (1)$$

$6.\ p^F\ (2)$	$6.\ q^V\ (2)$
$4 \rightleftharpoons 6$	$5 \rightleftharpoons 6$

Dérivation de $p, \neg(p \wedge q) \Vdash \neg q$:

$$1.\ p^V$$
$$2.\ \cancel{\neg(p \wedge q)}^V$$
$$3.\ \cancel{\neg q}^F$$
$$4.\ \cancel{(p \wedge q)}^F\ (2)$$

$5.\ p^F\ (4)$	$5.\ q^F\ (4)$
$1 \rightleftharpoons 5$	$6.\ q^V\ (3)$
	$5 \rightleftharpoons 6$

Dérivation de $(p \vee q), \neg p \Vdash q$:

$$1.\ \cancel{(p \vee q)}^V$$
$$2.\ \cancel{\neg p}^V$$
$$3.\ q^F$$
$$4.\ p^F\ (3)$$

$5.\ p^V\ (1)$	$5.\ q^V\ (1)$
$4 \rightleftharpoons 5$	$3 \rightleftharpoons 5$

Dérivation de $\neg(p \leftrightarrow q), p \Vdash \neg q$:

$$1.\ \cancel{\neg(p \leftrightarrow q)}^{V}$$

$$2.\ p^{V}$$

$$3.\ \cancel{\neg q}^{F}$$

$$4.\ q^{V}\ (3)$$

$$5.\ \cancel{(p \leftrightarrow q)}^{F}\ (1)$$

$6.\ p^{V}\ (5)$	$6.\ q^{V}\ (5)$
$7.\ q^{F}\ (5)$	$7.\ p^{F}\ (5)$
$4 \rightleftharpoons 7$	$2 \rightleftharpoons 7$

Dérivation de $\Vdash (p \rightarrow p)$:

$$1.\ \cancel{(p \rightarrow p)}^{F}$$

$$2.\ p^{V}\ (1)$$

$$3.\ p^{F}\ (1)$$

$$2 \rightleftharpoons 3$$

Dérivation de $\Vdash (((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)$:

$$1.\ \cancel{(((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p)}^{F}$$

$$2.\ \cancel{((p \rightarrow q) \rightarrow p)}^{V}\ (1)$$

$$3.\ p^{F}\ (1)$$

$4.\ \cancel{(p \rightarrow q)}^{F}\ (2)$	$4.\ p^{V}\ (2)$
$5.\ p^{V}\ (4)$	$3 \rightleftharpoons 4$
$6.\ q^{F}\ (4)$	
$3 \rightleftharpoons 5$	

Le Paradoxe de la tournée générale se prouve de la façon suivante :

$$1.\ \exists x\,(p^1x \to \forall x\,p^1x)^F$$

$$2.\ \cancel{(p^1a \to \forall x\,p^1x)}^F\ (1)$$

$$3.\ p^1a^V\ (2)$$

$$4.\ \cancel{\forall x\,p^1x}^F\ (2)$$

$$5.\ p^1b^F\ (4)$$

$$6.\ \cancel{(p^1b \to \forall x\,p^1x)}^F\ (1)$$

$$7.\ p^1b^V\ (6)$$

$$8.\ \forall x\,p^1x^F\ (6)$$

$$5 \rightleftharpoons 7$$

Dérivation de $\Vdash (\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y) \to \exists y \forall x (p^1x \to q^1y))$:

$$1.\ \cancel{(\forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y) \to \exists y \forall x (p^1x \to q^1y))}^F$$

$$2.\ \forall x \exists y\,(p^1x \to q^1y)^V\ (1)$$

$$3.\ \exists y \forall x (p^1x \to q^1y)^F\ (1)$$

$$4.\ \cancel{\forall x (p^1x \to q^1a)}^F\ (3)$$

$$5.\ \cancel{(p^1b \to q^1a)}^F\ (4)$$

$$6.\ \cancel{\exists y\,(p^1b \to q^1y)}^V\ (2)$$

$$7.\ \cancel{(p^1b \to q^1c)}^V\ (6)$$

$$8.\ \cancel{\forall x (p^1x \to q^1c)}^F\ (3)$$

$$9.\ \cancel{(p^1d \to q^1c)}^F\ (8)$$

$$10.\ p^1d^V\ (9)$$

$$11.\ q^1c^F\ (9)$$

$$12.\ p^1b^V\ (4)$$

$$13.\ q^1a^F\ (4)$$

$$14.\ p^1b^F\ (7) \qquad\qquad 15.\ q^1c^V\ (7)$$

$$12 \rightleftharpoons 14 \qquad\qquad 11 \rightleftharpoons 15$$

3 L'égalité

Pour appliquer la méthode des arbres à la logique des prédicats avec égalité, il suffit de généraliser comme suit la règle pour clore les branches de 1.2, en traduisant les conditions de la section 3. Si E est l'ensemble des énoncés signés de la forme $u = u'^V$ se trouvant dans la branche, cela donne les deux règles :

$$\begin{array}{c} \vdots \\ n.\ t = t'^F\ [(k)] \\ \vdots \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ t = t'^F\ [(k)] \\ \vdots \\ n \rightleftharpoons n \end{array}$$

si $t =_E t'$.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ n.\ A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_m := t_m]^X\ [(k)] \\ \vdots \\ n'.\ A[\alpha_1 := t'_1, ..., \alpha_m := t'_m]^{\overline{X}}\ [(k')] \\ \vdots \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ n.\ A[\alpha_1 := t_1, ..., \alpha_m := t_m]^X\ [(k)] \\ \vdots \\ n'.\ A[\alpha_1 := t'_1, ..., \alpha_m := t'_m]^{\overline{X}}\ [(k')] \\ \vdots \\ n \rightleftharpoons n' \end{array}$$

si $t_i =_E t'_i$ $(1 \leq i \leq m)$.

Les dérivations de la section 3 se transforment donc en arbre de la façon suivante :

Dérivation de $\Vdash \forall x\, x = x$:

$$\begin{array}{c} 1.\ \cancel{\forall x\, x = x}^F \\ 2.\ a = a^F\ (1) \\ 2 \rightleftharpoons 2 \end{array}$$

Dérivation de $\Vdash \forall x \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)$:

$$1.\ \cancel{\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow y = x)}^F$$
$$2.\ \cancel{\forall y\, (a = y \rightarrow y = a)}^F\ (1)$$
$$3.\ \cancel{(a = b \rightarrow b = a)}^F\ (2)$$
$$4.\ a = b^V\ (3)$$
$$5.\ b = a^F\ (3)$$
$$5 \rightleftharpoons 5$$

Dérivation de $\Vdash \forall x \forall y \forall z\, ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)$:

$$1.\ \cancel{\forall x \forall y \forall z\, ((x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z)}^F$$
$$2.\ \cancel{\forall y \forall z\, ((a = y \wedge y = z) \rightarrow a = z)}^F\ (1)$$
$$3.\ \cancel{\forall z\, ((a = b \wedge b = z) \rightarrow a = z)}^F\ (2)$$
$$4.\ \cancel{((a = b \wedge b = c) \rightarrow a = c)}^F\ (3)$$
$$5.\ \cancel{(a = b \wedge b = c)}^V\ (4)$$
$$6.\ a = c^F\ (4)$$
$$7.\ a = b^V\ (5)$$
$$8.\ b = c^V\ (5)$$
$$6 \rightleftharpoons 6$$

Dérivation de $\Vdash \forall x \forall y\, (x = y \rightarrow (p^3xyx \leftrightarrow p^3yyx))$:

$$1.\ \cancel{\forall x \forall y\, (x = y \rightarrow (p^3xyx \leftrightarrow p^3yyx))}^F$$
$$2.\ \cancel{\forall y\, (a = y \rightarrow (p^3aya \leftrightarrow p^3yya))}^F\ (1)$$
$$3.\ \cancel{(a = b \rightarrow (p^3aba \leftrightarrow p^3bba))}^F\ (2)$$
$$4.\ a = b^V\ (3)$$
$$5.\ \cancel{(p^3aba \leftrightarrow p^3bba)}^F\ (3)$$

$6.\ p^3aba^V\ (5)$	$6.\ p^3bba^V\ (5)$
$7.\ p^3bba^F\ (5)$	$7.\ p^3aba^F\ (5)$
$6 \rightleftharpoons 7$	$6 \rightleftharpoons 7$

15 Exercices

1. Les raisonnements suivants sont-ils valides ?

i. Chaque fois que j'entends sonner, il y a quelqu'un. J'entends sonner. $\vdash$ Il y a quelqu'un.
ii. Chaque fois que j'entends sonner, il y a quelqu'un. Je n'entends pas sonner. $\vdash$ Il n'y a personne.
iii. Si tu ne m'aimes pas, je t'aime. Si je t'aime, prends garde à toi. $\vdash$ Si tu ne m'aimes pas, prends garde à toi.
iv. Toutes les maladies cardio-vasculaires sont dangereuses. $\vdash$ Il y a au moins une maladie dangereuse.
v. Les traditions doivent être maintenues. La chasse est une tradition. $\vdash$ La chasse doit être maintenue.
vi. On ne peut pas interroger sur une matière qui n'a pas été vue au cours. Cet exemple n'a pas été vu au cours. $\vdash$ Il ne peut faire l'objet d'une question d'examen.
vii. Qui veut vieillir doit s'efforcer de rester en bonne santé. Le tabac nuit à la santé. $\vdash$ Qui veut vieillir doit s'abstenir de fumer.
viii. Ce feu est vert. Le vert est une couleur. $\vdash$ Ce feu est une couleur.
ix. Les apôtres sont douze. Pierre est un apôtre. $\vdash$ Pierre est douze. (D'après Frege.)
x. Quand il y a à manger pour trois, il y a à manger pour quatre. Quand il y a à manger pour quatre, il y a à manger pour cinq. Quand il y a à manger pour cinq, il y a à manger pour six. Quand il y a à manger pour six, il y a à manger pour sept. $\vdash$ Quand il y a à manger pour trois, il y a à manger pour sept. (D'après Euboulide de Milet.)
xi. Tout ce qui vit est mortel. Ce qui est mortel n'est pas éternel. $\vdash$ Ce qui est éternel ne vit pas.
xii. Toute science est humaine ou exacte. La psychologie est une science humaine. $\vdash$ La psychologie n'est pas une science exacte.

xiii. Toute science est humaine ou exacte. La physique est inhumaine. $\vdash$ La physique est une science exacte.

xiv. Ce qui est rare est cher. Une chose pas chère, c'est rare. $\vdash$ Une chose pas chère, c'est cher.

xv. Si Dieu n'existait pas, on pourrait l'inventer. On ne saurait inventer Dieu. $\vdash$ Dieu existe. (D'après Anselme de Cantorbéry.)

xvi. Dieu possède toutes les perfections. L'existence est une perfection. $\vdash$ Dieu possède l'existence. (D'après Leibniz.)

xvii. Dieu a toutes les perfections. L'existence est une perfection. $\vdash$ Dieu existe. (D'après Descartes.)

xviii. Tout être nécessaire existe. Dieu est un être nécessaire. $\vdash$ Dieu existe.

xix. Tout ce qui existe a une cause. Ce qui n'a pas de cause existe par soi. $\vdash$ Ce qui n'a pas de cause a une cause.

xx. Tout ce qui vit est mortel. $\vdash$ Les êtres éternels ne vivent pas.

xxi. Tout ce qui meurt se décompose. L'âme est simple. $\vdash$ L'âme est immortelle.

xxii. Toute personne qui connaît la solution de cet exercice l'a communiquée à un ami et à une amie. Quelqu'un connaît la solution de cet exercice. $\vdash$ Quatre personnes au moins connaissent la solution.

xxiii. Le pape et moi ça fait deux. Un égale deux. $\vdash$ Le pape et moi ça fait un et je suis le pape. (D'après Russell.)

xxiv. Le pape et moi ça fait deux. Zéro égale un. $\vdash$ Le pape et moi ça fait un et je suis le pape. (D'après Russell.)

2. Quelle est la faute de logique contenue dans la première version du paradoxe du menteur (Épiménide le Crétois) ?

3. La phrase écrite à la page 20 de ce texte est-elle 1–vraie ?

4. « Paradoxe » de Pinocchio. Quand Pinocchio dit « Mon nez va s'allonger », dit-il la vérité ou non ?

5. Dieu a créé les êtres qui ne se sont pas créés eux-mêmes et seulement ceux-là. Qui a créé Dieu ?

6. L'examen peut être présenté oralement ou par écrit, au choix. L'une de ces deux formes est beaucoup plus facile que l'autre. Le professeur, soucieux d'informer un minimum les étudiants, est disposé à répondre par « oui » ou par « non » à une seule question. Malheureusement, il a un défaut de prononciation. Au lieu de dire « oui » ou « non » comme tout le monde, il dit « pong » ou « ping », sans qu'on sache lequel de ces mots est mis pour « oui ». Quelle question conseilleriez-vous de poser ?

7. La solution suivante est-elle acceptable (pour l'exercice précédent) : « si l'examen oral est plus facile dites 'ping', sinon dites 'pong' » ?

8. L'énoncé suivant est-il une loi logique :

> *Le nombre des étudiants belges en philosophie est inférieur ou égal au nombre des étudiants belges parlant allemand augmenté du nombre d'étudiants en philosophie ne parlant pas allemand. (D'après Bell-d'Espagnat)*

9. Montrez qu'il existe un étudiant tel que s'il réussit l'examen de logique, alors tous les étudiants réussissent l'examen de logique.

10. Trouvez les lois logiques et les contradictions.

i. $(p \to p)$ .... (principe d'identité)
$(p \to (q \to p))$
$((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$ .... (distributivité de l'implicateur)
$(((p \to q) \to p) \to p)$ .... (loi de Peirce)
$((p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r)))$ .... (permutation des hypothèses)
$((p \to (p \to q)) \to (p \to q))$ .... (contraction)
$(q \to (p \to p))$ .... (*e vero sequitur verum*)
$(((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p))$

ii. $((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))$ .... (loi de contraposition : principe du raisonnement par l'absurde)
$((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$
$(\neg\neg p \to p)$ .... (loi de la double négation ; raisonnement par l'absurde)
$(p \to \neg\neg p)$
$(\neg\neg\neg p \to \neg p)$
$((p \to \neg p) \to \neg p)$ .... (rétorsion)
$((\neg p \to p) \to p)$ .... (idem)
$(p \to (\neg p \to q))$ .... (*e falso sequitur quodlibet*)
$(\neg p \to (p \to q))$ .... (idem)

iii. $(p \to (p \land p))$
$((p \land q) \to p)$

$((p \wedge q) \rightarrow q)$
$((p \wedge q) \rightarrow (q \wedge p))$
$((p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))))$
$\neg(p \wedge \neg p)$ .... (principe de contradiction)
$(\neg(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow \neg q))$
$((p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg(p \wedge q))$
$(((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)))$
$((p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge q) \rightarrow r))$
$((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$ .... (principe du *modus ponens*)
$((\neg p \wedge (q \rightarrow p)) \rightarrow \neg q)$ .... (*modus tollens*)
$(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \neg q))$
$((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \rightarrow q))$

iv. $(p \rightarrow (p \vee q))$
$(q \rightarrow (p \vee q))$
$((p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)))$
$((q \vee p) \rightarrow (p \vee q))$
$(p \vee \neg p)$ .... (tiers exclu)
$(\neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q))$
$(\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q))$
$((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee q))$
$((p \vee q) \rightarrow (\neg p \rightarrow q))$
$(((p \wedge q) \vee p) \rightarrow p)$
$(p \rightarrow (p \wedge (q \vee r)))$
$(((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (p \wedge (q \vee r)))$
$((p \wedge (q \vee r)) \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$

v. $(p \leftrightarrow p)$
$(((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)))$ .... (associativité)
$(\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q))$
$((p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q))$
$((p \wedge q) \leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q))$
$((p \vee q) \leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q))$
$((p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q))$
$((p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q))$
$((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$
$((p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \vee q) \leftrightarrow q))$
$((p \rightarrow q) \leftrightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow p))$
$(((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)))$
$(((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r)))$
$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p))$
$((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$
$((p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$
$((p \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)))$

$((p \vee (q \to r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \to (p \vee r)))$
$((p \wedge (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)))$
$((p \vee (q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)))$
$((p \wedge \neg(q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow \neg((p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)))$
$((p \vee \neg(q \leftrightarrow r)) \leftrightarrow \neg((p \vee q) \leftrightarrow (p \vee r)))$ .... (distributivité)

vi. Nous omettons d'indiquer les exposants des symboles prédicatifs.
$(\forall xpx \to pa)$ .... (instantiation)
$(pa \to \forall xpx)$
$(pa \to pb)$
$(pa \to (qb \to pa))$
$(\forall xpx \leftrightarrow \forall ypy)$ .... (changement de variables)
$(\forall xp \leftrightarrow p)$
$(pa \to \neg\forall y\neg py)$
$(\forall x(px \wedge qx) \leftrightarrow (\forall xpx \wedge \forall xqx))$
$(\forall x(px \vee qx) \to (\forall xpx \vee \forall xqx))$
$((\forall xpx \vee \forall xqx) \to \forall x(px \vee qx))$
$(\forall xpx \vee \neg\forall xpx)$
$(\forall xpx \vee \forall x\neg px)$
$(\forall x(px \to qx) \to (\forall xpx \to \forall xqx))$
$((\forall xpx \to \forall xqx) \to \forall x(px \to qx))$
$(\forall x(pa \to qx) \to (pa \to \forall xqx))$
$(\forall x(pa \vee qx) \to (pa \vee \forall xqx))$

vii. $(pa \to \exists xpx)$ .... (généralisation existentielle)
$(\exists xpx \to pa)$
$(\exists xpx \leftrightarrow \exists ypy)$
$(\exists xp \leftrightarrow p)$
$(\neg\exists y\neg py \to pa)$
$(\exists x(px \wedge qx) \to (\exists xpx \wedge \exists xqx))$
$(\exists x(px \vee qx) \leftrightarrow (\exists xpx \vee \exists xqx))$
$((\exists xpx \wedge \exists xqx) \to \exists x(px \wedge qx))$
$(\exists xpx \vee \neg\exists xpx)$
$(\exists xpx \vee \exists x\neg px)$
$(\neg\exists xpx \to \exists x\neg px)$
$(\exists x\neg px \to \neg\exists xpx)$
$(\exists x(px \to qx) \to (\exists xpx \to \exists xqx))$
$((\exists xpx \to \exists xqx) \to \exists x(px \to qx))$
$(\exists x(pa \to qx) \to (pa \to \exists xqx))$
$(\exists x(pa \vee qx) \to (pa \vee \exists xqx))$

viii. $(\forall xpx \leftrightarrow \neg\exists x\neg px)$
$(\exists xpx \leftrightarrow \neg\forall x\neg px)$
$(\forall xpx \to \exists xpx)$
$(\exists ypy \leftrightarrow \forall xpx)$

$\exists y(py \to \forall xpx)$
$(\forall x\forall y(px \wedge py) \leftrightarrow \forall x(px \wedge qx))$
$(\exists x\exists y(px \vee py) \leftrightarrow \exists x(px \vee qx))$
$((\forall xpx \to qb) \leftrightarrow \exists x(px \to qb))$
$((\exists xpx \to p) \leftrightarrow \forall x(px \to p))$
$((\forall xpx \to \forall xqx) \leftrightarrow \exists x\forall y(px \to qy))$
$(\exists x\forall y(px \to qy) \leftrightarrow \forall y\exists x(px \to qy))$
$(\forall x\exists y(px \to qy) \leftrightarrow \exists y\forall x(px \to qy))$

ix. $(\forall x\exists yrxy \leftrightarrow \exists y\forall xrxy)$
$(\forall x\forall yrxy \to \forall x\exists yrxy)$
$(\forall x\forall yrxy \leftrightarrow \forall y\forall xrxy)$
$(\exists x\exists yrxy \leftrightarrow \exists y\exists xrxy)$
$\exists x\forall y(ryx \leftrightarrow \neg ryy)$ .... (paradoxe de Russell)
$\exists x\forall y(ryx \leftrightarrow ryy)$
$(\forall x\exists yrxy \leftrightarrow \forall x\exists yryx)$
$(\forall xrxx \to (rba \to \exists z(rbz \wedge rza)))$
$(\forall xrxx \to \forall x\forall y(rxy \to \exists z(rxz \wedge rzy)))$
$\forall x_1\forall x_2(rx_1x_2 \to \exists y(rx_1y \wedge \exists zrzy))$
$(\forall x\forall y\forall z(rxy \to (ryz \to rxz)) \to (\forall x\forall y(rxy \to \neg ryx) \leftrightarrow \forall x\neg rxx))$

11. L'ensemble des énoncés suivants a-t-il un modèle :

$$\forall x\,\neg rxx \qquad \forall x\exists y\, rxy \qquad \forall x\forall y\forall z\,(rxy \to (ryz \to rxz))$$

Pouvez-vous décrire un modèle fini (c'est-à-dire, dont l'univers est fini) de cet ensemble d'énoncés ?

Bibliographie

[1] Barwise, Jon et Etchemendy, John. *The Language of First-Order Logic, Including the Macintosh® Version of Tarski's World 4.0.* Stanford, CSLI Lecture Notes 23, 1993 (existe aussi pour Windows).

[2] Carroll, Lewis. *Logique sans peine.* Paris, Hermann, 1966.

[3] Carroll, Lewis. *Symbolic Logic, The Game of Logic.* New York, Dover Publications, 1958.

[4] Cori, René et Lascar, Daniel. *Logique mathématique, Cours et exercices.* Masson, 1993.

[5] David, René, Nour, Karim et Raffalli, Christophe. *Introduction à la logique, Théorie de la démonstration, Cours et exercices corrigés.* Dunod, 2001.

[6] Frege, Gottlob. *Ecrits logiques et philosophiques.* Paris, Seuil, 1971 (traduit de l'allemand par Claude Imbert).

[7] Gentzen, Gerhard. *Recherches sur la déduction logique.* Paris, Presses Universitaires de France, 1955 (traduit de l'allemand par Robert Feys et Jean Ladrière).

[8] Hodges, Wilfred. *Logic. An introduction to elementary logic.* Penguin Books, 1977.

[9] Kleene, Stephen Cole. *Logique mathématique.* Paris, Armand Colin, 1971 (traduit de l'anglais par J. Largeault).

[10] Mates, Benson. *Elementary Logic.* New York, Oxford University Press, 1972.

[11] Mendelson, Elliott. *Introduction to mathematical Logic.* Monterey (Californie), Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, 1987.

[12] Pabion, Jean-François. *Logique mathématique.* Paris, Hermann, 1976.

[13] Priest, Graham. *Logic A very short introduction.* Oxford, Oxford University Press, 2000.

[14] Quine, Willard van Orman. *Logique élémentaire.* Paris, Armand Colin, 1972 (traduit par Jean Largeault et Bertrand Saint-Sernin).

[15] Rivenc, François. *Introduction à la logique.* Paris, Payot, 1989.

[16] Schwarz, Wolfgang. *Tree Proof Generator.* `http://www.umsu.de/logik/trees/`

[17] Tarski, Alfred. *Introduction à la logique.* Paris-Louvain, Gauthier-Villars et Nauwelaerts, 1960 (traduit de l'anglais par Jean Tremblay ; original en polonais).

[18] Van Heijenhoort, Jean. *From Frege to Gödel.* Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1967.

[19] Site internet du Centre national de recherches de logique. `http://logic-center.be`

Table des matières

Les subdivisions marquées d'un astérisque peuvent être omises lors d'une première lecture ; celles marquées de deux astérisques peuvent l'être en deuxième lecture.