

Les fondements de l'arithmétique

(traduction & introduction par Claude IMBERT)

Gottlob FREGE

Introduction & appendices (de C. Imbert)

13 / 69 FREGE, PÈRE DES ENSEMBLES

Vu du temple bourbakiste, le campement frégeen au seuil de la terre promise se confond avec la friche. On rappellera cependant que Frege a rencontré l'extension de concept, ou l'ensemble, au carrefour d'une idée : l'interprétation extensionnelle du concept (prédicat), et d'une recherche : celle du nombre cardinal. [...]

[note de bas de page 3.] [Zermelo](#), dans le commentaire accompagnant le compte rendu que Cantor donna des *Fondements*, [identifie explicitement extension de concept et classe logique au sens d'ensemble](#).

45-46 FREGE, PÈRE DE LA QUANTIFICATION

[Les concepts utilisés par Frege] sont l'outil essentiel de la caractéristique – si l'on entend par là la représentation des contenus logiques – et de cette partie de la logique dont Frege est le créateur incontesté, la théorie de la quantification.

76 Frege refuse le support épistémologique de l'abstraction et dénonce le « nom commun ».

84 (IN)UTILITÉ DE PRÉSENTER UNE PREUVE

[note de bas de page] Les explications que je donne à chaque fois sous le titre analyse sont là pour la seule commodité du lecteur ; elles pourraient être omises sans rien ôter à la force de la preuve qu'on trouvera sous le seul titre construction.

95 RÉCONCILIER SENS & LÉGITIMITÉ

[note de bas de page] [Comment pourrait-on dépouiller ces propriétés \[fondamentales de la suite N\] de leur caractère spécifiquement arithmétique en sorte qu'elles \[...\] relèvent des activités de l'entendement qui sont nécessaires pour toute pensée mais en même temps suffisantes pour garantir la légitimité des preuves et leur complétude et pour permettre la construction de concepts et de définitions consistantes ?](#)

Introduction (de G. Frege)

116 ON NE PEUT TOLÉRER LE FLOU DES FONDEMENTS

À de telles questions, les mathématiciens n'auront, pour la plupart d'entre eux, rien à répondre qui puisse satisfaire. [Notre science peut-elle souffrir sans honte d'être si peu éclairée sur son objet le plus proche, et apparemment si simple ?](#) Encore bien moins saurait-on dire ce qu'est le nombre. [Quand un concept sur lequel repose une science capitale suscite des difficultés, il faut l'examiner plus précisément et s'efforcer de vaincre ces difficultés \[...\].](#) Mais il manque ici la première condition pour qu'on veuille se mettre à l'étude : savoir que l'on ne sait pas.

119 DISTINGUER PSYCHOLOGIE ET MATHÉMATIQUE

[qu'on ne tienne pas les conditions psychologiques et corporelles de la conscience d'une proposition pour une preuve](#), qu'on ne confonde pas la conscience d'une proposition avec sa vérité.

120 ÉPURER UN CONCEPT

Souvent il a fallu un immense travail intellectuel, qui dura des siècles, avant qu'on ne parvienne à [connaître un concept dans toute sa pureté, à le dépouiller de toutes les enveloppes qui le dérobaient au regard de l'intellect](#).

121 DISTINGUER PSYCHOLOGIE ET MATHÉMATIQUE

j'étais donc contraint de m'attarder sur la psychologie, ne serait-ce que pour récuser son intrusion dans les mathématiques.

D'ailleurs, on rencontre des expressions psychologiques dans les traités de mathématiques, tout aussi bien. Quand l'auteur se croit tenu de donner une définition sans être en état de le faire, il veut au moins montrer comment on approche de l'objet ou du concept en question. **Une telle définition se reconnaît à ce que la suite de l'exposé n'y fait plus appel.** C'est une introduction pédagogique tout à fait recevable, mais qu'il faudrait distinguer soigneusement d'une définition.

121-122 ON NE PEUT TOLÉRER LE FLOU DES FONDEMENTS

Dès lors qu'une définition conduit aisément aux preuves, qu'on ne se heurte à aucune contradiction, qu'on aperçoit des rapports entre les objets de recherche apparemment éloignés, qu'ils se laissent régir par des lois d'ordre supérieur, on pense ordinairement que la définition est suffisamment assurée, et l'on s'interroge peu sur sa justification logique. Cette manière de faire, en tout cas, a ceci de bon qu'on ne risque guère de manquer le but. Je pense moi aussi, qu'**une définition doit être confirmée par sa fécondité, par le pouvoir de mener à bien une démonstration.** Mais il faut bien voir que la rigueur de la preuve demeure une illusion, même si la chaîne des inférences est ininterrompue, quand la définition reçoit sa justification après coup, par le seul fait qu'on n'a rencontré aucune contradiction. Au fond, on n'a jamais ainsi qu'une certitude expérimentale et l'**on doit être prêt à tomber pour finir sur une contradiction éventuelle qui ferait s'écrouler tout l'édifice.** C'est pourquoi j'ai cru devoir revenir aux fondements logiques généraux, plus peut-être que les mathématiciens ne l'eussent, pour la plupart, jugé nécessaire.

122 PRINCIPES DE RECHERCHE DES FONDEMENTS

Voici les principes auxquels je me suis attaché dans cette recherche.

Il faut nettement séparer le psychologique du logique, le subjectif de l'objectif.

On doit rechercher ce que les mots veulent dire non pas isolément mais pris dans leur contexte.

Il ne faut jamais perdre de vue la différence entre concept et objet.

Pour me conformer au premier principe, j'ai toujours attribué au terme « représentation » un sens psychologique, et distingué les représentations des concepts et des objets. Si l'on néglige le second principe, on est conduit presque nécessairement à donner aux mots pour signification des images ou des événements intérieurs à l'âme individuelle : et l'on se heurte de nouveau au premier principe. En ce qui concerne le troisième point, il est illusoire de penser que l'on peut faire d'un concept un objet sans l'altérer.

123 NATURALITÉ D'UNE DÉFINITION

À ceux qui pourraient arguer que mes définitions n'ont rien de naturel, je demande de réfléchir que **la question n'est pas de savoir si elles sont naturelles, mais si elles atteignent le cœur de notre recherche,** et si la logique n'a rien à y objecter.

0. [Sans titre]

125 / 126 LA PREUVE CERNE LES THÉORÈMES ET LEUR INTERDÉPENDANCE

les développements de l'analyse [après les Grecs et l'analyse supérieure] ont enseigné de plus en plus clairement que, en mathématiques, une simple conviction morale qui s'appuie sur le succès de nombreuses applications ne suffit pas. On exige maintenant une preuve pour des propositions tenues jusqu'ici pour évidentes. Et **c'est bien souvent le seul moyen qui permette de poser leurs limites de validité.** [...]

Ainsi s'efforce-t-on, dans tous les domaines, de prouver avec rigueur, de tracer précisément les limites de validité ; et, pour ce faire, de cerner les concepts avec toute l'acuité qu'il se peut.

[...] la preuve n'a pas pour seul fin de libérer une proposition du doute ; **elle permet en outre de pénétrer la dépendance relative des vérités.**

127-128 CARACTÈRE ANALYTIQUE, SYNTHÉTIQUE, A PRIORI, A POSTERIORI

La question [les propositions de l'arithmétique sont-elles *a priori* ou *a posteriori*, synthétiques ou analytiques ?] est [...] arrachée à la psychologie pour être reversée aux mathématiques – quand il s'agit d'une vérité mathématique. Son objet est de trouver la preuve, et de la poursuivre régressivement jusqu'aux vérités premières. Si l'on ne rencontre sur ce chemin que des lois logiques générales et des définitions, on a une vérité synthétique – étant entendu qu'on inclut dans ce compte les propositions qui assurent le bon usage d'une

définition. En revanche, s'il n'est pas possible de produire une preuve sans utiliser des propositions qui ne sont pas de logique générale, mais concernent un domaine particulier, la proposition est synthétique. Pour qu'une vérité soit *a posteriori* il faut que la preuve ne puisse aboutir sans faire appel à des propositions de fait, c'est-à-dire à des vérités indémonstrables et sans généralité, à des énoncés portant sur des objets déterminés. Si au contraire l'on tire la preuve de lois générales qui elles-mêmes ne se prêtent pas à une preuve ni n'en requièrent, la vérité est *a priori*.

1. Opinions de quelques auteurs sur la nature des propositions arithmétiques

137-138 L'INDUCTION N'EST PAS GRATUITE, ELLE CARACTÉRISE LES NOMBRES

D'ordinaire, quand on établit inductivement une proposition portant sur une espèce, la définition du concept de l'espèce donne déjà à elle seule une série de propriétés communes. Ici [pour les nombres], il serait difficile d'en trouver une qu'il ne faille pas d'abord démontrer.

La comparaison la plus acceptable pourrait être la suivante : supposons que, lors d'un forage, on ait observé un accroissement régulier de la température avec la profondeur et qu'on ait rencontré jusque-là des couches minérales fort diverses. Il est clair que des observations effectuées dans ce forage, on ne pourrait rien conclure sur la constitution des couches plus profondes, et on ne pourrait pas non plus dire si la répartition régulière des températures continuera d'être observée. Certes, le concept « ce que l'on rencontre en poursuivant le forage » subsume à la fois ce qu'on a déjà observé et ce qui gît plus profondément, mais on ne voit pas quelle pourrait être son utilité. Dans le cas des nombres, il ne sera pas plus utile de savoir qu'ils tombent sous le concept « ce qu'on obtient en répétant l'adjonction d'une unité ». On peut remarquer d'un cas à l'autre cette différence que les couches sont l'objet d'une découverte tandis que **l'adjonction répétée de l'unité donne naissance aux nombres et détermine entièrement leur nature**. C'est dire purement et simplement qu'on peut tirer toutes les propriétés d'un nombre, par exemple 8, de son mode de production par adjonction de l'unité. Et c'est admettre au fond que **les propriétés des nombres découlent de leur définition, qu'il est possible de montrer les lois générales des nombres à partir de leur mode d'engendrement commun**, tandis que les propriétés particulières de chacun d'eux découleraient de leur formation particulière par l'addition répétée de l'unité. Dans le cas des couches géologiques, on peut de même déduire ce qui est déjà déterminée par la seule profondeur, à savoir leur position relative, sans qu'il soit besoin d'induction. Et quant à ce qui demeure indéterminé, l'induction ne peut pas plus l'enseigner.

[...] Tandis que la méthode scientifique, usant de mesures objectives, tantôt accorde une haute probabilité à une seule confirmation, tantôt n'accorde aucune valeur à une coïncidence mille fois répétée, **l'habitude tire son être du nombre et de la force des impressions, ainsi que de conditions subjectives qui n'ont aucun droit à exercer leur influence sur le jugement**. L'induction, parce qu'elle ne peut que rendre probable une proposition, doit s'appuyer sur la théorie des probabilités. Mais on ne voit pas comment développer cette dernière sans présupposer des lois arithmétiques.

144-145 DÉFINITION D'UNE PREUVE PAR MODUS PONENS

Au lieu d'attacher directement une chaîne de raisons à une proposition de fait, on peut, laissant de côté l'actualité de cette proposition, introduire son contenu sous forme de proposition conditionnelle. Si dans une suite de pensées, nous remplaçons ainsi les propositions de fait par des conditions, nous la modifions de telle sorte qu'elle exprime désormais la dépendance d'un effet par rapport à une série de conditions. **Cette dernière vérité trouverait son fondement dans la seule pensée ou, pour parler comme Mill, dans le maniement habile du langage**. [...] L'observation dirait en dernier recours si les conditions énoncées dans les lois ainsi établies sont remplies. On arriverait finalement là même où on serait parvenu en attachant immédiatement la chaîne de raisonnements aux faits observés, mais le procédé que nous venons d'indiquer est bien préférable en ce qu'il produit une loi générale dont l'application n'est pas nécessairement limitée aux faits actuellement observés. Les vérités de l'arithmétique se rapporteraient à celles de la logique comme les théorèmes aux axiomes de la géométrie. Chacune de ces vérités résumerait en elle une chaîne de raisons prête pour l'usage futur ; grâce à elles il n'y aurait plus besoin d'avance pas à pas dans les déductions, on pourrait énoncer immédiatement le résultat de toute la chaîne [...]. Si on tient compte du puissant développement des doctrines arithmétiques et de leurs applications multiples, **on ne pourra maintenir le mépris où l'on tient d'habitude les jugements analytiques, ni la fable de la stérilité de la logique pure**.

2. Opinions de quelques auteurs sur le concept de nombre cardinal

153-155 OBJECTIF VS RÉEL

Je distingue objectif de palpable, spatial, réel. L'axe de la terre, le centre de gravité du système solaire sont objectifs ; je ne peux pas pour autant les appeler réels comme la terre elle-même. [...]

[...] Est objectif ce qui est conforme à une loi ; conceptuel ce qui peut être le contenu d'un jugement et se laisse exprimer par des mots. On ne peut pas communiquer ce qui est purement intuitif. Pour illustrer cela, supposons deux êtres raisonnables pour qui seuls les rapports et propriétés projectifs sont objets d'intuition : la position de trois points sur une droite, de quatre points dans un plan. Il se pourrait, dans cette hypothèse, que l'un voie comme un point ce que l'autre verrait comme un plan, et réciproquement. Ce que l'un voit comme un segment de droite entre deux points, l'autre le verrait comme l'arête d'intersection de deux plans, etc. selon une correspondance duale. Mais ils pourraient très bien se comprendre et ignorerait la diversité de leur intuition, car la géométrie projective associe tout théorème à son correspondant dual et si leur appréciation esthétique était en désaccord, ce ne serait pas un signe certain de la disparité des intuitions. Leur accord serait total sur les théorèmes de géométries, simplement ils traduiraient différemment les mots dans l'intuition. Au mot « point », chacun d'eux associerait une intuition différente. Ainsi, on peut toujours affirmer que ce mot désigne pour eux quelque chose d'objectif, mais il ne faut pas croire que ce puisse être la particularité de leur intuition. C'est en ce sens que l'axe terrestre est lui aussi objectif.

[...] Par objectivité, j'entends indépendance par rapport à nos sensations, intuitions et représentations, par rapport aux ébauches d'images intérieures qui nous viennent des souvenirs d'impressions passées, mais non indépendance par rapport à la raison. Prétendre dire ce que sont les choses indépendamment de la raison, ce serait prétendre juger sans juger, laver le cuir sans le mouiller.

3. Quelques opinions sur l'unité et sur l'un

158-159 UNE PROPRIÉTÉ DE L'INCLUSION ENSEMBLISTE

Le contenu d'un concept diminue quand son extension s'accroît ; et si celle-ci englobe toute chose, il faut que le contenu du concept s'amenuise à l'extrême.

175 QUAND ON DONNE UN NOMBRE, SUR QUOI PORTE NOTRE ÉNONCÉ ?

donner un nombre, c'est énoncer quelque chose d'un concept. C'est peut-être dans le cas du nombre 0 que la chose se voit le plus clairement. Quand je dis : « Vénus a 0 lune », il n'existe aucune lune ou agrégat de lunes dont on pourrait énoncer quelque chose, mais on attribue au concept « lune de Vénus » une propriété : à savoir celle de ne rien subsumer. Si je dis : « le carrosse de l'empereur est tiré par quatre chevaux », c'est au concept « cheval qui tire le carrosse de l'empereur » que j'attribue le nombre quatre.

177 POUR CRÉER DES ENSEMBLES, IL FAUT DÉPASSER KANT

Le pouvoir qu'a le concept de constituer une collection dépasse de beaucoup le pouvoir unificateur de l'aperception synthétique. Celle-ci ne permet pas de réunir en un tout les habitants de l'empire d'Allemagne, mais on peut bien les soumettre au concept « habitant de l'empire d'Allemagne », et les compter.

180 LE NOMBRE N'EST PAS ATTACHÉ À UNE CHOSE

L'usage allemand confirme [...] l'idée que le nombre est attribué aux concepts. On dit : *zehn Mann, vier Mark, drei Fass*. Le singulier pourrait bien indiquer qu'on pense effectivement au concept, non à la chose. L'avantage de cette manière de dire est particulièrement clair dans le cas du nombre 0. Mais je reconnais que le langage attribue par ailleurs le nombre aux objets, non aux concepts, dans l'expression « le nombre des billes » analogue à « le poids des billes ». Il semble qu'on parle d'objets, alors qu'en vérité c'est d'un concept qu'on énonce quelque chose. Cet usage est trompeur. L'expression : « quatre nobles chevaux » donne l'illusion que « quatre » ajoute une détermination au concept « noble cheval », tout comme « noble » pour le concept « cheval » : mais seul « noble » est un caractère du concept, et par le mot « quatre » nous énonçons quelque chose d'un concept.

4. Le concept de nombre cardinal

185 LE NOMBRE N'EST PAS LIÉ À UNE REPRÉSENTATION

on croit volontiers que la représentation de quatre points sur la face d'un dé comporte quelque chose qui corresponde au mot « quatre » ; mais c'est une illusion. Pensez à un pré vert, et essayez de voir si votre représentation est altérée quand vous remplacez l'article indéfini par le terme numérique « un » : rien n'y est ajouté ; tandis que le mot « vert » a bien un correspondant dans la représentation. Si on se représente le mot « Gold » imprimé, on ne pensera d'abord à aucun nombre. Si on se demande combien de lettres il a, on obtiendra le nombre 4 ; mais la représentation ne sera pas pour autant plus précise, elle demeurera absolument inchangée. Nous avons introduit le concept « lettre du mot Gold », et c'est en lui que gît le nombre. La chose n'est pas si claire dans le cas des quatre points d'un dé, car la ressemblance des points entre eux suggère si immédiatement le concept qu'on remarque à peine son intervention. **On ne peut se donner aucune représentation du nombre, ni comme un objet indépendant, ni comme une propriété des choses externes, parce que le nombre n'est ni un être sensible ni une propriété des choses externes.** Ce qui est particulièrement clair dans le cas du nombre 0. On cherchera en vain à se représenter 0 étoiles visibles. On peut bien penser que le ciel est couvert de nuages : il n'y a rien là qui corresponde au mot « étoile » ni à 0. On ne fait qu'imaginer une situation qui pourrait donner lieu au jugement : aucune étoile n'est visible pour le moment.

186-187 PENSÉE & REPRÉSENTATION

La pensée nous fait souvent transgresser les bornes du représentable sans que nos jugements perdent pour autant toute matière. **Même si, comme il semble, l'homme n'est pas capable de penser sans représentations, leur rapport à l'objet de la pensée peut être extrinsèque, arbitraire et conventionnel.**

Que le contenu d'un mot ne soit pas représentable, il n'y a là aucune raison pour lui refuser une signification ou en exclure l'usage. L'illusion contraire vient de ce que nous considérons les mots isolément et cherchons la signification de chacun d'eux, et à procéder ainsi on prend une représentation pour la signification cherchée. Nous croyons qu'un mot n'a pas de contenu si aucune image interne n'y correspond. Mais il faut toujours faire porter l'attention sur une proposition complète. C'est là seulement que les mots veulent proprement dire quelque chose. Les images internes qui nous visitent alors n'ont pas besoin de correspondre aux éléments logiques du jugement. Il suffit qu'une proposition prise comme un tout ait un sens : ses parties reçoivent par là même un contenu.

200 LÉGITIMITÉ DE L'ENSEMBLE VIDE

Puisque rien ne tombe sous le concept : « non identique à soi-même », je pose par définition : 0 est le nombre cardinal qui appartient au concept « non identique à soi-même ».

On trouvera peut-être étrange que je parle ici d'un concept. On objectera que ce concept implique contradiction et que cela rappelle de vieilles connaissances, telles que le fer en bois et le cercle carré. Après tout, je pense qu'elles ne méritent pas le mal qu'on en dit. On ne prétendra pas que ces concepts soient utiles, mais ils ne peuvent pas nuire non plus si on prend soin de ne pas supposer qu'ils subsument quelque chose ; et cela n'est pas supposé dans le simple usage du concept. La contradiction éventuellement enveloppée dans un concept n'est pas toujours si évidente qu'elle apparaisse sans recherche ; encore faut-il d'abord prendre ce concept en considération et le traiter selon les lois logiques, comme n'importe quel autre. Or la logique et la rigueur des preuves exigent seulement qu'un concept ait des limites parfaitement définies, que pour tout objet on puisse dire s'il tombe sous ce concept ou non. Les concepts qui recèlent une contradiction comme « non identique à soi-même » satisfont entièrement à cette exigence ; quel que soit l'objet choisi, on sait qu'il ne tombe pas sous un tel concept. [...]

Pour définir le 0, j'aurais pu prendre n'importe quel concept sous lequel rien ne tombe. Mais il convenait de choisir un concept tel que cette particularité puisse en être démontrée par des moyens purement logiques ; ce à quoi le concept « non identique à soi-même » semble plus favorable, étant entendu que je donne à « identique » la définition leibnizienne introduite plus, définition purement logique.

203 INALTÉRABILITÉ DE LA VÉRITÉ

On confond souvent une définition objective avec le fait que certaines conditions subjectives doivent être satisfaites pour que nous soyons en mesure de formuler une définition, et que l'occasion nous en est donnée par des perceptions sensibles [...]. Ces conditions ne sauraient altérer le caractère *a priori* des propositions déduites. Il est requis, par exemple, que le cerveau, au moins pour ce que nous en savons, soit irrigué d'un sang normalement constitué et en quantité suffisante. Mais la vérité de notre dernière proposition n'en dépend pas. Elle demeure vraie quand ces conditions disparaissent ; et même si tous les êtres rationnels devaient sombrer tous ensemble dans un sommeil hivernal, elle ne serait pas abolie pendant ce temps, mais demeurerait inaltérée. **La vérité d'une proposition ne réside pas dans le fait qu'elle est pensée.**

226 LE NOMBRE EST UN SUBSTANTIF, LE NOMBRE-DE EST UN ATTRIBUT

Il est apparu que le nombre, dont traite l'arithmétique, ne devait pas être conçu comme un attribut dépendant, mais comme un substantif¹.

1. La différence est celle qui existe entre « bleu » et « la couleur du ciel ».

Nous commentons : la différence ici invoquée nous paraît correspondre à ce que Stella Baruk nomme les *nombre-de*, par opposition au nombre pur.