PHILOSOPHIE DE LA MATIÈRE

GERHARD GENTZEN

RECHERCHES SUR LA DÉDUCTION LOGIQUE

TRADUIT DE L'ALLEMAND PAR

R. Feys et J. Ladrière

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

RECHERCHES SUR
LA DÉDUCTION LOGIQUE

PHILOSOPHIE DE LA MATIÈRE
Collection dirigée par Raymond BAYER
Professeur de Philosophie générale à la Sorbonne

RECHERCHES SUR LA DÉDUCTION LOGIQUE

(Untersuchungen über das logische Schliessen)

par

GERHARD GENTZEN

TRADUCTION ET COMMENTAIRE
par
Robert FEYS et Jean LADRIÈRE

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, Boulevard Saint-Germain, Paris

1955

DÉPOT LÉGAL
1re édition . . . . 2e trimestre 1955

PRÉFACE

Le privilège d'une traduction avec commentaire paraît à bon droit réservé aux œuvres classiques. Bien que le mémoire de Gentzen n'ait que vingt ans — il a paru dans la Mathematische Zeitschrift *de 1934 (t. 39), pp. 176-210 et 405-431 — il a le caractère d'une œuvre classique, parce qu'il a renouvelé un sujet apparemment épuisé, en recourant à des méthodes particulièrement naturelles, dont la fécondité technique était restée inaperçue.*

Comment renouveler, aurait-on pu demander vers 1930, des sujets aussi rebattus que la logique des propositions et la logique des quantificateurs? Et d'abord, comment définir plus simplement les fonctions de propositions que comme fonctions de vérité? Mais précisément la méthode axiomatique n'entend d'habitude pas épuiser par une définition tout ce que comporte une opération formelle, donc un jeu d'idées. Même en fait de méthode axiomatique, on semblait arrivé à un maximum de simplicité lorsqu'on déduisait la logique des propositions à partir d'un axiome unique et celle des quantificateurs depuis les présupposés très simples de Hilbert. Mais une telle recherche des présuppositions les plus brèves ne tente-t-elle pas, comme les définitions, de condenser en une seule formule le jeu inépuisable des déductions?

Gentzen a donc adopté une autre voie; il semble l'avoir fait d'instinct, en se laissant guider par des préférences de technicien. Il a relevé l'usage fréquent et tout naturel, en mathématiques, de raisonnements à partir d'une supposition (ces raisonnements procèdent, en somme, comme les preuves ex suppositione *des Anciens). Pour formaliser ces raisonnements, il devra introduire l'assertion*

« Ceci est vrai sous telle supposition » comme élément formalisé de ses systèmes. Il le fait sous deux formes : implicitement dans ses systèmes N, *explicitement dans ses systèmes* L. *Lorsque* $\mathfrak{B}$ *est vrai en supposant* $\mathfrak{A}$, *on peut poser que* $\mathfrak{A}$ *implique* $\mathfrak{B}$. *Cette règle ne définit pas l'implication par un équivalent qui lui est substituable; elle permet d'introduire l'implication dès que la déduction est possible. La grande nouveauté des méthodes* L *est cette introduction de l'assertion sous supposition, ensuite l'énoncé des règles de son maniement, qui, dans les systèmes* L, *revêtiront la forme explicite de « figures de structure ». La méthode* L *« classique » ou méthode* LK *introduit en outre une sorte de duale de l'assertion sous supposition, l'assertion de conséquences alternatives (« De ceci découle telle conséquence ou telle autre »), avec des figures de structure appropriées.*

Nous n'entrerons pas ici dans le détail des figures qui régiront les opérations logiques autres que l'enchaînement par implication. Malgré les subtilités techniques qu'elles comportent, ces figures nous ramènent en général aux schémas de déduction déjà usités par Hilbert et son école; on peut toutefois dégager des formes de calcul où presque aucun de ces schémas n'intervient. D'ailleurs, nous n'avons pas affaire à des postulats compliqués dont la signification n'apparaîtrait pas à première vue. L'ensemble des schémas est complexe, mais chaque schéma, en lui-même, a un sens clair (les complications du système L *expriment simplement que le schéma vaut sous supposition et avec conséquences alternatives).*

Ceci soit dit à titre d'introduction sommaire; mais aucune explication préalable ne dispensera le lecteur de s'initier aux postulats par la pratique des méthodes, en refaisant les calculs ou en cherchant par lui-même à démontrer des théorèmes connus. Ses essais le conduiront à une agréable constatation. Les déductions axiomatiques ordinaires paraissent souvent artificielles; nous manquons de directives pour les construire. Ici, une démonstration se trouve fort aisément, du fait qu'un seul schéma est utilisable pour introduire (ou éliminer) un signe d'opération donné. Et comme le sens des schémas est intuitivement clair, il en est de même pour la démonstration entière; celle-ci est aisée, intuitive, « naturelle ».

Or, premier résultat inattendu — qui supposerait de l'inattendu en logique des propositions et quantificateurs? — l'application des schémas « naturels » N permet de démontrer les théorèmes de la logique intuitionniste et pas ceux de la logique classique. Pour la démonstration de ceux-ci, le tiers-exclu doit être introduit comme axiome supplémentaire; c'est en fait le seul postulat qui ne soit pas un schéma de déduction. Eux aussi, les schémas L conduiront aux seuls théorèmes intuitionnistes si on ne raisonne que sur des « assertions sous suppositions » et pas sur des assertions à conséquences alternatives. Donc en un certain sens, au sens où la logique se bornerait à dégager les conséquences enfermées dans des suppositions, c'est la logique intuitionniste qui est la plus « naturelle », alors que longtemps on l'a crue entachée de restrictions artificielles qui y créeraient des contradictions latentes.

Deuxième résultat paradoxal, celui du « théorème principal ». Si nous procédons selon les schémas des logiques L, toutes les thèses démontrables peuvent être démontrées sans recours à des éliminations (nous ne considérons pas comme élimination la « contraction » de deux suppositions ou conséquences identiques en une seule). Dans un raisonnement par suppositions, il est donc possible de démontrer tous les théorèmes de la logique en les « construisant » par complication successive d'une tautologie initiale, sans jamais éliminer un moyen terme par un syllogisme, sans même devoir user du modus ponens.

Comment interpréter l'idée d'implication, à la lumière de ces deux résultats et de leurs corollaires? Ne serait-ce qu'en vue de l'interprétation, il serait indispensable de considérer les démonstrations dans leur détail. Un système d'axiomes ne révèle son interprétation que par les conséquences qui en résultent (ou par les métathéorèmes qui permettent de les prévoir). Les résultats de Gentzen sont décevants pour la logique scolaire, paisible gardienne de principes du bon sens. Mais ils sont stimulants pour le philosophe, *qui a toujours cru à une certaine fécondité des déductions logiques. Cette fécondité suppose des possibilités constructives indéfinies, possibilités que l'intuition fait entrevoir et qu'une technique de raisonnement comme celle de Gentzen rend explicites.*

Mentionnons deux travaux récents qui présentent des méthodes ou démonstrations de Gentzen sous une forme neuve. Dans les paragraphes 27-31 de ses Methods of Logic *— avec plus de brièveté technique dans un article* On Natural Deduction *— Quine montre comment simplifier les règles de généralisation à condition de « marquer » les variables en question. Curry, d'autre part, dans* A Theory of Formal Deducibility, *interprète les assertions sous suppositions comme des assertions « épithéoriques »; il construit les systèmes* L *en plusieurs étapes : logiques sans négation ni quantification — ensuite logiques avec quantificateurs — enfin logiques avec négation intuitionniste ou classique; le théorème principal est démontré pour chacune des étapes, ce qui en allège la démonstration.*

Curry applique les méthodes L *à divers systèmes non envisagés par Gentzen, notamment à une logique des modalités correspondant au S4 de Lewis.*

Venons-en à la disposition de notre travail. Il comporte une traduction et un commentaire fait de « petites notes » au bas des pages et de « grandes notes » hors du texte.

Il était nécessaire de reproduire le texte en entier pour y accrocher tout l'appareil des notes. Nous remercions Mme Mélanie Gentzen de nous avoir gracieusement autorisés à traduire l'œuvre géniale de son fils, décédé en 1945; nous remercions également la maison Springer, éditrice du Mathematische Zeitschrift, *qui a de même accordé son assentiment à la traduction. La traduction suit le texte jusque dans sa disposition typographique.*

Le style de Gentzen est clair, mais technique et concis; il ne s'attarde pas à de longs préambules; il se répète très peu; il n'entreprend pas de synthèses récapitulatives. Le mémoire est destiné à être étudié la plume à la main, à la manière d'un mémoire de *mathématiques. Notre commentaire voudrait le rendre intelligible à la lecture, ou du moins sans longs calculs.*

*Gentzen n'a qu'une dizaine de « petites notes » (surtout des références) au bas des pages, nous en avons ajouté un assez grand nombre (marquées *); leur rôle est simplement de rappeler des points de méthode ou de terminologie.*

Les « grandes notes » hors du texte ont un double rôle. Les unes de (de A à F) initient le lecteur aux méthodes N *et* L *soit en les lui présentant intuitivement, soit en les comparant aux « variantes » proposées par divers continuateurs de Gentzen, variantes assez simples et qui ne nous éloignent guère du texte que nous commentons. (Nous n'avons pas consacré de « grandes notes » aux travaux de Quine et Curry, malgré leur intérêt. Ces notes auraient pris les proportions de véritables chapitres et n'auraient guère aidé à la simple compréhension du mémoire original.) D'autres grandes notes exposent la marche des grandes démonstrations de Gentzen, qui constituent le cœur de l'ouvrage — preuves parfaitement correctes, mais fastidieusement complexes; quelques pages d'introduction ou d'analyse suffiront pour alléger l'effort qu'elles exigent du lecteur. Ce sont la démonstration du théorème fondamental (notes G, H, I) et la démonstration d'équivalence entre les calculs* L, N *et* « H » *(note K).*

La traduction, les petites notes ainsi que les grandes notes E, G, H, I sont de Jean Ladrière; le soussigné a rédigé les autres grandes notes. L'ouvrage a été préparé pour l'impression par Mme L. De Permentier, collaboratrice du Centre belge de Recherches de Logique.

Nous remercions les Presses Universitaires de France d'avoir accueilli ce texte dans leur collection; nous voulons dire notre amicale gratitude à M. Raymond Bayer, qui nous a encouragés à entreprendre ce travail et qui, au moment même où il relevait d'une grave maladie, s'est employé à aplanir les difficultés de publication.

Robert FEYS.

NOTE A*.

LES MÉTHODES DE DÉDUCTION NATURELLE

Une science ne progresse pas seulement lorsqu'elle étend ses applications à des réalités de plus en plus compliquées; ses développements vraiment féconds portent sur ses fondements mêmes; ils font appel à des notions apparemment familières, mais qu'il faut une étincelle d'originalité, touchant au génie, pour mettre en valeur.

A ses premiers débuts, la logique formalisée ne calculait pas selon les méthodes dont le raisonnement, et même le raisonnement scientifique, avait usé « naturellement » durant des siècles. Mais depuis la fin du XIXe siècle, un certain parallélisme assez satisfaisant paraissait établi entre logique formalisée et raisonnement naturel; toutefois, certains raisonnements « naturels » n'avaient pas été formalisés. En les formalisant dans sa thèse doctorale de 1934, Gentzen n'a pas seulement créé des méthodes vraiment neuves de déduction formalisée; ces méthodes l'ont d'emblée conduit à des démonstrations élégantes et à des points de vue parfois déconcertants.

Gentzen a élaboré deux calculs ou plutôt deux groupes de calculs. Les calculs *N* (auxquels il réserve le nom de « calculs de déduction naturelle ») usent d' « assertions avec supposition » (Jaśkowski, mettant en œuvre une suggestion de Łukasiewicz, avait, en 1934, élaboré une méthode analogue).

Les calculs *L*, qui usent d' « assertions de conséquence », empruntent à Hertz (1922-1929) la notation des séquences et les règles exprimées par les schémas de *Strukturfiguren*, mais Hertz n'avait pas énoncé de schémas analogues aux autres schémas de Gentzen.

Consignées dans une thèse d'un abord assez difficile, les méthodes de Gentzen ont été utilisées par leur auteur dans des travaux ultérieurs (1936-1943). Bernays, dans un cours autographié de Princeton (1936), use d'une forme particulière de calcul *NK*. Une note de Johansson (1936) adapte les méthodes de Gentzen au « calcul minimal », une note de Curry (1939) donne une preuve nouvelle de l'équivalence entre le calcul *LJ* et la logique des intuitionnistes. Nous avons donné un exposé d'ensemble des méthodes de Gentzen dans notre *Logistiek* (citée *Log*), §§ 9, 10 et 16, pp. 230-253 et 283-291. Une série récente de travaux de Popper procède selon des méthodes analogues à celles des calculs *N*.

RECHERCHES SUR LA DÉDUCTION LOGIQUE (*)

Aperçu d'ensemble.

Les recherches qui suivent se rapportent au domaine d e l a l o g i q u e d e s p r é d i c a t s [appelée par H.-A. (1) « calcul fonctionnel restreint »]. Celle-ci embrasse des types de raisonnement qui sont utilisés couramment dans toutes les parties de la mathématique. Ce qu'il faut encore y ajouter, ce sont des axiomes et des modes de raisonnement qui appartiennent en propre aux branches particulières de la mathématique. Par exemple, dans la théorie élémentaire des nombres, les axiomes des nombres naturels, de l'addition, de la multiplication et de l'élévation aux puissances, ainsi que le principe de l'induction complete; en géométrie, les axiomes géométriques.

A côté de la logique c l a s s i q u e, je traiterai également de la logique i n t u i t i o n n i s t e, sous l'aspect formalisé que lui a donné, par exemple, Heyting (2).

(*) Ce travail, y compris la seconde partie, a été reçu comme dissertation inaugurale par la Faculté de Mathématiques et de Sciences Naturelles de l'Université de Göttingen.

(1) HILBERT-ACKERMANN. *Grundzüge der theoretischen Logik.* Dans la suite, on désignera toujours cet ouvrage par le sigle H.-A.

(2) A. HEYTING. Die Formale Regeln der intuitionistischen Logik und

Les présentes recherches sur les logiques des prédicats classique et intuitionniste comportent essentiellement deux parties dont l'interdépendance n'est qu'assez lointaine.

1. Mon premier point de vue fut le suivant. La formalisation du raisonnement logique, telle qu'elle a été développée en particulier par Frege, Russell et Hilbert, est relativement fort éloignée du mode de raisonnement qui est utilisé en réalité dans les démonstrations mathématiques. On vise de la sorte à obtenir certains avantages formels appréciables. J'ai voulu d'abord construire un formalisme qui soit le plus près possible du raisonnement réel. C'est ainsi que j'ai obtenu un « Calcul de la déduction naturelle » (« *NJ* » pour la logique intuitionniste des prédicats, « *NK* » pour la logique classique des prédicats).

Ce calcul s'est ensuite révélé posséder certaines propriétés particulières; il occupe notamment une position spéciale quant au « principe du tiers exclu » rejeté par les intuitionnistes.

Je développerai le calcul de la déduction naturelle dans la section II du présent mémoire, et j'y ajouterai quelques considérations supplémentaires.

2. Un examen plus approfondi des propriétés particulières du calcul naturel m'a conduit finalement à un théorème très général que j'appellerai dans la suite « le théorème fondamental ».

Le théorème fondamental (3) affirme que toute démonstration purement logique peut se ramener à une forme normale déterminée, qui n'est d'ailleurs nullement univoque. On peut formuler les propriétés les plus essentielles d'une telle démonstration normale à peu près de la façon suivante : elle ne comporte pas de détours. On n'y introduit aucun concept qui ne soit pas

Mathematik, *Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.*, phys.-math. Kl., 1930, pp. 42-65.

(3) Herbrand a déjà démontré, en suivant une voie toute différente, un cas particulier important du théorème fondamental. Voir des indications plus précises à ce sujet section IV, § 2.

contenu dans son résultat final et qui, par conséquent, ne doive pas nécessairement être utilisé pour obtenir ce résultat.

Le théorème fondamental vaut aussi bien pour la logique classique des prédicats que pour la logique intuitionniste des prédicats.

Pour arriver à l'énoncer et à le démontrer sous une forme commode, j'ai dû avoir recours à un calcul logique spécialement adapté à cet objectif. Le calcul naturel s'est en effet révélé impropre à ce genre de considérations. Sans doute possède-t-il déjà les propriétés essentielles qui garantissent la solidité du théorème fondamental, mais seulement sous sa forme intuitionniste, étant donné que le principe du tiers exclu, comme on l'a déjà fait remarquer, occupe une position spéciale quant aux propriétés en question.

Dans la section III du présent mémoire, je développerai donc un nouveau calcul de la déduction logique, qui possédera toutes les propriétés voulues, aussi bien sous sa forme intuitionniste que sous sa forme classique. (« *LJ* » pour la logique des prédicats intuitionniste, « *LK* » pour la logique des prédicats classique.) Le théorème fondamental sera alors énoncé et démontré sur la base de ce calcul.

Le théorème fondamental donne lieu à de multiples applications. A titre d'exemple, je donnerai, dans la section IV, un procédé de décision pour la logique des propositions intuitionniste (IV, § 1), ainsi qu'une nouvelle démonstration de non-contradiction pour l'arithmétique classique, non compris le principe d'induction complète (IV, § 3).

Les sections III et IV peuvent être lues indépendamment de la section II.

3. La section I contient une nomenclature des procédés de notation utilisés dans ce mémoire.

Dans la section V, je démontre l'équivalence entre mes calculs logiques *NJ*, *NK* et *LJ*, *LK*, et un calcul adapté aux formalismes de Russell, Hilbert et Heyting (et facilement comparable à ceux-ci). (« *LHJ* » pour la logique des prédicats intuitionniste, « *LHK* » pour la logique des prédicats classique.)

4. La première partie du présent mémoire ne comporte que les sections I à III, les sections IV et V suivent dans ma seconde partie.

Section I.

Nomenclature des notations.

Aux concepts « objet », « fonction », « prédicat », « proposition », « théorème », « axiome », « démonstration », « règle de déduction », etc., utilisés en logique et en mathématique, correspondent, dans la formalisation de ces disciplines, certains signes ou certaines combinaisons de signes.

Nous les répartissons en :

1. *Signes.*

2. *Expressions :* ce sont des suites finies de signes.

3. *Figures :* ce sont des ensembles finis de signes, ordonnés d'une manière ou d'une autre.

Les signes comptent comme des expressions et des figures particulières, les expressions comme des figures particulières.

Dans le présent travail, nous considérerons des signes, des expressions et des figures des espèces suivantes :

1. Signes :

Ceux-ci se répartissent en signes pour quelque chose de déterminé et en variables.

1.1. Signes pour quelque chose de déterminé.

Signes pour des individus déterminés : 1, 2, 3, ... (1*).

Signes pour des fonctions déterminées : $+$, $-$, . .

(1*) Gentzen utilise l'expression « objets déterminés ».
Il est plus conforme à l'usage courant de parler d'individus. Voir à ce sujet la note (3*).

Signes pour des propositions déterminées :

$\curlyvee$: (« la proposition vraie »),

$\curlywedge$: (« la proposition fausse »).

Signes pour des prédicats déterminés : $=$, $<$.

Signes logiques (4) *:*

& : « et »,

$\vee$: « ou »,

$\supset$: « de ... suit »,

$\supset\subset$: « est équivalent »,

$\neg$: « non »,

$\forall$: « pour tout »,

$\exists$: « il y a un ».

Nous utilisons aussi les dénominations : signe de conjonction, signe de disjonction, signe d'implication, signe d'équivalence, signe de négation, quantificateur universel, quantificateur particulier (2*).

Signes auxiliaires :), (, $\rightarrow$.

1.2. Variables :

Variables individuelles (3*). — Nous les partageons en variables

(4) Nous reprenons les signes $\vee$, $\supset$, $\exists$ à Russell. Les signes russelliens pour « et », « équivalent », « non », « tout », à savoir : $\bullet$, $\equiv$, $\sim$, ( ), ont déjà été utilisés en mathématiques dans des significations différentes. C'est pourquoi nous prenons le signe hilbertien &; quant aux symboles de Hilbert pour le signe « équivalence », le signe « tout » et le signe « non », : $\sim$, ( ), —, ils sont aussi couramment employés déjà dans d'autres significations. De plus, son signe « non » introduit une irrégularité dans l'ordonnance linéaire des signes, ce qui, à certains égards, est désagréable. C'est pourquoi nous utilisons pour l'équivalence et la négation les signes de Heyting et pour le signe « tout » un signe qui correspond au $\exists$.

(2*) Gentzen utilise les expressions : signe « et », signe « ou », signe « suit », signe « équivalence », signe « non », signe « tout », signe « il-y-a ». Les expressions proposées ci-dessus à titre de traduction sont un peu moins condensées, mais pas au point d'alourdir le texte : elles se conforment à l'usage courant.

(3*) Gentzen utilise l'expression *Gegenstandsvariable*, qu'il faudrait traduire par : variable d'objets.

Comme aucune confusion n'est à craindre, on a préféré la traduction : variables individuelles — qui a l'avantage d'être symétrique à l'expression « variables propositionnelles ».

individuelles *libres :* a, b, c, $\ldots$, m et en variables individuelles *liées :* n, $\ldots$, x, y, z.

Variables propositionnelles : A, B, C, $\ldots$.

On doit pouvoir disposer d'un nombre de variables aussi élevé qu'on le veut; lorsque l'alphabet ne suffit pas, on ajoute des indices numériques, par exemple a_7, c_3.

1.3. Les majuscules allemandes et grecques nous serviront de « signes syntaxiques (4*) », ce ne sont donc pas des signes de la logique formalisée, mais des variables qui s'introduisent dans les considérations que nous faisons sur cette logique. Leur signification sera explicitée chaque fois qu'on les utilisera.

2. Expressions.

2.1. Concept d'expression propositionnelle, appelée d'un mot *formule* (défini inductivement) :

(Le concept de formule sera, par ailleurs, utilisé ordinairement dans un sens plus général, aussi pourrait-on désigner le cas particulier qui se trouve défini ci-dessous par l'expression « formule purement logique ».)

2.11. Un signe pour une proposition déterminée est une formule. Tels sont les signes $\vee$ et $\wedge$.

Une variable propositionnelle suivie d'un certain nombre (éventuellement nul) de variables individuelles libres est une formule. Par exemple $Abab$.

Les variables individuelles s'appellent les *arguments* des variables propositionnelles.

Nous appelons ainsi les formules des deux types ci-dessus *formules élémentaires.*

2.12. Si $\mathfrak{A}$ est une formule, $\urcorner\, \mathfrak{A}$ est également une formule.

Si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des formules,

(4*) Gentzen utilise l'expression *Mitteilungszeichen,* qu'il faudrait traduire par : « signes de communication ». Il a paru préférable de se conformer à l'usage devenu courant et d'utiliser l'expression « variables syntaxiques ». Bien que Gentzen, dans ce mémoire, ne distingue pas expressément le système lui-même de sa syntaxe, cette distinction est constamment « présupposée ».

$$\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},$$

sont également des formules.

(Nous n'introduisons pas le signe $\supset\subset$ dans notre exposé : il est en effet superflu, étant donné que $\mathfrak{A} \supset\subset \mathfrak{B}$ peut être considéré comme une abréviation de :

$$(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \qquad \& \qquad (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}).)$$

2.13. Une formule, dans laquelle ne figure pas la variable individuelle liée $\mathfrak{x}$, donne une nouvelle formule si on la fait précéder de $\forall\mathfrak{x}$ ou de $\exists\mathfrak{x}$: on doit en même temps remplacer l'une des variables individuelles libres qui figurent dans la formule, en certaines de ses occurrences, par $\mathfrak{x}$.

2.14. On utilise des parenthèses de sorte que la structure d'une formule ne puisse être saisie de façon équivoque. Exemple d'une formule :

$$\exists x\, (((\neg\, A bxa) \vee Bx) \supset (\forall z\, (A \mathbin{\&} B))).$$

Grâce à des conventions particulières, on peut diminuer le nombre de parenthèses; nous y renonçons cependant (avec une exception, voir 2.4), étant donné que nous n'aurons pas à écrire beaucoup de formules.

2.2. Nous appelons *degré d'une formule* le nombre des signes logiques qui y figurent. (Une formule élémentaire est donc de degré 0.)

Nous appelons *signe terminal* (5*) d'une formule qui n'est pas une formule élémentaire le signe logique qui lui est ajouté en dernier lieu dans sa construction selon 2.12 et 2.13.

Nous appelons *formules partielles d'une formule* les formules qui peuvent intervenir dans la construction de cette formule selon 2.12 et 2.13, y compris cette formule elle-même.

Exemple : les formules partielles de $A \mathbin{\&} \forall x\, Bxa$ sont A,

(5*) Nous traduisons par « signe terminal » l'expression *äusserste Zeichen*, de Gentzen.

$\forall x\, Bxa$, $A \;\&\; \forall x\, Bxa$, ainsi que toutes les formules de la forme Baa, où a représente une variable individuelle libre quelconque (cette variable peut être par exemple aussi a). Le degré de $A \;\&\; \forall x\, Bxa$ est 2, le signe terminal est &.

2. 3. Concept de *séquence.*

(Ce concept ne sera utilisé qu'à partir de la section III et c'est là également que l'on expliquera pourquoi il a été introduit.)

Une séquence est une expression de la forme

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu,$$

où $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ peuvent représenter des formules quelconques. (Le $\rightarrow$, tout comme les virgules, n'est qu'un signe auxiliaire et non un signe logique.)

Les formules $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ forment l'*antécédent*, les formules $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ le *conséquent* de la séquence. Les deux expressions peuvent être vides.

2. 4. La séquence $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ possède, d'un point de vue intuitif, exactement la même signification que la formule

$$(\mathfrak{A}_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu).$$

(Par $\mathfrak{A}_1 \;\&\; \mathfrak{A}_2 \;\&\; \mathfrak{A}_3$ nous entendons : $(\mathfrak{A}_1 \;\&\; \mathfrak{A}_2) \;\&\; \mathfrak{A}_3$, de même pour $\vee$.)

Si l'antécédent est vide, la séquence se réduit tout simplement à la formule :

$$\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu.$$

Si le conséquent est vide, la séquence a la même signification que la formule :

$$\neg (\mathfrak{A}_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \mathfrak{A}_\mu),$$

ou :

$$(\mathfrak{A}_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \mathfrak{A}_\mu) \supset \wedge.$$

Si l'antécédent et le conséquent sont tous deux vides, la séquence a la même signification que $\wedge$, donc qu'une proposition fausse.

Inversement, à toute formule correspond une séquence équivalente, par exemple celle dont l'antécédent est vide et dont le conséquent ne contient que la formule dont il s'agit.

Nous appelons les formules qui font partie d'une séquence : *S-formules* (c'est-à-dire : formules de séquence). Nous voulons indiquer par là que nous ne considérons pas ces formules en elles-mêmes, mais en tant qu'elles figurent dans la séquence. Ainsi nous dirons, par exemple :

« Telle formule figure comme S-formule en plusieurs occurrences dans telle séquence »,

ce que nous pourrions également exprimer de la façon suivante :

« Plusieurs S-formules différentes (ce qui signifie simplement : figurant en des occurrences différentes dans la séquence) sont formellement identiques. »

3. F i g u r e s.

Nous utilisons des figures de déduction et des figures de démonstration (6*).

Ces figures sont constituées de formules ou de séquences : dans ce qui suit (3.1 à 3.3, 3.5) nous ne parlerons que de formules, mais tout ce que nous dirons s'appliquera de façon analogue aux séquences : il suffit de remplacer partout le mot « formule » par le mot « séquence ».

3.1. *Une figure de déduction* peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu}{\mathfrak{B}} \qquad (\nu \geqq 1);$$

où $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}$ sont des formules. $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$ s'appellent les *formules supérieures*, $\mathfrak{B}$ s'appelle la *formule inférieure* de la figure.

(Il faut comprendre en un sens tout à fait équivalent les concepts de séquence supérieure et de séquence inférieure dans

(6*) Ces deux expressions ne peuvent se distinguer avec précision d'un point de vue intuitif.

La suite du texte en donne des définitions (descriptives) précises. La « déduction » apparaît comme une étape élémentaire de « démonstration »; passage immédiat d'une formule à une autre. On aurait pu utiliser, au lieu de « figure de déduction », l'expression plus explicite mais plus lourde : « figure d'inférence immédiate ».

une figure de déduction qui est constituée de séquences.)

Nous n'aurons à traiter que de figures de déduction particulière, qui seront données dans nos différents calculs.

3.2. Une figure de démonstration, plus brièvement une *dérivation* (7*) consiste en un certain nombre de formules (au moins une) qui forment entre elles des figures de déduction de la façon suivante. Toute formule est formule inférieure d'une figure de déduction au plus; toute formule (sauf une seule, la *formule finale*) est formule supérieure d'une figure de déduction au moins; et le système des figures de déduction est non circulaire, c'est-à-dire que la dérivation ne comporte aucun cycle de formules (aucune série au dernier membre de laquelle succède de nouveau le premier), dont chacune soit formule supérieure dans une figure de déduction, qui ait la formule suivante de la suite pour formule inférieure.

3.3. Les formules d'une dérivation qui ne sont pas formules inférieures d'une figure de déduction s'appellent *formules initiales* de la dérivation.

Une dérivation est dite en *ordre généalogique* (8*) lorsque chacune de ses formules est formule inférieure d'*une* figure de déduction au plus.

Toutes les formules, à part la formule finale, sont donc alors formules supérieures d'une figure de déduction et d'une seule, exactement.

(7*) Il faut distinguer le concept de « dérivation » du concept de « démonstration ».

Une « démonstration » est une opération intuitive, une « dérivation » au contraire est une certaine figure, qui est le correspondant formel d'une « démonstration ».

Tous les termes techniques introduits par Gentzen désignent des éléments de son calcul, et donc des entités purement formelles, qu'il faut bien se garder de confondre avec les réalités intuitives qui leur correspondent et qu'elles représentent.

Ainsi une « proposition » est un certain assemblage de signes qui représente un certain énoncé, etc.

(8*) Plus précisément : en forme d'arbre généalogique : *Stammbaumförmig*. Mais la traduction proposée est un peu plus condensée.

Nous n'aurons à traiter que de dérivations en ordre généalogique.

Nous appelons *H-formules* (c'est-à-dire formules de dérivation) (9*) les formules qui interviennent dans une dérivation conformément aux conditions énoncées ci-dessus. Nous voulons indiquer par là que nous ne considérons pas seulement ces formules en tant que telles, mais en tant qu'elles figurent dans la dérivation.

En ce sens, nous utiliserons par exemple des expressions comme :

« Telle formule figure comme H-formule dans telle dérivation. »

« Deux H-formules différentes (ce qui signifie simplement : figurant à des endroits différents dans la dérivation) sont formellement identiques, c'est-à-dire : sont identiques à la même formule. »

« $\mathfrak{A}$ est la même H-formule que $\mathfrak{B}$ » signifie donc non seulement que les formules $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont identiques quant à la forme, mais de plus qu'elles occupent la même place dans la dérivation. Pour désigner l'identité quant à la forme, indépendamment de la place occupée, nous utilisons l'expression « formellement identique ».

Par contre, en ce qui concerne les variables individuelles, nous n'introduirons pas de désignation spéciale pour marquer leur liaison avec une occurrence déterminée dans une formule. Nous dirons donc par exemple :

« La même variable individuelle figure dans deux H-formules différentes. »

3. 4. Nous appelons les figures de déduction d'une dérivation : *figures de H-déduction* (c'est-à-dire : figures de déduction dans une dérivation) (10*).

(9*) En allemand : *Herleitungsformeln.*
Pour garder la correspondance, il faudrait traduire : D-formule. Mais nous préférons nous en tenir systématiquement à la terminologie de Gentzen.

(10*) Même remarque qu'en 3. 3.

Dans une dérivation qui se compose de séquences, nous appelons *H-S-formules* (c'est-à-dire formules de séquence dans une dérivation) (11*) les *S*-formules des *H*-séquences.

3.5. Une chaîne (12*) dans une dérivation est (selon Hilbert) une suite de *H*-formules dont la première est une formule initiale et la dernière la formule finale, et dont chacune (à part la dernière) est formule supérieure d'une figure de *H*-déduction, dont la formule inférieure est la formule suivante dans la chaîne.

Nous disons : « Une *H*-formule se trouve *au-dessus* (ou *en dessous*) d'une autre *H*-formule. » s'il existe une chaîne dans laquelle la première *H*-formule figure avant (ou après) la seconde.

Nous considérons ici le mode de figuration qui représente la dérivation comme figure en ordre généalogique, avec les formules initiales au-dessus et la formule finale en-dessous. (On en trouvera des exemples dans la section III, § 4.)

Nous disons par ailleurs : « Une figure de *H*-déduction se trouve au-dessus (ou en dessous) d'une *H*-formule », lorsque toutes les formules de la figure de déduction se trouvent au-dessus (ou en dessous) de cette formule (13*).

Nous appelons « une dérivation de $\mathfrak{A}$ » une dérivation dont la formule finale est $\mathfrak{A}$.

Les formules initiales d'une dérivation peuvent être des *formules fondamentales* ou des *formules-hypothèses;* nous en parlerons de façon plus précise à propos de nos différents calculs.

(11*) Même remarque qu'en 3. 3.

(12*) La traduction littérale donnerait : « fil »; le terme de « chaîne » fournit peut-être une correspondance intuitive plus exacte : il s'agit d'une suite linéaire d'éléments liés par concaténation. D'ailleurs, l'emploi de ce terme est justifié par le sens qu'on lui donne dans la théorie des structures.

(13*) Pour ne pas alourdir inutilement le texte, nous dirons aussi : « une *H*-formule *surmonte* une autre *H*-formule » lorsqu'elle se trouve « au-dessus » de cette autre formule. Nous dirons de même : « une figure de *H*-déduction *surmonte* une *H*-formule » lorsqu'elle se trouve « au-dessus » de cette formule, et nous dirons : « une *H*-formule *surmonte* une figure de *H*-déduction » lorsque la figure de déduction se trouve « en dessous » de cette formule.

Section II.

Le calcul de la déduction naturelle.

§ 1.

Exemples de déduction naturelle.

Nous voulons édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques.

Nous montrerons d'abord, par quelques exemples, comment le raisonnement réel se déroule; dans ce but, nous examinons trois « formules valides » et nous essayons d'en montrer la validité de la façon la plus naturelle possible.

1.1. Premier exemple.

$$(X \vee (Y \,\&\, Z)) \supset ((X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z))$$

est une formule vraie (H.-A., p. 28, formule 19).

On argumentera de la façon suivante. Supposons que X soit valide ou bien que $Y \,\&\, Z$ soit valide.

Nous distinguons les deux cas : 1. X est valide; 2. $Y \,\&\, Z$ est valide.

Dans le premier cas, $X \vee Y$ est également valide, de même que $X \vee Z$, et par conséquent $(X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)$ est valide.

Dans le second cas, $Y \,\&\, Z$ est valide : Y est donc valide et Z également. Si on a Y, on a $X \vee Y$, et si on a Z, on a $X \vee Z$. Donc ici également $(X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)$ est valide.

Cette formule se trouve ainsi dérivée de $X \vee (Y \,\&\, Z)$, c'est-à-dire que l'on a :

$$(X \vee (Y \,\&\, Z)) \supset ((X \vee Y) \,\&\, (X \vee Z)).$$

1.2. Second exemple.

$$(\exists x \, \forall y \, Fxy) \supset (\forall y \, \exists x \, Fxy).$$

(H.-A., p. 60, formule 36.)

On argumentera de la façon suivante : supposons qu'il y ait un x tel que, pour tout y, Fxy soit valide. Soit a un tel x. On a donc, pour tout y : Fay. Soit maintenant b un individu quelconque. On a : Fab. Il y a donc un x, à savoir a, tel que Fxb soit vrai. b était quelconque, notre conclusion est donc valable pour tous les individus, c'est-à-dire : pour tout y il y a un x, tel que Fxy soit vrai. Nous obtenons ainsi notre formule.

1.3. Troisième exemple.

$$(\neg \, \exists x \, Fx) \supset (\forall y \, \neg \, Fy)$$

doit être reconnu pour valide d'un point de vue intuitionniste.

On raisonnera comme suit : supposons qu'il n'y ait aucun x pour lequel Fx soit valide. On doit en tirer : pour tout y, $\neg \, Fy$ est valide. Soit a un individu quelconque pour lequel Fa n'est pas valide. Il s'ensuit : il y a un x, pour lequel Fx est valide; a est précisément un tel x. Ceci contredit l'hypothèse :

$$\neg \, \exists x \, Fx.$$

Nous avons donc une contradiction, ce qui montre que Fa ne peut être valide. Or, a était absolument quelconque. On a donc : pour tout y, $\neg \, Fy$ est valide. Ce qu'il fallait démontrer.

Il s'agit maintenant d'intégrer dans un calcul défini de façon exacte les démonstrations du type de celles qui ont été développées dans ces trois exemples. (Au § 4, on montrera comment ces exemples se présentent dans ce calcul.)

§ 2.

Élaboration du calcul NJ.

2. 1. Nous devons donner maintenant un calcul pour les dérivations intuitionnistes « naturelles », de formules vraies. La limitation du raisonnement intuitionniste n'est que provisoire : nous en exposerons les motifs dans la suite, et nous montrerons comment élargir notre calcul de façon à rejoindre le raisonnement classique (en y ajoutant le principe du tiers exclu) (voir § 5).

La différence extérieure la plus essentielle qui distingue les *NJ*-dérivations des dérivations que l'on peut effectuer dans les systèmes de Russell, Hilbert et Heyting est la suivante : dans ces systèmes, on dérive les formules vraies d'une série de « formules logiques fondamentales » au moyen d'un nombre réduit de procédés de déduction; la déduction naturelle, par contre, ne part pas, en général, de propositions logiques fondamentales, mais d'hypothèses (voir les exemples du § 1), auxquelles viennent se rattacher des déductions logiques. Grâce à une déduction ultérieure, le résultat est alors rendu à nouveau indépendant des hypothèses.

Nous désignons les calculs du premier genre sous le nom de calculs *logistiques*.

2. 2. Après cette remarque préliminaire, nous définissons le concept de *NJ*-dérivation de la façon suivante.

(Exemple au § 4.)

Une *NJ-dérivation* est constituée de formules en ordre généalogique (I, 3. 3).

(En exigeant que les formules soient en ordre généalogique, nous nous écartons quelque peu de l'analogie avec le raisonnement réel. Car : 1° dans le raisonnement réel, par suite de la linéarité de la pensée, on a nécessairement une suite linéaire des propositions; et 2° dans le raisonnement réel, on doit ordinairement réutiliser plusieurs fois un résultat qui a déjà été obtenu, alors que l'ordre généalogique ne permet, dans chaque cas, qu'une seule application d'une formule qui a été dérivée. Ces deux divergences doivent nous permettre de donner une définition plus appropriée au concept de dérivation, et n'ont rien d'essentiel.)

Les formules initiales de la dérivation sont des formules-hypothèses : chacune de celles-ci correspond à une figure de H-déduction (et elle se trouve « au-dessus » (I, 3. 5) de la formule inférieure de cette figure, comme on le spécifiera de façon plus précise encore ci-dessous).

Toutes les formules qui se trouvent sous une formule-hypothèse, mais en même temps au-dessus de la formule inférieure de la figure de H-déduction à laquelle cette formule-hypothèse appartient, cette formule-hypothèse elle-même y compris, sont dites *dépendantes* de cette formule-hypothèse.

(La déduction rend donc indépendantes de l'hypothèse qui lui appartient les propositions qu'elle permet de déduire.)

D'après ce qui précède, la formule finale d'une dérivation ne dépend d'aucune formule-hypothèse.

2. 21. Figures de dérivation permises.

Les schémas de déduction (14*) ci-dessous doivent être compris de la façon suivante :

(14*) Une traduction littérale donnerait : schémas de figures de déduction, ou : schémas pour les figures de déduction. Mais la contraction « schéma de déduction » reste suffisamment explicite. Il faut distinguer soigneusement ces « schémas » de ce que Gentzen appelle les « figures de déduction ». Alors que les figures de déduction appartiennent au formalisme considéré (le calcul NJ), les « schémas » sont des règles syntaxiques.

Les dérivations que le formalisme de Gentzen permet d'effectuer consistent en effet en une suite d'étapes déductives, représentées chacune par une « figure de déduction » et correspondant tout simplement au passage d'une formule (ou de plusieurs formules) à une autre (ou à plusieurs autres).

Les « schémas » sont, au contraire, des expressions syntaxiques qui décrivent les différents types possibles de figures de déduction, les types de « passage » qui sont autorisés.

Au moyen de chacun de ces schémas, on peut obtenir une figure de *NJ*-déduction si l'on y remplace $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ par des formules quelconques, $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ (ou $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$) par une formule quelconque dont le signe terminal est $\forall$ (ou $\exists$), $\mathfrak{x}$ désignant la variable individuelle liée qui appartient à ce signe terminal, $\mathfrak{F}a$ par la formule qui provient de $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ lorsque l'on y remplace la variable individuelle liée $\mathfrak{x}$, partout où elle figure, par la variable individuelle libre a.

(On peut par exemple prendre pour a une variable qui figure déjà dans $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Pour les figures de déduction *AE* et *EB*, cette possibilité sera d'ailleurs exclue par la condition des variables énoncée ci-dessous, mais elle subsiste pour *AB* et *EE*. — $\mathfrak{x}$ peut également ne pas intervenir dans $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$; dans ce cas, $\mathfrak{F}a$ est évidemment identique à $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. — $\mathfrak{F}a$ est visiblement toujours une formule-partie de $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ (ou $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$) selon la définition des formules partielles en I, 2. 2.)

Les signes qui figurent entre crochets ont la signification suivante : les formules de cette forme peuvent être coordonnées à la figure de déduction, à titre de formules-hypothèses, en nombre quelconque (éventuellement nul), à la condition que toutes les formules ainsi coordonnées à une même figure de déduction soient formellement identiques. Elles doivent donc être des formules initiales de la dérivation, et figurer dans des chaînes de dérivation auxquelles appartient la formule supérieure de la figure de déduction dont il s'agit. (C'est-à-dire : la formule supérieure au-dessus de laquelle, dans le schéma, figure le crochet. Elle peut être elle-même déjà une formule-hypothèse.)

Dans une dérivation, la correspondance qui existe entre une figure de *H*-déduction et les formules-hypothèses qui lui sont coordonnées, doit être rendue explicite d'une manière ou de l'autre, par exemple par une numérotation commune (voir les exemples du § 4).

Les désignations des différents schémas de déduction : *UE*, *UB*, etc., signifient : une figure de déduction formée suivant le schéma considéré est une introduction (E) ou une élimination (B) de la conjonction (U), de la disjonction (O), du quantificateur universel (A), du quantificateur particulier (E), de l'implication (F), ou de la négation (N) (15*).

Voici les figures de déduction de notre calcul :

$$\underset{UE}{\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}} \qquad \underset{UB}{\dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \quad \dfrac{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}} \qquad \underset{OE}{\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \quad \dfrac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}} \qquad \underset{OB}{\dfrac{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \quad \overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{C}} \quad \overset{[\mathfrak{B}]}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}}$$

$$\underset{AE}{\dfrac{\mathfrak{F}a}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}} \qquad \underset{AB}{\dfrac{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}{\mathfrak{F}a}} \qquad \underset{EE}{\dfrac{\mathfrak{F}a}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}} \qquad \underset{EB}{\dfrac{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \quad \overset{[\mathfrak{F}a]}{\mathfrak{C}}}{\mathfrak{C}}}$$

$$\underset{FE}{\dfrac{\overset{[\mathfrak{A}]}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}} \qquad \underset{FB}{\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}} \qquad \underset{NE}{\dfrac{\overset{[\mathfrak{A}]}{\curlywedge}}{\neg \mathfrak{A}}} \qquad \underset{NB}{\dfrac{\mathfrak{A} \quad \neg \mathfrak{A}}{\curlywedge} \qquad \dfrac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}}$$

Nous appelons *variable propre* d'un AE (ou d'un EB) la variable individuelle libre désignée par a dans le schéma dont il s'agit. (A supposer qu'elle existe, c'est-à-dire que la variable individuelle liée désignée par $\mathfrak{x}$ figure dans la formule désignée par $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$.)

La condition des variables.

Une NJ-dérivation doit encore satisfaire à la condition suivante (pour la signification de cette condition, voir § 3) :

La variable propre d'un AE ne peut figurer dans la formule désignée dans le schéma par $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ ni dans l'une quelconque des formules-hypothèses dont cette formule dépend;

(15*) Les lettres indiquées entre parenthèses sont les lettres initiales des mots allemands correspondants. Dans la traduction, la correspondance est brisée, mais il fallait conserver les notations de Gentzen.

Comme on l'a indiqué dans la note 1* (de la section I, 1. 1), Gentzen utilise les expressions : signe-et *(Und-Zeichen)*, signe-ou *(Oder-Zeichen)*, signe-tout *(All-Zeichen)*, signe-il-y-a *(Es gibt-Zeichen)*, signe-suit *(Folgt-Zeichen)*, signe-non *(Nicht-Zeichen)*.

La variable propre d'un *EB* ne peut figurer dans la formule désignée dans le schéma par $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ ni dans la formule supérieure désignée par $\mathfrak{C}$, ni dans l'une quelconque des formules-hypothèses dont cette formule dépend, excepté la formule-hypothèse désignée par $\mathfrak{F}a$ et qui est coordonnée au schéma *EB*.

Ceci achève la définition de la « *NJ*-dérivation » (15 a^*).

§ 3.

Le sens intuitif (16*) des figures de NJ-déduction.

Nous allons expliciter le sens intuitif de certains des schémas de déduction et essayer de montrer comment le calcul reflète effectivement le « raisonnement réel ».

FE. Si on le traduit en mots, ce schéma correspond à la déduction suivante : si $\mathfrak{B}$ a été démontré grâce à l'hypothèse $\mathfrak{A}$, on a (cette fois sans l'hypothèse) : de $\mathfrak{A}$ suit $\mathfrak{B}$. (Naturellement, on peut avoir fait d'autres hypothèses dont le résultat ci-dessus reste encore dépendant.)

OB. (« Distinction des cas. ») Quand on a démontré $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, on peut opérer en distinguant deux cas : on suppose d'abord que $\mathfrak{A}$ soit vrai et on en dérive $\mathfrak{C}$. Si, d'autre part, on peut également dériver $\mathfrak{C}$ de l'hypothèse de la validité de $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ est établi en toute généralité, c'est-à-dire de façon indépendante des deux hypothèses (comparer avec 1. 1).

AE. Lorsque $\mathfrak{F}a$ est démontré pour « un a quelconque », alors

(15 a^*) Gentzen n'a pas besoin de poser ici les restrictions énoncées dans tous les manuels, auxquelles est soumise la dérivation de $\mathfrak{F}a$ à partir de $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

(16*) Nous traduisons par là l'adjectif : *inhaltlich*. Il s'agit de ce qui a trait au contenu, par opposition à la forme. Le mot « intuitif » est pris ici dans son acceptation courante et n'a rien à voir avec le mot « intuitionniste » qui sera toujours employé au sens technique, pour désigner la logique de Brouwer-Heyting.

on a $\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. La condition que a soit « tout à fait quelconque » peut se formuler de façon plus précise comme suit : $\mathfrak{F}a$ ne peut dépendre d'aucune hypothèse dans laquelle figure la variable individuelle a. Et cette condition — jointe à la condition évidente qui impose de remplacer dans $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ le a de $\mathfrak{F}a$, partout où il figure, par $\mathfrak{x}$ — constitue précisément la partie de la « condition des variables » relative au schéma *AE*.

EB. On a $\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. On dit alors : soit a un individu pour lequel a est vrai. C'est-à-dire, on suppose que l'on ait $\mathfrak{F}a$. (Évidemment, on doit prendre pour a une variable individuelle qui ne figurait pas encore dans $\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$.) Si l'on démontre, en partant de cette hypothèse, une proposition $\mathfrak{C}$ qui ne contient plus a et qui ne dépend pas par ailleurs, d'une hypothèse qui contiendrait a, $\mathfrak{C}$ se trouve démontré indépendamment de l'hypothèse $\mathfrak{F}a$. Dans ce qui précède s'est trouvée énoncée la partie de la « condition des variables » relative au schéma *EB*. (Il existe une certaine analogie entre *EB* et *OB;* le quantificateur particulier est d'ailleurs la généralisation du signe de disjonction, comme le quantificateur universel est la généralisation du signe de conjonction (16 a^*).)

NB. $\mathfrak{A}$ et $\neg\mathfrak{A}$ signifie une contradiction, et une contradiction ne peut être constituée comme valable (principe de contradiction). Le schéma de déduction *NB* exprime ceci de façon formelle : $\wedge$ y désigne la contradiction, « le faux ».

NE. *(Reductio ad absurdum.)* Lorsque, d'une hypothèse $\mathfrak{A}$,

(16 a^*) Il résulte de ces explications qu'un schéma comme le suivant n'est *pas* valide selon *E B :*

$$\frac{\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x} \qquad \begin{matrix}[\mathfrak{F}a]\\ \forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}\end{matrix}}{\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}}.$$

Ainsi que le suggère l'analogie avec *O B*, le schéma *E B* n'est applicable que si $\mathfrak{C}$ est conséquence de $\mathfrak{F}a$ chaque fois que a est un individu particulier donné. Pour que $\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ soit conséquence de $\mathfrak{F}a$, $\mathfrak{F}a$ doit déjà être valide pour un a quelconque.

découle une proposition fausse ($\curlywedge$), $\mathfrak{A}$ n'est pas vrai, c'est-à-dire : on a $\neg\,\mathfrak{A}$.

Le schéma $\dfrac{\curlywedge}{\mathfrak{D}}$: si la proposition fausse est valable, toute proposition, quelle qu'elle soit, est valable.

La signification des autres schémas de déduction est facile à dégager.

§ 4.

Représentation des trois exemples du § 1 sous forme de NJ-dérivation.

Premier exemple (1.1).

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{X \vee (Y \& Z)} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{X}}{X \vee Y}\,OE \qquad \dfrac{\overset{1}{X}}{X \vee Z}\,OE}{(X \vee Y) \& (X \vee Z)}\,UE \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{Y \& Z}}{Y}\,UB}{X \vee Y}\,OE \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{1}{Y \& Z}}{Z}\,UB}{X \vee Z}\,OE}{(X \vee Y) \& (X \vee Z)}\,UE}{(X \vee Y) \& (X \vee Z)}\,OB1.}{(X \vee (Y \& Z)) \supset ((X \vee Y) \& (X \vee Z))}\,FE2.$$

Dans cet exemple l'ordre généalogique peut paraître d'autant plus artificiel que la distinction des cas X, $Y \& Z$ n'y fait plus suite à l'affirmation de $X \vee (Y \& Z)$.

Second exemple (1.2) :

$$\dfrac{\dfrac{\overset{2}{\exists x \forall y\, Fxy} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\forall y\, Fay}}{Fab}\,AB}{\exists x\, Fxb}\,EE}{\forall y \exists x\, Fxy}\,AE}{\forall y \exists x\, Fxy}\,EB1}{(\exists x \forall y\, Fxy) \supset (\forall y \exists x\, Fxy)}\,FE2.$$

Ici également, en suivant un ordre linéaire, l'hypothèse du schéma *EB* ferait naturellement suite, à sa formule supérieure gauche, comme c'était le cas dans le traitement de cet exemple au § 1.

Troisième exemple (1. 3) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{2}{Fa}}{\exists x\, Fx}\,EE \qquad \overset{1}{\neg \exists x\, Fx}}{\wedge}\,NB}{\neg Fa}\,NE2}{\forall y \neg Fy}\,AE}{(\neg \exists x\, Fx) \supset (\forall y \neg Fy)}\,FE1.$$

§ 5.

Quelques remarques sur le calcul NJ. Le calcul NK.

5. 1. Le calcul *NJ* présente plusieurs inélégances de forme. Celles-ci sont compensées par les avantages suivants.

5. 11. Les très larges possibilités d'application au raisonnement réel, dont nous sommes d'ailleurs partis. C'est pourquoi ce calcul se prête en particulier à la formalisation des démonstrations mathématiques.

5. 12. Les dérivations pour les formules valides sont presque toujours plus courtes dans ce calcul que dans les calculs logistiques. Ceci repose essentiellement sur le fait suivant : dans les dérivations logistiques, une formule déterminée intervient en général un certain nombre de fois (comme partie d'autres formules), alors que dans les *NJ*-dérivations ce cas ne se présente que dans une mesure très limitée.

5. 13. Les désignations adoptées plus haut pour les différentes figures de déduction (2. 21) nous permettent d'apercevoir que

notre calcul possède un caractère *systématique* qui est digne d'attention. A chacun des signes logiques &, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\supset$, $\neg$, appartient exactement une figure de déduction qui « introduit » ce signe — comme signe terminal d'une formule — et une figure qui l' « élimine »; la dualité des figures de déduction *UB* et *OE* ne constitue qu'une exception purement extérieure et sans intérêt. Les introductions représentent pour ainsi dire les « définitions » des signes qu'elles concernent, et les éliminations ne sont en dernière analyse que des conséquences de ces définitions, ce que l'on peut exprimer de la façon suivante : dans l'élimination d'un signe, la formule dont il s'agit et dont le signe en question est le signe terminal ne peut « être utilisée que dans le sens que lui confère l'introduction de ce signe ».

Un exemple éclairera ce qui précède. La formule $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ peut être introduite lorsque l'on dispose d'une dérivation de $\mathfrak{B}$ à partir de la formule-hypothèse $\mathfrak{A}$.

Si l'on veut alors l'appliquer dans l'élimination du signe $\supset$ (évidemment, on peut également l'appliquer dans la formation de formules plus longues, comme par exemple $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}$, *OE*), on peut le faire précisément en déduisant d'emblée $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ supposé démontré, car $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ nous apprend qu'il existe une dérivation de $\mathfrak{B}$ à partir de $\mathfrak{A}$.

Notons-le bien, il n'est nullement nécessaire de tenir compte en tout ceci d'un « sens intuitif » du signe $\supset$.

En précisant ces idées, il devrait être possible de montrer que, dans certaines conditions, les déductions *B* sont des fonctions univoques des déductions-*E* correspondantes.

5.2. Il est possible d'éliminer la *négation* de notre calcul : il suffit pour cela de considérer $\neg\, \mathfrak{A}$ comme une abréviation pour $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$. Ceci est permis; en effet, si, dans une *NJ*-dérivation, on élimine tous les signes de négation, en remplaçant chacune des formules $\neg\, \mathfrak{A}$ par la formule $\mathfrak{A} \supset \curlywedge$, on obtient à nouveau une *NJ*-dérivation (les figures de déduction *NE* et *NB* deviennent alors des cas particuliers des figures *FE* et *FB*). Et inversement si, dans une *NJ*-dérivation, on remplace chacune des formules $\mathfrak{A} \supset \wedge$ par la formule $\neg \mathfrak{A}$, on obtient de même à nouveau une *NJ*-dérivation.

Le schéma de déduction $\frac{\wedge}{\mathfrak{D}}$ occupe une position particulière parmi nos schémas, il n'appartient pas à un signe logique, mais au signe de proposition.

5.3. Le « principe du tiers-exclu » et le calcul *NK*.

A partir du calcul *NJ*, on obtient un calcul classique complet, le calcul *NK*, par adjonction du « principe du tiers-exclu » *(tertium non datur)*. Cette adjonction se réalise comme suit : on permet de prendre comme formules initiales de la dérivation, outre les formules-hypothèses, des « formules fondamentales » du type $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$, où $\mathfrak{A}$ doit être remplacé par une formule quelconque.

Nous avons donné ainsi au principe du tiers-exclu, de façon purement extérieure, une place exceptionnelle, et nous l'avons fait parce que nous tenions cette formulation pour la « plus naturelle ». Il eût été parfaitement possible, au lieu d'introduire le schéma de formule fondamentale $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$, d'introduire un nouveau schéma de déduction, par exemple $\frac{\neg \neg \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}$ (schéma analogue à celui qui est formé par Hilbert et par Heyting). Cependant, encore une fois, ce schéma de déduction tombe en dehors des cadres des figures de *NJ*-déduction en tant qu'il représente une nouvelle élimination de la négation, dont la validité ne découle nullement de la manière dont le signe de négation se trouve introduit dans le schéma *NE*.

Note B*.

NOTATION EXPLICITE DES SUPPOSITIONS

1. Chez Gentzen, la présence ou la suppression d'une supposition ne sont pas notées explicitement; elles ressortent intuitivement de la disposition des propositions dans une déduction. Une proposition est introduite par supposition si elle ne se déduit pas, en vertu d'un des schémas, d'une proposition placée au-dessus d'elle. Une proposition est affectée d'une supposition (elle n'est valable que dans cette supposition) si elle est placée en dessous de la proposition et si la supposition n'a pas été éliminée en vertu d'un des schémas. Et, dans certains schémas eux-mêmes, si une première proposition, écrite entre crochets, est placée au-dessus d'une deuxième proposition, ces notations signifient : « Si la première proposition est valide, la deuxième l'est également. »

Ces conventions suffisent pour qu'on puisse déchiffrer quand il y a supposition et quand il n'y en a pas; mais on pourra constater que le déchiffrement est souvent laborieux (il l'est si bien que, dans l'un ou l'autre cas, Gentzen a introduit une numérotation sommaire des suppositions, pour éviter les malentendus).

Les méthodes N nous paraissent devenir plus maniables si on introduit une notation explicite des suppositions. Nous la reproduisons telle que nous l'avons formulée dans des études antérieures, avec quelques modifications destinées à rester aussi près que possible du symbolisme de Gentzen. La notation explicite nous oblige à introduire certaines règles qui ne sont pas formulées dans Gentzen; mais ces règles ne constituent pas des axiomes additionnels et, en particulier, elles n'introduisent pas subrepticement dans les calculs *N* des schémas propres aux calculs *L;* elles énoncent simplement en mots ce qui ressort de la disposition intuitive des propositions dans les déductions de Gentzen. Lorsque par exemple nous énonçons que l'ordre des suppositions est indifférent, cette règle est implicite dans Gentzen, puisque c'est la même chose de constater : « Cette proposition est en dessous de la supposition n° 1 et de la supposition n° 2 », ou bien « Cette proposition est en dessous de la supposition n° 2 et en dessous de la supposition n° 1. »

2. Notre notation sera la suivante :

2. 1. Lorsqu'une proposition est affirmée au cours d'un raisonnement (ou dans un schéma), nous la faisons précéder du signe « $\rightarrow$ ». Une proposition précédée du signe « $\rightarrow$ » (celui-ci étant éventuellement précédé d'autres signes) est une assertion.

2. 2. Si la proposition est valide (si elle peut être affirmée sans supposition), nous n'écrivons rien devant le signe « $\rightarrow$ ».

2. 3. Nous ferons précéder d'un numéro d'ordre l'énoncé de toute supposition, et ce numéro sera reproduit devant chacune des propositions conséquentes affectées de cette supposition (les propositions dont on veut énoncer qu'elles sont « valables dans cette supposition »). Lorsqu'un numéro déterminé intervient pour la première fois au cours d'une déduction, il signifie que la proposition qui suit est énoncée à titre de supposition. Quand il réapparaît, il signifie que la proposition qui suit est une conséquence de la supposition précédée de ce même numéro.

Soit $\mathfrak{A}$ la proposition posée à titre de supposition et $\mathfrak{B}$ une de ses conséquentes; lorsque « n » figure pour la première fois, l'assertion « $n \rightarrow \mathfrak{A}$ » se lira : « $\mathfrak{A}$ est la supposition numérotée n »; lorsque « n » n'apparaît pas pour la première fois, l'assertion « $n \rightarrow \mathfrak{B}$ » se lira « $\mathfrak{B}$ est valable moyennant la supposition n° n ».

2. 4. Nous écrirons « $n, n' \rightarrow \mathfrak{B}$ » pour énoncer que $\mathfrak{B}$ est

valable dans les suppositions numérotées n et n'; nous écrirons « $n, n', n'' \rightarrow \mathfrak{B}$ » pour énoncer que $\mathfrak{B}$ est valable dans les suppositions numérotées n, n' et n'', et ainsi de suite.

N.-B. — Nous nous rapprocherions davantage encore des notations des calculs L si nous écrivions au lieu du numéro d'ordre la proposition même qui est posée comme supposition, mais la notation par numéros est plus concise.

2. 5. La notation explicite des suppositions nous dispensera d'écrire, dans certains schémas, certaines propositions « entre crochets ».

3. Dans la notation que nous adoptons, les schémas des calculs N de Gentzen deviennent :

UE
$$\frac{\rightarrow \mathfrak{A} \quad \rightarrow \mathfrak{B}}{\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$$

UB
$$\frac{\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\rightarrow \mathfrak{A}} \qquad \frac{\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\rightarrow \mathfrak{B}}$$

OE
$$\frac{\rightarrow \mathfrak{A}}{\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \qquad \frac{\rightarrow \mathfrak{B}}{\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$$

OB
$$\frac{\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \quad \begin{array}{c} n \rightarrow \mathfrak{A} \\ n \rightarrow \mathfrak{C} \end{array} \quad \begin{array}{c} n' \rightarrow \mathfrak{B} \\ n' \rightarrow \mathfrak{C} \end{array}}{\rightarrow \qquad \mathfrak{C}}$$

AE
$$\frac{\rightarrow \mathfrak{F}a}{\rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$$

AB
$$\frac{\rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}{\rightarrow \mathfrak{F}a}$$

EE
$$\frac{\rightarrow \mathfrak{F}a}{\rightarrow \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$$

EB
$$\frac{\rightarrow \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \quad \begin{array}{c} n \rightarrow \mathfrak{F}a \\ n \rightarrow \mathfrak{C} \end{array}}{\rightarrow \mathfrak{C}}$$

FE
$$\frac{\begin{array}{c} n \rightarrow \mathfrak{A} \\ n \rightarrow \mathfrak{B} \end{array}}{\rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}$$

FB
$$\frac{\rightarrow \mathfrak{A} \quad \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\rightarrow \mathfrak{B}}$$

NE
$$\frac{\begin{array}{c} n \rightarrow \mathfrak{A} \\ n \rightarrow \curlywedge \end{array}}{\rightarrow \neg \mathfrak{A}}$$

NB
$$\frac{\rightarrow \mathfrak{A} \quad \rightarrow \neg \mathfrak{A}}{\rightarrow \curlywedge}$$

$$\frac{\rightarrow \curlywedge}{\rightarrow \mathfrak{D}}$$

4. Nous posons les règles supplémentaires suivantes :

4. 0. Donnons le nom de prémisse à l'assertion ou aux assertions qui, dans un schéma, se trouvent au-dessus de la ligne, et appelons conclusion l'assertion qui se trouve sous la ligne.

culièrement naturelle ne permet pas de démontrer toutes les propositions valables de la logique « classique », bivalente, mais seulement les propositions valables de la «logique de l'intuitionnisme », de la logique de Brouwer-Heyting sans tiers-exclu (voir dans *Log.*, 9. 5, la preuve que tous les postulats de la logique de l'intuitionnisme sont démontrés par notre méthode et, *Log.*, 9. 53, la preuve sommaire que le tiers-exclu n'est pas démontré par elle; et dans Gentzen, pp. 420-428, une démonstration rigoureuse d'équivalence).

NOTE C*.

MÉTHODES N DE JASKOWSKI, BERNAYS ET JOHANSSON

1. Mettant en œuvre une suggestion de Łukasiewicz, qui datait de 1926, Jaśkowski avait indépendamment de Gentzen et en même temps que lui, en 1934, jeté les bases d'une méthode identique à celle des calculs N.

L'intérêt actuel du travail de Jaśkowski est surtout d'ordre historique; il peut cependant être utile de donner un aperçu d'une œuvre devenue très peu accessible et sur laquelle nous n'avons trouvé ailleurs aucune indication détaillée.

Nous ne nous arrêterons pas au symbolisme et à la terminologie de Jaśkowski. Son symbolisme est analogue à celui que nous employons (note B*), en ce qu'il utilise une numérotation des suppositions; les schémas sont remplacés par des règles verbales; celles-ci dispensent de nos règles n° 4, mais au prix d'une formulation assez compliquée (énoncée en termes d'une théorie des systèmes déductifs). Les règles qu'il pose sont l'équivalent de notre règle 2. 3, note B*, de formulation des suppositions (règle I), celui du schéma FE (règle II), celui du schéma FB (règle III), et comme règle IV, l'équivalent d'un schéma pour la négation ou plutôt d'un schéma de raisonnement par l'absurde, qui serait :

$$\frac{\begin{array}{ll} n \to \neg\mathfrak{A} & n \to \neg\mathfrak{A} \\ n \to \mathfrak{B} & n \to \neg\mathfrak{B} \end{array}}{\to \mathfrak{A}}.$$

Ce schéma conclut donc à l'affirmation de $\mathfrak{A}$ du fait que la négation $\vdash \mathfrak{A}$ conduit à une contradiction.

Les quatre règles de Jaśkowski ne concernent donc que l'implication et la négation; Jaśkowski prouve qu'elles sont déductivement équivalentes avec le système d'axiomes de Łukasiewicz formulé en termes d'implication et de négation. La logique qui se déduit des quatre règles est donc la logique bivalente formulée en termes d'implication et de négation.

Les propositions qui s'y déduisent pourraient être traduites en termes de conjonction et d'alternative, moyennant les définitions de Łukasiewicz. Jaśkowski saisit la possibilité de créer des schémas pour ces autres opérations; il propose à titre d'exemple des règles équivalant aux schémas *UE* et *UB*, et nous verrons à l'instant qu'il pose des règles pour la généralisation.

2. Jaśkowski a vu le parti qu'on pouvait tirer de sa méthode pour l'étude de systèmes « incomplets » de déduction, où certains axiomes sont omis ou remplacés par d'autres plus faibles.

Il montre l'équivalence du système fondé sur ses trois premières règles (donc sur les schémas *FE* et *FB*) avec une logique « positive » sans négation et qui se déduit des deux axiomes de Łukasiewicz :

$$p \supset (q \supset p) \qquad (p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r)).$$

Puisque cette logique positive ne mentionne que des implications, les propositions qui y sont valables sont les *positiv identische Implikationsformeln* de Hilbert-Bernays.

Jaśkowski ne mentionne pas la possibilité de déduire les propositions de la logique « intuitionniste » par déduction naturelle; la découverte d'une telle déduction est ce qui fait le mérite propre de la première méthode de Gentzen. Mais Jaśkowski indique comment obtenir les propositions valables dans le calcul de Kolmogoroff en remplaçant la règle IV par une règle IV *a* équivalente au schéma

$$\frac{\begin{matrix} n \rightarrow \mathfrak{A} & n \rightarrow \mathfrak{A} \\ n \rightarrow \mathfrak{B} & n \rightarrow \neg\, \mathfrak{B} \end{matrix}}{\rightarrow \neg\, \mathfrak{A}}.$$

Ce résultat, à la vérité, n'est pas inattendu, puisque la logique de Kolmogoroff se déduit des axiomes de la logique positive, augmentée de l'axiome

$$(p \supset q) \supset ((p \supset \neg\, q) \supset \neg\, p).$$

Jaśkowski fait remarquer que le *ex falso sequitur quodlibet* $\neg\, p \supset (p \supset q)$ ne peut être déduit dans la logique de Kolmogoroff, pas plus que dans la logique formulée en 1936 par Johansson.

3. Un dernier paragraphe de l'opuscule de Jaśkowski concerne la déduction des propositions générales. Considérons d'abord les propositions générales sous leur forme habituelle (généralisation portant sur les individus). Jaśkowski ajoute à ses règles II, III IV, outre une règle I *a* (remplaçant la règle I) et une règle VII (concernant des suppositions où interviennent des variables libres désignant les individus), une règle V *a* équivalente au schéma *AB* et une règle VI *a* équivalente au schéma *AE*. Il ne donne pas de schéma pour des propositions de la forme $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$, celles-ci devant être exprimées sous la forme $\neg\, \forall \mathfrak{x} \neg\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$; cette traduction ne permettrait pas de déduire une logique « intuitionniste » des propositions générales.

Jaśkowski introduit par ailleurs des règles valables pour l'*erweiterter Aussagenkalkül* (calcul élargi des propositions) de Łukasiewicz, où interviennent des expressions de la forme $\forall\, \mathfrak{A}\, (\mathfrak{B})$ (pour toute proposition $\mathfrak{A}$, la proposition $\mathfrak{B}$ est vraie) et $\exists\, \mathfrak{A}\, (\mathfrak{B})$ (pour certaines propositions $\mathfrak{A}$, la proposition $\mathfrak{B}$ est vraie).

D'après Wajsberg, les propositions valables dans la logique de Kolmogoroff s'obtiennent en adjoignant aux deux axiomes de logique positive de Łukasiewicz la définition

$$Df\ \neg\, p = (p \supset \wedge),$$

dans laquelle « $\wedge$ » peut être traitée comme une variable. Les propositions valables de la logique de Johansson s'obtiennent à partir des schémas « sans négation » *UE*, *UB*, *OE*, *OB*, *FE*, *FB* et de la même définition. La différence entre la logique de Johansson et celle de Kolmogoroff consiste donc dans l'introduction des schémas *UE*, *UB*, *OE*, *OB*; cette différence est essentielle, puisque dans une logique « intuitionniste » on ne peut définir & et $\vee$ en termes de $\supset$ et $\neg$.

4. Au lieu d'arriver à la logique bivalente classique par l'adjonction du tiers-exclu comme axiome unique aux schémas de *NJ*, Bernays, dans son cours de Princeton, adopte deux nouveaux schémas pour la négation; nous les noterons *NE'* et *NB'*. Ce sont :

$$(NE')\ \frac{\begin{matrix} n \rightarrow \mathfrak{A} & \quad n \rightarrow \mathfrak{A} \\ n \rightarrow \mathfrak{B} & \quad n \rightarrow \neg\, \mathfrak{B} \end{matrix}}{\rightarrow \neg\, \mathfrak{A}} \qquad\qquad (NB')\ \frac{\rightarrow \neg\, \neg\, \mathfrak{A}}{\rightarrow \mathfrak{A}}.$$

Le schéma *NE'* (qui est valable dans la logique intuitionniste) est un schéma de la déduction par l'absurde; le schéma *NB'*, qui conclut de la double négation à l'affirmation, est caractéristique de la logique classique.

Deux exemples de déductions à partir des schémas de Bernays. La démonstration de $\rightarrow \neg\, \neg\, p \supset p$ est immédiate.

$$\begin{matrix} (NB') \\ (FE) \end{matrix}\ \frac{\dfrac{1 \rightarrow \neg\, \neg\, p}{1 \rightarrow p}}{\rightarrow \neg\, \neg\, p \supset p}.$$

La démonstration du tiers-exclu $\rightarrow (p \vee \neg\, p)$ s'effectue plus laborieusement comme suit :

$$(NE')\ \frac{(NE')\ \dfrac{(D)\ \dfrac{(OE)\ \dfrac{3 \rightarrow \neg p}{3 \rightarrow (p \vee \neg p)}}{3,1 \rightarrow (p \vee \neg p)} \quad \dfrac{1 \rightarrow \neg (p \vee \neg p)}{3,1 \rightarrow \neg (p \vee \neg p)}\ (D)}{1 \rightarrow \neg\, \neg\, p} \qquad \dfrac{(D)\ \dfrac{(OE)\ \dfrac{2 \rightarrow p}{2 \rightarrow (p \vee \neg p)}}{2,1 \rightarrow (p \vee \neg p)} \quad \dfrac{1 \rightarrow \neg\, (p \vee \neg p)}{2,1 \rightarrow \neg (p \vee \neg p)}\ (D)}{1 \rightarrow \neg\, p}\ (NE')}{(NB')\ \dfrac{\rightarrow \neg\, \neg\, (p \vee \neg\, p)}{\rightarrow (p \vee \neg\, p)}}$$

5. Les schémas des calculs N conduisent « naturellement » à la logique de l'intuitionnisme, si on ne les complète pas par le tiers-exclu ou par le schéma NB' de Bernays. Il est facile de les adapter à la « logique minimale » de Johansson, dans laquelle on n'admet pas comme valable le *Ex falso sequitur quodlibet*, c'est-à-dire $\neg p \supset (p \supset q)$. Il suffit à cet effet de retrancher de la liste des schémas du calcul NJ celui qui pose que de l'absurde $\wedge$ n'importe quelle proposition $\mathfrak{D}$ suit. Donc, toutes les propositions démontrables sans l'usage de ce schéma sont des propositions d'un « calcul minimal » que nous pouvons désigner comme calcul NM. En fait, le calcul NM est le seul qui ait le privilège d'une complète symétrie, car la règle qu'il omet est la seule qui ne serve ni à introduire ni à éliminer une opération.

Remarquons que le schéma NE découle du schéma FE, et le schéma NB du schéma FB, si on définit $\neg p$ comme signifiant $p \supset \wedge$. Cette définition est d'habitude traduite comme signifiant « de p résulte l'absurde ». Mais il est à remarquer que dans le calcul NM $\wedge$ ne désigne plus « l'absurde » au sens usuel, puisqu'on ne peut plus en faire découler n'importe quoi; sur la signification de $\wedge$ dans le calcul NM, voir Johansson, *op. cit.*, pp. 131-132.

Section III.

Les calculs déductifs (17*) LJ, LK et le théorème fondamental.

§ 1.

Les calculs LJ et LK. (Calculs logistiques intuitionniste et classique.)

1.1. Remarques préliminaires à l'édification des calculs *LJ* et *LK*.

Nous allons édifier un calcul déductif (pour la logique des prédicats), lequel, d'une part, sera un calcul « logistique » — par conséquent, les dérivations n'y contiendront pas de formules-hypothèses comme dans le calcul *NJ* — et qui, d'autre part, reprendra au calcul *NJ* la répartition des procédés de déduction en introductions et en éliminations, de chacun des signes logiques.

Le procédé le plus direct pour transformer une *NJ*-dérivation en une dérivation logistique est le suivant : on remplace une *H*-formule $\mathfrak{B}$, qui dépend des formules-hypothèses $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$, par la formule nouvelle $(\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$. Supposons que nous ayons réalisé cela pour toutes les *H*-formules.

On obtient ainsi des formules qui sont déjà vraies *pour elles-mêmes*, dont la validité ne *dépend* donc plus de la validité de certaines formules-hypothèses. Mais ce procédé

(17*) Plus exactement peut-être : calculs en forme de déduction.

introduit de nouveaux signes logiques & et $\supset$, qui exigeraient des figures de déduction supplémentaires pour & et $\supset$; l'adjonction de ces nouvelles figures à nos schémas suffirait à ruiner le caractère systématique de l'introduction et de l'élimination.

C'est pourquoi nous avons introduit le concept de séquence (I, 2. 3). Nous écrivons donc, au lieu d'une formule du type $(\mathfrak{A}_1 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$, la séquence

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}.$$

Celle-ci ne se distingue pas de la formule ci-dessus selon sa signification intuitive, mais seulement selon sa structure formelle (comparer avec I, 2. 4).

Nous utiliserons maintenant de nouvelles figures de déduction qui ne s'intègrent pas dans le système des introductions et des éliminations; mais nous avons maintenant l'avantage de pouvoir leur réserver une place spéciale, étant donné qu'elles ne se rapportent plus aux signes logiques, mais à la structure des séquences.

C'est pourquoi nous les appelons « figures de déduction structurales » réservant aux autres le nom de « figures de déduction opératoires » (18*).

Dans le calcul classique *NK*, le principe du tiers-exclu occupait une situation exceptionnelle parmi les procédés de déduction (II, 5. 3) parce qu'il n'était pas possible de l'intégrer au système des introductions et des éliminations. Dans le calcul logistique classique *LK* que l'on va décrire dans ce qui suit cette singularité se trouve levée. Ce qui rend la chose possible, c'est que l'on admet des séquences comportant plusieurs formules dans le conséquent, alors que le passage qui vient d'être indiqué, du calcul *NJ* à un calcul logistique, ne nous a conduit

(18*) Littéralement : figures de déduction pour signes logiques. Notre traduction, plus condensée, se justifie par le fait que les signes logiques peuvent être considérés comme des signes d'opération.

qu'à des séquences comportant une seule formule au conséquent (sur la signification intuitive des séquences générales, voir I, 2. 4).

La symétrie que l'on obtient ainsi s'avère plus adéquate pour la logique classique. Par contre, pour le calcul intuitionniste *LJ*, on conserve la limitation fixant à une au plus le nombre des formules du conséquent. (Voir ci-dessous. Un conséquent vide signifie la même chose qu'un conséquent où figure $\wedge$.)

Nous avons ainsi donné quelques aperçus sur les motifs qui ont commandé l'élaboration des calculs qui suivent. Leur forme est cependant déterminée, pour l'essentiel, par référence au théorème fondamental (§ 2) qui sera démontré plus loin : c'est pourquoi on ne peut les justifier de façon plus précise, pour l'instant.

1.2. Nous définissons maintenant les concepts de *LK-dérivation* et de *LJ-dérivation* de la façon suivante (19*) :

Une *LJ*-dérivation (ou *LK*-) consiste en séquences disposées en ordre généalogique (I, 3. 3).

Les séquences initiales de la dérivation sont des séquences fondamentales de la forme

$$\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$$

où $\mathfrak{D}$ peut être une formule quelconque.

(19*) *Remarque.* — Les définitions qui ont été données dans la section I en 3. 2, 3. 3 et 3. 5 dans le cas d'une dérivation constituée de formules (*H*-formules) valent également pour une dérivation constituée de séquences (c'est le cas d'une *L J*- ou *L K*-dérivation). Il suffit d'y remplacer chaque fois le mot « formule » par le mot « séquence ».

C'est ainsi que s'introduiront les expressions :

séquence initiale,
séquence finale,
séquences en ordre généalogique,
chaîne (pour une suite de séquences),

« une *H*-séquence se trouve au-dessus (ou en dessous) d'une autre *H*-séquence » (ou aussi, selon la note 4*, I, 3. 5 : « une *H*-séquence surmonte une autre *H*-séquence), « une figure de *H*-déduction se trouve au-dessus (ou en dessous) d'une *H*-séquence » (ou aussi, selon la note 4* de I, 3. 5 : « une figure de *H*-déduction surmonte une *H*-séquence », ou : « une *H*-séquence surmonte une figure de *H*-déduction »).

Toute **figure de déduction** de la dérivation provient de l'un des schémas ci-dessous par une substitution du type suivant (comparer avec II, 2. 21).

On remplace $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{C}$, par des formules quelconques, $\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ (ou $\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$) par une formule quelconque dont le signe terminal est $\forall$ (ou $\exists$), $\mathfrak{x}$ désignant la variable individuelle liée qui appartient à ce signe, $\mathfrak{F}a$ par la formule qui provient de $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ lorsque l'on y remplace la variable individuelle liée $\mathfrak{x}$, partout où elle figure, par la variable individuelle libre a.

Enfin, on remplace Γ, Δ, Θ, Λ par des suites quelconques (éventuellement vides) de formules, séparées par des virgules.

De plus, les **figures de *LJ*-dérivation** sont soumises à la condition restrictive suivante (qui constitue le seul point par lequel se distinguent les concepts de *LJ*-dérivation et de *LK*-dérivation) :

« Dans le conséquent de chaque *H*-séquence ne peut figurer plus d'une *S*-formule. »

Les désignations des différents schémas pour les figures de déduction pour signes logiques, *UES*, *UEA*, etc., signifient : une figure de déduction formée selon le schéma dont il s'agit est une introduction (*E*) de la conjonction (*U*), de la disjonction (*O*), du quantificateur universel (*A*), du quantificateur particulier (*E*), de la négation (*N*) ou de l'implication (*F*), dans le conséquent (*S*) ou dans l'antécédent (*A*) (20*).

(20*) Comme dans la section II (2. 21) ces désignations des schémas sont constituées au moyen des initiales des mots allemands correspondants : Conjonction = *Und-Zeichen;* Introduction = *Einführung;* Antécédent = *Antezedens;* Conséquent = *Sukzedens.*

On aura par exemple *UES* = *Und-Einführung im Sukzedens* (introduction de la conjonction dans le conséquent).

Les schémas de déduction (21*).

1.21. Schémas de structure (22*) :

Atténuation (23*) :

dans l'antécédent : $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \Theta}$,

dans le conséquent : $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D}}$.

Contraction :

dans l'antécédent : $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \Theta}$.

dans le conséquent : $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D}}$.

Permutation :

dans l'antécédent : $\dfrac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \Theta}$.

dans le conséquent : $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Lambda}$.

Coupure : $\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda}$.

(21*) A partir de ce moment, nous remplaçons, pour plus de brièveté et de facilité intuitive, la terminologie de I, 3.1 par la suivante. Au lieu de *formule supérieure*, nous disons *prémisse;* au lieu de *formule inférieure*, nous disons *conclusion*. Un schéma de déduction passe donc d'une ou deux prémisses à une conclusion.

(S'il y a deux prémisses, la prémisse de gauche est la première prémisse, la prémisse de droite la deuxième prémisse.)

(22*) Littéralement : schémas pour les figures de déduction structurales. La traduction proposée, plus condensée, reste assez explicite.

(23*) Le terme allemand est *Verdünnung*.

1.22. Schémas opératoires (24*) :

$$UES : \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$$

$$UEA : \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta} \quad \frac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$$

$$AES : \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}a}{\Gamma \to \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$$

$$OEA : \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \quad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}$$

$$OES : \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \quad \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$$

$$EEA : \frac{\mathfrak{F}a, \Gamma \to \Theta}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma \to \Theta}.$$

C o n d i t i o n d e s v a r i a b l e s : La variable individuelle désignée par a dans les deux derniers schémas, et que nous appelons la *variable propre* des schémas *AES* ou *EEA*, ne peut figurer dans la séquence inférieure de la figure de déduction (donc ne peut figurer dans Γ, ni dans Θ ni dans $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$).

$$AEA : \frac{\mathfrak{F}a, \Gamma \to \Theta}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma \to \Theta} \qquad EES : \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{F}a}{\Gamma \to \Theta, \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$$

$$NES : \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg \mathfrak{A}} \qquad NEA : \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}$$

$$FES : \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}} \qquad FEA : \frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}$$

(24*) Littéralement : schémas pour les figures de déduction pour signes logiques.

Ou encore, selon la terminologie adoptée en 1. 1 : schémas pour les figures de déduction opératoires.

Même remarque qu'en 1. 21.

1.3. Exemple d'une *LJ*-dérivation (d'après II, 4.3) :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Fa \to Fa}{Fa \to \exists x\, Fx}\ EES \qquad \dfrac{\dfrac{\exists x\, Fx \to \exists x\, Fx}{\neg \exists x\, Fx,\ \exists x\, Fx \to}\ NEA}{\exists x\, Fx,\ \neg \exists x\, Fx \to}\ \text{inversion}}{Fa,\ \neg \exists x\, Fx \to}\ \text{coupure}}{\neg \exists x\, Fx \to \neg Fa}\ NES}{\neg \exists x\, Fx \to \forall y\, \neg Fy}\ AES}{\to (\neg \exists x\, Fx) \supset (\forall y\, \neg Fy)}\ FES.
$$

1.4. Exemple d'une *LK*-dérivation (dérivation du « principe du tiers-exclu ») :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A,\ \neg A}\ NES}{\to A,\ A \vee \neg A}\ OES}{\to A \vee \neg A,\ A}\ \text{inversion}}{\to A \vee \neg A,\ A \vee \neg A}\ OES}{\to A \vee \neg A}\ \text{contraction.}
$$

§ 2.

Quelques remarques sur les calculs LJ et LK. Le théorème fondamental.

(Nous ne ferons dans la suite pas usage des remarques 2.1 à 2.3.)

2.1. Les schémas ne sont pas indépendants mutuellement; c'est-à-dire que l'on pourrait en remplacer certains en se servant des autres. Toutefois, si nous supprimions ces schémas, le « théorème fondamental » ne serait plus valide.

2.2. De façon générale, on pourrait simplifier les calculs sous bien des rapports, si on n'accordait pas d'importance à la démonstration du théorème fondamental. Signalons, par exemple, que dans le calcul *LK* les figures de déduction *UES*,

OEA, *UEA*, *OES*, *AEA*, *EES*, *NES*, *NEA* et *FEA* peuvent être remplacées par des séquences fondamentales, selon les schémas suivants :

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \;\&\; \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}, \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} \;\&\; \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$$
$$\mathfrak{A} \;\&\; \mathfrak{B} \to \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \qquad \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \to \mathfrak{F}a$$
$$\mathfrak{F}a \to \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \qquad \to \mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \text{ (principe du tiers-exclu)}$$
$$\neg \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to \text{ (principe de contradiction)} \qquad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}.$$

On peut facilement démontrer l'équivalence de ces séquences fondamentales avec nos figures de déduction.

La même possibilité existe pour le calcul *LJ*, excepté pour les figures de déduction *OEA* et *NES*, étant donné que les *H-LJ*-séquences ne peuvent comporter deux *S*-formules dans le conséquent (comparer à ce sujet à la section V, § 5).

2. 3. La distinction, entre logique intuitionniste et logique classique, est, extérieurement, d'une tout autre nature dans les calculs *LJ* et *LK* que dans les calculs *NJ* et *NK*. Pour ceux-ci, cette distinction se fondait sur l'élimination ou l'adjonction du principe du tiers-exclu alors qu'ici elle est exprimée par la condition du conséquent.

(Les démonstrations d'équivalence pour tous les calculs envisagés, dans la section V, établiront que ces deux modes de distinction sont équivalents.)

2. 4. Lorsqu'on laisse de côté les schémas *FES* et *FEA*, le calcul *LK* jouit d'une symétrie, au sens suivant : si l'on écrit toutes les séquences d'une *LK*-dérivation (dans lesquelles ne figure pas le signe $\supset$) sous forme renversée, c'est-à-dire en écrivant

$$\mathfrak{B}_\nu, \ldots, \mathfrak{B}_1 \to \mathfrak{A}_\mu, \ldots, \mathfrak{A}_1,$$

au lieu de

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu,$$

et si l'on intervertit, dans les figures de dérivation qui contiennent deux prémisses, la prémisse de droite et la prémisse de gauche ainsi que leurs dérivations respectives, si de plus on remplace chacun des signes & par un signe $\vee$, chacun des signes $\forall$ par un signe $\exists$, chacun des signes $\vee$ par un signe & et chacun des signes $\exists$ par un signe $\forall$ (en remplaçant & par $\vee$ et inversement, il faut en même temps échanger les deux champs d'action du signe, remplacer donc par exemple $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$ par $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$), on obtient de nouveau une *LK*-dérivation.

Ceci peut être contrôlé directement à partir des schémas. (Dans la façon d'ordonner ces schémas on a accordé une attention particulière à la symétrie.) (Comparer avec le principe de dualité dans H.-A., p. 62.)

2. 41. Dans le calcul *NK*, on peut éliminer le signe $\supset$, selon une méthode bien connue, en considérant $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ comme une abréviation pour $(\neg \mathfrak{A}) \vee \mathfrak{B}$; on vérifie facilement que les schémas pour *FES* et *FEA* peuvent alors être remplacés par les schémas pour $\vee$ et $\neg$.

Le calcul *NJ* ne présente pas de propriété correspondante (24 *bis**).

2. 5. Le fait le plus important pour nous à propos des calculs *LJ* et *LK* est le suivant :

Théorème fondamental. — Toute *LJ*-dérivation (ou *LK*-) peut être transformée en une *LJ*-dérivation (ou *LK*-) qui possède la même séquence finale et dans laquelle la figure de déduction appelée « coupure » ne figure pas.

2. 51. La démonstration suit au § 3.

Pour faire ressortir plus clairement la signification du théorème, nous démontrerons un corollaire très simple (2. 513).

A cet effet, nous devons introduire quelques expressions (dont nous aurons souvent besoin dans la suite) relatives aux figures de déduction pour signes logiques.

2. 511. Nous appelons *formule principale* d'une figure de déduction la *S*-formule du schéma qui contient le signe logique auquel ce schéma se rapporte.

(24 *bis* *) Il semble y avoir ici une faute d'impression, et qu'il faille lire « calcul *LK* » et « calcul *LJ* » au lieu de « calcul *NK* » et « calcul *NJ* ».

La formule principale est donc une S-formule du type $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ pour les schémas *UES* et *UEA;* $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ pour les schémas *OES* et *OEA;* $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ pour les schémas *AES* et *AEA;* $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ pour les schémas *EES* et *EEA*, $\neg \mathfrak{A}$ pour les schémas *NES* et *NEA*, et $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ pour les schémas *FES* et *FEA*.

Nous appelons *formules secondaires* d'une figure de déduction les S-formules désignées par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ dans les schémas correspondants.

Ces formules sont toujours des « formules partielles » de la formule principale (en vertu de la définition des formules partielles en I, 2. 2).

2. 512. Nous pouvons maintenant dégager facilement de l'examen des schémas de déduction les faits suivants.

La formule principale se trouve toujours dans la conclusion, les formules secondaires se trouvent toujours dans les prémisses d'une figure de déduction pour signe logique.

Si une formule figure comme S-formule dans une prémisse d'une figure de déduction quelconque, et si elle n'est ni formule secondaire ni la formule $\mathfrak{D}$ d'une coupure, elle figure également comme S-formule dans la conclusion de cette figure.

Ces deux faits entraînent la conséquence suivante :

Si une formule figure comme S-formule dans une *LJ*- ou *LK*-dérivation, et si l'on suit la chaîne de dérivation depuis la séquence à laquelle appartient cette formule jusqu'à la séquence finale, la formule ne peut disparaître, dans cette chaîne, que si elle est la formule $\mathfrak{D}$ d'une coupure ou la formule secondaire d'une figure de déduction pour signe logique. Dans ce dernier cas, on doit voir apparaître dans la séquence suivante la formule principale de la figure de déduction, dont notre formule secondaire est une formule partielle. A cette formule principale, on peut alors, en continuant vers le bas, appliquer le même genre de considérations, et ainsi de suite.

On obtient de la sorte le corollaire suivant.

2.513. Corollaire du théorème fondamental (propriété des formules partielles) :

Dans une *LJ*- ou *LK*-dérivation sans coupure, toutes les *H*-*S*-formules qui interviennent sont des formules partielles des *S*-formules qui figurent dans la séquence finale.

2.514. En s'exprimant de façon intuitive, on peut énoncer cette propriété des dérivations sans coupure à peu près de la façon suivante : les *S*-formules s'allongent à mesure que l'on descend vers le bas dans la dérivation; elles ne se raccourcissent jamais. On construit pour ainsi dire le résultat final à partir de ses éléments constituants.

La démonstration représentée par la dérivation ne fait pas de détours, seuls y interviennent des concepts qui figurent également dans le résultat final. (Comparer ceci à ce qui est dit dans l'introduction, au début de ce mémoire.)

Exemple. La dérivation donnée plus haut (1.3) pour $\rightarrow (\neg \exists x Fx) \supset (\forall y \neg Fy)$ peut, par exemple, s'écrire sans coupure de la façon suivante :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Fa \rightarrow Fa}{Fa \rightarrow \exists x\, Fx}\;EES}{\neg \exists x\, Fx,\ Fa \rightarrow}\;NEA}{Fa,\ \neg \exists x\, Fx \rightarrow}\;\text{Inversion.}$$

et la suite comme plus haut.

§ 3.

Démonstration du théorème fondamental.

Le théorème fondamental s'énonçait :

Toute *LJ*-dérivation (ou *LK*-) peut être transformée en une *LJ*-dérivation (ou *LK*-) qui possède la même séquence finale et dans laquelle ne figure aucune coupure.

3. 1. Démonstration du théorème fondamental pour les LK-dérivations.

Nous introduirons (pour rendre la démonstration plus claire) une nouvelle figure de déduction, qui constitue une forme modifiée du schéma de coupure, et que nous appellerons « fusion de séquences (25*) ».

Le schéma de cette figure s'écrit :

$$\frac{\Gamma \to \Theta \quad \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}.$$

Pour obtenir, à partir de ce schéma, une figure de déduction, il faut y remplacer Θ et Δ par des suites de formules, séparées par des virgules, dans chacune desquelles figure au moins une fois (comme membre de la suite) une formule de la forme $\mathfrak{M}$, que nous appellerons la « formule à éliminer », et il faut d'autre part remplacer Θ^* et Δ^* par les mêmes suites de formules, mais en laissant tomber (en tant que membre de la suite) toutes les formules de la forme $\mathfrak{M}$ qui y figurent ($\mathfrak{M}$ peut être une formule quelconque). Γ et Δ doivent être remplacés, comme dans les autres schémas, par des suites quelconques (éventuellement vides) de formules, séparées par des virgules.

Exemple d'une fusion de séquences :

$$\frac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}, \neg\mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}, \mathfrak{B} \to}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \to \neg\mathfrak{A}}.$$

$\mathfrak{B}$ est la formule à éliminer.

On aperçoit immédiatement que toute coupure peut être transformée en une fusion au moyen d'un certain nombre d'atténuations et de permutations.

(Et, inversement, toute fusion de séquences peut être transformée en une coupure au moyen d'un certain nombre de permutations et de contractions préalables; mais nous n'aurons pas à nous servir de cette propriété.)

Dans ce qui suit, nous ne considérerons que des dérivations

(25*) Voir note G *.

dans lesquelles ne figure aucune coupure, mais où peuvent figurer des fusions de séquences.

Étant donné que les dérivations au sens défini antérieurement peuvent être transformées en dérivations de ce nouveau type, il suffit, pour démontrer le théorème fondamental, d'établir qu'une dérivation de ce nouveau type peut être transformée en une dérivation sans fusion de séquences.

Il suffit d'ailleurs pour cela de démontrer le lemme suivant.

Lemme. Une dérivation dont la dernière figure de déduction est une fusion de séquences, et qui ne contient aucune autre fusion de séquences, peut être transformée en une déduction (ayant la même séquence finale) dans laquelle ne figure plus de fusion de séquences.

Le théorème se déduit facilement de ce lemme, comme suit :

On y considère, dans une dérivation quelconque, une fusion de séquences dont la conclusion n'est surmontée d'aucune autre fusion de séquences. La dérivation de cette conclusion est alors du type prévu par le lemme, il est donc possible de la transformer en une dérivation dans laquelle ne figure plus de fusion de séquences. Au terme de cette transformation, le reste de la dérivation totale est resté inchangé. On répète ce processus et on élimine ainsi, en suivant l'ordre dans lequel elles se présentent, toutes les fusions de séquences de la dérivation proposée.

Il nous reste donc à établir la

démonstration du lemme.

(Cette démonstration s'étend jusque 3. 2, exclusivement.)

Nous avons à considérer une dérivation dont la dernière figure de déduction est une fusion de séquences et qui ne contient aucune autre fusion de séquences.

Nous appellerons « degré de la dérivation » le degré de la formule à éliminer par la fusion de séquences (défini en I, 2. 2) (26*).

(26*) Le degré de la dérivation est donc le nombre de signes logiques qui figurent dans la formule du type $\mathfrak{M}$, qui sera éliminée par la fusion de séquences.

Nous appellerons « rang de la dérivation » la somme de son rang de gauche et de son rang de droite. Ces derniers se définissent comme suit :

Le rang de gauche est le nombre le plus élevé de séquences qui se suivent dans une chaîne sans interruption et telles que : la dernière séquence de la suite est la prémisse de gauche de la fusion de séquences, et chacune des séquences de la suite contient dans le conséquent la formule à éliminer.

Le rang de droite est (de façon analogue) le nombre le plus élevé de séquences qui se suivent dans une chaîne sans interruption et telles que : la dernière séquence de la suite est la prémisse de droite de la fusion de séquences et chacune des séquences de la suite contient dans l'antécédent la formule à éliminer.

Le plus petit rang possible est évidemment 2.

Pour démontrer le lemme, nous ferons deux inductions complètes, l'une selon le degré γ, l'autre selon le rang ρ de la dérivation. De façon plus précise :

Nous démontrerons le lemme pour une dérivation de degré γ, en supposant qu'il soit déjà démontré pour des dérivations de degré plus petit (pour autant qu'il y en ait, c'est-à-dire pour autant que γ ne soit pas déjà égale à 0), donc en supposant que de telles dérivations puissent déjà être transformées en dérivations sans fusions de séquences.

D'autre part, nous traiterons d'abord le cas où le rang ρ de la dérivation est égal à 2 (3. 12), en supposant que le lemme soit déjà démontré pour des dérivations de même degré, mais de rang plus petit.

Dans ce qui suit, comme jusqu'ici, les majuscules cursives servent toujours de signes syntaxiques pour représenter des formules, et les majuscules grecques pour représenter des suites de formules (éventuellement vides).

Dans les transformations des dérivations pourront s'introduire de temps à autre des « figures de déduction identiques », c'est-à-dire des figures de déduction ayant une même séquence comme prémisse et comme conclusion. Comme nous n'avons pas admis de telles figures dans notre calcul, nous devrons les éliminer immédiatement chaque fois qu'il s'en présentera; cela peut se réaliser de façon triviale, en laissant tomber tout simplement l'une des deux séquences.

Nous désignons par $\mathfrak{M}$ la formule à éliminer dans la fusion de séquences qui figure à la fin de la dérivation. Elle est de degré γ.

3. 10. Mesure préparatoire à la transformation de la dérivation : modifications des variables individuelles libres.

Nous voulons obtenir une dérivation qui jouisse des propriétés suivantes :

3. 101. Pour toute figure *AES* (ou *EEA*) (27*), on a : la variable propre de cette figure n'intervient dans la dérivation que pour les séquences qui surmontent la conclusion de la figure *AES* (ou *EEA*) et, de plus, elle n'est variable propre d'aucune autre figure *AES* (ou *EEA*).

3. 102. Nous pouvons y arriver en modifiant comme suit les variables individuelles libres.

Nous prenons une figure *AES* (ou *EEA*) qui répond à la condition suivante : sa conclusion n'est surmontée d'aucune figure de déduction de même nature, si ce n'est, éventuellement, de figures qui auraient déjà été traitées de la manière que nous allons dire.

Nous remplaçons la variable propre de cette figure, dans toutes les séquences qui surmontent sa séquence inférieure, par une même variable individuelle libre qui ne figurait pas encore dans la dérivation. Au terme de cette substitution, la figure *AES*

(27*) Il s'agit ici d'une figure de déduction et non d'un schéma, puisqu'il s'agit d'un élément constituant de la dérivation donnée et qu'un schéma est une entité syntaxique, qui nous indique comment obtenir des figures de déduction permises dans notre calcul.

Une figure *AES* est une figure de déduction construite selon les indications du schéma opératoire *AES*.

(ou *EEA*) reste correcte, comme on peut s'en rendre compte facilement. (La variable propre n'était en effet pas contenue dans sa conclusion.) De plus, le reste de la dérivation reste correct, comme le montre le théorème auxiliaire ci-dessous.

Si nous effectuons cette opération pour chacune des figures *AES* et *EEA*, en suivant l'ordre dans lequel elles se présentent, la dérivation reste donc correcte et il est évident qu'elle se trouve finalement posséder la propriété voulue (3. 101).

En outre, et ceci est essentiel, le degré et le rang de la dérivation ne sont pas modifiés, pas plus que sa séquence finale.

3. 103. Donnons maintenant la démonstration du théorème auxiliaire:

(Nous l'énonçons sous une forme un peu plus générale qu'il ne serait nécessaire pour l'application qui doit en être faite ici, parce que nous aurons encore à l'utiliser à un autre endroit (3. 113. 33).

« Une *LK*-séquence fondamentale ou une figure de déduction *LK* se transforme en une séquence fondamentale ou en une figure de déduction de même nature lorsqu'on y remplace une variable individuelle libre, qui n'est pas la variable propre de la figure de déduction, partout où elle figure dans cette séquence fondamentale ou dans cette figure de déduction, par une même variable individuelle libre, à la condition que celle-ci ne soit pas la variable propre de la figure de déduction. »

Cette propriété est triviale, sauf pour les figures *AES*, *AEA*, *EES* et *EEA*. Cependant, même dans ces cas, tout est en ordre : la condition des variables est en effet respectée, puisqu'on ne peut utiliser, comme nouvelle variable, la variable propre, et que l'on ne peut rien substituer à la variable propre. (C'est la condition des variables qui rend nécessaires ces deux restrictions.) De plus, la formule qui — à la suite de notre substitution — provient de $\mathfrak{F}a$ s'obtient de nouveau à partir de la formule qui — à la suite de notre substitution — provient de $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ par substitution de a à $\mathfrak{x}$ (28*).

(28*) Dans chacun des schémas *AES*, *AEA*, *EES* et *EEA*, $\mathfrak{F}a$ désigne la formule que l'on obtient à partir de $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ en remplaçant dans cette dernière

Après cette étape préparatoire (3. 10), voici maintenant comment s'opère la transformation proprement dite de la dérivation, par élimination de la fusion qui y figure.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, nous distinguerons les deux cas :

$$\rho = 2 \qquad (3.11)$$

et

$$\rho > 2 \qquad (3.12).$$

3. 11. Soit $\rho = 2$.

Nous distinguerons un certain nombre de cas.

Les cas 3.111, 3.112, 3.113.1, 3.113.2 sont de nature particulièrement simple : il est possible, en effet, d'y éliminer totalement la fusion de façon immédiate. Les autres cas (3. 113) sont les plus importants : c'est dans le traitement de ces cas qu'apparaîtra l'idée fondamentale de toute la transformation-

Nous y appliquerons l'hypothèse d'induction relative à γ, c'est-à-dire que nous ramènerons chacun de ces cas à la solution du problème de l'élimination pour des dérivations de degré plus petit.

3. 111. La prémisse gauche de la fusion qui se trouve à la fin de la dérivation est une s é q u e n c e f o n d a m e n t a l e. La fusion se présente alors comme suit :

$$\frac{\mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \quad \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda}.$$

On la transforme en :

$$\frac{\Delta \to \Lambda}{\overline{\mathfrak{M}, \Delta^* \to \Lambda}} \left\{ \begin{array}{l} \text{éventuellement plusieurs inversions} \\ \text{et contractions (29*).} \end{array} \right.$$

formule $\mathfrak{x}$ par a. Supposons que, à la suite de notre substitution (celle prévue dans le théorème auxiliaire), la formule $\mathfrak{F}a$ se transforme en $\mathfrak{F}'a$ et $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ en $\mathfrak{F}'\mathfrak{x}$.

La relation de $\mathfrak{F}'a$ à $\mathfrak{F}'\mathfrak{x}$ est la même que celle de $\mathfrak{F}a$ à $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$, c'est-à-dire : on obtient $\mathfrak{F}'a$ à partir de $\mathfrak{F}'\mathfrak{x}$ en remplaçant dans cette dernière formule $\mathfrak{x}$ par a. En somme, notre transformation laisse invariante la relation de $\mathfrak{F}a$ à $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

(29*) Le double trait est une notation condensée : il remplace une suite de figures de déduction. Comme celles-ci sont très simples, il suffit d'en indiquer la nature, sans les écrire explicitement.

Voici le détail de la transformation,

Si la formule moyenne, $\mathfrak{M}$, est la première *S*-formule de la suite Δ et

La partie de la dérivation qui surmonte $\Delta \rightarrow \Lambda$ reste la même. Nous avons donc déjà obtenu une dérivation sans fusion.

3. 112. La séquence supérieure droite de la fusion de séquences est une *séquence fondamentale*. Ce cas peut être traité de façon symétrique au précédent : il suffit de traiter les deux schémas comme si l'un était « l'image de l'autre dans un miroir ».

3. 113. Ni la prémisse gauche ni la prémisse droite de la fusion ne sont une séquence fondamentale. Elles sont donc alors toutes les deux *conclusions de figures de déduction*. Comme $\rho = 2$, le rang de gauche et le rang de droite sont tous deux égaux à 1, ce qui signifie : dans la séquence qui surmonte immédiatement la prémisse gauche de la fusion, la formule moyenne $\mathfrak{M}$ ne figure pas dans le *conséquent*, et dans la séquence qui surmonte immédiatement la prémisse droite de la condensation, $\mathfrak{M}$ ne figure pas dans *l'antécédent*.

Or, on a, de façon générale : si une formule figure dans l'antécédent (ou le conséquent) de la séquence inférieure d'une figure de déduction ou bien $\mathfrak{M}$ est une formule principale, ou bien $\mathfrak{M}$ est le $\mathfrak{D}$ d'une atténuation, ou bien $\mathfrak{M}$ figure aussi dans l'antécédent (ou dans le conséquent) d'une prémisse au moins de la figure de déduction.

si elle ne figure qu'une seule fois dans cette suite (par hypothèse, elle y figure au moins une fois), la transformation revient tout simplement à éliminer la prémisse gauche : $\mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$.

Si $\mathfrak{M}$ ne figure qu'une seule fois dans Δ mais n'y occupe pas la première place, on élimine, comme ci-dessus, la prémisse gauche de la fusion et ensuite on se ramène au cas précédent par une suite d'inversions qui font reculer $\mathfrak{M}$ vers la première place.

Enfin, cas le plus général, si $\mathfrak{M}$ figure plusieurs fois dans Δ, on s'arrange, par une suite d'inversions, pour que toutes ces formules $\mathfrak{M}$ soient situées au début de la suite Δ, par exemple en ramenant d'abord en tête de la suite la formule qui se rencontre la première lorsqu'on parcourt la suite de gauche à droite, et en opérant de même pour les autres formules $\mathfrak{M}$, successivement.

La suite Δ commence alors par n formules $\mathfrak{M}$.

Par (n-1) contractions dans l'antécédent, on élimine (n-1) de ces formules $\mathfrak{M}$ et on obtient la séquence voulue : $\mathfrak{M}, \Delta^* \rightarrow \Lambda$, où $\mathfrak{M}$ ne figure plus dans Δ^*.

Ceci apparaît immédiatement à l'examen des schémas de déduction (1.21, 1.22).

Si maintenant on examine les hypothèses des trois cas suivants, on s'aperçoit facilement qu'elles épuisent toutes les possibilités du cas 3.113.

3.113.1. La prémisse gauche de la fusion est la conclusion d'une atténuation. La fin de dérivation se présente donc comme suit :

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{M}} \quad \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta, \Lambda}.$$

On la transforme en :

$$\cfrac{\Gamma \to \Theta}{\overline{\Gamma, \Delta^* \to \Theta, \Lambda}} \left.\right\} \text{éventuellement plusieurs atténuations et permutations.}$$

La partie de la dérivation qui surmonte $\Delta \to \Lambda$ disparaît.

3.113.2. La prémisse droite de la fusion est la conclusion d'une atténuation. Ce cas se résout de façon symétrique au précédent.

3.113.3. La formule moyenne $\mathfrak{M}$ figure dans le conséquent de la prémisse gauche et dans l'antécédent de la prémisse droite, simplement à titre de formule principale de l'une des figures de déduction opératoires.

Selon que le signe terminal de $\mathfrak{M}$ (une formule sans signe logique ne peut être une formule principale) est &, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\neg$, ou $\supset$, nous aurons l'un des cas 3.113.31 à 3.113.36.

3.113.31. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est &. La fin de la dérivation se présente alors comme suit :

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \quad \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\ UES \qquad \cfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_2 \to \Theta_2}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma_2 \to \Theta_2}\ UEA}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{fusion.}$$

(et sous une forme correspondante pour l'autre forme du schéma *UEA;* solution entièrement analogue).

On la transforme en :

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow \Theta_1^*, \Theta_2} \text{ fusion}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_1, \Theta_2} \left.\right\} \text{éventuellement plusieurs atténuations et inversions (30*).}$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'hypothèse d'induction relative à γ (31*) à la partie de la dérivation dont la dernière

(30*) Si les suites Θ_1 et Γ_2 (ou l'une d'entre elles seulement) contiennent la formule $\mathfrak{A}$, la fusion les transforme en des suites Θ_1^* et Γ_2^* où ne figure plus cette formule $\mathfrak{A}$. Pour ramener cette conclusion à la séquence finale sous la forme voulue :

$$\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_1, \Theta_2$$

il faut donc rendre à Θ_1^* et à Γ_2^* leurs formes initiales.

Si $\mathfrak{A}$ figurait n fois dans Θ_1, n atténuations dans le conséquent ajouteront n formules $\mathfrak{A}$ à la suite Θ_1^*, Θ_2. Par une série d'inversions, il sera ensuite possible de transporter ces formules aux places voulues dans Θ_1^*, de façon à ce que Θ_1^* reprenne la forme. On opère de même pour Γ_2^*, par des atténuations dans l'antécédent, suivies d'inversions.

Ce mécanisme, ou des mécanismes semblables seront souvent utilisés dans la suite.

(31*) Cette hypothèse d'induction est la suivante :

« Toute dérivation de degré inférieur à γ peut être transformée en une dérivation sans fusion. »

Mais si on utilise cette *hypothèse d'induction* on n'utilise pas, en cette étape de la démonstration, le principe d'induction lui-même.

Ce qu'on démontre, dans ce numéro et dans les numéros suivants, c'est que, si le lemme est vrai pour toute dérivation de degré inférieur à γ, il est vrai pour une dérivation de degré γ. On établit cette propriété en indiquant comment réduire d'une unité le degré de la dérivation (c'est-à-dire comment remplacer la fusion par une fusion dont la formule moyenne contient un signe logique de moins). On est ainsi ramené au cas où l'hypothèse joue et où, par conséquent, le lemme est valable.

Le *raisonnement d'induction complète*, nécessaire pour achever la démonstration, n'est formulé nulle part de façon explicite par Gentzen. Il tient d'ailleurs en quelques mots :

« Le lemme est vrai pour toute dérivation de degré 0.

« S'il est vrai pour toute dérivation de degré inférieur à γ, il est vrai pour toute dérivation de degré γ.

« Il est donc vrai pour toute dérivation (de degré quelconque). »

(Dans tout ceci, bien entendu, on suppose le rang égal à deux. La seconde partie de la démonstration effectuera l'induction sur le rang.)

On remarque que le principe d'induction est utilisé sous une forme spéséquence est $\Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow \Theta_1^*, \Theta_2$, puisqu'elle a un degré plus petit que γ. ($\mathfrak{A}$ contient en effet moins de signes logiques que $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$.) La dérivation tout entière peut donc être transformée en une dérivation sans fusion.

3. 113. 32. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\vee$. Ce cas se résout de façon symétrique au précédent.

3. 113. 33. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\forall$. La partie finale de la dérivation se présente alors comme suit :

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1, \forall\mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,AES \qquad \cfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{b}, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}{\forall\mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}\,AEA}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_1, \Theta_2}\ \text{fusion.}$$

On la transforme en :

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma_1 \rightarrow \Theta_2, \mathfrak{F}\mathfrak{b} \qquad \mathfrak{F}\mathfrak{b}, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2^* \rightarrow \Theta_1^*, \Theta_2}\ \text{fusion.}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Theta_1, \Theta_2}\ \Big\}\ \text{éventuellement plusieurs atténuations et permutations.}$$

Au-dessus de la prémisse gauche de la fusion $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_2, \mathfrak{F}\mathfrak{b}$, on écrit la même partie de la dérivation qui se trouvait au-dessus de $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{a}$, mais on y remplace la variable individuelle libre $\mathfrak{a}$, partout où elle figure, par $\mathfrak{b}$. Par le théorème auxiliaire 3. 103 et la propriété 3. 101, on obtient déjà que la partie de la dérivation qui *surmonte* $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{b}$ se transforme en une partie de dérivation qui est correcte. (En vertu de 3. 101, ni $\mathfrak{a}$ ni $\mathfrak{b}$ ne peuvent être en effet la variable propre de l'une des figures de déduction qui figurent dans cette partie de la dérivation.) On peut appliquer les mêmes considérations à la partie de la dérivation qui *contient* la séquence $\Gamma_1 \rightarrow \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{b}$, étant

ciale. Le principe d'induction sous sa forme ordinaire peut s'écrire symboliquement :

$$(P\,(0)\ \&\ (P\,(n\text{-}1) \supset P\,(n))) \supset P\,(n).$$

Sous la forme utilisée ci-dessus, il s'écrira :

$$((P\,(0)\ \&\ (\forall r\,((r < n) \supset (P\,(r) \supset P\,(n))) \supset P\,(n).$$

donné que cette séquence provient de $\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{F}\mathfrak{a}$ par substitution de $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{a}$. En effet : en vertu de la condition des variables pour le schéma *AES*, $\mathfrak{a}$ ne pouvait figurer ni dans Γ_1 ni dans Θ_1, ni dans $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. Or, $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ provient de $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ par substitution de $\mathfrak{a}$ à $\mathfrak{x}$, et $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$ provient de $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ par substitution de $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{x}$. Par conséquent, $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$ provient aussi de $\mathfrak{F}\mathfrak{a}$ par substitution de $\mathfrak{b}$ à $\mathfrak{a}$.

Dans la nouvelle dérivation, la formule moyenne $\mathfrak{F}\mathfrak{b}$ a un degré inférieur à γ; en vertu de l'hypothèse d'induction, la fusion peut donc être éliminée.

3.113.34. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\exists$. Ce cas se résout de façon symétrique au précédent.

3.113.35. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\neg$. La section finale de la dérivation se présente alors comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \neg\mathfrak{A}}\,NES \qquad \dfrac{\Gamma_2 \to \Theta_2, \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \Gamma_2 \to \Theta_2}\,NEA}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \text{fusion.}$$

On la transforme en :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_2 \to \Theta_2, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1}{\Gamma_2, \Gamma_1^* \to \Theta^*, \Theta_1}\ \text{fusion.}}{\Gamma_1, \Gamma_2 \to \Theta_1, \Theta_2}\ \left\}\begin{array}{l}\text{éventuellement plusieurs per-}\\ \text{mutations et atténuations.}\end{array}\right.$$

La nouvelle fusion peut être éliminée en vertu de l'hypothèse d'induction.

3.113.36. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\supset$. La section finale de la dérivation se présente alors comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B}}{\Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,FES \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\,FEA}{\Gamma_1, \Gamma, \Delta \to \Theta_1, \Theta, \Lambda}\ \text{fusion.}$$

On la transforme en :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma_1 \to \Theta_1, \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A}, \Gamma_1, \Delta^* \to \Theta_1^*, \Lambda}\ \text{fusion}}{\Gamma_1, \Gamma_1^*, \Delta^{**} \to \Theta^*, \Theta_1^*, \Lambda}\ \text{fusion}}{\Gamma_1, \Gamma, \Delta \to \Theta_1, \Theta, \Lambda}\ \left\}\begin{array}{l}\text{éventuellement plusieurs per-}\\ \text{mutations et atténuations.}\end{array}\right.$$

(Les astérisques ont évidemment la signification suivante : Δ^* et $\Theta_1{}^*$ proviennent de Δ et de Θ_1 par élimination de toutes les S-formules de forme $\mathfrak{B}$; $\Gamma_1{}^*$, Δ^{**} et Θ^* proviennent de Γ_1, Δ^* et Θ par élimination de toutes les S-formules de forme $\mathfrak{A}$.)

Nous avons cette fois deux fusions, mais chacune des formules moyennes est de degré inférieur à γ. Nous appliquons l'hypothèse d'induction d'abord à la fusion supérieure. (C'est-à-dire à la partie de la dérivation dont cette fusion est la dernière figure de déduction.)

Celle-ci peut donc être éliminée. Ensuite, nous pouvons éliminer également la fusion inférieure.

3.12. Soit $\rho > 2$.

Nous distinguons d'abord deux cas principaux : le rang de droite est plus grand que 1 (3.121), ou le rang de droite est égal à 1 et donc le rang de gauche est plus grand que 1 (3.122). Le second cas pourra être traité pour l'essentiel de façon symétrique au premier.

3.121. Le rang de droite est plus grand que 1.

C'est-à-dire : la prémisse droite de la fusion est conclusion d'une figure de déduction, et, dans l'une au moins des prémisses de cette figure, que nous désignons par $\mathfrak{Sf}$, la formule $\mathfrak{M}$ figure dans l'antécédent.

L'idée fondamentale du procédé de transformation est la suivante :

Le cas $\rho = 2$ ayant été ramené dans sa généralité au traitement de la dérivation de degré plus petit, nous allons maintenant être ramenés à l'examen de dérivations de même degré, mais de rang plus petit, en sorte que nous pourrons alors appliquer l'hypothèse d'induction relative à ρ (32*).

(32*) Cette hypothèse est la suivante : toute dérivation de rang plus petit que ρ, et de degré quelconque, peut être transformée en une dérivation sans fusion de séquences.

Pour l'application du principe d'induction, même remarque que pour 3. 113. 31.

Seul le premier cas, 3. 121. 1, constitue une exception : dans ce cas, en effet, la fusion s'élimine de façon immédiate.

Dans les autres cas, on est ramené à des dérivations de rang plus petit de la manière suivante : on fait pour ainsi dire glisser la fusion d'un échelon vers le haut, en la faisant passer au-dessus de la figure de déduction $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$. De façon plus précise (le cas 3.121.231 offre un exemple particulièrement clair) : on écrit la prémisse gauche de la fusion (on la désignera toujours dans la suite par $\Pi \rightarrow \Sigma$), prémisse qui se trouvait primitivement à côté de la conclusion de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$, à côté des prémisses de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$, qui deviennent alors prémisses de nouvelles fusions; les conclusions de ces fusions servent alors de prémisses à une nouvelle figure de déduction, qui prend la place de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$, et grâce à laquelle nous pouvons revenir à la séquence finale primitive, soit de façon directe, soit par adjonction d'autres figures de déduction.

Chacune des nouvelles fusions possède évidemment un rang qui est plus petit que ρ, car le rang de gauche demeure inchangé et le rang de droite est diminué au moins d'une unité.

Dans l'application précise de cette idée fondamentale se présentent encore diverses particularités qui obligent à distinguer les cas correspondants et à les traiter séparément.

3. 121. 1. $\mathfrak{M}$ figure dans l'antécédent de la prémisse gauche de la fusion.

La finale de la dérivation se présente comme suit :

$$\frac{\Pi \rightarrow \Sigma \qquad \Delta \rightarrow \Lambda}{\Pi, \Delta^* \rightarrow \Sigma^*, \Lambda}.$$

$\mathfrak{M}$ figure donc dans Π.

On transforme la dérivation en :

$$\frac{\Delta \rightarrow \Lambda}{\Pi, \Delta^* \rightarrow \Sigma^*, \Lambda} \Big\{ \text{éventuellement plusieurs atténuations, contractions et inversions (33*).}$$

(33*) Atténuations pour obtenir Π et Σ^* (s'ils ne sont pas vides), contractions pour éliminer $\mathfrak{M}$ de Δ; une ou plusieurs contractions suivant que $\mathfrak{M}$ figure une ou plusieurs fois dans Δ. Plus les inversions nécessaires.

3. 121. 2. $\mathfrak{M}$ ne figure pas dans l'antécédent de la prémisse gauche de la fusion. (Nous ne ferons usage de cette hypothèse qu'à partir de 3. 121. 222.)

3. 121. 21. $\mathfrak{Sf}$ est une atténuation, une contraction ou une inversion dans l'antécédent.

Alors la section terminale de la dérivation se présente comme suit :

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\Psi \to \Theta}{\Xi \to \Theta}\,\mathfrak{Sf}}{\Pi, \Xi^* \to \Sigma^*, \Theta}\ \text{fusion.}$$

On la transforme en :

$$\begin{array}{l|l}
\Pi \to \Sigma \quad \Psi \to \Theta & \\
\hline
\Pi, \Psi^* \to \Sigma^*, \Theta & \text{fusion} \\
\hline\hline
\Psi^*, \Pi \to \Sigma^*, \Theta & \left.\begin{array}{l}\text{éventuellement plusieurs}\\ \text{inversions (34*)}\end{array}\right\} \\
\hline
\Xi^*, \Pi \to \Sigma^*, \Theta & \text{voir ci-dessous} \\
\hline\hline
\Pi, \Xi^* \to \Sigma^*, \Theta & \left.\begin{array}{l}\text{éventuellement plusieurs}\\ \text{inversions.}\end{array}\right\}
\end{array}$$

La figure de déduction qui est restée sans désignation est de même nature que $\mathfrak{Sf}$, pour autant que les *S*-formules désignées dans le schéma de $\mathfrak{Sf}$ (1. 21) par $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$ ne soient pas identiques à $\mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{E}$ est identique à $\mathfrak{M}$, c'est une figure de déduction identique (Ψ^* sera identique à Ξ^*).

La dérivation de la conclusion de la nouvelle fusion a le même rang de gauche que l'ancienne dérivation, tandis que son rang de droite est plus petit d'une unité. En vertu de l'hypothèse d'induction, la fusion peut donc être éliminée.

3. 121. 22. $\mathfrak{Sf}$ est une figure de déduction ne comportant qu'une seule prémisse, mais ce n'est ni une atténuation, ni une contraction, ni une inversion dans l'antécédent. La fin de la dérivation se présente alors comme suit :

(34*) « Éventuellement », parce que Π pourrait être vide.

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Xi, \Gamma \to \Omega_2}\,\mathfrak{S}\mathfrak{f}}{\Pi, \Xi^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_2}\ \text{fusion.}$$

Dans cette dérivation, Γ est constitué de la même suite de S-formules qui est désignée par Γ dans le schéma de la figure de déduction (1. 21, 1. 22). Ψ peut aussi être vide ou se réduire à une formule secondaire de la figure de déduction, Ξ peut être vide ou se réduire à la formule principale de la figure de déduction.

On transforme d'abord la fin de la dérivation en :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Pi, \Psi^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_1}\ \text{fusion}}{\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1}\ \left.\begin{matrix}\text{éventuellement plusieurs inversions}\\ \text{et atténuations.}\end{matrix}\right.}{\Xi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1}$$

La dernière figure de déduction est évidemment une figure de même nature que $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$. (On considère Γ^*, Π comme le Γ de la figure de déduction et on considère Σ^* comme le Θ de la figure de déduction.)

La condition des variables nous impose simplement un peu d'attention (lorsque $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ est une figure *AES* et *EEA*) : cette condition demeure remplie, en vertu de 3. 101, car, selon la propriété énoncée en 3. 101, la variable propre de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$, quelle qu'elle soit, ne pouvait figurer ni dans Π ni dans Σ.

Dans la nouvelle dérivation on peut éliminer la fusion en vertu de l'hypothèse d'induction.

Nous obtenons ainsi une dérivation sans fusion qui se termine par la figure de déduction suivante :

$$\frac{\Psi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_1}{\Xi, \Gamma^*, \Pi \to \Sigma^*, \Omega_2}.$$

En général, la séquence finale n'est pas encore celle que nous devons obtenir.

Nous poursuivons donc nos opérations comme suit :

3. 121. 221. Ξ ne contient pas $\mathfrak{M}$.

Dans ce cas, nous ajoutons éventuellement (35*) plusieurs inversions à notre dérivation et nous obtenons la séquence finale de la dérivation primitive (36*).

3. 121. 222. Ξ contient $\mathfrak{M}$. Ξ est donc alors la formule principale de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ et est identique à $\mathfrak{M}$. Nous ajoutons à notre dérivation :

$$\cfrac{\Pi \rightarrow \Sigma \qquad \mathfrak{M}, \Gamma^*, \Pi \rightarrow \Sigma^*, \Omega_2}{\cfrac{\Pi, \Gamma^*, \Pi^* \rightarrow \Sigma^*, \Sigma^*, \Omega_2}{\Pi, \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*, \Omega_2}} \begin{array}{l} \text{fusion} \\ \left.\begin{array}{l}\text{éventuellement plusieurs} \\ \text{contractions et inversions.}\end{array}\right. \end{array}$$

Nous retombons sur la séquence finale de la dérivation primitive.

(Nous écrivons à nouveau au-dessus de la séquence $\Pi \rightarrow \Sigma$ la dérivation qui lui correspond.)

Mais nous avons ainsi introduit une fusion dans la dérivation. Le rang de gauche de notre dérivation est le même que dans la dérivation primitive. Le rang de droite est maintenant égal à 1. Car, immédiatement au-dessus de la prémisse droite se trouve la séquence :

$$\Psi, \Gamma^*, \Pi \rightarrow \Sigma^*, \Omega_1.$$

$\mathfrak{M}$ ne figure plus dans l'antécédent de cette séquence. Car Γ^* ne contient pas $\mathfrak{M}$, Π, de toute façon, ne le contient pas, en vertu de 3.121.2, et Ψ contient au plus une formule secondaire de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$: celle-ci ne peut être identique à $\mathfrak{M}$, étant donné que la formule principale de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ est identique à $\mathfrak{M}$.

Cette fusion peut donc également être éliminée en vertu de l'hypothèse d'induction.

3. 121. 23. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ est une figure de déduction comportant deux prémisses, donc une figure *UES*, *OEA* ou *FEA*.

(En vue de l'application à la logique intuitionniste (3. 2),

(35*) « Éventuellement », car Π pourrait être vide.
(36*) Car, dans notre hypothèse, Ξ^* est identique à Ξ.

nous traitons chacune des possibilités de façon plus détaillée qu'il ne serait nécessaire pour le cas classique.)

3.121.231. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ est une figure *UES*. La finale de la dérivation se présente alors comme suit :

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\; UES}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\;\text{fusion.}$$

($\mathfrak{M}$ figure dans Γ.) On la transforme en :

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{A}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*; \Theta, \mathfrak{A}}\;\text{fusion} \qquad \dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \Gamma \to \Theta, \mathfrak{B}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{B}}\;\text{fusion}}{\Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}\; UES.$$

Les deux fusions peuvent être éliminées en vertu de l'hypothèse d'induction.

3.121.232. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ est une figure *OEA*. La finale de la dérivation se présente alors comme suit :

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Theta}\; OEA}{\Pi, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\;\text{fusion.}$$

($(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^*$ désigne $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ou ne désigne rien, suivant que $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ n'est pas identique à $\mathfrak{M}$ ou qu'il lui est identique.)

$\mathfrak{M}$ figure certainement dans Γ. (Car, sinon, $\mathfrak{M}$ serait identique à $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, et le rang de droite serait égal à 1, ce qui contredirait l'hypothèse 3.121.)

On transforme d'abord la finale de la dérivation en :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{A},\Gamma \to \Theta}{\Pi,\mathfrak{A}^*,\Gamma^* \to \Sigma^*,\Theta}\;\text{fusion}}{\mathfrak{A}, \Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*,\Theta}\left\{\begin{array}{l}\text{éventuellement plu-}\\ \text{sieurs inversions et}\\ \text{atténuations (37*)}\end{array}\right. \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B},\Gamma \to \Theta}{\Pi,\mathfrak{B}^*,\Gamma^* \to \Sigma^*,\Theta}\;\text{fusion}}{\mathfrak{B}, \Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*,\Theta}\left\{\begin{array}{l}\text{éventuellement plu-}\\ \text{sieurs inversions et}\\ \text{atténuations}\end{array}\right.}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Pi, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Theta}\; OEA$$

(37*) $\mathfrak{A}^*$ désigne $\mathfrak{A}$ si $\mathfrak{A}$ n'est pas identique à $\mathfrak{M}$: dans ce cas, il suffit de plusieurs inversions (à moins que Π ne soit vide) pour obtenir la séquence finale. Si $\mathfrak{A}$ est identique à $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}^*$ ne désigne rien: dans ce cas, il faut une atténuation dans l'antécédent pour obtenir la séquence finale.

Les deux condensations peuvent être éliminées en vertu de l'hypothèse d'induction.

A partir de là, le processus est le même qu'en 3. 121. 221 et en 3. 121. 222. Nous distinguons deux cas : $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ n'est pas identique à $\mathfrak{M}$, ou bien $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ est identique à $\mathfrak{M}$.

Dans le premier cas, nous ajoutons éventuellement plusieurs inversions à notre dérivation primitive. Dans le second cas, nous ajoutons à notre dérivation une fusion dont la prémisse gauche est $\Pi \rightarrow \Sigma$, et en y ajoutant encore (éventuellement) plusieurs contractions et inversions, nous retombons sur la séquence finale de la dérivation primitive. La fusion ainsi introduite peut être éliminée, étant donné que le rang de droite de notre dérivation est égal à 1. (Tout ceci comme dans 3. 121. 222.)

3. 121. 233. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ est une figure *FEA*. La finale de la dérivation se présente alors comme suit :

$$\dfrac{\Pi \rightarrow \Sigma \qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \rightarrow \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, \Lambda}\, FEA}{\Pi, (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})^*, \Gamma^*, \Delta^* \rightarrow \Sigma^*, \Theta, \Lambda}\, \text{fusion.}$$

3. 121. 233. 1. $\mathfrak{M}$ figure dans Γ et dans Δ.

Dans ce cas, on transforme d'abord la finale de la dérivation en :

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \rightarrow \Sigma \quad \Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{A}}{\Pi, \Gamma^* \rightarrow \Sigma^*, \Theta, \mathfrak{A}}\,\text{fusion} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \rightarrow \Sigma \quad \mathfrak{B}, \Delta \rightarrow \Lambda}{\Pi, \mathfrak{B}^*, \Delta^* \rightarrow \Sigma^*, \Lambda}\,\text{fusion}}{\mathfrak{B}, \Pi, \Delta^* \rightarrow \Sigma^*, \Lambda}\left\{\begin{array}{l}\text{éventuellement plusieurs}\\ \text{inversions et atténuations}\end{array}\right.}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Pi, \Gamma^*, \Pi, \Delta^* \rightarrow \Sigma^*, \Theta, \Sigma^*, \Lambda}\, FEA.$$

Ces deux fusions peuvent être éliminées en vertu de l'hypothèse d'induction. On opère ensuite de la même façon qu'en 3. 121. 221 et 3. 121. 222. (Avec cette seule différence, que dans le premier cas, outre des inversions, des contractions peuvent être nécessaires (38*).)

3. 121. 233. 2. $\mathfrak{M}$ ne figure pas à la fois dans Γ et dans Δ.

(38*) Pour éliminer l'une des deux suites Π (si Π n'est pas vide) et l'une des deux suites Σ^* (si Σ^* n'est pas vide).

En vertu de 3. 121, $\mathfrak{M}$ doit figurer cependant dans l'une de ces deux suites. Nous examinerons le cas où $\mathfrak{M}$ figure dans Δ, mais pas dans Γ; l'autre cas se traite de façon analogue.

On transforme la finale de la dérivation en :

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Sigma \quad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\Pi, \mathfrak{B}^*, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\ \text{fusion}}{\mathfrak{B}, \Pi, \Delta^* \to \Sigma^*, \Lambda}\ \left\}\begin{array}{l}\text{éventuellement plusieurs}\\ \text{inversions et atténuations}\end{array}\right.}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Pi, \Delta^* \to \Theta, \Sigma^*, \Lambda}\ FEA.$$

La fusion peut être éliminée en vertu de l'hypothèse d'induction. On procède ensuite comme dans 3. 121. 221 et 3. 121. 222. (Dans le second cas, donc lorsque $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ est identique à $\mathfrak{M}$, le rang de droite de la dérivation qui contient la nouvelle fusion est, comme toujours, égal à 1, étant donné que — pour les mêmes motifs que dans les autres cas — $\mathfrak{M}$ ne figure pas dans $\mathfrak{B}$, ni dans Π, ni dans Δ^*, ni non plus dans Γ, en raison de l'hypothèse du cas actuellement traité.)

3. 122. Le rang de droite est égal à 1. Le rang de gauche est alors plus grand que 1.

Ce cas doit être traité, pour l'essentiel, symétriquement avec 3. 121.

Il suffit simplement de porter l'attention sur les figures de déduction qui n'ont pas de contrepartie symétrique, les figures *FES* et *FEA*. En 3. 121. 22, nous avons représenté les figures de déduction $\mathfrak{Sf}$, qui ne contiennent qu'une seule séquence supérieure, par le schéma général :

$$\frac{\Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Xi, \Gamma \to \Omega_2}.$$

Le schéma symétrique s'écrira :

$$\frac{\Omega_1 \to \Gamma, \Psi}{\Omega_2 \to \Gamma, \Xi}\text{'}$$

et une figure *FES* peut être représentée sous cette forme sans aucune modification préalable. (Γ représente ici les formules désignées par Θ dans les schémas 1. 21, 1. 22.)

3. 122. 1. Par contre, nous devons traiter à part le cas où la figure de déduction $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ est une figure *FEA*. Sans doute, le procédé à utiliser est-il tout à fait semblable à celui qui a été employé en 3. 121. 233, mais il n'y correspond pas de façon entièrement symétrique.

La finale de la dérivation se présente donc comme suit :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}\;FEA \qquad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta^*, \Delta^*, \Pi}\;\text{fusion.}$$

3. 122. 11. $\mathfrak{M}$ figure dans Θ et dans Λ.

On transforme alors la finale de la dérivation en :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \quad \Sigma \to \Pi}{\Gamma, \Sigma^* \to \Theta^*, \mathfrak{A}^*, \Pi}\;\text{fusion}}{\Gamma, \Sigma^* \to \Theta^*, \Pi, \mathfrak{A}}\;\left\{\begin{array}{l}\text{éventuellement plu-}\\ \text{sieurs inversions et}\\ \text{atténuations}\end{array}\right. \qquad \dfrac{\mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda \quad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{B}, \Delta, \Sigma^* \to \Lambda^*, \Pi}\;\text{fusion}}{\dfrac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Sigma^*, \Delta, \Sigma^* \to \Theta^*, \Pi, \Lambda^*, \Pi}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta^*, \Lambda^*, \Pi}\;\left\{\begin{array}{l}\text{éventuellement plu-}\\ \text{sieurs contractions et}\\ \text{inversions.}\end{array}\right.}\;FEA$$

Les deux fusions peuvent être éliminées en vertu de l'hypothèse d'induction.

3. 122. 12. $\mathfrak{M}$ ne figure pas à la fois dans Θ et dans Λ. $\mathfrak{M}$ doit cependant figurer dans l'une de ces deux suites. Nous examinerons le cas où $\mathfrak{M}$ figure dans Λ, mais non dans Θ; l'autre cas se traite de façon analogue.

On transforme la finale de la dérivation en :

$$\dfrac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\mathfrak{B}, \Delta \to \Lambda \qquad \Sigma \to \Pi}{\mathfrak{B}, \Delta, \Sigma^* \to \Lambda^*, \Pi}\;\text{fusion}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta, \Sigma^* \to \Theta, \Lambda^*, \Pi}\;FEA.$$

La fusion peut être éliminée en vertu de l'hypothèse d'induction.

3. 2. Démonstration du théorème fondamental pour les *LJ*-dérivations.

Pour transformer une *LJ*-dérivation en une *LJ*-dérivation sans coupure, on applique exactement le même procédé que pour les LK-dérivations.

Étant donné qu'une LJ-dérivation est une LK-dérivation de type spécial, il est clair que les transformations voulues peuvent être réalisées. Nous avons simplement à vérifier que, à chacune des étapes de la transformation, une LJ-dérivation se transforme bien en une autre LJ-dérivation; en d'autres termes, nous devons démontrer que, si chacune des H-séquences d'une dérivation ne contient pas plus d'une S-formule au conséquent, il en est de même de chacune des H-séquences de la dérivation transformée.

Nous examinons donc de ce point de vue chacune des étapes de la transformation.

3.21. La substitution des fusions aux coupures.

Une LJ-coupure se présente comme suit :

$$\frac{\Gamma \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Lambda}.$$

Schéma où Λ contient au plus une S-formule.

Ce schéma doit être transformé en :

$$\cfrac{\Gamma \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\cfrac{\Gamma, \Delta^* \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Lambda}} \quad \begin{array}{l} \text{condensation} \\ \left.\begin{array}{l}\text{éventuellement plusieurs inversions} \\ \text{et expansions dans l'antécédent.}\end{array}\right\} \end{array}$$

Au terme de cette substitution, on obtient de nouveau une LJ-dérivation.

3.22. Par modification de variables individuelles libres (3.10) une LJ-dérivation se transforme en une autre LJ-dérivation : ceci se vérifie de façon triviale.

3.23. La transformation proprement dite (3.11 et 3.12).

Nous devons montrer, dans chacun des cas 3.111 à 3.122.12, que les transformations prévues n'introduisent aucune séquence contenant plus d'une S-formule au conséquent.

3.231. Examinons d'abord les cas 3.11.

Dans les cas 3.111, 3.113.1, 3.113.31, 3.113.35 et 3.113.36, n'interviennent, dans chacun des conséquents des séquences de la nouvelle dérivation, que des formules qui figuraient déjà dans le conséquent d'une séquence de l'ancienne dérivation.

Le cas 3. 113. 33 se présente de façon essentiellement similaire : il fait cependant intervenir, en plus, un changement de variables individuelles libres : mais ceci ne change évidemment rien au nombre des formules qui figurent au conséquent d'une séquence.

Les cas 3. 112, 3. 113. 2, 3. 113. 32 et 3. 113. 34 ont été traités de façon symétrique aux cas 3. 111, 3. 113. 1, 3. 113. 32 et 3. 113. 33. Ceci signifie que, pour obtenir un cas à partir de l'autre, il suffit de lire les schémas de droite à gauche au lieu de les lire de gauche à droite (et de changer les signes logiques, mais ceci ne joue ici aucun rôle).

Dans un cas donné figure donc dans l'antécédent exactement ce qui figure au conséquent dans le cas correspondant. Or, les antécédents des cas 3. 111, 3. 113. 1, 3. 113. 31 et 3. 113. 33 jouissent de la même propriété que les conséquents de ces mêmes cas : dans les antécédents de chacune des séquences de la nouvelle dérivation ne figurent que des formules qui figuraient déjà dans l'antécédent d'une séquence de l'ancienne dérivation.

Les cas symétriques à ceux-ci : 3. 112, 3. 113. 2, 3. 113. 32 et 3. 113. 34, sont donc liquidés de la sorte.

3. 232. Passons maintenant aux cas 3. 12.

3. 232. 1. Dans les cas 3. 121, on a, de façon générale : Σ^* est vide, parce que la suite Σ, dans $\Pi \rightarrow \Sigma$, ne peut comporter qu' u n e s e u l e formule, et celle-ci doit être identique à $\mathfrak{M}$.

On voit dès lors facilement que, comme plus haut, dans les conséquents des séquences de la nouvelle dérivation ne peuvent figurer que des formules qui figuraient déjà dans le conséquent d'une séquence de l'ancienne dérivation.

3. 232. 2. Dans les cas 3. 122, il est un peu plus difficile de

voir qu'une LJ-dérivation se transforme toujours en une LJ-dérivation. Comme plus haut, pour l'examen des cas symétriques, nous avons à porter notre attention sur les antécédents dans les schémas 3. 121.

Nous devons opérer ici une nouvelle subdivision.

3. 232. 21. Le symétrique du cas 3. 121. 1 est trivial, car dans l'antécédent de chacune des séquences de la nouvelle dérivation (dans le cas 3. 121. 1) ne figurent de nouveau que des formules qui figuraient déjà dans l'antécédent d'une séquence de l'ancienne dérivation.

3. 232. 22. Dans les symétriques des cas 3. 121. 2, la fusion qui termine la dérivation se présente comme suit :

$$\frac{\Omega \rightarrow \mathfrak{M} \qquad \Sigma \rightarrow \Pi}{\Omega, \Sigma^* \rightarrow \Pi}.$$

Ce schéma Π contient ainsi au plus une S-formule et $\Omega \rightarrow \mathfrak{M}$ est la conclusion d'une figure de LJ-déduction dont l'une au moins des prémisses contient $\mathfrak{M}$ comme formule au conséquent. Si nous examinons les schémas de déduction 1. 21 et 1. 22, nous apercevons facilement qu'une telle figure de déduction ne peut être qu'une atténuation, une contraction ou une inversion dans l'antécédent, ou bien une figure *OEA*, ou *UEA*, ou *EEA* ou *AEA*, ou *FEA*. Laissons provisoirement de côté les figures *OEA* et *FEA*; toutes les possibilités qui subsistent appartiennent alors au symétrique du cas 3. 121. 22, et il est évident que Ψ et Ξ sont alors toujours vides. (Γ correspond au Θ de la figure de déduction.) Nous avons donc le symétrique du cas 3.121.221. D'autre part, Γ est identique à $\mathfrak{M}$, Γ^* est donc vide et Π contient au plus une formule (39*).

Ainsi, dans la nouvelle dérivation, le conséquent d'une séquence ne contient jamais plus d'une formule.

Le cas *OEA* est le symétrique du cas 3. 121. 231. De nou-

(39*) Si on laisse de côté les figures *OEA* et *FEA*, on voit donc que les veau, Γ est identique à $\mathfrak{M}$ et Γ^* est vide, Π contient au plus une formule : tout est donc en ordre.

symétriques aux cas 3. 121. 2 sont en réalité tous des symétriques des cas 3. 121. 22.

Dans les cas 3. 121. 22, la dérivation se termine de la façon suivante :

$$\dfrac{\Pi \to \Sigma \qquad \dfrac{\Psi, \Gamma \to \Omega_1}{\Xi, \Gamma \to \Omega_2}\ \mathfrak{Sf}}{\Pi, \Xi^*, \Gamma^* \to \Sigma^*, \Omega_2}\ \text{fusion.}$$

Ce qui donne symétriquement :

$$\dfrac{\dfrac{\Omega_1 \to \Gamma, \Psi}{\Omega_2 \to \Gamma, \Xi} \qquad \Sigma \to \Pi}{\Omega_2, \Sigma^* \to \Gamma^*, \Xi^*, \Pi}\ \text{fusion.}$$

Comme il s'agit d'une *LJ*-dérivation, aucune séquence ne peut comporter plus d'une formule au conséquent. Comme la formule moyenne $\mathfrak{M}$ est supposée contenue dans Γ, Γ qui figure aux conséquents de deux nouvelles séquences, doit se réduire à cette formule $\mathfrak{M}$, et Ψ et Ξ, qui figurent aux conséquents des mêmes séquences, doivent être vides.

Γ correspond au Θ de la figure de déduction représentée par $\mathfrak{Sf}$, et qui est une figure structurale ou bien une figure *UEA*, ou *EEA*, ou *AEA*, comme on l'a indiqué (les figures *OEA* et *FEA* étant provisoirement écartées).

Comme Γ se réduit à $\mathfrak{M}$, Γ^* est vide.

Et comme Π figure au conséquent de la nouvelle séquence $\Sigma \to \Pi$, Π ne peut contenir plus d'une formule :

Soit $\mathfrak{D}$ cette formule.

La finale de la dérivation de 3. 121. 22 se réduit donc à :

$$\dfrac{\mathfrak{D} \to \Sigma \qquad \dfrac{\mathfrak{M} \to \Omega_1}{\mathfrak{M} \to \Omega_2}\ \mathfrak{Sf}}{\mathfrak{D} \to \Sigma^*, \Omega_2}.$$

Comme on le voit, les antécédents des différentes séquences ne contiennent qu'une seule formule.

Or, les transformations indiquées en 3. 121. 22 n'introduisent pas de nouvelles formules dans les antécédents.

Il s'ensuit que, lorsqu'on refera la symétrique de la dérivation nouvelle (après transformation), on obtiendra une dérivation dont aucune séquence ne contiendra plus d'une formule au conséquent.

Le raisonnement comporte donc trois temps :

Étude des propriétés des antécédents du cas 3. 121 par examens des « symétriques ».

Vérification de l'invariance du nombre de *S*-formules aux antécédents du cas 3. 121,

Extension, par symétrie, de cette propriété d'invariance aux conséquents des cas 3. 122.

Reste le cas *FEA*, c'est-à-dire 3.122.1. Dans une figure *FEA-LJ*, le Θ du schéma (1. 22) est vide. On se trouve donc dans le cas traité en 3.122.12. Λ^* est certainement vide et Π contient au plus une formule; une *LJ*-dérivation se transforme donc également ici en une *LJ*-dérivation.

Note D*

VARIANTES DES CALCULS *LK* ET *LJ*

1. Les méthodes *L* partent de schémas apparemment compliqués et artificiels. Ils revêtent une forme plus accessible si on part de schémas simplifiés, qui sont simplement les schémas des n^os 1.21 et 1.22, où on a supprimé les majuscules grecques désignant des suites de formules. On a dans ce cas :

(1.21) *Schémas de structure :*

Atténuation :

dans l'antécédent : $\dfrac{\rightarrow}{\mathfrak{D} \rightarrow}$, dans le conséquent : $\dfrac{\rightarrow}{\rightarrow \mathfrak{D}}$.

Contraction :

dans l'antécédent : $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D} \rightarrow}{\mathfrak{D} \rightarrow}$, dans le conséquent : $\dfrac{\rightarrow \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\rightarrow \mathfrak{D}}$.

Permutation (inversion) :

dans l'antécédent : $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{E} \rightarrow}{\mathfrak{E}, \mathfrak{D} \rightarrow}$, dans le conséquent : $\dfrac{\rightarrow \mathfrak{E}, \mathfrak{D}}{\rightarrow \mathfrak{D}, \mathfrak{E}}$.

Coupure : $\dfrac{\rightarrow \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D} \rightarrow}{\rightarrow}$.

(1.22) *Schémas opératoires :*

UES : $\dfrac{\rightarrow \mathfrak{A} \qquad \rightarrow \mathfrak{B}}{\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$

UEA : $\dfrac{\mathfrak{A} \rightarrow}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow} \qquad \dfrac{\mathfrak{B} \rightarrow}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow}$

AES : $\dfrac{\rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$

OEA : $\dfrac{\mathfrak{A} \rightarrow \qquad \mathfrak{B} \rightarrow}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow}$

OES : $\dfrac{\rightarrow \mathfrak{A}}{\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\rightarrow \mathfrak{B}}{\rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$

EEA : $\dfrac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \rightarrow}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow}$.

C o n d i t i o n d e s v a r i a b l e s. Dans les schémas *AES* et *EEA*, la variable a ne peut figurer dans $\mathfrak{F}$.

$$AEA : \frac{\mathfrak{F}a \rightarrow}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow} \qquad EES : \frac{\rightarrow \mathfrak{F}a}{\rightarrow \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$$

$$NES : \frac{\mathfrak{A} \rightarrow}{\rightarrow \neg\, \mathfrak{A}} \qquad NEA : \frac{\rightarrow \mathfrak{A}}{\neg\, \mathfrak{A} \rightarrow}$$

$$FES : \frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}{\rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}} \qquad FEA : \frac{\rightarrow \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \rightarrow}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \rightarrow}.$$

2. L'interprétation des schémas simplifiés est aisée, si on se reporte à la traduction proposée au n° I 2. 4, où notamment « $\rightarrow$ » est traduit par (l'assertion de) $\wedge$, et où $\mathfrak{D} \rightarrow$ se traduira par (l'assertion de) $\neg\, \mathfrak{D}$ ou (de) $\mathfrak{D} \supset \wedge$.

Pour les schémas de structure :

Le schéma d'*atténuation* dans le conséquent conclut de $\wedge$ à $\mathfrak{D}$ (schéma Λ des calculs *N*), et le schéma d'atténuation dans l'antécédent conclurait de $\wedge$ à $\neg\, \mathfrak{D}$ (autre forme du schéma $\wedge$).

Les schémas de *contraction* concluent de $\neg\, (\mathfrak{D} \,\&\, \mathfrak{D})$ à $\neg\, \mathfrak{D}$, de $\mathfrak{D} \vee \mathfrak{D}$ à $\mathfrak{D}$. Les schémas de *permutation* concluent de $\neg\, (\mathfrak{D} \,\&\, \mathfrak{E})$ à $\neg\, (\mathfrak{E} \,\&\, \mathfrak{D})$, de $\mathfrak{E} \vee \mathfrak{D}$ à $\mathfrak{D} \vee \mathfrak{E}$. Enfin, le schéma de c o u p u r e conclut de l'affirmation conjointe de $\neg\, \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}$ à $\wedge$ (schéma *NB*).

Quant aux *schémas opératoires :*

Les schémas d'introduction dans le conséquent : *UES*, *OES*, *AES*, *EES*, *NES*, *FES* traduisent simplement les schémas d'introduction des calculs *N*, donc : *UE*, *OE*, *AE*, *EE*, *NE*, *FE*.

Les schémas d'introduction dans l'antécédent sont exactement parallèles aux précédents, sauf *NEA* et *FEA* :

OEA conclut de l'affirmation conjointe de $\neg\, \mathfrak{A}$ et de $\neg\, \mathfrak{B}$ à $\neg\, (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$,

UEA conclut de $\neg\, \mathfrak{A}$ ou de $\neg\, \mathfrak{B}$ à $\neg\, (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$,

EEA conclut de $\neg\, \mathfrak{F}a$ (valable en général) à $\neg\, \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$, *AEA* conclut de $\neg \mathfrak{F}a$ à $\neg \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

En outre :

NEA conclut de $\mathfrak{A}$ à $\neg \neg \mathfrak{A}$,

FEA conclut de l'affirmation conjointe de $\mathfrak{A}$ et $\neg \mathfrak{B}$ à $\neg (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$. En effet $\neg (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ implique bien $\mathfrak{A}$ & $\neg \mathfrak{B}$ (et lui équivaut dans le calcul classique).

3. Contentons-nous de préciser par des exemples le sens que nous donnerons aux expressions : « ajouter un antécédent à une séquence » dans un schéma, « ajouter un conséquent » à une séquence dans un schéma.

A. — Nous *ajouterons un antécédent* Ψ aux séquences « $\rightarrow$ », « $\rightarrow \mathfrak{A}$ », « $\mathfrak{A} \rightarrow$ », « $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ », « $\Phi, \mathfrak{A} \rightarrow$ », « $\Phi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ » si nous les transformons respectivement en « $\Psi \rightarrow$ », « $\Psi \rightarrow \mathfrak{A}$ », « $\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow$ », « $\Psi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ », « $\Psi, \Phi, \mathfrak{A} \rightarrow$ », « $\Psi, \Phi, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ».

B. — Nous *ajouterons un conséquent* Ψ aux séquences « $\rightarrow$ », « $\rightarrow \mathfrak{A}$ », « $\mathfrak{A} \rightarrow$ », « $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ », « $\rightarrow \mathfrak{B}, \Phi$ », « $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}, \Phi$ » si nous les transformons respectivement en « $\rightarrow \Psi$ », « $\rightarrow \mathfrak{A}, \Psi$ », « $\mathfrak{A} \rightarrow \Psi$ », « $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}, \Psi$ », « $\rightarrow \mathfrak{B}, \Phi, \Psi$ », « $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}, \Phi, \Psi$ ».

C. — Et de même pour plus de S-formules dans l'antécédent ou le conséquent de la séquence.

D. — Pour plus de brièveté, nous appellerons *conséquents d'une séquence* les diverses S-formules au conséquent d'une séquence et nous appellerons *antécédents* d'une séquence les diverses S-formules à l'antécédent d'une séquence.

4. Les règles suivantes valent pour la logique classique.

A. — Tous les *schémas simplifiés* sont valables (ce sont simplement les schémas *LK*, où $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda$ désigneraient des suites vides).

B. — Un schéma reste valable si on ajoute simultanément un ou plusieurs *antécédents* à une prémisse et à la conclusion.

C. — Un schéma reste valable si on ajoute simultanément un ou plusieurs *conséquents* à une prémisse et à la conclusion.

D. — Si des antécédents ou conséquents sont ajoutés dans les schémas *AES* et *EEA*, ils ne peuvent contenir a comme variable libre.

5. Les règles suivantes valent pour la logique intuitionniste (étant donné que dans les séquences de celle-ci, d'après II 1.2, il ne peut y avoir plusieurs conséquents).

A. — Tous les *schémas simplifiés* sont valables, sauf les deux schémas de contraction et permutation dans le conséquent.

B. — Un schéma reste valable si on ajoute simultanément un ou plusieurs *antécédents* à une prémisse et à la conclusion (comme pour la logique classique).

C. — On ne peut faire une ajoute de *conséquent* que si la séquence obtenue a *un seul* conséquent. Donc :

1° On ne peut ajouter qu'un conséquent.

2° Ce conséquent ne peut être qu'une désignation de formule.

3° L'ajoute ne peut s'effectuer qu'à une prémisse et à une conclusion qui sont des séquences à conséquent vide. Donc, l'ajoute ne peut se faire que :

Aux schémas d'atténuation, contraction et permutation dans l'antécédent.

Au schéma de coupure (à la 2e prémisse).

Aux schémas *OEA*, *UEA*, *EEA*, *AEA* (pas au schéma *NEA*).

Au schéma *FEA* (à la 2e prémisse).

4° Si des antécédents sont ajoutés aux schémas *AES* ou *EEA* ou si un conséquent est ajouté au schéma *EEA*, ils ne peuvent contenir $\mathfrak{a}$ comme variable libre.

D. — Nous pourrions donc donner aux schémas *LJ* la forme suivante, des *minuscules* grecques (ici θ et λ) désignant une formule ou une suite vide, mais pas une suite de plusieurs formules.

Schémas de structure.

Atténuation dans l'antécédent : $\dfrac{\Gamma \rightarrow \theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \theta}$,

dans le conséquent : $\dfrac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{D}}$.

Contraction dans l'antécédent : $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \theta}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \theta}$

(pas de contraction dans le conséquent).

Inversion dans l'antécédent : $\dfrac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \to \theta}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \theta}$

(pas d'inversion dans le conséquent).

Coupure : $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \to \lambda}{\Gamma, \Delta \to \lambda}.$

Schémas opératoires.

UES : $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \mathfrak{B}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$ | *OEA*: $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \theta \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \theta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \theta}$

UEA : $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \theta} \quad \dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \to \theta}$ | *OES* : $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \quad \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{B}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$

AES : $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{F}a}{\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$ | *EEA* : $\dfrac{\mathfrak{F}a, \Gamma \to \theta}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma \to \theta}$

(avec la condition des variables)

AEA : $\dfrac{\mathfrak{F}a, \Gamma \to \theta}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}, \Gamma \to \theta}$ | *EES* : $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{F}a}{\Gamma \to \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$

NES : $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}}$ | *NEA* : $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}}{\neg \mathfrak{A}, \Gamma \to}$

FES : $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}$ | *FEA* : $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \to \lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \to \lambda}.$

6. Mentionnons en passant les règles d'une logique *LM* (logique *L* minimale pour le calcul de Johansson).

Les schémas sont ceux de la logique intuitionniste, sauf l'atténuation dans le conséquent et sauf que les schémas pour la négation *NEA* et *NES*, doivent être *remplacés* par la définition: $\neg \mathfrak{A} =_{Df} \mathfrak{A} \supset \wedge$ ($\wedge$ n'est nullement déterminé par ailleurs).

Il n'est pas possible de constituer un système de schémas *LM* par simple suppression du schéma d'atténuation dans le conséquent *avec usage de schémas simplifiés et d'ajoutes* (voir Feys, 1946, note 7).

7. Nous pourrions appliquer la technique ci-dessus à deux usages :

A. — Nous pourrions l'utiliser pour nous dispenser des schémas de Gentzen avec lettres grecques. Dans ce cas, nos définitions et règles des nos 3, 4, 5 ne devraient plus parler d'ajouter dans les *schémas* des *désignations* de suites (lettres grecques), mais bien d'ajouter des *propositions* dans des *applications de schémas*.

B. — Nous pouvons simplement viser à rétablir les schémas de Gentzen ou d'autres semblables.

Dans les figures à une prémisse, on ajoutera un antécédent Γ et un conséquent Θ. Les séquences exprimeront de la sorte des assertions « doublement atténuées » qui peuvent être dépendantes d'une série d'hypothèses (désignées par Γ) et comporter une série de conséquences alternatives (désignées par Θ).

Dans les figures à deux prémisses (la coupure, *UES*, *OEA*, *FEA*) faut-il ajouter dans les deux prémisses un même antécédent et un même conséquent ou deux antécédents différents et deux conséquents différents? Les schémas obtenus des deux façons sont déductivement équivalents. Gentzen ajoute aux deux prémisses de *UES* et *OEA* un même antécédent Γ et un même conséquent Θ; au contraire, dans le schéma de coupure et dans *FEA*, il ajoute à la première prémisse l'antécédent Γ et le conséquent Θ, à la deuxième prémisse l'antécédent Δ et le conséquent Λ.

Les schémas construits comme il vient d'être dit seront les schémas de Gentzen ou s'y ramèneront par de simples contractions et permutations.

8. Parmi d'autres variantes possibles pour les calculs *L*, Gentzen mentionne (III 2. 2) l'usage de schémas d'axiomes pour remplacer dans *LK* tous les schémas opératoires, sauf *AES*, *EEA*, *FES*.

A. — Pour obtenir le schéma d'axiome correspondant à une figure, il suffit d'appliquer cette figure à des séquences initiales (III 1.2); un usage de figures de structure serait nécessaire pour *UES*, *OEA*.

Par exemple : $\dfrac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \quad \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}$ *FEA* $\qquad \dfrac{\mathfrak{F}a \rightarrow \mathfrak{F}a}{\mathfrak{F}a \rightarrow \exists \mathfrak{x}\ \mathfrak{F}\mathfrak{x}}$ *EES*

$$\text{Attén. perm.}\ \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}} \quad \dfrac{\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}}\ \text{Atténuation}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}}\ UES.$$

B. — Et on retrouverait la figure elle-même en appliquant le schéma de coupure à la prémisse de la figure et au schéma d'axiomes correspondant.

$$\text{Coupure}\ \dfrac{\overset{(UEA)}{\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \rightarrow}{\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B} \rightarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{(FEA)}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}} \quad \mathfrak{B} \rightarrow}{\rightarrow \mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \rightarrow}\ \text{Coupure}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \rightarrow}\ \text{Coupure.}$$

9. Nous renvoyons à Bernays, *Journal of Symbolic Logic*, X (1945), pp. 127-130, et à Feys, 1947, pp. 67-70, pour les huit schémas énoncés par Ketonen pour la logique classique des propositions. Ces schémas sont *UES*, *OEA*, *FES*, *NEA*, *NES* et des schémas correspondant à *UEA*, *OES*, *FEA*.

Les schémas de Ketonen ont la propriété d'être réversibles : on ne peut pas seulement déduire la conclusion à partir de la prémisse ou des prémisses; on peut également, à partir de la conclusion, déduire la prémisse ou l'assertion conjointe des prémisses.

En usant des schémas de Ketonen, il est possible de « décomposer » toute assertion valable dans l'assertion conjointe de séquences initiales ou de séquences dérivées de celles-ci par atténuation.

Note E*.

UN CALCUL « *MK* » ANALOGUE AU CALCUL *NK*

1. Dans son mémoire sur la non-contradiction de l'arithmétique, Gentzen a utilisé, pour formaliser l'arithmétique (classique), un calcul qui peut être considéré comme un intermédiaire entre le calcul *NK* et le calcul *LK* : nous pourrions l'appeler le calcul *MK*.

Il diffère du calcul *NK* en ce qu'il introduit une idée nouvelle, l'idée de séquence, et par là il se rapproche du calcul *LK*. Mais il diffère de ce dernier en ce que la notion de séquence qu'il introduit est plus restreinte; d'autre part, les schémas de déduction qu'il utilise sont entièrement analogues à ceux du calcul *NK*.

L'idée essentielle du calcul *MK* est de représenter dans une expression unique les propositions-hypothèses dont dépend une proposition donnée dans une dérivation. C'est dans ce but que l'on introduit la notion de séquence.

2. Une séquence *MK* est une expression du type suivant :

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B},$$

où $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ sont des formules.

Les virgules et la flèche sont de purs symboles séparatifs et n'ont aucun sens opératoire. Les formules $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ sont des formules-antécédents et constituent l'antécédent de la séquence, la formule $\mathfrak{B}$ est le conséquent de la séquence.

L'antécédent peut être vide, par contre le conséquent ne peut jamais l'être.

Une *MK*-séquence diffère donc d'une *LK*-séquence en ce que le conséquent ne peut contenir qu'une seule formule et ne peut être vide; elle diffère d'une *LJ*-séquence en ce que le conséquent ne peut être vide.

(Par ailleurs, la nature des schémas est telle que la restriction imposée au conséquent de ne contenir qu'une seule formule ne suffit nullement à faire du calcul un calcul intuitionniste, comme dans le cas des calculs du type *L*.)

Une séquence *MK* pourra s'interpréter :

$$(\mathfrak{A}_1 \; \& \; \mathfrak{A}_2 \ldots \& \; \mathfrak{A}_n) \supset \mathfrak{B}.$$

(De façon intuitive : sous les hypothèses $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, ... et $\mathfrak{A}_n$, on peut affirmer la proposition $\mathfrak{B}$.)

Une séquence dont l'antécédent est vide représente donc une proposition qui est valable en toute hypothèse; c'est donc soit un axiome (au sens mathématique : proposition tenue pour valable indépendamment de toute présupposition) soit une proposition démontrée.

3. Certaines séquences sont appelées *séquences fondamentales.* On distingue deux espèces de séquences fondamentales.

a) Les séquences fondamentales logiques.

Elles sont du type $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$.

b) Les séquences fondamentales mathématiques.

Elles sont du type $\rightarrow \mathfrak{E}$.

(Ce sont les axiomes mathématiques; ainsi, par exemple, les axiomes servant à définir le signe d'addition.)

Dans un calcul logique pur, on n'aura bien entendu que des séquences fondamentales du premier type. Mais si l'on veut construire un formalisme dans lequel on puisse intégrer une théorie mathématique déterminée, par exemple l'arithmétique, il est nécessaire d'introduire des séquences fondamentales du second type.

4. Le calcul *MK* opère sur les séquences *MK* au moyen de certains schémas de déduction, qui indiquent comment une séquence donnée peut être transformée en une nouvelle séquence.

Une *MK*-dérivation est une suite de séquences dont chacune est une séquence fondamentale ou provient d'une séquence fondamentale par application d'un schéma de déduction; de plus, la dernière séquence de la suite a l'antécédent vide. Sa formule-conséquent est appelée la formule finale de la dérivation; elle représente une proposition démontrée.

A. — Les schémas de déduction sont de deux types.

Certains schémas ne changent rien à la signification des séquences et se bornent à des modifications de pure forme : ce sont les schémas de structure.

D'autres schémas modifient la signification des séquences; ils indiquent comment on peut introduire ou éliminer les différents signes logiques (et servent en somme à définir ces signes) : ce sont les schémas opératoires.

Les schémas de structure sont analogues à ceux du calcul *LK*, mais ils ne concernent que l'antécédent, et ils ne comportent pas le schéma de coupure, caractéristique des calculs du type *L*.

Les schémas opératoires sont analogues à ceux du calcul *NK* : il existe un schéma d'introduction et d'élimination dans le conséquent pour chacun des signes logiques. Ils diffèrent donc des schémas opératoires des calculs du type *L*, où tous les schémas opératoires sont des schémas d'introduction et où l'on dispose, pour chaque signe logique, d'un schéma d'introduction pour l'antécédent et d'un autre pour le conséquent. (L'élimination se réalise au moyen des schémas d'introduction et de coupure.)

B. — *Schémas de structure :*

Permutation : $$\frac{\Gamma, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Delta \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Delta \rightarrow \mathfrak{B}}.$$

(Γ et Δ représentent des suites de formules qui peuvent éventuellement être vides.)

Contraction : $$\frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}.$$

Atténuation : $$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}.$$

Modification des variables liées. (Ce schéma ne figure pas dans les calculs du type *L*.)

Soit une formule qui contient un signe $\forall$ ou $\exists$. La variable individuelle qui est liée par ce signe peut être remplacée pourvu que le remplacement s'effectue partout où elle figure dans le champ d'action du signe — par une autre variable individuelle liée qui ne figure pas encore dans la formule.

C. — *Schémas opératoires :*

Conjonction :

Introduction (analogue à *UE*) :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \qquad \Delta \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}.$$

Élimination (analogue à *UB*) :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}.$$

Disjonction :

Introduction (analogue à *OE*) :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \qquad \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}.$$

Élimination (analogue à *OB*) :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \quad \mathfrak{A}, \Delta \rightarrow \mathfrak{C} \quad \mathfrak{B}, \Theta \rightarrow \mathfrak{C}}{\Gamma, \Delta, \Theta \rightarrow \mathfrak{C}}.$$

Universalisation :

Introduction (analogue à *AE*) :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}a}{\Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}.$$

Condition des variables : la variable libre a ne peut figurer ni dans Γ ni dans $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

Élimination (analogue à AB) :

$$\frac{\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}{\Gamma \to \mathfrak{F}a}.$$

Particularisation :

Introduction (analogue à EE) :

$$\frac{\Gamma \to \mathfrak{F}a}{\Gamma \to \exists\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}.$$

Élimination (analogue à EB) :

$$\frac{\Gamma \to \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \qquad \mathfrak{F}a, \Delta \to \mathfrak{C}}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}}.$$

Condition des variables : la variable libre a ne peut figurer ni dans Γ, ni dans Δ, ni dans $\mathfrak{C}$, ni dans $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

Implication :

Introduction (analogue à FE) :

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}.$$

Élimination (analogue à FB) :

$$\frac{\Gamma \to \mathfrak{A} \qquad \Delta \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}}.$$

Négation :

Introduction : schéma de réfutation :

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B} \qquad \mathfrak{A}, \Delta \to \neg \mathfrak{B}}{\Gamma, \Delta \to \neg \mathfrak{A}}.$$

Élimination : schéma de la double négation :

$$\frac{\Gamma \to \neg \neg \mathfrak{A}}{\Gamma \to \mathfrak{A}}.$$

5. Le calcul MK, qui est un calcul classique, pourrait être transformé de diverses manières en un calcul intuitionniste MJ.

A. — En posant les analogues des schémas NE, NB et $\wedge$.

Introduction de la négation (analogue à NE) :

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \wedge}{\Gamma \rightarrow \neg \mathfrak{A}}.$$

Élimination de la négation (analogue à NB) :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \qquad \Delta \rightarrow \neg \mathfrak{A}}{\Gamma, \Delta \rightarrow \wedge}.$$

Schéma analogue au schéma $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \wedge}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{D}}.$$

B. — On pourrait, comme pour les calculs N, maintenir l'analogue ci-dessus du schéma $\wedge$, mais replacer les analogues de NE et NB par la définition :

$$\neg \mathfrak{A} =_{Df} \mathfrak{A} \supset \wedge.$$

C. — Il semble qu'on pourrait se rapprocher davantage du calcul NK en posant, sans plus, un schéma d'introduction et un schéma d'élimination de la négation.

Comme schéma d'introduction : le « schéma de réfutation » ci-dessus.

Comme schéma d'élimination :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \neg \mathfrak{A}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}.$$

NOTE F*.

SIGNIFICATION DES SÉQUENCES ET DES SCHÉMAS DE STRUCTURE

Gentzen ne s'arrête pas à justifier la signification privilégiée qu'il semble réserver pour les schémas de structure, donc pour les déductions en purs termes de séquences (sans intervention de signes d'opérations logiques usuelles). La traduction qu'il donne pour les séquences (I 2. 4) use en fait de tous les signes d'opérations usuels en logique des propositions. On peut donc se demander à première vue si on n'a pas affaire à un simple artifice d'écriture, camouflant des déductions du calcul des propositions.

Nous voudrions mettre en évidence que pour les calculs *L* (et pour les calculs *M*) les séquences peuvent être traduites en termes de la seule opération d'implication et que donc les schémas de structure traduisent des schémas valables en « logique positive de l'implication ».

1. Bornons-nous d'abord à des séquences *complètes de la logique LJ* (ou des logiques *M*); des séquences *complètes* seront celles où ni l'antécédent ni le conséquent ne sont vides.

De telles séquences sont de la forme $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \ldots \rightarrow \mathfrak{B}$, ce que Gentzen traduit par $\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \mathfrak{A}_2 \mathbin{\&} \mathfrak{A}_3 \ldots \supset \mathfrak{B}$. Mais cette dernière expression peut se traduire par $\mathfrak{A}_1 \supset (\mathfrak{A}_2 \supset (\mathfrak{A}_3 \ldots \mathfrak{B}))$, donc en termes d'implication.

Dans la notation polonaise, la traduction d'une séquence complète *LJ* ou *M* s'effectuera selon une règle simple :

1° Remplacer toutes les virgules par le signe d'implication $\mathbf{C}$.

2° Supprimer le $\rightarrow$ et écrire $\mathbf{C}$ en tête de la formule.

$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \rightarrow \mathfrak{B}$ se traduit donc par (l'assertion de)

$$\mathbf{C}\, \mathfrak{A}_1\, \mathbf{C}\, \mathfrak{A}_2\, \mathbf{C}\, \mathfrak{A}_3 \ldots \mathfrak{B}.$$

2. Comment traduire les *séquences incomplètes* (à antécédent ou conséquent vide)?

Une séquence à conséquent vide peut être remplacée par une séquence complète à conséquent $\wedge$. Et une séquence à antécédent vide peut être remplacée par une séquence complète à antécédent « $\wedge \supset \wedge$ ». Donc (en notation polonaise) :

Si le conséquent est vide, écrire $\wedge$ à la fin de la traduction.

Si l'antécédent est vide, écrire $\mathbf{C} \wedge \wedge$ après le premier signe $\mathbf{C}$. (L'expression « $\mathbf{CC} \wedge \wedge$ » peut être omise, sauf dans le cas de la séquence vide.)

Donc, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \rightarrow$ se traduira $\mathbf{C}\mathfrak{A}_1\, \mathbf{C}\mathfrak{A}_2\, \mathbf{C}\mathfrak{A}_3 \wedge$. $\rightarrow \mathfrak{B}$ se traduira $\mathbf{CC} \wedge \wedge \mathfrak{B}$ ou simplement $\mathfrak{B}$. $\rightarrow$ se traduira $\mathbf{CC} \wedge \wedge \wedge$.

3. Les traductions ci-dessus semblent également valables en logique minimale *LM*.

4. Quant à la logique *LK*, on sait qu'une suite de formules $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$, dans le *conséquent*, s'y traduit $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \mathfrak{B}_3$. Mais $\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2$ équivaut à $(\mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2) \supset \mathfrak{B}_2$, en notation polonaise :

$$\mathbf{C}\, \mathbf{C}\, \mathfrak{B}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_2.$$

Les séquences de la logique *LK* se traduiront donc comme ci-dessus, mais en outre :

Pour une suite de *n* *S*-formules dans le conséquent, on écrira (en notation polonaise) $2n - 2$ signes $\mathbf{C}$ suivis de la première *S*-formule, puis des autres *S*-formules, chacune écrite deux fois.

$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ dans le conséquent se traduira donc :

$$\mathbf{C}\, \mathbf{C}\, \mathbf{C}\, \mathbf{C}\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_2\, \mathfrak{B}_3\, \mathfrak{B}_3$$

et $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \rightarrow \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$ se traduira :

$$\mathbf{C}\mathfrak{A}_1\ \mathbf{C}\mathfrak{A}_2\ \mathbf{C}\mathfrak{A}_3\ \mathbf{C}\ \mathbf{C}\ \mathbf{C}\ \mathbf{C}\mathfrak{B}_1\ \mathfrak{B}_2\ \mathfrak{B}_2\ \mathfrak{B}_3\ \mathfrak{B}_3.$$

5. Ainsi toutes les séquences se traduisent sans autre signe d'opération que le signe d'implication.

Et les schémas de structure sont des schémas de la logique positive de l'implication (qui peuvent toutefois dépendre d'axiomes propres à $\wedge$).

Note G*.

LES SCHÉMAS DE COUPURE ET DE FUSION DE SÉQUENCES

1. Les termes dont use Gentzen : « coupure » (Schnitt) et « fusion » de séquences (Mischung) n'expriment chacun qu'un seul des deux aspects de la dérivation effectuée.

Ces schémas peuvent être rapprochés d'un schéma de dérivation par syllogisme (par syllogisme hypothétique *ex toto*), à ceci près qu'ils ont pour prémisses des séquences et pas des assertions d'implications. Or, un syllogisme « total » n'effectue pas seulement un « retranchement », une « coupure ». Dans la notation des systèmes L, un schéma de syllogisme total s'énoncerait :

$$\frac{\rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{M} \qquad \rightarrow \mathfrak{M} \supset \mathfrak{B}}{\rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}.$$

La conclusion y « retranche » bien le moyen terme $\mathfrak{M}$, mais elle fait autre chose, elle *relie* en une implication les termes extrêmes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$.

Le schéma de coupure qui équivaut au syllogisme total sera :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{M} \qquad \mathfrak{M} \rightarrow \Lambda}{\Gamma \rightarrow \Lambda}.$$

Lui aussi retranche, « coupe » le moyen terme $\mathfrak{M}$; mais il relie en une séquence les deux termes extrêmes, qui seront ici les « suites » désignées par Γ et Λ.

Le schéma complet de coupure est plus complexe :

$$\frac{\Gamma \to \Theta, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta \to \Theta, \Lambda}.$$

Ici encore une formule, la formule $\mathfrak{D}$ est éliminée, « retranchée » ou « coupée », mais cette « formule à retrancher » n'est plus qu'une partie des moyens termes. Et la conclusion consiste en une séquence qui relie ou combine les deux prémisses. Car cette séquence a pour antécédent une suite formée de l' « antécédent extrême » et ce qui reste de Δ, « antécédent moyen »; et elle a pour conséquent une suite formée du « conséquent extrême » Λ et de ce qui reste du « conséquent moyen » donc de Θ.

La situation est la même dans le schéma de « fusion de séquences » : il y a d'abord élimination d'une partie des « moyens termes »; cette partie n'est plus forcément une seule formule $\mathfrak{D}$ ou $\mathfrak{M}$, située à une place donnée dans les moyens termes; elle peut consister en plusieurs formules $\mathfrak{M}$, réparties n'importe comment dans chaque moyen terme. Ensuite, ce qui reste des deux prémisses est combiné ou « fusionné » en une séquence comme pour le schéma complet de coupure.

2. Le schéma de « fusion de séquences » est

$$\frac{\Gamma \to \Theta \qquad \Delta \to \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \to \Theta^*, \Lambda}.$$

2. 1. Ce schéma est valable si et seulement si chacune des suites Θ et Δ contient au moins une fois une même formule $\mathfrak{M}$, la *Mischformel* (nous parlerons de « formule moyenne » ou « formule à éliminer »). La formule $\mathfrak{M}$ n'est, comme on voit, pas mentionnée explicitement dans le schéma général; elle ne l'est ordinairement pas dans les schémas dérivés sur lesquels Gentzen raisonne; la présence de la formule $\mathfrak{M}$ est alors établie par ailleurs ou énoncée sous forme de condition verbale.

2. 2. Dans la conclusion la formule $\mathfrak{M}$ est éliminée; mais cette

élimination, elle aussi, est notée de façon plus ou moins implicite, comme suit.

Dans la conclusion d'une fusion de séquences et dans les séquences qui sont « en dessous » de cette conclusion, la *désignation avec astérisque* désigne l'expression formée en prenant l'expression désignée par le symbole sans astérisque et en en retranchant, partout où elle figure comme S-formule, la formule qui est éliminée par la fusion (la formule $\mathfrak{M}$ de la fusion). Pour justifier la validité de la fusion, on a dû énoncer par ailleurs quelle était cette formule à éliminer, et on a dû énoncer ou établir qu'elle figure au moins une fois comme S-formule dans le conséquent de la première prémisse et une fois au moins dans l'antécédent de la deuxième prémisse.

2. 3. Si une suite Ψ ne contient pas $\mathfrak{M}$ comme S-formule, Ψ^* sera simplement Ψ. (Le fait que la suite Ψ contient ou ne contient pas $\mathfrak{M}$ doit être établi par ailleurs.)

2. 4. Une désignation constituée par une lettre majuscule grecque, comme Ψ, désigne une « suite » formée de *plusieurs* S-formules, d'*une* S-formule, de *zéro* S-formule (donc une suite « vide »).

Si la suite Ψ est formée de plusieurs *S-formules*, deux cas sont possibles. Si une ou plusieurs de ces formules sont $\mathfrak{M}$, alors Ψ^* est la même suite, moins les formules $\mathfrak{M}$. Si Ψ ne contient pas $\mathfrak{M}$ comme S-formule, Ψ^* est Ψ.

Si la suite Ψ est formée d'une seule S-formule, deux cas sont possibles. Si la formule est $\mathfrak{M}$, alors Ψ^* est vide. Si la formule n'est pas $\mathfrak{M}$, Ψ^* est Ψ.

Si la suite Ψ est vide, Ψ^* est vide.

2. 5. De toute façon « $\Psi^*, \mathfrak{M}$ » ou « $\mathfrak{M}, \Psi^*$ » désignent la suite Ψ.

3. A raison de la condition 2. 1, si un schéma de fusion est validement applicable, c'est que $\mathfrak{M}$ figure comme S-formule *dans le conséquent de la première prémisse et dans l'antécédent de la deuxième prémisse.*

3. 1. Le schéma de fusion sous sa forme générale est :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta \qquad \Delta \rightarrow \Lambda}{\Gamma, \Delta^* \rightarrow \Theta^*, \Lambda}.$$

$\mathfrak{M}$ doit être S-formule dans Θ et Δ et doit être effectivement retranché dans Θ^* et Δ^*.

3. 2. Mais soit un schéma ayant pour prémisses $\Gamma \rightarrow \Theta_1, \Theta_2$, et $\Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \Lambda$. Pour que le schéma donne lieu à fusion, $\mathfrak{M}$ doit figurer comme S-formule dans Θ_1 ou dans Θ_2 (ou dans Θ_1 et Θ_2 à la fois); et $\mathfrak{M}$ doit figurer comme S-formule dans Δ_1 ou dans Δ_2 (ou dans Δ_1 et Δ_2 à la fois).

Le schéma sera :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta_1, \Theta_2 \quad \Delta_1, \Delta_2 \rightarrow \Lambda}{\Gamma_1, \Delta_1{}^*, \Delta_2{}^* \rightarrow \Theta_1{}^*, \Theta_2{}^*, \Lambda}.$$

D'après ce qui précède, trois cas sont possibles quant aux suites $\Delta_1{}^*$ et $\Delta_2{}^*$ (et la notation n'indique pas à elle seule lequel des trois cas est réalisé).

1° Δ_1 contenait $\mathfrak{M}$ comme S-formule, et $\mathfrak{M}$ est effectivement retranché dans $\Delta_1{}^*$. Mais Δ_2 ne contenait pas $\mathfrak{M}$ comme S-formule, et $\Delta_2{}^*$ est Δ_2.

2° Δ_2 contenait $\mathfrak{M}$ comme S-formule, et $\mathfrak{M}$ est effectivement retranché dans $\Delta^*{}_2$. Mais Δ_1 ne contenait pas $\mathfrak{M}$ comme S-formule, et $\Delta_1{}^*$ est Δ_1.

3° Δ_1 et Δ_2 contenaient toutes deux $\mathfrak{M}$ comme S-formule, $\mathfrak{M}$ est effectivement retranché dans $\Delta_1{}^*$ et $\Delta_2{}^*$.

Et il y aura trois cas analogues pour $\Theta_1{}^*$ et $\Theta_2{}^*$ (et, à elle seule, la notation n'indique pas quel cas est réalisé).

4. Tout schéma de *coupure* peut être considéré comme un schéma de *fusion* offrant certaines particularités : 1° il y a une seule formule $\mathfrak{M}$ au conséquent de la première prémisse, et cette formule est la dernière S-formule de ce conséquent; 2° il y a une seule formule $\mathfrak{M}$ dans l'antécédent de la deuxième prémisse, et cette formule est la première S-formule de cet antécédent.

Et d'autre part un schéma de *fusion* peut toujours être ramené à un schéma de *coupure*. Les prémisses de la fusion seront ramenées en usant, s'il y a lieu, de contractions et permutations, à des prémisses de coupure; et la conclusion suivra par le schéma de coupure.

Bien qu'on puisse donc dériver par coupure ce qui peut l'être par fusion, et vice versa, *la dérivation par fusion ne sera pas la même que la dérivation par coupure.*

La dérivation par fusion peut se dispenser des contractions et permutations qui peuvent être nécessaires pour la dérivation par coupure; et c'est pour éviter ce genre de complications triviales que Gentzen introduit ici le schéma de fusion.

NOTE H*.

TABLEAU DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL

Vu la complexité de la démonstration du théorème fondamental, il est utile, pour la suivre, d'en avoir un tableau synoptique sous les yeux.

3. 1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME POUR LES DÉRIVATIONS *LK*.

Introduction du schéma de fusion de séquences.
Lemme en termes de fusion de séquences.
Définition du rang et du degré d'une dérivation.

3. 10. *MODIFICATION PRÉALABLE des variables individuelles libres.*

- 3. 101. Propriété à obtenir.
- 3. 102. Mécanisme de la modification.
- 3. 103. Théorème auxiliaire autorisant cette modification.

3. 11. *Le RANG de la dérivation est MINIMUM* ($\rho = 2$) *et le DEGRÉ quelconque.*

- 3. 111. *La fusion qui figure à la fin de la dérivation a pour prémisse gauche une séquence fondamentale.*
- 3. 112. *La fusion qui figure à la fin de la dérivation a pour prémisse droite une séquence fondamentale.*

3.113. *Ni la prémisse gauche ni la prémisse droite de la fusion ne sont des séquences fondamentales.*

3.113.1. La prémisse gauche de la fusion est la conclusion d'une atténuation.

3.113.2. La prémisse droite de la fusion est la conclusion d'une atténuation.

3.113.3. La formule moyenne $\mathfrak{M}$ figure dans le conséquent de la prémisse gauche et dans l'antécédent de la prémisse droite de la fusion à titre de formule principale d'une *figure de dérivation opératoire.*

3.113.31. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est &.
3.113.32. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\vee$.
3.113.33. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\forall$.
3.113.34. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\exists$.
3.113.35. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\neg$.
3.113.36. Le signe terminal de $\mathfrak{M}$ est $\sqsupset$.

3.12. *Le RANG de la dérivation est PLUS GRAND QUE* 2 ($\rho = 2$), *et le DEGRÉ quelconque.*

3.121. *Le rang de droite est plus grand que* 2.

3.121.1. La formule moyenne figure dans l'antécédent de la prémisse gauche de la fusion.

3.121.2. La formule moyenne ne figure pas dans l'antécédent de la prémisse gauche de la fusion.

3.121.21. La figure $\mathfrak{M}$ est une atténuation, une contraction ou permutation dans l'antécédent.

3.121.22. La figure $\mathfrak{M}$ est une *figure opératoire* avec *une seule* prémisse.

3.121.23. La figure $\mathfrak{M}$ est une *figure opératoire* avec *deux* prémisses.

3.121.231. $\mathfrak{M}$ est une figure *UES.*

3.121.232. $\mathfrak{M}$ est une figure *OEA*.

3.121.233. $\mathfrak{M}$ est une figure *FEA*.

3.122. *Le rang de droite est égal à* 1, *le rang de gauche est plus grand que* 1.

3.122.1. $\mathfrak{M}$ est une figure *FEA*.

3.2.

Démonstration du théorème pour les dérivations *LJ*.

3.21. Substitution de la fusion de séquences à la coupure.

3.22. Modification des variables individuelles libres.

3.23. *Transformation proprement dite de la dérivation.*

3.231. Les cas 3.11.

3.232. Les cas 3.12.

3.232.1. Les cas 3.121.

3.232.2. Les cas 3.122.

3.232.21. Le cas dual de 3.121.1.

3.232.22. Les cas duaux de 3.121.2.

NOTE I*.

MARCHE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL

I* 1. Il sera utile de dégager l'idée générale qui guide la démonstration dont la note G* a donné le tableau; et nous marquerons, parmi les principales étapes de la démonstration, celles qui font réellement difficulté et celles qui sont à peu près triviales.

Nous commençons par la démonstration pour les LK-dérivations (calcul classique); comme les *LJ*-dérivations ne sont que des cas particuliers des *LK*-dérivations, la démonstration propre aux *LJ*-dérivations sera très brève.

I* 2. *Que doit-on démontrer?*

I* 2. 1. Il faut démontrer que si une séquence est la conclusion d'une dérivation « avec coupures », elle est conclusion d'une autre dérivation « sans coupures ».

I* 2. 2. Pour plus de simplicité, on introduit le schéma de fusion de séquences (3. 1 et G* 2). Et on démontre (voir G* 4) que tout schéma de coupure peut être ramené à un schéma de fusion de séquences.

Le théorème à démontrer peut donc être ramené au *lemme* (3. 1, p. 52) disant que si une séquence est la conclusion d'une dérivation

« avec fusion de séquence », elle est conclusion d'une autre dérivation « sans fusion de séquences ».

I* 2. 2. En quoi consistera la dérivation sans fusion de séquences? Dans la dérivation « avec fusion » certaines formules moyennes étaient S-formules à la fois dans le conséquent d'une première prémisse et dans l'antécédent de la seconde. Elles étaient introduites dans des séquences fondamentales ou par des figures; elles sont éliminées par la fusion. Dans la dérivation sans fusion, on peut s'arranger pour ne pas devoir introduire ces formules moyennes et donc pour ne pas devoir les éliminer.

I* 3. *La démonstration* sera une démonstration « par induction », et elle sera « effective » : disons en gros qu'elle donnera une méthode pour transformer progressivement toute dérivation avec fusion en une démonstration sans fusion.

On prouvera que l'on peut transformer en dérivation sans fusion les dérivations les plus simples avec fusion; et ensuite qu'on peut transformer les dérivations plus complexes dans les dérivations simples dont il s'agit.

I* 3. 1. Quand nous parlons de dérivations complexes, nous visons deux sources de complexité :

1° La formule moyenne à éliminer peut être plus ou moins complexe selon qu'elle contient plus ou moins de signes d'opération (le *degré de la dérivation* et de la formule étant le nombre de signes d'opération que celle-ci contient).

2° La formule moyenne à éliminer peut être introduite plus ou moins longtemps; ceci est caractérisé par le *rang* de la dérivation, notion qui va maintenant être éclaircie.

I* 3. 2. La formule moyenne doit figurer dans le conséquent de la prémisse gauche (1re prémisse) de la fusion. Voyons les « chaînes » de séquences dérivées l'une de l'autre et qui ont la prémisse gauche comme conclusion, et voyons dans combien de « chaînons » la formule moyenne figure — et figure à la place qu'elle doit avoir, c'est-à-dire dans le conséquent. (S'il y a plusieurs chaînes contenant la formule en question, *comptons les chaînons de la plus longue chaîne.*)

Le rang de gauche de la dérivation sera le nombre des chaînons ainsi comptés. Le rang de gauche sera au moins de 1 (si la formule moyenne ne figure à la place dite dans aucun chaînon « au-dessus » de la prémisse de gauche).

Le rang de droite se calculera semblablement, en considérant l'antécédent des chaînons dont le dernier est la prémisse de droite. Le rang de droite est au moins de 1.

Le *rang* (total) est la somme du rang de gauche et du rang de droite; le rang (total) est au moins de 2. Quand le rang est de 2, la formule moyenne est *éliminée aussitôt introduite* (aussitôt qu'elle est introduite à la place voulue, antécédent ou conséquent); disons que l'*élimination est immédiate.*

I* 3. 3. Nous allons d'abord établir (3. 11 du texte et du tableau H*) que dans les cas de rang 2, dans les cas d'*élimination immédiate*, la dérivation peut être transformée en dérivation sans fusion. Ceci fera l'objet d'une *première induction.*

I* 3. 4. Nous démontrerons ensuite (3. 12 du texte et du tableau H*) que si le rang est plus grand que 2 (si donc l'élimination n'est *pas immédiate*), elle peut être ramenée à une dérivation avec élimination immédiate (et donc finalement à une dérivation sans fusion). Ceci fera l'objet d'une *deuxième induction.*

I* 4. A titre préliminaire, on effectuera, s'il y a lieu, un *changement dans les variables individuelles* libres. (Ce changement ne fait guère de difficulté; il a pour but d'éviter les difficultés triviales dans les figures *AES* et *EEA*.)

I* 5. Passons à la *première induction* (I* 3. 3 ci-dessus) et rappelons que nous nous y bornons à des dérivations de *rang* 2 ou « avec élimination immédiate » (voir I* 3. 2).

I* 5. 1. Considérons d'abord les dérivations de *degré* 0, c'est-à-dire où la formule moyenne à éliminer ne comporte aucun signe d'opération.

Dans une dérivation de degré 0, la formule moyenne doit être introduite dans une séquence fondamentale (3. 111 et 3. 112) ou par un schéma d'atténuation (3. 113. 1 à 3. 113. 2).

Et on montre que, dans le cas tout à fait simple d'une dérivation de degré 0 (et de rang 2), la conclusion peut être obtenue sans introduction et élimination de la formule moyenne.

I* 5. 2. Considérons ensuite 3. 113. 3, les dérivations qui ne sont *pas de degré* 0, qui contiennent donc des signes d'opérations. Et distinguons six cas, selon que le signe terminal de la formule moyenne est $\&$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\neg$ et $\supset$.

On démontre que dans chaque cas on peut éviter d'introduire et d'éliminer le *signe terminal* en question. On ne supprime pas de ce fait toute fusion (dans le cas 3. 113. 36 du signe terminal $\supset$, on introduit même deux fusions au lieu d'une), mais le degré des fusions est abaissé d'une unité.

I* 5.3. Et le raisonnement par induction procède comme suit. *Pour toute dérivation de rang* 2. Une dérivation de degré 0 peut être remplacée par une dérivation sans fusion. Une dérivation de degré supérieur à 0 peut être remplacée par une dérivation dont le degré est abaissé d'une unité; celle-ci, s'il y a lieu, par une dérivation dont le degré est encore moindre d'une unité. Et finalement la dérivation peut être remplacée par une dérivation de degré 0, qui peut être remplacée par une dérivation sans fusion.

I* 6. Abordons la *deuxième induction* (3.12 ou I* 3.4 ci-dessus). Jusqu'à présent la dérivation « avec fusion » était de rang 2, c'est-à-dire consistait à introduire une formule moyenne et à l'éliminer immédiatement; et nous venons de voir que cette dérivation avec élimination immédiate pouvait être remplacée par une dérivation sans fusion.

Nous sommes maintenant en présence de dérivations où l'élimination n'est pas immédiate, où donc dans l'une au moins des prémisses de la fusion la formule moyenne « reste introduite » pendant une ou plusieurs étapes de la dérivation.

Nous démontrons qu'une telle dérivation de rang ρ plus grand que 1 peut être remplacée par une dérivation de rang $\rho - 1$. Ceci se fera en faisant « remonter » la fusion de sorte que l'élimination soit avancée d'une étape. En répétant, s'il y a lieu, une transformation de ce genre, on arrivera à une dérivation de rang 0, et qui d'après notre première induction peut être remplacée par une dérivation sans fusion. En vue de cette démonstration, nous distinguons deux cas principaux.

a) (3.121 ou I* 7) Le rang de droite est plus grand que 1.

b) (3.122 ou I* 8) Le rang de droite est 1, et, puisque $\rho > 2$, le rang de gauche est > 1. Ce deuxième cas principal se traite symétriquement au premier pour deux figures.

I* 7. Le *rang de droite* est *plus grand que* 1.

I* 7. 1. Alors, par définition : 1° la prémisse droite de la fusion est la conclusion d'une figure $\mathfrak{Sf}$; 2° et la formule ($\mathfrak{Mt}$) à éliminer (et qui apparaît dans l'antécédent de cette prémisse droite) apparaît au moins dans l'antécédent d'une séquence dont dérivent la ou les prémisses de $\mathfrak{Sf}$.

I* 7. 2. La méthode sera la suivante (sauf pour 3. 121. 1) : au lieu d'écrire la prémisse gauche de la fusion à côté de la prémisse droite (qui est conclusion de $\mathfrak{Sf}$), on écrira cette prémisse gauche à côté d'une *prémisse de* $\mathfrak{Sf}$.

On distinguera en tout les cas suivants :

I* 7. 3. $\mathfrak{Mt}$ figure (3. 121. 1) dans l'antécédent de la prémisse gauche de la fusion. Alors la fusion peut immédiatement être supprimée. Et sinon :

I* 7. 4. $\mathfrak{Sf}$ est une figure de *structure* (3. 121. 21); ce cas ne fait pas de difficulté.

I* 7. 5. $\mathfrak{Sf}$ est une figure *d'opération* avec *une prémisse* (3. 121. 22). On indique d'abord une dérivation de rang $\rho - 1$, mais qui ne conduit en général pas à la conclusion voulue. Moyennant une transformation nouvelle, on obtient une transformation où le rang est diminué.

I* 7. 6. $\mathfrak{Sf}$ est une figure *d'opération* avec *deux prémisses* (3. 121. 23).

Il y a trois figures de ce genre :

(3. 121. 231) *UES*.

(3. 121. 232) *OEA*.

(3. 121. 233) *FEA* (où deux possibilités doivent être distinguées).

Dans les divers cas, on peut faire remonter la fusion de sorte que le rang soit diminué.

I* 8. Le rang de *droite est* 1, donc le rang de *gauche est plus grand que* 1.

On peut traiter ces cas symétriquement aux cas de I* 7 (3. 121). Deux schémas ne sont toutefois pas symétriques. Ce sont *FES*, qui peut être traité comme les figures de I* 7. 5 (3. 121. 22), et *FEA* (3. 122. 1) qui doit être traité spécialement.

I* 9. *La preuve du théorème fondamental pour les LJ-dérivations* se ramène, à peu de choses près, à la preuve pour les *LK*-dérivations qui vient d'être analysée. En effet, tous les schémas des *LJ*-dérivations sont des schémas de *LK*-dérivations, avec cette restriction qu'il ne peut y avoir plusieurs *S*-formules au conséquent.

Le seul point à établir est que les dérivations nouvelles (de degré ou de rang moindre) sont toujours des *LJ*-dérivations. Cette preuve ne fait pas de difficulté quant au remplacement des coupures par des fusions de séquences (3. 21), quant à la transformation des variables individuelles libres (3. 22), quant à la première induction, sur les dérivations de rang 2 (3. 231, correspondant à 3. 11) et même quant aux dérivations de rang supérieur à 2, quand c'est le rang de droite qui est supérieur à 1 (3. 232. 1, correspondant à 3. 121). Les seuls cas qui doivent être examinés de plus près sont les cas correspondant à 3. 122, pour lesquels la preuve est donnée au n° 3. 232. 2.

Section IV.

Quelques applications du théorème fondamental.

§ 1.

Applications du théorème fondamental à la logique des propositions.

1. 1. Une conséquence triviale du théorème fondamental est le fait déjà connu par ailleurs (voir par exemple : H.-A., p. 65) de la non-contradiction de la logique des prédicats classique (et intuitionniste). La séquence $\rightarrow$ (qui est dérivable de toute séquence contradictoire $\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$, cf. 3.21) (40*) ne peut être la conclusion d'aucune figure de déduction autre qu'une coupure; elle n'est donc pas dérivable.

1.2. Solution du problème de la décision pour la logique des propositions intuitionniste.

En nous appuyant sur le théorème fondamental, nous pouvons donner un procédé simple permettant de décider, d'une formule de la logique des propositions, c'est-à-dire d'une formule sans variables individuelles, si elle est valable (41*) du point de vue

(40*) Une coupure-*LJ* donnerait :

$$\frac{\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A} \rightarrow}{\rightarrow}.$$

(41*) Nous traduirons, dans tout ce qui suit, le mot *richtig* par « valable » et non par « vrai ».

Le concept de validité est un concept syntaxique : une formule (ou une séquence) est valable dans un calcul si elle peut y être déduite. Le concept de vérité est par contre un concept sémantique.

classique, ou du point de vue intuitionniste. (Pour la logique des propositions classique, on connaît d'ailleurs déjà depuis longtemps une solution simple, voir par exemple : H.-A., p. 11.)

Nous démontrons d'abord le lemme suivant :

Nous appellerons « séquence réduite » une séquence dans l'antécédent de laquelle une même *S*-formule ne figure pas plus de trois fois et dans le conséquent de laquelle une même formule ne figure pas davantage plus de trois fois.

Notre lemme s'énonce alors comme suit :

1.21. Toute *LJ*-dérivation (ou *LK*-) dont la séquence finale est une séquence réduite peut être transformée en une *LJ*-dérivation (ou *LK*-) ayant la même séquence finale et dans laquelle toutes les séquences sont réduites (et qui, de plus, ne contient pas de coupure, si la dérivation primitive n'en contient pas).

Démonstration de ce lemme. Nous appelons « réduite d'une autre séquence » une séquence qui provient de cette autre séquence quand on y élimine dans l'antécédent, ainsi que dans le conséquent, de façon d'ailleurs indépendante, et en des occurrences quelconques (éventuellement en nombre nul), les formules qui figurent plus d'une fois comme *S*-formule, de façon à ce qu'elles n'y figurent plus qu'une seule fois, ou deux fois, ou trois fois.

Évidemment, à partir d'une réduite d'une séquence, on peut dériver toute autre réduite de la même séquence par des atténuations, des contractions et des inversions, et de sorte que, au cours de ces opérations, on n'obtienne que des séquences réduites.

Après avoir fait cette remarque préliminaire, nous transformons de la façon suivante la *LJ*-dérivation (ou *LK*-) à laquelle nous avons affaire.

Toutes les séquences fondamentales, ainsi que la séquence finale, restent inchangées : elles sont en effet déjà toutes des séquences réduites.

Les *H*-séquences qui appartiennent à une figure de déduction sont transformées en réduites d'elles-mêmes, de la façon qu'on va indiquer à l'instant. En vertu de la remarque préliminaire, il n'y a aucun inconvénient à ce qu'une séquence, qui appartient à deux figures de H-déduction différentes, soit remplacée chaque fois par une réduite d i f f é r e n t e, car l'une de ces réduites se déduit alors simplement de l'autre par des atténuations, des contractions et des inversions, de sorte que, finalement, on obtient de nouveau une dérivation correcte.

(Pour une séquence qui appartient à une figure de déduction et qui est en même temps séquence fondamentale ou séquence finale, le cas est le même, car elle est évidemment une réduite d'elle-même.)

Les transformations des figures de déduction s'opèrent de la façon suivante.

Si une formule figure plus d'une fois dans la suite Γ, on l'élimine de Γ, dans les prémisses et dans la conclusion, autant de fois qu'il le faut (aux occurrences correspondantes) (42*) pour qu'elle ne figure plus finalement qu'une seule fois dans Γ.

On procède de même, pour Δ, Θ et Λ (c'est-à-dire pour les suites de formules désignées par ces lettres dans le schéma de la figure de déduction considérée, III, 1. 21 et 1. 22).

Après les transformations que nous venons de décrire, la dérivation ne comporte plus que des séquences réduites. (Une inversion avec $\mathfrak{D}$ identique à Σ peut constituer une exception, mais elle se réduirait à une figure de déduction identique et pourrait donc tout simplement être omise.)

Ceci achève la démonstration du lemme.

Le théorème fondamental, joint au corollaire III, 2. 513 et au lemme précédent (1. 21), nous permet d'affirmer :

1. 22. A toute séquence valable au point de vue intuitionniste (ou classique) correspond une LJ-dérivation (ou LK-) sans coupure, qui ne comporte que des séquences réduites et dont les

(42*) C'est-à-dire : aux mêmes occurrences dans les prémisses et dans la conclusion.

H-*S*-formules sont des formules partielles des *S*-formules de cette séquence.

1.23. Soit maintenant une séquence quelconque, sans variable individuelle. Nous désirons pouvoir décider si elle est valable ou non au point de vue intuitionniste (ou classique).

D'abord, nous pouvons prendre, au lieu de cette séquence, une séquence réduite équivalente $\mathfrak{S}$q.

Il y a évidemment un nombre fini de séquences réduites dont les *S*-formules sont des formules-parties des *S*-formules de $\mathfrak{S}$q. Le procédé de décision peut donc être décrit, sans autre complication, comme suit :

Nous considérons le système fini de séquences dont il vient d'être question et nous examinons d'abord quelles sont, parmi ces séquences, celles qui sont des séquences fondamentales. Ensuite, à propos de chacune des séquences qui restent, nous examinons s'il existe une figure de déduction dans laquelle elle figure comme conclusion et dans laquelle figurent comme prémisses une ou deux des séquences que nous avons déjà reconnues être dérivables. Si tel est le cas, la séquence considérée est ajoutée aux séquences dérivables. (Tout ceci est évidemment décidable.)

Nous continuons de la sorte jusqu'à ce que nous arrivions à reconnaître la séquence finale $\mathfrak{S}$q elle-même pour dérivable, ou bien jusqu'au moment où le processus ne conduit plus à de nouvelles séquences dérivables.

Dans ce dernier cas, la séquence $\mathfrak{S}$q, en vertu de 1.22, ne peut aucunement être déduite dans le calcul considéré (*LJ* ou *LK*). Nous avons ainsi réussi à décider de sa validité.

1.3. Une nouvelle démonstration de la non-déductibilité du principe du tiers-exclu dans la logique intuitionniste.

Le procédé de décision pourrait être présenté sous une forme sensiblement mieux adaptée aux besoins des applications pratiques : l'exposé qui vient de lui être consacré (1.2) n'avait pour but que d'indiquer une possibilité de principe.

A titre d'exemple, nous démontrerons la non-déductibilité du principe du tiers-exclu dans la logique intuitionniste, par une méthode indépendante du procédé de décision que nous avons décrit (et qui aurait pu d'ailleurs nous fournir une démonstration de cette non-déductibilité).

(Cette propriété a été démontrée déjà par Heyting (5) d'une manière tout à fait différente.)

La séquence considérée est $\rightarrow A \vee \neg A$. Supposons qu'il existe une dérivation pour cette séquence. Alors, en vertu du théorème fondamental, il existe une dérivation de ce genre sans coupure. Sa dernière figure de déduction doit être une figure *OES*, car, dans toutes les autres figures de déduction *LJ*, l'antécédent de la conclusion n'est pas vide, ou bien le conséquent contient une formule dont le signe terminal n'est pas $\vee$; on pourrait encore envisager le cas d'une atténuation dans le conséquent, mais alors la prémisse aurait la forme : $\rightarrow$, et cette séquence, en vertu de 1. 1, n'est pas dérivable.

$\rightarrow A$ ou $\rightarrow \neg A$ devrait donc déjà être dérivable (sans coupure).

En vertu des mêmes considérations, on a de plus, de façon générale : si $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ est une formule valable du point de vue intuitionniste, $\mathfrak{A}$ ou $\mathfrak{B}$ est une formule valable du point de vue intuitionniste. Dans la logique classique, ceci ne se vérifie pas, comme le montre déjà l'exemple $A \vee \neg A$.

Or, $\rightarrow A$ ne peut être la conclusion d'aucune figure de déduction *LJ* (qui ne soit pas une coupure), si ce n'est encore une fois, d'une atténuation avec $\rightarrow$ comme prémisse. Comme d'autre part la séquence $\rightarrow A$ n'est pas une séquence fondamentale, elle n'est pas dérivable.

Les mêmes considérations montrent que $\rightarrow \neg A$ ne peut être dérivé que de $A \rightarrow$, au moyen d'une figure *NES*, et $A \rightarrow$ à son tour ne peut être dérivé que de $A, A \rightarrow$, étant donné que

(5) Dans le travail cité dans la note (2), p. 56 de Gentzen.

A ne possède pas de signe d'opération. En continuant ainsi, on arrive chaque fois à des séquences du type $A, A, \ldots, A \rightarrow$, mais jamais à une séquence fondamentale.

$A \vee \neg A$ n'est donc pas dérivable dans la logique des prédicats intuitionniste.

§ 2.

Une forme renforcée du théorème fondamental pour la logique classique des prédicats.

2.1. Il s'agit de la

Forme renforcée du théorème fondamental que voici.

Soit une LK-dérivation dont la séquence finale a la propriété suivante :

Dans chacune des S-formules de cette séquence le quantificateur universel et le quantificateur particulier ne figurent, au plus, qu'au début de la formule et étendent leur action à tout le reste de la formule (43*).

Cette dérivation peut alors être transformée en une LK-dérivation qui possède la même séquence finale et qui jouit des propriétés suivantes :

1º elle ne contient pas de coupure,

2º elle contient une H-séquence, que nous appellerons la « séquence médiane » et qui est telle que sa dérivation (et qu'elle-même non plus) ne contient pas de signes $\forall$ et $\exists$ et que, dans le reste de la dérivation, la séquence médiane y compris, ne figure aucune autre figure de

(43*) Autrement dit, selon la terminologie de H.-A. :
Chacune des formules de la séquence finale est en forme prénexe. Dans la suite, nous dirons, pour simplifier, « quantificateurs initiaux » pour : « quantificateurs situés au début de la formule ».

déduction que des figures AES, AEA, EES, EEA et des figures de déduction structurale.

2. 11. La séquence médiane partage pour ainsi dire la dérivation en une partie supérieure qui appartient à la logique des propositions et en une partie inférieure qui ne contient que des introductions de quantificateurs universels et de quantificateurs particuliers.

On peut encore déduire aisément ce qui suit quant à la forme de la dérivation transformée.

La partie inférieure, de la séquence médiane à la séquence finale, n'appartient qu'à une seule chaîne, car il n'y intervient, en effet, que des figures de déduction avec une seule prémisse.

Les S-formules de la séquence médiane sont de la forme suivante :

Chacune des S-formules qui se trouvent dans l'antécédent de la séquence médiane provient d'une S-formule de l'antécédent de la séquence finale, en ce qu'on élimine de cette formule les quantificateurs universels et particuliers qui la précèdent (ainsi que les variables individuelles liées qui les accompagnent) et qu'on remplace, dans tout le reste de la formule, les variables individuelles liées par des variables individuelles libres. La même propriété vaut pour les conséquents.

Ceci s'établit en vertu des mêmes considérations qu'en III, 2. 512.

2.2. Démonstration du théorème (2. 1) (6).

(6) Le cas particulier suivant du théorème 2. 1 a déjà été démontré par Herbrand d'une façon complètement différente.

Si une formule $\mathfrak{P}$ — dans laquelle les quantificateurs universels et particuliers ne figurent qu'au début et étendent leur action à tout le reste de la formule — est dérivable du point de vue classique, (comme on le sait, à toute formule correspond une formule classique équivalente de cette forme) (voir par exemple H.-A., p. 63), il existe une séquence (la séquence médiane ci-dessus) dont l'antécédent est vide et où chaque formule du conséquent provient de $\mathfrak{P}$ par élimination des quantificateurs universels et particuliers (et des variables qui les accompagnent) et par substitution de variables individuelles libres aux variables individuelles liées; cette séquence

La transformation de la dérivation s'opère en plusieurs étapes.

2. 21. D'abord, on applique le théorème fondamental (III, 2. 5) : en vertu de ce théorème, la dérivation peut être transformée en une dérivation sans coupure.

2. 22. Modification des séquences fondamentales qui contiennent un signe $\forall$ ou un signe $\exists$:

En vertu de la propriété des formules partielles (III, 2. 513), ces séquences ne peuvent avoir que la forme $\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ ou : $\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$. On les transforme en ($a$ est une variable individuelle libre qui est supposée ne pas figurer encore dans la dérivation) :

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}a \rightarrow \mathfrak{F}a}{\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{F}a}\,AEA}{\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,AES \qquad \text{ou} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{F}a \rightarrow \mathfrak{F}a}{\mathfrak{F}a \rightarrow \exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,EES}{\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,EEA.$$

En répétant ce processus un nombre suffisant de fois, on peut évidemment arriver à ce que les signes $\forall$ et $\exists$ ne figurent plus dans aucune des séquences fondamentales de la dérivation.

2. 23. Nous allons faire maintenant une induction complète sur l' « ordre » de la dérivation, que nous définirons de la façon suivante.

Nous appellerons « figures de déduction propositionnelles » les figures de déduction opératoires qui appartiennent aux signes &, $\vee$, $\neg$ et $\supset$, et nous appelons les autres, donc les figures *AES*, *AEA*, *EES* et *EEA*, les « figures de déduction de prédicats ».

est de plus dérivable du point de vue classique sans emploi des signes $\forall$ et $\exists$, et, à partir d'elle, il est possible de dériver $\rightarrow \mathfrak{P}$ en utilisant simplement les figures de déduction que nous avons appelées figures *AES* et *EES*, contraction dans le conséquent et inversion dans le conséquent. (En vertu du théorème 2. 1, il faudrait y ajouter encore des atténuations dans le conséquent, mais on s'aperçoit facilement que ces atténuations peuvent toujours être évitées.)

Voir aussi : J. Herbrand, Sur le problème fondamental de la logique mathématique. *C. r. de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie*, **24** (1931), cl. III, p. 31, rem. 1.

A toute figure de déduction de prédicats dans la dérivation, nous assignons le nombre d'ordre suivant :

Nous considérons la portion de chaîne qui va de la conclusion de la figure de déduction en question jusqu'à la séquence finale de la dérivation (cette séquence comprise) et nous comptons le nombre de conclusions de figures de déduction propositionnelles qui figurent dans cette portion de chaîne. Leur nombre est le nombre d'ordre.

La somme du nombre d'ordre de toutes les figures de déduction de prédicats dans la dérivation est l'o r d r e d e l a d é r i v a t i o n.

Notre objectif est de diminuer progressivement ce nombre jusqu'au moment où il deviendra nul.

Nous établissons d'abord qu'alors le théorème (2. 1) peut être facilement démontré. (Les étapes (2. 232) seront conçues de telle façon qu'elles conserveront les propriétés obtenues en 2. 21 et en 2. 22.)

2. 231. Pour cela, nous supposons que la dérivation est déjà ramenée à l'ordre 0. Nous allons de la séquence finale à la prémisse de la figure de déduction dès que nous rencontrons la conclusion d'une figure de déduction propositionnelle ou une séquence fondamentale; appelons cette séquence $\mathfrak{S}q$. (Elle nous servira de « séquence médiane » après une transformation qui va être indiquée à l'instant.)

Nous modifions alors comme suit la dérivation de $\mathfrak{S}q$.

Nous supprimons tout simplement toutes les *H-S*-formules qui contiennent encore un signe $\forall$ ou $\exists$. Au terme de cette élimination, c e t t e dérivation reste correcte; en effet, les séquences fondamentales ne sont pas affectées, en vertu de 2. 22. De plus, aucune formule principale ou secondaire d'une figure de déduction ne se trouve éliminée, car si une telle formule comportait un signe $\forall$ ou $\exists$, la formule principale contiendrait certainement ce signe; or, notre dérivation ne comporte pas de figures de déduction de prédicats (sinon le nombre d'ordre de cette figure de déduction serait plus grand que 0) et les figures de déduction propositionnelles ne peuvent contenir le signe $\forall$ ni le signe $\exists$ dans leur formule principale, en vertu de la propriété des formules partielles (III, 2. 513) et de l'hypothèse du théorème 2. 1.

Et une figure de déduction reste correcte quand on y supprime, partout où elle intervient dans cette figure à titre de *S*-formule, une formule qui n'y est ni formule principale ni formule secondaire; on peut facilement le vérifier en examinant les schémas III, 1. 21 et III, 1. 22. (En tout cas, on obtient une figure de déduction identique, qu'il suffit d'éliminer comme on l'a déjà fait précédemment.)

La séquence $\mathfrak{S}q^*$ qui provient de $\mathfrak{S}q$ par cette transformation se distingue de $\mathfrak{S}q$ par le fait que certaines *S*-formules ne s'y retrouvent plus. Nous effectuons sur $\mathfrak{S}q^*$ un certain nombre d'atténuations et d'inversions, de façon à obtenir de nouveau la séquence $\mathfrak{S}q$ et nous ajoutons à celle-ci la partie inférieure, non modifiée, de la dérivation.

Nous sommes ainsi au but : $\mathfrak{S}q^*$ est la séquence médiane et l'on voit immédiatement qu'elle satisfait à toutes les conditions imposées par le théorème (2. 1) pour la séquence médiane.

2. 232. Il nous reste maintenant à effectuer l'étape inductive de notre démonstration, autrement dit : l'ordre de la dérivation étant supposé plus grand que 0, il nous faut montrer comment le rendre plus petit (44*).

(44*) L'induction établit successivement que :

1° Le théorème est vrai pour une dérivation de l'ordre 0 (ce qui est montré dans 2. 231).

2° Si le théorème est vrai pour une dérivation d'ordre *n*-1, il est vrai pour une dérivation d'ordre *n*.

On conclura, en appliquant le principe d'induction (sous la forme spéciale signalée à la note 31*) que le théorème est vrai pour une dérivation d'ordre quelconque.

Pour établir le 2° ci-dessus, on montre que s'il existe une dérivation d'ordre *n*, il existe une dérivation avec même point de départ et même séquence finale, démonstration d'ordre *n*-1, et qui s'obtient selon une méthode donnée.

L'ordre d'une dérivation est le nombre de figures de déduction proposi-

2.232.1. Nous allons d'abord modifier les variables individuelles libres de la même façon qu'en III, 3.10.

Nous obtenons ainsi une dérivation douée de la propriété suivante (III, 3. 101).

Pour toute figure *AES* (ou *EEA*), on a : la variable propre de cette figure n'intervient, dans la dérivation, que dans les séquences qui *surmontent* la conclusion de cette figure *AES* (ou *EEA*), et, de plus, elle n'est variable propre d'aucune autre figure *AES* (ou *EEA*).

Cette modification ne change évidemment pas l'ordre de la dérivation.

2.232.2. Nous en arrivons maintenant à la transformation proprement dite.

Nous établissons d'abord ceci : il y a, dans la dérivation, une figure de déduction de prédicats — que nous appelons $\mathfrak{S}\mathfrak{f}\,1$ — douée de la propriété suivante : si l'on suit la portion de chaîne qui s'étend de la conclusion de cette figure de déduction jusqu'à la séquence finale, la conclusion de la première figure opératoire de déduction que l'on rencontre est la conclusion d'une figure de déduction propositionnelle (nous appelons cette figure de déduction $\mathfrak{S}\mathfrak{f}\,2$). Si, en effet, la dérivation ne comportait aucune figure de déduction de prédicats jouissant de cette propriété, son ordre serait égal à 0.

Notre objectif, c'est de faire glisser la figure de déduction $\mathfrak{S}\mathfrak{f}\,1$ vers le bas, en la faisant passer par-dessus $\mathfrak{S}\mathfrak{f}\,2$. Cette opération peut se réaliser facilement, selon les schémas suivants.

2.232.21. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}\,2$ n'a qu'une seule prémisse.

2.232.211. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}\,1$ est une figure *AES*. Alors la portion de la dérivation sur laquelle il faut opérer se présente comme suit :

tionnelles qui suivent une figure de déduction de prédicats. Pour que cet ordre soit diminué d'une unité, il suffira de faire « sauter au-dessus de » la figure de déduction de prédicats la figure de déduction propositionnelle qui la suivait. C'est un procédé analogue à celui qui a été utilisé dans la démonstration du théorème fondamental pour diminuer le rang d'une dérivation (III, 3. 121).

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}a}{\Gamma \rightarrow \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\ AES$$

$$\Gamma \rightarrow \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$$
$$\overline{\overline{\Delta \rightarrow \Lambda}}$$
$\Big\}$ $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2, précédée éventuellement de figures de déduction structurales.

Nous la transformons en :

$\Gamma \rightarrow \Theta, \mathfrak{F}a$

——— éventuellement plusieurs inversions (45*) et une expansion.

$\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}a, \Theta, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$

═══ figures de déduction exactement de même nature que ci-dessus, c'est-à-dire : $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2 précédé éventuellement de figures de déduction structurales.

$\Delta \rightarrow \mathfrak{F}a, \Lambda$

═══ éventuellement plusieurs inversions (46*).

$\Delta \rightarrow \Lambda, \mathfrak{F}a$

——— *AES*.

$\Delta \rightarrow \Lambda, \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$

═══ éventuellement plusieurs inversions (47*) et une contraction.

$\Delta \rightarrow \Lambda$

L'élimination de $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ par contraction, dans la dernière étape du schéma ci-dessus, est rendue possible par le fait que $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ doit figurer dans Λ comme *S*-formule. (Car, dans la dérivation primitive, ni la figure $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2 ni les figures de déduction structurales qui la précèdent, n'ont pu faire disparaître du conséquent la *S*-formule $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$: cette formule ne peut être en effet une formule secondaire de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2, en vertu de la propriété des formules partielles III, 2. 513, et de l'hypothèse du théorème 2. 1.)

Pour la figure *AES* qui a été déplacée, la condition des variables est vérifiée en vertu de 2. 232. 1 (48*).

L'ordre de la dérivation se trouve ainsi évidemment diminué d'une unité.

2. 232. 212. Le cas où $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1 est une figure *EES* se traite exactement de la même manière : il suffit de remplacer $\forall$ par $\exists$.

2. 232. 213. Les cas où $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1 est une figure *AEA* ou *EEA* se traitent symétriquement aux deux précédents.

2. 232. 22. Le cas où $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2 possède deux prémisses, et est donc

(45*) Si Θ n'est pas vide.
(46*) Si Λ n'est pas vide.
(47*) Si $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$, qui doit nécessairement figurer dans Λ, n'y figure pas à la dernière place à droite.
(48*) Modification des variables individuelles libres.

une figure *UES*, *OEA* ou *FEA* peut être traité de façon tout à fait semblable; il faudra simplement introduire quelques figures de déduction structurales supplémentaires.

2. 3. On peut obtenir d'autres formes renforcées du théorème fondamental, analogues au théorème 2. 1, en ce sens que l'on peut imposer certaines conditions à la suite des figures de déduction opératoires d'une dérivation. On peut, en effet, dans une large mesure, faire passer les figures de déduction les unes au-dessus des autres, de même que dans le cas qui vient d'être examiné (2. 232. 2).

Nous ne développerons pas davantage cette question.

§ 3.

Application du théorème fondamental renforcé (2. 1) à une nouvelle (7) démonstration de non-contradiction de l'arithmétique, à l'exclusion de l'induction complète.

Nous entendons par a r i t h m é t i q u e la théorie (élémentaire, c'est-à-dire ne faisant pas usage des moyens de l'analyse) des nombres naturels. Nous pouvons la formaliser de la façon suivante, en utilisant notre calcul logique *LK*.

3. I. En arithmétique, on a coutume d'utiliser des « fonctions », par exemple x' (égal à $x + 1$), $x + y$, $x . y$.

Comme nous n'avons pas introduit de signes de fonction dans nos considérations logiques, nous allons, pour pouvoir les appliquer malgré tout à l'arithmétique, formaliser les propositions de l'arithmétique de telle façon que le rôle des fonctions soit rempli par des prédicats. Ainsi, au lieu de la fonction x', nous utiliserons

(7) Les autres démonstrations ont été données par J. von Neumann. Zur Hilbertschen Beweistheorie, *Math. Zeitschr.*, **26** (1927), pp. 1-46, et par J. Herbrand. Sur la non-contradiction de l'Arithmétique, *Journ. f. d. reine u. angew. Math.*, **166** (1932), pp. 1-8.

le prédicat $x \,\mathrm{Vg}\, y$ (49*) que nous lirons : x est le prédécesseur de y, c'est-à-dire : $y = x + 1$. En outre, nous considérerons $[x + y = z]$ comme un prédicat à trois arguments; les signes $+$ et $=$ n'y ont donc pas de signification propre. Un autre prédicat est $x = y$; ce signe d'égalité n'a donc absolument rien à voir, du point de vue formel, avec le précédent.

En outre, nous n'écrirons pas le chiffre 1 comme un signe d'individu, étant donné que, dans notre formalisme logique, nous n'avons utilisé que des variables individuelles et que nous n'y avons appliqué aucun signe pour des individus déterminés, c'est pourquoi nous nous servirons de l'écriture suivante : le prédicat « Eins x » aura la signification intuitive « x est le nombre 1 ».

L'énoncé : « $x + 1$ est le successeur de x » sera par exemple représenté dans notre formalisme de la façon suivante :

$$\forall x \, \forall y \, \forall z \, ((\mathrm{Eins}\, y \;\&\; [x + y = z]) \supset x \,\mathrm{Vg}\, z).$$

Les autres nombres naturels seront caractérisés par les prédicats Eins x & $x \,\mathrm{Vg}\, y$, Eins x & $x \,\mathrm{Vg}\, y$ & $y \,\mathrm{Vg}\, z$, etc.

Mais comment allons-nous maintenant intégrer dans notre calcul les signes de prédicats ainsi introduits, alors que nous n'y avons toléré que des variables propositionnelles?

Nous stipulerons tout simplement que les signes de prédicat doivent être traités exactement comme des variables propositionnelles. De façon plus précise, nous considérerons des expressions de la forme :

$$\mathrm{Eins}\, \mathfrak{x}, \quad \mathfrak{x} \,\mathrm{Vg}\, \mathfrak{y}, \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{y}, \quad [\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \mathfrak{z}],$$

où $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ et $\mathfrak{z}$ représentent des variables individuelles quelconques,

(49*) « Vg » de *Vorgänger*, prédécesseur.
Nous rappelons que dans la terminologie de l'école de Hilbert, tacitement adoptée par Gentzen, la formule « $x \,\mathrm{Vg}\, y$ », que d'autres appelleraient une fonction propositionnelle, est un « prédicat », et que dans une expression comme « Aa », qui peut approximativement se traduire « la formule A est vraie de a », la variable A est une variable propositionnelle.

simplement comme des modes d'écriture plus explicites pour les formules :

$$A\mathfrak{x}, \quad B\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \quad C\mathfrak{x}\mathfrak{y}, \quad D\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}.$$

En ce sens, les formules axiomatiques suivantes sont réellement des formules conformément à notre définition.

(On ne peut considérer le nombre 1 comme un mode d'écriture pour une variable individuelle, étant donné que, dans notre calcul, les variables individuelles jouent réellement le rôle de variables, ce qui n'est pas le cas pour les variables propositionnelles.)

Nous prendrons d'abord comme « formules axiomatiques » de l'arithmétique les formules suivantes; nous indiquerons ultérieurement, à la suite de notre démonstration de non-contradiction (voir 3. 3), certains points de vue généraux selon lesquels il est possible de former d'autres axiomes que l'on pourra admettre dans le formalisme.

Égalité :	$\forall x\, x = x$	(Réflexivité)
	$\forall x \forall y\, (x = y \supset y = x)$	(Symétrie)
	$\forall x \forall y \forall z\, ((x = y \,\&\, y = z) \supset x = z)$	(Transitivité)
Unité :	$\exists x\, \mathrm{Eins}\, x$	(Existence du 1)
	$\forall x \forall y\, ((\mathrm{Eins}\, x \,\&\, \mathrm{Eins}\, y) \supset x = y)$	(Unicité du 1)
Prédécesseurs :	$\forall x \exists y\, x \,\mathrm{Vg}\, y$	(Existence du successeur)
	$\forall x \forall y\, (x \,\mathrm{Vg}\, y \supset \neg\, \mathrm{Eins}\, y)$	(1 n'a pas de prédécesseur)
	$\forall x \forall y \forall z \forall u\, ((x \,\mathrm{Vg}\, y \,\&\, z \,\mathrm{Vg}\, u \,\&\, x = z) \supset y = u)$	(Unicité du successeur)
	$\forall x \forall y \forall z \forall u\, ((x \,\mathrm{Vg}\, y \,\&\, z \,\mathrm{Vg}\, u \,\&\, y = u) \supset x = z)$	(Unicité du prédécesseur)

Une formule $\mathfrak{B}$ sera dite dérivable dans l'arithmétique sans induction complète, s'il existe une *LK*-dérivation pour une séquence :

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}$$

où $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ sont des formules axiomatiques de l'arithmétique.

Il n'est pas possible de d é m o n t r e r que ce système formel de l'arithmétique permet effectivement de représenter les procédés courants de démonstration de l'arithmétique intuitive (pour autant qu'ils n'utilisent pas l'induction complète) : il n'existe en effet aucun cadre précis pour des considérations d'ordre intuitif; on ne peut que se convaincre de certaines démonstrations intuitives particulières par les essais qu'on fera.

3.2. Nous allons maintenant démontrer la n o n - c o n t r a d i c t i o n d u s y s t è m e f o r m e l a i n s i d é t e r m i n é. Grâce à la forme renforcée du théorème fondamental (2. 2), cette démonstration est tout à fait simple.

3. 21. Une « formule contradictoire » $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}$ est dérivable dans le système si et uniquement s'il existe une *LK*-dérivation pour une séquence dont le c o n s é q u e n t est v i d e et dont l'antécédent est formé de formules axiomatiques arithmétiques.

A partir de $\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}$, on obtient $\Gamma \to$ comme suit :

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to}\,NEA}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \to}\,UEA}{\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \to}\,\text{inversion}}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \to}\,UEA}{\mathfrak{A} \,\&\, \neg\mathfrak{A} \to}\,\text{contraction}}{\Gamma \to}\,\text{coupure.}$$

On obtient l'inverse grâce à une atténuation dans le conséquent.

Si donc notre arithmétique est contradictoire, il existe une *LK*-dérivation dont la séquence finale est :

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to,$$

où $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ sont des formules axiomatiques arithmétiques.

3. 21. Appliquons maintenant la forme renforcée du théorème fondamental (2. 1). Les formules axiomatiques arithmétiques satisfont aux conditions imposées aux *S*-formules de la séquence

finale (50*). Il existe donc une *LK*-dérivation qui a cette même séquence finale et qui jouit des propriétés suivantes :

1° Elle ne contient aucune coupure.

2° Elle contient une *H*-séquence, la « séquence médiane », dont la dérivation ne comporte aucun signe $\forall$ ni $\exists$; et la séquence finale en dérive par une suite de figures de déduction *AEA* et *EEA*, d'atténuations, de contractions et d'inversions dans l'antécédent. La séquence médiane a un conséquent vide (2. 11).

3. 23. Effectuons ensuite une modification des variables individuelles libres, comme dans III, 3. 10; les propriétés ci-dessus ne sont pas modifiées et la propriété suivante s'y ajoute (III, 3. 101) : la variable propre de chacune des figures *EEA* n'intervient, dans la dérivation, que dans des séquences qui surmontent la conclusion de la figure *EEA* à laquelle elle appartient.

3. 24. Remplaçons maintenant (selon une méthode que nous allons indiquer à l'instant) chacune des variables individuelles libres, partout où elle figure dans la dérivation, par un même nombre naturel. Nous allons obtenir ainsi une figure que nous ne pouvons plus appeler une *LK*-dérivation; nous verrons dans quelle mesure elle possède cependant un sens intuitif.

Nous effectuons la substitution de nombres naturels aux variables individuelles libres selon l'ordre suivant :

3. 241. D'abord, nous remplaçons par le nombre 1 toutes les variables individuelles libres qui n'interviennent pas comme variables propres dans une figure *EEA* (on pourrait aussi bien prendre un autre nombre).

3. 242. Ensuite, remontant la dérivation à partir de la séquence finale, nous nous arrêtons successivement, dans l'ordre dans lequel elles se présentent, à chacune des figures de déduction *EEA* que nous rencontrons et nous remplaçons par un certain nombre la variable propre (partout où elle figure dans la «dérivation» (51*).

(50*) Elles sont en forme prénexe.

(51*) Il s'agit de la dérivation de la conclusion de la figure *EEA* considérée.

Nous déterminons ce nombre comme suit :

La figure *EEA* ne peut avoir que l'une des formes :

$$\frac{\text{Eins}\ \mathfrak{a}, \Gamma \to \Theta}{\exists x\ \text{Eins}\ x, \Gamma \to \Theta} \quad \text{ou} \quad \frac{\nu\ \text{Vg}\ \mathfrak{a}, \Gamma \to \Theta}{\exists y\ \nu\ \text{Vg}\ y, \Gamma \to \Theta}.$$

(En vertu de la propriété des formules partielles, III, 2. 513, ν ne peut être qu'un nombre, en vertu de 3. 241 et de 3. 23.)

Dans le premier cas, nous remplaçons $\mathfrak{a}$ par 1, dans le second cas par le nombre qui est plus grand que ν d'une unité.

3. 25. Examinons maintenant la figure en laquelle la dérivation se trouve ainsi transformée. Ce qui nous intéresse particulièrement, c'est l'aspect qu'a pris l' (ancienne) séquence médiane, nous pouvons en dire ceci :

Son conséquent est vide, et chacune des *S*-formules de l'antécédent ou bien est de la forme Eins 1 ou ν Vg ν' (où ν représente un nombre et ν' le nombre supérieur d'une unité au premier), ou bien elle provient d'une formule axiomatique arithmétique qui ne possède que des quantificateurs universels initiaux, et cela par suppression de ces quantificateurs universels (et des variables individuelles liées qui les accompagnent) et par substitution de nombres aux variables individuelles liées dans le reste de la formule. (Tout ceci résulte des mêmes considérations qu'en III, 2. 512; voir aussi 2. 11.)

Ce qui signifie : les *S*-formules de l'antécédent de la séquence médiane représentent des propositions numériques intuitivement valides.

De plus, la « dérivation » de la séquence médiane provient d'une dérivation qui ne contient pas les signes $\forall$ et $\exists$ par une transformation remplaçant par des nombres les variables individuelles libres qui y figurent. Et une telle « dérivation » représente « intuitivement » une démonstration de l'arithmétique qui n'utilise que des procédés de déductions appartenant à la logique des propositions.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant :

Si notre arithmétique est contradictoire, il doit déjà être possible de déduire une contradiction de propositions numériques valides par simple application des procédés de déduction de la logique des propositions.

Les « propositions numériques valides » dont il s'agit sont donc des propositions de la forme Eins 1, ν Vg ν', ainsi que tous les cas particuliers numériques des propositions génériques qui interviennent dans les axiomes; ainsi par exemple :

$$3 = 3; \quad 4 = 5 \supset 5 = 4; \quad 3 \text{ Vg } 4 \supset \neg \text{ Eins } 4.$$

Or, il est évident qu'il n'est pas possible de déduire au moyen de la logique des propositions une contradiction à partir de propositions de ce type.

Démontrer ceci ne reviendrait guère qu'à paraphraser formellement une situation de fait intuitivement claire. Aussi n'allons-nous pas effectuer cette démonstration, nous ne ferons qu'indiquer brièvement le procédé couramment utilisé dans ce genre de démonstrations.

On détermine de façon générale pour quelles valeurs numériques les formules Eins μ, $\mu = \nu$, μ Vg ν, $\mu + \nu = \rho$, etc., sont vraies et pour quelles valeurs elles sont fausses; ensuite, on définit, selon une méthode bien connue (voir par exemple H.-A., p. 3), la vérité ou la fausseté des formules $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $\neg \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ en fonction de la vérité ou de la fausseté des formules partielles; et on montre alors que tous les cas particuliers numériques des axiomes sont « valides » et que les figures de déduction de la logique des propositions ne peuvent donner, à partir de formules valides, que des formules valides. Or, par ailleurs, une formule contradictoire n'est pas une formule valide.

3. 3. Les remarques qui ont été faites en 3. 25 permettent de saisir aisément de quelle façon le système des *formules axiomatiques arithmétiques* peut être élargi sans qu'une contradiction en devienne dérivable. Nous pouvons, de

façon tout à fait générale, admettre comme formules axiomatiques des formules dont les quantificateurs universels sont tous initiaux et étendent leur action à la formule tout entière, et qui, de plus, ne contiennent pas de quantificateurs particuliers, et dont chaque cas particulier numérique est intuitivement vrai. (Nous pourrions également admettre certaines formules contenant des quantificateurs particuliers, pour autant qu'il soit possible de les traiter, dans la démonstration de non-contradiction, de façon analogue aux deux quantificateurs rencontrés plus haut.)

Par exemple, on pourra admettre les formules axiomatiques suivantes pour l'addition :

$$\forall x \forall y \, (x \, \mathrm{Vg} \, y \supset [x + 1 = y])$$
$$\forall x \forall y \forall z \forall u \forall v \, ((x \, \mathrm{Vg} \, y \, \& \, [z + x = u] \, \& \, [z + y = v]) \supset u \, \mathrm{Vg} \, v)$$
$$\forall x \forall y \forall z \forall u \, (([x + y = z] \, \& \, [x + y = u]) \supset z = u)$$
$$\forall x \forall y \forall z \, ([x + y = z] \supset [y + x = z])$$

et d'autres.

3. 4. Étant donné que, dans la théorie des nombres, on a constamment besoin de l'induction complète, l'arithmétique sans l'induction complète n'a pas beaucoup de signification pratique. Jusqu'ici, cependant, on n'a pas encore réussi à démontrer de façon valable la non-contradiction de l'arithmétique tout entière, avec l'induction complète.

Section V.

L'équivalence des nouveaux calculs NJ, NK et LJ, LK avec un calcul adapté au formalisme de Hilbert.

§ 1.

Le concept d'équivalence.

1. 1. Nous introduisons de la façon suivante le concept d'équivalence entre formules et séquences (notre définition est en accord avec les remarques qui ont été faites en I, 1. 1 et en I, 2. 4 sur le sens intuitif du signe $\wedge$ et des séquences).

Des formules identiques sont équivalentes.

Des séquences identiques sont équivalentes.

Deux formules sont équivalentes, lorsque l'une provient de l'autre par substitution de la formule $A \mathbin{\&} \neg A$ au signe $\wedge$, partout où il figure.

La séquence $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$ est équivalente à la formule suivante :

si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ne sont pas vides :

$$(\mathfrak{A}_1 \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} \mathfrak{A}_\mu) \supset (\mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1);$$

(cette définition se prête mieux à la démonstration d'équivalence que celle où l'on aurait : $\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_\nu$);

si $\mathfrak{A}$ est vide et $\mathfrak{B}$ non vide :

$$\mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1;$$

si $\mathfrak{B}$ est vide et $\mathfrak{A}$ non vide :

$$(\mathfrak{A}_1 \& \ldots \& \mathfrak{A}_\mu) \supset (A \& \neg A);$$

si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont tous les deux vides :

$$A \& \neg A.$$

L'équivalence est transitive.

1. 2. (On pourrait bien entendu définir le concept d'équivalence de façon notablement plus large; ainsi, on appelle ordinairement équivalentes deux formules dont l'une se déduit de l'autre. Nous nous contenterons ici de la définition particulière qui vient d'être donnée et qui est suffisante pour notre démonstration d'équivalence.)

Nous appellerons deux dérivations équivalentes lorsque la formule finale (ou la séquence finale) de l'une est équivalente à la formule finale (ou à la séquence finale) de l'autre.

Nous appellerons deux calculs équivalents lorsque toute dérivation de l'un peut être transformée en une dérivation équivalente de l'autre.

Dans le § 2 de cette section, nous donnerons un calcul adapté au formalisme de Hilbert (*LHJ* pour la logique des prédicats intuitionniste, *LHK* pour la logique des prédicats classique). Dans les paragraphes suivants, nous montrerons alors l'équivalence des calculs *LHJ*, *NJ* et *LJ* (§ 3-5) ainsi que l'équivalence des calculs *LHK*, *NK* et *LK* (§ 6); au sens qui vient d'être défini. Nous démontrerons successivement :

Toute *LHJ*-dérivation peut être transformée en une *NJ*-dérivation équivalente (§ 3), toute *NJ*-dérivation peut être transformée en une *LJ*-dérivation équivalente (§ 4) et toute *LJ*-dérivation peut être transformée en une *LHJ*-dérivation équivalente (§ 5); ceci suffit évidemment à démontrer l'équivalence de ces trois calculs entre eux; nous procéderons ensuite de façon tout à fait analogue pour les trois calculs classiques, dans le § 6 (6. 1-6. 3).

§ 2.

Construction d'un calcul logistique selon Hilbert (8) et Glivenko (9).

Nous expliquerons d'abord la forme intuitionniste de ce calcul.

Une *LHJ*-dérivation consiste en formules disposées en ordre généalogique; les formules initiales sont des formules fondamentales.

Les formules fondamentales et les figures de déduction peuvent être formées à partir des schémas suivants, suivant les mêmes règles de substitution qu'en II, 2. 21, c'est-à-dire :

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ peuvent être remplacés par des formules quelconques, $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$ (ou $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}$) par une formule quelconque dont le signe terminal est $\forall$ (ou $\exists$), $\mathfrak{x}$ désignant la variable individuelle liée qui appartient à ce signe, et $\mathfrak{F}a$ peut être remplacé par la formule qui provient de $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$ lorsqu'on y remplace la variable individuelle liée $\mathfrak{x}$, partout où elle figure, par la variable individuelle libre a.

Schémas pour les formules fondamentales :

2.11. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}$
2.12. $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$
2.13. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$
2.14. $(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$
2.15. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))$
2.21. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}$
2.22. $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$

(8) D. Hilbert. Die Grundlagen der Mathematik, *Abh. a. d. math. Sem. d. Hamburg. Univ.*, **6** (1928), pp. 65-85.

(9) V. Glivenko. Sur quelques points de la logique de M. Brouwer, *Acad. royale de Belgique, Bulletins de la classe des Sciences*, 5e série, t. XV (1929), pp. 183-188.

2.23. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{C})))$
2.31. $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$
2.32. $\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$
2.33. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}))$
2.41. $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \supset \neg \mathfrak{A})$
2.42. $(\neg \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$
2.51. $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \supset \mathfrak{F}a$
2.52. $\mathfrak{F}a \supset \exists \mathfrak{F}\mathfrak{x}$.

(Quelques schémas sont superflus, mais peu importe ici la question de l'indépendance.)

Schémas pour les figures de déduction :

$$\frac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}} \qquad \frac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}a}{\mathfrak{A} \supset \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}} \qquad \frac{\mathfrak{F}a \supset \mathfrak{A}}{(\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{A}}$$

Condition des variables : dans les figures de déduction qui proviennent des deux derniers schémas, la variable individuelle désignée par a dans le schéma ne peut figurer dans la conclusion (donc ni dans $\mathfrak{A}$ ni dans $\mathfrak{F}\mathfrak{x}$).

(Le calcul *LHJ* est équivalent, pour l'essentiel, au calcul de Heyting (10).)

En adjoignant à ce calcul le schéma de formule fondamentale $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$, on obtient le calcul *LHK* (logique des prédicats classique).

(Ce calcul est équivalent, pour l'essentiel, à celui qui est donné dans H.-A., p. 53.)

§ 3.

Transformation d'une LHJ-dérivation en une NJ-dérivation équivalente.

A partir d'une *LHJ*-dérivation (V, 2) nous pouvons obtenir une *NJ*-dérivation (II, 2) ayant la même formule finale, au

(10) Voir note 2.

moyen de la transformation suivante effectuée sur cette *LHJ*-dérivation.

(Au terme de cette transformation, toutes les *H*-formules de cette *LHJ*-dérivation réapparaîtront comme *H*-formules de la *NJ*-dérivation et elles n'y dépendront jamais d'une formule-hypothèse. Outre ces formules, s'introduiront d'autres *H*-formules, dépendantes de formules-hypothèses.)

3. 1. Les formules fondamentales *LHJ* sont remplacées par des *NJ*-dérivations de ces mêmes formules, selon les schémas suivants :

(2. 11)
$$\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{A}}\ FE_1.$$

(2. 12)
$$\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}}}{\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}}\ FE}{\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})}\ FE_1.$$

(2. 13)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \supset (\overset{2}{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{B})}{{}_{1}\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\ FB}{\mathfrak{B}}\ FB'}{\dfrac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})}\ FE_2.}\ FE_1$$

(2. 14)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \supset (\overset{3}{\mathfrak{B}} \supset)\mathfrak{C}}{{}_{2}\mathfrak{B} \quad \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}}\ FB}{\mathfrak{C}}\ FB}{\dfrac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}}{\dfrac{\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})}{(\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})) \supset (\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))}\ FE_3.}\ FE_2}\ FE_1$$

(2. 15)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{A} \overset{3}{\supset} \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\,FB \qquad \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}}\,FE_1}{(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C})}\,FE_2}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}))}\,FE_3.$$

(2. 21)
$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \overset{1}{\&} \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}\,UB}{(\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}}\,FE_1.$$

2. 22, 2. 31, 2. 32, 2. 51 et 2. 52 se traitent de façon tout à fait analogue à 2. 21.

(2. 23)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{A} \overset{3}{\supset} \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\,FB \qquad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{A} \overset{2}{\supset} \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}}\,UE}{\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C})}\,FE_1}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \& \mathfrak{C}))}\,FE_2.}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \& \mathfrak{C})))}\,FE_3$$

(2. 33)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \overset{2}{\vee} \mathfrak{B} \qquad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{A} \overset{4}{\supset} \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\,FB \qquad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{B}} \qquad \mathfrak{B} \overset{3}{\supset} \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}}\,FB}{\mathfrak{C}}\,OB_1}{(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}}\,FE_2}{(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C})}\,FE_3}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}) \supset (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}))}\,FE_4.$$

(2. 41)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{A} \overset{3}{\supset} \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}\,FB \qquad \dfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{A} \overset{2}{\supset} \neg \mathfrak{B}}{\neg \mathfrak{B}}\,FB}{\wedge}\,NB}{\neg \mathfrak{A}}\,NE_1}{(\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \supset \neg \mathfrak{A}}\,FE_2}{(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset ((\mathfrak{A} \supset \neg \mathfrak{B}) \supset \neg \mathfrak{A})}\,FE_3.$$

(2.42)
$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \;\neg\; \overset{2}{\mathfrak{A}}}{\wedge}\,NB}{\mathfrak{B}}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}\,FE_1}{(\neg\,\mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})}\,FE_2.$$

3. 2. Les figures de déduction *LHJ* sont remplacées par des sections d'une *NJ*-dérivation, suivant les schémas suivants :

$\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$ subsiste; ce schéma est en effet déjà un schéma *FB*.

$$\frac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}a}{\mathfrak{A} \supset \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}} \quad \text{devient} \quad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{1}{\mathfrak{A}} \quad \mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}a}{\mathfrak{F}a}\,FB}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,AE}{\mathfrak{A} \supset \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}}\,FE_1$$

$$\frac{\mathfrak{F}a \supset \mathfrak{A}}{(\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}) \supset \mathfrak{A}} \quad \text{devient} \quad \cfrac{\cfrac{\exists^{1}\, \mathfrak{F} \qquad \cfrac{\overset{2}{\mathfrak{F}a} \quad \mathfrak{F}a \supset \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}\,FB}{\mathfrak{A}}\,EB_2}{(\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x}) \supset \mathfrak{A}}\,FE_1$$

La condition des variables pour les figures de déduction *AE* et *EB* est remplie, comme on le voit facilement, en vertu de la condition des variables à laquelle obéissent les figures de déduction *LHJ*.

La transformation d'une *LHJ*-dérivation en une *NJ*-dérivation équivalente est ainsi achevée.

§ 4.

Transformation d'une NJ-dérivation en une LJ-dérivation équivalente.

4. 1. Cette transformation s'effectue comme suit. On remplace d'abord chaque *H*-formule de la *NJ*-dérivation par une séquence

(comparer avec III, 1. 1) dont le conséquent ne contient que la formule elle-même, et dont l'antécédent contient les formules-hypothèses dont cette formule dépendait, rangées dans l'ordre qu'elles avaient dans la NJ-dérivation, de gauche à droite. (On voit clairement en quel sens on peut entendre une suite de formules initiales d'une figure en ordre généalogique, prises de gauche à droite.)

On remplace ensuite le signe $\wedge$, partout où il figure, par $A \ \& \urcorner A$. (Nous désignons par $\mathfrak{A}^*$ la formule qui, au terme de cette transformation, provient d'une figure donnée $\mathfrak{A}$.)

4. 2. On obtient déjà de la sorte un système de séquences en ordre généalogique. La séquence finale a un antécédent vide (II, 2. 2); il est visible qu'elle est déjà équivalente à la formule finale de la NJ-dérivation. Les séquences initiales ont toutes la forme $\mathfrak{D}^* \to \mathfrak{D}^*$ (II, 2. 2), elles sont donc déjà des séquences fondamentales d'une LJ-dérivation.

Les figures qui proviennent (52*) des figures de déduction NJ sont transformées en sections d'une LJ-dérivation selon les schémas suivants :

4. 22. Une figure UE devenait :

$$\frac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \Delta \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A}^* \ \& \ \mathfrak{B}^*}\,.$$

On en fait :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A}^*}\Big\}\begin{array}{l}\text{éventuellement plusieurs in-}\\ \text{versions et atténuations (53*)}\end{array} \quad \dfrac{\Delta \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}\Big\}\begin{array}{l}\text{éventuellement plu-}\\ \text{sieurs atténuations.}\end{array}}{\Gamma, \Delta \to {}^*\mathfrak{A} \ \& \ \mathfrak{B}^*}\ UES.$$

4. 23. Une figure FE devenait (54*) :

$$\frac{\Gamma_1, \mathfrak{A}^*, \Gamma_2, \ldots, \mathfrak{A}^*, \Gamma_\rho \to \mathfrak{B}^*}{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\rho \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*}\,.$$

(52*) Par les substitutions décrites en 4. 1.

(53*) Si Δ n'est pas vide.

(54*) Le schéma FE a la forme

$$\frac{\begin{array}{c}[\mathfrak{A}]\\ \mathfrak{B}\end{array}}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}}.$$

La formule $\mathfrak{A}$ entre crochets peut intervenir un nombre quelconque —

On en fait :

$$\begin{array}{c} \Gamma_1, \mathfrak{A}^*, \Gamma_2, \ldots, \mathfrak{A}^*, \Gamma\rho \rightarrow \mathfrak{B}^* \\ \hline \mathfrak{A}^*, \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma\rho \rightarrow \mathfrak{B}^* \\ \hline \Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma\rho \rightarrow \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^* \end{array} \quad \begin{array}{l} \left.\right\} \text{éventuellement plusieurs inversions et contractions, et parfois une atténuation (55*).} \\ FES. \end{array}$$

4. 24. Dans le cas d'une figure *NE*, on procède de même, et il reste finalement à traiter la figure

$$\frac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \rightarrow A \,\&\, \neg A}{\Gamma \rightarrow \neg \mathfrak{A}^*}$$

On dérive $A \,\&\, \neg A \rightarrow$ comme suit dans le calcul *LJ* :

$$\begin{array}{rl} A \rightarrow A & \\ \hline \neg A, A \rightarrow & NEA \\ \hline A \,\&\, \neg A, A \rightarrow & UEA \\ \hline A, A \,\&\, \neg A \rightarrow & \text{inversion} \\ \hline A \,\&\, \neg A, A \,\&\, \neg A \rightarrow & UEA \\ \hline A \,\&\, \neg A \rightarrow & \text{contraction.} \end{array}$$

éventuellement nul — de fois dans la dérivation à titre de formule-hypothèse.

En vertu de la transformation décrite en 4. 1, $\mathfrak{B}$ doit être remplacé par une séquence comportant, comme conséquent, la formule $\mathfrak{B}$ et, à l'antécédent, toutes les formules-hypothèses dont elle dépend, et dont l'ordre, si on parcourt l'antécédent de gauche à droite, est l'ordre où ces formules-hypothèses figurent dans la *NJ*-dérivation.

Parmi ces formules-hypothèses peut figurer un certain nombre de fois la formule $\mathfrak{A}$, que l'on écrira, dans la nouvelle séquence, aux places où elle figurait dans la *NJ*-dérivation.

Bien entendu, toutes les formules devront s'écrire dans la séquence sous la forme qu'elles prennent après les substitutions prévues en 4. 1; $\mathfrak{A}$ prendra donc la forme $\mathfrak{A}^*$.

(Si $\mathfrak{A}$ ne figure pas comme formule-hypothèse, elle ne figure pas dans l'antécédent de la séquence.)

Quant à la formule $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, celle-ci doit être remplacée par une séquence comportant comme conséquent la formule $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ elle-même et, à l'antécédent, les formules-hypothèses dont elle dépend. Ces formules sont les mêmes que celles dont dépend $\mathfrak{B}$, à l'exception des formules $\mathfrak{A}$.

(55*) Une atténuation dans l'antécédent est nécessaire pour introduire $\mathfrak{A}^*$, lorsque $\mathfrak{A}^*$ ne figure pas dans la prémisse.

En y ajoutant cette séquence, on transforme la figure à traiter en :

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to A \mathbin{\&} \neg A \qquad A \mathbin{\&} \neg A \to}{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to}\ \text{coupure}}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}^*}\ NES.$$

4. 25. La figure de déduction $NJ \dfrac{\wedge}{\mathfrak{D}}$ devenait, à la suite de la substitution (4. 1) :

$$\dfrac{\Gamma \to A \mathbin{\&} \neg A}{\Gamma \to \mathfrak{D}^*}.$$

On en fait :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \mathbin{\&} \neg A \qquad A \mathbin{\&} \neg A \to}{\Gamma \to}\ \text{coupure}}{\Gamma \to \mathfrak{D}^*}\ \text{atténuation.}$$

Il faut placer au-dessus de $A \mathbin{\&} \neg A$ la dérivation de cette séquence telle qu'elle est donnée en 4. 24.

4. 26. Une figure AB devenait :

$$\dfrac{\Gamma \to \forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}^* \mathfrak{x}}{\Gamma \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}.$$

On en fait :

$$\dfrac{\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^* \mathfrak{x} \qquad \dfrac{\mathfrak{F}^* \mathfrak{a} \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}{\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^* \mathfrak{x} \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}\ AEA}{\Gamma \to \mathfrak{F}^* \mathfrak{a}}\ \text{coupure.}$$

4. 27. Une figure UB se traite exactement de la même manière.

4. 28. Une figure FB devenait :

$$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \Delta \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}.$$

On en fait :

$$\dfrac{\dfrac{\Delta \to \mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^* \qquad \dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \mathfrak{B}^* \to \mathfrak{B}^*}{\mathfrak{A}^* \supset \mathfrak{B}^*, \Gamma \to \mathfrak{B}^*}\ FEA}{\Delta, \Gamma \to \mathfrak{B}^*}\ \text{coupure}}{\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}^*}\ \text{éventuellement plusieurs inversions.}$$

4. 29. Une figure *NB* devenait :

$$\frac{\Gamma \to \mathfrak{A}^* \qquad \Delta \to \neg\, \mathfrak{A}^*}{\Gamma, \Delta \to A \,\&\, \neg\, A}.$$

On en fait :

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Delta \to \neg\, \mathfrak{A}^* \qquad \cfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}^*}{\neg\, \mathfrak{A}^*, \Gamma \to}\; NEA}{\Delta, \Gamma \to}\;\text{coupure}}{\Gamma, \Delta \to}\;\text{éventuellement plusieurs inversions}}{\Gamma, \Delta \to A \,\&\, \neg\, A}\;\text{atténuation.}$$

4. 210. *OB* : on fait d'abord suivre les deux prémisses de droite, comme pour les figures *FE* et *NE* (4. 23) par des inversions, des contractions et une atténuation (pour autant que ce soit nécessaire), de façon à obtenir pour résultat une séquence dans laquelle une formule de la forme $\mathfrak{A}^*$ (ou $\mathfrak{B}^*$) figure au début de l'antécédent (tandis que, dans le reste de l'antécédent, sont groupées exactement les autres formules-hypothèses dont dépend la formule $\mathfrak{C}$, et qui y figuraient déjà avant les transformations). On transforme alors comme suit le schéma qu'on avait obtenu :

$$\cfrac{\Xi \to \mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^* \qquad \cfrac{\cfrac{\mathfrak{A}^*, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}{\mathfrak{A}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\left\{\begin{array}{l}\text{éventuellement}\\ \text{plusieurs atté-}\\ \text{nuations et in-}\\ \text{versions}\end{array}\right. \quad \cfrac{\mathfrak{B}^*, \Delta \to \mathfrak{C}^*}{\mathfrak{B}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\left\{\begin{array}{l}\text{éventuellement}\\ \text{plusieurs atté-}\\ \text{nuations et in-}\\ \text{versions}\end{array}\right.}{\mathfrak{A}^* \vee \mathfrak{B}^*, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\; OEA}{\Xi, \Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}^*}\;\text{coupure.}$$

4. 211. Une figure *EB* se traite tout à fait de la même façon. D'abord on amène, dans la prémisse de droite, la formule au début de l'antécédent (comme en 4. 23). Et ensuite on transforme le schéma obtenu en :

$$\cfrac{\Delta \to \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^*\mathfrak{x} \qquad \cfrac{\mathfrak{F}^*a, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}^*\mathfrak{x}, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}\; EEA}{\Delta, \Gamma \to \mathfrak{C}^*}\;\text{coupure.}$$

La condition des variables *LJ* pour la figure *EEA* est remplie en vertu de la condition des variables *NJ* pour la figure *EB*.

La transformation d'une *NJ*-dérivation en une *LJ*-dérivation équivalente est ainsi achevée.

§ 5.

Transformation d'une LJ-dérivation en une LHJ-transformation équivalente.

Cette transformation est un peu plus difficile que les deux précédentes. Nous l'accomplirons en une série d'étapes distinctes.

Remarque préliminaire : le calcul *LJ* ne comporte pas de contractions ni d'inversions dans le conséquent, étant donné que ces figures de déduction supposent la présence d'au moins deux *S*-formules dans le conséquent.

5. 1. Nous remplaçons d'abord les figures de déduction *UEA*, *OES*, *AEA*, *EES*, *NEA* et *FEA* par de nouvelles séquences fondamentales, qui doivent être construites d'après les schémas suivants. (Les règles de substitution sont les mêmes qu'en III, 1. 2; ceci est vrai pour tout ce qui suivra; nous utiliserons d'autre part pour désigner des formules en plus des lettres $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{E}$, dont il est question en III, 1. 2, les lettres $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{I}$) :

$\mathfrak{G}\mathfrak{s}\ 1 : \mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ $\quad$ $\mathfrak{G}\mathfrak{s}\ 2 : \mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$

$\mathfrak{G}\mathfrak{s}\ 3 : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ $\quad$ $\mathfrak{G}\mathfrak{s}\ 4 : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

$\mathfrak{G}\mathfrak{s}\ 5 : \forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{F}\mathfrak{a}$ $\quad$ $\mathfrak{G}\mathfrak{s}\ 6 : \mathfrak{F}\mathfrak{a} \rightarrow \exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$

$\mathfrak{G}\mathfrak{s}\ 7 : \neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rightarrow$ $\quad$ $\mathfrak{G}\mathfrak{s}\ 8 : \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ (56*).

Nous transformons donc comme suit les figures de déduction qui interviennent dans la dérivation considérée.

(56*) Comme la suite le montrera, on a les correspondances suivantes:

$\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ 1 et 2 : *UEA*
$\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ 3 et 4 : *OES*
$\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ 5 : *AEA*
$\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ 6 : *EES*
$\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ 7 : *NEA*
$\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ 8 : *FEA*.

Une *UEA* devient :

$$\dfrac{\overset{\mathfrak{Sf}\ 1}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \Theta}{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \Theta}\ \text{coupure.}$$

Nous transformons de façon analogue l'autre forme de la figure *UEA* et chaque figure *AEA*.

Nous procédons de façon symétrique pour les figures *OES* et *EES*.

Une *NEA* devient :

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\overset{\mathfrak{Sf}\ 7}{\neg\,\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rightarrow}}{\mathfrak{A}, \neg\,\mathfrak{A} \rightarrow}\ \text{inversions}}{\dfrac{\Gamma, \neg\,\mathfrak{A} \rightarrow}{\neg\,\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow}\ \left.\begin{matrix}\text{éventuellement plu-}\\ \text{sieurs inversions.}\end{matrix}\right.}\ \text{coupure}$$

(Le Θ dans le schéma de la figure *NEA* (III, 1. 22) doit être vide en vertu de la condition du conséquent *LJ;* il en est de même pour la figure *FEA*.)

Une *FEA* devient :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\overset{\mathfrak{Sf}\ 8}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}}\ \text{inversion}}{\Gamma, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}}\ \text{coupure} \qquad \mathfrak{B}, \Delta \rightarrow \Lambda}{\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Delta \rightarrow \Lambda}{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \Gamma, \Delta \rightarrow \Lambda}\ \left.\begin{matrix}\text{éventuellement plu-}\\ \text{sieurs inversions.}\end{matrix}\right.}\ \text{coupure}$$

5. 2. Nous écrivons maintenant la formule $A \,\&\, \neg\, A$ dans le conséquent de toutes les *H*-séquences qui ont un c o n s é q u e n t v i d e.

Au terme de cette opération les séquences fondamentales de la forme $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$, ainsi que les schémas $\mathfrak{Sf}$ 1 à $\mathfrak{Sf}$ 6, le schéma $\mathfrak{Sf}$ 8 et les figures de déduction *UES*, *AES* et *FES* demeurent inchangés. Les autres séquences fondamentales et figures de déduction se transforment en des séquences fondamentales et des figures de déduction nouvelles, suivant les schémas suivants :

$$\mathfrak{Sf}\ 9 : \neg\, \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{H}$$

$$\mathfrak{Sf}\ 1 : \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{H}}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{H}} \quad \mathfrak{Sf}\ 2 : \frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{H}}{\mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{H}} \quad \mathfrak{Sf}\ 3 : \frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{H}}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{H}}$$

$$\mathfrak{Sf}\ 4 : \frac{\Gamma \rightarrow A \ \&\ \neg A}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{D}} \qquad \mathfrak{Sf}\ 5 : \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Delta \rightarrow \mathfrak{H}}{\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{H}}$$

$$\mathfrak{Sf}\ 6 : \frac{\mathfrak{A},\Gamma\rightarrow\mathfrak{H} \quad \mathfrak{B},\Gamma\rightarrow\mathfrak{H}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{H}} \quad \mathfrak{Sf}\ 7 : \frac{\mathfrak{F}a,\Gamma\rightarrow\mathfrak{H}}{\exists\mathfrak{x}\mathfrak{F}\mathfrak{x},\Gamma\rightarrow\mathfrak{H}} \quad \mathfrak{Sf}\ 8 : \frac{\mathfrak{A},\Gamma\rightarrow A \,\&\, \neg A}{\Gamma \rightarrow \neg\, \mathfrak{A}}$$

(pour $\mathfrak{Sf}$ 7, on a la condition des variables : la variable individuelle libre désignée par a ne peut figurer dans la conclusion (57*)).

(57*) Les transformations effectuées en 5. 2 sont les suivantes :
Les cinq *schémas de structure* admis en calcul *LJ* sont transformés:

l'atténuation dans l'antécédent en $\mathfrak{Sf}$ 1,
l'atténuation dans le conséquent en $\mathfrak{Sf}$ 4,
la contraction dans l'antécédent en $\mathfrak{Sf}$ 2,
l'inversion dans l'antécédent en $\mathfrak{Sf}$ 3,
la coupure en $\mathfrak{Sf}$ 5.

(Il ne peut y avoir en calcul *LJ* de contraction dans le conséquent ni d'inversion dans le conséquent, puisque le conséquent ne peut comporter plusieurs *S*-formules.)

Quant aux schémas d'opérations :

OEA devient $\mathfrak{Sf}$ 6.
EEA devient $\mathfrak{Sf}$ 7.
NES devient $\mathfrak{Sf}$ 8.
NEA, qui était devenu en 5. 1 $\mathfrak{Sf}$ 7, devient $\mathfrak{Sf}$ 9.

Ci-dessous un tableau récapitulatif de ce que sont devenus en 5. 1 et en 5. 2 les schémas d'opération; les schémas auxquels ne correspond aucune indication sont jusqu'ici restés sans transformation.

	AEA	*AES*	*EEA*	*EES*	*FEA*	*FES*	*NEA*	*NES*	*OEA*
5. 1	$\mathfrak{Sf}$ 5			$\mathfrak{Sf}$ 6	$\mathfrak{Sf}$ 8		$\mathfrak{Sf}$ 7		
5. 2			$\mathfrak{Sf}$ 7				$\mathfrak{Sf}$ 9	$\mathfrak{Sf}$ 8	$\mathfrak{Sf}$ 6

	OES	*UEA*	*UES*
5. 1	$\mathfrak{Sf}$ 3,4	$\mathfrak{Sf}$ 1,2	

5. 3. Nous pouvons maintenant remplacer comme suit la figure de déduction $\mathfrak{Sf}\,4$ par d'autres (la transformation suivante repose essentiellement sur la forme générale que conserve le schéma $\mathfrak{Gf}\,9$ (58*)).

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\to A\,\&\neg A \qquad \overset{\mathfrak{Gf}\,1}{A\,\&\neg A\to A}}{\Gamma\to A}\,\mathfrak{Sf}\,5 \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma\to A\,\&\neg A \qquad \overset{\mathfrak{Gf}\,2}{A\,\&\neg A\to\neg A}}{\Gamma\to\neg A}\,\mathfrak{Sf}\,5 \qquad \dfrac{\mathfrak{Gf}\,9}{\neg A, A\to\mathfrak{D}}}{\Gamma, A\to\mathfrak{D}}\,\mathfrak{Sf}\,5}{A,\Gamma\to\mathfrak{D}}\left\{\text{éventuellement plusieurs }\mathfrak{Sf}\,3.\right.}{\dfrac{\Gamma,\Gamma\to\mathfrak{D}}{\Gamma\to\mathfrak{D}}\left\{\text{éventuellement plusieurs }\mathfrak{Sf}\,2\text{ et }\mathfrak{Sf}\,3.\right.}\,\mathfrak{Sf}\,5$$

Nous remplaçons de façon analogue la figure de déduction $\mathfrak{Sf}\,8$ par d'autres (autant de fois qu'elle intervient dans la dérivation), en utilisant cependant, cette fois, une nouvelle figure de déduction, qui répond au schéma :

$$\mathfrak{Sf}\,9 : \frac{\Gamma, \mathfrak{A}\to A \qquad \Gamma, \mathfrak{A}\to\neg A}{\Gamma\to\neg\mathfrak{A}}.$$

La substitution s'opère comme suit ($\mathfrak{Sf}\,8$ est remplacé par) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\Gamma\to A\,\&\neg A \quad \overset{\mathfrak{Gf}\,1}{A\,\&\neg A\to A}}{\mathfrak{A},\Gamma\to A}\,\mathfrak{Sf}5}{\Gamma,\mathfrak{A}\to A}\left\{\begin{matrix}\text{éventuelle-}\\\text{ment plu-}\\\text{sieurs }\mathfrak{Sf}3\end{matrix}\right. \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\Gamma\to A\,\&\neg A \quad \overset{\mathfrak{Gf}\,2}{A\,\&\neg A\to\neg A}}{\mathfrak{A},\Gamma\to\neg A}\,\mathfrak{Sf}5}{\Gamma,\mathfrak{A}\to\neg A}\left\{\begin{matrix}\text{éventuellement}\\\text{plusieurs }\mathfrak{Sf}\,3\end{matrix}\right.}{\Gamma\to\neg\mathfrak{A}}\,\mathfrak{Sf}\,9.$$

5. 4. Nous ajoutons maintenant deux nouveaux schémas de déduction :

$$\mathfrak{Sf}\,10 : \frac{\Gamma, \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}{\Gamma\to\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}} \text{ et son inverse : } \mathfrak{Sf}\,11 : \frac{\Gamma\to\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}}{\Gamma, \mathfrak{A}\to\mathfrak{B}}.$$

(58*) On remarquera que d'après 5. 2 pris à la lettre, le schéma $\mathfrak{Sf}\,9$ aurait dû être : $\neg\mathfrak{A}, \mathfrak{A}\to A\,\&\neg A$.
La « forme générale » du schéma $\mathfrak{Sf}\,9$ consiste en ce que la formule particulière $A\,\&\neg A$ est remplacée par la désignation $\mathfrak{H}$ à laquelle une formule quelconque peut être « substituée ».

Nous allons introduire des figures de déduction de ces deux types dans la dérivation, pour pouvoir remplacer grâce à elles une série d'autres figures par des figures plus particulières (en 5. 42 et 5. 43).

5. 41. Nous pouvons d'abord remplacer les figures de déduction *FES* grâce à $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10. Une figure *FES* est transformée en :

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}}{\Gamma, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}} \text{ éventuellement plusieurs } \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 3}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}} \ \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 10.$$

5. 42. Ensuite, nous transformerons les figures de déduction $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 3, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 5, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 6 et $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 7 de la façon suivante :

Prenons comme exemple une figure $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2, nous la transformons dans la figure suivante (soit Γ identique à $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_\rho$) :

$$\begin{array}{cl}
\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_\rho \rightarrow \mathfrak{H} & \\
\hline
\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_{\rho-1} \rightarrow \mathfrak{J}_\rho \supset \mathfrak{H} & \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 10 \\
\hline\hline
\mathfrak{D}, \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{J}_1 \supset (\mathfrak{J}_2 \supset \ldots (\mathfrak{J}_\rho \supset \mathfrak{H})) & \text{plusieurs } \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 10. \\
\hline
\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{J}_1 \supset (\mathfrak{J}_2 \supset \ldots (\mathfrak{J}_\rho \supset \mathfrak{H})) & \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 13 \\
\hline\hline
\mathfrak{D}, \mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_\rho \rightarrow \mathfrak{H} & \text{plusieurs } \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 11.
\end{array}$$

Nous procédons de façon tout à fait analogue pour les autres figures de déduction ci-dessus énumérées; nous les remplaçons donc, grâce à $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10 et à $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 11, par des nouvelles figures de déduction qui répondent aux schémas :

$$\mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 12 : \frac{\rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 13 : \frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 14 : \frac{\Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{E} \rightarrow \mathfrak{C}}{\Delta, \mathfrak{E}, \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}}$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 15 : \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 16 : \frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C} \quad \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{C}} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{f}\ 17 : \frac{\mathfrak{F}a \rightarrow \mathfrak{C}}{\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{C}}$$

(pour $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 17, on a la condition des variables : la variable individuelle libre désignée par a ne peut figurer dans la conclusion).

5. 43. De façon similaire, nous remplaçons ensuite, en utilisant $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10 et $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 11, les figures de déduction $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 9, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 13 et $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 14 par les suivantes :

$$\mathfrak{S}\mathfrak{f}\,18: \frac{\Gamma \to \mathfrak{A} \supset A \quad \Gamma \to \mathfrak{A} \supset \neg A}{\Gamma \to \neg \mathfrak{A}} \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{f}\,19: \frac{\to \mathfrak{D} \supset (\mathfrak{D} \supset \mathfrak{C})}{\to \mathfrak{D} \supset \mathfrak{C}}$$

$$\mathfrak{S}\mathfrak{f}\,20: \frac{\Delta \to \mathfrak{D} \supset (\mathfrak{E} \supset \mathfrak{C})}{\Delta \to \mathfrak{E} \supset (\mathfrak{D} \supset \mathfrak{C})}.$$

De la même manière, les séquences fondamentales $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 8 et $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 9 peuvent être remplacées par : $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$; cette forme répond au schéma — et par $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10 : $\neg \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{H}$. (59*).

5. 5. Voici maintenant la d e r n i è r e é t a p e .

Remplaçons chaque H-séquence

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \to \mathfrak{B}$$

par la formule $\qquad (\mathfrak{A}_1 \;\&\; \ldots \;\&\; \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}.$

(Si les $\mathfrak{A}$ sont vides, cette formule sera $\mathfrak{B}$. Un conséquent vide ne peut exister après 5. 2.)

Toutes les séquences fondamentales (à savoir $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 1 à $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 6, $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 10 (60*)) deviennent ainsi des séquences fondamentales *LHJ*.

Parmi les figures de déduction, *AES* et $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 17 deviennent de même des figures de déduction *LHJ*. (Pour la première, le cas où Γ est vide constitue cependant une exception. Dans ce cas, on dérive d'abord (dans le calcul *LHJ*) $(A \supset A) \supset \mathfrak{F}a$ à partir de $\mathfrak{F}a$ en vertu de 2. 12; on applique ensuite la figure de déduc-

(59*) On a donc : 1° par 5. 42 les correspondances suivantes :

$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 12 remplace $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1, remplaçant l'atténuation dans l'antécédent.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 13 remplace $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2, remplaçant la contraction dans l'antécédent.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 14 remplace $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 3, remplaçant l'inversion dans l'antécédent.
($\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 4 a été éliminé en 5. 3).
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 15 remplace $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 5, remplaçant le schéma de coupure.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 16 remplace $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 6, remplaçant *OEA*.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 17 remplace $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 7, remplaçant *EEA*.

2° Et en vertu de 5. 43 :

$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 18 remplace $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 9.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 19 remplace $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 13. Enfin $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 10 remplace $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 9.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 20 remplace $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 14.

(60*) $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 7 est devenu $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 9, devenu lui-même $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 10.
$\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 8 est devenu $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$.

tion *LHJ* et on obtient finalement $\forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}$, grâce à 2. 11 (61*).)

Les figures qui, par notre substitution, sont issues des figures de déduction (c'est-à-dire de *UES*, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10, 11, 12, 15, 16, 18, 19, 20) sont transformées de la façon suivante en sections d'une *LHJ*-dérivation.

Une figure *UES* devenait (62*) (supposons d'abord Γ non vide) :

$$\frac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}}{\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \;\&\; \mathfrak{B})}.$$

Nous en faisons :

$$\frac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B} \qquad \dfrac{\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A} \qquad \overset{(2.\,23)}{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset ((\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \;\&\; \mathfrak{B})))}}{(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \;\&\; \mathfrak{B}))}}{\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \;\&\; \mathfrak{B})}.$$

Si Γ est vide, on procède comme plus haut pour la figure *AES*.

Les figures qui proviennent, par notre substitution, des figures $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 12, 15, 16 et 19 peuvent être traitées de façon tout à fait analogue, au moyen de formules fondamentales qui répondent aux schémas 2. 12, 2. 15, 2. 33 et 2. 13.

(61*) De par la substitution 5. 5 les séquences $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1 à 6 et $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10 deviennent les séquences fondamentales *LHJ* dont les numéros suivent :

$\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$	devient	2. 11
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1	—	2. 21
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2	—	2. 22
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 3	—	2. 31
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 4	—	2. 32
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 5	—	2. 51
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 6	—	2. 52
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10	—	2. 42

AES est ramené à un schéma du paragraphe 2 et $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 17 devient un schéma du paragraphe 2, respectivement :

$$\frac{\mathfrak{A} \supset \mathfrak{F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{A} \supset \forall\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{a} \supset \mathfrak{A}}{\exists\mathfrak{x}\,\mathfrak{F}\mathfrak{x} \supset \mathfrak{A}}.$$

(62*) Toujours par la substitution décrite en 5. 5.

On traite de la même manière les figures $\mathfrak{Sf}$ 18 et $\mathfrak{Sf}$ 20 au moyen de 2. 41 et de 2. 14, en utilisant également 2. 15 et 2. 14, 2. 13.

Restent les figures qui proviennent de $\mathfrak{Sf}$ 10 et de $\mathfrak{Sf}$ 11.

Chacun de ces cas est trivial lorsque Γ est vide; nous supposerons donc, dans ce qui suit, Γ non vide. Nous transformons alors ces figures en sections de *LHJ*-dérivation de la façon que voici :

($\mathfrak{Sf}$ 10). Nous devons dériver $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ de $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$. Or, 2. 23 donne, avec 2.11 : $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}))$. Cette formule donne, avec $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$, 2. 15 et 2. 14 : $(\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}) \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$, et cette dernière formule donne, avec 2. 12 et 2. 15 $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{C} \supset \mathfrak{B})$, et donc, avec 2. 14 : $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$.

($\mathfrak{Sf}$ 11). Nous dérivons $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ de $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}$, dans le calcul *LHJ*, de la façon suivante : 2. 21 et 2. 22 donnent $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{C}$ et $(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{A}$, et ces deux formules donnent, avec $\mathfrak{C} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ (grâce à 2. 15, 2. 14, 2. 15 et 2. 13) :

$$(\mathfrak{C} \,\&\, \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{B}.$$

La transformation de la *LJ*-dérivation en une *LHJ*-dérivation est ainsi achevée. De plus, les deux dérivations sont réellement équivalentes, car la séquence finale de la *LJ*-dérivation n'est modifiée que par les transformations 5. 2 et 5. 5; on voit immédiatement qu'elle se transforme en une formule qui lui est équivalente (selon 1. 1).

Si l'on rassemble les résultats des §§ 3, 4, 5, l'équivalence des trois calculs *LHJ*, *NJ* et *LJ* se trouve complètement démontrée.

§ 6.

L'équivalence des calculs LHK, NK et LK.

L'équivalence de nos différents calculs intuitionnistes étant ainsi établie, celle des calculs classiques peut être démontrée assez facilement.

6. 1. Pour transformer une *LHK*-dérivation en une *NK*-dérivation équivalente, on procède exactement comme au § 3. Les formules fondamentales qui s'ajoutent dans le calcul classique et qui répondent au schéma $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ demeurent inchangées dans ces transformations et deviennent donc également des formules fondamentales de la *NK*-dérivation.

6. 2. Pour transformer une *NK*-dérivation en une *LK*-dérivation équivalente, on procède d'abord comme au § 4. Les formules fondamentales qui s'ajoutent dans le calcul classique, et qui répondent au schéma $\mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$, se transforment par ces opérations en séquences de la forme $\rightarrow \mathfrak{A}^* \vee \neg \mathfrak{A}^*$. On remplace ces séquences par leurs *LK*-dérivations (selon III, 1. 4). La transformation de la *NK*-dérivation en une *LK*-dérivation équivalente est ainsi achevée.

6. 3. Transformation d'une *LK*-dérivation en une *LHK*-dérivation.

Nous allons introduire un calcul auxiliaire, qui se distingue du calcul *LK* par les traits suivants.

Les figures de déduction peuvent être construites selon les schémas III, 1. 21, 1. 22, mais avec les restrictions suivantes : la contraction et l'inversion dans le conséquent ne sont pas permises; dans les autres schémas, on ne peut rien substituer à Θ et à Λ; ces suites restent donc vides.

De plus, deux schémas de déduction nouveaux viennent s'ajouter aux autres (règles de substitution habituelles, comme en III, 1. 2) :

$$\mathfrak{Sf}\,1 : \frac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}, \Theta}{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta,} \quad \text{et son inverse :} \quad \mathfrak{Sf}\,2 \quad \frac{\Gamma, \neg \mathfrak{A} \rightarrow \Theta}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}, \Theta}.$$

(Ici Θ ne doit donc pas nécessairement être vide.)

6. 31. Transformation d'une *LK*-dérivation en une dérivation du calcul auxiliaire.

(Le procédé est semblable à celui de 5. 4.)

Toutes les figures de déduction, sauf les contractions et les inversions dans le conséquent, sont transformées de la façon suivante : on fait suivre les prémisses par des figures de déduction $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1 en nombre suffisant pour amener toutes les formules de Θ (ou de Λ) à se trouver niées dans l'antécédent (à la droite de Γ, ou de Δ).

On introduit alors une figure de déduction de même nature que celle qui doit être transformée, et cette figure est maintenant une figure de déduction admise dans notre calcul auxiliaire. (On considère les formules qui ont été amenées dans l'antécédent comme faisant partie de Γ ou de Δ). On introduit alors des figures de déduction $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2 et l'on ramène ainsi Θ et Λ dans le conséquent. (Pour une figure *FEA* et pour une coupure, on doit, dans certains cas, effectuer d'abord des inversions dans l'antécédent : mais celles-ci sont en tout cas des figures de déduction admises dans le calcul auxiliaire.)

Restent alors à traiter les contractions — et les inversions — dans le conséquent. Dans le cas d'une figure de ce genre, on amène d'abord, de la même manière que ci-dessus, le conséquent tout entier, sous forme niée, dans l'antécédent; on effectue alors dans l'antécédent des inversions, une contraction, et une nouvelle suite d'inversions (63*), ou bien une inversion (64*), et on ramène ensuite les formules niées dans le conséquent (par les figures de déduction $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2).

6. 32. Transformation d'une dérivation du calcul auxiliaire en une dérivation du calcul *LJ*, augmenté du schéma pour séquence fondamentale : $\rightarrow \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$.

On modifie d'abord toutes les *H*-séquences comme suit :

$$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\nu$$

devient : $$\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}_\nu \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_1.$$

Si le conséquent se trouve vide, il reste vide.

Toutes les séquences fondamentales et toutes les figures de

(63*) S'il s'agissait d'une contraction dans le conséquent.
(64*) S'il s'agissait d'une inversion dans le conséquent.

déduction du calcul auxiliaire, à l'exception des figures de déduction $\mathfrak{Sf}$ 1 et $\mathfrak{Sf}$ 2, sont ainsi déjà transformées en séquences fondamentales et en figures de déduction du calcul *LJ*. Car on a obtenu ces figures de déduction à partir des schémas III, 1. 21, 1. 22 (à l'exception des schémas pour la contraction et pour l'inversion dans le conséquent) en y faisant Θ et Λ vides. Aussi, ne peut-on jamais avoir qu'une seule formule au plus dans le conséquent.

Il nous reste donc encore à transformer les figures qui proviennent des figures de déduction $\mathfrak{Sf}$ 1 et $\mathfrak{Sf}$ 2 par la modification décrite ci-dessus.

6. 321. D'abord $\mathfrak{Sf}$ 1. Si Θ est vide, on remplace la figure de déduction par une figure *NEA*, en y ajoutant des inversions dans l'antécédent. Soit maintenant Θ non vide. Désignons par Θ^* les formules de Θ prises dans l'ordre inverse et liées par le signe $\vee$.

Alors, après la modification des conséquents, la figure de déduction se présente comme suit :

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta^* \vee \mathfrak{A}}{\Gamma, \neg\, \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}.$$

On transforme ce schéma en une section de *LJ*-dérivation, comme suit :

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \Theta^* \vee \mathfrak{A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Theta^* \rightarrow \Theta^*}{\neg\, \mathfrak{A}, \Theta^* \rightarrow \Theta^*}\,\text{atténuation}}{\Theta^*, \neg\, \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}\,\text{inversion} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}}{\neg\, \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \rightarrow}\,NEA}{\mathfrak{A}, \neg\, \mathfrak{A} \rightarrow}\,\text{inversion}}{\mathfrak{A}, \neg\, \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}\,\text{atténuation}}{\Theta^* \vee \mathfrak{A}, \neg\, \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}\,OEA}{\Gamma, \neg\, \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}\,\text{coupure.}$$

6. 322. Après la modification des conséquents, une figure de déduction $\mathfrak{Sf}$ 2 se présente comme suit :

$$\frac{\Gamma, \neg\, \mathfrak{A} \rightarrow \Theta^*}{\Gamma \rightarrow \Theta^* \vee \mathfrak{A}}.$$

Donnons à Θ^* la même signification que dans le cas précédent. Si Θ est vide, nous considérerons que Θ^* est également vide et que $\Theta^* \vee \mathfrak{A}$ se réduit à $\mathfrak{A}$.

Nous transformons ce schéma en la section de déduction suivante :

$$\cfrac{\to \mathfrak{A} \vee \neg\,\mathfrak{A} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{A}} \left\{\begin{array}{l}\text{éventuellement plu-}\\ \text{sieurs atténuations}\\ \text{et inversions}\end{array}\right.}{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\,OES \qquad \cfrac{\cfrac{\Gamma, \neg\,\mathfrak{A} \to \Theta^*}{\neg\,\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta^*} \left\{\begin{array}{l}\text{éventuellement}\\ \text{plusieurs inver-}\\ \text{sions}\end{array}\right.}{\neg\,\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\,OES}{\mathfrak{A} \vee \neg\,\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\,OEA}{\Gamma \to \Theta^* \vee \mathfrak{A}}\ \text{coupure.}$$

On voit facilement que dans le cas où Θ est vide tout est également en ordre.

6.33. La *LJ*-dérivation ainsi obtenue, accompagnée des séquences fondamentales de la forme $\to \mathfrak{A} \vee \neg\,\mathfrak{A}$ qui s'y ajoutent, peut être transformée, comme au § 5, en une *LHJ*-dérivation augmentée de séquences fondamentales de la forme $\mathfrak{A} \vee \neg\,\mathfrak{A}$ (voir 5. 5), c'est-à-dire en une *LK*-dérivation.

La transformation de la *LK*-dérivation en une *LHK*-dérivation est ainsi achevée.

Au cours de ces opérations, la séquence finale s'est transformée, en vertu de 6. 32 et de 5. 5, en une formule qui lui est équivalente (selon 1. 1).

Si l'on réunit les résultats de 6. 1, 6. 2 et 6. 3, *l'équivalence des trois calculs des prédicats classiques LHK, NK et LK*, se trouve entièrement démontrée.

(Parvenu à la rédaction le 2 juillet 1933.)

Note K*.

MARCHE DES DÉMONSTRATIONS D'ÉQUIVALENCE

Cette note entend simplement dégager l'enchaînement et les méthodes des démonstrations d'équivalence formant la section V (dont nous suivrons les grandes divisions). Pour le détail des démonstrations, voir la section V elle-même.

§§ 1 et 2.

(A). — Il s'agit de prouver l'équivalence mutuelle des calculs N, des calculs L, de la logique (intuitionniste ou classique) déduite d'une des axiomatiques usuelles; cette axiomatique sera une axiomatique pour la logique intuitionniste et telle que la logique classique s'en déduise, si on lui ajoute le tiers exclu comme axiome additionnel.

Gentzen choisit pour sa démonstration, et énonce au § 2, une axiomatique due à Hilbert et Glivenko, qui comprend 15 schémas d'axiomes (dont 13 pour la logique des propositions) et 3 schémas de déduction (la règle de « détachement » et 2 schémas pour la logique des prédicats); l'emploi de schémas d'axiomes rend des règles de substitutions inutiles. Il dénomme ce système LHJ et suppose démontrée son équivalence avec la logique intuitionniste. L'axiomatique de LHJ, augmentée du principe du tiers exclu, sera l'axiomatique d'un système LHK, dont on suppose démontrée l'équivalence avec la logique classique.

(B). — On prouvera que les trois systèmes « J » et que les trois systèmes « K » sont équivalents, en ce sens qu'on peut y dériver les mêmes conclusions. En réalité, on ne peut retrouver identiquement les mêmes conclusions dans les systèmes « équivalents », car certains symboles des systèmes « N » et « L » ne se retrouvent pas dans tous les systèmes; on devra leur assigner une « traduction » dans les systèmes où ils ne figurent pas. (Ces points sont précisés au § 1.)

(C). — On démontrera d'abord l'équivalence des trois systèmes NJ, LJ, LHJ (pour la logique intuitionniste); on passera ensuite aisément à celle des systèmes NK, LK, LHK (pour la logique classique).

L'ordre est inverse de celui qui a été suivi pour la démonstration du « théorème fondamental ». Le but du théorème fondamental était de justifier une simplification des dérivations; il semble normal de justifier cette simplification pour le système LK (classique), plus riche en procédés de dérivation; si, dans l'application de chacun de ces procédés, on peut se passer de « coupures », on démontrera *a fortiori* qu'on peut s'en passer dans des dérivations où une partie seulement des procédés est utilisée. Ici, si on prouvait d'abord l'équivalence des systèmes classiques entre eux, on ne pourrait conclure à l'équivalence des systèmes intuitionnistes sans avoir démêlé dans chaque déduction « classique » ce qui dépend de l'axiomatique intuitionniste et ce qui n'en dépend pas.

(D). — Il semblerait à première vue qu'il faille trois démonstrations d'équivalence *dans les deux sens*. Donc que, moyennant la traduction :

Tout ce qui se prouve dans LHJ se prouve par NJ et *inversement*.

Tout ce qui se prouve dans NJ se prouve par LJ et *inversement*.

Tout ce qui se prouve dans LJ se prouve par LHJ et *inversement*.

Gentzen se borne à trois démonstrations « dans un sens » :

(§ 3). Tout ce qui se prouve dans *LHJ* se prouve par *NJ*.
(§ 4). Tout ce qui se prouve dans *NJ* se prouve par *LJ*.
(§ 5). Tout ce qui se prouve dans *LJ* se prouve par *LHJ*.

L'équivalence étant « transitive », les équivalences valent dans les deux sens; par exemple : *NJ* se dérivant de *LJ*, et *LJ* de *LHJ*, *NJ* se dérivera de *LHJ*.

(E). — Pour que tout ce qui se prouve dans un calcul *A* se prouve par un calcul *B*, il suffit évidemment que l'axiomatique de *A* se prouve (moyennant traduction) à partir de l'axiomatique de *B*.

§§ 3, 4, 5.

Équivalence des calculs NJ, LJ, LHJ.

§ 3. *L'axiomatique de* LHJ *se déduit à partir de celle de* NJ.

Le vocabulaire de *LHJ* est entièrement compris dans celui de *NJ;* la démonstration n'exige aucune traduction.

Il suffira de prouver à l'aide du calcul *NJ* les 15 schémas d'axiomes et les 3 schémas de déduction de *LHJ* (les conditions des variables étant sauvegardées) : simple exercice de calcul *NJ*.

§ 4. *L'axiomatique de* NJ *se déduit à partir de celle de* LJ.

4. 1. Ici, il est nécessaire de traduire les assertions avec suppositions (avec formules-hypothèses) et le symbole $\wedge$, qui ne sont pas du vocabulaire de *LJ*.

Les assertions avec suppositions seront traduites par des séquences; cette traduction revient à celle que nous effectuons dans la note B* n° 2, à ceci près, qu'au lieu du numéro de la supposition, il faut écrire la formule que le numéro désigne.

Quant au symbole $\wedge$ (qui était conservé dans la note B*), on lui substituera l'absurdité-type $\mathfrak{A}$ & $\neg\, \mathfrak{A}$. Gentzen désigne par $\mathfrak{D}^*$ ce qu'une formule $\mathfrak{D}$ devient après cette dernière substitution (l'emploi de l'astérisque dans cette notation temporaire n'a rien de commun avec l'emploi de l'astérisque à propos des « fusions de séquences »).

4. 2. Nous avons donc à déduire dans *LJ* la traduction de l'axiomatique de *NJ;* nous pourrons même donner une méthode simple pour transformer chaque étape d'une dérivation *NJ* en une *LJ*-dérivation.

1° Les dérivations *NJ* partent d'assertions avec supposition comme assertions initiales. La traduction les transforme en des séquences identiques $\mathfrak{D}^* \rightarrow \mathfrak{D}^*$, valables dans *LJ*.

2° Restent à justifier les schémas de *NJ*, soit 6 schémas d'introduction, 6 schémas d'élimination, et le schéma qui conclut de $\wedge$ à $\mathfrak{D}$.

4. 21, 22, 23. Traduits en termes de séquences, tous les schémas d'introduction, sauf *NE*, sont des schémas de *LJ* (schémas opératoires d'introduction dans le conséquent), ou ils s'y ramènent moyennant des modifications accessoires; celles qui sont mentionnées dans la note D*, n° 7 B. La condition des variables pour *AE* est sauvegardée.

4. 24, 25. Dans la traduction du schéma *NE* et dans celle du schéma concluant de $\wedge$ à $\mathfrak{D}$,la prémisse aura « A & $\neg A$ » au conséquent. On démontrera d'abord A & $\neg A \rightarrow$ et on appliquera le schéma de coupure; moyennant quoi on obtiendra la conclusion requise pour les deux schémas.

Remarque générale : Diverses dérivations des §§ 4 et 5 utilisent le schéma de coupure. Le « théorème fondamental » a prouvé que ce schéma pouvait être éliminé des dérivations. Ceci ne signifie pas que le schéma soit non valide, mais qu'on peut effectuer la dérivation en ne s'en servant pas. Il reste toujours loisible de s'en servir dans la démonstration d'équivalence.

4. 26. Aucun schéma d'*élimination* n'a un schéma de *LJ* qui lui corresponde par simple traduction. Soit toutefois *XB* un schéma *NJ* d'élimination et soit *XEA* le schéma *LJ* d'introduction dans l'antécédent relatif à la même opération. On peut

prouver la traduction de XB comme suit : on pose les prémisses (ou la prémisse) de XB, et éventuellement des séquences initiales; on applique XEA, puis le schéma de coupure (comparer avec note D*, n° 8).

N.-B. — La condition des variables de EB est respectée.

§ 5.

La démonstration la plus laborieuse est celle qui déduit l'axiomatique de LJ *en partant de l'axiomatique de* LHJ.

Préliminaires.

(A). — Comme la notation par séquences est étrangère au vocabulaire de LHJ, les séquences de LJ doivent être traduites (selon 1. 1 de cette section V).

(B). — L'axiomatique de LJ consiste en séquences initiales et en schémas de déduction (schémas de structure et schémas opératoires) *valables dans* LJ. Voir ces schémas à la note D*, n° 5, à laquelle il sera bon de se reporter régulièrement. Ces schémas sont 5 schémas de structure et 12 schémas opératoires.

(C). — Il semble qu'on pourrait simplement démontrer les séquences initiales et les 17 schémas (traduits) dans LHJ, comme au § 3 on a démontré les schémas de LHJ dans NJ. Mais les dérivations LHJ sont souvent longues, si on remonte jusqu'à l'axiomatique. Et la démonstration considérée risque d'être entravée par trois ordres de difficultés. (Voir, dans l'article de Curry que mentionne la bibliographie, au prix de quels développements dans la théorie de LHJ ces difficultés pourraient être surmontées.)

1° L'axiomatique de LJ est presque entièrement formée de schémas de déduction et l'axiomatique de LHJ est presque entièrement formée de « schémas d'axiomes » (qui ne sont pas des schémas de déduction).

2° La traduction des séquences à conséquent vide sous forme d'implication exige l'introduction d'une formule au conséquent.

3° Les séquences des schémas de *LJ* comportent, dans l'antécédent, des *S*-termes multiples et notamment des majuscules grecques, dont la traduction littérale ne pourrait être démontrée qu'en envisageant inductivement une multiplicité de cas.

(D). — Pour plus de brièveté et d'élégance, Gentzen préfère ne démontrer sa traduction de l'axiomatique *LJ* qu'après lui avoir fait subir trois remaniements d'apparence complexe et arbitraire, mais dont chacun est conçu pour éliminer un des trois ordres de difficultés cités ci-dessus. Au terme des trois remaniements l'axiomatique de *LJ* sera devenue presque méconnaissable, mais sa traduction sera aisée à démontrer dans *LHJ*.

5. 1. *Premier remaniement de l'axiomatique* LJ.

Puisqu'il s'agit finalement de ramener des schémas de déduction (*LJ*) à des schémas d'axiomes (*LHJ*), Gentzen, pour déblayer le terrain, tire parti de ce que, *dans* LJ *même*, certains schémas opératoires peuvent être remplacés par des schémas d'axiomes.

Il avait déjà signalé cette possibilité, sans l'utiliser, en III, 2. 2, et nous l'avons mentionnée note D*, n° 8. Gentzen n'utilise pas tous les schémas de III, 2. 2, mais seulement ceux qui se traduiront par des schémas de *LHJ* ou qui s'y ramèneront facilement.

Il transforme de la sorte 6 des 12 schémas d'opérations (on peut retenir qu'il y en a un pour chaque opération et qu'il exprime la propriété déductive la plus obvie de l'opération). Ces schémas opératoires sont *UEA* (schéma double), *OES* (schéma double); *AEA*, *EES*, *FEA*, *NEA*. Comme il y a 6 schémas d'opérations, dont 2 doubles, il arrivera à 8 schémas d'axiomes, qu'il numérotera $\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ 1 à 8 ($\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ = *Grundsequenz*, séquence fondamentale, à ne pas confondre avec « séquence initiale »).

N.-B. — Nous aurons à remanier ultérieurement les $\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ 7 et 8.

Quant à la manière dont les $\mathfrak{G}\mathfrak{s}$ suppléent aux figures opératoires, la méthode est la suivante : la prémisse du schéma *LJ* et le 𝔖𝔣 correspondant deviennent prémisses d'une « coupure », dont la conclusion est la conclusion du schéma *LJ*. (Pour le schéma *FEA*, qui a deux prémisses, il y aura deux applications du schéma de coupure.)

5. 2 et 5. 3. *Deuxième remaniement de l'axiomatique* LJ.

L'axiomatique issue du premier remaniement consiste, outre les séquences initiales, en :

5 figures de structure,
6 figures opératoires non remplacées par des 𝔖𝔣,
8 schémas d'axiomes 𝔖𝔣.

De cette axiomatique remaniée, nous éliminons les séquences à conséquent vide, deuxième source de difficultés, et cela en deux sous-étapes.

5. 2. Première sous-étape. Ce numéro, rédigé un peu sommairement, prête à malentendu. Gentzen semble dire qu'il va simplement remplacer les conséquents vides par $A \ \& \ \neg A$. En réalité, il fait deux ordres de changements : *(a)* dans les schémas de déduction à conséquent vide, il introduit en effet un conséquent $A \ \& \ \neg A$; *(b)* dans les schémas de déduction qui, au numéro de la note D*, avaient un conséquent θ ou λ, il met un conséquent 𝔇 (désignant donc une formule); et dans la 𝔖𝔣 7, qui avait un conséquent vide, il introduit également (il reconnaît que ceci est une exception) un conséquent 𝔇 (voir note 58*).

Que deviennent ainsi les 19 schémas issus du premier remaniement?

1° Les 5 *schémas de structure* deviennent 5 nouveaux schémas de déduction, qui seront dénommés 𝔖𝔣 1 à 5 (𝔖𝔣 = *Schlussfigur*, figure de déduction).

La nouveauté des 𝔖𝔣 1, 2, 3, 5 consiste simplement en ce qu'il y a un conséquent 𝔇 (donc plus de possibilité de conséquent vide).

Quant à $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 4, celui-ci — qui d'ailleurs va être éliminé de l'axiomatique — reçoit un conséquent $A \,\&\, \neg A$.

2° Parmi les 6 *schémas opératoires* restants :

OEA devient un schéma à conséquent $\mathfrak{H}$, qui est $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 6.

EEA de même, et il devient $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 7 (la condition des variables est respectée).

NES devient un schéma $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 8 à conséquent $A \,\&\, \neg A$ (il va être remanié).

UES, *AES*, *FES* restent inchangés.

3° Les $\boldsymbol{\mathfrak{S}}\mathfrak{f}$ ne sont pas transformés sauf que $\boldsymbol{\mathfrak{S}}\mathfrak{f}$ 7, qui avait un conséquent vide, reçoit, comme il vient d'être dit, un conséquent et devient $\boldsymbol{\mathfrak{S}}\mathfrak{f}$ 9. (Ne pas confondre les $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ et les $\boldsymbol{\mathfrak{S}}\mathfrak{f}$!)

Les nouveaux schémas conduisent aux mêmes conclusions que les anciens (Gentzen ne prend pas la peine d'expliquer ce point). La chose est claire pour les schémas à conséquent $A \,\&\, \neg A$, donc $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 4 et 8; il ne s'agit en effet que d'une nouvelle manière de formuler la prémisse. Quant aux schémas opératoires avec conséquent $\mathfrak{H}$, ils paraissent plus particuliers que les schémas avec conséquent θ ou λ, mais on peut entre autres substituer à $\mathfrak{H}$ la formule $A \,\&\, \neg A$, traduction du conséquent vide. Enfin, le $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 9 est même plus général que $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 7, puisqu'il admet un conséquent non vide, et c'est ce qui permettra à l'instant d'éliminer $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 4.

5. 3. Dans une deuxième sous-étape, Gentzen se débarrasse des deux schémas $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 4 et 8 à conséquent $A \,\&\, \neg A$. (L'axiomatique *LHJ* ne contient aucun schéma comportant $A \,\&\, \neg A$.)

$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 4 est démontré à l'aide des autres schémas (et notamment de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 9). Il n'y a donc plus que 4 schémas de structure: $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1, 2, 3, 5.

$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 8 (correspondant à *NES*) est déduit de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 9, figure qui paraît plus compliquée, mais dont la traduction se déduira aisément du schéma 2. 41 de *LHJ*.

Les schémas opératoires sont donc devenus :

$\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 6, 7, 9.
UES, *AES*, *FES* (voir note 57*).

5. 4. *Troisième remaniement de l'axiomatique* LJ.

Ce dernier remaniement élimine de l'axiomatique toutes les formes gênantes de schémas à plusieurs *S*-formules dans des antécédents. Ces schémas peuvent être de trois espèces :

1° Majuscules grecques et *S*-formules dans l'antécédent.

2° Plusieurs *S*-formules dans l'antécédent.

3° Une seule majuscule grecque dans l'antécédent.

Les deux premières espèces de schémas seront éliminées (la troisième espèce ne pourrait être éliminée par les méthodes de ce numéro et n'offrira d'ailleurs pas de difficultés de dérivation). On introduit deux schémas nouveaux, $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10 et $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 11, qui permettent de passer de $\Gamma, \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ à $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ et inversement. (On s'étonnera de voir introduire encore deux nouveaux schémas à ce moment, mais ces deux schémas permettent de transformer uniformément tous les autres.)

5. 41. $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10 remplace *FES*. (La figure *FES* du calcul *NJ* ne diffère de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10 que par l'ordre des termes. Seule $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 11 est une figure d'un type nouveau, qui n'est ni figure de structure ni figure opératoire.)

5. 42 et 5. 43. Toutes les figures $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ qui subsistaient après 5. 3 sont maintenant remplacées par d'autres $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ sans antécédents multiples de première ou de seconde espèce. (L'élimination de ces antécédents se fait en deux fois pour $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2, transformée en $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 13, puis celle-ci en $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 19; de même pour $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 3, transformée en $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 14, puis celle-ci en $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 20.) Et la même transformation est effectuée sur $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 8 et 9, qui contenaient encore des antécédents multiples de première espèce.

Lorsque nous parlons de « remplacement » d'un $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ ou $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$, nous entendons, comme précédemment, que l'ancien $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ ou que la conclusion de l'ancien $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ peut être déduite à l'aide du nouveau $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ ou $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$. La méthode de cette déduction revient à ceci : en vertu de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10, on ramène dans le conséquent (où ils seront parties d'une seule formule) tous les S-termes « indésirables » dans l'antécédent, jusqu'à ce que la nouvelle $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ soit applicable; puis on ramène ces termes dans l'antécédent, de manière à obtenir la conclusion de l'ancienne $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$. Et semblablement pour les $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$.

Que devient l'axiomatique après ce troisième et dernier remaniement? (Voir note 59*.) Les séquences initiales restent inchangées. Quant aux schémas de structure :

$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1 devient $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 12.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 2 devient $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 13, puis $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 19.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 3 devient $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 14, puis $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 20.
$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 5 devient $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 15.

Quant aux schémas issus des schémas d'opérations :

$\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 1 à $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 6 restent; $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 8 est remplacé par une simple séquence initiale; $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 9 devient $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ 10.

$\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 6, 7, 9 deviennent respectivement $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 16, 17, 18.

EES est remplacé par $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 10; *UES* et *AES* restent.

Il y a un nouveau $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$: le $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 11.

On voit qu'en fin de compte deux schémas seulement ont été totalement éliminés, l'atténuation dans le conséquent et *FEA;* et un seul schéma a été véritablement « ajouté » à l'axiomatique : $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 11. Tous les autres schémas subsistent, deux seulement sous leur forme originale, *UES*, *AES;* les autres, après remaniements, sous forme de $\mathfrak{G}\mathfrak{f}$ ou de $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ divers.

5.5. *Traduction, puis démonstration* LHJ *des schémas traduits.*

Nous n'avons plus qu'à effectuer la traduction annoncée. Elle revient :

à supprimer $\rightarrow$ pour les séquences à antécédent vide;

à remplacer $\rightarrow$ par $\supset$ dans les séquences à antécédent non vide; à remplacer par une conjonction de formules un antécédent multiple (de troisième espèce).

Les traductions des séquences initiales — des $\mathfrak{Sf}$ qui subsistent après 5. 4 — celle de *AES* et de $\mathfrak{Sf}$ 17 sont des schémas d'axiomes *LHJ* ou des schémas de déduction *LHJ* (voir note 61*).

Les traductions de *UES* et des $\mathfrak{Sf}$ restants se démontrent aisément dans *LHJ*.

§ 6.

Équivalence des calculs NK, LK, LHK.

La démonstration consistera, comme pour les calculs intuitionnistes, en trois démonstrations partielles, mais les deux premières sont fort simples.

6. 1. *L'axiomatique du calcul* LHK *se déduit de celle de* NK.

L'axiomatique de *NK* est celle de *NJ*, plus l'axiome du tiers exclu. Or, l'axiomatique de *LHK* est simplement celle de *LHJ* — qui se déduit de celle de *NJ* (§ 3) — plus l'axiome du tiers exclu.

6. 2. *L'axiomatique du calcul* NK *se déduit* (moyennant la traduction énoncée au § 4) *de celle du calcul* LK.

L'axiomatique de *NK* est celle de *NJ*, plus l'axiome du tiers exclu. Or, l'axiomatique de *NJ*, moyennant la traduction, se déduit de l'axiomatique de *LJ* (§ 4), donc *a fortiori* de l'axiomatique de *LK*, qui englobe l'axiomatique de *LJ*. Et, d'autre part, le tiers exclu se déduit dans *LK* (III, 1. 4).

6. 3. *L'axiomatique du calcul* LK *se déduit* (moyennant la traduction énoncée au § 5) *de celle de* LHK.

Pour comprendre la marche de la démonstration, il faut avoir devant les yeux le point précis à démontrer. L'axiomatique de

LJ se déduit de celle de *LHJ* (§ 5); donc l'axiomatique de *LJ*, plus le tiers exclu, se déduisent de l'axiomatique de *LHK* (qui n'est autre que l'axiomatique de *LHJ*, plus le tiers exclu). Nous aurons donc atteint notre but si nous établissons l'*équivalence entre le calcul* LK *et un calcul dérivé de l'axiomatique de* LJ *augmentée du tiers exclu.* (On se souviendra que la différence entre *LK* et *LJ* n'est pas, comme pour *NK* et *LHK*, l'addition du tiers exclu à l'axiomatique intuitionniste; la différence entre *LK* et *LJ* consiste en ce que *LJ* n'admet pas de conséquents multiples.)

(6. 3). Dans ce but, Gentzen passera par le détour d'un *calcul auxiliaire.* Celui-ci, comme le calcul *LJ*, partira de séquences initiales et de schémas de déduction, ceux-ci étant plus stricts encore que ceux de *LJ;* cette axiomatique sera complétée, non par le tiers exclu, mais par deux schémas supplémentaires.

Les schémas de déduction seront ceux du calcul *LJ* (ils ne comprennent donc que cinq schémas de structure : pas de contraction ni d'inversion dans le conséquent). Mais, en outre, il faut supprimer les lettres grecques mentionnées dans le conséquent (les lettres grecques Θ et Λ de III, 1. 2 ou les lettres θ et λ de la note D*, n° 5). En termes de la note D* encore, on ne peut rien « ajouter » au conséquent des schémas simplifiés.

Les schémas supplémentaires sont $\mathfrak{Sf}$ 1 et $\mathfrak{Sf}$ 2 (ils n'ont rien de commun avec les schémas de même nom au § 5); $\mathfrak{Sf}$ 1 conclut de $\rightarrow \mathfrak{A}$ à $\neg \mathfrak{A} \rightarrow$; $\mathfrak{Sf}$ 2 conclut de $\neg \mathfrak{A} \rightarrow$ à $\rightarrow \mathfrak{A}$. On peut ajouter une suite Γ aux antécédents, et même — ce qui est interdit dans les autres schémas, et serait interdit dans tout schéma *LJ* — une suite Θ dans les conséquents.

6. 31. *L'axiomatique de* LK *se déduit dans le calcul auxiliaire.*

En usant des $\mathfrak{Sf}$ 1 et 2 de ce n° 6. 3 comme on a usé en 5. 4 des $\mathfrak{Sf}$ 10 et 11 du § 5, on démontre à l'aide du calcul auxiliaire :

1° Les schémas de contraction et d'inversion dans le conséquent.

2° Les schémas *LK*, avec Θ et Λ dans le conséquent.

6. 32. *L'axiomatique du calcul auxiliaire se déduit à partir de l'axiomatique de* LJ *augmentée du tiers exclu.*

1° On applique aux séquences du calcul auxiliaire une des règles de traduction de V, 1. 2 : une suite de formules dans le conséquent est traduite par une alternative de ces formules. Les séquences ainsi traduites sont des séquences *LJ*.

2° Les schémas de structure et d'opérations du calcul auxiliaire sont valables dans *LJ*, puisqu'ils sont même soumis à des restrictions plus fortes que ceux de *LJ*.

3° On prouve $\mathfrak{S}\mathfrak{f}$ 1 et 2, traduits comme ci-dessus, à l'aide de l'axiomatique de *LJ* augmentée du tiers exclu. (Dans la notation Θ^*, employée dans ces preuves, l'astérisque a un sens propre aux preuves en question.)

6. 33. L'axiomatique de *LK* se déduit de celle de *LHK*.

En effet, elle se déduit de celle du calcul auxiliaire (6. 31) et celle-ci de l'axiomatique de *LJ* augmentée du tiers exclu (6. 32), *LJ* se déduisant de *LHJ* (§ 5), *LJ* plus le tiers exclu se déduira de *LHJ* plus le tiers exclu, c'est-à-dire de l'axiomatique de *LHK*.

BIBLIOGRAPHIE

Avant le titre de chaque écrit se trouve mentionnée sa référence dans le *Journal of Symbolic Logic.*

P. Bernays. — (III, 162) *Logical calculus* (Mimeographed). Princeton, Institute for Advanced Studies (1936), 125 p.

H. B. Curry. — (IV, 128) A note on the reduction of Gentzen's calculus *LJ*. *Bulletin American Mathematical Society*, vol. 45 (1939), pp. 288-293.

— (XVI, 56) A theory of formal deducibility. *Notre Dame mathematical lectures*, n° 6, Lithoprinted, University of Notre Dame, Notre Dame, Indiana, 1950, IX + 126 p.

R. Feys. — (X, 100) *Logistiek*, I, Anvers, Standaard-Boekhandel, 1944, 340 p.

— (XII, 95) Les Méthodes récentes de déduction naturelle. *Revue philosophique de Louvain*, t. 44 (1946), pp. 370-400.

— (XIII, 114) Note complémentaire sur les méthodes de déduction naturelle. *Ibid.*, t. 45 (1947), pp. 60-72.

G. Gentzen. — (442**1**) Ueber die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen. *Mathematische Annalen*, Bd 107 (1932), pp. 329-350.

— (442**2**) Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift*, Bd 39 (1934), pp. 176-210, 403-431.

— (I, 75) Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, Bd 112 (1936), pp. 493-565.

— (I, 119) Die Widerspruchsfreiheit der Stufenlogik. *Mathematische Zeitschrift*, Bd 41 (1936), pp. 357-366.

— (II, 95) Der Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik. *Semesterberichte*, Münster i. W., Winter, 1936-1937.

— (III, 94) Unendlichkeitsbegriff und Widerspruchsfreiheit der Mathematik. *Actualités scientifiques et industrielles*, n° 535, pp. 201-205, Paris, Hermann, 1937.

*

G. GENTZEN. — (III, 166) Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. *Forschungen zur Logik...*, Leipzig, Hirzel, 1938, Heft 4, pp. 1-18.

— (IV, 31) Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. *Ibid.*, pp. 19-44.

— (IX, 70) Beweisbarkeit und Unbeweisbarkeit von Anfangsfallen der transfiniten Induktion in der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, Bd 119 (1943), pp. 140-161.

P. HERTZ. — (2895) Ueber Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme. *Mathematische Annalen*, Bd 101 (1929), pp. 457-514. A consulter également les articles 2891, 2892, 2893, 2894.

D. HILBERT et P. BERNAYS. — *Grundlagen der Mathematik*, Bd 2. Berlin, Springer, 1939.

J. IWANICKI. — Dedukcja naturalna i logistyczna. Warszawa. *Nakladem Polskiego Tow. Teologicznego w Warszawie*, 1949, IV-164 p.

S. JASKOWSKI (5141) On the rules of suppositions in formal logic *Studia logica*, nº 1, Varsovie, 1934, 32 p.

I. JOHANSSON. — (II, 47) Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus. *Compositio Mathematica*, vol. 4 (1936), pp. 119-136.

O. KETONEN. — (X, 127) Untersuchungen zum Prädikatenkalkul. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae*, Helsinki, 1944, 71 p.

— (XI, 24) Le Calcul d'inférence naturelle (finnois). *Ajatus*, vol. 12 (1943), pp. 128-140.

A. KOLMOGOROFF. — (3141) O principie tertium non datur (russe). *Recueil mathématique de la Société mathématique de Moscou*, vol. 32 (1924-1925), pp. 646-667.

K. POPPER. — (XIII, 114 (2)) Logic without assumptions. *Proceedings of the Aristotelian Society*, n. s., vol. 47 (1946-1947), pp. 251-292.

— (XIII, 114 (3)) New Foundations for logic. *Mind*, n. s., vol. 56 (1947), pp. 193-235.
Corrections and additions. *Ibid.*, vol. 57 (1948), pp. 69-70.

— (XIV, 62 (2)) On the theory of deduction. Part I. *Indagationes mathematicae*, vol. 10 (1948), pp. 44-54.

— (XIV 62 (3)) On the theory of deduction. Part II. *Ibid.*, pp. 111-120.

K. Popper. — (XIV, 62 (4)) *The trivialization of mathematical logic.* Library of the Xth International Congress of Philosophy, Amsterdam, pp. 722-727.

N.-B. — La pagination du *Journal of Symbolic Logic* est celle du *preprint.*

W. V. Quine. — (XV, 203) *Methods of logic,* Henry Holt and Cy, New York, 1950, xx + 264 p.

— On natural deduction. *Journal of Symbolic Logic,* XV (1950), pp. 93-102.

M. Wajsberg. — (III, 169) Untersuchungen über den Aussagenkalkul von A. Heyting. *Wiadomosci Matematiczne,* vol. 46 (1938), pp. 45-101.

TABLE DES MATIÈRES

IMPRIMERIE FLOCH, MAYENNE. — 27-4-1955

ÉDIT. 23.137 IMP. 2506