que sais-je ?

LES PROBABILITÉS ET LA VIE

PAR ÉMILE BOREL

le point des connaissances actuelles

PRESSES UNIVERSITAIRES
DE FRANCE

« QUE SAIS-JE ? »
LE POINT DES CONNAISSANCES ACTUELLES
N° 91

LES PROBABILITÉS ET LA VIE

par

Émile BOREL

Membre de l'Institut

SIXIÈME ÉDITION MISE A JOUR

par

Gustave MALECOT

Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS

—

1967

QUARANTIÈME MILLE

DÉPOT LÉGAL

1re édition .. .. .. 2e trimestre 1943

6e — .. .. .. 2e — 1967

INTRODUCTION

La loi unique du hasard. — Plan de l'ouvrage

1. La loi unique du hasard. — Peut-il y avoir des lois du hasard ? Il semble bien que la réponse devrait être négative, car le hasard est précisément défini comme caractérisant les phénomènes qui échappent à toute loi, phénomènes dont les causes sont trop complexes pour que nous puissions les prévoir. Les mathématiciens ont cependant, à la suite de Pascal, de Galilée et de bien d'autres penseurs éminents, constitué une science, le calcul des probabilités, dont l'objet est généralement défini comme étant l'étude des lois du hasard. En réalité, le but principal du calcul des probabilités, comme son nom même l'indique, est de calculer les probabilités de phénomènes complexes en fonction des probabilités, supposées connues, de phénomènes plus simples.

Comment le calcul des probabilités peut-il permettre de prévoir certaines éventualités aléatoires ? Le mécanisme de la prévision est toujours le même et fait intervenir invariablement la *loi unique du hasard*, dont nous parlerons avec plus de détails, et qui consiste essentiellement en ce que les phénomènes très peu probables ne se produisent pas. Il s'agit donc de combiner les probabilités de phénomènes simples de manière à arriver à définir des phénomènes complexes dont les probabilités sont assez petites pour que la loi unique du hasard soit applicable.

Nous utiliserons dans ce petit livre certains résultats du calcul des probabilités, mais il n'est nullement nécessaire que le lecteur connaisse le détail des méthodes par lesquelles ces résultats ont été obtenus ; il suffit qu'il fasse confiance aux mathématiciens, tout comme un industriel fait confiance à son service de comptabilité, sans se croire obligé de refaire toutes les additions et toutes les multiplications.

Les principes sur lesquels repose le calcul des probabilités sont extrêmement simples et aussi intuitifs que les raisonnements qui conduisent un comptable à faire des additions ou des multiplications. Les probabilités simples sont connues parfois par des raisons de symétrie : si l'on jette en l'air une pièce de monnaie (jeu de pile ou face), les probabilités des deux côtés de la pièce sont égales et chacune d'elles est *un demi ;* il y a une chance sur deux d'avoir pile et une sur deux d'avoir face. Pour un dé qui a six faces, la probabilité de chaque face est *un sixième ;* il y a une chance sur six d'obtenir la face marquée *quatre.* D'autres probabilités, de nature plus complexe, sont déduites de l'expérience ou de la statistique ; si sur 10 000 hommes de 80 ans, il en meurt 1 300 au cours d'une année, on en conclura que la probabilité pour un homme de 80 ans de mourir dans l'année est environ 13 %, c'est-à-dire égale à 0,13. Il est clair que les probabilités ne sont jamais connues rigoureusement ; on en connaît seulement des valeurs approchées, ce qui est d'ailleurs le cas pour toutes les grandeurs physiques que l'on peut mesurer. Si précis que soient les instruments de mesure, leur précision est limitée. Pour un dé ou une pièce de monnaie, la symétrie n'est jamais rigoureuse et la valeur 1/2 ou 1/6 de la probabilité est aussi seulement approchée.

Les probabilités simples étant connues, il s'agit de les combiner ; si l'on jette en l'air simultanément deux pièces de monnaie ou successivement deux fois la même pièce, la probabilité d'obtenir deux fois pile sera égale au produit de *un demi* par *un demi*, c'est-à-dire *un quart*. Si l'on jette deux dés, la probabilité d'obtenir le double six sera 1/6 multiplié par 1/6, soit 1/36. Mais la probabilité d'obtenir 6 et 5 avec deux dés sera 1/18, car on peut obtenir, soit 6 avec le premier dé et 5 avec le second, soit 6 avec le second et 5 avec le premier, et chacune de ces éventualités a pour probabilité 1/36.

C'est par des procédés et des remarques analogues que les actuaires des compagnies d'assurances, connaissant les tables de mortalité des hommes et celles des femmes, peuvent résoudre un problème tel que le suivant. Deux époux âgés, le mari de 60 ans, la femme de 55 ans, versent une somme de 10 000 francs en échange d'une rente viagère, qui devra être servie jusqu'à la mort du dernier survivant : quel devrait être le montant de cette rente, pour une valeur donnée du taux de l'intérêt, si l'on ne tenait pas compte du bénéfice que doit se réserver la compagnie d'assurances pour faire face à ses frais généraux et pour constituer des réserves qui sont la garantie pour les assurés d'être payés en tout cas ? Un problème plus difficile, mais qu'on peut résoudre d'après les mêmes principes, consiste à calculer la réduction qu'il faut faire subir à la rente pour que la compagnie soit pratiquement certaine de pouvoir faire face à ses engagements vis-à-vis de tous ses assurés en rentes viagères, même si certains d'entre eux ont la chance de vivre fort longtemps. Pour la résolution de ce second problème, il faut faire appel à *la loi unique du hasard*, dont nous avons déjà parlé.

Cette loi est extrêmement simple et d'une évidence intuitive, bien qu'elle soit rationnellement indémontrable : *les événements dont la probabilité est suffisamment faible ne se produisent jamais* ; ou, du moins, l'homme doit agir, en toutes circonstances, comme s'ils étaient *impossibles*.

Un exemple classique de tels événements impossibles est celui du *miracle des singes dactylographes* (1), auquel on peut donner la forme suivante : une dactylographe ne connaissant que la langue française a été enfermée au secret pendant plusieurs mois avec sa machine et du papier blanc ; elle se distrait en tapant au hasard et, au bout de six mois, elle se trouve avoir écrit, sans une erreur, les œuvres complètes de Shakespeare dans leur texte anglais et les œuvres complètes de Gœthe dans leur texte allemand. Tel est le type des événements qui, bien qu'on ne puisse démontrer rationnellement qu'ils sont *impossibles*, sont cependant si invraisemblables que toute personne de bon sens n'hésitera pas à les déclarer *effectivement impossibles*. Si quelqu'un nous affirmait avoir observé un tel événement, nous serions certains qu'il nous trompe ou qu'il a été lui-même victime d'une supercherie.

Le cas de la dactylographe reproduisant sans les connaître les œuvres de Shakespeare et de Gœthe est tellement miraculeux que personne ne peut douter de son impossibilité ; mais on pourrait imaginer des événements moins invraisemblables, quoi-

(1) Voir Emile BOREL, *Le Hasard* (Alcan), p. 164-399.

qu'encore fort improbables ; par exemple, la dactylographe aurait écrit simplement un vers de Shakespeare ou de Gœthe, ou simplement même les deux premiers mots de l'une de leurs œuvres. C'est dans des cas semblables que le calcul des probabilités doit intervenir, car il permet de calculer la valeur exacte de la probabilité de l'événement envisagé ; nous verrons plus loin (chap. III), entre quelles limites on est plus ou moins autorisé à regarder cette probabilité comme négligeable.

2. **C'est la répétition qui crée l'invraisemblance.** — Si nous analysons le cas de la dactylographe miraculeuse, nous constatons que l'invraisemblance résulte de ce que le succès total exige qu'un succès partiel se trouve réalisé un très grand nombre de fois successives ; le succès partiel consistera en ce que la première lettre écrite par la dactylographe sera précisément la première lettre de *Faust*. Ce succès n'est pas très probable, puisqu'il y a 26 lettres dans l'alphabet, mais n'est cependant pas du tout invraisemblable. Il en est de même pour la seconde lettre, qui pourrait fort bien avoir la chance de coïncider avec la seconde lettre de *Faust ;* de même pour la troisième, et ainsi de suite. Chacun de ces succès partiels, considéré isolément, apparaît comme parfaitement possible ; c'est leur répétition presque indéfinie qui crée l'invraisemblance et qui nous apparaît, à juste titre, comme impossible.

Un des problèmes les plus classiques qu'étudie le calcul des probabilités est précisément celui des probabilités de tel ou tel résultat lorsqu'une même épreuve est indéfiniment répétée. Par exemple on jette en l'air une pièce de monnaie et on considère comme cas favorable l'arrivée de pile. Quelle est la probabilité pour que le cas favorable se produise 10 000 fois de suite sur 10 000 épreuves successives ? Quelle est la probabilité pour qu'il se produise plus de 6 000 fois au cours de 10 000 épreuves ? Le calcul montre que ces probabilités sont si faibles que l'arrivée des événements correspondants doit être regardée comme impossible, d'après *la loi unique du hasard*.

3. Plan de cet ouvrage. — Nous avons l'intention d'étudier dans ce livre les applications du calcul des probabilités à un certain nombre de questions choisies parmi celles qui intéressent directement tous les hommes, questions dont la plupart se rattachent, soit à la vie quotidienne, soit à la maladie et à la mort. Nous laisserons donc de côté les importantes applications du calcul des probabilités à la science, notamment aux sciences physiques (1) ; rappelons cependant que l'importance de ces applications, et les découvertes qu'elles ont suscitées, constituent une des preuves les plus solides de l'exactitude des résultats du calcul des probabilités. Nous ne développerons pas non plus les applications du calcul des probabilités à la théorie des jeux de hasard, applications qui ont été l'origine du calcul des probabilités et qui restent une des branches les plus attrayantes de cette science. Nous nous contenterons d'y faire parfois allusion en leur empruntant des exemples simples destinés à illustrer et faire mieux comprendre certains résultats que nous aurons à utiliser.

Les brèves explications que nous venons de donner à propos de la loi unique du hasard et du miracle dactylographique suffisent à faire pressentir une

(1) Voir mes ouvrages : *Le Hasard* (Alcan) et *Le Jeu, la Chance et les Théories scientifiques modernes* (Gallimard).

difficulté préliminaire, à laquelle sont consacrés nos deux premiers chapitres. Cette difficulté est la suivante : le calcul des probabilités est une science exacte, dont les résultats sont aussi certains que ceux de l'arithmétique ou de l'algèbre, *aussi longtemps qu'il se borne à calculer numériquement les probabilités*. C'est ainsi qu'on arriverait à calculer la probabilité pour que se réalise le miracle dactylographique des œuvres de Shakespeare et de Gœthe ; si ces œuvres constituent 50 volumes de la dimension de celui-ci, soit environ dix millions de caractères, la probabilité de l'événement miraculeux, que nous avons envisagé, est égale à l'unité divisée par un nombre de plus de dix millions de chiffres. Ce résultat est aussi incontestable que celui de toute opération arithmétique correctement effectuée. Mais, si l'on conclut de la petitesse extraordinaire de la probabilité que le miracle dactylographique est impossible, en vertu de la loi unique du hasard, on sort du domaine de la science mathématique et il faut bien reconnaître que l'affirmation, qui nous apparaît comme évidente et incontestable, n'est pas, à strictement parler, une vérité mathématique. Un mathématicien furieusement abstrait pourrait même prétendre qu'il *suffirait* de recommencer l'expérience un nombre *suffisant* de fois, à savoir un nombre de fois représenté par un nombre de 20 millions de chiffres, pour être certain, au contraire, que le miracle se produira plusieurs fois au cours de ces innombrables expériences. Mais il n'est humainement pas possible d'imaginer que l'expérience puisse être renouvelée aussi souvent. Si l'on considère les dimensions de l'Univers comme égales à un milliard de milliards d'années-lumière, le nombre des atomes qu'il pourrait renfermer, s'il était plein de matière, s'exprime par un nombre de moins de 200 chiffres et, au cours d'une durée d'un milliard de milliards d'années, il s'écoule moins de secondes que n'en exprimerait un nombre de 50 chiffres. Si donc, pendant cette durée, chaque atome de l'univers se transformait en dactylographe et répétait l'expérience chaque millième de seconde, le nombre des expériences réalisées serait bien inférieur à un nombre de 300 chiffres. Il est donc interdit de penser à des expériences dont le nombre comporterait plus d'un million de chiffres ; c'est là une vue purement abstraite, une jonglerie mathématique, qui ne peut correspondre à rien et nous devons avoir confiance en notre intuition et en notre bon sens, qui nous permettent d'affirmer *l'impossibilité pratique* du miracle dactylographique que nous avons décrit.

Il se présentera cependant des cas où l'évidence intuitive sera moins claire et où il serait cependant légitime de conclure, en vertu de la loi du hasard, à des affirmations ayant une valeur pratique. Le fait que ces affirmations ne participent pas de la valeur absolue des théorèmes mathématiques ne doit pas être dissimulé ; une telle dissimulation risquerait de justifier tous les doutes sur leur exactitude ; il faut bien comprendre que la loi unique du hasard entraîne une certitude d'une autre nature que la certitude mathématique, mais cette certitude est comparable à celle qui s'impose à nous de l'existence de tel personnage historique ou de telle ville située aux antipodes, de Louis XIV ou de Melbourne, à celle même que nous attribuons à l'existence du monde qui nous est extérieur.

Cette digression fait bien comprendre la nature de la difficulté préliminaire à laquelle sont consacrés les deux premiers chapitres. Le simple bon sens suffit à chacun pour se rendre compte, d'une manière plus ou moins confuse, du caractère particulier des affirmations basées sur le calcul des probabilités ; de là à émettre des doutes sur l'exactitude de ces affirmations, il n'y a qu'un pas. Ce pas sera vite franchi si, comme nous le verrons, il y a chez beaucoup d'hommes des motifs psychologiques qui agissent pour les induire à ne pas accepter certains résultats déduits du calcul des probabilités.

Notre premier chapitre sera consacré aux relations entre le calcul des probabilités et la psychologie des joueurs ; le second chapitre sera consacré aux difficultés qui surgissent dans beaucoup d'esprits d'hommes fort raisonnables, dès qu'il s'agit des probabilités qui concernent la vie humaine.

Pour le chapitre III, nous chercherons à préciser quelles sont les valeurs des probabilités que l'on peut et doit regarder comme pratiquement négligeables. Nous serons ainsi amenés à définir successivement les probabilités négligeables à l'échelle humaine, à l'échelle terrestre, à l'échelle cosmique, à l'échelle supercosmique ; nous terminerons par des remarques sur la définition des probabilités de la vie pratique.

Dans le chapitre IV, nous étudierons l'arrivée des événements, dont la probabilité est très petite, sans être cependant absolument négligeable, lorsque le nombre des épreuves devient très grand. Nous verrons que l'on peut alors déduire de la loi unique du hasard une loi fort utile dans la pratique, la loi de Poisson.

Dans le chapitre V, nous étudierons d'une manière plus approfondie les probabilités de décès, dont il a déjà été question au chapitre II, ainsi que la probabilité des maladies et des accidents et le chapitre VI enfin, traitera de quelques applications curieuses du calcul des probabilités à certains problèmes concernant l'hérédité dans l'espèce humaine.

Nous avons rejeté dans des notes certains développements qui auraient alourdi le texte et qui ne sont pas indispensables à la suite logique des idées. La Note 1 est consacrée à une étude des répétitions de chiffres dans les nombres de six chiffres, nombres sur lesquels se porte naturellement l'attention de tous les clients de la loterie nationale et de tous les propriétaires d'obligations à lots. La Note II donne quelques précisions arithmétiques sur la formule de Poisson. Enfin, la Note III renferme des tables statistiques (tables de mortalité, des causes de décès, des accidents...) qui permettront à nos lecteurs de se rendre un compte exact de la valeur des probabilités qui concernent directement leur santé et leur vie.

Un de mes anciens élèves, auteur de brillantes recherches personnelles sur le calcul des probabilités, M. Jean Ville, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers, a bien voulu lire avec soin et corriger les épreuves de ce livre. Je lui adresse mes vifs remerciements pour sa précieuse collaboration.

CHAPITRE PREMIER

LES PROBABILITÉS ET L'OPINION COMMUNE LES PRÉJUGÉS DES JOUEURS

4. Les probabilités et le bon sens. — Il n'est pas douteux que certains des résultats les plus certains du calcul des probabilités apparaissent à beaucoup d'hommes comme contraires à ce que l'on appelle communément le bon sens, c'est-à-dire à l'opinion commune. Je n'entreprendrai pas une analyse de cette notion un peu imprécise de bon sens, me contentant de citer une page lumineuse de Paul Valéry (1) : « Je ne suis pas à mon aise quand on me parle du bon sens. Je crois en avoir, car qui consentirait qu'il n'en a pas ? Qui pourrait vivre un moment de plus, s'en étant trouvé dépourvu ? Si donc on me l'oppose, je me trouble, je me tourne vers celui qui est en moi, et qui en manque, et qui s'en moque, et qui prétend que le bon sens est la faculté que nous eûmes jadis de nier et de réfuter brillamment l'existence prétendue des antipodes ; ce qu'il fait encore aujourd'hui quand il cherche et qu'il trouve dans l'histoire d'hier les moyens de ne rien comprendre à ce qui se passera demain. »

« Il ajoute que ce bon sens est une intuition toute

(1) Paul VALÉRY, *Regards sur le monde actuel* (Stock, 1931) p. 73.

locale qui dérive d'expériences non précises, ni soignées, qui se mélange d'une logique et d'analogies assez impures pour être universelles. La religion ne l'admet pas dans ses dogmes. Les sciences, chaque jour, l'ahurissent, le bouleversent, le mystifient. »

« Ce critique du bon sens ajoute qu'il n'y a pas de quoi se vanter d'être *la chose du monde la plus répandue*. »

« Mais je lui réponds que rien toutefois ne peut retirer au *bon sens* cette grande utilité qu'il a dans les disputes sur les choses vagues, où il n'est pas d'argument plus puissant pour le public que de l'invoquer pour soi, de proclamer que les autres déraisonnent et que ce bien si précieux, pour être commun, réside tout en celui qui parle. »

L'enseignement qui me paraît résulter de ces fines réflexions, c'est que, lorsque la science heurte le bon sens, il n'est pas inutile de se donner la peine de rechercher pourquoi et d'essayer de trouver les arguments propres à convaincre ceux qui invoquent le bon sens contre la science.

5. Les numéros des billets de loterie. — Beaucoup de personnes refuseront d'acheter un billet de loterie dont les chiffres leur apparaissent comme présentant, par leur disposition et leur choix, quelque singularité exceptionnelle ; tel serait le cas, par exemple, pour le n° 272727 et, à plus forte raison pour le n° 222222. Tous ceux qui ont réfléchi sur les probabilités et sur les méthodes employées pour tirer les numéros gagnants à la loterie savent cependant que les probabilités de gain sont les mêmes pour tous les billets, quel que soit leur numéro. Et cependant, bien des acheteurs de billets persisteront à dire, au nom du bon sens : « il n'est tout de même pas possible qu'un numéro aussi singulier que 222222 gagne le gros lot ». Celui qui émet cette affirmation constate d'ailleurs, lorsque les résultats du tirage sont publiés, que le gros lot est effectivement gagné par un billet dont le numéro est 825717 ou 203409 et il en conclut que son bon sens ne le trompait pas et qu'il a bien fait de ne pas acheter le n° 222222, mais le n° 138615, qui n'a d'ailleurs pas gagné.

Il n'est pas douteux que la probabilité pour que le numéro qui gagne le gros lot soit composé de six chiffres identiques est très faible ; elle est égale à un cent-millième, car il y a 10 billets sur un million qui sont formés de six chiffres identiques (1). Si l'on effectuait 25 tirages par an, on devrait observer un gagnant du gros lot formé de six chiffres identiques une fois en moyenne (2) tous les 4 000 ans ; il est donc assez probable que ce fait singulier ne sera pas observé par un homme au cours de sa vie ; mais ceci ne contredit nullement le calcul des probabilités, d'après lequel la probabilité de gain est la même pour tous les billets.

Si l'on fixe, en effet, un autre numéro déterminé, ou même une collection de dix numéros, on constatera que, le plus souvent, aucun de ces dix numéros ne sort. Mais si ces numéros sont quelconques, n'ont aucune physionomie particulière, on ne remarque pas à chaque tirage que ces numéros ne sont pas sortis.

6. Les numéros formés au moyen de deux chiffres. — On se rendra mieux compte du fait que les chances de tous les numéros sont égales en étudiant

(1) Nous tenons compte du billet dont le numéro est 1000000, ce qui équivaut, si le tirage est effectué au moyen de six roues, au numéro 000000, formé de six zéros.

(2) Voir le chapitre IV.

une classe de numéros assez singulière, mais cependant assez étendue pour que la sortie d'un de ces numéros soit parfois effectivement observée.

Un tel exemple nous sera fourni par les numéros composés au moyen de deux chiffres, parmi lesquels peut figurer le zéro. Tel sera par exemple, le n° 233322, ou le n° 200200, ou encore le n° 55555, car il doit s'écrire 055555 ; au contraire, le n° 55444 est formé de 3 chiffres, car on doit l'écrire 055444. Le tirage se fait en effet, au moyen de six sphères, dont chacune donne un des six chiffres du numéro gagnant.

Il est aisé de calculer le nombre des billets dont les numéros sont ainsi formés de deux chiffres seulement.

Si l'un des chiffres figure 5 fois et l'autre 1 fois, il y a $10 \times 9 \times 6 = 540$ numéros (1).

Si l'un des chiffres figure 4 fois et l'autre 2 fois, il y a $10 \times 9 \times \frac{6.5}{1.2} = 1\,350$ numéros.

Si enfin chacun des chiffres figure 3 fois, il y a $\frac{10.9}{1.2} \times \frac{6.5.4}{1.2.3} = 900$ numéros (2).

Il y a donc en tout $540 + 1350 + 900 = 2\,790$ numéros sur 1 000 000 qui satisfont à la condition d'être formés de deux chiffres seulement ; si on y ajoute les dix numéros formés d'un seul chiffre,

(1) En effet, le chiffre qui figure 5 fois peut être l'un quelconque des 10 chiffres et celui qui figure 1 fois l'un quelconque des 9 autres chiffres, ce qui fait 90 choix possibles ; le chiffre qui ne figure qu'une fois peut occuper 6 places différentes ; on a donc en tout $90 \times 6 = 540$ numéros.

(2) Si chacun des chiffres figure 3 fois, on peut choisir l'un d'eux de 10 manières différentes et ensuite le second de 9 manières, mais chaque combinaison, telle que 3 et 4, est ainsi obtenue 2 fois (3 et 4, puis 4 et 3) ; il y a donc 45 combinaisons, telles que 4 et 3, et pour chacune d'elles 20 dispositions différentes : 444333, 443433, etc., soit en tout $45 \times 20 = 900$.

cela en fait 2 800, soit à peu près 1 sur 357. La probabilité pour qu'un tel numéro gagne un lot déterminé est donc environ 1/357. Si nous admettons que le nombre des séries et le nombre des lots sont tels qu'il y ait 360 lots importants par an (par exemple 30 séries à 12 lots, ou 18 séries à 20 lots), on devra observer le gain d'un lot important par un de ces numéros, *en moyenne environ une fois par an* (1). Ce sera donc un fait rare, mais cependant assez fréquent pour pouvoir être observé par tous ceux qui regardent de près, à chaque tirage, la liste des numéros gagnant les lots importants.

En fait, si l'on prenait la peine de consulter de nombreuses listes de tirages portant sur un million de numéros (en y comprenant les obligations à lots de la Ville de Paris, du Crédit foncier, etc.) on constaterait aisément que la proportion des numéros gagnants formés seulement de deux chiffres est bien conforme aux prévisions du calcul des probabilités (2).

Dans la Note I, nous étudierons avec plus de détails les numéros de 6 chiffres au point de vue de la répétition d'un même chiffre dans un numéro.

7. **Les séries à la roulette.** — Le problème des séries à un jeu tel que la roulette est extrêmement voisin de celui que nous venons d'étudier ; on pourrait même le regarder comme identique si l'on utilisait le système de numération binaire (à base

(1) On en conclut, d'après la formule de Poisson (voir chap. IV) que sur 100 années, il y en aura environ 36 où aucun de ces numéros ne gagnera un lot, 36 où un de ces numéros gagnera, 18 où 2 numéros gagneront, 6 où 3 numéros gagneront, 1 ou 2 où 4 numéros ou plus gagneront.

(2) La proportion est très voisine, comme on s'en assurerait aisément si, comme c'est le cas pour certaines catégories d'obligations, leur nombre n'est pas exactement 1 000 000, mais par exemple 500 000 ; s'il dépasse 1 000 000, on fera abstraction du chiffre des millions.

deux). On peut, en effet, convenir de représenter la sortie de la rouge par le chiffre 0 et de la noire par le chiffre 1 (nous raisonnons sur une roulette ne comportant pas de zéro) ; une suite de coups de roulette amenant soit rouge soit noire, est alors représentée par une suite de 0 et de 1, telle que 1010010010111010l. Une telle suite peut être regardée comme un nombre écrit dans le système binaire et on peut raisonner sur ces nombres comme nous l'avons fait sur les nombres écrits dans le système décimal ; on sera conduit à admettre que ces nombres si divers ont tous la même probabilité. Un nombre exclusivement composé du chiffre 0 ou exclusivement composé du chiffre 1 est très singulier et sa sortie est peu vraisemblable, surtout si le nombre des chiffres est élevé, égal à 30 par exemple ; mais la sortie de tout autre nombre *bien déterminé* de 30 chiffres est également invraisemblable.

Nous laissons de côté le système de numération binaire et traitons la question par un raisonnement direct, en mettant dès l'abord en évidence le point délicat où les résultats du calcul des probabilités sont contestés au nom du bon sens.

Ce point délicat est le suivant : tous les joueurs de roulette ont observé que, sur une longue série de coups, les sorties de la rouge et de la noire sont à peu près aussi nombreuses les unes que les autres. Par exemple, sur 1 000 coups, on observera 483 rouges et 517 noires, mais on n'observera jamais 217 rouges seulement contre 783 noires. La plupart des joueurs croient pouvoir conclure de cette observation exacte et d'ailleurs tout à fait conforme aux résultats du calcul des probabilités que, si durant une certaine période, ils ont observé rouge plus souvent que noire, la roulette a contracté, en quelque sorte, une dette envers la noire et devra acquitter cette dette en faisant sortir la noire plus souvent que la rouge au cours des prochains coups. Dans certains cas, la dette devra même être acquittée immédiatement ; si un joueur, en consultant les archives de la roulette au cours d'un grand nombre d'années, a observé que la plus longue série observée a été de 24 rouges, ou de 24 noires, alors qu'on n'a jamais observé de série dépassant 24, ce même joueur, s'il se trouve observer un jour une série de 24 rouges, n'hésitera pas à conclure que la noire doit forcément sortir au coup suivant, « *puisqu'il n'y a jamais de série de 25* ».

A quoi Joseph Bertrand, avec tous ceux qui ont approfondi l'étude des probabilités, répond : « La roulette n'a ni conscience ni mémoire. » C'est lui faire trop d'honneur que de penser qu'elle garde le souvenir de ses égarements et qu'elle tient à les réparer.

Il semble que le « bon sens » devrait suffire à persuader les joueurs que les coups successifs de la roulette sont indépendants les uns des autres ; il est, en effet, impossible d'imaginer un mécanisme quelconque par lequel les coups antérieurs modifieraient le résultat de celui qui va être joué. Mais les joueurs sont influencés par un fait indéniable, et qui est confirmé par des multitudes d'observations : sur un grand nombre de coups, les sorties de la rouge sont, à peu de chose près, aussi fréquentes que celles de la noire et, pour expliquer ce fait d'observation, ils n'aperçoivent pas d'autre moyen que d'imaginer l'existence d'un mécanisme inconnu qui jouerait le rôle de la conscience et de la mémoire de la roulette, c'est-à-dire que ce mécanisme obligerait la roulette à compenser ses écarts.

Une étude approfondie de l'ensemble de toutes les possibilités, étude tout à fait analogue à celle qui est développée dans la Note I pour les nombres décimaux de six chiffres, montre que si les combinaisons dans lesquelles les rouges sont à peu près aussi nombreuses que les noires sont plus souvent observées que les combinaisons où les rouges seraient beaucoup plus nombreuses que les noires, c'est uniquement parce que les premières combinaisons sont beaucoup plus nombreuses que les autres, de même que les nombres de six chiffres formés de 3, 4, 5 ou 6 chiffres différents, sont beaucoup plus nombreux que ceux qui ne sont formés que d'un ou deux chiffres différents.

Ce n'est pas parce que les sphères de la loterie ont une attraction particulière pour les numéros comportant une ou deux paires c'est-à-dire un ou deux chiffres figurant deux fois dans le numéro. que ces numéros sortent plus souvent que les autres, mais parce que sur un million de numéros, il y en a plus de 680 000 comprenant une ou deux paires. Il en est de même pour la distribution des rouges et des noires dans une série de coups de roulette (nous négligeons le zéro). Par exemple, si l'on considère une série de 30 coups, on obtient les résultats suivants. Le nombre des résultats possibles des 30 coups est égal à la 30^{e} puissance de 2, soit un peu plus d'un milliard (exactement 1 073 741 824). Sur ce milliard de possibilités, les divers résultats globaux ci-dessous figurent le nombre de fois indiqué

30 rouges et 0 noire	1 fois
29 rouges et 1 noire	30 fois
28 rouges et 2 noires.........	435 fois
27 rouges et 3 noires.........	4 060 fois
26 rouges et 4 noires.........	27 405 fois

25 rouges et 5 noires.........	142 506	fois
24 rouges et 6 noires.........	593 775	fois
23 rouges et 7 noires.........	2 035 800	fois
22 rouges et 8 noires.........	5 852 925	fois
21 rouges et 9 noires.........	14 307 150	fois
20 rouges et 10 noires.........	30 045 015	fois
19 rouges et 11 noires.........	54 627 300	fois
18 rouges et 12 noires.........	86 493 225	fois
17 rouges et 13 noires.........	119 759 850	fois
16 rouges et 14 noires.........	145 422 675	fois
15 rouges et 15 noires.........	155 117 520	fois
14 rouges et 16 noires.........	145 422 675	fois
....	....	
....	....	
1 rouge et 29 noires.........	30	fois
0 rouge et 30 noires.........	1	fois

Nous avons omis la plus grande partie de la seconde moitié du tableau, car elle est évidemment symétrique de la première moitié. Il y a le même nombre de combinaisons avec 17 rouges et 13 noires qu'avec 17 noires et 13 rouges.

La série de 30 rouges, ainsi que la série de 30 noires, sont des combinaisons uniques ; chacune d'elles n'est ni plus, ni moins singulière que chacune des autres combinaisons particulières, dont le nombre dépasse un milliard, mais toute combinaison particulière est extrêmement peu probable ; tel serait le cas de la combinaison qui consisterait à obtenir alternativement rouge et noire, de sorte que rouge sortirait à tous les coups impairs et noire à tous les coups pairs.

Les joueurs de roulette n'ont jamais observé une série de trente rouges, ou de trente noires et regardent volontiers une telle série comme impossible. En fait, si une roulette arrive à jouer 1 000 coups par jour (1 coup par minute pendant un peu plus de 16 heures), il faudrait un million de jours, soit 27 siècles environ pour arriver à jouer un milliard de coups et avoir ainsi des chances sérieuses d'observer une série de 30 rouges (voir chap. IV, loi de Poisson).

Les cas où il se présente au moins 28 rouges ou au moins 28 noires, sont au nombre de $2(1 + 30 + + 435) = 932$, soit moins du millionième du nombre total des coups ; une telle éventualité sera très rare, mais cependant parfois observable, si un joueur patient note tous les coups pendant quelques années ; à la cadence de 1 000 coups par jour, il suffirait de 3 ans pour observer plus d'un million de coups.

Les combinaisons qui renferment au moins 27 rouges ou au moins 27 noires, sont en nombre supérieur à 8 000, soit près du cent-millième du nombre total des combinaisons ; une telle éventualité se présentera près d'une fois sur 100 000.

Il y a près de 63 000 combinaisons avec au moins 26 rouges ou noires ; cet ensemble de combinaisons se présentera à peu près une fois sur 15 000.

Les combinaisons avec au moins 25 rouges ou noires sont au nombre de près de 350 000 ; elles se présenteront en moyenne un peu plus d'une fois sur 3 000 ; le joueur qui noterait 1 000 coups par jour les observerait environ 2 fois par semaine.

Si nous passons à au moins 24 rouges ou noires, le nombre des combinaisons dépasse largement le million et la probabilité d'en observer une dépasse donc un millième.

Avec au moins 22 rouges et noires, le nombre des combinaisons dépasse 10 millions (environ 17 millions) ; la probabilité est comprise entre 1 et 2 centièmes.

Enfin, avec au moins 20 rouges ou noires, le nombre des combinaisons est un peu supérieur à 100 millions et la probabilité très voisine de *un dixième*. Il y a donc neuf chances sur 10, pour que, dans une série de 30 coups, le nombre des rouges ni celui des noires ne dépasse pas 19. Le nombre moyen étant 15, on dira, si le nombre observé est 19, que *l'écart par rapport à la moyenne*, ou, plus brièvement, *l'écart*, est égal à 4.

Il y a donc 9 chances sur 10 pour que l'écart soit au plus égal à 4, c'est-à-dire soit inférieur à 5. On observera que 5 est la partie entière de la racine carrée de 30, nombre de coups observés. C'est là une loi générale : *la probabilité d'un écart égal ou supérieur à la racine carrée du nombre des coups est approximativement égale à un dixième*.

8. La loi des écarts. — On voit que le calcul des probabilités est loin d'imposer au hasard des lois rigides auxquelles il devrait se conformer. Non seulement les écarts relativement importants sont possibles, mais, jusqu'à une certaine limite, ils sont probables et nécessaires. Celui qui observe avec soin et persévérance des séries de 30 coups observera assez souvent des séries renfermant plus de 20 rouges sur les trente coups, et même quelquefois des séries renfermant plus de 25 rouges ; mais il n'observera pas de séries renfermant 29 rouges, et à plus forte raison des séries de trente rouges à l'exclusion de toute noire.

Si le nombre des coups de la série est beaucoup plus élevé, par exemple 3 000 au lieu de 30, la probabilité des écarts reste la même, *à condition de faire se correspondre les écarts qui sont dans le même rapport avec la racine carrée du nombre des coups*, c'est-à-dire les écarts qui sont 10 fois plus forts pour 3 000 coups que pour 30 coups. Les écarts de 50 seront donc assez probables, les écarts de 100 seront très peu probables et les écarts de 150 pratiquement impossibles. Si le nombre des coups était 300 000, ce sont les écarts de 1 500 qui deviendraient extrêmement rares et presque impossibles. *L'écart relatif*, c'est-à-dire le rapport de l'écart au nombre des coups décroît de plus en plus à mesure que le nombre des coups augmente. C'est la loi des grands nombres de Bernoulli, qui est une simple conséquence arithmétique de la loi unique du hasard : les séries de 300 000 coups dans lesquels l'écart est inférieur à 1 500, c'est-à-dire qui renferment moins de 301 500 et plus de 298 500 rouges, sont extraordinairement plus nombreuses que les séries dans lesquelles l'écart est plus considérable. Celles-ci ne se rencontrent pas parce que, quoique très nombreuses, elles sont, relativement aux autres, extrêmement rares.

Ce n'est pas seulement dans les jeux que l'on doit avoir présent à l'esprit l'aphorisme de Joseph Bertrand « la roulette n'a ni conscience, ni mémoire ». Cela est vrai également de la plupart des phénomènes accidentels auxquels nous nous intéressons dans la vie, sauf dans les cas où les phénomènes successifs ne sont pas indépendants les uns des autres. Un exemple bien connu d'un cas où les phénomènes ne sont pas indépendants est celui de la pluie et du beau temps. Une longue série de jours de pluie augmente les chances pour qu'il pleuve encore le lendemain et de même, une longue série de beaux jours augmente les chances pour qu'il y ait encore un beau jour. Mais, si l'on observe la pluie et le beau temps, non pas des jours consécutifs, mais par exemple, à une même date tous les ans, les règles de probabilités s'appliqueront. Les statistiques météorologiques nous apprendront par exemple que, dans telle ou telle ville, au mois de mai, il y a le même nombre de jours de pluie et de jours sans pluie. Il y a donc une chance sur deux pour que le 14 mai soit un jour de pluie ; si nous observons cette date pendant un certain nombre d'années consécutives, nous pourrons appliquer à ces observations les résultats obtenus pour le rouge et le noir à la roulette ; le fait qu'il aura plu le 14 mai cinq années de suite n'augmente ni ne diminue les chances pour qu'il pleuve à la même date l'année suivante ; elles restent de une sur deux.

Si un abonné au téléphone a constaté, par une observation minutieuse que, de 2 à 6 heures de l'après-midi, son téléphone est occupé au total pendant 2 heures sur 4, c'est-à-dire la moitié du temps, par de nombreuses communications, chacune de courte durée, j'ai une chance sur deux de le trouver libre si je l'appelle. Si j'ai obtenu trois fois de suite le signal « pas libre », j'ai toujours une chance sur deux de le trouver libre si je téléphone de nouveau. Si je téléphone tous les jours, il m'arrivera environ une fois par mois d'obtenir cinq fois de suite le signal « pas libre » et plus d'une fois par an de l'obtenir 8 fois de suite. Si nous admettons qu'un dérangement du téléphone produisant automatiquement le signal « pas libre » se produit en moyenne une ou deux fois par an, c'est seulement lorsque j'aurai obtenu au moins 8 fois de suite le signal « pas libre » qu'il sera raisonnable que je soupçonne un dérangement (1) ; si je l'obtiens 10 ou 12 fois de suite, le dérangement commencera à devenir très probable ; il serait presque certain si le signal « pas libre » était

(1) Nous utilisons ici implicitement la théorie de la probabilité des causes.

obtenu 20 fois de suite, à des intervalles de 5 ou 10 minutes.

Si je circule en voiture dans une ville où de nombreux carrefours sont équipés avec des signaux alternativement rouges et verts, de manière que, sur les deux voies qui se croisent, les voitures n'aient le droit de passer que sur une seule, à un moment donné, j'ai une chance sur deux, à chaque carrefour, de tomber sur un feu rouge ou sur un feu vert. Si mon itinéraire comporte douze carrefours, je devrai m'attendre à rencontrer, en moyenne, six feux rouges et six feux verts. Mais si j'ai un jour la mauvaise fortune de rencontrer des feux rouges aux six premiers carrefours, je ne devrai pas en conclure que j'aurai des feux verts aux six autres. Il pourra fort bien m'arriver, si je fais le même trajet plusieurs fois par jour, d'avoir exceptionnellement 10 ou même 11, bien plus rarement 12 feux tous rouges ou, au contraire, tous verts. Si j'ai eu un jour la mauvaise chance d'être ainsi arrêté à presque tous les carrefours, cela n'augmentera en rien mes chances d'avoir des feux verts en majorité le lendemain. Et cependant, si j'avais la patience de dresser la statistique pendant une année entière, je constaterais que le rapport entre le nombre total des feux rouges et celui des feux verts serait très voisin de l'unité.

Chapitre II

LES PRÉJUGÉS SUR LES PROBABILITÉS CONCERNANT LA VIE ET LA MORT

9. Le mysticisme du hasard. — L'une des raisons pour lesquelles certains préjugés sont si ancrés chez les joueurs est l'importance très grande qu'ils attachent au gain ou à la perte ; ils sont ainsi tout prêts à accueillir favorablement les suggestions les plus déraisonnables s'ils croient y discerner un moyen de vaincre le hasard et de s'assurer la victoire. C'est pour le même motif que certains préjugés singuliers sur la bonne et la mauvaise chance, sur le bon et le mauvais œil, sont assez fréquents chez les hommes de théâtre, acteurs ou auteurs, dont le succès ou la réputation peuvent dépendre d'un incident au cours d'une répétition générale. Il leur semble que la plus minime circonstance peut amener un triomphe éclatant ou, au contraire, un insuccès dont ils ne se relèveront que difficilement et ils sont prêts à user de tous les moyens, en apparence les plus absurdes, pour faire tourner la chance en leur faveur.

Mais, si importants que puissent être le gain ou la perte au jeu, le succès ou l'insuccès au théâtre, il est un bien auquel les hommes sont encore plus attachés, c'est leur propre vie. Aussi, la plupart d'entre eux, dans toutes les questions qui concernent plus ou moins directement la vie et la mort, raisonnent-ils fort mal, ou plutôt cessent-ils de raisonner pour se laisser guider par leur sensibilité ou leurs préjugés.

Les idées confuses et parfois mystiques que beaucoup d'hommes se font du hasard et de son rôle dans la vie ont été résumées avec beaucoup de talent par Rémy de Gourmont :

« Il n'est rien de plus attendu que l'inattendu, rien qui, au fond, nous surprenne moins. Ce qui nous étonne, par-dessus tout, c'est le déroulement logique des faits. L'homme est en perpétuelle attente du miracle et même il se fâche si le miracle n'arrive pas ; ou bien il se décourage. Le miracle arrive souvent d'ailleurs. Les vies les plus humbles ne sont qu'une suite de miracles, ou plutôt de hasards. On dira qu'au vrai il n'y a pas de hasard et que ce mot ne fait que constater notre ignorance de l'enchaînement des causes. Mais l'enchaînement des causes étant indéchiffrable pour notre esprit, nous appelons hasard tous les événements dont il nous serait impossible, avec la plus grande attention de discerner la venue. Ils se forment, ils viennent, mais nous ne le savons pas et nous ne pouvons pas le savoir. Il est bon que nous ne le puissions pas. L'action n'est possible que dans une certaine insouciance et la vie n'est qu'un acte de confiance en nous-mêmes et dans la bienveillance des hasards.

« Nous comptons sur le hasard. Il n'est aucune existence, même chez les plus dénués d'imagination, qui ne lui fasse une place dans ses prévisions obscures. Ne compter que sur le hasard est fou ; ne pas compter sur le hasard est plus fou encore. Il est aussi déraisonnable de désespérer que d'espérer. L'impossible, à chaque moment de la vie se fait possible. C'est un motif d'espoir que d'être perdu dans un labyrinthe à mille pieds sous terre et on peut, avec autant de vraisemblance, désespérer de tout, le jour qu'avec du bonheur plein le cœur on regarde la vie qui se fait bonne et qui sourit, attentive à nos désirs (1). »

On voit qu'il y a bien des raisons, que la raison ne connaît pas, pour que les applications du calcul des probabilités à la plupart des problèmes qui concernent la vie humaine soient souvent systématiquement ignorées, parfois même méprisées et contestées, par ceux qu'elles devraient cependant intéresser.

Il est cependant peu de résultats du calcul des probabilités qui aient été mieux vérifiés que ceux qui concernent la mortalité ; depuis plus d'un siècle, les compagnies d'assurances sur la vie distribuent à leurs actionnaires des dividendes qui sont une preuve tangible de l'exactitude des calculs de leurs actuaires, calculs basés sur le calcul des probabilités et sur les tables de mortalité, c'est-à-dire sur des données statistiques.

Cette valeur incontestable des données tirées de statistiques sérieusement faites, contraste avec les préjugés courants contre la statistique. Ces préjugés tiennent, en grande partie, à ce que l'on a appelé « la mentalité individualiste ». Il ne plaît pas à l'homme d'être regardé comme une simple unité, identique à d'autres unités, chacun tient à son individualité et a une foule de bonnes raisons pour se regarder comme réellement différent de tous les autres hommes. Par suite, lorsque les statisticiens constatent qu'il se produit telle propor-

(1) Rémy de Gourmont, Epilogues : « *L'Inattendu.* » *Mercure de France*, 15 avril 1906.

tion de décès parmi les hommes de 40 ans, chaque homme de 40 ans sera disposé à penser que cette statistique ne le concerne en rien et que, encore jeune et bien portant, il n'y a aucune raison pour qu'il meure dans l'année. A moins cependant qu'il ne se considère à tort ou à raison, comme gravement malade et qu'il pense que sa mort ne tardera pas.

10. **La vie moyenne.** — Il est d'ailleurs parfaitement exact qu'il ne faut pas appliquer sans discrimination à tous les hommes de 40 ans les résultats de la statistique ; les compagnies d'assurances ont soin de faire passer un examen médical à ceux qui veulent s'assurer. Il serait plus correct de distinguer dans les coefficients de mortalité déduits des Tables, la fraction qui s'applique aux sujets regardés comme bien portants à la suite d'un examen médical sérieux et les fractions qui s'appliquent aux individus chez lesquels l'examen médical révèle certaines maladies ou certaines tares héréditaires (tuberculose, cancer, syphilis, etc.). Mais cette réserve faite, il n'est pas douteux qu'il y a une certaine probabilité de mourir dans l'année pour tout être humain, probabilité qui dépend de divers éléments dont l'âge et le sexe sont les plus importants. Cette probabilité peut être calculée au moyen des Tables de Mortalité dont nous parlerons plus loin (1).

Ces Tables de Mortalité permettent de calculer, à une époque et dans un pays déterminé, la vie moyenne des hommes et la vie moyenne des femmes, laquelle est généralement un peu plus élevée que celle des hommes.

La *vie moyenne* d'un certain nombre d'individus

(1) Voir chap. V et Note II.

est la moyenne arithmétique de la durée de la vie de chacun d'eux. La vie moyenne ainsi définie ne peut être calculée exactement que s'il s'agit d'un groupe d'individus qui sont tous morts. C'est ainsi que le dépouillement des registres de l'état civil du XIX^e^ siècle permettrait de calculer la vie moyenne de ceux des Français nés en 1800 qui sont morts en France.

Lorsqu'il s'agit d'une population nombreuse, on peut admettre, si les Tables de Mortalité sont sérieusement établies, que les âges de décès de l'ensemble des personnes actuellement vivantes se répartiront dans l'avenir, si l'état sanitaire ne varie pas, suivant des proportions très voisines de celles qui résulteraient de ces Tables de Mortalité. C'est ce qui permet de parler de la vie moyenne des habitants d'un pays à une date donnée.

On pourrait penser à une autre méthode pour calculer la vie moyenne : prendre la moyenne arithmétique des âges de décès de tous les hommes ou de toutes les femmes décédés au cours d'une année. Mais un peu de réflexion permet de se rendre compte que cette méthode ne serait correcte que si la population était sensiblement stationnaire au cours d'une longue période. Si, en effet, nous notons le nombre des décès au cours de l'année 1941, les nombres des décédés à l'âge de 20 ans concernent des personnes nées en 1921, tandis que les décédés à l'âge de 80 ans concernent des personnes nées en 1861. Si donc la population du pays considéré avait augmenté notablement de 1861 à 1921, le nombre des décès de 20 ans se trouverait trop élevé par rapport au nombre des décès de 80 ans, de sorte que la vie moyenne calculée se trouverait inférieure à la vie moyenne réelle.

Les statistiques montrent que, dans tous les pays civilisés, la durée de la vie moyenne a notablement augmenté au cours des deux derniers siècles ; cette augmentation est due, pour une large part, à la diminution considérable que les progrès de l'hygiène ont amenée dans les décès des enfants de moins d'un an. Il y aurait d'ailleurs, à divers points de vue, grand intérêt à considérer la vie moyenne calculée, non pas pour l'ensemble des naissances, mais pour l'ensemble des enfants ayant atteint un an. Nous reviendrons sur ce point au chapitre V.

11. **L'interprétation des Tables de Mortalité.** — Les quelques indications que nous venons de donner suffisent à montrer l'importance qu'ont, pour chacun de nous, les indications des Tables de Mortalité et la valeur de la vie moyenne, à condition toutefois que nous en comprenions bien la signification et n'en exagérions pas l'importance. Mais il n'est pas douteux que chaque habitant d'un pays est intéressé à l'augmentation de la vie moyenne dans ce pays, augmentation qui peut résulter des mesures d'hygiène prises pour éviter la propagation de certaines maladies épidémiques ou contagieuses, de la construction d'hôpitaux et de sanatoria, etc.

Je sais bien qu'un individualiste pourrait se confiner dans son égoïsme et dire : je prends personnellement toutes les précautions pour éviter les contagions, j'ai un excellent médecin qui me surveille et me soigne bien si je tombe malade ; donc, peu m'importe que l'on construise ou non des hôpitaux où je n'irai jamais, que l'on assainisse des quartiers insalubres où je suis décidé à ne jamais habiter. Même à son point de vue purement égoïste, cet individualiste n'a pas raison, car il ne peut vivre isolé de l'ensemble des autres êtres humains et il est donc exposé à être la victime de contaminations plus ou moins directes qui auraient été évitées si certaines maladies avaient été moins répandues, grâce aux progrès de l'hygiène.

D'autre part, les précautions excessives prises contre certaines contaminations par certaines personnes trop préoccupées de leur santé, produisent parfois des désastres imprévus ; on cite des cas de personnes n'ayant bu pendant de longues années que de l'eau bouillie pour éviter la fièvre typhoïde et qui meurent de cette maladie à la suite d'un unique écart qu'aurait mieux supporté celui dont l'organisme aurait été peu à peu accoutumé à la lutte contre les microbes.

Joseph Bertrand consacre (1) des pages fort intéressantes à la controverse qui se produisit au moment où fut découverte la vaccination contre la variole, controverse à laquelle prirent part des spécialistes du calcul des probabilités. Le problème qui se posait était le suivant : la vaccination tuait une personne sur 100, mais elle supprimait les probabilités, à l'époque, fort considérables, de décès par la variole ; doit-on conseiller la vaccination, ou doit-on, au contraire, s'abstenir de la pratiquer ?

Daniel Bernoulli, calculant la vie moyenne dans les deux hypothèses (vaccination ou non-vaccination) arrivait au résultat que la vaccination augmentait la vie moyenne de trois ans et concluait qu'on ne devait pas hésiter à la pratiquer.

Joseph Bertrand, à la suite de d'Alembert, n'a pas de peine à montrer que le calcul de la vie moyenne n'est pas suffisamment décisif et que d'autres considérations doivent intervenir.

J'ai développé ailleurs une discussion des argu-

(1) *Calcul des probabilités* (Gauthier-Villars).

ments de Joseph Bertrand (1) ; la raison principale pour laquelle beaucoup de personnes hésiteront, avec raison, à se laisser convaincre par le calcul de la vie moyenne, c'est l'ignorance dans laquelle se trouvent les hommes de la date exacte à laquelle se produira leur décès, ignorance qui est un des éléments les plus importants de leur bonheur quotidien. Si les progrès de la science faisaient cesser cette ignorance, et si chacun pouvait connaître la date à laquelle se produira son décès, la mentalité humaine se trouverait profondément modifiée et chacun attacherait une importance spéciale aux circonstances diverses qui pourraient modifier la date prévue par les médecins pour sa mort. Mais il est oiseux de raisonner sur une hypothèse irréalisable ; voyons les choses comme elles sont.

Il semble bien que, vis-à-vis des risques de maladies, les hommes se divisent en deux catégories, certains d'entre eux passant d'ailleurs parfois d'une catégorie à l'autre suivant leur humeur, ou appartenant alternativement à l'une ou à l'autre, suivant la maladie dont il s'agit. L'une des catégories est celle des insouciants et l'autre, celle des obsédés. Les premiers se laissent vivre et veulent ignorer qu'il y a des microbes de la fièvre typhoïde et des risques de contagion ; ils mangent et boivent comme ont fait leurs parents et leurs ancêtres et pensent que leur robuste constitution leur évitera la contagion ; si elle doit se produire, ils l'accepteront avec fatalisme. Les obsédés, au contraire, dont l'attention aura parfois été éveillée par une lecture, parfois par une maladie mortelle observée dans leur entourage, ne penseront du matin au soir qu'aux précautions à prendre pour éviter les mala-

(1) *Le Hasard*, p. 239 et suiv.

dies qui les préoccupent particulièrement (en négligeant parfois d'ailleurs les risques de maladies plus dangereuses et plus fréquentes). Mais les uns et les autres ne seraient nullement intéressés par la connaissance exacte des probabilités de contagion ou de décès relatives à une certaine maladie ; ces chiffres abstraits ne leur diraient rien ; ce qui compte uniquement, c'est la réaction de leur sensibilité personnelle vis-à-vis de telle ou telle maladie. Celui-ci craindra la typhoïde, tel autre, le cancer.

Les renseignements statistiques que nous reproduisons dans la Note III devraient les faire réfléchir les uns et les autres et leur donner une juste appréciation des dangers réels auxquels chacun de nous est exposé.

Chapitre III

LES PROBABILITÉS NÉGLIGEABLES ET LES PROBABILITÉS DE LA VIE PRATIQUE

12. Certitude scientifique et certitude pratique. — Lorsque nous avons énoncé la loi unique du hasard « *les événements dont la probabilité est suffisamment petite ne se produisent jamais* », nous n'avons pas dissimulé l'imprécision de cet énoncé. Il est des cas sur lesquels ne peut planer aucun doute ; tel est celui du miracle dactylographique où les œuvres complètes de Gœthe sont reproduites par une dactylographe ignorant la langue allemande et tapant au hasard. Mais, entre ce cas, en quelque sorte extrême, et les probabilités très petites et telles cependant que l'arrivée de l'événement correspondant ne soit pas invraisemblable, il y a un très grand nombre de cas intermédiaires. Nous allons essayer de préciser le plus possible quelles valeurs de la probabilité doivent être regardées comme négligeables dans telles et telles circonstances.

Il est évident, en effet, que les exigences que l'on formulera au sujet du degré de certitude que l'on doit attendre de la loi unique du hasard, ne seront pas les mêmes suivant qu'il s'agira de la certitude quasi absolue ou de la certitude dont on peut se contenter dans telle circonstance de la vie pratique.

S'il s'agit d'une loi scientifique, comme le principe de Carnot, d'après lequel la chaleur ne peut passer spontanément d'un corps chaud dans un corps froid, on sera en droit d'exiger que la probabilité du phénomène, regardé comme impossible d'après la loi, soit réellement extraordinairement petite ; il faut, en effet, pour que la loi mérite le nom de loi de la physique, que la plus minime infraction à cette loi ne puisse se produire en aucune circonstance, à aucune époque, en aucun point de l'univers. Nous dirons, pour abréger, que la probabilité doit être négligeable à l'échelle supercosmique et les calculs que nous avons faits plus haut sur le nombre des atomes qui pourraient exister dans un univers dont les dimensions atteindraient des milliards d'années-lumière et sur le nombre de secondes renfermées en une durée de milliards de siècles nous conduiront à fixer à 10^{-500}, c'est-à-dire à l'unité divisée par un nombre de 500 chiffres, la probabilité négligeable à l'échelle supercosmique, probabilité qui peut être prise égale à zéro dans l'énoncé d'une loi scientifique. Il va de soi que cette évaluation renferme une part d'arbitraire ; au lieu de l'exposant 500 nous aurions pu écrire, soit 1 000, soit seulement 200 ou 300. En fait, les probabilités auxquelles conduit la théorie cinétique des gaz, pour une infraction possible au principe de Carnot sont bien plus faibles et égales à l'unité divisée par des nombres de millions de chiffres. De telles probabilités doivent être regardées comme *universellement* négligeables.

Mais, s'il s'agit simplement des actions humaines, de la vie quotidienne de l'un de nous, nous verrons qu'il n'est pas nécessaire qu'une probabilité soit aussi faible pour que nous ayons le droit et le devoir de la négliger dans la pratique, c'est-à-dire d'agir comme si elle était nulle. Nous serons ainsi amenés à définir des probabilités négligeables à l'échelle humaine, à l'échelle terrestre, à l'échelle cosmique, échelles auxquelles correspondent des degrés de certitude pratique qui n'atteignent pas la certitude scientifique et quasi absolue que nous donne l'échelle supercosmique.

13. **Les probabilités négligeables à l'échelle humaine.** — Nous dirons qu'une probabilité est négligeable à l'échelle humaine lorsqu'il apparaît que les hommes les plus prudents et les plus raisonnables doivent agir comme si cette probabilité était nulle, c'est-à-dire doivent courir le risque de voir se réaliser l'événement que cette probabilité concerne, même si l'arrivée de cet événement est considérée par eux comme un grand malheur. Tel est le cas, par exemple, s'il s'agit de la mort de la personne intéressée ou d'une personne qui lui est particulièrement chère.

Donnons un exemple simple. D'après les statistiques du temps de paix, le nombre des accidents mortels de la circulation, dans une ville comme Paris, dont la population est de plusieurs millions d'habitants, est de quelques uns par jour. C'est dire que, pour chaque Parisien qui circule pendant une journée, la probabilité pour qu'il soit tué au cours de la journée par un accident de la circulation, est d'environ un millionième. Si pour éviter ce léger risque, un homme renonçait à toute activité extérieure et se cloîtrait dans sa maison ou s'il imposait cette réclusion à sa femme ou à son fils, on le regarderait comme un fou. C'est dire que les personnes les plus sages et les plus raisonnables n'hésitent pas à affronter couramment un risque de mort dont la probabilité atteint un millionième. Bien entendu, nous ne sommes pas ici dans un cas où la loi unique du hasard permet d'affirmer que l'événement envisagé ne se produit jamais ; celui qui sort tous les jours dans les rues d'une grande ville sait fort bien qu'un accident mortel est *possible*. Mais il n'y pense que pour prendre, en quelque sorte inconsciemment, un certain nombre de précautions qui diminuent pour lui les chances d'accident ; il ne se risque pas sur la chaussée sans avoir regardé s'il vient une voiture ; mais il n'est pas obsédé toute la journée par la peur d'un accident probable.

C'est en comparant le nombre d'accidents à celui des habitants d'une grande ville que nous sommes arrivés à proposer *un millionième* comme la valeur qu'il est raisonnable d'adopter pour une probabilité négligeable à l'échelle humaine. On arriverait à un résultat analogue si l'on portait son attention sur le nombre de fois qu'un homme peut accomplir au cours de sa vie, des gestes ou des actes très simples, comme de tracer une lettre de l'alphabet avec son stylographe, ou d'avancer d'un pas en marchant, ou de respirer. Ce nombre de fois est de l'ordre de grandeur du million en quelques semaines, ou en quelques mois, ou en quelques années, suivant la nature et la fréquence de l'acte considéré. Par exemple, un écrivain aussi fécond que Balzac arrivait à tracer deux ou trois millions de lettres au cours d'une année ; une dactylographe professionnelle dépasserait très largement ce chiffre. On conclut de là que la probabilité d'écrire une lettre à la place d'une autre, qu'il s'agisse d'un écrivain qui se sert de sa plume, ou d'une dactylographe même très experte, est certainement supérieure à un millionième. Si cette probabilité n'était que d'un millionième, c'est-à-dire une erreur unique sur 500 pages dactylographiées, on serait d'accord pour la regarder comme négligeable et pour déclarer que la dactylographe atteint la perfection.

14. **Les probabilités négligeables à l'échelle terrestre.** — Lorsque l'on porte son attention, non sur un homme isolé, mais sur l'ensemble des hommes qui vivent sur la terre, les probabilités, pour être négligeables, doivent être notablement plus faibles. Tel accident, tout à fait improbable pour un homme déterminé, est relativement assez fréquent si l'on considère tous les hommes. Gagner le gros lot à une loterie d'un million de billets est une probabilité négligeable pour celui qui n'a qu'un seul billet ; s'il est sensé, il se gardera bien d'échafauder des projets d'avenir basés sur le gain du gros lot ; ce gain est, au contraire, une certitude si tous les billets sont vendus et si l'on envisage tous les acheteurs de billets : il y en a sûrement un qui gagne.

Si l'on admet que le nombre des êtres humains est de quelques milliards, on sera conduit à regarder comme négligeable à l'échelle terrestre la probabilité un milliard de fois plus petite que la probabilité négligeable à l'échelle humaine, c'est-à-dire le milliardième du millionième, ou 10^{-15}, l'unité divisée par un nombre de 15 chiffres. On peut accepter la même valeur lorsque l'on considère tous les humains qui ont vécu dans les âges historiques, c'est-à-dire au cours de quelques centaines de siècles, car leur nombre est à peine mille fois plus élevé que le nombre actuel des hommes vivants. On peut être amené à considérer de telles probabilités, comme nous le verrons au chapitre VII, dans l'étude de certains problèmes relatifs à l'hérédité dans l'espèce humaine.

La probabilité d'obtenir 50 fois de suite la rouge à la roulette, ou pile au jeu de pile ou face, est 2^{-50} ; si l'on utilise l'égalité approximative, fort commode dans les questions de ce genre, $2^{10} = 10^3$ (en réalité $2^{10} = 1\ 024$, c'est-à-dire un peu plus de 1 000), on constatera que 2^{-50} équivaut à peu près à 10^{-15}, c'est-à-dire à la probabilité négligeable à l'échelle terrestre. En fait, si tous les hommes vivant sur la terre passaient tout leur temps à jouer à un jeu tel que la roulette, à la cadence de 1 000 coups par jour, soit environ 1 000 000 tous les trois ans, c'est seulement en moyenne une fois tous les trois ans que l'un d'eux obtiendrait une série de 50 rouges.

15. **Les probabilités négligeables à l'échelle cosmique.** — Si nous portons notre attention, non plus sur le globe terrestre, mais sur la portion de l'univers qui est accessible à nos instruments d'astronomie et de physique, nous serons amenés à définir les probabilités négligeables à l'échelle cosmique. Certaines lois astronomiques, telles que la loi de Newton sur l'attraction universelle et certaines lois physiques relatives à la propagation des ondes lumineuses, sont vérifiées par des observations innombrables qui sont effectuées sur tous les astres visibles. La probabilité pour qu'une nouvelle observation contredise toutes ces observations concordantes est extrêmement faible. C'est ainsi que l'on peut être conduit à fixer à 10^{-50} la valeur des probabilités négligeables à l'échelle cosmique ; lorsque la probabilité d'un événement est inférieure à cette limite, on peut affirmer que l'événement

ne se produira pas, quel que soit le nombre des occasions qui se présentent dans l'univers entier. Le nombre des étoiles observables est de l'ordre de grandeur d'un milliard, soit de 10^9 et les observations que pourraient faire de ces étoiles, au cours des siècles, les habitants de la Terre, même si tous observaient le ciel, sont certainement en nombre inférieur à 10^{20}. Un phénomène dont la probabilité est 10^{-50} ne se produira donc jamais, ou du moins ne sera jamais observé.

16. **Les probabilités négligeables à l'échelle supercosmique.** — Rappelons que les lois physiques déduites de la mécanique statistique (et aussi les lois mathématiques déduites également du calcul des probabilités) ont une certitude incomparablement plus grande encore et que l'on peut caractériser en disant que la probabilité de l'événement contraire est négligeable à l'échelle supercosmique ; telles sont les probabilités inférieures à 10^{-n}, lorsque le nombre n est un nombre de plus de 10 chiffres. Si, par exemple, on a dans un récipient d'un litre un mélange de volumes égaux d'oxygène et d'azote, la probabilité pour que toutes les molécules d'oxygène se trouvent, à un instant donné, dans la moitié inférieure du récipient et toutes les molécules d'azote dans la moitié supérieure est égale à 2^{-n}, n étant le nombre des molécules (1). Elle est négligeable à l'échelle supercosmique.

Un calcul facile montre que si nous évaluons les dimensions de notre Univers, c'est-à-dire la distance des galaxies les plus éloignées, à dix milliards d'années-lumière, le volume de cet univers est

(1) Une molécule-gramme de gaz contenant $6{,}062 \times 10^{23}$ molécules, le nombre n de molécules contenues dans un litre est de l'ordre de 3.10^{22}, et 2^{-n} est ainsi de l'ordre de 10 à la puissance — 10^{22}.

inférieur à 10^{85} centimètres cubes et il renferme donc moins de 10^{110} atomes, car la densité moyenne est certainement inférieure à 10^{25} atomes par centimètre cube.

Imaginons donc, avec Boltzmann, un univers U_2 qui renfermerait autant d'univers U_1 analogue au nôtre que celui-ci renferme d'atomes, puis un univers U_3 qui renfermerait autant d'univers U_2 que U_1 renferme d'atomes, puis un univers U_4 qui renfermerait autant de U_3 que U_1 renferme d'atomes et ainsi de suite en répétant un million de fois la même opération, c'est-à-dire jusqu'à un univers U_N, avec $N = 10^6$. Ce super-univers renfermerait un nombre d'atomes égal à 10 élevé à la puissance 110 millions, c'est-à-dire qui serait représenté par un nombre de cent dix millions de chiffres. Imaginons d'autre part, une durée T_2 renfermant autant de milliards d'années que le milliard d'années T_1 renferme de secondes, puis une durée T_3 renfermant autant de durées T_2 que T_1 renferme de secondes, et ainsi de suite jusqu'à une durée T_N dont l'indice N serait un million. Supposons que nous recommencions une expérience autant de fois qu'il y a d'atomes dans l'univers U_N et aussi souvent qu'il y a de secondes dans la durée T_N, c'est-à-dire un nombre de fois certainement inférieur à 10 à la puissance 10^9. Si la probabilité du succès d'une expérience isolée est négligeable à l'échelle supercosmique, un calcul facile montre que la probabilité pour que l'expérience réussisse une seule fois sera tellement faible qu'elle pourra être négligée. Si nous prenons comme exemple la séparation spontanée de l'oxygène et de l'azote contenus dans un récipient d'un litre, nous pouvons donc affirmer que cette expérience ne réussira jamais dans le temps ni dans l'espace.

17. Les probabilités et la vie pratique. — On ne rencontrera pas souvent dans la vie pratique des probabilités inférieures à 10^{-6} ou à 10^{-15}, c'est-à-dire négligeables à l'échelle humaine ou terrestre ; mais on doit observer que des probabilités beaucoup moins faibles doivent être négligées, dans les nombreux cas où l'événement correspondant à ces probabilités ne représente pas pour nous un grave malheur, mais est simplement un incident désagréable. Par exemple, s'il s'agit de sortir sans parapluie et sans imperméable un jour où le temps est beau, on pourrait calculer la probabilité pour qu'il pleuve en faisant la statistique des journées où le temps était beau à 10 heures du matin et où il a plu cependant au cours de l'après-midi. Sans avoir fait le calcul, je pense ne pas me tromper en affirmant que la probabilité est supérieure à un millième, au moins sous nos climats. Cependant, à moins qu'une personne ne soit particulièrement délicate, au point qu'une averse imprévue ne risque de compromettre sa santé et sa vie, nous ne la taxerons pas d'imprudence si, par un beau jour où rien ne fait prévoir un orage, elle se dispense de se munir d'un imperméable ou d'un parapluie.

Il est inutile de multiplier les exemples ; tous les hommes, même ceux qui n'ont jamais entendu parler du calcul des probabilités, font des probabilités sans le savoir, comme M. Jourdain faisait de la prose ; beaucoup de leurs décisions sont influencées par l'idée plus ou moins vague qu'ils se font de la probabilité de certains événements. On pourrait en conclure qu'il est inutile de connaître le calcul des probabilités, puisque le simple bon sens y supplée dans la plupart des cas ; je n'ai pas besoin de calcul pour emporter mon parapluie si l'orage menace et le laisser à la maison si le soleil brille. C'est vrai, mais il est vrai également que, dans certains cas, je tiendrai à consulter le baromètre avant de me décider, car les indications qu'il me donnera me permettront d'évaluer la probabilité pour qu'il pleuve, avec moins de chances d'erreur, que si je me contente de jeter un coup d'œil sur le ciel par ma fenêtre. Je pourrai, également, si j'en ai la possibilité, consulter un bulletin météorologique, m'inquiéter de la direction et de la violence du vent. Ces précautions supplémentaires ne devront pas être négligées s'il ne s'agit pas seulement de risquer d'être mouillé par l'averse, mais si je sors en mer sur un petit bateau à voiles et si le mauvais temps peut entraîner de graves accidents.

La plupart des hommes sont aussi ignorants de la valeur exacte des probabilités, qu'ils utilisent plus ou moins consciemment, que le sont les jeunes enfants et les peuplades sauvages de la valeur exacte de la monnaie et des prix des objets usuels. Dans un cas comme dans l'autre, ces valeurs sont évaluées d'après des impressions subjectives, lesquelles entraînent souvent des erreurs très grossières. Avant de confier régulièrement de l'argent à un enfant, il est bon de l'instruire de la valeur des objets qu'il peut être conduit à acheter. Il en est de même pour les probabilités ; celui qui est amené à courir certains risques a intérêt à être renseigné exactement sur leurs probabilités. Tel est le cas, par exemple, pour les probabilités qui concernent certains dangers ou certaines maladies ; lorsque l'un de nous a été témoin d'un accident grave, on a observé dans son entourage certains cas de contagion, il en est souvent fortement impressionné et se trouve conduit à exagérer inconsciemment la valeur de la probabilité pour que cet accident ou cette contagion se produisent de nouveau. Si, par contre, il s'agit d'un accident ou d'une maladie dont on ne connaît pas d'exemple dans son entourage, on sera amené à en négliger la probabilité bien qu'elle puisse être relativement élevée.

La comparaison que nous avons faite entre l'ignorance de la valeur des probabilités et l'ignorance de la valeur de l'argent et des marchandises diverses peut être poursuivie ; dans des cas fort nombreux il faut courir un risque ou un autre, sortir à pied ou en voiture, ou bien rester constamment chez soi au risque de s'anémier ; si l'on a l'estomac délicat, il faut cependant manger et il faut alors opter entre les inconvénients possibles des divers aliments entre lesquels on a la possibilité de choisir.

La situation de celui qui ignore les probabilités est donc analogue à celle d'un homme ou d'un enfant qui a une somme limitée d'argent et qui ignore les prix des marchandises ; il risque de dépenser toute sa petite fortune d'une manière maladroite ; de même, l'ignorance des probabilités peut conduire à courir des risques plus élevés en voulant éviter des risques plus faibles.

Il existe une autre analogie entre les prix et les probabilités : la connaissance exacte des prix est l'un des éléments de nos décisions, mais il n'est pas le seul ; si nous avons à choisir entre deux objets de même nature, l'un nous plaît parfois plus que l'autre, et nous le choisirons peut-être, même s'il est plus cher ; il est néanmoins raisonnable de notre part de nous informer des prix de manière à agir en connaissance de cause ; si le prix est dix fois plus élevé, nous hésiterons peut-être à faire un sacrifice aussi élevé pour contenter notre fantaisie.

Il en est de même pour la probabilité ; si nous avons des raisons sérieuses pour désirer nous déplacer rapidement, nous accepterons de courir des risques d'accident plus élevés en utilisant une automobile très rapide ou un avion ; mais, si nous savions que, vu les circonstances, le risque d'accident mortel atteint un dixième, nous réfléchirions sans doute avant de courir ce risque.

Pour le jeune enfant qui ignore encore la valeur de la monnaie, les expressions : dix francs, cent francs, mille francs sont, sinon équivalentes, du moins dépourvues de toute signification précise ; il en est de même pour celui qui n'a jamais réfléchi sur les probabilités lorsqu'on lui parle de probabilités dont les valeurs respectives sont : un dixième, un centième, un millième. Il suffit cependant d'un peu de réflexion et d'habitude pour se rendre compte qu'il est bien des cas où il serait raisonnable de courir un risque dont la probabilité est un millième, tandis qu'il serait fort peu sage de courir le même risque si sa probabilité était un dixième.

Insistons encore sur le fait que, de même que le prix n'est pas le seul élément de notre décision lorsqu'il s'agit d'un achat, la probabilité ne doit pas être non plus le seul élément de notre décision lorsqu'il s'agit d'un risque à courir. L'un des motifs, en effet, pour lesquels certains esprits se méfient de la précision qu'apportent les mathématiques, c'est parce qu'ils s'imaginent que cette précision risque de porter atteinte à leur libre arbitre. Une personne suffisamment riche peut évidemment choisir les objets qu'elle achète sans s'inquiéter du prix et en se basant seulement sur ses goûts. Mais, lorsqu'il s'agit d'un risque à courir, surtout si la santé, ou même la vie, sont en jeu, nul n'est assez riche pour pouvoir négliger certaines probabilités, sauf dans le cas où de hautes considérations de moralité ou d'honneur nous imposent de courir un risque de mort, si élevé soit-il. Dans ces cas-là, il est préférable d'ignorer la probabilité du danger. Mais, dans la vie ordinaire, la connaissance de la probabilité est un élément utile de notre décision, de même que la connaissance du prix lorsqu'il s'agit d'un achat, sans cependant que cette connaissance nous empêche de tenir compte d'autres considérations avant de nous décider.

18. Les probabilités sont seulement approximatives. — Les probabilités doivent être regardées comme analogues à la mesure des grandeurs physiques ; c'est dire qu'elles ne peuvent jamais être connues exactement, mais seulement avec une certaine approximation. Le degré de cette approximation varie d'ailleurs beaucoup avec la nature des probabilités. Dans les cas où les probabilités peuvent être évaluées par des considérations de symétrie, l'erreur commise sur leur évaluation est généralement très faible. Tel est le cas pour la probabilité d'obtenir telle face d'un dé, ou de tirer une carte désignée d'avance dans un jeu neuf, bien battu et étalé sur la table. Le dé n'est jamais un cube parfait et les points par lesquels sont marquées les diverses faces introduisent également une dissymétrie, mais cette dissymétrie est très faible et la probabilité de chaque face diffère très peu de 1/6 ; de même, si le jeu a 32 cartes, la probabilité de tirer le roi de carreau est très voisine de 1/32, bien que les 32 cartes ne puissent être rigoureusement identiques entre elles et se distinguent d'ailleurs par les dessins et les couleurs. Les erreurs commises dans l'évaluation des probabilités sont forcément plus considérables lorsqu'il s'agit de probabilités empiriques, déduites des statistiques ; d'une part, les statistiques sont souvent imparfaites et sont viciées par des erreurs systématiques impossibles à éviter et difficiles à corriger ; nous en verrons plus loin des exemples à propos des statistiques des causes de décès ; de plus, les statistiques ne portent que sur un nombre limité de cas et l'on obtient des résultats différents suivant que ces statistiques sont étendues à une population plus ou moins nombreuse, à un intervalle de temps plus ou moins long. Enfin, les probabilités varient en général avec le temps et l'on applique à l'année actuelle les valeurs des probabilités qui ont été obtenues par les statistiques portant sur l'une ou plusieurs des années précédentes.

D'autres probabilités sont encore plus incertaines ; ce sont celles qui sont formulées, d'après leurs impressions et leurs souvenirs, par des personnes même très compétentes. Par exemple, un médecin évalue à neuf chances sur dix la probabilité pour un malade de guérir de la maladie dont il souffre, ou un habitué des tournois de tennis évalue à trois sur quatre la probabilité pour que tel champion soit vainqueur du tournois. Il serait cependant excessif de refuser, comme le font certains auteurs, toute valeur à des évaluations de cette nature, si incertaines qu'elles puissent être, mais il convient cependant de les soumettre à une critique sérieuse. Le premier point dont on doit s'assurer, c'est la sincérité de celui qui formule le jugement de probabilité ; il convient de se demander s'il n'y a pas de raisons sérieuses pour douter de cette sincérité. Par exemple, un médecin peut formuler, vis-à-vis de l'entourage d'un malade, un diagnostic volontairement optimiste ; l'habitué des courts de tennis peut se laisser influencer dans le jugement qu'il formule par des amitiés personnelles ou même, dans certains cas, par des considérations moins avouables, en relation avec les paris qui peuvent être engagés et dans lesquels il peut avoir un intérêt personnel. La manière la plus sûre de s'assurer de la sincérité d'un jugement de probabilité, c'est de soumettre celui qui émet ce jugement à l'obligation d'un pari portant sur une somme importante, à condition toutefois que le parieur ne puisse exercer aucune influence sur l'issue de l'événement aléatoire sur lequel porte le pari.

19. **La méthode du pari.** — Si un pari est engagé sur l'arrivée d'un événement dont la probabilité est p, les enjeux doivent être équitablement réglés de la manière suivante. Si Pierre parie que l'événement arrivera et si Paul fait le pari contraire, Pierre doit verser une somme Ap et Paul une somme $A(1-p)$; le total des enjeux, soit A, revient au gagnant. Si, par exemple, Pierre parie qu'il amènera le point 6 avec un dé, il versera 10 francs et Paul 50 francs ; le gagnant ramassera le total des mises, soit 60 francs ; si Pierre amène 6, il gagne 50 francs ; s'il n'amène pas 6, il perd 10 francs.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où la probabilité p n'est pas, comme dans le cas des dés, bien connue des deux parieurs, mais où Pierre a déclaré estimer à p la valeur de la probabilité. Si son estimation est trop forte, la somme Ap qu'il sera conduit à verser sera trop forte et la somme $A(1-p)$ que versera son adversaire sera trop faible ; le jeu sera désavantageux pour Pierre. Si donc on soupçonne Pierre d'exagérer la valeur de la probabilité, comme ce pourrait être le cas d'un médecin optimiste, voulant rassurer ses clients, qui exagérerait la probabilité de guérison, on pourrait l'amener à réduire cette exagération et à revenir à une évaluation plus exacte en l'obligeant à parier une très forte somme en faveur de l'éventualité dont il a exagéré la probabilité. Par exemple, si un médecin déclare que les chances de guérison sont de 9 sur 10 (soit probabilité de 0,9), alors qu'elles ne sont en réalité que de 1 sur 2 (probabilité 0,5), et s'il versait 90 000 francs contre l'espoir d'en toucher 100 000 en cas de guérison, il serait vite ruiné si cette opération se renouvelait souvent. Sur 100 malades, dans le même cas, en effet, nous supposons que 50 seulement environ guérissent ; le médecin verserait donc en tout 9 millions et ne toucherait que 5 millions environ, s'il pariait à l'occasion de chacun des 100 malades.

La méthode du pari permet donc d'éviter les erreurs volontaires qui seraient commises dans l'évaluation des probabilités, *lorsqu'on connaît le sens de ces erreurs*. Mais il est bien clair que si le médecin, au lieu d'être optimiste, devient dans certains cas pessimiste et évalue à 0,9 la probabilité de guérison, alors qu'elle est en réalité plus forte, égale par exemple à 0,99, il sera avantageux pour lui d'accepter un pari basé sur son évaluation ; il versera 90 000 francs pour toucher 100 000 francs en cas de guérison et, si un seul malade meurt sur 100 cas, il aura misé 9 millions pour toucher 9 millions 900 000 francs.

Est-il possible, au moyen de la méthode du pari, d'éviter les erreurs volontaires qui seraient commises par Pierre dans l'évaluation de la probabilité, lorsque ces erreurs ne sont pas nécessairement toujours de même sens, c'est-à-dire sont tantôt en plus, tantôt en moins ? Cela est possible, en effet, mais à deux conditions : la première, c'est que Paul ait le droit d'imposer à Pierre le sens dans lequel il doit parier, c'est-à-dire que Paul, s'il s'agit d'un malade, peut parier à son gré, soit pour la guérison, soit pour la mort du malade. Une seconde condition, qui complète la première et n'est pas moins indispensable, c'est que Paul soit aussi compétent que Pierre dans l'évaluation de la probabilité, soit lui-même un très bon médecin s'il s'agit de la guérison d'un malade, et que Paul puisse par suite savoir dans quel sens Pierre a modifié la valeur de la probabilité ; il orientera son pari en conséquence ; si Pierre a exagéré la probabilité de guérison, il obligera Pierre à parier pour la guérison ; si Pierre, au contraire, exagère la probabilité de décès, il obligera Pierre à parier pour le décès. Si Pierre accepte ces conditions, il se trouvera par cela même obligé à une sincérité complète dans son évaluation, car toute erreur systématique serait ruineuse pour lui.

Il serait d'ailleurs assez naturel que Pierre, à la fois modeste et prudent, déclare qu'il refuse de fixer avec précision la valeur de la probabilité de guérison, mais se contente d'affirmer qu'à ses yeux cette probabilité est comprise entre 0,8 et 0,9 et que, dans ces conditions, si on l'oblige à parier pour la guérison, il exigera qu'on adopte 0,8, mais que si on l'oblige à parier pour le décès, il exigera qu'on adopte 0,9. Une telle attitude serait parfaitement correcte, mais celle de Paul ne le serait pas moins, s'il refusait de parier dans ces conditions ; cela voudrait dire qu'il est d'accord avec Pierre pour penser que la probabilité de guérison est comprise entre 0,8 et 0,9 et que, par suite, les deux paris qui lui sont proposés sont désavantageux, qu'il s'agisse pour Pierre de risquer 80 000 contre

20 000 en pariant pour la guérison, ou de risquer seulement 10 000 contre 90 000 en pariant pour le décès.

En fait, la méthode que nous venons d'esquisser pour obliger Pierre à évaluer le plus correctement qu'il est en son pouvoir certaines probabilités, a de grandes analogies avec l'évaluation des probabilités de hausse ou de baisse d'une valeur boursière qui résulteraient des cours cotés pour les achats et les ventes fermes ou avec diverses primes, ainsi que de l'importance des engagements pris pour ces diverses cotations. Chacune de ces opérations traduit, en effet, l'évaluation d'une probabilité par l'acheteur et par le vendeur, chacun d'eux estimant d'ailleurs que cette évaluation est avantageuse pour lui, c'est-à-dire que l'évaluation est un maximum pour l'un d'eux et un minimum pour l'autre.

20. **La combinaison du pari et des enchères.** — La méthode de vente aux enchères permet souvent de se rendre compte de l'évaluation exacte que tel acheteur a faite de la valeur de l'objet ou de l'immeuble mis en vente, car il cesse de surenchérir lorsque la limite qu'il s'est fixée a été atteinte. On peut appliquer une méthode analogue, si Pierre veut bien s'y soumettre, pour obliger Pierre à faire connaître avec précision l'évaluation qu'il a faite d'une certaine probabilité. Reprenons le cas où Pierre est un médecin consultant qui a pu évaluer les chances de guérison d'un malade ; nous nous proposons de savoir s'il évalue ces chances à plus de 50 % ; pour cela, nous choisissons un événement aléatoire dont la probabilité est exactement 50 %, comme le jeu de pile ou face et nous offrons à Pierre un cadeau important ou un avantage moral considérable à ses yeux en lui laissant le choix

entre les deux éventualités suivantes : ou bien, il recevra ce cadeau si le malade guérit, ou bien il recevra ce cadeau s'il arrive pile en jetant en l'air une pièce de monnaie. Il est clair qu'il a intérêt à choisir celle des deux éventualités dont la probabilité est, à ses yeux, la plus élevée ; il choisira donc la guérison du malade s'il considère que la probabilité de cette guérison est supérieure à 50 % ; si, au contraire, il choisit le jeu de pile ou face, cela nous prouvera qu'il évalue à moins de 50 % la probabilité de guérison. Nous pourrons alors recommencer l'épreuve, en utilisant une éventualité dont la probabilité est 49 % ; nous pourrons, par exemple, avec plusieurs jeux de cartes, dont les revers sont semblables, composer un paquet de 100 cartes dont 49 sont rouges et 51 noires ; la probabilité d'extraire une rouge de ce jeu étalé sur la table après battage, est de 49 %, ou 0,49. Si Pierre préfère cette probabilité à celle du cas de guérison, c'est qu'il évalue cette dernière à moins de 0,49 ; nous recommencerons de la même manière avec 0,48 et ainsi de suite jusqu'à ce que nous constations que Pierre choisit la probabilité de la guérison lorsque l'autre probabilité n'est plus que 0,43, tandis qu'il avait préféré la probabilité 0,44 ; nous en conclurons que son évaluation sincère de la probabilité de la guérison est comprise entre 0,43 et 0,44. Mais, bien entendu, évaluation sincère ne veut pas dire évaluation exacte, car Pierre n'est pas infaillible ; même s'il est très habile, il est fort douteux qu'il puisse discerner l'une de l'autre avec certitude des probabilités aussi voisines que 0,43 et 0,44 ; c'est pourquoi il serait tout à fait illusoire de chercher à obtenir une décimale exacte de plus en faisant décroître les probabilités successivement employées d'un millième au lieu de les faire décroître d'un centième.

On peut comparer ces évaluations de la probabilité d'un événement particulier à l'évaluation d'une longueur ou d'un poids qui peut être faite par une personne qui ne dispose pas d'appareil de mesure. Si cette personne a une certaine compétence, due à l'habitude, son évaluation pourra être relativement exacte, c'est-à-dire comporter 2 chiffres significatifs exacts ; peut-être 3 si le premier chiffre est 1, comme lorsqu'il s'agit de la taille d'un homme évaluée en centimètres. De telles évaluations n'ont pas la valeur d'une mesure physique précise, exécutée avec de bons instruments, mais sont tout de même préférables à l'ignorance absolue ; il en est de même pour les probabilités.

Il y a cependant entre ces deux genres d'évaluation une différence assez grande, qui tient à ce que les méthodes que l'on peut employer pour contrôler la valeur de ces évaluations sont fort différentes suivant qu'il s'agit de l'évaluation d'une grandeur mesurable, ou d'une probabilité. Dans le premier cas, le contrôle est aisé, puisqu'il suffit d'exécuter la mesure avec un bon instrument et d'en comparer le résultat à l'évaluation. Chacun peut ainsi contrôler ses propres évaluations et se perfectionner dans l'art d'évaluer d'un coup d'œil la taille d'un homme ou la hauteur de plafond d'un appartement. Lorsqu'il s'agit d'une probabilité, il sera le plus souvent impossible de donner une méthode précise, analogue à la mesure d'une longueur au moyen d'un mètre, pour évaluer avec une grande précision la probabilité inconnue ; c'est seulement par des méthodes indirectes et forcément plus compliquées que l'on peut arriver à savoir si les évaluations faites par telle personne d'une certaine catégorie de probabilités sont relativement correctes.

21. Le contrôle de la valeur des évaluations de probabilité. — Il n'est pas possible de contrôler la valeur de l'évaluation de la probabilité d'un événement isolé unique, à moins que l'évaluation faite soit, ou extrêmement petite, ou très voisine de 1, c'est-à-dire se confonde pratiquement avec l'impossibilité ou la certitude. Mais si nous affirmons que tel événement a 9 chances sur 10 de se produire ou au contraire, 9 chances sur 10 de ne pas se produire, il pourra arriver dans l'un et dans l'autre cas, que l'événement se produise effectivement ou, au contraire, qu'il ne se produise pas et nous ne pourrons pas en conclure que notre évaluation était exacte, ni qu'elle était inexacte ; car un événement peut fort bien ne pas se produire, bien que sa probabilité soit 0,9, ou, au contraire, se produire, bien que sa probabilité soit seulement 0,1. Certains auteurs croient pouvoir résoudre cette difficulté en refusant de l'examiner, c'est-à-dire en niant l'existence de la probabilité d'un événement isolé ; j'ai discuté ailleurs cette thèse et montré pour quelles raisons elle ne me paraît pas acceptable (1) ; la notion de probabilité est une notion primitive, dont chacun comprend intuitivement la signification et qu'une étude scientifique permet de préciser, de même que le géomètre précise les notions de droite, de plan, de sphère, dont des exemples plus ou moins grossiers nous sont donnés par l'expérience journalière.

Chacun de nous sait parfaitement ce qu'il dit lorsqu'il affirme que telle éventualité lui apparaît comme très peu probable, assez probable, très probable, extrêmement probable, de même qu'il affirme

(1) *Valeur pratique et Philosophie des probabilités*, par Emile Borel (*Traité du Calcul des Probabilités et de ses applications*, t. IV, fasc. III. Gauthier-Villars).

que telle personne est petite, de taille moyenne, assez grande et très grande. Une certaine expérience permet de substituer à ces évaluations approximatives des évaluations numériques plus précises et de dire : je pense que telle personne mesure environ 1,60 m ; ou je pense que la probabilité de telle éventualité est légèrement supérieure à un demi, c'est-à-dire que cette éventualité est plus probable que l'éventualité contraire.

Il s'agit maintenant de savoir comment nous pourrons nous rendre compte que les évaluations de probabilité faites par telle personne sont généralement correctes, tandis que les évaluations de telle autre sont grossièrement inexactes. Comme le lecteur le soupçonne certainement, c'est la méthode du pari qui nous aidera à résoudre ce problème, mais cette méthode doit être appliquée avec circonspection, de manière à éviter de fâcheuses erreurs.

Il faut observer, en effet, que si une personne fait une évaluation inexacte de la probabilité et si nous l'obligeons à parier en prenant pour exacte son évaluation, il y a autant de chances pour que ce pari lui soit avantageux que désavantageux, car tout dépend du sens dans lequel est effectué ce pari. Si, ignorant tout de la roulette, j'affirme que la probabilité de la rouge est 3 sur 4 et celle de la noire 1 sur 4 et si une personne aussi ignorante que moi parie 3 francs sur la rouge contre mon enjeu de 1 franc sur la noire, ce pari est avantageux pour moi et mon erreur se trouve m'être profitable. Sans approfondir la discussion de cette question, nous pouvons conclure que la méthode du pari, appliquée sans discernement, ne permettrait pas de reconnaître celui qui fait des évaluations grossièrement inexactes car les cas où cette inexactitude rendra les paris avantageux pour lui compenseront les cas où ces paris seront désavantageux.

Il n'en est plus de même si l'on se propose de comparer les habiletés respectives de deux personnes qui évaluent les mêmes probabilités, chacune de son côté et qui confrontent ensuite leurs évaluations.

Admettons que Pierre ait évalué à 0,5 et Jacques à 0,7 la probabilité de l'événement que nous appellerons favorable (guérison d'un malade, gain d'un match de tennis, gain d'une course par un cheval désigné d'avance). S'ils adoptent pour leur pari la valeur moyenne 0,6, Jacques aura intérêt, à son point de vue, à parier pour l'événement favorable et Pierre à parier pour l'événement contraire. En effet, pour une masse totale de 100 francs, Jacques ne verse que 60 francs, alors que, d'après sa propre évaluation, il devrait en verser 70 et Pierre ne verse que 40 francs alors que, d'après sa propre évaluation, il devrait en verser 50. Si donc l'un des deux parieurs, Jacques ou Pierre, a fait une évaluation exacte de la probabilité, le pari est avantageux pour lui et désavantageux pour son adversaire. Mais on peut aller plus loin et remarquer que, si les deux évaluations sont inexactes le pari est avantageux pour celui des deux parieurs qui a commis l'erreur la plus faible (1), que les erreurs soient de même sens, ou qu'elles soient de sens contraires. Par exemple, si la véritable valeur

(1) Nous évaluons ici l'erreur commise par la *différence* entre la valeur vraie et la valeur indiquée par Jacques ou Pierre ; à cette évaluation de l'erreur correspond le choix que nous avons fait de la moyenne arithmétique. Si l'on convenait — ce qui peut-être est préférable — d'évaluer l'erreur par le *rapport* de la valeur vraie et de la valeur indiquée, il aurait fallu choisir comme base du pari la moyenne géométrique de 0,5 et 0,7, c'est-à-dire à peu près 0,59. La différence entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique est généralement très faible dans les cas qui se présentent pratiquement : il n'arrivera guère que Jacques aura évalué la probabilité à 0,9 et Pierre à 0,1.

de la probabilité est 0,8, le pari de 60 francs contre 40 est avantageux à Jacques, tandis qu'il est désavantageux pour lui si la valeur de la probabilité est 0,4 ou même si elle est 0,55 (cas où les erreurs sont de signes contraires).

Bien entendu, si Jacques et Pierre font un pari unique, il pourra fort bien arriver que ce pari soit gagné par celui des deux pour qui il est, en principe, désavantageux. Mais, s'ils font un assez grand nombre de paris analogues, celui qui a généralement l'avantage (1) finira par gagner. C'est une conséquence de la loi des grands nombres de Bernouilli. La probabilité pour que Pierre soit finalement en gain, lorsqu'il fait avec Jacques un grand nombre de paris désavantageux devient, en effet, négligeable dès que le nombre de ces paris est suffisamment grand.

La méthode du pari, ainsi appliquée à deux personnes, permet de savoir laquelle des deux est la plus habile dans son évaluation de la probabilité ; si l'on compare de la même manière un grand nombre de personnes prises deux à deux, par exemple des diagnostics de nombreux médecins spécialistes de la même maladie, on pourra savoir lequel d'entre eux évalue le plus correctement les probabilités et on pourra présumer que les évaluations de ce vainqueur du tournoi des paris sont aussi bonnes que le permet l'état actuel de la science médicale.

(1) Nous disons « généralement » car, même si Jacques est plus habile dans ses évaluations que Pierre, il pourra arriver occasionnellement qu'une évaluation de Pierre soit meilleure que l'évaluation correspondante de Jacques.

Chapitre IV

LES ÉVÉNEMENTS DE PROBABILITÉ PETITE. LOI DE POISSON

22. Les probabilités petites, mais non négligeables. — Il arrive souvent que la probabilité de certains événements n'est pas assez petite pour être négligeable ; on ne peut donc pas leur appliquer la loi unique du hasard et affirmer qu'ils ne se produisent pas ; mais, lorsque les expériences sont nombreuses, on peut cependant formuler sur les fréquences de ces événements certaines lois approchées ; la probabilité pour que des infractions graves à ces lois se produisent est alors parfois assez faible pour que la loi unique du hasard soit applicable et que, par suite, des infractions puissent être regardées comme hautement improbables, parfois même comme pratiquement impossibles.

Considérons un phénomène dont la probabilité est assez petite pour que l'arrivée du phénomène puisse être regardée comme exceptionnelle. Pour fixer les idées, nous supposerons la probabilité inférieure à 1/30. Si l'on fait une expérience chaque jour, le phénomène devra se produire, en moyenne, au plus une fois par mois. Nous supposerons, d'autre part, la probabilité supérieure à 1/1000 bien que cette hypothèse n'ait aucune influence sur les résultats qui vont être exposés et qui restent vrais, si petite que puisse être la probabilité ; mais, si la probabilité devenait trop petite, les expériences que nous imaginons devraient être trop nombreuses pour être pratiquement réalisables.

23. La loi de Poisson. — Prenons, pour fixer les idées, une probabilité égale à 1/100 ; il s'agira, par exemple, de la probabilité de gagner le lot d'une tombola qui comporte 100 billets, pour le possesseur d'un seul billet. Si cet acheteur d'un billet unique peut recommencer souvent son expérience, c'est-à-dire a fréquemment l'occasion d'acheter un billet d'une tombola de 100 billets, tombola dont le lot unique est toujours le même, nous avons déjà affirmé, à plusieurs reprises, comme un fait évident qui résulte de la définition même de la probabilité, que l'acheteur qui nous intéresse, appelons-le Pierre, gagnera en moyenne une fois sur 100. Cependant, l'observation prouve que si Pierre recommence précisément 100 fois une expérience qui consiste à acheter un billet d'une tombola de 100 billets, il pourra bien arriver qu'il gagne une fois et une seule, mais il pourra arriver aussi qu'il ne gagne pas une seule fois et il pourra arriver aussi qu'il gagne deux ou plusieurs fois. Le théorème de Poisson (1) nous fait connaître les probabilités de ces diverses éventualités. D'après ce théorème, les probabilités pour que Pierre, en 100 expériences gagne 0 fois, ou 1 fois, ou 2 fois, etc., sont données par le tableau suivant :

Pierre gagne	0 fois :	36,788 % ;	probabilité	0,36788
—	1 —	36,788 %	—	0,36788

(1) Voir dans la Note II, quelques développements mathématiques relatifs à ce théorème, qui ne sont pas réellement indispensables à la compréhension de ce qui suit, mais qui intéresseront sans doute ceux de nos lecteurs qui ont quelques connaissances mathématiques.

Pierre gagne	2	fois :	18,394 %	;	probabilité	0,18394
—	3	—	6,131 %		—	0,06131
—	4	—	1,533 %		—	0,01533
—	5	—	0,306 %		—	0,00306
—	6	—	0,051 %		—	0,00051
—	7	—	0,007 %		—	0,00007
—	8	—	0,001 %		—	0,00001

On observera que la probabilité de gagner 1 fois et 1 fois seulement est égale à la probabilité de gagner 0 fois ; la probabilité de gagner 2 fois est 2 fois plus petite ; celle de gagner 3 fois est 3 fois plus petite que celle de gagner 2 fois ; celle de gagner 4 fois est encore 4 fois plus petite et ainsi de suite. La probabilité de gagner 8 fois est environ 1 sur 100 000, celle de gagner 9 fois serait 9 fois plus faible, c'est-à-dire environ un millionième et celle de gagner 10 fois serait un dix millionième ; nous arrivons ici aux probabilités négligeables à l'échelle humaine.

Si 100 personnes différentes font la même expérience que Pierre, c'est-à-dire prennent 100 fois de suite un billet de tombola, on pourra affirmer que sur ces 100 personnes, il y en aura environ 36 ou 37 qui ne gagneront pas une seule fois sur les 100 tirages auxquels elles participent, à peu près autant qui gagneront une seule fois, tandis qu'il y en aura environ 18 qui gagneront 2 fois, 6 qui gagneront 3 fois, 1 ou 2 qui gagneront 4 fois et exceptionnellement une qui gagnera plus de 4 fois.

Mais, ici encore, ces chiffres ne sont que des moyennes et, comme toujours, des écarts par rapport à ces valeurs moyennes, sont, non seulement possibles, mais très probables et doivent être regardés comme la règle, et non comme l'exception, à condition que les écarts ne soient pas trop considérables.

24. **Les écarts.** — Nous avons déjà dit que les valeurs de l'écart qu'on peut regarder comme normales, c'est-à-dire que l'on observera assez fréquemment, sont celles qui sont inférieures à la racine carrée du nombre attendu ; par exemple, sur 100 personnes ayant participé à 100 tombolas chacune, on s'attend à ce que 36 ou 37 personnes ne gagnent pas une seule fois (en moyenne 36,8) ; la racine carrée de 36 est 6, on doit donc raisonnablement s'attendre à ce que le nombre des personnes qui ne gagneront pas une seule fois soit compris entre 31 et 43 ; un écart double de 6, qui correspondrait à moins de 25 ou plus de 44 sera très rare et un écart triple (moins de 19 ou plus de 55) sera tout à fait exceptionnel. Les mêmes résultats s'appliquent aux nombres de personnes qui gagneraient une fois et une fois seulement.

Quant aux personnes qui gagneraient deux fois, un écart de 4 peut se produire très normalement, par rapport au nombre moyen 18, c'est-à-dire que leur nombre sera compris entre 14 et 22, il pourra rarement descendre jusqu'à 10 ou s'élever jusqu'à 26. Mais on devra regarder comme tout à fait exceptionnel, qu'il puisse être inférieur à 6 ou supérieur à 30.

Des résultats analogues s'appliqueraient aux cas des personnes gagnant 3 fois ou plus au cours d'une série de 100 tombolas.

Ces résultats montrent à quel point est décevant le métier de joueur, si l'on peut appeler ainsi la manière d'agir de la personne pour laquelle le jeu devient une habitude. Le lot unique de la tombola à laquelle Pierre prend avec persévérance un billet doit valoir certainement moins de 100 francs, si le billet coûte 1 franc, car les organisateurs de la tombola sont obligés de subvenir à certains frais et même de prévoir un bénéfice. Si ce lot vaut 80 francs et si Pierre s'obstine à prendre 100 fois de suite un billet unique, nous voyons que la probabilité pour qu'il gagne une fois est 0,37 ; en ce cas, sa perte est de 20 francs puisqu'il a pris 100 billets à 1 franc et gagné un lot de 80 francs ; il a, d'autre part, une probabilité 0,37 de perdre ses 100 francs sans rien gagner. Quant à ses chances de gain, elles sont les suivantes : environ 18 chances sur 100 de gagner 60 francs (2 lots à 80 francs moins 100 francs de billets), 6 chances sur 100 de gagner 140 francs et 1 ou 2 chances sur 100 de gagner 220 francs les chances d'un gain supérieur étant infimes. Des calculs analogues s'appliqueraient à l'habitué de la roulette qui s'obstine à jouer constamment un numéro plein (qu'il peut d'ailleurs varier à sa guise, sans modifier les probabilités) ; la roulette comportant un zéro, il gagnera en moyenne une fois sur 37, de sorte que sur 37 coups consécutifs, les probabilités pour qu'il ne gagne jamais, ou pour qu'il gagne 1 fois, 2 fois, etc., sont données par le tableau de Poisson.

25. **Cas où la série d'expériences est répétée plusieurs fois de suite.** — Il est intéressant de rechercher ce qui se produit lorsque l'on répète plusieurs fois de suite les séries d'expériences que nous avons imaginées, et qui consistent pour Pierre, à prendre 100 fois de suite un billet à une tombola de 100 billets, ou à jouer 37 fois de suite un numéro plein à la roulette.

Supposons que Pierre ne gagne pas une seule fois au cours de la première série ; la probabilité d'une telle éventualité est 0,3679 ; si ce fait se produit, la probabilité pour que Pierre ne gagne pas au cours de la seconde série ne se trouve pas modifiée et est également 0,3679, la probabilité pour que ces deux éventualités se produisent successivement, c'est-à-dire que Pierre ne gagne, ni au cours de la première série, ni au cours de la seconde série, est égale au produit de ces deux probabilités, soit environ 0,135. Telle est la probabilité pour qu'au cours des deux séries, de 100 tombolas chacune, c'est-à-dire, au cours de 200 tombolas consécutives, Pierre ne gagne pas une seule fois. Si l'on considère une seconde série, également de 200 tombolas, la probabilité pour que Pierre ne gagne pas est la même, soit 0,135 et la probabilité pour qu'il ne gagne pas une seule fois au cours des 400 tombolas consécutives (2 séries de 200) est le produit de 0,135 par 0,135, soit environ 0,018 ; cette probabilité est près de 2 centièmes et n'est nullement négligeable.

La probabilité pour que Pierre ne gagne pas au cours de deux séries de 400, c'est-à-dire au cours d'une série de 800, serait le carré de 0,018, soit 0,0003 environ, ou à peu près 1 sur 3 000, probabilité très faible, mais qui n'est cependant pas négligeable à l'échelle humaine.

On se rend compte ainsi que la remarque simple d'après laquelle Pierre gagne *en moyenne* une fois sur 100, doit être interprétée à la lueur des calculs de Poisson pour que sa signification soit bien comprise ; il ne faudrait pas que Pierre interprète cet énoncé d'une valeur moyenne comme impliquant la certitude pour lui de gagner sûrement le lot de la tombola, je ne dis pas seulement en 100 expériences successives, mais en plusieurs centaines d'expériences successives.

Il en est de même lorsque la probabilité envisagée, n'est pas le gain d'un lot à une tombola, mais un accident dont Pierre court quotidiennement le risque. Par exemple, Pierre est un ouvrier dont le métier comporte certains dangers, ou un aviateur, ou un mécanicien de locomotive, ou un conducteur de camion. Si la probabilité d'un accident, d'après la statistique de tous les accidents survenus parmi ceux qui font le même métier que Pierre, est de 1/1000 par journée de travail, cela correspond à un accident environ tous les trois ans (si l'on admet qu'il y a 333 jours de travail par an). Mais sur 100 personnes faisant le même métier que Pierre, on doit compter qu'il y en aura environ 37 qui n'auront aucun accident au cours d'une première période de trois ans, et qu'il y en aura environ 13 qui n'auront aucun accident au cours de deux périodes consécutives de 3 ans. Une telle proportion d'exceptions doit apparaître comme toute naturelle, comme une simple conséquence des calculs de Poisson sur les probabilités, sans qu'il soit nécessaire pour l'expliquer de faire intervenir des différences entre les probabilités qui concernent les divers individus.

Bien entendu, on ne peut pas exclure *a priori* la possibilité de telles différences ; c'est là une question d'espèce, qui ne peut être tranchée que par l'observation et l'expérience. On peut même regarder comme certain que ces différences existent, car les hommes ne sont pas tous pareils ; parmi les conducteurs de camions, il y en a certainement pour lesquels la probabilité d'un accident est inférieure à la moyenne et d'autres pour lesquels cette probabilité, au contraire, est supérieure à la moyenne.

Il est facile de voir que cette inégalité entre les probabilités qui concernent les divers individus a pour conséquence d'augmenter la proportion de ceux pour lesquels, au bout d'un certain laps de temps, aucun accident ne s'est produit. Nous savons que si le nombre des expériences pour chaque individu est égal au dénominateur de la probabilité, c'est-à-dire à 1 000 si la probabilité est 1/1 000, on doit s'attendre à ce que l'événement espéré ou redouté ne se produise pas pour environ 37 % d'individus. S'il s'agit d'un accident, telle sera la proportion des individus indemnes, par exemple, des aviateurs ou des conducteurs de camions qui n'auront subi aucun accident (1).

Bien entendu, un écart ne dépassant pas 6 % par rapport à cette valeur moyenne, dans un sens comme dans l'autre, doit être regardé comme normal, car il peut être dû à des causes purement fortuites. Si la proportion de ceux qui n'auront subi aucun accident est sensiblement plus élevée que 36 %, et s'élève par exemple à 45 ou à 50 %, on devra présumer que cet écart n'est pas fortuit, mais est dû à ce que, parmi les individus sur lesquels porte l'observation, il en est certains pour lesquels la probabilité est notablement inférieure à la moyenne, tandis que, pour d'autres, elle peut être supérieure. Ce dernier résultat serait confirmé, dans le cas où il s'agirait d'accidents dont la plupart ne sont pas mortels, comme c'est le cas pour les automobiles, par le fait que la proportion des individus ayant subi au cours de la période envisagée plus de 2 accidents, serait supérieure à 18 % et la proportion de ceux qui auraient subi plus de 3 accidents, serait supérieure à 6 %.

Dans le langage du calcul des probabilités, on résumera cette augmentation de la proportion des cas où le nombre des accidents est 0, 2, 3 et la

(1) La probabilité 1 /1 000 est supposée calculée d'après certaines statistiques ; elle peut se rapporter soit à la journée de marche, unité assez imprécise, car toutes les journées ne sont pas pareilles, soit à un certain nombre de kilomètres parcourus, par exemple au millier de kilomètres. Recommencer l'expérience mille fois reviendra alors à parcourir un million de kilomètres.

diminution forcément corrélative des cas où le nombre des accidents est égal à l'unité, c'est-à-dire à la moyenne, en disant que *la dispersion* observée est plus élevée que la dispersion normale ; c'est une loi générale du calcul des probabilités que, dans ce cas, le matériel sur lequel porte l'observation n'est pas homogène, c'est-à-dire que les probabilités ne sont pas égales pour tous les individus, mais supérieures à la moyenne pour les uns et par suite inférieures pour les autres.

Peut-il arriver que la dispersion observée soit, au contraire, inférieure à la dispersion normale ? Ce fait pourra se produire dans le cas où les phénomènes observés ne sont pas indépendants, les uns des autres, par exemple, s'il s'agit de malades contagieux, ou d'observations portant sur les nombreux voyageurs qui usent des moyens de transport en commun ; si un train chargé de voyageurs déraille, plusieurs centaines de personnes se trouvent simultanément classées parmi celles qui ont participé à un accident, et un assez grand nombre d'entre elles sont parfois tuées ou plus ou moins grièvement blessées. Un grave accident, qui prend les proportions d'une catastrophe, fait parfois, en un seul jour, un nombre de victimes supérieur à la moyenne annuelle totale. Il en est de même, à plus forte raison, pour les accidents maritimes.

Cependant, dans les chemins de fer comme dans les bateaux, il subsiste une certaine indépendance entre les chances d'accident de deux personnes différentes ; cela tient à ce que, sauf des cas assez particuliers (membres d'une même famille voyageant fréquemment ensemble, habitants de la banlieue d'une grande ville prenant chaque jour les mêmes trains à des heures régulières), ce sont le plus souvent, par suite de circonstances purement fortuites et qui ne se renouvellent pas, que des voyageurs se trouvent ensemble dans un même train ou dans un même bateau. La probabilité pour que l'un d'entre eux subisse un nouvel accident est indépendante de la probabilité analogue pour l'un de ses compagnons de hasard. Il n'en est pas de même lorsque l'on considère les probabilités de certaines maladies épidémiques, ou de maladies dont la fréquence est influencée par le très grand froid ou la très grande chaleur ; les probabilités varient alors simultanément pour les habitants d'une même maison, d'un même quartier, d'une même ville ou d'une même région.

26. **Les probabilités d'attente.** — Un des problèmes pratiques qui se présente le plus fréquemment dans la vie quotidienne est la probabilité de la durée d'attente, lorsque cette durée dépend de circonstances fortuites, comme l'affluence de clients à un guichet, ou le passage plus ou moins régulier d'une voiture publique.

Considérons d'abord le cas très simple d'une voiture publique qui passe à des intervalles rigoureusement fixés, par exemple, toutes les 20 minutes. Si l'on ne connaît pas son horaire, ou si l'on n'en tient pas compte, on devra regarder comme égales les probabilités d'arriver au point d'arrêt en un moment quelconque de l'intervalle de 20 minutes qui sépare deux passages consécutifs ; la durée moyenne de l'attente sera donc 10 minutes.

Prenons maintenant un cas un peu plus compliqué ; nous supposons que l'intervalle moyen des passages est toujours 20 minutes, mais que cet intervalle est alternativement de 30 minutes et de 10 minutes. En d'autres termes, les heures de départ du terminus sont midi, midi 10, midi 40, midi 50, 13 h 20, 13 h 30, 14 heures, 14 h 10, 14 h 40, etc. Nous continuons à supposer que le voyageur ne tient pas compte de l'horaire, soit qu'il l'ignore, soit que sa montre ne soit pas exacte, soit encore, ce qui sera le cas le plus fréquent, parce qu'il a des occupations ou des courses dont la durée ne peut être exactement évaluée et qu'il se décide à aller prendre la voiture dès qu'il se trouve libre.

On pourrait être tenté de raisonner de la manière suivante : lorsque l'intervalle qui sépare deux voitures est 30 minutes, la durée moyenne de l'attente est 15 minutes et lorsque cet intervalle est 10 minutes, la durée moyenne de l'attente est 5 minutes ; donc, cette durée moyenne, étant alternativement de 15 minutes et de 5 minutes, est en moyenne de 10 minutes, c'est-à-dire est la même que lorsque les voitures passent à des intervalles égaux de 20 minutes chacun. Ce raisonnement est faux, parce qu'il ne tient pas compte d'une circonstance cependant évidente, dès qu'on y réfléchit ; le voyageur qui se présente au point d'arrêt à un moment arbitraire, a beaucoup plus de chances d'y arriver au cours d'un intervalle de 30 minutes que d'y arriver au cours d'un intervalle de 10 minutes ; sur quatre fois, il arrivera en moyenne 3 fois au cours de l'intervalle de 30 minutes et 1 seule fois au cours de l'intervalle de 10 minutes, il aura donc, sur 4 fois, 3 fois une attente moyenne de 15 minutes et 1 seule fois, une attente moyenne de 5 minutes, la véritable durée moyenne de l'attente sera donc ;

$$\frac{1}{4}(3 \times 15 + 1 \times 5) = \frac{50}{4} = 12{,}5 \text{ mn}$$

c'est-à-dire 12 minutes et demie (12 mn 30 s) ; elle se trouve augmentée du fait de l'irrégularité de service.

On pourrait se proposer de résoudre une question analogue, dans le cas où les irrégularités du service ne sont pas systématiques, mais se trouvent occasionnées par des circonstances fortuites, comme il arrive fréquemment pour les autobus dans les grandes villes où la circulation est très intense. Il arrive alors que les voitures, bien qu'assujetties à partir du terminus à des intervalles réguliers, 10 minutes par exemple, se trouvent dès le milieu de leur parcours, en avance ou en retard de plusieurs minutes, les unes par rapport aux autres (1).

Il est assez difficile de soumettre la question ainsi posée à un calcul rigoureux, car un tel calcul ne pourrait être basé que sur des hypothèses très précises, sur la probabilité des divers retards (ou avances) qui sont regardés comme possibles. On obtiendra dans le cas des lignes d'autobus où les départs sont assez fréquents, un résultat assez proche de la réalité en admettant comme un fait d'expérience que, lorsque l'intervalle moyen séparant les voitures est 10 minutes, les intervalles de 0 à 20 minutes sont tous à peu près également probables. La durée moyenne de l'attente est 5 minutes lorsque la régularité est parfaite et de 10 minutes lorsque l'irrégularité est aussi grande qu'elle peut l'être d'après notre hypothèse (intervalles dont la longueur est alternativement 0 et 20 minutes) ; un calcul facile permet de conclure que la durée moyenne de l'attente est la moyenne arithmétique de 5 et de 10 minutes, c'est-à-dire

(1) On peut d'ailleurs observer, dans le cas des autobus, qu'une voiture en retard se trouvera obligée de charger un plus grand nombre de voyageurs à chaque point d'arrêt, ce qui tendra à augmenter son retard, tandis qu'une voiture en avance par rapport à la voiture qui la précède, chargera peu de voyageurs, de sorte que son avance tendra à augmenter. C'est par ce mécanisme que, sur certaines lignes d'autobus, il arrive fréquemment qu'une voiture rattrape avant le terminus la voiture qui la précède.

de 7 minutes et demie ; elle se trouve augmentée de 50 % du fait des irrégularités du service.

Nous avons, dans tout ceci, supposé que le voyageur qui attend, trouve toujours de la place dans la première des voitures qui passe ; pour soumettre au calcul l'étude des cas où les voitures sont complètes ou du moins ne peuvent accepter qu'une partie des voyageurs, il faudrait faire de nombreuses hypothèses, qui risqueraient d'être fort arbitraires, si elles n'étaient pas basées sur l'observation et sur la statistique. Le problème de l'attente dans le cas où les voitures sont parfois complètes ou presque complètes n'est pas sans analogie avec le problème de l'attente aux guichets dont nous allons maintenant dire un mot, en nous bornant à un cas très simple, car ce problème serait très compliqué, si l'on voulait étudier toutes les circonstances qui peuvent effectivement se présenter.

27. **Problème de l'attente au guichet.** — Admettons d'abord que le nombre des guichets d'une certaine administration, guichets tous identiques entre eux, soit strictement suffisant pour satisfaire tous les usagers qui se présentent au cours d'une journée, usagers dont nous supposerons, pour simplifier, que le temps nécessaire pour leur donner satisfaction est le même pour chacun d'eux, par exemple, 5 minutes. Si le guichet est ouvert pendant 10 heures consécutives chaque jour, il peut ainsi satisfaire 120 personnes et 10 guichets peuvent en satisfaire 1200.

Il est clair que si les usagers se présentent moins nombreux au début de la journée, certains guichets chômeront partiellement et, par suite, l'affluence sera trop grande à la fin de la journée et tous les clients ne pourront alors être satisfaits. Si cette circonstance se présente plusieurs fois et est connue des usagers, ceux d'entre eux qui jugeront très dommageable pour eux le fait de ne pas être satisfaits à la fin de la journée, en raison de la trop grande affluence, feront leurs efforts pour venir au début de la journée, la conséquence sera un afflux supérieur à la moyenne au début et par suite, une attente plus ou moins prolongée. On voit que le problème est loin d'être un simple problème de probabilités, car il fait intervenir la psychologie des usagers, ainsi que de nombreuses circonstances qui varient suivant la nature des opérations effectuées. C'est seulement en simplifiant beaucoup les hypothèses qu'on peut le soumettre au calcul.

Nous supposerons désormais qu'il y a un seul guichet et que l'affluence quotidienne des usagers est inférieure au rendement du guichet de sorte que s'ils se succédaient à intervalles réguliers, non seulement il n'y aurait jamais d'attente, mais le guichet se trouverait libre pendant le quart de la durée totale, soit pendant 2 heures (120 minutes en tout) sur 8 heures d'ouverture. Il peut, pendant les 6 heures de travail effectif, satisfaire 30 usagers en moyenne à l'heure, stationnant chacun deux minutes, soit 180 par jour. Mais ces 180 usagers ne se présentent pas à des intervalles rigoureusement égaux ; il y a généralement des heures creuses et des heures d'affluence. Si cependant, un assez grand nombre des usagers sont libres à toute heure et redoutent beaucoup l'attente, un certain nombre d'entre eux rechercheront les heures connues comme heures creuses, de sorte qu'il s'établira peu à peu un certain équilibre. Il n'est donc pas absurde de faire l'hypothèse simple que, pour chacun des usagers, toutes les heures de la journée sont également probables, c'est-à-dire que tout se passe comme si chacun d'eux tirait au sort l'heure et la minute auxquelles il se présentera au guichet. Dans cette hypothèse simple, le problème de l'attente peut être soumis au calcul et, malgré la simplicité de l'hypothèse, la solution reste encore assez compliquée. Nous donnons dans la Note II quelques précisions sur ces calculs, destinées à ceux de nos lecteurs qui s'intéressent aux mathématiques ; nous nous contentons ici de donner les résultats dans le cas particulier que nous venons d'indiquer.

Précisons d'abord quelques conventions de langage. Le premier usager qui se présente après l'ouverture du guichet sera dit une tête de série ; si, pendant les 2 minutes que dure son stationnement au guichet, aucun autre usager ne se présente, la série se trouve terminée et ne se compose ainsi que d'un seul élément. Si, au contraire, pendant que le premier usager stationne, il se présente un ou plusieurs usagers, la série ne se terminera que lorsque le guichet deviendra libre de nouveau ; elle peut se composer de 2, 3, 4, etc. éléments, chaque élément consistant en un usager qui utilise le guichet pendant 2 minutes ; si la série est formée de 4 éléments, sa durée est de 8 minutes. Quand une série est terminée, le premier usager qui se présente est à nouveau une tête de série, et ainsi de suite, jusqu'à l'heure de la fermeture. Nous admettrons que cette heure se trouvera retardée de quelques minutes, s'il y a lieu, pour permettre aux usagers en attente d'être servis.

Nous avons admis qu'il y a en tout 180 usagers, dont le service exige 6 heures, alors que le guichet est ouvert pendant 8 heures, c'est-à-dire que le guichet doit rester inoccupé pendant un quart du temps total de son ouverture. Dans ces conditions, la probabilité pour qu'un usager qui arrive au hasard au cours de la journée soit une tête de série est précisément un quart, d'où l'on conclut que le nombre des séries sera, en moyenne, égal au quart de 180, soit à 45.

On peut calculer les probabilités respectives pour qu'une série se compose d'un seul élément, de 2, de 3 ou d'un plus grand nombre d'éléments. Ces probabilités décroissent d'abord rapidement et ensuite beaucoup plus lentement. En multipliant ces probabilités par 45, nombre total probable des séries, on obtient les nombres probables des séries d'un, 2, 3, 4, etc. éléments. Ces nombres sont 21 séries d'un élément, 7 séries de 2 éléments, 3,5 séries de 3 éléments, 2,1 séries de 4 éléments, 1,4 série de 5 éléments, 1 série de 6 éléments. Le nombre décroît ensuite très lentement, car il est multiplié environ par 0,9 chaque fois que le nombre des éléments augmente d'une unité, il devient ainsi 0,36 pour 16 éléments et 0,13 pour 26 éléments ; mais la somme des nombres probables des séries de 6 éléments ou plus est égale à 10, c'est-à-dire est loin d'être négligeable et le nombre probable des séries de 29 éléments ou plus est égal à l'unité. On peut donc s'attendre à une répartition telle que la suivante :

21	séries de	1	élément
7	—	2	—
3	—	3	—
2	—	4	—
2	—	5	—
1	—	6 ou 7	éléments
1	—	8	éléments
1	—	9	—
1	—	10 ou 11	éléments
1	—	12 ou 13	—

1	série de	14	à	16	éléments
1	—	17	à	20	—
1	—	21	à	25	—
1	—	25	à	30	—
1	—	31	à	40	—

Mais, bien entendu, il pourra se présenter des écarts par rapport à ces nombres moyens ; nous avons voulu donner simplement l'allure générale du phénomène.

Le nombre des séries étant 45 et le nombre total des éléments 180, chaque série se compose en moyenne de 4 éléments. Rappelons que le temps total d'ouverture du guichet, soit 8 heures, est égal à 4 fois le temps pendant lequel le guichet est inoccupé, soit 2 heures ; c'est pour cela que le nombre moyen des éléments est 4.

Le nombre moyen que nous venons de calculer est la moyenne arithmétique des nombres d'éléments des diverses séries, ou si l'on préfère, la moyenne des durées de ces séries (l'unité de durée étant pour nous 2 minutes). Mais, dans certains cas, une autre définition de la moyenne convient mieux.

Considérons un usager au hasard ; il se trouvera dans une série, soit qu'il en soit la tête, soit qu'il en soit un des autres éléments ; cette série, lorsqu'elle sera terminée, comprendra un certain nombre d'éléments, que nous pourrons qualifier comme étant le nombre d'éléments *observé* par l'usager pris au hasard que nous avons envisagé. Si nous envisageons de même au hasard, un grand nombre d'usagers, chacun d'eux observera un certain nombre d'éléments dans la série à laquelle il appartiendra et l'on pourra appeler valeur moyenne des séries, la moyenne arithmétique des valeurs ainsi observées par un grand nombre d'usagers. Il est évident que la moyenne ainsi définie est supérieure à la moyenne que nous avons calculée, car il est plus probable qu'un usager pris au hasard appartiendra à une série longue qu'à une série courte. En fait, le calcul montre que, dans le problème qui nous occupe, la nouvelle longueur moyenne est exactement le carré de la précédente, c'est-à-dire est de 16 éléments au lieu de 4. Si un usager arrive au hasard et appartient à une série de 16 éléments, il a des chances égales d'occuper l'un quelconque des rangs entre le premier et le seizième ; le nombre de ceux qui le précèdent est compris entre 0 et 15, il y en a donc en moyenne 7,5. Telle est la réponse la plus précise et la plus générale que l'on peut faire au problème de l'attente au guichet. Un nouveau calcul serait nécessaire pour déterminer la durée moyenne de l'attente.

Si le guichet se trouvait libre pendant une durée égale à la moitié des heures d'ouvertures (et non plus au quart comme nous l'avons supposé) la longueur moyenne des séries serait de 2 suivant le premier mode de calcul et de 4 suivant le second mode ; chaque usager aurait en moyenne 1,5 prédécesseur dans la série à laquelle il appartient ; la moitié des usagers seraient des têtes de série et n'auraient aucun prédécesseur.

Si, au contraire, le guichet ne se trouvait libre que pendant un dixième des heures d'ouvertures, la longueur moyenne des séries serait 10 avec le premier mode de calcul et 100 avec le deuxième mode ; on pourrait observer, sinon tous les jours, du moins assez souvent, des séries supérieures à 100. Le nombre moyen des séries par jour étant seulement 18, des observations portant sur plusieurs jours seraient en effet nécessaires pour vérifier nos résultats portant seulement sur des moyennes.

Chapitre V

LES PROBABILITÉS DES DÉCÈS DES MALADIES ET DES ACCIDENTS

28. **Probabilités des décès.** — Dès le XVIIIe siècle les statistiques des décès en fonction de l'âge, ont commencé à être sérieusement établies (1) ; au cours du XIXe siècle, ces statistiques ont atteint une très grande exactitude, dans tous les pays civilisés. D'autre part, les compagnies d'assurances sur la vie, dont le nombre et l'importance ne cessaient de croître, ont établi des statistiques très précises portant sur leur clientèle. Dans ces statistiques, les compagnies distinguent deux catégories dans cette clientèle, suivant la nature du contrat d'assurance. Dans certains contrats, en effet, la mort de l'assuré est un événement avantageux, sinon pour lui-même, du moins pour ses héritiers et par suite, désavantageux pour la compagnie qui doit leur verser une somme importante ; dans d'autres contrats, au contraire, c'est la survie prolongée de l'assuré qui est avantageuse pour lui-même et désavantageuse pour la compagnie, qui doit continuer à lui verser une rente viagère. Dans le langage des compagnies d'assurances, la première catégorie est celle des *assurés* et la seconde celle des *rentiers*.

(1) Table de Deparcieux, 1746.

On comprend facilement que la mortalité des rentiers est inférieure à celle des assurés, malgré la précaution prise par les compagnies d'exiger de ces derniers une visite médicale et de refuser de les assurer si cette visite n'est pas favorable. En effet, celui qui se sait malade ou dont la santé est fragile ne se résout pas aisément à se ranger dans la catégorie des rentiers en aliénant un capital important en échange de la promesse d'une rente viagère.

Nos lecteurs trouveront dans la Note III, les Tables de Mortalité reproduites d'après les publications des compagnies d'assurances. On y trouvera également d'autres Tables de la Statistique générale de la France, ainsi que des Tables de Survie par générations, accompagnées de commentaires indiquant les différences entre ces diverses Tables. Nous nous contenterons donc de faire observer ici que les Tables des Compagnies d'assurances se rapportent à une population dans une certaine mesure sélectionnée, puisque les assurés passent un examen médical devant un médecin de la compagnie et que les rentiers ont intérêt à consulter leur propre médecin avant de souscrire leur contrat. Mais ces examens n'ont lieu qu'une fois, au moment où le contrat est souscrit, et la durée de ce contrat est souvent très longue ; au cours de cette durée, assurés ou rentiers peuvent être atteints de maladies graves qui augmentent notablement leurs probabilités de décès au cours de l'année, par rapport aux probabilités moyennes, relatives à l'ensemble des hommes ou des femmes du même âge.

Insistons un peu sur la différence qu'il y a lieu d'établir entre la probabilité moyenne de décès au cours de l'année pour un homme de quarante ans et la probabilité analogue lorsque l'on sait que l'homme de quarante ans est actuellement bien portant et ne court pas, d'après sa profession et ses habitudes de vie, de risques exceptionnels.

29. **Signification de la probabilité moyenne.** — Considérons, pour fixer les idées, les hommes de 50 ans, d'après la Table de la page 108 (P. M. 1946-49), il en meurt au cours de l'année 7 834 sur 791 283 soit un peu moins de 10 sur mille. Si nous adoptons le chiffre 10 sur 1 000, la probabilité moyenne de mortalité au cours de l'année est 0,01, soit un centième, pour un homme de 50 ans *sur lequel on ne possède aucun autre renseignement*, et dont on peut légitimement penser qu'il est choisi au hasard parmi les hommes de 50 ans. Si, par exemple, on considère l'ensemble des hommes qui atteignent leur 50e année au cours du mois de janvier, si leur nombre est 30 000, on devra regarder comme probable qu'il en mourra 300 avant l'âge de 51 ans. La différence qui pourra être observée entre le chiffre de décès qui sera réellement observé et le nombre moyen 300 calculé d'après la probabilité sera relativement faible, de l'ordre de grandeur des écarts qui se produisent lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience simple, comme le jet d'un dé ou un tirage au sort dans une urne.

En fait, si l'on tient compte de la possibilité de certains événements exceptionnels qui augmentent la mortalité générale (guerre, épidémies, hiver anormalement froid), les écarts pour la mortalité sont parfois supérieurs à ceux des événements aléatoires simples.

On peut cependant admettre, dans les exemples que nous avons choisis, que le nombre de décès dépassera 250 et sera inférieur à 400. Mais ceci suppose, bien entendu, que l'expérience porte sur 30 000 personnes de 50 ans réellement choisies au hasard. Tel serait le cas également, si au lieu de choisir celles qui sont nées en janvier, on choisissait celles dont le nom commence par les lettres A ou B. Mais si l'on choisissait 30 000 fonctionnaires en exercice à la date du 1er janvier, et âgés de 50 à 51 ans, on devrait s'attendre à une mortalité nettement inférieure, car le fait d'être en fonctions prouve qu'ils ne sont pas atteints à cette date d'une maladie grave. De plus, on peut se demander si les probabilités de certaines maladies ou causes d'accident ne sont pas moindres pour les fonctionnaires que pour les ouvriers ou les agriculteurs.

Les variations de la probabilité lorsque l'on restreint la catégorie des personnes considérées seraient bien plus considérables encore si, au lieu d'envisager la probabilité de décès *au cours d'une année*, on envisageait les probabilités de décès *au cours d'une journée*, plus exactement au cours de 24 heures, d'aujourd'hui midi à demain midi.

Pour l'ensemble des hommes de 50 ans, cette probabilité est 365 fois plus faible que pour l'année, c'est-à-dire que l'on doit s'attendre, en moyenne à 10 décès sur 365 000 personnes au lieu de 10 sur 1 000. En fait, dans un grand pays où le nombre des personnes âgées de 50 ans serait de 730 000, le nombre quotidien de décès de personnes de cet âge serait en moyenne de 20. Mais il est évident que ce nombre serait beaucoup plus faible, si l'on ne considérait que les personnes de 50 ans qui, aujourd'hui à midi, sont bien portantes et qui, de plus, ne doivent courir au cours des 24 heures, aucun risque exceptionnel d'accident (long voyage en avion, en automobile, exhibition dangereuse pour un acrobate, etc.). Il y a, en effet, très peu de maladies qui tuent en 24 heures, sans avertissement préalable et même beaucoup d'accidents mortels laissent à leur victime quelques heures ou quelques jours de survie. Il serait donc fort exagéré d'évaluer à 1 sur 36 500 la probabilité de décès au cours des 24 heures pour une personne qui est bien portante et qui ne doit courir aucun risque exceptionnel ; on peut affirmer que cette probabilité est certainement beaucoup plus faible, bien que son évaluation précise soit assez difficile ; il est même assez délicat de la définir avec précision. Que faut-il entendre, en effet, par une personne bien portante ? Doit-on se contenter de l'affirmation de la personne intéressée ou exiger un examen médical ? D'autre part, quels sont les risques d'accident que l'on doit considérer comme normaux ou comme exceptionnels ?

Il semble cependant qu'il y aurait un certain intérêt à distinguer, mieux que l'on ne l'a fait jusqu'ici, les probabilités de survie globale à un âge déterminé, pour l'ensemble d'une population, des probabilités relatives aux personnes de cet âge dont la santé est bonne et qui ne courent pas de risques exceptionnels. L'étude des statistiques relatives aux décès classés d'après leurs causes serait un des éléments les plus importants à utiliser pour cette étude.

30. **Les décès d'après leurs causes.** — L'application des lois rendant obligatoire la déclaration des décès d'après leurs causes a fait de grands progrès en France, depuis la publication de la première édition de ce livre, en grande partie à cause du développement des assurances sociales, grâce auxquelles

le médecin est appelé presque toujours en cas de grave maladie. Tandis que en 1936, sur 642 000 décès, il y en avait environ 131 000, soit plus de 20 %, dus à des causes non spécifiées ou mal définies, ce nombre n'était en 1948 que de 35 000 environ sur 506 000 décès, soit moins de 7 %. Nous avons donc remplacé les tableaux que nous avions donnés, se rapportant à l'année 1936, par les statistiques publiées pour l'année 1948, qui se trouve d'ailleurs être celle où le nombre des décès a été le moins élevé, pendant la période d'un demi-siècle qui s'étend de 1900 à 1949.

Nous avons reproduit la classification des causes de décès ; comme toute classification, celle-ci ne peut pas être parfaite et il faut reconnaître que, dans bien des cas un médecin peut être légitimement embarrassé ; voici un malade atteint d'une tuberculose que l'on peut présumer guérissable ; cependant, à la suite d'un froid excessif, il meurt d'une bronchite ou d'une pneumonie ; doit-on attribuer la mort à la tuberculose ou à la maladie accidentelle ? Une question analogue se pose souvent pour les malades syphilitiques ; d'après les spécialistes de la syphilis, le nombre des décès dont la cause réelle est la syphilis est en réalité beaucoup plus élevé que le nombre indiqué par les statistiques, qui mentionnent plus volontiers une cause accidentelle dans de nombreux cas où cependant cette cause accidentelle n'aurait probablement pas entraîné la mort si le sujet n'avait pas été syphilitique.

Nous avons donné pour les causes de décès les plus fréquentes, la répartition des décès suivant les âges, telle qu'elle figure au *Bulletin de la statistique générale de la France*. Il était naturellement inutile de donner cette répartition pour la cause XV (maladies particulières à la première année de vie).

En ce qui concerne la cause XVI (sénilité, vieillesse), indiquons ici que, pour les hommes il y avait 488 décès de 50 à 69, 4 722 de 70 à 79 ans et 9 578 de 80 à 99 ans et, pour les femmes 572 de 50 à 69 ans, 6 188 de 70 à 79 ans et 16 954 de plus de 80 ans. Ces chiffres s'expliquent par le fait que la longévité des femmes est supérieure à celle des hommes.

La place nous a manqué pour donner la répartition des décès d'après les causes par départements ; cette répartition est assez instructive, car elle met en évidence des différences importantes dont certaines s'expliquent par la variété des climats ou par la présence dans tels départements d'hôpitaux spécialisés, mais dont beaucoup d'autres sont dues à des différences de terminologie entre les médecins de diverses régions. La proportion de décès dont les causes ne sont pas déclarées ou sont mal définies varie aussi beaucoup suivant les régions.

Chapitre VI

APPLICATION DES PROBABILITÉS A CERTAINS PROBLÈMES D'HÉRÉDITÉ

31. **L'hérédité et les chromosomes.** — D'après les théories généralement admises par les biologistes et confirmées par de nombreuses expériences, les phénomènes d'hérédité sont liés à l'existence, chez chaque individu, d'un certain nombre de paires de chromosomes (23 paires dans l'espèce humaine). Ces paires sont différenciées les unes des autres et peuvent donc être distinguées par un numérotage. Chez chaque enfant, les chromosomes d'une certaine paire, disons, par exemple, la dix-septième paire est formée de l'un des chromosomes de la 17^e paire de son père et de l'un des deux chromosomes de la 17^e paire de sa mère. Tout se passe comme si l'enfant tirait au sort et avait ainsi une chance sur deux de choisir chacun des deux chromosomes du père et chacun des deux chromosomes de la mère, tant pour la dix-septième paire de chromosomes que pour chacune des 23 autres paires. Le nombre de choix possibles porte sur 46 paires et est donc égal à 2^{46}, soit à plus de 60 000 milliards. Lorsque deux frères ou sœurs ne sont pas deux jumeaux issus d'un même œuf (auquel cas, ils ont exactement les mêmes chromosomes, et se ressemblent d'une manière parfaite), la probabilité pour

que les choix soient tous les mêmes est extrêmement faible et égale au quotient de l'unité par 60 000 milliards. Il n'est donc pas probable qu'un tel fait se soit produit sur la Terre depuis qu'existe l'espèce humaine.

Mais, bien que le rôle précis des chromosomes dans la détermination des caractères physiques, intellectuels et moraux de chaque individu, soit encore fort mal connu, il semble bien que la présence dans deux individus de certains groupes de chromosomes identiques suffise pour créer entre eux certaines ressemblances ou analogies très frappantes ; parfois même, un emplacement particulier (« locus ») d'un seul chromosome détermine un caractère assez important pour qu'il soit immédiatement observé ; tel est le cas, notamment, pour certaines tares héréditaires. Cette remarque montre l'intérêt que présente l'étude des probabilités que nous allons faire et qui sont relatives à la présence simultanée d'un chromosome chez des individus qui ont un ou plusieurs ancêtres communs, *ressemblances entre frères*, *oncles* et *neveux*, *cousins germains*, etc.

32. Chromosomes communs à des frères et à des cousins. — Considérons d'abord deux frères, ayant à la fois le même père et la même mère. Tous les chromosomes de l'un d'eux, que nous appellerons A, lui viennent, soit du père, soit de la mère, c'est-à-dire d'un des deux parents communs à A et à son frère B. Si nous portons notre attention sur un chromosome déterminé de A, il y aura donc une chance sur deux pour qu'on le retrouve chez B, puisque B n'a tiré chez ses parents qu'un chromosome sur deux. Sur les 46 chromosomes de A, il y en aura en moyenne 23 qui se retrouveront chez B.

Nous avons admis implicitement que le père et la mère des deux frères ne sont pas parents, c'est-à-dire n'ont pas de chromosomes communs.

Considérons maintenant un oncle et un neveu ; le père du neveu est supposé être un véritable frère de l'oncle, c'est-à-dire qu'ils ont le même père et la même mère, mais la mère du neveu n'a aucun lien de parenté avec son mari. Dans ces conditions, l'oncle et le neveu ont deux ancêtres communs, qui sont les parents de l'oncle et les grands-parents paternels du neveu. Tout chromosome de l'oncle lui vient d'un de ces deux ancêtres communs, mais, pour chacun de ces chromosomes, il y a seulement une chance sur quatre pour qu'on le retrouve chez le neveu, puisqu'il est séparé des deux ancêtres communs par deux générations (la sienne comprise).

Il y aura, en moyenne, 11,5 chromosomes communs à l'oncle et au neveu.

S'il s'agit de cousins germains, nous supposerons, pour bien préciser, que leurs pères sont de véritables frères et que leurs mères ne sont, ni parentes entre elles, ni parentes de leur mari. Dans ces conditions, ils ont deux ancêtres communs qui sont leurs deux grands-parents paternels. Un chromosome de l'un des cousins a une chance sur deux de provenir des ancêtres communs et, en ce cas, il a une chance sur quatre de se retrouver chez l'autre cousin, la probabilité pour qu'un chromosome de rang déterminé soit commun aux deux cousins est donc $1/2 \times 1/4 = 1/8$. Sur 46 chromosomes, ils en ont en moyenne 5,75 qui leur sont communs.

Prenons maintenant le cas de cousins germains dont les pères sont frères et dont les mères sont sœurs ; ils ont alors quatre ancêtres communs et tout chromosome de l'un d'eux provient de l'un de ces quatre ancêtres ; mais chacun de ces ancêtres est séparé de son petit-fils par deux générations, c'est-à-dire par deux choix ; un de leurs chromosomes a donc seulement une chance sur 4 de se retrouver chez le petit-fils ; les deux cousins ont ainsi, en moyenne, 11,5 chromosomes communs, dont le quart en moyenne provenant de chacun de leurs quatre ancêtres communs. La différence entre le cas de ces deux cousins et celui de deux frères qui ont également 4 grands-parents communs s'explique par le fait que, dans le cas des deux frères, leurs parents ont déjà fait un choix parmi les chromosomes des grands-parents et que ce choix est le même pour les deux frères.

Si donc un caractère est lié à un seul chromosome, on retrouve ce caractère en commun une fois sur deux chez deux frères, une fois sur 4 chez oncle et neveu, une fois sur 8 chez deux cousins germains (une fois sur 4 si les cousins sont doublement germains).

33. **Quelques mots sur un cas plus général.** — Nous avons supposé, comme c'est le cas le plus fréquent, que deux frères ont les deux mêmes parents ; il serait aisé de traiter le cas plus général où les ancêtres communs ne sont pas nécessairement à la fois un père et une mère. Prenons, par exemple, le cas de deux cousins, qui ont en commun un grand-père et une arrière-grand'mère, les autres ancêtres communs étant exclusivement les ancêtres de ces deux-là (1). Soit un chromosome de l'un des cousins ; il y a une chance sur 4 pour qu'il provienne de son grand-père et une chance sur 8 pour qu'il provienne de son arrière-grand'mère, ces deux éven-

(1) Soient Paul et Jacques les deux cousins : Paul est fils de Pierre et de Jeanne et Jacques fils d'Henri et de Berthe. Pierre et Henri sont fils du même père et non de la même mère. Jeanne est fille d'Edouard et Berthe fille de Marguerite. Edouard et Marguerite ont la même mère et non le même père.

tualités s'excluant. Dans le premier cas, il y a une chance sur 4 pour que le chromosome existe aussi chez le deuxième cousin et dans le second cas, il y a une chance sur 8. La probabilité pour que le chromosome soit commun aux deux cousins est donc

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{64}$$

Une formule analogue s'appliquerait quel que soit le nombre des ancêtres communs, qui peuvent d'ailleurs ne pas correspondre à la même génération pour les deux cousins. D'une manière générale l'ancêtre d'ordre a_1 de A est supposé être l'ancêtre d'ordre b_1 de B (si $a_1 = 1$, il s'agit du père, pour $a_1 = 2$ du grand-père pour $a_1 = 3$ de l'arrière-grand-père, etc.), l'ancêtre d'ordre a_2 de A est l'ancêtre d'ordre b_2 de B,... l'ancêtre d'ordre a_3 de A est l'ancêtre d'ordre b_3 de B, etc. La probabilité pour qu'un chromosome soit commun à A et à B est alors

$$P = \frac{1}{2^{a_1 + b_1}} + \frac{1}{2^{a_2 + b_2}} + \dots \quad + \frac{1}{2^{a_k + b_k}}$$

Si, par exemple, il s'agit de deux cousins doublement germains, c'est-à-dire ayant quatre grands-parents communs, on a :

$a_1 = b_1 = 2$; $a_2 = b_2 = 2$; $a_3 = b_3 = 2$; $a_4 = b_4 = 2$

et la formule donne :

$$P = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$

Il resterait à traiter le cas, où l'un des ancêtres communs doit être considéré comme un ancêtre multiple par l'un des descendants (ce qui est le cas lorsque des cousins se sont mariés entre eux). Sans entrer dans une discussion détaillée, indiquons simplement que chaque individu a deux ancêtres à la première génération (parents), quatre à la seconde génération (grands-parents), huit à la troisième génération (arrières-grands-parents), etc. Si, parmi les 16 ancêtres de la quatrième génération, une même personne figure deux fois, on devra la compter effectivement deux fois, c'est-à-dire, lui attribuer deux nombres (égaux entre eux) a_1 et a_2 dans le calcul fait plus haut. Si parmi les 32 ancêtres de la cinquième génération, une certaine personne figure 3 fois parmi les ancêtres de A et 2 fois parmi les ancêtres de B, nous aurons 3 nombres a égaux à 5 et 2 nombres b égaux à 5, ce qui nous donnera $3 \times 2 = 6$ sommes $a + b$ égales à 10, c'est-à-dire 6 termes égaux chacun à $\frac{1}{2^{10}}$.

Nous laissons au lecteur le cas d'étudier les cas plus compliqués qui peuvent se présenter ; celui où un même ancêtre figure deux ou plusieurs fois dans l'ascendance d'une même individu, mais avec des rangs qui peuvent être différents, ne présente aucune difficulté particulière. Un cas un peu moins simple est celui où les deux individus A et B que l'on compare ont des ancêtres communs qui sont parents entre eux, c'est-à-dire qui ont eux-mêmes des ancêtres communs ; l'exemple le plus simple de ce cas est celui de deux frères dont le père et la mère sont des cousins plus ou moins éloignés. Des cas encore plus complexes dans lesquels on serait obligé pour être complet, de remonter un nombre presque indéfini de générations, sont certainement fréquents, dans des villages isolés où un petit nombre de familles se sont, depuis des siècles, croisées entre elles avec de très minimes apports extérieurs.

34. Application de la loi unique du hasard. — Tous les résultats que nous venons d'indiquer sur l'hérédité se traduisent par des coefficients de probabilités ; ils ne peuvent donc conduire à aucune prévision certaine, à moins que l'on ne les utilise pour calculer d'autres coefficients de probabilités, lesquels seraient assez petits pour que l'on puisse appliquer *la loi unique de hasard.*

Par exemple, nous avons dit que la probabilité pour qu'un chromosome S de A se retrouve chez son frère B est 1/2 tandis qu'elle est seulement 1/8 pour que ce même chromosome de A se retrouve chez son cousin germain C. Il pourra cependant fort bien arriver que S ne se retrouve pas chez B et se retrouve chez C, c'est-à-dire pour qu'il y ait entre les cousins germains une certaine ressemblance ou analogie qui n'existe pas entre les frères.

Mais si nous considérons 100 couples de frères A_1, B_1 ; A_2, B_2 ; etc. et si nous supposons que les cent A possèdent un certain chromosome, qui détermine chez eux une particularité S, nous pouvons affirmer que ce chromosome et par suite cette particularité se retrouveront, en moyenne 50 fois sur les 100 B. Et, en vertu de la loi unique du hasard, nous en conclurons qu'il est impossible que S se retrouve à la fois chez les 100 B, ou même chez plus de 95 d'entre eux et qu'il est également impossible que S ne se retrouve chez aucun B, ou même seulement sur moins de 5 d'entre eux. Si au lieu de considérer 100 couples de frères AB nous avions considéré 100 couples de cousins germains AC, le particularité S aurait dû se retrouver en moyenne chez 12,5 d'entre eux et on pourrait affirmer avec certitude qu'on ne la retrouvera pas sur plus de 50 d'entre eux, tandis qu'il est extrêmement peu probable, sans que cela soit cependant tout à fait impossible qu'on ne la retrouve chez aucun.

Si donc on ignore *a priori* si les 100 couples étaient formés de frères ou de cousins germains, mais que l'on sache cependant que la parenté est la même pour les 100 couples, si l'on observe 60 fois la présence du caractère S chez les deux individus, on pourra être certain qu'il s'agit de frères, tandis que si on ne l'observe que 5 ou 6 fois, on sera certain qu'il s'agit de cousins germains.

Ces exemples suffisent à montrer comment les divers résultats obtenus dans ce chapitre et dans les chapitres précédents peuvent conduire à des prévisions assurées, lorsqu'on les combine de telle manière que puisse s'appliquer la loi unique du hasard.

NOTE I

Sur les répétitions de chiffres dans les numéros gagnants de la loterie

35. Probabilités des divers types de numéros. — Le problème de la probabilité des répétitions de chiffres dans les numéros gagnants de la loterie, dont nous avons dit quelques mots au chapitre premier, nous paraît mériter quelques développements complémentaires, car il est de ceux qui peuvent le mieux contribuer à faire comprendre certaines difficultés qui se présentent dans bien des applications numériques du calcul des probabilités.

Considérons tous les nombres de 6 chiffres, écrits dans le système décimal ; ils sont au nombre d'un million, si l'on y comprend les nombres de moins de six chiffres, que l'on peut compléter à leur gauche par des zéros, et le nombre zéro, que l'on écrira 000 000. En somme, ce sont tous les nombres que l'on peut obtenir au moyen de tirages faits au moyen de six sphères, rangées dans un ordre déterminé et dont chacune contient les 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Nous allons d'abord calculer combien parmi ce million de nombres de six chiffres, il y en a qui comportent, soit 6 chiffres différents, soit 5, 4, 3, 2, 1 chiffres différents.

Pour obtenir un numéro de six chiffres différents, tel que 324789 ou 023586, on peut prendre comme premier chiffre à gauche l'un quelconque des dix chiffres ; comme chiffre suivant, l'un quelconque des 9 autres chiffres ; comme troisième chiffre, l'un quelconque des 8 autres chiffres, ainsi de suite jusqu'au sixième chiffre qui est un quelconque des cinq chiffres non encore choisis. Il y a donc en tout $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151\,200$ numéros formés de 6 chiffres différents.

Passons aux numéros composés de cinq chiffres différents ; un chiffre, et un seul, se trouve donc répété deux fois ; c'est ce que les joueurs de poker appelleraient une paire. Le chiffre répété deux fois peut être l'un quelconque des dix chiffres et peut être placé à deux quelconques des six rangs possibles, ce qui fait quinze possibilités (1) pour chacun des chiffres, et en tout, 150.

Lorsque le chiffre répété deux fois se trouve *placé*, par exemple au deuxième et au cinquième rang, nous pouvons écrire le numéro de la manière suivante :

x3xx3x

en désignant par x les chiffres indéterminés qui ne doivent pas être des 3.

Nous pouvons choisir, pour remplacer l'x le plus à droite, l'un quelconque des 9 chiffres autres que 3, pour remplacer l'x suivant l'un quelconque des 8 chiffres qui restent, puis l'un quelconque des 7, puis l'un quelconque des 6 restants. Nous obtenons donc un nombre de numéros égal à

$$150 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 3$$

c'est-à-dire un nombre qui est le triple du nombre 151 200 des numéros formés de 6 chiffres différents.

Le nombre de numéros formés de 5 chiffres différents comportant une paire) est donc

$$151\,200 \times 3 = 453\,600$$

Des raisonnements analogues permettent de calculer le nombre des numéros comportant 4 chiffres différents. On peut les diviser en deux catégories, l'une comportant deux paires, tel que les numéros 121472 ou 003347, et l'autre comportant un chiffre répété 3 fois (un brelan), tel que 303483 ; la première catégorie (2 paires) comprend 226 800 numéros et la seconde (1 brelan) en comprend 100 800, soit en tout 327 600 numéros avec 4 chiffres seulement.

Pour obtenir tous les numéros comportant 2 paires, il faut d'abord choisir les deux chiffres qui se trouvent répétés deux fois ; ce choix peut se faire de $\frac{10.9}{2} = 45$ manières différentes. On peut, en effet, choisir l'un quelconque des dix chiffres, puis l'un quelconque des neuf restants, ce qui fait

(1) On peut placer le premier chiffre à l'un quelconque des six rangs et le second à l'un quelconque des 5 autres rangs, ce qui fait en apparence 30 possibilités. Mais si l'on a choisi d'abord le deuxième rang et puis le quatrième, on a la même disposition que si l'on choisissait d'abord le quatrième et puis le deuxième ; il faut donc diviser 30 par 2, ce qui donne 15. Ce résultat peut d'ailleurs se vérifier par un dénombrement direct des 15 dispositions possibles.

en tout $10 \times 9 = 90$ choix ; mais chaque couple de deux chiffres, tel que 7 et 5, se trouve ainsi obtenu deux fois puisque l'on peut choisir d'abord 7 et puis 5, ou d'abord 5 et puis 7. Le nombre des couples de 2 chiffres est donc la moitié de 90, soit 45. Soit 7 et 5 le couple choisi. On pourra placer 7 à l'une quelconque des six places, puis à l'une quelconque des 5 places restantes ; le nombre total des choix est ainsi 6×5, mais ce nombre doit être divisé par 2, pour un motif analogue à celui qui vient d'être indiqué ; il y a donc en tout 15 manières de choisir les places des deux 7. Lorsque les deux 7 sont placés, il reste quatre places vides, et il y a six manières d'y placer les deux 5. Lorsque les 7 et les 5 sont placés, on a une disposition telle que la suivante :

x577x5

où l'on peut remplacer le premier x par l'un quelconque des 8 autres chiffres et le second x par un quelconque des 7 chiffres restants ; nous obtenons ainsi en tout un nombre de combinaisons égal à

$$45 \times 15 \times 6 \times 8 \times 7 = 5 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 3$$

Ce nombre est donc la moitié du nombre déjà calculé

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 3 = 453\,600$$

Il est égal à 226 800.

C'est un fait assez remarquable qu'il y ait exactement le même nombre total de paires dans les numéros à une paire et dans les numéros à deux paires. Ce fait ne se produit pas pour toutes les valeurs du nombre total des chiffres employés (ici égal à 10 puisque nous utilisons le système décimal) et du nombre des chiffres formant les numéros considérés (1).

Pour obtenir tous les numéros comportant un brelan (chiffre répété trois fois), on devra d'abord choisir ce chiffre, ce qui peut se faire de dix manières différentes ; puis, choisir les 3 places qu'il occupe, ce qui peut se faire de $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ manières différentes. On obtient ainsi 200 dispositions telles que la suivante :

x88xx8

(1) On peut démontrer facilement que si le nombre total de chiffres utilisés est $n = 2\,K^2 \pm K$, K étant un nombre entier quelconque, cette propriété subsiste en prenant, pour valeur du nombre de chiffres figurant dans un numéro, $p = 2\,K + 2$ si $n = 2\,K^2 + K$ et $p = 2\,K + 1$ si $n = 2\,K^2 - K$. On obtient le résultat du texte pour $K = 2$, $n = 2\,K^2 + K = 10$, $p = 2\,K + 2 = 6$.

dont chacune pourra être complétée de $9 \times 8 \times 7$ manières différentes par trois chiffres différents de 8 et différant entre eux. On a ainsi en tout : $200 \times 9 \times 8 \times 7 = 100\,800$ numéros comportant un brelan.

Passons aux numéros comportant 3 chiffres distincts seulement. Ils peuvent comporter 3 paires, tel que 422477 (au nombre de 10 800) ou bien une paire et un brelan, tel que 422274 (au nombre de 43 200), ou enfin un carré, tel que 447484 (au nombre de 10 800), soit en tout 64 800 numéros comportant 3 chiffres.

Sans entrer dans le détail des raisonnements, qui sont toujours basés sur les mêmes principes, indiquons comment sont obtenus les nombres précédents.

Numéros comportant trois paires :

$$\frac{10.9.8}{1.2.3} \cdot \frac{6.5}{1.2} \cdot \frac{4.3}{1.2} \cdot = 10\,800$$

Numéros comportant une paire, un brelan et un autre chiffre :

$$\frac{10.\,9.8.6.\,5.4}{2} = 43\,200$$

Numéros comportant un carré (chiffre répété 4 fois) et deux autres chiffres différents :

$$10 . \frac{6.5.\,4.3}{1.2.\,3.4} . 9\,.8 = 10\,800$$

Nous avons calculé (p. 18) le nombre des numéros compors tant seulement deux chiffres distincts ; ils se divisent en troicatégories.

Numéros comportant une quine (chiffre répété cinq fois) et un autre chiffre :

$$10 \times 9 \times 6 = 540$$

Numéros comportant un carré et une paire :

$$10 \times 9 \times \frac{6.5}{1.2} = 1\,350$$

Numéros comportant deux brelans :

$$\frac{10.9}{1.2} \cdot \frac{6.5.4}{1.2.3} = 900$$

Enfin le nombre des numéros formés au moyen d'un seul chiffre (en y comprenant 000000, mais en évitant d'y compter 333 par exemple, qui doit s'écrire 000333) est égal à 10.

Nous pouvons ainsi former le tableau récapitulatif suivant :

TABLEAU I

Nombre de chiffres différents	Exemple	Nombre pour chaque exemple	Nombre total pour chaque nombre de chiffres différents
6	327689	151 200	151 200
5	327683	453 600	453 600
4	327376 327336	226 800 100 800	327 600
3	071701 007017 723777	10 800 43 200 10 800	64 800
2	556555 556565 556566	540 1 350 900	2 790
1	333333 ou 000000	10	10
TOTAL		1 000 000	1 000 000

Bien des lecteurs seront certainement étonnés de ces résultats, cependant incontestables. On aurait pu s'attendre, puisqu'il n'y a que six sphères et qu'il y a dix chiffres, à ce que le cas le plus fréquent fut celui où chaque sphère donnerait un chiffre différent des autres ; or, ceci ne se produit qu'à peu près 15 fois sur 100, tandis que, plus de 45 fois sur 100, un même chiffre se trouve obtenu deux fois, et que près de 33 fois sur 100, on n'obtient que 4 chiffres différents, soit que deux d'entre eux reviennent chacun 2 fois (près de 23 fois sur 100), soit qu'un même chiffre revienne 3 fois (environ 10 fois sur 100).

Si l'on porte son attention sur un seul tirage de la loterie, il arrivera souvent que les proportions des numéros gagnants avec, respectivement, 6, 5, 4, 3 chiffres distincts, seront assez différentes de celles qui viennent d'être calculées ; mais, si

l'on considère un nombre assez grand de tirages pour comporter au moins une centaine, ou de préférence, plusieurs centaines de lots importants, on constatera que les proportions se rapprochent beaucoup de celles qui résultent de notre tableau. On constatera, notamment, que le cas de beaucoup le plus fréquent, fournissant près de la moitié des numéros gagnants, est celui des numéros dans lesquels un chiffre, et un seul, se trouve répété deux fois. Bien entendu, il ne faudra pas dans ces dénombrements, négliger les zéros qui doivent être inscrits à gauche, de manière que tous les numéros aient exactement six chiffres.

36. Résultats relatifs aux répétitions d'un chiffre particulier. — Il est intéressant de confronter les résultats que nous venons d'obtenir avec ceux que l'on obtient lorsque l'on porte son attention sur un chiffre particulier, par exemple le chiffre 7, et que l'on classe les numéros suivant le nombre de fois qu'ils renferment le chiffre 7.

Numéros ne renfermant pas le chiffre 7. — Chacun des six chiffres de ces numéros peut être choisi arbitrairement parmi les 9 autres chiffres. Le nombre de ces numéros est donc :

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^6 = 531\,441$$

Numéros renfermant le chiffre 7 une fois et seulement une fois. — On peut écrire le chiffre 7 à l'une quelconque des six places et ensuite, à chacune des 5 places restantes, écrire l'un quelconque des 9 autres chiffres ; le nombre des combinaisons est donc :

$$6 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6 \,.\, 9^5 = 354\,294$$

Numéros renfermant le chiffre 7 deux fois et seulement deux fois. — Les deux 7 pourront être placés de $\frac{6.5}{1.2} = 15$ manières différentes et, à chacune des 4 autres places, on pourra inscrire l'un des 9 autres chiffres. Le nombre des combinaisons est donc :

$$15 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 15 \times 9^4 = 98\,415$$

Numéros renfermant le chiffre 7 trois fois et seulement trois fois. — Les trois 7 peuvent être placés de $\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ manières différentes, et l'on a en tout :

$$20 \times 9 \times 9 \times 9 = 20 \times 9^3 = 14\,580 \text{ combinaisons}$$

Numéros renfermant le chiffre 7 quatre fois et seulement *quatre fois.* — Il y a quinze places possibles pour les quatre 7 et, en tout :

$$15 \times 9 \times 9 = 1.215 \text{ combinaisons}$$

Numéros renfermant le chiffre 7 cinq fois et seulement cinq fois. — On obtient en tout :

$$6 \times 9 = 54 \text{ combinaisons}$$

Enfin, il y a un seul numéro, 777777, qui comprend 6 fois le chiffre 7.

Résumons en un tableau les résultats obtenus.

TABLEAU II

Nombre des chiffres 7	Nombre des numéros
0	531 441
1	354 294
2	98 415
3	14 580
4	1 215
5	54
6	1
TOTAL	1 000 000

On peut observer que les nombres obtenus sont les termes du développement de la sixième puissance du binôme 9 + 1 :

$$(9 + 1)^6 = 9^6 + 6.9^5 + 15.9^4 + 20.9^3 \ldots$$

Le tableau précédent donne lieu à plusieurs remarques intéressantes.

On peut tout d'abord observer qu'il y a plus de la moitié des numéros (531 441 sur un million), qui ne renferment pas le chiffre 7. On fait cependant six tirages, dans chacun desquels la probabilité de l'arrivée de 7 est un dixième ; la somme de ces probabilités est donc six dixièmes et est supérieure à un demi. Ceci nous montre que l'on ne doit pas additionner sans circonspection les probabilités. Ce que l'on peut additionner, ce sont les espérances mathématiques, c'est-à-dire les probabilités de gain d'un joueur qui parierait sur la sortie du chiffre 7. Si ce joueur mise un franc, on devrait équitablement lui donner 10 francs lorsque le 7 sortirait. Si l'on fait six tirages à la fois, il devra verser six francs et recevra autant de fois dix francs qu'il sortira de chiffres 7.

Notre tableau montre qu'il a environ 53 chances sur 100 de perdre ses 6 francs, un peu plus de 35 chances sur 100 de toucher 10 francs, près de 10 chances sur 100 d'en toucher 20, 14 chances sur 1 000 d'en toucher 30, à peu près 1 chance sur 1 000 d'en toucher 40. Ces possibilités de gains relativement élevés compensent le fait qu'il perd sa mise de 6 francs plus d'une fois sur deux.

Considérons maintenant le cas où le chiffre 7 apparaît plus d'une fois ; il y a, sur un million de numéros, 98 415 paires de 7, 14 580 brelans de 7, 1 215 carrés de 7 et 54 quines de 7.

Comme on peut raisonner sur chacun des dix chiffres exactement comme sur le chiffre 7, nous voyons que sur l'ensemble du million de numéros, il y a 984 150 paires, c'est-à-dire près d'un million. Ce serait une erreur d'en conclure que presque tous les numéros comportent une paire. Le Tableau I nous apprend qu'il y a seulement 453 600 numéros comportant une paire et une seule ; mais, pour avoir le nombre total des paires, il faut tenir compte des numéros à 2 ou 3 paires et de ceux où la paire est accompagnée d'un brelan ou d'un carré. Le Tableau I nous donne :

			Paires
453 600	numéros	à une paire isolée, soit.........	453 600
226 800	—	deux paires, soit	453 600
10 800	—	trois paires, soit.............	32 400
43 200	—	une paire et un brelan, soit ..	43 200
1 350	—	une paire et un carré, soit ...	1 350
735 750	numéros	comprenant au total...........	984 150

Le résultat concorde bien avec celui que nous avions déduit du Tableau II, ce qui confirme l'exactitude de nos calculs.

On conclut de même du Tableau II qu'il y a en tout 145 800 brelans qui, d'après le Tableau I, se décomposent ainsi :

100 800	numéros	à un brelan isolé	100 800
43 200	—	où le brelan est accompagné d'une paire	43 200
900	—	à deux brelans	1 800
		Total.........	145 800

Il y a enfin, d'après le Tableau II, 12 150 carrés en tout, dont 10 800 sont isolés et 1 350 accompagnés d'une paire, d'après le Tableau I.

Indiquons, pour terminer, une conséquence curieuse des chiffres du Tableau II.

Supposons qu'un joueur parie sur la sortie des paires et qu'on lui promette autant de fois 10 francs que le numéro sorti renferme de paires. S'il joue un million de fois et si tous les numéros sortent, il verra en tout 984 150 paires, soit bien près d'un million. Si donc son enjeu est de 10 francs, le jeu est bien près d'être équitable ; il ne réserve qu'un bénéfice de 15 à 16 pour 1 000, soit environ 1 1/2 % à l'entrepreneur de la loterie qui s'est engagé à verser 10 francs par paire sortie. Mais il est remarquable que l'on peut rendre le jeu entièrement équitable en convenant que chaque terne, carré, quine ou sextuple sera payé, non pas 10 francs comme la paire, mais seulement un franc. En effet, d'après le Tableau I, le nombre total des ternes, carrés, quines et sextuples pour le chiffre 7 est :

$$14\,580 + 1\,215 + 54 + 1 = 15\,850$$

Le nombre total serait 10 fois plus grand pour l'ensemble des chiffres mais, si nous ne versons, pour chacune de ces sorties, que le dixième de la mise (1 franc au lieu de 10 francs), nous devrons ajouter simplement 15 850 à 984 150, ce qui donne exactement un million.

Ce résultat assez remarquable est une conséquence de la relation suivante, que nos lecteurs n'auront pas de peine à démontrer :

$$150.9^4 + (10^6 - 9^6 - 6.9^5 - 15.9^4) = 10^6$$

Ainsi, le jeu suivant est parfaitement équitable ; Pierre verse 10 francs à Paul avant le tirage de la loterie et, si le numéro qui gagne le gros lot de la loterie comporte des paires, Paul verse à Pierre autant de fois dix francs qu'il y a de paires ; si, à la place des paires, ou à côté d'elles, un chiffre est répété plus de deux fois, Paul verse à Pierre un franc pour chacun de ces groupes comprenant plus de deux chiffres identiques (ternes, carrés, quines ou sextuples). Ainsi, les gains possibles de Pierre sont les suivants (d'où il faudrait déduire sa mise égale à 10 francs) :

Une paire.......	10 francs	Brelan..........	1 franc
Deux paires.....	20 —	Deux brelans....	2 —
Trois paires.....	30 —	Carré...........	1 —
Paire et brelan..	11 —	Quine	1 —
Paire et carré...	11 —	Sextuple	1 —

NOTE II

Sur la formule de Poisson

37. Formule de Poisson. — La formule de Poisson fait connaître les probabilités relatives aux événements fortuits qui se succèdent sans autre loi que l'existence reconnue d'une certaine *fréquence moyenne*. Si, par exemple, une roulette fonctionne à la cadence d'un coup par minute, chaque numéro, par exemple 17, sortira en moyenne une fois toutes les 37 minutes : c'est la fréquence moyenne (1). Il est des phénomènes parfois fort importants qui rentrent dans cette définition ; tel est le cas des émissions de particules qui correspondent à la désintégration de certaines molécules radioactives ; pour une masse donnée de radium, le nombre moyen des atomes désintégrés pendant un certain intervalle de temps est une constante bien déterminée.

On peut représenter les intervalles de temps par des longueurs proportionnelles portées sur une droite ; au lieu de parler de la répartition des événements dans le temps, on pourra parler de la répartition des points sur la droite ; ces points peuvent être considérés comme répartis au hasard, sous la seule condition que leur *densité moyenne* est constante, la densité étant le nombre de points par unité de longueur ; si elle est désignée par d, le nombre de points situés sur une longueur a sera, *en moyenne*, ad.

Considérons donc, soit un intervalle de temps, soit une portion déterminée de la droite et désignons par $b = ad$ le

(1) En réalité, la loi de Poisson est une loi limite qui ne s'appliquerait rigoureusement que si l'on pouvait imaginer une roulette dont la cadence serait de plus en plus rapide, tandis que les numéros possibles seraient de plus en plus nombreux ; par exemple, pour une roulette de 600 numéros fonctionnant une fois par seconde chaque numéro sortirait *en moyenne* toutes les dix minutes.

nombre moyen d'événements ou de points que l'on peut s'attendre à observer dans l'intervalle de temps donné ou sur la portion donnée de la droite. Ce nombre b n'est généralement pas un nombre entier ; même dans le cas où b est entier il n'arrivera pas toujours que l'on observera précisément le nombre b. La loi de Poisson fait connaître la probabilité pour que l'on observe précisément n événements (ou n points) au lieu du nombre moyen b ; cette probabilité P est :

$$P = e^{-b} \frac{b^n}{n!} \tag{1}$$

Telle est la formule de Poisson, dans laquelle e désigne, selon l'usage, la base des logarithmes népériens ($e = 2{,}718281828...$).

Dans le cas où $b = 1$, la formule (1) devient :

$$P = \frac{1}{e} \frac{1}{n!} \tag{2}$$

C'est d'après cette formule (2) qu'ont été calculés les nombres donnés au chapitre IV.

On a, en effet :

$$\frac{1}{e} = 0{,}36788...$$

et les formules (1) et (2) s'appliquent aussi dans le cas où $n = 0$, à condition d'y remplacer, en ce cas, $n\,!$ par l'unité.

(On sait que $n\,!$ désigne le produit des n premiers nombres entiers ; on a $(n + 1)\,! = (n + 1)\,n\,!$ et, si l'on fait, dans cette formule $n = 0$, on en déduit bien $0\,! = 1$.)

38. **Problème de l'attente au guichet.** — C'est grâce à la formule de Poisson (et à d'autres calculs) qu'ont pu être obtenus les résultats indiqués au chapitre IV au sujet du problème de l'attente à un guichet. Admettons que le nombre des clients du guichet soit N par jour et que chaque client reste a minutes ; nous supposons que le produit Na est inférieur à la durée totale D d'ouverture du guichet ; plus précisément, que $Na = D\sigma$, σ étant un nombre inférieur à l'unité.

Comme nous l'avons observé, on peut partager l'ensemble des clients en séries, chaque série étant formée des clients qui se succèdent sans interruption, tandis que, dans l'intervalle de deux séries, l'accès du guichet reste libre. La probabilité pour qu'une série soit composée de n clients est donnée par la formule (1)

$$P_n = e^{-n\sigma} \sigma^{n-1} \frac{n^{n-2}}{(n-1)!}$$

C'est de cette formule que l'on a déduit les résultats numériques donnés au chapitre IV.

(1) Pour la démonstration, voir Emile Borel, *Sur l'emploi du théorème de Bernoulli, pour le calcul d'une infinité de coefficients. Application au problème d'attente à un guichet* (comptes rendus de l'Académie des Sciences, mars 1942).

NOTE III

Sur les Tables de Mortalité et les statistiques relatives aux causes de décès

39. Tables de Mortalité des Compagnies françaises. — C'est au milieu du XVIII[e] siècle que Deparcieux établit les premières Tables de Mortalité et calcula les probabilités de décès qui s'en déduisent. Depuis lors, les recherches statistiques sur la mortalité ont été fort nombreuses et ont atteint une très grande perfection, notamment, dans certains pays et dans certaines grandes villes ; les statistiques faites par les compagnies d'assurance sur leur propre clientèle sont plus particulières, mais sont, à un certain point de vue, au moins aussi intéressantes que les statistiques plus générales.

Toutefois les Compagnies françaises se servent aujourd'hui des Tables P. M. 1946-49 et P. F. 1946-49 que nous reproduisons p. 108 et 109.

TABLE DE MORTALITÉ

x	lx	dx	x	lx	dx
0	1 000 000	68 620	53	766 114	9 592
1	931 380	6 706	54	756 522	10 266
2	924 674	2 672	55	746 256	10 985
3	922 002	1 733	56	735 271	11 750
4	920 269	1 417	57	723 521	12 560
5	918 852	1 213	58	710 961	13 423
6	917 639	1 064	59	697 538	14 327
7	916 575	944	60	683 211	15 277
8	915 631	842	61	667 934	16 271
9	914 789	778	62	651 663	17 302
10	914 011	749	63	634 361	18 361
11	913 262	758	64	615 996	19 447
12	912 504	803	65	596 549	20 570
13	911 701	884	66	575 979	21 657
14	910 817	1 002	67	554 322	22 749
15	909 815	1 146	68	531 573	23 820
16	908 669	1 318	69	507 753	24 849
17	907 351	1 488	70	482 904	25 806
18	905 863	1 667	71	457 098	26 681
19	904 196	1 836	72	430 417	27 435
20	902 360	1 976	73	402 982	28 056
21	900 384	2 089	74	374 926	28 502
22	898 295	2 129	75	346 424	28 753
23	896 166	2 169	76	317 671	28 784
24	893 997	2 226	77	288 887	28 565
25	891 771	2 283	78	260 322	28 086
26	889 488	2 348	79	232 236	27 330
27	887 140	2 413	80	204 906	26 289
28	884 727	2 486	81	178 617	24 972
29	882 241	2 567	82	153 645	23 397
30	879 674	2 665	83	138 248	21 591
31	877 009	2 763	84	108 657	19 595
32	874 246	2 868	85	89 062	17 460
33	871 378	2 989	86	71 602	15 246
34	868 389	3 126	87	56 356	13 022
35	865 263	3 262	88	43 334	10 856
36	862 001	3 422	89	32 478	8 811
37	858 579	3 597	90	23 667	6 945
38	854 982	3 779	91	16 722	5 301
39	851 203	3 984	92	11 421	3 906
40	847 219	4 211	93	7 515	2 768
41	843 008	4 451	94	4 747	1 880
42	838 557	4 713	95	2 867	1 219
43	833 844	5 003	96	1 648	751
44	828 841	5 313	97	897	437
45	823 528	5 658	98	460	239
46	817 870	6 028	99	221	122
47	811 842	6 430	100	99	58
48	805 412	6 862	101	41	26
49	798 550	7 267	102	15	10
50	791 283	7 834	103	5	3
51	783 449	8 375	104	2	2
52	775 074	8 960			

P. M. 1946-1949 ajustée par la formule de Makeham.

lx = nombre des vivants à l'âge x.
dx = nombre des décès entre l'âge x et l'âge x + 1.

ASSURANCES SUR LA VIE

x	lx	dx	x	lx	dx
	1 000 000	52 920	53	866 385	5 649
1	947 080	5 133	54	860 736	6 163
2	941 947	1 375	55	854 573	6 725
3	940 572	583	56	847 848	7 342
4	939 989	404	57	840 506	8 018
5	939 585	338	58	832 488	8 749
6	939 247	282	59	823 739	9 547
7	938 965	244	60	814 192	10 422
8	938 721	216	61	803 770	11 373
9	938 505	197	62	792 397	12 385
10	938 308	188	63	780 012	13 479
11	938 120	188	64	766 533	14 648
12	937 932	197	65	751 885	15 902
13	937 735	225	66	735 983	17 229
14	937 510	253	67	718 754	18 630
15	937 257	300	68	700 124	20 094
16	936 957	356	69	680 030	21 618
17	936 601	412	70	658 412	23 137
18	936 189	487	71	635 275	24 782
19	935 702	636	72	610 493	26 379
20	935 066	795	73	584 114	27 962
21	934 271	944	74	556 152	29 487
22	933 327	961	75	526 665	30 926
23	932 366	988	76	495 739	32 233
24	931 378	1 006	77	463 506	33 359
25	930 372	1 033	78	430 147	34 266
26	929 339	1 059	79	395 881	34 889
27	928 280	1 095	80	360 992	35 182
28	927 185	1 131	81	325 810	35 100
29	926 054	1 167	82	290 710	34 600
30	924 887	1 212	83	256 110	33 653
31	923 675	1 265	84	222 457	32 254
32	922 410	1 319	85	190 203	30 402
33	921 091	1 382	86	159 801	28 136
34	919 709	1 444	87	131 665	25 509
35	918 265	1 524	88	106 156	22 608
36	916 741	1 604	89	83 548	19 535
37	915 137	1 702	90	64 013	16 412
38	913 435	1 799	91	47 601	13 361
39	911 636	1 914	92	34 240	10 504
40	909 722	2 047	93	23 736	7 945
41	907 675	2 187	94	15 791	5 756
42	905 488	2 345	95	10 035	3 974
43	903 143	2 511	96	6 061	2 601
44	900 632	2 711	97	3 460	1 605
45	897 921	2 918	98	1 855	928
46	895 003	3 150	99	927	498
47	891 853	3 416	100	429	247
48	888 437	3 705	101	182	112
49	884 732	4 026	102	70	46
50	880 706	4 377	103	24	16
51	876 329	4 758	104	8	6
52	871 571	5 186	105	2	2

Table de mortalité P. F. 1946-1949 rectifiée et ajustée par la formule de Makeham, dite Table Petit :

lx = nombre des vivants à l'âge x.
dx = nombre des décès entre l'âge x et l'âge x + 1.

40. Tables de la Statistique générale de la France. — Ces Tables sont établies, tous les dix ans, par la Statistique générale de la France, en combinant les statistiques de la mortalité d'après les registres de l'état civil au cours d'une période de six années, avec un recensement effectué à peu près au milieu de cette période, recensement qui fait connaître la distribution de la population par âges.

Pour éviter de prendre trop de place, nous avons simplifié ces Tables en supprimant des décimales superflues et en nous bornant, à partir de l'âge de 5 ans, aux âges qui sont multiples de 5.

La Table fait connaître le nombre des survivants sur 1 000 naissances, le quotient annuel de mortalité à chaque âge (c'est-à-dire le nombre moyen de décès dans l'année pour 1 000 personnes de cet âge), et enfin l'espérance de vie, c'est-à-dire l'espérance mathématique d'un joueur qui devrait toucher 1 franc par année de vie de la personne considérée (en faisant abstraction, bien entendu, de l'intérêt de l'argent). Les Tables sont établies séparément pour le sexe masculin et pour le sexe féminin, on remarquera que les quotients de mortalité, à presque tous les âges, sont notablement plus élevés pour les hommes que pour les femmes. Ces quotients de mortalité se rapportent à 1 000 habitants.

TABLES DE MORTALITÉ
de la population française (1928-1933)

A = âges.
SM = survivants (sexe masculin).
SF = survivants (sexe féminin).
QM = quotient de mortalité pour 1 000 (sexe masculin) de l'âge A à A + 1.
QF = quotient de mortalité pour 1 000 (sexe féminin) de l'âge A à A + 1.
EM = espérance de vie (sexe masculin).
EF = espérance de vie (sexe féminin).

A	SM	QM	EM	SF	QF	EF	A
0	1.000	90	54,3	1.000	72	59,0	0
1	910	17	58,6	928	15	62,5	1
2	894	6,7	58,6	914	6,3	62,5	2
3	888	4,3	58,0	909	4,0	61,9	3
4	885	3,4	57,3	905	3,2	61,1	4
5	882	2,8	56,5	902	2,8	60,3	5
10	872	1,6	52,1	892	1,6	55,9	10
15	864	2,5	47,5	884	3,0	51,4	15
20	849	5,2	43,3	867	4,8	47,4	20
25	827	5,2	39,4	846	5,0	43,5	25
30	805	5,9	35,4	825	4,8	39,5	30
35	780	7,1	31,5	806	5,1	35,4	35
40	750	8,9	27,6	784	6,1	31,4	40
45	713	12	23,9	759	7,5	27,3	45
50	669	15	20,3	727	9,8	23,4	50
55	613	21	16,9	688	13	19,6	55
60	544	29	13,8	637	19	15,9	60
65	458	42	10,9	567	30	12,6	65
70	354	64	8,3	472	48	9,6	70
75	261	92	6,5	375	72	7,5	75
80	125	153	4,4	120	128	5,1	80
85	45	234	3,2	91	200	3,6	85
90	9,6	303	2,6	24	285	2,7	90
95	1,4	334	2,3	3,8	336	2,4	95
100	0,2	348	1,5	0,5	346	2,1	100

Pour permettre à nos lecteurs de se rendre compte de la diminution progressive de la mortalité, nous avons donné, ci-après, pour les âges multiples de 10, les nombres de survivants pour 1 000 nés vivants, d'après la Statistique générale de la France, pour les périodes de six ans, se terminant en 1903, 1913, 1923, 1933. (En raison de la guerre, la période se terminant en 1923 est seulement de 4 ans.)

On constate une amélioration notable, constante et régulière du nombre des survivants à tous les âges.

SURVIVANTS POUR 1 000 NÉS VIVANTS
pour les périodes se terminant
en 1903 (1898-1903), en 1913 (1908-1913), 1923 (1920-1923) et 1938 (1934-1938) *(Statistique générale de la France).*

Ages	Sexe masculin				Sexe féminin			
	1903	1913	1923	1938	1903	1913	1923	1938
1	837	866	892	924	864	888	912	940
10	759	806	845	891	786	827	866	911
20	729	779	819	872	752	797	837	891
30	677	727	767	831	701	750	790	843
40	616	666	712	775	646	698	742	819
50	538	583	638	691	584	636	684	763
60	432	465	521	561	494	545	595	672
70	275	295	344	366	341	383	436	508
80	88	97	119	135	128	150	182	241
90	7,3	7,6	8,8	12	15	17	20	35

Après 1938, le nombre annuel des décès a notablement augmenté pendant les années de guerre et d'occupation et a, par contre, beaucoup diminué au cours des années 1946, 1947, 1948. D'autre part, en 1949, une forte épidémie de grippe a produit, au cours du premier trimestre 198 000 décès, soit 57 000 de plus qu'en 1948. Mais la diminution de la mortalité est un phénomène important et durable, résultant d'une amélioration réelle, conséquence des progrès de la médecine et de l'hygiène. Pour la période 1946-49, la Table de la page 108 donne, pour le sexe masculin, sur 1 000 nés vivants, 24 survivants à l'âge de 90 ans.

Le tableau suivant donne les nombres des décès de 1938 à 1948, suivant que l'on y comprend ou non les décès par faits de guerre.

A et B : nombre de décès, en milliers d'habitants de 1938 à 1948.
A (y compris les décès par faits de guerre enregistrés à l'état civil).
B (non compris les décès par faits de guerre).
A′ et B′ (taux respectifs par 10 000 habitants).

	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
A	647	642	760	674	657	631	744	658	542	533	506
A′	154	153	185	170	167	161	191	166	134	130	122
B	647	632	738	673	654	624	664	656	542	533	506
B′	154	151	180	170	166	160	170	165	134	130	122

41. **Tables de Survie par générations.** — Dans les Tables précédentes, le taux de mortalité pour un certain âge est calculé, au cours d'une année déterminée, en divisant le nombre de décès de cet âge enregistrés à l'état civil par le nombre total des personnes de cet âge, tel qu'on peut le calculer d'après les recensements. Ces taux sont naturellement ajustés de manière que la courbe qui les représente ait une allure continue et l'on déduit de ces taux les survivants à chaque âge.

Dans les Tables de Survie par générations telles que nous les donnons ci-après d'après M. Pierre Delaporte (publications de la Statistique générale), on procède d'une manière différente. Pour la génération née en 1820, par exemple, le taux de mortalité à l'âge de 55 ans est calculé d'après les statistiques de l'année 1875 ; telle est la raison pour laquelle ces Tables, calculées à une époque où les statistiques connues ne dépassaient pas l'année 1935, s'arrêtent à l'âge de 75 ans pour la génération née en 1860 et à l'âge de 35 ans pour la génération née en 1900.

Bien entendu, ici aussi, des ajustements sont nécessaires pour dégager la véritable allure générale des phénomènes, allure qui serait perturbée par des causes accidentelles survenues telle ou telle année.

TAUX DE MORTALITÉ PAR GÉNÉRATION
(Décès de l'âge n à $n + 1$ sur 100 000 d'âge n)

Ages n	Nés en 1820		Nés en 1860		Nés en 1900	
	M	F	M	F	M	F
0	17 600	15 270	16 500	16 500	16 500	13 600
1	6 400	6 200	7 470	6 780	3 000	3 170
5	1 520	1 500	1 350	1 330	530	570
10	635	735	500	620	240	260
15	575	716	450	570	280	370
20	872	878	820	720	620	520
25	1 020	926	960	790	590	550
30	825	964	830	840	600	480
35	930	1 004	960	870	680	460
40	1 074	1 068	1 110	890		
45	1 310	1 177	1 350	970		
50	1 545	1 382	1 610	1 150		
55	2 090	1 750	2 090	1 460		
60	3 000	2 560	3 000	2 080		
65	4 460	3 860	4 460	3 160		
70	6 720	5 900	6 720	4 940		
75	10 620	9 200	10 620	7 830		
80	16 050	14 000				
85	22 800	20 500				
90	29 300	26 600				
95	35 500	33 600				
99	42 000	39 900				

TABLES DE SURVIE DE GÉNÉRATIONS
pour 100 000 naissances

Ages	Nés en 1820		Nés en 1860		Nés en 1900	
	M	F	M	F	M	F
1	82 400	84 730	83 500	83 500	83 500	86 400
5	70 948	73 167	71 192	71 879	77 993	80 675
10	67 133	69 252	68 168	68 584	76 561	79 066
15	65 268	66 834	66 694	66 692	75 677	78 012
20	63 089	64 230	64 828	64 572	74 086	76 311
25	59 853	61 382	61 794	62 211	71 810	74 280
30	57 206	58 552	59 140	59 732	69 731	72 340
35	54 771	55 738	56 601	57 230	67 575	70 670
40	52 142	52 926	53 778	54 773		
45	49 164	50 074	50 628	52 315		
50	45 829	47 016	47 038	49 670		
55	41 955	43 574	43 028	46 619		
60	37 157	39 327	38 106	42 858		
65	31 003	33 708	31 795	37 851		
70	23 640	26 693	24 244	31 261		
75	15 464	18 478	15 859	22 983		
80	7 838	10 336				
85	2 785	4 200				
90	636	1 150				
95	94	200				
100	8	20				

42. **Statistique des décès suivant leurs causes.** — Comme nous l'avons dit, cette statistique a fait de grands progrès. Nous donnons ci-après la classification officielle des causes, en nous bornant aux divisions principales (dont chacune est pratiquement divisée en un nombre plus ou moins grand de rubriques plus spéciales).

NOMENCLATURE DES CAUSES DE DÉCÈS

I. — Maladies infectieuses et parasitaires.
II. — Cancers et autres tumeurs.
III. — Maladies générales et avitaminoses.
IV. — Maladies du sang et des organes hématopoïétiques.
V. — Empoisonnements chroniques et intoxications.
VI. — Maladies du système nerveux et des organes des sens.
VII. — Maladies de l'appareil circulatoire.
VIII. — Maladies de l'appareil respiratoire (sauf tuberculose comprise dans I).
IX. — Maladies de l'appareil digestif.
X. — Maladies de l'appareil urinaire et de l'appareil génital.
XI. — Maladies de la grossesse, de l'accouchement et de l'état puerpéral.
XII. — Maladies de la peau et du tissu cellulaire.
XIII. — Maladies des os et des organes du mouvement.
XIV. — Vices de conformation congénitaux (mort-nés non compris).
XV. — Maladies particulières à la première année de la vie (mort-nés non compris).
XVI. — Sénilité, vieillesse.
XVII. — Morts violentes ou accidentelles.
XVIII. — Causes indéterminées.
XIX. — Total général.

Les causes III, IV, V, XI, XII, XIII, XIV produisant un nombre relativement faible de décès ont été groupées ci-après sous la lettre G.

DÉCÈS SUIVANT LE SEXE EN 1948

Nos des causes	Sexe masculin	Sexe féminin	Total
I	24 499	16 564	41 063
II	34 352	36 512	70 864
VI	31 812	36 195	68 007
VII	49 609	50 810	100 429
VIII	24 747	23 266	48 013
IX	14 561	11 605	26 166
X	14 367	9 342	23 709
XV	8 132	5 892	14 024
XVI	14 788	23 714	38 502
XVII	18 872	7 536	26 408
G	6 709	7 081	13 790
XVIII	18 539	16 773	35 312
XIX	260 987	245 290	506 287

DÉCÈS PAR AGE EN 1948
pour les causes principales (sexe masculin)

Ages	I	II	VI	VII	VIII	IX	XVII
0-1	1 813	26	2 686	202	4 555	3 735	313
1-4	872	61	522	51	728	445	581
5-9	288	57	141	78	67	70	315
10-14	205	51	117	90	46	84	309
15-19	563	73	153	139	69	107	811
20-24	1 301	117	167	191	132	147	1 241
25-29	1 596	147	178	231	141	176	1 171
30-34	1 075	127	162	225	122	164	926
35-39	1 818	407	325	537	256	329	1 434
40-44	2 246	1 033	503	996	488	573	1 763
45-49	2 672	2 146	855	1 724	851	894	1 768
50-54	2 143	2 831	1 203	2 339	1 009	1 024	1 481
55-59	1 965	3 525	1 695	3 270	1 190	1 029	1 230
60-64	1 840	4 745	2 692	5 265	1 749	1 308	1 293
65-69	1 625	5 600	4 027	6 962	2 279	1 352	1 246
70-79	2 000	10 579	11 098	17 977	6 719	2 269	2 131
80-99	477	2 827	5 288	9 331	4 346	855	859

DÉCÈS PAR AGE EN 1948
pour les causes principales (sexe féminin)

Ages	I	II	VI	VII	VIII	IX	XVII
0-1	1 456	24	1 790	151	3 400	2 628	205
1-4	813	53	408	55	663	325	433
5-9	299	49	107	57	67	50	152
10-14	250	34	64	68	52	64	73
15-19	723	60	126	113	93	91	200
20-24	1 358	93	128	189	107	123	256
25-29	1 483	118	139	283	151	135	236
30-34	859	205	132	264	123	127	229
35-39	1 093	641	260	474	191	244	323
40-44	1 063	1 127	392	646	228	418	365
45-49	955	1 955	745	1 075	354	570	386
50-54	838	2 728	1 259	1 513	466	670	468
55-59	914	3 513	1 904	2 250	672	720	451
60-64	992	4 501	2 948	3 794	1 116	898	510
65-69	1 015	5 403	4 442	6 083	1 757	1 065	563
70-79	1 702	11 261	13 021	18 963	6 775	2 194	1 353
80-99	751	4 747	8 380	14 832	7 051	1 283	1 333

Nous ne reproduirons pas les statistiques par départements, ni les statistiques rétrospectives ; ceux de nos lecteurs qui s'y intéresseraient les trouveront dans l'*Annuaire de la Statistique générale de la France* publié par le Service de la Statistique générale de la France, 11, boulevard Haussmann, Paris (9e), et imprimé par l'Imprimerie Nationale.

TABLE DES MATIÈRES

1967. — Imprimerie des Presses Universitaires de France. — Vendôme (France)
ÉDIT. N° 29 485 IMPRIMÉ EN FRANCE IMP. N° 20 122