

SOUS LA DIRECTION DE  
MICHEL BITBOL

THÉORIE QUANTIQUE  
ET SCIENCES HUMAINES

**CNRS EDITIONS**

*Facebook : La culture ne s'hérite pas elle se conquiert*



**Sous la direction de  
Michel BITBOL**

# **Théorie quantique et sciences humaines**

**CNRS ÉDITIONS**

15. rue Malebranche – 75005 Paris

© CNRS ÉDITIONS, Paris, 2009  
ISBN : 978-2-271-06855-2

# Sommaire

|                     |   |
|---------------------|---|
| <b>Introduction</b> |   |
| Michel Bitbol.....  | 1 |

## *Première partie*

### **RÉFLEXIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES**

|  |     |
|--|-----|
| <i>Paradoxes « quantiques » et libre-arbitre de l'homme</i>                    |     |
| J.-P. Dupuy.....   | 41  |
| <i>L'événement du marché, ou la nécessité de l'ascension méta-contextuelle</i> |     |
| E. Ayache.....   | 57  |
| <i>La structure quantique de la connaissance individuelle et sociale</i>       |     |
| M. Bitbol.....   | 103 |

## *Seconde Partie*

### **PARALLÈLES FORMELS**

|   |     |
|---|-----|
| <i>Théorie Quantique Faible : cadre formel et applications</i>                            |     |
| H. Atmanspacher, T. Filk, & H. Römer.....   | 129 |
| <i>Formalisme quantique et préférences indéterminées en théorie de la décision</i>        |     |
| H. Zwirn.....   | 163 |
| <i>L'utilité espérée projective</i>   |     |
| P. La Mura.....   | 191 |
| <i>La théorie non-classique de la mesure : un cadre pour les sciences du comportement</i> |     |
| V. Danilov & A. Lambert-Mogiliansky.....  | 205 |
| <i>Théorie non-classique de l'utilité espérée</i>   |     |
| V. Danilov & A. Lambert-Mogiliansky.....  | 233 |
| <b>Liste des auteurs</b> .....  | 251 |



# Introduction

Le titre de ce volume sera certainement perçu comme un paradoxe et un défi par beaucoup de lecteurs. Mécanique quantique et sciences humaines : quel rapport peut-il bien y avoir entre une théorie physique et un ensemble de disciplines clairement distinctes de la physique ? La volonté d'établir coûte que coûte une telle relation ne relève-t-elle pas de la thèse déjà ancienne, proposée par Otto Neurath vers 1930 sous le nom de « Physicalisme » ; une thèse qui revient à affirmer la possibilité d'atteindre l'unité générale de la science sous l'autorité exclusive de la physique promue « reine des sciences » ? La recherche d'unité des sciences par leur résorption dans la seule science physique comprise comme savoir universel, n'implique-t-elle pas un acte de foi réductionniste, avec pour hypothèse de base que seules les *choses* décrites par la physique sont réelles, et que tout le reste, en particulier les processus individuels et sociaux dont s'occupent les sciences humaines, n'en est qu'un épiphénomène d'un genre plus ou moins sophistiqué ? C'est en tout état de cause sur ce mode simplificateur (pour ne pas dire simpliste), que John Searle a compris les rapports entre physique et sciences humaines : « Telle est, déclare-t-il, l'ossature brute de notre ontologie : nous vivons dans un monde entièrement fait de particules physiques dans des champs de forces. Quelques-unes d'entre elles sont organisées en systèmes (...). À présent, la question est la suivante : comment peut-on rendre raison des faits sociaux à l'intérieur de cette ontologie<sup>1</sup> ? » Ici, la physique révèle l'ontologie ; l'ontologie détient la vérité dernière sur le monde ; et toutes les autres sciences, y compris sociales et mentales, doivent s'y conformer.

Ce mode de mise en rapport de la mécanique quantique et des sciences humaines représente à coup sûr une possibilité pour la pensée, mais c'est loin d'être la seule, et ce n'est pas la plus intéressante. Une autre démarche philosophique peut nous conduire à identifier un rapport plus profond entre les deux

---

1. J.R. Searle, *The Construction of Social Reality*, Allen Lane, 1995, p. 7.

familles de sciences. Il s'agit de la démarche, familière à Bas Van Fraassen<sup>2</sup>, qui consiste à accorder aux *méthodes* de la recherche scientifique une importance et une portée supérieure à celle des *contenus* auxquels elle aboutit. Les contenus des sciences sont historiquement mouvants, les ontologies se succèdent, mais les méthodes s'approfondissent et se généralisent. Il peut bien être utile, à titre d'exercice de mise en auto-consistance du système de la science, d'articuler entre eux les *contenus* des diverses sciences particulières depuis la physique jusqu'aux sciences humaines. Mais il est encore plus instructif d'identifier les contraintes communes qui ont fini par aboutir à des prescriptions *methodologiques* partagées par les théories physiques les plus avancées et par les sciences humaines. À partir de ces prescriptions méthodologiques partagées, on peut en effet aboutir à des formes de théorisation unifiées, alors même qu'il n'y a aucune raison d'identifier les *objets* des deux sciences, et qu'il n'y a sans doute pas lieu de croire à la possibilité de *réduire* les uns aux autres<sup>3</sup>.

Penchons-nous donc sur les *méthodes* de la physique moderne et des sciences humaines; essayons d'identifier ce qu'elles ont en commun, et avant tout quelles sont les contraintes qui les ont modelées de façon parfois si semblable.

Il faut remarquer, avant même d'amorcer l'enquête, que la similitude méthodologique avec les sciences humaines ne concerne pas la physique classique, ni aucune des théories épistémologiquement apparentées. Tant qu'on s'en tient à la physique classique et à son paradigme épistémologique, on peut accepter la stricte dichotomie entre sciences de la nature et sciences humaines que la tradition herméneutique a sans cesse affirmé depuis Dilthey. Les sciences de la nature ont ici pour résultat l'*explication* des processus qui en relèvent, tandis que les sciences humaines se fondent sur la possibilité qu'a le sujet humain de *comprendre* ses co-sujets, c'est-à-dire de *simuler* leurs états intérieurs, d'imaginer ce qu'il aurait fait s'il s'était mis à *leur place*. Les sciences de la nature expliquent un milieu étranger, qu'il nous est loisible de contempler à distance, tandis que les sciences de l'homme recueillent l'enseignement d'un jeu

2. B. Van Fraassen, *The Empirical Stance*, Yale University Press, 2002.

3. M. Bitbol, «Ontology, Matter, and Emergence», *Phenomenology and the Cognitive Science*, 6, 293-307, 2007.

de variations de nos insertions possibles dans la situation et dans les pratiques (instrumentales et langagières) de nos semblables. Habermas a reformulé la différence de la manière suivante : « Les théories des sciences naturelles se présentent comme des systèmes d'énoncés sur les *états de choses*, tandis que, dans les sciences humaines, la *relation* complexe entre énoncés et états de choses est déjà préalablement présente dans les états de choses analysés<sup>4</sup>. » Selon cette version de la distinction traditionnelle, les sciences de la nature parviennent à *séparer* complètement leur objet de ses moyens d'étude et de désignation linguistique. Au contraire, les sciences humaines sont condamnées à maintenir un lien inextricable entre ce qu'elles visent étudier (les « états de choses ») et leur grille de lecture interprétative véhiculée par le langage qu'elles emploient (les « énoncés »). Les sciences humaines ont en effet ce que certains considèrent comme un désavantage par rapport aux sciences de la nature au sens classique : leur acte d'investigation est coextensif au domaine investigué ; leur processus personnel, social, et langagier de développement participe du milieu de personnes et de sociétés structurées par le langage qu'elles cherchent à connaître.

À cela s'ajoute une seconde distinction, énoncée par Von Kempfski et approuvée par Habermas : « Les études que les sciences sociales réalisent (...) sont fondamentalement des études relatives à l'action possible, alors que la physique théorique se réfère toujours à la nature réelle »<sup>5</sup>. Autrement dit, les sciences de la nature au sens classique décrivent ce qui arrive, ce qui est *actuel*, alors que les sciences humaines se contentent d'identifier ce qui, dans leur terrain d'étude, recèle des potentialités pour ce qui y sera accompli. C'est que les sciences humaines ne portent pas tant sur les causes déjà présentes, que sur les *raisons* d'agir dans le futur ; pas tant sur les faits constatés, que sur les *normes* gouvernant ce qui reste à faire. Comme l'écrit J. Piaget, « les trois notions fondamentales auxquelles se réduisent les structures sociales sont celles de *règles* (ou *normes*, du point de vue du sujet), de *valeurs* et de *signes* ; et elles paraissent

---

4. J. Habermas, *Logique des sciences sociales et autres essais*, P.U.F., 1987, p. 37.

5. J. Habermas, *Logique des sciences sociales et autres essais*, *op. cit.*, p. 65.

au premier abord irréductibles aux concepts utilisés dans les sciences naturelles<sup>6</sup>». Confondre les deux angles d'approche l'un avec l'autre, l'angle des dispositions et des directives pour l'action, avec l'angle des propriétés et des lois du mouvement, a même pu être considéré comme la racine de beaucoup de fausses énigmes concernant la dualité de l'esprit et du corps : c'est cette confusion que G. Ryle<sup>7</sup> a appelé « l'erreur de catégorie » (« *category mistake* »).

Or, les deux différences épistémologiques majeures qui viennent d'être répertoriées entre la science de la nature et les sciences humaines se trouvent en partie annulées lorsque les sciences de la nature passent du paradigme de la physique classique à celui de la physique quantique.

En premier lieu, la physique quantique travaille sur un matériau expérimental dans lequel la séparation entre ce qui est exploré et les moyens de l'exploration, entre ce qui est désigné et les normes de désignation en vigueur dans l'environnement macroscopique, rencontre des limites fondamentales. Comme les sciences humaines, la physique quantique doit tenir compte de l'implication des pratiques de connaissance dans le phénomène à connaître. Comme les sciences humaines, la physique quantique traite d'une situation où l'acte épistémique est coextensif à son domaine d'étude.

En second lieu, en raison des limites à la séparation entre domaine exploré et moyens d'exploration, la physique quantique ne peut plus prétendre *décrire* comme de l'extérieur les propriétés des entités de ce domaine. Tout ce qu'elle peut spécifier est l'évolution d'un instrument de *prévision* probabiliste (le vecteur d'état) utilisable comme directive interne pour le travail expérimental et technologique<sup>8</sup>. Comme les sciences humaines, la physique quantique concentre son activité théorique sur l'identification de *potentialités* permettant d'orienter des opérations efficaces, et non plus sur la mise en évidence d'*actualités* suppo-

---

6. J. Piaget (ed.), *Logique et connaissance scientifique*, Gallimard-Pléiade, p. 1135.

7. G. Ryle, *The Concept of Mind*, The University of Chicago Press, 1949 ; *La notion d'esprit*, Payot-Rivages, 2005.

8. M. Bitbol, *Mécanique quantique, une introduction philosophique*, Champs-Flammarion, 1997, p. 31.

sées indépendantes des instruments d'intervention. Les sciences humaines et les sciences physiques contemporaines ont donc en commun une contrainte cruciale dont elles doivent tenir compte, et qui a toutes les chances de se traduire dans la particularité de leurs méthodes aussi bien que dans la structure de leurs produits théoriques.

Cette parenté a été aperçue très tôt par Bohr, et elle semble même avoir guidé sa réflexion de physicien. Des témoignages<sup>9</sup> montrent que c'est sa familiarité préalable avec la psychologie et la philosophie de la connaissance du penseur danois Harald Høffding, qui a déterminé son interprétation de la théorie quantique et une part du projet d'élaboration de cette dernière. Au lieu que la théorie quantique ait joué le rôle de « fondement » ontologique pour les sciences, y compris humaines, ce sont à l'inverse les sciences humaines qui, par la voix de Høffding, ont offert à la théorie quantique naissante un modèle de positionnement épistémologique non-standard. Examinons quels sont les traits distinctifs de ce modèle alternatif.

La psychologie de Høffding avait parmi ses principes les plus fondamentaux une « loi des relations » stipulant que nul état mental ne peut être considéré comme existant en lui-même, indépendamment des relations qu'il entretient avec d'autres états mentaux. Très vite, la « loi des relations » posée en psychologie a été étendue par Høffding aux propriétés physiques, donnant à Bohr un exemple d'exportation des schémas de pensée et des analyses de configurations épistémiques d'une science à l'autre. Selon Høffding, de la même façon que les états mentaux sont des traits relationnels plutôt que monadiques, « (les) "choses" (...) sont seulement comprises en tant que leurs propriétés, et les propriétés se manifestent comme autant de relations à d'autres "choses". Les molécules, atomes et électrons sont encore des "choses", des totalités, mais sont seulement connues et comprises en tant que relations<sup>10</sup> ». Un intérêt particulier de la « loi des relations » aux yeux de Høffding était qu'elle manifestait, avec une force particulière dans le domaine mental, un fait

---

9. A. Petersen, « The Philosophy of Niels Bohr », *Bulletin of the Atomic Scientists*, 19, 8-14, 1963.

10. H. Høffding, « Relation som Kategori », 1921, cité et traduit par J. Faye, *Niels Bohr, his Heritage and Legacy*, Kluwer, 1991, p. 81.

universel d'interdépendance du connaissant et du connu. Dans le domaine mental, plus que dans aucun autre, la relation de connaissance est première, et les termes classiquement reliés (sujet et objet) sont seconds. Plutôt que d'admettre sans discuter qu'un objet et un sujet donnés d'avance, et rigoureusement distincts, établissent une relation aboutissant à connaître, il faut dans ces conditions réaliser que chaque acte de connaissance ne peut mettre en rapport qu'« (...) un sujet objectivement déterminé avec un objet subjectivement déterminé »<sup>11</sup>. Le sujet et l'objet sont corrélatifs l'un de l'autre dans chaque acte de connaissance ; ils contribuent à se définir l'un l'autre à travers un processus de délimitation de l'un par l'autre<sup>12</sup>. Dans un style qui n'est pas sans évoquer la dialectique hégélienne, Höffding affirme dès lors que le progrès de la connaissance a pour condition une révélation mutuelle de la part subjective dans l'objet, et de la part objectivable du sujet. À l'examen attentif, il est assez facile de voir cette dynamique à l'œuvre dans l'histoire. Les grandes avancées des sciences de la nature ont bien eu pour préalable la mise en évidence de la fonction remplie par la position du sujet connaissant dans le contenu antérieurement supposé « indépendant » de la connaissance. Cela a été le cas lorsque Copernic a reconduit le mouvement apparent des planètes à leur rapport avec un sujet astronome lié à la planète Terre en orbite autour du soleil, ou lorsque Galilée a reconduit la vitesse des corps à leur rapport avec un observateur qui n'est que conventionnellement immobile. Mais cette condition de subjectivation du champ objectif s'est accompagnée de sa réciproque qu'est l'objectivation du subjectif : ainsi, tout ce que Copernic a retenu du sujet est une localisation terrestre, et tout ce que Galilée a retenu du sujet est un point-origine de référentiel.

Il faut remarquer à ce stade que la co-définition des versants objectif et subjectif de la connaissance, conséquence de leur origine dans une relation épistémique inextricable en fait et en droit, a pour corrélat l'*incomplétude* de leur caractérisation, son caractère inachevé et toujours en développement. Car à chaque

---

11. H. Höffding, *Filosofiske Problemer*, 1902, cité et traduit par J. Faye, *Niels Bohr, his Heritage and Legacy*, op. cit., p. 87.

12. M. Bitbol, *De l'intérieur du monde. Pour une philosophie des relations*, Flammarion, 2009 (à paraître).

révision de la polarité du lien sujet-objet, c'est un objet redéfini qui surgit devant un sujet dont le questionnement est renouvelé en conséquence.

Là encore, ce sont les sciences humaines et particulièrement la psychologie qui servent de banc d'essai et de cas emblématique, parce qu'elles sont confrontées à la version la plus extrême d'inextricabilité du connaissant dans le processus de connaissance. Höffding remarque qu'à force de vouloir objectiver son terrain d'étude, la psychologie introspective de son temps manque un aspect crucial de l'activité mentale: la possibilité d'un plein engagement dans celle-ci, d'une implication qui exclut la réflexivité. Il est impossible de vouloir, et d'analyser ses propres motivations en même temps. Il est impossible d'être attentif, et d'être attentif à cette attention en même temps. L'objet de l'attention est redéfini à mesure que le sujet attentif se réoriente. Une autre manière, plus facile à comprendre mais aussi plus sommaire, d'exprimer cela, est la suivante: à partir du moment où le sujet de l'attention n'est pas vraiment distinct de l'objet de cette attention, l'acte d'observation ne peut qu'*altérer* ce sur quoi il porte. Cela est vrai en psychologie introspective<sup>13</sup>, puisqu'en voulant observer en acte le sujet que l'on est, on se transforme en un autre sujet apte à poser cet acte comme objet. Et c'est également vrai en psychologie expérimentale, puisque le sujet étudié est susceptible de se remodeler lui-même en fonction de ce qu'il croit être les attentes de l'expérimentateur. Que faire, face à ce qui ressemble bien à un dilemme? Que choisir entre l'absorption continue dans l'expérience du sujet, et la mise à distance objectivante systématique préconisée par la psychologie scientifique? Dans le sillage de sa compréhension du sujet et de l'objet par une dynamique de la caractérisation réciproque, Höffding préconise de ne pas s'arrêter à l'une des deux attitudes mutuellement exclusives, de ne se bloquer ni dans l'engagement ni dans la distanciation. Les deux sont indispensables à certains

---

13. Voir cependant des discussions plus approfondies de la question de l'introspection dans: B. Shanon, «The case for introspection», *Cognition and Brain Theory*, 7, 167-180, 1984; N. Depraz, F. Varela, P. Vermersch, *On Becoming Aware. The Pragmatics of Experiencing*, John Benjamins, 2003; C. Petitmengin & M. Bitbol, «The validity of first-person descriptions as authenticity and coherence», *Journal of Consciousness Studies*, 2009 (à paraître).

égards. Leur incompatibilité n'exclut pas leur usage *alternatif*. Mieux, leur incompatibilité appelle d'une certaine manière leur usage alternatif afin de compenser l'incomplétude qui en est la conséquence<sup>14</sup>.

Il n'est pas difficile de reconnaître ici la structure conceptuelle que Bohr a nommé *complémentarité*. La complémentarité au sens de Bohr, c'est la combinaison d'exclusivité mutuelle et de nécessité conjointe des caractérisations d'un même objet.

En physique quantique, Bohr a identifié la raison de la pertinence du concept de complémentarité : c'est le caractère fini du quantum d'action, qui intervient en particulier au moment du processus de mesure. L'indivisibilité du quantum élémentaire échangé au moment de l'interaction d'un système microscopique et d'un appareil de mesure interdit en effet de faire la part, dans le phénomène, de ce qui revient au système et de ce qui revient à l'appareil. Mais si les phénomènes sont inanalysables, s'ils ne sont pas décomposables en une contribution d'un objet et une contribution d'un appareil, on comprend que rien n'autorise à extrapoler à partir d'eux la représentation d'un objet « indépendant ». Le phénomène microscopique n'est plus que la traduction d'une situation expérimentale globale, plutôt que la révélation d'une propriété intrinsèque d'objet.

Bohr fait par ailleurs remarquer qu'il reste nécessaire de décrire (au minimum) la part des instruments de mesure qui se trouve à l'interface avec les expérimentateurs, au moyen du langage courant convenablement raffiné par la « terminologie de la physique classique ». Car cette part immédiatement significative des instruments de mesures doit pouvoir s'interpréter en termes d'objets dotés de « propriétés » définies, si l'on veut que ses indications soient communicables de manière non-ambiguë à l'ensemble des expérimentateurs au moyen de propositions comportant un sujet grammatical (l'objet « cadran de l'instrument de mesure ») et un prédicat (la valeur affichée par ce cadran). Projetant cette contrainte de classicité du domaine mésoscopique sur le domaine microscopique, Bohr souligne que chaque caractérisation portant sur le domaine microscopique n'est pas celle d'un objet, mais celle d'une *visée semi-clas-*

---

14. J. Faye, *Niels Bohr, his Heritage and Legacy*, op. cit., p. 96-97.

sique d'objet déterminée par une interprétation elle-même classique du fonctionnement de l'appareillage qui la permet.

À partir de là, il devient possible selon Bohr de rendre compte à la fois de l'exclusivité mutuelle des caractérisations microscopiques et de la nécessité conjointe de plusieurs caractérisations incompatibles, autrement dit des deux composantes définitionnelles de son concept de « complémentarité ». L'exclusivité mutuelle des caractérisations microscopiques s'explique par leur indissociabilité « holistique » avec les procédures expérimentales correspondantes, *et par l'incompatibilité mutuelle de ces procédures expérimentales*. La nécessité conjointe de plusieurs caractérisations incompatibles se justifie quant à elle par la volonté de continuer à considérer que certaines expériences, y compris lorsqu'elles sont incompatibles, « portent sur » un même objet ; c'est-à-dire par la volonté de continuer à admettre que, même si elles ne révèlent pas ce qu'est un objet en lui-même, les caractérisations expérimentales *en* offrent des aperçus ou des esquisses, partiellement conditionnées par le moyen qui y donne accès.

Visiblement inspiré par Höffding, Bohr a considéré la complémentarité des caractérisations dans les sciences humaines comme la traduction d'une tension du même ordre. D'une part, les processus mentaux et sociaux sont à ce point intégrés, à ce point participatifs, à ce point « holistiques » en un sens, qu'on ne peut manifester l'un de leurs aspects qu'en délimitant artificiellement une part d'eux-mêmes, et en se coupant ainsi des conditions qui manifesteraient un autre de leurs aspects. D'autre part, si, par souci de se conformer à la norme fondatrice de la théorie de la connaissance, on continue à vouloir subdiviser ces processus intégrés-holistiques de manière à faire comme si un objet y était tout de même différenciable d'un sujet, on en arrive à la conclusion que cet objet artificiellement posé, et n'ayant de consistance que « symbolique », ne se laisse approcher qu'à travers plusieurs de ces aspects qui sont pourtant mutuellement exclusifs. L'un des exemples les plus connus de structures complémentaires que donne Bohr, concerne d'ailleurs exactement le cas de psychologie introspective qu'avait développé Höffding. Mieux, Bohr ne le présente pas comme une simple illustration, mais comme *la* description paradigmatique de la limitation épistémologique à laquelle se heurte la physique moderne. Dans cet exemple, le

sujet, étant en même temps objet de son auto-examen, doit recourir à plusieurs approches mutuellement exclusives pour s'explorer lui-même. Ainsi, lorsque le sujet veut analyser son propre usage d'un concept, il est obligé d'adopter une posture qui exclut pour lui l'application irréfléchie de ce concept<sup>15</sup>. Il ne peut pas être simultanément acteur et spectateur de sa propre élaboration conceptuelle. Bohr a également donné des exemples de structure complémentaire dans d'autres sciences humaines, comme les sciences de la société. Par exemple, écrit-il, la bienveillance est complémentaire de la justice, puisque le premier point de vue exige l'implication personnelle tandis que le second point de vue relève d'une norme sociale<sup>16</sup>.

Dans son texte fondamental<sup>17</sup> de philosophie rédigé en 1942, Heisenberg a élevé cette thèse bohrienne au rang d'une théorie générale de la connaissance humaine concrète. Selon Heisenberg, tout d'abord, il existe au moins trois régions de connaissance<sup>18</sup> qui se distinguent par le degré de dissociation pouvant être atteint entre le processus de connaissance et son objet.

- La première région est celle où les états de choses étudiés sont complètement *séparables*, par une technique de déconvolution et de recherche d'invariants, du procédé de leur étude. C'est la région de la physique et de la chimie classiques.
- La seconde région correspond au cas où les états de choses qu'on cherche à caractériser s'avèrent fondamentalement *indissociables* de l'approche adoptée pour la caractérisation. C'est la région de la physique quantique. Mais c'est aussi, ajoute Heisenberg, la région de la psychologie et de la biologie. La psychologie est en effet marquée par le fait que « (...) une partie essentielle de ce qui arrive dans l'âme se dérobe jusqu'à un certain degré à la fixation objective parce que l'acte de fixation intervient lui-même de façon décisive dans les processus<sup>19</sup> ».

---

15. N. Bohr, *La théorie atomique et la description des phénomènes*, J. Gabay, 1993, p. 91.

16. N. Bohr, *Physique atomique et connaissance humaine*, Gallimard, 1991, p. 271.

17. W. Heisenberg, *Philosophie, Manuscrit de 1942*, Seuil, 1998.

18. Voir l'introduction de C. Chevalley à W. Heisenberg, *Philosophie, Manuscrit de 1942, op. cit.*, p. 201.

19. W. Heisenberg, *Philosophie, Manuscrit de 1942, op. cit.*, p. 341.

En d'autres termes, il est impossible de dissocier un objet « âme » de l'acte même qu'accomplit l'« âme » en objectivant. Quant à la biologie, elle doit tenir compte de l'incompatibilité des approches analytiques (comme celle de l'examen physico-chimique des composants cellulaires), et des approches globales, comme celles qui s'intéressent à l'homéostasie, aux comportements et aux intentions. Si ces deux approches sont incompatibles, alors il devient impossible d'ignorer que leur produit objectivé en reste indissociable ; il devient également absurde de prétendre résorber l'un des objets dans l'autre, comme cherche à le faire le réductionnisme en écartant les catégories d'homéostasie et d'intentionnalité au profit des seuls concepts moléculaires.

- La troisième région, enfin, est celle où les états de choses sont *engendrés* à titre de symboles aptes à guider non seulement le processus de connaissance, mais plus généralement la vie. C'est la région de l'art avec ses figurations formatrices, de la religion avec ses représentations et ses récits archétypaux, mais aussi des nombreuses pratiques sociales dans lesquelles un symbole institutionnel (monnaie fiduciaire, constitution, déclaration de droits) est traité comme une réalité.

À un niveau plus haut de réflexion, cependant, c'est l'existence même d'une multiplicité de régions de connaissance, à la fois distinctes et non réductibles les unes aux autres, qui exprime l'indissociabilité de la connaissance *en général* avec le genre de procédés qu'elle met en œuvre. Car, remarque Heisenberg, « il n'est peut-être pas possible, dans une description complète des connexions d'une région, de faire abstraction du fait que nous sommes nous-mêmes partie prenante de ces connexions<sup>20</sup> ». Il est vrai que les exemples de cette impossibilité de faire l'impasse sur notre engagement dans les « connexions » (légales) qui constituent une région de connaissance, sont choisis par Heisenberg en physique atomique et en psychologie (et par conséquent dans la seule *seconde* région). Mais la formulation de sa phrase sous-entend plus largement que notre engagement ne peut *jamais* être ignoré à partir du moment où nous cherchons l'exhaustivité d'une description (à partir du moment où nous cherchons à la

---

20. *Ibid.*

rendre « complète »). Notre engagement nous saute aux yeux dès que nous cherchons à atteindre les frontières d'une région de connaissance, quelle que soit la région que nous explorons.

De nombreux cas historiques illustrent ce pouvoir auto-révéléateur de l'exploration des confins. Ainsi, une recherche d'exhaustivité de la description classique des atomes et de la lumière, au tournant du dix-neuvième siècle et du vingtième siècle, nous a conduit à nous heurter à la limitation fondamentale du détachement objectivant que manifeste la théorie quantique. Ainsi encore, bien avant cela, une recherche d'exhaustivité dans la construction d'une science classique du point de vue d'un spectateur détaché, nous a fait buter sur l'énigme d'une volonté et d'un libre arbitre qui ne pouvait se comprendre (comme l'a suggéré Kant) que du point de vue de l'agent. Cette figure répétée de l'homme qui se rencontre (aussi) lui-même à l'extrémité d'une quête de l'inconnu est un thème récurrent d'un autre ouvrage de Heisenberg<sup>21</sup>, inspiré par A. Eddington<sup>22</sup>.

Heisenberg a ajouté à ces remarques d'ordre philosophique une suggestion de théoricien qui aura des conséquences considérables pour le développement d'un rapport étroit, précis, et détaillé entre mécanique quantique et sciences humaines. Sa suggestion additionnelle est que l'impossibilité de faire complètement abstraction de notre contribution pourrait bien se trouver inscrite, de manière cryptique mais pleinement convaincante pour ceux qui savent la lire, dans la forme mathématique de la région de connaissance représentée par la physique quantique. Pour comprendre comment s'effectue ce passage de la limitation de l'objectivité séparatrice vers le formalisme mathématique, il faut passer par un degré intermédiaire: celui du processus même de recherche d'objectivation, qui ne s'arrête pas lorsqu'il rencontre un obstacle, mais qui incorpore cet obstacle dans son travail et le tourne à son avantage. Comme le souligne Heisenberg, « (...) même si un état de choses ne se laisse pas objectiver au sens où on l'a dit, il reste que ce fait lui-même peut (...) être objectivé à son tour et exploré dans sa connexion

---

21. W. Heisenberg, *La nature dans la physique contemporaine*, Folio-Gallimard, 2000, p. 267.

22. A. Eddington, *The Nature of the Physical World*, Cambridge University Press, 1928.

avec d'autres faits<sup>23</sup> ». Le fait de la non-objectivabilité est réflexivement objectivable. On comprend à partir de là quel peut être le statut du formalisme mathématique de la théorie quantique. Il est la forme que prend la connexion d'un ensemble de faits élaborés qui traduisent, à travers leur objectivité acquise au second degré, l'impossibilité de faire porter directement, au premier degré, l'acte d'objectivation sur les faits élémentaires. Les faits élémentaires sont ici les phénomènes expérimentaux individuels constatés dans l'espace et dans le temps du laboratoire ; et l'acte d'objectivation direct, au premier degré, consisterait à en extraire des invariants eux-mêmes spatio-temporels (comme les corpuscules matériels classiques dotés d'une trajectoire dans l'espace et dans le temps). Les faits élaborés, pour leur part, sont des faits de distribution statistique ; et l'acte d'objectivation seconde consiste à faire engendrer ces distributions par un outil prédictif unifié, c'est-à-dire invariant par changement d'observable, comme le vecteur d'état dans un espace de Hilbert. Le fait que ce soit cet outil prédictif « vecteur d'état » qui se trouve « connecté », ou légalisé, par le biais de l'équation de Schrödinger, et non pas les phénomènes expérimentaux individuels, exprime donc : (i) l'impossibilité d'une objectivation première portant sur ces derniers (c'est-à-dire l'impossibilité de les détacher un par un de leur contexte expérimental), et (ii) l'effectivité de l'objectivation seconde d'un invariant générateur de distributions statistiques. La conséquence de cette mise en lumière de l'origine du formalisme de la théorie quantique est considérable. Elle conduit à réaliser qu'une part considérable de ce formalisme mathématique a une signification qui dépasse de loin la circonscription de la physique microscopique dont elle vise à rendre compte. Ce formalisme traduit en vérité une exigence et une situation épistémologique générale, une demande de réorientation de l'objectivation face aux obstacles fondamentaux qu'elle rencontre, qui sont aussi celles des sciences humaines.

Par la suite, plusieurs philosophes se sont emparés de ces analyses pionnières des créateurs de la mécanique quantique et en ont fait la racine de leur propre conception de la connaissance. C'est le cas de K.O. Apel, qui leur a consacré un livre. Partant

---

23. W. Heisenberg, *Philosophie, Manuscrit de 1942, op. cit.*, p. 268.

des deux oppositions entre sciences de la nature et sciences humaines notées par Habermas, Apel montre comment elles tombent l'une après l'autre lorsque les sciences de la nature se déploient selon les règles nouvelles du paradigme quantique. La première opposition, entre des sciences du détachement et des sciences de l'engagement inévitable, s'effondre d'entrée de jeu : « Dans les [sciences de la nature comme dans les sciences humaines], écrit Apel, il faut renoncer à la représentation d'un continuum objectif du monde extérieur dont la multiplication des perspectives tombe, par principe, sous contrôle (...) théorique. À la place de cela, se manifestent des aspects du monde incompatibles, complémentaires, [parce que indissolublement liés à chaque perspective, à chaque modalité d'intervention]<sup>24</sup>. » Les aspects de la nature constitués par l'expérience microphysique, ajoute Apel, « (...) sont objectivement incompatibles et, pour cette raison, comparables aux conceptions du monde mutuellement exclusives du monde des sciences (humaines) (Geisteswissenschaften)<sup>25</sup> ». La deuxième différence épistémologique relevée par Habermas entre les sciences de la nature (censées décrire des propriétés *actuelles*) et les sciences de l'homme (censées se concentrer sur des *potentialités*) se trouve également analysée et critiquée par Apel. Nous avons signalé que cette différence est annulée par l'avènement de la physique quantique. Celle-ci, comme les sciences humaines, manipule des symboles (les vecteurs d'état) ayant trait au potentiel plutôt qu'à l'actuel, à une anticipation de ce qui peut se passer dans le futur sous condition d'inscription dans divers contextes expérimentaux, plutôt qu'à des constats extrapolés indépendamment de tout contexte. K.-O. Apel s'attache à identifier la *raison* de ce glissement du thème de la formalisation, de ce passage de l'actuel au potentiel, entre la physique classique et la physique quantique : « (La mécanique quantique), écrit-il, réussit seulement à mettre en valeur la séparation du sujet et de l'objet au niveau de

---

24. K.-O. Apel, *L'a priori du corps dans le problème de la connaissance*, Cerf, 2005, p. 39. Voir également A. Plotnitsky, *Complementarity, Anti-Epistemology after Bohr and Derrida*, Duke University Press, 1994. Cet auteur rapproche la complémentarité des philosophies de la déconstruction.

25. K.-O. Apel, *L'a priori du corps dans le problème de la connaissance*, *op. cit.*, p. 41.

l'explication *statistique* du comportement d'ensembles de particules, mais elle y échoue au niveau des particules élémentaires<sup>26</sup>.» Autrement dit, de manière parfaitement conforme aux réflexions de Heisenberg, le recours aux probabilités en physique quantique est la marque que laisse en elle la limite de l'objectivation, et la preuve de la possibilité de procéder à une objectivation seconde : l'objectivation indirecte des *distributions statistiques* de phénomènes spatio-temporels plutôt que celle, directe, d'un ensemble d'entités spatio-temporelles.

Esquissées par Bohr et Heisenberg, puis par une lignée de philosophes inspirés par eux, les modalités de la mise en rapport de la physique quantique et des sciences humaines sont en définitive de deux types assez distincts. On peut d'une part développer qualitativement la similitude de situation épistémologique entre la physique microscopique et chaque science humaine considérée séparément. Et on peut d'autre part chercher à énoncer les conséquences quantitatives, ou au moins formelles, de cette similitude de situation épistémologique.

Les parallèles *qualitatifs* entre théorie quantique et sciences humaines s'appuient, on l'a vu, sur le concept bohrien de complémentarité. La complémentarité étant toutefois (pour le dire comme H. Putnam) un « concept à large spectre », ses applications aux divers champs particuliers des sciences humaines sont inévitablement diverses. Déjà, en mécanique quantique, plusieurs variantes de ce concept ont été répertoriées par Bohr. Prise au sens le plus large, la complémentarité bohrienne dénote l'impossibilité de s'abstraire des traits holistiques de l'expérimentation. Mais ces traits holistiques se manifestent en pratique de trois façons :

- L'exclusivité mutuelle des *valeurs* précises de paires de variables inséparables des contextes expérimentaux permettant de les évaluer. C'est le cas des paires de *variables conjuguées* comme la position et de la quantité de mouvement ;
- L'exclusivité mutuelle de deux *images*, associées respectivement à des contextes expérimentaux partiels et à un contexte expérimental global. C'est le cas des images corpusculaire et ondulatoire dans l'expérience interférométrique des fentes

---

26. *Ibid.*, p. 32.

d'Young. L'image corpusculaire est associée au contexte partiel de détection du passage d'un objet par l'une des fentes; et l'image ondulatoire est associée au contexte global d'ouverture et d'indiscernabilité des chemins correspondant aux deux fentes.

- L'exclusivité mutuelle de la description d'une *potentialité* et d'une *actualité*. Ces deux descriptions mutuellement exclusives correspondent respectivement : (i) au contexte de la prévision des futurs résultats de mesure après une préparation initiale, et (ii) au contexte de la mesure finale. Ce dernier couple est représenté en théorie quantique par les modes continu et discontinu d'évolution du vecteur d'état. Le mode «causal» d'évolution par l'équation de Schrödinger, exclut le mode «acausal» d'évolution associé à un acte de localisation expérimentale dans l'espace-temps<sup>27</sup>.

Deux exemples d'usage qualitatif du concept bohrien de complémentarité dans les sciences humaines vont être développés à présent. Ils manifestent la même amplitude de variation autour du thème commun du caractère holistique de la connaissance, qu'en physique quantique.

K. Meyer-Abich<sup>28</sup>, pour commencer, s'est attaché à développer la variété psychologique de la complémentarité, développée par Bohr à la suite de Höffding. Selon Meyer-Abich, cette variété de complémentarité traduit une incompatibilité entre l'acte de viser des objets particuliers et l'acte d'analyser l'objectivation, lorsque celui qui vise les objets et celui qui analyse ne sont pas distincts. L'incompatibilité en question, poursuit Meyer-Abich, a été particulièrement mise en relief par une étude de K. Goldstein<sup>29</sup> appuyée sur des observations fines et empathiques de patients ayant subi des lésions cérébrales à la suite de la première guerre mondiale. Pour de tels patients, les fonctions psychiques d'intentionnalité et de réflexivité deviennent tellement dissociées que même leur *succesion* chez un seul sujet devient impossible. Aussi surprenant

---

27. W. Heisenberg, *Les principes physiques de la théorie des quanta*, Gauthier-Villars, 1972, p. 52.

28. K. Meyer-Abich, « Bohr's complementarity and Goldstein's holism in reflective pragmatism », *Mind and Matter*, 2, 91-103, 2004.

29. K. Goldstein, *La structure de l'organisme*, Gallimard, 1983.

que cela puisse paraître, cette altération observée par Goldstein n'est pas une conséquence focalisée de certaines lésions particulières, mais se retrouve plus ou moins chez tous les patients ayant des lésions étendues du cortex cérébral. Chez chaque patient de ce genre, « tout ce qui le force à dépasser la sphère du "réel actuel" pour celle du "simplement possible", du "pensé", amène un échec<sup>30</sup> ». Les patients adhèrent au réel vécu sans pouvoir se le représenter. Ils restent liés à l'attitude de visée intentionnelle d'objets sans pouvoir prendre du recul et en acquérir une connaissance analytique. Dans une réflexion ultérieure, Goldstein caractérise cet état psychique déficitaire des patients atteints de lésions corticales en utilisant un vocabulaire que nous avons déjà rencontré Bohr : les patients « agissent dans le monde au lieu de penser à lui ou de parler de lui<sup>31</sup> » ; autrement dit, ils sont devenus purs *acteurs* après avoir perdu les degrés de liberté qui leur auraient permis de se comporter *aussi* comme *spectateurs*. De cette classe de cas pathologiques, il ressort que, dans un organisme caractérisé par l'intégration holistique des composants, la posture de l'acteur, de la totale adhésion de soi à soi, est fondamentale. Par contraste, la posture complémentaire du spectateur, du désengagement : (a) ne peut être qu'incomplète, et (b) demande des ressources en excès par rapport à celle de l'acteur. L'intégration holistique impose la posture d'acteur. Elle ne permet qu'accessoirement et fragmentairement la posture de spectateur, qui suppose que l'on suspende pour un temps celle, plus originaire, de l'acteur.

L'analogie de cette pathologie cognitive avec la complémentarité des représentations corpusculaire et ondulatoire est la plus tentante. Dans ce dernier type de complémentarité, rappelons-le, la représentation corpusculaire prévaut dans le contexte d'une expérience de localisation sur chaque branche de l'interféromètre, alors que la représentation ondulatoire est pertinente dans le contexte d'une évaluation des effets produits globalement par tout le dispositif interférométrique. La représentation corpusculaire l'emporte lorsqu'on a actualisé l'un des chemins dans l'interféromètre, alors que la représentation ondu-

30. K. Goldstein, *La structure de l'organisme*, Gallimard, 1983, p. 27.

31. K. Goldstein, *Human Nature in the Light of Psychopathology*, Harvard University Press, 1940.

latoire s'impose lorsque l'on a laissé ouverts tous les chemins possibles. De façon fortement parallèle, la configuration pathologique de Goldstein met en lumière un type de complémentarité où l'approche locale d'un acte est exclusive d'une approche globale des actes. Elle correspond aussi à une dualité d'attitudes entre l'adhésion à chaque acte, et la distanciation réflexive qui laisse se déployer devant le regard toutes les possibilités d'agir.

Une variété différente de complémentarité, et de manifestation du caractère holistique de la connaissance, se trouve mobilisée par la réflexion de M. Rasmussen<sup>32</sup> sur la linguistique. Rasmussen confronte à Bohr un autre grand penseur danois qui lui est presque contemporain : le linguiste Louis Hjelmslev. Cependant, sa comparaison avec la configuration épistémologique de la physique quantique ne se limite pas à un auteur ; elle s'étend à toute conception structuraliste de la langue, à commencer par celle de Saussure. Cette comparaison s'établit en deux étapes.

La première étape consiste en une définition de l'observation : observer, suggère en substance Rasmussen, c'est restreindre les conditions initiales à partir desquelles on peut effectuer une *prévision*. La question de l'impact de l'observation sur le domaine observé doit être reformulée à partir de là en une demande concernant l'impact de la prévision sur le domaine prévu. Or, souligne Rasmussen, en linguistique, cet impact est par construction considérable. Lorsqu'un linguiste cherche à prévoir l'évolution future de sa propre langue en fonction de contraintes identifiées, il l'infléchit par son acte même de prévision. Car, en tant que locuteur de sa langue, le linguiste ne peut pas faire autrement que donner une valeur normative, voire *prescriptive*, à sa prévision. Non seulement ce qu'il tend à prévoir de l'état futur de sa langue est ce qu'il croit qu'elle *devrait* être eu égard à l'idée qu'il se fait de son identité (il faut qu'elle soit encore « du français »), mais en plus, étant guidé par sa prévision dans ses pratiques locutoires, et guidant les locuteurs qui le lisent, il influe sur l'évolution de sa langue. En bref,

---

32. M. Rasmussen, « Le problème de l'observation en linguistique. Une comparaison entre Louis Hjelmslev et Niels Bohr », in : M. Rasmussen (ed.), *Louis Hjelmslev et la sémiotique contemporaine*, Travaux du cercle linguistique de Copenhague XXIV, Nordik Sprog-og Kulturforlag, 1993.

l'observation à orientation prédictive « perturbe » la langue. Plus exactement, il faudrait dire que le travail du linguiste participe de la dynamique évolutive de sa propre langue ; que l'analyse linguistique n'est pas détachable du métabolisme de la langue.

La seconde étape du parallèle entre physique quantique et linguistique consiste à décrire une forme de complémentarité. Celle-ci met en regard deux approches mutuellement exclusives de la langue : l'approche synchronique et l'approche diachronique. L'approche synchronique tend à immobiliser la langue dans son système présent de différences entre signes. L'approche diachronique, pour sa part, épouse à court terme les développements du discours, et cherche à identifier à long terme les dérives et réorganisations du champ des différences qui font passer la pratique des locuteurs d'un système de langue à un autre. De toute évidence, l'extraction d'une structure synchronique (d'un instantané de la langue), et l'analyse diachronique (d'un texte en développement, ou d'une histoire de la langue), supposent des modes d'observation différents. On trouve chez Hjelmslev une description assez détaillée de cette différence<sup>33</sup>. À titre préparatoire, Hjelmslev remarque que les signes se succèdent dans le discours et coexistent dans le texte qui le transcrit. C'est leur *conjonction* sur le mode de la succession qui constitue le discours, et leur *conjonction* sur le mode de la coexistence qui constitue le texte : le discours et le texte contiennent un signe, *et* un autre, *et* encore un autre (etc.) en concaténation. Dans le système de la langue compris selon la thèse structuraliste, par contre, chaque signe a une position unique qui le définit par différence avec tous les autres. Aucun autre signe ne peut s'y substituer, puisque prendre sa place ce serait s'identifier avec lui. Les signes ont donc dans ce cas un rapport de *disjonction* les uns vis-à-vis des autres : à un emplacement donné, on peut placer un signe *ou* un autre, *ou* encore un autre, etc. Hjelmslev appelle « relation » le rapport de conjonction caractéristique du processus textuel, et « corrélation » le rapport de disjonction typique du système de la langue. La *relation* entre signes successifs d'un texte acquiert un sens en fonction de leurs positions dans la constellation de *corrélations* qui constitue le système de la langue.

---

33. L. Hjelmslev, *Prolégomènes à une théorie du langage*, Minuit, 1971, p. 53.

À la suite de cet examen préparatoire, la différence des modes d'accès observationnels devient assez manifeste. L'accès observationnel à un processus locutoire, à un texte, est immédiat, puisqu'il consiste simplement à relever une séquence de signes. En revanche, l'accès au système de la langue est médiat : il s'effectue par l'analyse réflexive d'un corpus immense (*a priori* illimité) de processus locutoires et de textes. Conformément à la caractérisation initiale de l'observation, les deux types d'accès ont une valeur prédictive. Pas au même degré de généralité, toutefois. La connaissance et la compréhension d'un texte permettent de prévoir dans une certaine mesure ce qui le suit et s'y enchaîne en limitant le champ local des possibilités. En revanche, la connaissance du système de la langue contraint strictement tout futur texte et tout futur discours à se maintenir dans un champ universel de possibilités de type « grammatical ».

La raison du caractère « complémentaire », mutuellement exclusif, des approches synchronique et diachronique de la langue, est aisément identifiable à partir de cette analyse de leurs différences de modes de connexion et de voies d'accès. L'observation d'un processus de langue, ou d'un texte, oblige à y admettre une certaine latitude créative, et par conséquent à ouvrir la voie à un éclatement futur de tout système qui prétendrait le contraindre. L'observation du système de la langue, à l'inverse, suppose la mise hors-jeu (voire hors-la-loi) des écarts observés par rapport à lui, et la mise en place de limites strictes à vocation intemporelle.

L'analogie la plus tentante, bien que sans doute partielle, est ici celle de la troisième variété de complémentarité bohrienne : la complémentarité entre une actualité et une potentialité. L'actualité est celle du texte, tandis que la potentialité est celle du système de la langue, gros de tous les textes qui prétendraient lui appartenir mais porteur d'une sentence de bannissement à l'égard des textes qui s'en écarteraient.

Nous devons à présent examiner les aspects quantitatifs de l'analogie épistémologique entre théorie quantique et sciences humaines. La possibilité de lui donner une traduction formelle est un test décisif pour la pertinence de cette analogie, car c'est seulement en la poussant à son maximum de précision qu'on peut s'assurer de sa cohérence systématique et de sa fécondité.

La difficulté de transposer le parallèle épistémologique entre les deux disciplines sur un plan formel semble pourtant considérable, car les chercheurs qui s'y sont consacrés dans le passé n'ont pas été très nombreux. La question la plus délicate pour eux a consisté à savoir comment recueillir les contraintes propres à la configuration épistémologique commune dans un formalisme, en laissant de côté les particularités des divers domaines auxquels elle s'étend. Admettons, comme nous l'avons indiqué précédemment, que le formalisme quantique traduit avant tout une refonte de l'œuvre d'objectivation, imposée par les limites qu'elle rencontre en physique microscopique. Cela signifie-t-il que *tout* élément du formalisme quantique puisse être reconduit à cette contrainte épistémologique ? Et doit-on en inférer que le formalisme quantique tel que l'a formulé une génération entière de physiciens à partir de 1925 est transposable sans reste à un certain nombre de problèmes de psychologie, de sociologie, ou d'économie ? De toute évidence, la pure et simple transposition serait excessive, car beaucoup de traits du formalisme quantique sont explicitement dérivés d'un domaine répertorié de la physique, qu'il s'agisse de la mécanique ou de l'électrodynamique. C'est le cas par exemple de la structure de l'opérateur Hamiltonien qui intervient dans l'équation de Schrödinger : sa forme, identique à celle de la fonction hamiltonienne de la mécanique, exprime sans ambiguïté la connexion du formalisme quantique à ce domaine de la physique. Il reste donc à remonter plus haut sur l'échelle de la généralité, et à identifier le noyau épistémologique du formalisme quantique après en avoir mis de côté l'enveloppe « physique ». Où donc trouver ce noyau : dans l'algorithme probabiliste de la théorie quantique, dans sa structure d'espace de Hilbert, ou bien dans la structure générique sous-jacente de « treillis orthocomplémenté », qui a été extraite par Birkhoff et Von Neumann<sup>34</sup> et formulée comme « logique quantique » ? Chacune de ces options a été explorée (bien que de façon assez sporadique) au cours du vingtième siècle. Je mentionnerai trois de ces stratégies d'exploration, avant d'esquisser les idées développées par les auteurs qui interviennent dans le présent volume.

---

34. G. Birkhoff & J. von Neumann, J., « The Logic of Quantum Mechanics ». *Annals of Mathematics*, 37, 823-843, 1936.

Pour Jean-Louis Destouches, c'est dans la structure de l'algorithme probabiliste que s'exprime le mieux ce que le formalisme quantique doit à la situation épistémologique qu'affronte la physique microscopique. Destouches a adopté cette stratégie d'entrée de jeu, en essayant de construire ce qu'il a appelé une « théorie générale des prévisions » apte à fournir des évaluations probabilistes, puis en indiquant les traits particuliers permettant d'arriver à des versions quantique et classique de cette théorie. Mais au cours de sa recherche, menée en commun avec Paulette Destouches-Février, il a obtenu un résultat important justifiant rétrospectivement son choix initial. Ce résultat est énoncé dans le théorème suivant : « Si une théorie (des prévisions) est objectiviste, elle est en droit déterministe et il existe par suite un état intrinsèque du système observé (...) Par conversion, si une théorie (des prévisions) ne peut pas être considérée comme objectiviste, c'est-à-dire si elle est irréductiblement subjectiviste, alors elle n'est pas déterministe en droit ; par suite, elle est *essentiellement indéterministe* et il n'existe pas de grandeur d'état<sup>35</sup>. » Ces phrases denses font intervenir un vocabulaire parfois générateur de malentendus. Il faut donc les expliciter un peu afin de les comprendre. Pour commencer, le couple de termes « objectiviste-subjectiviste » traduit l'opposition entre une situation épistémologique où le travail d'objectivation peut être mené à son terme, c'est-à-dire où il aboutit à des déterminations propres à des objets autonomes, et une autre situation (typique de la physique quantique) où les phénomènes sont indissociables du contexte instrumental qui permet de les manifester. Cette traduction du terme « subjectiviste », aux connotations inappropriées, par un terme plus neutre comme « contextualiste », est justifiée par la définition qu'en donne Paulette Destouches-Février : « (Nous appelons) théorie objectiviste une théorie dans laquelle les résultats de mesure (peuvent) être considérés comme des propriétés intrinsèques des systèmes observés, et théorie irréductiblement subjectiviste une théorie dans laquelle les résultats de mesure ne (peuvent) pas être attribués au système observé comme propriétés intrinsèques et par suite ne (peuvent)

---

35. P. Destouches-Février, *La structure des théories physiques*, P.U.F., 1951. Voir également J.L. Destouches, *La mécanique ondulatoire*, P.U.F., coll. « Que sais-je ? » n°311, 1981, p. 90.

être attribués qu'au complexe appareil-système, sans analyse possible attribuant une part à chacun (...)»<sup>36</sup>.» En tenant compte ces définitions, le cœur du théorème s'énonce alors ainsi : *une théorie permettant de prévoir des phénomènes indissociables de leur mode d'accès est « essentiellement indéterministe »*. Autrement dit, ce type de théorie fait un usage des probabilités qui est strictement *irréductible*. Les probabilités ne peuvent ni en être éliminées au profit de « grandeurs d'état » anticipant avec certitude la valeur des principales variables, ni y être interprétées comme l'expression de l'ignorance (provisoire) dans laquelle nous sommes au sujet de ces grandeurs d'état. L'usage *inéliminable* des probabilités est donc, selon Jean-Louis Destouches et Paulette Destouches-Février, la marque générique tant recherchée de la situation épistémologique propre à la physique microscopique.

Cela étant admis, n'y a-t-il pas moyen d'identifier, parmi les traits du formalisme probabiliste de la théorie quantique, quelque chose qui serait *spécifiquement* expressif de cette situation épistémologique, après avoir mis à part ce qui relève du domaine physique auquel elle s'applique ? Opérer une telle discrimination est justement l'un des buts principaux que s'est assigné Destouches lorsqu'il a élaboré sa théorie générale des prévisions à partir de 1936. Cette théorie générale, écrit-il, permet de « (...) séparer les hypothèses de nature prévisionnelle des hypothèses strictement physiques<sup>37</sup> ». Il reste donc à décrire les principales étapes d'une opération de prévision au moyen de la théorie générale de Destouches, à faire voir ce qui, en elle, relève de la physique au sens restreint, et à en inférer, par soustraction, ce qui dépasse la seule physique.

À la première étape de l'opération, on définit l'« élément de prévision » initial caractéristique de la préparation expérimentale effectuée. Un « élément de prévision » est une entité mathématique permettant de déterminer autant de distributions de probabilités que de variables pouvant être mesurées à la suite d'une préparation expérimentale donnée. À la seconde étape,

---

36. P. Destouches-Février, *La structure des théories physiques*, op.cit., p. 275.

37. J.L. Destouches, « La théorie générale des prévisions », in : J.L. Destouches (ed.), *Prévisions, calcul, et réalités*, Gauthier-Villars, 1965.

on calcule l'évolution de l'élément de prévision, de manière que l'élément de prévision initial (valant pour l'instant de la préparation) soit transformé en un élément de prévision final (valant pour l'instant ultérieur de la mesure). On utilise pour cela un opérateur unitaire, qui a la propriété de garantir que la somme des probabilités évaluées à partir de l'élément de prévision reste égale à 1 à tout instant. À la troisième étape, on établit l'ensemble complet des éléments de prévision « propres », qui fournissent une probabilité 1 pour l'une des valeurs que peut prendre la variable qu'on a choisi de mesurer, et 0 pour toutes les autres valeurs de cette variable. À la quatrième étape, on détermine l'ensemble des coefficients tels que l'élément de prévision final puisse s'écrire comme une combinaison linéaire des éléments de prévision propres, pondérés par ces coefficients (on engendre ainsi un *espace vectoriel* d'éléments de prévision, pouvant, si certaines conditions supplémentaires sont remplies, acquérir la structure d'un espace de Hilbert). À la cinquième étape, enfin, on calcule la probabilité de chaque valeur de la variable mesurée à partir des coefficients précédents. Cette cinquième étape est particulièrement intéressante, car c'est elle qui permet de faire ressortir une empreinte caractéristique, sur la forme des évaluations probabilistes, de la situation épistémologique d'indissociabilité des phénomènes vis-à-vis de leurs modes d'accès expérimentaux. Lorsque les prévisions portent sur de tels phénomènes, et que leurs modes d'accès expérimentaux sont incompatibles deux à deux, on peut démontrer un théorème énonçant que les probabilités recherchées s'obtiennent en élevant le module des coefficients au carré. C'est là la fameuse « règle de Born », qui est bien connue en mécanique quantique, et qui engendre des distributions de probabilités isomorphes à la distribution des intensités d'une *onde*. Il est frappant de voir qu'à travers le théorème démontré par Paulette Destouches-Février, la règle de Born, aussi bien que les effets d'apparence ondulatoire typiques de la mécanique quantique, ont acquis le statut de conséquences directes de la *limite à l'objectivation* qui caractérise la physique microscopique.

Si nous sommes à présent certains qu'il y a bien un élément du formalisme prévisionnel quantique (la règle de Born) qui exprime directement la situation épistémologique d'indissociabilité des phénomènes vis-à-vis de leurs modes d'accès, il reste à se prononcer sur le rapport entre les *autres* éléments et cette situa-

tion. En pratique, on ne peut y parvenir que par soustraction, c'est-à-dire en écartant progressivement du formalisme ce qui relève de la physique *stricto sensu*, et en voyant ce qui reste. Qu'est-ce qui, dans la structure de la théorie générale des prévisions, provient de la physique? Deux choses, essentiellement : (a) la définition de chaque variable, car elle dépend de la procédure utilisée pour sa mesure ; et (b) l'opérateur unitaire qui sert à calculer l'évolution des éléments de prévision, car celui-ci exprime la dynamique du processus considéré. En mécanique quantique standard, cet opérateur d'évolution est inscrit dans l'équation de Schrödinger, qui fait intervenir un opérateur Hamiltonien dont nous avons déjà signalé qu'il est manifestement issu de la mécanique ou de l'électrodynamique classiques. Tout le reste du formalisme prévisionnel (y compris la structure d'espace vectoriel renforcée en structure d'espace de Hilbert) a donc *a priori* un degré de généralité plus grand que celui d'une simple théorie physique. La conséquence de cela, tirée par Destouches dans les années 1950, est que la théorie des prévisions s'applique « à bien d'autres domaines<sup>38</sup> » que la physique. Elle a en particulier été utilisée par Destouches en biologie et « dans des questions d'économétrie<sup>39</sup> », montrant ainsi sa pertinence pour au moins certaines sciences humaines.

Deux autres auteurs (Satosi Watanabe et Patrick Heelan) ont cherché le lieu de manifestation de la similitude entre les configurations épistémologiques de la physique quantique et des sciences humaines dans une structure encore plus profonde, sous-jacente au formalisme probabiliste. Ils ont pensé l'avoir trouvée dans l'« algèbre de treillis orthocomplémenté », qui remplace en théorie quantique l'algèbre booléenne ordinaire des propositions empiriques de la science classique. Cette structure est à la fois plus lâche et plus générale que celle de l'algèbre booléenne ; on peut la considérer comme un réseau de sous-algèbres booléennes n'ayant pas lui-même une structure booléenne. Comme l'indique S. Watanabe<sup>40</sup>, l'usage d'une

---

38. J.L. Destouches, « La théorie générale des prévisions », loc. cit.

39. J.L. Destouches, « La théorie générale des prévisions », loc. cit.

40. S. Watanabe, « Algebra of observation », *Supplement of the Progress of Theoretical Physics*, 37 & 38, 350-367, 1966. Voir aussi J. Schwinger, *Quantum Mechanics, Symbolism of Atomic Measurements*, Springer-Verlag, 2001.

algèbre de treillis orthocomplémenté en lieu et place de l'algèbre booléenne est la marque d'une altération profonde des conditions épistémologiques. L'algèbre booléenne des propositions empiriques est sous-tendue, indique-t-il, par le « postulat d'ensemble défini de vérité », selon lequel « chaque prédicat correspond bi-univoquement à un ensemble défini d'objets qui satisfont le prédicat ». Autrement dit, l'algèbre booléenne s'applique à un corpus de propositions qui, en attribuant des prédicats à des objets, définissent des sous-ensembles d'objets caractérisés par la possession intrinsèque de l'un au moins de ces prédicats (ces sous-ensembles sont appelés les « extensions » de chacun de ces prédicats). Elle est donc l'algèbre d'une structure *ensembliste* d'objets. Tout change lorsque le prédicat, manifesté à la suite d'un acte expérimental, ne peut pas être assigné à un objet comme son attribut intrinsèque ; ou encore lorsqu'à la suite d'une expérimentation, il y a une indétermination irréductible sur la nature du prédicat dont relève l'objet. Si c'est le cas, si l'on doit suspendre l'attribution de prédicats aux objets, si l'on ne peut même plus mettre à part des « qualités (ou prédicats) primaires » appartenant en propre aux objets, en les distinguant des « qualités (ou prédicats) secondaires » relatives aux méthodes d'accès expérimental, alors le « postulat d'ensemble défini de vérité » n'est plus respecté, et l'algèbre booléenne ne régit plus l'ensemble des propositions empiriques. Ce qui vient à la place de l'algèbre booléenne dépend des postulats qui régissent non plus la totalité des propositions empiriques, mais au moins les domaines de propositions empiriques correspondant à l'utilisation *d'un seul* moyen d'accès expérimental. Lorsque chacun de ces domaines sectoriels est régi *séparément* par le « postulat d'ensemble défini de vérité », et que par conséquent l'algèbre booléenne y est *localement* applicable, l'ensemble total des propositions empiriques peut être régi par une algèbre de treillis orthocomplémenté non distributive qui articule entre elles les sous-algèbres booléennes par une structure plus pauvre et donc plus universelle que ces dernières. Ces résultats sont désormais bien connus, dans le domaine de la physique quantique et de son ensemble de propositions empiriques contextuelles<sup>41</sup>.

---

41. R.I.G. Hughes, *The Structure and Interpretation of Quantum Mechanics*, Harvard University Press, 1989.

S. Watanabe décèle toutefois dans ces résultats une généralité qui excède de loin la seule physique. Afin de tester leur généralité, il les applique à la structure composite du langage courant, qui combine sans problème apparent des éléments mentalistes et physicalistes dans de nombreuses propositions<sup>42</sup>. L'option qu'on adopte au sujet de la légitimité ou de l'illégitimité d'une telle combinaison conditionne en partie la position qu'on occupe sur l'échiquier complexe du débat sur le problème esprit-corps. Considérer que les prédicats mentalistes (sur les états mentaux) ne devraient pas être combinés avec des prédicats physicalistes (sur les états du corps) dans une même phrase, mais que les uns et les autres sont séparément légitimes, c'est s'engager sur une voie qui mène, une fois cristallisée en dogme, au dualisme. Accorder la priorité aux prédicats physicalistes (en considérant les prédicats mentalistes comme redondants), c'est s'engager sur la voie du réductionnisme voire de l'éliminativisme. Il reste à voir quelles sont les conditions de possibilité de la curieuse association des deux genres de prédicats qui est si commune dans le langage ordinaire. S. Watanabe commence par souligner qu'elle n'a *a priori* rien d'évident. Tout s'oppose en première analyse à ce qu'une telle association ait un sens. La célèbre remarque déjà évoquée de G. Ryle<sup>43</sup>, selon laquelle les prédicats mentalistes sont de nature dispositionnelle alors que les prédicats physicalistes standard (à la grande échelle des unités biologiques) sont de nature catégorique, rend déjà presque baroque leur juxtaposition dans une même phrase. Cette différence de nature rend de surcroît peu plausible la stricte corrélation entre prédicats mentalistes et physicalistes : (a) une pure disposition peut admettre d'être conditionnée par une plage assez vaste d'états physiques, et (b) les renseignements tirés d'une disposition aussi complexe qu'un état mental sont de type probabiliste, alors que les propositions comportant des prédicats physicalistes macroscopiques sont de type assertorique. Mais ce n'est pas tout. Les modes d'accès aux deux types de prédicats sont profondément différents, pour ne pas dire incompatibles. L'accès aux prédicats physicalistes macro-

---

42. S. Watanabe, « A Model of Mind-Body Relation in Terms of Modular Logic », *Synthese*, 13, 261-302, 1961

43. G. Ryle, *The Concept of Mind*, *op. cit.*

scopiques s'effectue par le biais d'une observation ou d'une mesure uniques, tandis que l'accès aux traits dispositionnels que sont les prédicats mentalistes ne peut se faire qu'à travers l'étude d'une séquence ouverte, et inachevée, de comportements. Par ailleurs (comme l'avait signalé Bohr), l'accès à l'intégralité du substrat physique supposé d'un prédicat mental dispositionnel serait destructeur pour ce substrat, et donc éminemment perturbant pour l'état mental. Les deux langages, mentaliste et physicaliste, s'avèrent donc mutuellement exclusifs dans un sens très voisin de celui des variables conjuguées de la mécanique quantique, et pour des raisons analogues.

Dès lors, si l'on veut comprendre que le langage ordinaire puisse conjointement des propositions du langage mentaliste et du langage physicaliste, il faut recourir à une logique sous-jacente non-classique. On montre que cette logique est isomorphe à la logique quantique, c'est-à-dire à un treillis orthocomplémenté, dans lequel la loi de distributivité entre la conjonction et la disjonction ne vaut pas. Ainsi le problème esprit-corps se voit-il éclairer sous un jour profondément nouveau. Il découle de la vaine tentative de projeter sur le seul plan d'une logique booléenne deux classes de propositions et de prédicats qui s'excluent mutuellement, en raison de l'incompatibilité des modes d'accès qui leur correspondent. Il se résout lorsqu'on a accepté de tenir compte de la dualité de modes d'accès (sans pour autant l'hypostasier en un dualisme), à travers un langage sous-tendu par une logique non-booleenne isomorphe à la logique quantique.

Patrick Heelan<sup>44</sup> a étendu cette analyse pénétrante de Watanabe à tous les langages dépendants d'un contexte (géographique, culturel, etc.) qu'on aurait le projet d'unifier à travers un langage commun méta- ou trans- contextuel. Il en a même proposé une application en ethno-linguistique. Selon lui, un tel langage méta-contextuel (par exemple une langue pouvant être utilisée par les locuteurs de deux sous-groupes linguistiques tentant de communiquer entre eux en tenant compte des particularités de chacun)

---

44. P. Heelan, « Complementarity, context-dependance, and quantum logic », *Foundations of Physics*, 1, 95-110, 1970 ; P. Heelan, « Quantum and classical logic : their classical role », *Synthese*, 21, 2-33, 1970. Commentaire dans M. Bitbol, *Mécanique quantique, une introduction philosophique*, Flammarion, 1996.

est nécessairement sous-tendue par une logique isomorphe à la logique quantique de Birkhoff et Von Neumann.

Pour le montrer, Heelan considère deux langages expérimentaux booléens, et dépendants d'un contexte local :  $L_A$  et  $L_B$ . Puis, il définit une relation d'implication opérant au niveau méta-linguistique « ML » : un langage est dit « impliquer » un autre langage si et seulement si chaque phrase du premier est aussi une phrase du second. Après cela, il considère deux autres langages :

- $L_O$  qui implique tout langage,
- $L_{AB}$  qui est impliqué par tous les autres langages.

L'hypothèse cruciale est que  $L_{AB}$  est *plus riche* qu'un langage fait de toutes les propositions de  $L_A$ ,  $L_B$ , ainsi que de leurs conjonctions et disjonctions logiques. Cette hypothèse exprime indirectement la dépendance des langages à l'égard d'un contexte. En effet, s'il y a dépendance des langages à l'égard de contextes distincts, le contexte neuf (ou métacontexte) dans lequel ils *apparaissent* comme contextes, ouvre la possibilité de propositions qui ne se réduisent pas nécessairement à de simples combinaisons de celles qui sont autorisées dans chaque contexte pris à part.

Ces définitions et cette hypothèse étant posées, Heelan poursuit en définissant deux foncteurs  $\otimes$  et  $\oplus$  dans le langage métacontextuel ML, qui sont formellement équivalents à « et » et « ou » dans les langages standard.  $\otimes$  désigne la « borne inférieure maximale » d'un ensemble de langages connectés par la relation d'implication, et  $\oplus$  leur « borne supérieure minimale ». À partir de là, on peut montrer que la structure du langage métacontextuel ML ne peut être qu'un treillis non-distributif orthocomplémenté (exactement isomorphe à la logique quantique) : l'opération  $\oplus$  n'est pas distributive par rapport à l'opération  $\otimes$ , de la même façon que l'opération « ou » n'est pas distributive par rapport à l'opération « et » en logique quantique. En bref, il apparaît que la structure de la logique quantique est la condition de possibilité d'un métalangage permettant d'unifier un ensemble de langages relatifs à un contexte. Cette conclusion formelle, à usage ethno-linguistique, déborde manifestement de beaucoup le domaine de la physique.

Les chapitres de cet ouvrage collectif s'inscrivent dans les lignes de recherche assez peu explorées qui viennent d'être

esquissées. Ils analysent les parallèles aussi bien qualitatifs que formels entre la configuration épistémologique de la physique quantique et celle de divers secteurs des sciences humaines, allant de la psychologie de la perception au marché des produits financiers, en passant par la sociologie et la théorie de la décision. En voici une brève présentation.

Jean-Pierre Dupuy, pour commencer, se penche sur quelques-uns des paradoxes du choix rationnel dont il a fait un usage remarquable en éthique de la décision<sup>45</sup>. Le paradoxe principal est celui de Newcomb<sup>46</sup>. L'auteur de ce paradoxe est un spécialiste de physique quantique, et Jean-Pierre Dupuy devine que cela n'a rien d'une coïncidence. Quel peut donc bien être le rapport entre le contenu du paradoxe de Newcomb et la théorie quantique? Afin de le comprendre, il faut d'abord remarquer que la résolution du paradoxe de Newcomb et des paradoxes apparentés demande d'admettre une forme de causalité rétrograde de l'avenir sur le passé, ou plutôt de *l'anticipation sur l'action*: dans certains cas, l'anticipation peut devenir auto-réalisatrice en orientant adéquatement l'action présente; dans d'autres cas l'anticipation peut être auto-inhibitrice, en incitant à agir de telle sorte que son contenu (redoutable) ne se réalise pas. Corrélativement, si l'on ne veut pas se résoudre à perdre l'idée de libre-arbitre, on est conduit à se «débarrasser non seulement du principe de fixité du passé, mais aussi du *principe de réalité du passé*». Il faut en particulier admettre qu'une prédiction «certaine» effectuée dans le passé à propos d'actions futures peut avoir à être modifiée après coup par un acte librement accompli au présent. Une conséquence frappante de ces curieuses boucles temporelles est l'apparition de formes inédites d'évaluations probabilistes, apparentées de très près aux *superposition d'états* de la mécanique quantique.

---

45. J.-P. Dupuy, *Pour un catastrophisme éclairé*, Seuil, 2002.

46. R. Nozick, «Newcomb's problem and two principles of choice», in : N. Rescher (ed.), *Essays in Honor of Carl G. Hempel*, Reidel, 1969; T.M. Benditt & D.J. Ross, «Newcomb's paradox», *British Journal for the Philosophy of Science*, 27, 161-164, 1976; R. Campbell & L. Sowden (eds.), *Paradoxes of Rationality and Cooperation*, University of British Columbia Press, 1985.

Rappelons de quoi il s'agit. Selon P.A.M. Dirac, « quand un état est formé par la superposition de deux autres états, il a des propriétés qui sont de quelque façon vague *intermédiaires* entre celles des deux états originaux<sup>47</sup> ». Plus techniquement, l'effet d'une superposition d'états se manifeste à travers la forme très singulière des évaluations probabilistes qu'on peut en dériver. Si, comme en physique classique, on a affaire à des « mélanges statistiques » d'états, les événements dont on veut calculer les probabilités peuvent être considérés comme strictement disjoints, et comme arrivés (ou devant arriver) d'eux-mêmes dans la nature. La nécessité d'utiliser des probabilités ne résulte dans ce cas que de l'*ignorance* dans laquelle on se trouve au sujet de ces événements à la fois séparés les uns des autres, et autonomes. Les évaluations probabilistes en portent la marque à travers leur stricte conformité à la théorie standard de Kolmogorov<sup>48</sup>. Mais dans le cas d'une superposition d'états, typique de la théorie quantique, les choses sont bien différentes. D'une part, les événements dont on cherche à calculer la probabilité ne sont pas complètement disjoints ; des effets d'interférence analogues à un phénomène ondulatoire se manifestent entre eux (ce qui exclut que les évaluations probabilistes obéissent *dans leur ensemble* à toutes les conséquences de la théorie de Kolmogorov<sup>49</sup>). D'autre part, ces événements ne peuvent pas être considérés comme arrivés d'eux-mêmes dans la nature ; leur survenue est suspendue à l'accomplissement d'un acte expérimental qui n'a pas encore eu lieu. Les probabilités n'expriment pas dans ce cas une simple ignorance, mais une indétermination ; une indétermination qui est liée à l'impossibilité de dissocier les événements de la situation expérimentale globale dans laquelle ils s'inscriront.

Or, c'est bien quelque chose comme cela qui se passe dans les problèmes de théorie de la décision décrits par J.-P. Dupuy. Dans l'un de ces problèmes, la valeur élevée qu'on attribue à la probabilité qu'une catastrophe arrive diminue la probabilité effective

---

47. P.A.M. Dirac, *The principles of quantum mechanics*, Oxford University Press, 1958, p. 13.

48. A. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Co., 1950.

49. M. Bitbol, *Mécanique quantique, une introduction philosophique*, Champs-Flammarion, 1997, p. 130.

que cette catastrophe n'arrive pas, en favorisant la décision d'agir pour l'éviter. On peut bien dire que les événements futurs (du type « survenue ou non d'une catastrophe ») *interfèrent*, qu'ils ne sont pas disjoints mais *superposés* dans l'évaluation probabiliste qu'on en fait. Par ailleurs, comme en mécanique quantique, la raison pour laquelle cette superposition se fait jour est que la probabilité ne concerne pas un événement qui est survenu ou qui va survenir de lui-même dans la nature. La probabilité concerne un événement suspendu à la décision que peut prendre (ou ne pas prendre) celui qui fait cette évaluation. Autrement dit, elle exprime une indétermination liée à l'impossibilité de dissocier l'événement de la situation pratique globale dans laquelle il s'inscrit.

Même si J.-P. Dupuy ne les relève pas, il y a bien d'autres similitudes frappantes entre sa configuration décisionnelle et la théorie quantique. L'une d'entre elles concerne le cœur de sa démonstration, à savoir la pertinence de boucles de rétroaction entre ce qui est accompli au présent et ce que l'on prévoit pour l'avenir. En effet, il existe une façon de lire le formalisme quantique qui fait de ses traits particuliers (comme les superpositions d'états) une conséquence directe de boucles temporelles incluant une causalité rétrograde (futur vers passé) aussi bien que la causalité antérograde (passé vers futur). J.G. Cramer<sup>50</sup>, en particulier, a démontré qu'on peut dériver bon nombre d'éléments de la théorie quantique en utilisant un modèle combinant des ondes retardées qui partent du passé pour sonder les possibilités d'événements futurs, et des ondes avancées qui reviennent du futur chargées des informations obtenues par ce coup de sonde. Même si l'interprétation de Cramer reste très discutée, et même si elle est loin de résoudre tous les problèmes qui se posent en théorie quantique, les quelques aperçus frappants qu'elle permet d'obtenir montrent qu'elle doit avoir saisi un aspect non-négligeable de la physique microscopique. L'aspect pertinent ici n'est sans doute pas une remontée « réelle » d'influences causales du futur vers le passé, mais une transcription de la dépendance mutuelle des *possibilités* futures dans les *prévisions* présentes.

La question du marché des produits dérivés, en particulier les « options d'achat ou de vente » pour des actions en bourse, que

---

50. J.G. Cramers, « The Transactional Interpretation of Quantum Mechanics », *Reviews of Modern Physics*, 58, 647-688, 1986.

décrit ensuite E. Ayache, a beaucoup d'affinités avec la théorie de la décision vue par J.-P. Dupuy. De toute évidence, le prix actuel de ces produits dépend de l'évaluation que les acteurs du marché en font, et aussi de l'évaluation qu'ils font du prix futur des actions sur lesquelles sont basées les options. Le cours des options est dès lors également dépendant d'une boucle temporelle, et d'un engagement des acteurs dans cette boucle. Au risque d'aboutir à des évolutions auto-référentielles, pour ne pas dire autistiques, qui contribuent aux trop célèbres « bulles » financières. Mais l'outil prédictif dont se servent les traders, pour peu qu'il soit formalisé et que sa logique soit énoncée, doit s'élever au-dessus du contexte particulier dans lequel est avancée l'évaluation, et valoir pour tout contexte ; il a donc en principe le genre de statut *méta-contextuel* typique des éléments du formalisme probabiliste de la théorie quantique. E. Ayache signale toutefois d'emblée que son parallèle entre la théorie de l'évaluation des options et la théorie quantique n'est que partiel, et relève plus de l'analogie de situation (entre le trader et l'expérimentateur), et de la stratégie de réflexion philosophique, que de l'isomorphisme strict.

Le chapitre suivant, dont je suis l'auteur, examine la manière dont se résolvent en pratique les conflits de perspectives dans les sciences humaines. Je pense en particulier au conflit de perspective entre l'acteur et le spectateur, entre le participant à une forme de vie sociale et le socio-anthropologue. En apparence, ces conflits sont insolubles car ils donnent lieu à des analyses rendues incompatibles par le type d'intérêt qu'elles expriment. Pourtant, l'imputation d'incommensurabilité entre points de vue et intérêts s'avère exagérée. Il existe un niveau où le dialogue est possible ; mais atteindre ce niveau exige de revenir à un stade d'indécision entre perspectives, entre statuts, entre identités du chercheur, qui s'apparente à celui d'une superposition d'états quantiques. Plusieurs applications de cette stratégie de remontée en-deçà du moment de la « réduction de l'état » sont évoquées, de la psychologie de la perception à l'histoire des civilisations.

Les chapitres de la seconde partie du livre approfondissent l'enquête, jusqu'à établir des correspondances précises et formelles entre théorie quantique et sciences humaines.

Le texte de H. Atmanspacher et de son équipe se donne pour objectif de répondre à la question cruciale qui conditionne toute tentative de rapprochement entre théorie quantique et

sciences humaines : comment faire le tri entre ce qui, dans la mécanique quantique, relève de la physique *stricto sensu*, et ce qui exprime plus largement la situation de connaissance que partage la théorie microphysique avec beaucoup d'autres champs d'études, y compris parmi ceux qui relèvent des sciences humaines ? Il en résulte un schéma algébrique dont l'axiomatique est plus pauvre que la mécanique quantique, mais qui contient cette dernière comme un cas particulier : la théorie quantique faible<sup>51</sup>. Cette théorie générale formalise l'incompatibilité mutuelle des observables en des *relations de commutation*, et elle permet de dériver l'intrication des états comme conséquence de l'incompatibilité des observables locales et globales. Mais elle ne comporte pas de valeur analogue à la constante de Planck, et ne fixe donc ni une échelle quantitative à l'incompatibilité des observables, ni les relations d'indétermination qui en résulteraient ; par ailleurs, elle ne postule pas l'additivité des observables, ce qui la soustrait à la structure probabiliste et à la structure d'espace de Hilbert ; enfin, elle traite des systèmes globaux (ou plutôt des degrés de liberté observables globaux) sans imposer une règle de décomposition en sous-systèmes (ou en degrés de liberté observables locaux). Il s'agit là si l'on veut d'une théorie proto-quantique plutôt que quantique, qui est susceptible d'enrichissement axiomatique progressif pouvant la conduire en fin de parcours à prendre en charge le domaine physique de validité de la mécanique quantique. Une application de cette théorie proto-quantique est proposée pour les cas de bi-stabilité en psychologie de la perception. Le remarquable accord *quantitatif* entre le temps de basculement prévu et le temps de basculement observé dans le phénomène de bi-stabilité perceptive, offre un argument très convaincant en faveur de la pertinence de la démarche consistant à étendre le cœur formel de la théorie quantique à une science humaine comme la psychologie

---

51. H. Atmanspacher, H. Römer, & H. Walach, « Weak quantum theory: complementarity and entanglement in physics and beyond », *Foundations of Physics*, 32, 379-406, 2002 ; H. Atmanspacher, T. Filk, & H. Römer, « Weak Quantum Theory: Formal Framework and Selected Applications », in : G. Adenier, A. Yu. Khrennikov, & Th. M. Nieuwenhuizen, *Quantum Theory: Reconsideration of Foundations – 3*, Springer-Verlag, 2006. Une adaptation française de ce dernier article est incluse dans le présent ouvrage.

de la perception. Le pas supplémentaire d'autres auteurs, qui se sont autorisés de ces succès quantitatifs pour soutenir une conception réduisant la conscience perceptive à un système physique régi par la mécanique quantique<sup>52</sup>, a en revanche été fortement mise en question<sup>53</sup>. Cela étaye l'idée d'un rapport purement épistémologique (plutôt qu'ontologique) entre théorie (proto)-quantique et psychologie de la perception.

Le chapitre qui suit, dû à Hervé Zwirn, aborde un grand nombre de traits non-classiques de la théorie de la décision (comme ceux qui sont liés au dilemme du prisonnier, ou à la grille de lecture préalable utilisée par les sujets pour évaluer les choix proposés), en associant des développements formels de type quantique à de précieuses clarifications philosophiques. La raison de la pertinence, pour ne pas dire du caractère indispensable du paradigme quantique dans ces questions de choix rationnel est que *les préférences ne sont pas simplement révélées, mais élaborées à l'instant du choix*. Exactement comme, en physique microscopique, les propriétés ne sont pas tant révélées que co-émergentes dans l'acte expérimental. L'idée d'une *superposition* de préférences, et d'effets d'interférences entre elles, n'a alors plus rien d'artificiel. Elle permet de rendre raison d'un grand nombre d'«étrangetés» des choix des agents, sans introduire de correctifs *ad hoc* à des théories marquées par le présupposé de la pré-détermination des préférences.

Le chapitre de P. La Mura, plus technique, vise pour sa part à mettre un terme à certains conflits qui surgissent entre la théorie classique de la décision de Von Neumann et Morgenstern, fondée sur la notion d'«utilité espérée», et les décisions effectives des agents dans certaines situations un peu hors-norme. Deux conflits de cette sorte sont particulièrement visés : les paradoxes d'Allais et d'Ellsberg. Le paradoxe d'Allais comporte des traits manifestement analogues à la configuration de la microphysique, puisqu'ici les modalités de la décision «inter-

---

52. E. Manousakis, «Quantum theory, consciousness and temporal perception: binocular rivalry», arXiv:0709.4516v1, 2007; E. Manousakis, «Founding quantum theory on the basis of consciousness», *Foundations of Physics*, 36, 795-838, 2006.

53. K. Thomsen, «Is quantum mechanics needed to explain consciousness?», *NeuroQuantology*, 6, 43-45, 2008.

fèrent» à la manière dont les deux trajectoires possibles d'une particule à travers une paire de fentes d'Young interfèrent. La Mura propose dès lors de remplacer le calcul classique des probabilités par un formalisme probabiliste «projectif» en partie isomorphe à celui de la théorie quantique. Ce formalisme est dit projectif parce qu'il opère : (a) par projection de vecteurs d'un espace de Hilbert sur une base correspondant aux options disponibles ou perçues, puis (b) par élévation au carré de cette projection. La reformulation projective des anticipations des agents permet en fin de parcours de résoudre les paradoxes de la théorie classique de la décision de manière simple et moins artificielle que d'autres propositions ne faisant pas appel à ce formalisme quasi-quantique.

Les deux derniers chapitres dont les auteurs sont V. Danilov et A. Lambert-Mogiliansky, développent et systématisent l'étude de la théorie de la décision dans une perspective formellement quantique. Leur remarque initiale est que la demande même, faite aux agents, de prendre une décision, altère leur état d'indétermination initiale, voire leurs préférences sous-jacentes. Dès lors, l'ordre dans lequel les demandes de prise de décision sont formulées influe sur la nature des décisions effectivement actées. Il s'agit là d'une situation typique de non-commutativité des opérations (ici, des décisions et de leur arrière-plan de croyance). Un formalisme apte à rendre raison de la prise de décision de «l'homme non-classique», dont les options sont «essentiellement contextuelles», se voit par la suite systématiquement exposé. Le principe qui le régit est de retenir le squelette structural de la logique quantique (les treillis ortho-complémentés ou ortho-treillis), en laissant de côté les traits proprement «physiques» de la théorie quantique. Plusieurs applications de ce formalisme à la psychologie, aux sciences du comportement, et aux sciences sociales, sont ensuite proposées. Le formalisme quasi-quantique est en particulier utilisé de manière conséquente et approfondie pour expliquer le phénomène de «renversement de préférences», dans lequel les préférences exprimées des agents se modifient, voire s'inversent, avec l'ordre séquentiel des demandes qui leur sont faites. Des développements ultérieurs sont mis en œuvre afin de reformuler la théorie de la décision dans l'incertain (lorsque les résultats des actions sont inconnus), initialement proposée par L. Savage. Cette reformulation,

fondée ici encore sur la structure de treillis orthocomplémenté de la logique quantique, permet non seulement de mieux comprendre la théorie de Savage, mais également d'en généraliser le champ d'application et de l'appliquer à quantité de configurations non-classiques de la théorie des jeux.

Peut-être, cependant, l'enseignement le plus intéressant qu'on puisse tirer de ces extrapolations d'éléments de la théorie quantique aux sciences humaines ne concerne-t-il pas ces dernières, mais la physique elle-même. Dans la mesure où des succès prédictifs sont obtenus dans le champ de la psychologie perceptive ou de la théorie de la décision en appliquant un formalisme proto- ou quasi-quantique, il devient par ricochet difficile de nier la signification épistémologique-réflexive de la théorie quantique. Car le seul point commun plausible entre psychologie, sociologie, économie, processus de décision, et physique quantique relève du type d'acte de connaissance que ces disciplines mettent en jeu. La thèse provocatrice avancée par Heisenberg (selon lequel, en microphysique, « le sujet de la recherche n'est plus la nature en soi, mais la nature livrée à l'interrogation humaine »<sup>54</sup>) peut désormais se prévaloir de sa concrétisation dans une multiplicité de domaines dont l'isomorphisme révèle la communauté de positionnement épistémologique à l'égard de ce qu'on appelle encore, par habitude, leur « objet »<sup>55</sup>.

Michel Bitbol

*CREA CNRS/École Polytechnique  
32 Bd Victor, 75015 Paris, France*

---

54. W. Heisenberg, *La nature dans la physique contemporaine*, op. cit., p. 137.

55. L'actualité de ces questions s'est manifestée tout récemment par la publication de : P. Bruza, D. Sofge, W. Lawless, K. Van Rijsbergen ; M. Klush (eds), *Quantum interaction*, Springer, 2009. Ce livre traite des applications du formalisme de la théorie quantique à l'intelligence artificielle, à la linguistique, aux sciences cognitives, aux techniques de recherche de l'information sur internet, à la science politique, à l'économie, à la science de organisations, et à la science des interactions sociales.



Première partie

# Réflexions épistémologiques



# Paradoxes « quantiques » et libre-arbitre de l'homme<sup>1</sup>

L'histoire que je vais raconter commence par un paradoxe affectant la théorie de la décision rationnelle et que nous devons, dit-on, à un physicien quantique nommé William Newcomb : le paradoxe de Newcomb. Ce qui relie ce paradoxe à la mécanique quantique est loin d'être évident à première vue. L'histoire se clôt par un autre paradoxe, pragmatique cette fois, celui de l'efficacité de la dissuasion nucléaire. La solution commune que je propose à ces deux paradoxes résonne d'une certaine manière avec des thèmes et des figures de la mécanique quantique : le temps s'y met en boucle, le passé et l'avenir se déterminant mutuellement ; certaines solutions à des problèmes de décision prennent la forme de superposition d'états. Y a-t-il là plus qu'analogies formelles ? Quant aux étapes intermédiaires du parcours que je propose, on voit encore moins ce que la mécanique quantique viendrait y faire : il est question de problèmes qui relèvent de la théorie du choix rationnel, de la philosophie morale et politique, de la théologie et de la métaphysique. Je pense cependant que dans une réflexion collective consacrée aux apports de la mécanique quantique aux sciences humaines, ce que j'appelle ici des « résonances » ne sont pas pures coïncidences. Je serais très reconnaissant à tout lecteur qui me permettrait d'y voir plus clair.

## 1. LE PARADOXE DE NEWCOMB

Dans sa lettre du 4 décembre 17\*\* au vicomte de Valmont, la marquise de Merteuil écrit ceci :

Voyons ; de quoi s'agit-il tant ? Vous avez trouvé Danceny chez moi, et cela vous a déplu ? à la bonne heure : mais qu'avez-vous pu en

---

1. Communication à la journée « Mécanique quantique et sciences humaines », Michel Bitbol (org.), CREA-École Polytechnique, 24 mars 2006.

conclure ? ou que c'était l'effet du hasard, comme je vous le disais, ou celui de ma volonté, comme je ne vous le disais pas. Dans le premier cas, votre Lettre est injuste ; dans le second, elle est ridicule : c'était bien la peine d'écrire ! Mais vous êtes jaloux, et la jalousie ne raisonne pas. Hé bien, *je vais raisonner pour vous*. Ou vous avez un rival, ou vous n'en avez pas. Si vous en avez un, il faut plaire pour lui être préféré ; si vous n'en avez pas, il faut encore plaire pour éviter d'en avoir. Dans tous les cas, c'est la même conduite à tenir : ainsi, pourquoi vous tourmenter ? pourquoi, surtout, me tourmenter moi-même ? Ne savez-vous donc plus être le plus aimable ? et n'êtes-vous plus sûr de vos succès ? Allons donc, Vicomte, vous vous faites tort<sup>2</sup>.

Qui a su mieux dire la logique du rapport de séduction lorsqu'il devient guerre des sexes que l'officier d'artillerie Choderlos de Laclos ? Les théoriciens français qui empruntent, pour décrire cette structure, une fable américaine vulgaire, dénommée « dilemme du prisonnier », seraient bien avisés de puiser dans les ressources de leur littérature nationale. Le raisonnement de la marquise de Merteuil met en scène de façon saisissante la logique apparemment implacable de ce que les théoriciens modernes de la décision désignent sous le nom de *stratégie dominante*. Selon Merteuil, Valmont n'a le choix qu'entre deux stratégies : ou bien se montrer jaloux, se plaindre, manifester son ressentiment, se conduire comme un mari trompé, etc. ; ou bien, ne jamais cesser de lutter pour plaire et toujours s'efforcer de rester le meilleur dans la guerre de séduction. Or, quelle que soit la situation (inconnue de lui, qui souffre les affres du doute) dans laquelle Valmont se trouve – supplanté ou non par un rival –, le mieux qu'il ait à faire (toujours selon Merteuil), c'est de choisir la seconde stratégie : « Dans tous les cas, c'est la même conduite à tenir ». Le meilleur choix ne fait aucun doute, il n'y a donc pas lieu de se tourmenter. *L'incertitude sur la situation n'en entraîne aucune sur la décision qu'il faut prendre, puisque celle-ci est indépendante de la situation*. Le meilleur choix constitue, dans ce cas, une « stratégie dominante ».

La force de ce raisonnement est telle qu'il a été érigé au rang de vérité axiomatique par l'un des fondateurs de la théorie de la décision, Leonard Savage. Le schéma d'axiome en question, dit « principe de la chose certaine » (noté PCC dans ce qui suit ; *Sure*

---

2. Choderlos de Laclos, *Les Liaisons dangereuses*, Lettre CLII. Je souligne.

*Thing Principle* en anglais), se dit en termes de préférences : si un sujet préfère une option  $p$  à une autre  $q$  dans le cas où l'état du monde appartient à un sous-ensemble  $X$  ; et préfère également  $p$  à  $q$  dans le complémentaire de  $X$  ; alors il *doit* préférer  $p$  à  $q$  même s'il ne sait pas si l'état du monde appartient à  $X$  ou au complémentaire de  $X$ .

L'ennui, c'est que cette logique est responsable d'un grand nombre des maux qui affectent les sociétés modernes. Citons simplement : la très grande difficulté que les hommes ont à mettre leur confiance les uns dans les autres ; leur incapacité foncière à gérer leurs conflits d'une façon non destructrice pour tous. S'ils arrivent néanmoins à faire société, c'est en échappant au joug de la logique en question. Le lien social serait-il donc irrationnel ? [Dupuy, 1992b].

La psychologie, d'ailleurs, semble contredire la logique. Des expériences de psychologie cognitive, menées à l'université Stanford par le regretté Amos Tversky, montrent que les sujets violent le PCC de façon systématique. Cependant, il se pourrait tout simplement que ces sujets soient « irrationnels » et qu'une éducation à la rationalité les ramène à la raison.

Le paradoxe de Newcomb met précisément en scène un problème de choix où le bon sens semble s'opposer au PCC.

Soit deux boîtes, l'une, transparente, qui contient mille euros, l'autre, opaque, qui soit contient un million de euros, soit ne contient rien. Le choix de l'agent est soit H1 : ne prendre que le contenu de la boîte opaque, soit H2 : prendre le contenu des deux boîtes. Au moment où le problème est posé à l'agent, un Prédicteur a déjà placé un million de euros dans la boîte opaque si et seulement si il a prévu que l'agent choisirait H1. L'agent sait tout cela et il a une très grande confiance dans les capacités prédictives du Prédicteur. Que doit-il faire ?

Une première argumentation conclut que l'agent doit choisir H1. Le Prédicteur l'aura prévu et l'agent aura un million. S'il choisissait H2, il n'aurait que mille euros. Le paradoxe est qu'une seconde argumentation paraît tout aussi décisive, alors qu'elle conclut de manière opposée. Lorsque l'agent fait son choix, il y a ou il n'y a pas un million de euros dans la boîte opaque : à prendre les deux boîtes, il gagne évidemment mille euros de plus dans l'un et l'autre cas. H2 est donc sa stratégie dominante.

Trois quarts des sujets « ordinaires » font le choix H1, qui viole le PCC. Ils reçoivent chacun un million d'euros. On ne s'étonne guère que presque tous les philosophes professionnels s'en tiennent à la stratégie dominante H2. Chacun d'eux reçoit mille euros avec en prime la certitude d'avoir raison.

## 2. ÊTRE COMPATIBILISTE OU NE L'ÊTRE PAS ?

Toute personne qui a passé des heures, des mois ou des années à se torturer les méninges sur le paradoxe de Newcomb se persuade généralement au bout d'un certain temps qu'elle a trouvé *la* solution. Je n'échappe pas à la règle, la différence étant que ma solution est la bonne ! Je la dois pour l'essentiel aux recherches du philosophe et théologien calviniste américain Alvin Plantinga. Celui-ci a reconnu dans le problème de Newcomb un terrible défi porté à la défense traditionnelle du *compatibilisme*, c'est-à-dire l'ensemble des doctrines qui soutiennent qu'il n'est pas contradictoire de poser à la fois un Dieu omniscient et un agent doté de libre-arbitre, au sens où il pourrait agir autrement qu'il le fait.

### 2.1. La solution de Guillaume d'Occam

Si Dieu joue le rôle du Prédicteur de Newcomb, sa prescience est par définition *essentielle*, c'est-à-dire qu'elle est le cas dans tous les mondes possibles. Un Dieu prescient de manière essentielle semble interdire le libre-arbitre, selon l'argument incompatibiliste suivant.

Si Dieu existait au temps  $t_1$  et qu'il a prédit en  $t_1$  que l'agent S ferait X en un temps plus tardif  $t_2$ , la prescience essentielle de Dieu s'exprime par la relation suivante liant deux événements :

❶ « Dieu existait au temps  $t_1$  et il a prédit en  $t_1$  que l'agent S ferait X à  $t_2$  » implique strictement « S fait X à  $t_2$  »,

où l'implication stricte est l'implication matérielle<sup>3</sup> dans tous les mondes possibles. Par ailleurs, avec les deux mêmes prémisses, on obtient :

---

3.  $p$  implique matériellement  $q$  si et seulement si, ou bien  $p$  est faux, ou bien  $q$  est vrai.

② Il n'y a rien que S puisse faire en  $t_2$  tel que, s'il le faisait, Dieu n'aurait pas prédit en  $t_1$  que S ferait X en  $t_2$ ,

en vertu du *principe de fixité du passé* : le passé est contre-factuellement indépendant de l'action présente. De ① et ② on dérive :

③ Quand un agent agit, s'il existait un prédicteur prescient de façon essentielle à un moment antérieur au temps de l'action qui a prédit son action, l'agent ne peut agir autrement qu'il le fait.

En d'autres termes, le libre-arbitre est incompatible avec la prescience essentielle.

Contre cette menace qui pèse sur le compatibilisme, une voie de sortie classique reste celle que le moine franciscain anglais Guillaume d'Occam imagina au XIV<sup>e</sup> siècle. Elle consiste à nier que le principe de fixité du passé s'applique à des faits qui ne sont pas strictement inscrits dans le passé. Une prédiction que Dieu a faite en un temps passé ne peut être considérée comme répondant à ce critère, ne serait-ce que parce qu'elle implique strictement la vérité d'une proposition qui concerne un fait strictement inscrit dans l'avenir, comme « tel agent libre fera ceci » (*futur contingent*). ② ne tenant plus, la conclusion ③ n'est plus valide.

## 2.2. Le défi du paradoxe de Newcomb et la solution d'Alvin Plantinga

Si Dieu ne se contente pas de prédire l'avenir, mais que, Dieu *providentiel*, il intervient dans le monde en fonction de sa prédiction – si, par exemple, il décide de placer ou non un million d'euros dans une boîte selon qu'il prévoit qu'un agent libre choisira de faire telle ou telle chose – la solution occamienne perd toute pertinence. C'est le mérite d'Alvin Plantinga de l'avoir immédiatement compris, lorsque, lui aussi, il s'est trouvé confronté au paradoxe de Newcomb (Plantinga, 1986). La prédiction que Dieu a faite dans le passé n'est peut-être pas strictement inscrite dans celui-ci, mais son action, si. La voie de sortie imaginée par Plantinga consiste à observer que Dieu étant prescient *dans tous les mondes possibles*, il n'est pas juste de poser ②. Au temps  $t_2$  S fait X, Dieu l'a prédit en  $t_1$ , soit ; mais si l'agent

est doté de libre-arbitre, on doit tenir pour vraie la proposition contrefactuelle suivante, laquelle contredit ② :

④ Si S faisait en  $t_2$  une autre action que X, disons Y, Dieu n'aurait pas prévu en  $t_1$  que S ferait X en  $t_2$ , puisque Dieu aurait prévu qu'il ferait Y.

En d'autres termes, si le principe de fixité du passé ne s'applique pas, ce n'est pas parce que ce qu'a fait Dieu dans le passé n'est relatif au passé qu'en apparence (on peut peut-être le dire de sa prévision, certainement pas de son action), mais parce que le libre-arbitre face à un prédicteur essentiellement prescient implique que l'agent est doté d'un *pouvoir contrefactuel sur le passé*.

Dans le problème de Newcomb avec un prédicteur prescient dans tous les mondes possibles, ce pouvoir s'exprime ainsi :

⑤ Si l'agent qui choisit la seule boîte opaque [H1], et y trouve de ce fait un million d'euros, avait choisi les deux boîtes, il aurait trouvé la boîte opaque vide et aurait dû se contenter des mille euros de la seconde boîte.

Les philosophes du choix rationnel qui s'accrochent au caractère «self-evident» du PCC objectent au raisonnement spontané de ceux qui choisissent de prendre la seule boîte opaque qu'ils s'attribuent un inconcevable pouvoir *causal* sur le passé. Ce que le raisonnement de Plantinga montre, c'est qu'il n'est nul besoin de postuler un tel pouvoir, car un pouvoir *contrefactuel* suffit à justifier le choix [H1], et ce pouvoir est la conséquence logique du compatibilisme. [Dupuy, 1992a ; 2006].

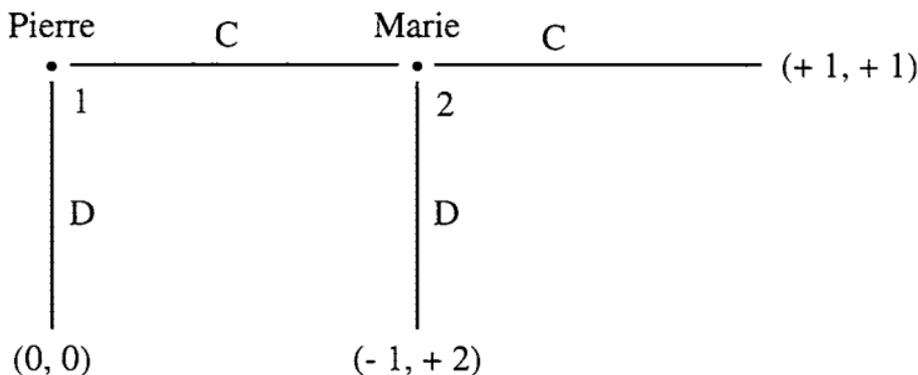
### 3. LE TEMPS DU PROJET

#### 3.1. Le défi du paradoxe du raisonnement rétrograde

Après avoir fait un bout de chemin avec Alvin Plantinga, j'ai dû me résoudre à reconnaître que sa solution non plus ne fonctionnait pas. C'est un autre paradoxe de la théorie du choix rationnel qui m'a conduit à cette conclusion : le paradoxe du raisonnement rétrograde [PRR dans ce qui suit ; l'anglais est *Backward Induction Paradox*.] Il existe des situations dans lesquelles le pouvoir *contrefactuel* sur le passé que possède l'agent

lui interdit *causalement* d'agir d'une certaine façon. Sauver le compatibilisme demande un prix métaphysique bien plus élevé que ce qu'imagine Plantinga. [Dupuy, 1997 ; 1998].

Soit le « jeu de la promesse » (*Assurance Game* en anglais) auquel, dans une démarche non formalisée, Hobbes, Hume et Kant consacrent des développements célèbres.



Temps : 1 et 2 ;

C : coopération ; D : défection

Un échange mutuellement avantageux entre Pierre et Marie est en principe possible, qui les mènerait de leurs situations actuelles – à savoir le vecteur  $(0, 0)$ , dont la première composante représente l'« utilité », ou tout autre indice supposé ordonner les préférences, de Pierre, et la seconde de Marie – à un état  $(+ 1, + 1)$  que l'un et l'autre préfèrent. Le problème naît du fait que pour une raison quelconque, l'échange n'a lieu que si Pierre fait le premier pas (C), auquel cas il court le risque que Marie ne fasse pas le second, empochant ce que Pierre lui donne sans opérer de contrepartie (Marie faisant alors D au temps 2, se retrouve avec  $+ 2$ , laissant Pierre avec  $- 1$ ).

Le raisonnement rétrograde nous convainc vite que l'échange ne peut se réaliser, alors même qu'il améliorerait le sort de l'un et de l'autre. Partons de la dernière étape, c'est-à-dire du temps 2 où Marie a la main. Il est rationnel pour elle de faire défection puisqu'elle obtient  $+ 2$  contre  $+ 1$  si elle coopère. Pierre en 1, quant à lui, a le choix entre faire le premier pas, auquel cas il anticipe que Marie ne fera pas le second et qu'il se retrouvera avec  $- 1$ , et ne pas bouger, c'est-à-dire faire D, auquel cas il obtient 0. Donc il ne bouge pas, et l'échange n'a pas lieu.

On se dit que ce résultat désastreux peut être évité grâce à l'institution de la promesse. Marie, puisqu'elle y a intérêt autant que Pierre, va, à l'instant 0, avant que le jeu commence, s'engager auprès de son partenaire à coopérer en 2 si celui-ci coopère en 1. Peine perdue ! Marie sait bien que le moment venu, c'est-à-dire au temps 2, elle aura intérêt à ne pas tenir son engagement. Pierre, qui lit dans ses pensées, le sait également. Marie a beau lui jurer ses grands dieux, elle n'est pas *crédible*. Pierre ne bouge donc pas. Telle est la forme que prend, dans ce cas, le PRR<sup>4</sup>.

Les théoriciens du choix rationnel tentent de sortir de ce mauvais pas en faisant de ce qu'ils nomment l'« éthique » une sorte de *Deus ex machina*, un supplément d'âme, qu'ils nomment parfois « confiance », qui viendrait suppléer cette défaillance de la rationalité. On dira par exemple que Marie, en violant sa promesse pour suivre ce que lui dicte la rationalité, souffrirait les affres de la mauvaise conscience. C'est consentir d'emblée au divorce de l'éthique et de la rationalité. Il y a mieux à faire.

J'ai imaginé de traiter le jeu de la promesse comme s'il s'agissait d'un problème de Newcomb dans lequel Pierre tiendrait le rôle du prédicteur essentiellement prescient et Marie celui de l'agent. Deux différences importantes séparent le jeu de la promesse ainsi réinterprété du problème de Newcomb originel. Comme le prédicteur de Newcomb, Pierre réagit à son anticipation du choix de Marie, mais il le fait d'une manière qui n'a pas la même apparence d'arbitraire, puisqu'il maximise son intérêt en tenant pour fixe l'action de Marie. Telle est la première différence. Pour comprendre la seconde, raisonnons comme Marie au départ du jeu se demandant ce qu'elle ferait si elle avait la main au temps 2 :

⑥ Si j'avais la main en 2, et que je jouais C, Pierre en 1 l'aurait prévu et, réagissant au mieux de son intérêt, il aurait lui-même joué C, me passant la main. Nous aurions l'un et l'autre + 1.

---

4. Très peu de théoriciens du choix rationnel accepteraient de considérer que le jeu de la promesse est déjà une incarnation du PRR. Il faut des jeux plus complexes, comme le « mille-pattes », pour qu'ils reconnaissent l'existence d'un paradoxe. L'un des avantages de ma théorie est de ne pas faire cette distinction. [Dupuy, 2000].

⑦ Si j'avais la main en 2, et que je jouais D, Pierre en 1 l'aurait prévu et, réagissant au mieux de son intérêt, il aurait lui-même joué D, ce qui implique que je n'aurais pas la main en 2. D'où une contradiction.

Les deux prémisses de ⑦ menant à une contradiction, l'une entraîne la négation de l'autre. D'où :

⑧ Si Marie avait la main en 2, elle jouerait C.

Pierre en 1 est capable de simuler ce raisonnement de Marie. S'il joue C, étant donné ⑧ et ⑥, il obtient +1, contre 0 s'il joue D. Il coopère donc, ainsi que Marie, et l'échange mutuellement avantageux a lieu, ce qui réconcilie la rationalité et l'éthique.

Cependant, il apparaît que le pouvoir contrefactuel sur le passé de Marie, tel qu'il apparaît dans la disjonction entre ⑥ et ⑦, ainsi que son libre-arbitre, se sont envolés en fumée, puisqu'il lui est impossible de choisir D. Quelle est la nature de cette impossibilité? Peut-on encore sauver la compatibilité du libre-arbitre et de la prescience essentielle?

La voie de sortie que j'ai proposée est celle-ci [Dupuy, 2000]. Avant que Marie agisse, elle a bien le choix entre C et D. Si le choix de D est possible, c'est parce que, tant que Marie n'a pas agi, le passé – en l'occurrence le choix de Pierre – est encore indéterminé [*unbestimmt*]. C'est quand Marie se détermine à agir que son passé se détermine. Si elle choisissait D, elle serait empêchée d'agir. Il semble qu'elle n'aurait jamais pu choisir D, mais cette impossibilité est seulement rétrospective.

Le prix métaphysique à payer pour sauver le libre-arbitre est de se débarrasser non seulement du principe de fixité du passé, mais aussi du *principe de réalité du passé*. C'est sans doute ici que le vrai sens du paradoxe de Newcomb se révèle. Le physicien quantique William Newcomb – si tant est qu'il ait réellement existé<sup>5</sup> – a trouvé le moyen de reproduire dans un cadre macroscopique qui est celui des actions humaines une énigme philosophique qui concerne le monde de l'information quantique.

---

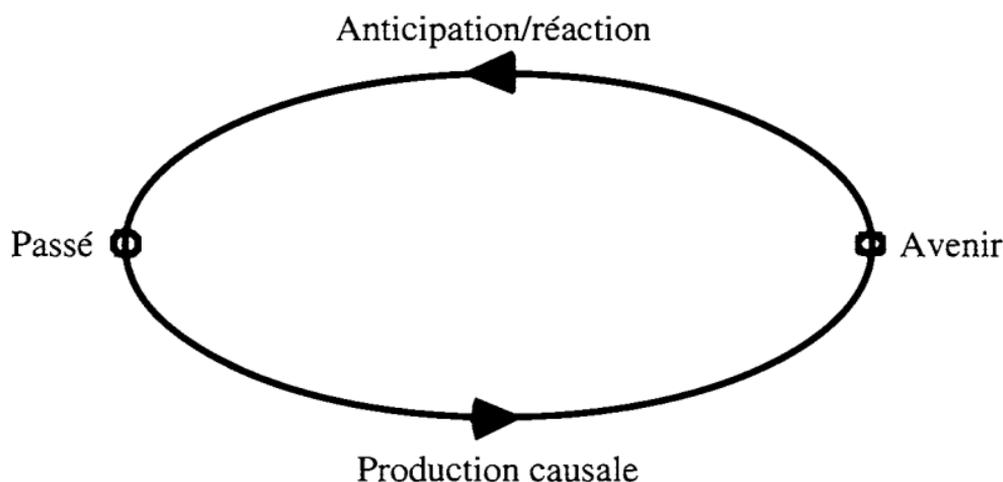
5. Comme d'autres, je subodore que Newcomb est une invention du philosophe américain qui le premier a écrit sur le fameux paradoxe : Robert Nozick.

Une fois que Marie a agi, il apparaît qu'elle n'aurait jamais pu agir autrement, et pourtant avant d'agir, elle pouvait agir autrement. L'avenir est nécessaire mais pas avant qu'il ne se produise. Une fois réalisé, il apparaît comme fixe, c'est-à-dire contrefactuellement indépendant de l'action présente. Cette combinaison d'une indétermination du passé tant que l'agent n'a pas agi et d'une fixité de l'avenir une fois que l'action a eu lieu sert à définir une métaphysique de la temporalité que j'ai nommée le *temps du projet*.

L'action, comme surgissant du néant, crée de la nécessité rétrospective, de la même manière que chez Bergson et son élève Sartre l'événement ne devient possible qu'en se « possibilisant ». Dans cette métaphysique bien particulière, la valeur de vérité des propositions qui comportent des termes de modalité comme le possible et le nécessaire doit être indexée sur le moment où elles sont exprimées.

### 3.2. La métaphysique du temps du projet

La métaphysique du temps du projet prend la forme d'une boucle, dans laquelle le passé et l'avenir se déterminent réciproquement :



La prévision de l'avenir dans le temps du projet consiste à chercher le point fixe d'un bouclage, celui qui fait se rencontrer une anticipation (du passé au sujet de l'avenir) et une production

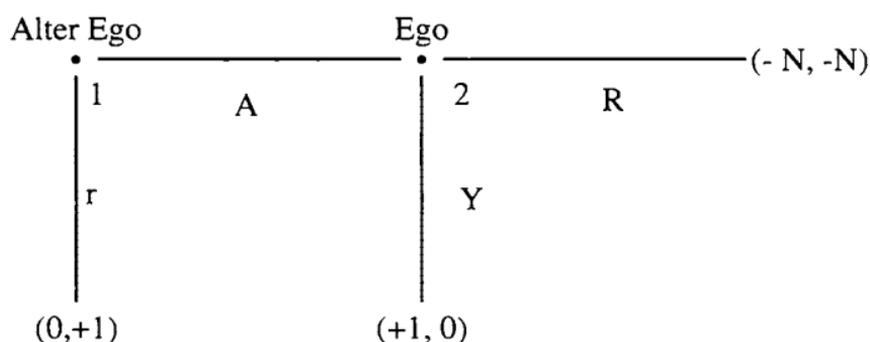
causale (de l'avenir par le passé). Le prédicteur, sachant que sa prédiction va produire des effets causaux dans le monde, se doit d'en tenir compte s'il veut que l'avenir confirme ce qu'il a prévu. Traditionnellement, c'est-à-dire dans un monde dominé par le religieux, cette figure est celle du prophète, et singulièrement celle du prophète biblique. Cependant, je parle de prophétie, ici, en un sens purement laïc et technique. Le prophète est celui qui, plus prosaïquement, cherche le *point fixe* du problème, ce point où le volontarisme accomplit cela même que dicte la fatalité. La prophétie s'inclut dans son propre discours, elle se voit réaliser ce qu'elle annonce comme destin. En ce sens, les prophètes sont légion dans nos sociétés modernes, démocratiques, fondées sur la science et la technique. L'expérience du temps du projet est facilitée, encouragée, organisée, voire imposée par maints traits de nos institutions. De partout, des voix plus ou moins autorisées se font entendre qui proclament ce que sera l'avenir plus ou moins proche : le trafic sur la route du lendemain, le résultat des élections prochaines, les taux d'inflation et de croissance de l'année qui vient, l'évolution des émissions de gaz à effet de serre, etc. Ces prophètes que nous appelons *prévisionnistes* savent fort bien, et nous avec eux, que cet avenir qu'ils nous annoncent comme s'il était inscrit dans les astres, c'est nous qui le faisons. Nous ne nous rebellons pas devant ce qui pourrait passer pour un scandale métaphysique (sauf, parfois, comme électeurs). C'est la cohérence de ce mode de coordination par rapport à l'avenir que je me suis employé à dégager.

Le meilleur exemple que je connaisse de la prévision de l'avenir dans le temps du projet est celui de la planification française telle que l'avait conçue Pierre Massé et telle que Roger Guesnerie en synthétise l'esprit dans la formule fulgurante suivante : la planification, écrit-il, « visait à obtenir par la concertation et l'étude une image de l'avenir suffisamment optimiste pour être souhaitable et suffisamment crédible pour déclencher les actions qui engendreraient sa propre réalisation. » [Guesnerie, 1996]. Cette formule ne peut trouver sens que dans la métaphysique du temps du projet, dont elle décrit parfaitement la boucle reliant le passé et l'avenir. La coordination s'y réalise sur une *image* de l'avenir capable d'assurer le bouclage entre une production causale de l'avenir et son anticipation auto-réalisatrice.

## 4. PARADOXE DE LA DISSUASION NUCLÉAIRE

Dans la métaphysique du temps du projet, tout événement qui ne se situe pas sur la ligne d'univers, définie comme la séquence des événements qui se réalisent, doit être tenu pour impossible. En d'autres termes, tous les possibles se réalisent. Il en résulte que la prudence ne peut jamais prendre la forme de la prévention. La prévention suppose que l'événement indésirable que l'on prévient soit un possible qui ne se réalise pas. Il faut que l'événement soit possible pour que nous ayons une raison d'agir ; mais si notre action est efficace, il ne se réalise pas. Cela est impensable dans le temps du projet. Ce qui paraît une infirmité de cette métaphysique se révèle en fait un de ses plus importants apports à la réflexion sur les menaces qui pèsent aujourd'hui sur l'avenir de l'humanité. [Dupuy, 2002].

Considérons le jeu suivant qui formalise ce qu'a été la situation dite de « destruction mutuelle assurée » (*Mutually Assured Destruction*, en anglais, d'où l'ironie du sigle *MAD*). Alter Ego envisage d'attaquer Ego. S'il passe à l'attaque, Ego a le choix entre céder – auquel cas il perd, par exemple, une partie de son territoire ou de sa zone d'influence- et contre-attaquer en déclenchant l'escalade, cette seconde option entraînant les deux belligérants dans le désastre mutuel.



r : renonce

R : riposte

A : attaque

Y : cède

N: très grand nombre

Nombre de gauche : gain d'Alter Ego

Nombre de droite : gain d'Ego

Cette structure est un jeu à somme nulle pratiqué au bord de l'abîme. Le raisonnement rétrograde conclut que la menace dissuasive – « si toi Alter passes à l'attaque, moi Ego lance l'escalade R qui nous anéantira tous les deux<sup>6</sup> » – est non crédible. Placé en 2, après une attaque d'Alter, Ego trouvera prudent de jouer Y. Alter attaque donc en 1 et Ego cède en 2. Ce problème de l'absence de crédibilité de la menace sur laquelle repose la dissuasion nucléaire occupe l'essentiel de la littérature stratégique consacrée au sujet. Quel chef d'État, victime d'une première frappe, n'ayant plus qu'une nation dévastée à défendre, prendrait par une seconde frappe vengeresse le risque de mettre fin à l'aventure humaine ?

Raisonné dans le temps du projet sauve-t-il l'efficacité de la dissuasion ? L'argument sur la prévention par quoi nous avons commencé permet d'en douter. L'escalade R peut-elle constituer le point fixe du bouclage entre le passé et l'avenir qui définit la métaphysique du temps du projet ? L'anticipation par Alter en 1 du choix d'Ego en 2 de jouer R empêcherait Ego d'avoir la main en 2, puisque Alter, alors, renoncerait à attaquer. Le bouclage ne s'opère que si Ego cède et Alter attaque. La conclusion est donc la même que celle du raisonnement rétrograde : la dissuasion est inefficace. Cependant, la raison qui rend la dissuasion inefficace dans le temps du projet n'est plus la non-crédibilité de la menace, mais l'autoréfutation d'une dissuasion parfaitement réussie.

On trouve cet argument dans la littérature spécialisée sous la forme suivante. En général, pour qu'un appareil dissuasif marche – pensons au système pénal – il faut qu'il ne marche pas à cent pour cent. Il est en effet nécessaire de rendre public que ceux qui font fi de la menace sont sanctionnés – les criminels sont punis. Mais un seul échec dans le cas MAD, signifiant l'apocalypse nucléaire, serait fatal. Pour être efficace, la dissuasion nucléaire doit l'être totalement ; mais si elle l'est totalement, alors elle n'est pas efficace. À la réflexion, cet argument ne prend force et validité que si l'on raisonne dans le temps du projet. Dire que la dissuasion est efficace, c'est dire que Alter renonce parce que Ego fait R en 2 ; mais si Ego faisait R en 2, Ego n'aurait pas

---

6. Un stratège français, en 1986 : « Nos sous-marins sont capables de tuer cinquante millions de personnes en une demi-heure. Nous pensons que cela suffit à dissuader quelque adversaire que ce soit. »

la main en 2. Il n'est donc pas inscrit dans la ligne d'univers que Ego lance l'escalade en 2. Or, dans le temps du projet, un événement qui ne se réalise pas est impossible. L'impossibilité de l'escalade, donc de la mise à exécution de la menace, rend évidemment la menace inefficace.

Puisqu'il semble que la structure MAD nous a protégés d'une guerre nucléaire pendant les quarante ans qu'aura durés la guerre froide, la question reste de comprendre comment ce miracle a pu se produire. Les stratèges firent un pas décisif mais tardif dans cette compréhension lorsqu'ils s'avisèrent que la dissuasion devait se passer de toute *intention* dissuasive. La simple existence d'arsenaux se faisant face, sans que la moindre menace de les utiliser soit proférée ou même suggérée, suffisait à ce que les jumeaux de la violence se tiennent cois. L'apocalypse nucléaire ne disparaissait pas pour autant du tableau. Sous le nom de *dissuasion existentielle*, la dissuasion apparaissait désormais comme un jeu extrêmement périlleux consistant à faire de l'anéantissement mutuel un *destin*. Dire qu'elle fonctionnait signifiait simplement ceci : tant qu'on ne le tentait pas inconsidérément, il y avait une chance que le destin nous oublie – pour un temps, peut-être long, voire très long, mais pas infini.

Revenons au formalisme du temps du projet. Il existe en réalité un autre point fixe que celui qui rend la dissuasion inefficace, si l'on admet une *imperfection* du bouclage. Cette imperfection est inscrite dans l'avenir comme un destin. L'incertitude qui en résulte est ce qui rend la dissuasion efficace. Mais cette incertitude n'est pas un aléa. Donnons-lui un poids  $\varepsilon$ , par définition faible ou très faible. La dissuasion existentielle peut se dire de manière ramassée : c'est parce qu'il y a un poids  $\varepsilon$  que la dissuasion ne marche pas qu'elle marche avec un poids  $1 - \varepsilon$ . Ce qui pourrait passer pour une tautologie (ce serait évidemment le cas dans notre métaphysique ordinaire) n'en est absolument pas une ici, puisque la proposition précédente n'est pas vraie pour  $\varepsilon = 0$ <sup>7</sup>. Le fait que la dissuasion ne marche pas avec un

---

7. La discontinuité pour  $\varepsilon = 0$  suggère qu'il y a ici à l'œuvre comme un principe d'indétermination. Les poids  $\varepsilon$  et  $1 - \varepsilon$  se comportent comme des probabilités en mécanique quantique. Le point fixe doit ici se penser comme la *superposition* de deux états, l'un qui est l'occurrence accidentelle et fatale de l'apocalypse, l'autre qui est sa non-occurrence.

ponds  $\varepsilon$  strictement positif est ce qui permet l'inscription de l'apocalypse dans l'avenir, et c'est cette inscription qui rend la dissuasion efficace, à  $\varepsilon$  près. Il serait tout à fait incorrect de dire que c'est la *possibilité* de l'erreur, avec la probabilité  $\varepsilon$ , qui sauve l'efficacité de la dissuasion – comme si l'erreur et l'absence d'erreur constituaient les deux branches d'une bifurcation. Il n'y a pas de sentiers qui bifurquent dans le temps du projet. L'erreur n'est pas seulement possible, elle est actuelle, inscrite dans le temps – comme un raté de plume, en quelque sorte.

## BIBLIOGRAPHIE

- Choderlos de Laclos, P. (1782), *Les Liaisons dangereuses*, Lettre CLII.
- Dupuy, J.-P. (1992a), « Two Temporalities, Two Rationalities: A New Look at Newcomb's Paradox », in P. Bourguine et B. Walliser (ed.), *Economics and Cognitive Science*, Pergamon Press.
- Dupuy, J.-P. (1992b), *Introduction aux sciences sociales*, Paris, Ellipses.
- Dupuy, J.-P. (1997), « Temps et rationalité : les paradoxes du raisonnement rétrograde », in J.-P. Dupuy et P. Livet (ed.), *Les limites de la rationalité*. Tome 1 : « Rationalité, éthique et cognition », Paris, La Découverte.
- Dupuy, J.-P. (1998), « Rationality and Self-Deception », in J.-P. Dupuy (ed.), *Self-Deception and Paradoxes of Rationality*. C.S.L.I. Publications, Stanford University.
- Dupuy, J.-P. (2000), « Philosophical Foundations of a New Concept of Equilibrium in the Social Sciences : Projected Equilibrium », *Philosophical Studies*, 100, p. 323-345.
- Dupuy, J.-P. (2002), *Pour un catastrophisme éclairé*, Paris, Seuil.
- Dupuy, J.-P. (2006), « Counterfactual consequences », communication à l'atelier « Rationality and Change », Cambridge, UK, 6-8 septembre.
- Plantinga, A. (1986), « On Ockham's Way Out », *Faith and Philosophy*, 3, pp. 235-69.
- Guesnerie, R. (1996), *L'Économie de marché*, Paris, Flammarion, coll. « Dominos ».

Jean-Pierre Dupuy  
 École Polytechnique, Paris,  
 et Université Stanford ;  
 jpdupuy@stanford.edu



# L'événement du marché ou la nécessité de l'ascension méta-contextuelle

## 1. LE « PHÉNOMÈNE » DU MARCHÉ DES PRODUITS DÉRIVÉS

Dans ce qui suit, je vais principalement m'occuper du « problème de *pricing* des produits dérivés »<sup>1</sup>. Dans un premier temps, je serai ainsi amené à poser les éléments indispensables à la compréhension de la théorie du *pricing*, celle qui ne pose aucun problème et qui est enseignée dans les manuels de finance des marchés, puis je poursuivrai ma réflexion jusqu'à atteindre la limite de la théorie et dire alors ce qui, dans sa confrontation avec le phénomène, lui posera essentiellement un problème de non-clôture. Les termes de « problème » et de « non-clôture » évoquent évidemment le « problème de la mesure en mécanique

---

1. À l'intention de ceux, parmi mes lecteurs, qui ne mesureraient pas encore l'ampleur du phénomène du marché des produits dérivés, je rapporte, à tout hasard, et sans jugement de valeur, ces extraits du *Figaro* du 3 octobre 2006 : « Les produits dérivés sont tous ces titres permettant d'investir sur des supports aussi différents que le gaz, l'électricité, le CAC 40, l'or ou les taux d'intérêt. [...] On estime que ce ne sont pas moins de 280 000 milliards de dollars d'actifs financiers qui existent aujourd'hui sous cette forme. [...] Les marchés en sont tous interconnectés. [...] Ces produits étant "dérivés", ils sont tous liés à d'autres titres, voire les uns aux autres. [...] Il s'agit d'un domaine où la créativité a transformé la finance en une fin en soi. » (« Les pétales d'Amaranth des apprentis sorciers », chronique d'Yves de Kerdrel) L'auteur de l'article écrit au lendemain de la débâcle financière du *hedge fund* new-yorkais *Amaranth Advisors*, qui vient d'annoncer une perte de plus de 5 milliards de dollars sur les produits dérivés du gaz. Dira-t-on du marché des produits dérivés qu'il est alors une science humaine, inhumaine ou humaine, trop humaine ? Quoi qu'il en soit, je connaissais bien les hommes d'*Amaranth* puisqu'ils étaient les clients de ma société de logiciels financiers, ITO 33. (Mon choix du terme anglais « *pricing* » au lieu d'« évaluation » qui en aurait été la traduction française la plus juste, mais en réalité la plus impropre à la réflexion que je vais mener, est justifié plus bas dans le texte.)

quantique» et la fameuse «non-clôture de son cercle épistémologique»<sup>2</sup>. Cela dit, le parallèle que j'ai l'intention d'établir entre la théorie quantique et le *pricing* des produits dérivés ne s'arrêtera pas à ces simples analogies verbales. Disons qu'une généralisation, ou plutôt, un *dépassement* de la notion de probabilité aura lieu dans le *pricing* des produits dérivés, de même qu'il avait eu lieu en théorie quantique et qu'il nous avait enseigné que cette dernière n'était pas seulement une théorie physique utilisant les probabilités de manière irréductible, mais une théorie prédictive méta-contextuelle<sup>3</sup>.

C'est-à-dire que nous aurons également à considérer, en théorie du *pricing* des produits dérivés, des algèbres booléennes classiques où la gamme des possibles sera supposée donnée et fixée et où le calcul des probabilités s'appliquera pour nous donner la valeur théorique des produits dérivés, mais que le phénomène «physique» qui nous intéresse, et qui nous amène à développer cette théorie pour commencer, ne pourra pas s'expliquer, quant à lui, ni même arriver à s'exprimer, au simple niveau de ce calcul classique. De même que le phénomène quantique (quantification et interférence des probabilités) ne pouvait s'interpréter qu'au niveau méta-contextuel où l'on comprenait que le vecteur d'onde était un outil prédictif plus général qu'une simple distribution de probabilités et qu'il permettait d'articuler, non

---

2. Michel Bitbol, «La Mécanique quantique comme théorie des probabilités généralisées», In : E. Klein et Y. Sacquin (éds.), *Prévision et probabilités dans les sciences*, Paris : Éditions Frontières 1998. Michel Bitbol, «Non-Representationalist Theories of Knowledge and Quantum Mechanics», *SATS (Nordic journal of philosophy)* 2, 37-61, 2001.

3. Une proposition ou une détermination sont dites «contextuelles» si elles ne valent que relativement à un contexte d'énonciation donné ou relativement à un contexte expérimental donné. Par exemple, la proposition «Mars est un astre errant traçant un S dans le ciel nocturne» ne vaut que relativement au contexte d'un observatoire terrestre (comme Copernic l'a fait remarquer). En revanche, une proposition (ou une théorie) est dite «méta-contextuelle» si elle énonce quelque chose sur les contextes relativement auxquels les propositions contextuelles prennent leur sens. Un simple élargissement de la proposition précédente conviendra comme exemple de passage au niveau méta-contextuel. La proposition suivante : «La proposition "Mars est un astre errant traçant un S dans le ciel nocturne" vaut relativement au contexte d'un observatoire terrestre et ne vaudrait pas relativement au contexte d'un observatoire solaire» est une proposition méta-contextuelle.

seulement des « états du monde » (des possibles) différents, mais des gammes entières d'états du monde dont les contextes de manifestation pouvaient être incompatibles, de même, le phénomène du *marché* des produits dérivés – ce qui *se passe* dans le marché des produits dérivés – ne pourra être interprété (et même, on le verra, défini) que si on s'élève au-dessus des algèbres booléennes classiques et qu'on articule ce phénomène au niveau méta-contextuel.

Une différence fondamentale entre la théorie quantique et le *pricing* des produits dérivés mérite, toutefois, d'être signalée dès à présent, et c'est pourquoi le parallèle ne sera pas vraiment un parallèle mais il sera ce que j'appellerai une « variation » (sur le même thème philosophique, si l'on veut). Dans cette variation, ce n'est pas le formalisme de la théorie quantique en tant que tel que je retiendrai (comme si le marché des produits dérivés allait nous offrir une situation prédictive comparable à celle de la mécanique quantique), mais les conséquences philosophiques de ce formalisme, ou plutôt, le « contexte » philosophique où l'on doit *préalablement* se placer pour philosopher sur la théorie quantique, au vu de son formalisme. Par exemple, le marché des produits dérivés *n'offrira pas* une statistique expérimentale violant les inégalités de Bell. Il *n'offrira pas* un phénomène expérimental tel que quiconque voudrait l'expliquer à l'aide d'une théorie à variables cachées se verrait obligé, par exemple, d'embrasser la non-localité ou le contextualisme. Il n'y aura même pas de « phénomène expérimental » dans le marché des produits dérivés qui se puisse définir au sens d'une science dure. Ce qui sera phénoménal dans le marché, ce n'est pas une collection de faits observés (par exemple les séries temporelles des prix des actifs qui y sont traités) qu'il faudra, par exemple, chercher à reproduire avec un générateur à probabilités classiques ou, à défaut, non classiques, mais la façon elle-même dont le praticien du marché (et par là, j'entends le *trader*<sup>4</sup> immergé dans le marché) *ira* au phénomène et créera la phénomène.

Je veux dire par là que c'est l'utilisateur lui-même de la théorie de *pricing*, le *trader*, qui se placera au niveau méta-contex-

---

4. Là aussi, je retiens le mot anglais plutôt que l'équivalent français (négociateur, cambiste, contrepartiste) en raison de sa proximité avec le verbe « traiter », largement utilisé par la suite.

tuel. Ce qu'il a l'intention de *faire* dans le marché, ce qu'il est là *pour faire* – lesquels *faits et gestes* auront pour conséquence que le marché lui-même prendra là son sens et nous donnera le *phénomène* du marché –, cela, en soi, ne pourra s'articuler que dans la perspective méta-contextuelle.

## 2. LA NÉCESSITÉ DE LA PERSPECTIVE MÉTA-CONTEXTUELLE

Au risque d'anticiper sur ma conclusion, je dirai que le *marché* – c'est-à-dire la raison pour laquelle le *trader* est là pour commencer et ce qu'il va, à partir de là, *faire* (ce qui, en passant, vous donne déjà une idée de la façon dont le *trader* et le marché seront, à mon sens, co-fondés) – sera défini comme le *processus de changement de contextes incompatibles*. Si je parle alors d'un dépassement obligatoire des probabilités, c'est parce que ce processus stochastique de changement des contextes ne pourra pas lui-même – par sa définition même – être cadré dans une gamme donnée de contextes possibles (une sorte de « contexte de tous les contextes ») parmi lesquels il « choisira », au cours de son évolution temporelle, les contextes qui auront lieu. Car ce contexte des contextes serait, dans ce cas, lui-même un contexte parmi les autres, et à ce titre, susceptible d'être changé par l'action – et la définition même – du marché.

Un autre parallèle avec l'attitude philosophique vis-à-vis de la théorie quantique est que, pas plus dans le *pricing* des produits dérivés qu'en théorie quantique, on ne pourra inférer la perspective méta-contextuelle *à partir* du phénomène observable<sup>5</sup>. Déjà qu'il n'existe pas, à proprement parler, un phénomène du marché des produits dérivés qui serait indépendant du *trader* faiseur de marché (à la différence du phénomène quantique – statistiques de l'expérience d'Alain Aspect, phénomène d'interférence des fentes d'Young, etc. – qui appartient en propre à la réalité empirique, quant à lui). Toujours est-il qu'ici comme là-bas, il faudra, au contraire, *partir* du niveau méta-contextuel (où l'on recon-

---

5. Michel Bitbol, *Mécanique quantique, une introduction philosophique*, Paris: Flammarion 1996, p. 245.

naîtra qu'il est permis de parler, en plus des possibilités présentées au sein d'un contexte donné, de la possibilité tout entière qu'il puisse exister des contextes incompatibles à travers lesquels la prédiction, ou la vision, ou simplement le discours, devront s'articuler) pour pouvoir, seulement alors, déduire le caractère étrange du phénomène.

Remarquons toutefois que la « nécessité » du niveau méta-contextuel ne s'impose à nous, en théorie quantique, qu'en raison de sa possibilité. C'est seulement parce qu'on réalise que l'objectivité au sens classique (celle où les objets sont d'ordinaire posés en face du sujet et le contexte est passé sous silence) n'est pas la plus générale possible, et qu'il pourrait se présenter une situation, non plus descriptive (bien entendu) mais essentiellement prédictive, où la généralité nous imposerait une perspective méta-contextuelle, c'est seulement parce qu'on conçoit la possibilité d'une telle situation qu'on se demande si tel ne pourrait pas être « par hasard » le cas dans la physique des particules élémentaires, et que, essayant cette hypothèse, on reconstruit alors le formalisme quantique et on déduit la quantification et les statistiques non classiques<sup>6</sup>. En revanche, et bien que, je le répète, la perspective méta-contextuelle ne puisse pas être non plus déduite des phénomènes observables du marché des produits dérivés (la série temporelle des prix), sa nécessité s'y imposera à nous par ce que j'ai appelé *le* phénomène du marché, par l'« être » même du marché<sup>7</sup>. C'est parce qu'on ne pourra faire sens du marché (dire ce que le marché *est*, en définitive) qu'à la condition d'articuler ce sens au niveau méta-contextuel et c'est parce c'est un *fait* que le marché existe et qu'il nous interpelle au-delà de ses conséquences observables que la nécessité de la perspective méta-contextuelle me semble être très forte, dans la philosophie du marché des produits dérivés.

---

6. *Ibid.*

7. Ainsi, par « phénomène *du* marché », j'entends le fait que le marché existe, son *événement*, et non pas ses conséquences observables qui sont les séries temporelles de prix.

### 3. LE MARCHÉ, LIEU D'ÉCHANGE ET NON DE PRÉDICTION

Ce n'est plus uniquement une épistémologie qui se joue là (théorie des prédictions, cercle de la connaissance), mais la question entière de l'être du marché<sup>8</sup>. Je répète que le marché n'est pas une réalité empirique mais « humaine » (certes, les séries temporelles de prix sont réelles et empiriques, mais ce ne sont pas ces séries, aliment quotidien de l'économétricien, qui *font* le marché) et je reconnais, par conséquent, que le marché ne *sera* jamais en définitive que ce que je décide moi-même de baptiser ainsi (la nécessité de la perspective méta-contextuelle finissant ainsi par apparaître comme un effet purement rhétorique); je reconnais que toutes ces nuances philosophiques nous éloignent d'autant de notre projet initial de « trouver » la théorie quantique dans les sciences humaines existantes et établies, mais je dirai que c'est là la destinée (la fatalité) philosophique de mon sujet. En effet, voilà une situation où la nécessité de réfléchir au marché à un certain niveau philosophique nous impose de définir le marché lui-même et le phénomène lui-même comme ce qu'il faut pour que cela soit possible. (Et pourquoi cette nécessité-là? À cause de la conviction intime que le marché mérite ce niveau de réflexion? Et parce qu'il nous offre alors l'opportunité, unique en son genre, non seulement de créer une « science » nouvelle, mais de la créer en même temps que sa philosophie et à travers cette philosophie même?)

Ainsi, ce n'est pas une situation prédictive que je voudrai décrire ou reproduire, dans le marché des produits dérivés, et ce n'est pas par le biais de la prédiction que le passage au niveau méta-contextuel aura lieu. Mais il sera nécessité, comme je l'ai déjà indiqué, par l'enjeu du marché tout entier, par l'événement du marché lui-même. Il n'y a rien à prédire dans le marché, il y a

---

8. Et c'est pourquoi mon mouvement philosophique, à la différence, par exemple, de l'approche transcendantale de Michel Bitbol et de son horizon épistémologique, s'inscrit plutôt dans la réorientation que Heidegger donna à la philosophie (incluant celle de Kant) vers l'ontologie fondamentale et la *question* de l'être. (*Question* de l'être et de sa signification – pourquoi pas à travers une phénoménologie herméneutique – et non pas, évidemment, *pétrification* ontologique et reniement des acquis de la philosophie critique.)

seulement à faire. On n'y parlera pas d'outil de prédiction, mais d'outil de *pricing*. Et cet outil utilisera intrinsèquement les probabilités pour donner un prix *présent* aux produits dérivés, non pas pour prédire leur prix futur.

C'est la notion de « prix » qui est ici la notion clé. C'est elle notre réalité « empirique » et notre pivot. Réalité singulière qui jouera à la fois – là se tiendra le paradoxe – les rôles d'un résultat et d'une donnée pour la théorie de *pricing* des produits dérivés. Autant le prix d'une chose reflète les anticipations que l'on peut avoir sur sa valeur, et est par conséquent tourné vers le futur, autant il est *fait* avant tout pour traiter<sup>9</sup> dans un marché, et n'est ainsi tourné que vers le présent de l'échange. On ne va au marché que parce qu'on *ne sait pas* quelque chose et qu'on *ne peut pas* prédire quelque chose. Car autrement, pourquoi échangerait-on quelque chose<sup>10</sup>? Ainsi les produits de base traités dans le marché (actions, matières premières, cours de change, etc.) ne nécessitent-ils aucune théorie d'évaluation préalable. Leur valeur est immanente à l'offre et la demande. En revanche, les produits dérivés nécessiteront, comme on le verra, au moins la part de théorie qui permettra de les évaluer *relativement* aux produits de

---

9. Je dirai que le prix d'un actif « traite » dans un marché au sens où quelqu'un y traite cet actif à ce prix. C'est la transcription du verbe anglais intransitif *to trade*.

10. Je m'inscris donc complètement en faux contre la théorie des anticipations rationnelles (ou irrationnelles) qui prétend que les acteurs n'échangent dans le marché que parce qu'ils savent quelque chose et qu'ils ont des anticipations mais que celles-ci sont différentes, que leurs informations ne sont pas partagées, et qu'à la fois leurs informations et leurs anticipations fluctuent au hasard. Que le hasard (je préfère dire : le futur) soit la cause et la raison d'être des marchés ne fait aucun doute. Mais je ne m'intéresse pas à la vision globale, macroscopique, le « point de vue de Dieu » où tous les acteurs seraient en quelque sorte « supervisés » et leurs motivations pour échanger passées en revue. Ce qu'il m'intéresse d'énoncer à propos du marché a lieu au niveau atomique, singulier, de l'individu. Je maintiens que le prix du marché n'attire pas l'individu comme *résultat* positif de ses anticipations (et donc, nécessairement, d'une opération de calcul complexe) mais parce que l'individu, *qui n'a peut-être aucune anticipation*, sait que ce prix est liquide, c'est-à-dire qu'il peut, à ce prix, *avant tout* se débarrasser de ce qu'il détient. Les prix ne tiennent pas, dans le marché, en vertu de l'équilibre et de la « fermeté » d'un processus d'évaluation qu'on imagine arrivé, en ce prix, à sa conclusion, mais en vertu de leur échangeabilité et du « déséquilibre », c'est-à-dire en vertu du *prochain* échange et du *prochain* changement.

base (non dérivés) à partir desquels ils sont dérivés. Ce qui est proprement curieux c'est qu'on ira alors au marché, ainsi armés de la théorie de *pricing* des produits dérivés et des prix qui en résultent, non pas pour y trouver une validation au sens de la fermeté d'une réalité empirique qui viendrait confirmer ces prix et les « préserver », mais une validation au sens de l'échange : au sens où ces prix sont faits pour être négociés à leur tour et donc faits pour changer. On cherche une validation au sens d'une « invalidation ». Non pas la fermeté d'un sol (*ground*) mais la *liquidité* d'un marché.

#### 4. VALEUR VERSUS PRIX

Curieusement, la *théorie* d'évaluation des actifs financiers (dérivés ou non dérivés) n'aménage aucune place à la « réalité » du marché, c'est-à-dire à la *donnée première* du phénomène de l'échange, à cet « être » ou à cette ontologie singulière du marché, qui, comme je l'ai indiqué plus haut, ne joue pas tant le rôle d'une base (*ground*) vers laquelle on « descendrait » pour confirmer ou infirmer le résultat de la théorie que celui d'un « parquet » (*floor*) dans lequel on « s'immergerait » (métaphore de la liquidité) pour « mettre à flot » le prix qu'on a formé et le valider à travers sa capacité même d'être *échangé*, c'est-à-dire changé, c'est-à-dire « invalidé ».

La théorie financière recherche la valeur des actifs au sens de l'*établissement* de la valeur et de sa fermeté, au sens de la résultante d'une représentation bien fixe du monde et de ses états. En d'autres termes, cela est proprement inscrit dans son idéal de fixité – cela est carrément *requis* par cet idéal – que tout le monde, idéalement, doit être d'accord et que, par conséquent, il ne doit y avoir ni échange ni marché. Si les participants échangent, aux yeux de cette théorie, c'est parce qu'ils ont des représentations et des anticipations différentes et que celles-ci fluctuent. Le phénomène de l'échange est ainsi perçu par la théorie d'évaluation comme un phénomène dérivé, accidentel, et pour un peu, indésirable. Non que la théorie d'évaluation ignore l'échange ou veuille le réduire ; au contraire, elle peut tout à fait *postuler* que les anticipations doivent irréductiblement fluctuer. Or, cette postula-

tion première, qui sera donc elle-même inexplicable, n'expliquera en rien le marché mais reviendra simplement à affirmer que *quelque chose s'échange parce que quelque chose change*. (Alors qu'il me semble essentiel, pour comprendre l'événement du marché, de penser l'échange avant le changement, de le penser comme la source première.) Ainsi, la théorie peut parfaitement s'accommoder de la permanence de l'échange. Mais cela restera inscrit dans sa prétention même de théorie, dans sa façon même de se constituer – dans sa philosophie, si vous voulez –, que la dérive et le changement et l'échange sont seconds par rapport à la représentation et la déduction et la fixité et la stabilité.

Comme la notion de « prix » est ici la notion ambivalente (et, selon l'interprétation non classique du marché que je cherche à énoncer, la notion *première*) où se joue le paradoxe fondateur de la « validation par l'invalidation », il est indispensable de la distinguer désormais de la notion de « valeur » qui appartient, quant à elle, au domaine classique de la théorie de l'évaluation. Et, pour livrer les premiers éléments de cette théorie, examinons d'abord la manière dont elle évalue traditionnellement le premier titre financier que nous aurons à considérer, l'exemple même de titre de base et non dérivé, à savoir l'action émise par une société.

## 5. ÉLÉMENTS DE THÉORIE DE L'ÉVALUATION FINANCIÈRE

L'univers des possibles est d'abord décrit comme une série de scénarios différents – ou encore, d'« états du monde » –, scénarios économiques, financiers, politiques, géo-politiques, etc., où la société réalise des bénéfices plus ou moins grands et distribue des dividendes plus ou moins importants. Une probabilité est affectée à chacun de ces états du monde. Parmi ceux-là, certains sont des scénarios de banqueroute de la société, où elle ne distribue plus alors aucun dividende.

Voulant calculer la valeur présente de l'action de cette société (opération effectuée, par exemple, par les experts financiers de la banque d'investissement au moment de l'introduction de cette société en bourse, ou au moment de son rachat par une autre société, ou encore, par les analystes financiers des maisons

de courtage qui conseillent aux investisseurs d'investir dans tel ou tel titre), on pourrait naïvement la confondre avec l'*espérance mathématique* du flux de dividendes, calculée comme la somme, pondérée par les probabilités, des différents dividendes distribués par la société dans les différents états du monde. En réalité, une *valeur* ne l'est que dans la mesure où un individu économique lui attache cette valeur. En tant que telle, elle ne peut pas se réduire à une espérance mathématique. Car l'on parle ici essentiellement d'un actif *risqué* – en investissant dans cette action, le futur porteur du titre fait essentiellement un pari sur l'avenir de la société émettrice et sur les dividendes futurs, alors qu'il aurait pu placer son argent au taux sans risque offert par la banque de dépôt – et l'évaluation de l'action doit, par conséquent, faire intervenir la notion d'aversion au risque, ou alternativement, de goût du risque de l'investisseur.

Les économistes ont l'habitude, sous certaines conditions, de représenter l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque par le concept formel de la *fonction d'utilité* de ce dernier. Une valeur ne comptera aux yeux de l'investisseur que pour autant qu'elle lui fournit de l'utilité. Ce n'est pas l'espérance des gains incertains qu'il doit ainsi évaluer, mais l'espérance des utilités de ces gains. L'aversion au risque étant caractérisée par une fonction d'utilité concave, l'espérance des utilités sera toujours inférieure à l'utilité de l'espérance et l'investisseur qui craint le risque préférera ainsi recevoir avec certitude une somme, appelée «*équivalent certain*», strictement inférieure à l'espérance mathématique des gains éventuels plutôt que de se prêter à la loterie correspondante. En conclusion, la «*juste valeur*» de l'action aujourd'hui sera calculée comme celle qui rend l'investisseur indifférent à l'alternative de la détenir ou de ne pas la détenir, c'est-à-dire comme l'équivalent certain de ses dividendes futurs incertains. Les «*préférences*» des investisseurs (définies ici à partir des fonctions d'utilité) font ainsi partie intégrante de la théorie d'évaluation des «*actifs contingents*» (on appelle ainsi les actifs dont la valeur est différente selon l'état du monde où ils se trouvent). Les désaccords sur la valeur, qui causent le phénomène de l'échange aux yeux de la théorie, sont ainsi à la fois expliqués par les différentes affectations de probabilités (les différentes anticipations) et les différentes fonctions d'utilité (les différents types d'investisseurs).

## 6. L'AVÈNEMENT DES PRODUITS DÉRIVÉS ET LES PRIX DE MARCHÉ COMME ÉTATS DU MONDE

Gain réalisé dans un état du monde futur/utilité de ce gain/probabilité et espérance de cette utilité/valeur présente (prête à être comparée à la valorisation d'un autre, et à être échangée avec lui). Ainsi s'établissent la séquence et la hiérarchie inhérentes à la *théorie de l'évaluation*. Comme annoncé, la confrontation des valorisations – le marché – n'intervient qu'à la dernière étape. (Et encore, cela est accessoire ! Par exemple, le calcul de la valeur d'une société qui est sur le point d'être introduite en bourse ne fait pas encore intervenir le marché.) S'ensuivent les théories de l'équilibre général où un *prix* consensuel est recherché – prix qui est censé *s'établir* dans le marché et qui, on s'en doute bien, émergera comme la solution bien fixe d'un problème de point fixe.

En contraste à cet ordre établi, la révolution apportée par les produits dérivés s'énonce dès le premier mot qui dit ce qu'ils sont, je dirais même qu'elle s'énonce à travers un *jeu de mots*. Elle consistera, contrairement à ce qui précède, à donner au marché la *première place*. Ou plutôt, la seule place qu'il y a à occuper dans l'espace des possibles : la place centrale où les états du monde ne seront désormais *ni plus ni moins que les états du marché*.

C'est parce que les produits dérivés sont eux-mêmes *déjà* dérivés que le marché passera en premier et ne sera plus le phénomène second et dérivé à peine entrevu (et à peine désiré) par la théorie de l'évaluation. (Là est notre jeu de mots.) S'y jouera à fond le renversement de la notion de valeur par celle de prix.

L'exemple paradigmatique de produit dérivé est celui de l'option d'achat ou de vente (*call option* ou *put option*, en anglais). Certains historiens font remonter son origine aux temps bibliques, mais c'est à partir de 1973, date des publications séminales de Fischer Black, Robert Merton et Myron Scholes<sup>11</sup> (qui valurent, aux deux derniers seulement, le prix Nobel d'économie de 1997 en raison du décès du premier en 1995), que le

11. Fischer Black & Myron Scholes, « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *The Journal of Political Economy*, Volume 81, Issue 3 (May-June 1973), 637-654. Robert Merton, « Theory of Rational Option Pricing », *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, Spring 1973, 141-183.

terme « call » ou « put » est devenu le terme emblématique de la théorie de *pricing* des produits dérivés. Un call sur action (respectivement, un put), ou option d'achat sur action (respectivement, option de vente), est le droit d'acheter cette action (respectivement, de la vendre), à une date future fixée appelée « maturité » ou « échéance » ou « date d'expiration » de l'option, à un prix fixé à l'avance appelé « prix d'exercice de l'option ». L'option est un contrat que le vendeur de l'option « écrit » à son acheteur. À la maturité de l'option, si le prix de marché de l'action *sous-jacente* est supérieur (respectivement, inférieur) au prix d'exercice de l'option, l'acheteur de l'option exercera son droit, face au vendeur de l'option, de lui acheter (respectivement, de lui vendre) l'action au prix d'exercice entendu, réalisant ainsi le bénéfice instantané consistant en la possibilité immédiate de revendre l'action (respectivement, de la racheter) dans le marché à son prix de marché.

En termes mathématiques, la valeur réalisée de l'option à son échéance (encore appelée son « *payoff* ») s'exprime par les formules :

$$\max(S - K, 0) \text{ pour un call}$$

$$\max(K - S, 0) \text{ pour un put}$$

où  $S$  est le prix constaté de l'action sous-jacente et  $K$  le prix d'exercice de l'option.

Cet acte de naissance mathématique du produit dérivé (je devrais dire plutôt, cet acte de « décès » – car, en cette formule, le produit dérivé justement *expire* ; il « rend », il « retourne », sa valeur promise), qui est la simplicité même, contient en germe toute la révolution annoncée pour la simple raison que les différents *prix*  $S$  de l'action sous-jacente font ici office des états du monde dont aura jamais besoin la théorie de *pricing* des produits dérivés.

Nul besoin, par conséquent, de remonter à l'analyse financière de la société émettrice de l'action et à l'évaluation de ses actifs et de ses passifs dans différents états du monde (économiques, politiques, etc.). Le donné, c'est maintenant directement le *marché* de l'action ; et les « états du monde » de ce marché, à savoir les différents prix de l'action, sont maintenant directement nos états du monde.

## 7. PROCESSUS DE PRIX ET MOUVEMENT BROWNIEN

À l'instant, nous verrons que la théorie de *pricing* des produits dérivés, qu'à dessein je n'appelle pas « théorie d'évaluation des produits dérivés » comme l'aurait prévu la traduction française et qui fera mine de se mettre d'abord en place à la manière de la théorie d'évaluation précédemment entrevue, devra, en réalité, tirer toutes les conséquences de la révolution qui s'est déjà accomplie, et qui est la primauté, apparemment anodine mais lourde de conséquences, désormais accordée au *prix* de l'action (par opposition à sa valeur) et au *marché* (par opposition à une réalité économique ou politique qui resterait entièrement à modéliser). Il y aura là, nous le verrons, comme un court-circuit de tout l'édifice hiérarchique de la valeur et de la valorisation par l'envahissement, la liquidité, l'homogénéité, du marché.

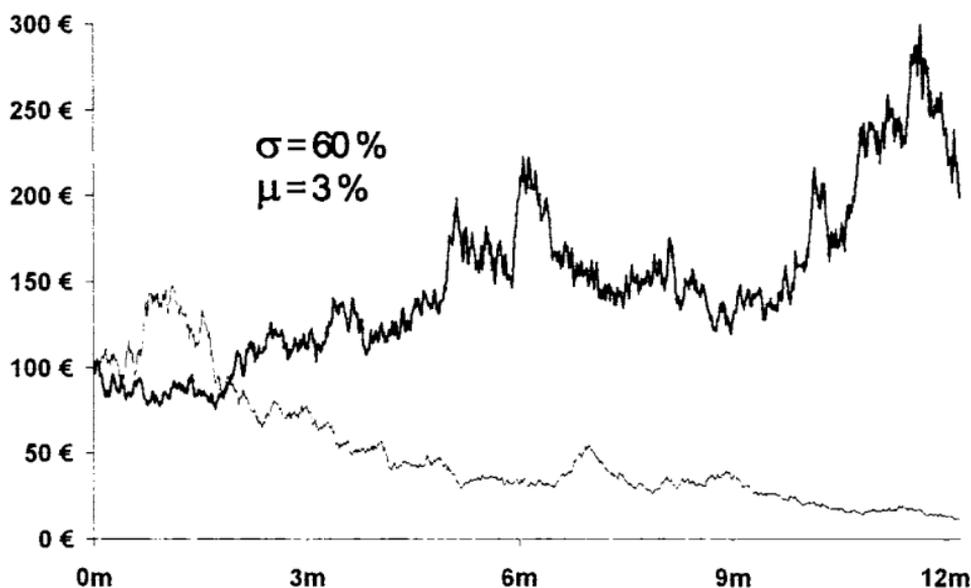
Faire des prix de marché de l'action sous-jacente nos états du monde, c'est d'abord opter pour des états du monde *observables*. S'il y a une chose observable, c'est bien un prix de marché. Il est même public. Quant aux « anciens » scénarios économiques, politiques, monétaires, etc., censés sous-tendre la valeur des sociétés et de leurs actions, ils étaient, en effet, inobservables. Le prix de l'action sous-jacente peut être ainsi observé non seulement à l'échéance du produit dérivé mais également dès aujourd'hui. Et les différentes probabilités d'obtenir différents prix de l'action à une date future quelconque peuvent alors être calculées à partir d'un *processus stochastique* postulé pour l'action, c'est-à-dire à partir des différentes trajectoires que le prix de l'action peut suivre depuis le prix actuel (appelé prix *spot*) jusqu'au prix futur.

L'hypothèse qui a été faite par Black et Scholes dans leur article de 1973 est que le processus suivi par le prix de l'action est un *mouvement brownien géométrique*. Celui-ci s'exprime par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

Elle signifie que le rendement de l'action pendant le prochain intervalle de temps infinitésimal  $dt$  est en moyenne égal au rendement déterministe  $\mu dt$  (également appelé « dérive » ou *drift*), mais qu'il se disperse en réalité autour de cette moyenne

suivant une variable aléatoire tirée d'une loi normale de moyenne zéro et d'écart-type  $\sigma\sqrt{dt}$  (ou de variance  $\sigma^2 dt$ ). Le coefficient  $\sigma$  de la dispersion, ou de la diffusion du mouvement brownien, est également appelé la « volatilité » de l'action. Plus la volatilité est grande, plus le prix de l'action se disperse autour de la trajectoire moyenne déterministe. Si la volatilité est suffisamment grande, et bien que la dérive soit positive, il ne sera pas rare que l'action finisse, au bout d'un certain temps, à un prix beaucoup *plus bas* que le prix *spot* de départ. (Voir Figure 1)  $dW$  est le symbole de l'incrément du processus élémentaire, appelé processus de Wiener, dont le mouvement brownien est la transformée affine. Il représente une marche au hasard de dérive nulle et de volatilité 1.



**Figure 1:** Deux trajectoires possibles du mouvement brownien de coefficients de diffusion  $\sigma = 60\%$  et de dérive  $\mu = 3\%$ , à partir du même prix initial de l'action  $S = 100\text{ €}$ . La période couverte est de 1 an.

Le calcul stochastique appliqué au mouvement brownien nous donne la densité de probabilité d'atteindre le prix  $S$  à la date future  $t$ , partant du prix *spot*  $S_0$  à la date d'aujourd'hui  $t = 0$ :

$$p_{\mu,\sigma}(S_0, 0, S, t)$$

Il est alors tentant de calculer la valeur présente du produit dérivé comme l'équivalent certain des gains aléatoires que nous laissons espérer son *payoff* sous la densité de probabilité des trajectoires du mouvement brownien.

## 8. LA RÉVOLUTION DE BLACK, SCHOLES ET MERTON ET LA THÉORIE DE *PRICING* DES PRODUITS DÉRIVÉS

Ainsi la valeur des produits dérivés, de même que celle de tout actif contingent, dépendrait-elle de l'attitude des investisseurs vis-à-vis du risque. Mais c'est là que le caractère spécifique des produits dérivés, qui est qu'ils sont dérivés d'une action *négo-ciable dans le marché*, va faire toute la différence. Nos états du monde, rappelons-le, ne sont pas n'importe quels états du monde. Ils n'ont pas la *représentation* du monde (cet idéal de la métaphysique) pour unique vocation. Ce n'est pas comme s'ils se contentaient de représenter le monde d'une manière détachée et que, une fois leur représentation accomplie, ils n'allaient plus rien avoir à voir avec le déroulement du monde. Car ils sont des *prix* ; les prix sont les *seuls* états du monde du marché ; mais les prix ont vocation à être replongés dans le marché. En anticipant un peu sur la suite, j'ai envie de dire qu'ils sont des états du monde « actifs » et non pas « passifs ». Sans doute le marché est-il le seul « monde » dont les états aient cette double propriété (de se détacher pour représenter, puis de se rattacher, de se replonger, pour « agir »). Ils sont les états *du* marché et en même temps ils *re-font* le marché. C'est pourquoi l'ontologie du marché me semble devoir s'attacher au point le plus fondamental de l'ontologie, celui-là même qui a fait abandonner à Heidegger la métaphysique représentationnelle oublieuse du sens de l'Être et adopter plutôt le questionnement d'une phénoménologie herméneutique<sup>12</sup>.

12. De la phénoménologie herméneutique de Heidegger, Otto Pöggeler dit qu'elle est « ontologique parce qu'elle pose la question du sens de l'Être d'une manière positive. A cause de cela, poursuit-il, elle ne peut pas considérer l'Être comme un étant-disponible. Car elle doit soulever la question du sens de l'Être d'une manière nouvelle. » (Otto Pöggeler, *Martin Heidegger's Path of*

Ce sont Black et Scholes qui ont eu l'idée, dans leur article de 1973, d'utiliser *activement* les états du monde que sont les prix de l'action sous-jacente au produit dérivé. C'est cette idée révolutionnaire qui a déclenché l'explosion (le développement très rapide) des marchés des produits dérivés et a distingué ces derniers comme une technologie, je dirais même une industrie, à part. Le terme technique pour désigner l'idée révolutionnaire est celui de la «réplication dynamique» du produit dérivé<sup>13</sup>. En 1973, Black et Scholes ne pouvaient avoir aucune «idée» du futur impact et de la future importance de leur idée. Pas plus, d'ailleurs, que la communauté scientifique ou académique qui avait reçu leur article. En effet, cet article majeur avait eu des difficultés pour trouver un journal qui accepte de le publier.

## 9. LA RÉPLICATION DYNAMIQUE DES PRODUITS DÉRIVÉS

L'idée d'appliquer le mouvement brownien au cours de l'action et de calculer la valeur du produit dérivé comme l'espérance mathématique de son *payoff* n'est pas nouvelle, quant à

---

*Thinking*, New York : Humanity Books 1991, p. 55.) De la même façon, comme je veux poser la question du marché d'une manière positive, et non pas de la manière négative, résiduelle et oubliée qui est typique de la théorie de l'évaluation, je dois la poser d'une manière *nouvelle*.

13. En réalité, c'est Robert Merton qui a soufflé à Black et Scholes l'idée de la réplication dynamique. Dans des travaux indépendants, Merton avait en effet développé l'idée, cruciale pour la réplication dynamique, que les agents économiques pussent revoir la composition de leur portefeuille de manière dynamique et continue. Quant à Black et Scholes, ils avaient initialement déduit la formule de *pricing* des options qui allait porter leur nom dans un autre cadre, celui du CAPM. Dans leur article de 1973, Black et Scholes reconnaissent à Merton la paternité de l'idée de réplication dynamique à l'occasion d'une note de bas de page. Cela explique que le nom de ce dernier sera désormais associé au modèle de Black-Scholes et sa récompense par le même prix Nobel. Malgré tout, l'article de référence de 1973 ne portera pas le nom de Merton comme co-auteur. C'est pourquoi, lorsque je référerai à « Black et Scholes » dans la suite de mon article, ce sera en tant que noms des auteurs de l'article fondateur et non pas des personnages historiques, fondateurs de la théorie de *pricing* moderne des options. Car il faudrait, dans ce cas, clairement y ajouter Merton.

elle. Louis Bachelier l'avait préconisée dès sa thèse de mathématiques, *La Théorie de la spéculation*, publiée en 1900<sup>14</sup>. Et pour plus d'un – surtout depuis la redécouverte des travaux de Bachelier par le monde anglo-saxon –, Bachelier est aujourd'hui considéré comme le pionnier de la théorie de *pricing* des produits dérivés.

Or, Bachelier n'avait pas fait intervenir les fonctions d'utilité dans son calcul d'espérance – sa théorie de *pricing* n'était donc pas acceptable par la théorie, plus moderne, d'évaluation des actifs contingents –, mais surtout, il n'avait pas pu profiter du *lemme d'Itô* (démonstré par le mathématicien japonais Kiyosi Itô dans les années 1940) pour mettre en œuvre l'idée de réplification dynamique ainsi qu'elle fut développée par Black et Scholes.

En effet, Black et Scholes émettent d'abord l'hypothèse que, comme la valeur du produit dérivé ne dépend que du prix de l'action sous-jacente à l'échéance, il ne dépendra, avant l'échéance, que de ce prix et que du temps. Cette valeur peut donc s'écrire comme la fonction  $V(S, t)$ . Le lemme d'Itô permet d'exprimer la différentielle totale d'une fonction qui dépend d'une variable aléatoire régie par un mouvement brownien :

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} \right) dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW$$

Black et Scholes remarquent alors que, si l'on forme un portefeuille  $\pi$  à l'aide du produit dérivé de valeur  $V$  et d'une quantité dynamique d'action sous-jacente égale à  $-\frac{\partial V}{\partial S}$ , la variation de valeur infinitésimale de ce portefeuille sera égale à :

$$d\pi = dV - \frac{\partial V}{\partial S} dS$$

$$d\pi = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt$$

Remarquez comment les termes faisant intervenir la dérive  $\mu$  et le processus de Wiener  $W$  ont disparu de l'évolution de la

---

14. *Théorie de la spéculation*, Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3<sup>e</sup> série, tome 17. 1900, pp. 21-86.

valeur du portefeuille. L'explication de ce prodige est cette quantité variable d'action,  $-\frac{\partial V}{\partial S}$ , que l'on suppose pouvoir détenir en permanence, c'est-à-dire qu'on suppose qu'on peut acheter et revendre continûment l'action sous-jacente dans le marché, de manière à n'en garder en portefeuille, en face du produit dérivé, que la quantité exacte  $-\frac{\partial V}{\partial S}(S, t)$  qui est elle-même une fonction du temps et du prix de l'action.

Comme on ignore encore la fonction  $V(S, t)$ , on ignore le signe de sa dérivée partielle par rapport à  $S$ . La quantité d'action qu'il faut détenir et continuellement ajuster peut ainsi être négative ou positive. Cela veut dire qu'il faudra vendre « short » l'action sous-jacente (la vendre, lors même qu'on ne la détient pas<sup>15</sup>) ou l'acheter. Cette opération d'ajustement continu de la quantité d'action détenue dans le portefeuille  $\pi$ , en face du produit dérivé de valeur  $V$ , est appelée la « stratégie de réplique dynamique » du produit dérivé. Bien que l'origine en soit purement mathématique (annuler la dérivée partielle du portefeuille  $\pi$  par rapport au prix  $S$  de l'action) et que l'argument qui la fait intervenir ait tout l'air de ne se dérouler que sur le papier, elle engage déjà tous les éléments performatifs qui feront que notre « monde » n'est pas une place ordinaire ou une « physique » ordinaire où certaines quantités théoriques admettraient simplement des dérivées partielles théoriques. Cette stratégie dynamique immerge *déjà* le récipiendaire de l'argument de Black et Scholes entièrement dans le marché. Car il faut bien, en pratique, que *quelqu'un*

---

15. Opération tout à fait licite dans les marchés financiers modernes : on « emprunte » l'action à un investisseur qui la détient et on la vend sur le marché. Cette position, appelée position « short », revient à spéculer à la baisse de l'action. Car on espère alors que le cours de cette dernière baissera, qu'on la rachètera alors dans le marché en réalisant un profit, et qu'on la rendra à l'investisseur qui nous l'avait prêtée. Si, au contraire, le cours du marché de l'action remonte, il faudra la racheter en encaissant une perte afin de la rendre à son propriétaire. Notons toutefois que le *trader* de produit dérivé qui applique la stratégie de réplique dynamique de Black et Scholes ne spéculé pas sur le cours de l'action à proprement parler. Il se contente simplement d'annuler la dérivée partielle du portefeuille  $\pi$  par rapport à  $S$ .

ajuste continuellement la quantité  $-\frac{\partial V}{\partial S}$  et traite continuellement, à cet effet, l'action sous-jacente dans le marché.

## 10. UNE FORMULE DE PRICING UNIVERSELLE

Faute d'élaborer plus avant l'implication concrète dans le marché que signifie cet ajustement continu ou d'explorer ses conséquences philosophiques, Black et Scholes font au moins l'hypothèse explicite que les transactions de l'action sous-jacente sont réalisables à tout moment sans délai ou friction, c'est-à-dire que les coûts de ces transactions est nul (c'est le coût qu'on aurait à subir si un courtier devait facturer des frais de courtage chaque fois que l'on vendrait ou que l'on achèterait quelque chose) et que la liquidité du marché est sans faille (on peut, à tout prix  $S$ , vendre ou acheter la quantité d'action qu'on veut).

Le raisonnement de Black et Scholes se poursuit alors en remarquant que, pourvu que l'on ajuste continuellement la dérivée partielle du portefeuille  $\pi$  par rapport à  $S$  de manière à la maintenir nulle, la variation de la valeur de ce portefeuille écrite ci-dessus sera déterministe, c'est-à-dire qu'elle sera sans risque. Un *argument d'arbitrage* de la théorie financière est alors invoqué qui prévoit que, si un actif évolue de manière non risquée, sa valeur ne pourra croître qu'au taux d'intérêt monétaire sans risque,  $r$ <sup>16</sup>. Black et Scholes peuvent ainsi

---

16. On appelle « opportunité arbitrage » une anomalie, ou une incohérence, qui pourrait se présenter dans les prix des actifs auxquels a accès un investisseur, et qui permettrait à ce dernier de réaliser un gain certain en achetant et en vendant une combinaison des actifs correspondants. Une telle combinaison gagnante, ou arbitrage, s'appelle également « *Dutch book* ». Ici, si la valeur d'un actif non risqué devait croître à un taux supérieur au taux d'intérêt offert pour les dépôts monétaires, on réaliserait l'arbitrage consistant à emprunter de l'argent à ce taux monétaire et à l'investir dans cet actif non risqué. En revendant plus tard l'actif et en remboursant l'argent emprunté à la banque, on réaliserait ainsi un profit certain. Réciproquement, si la valeur de l'actif en question devait évoluer à un taux inférieur au taux monétaire, on vendrait « short » cet actif, on placerait les revenus de sa vente au taux bancaire, et on disposerait plus tard d'une somme d'argent strictement supérieure à celle qu'il faudrait pour racheter l'actif. Ainsi, on réaliserait également un profit certain.

écrire l'égalité suivante pour le portefeuille  $\pi$ , également appelé « portefeuille d'arbitrage » :

$$d\pi = r\pi dt$$

Réarrangeant les termes, on obtient alors l'équation aux dérivées partielles (EDP), censée régir la valeur de tout produit dérivé de l'action de prix  $S$  :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} = rV$$

Pour calculer la valeur d'un produit dérivé particulier, par exemple un call, il suffit donc de résoudre l'EDP de Black et Scholes. Ce problème numérique porte le nom de « problème d'évolution ». Il est familier des spécialistes du calcul scientifique qui reconnaissent dans l'EDP de Black et Scholes la forme de l'« équation de la chaleur », également connue sous le nom d'équation de « diffusion/convection ». On connaît la valeur de la fonction  $V$  à la date  $T$  de maturité du call, soit :

$$V(S, T) = \max(S - K, 0)$$

Pour calculer  $V(S, t)$  à tout instant  $t$  précédant  $T$ , on discrétise le plan  $(S, t)$  et on évalue  $V(S_i, t_j)$ , en tout point de la grille discrète, en « reculant ». C'est-à-dire qu'on exploite un schéma numérique qui établit une relation de récurrence entre les valeurs  $V(S_i, t_{j+1})$  à la date  $t_{j+1}$  et les valeurs  $V(S_i, t_j)$  à la date  $t_j$ . Ce schéma est obtenu en substituant aux dérivées partielles dans l'EDP ci-dessus des expressions numériques les approchant sur la grille discrète<sup>17</sup>.

---

17. Dans certains cas, l'EDP admet une solution exacte. Tout dépend de sa « condition initiale », à savoir, le *payoff* du produit dérivé. Dans leur article de 1973, Black et Scholes expriment exactement la valeur du call et du put, en intégrant l'EDP ci-dessus. C'est la fameuse *formule de Black-Scholes*. Une remarque importante est que la solution de l'EDP de Black et Scholes peut également être représentée, par exemple dans le cas du call, comme l'intégrale suivante :

$$V(S_0, 0) = e^{-rT} \int_0^\infty p_{r,\sigma}(S_0, 0, S, T) \max(S - K, 0) dS$$

Pourvu que l'on détienne une quantité d'action égale à  $-\frac{\partial V}{\partial S}$  et ajustée en permanence, le résultat de Black et Scholes signifie en définitive que la valeur du produit dérivé ne dépend que du prix  $S$  de l'action sous-jacente et que du temps, et qu'il ne dépend pas de la fonction d'utilité de l'un ou l'autre investisseur. Par la mécanique de la réplication dynamique et par la mécanique du marché, Black et Scholes ont ainsi réussi à libérer tout un pan de la théorie financière (celui relatif au *pricing* des produits dérivés) de la « subjectivité » des agents économiques et de leurs préférences<sup>18</sup>. C'est pourquoi les marchés des produits dérivés ont littéralement explosé après 1973, et la question de leur évaluation comme actifs contingents s'est vue complètement éclipsée par la question de la faisabilité de leur réplication dynamique. Les produits dérivés vérifient tous la même et unique équation « objective ». La seule chose qui les différencie est leur *payoff* spécifique.

## 11. LES VÉRITABLES CONSÉQUENCES DE LA THÉORIE DU *PRICING* DES PRODUITS DÉRIVÉS

La particularité de la théorie de *pricing* des produits dérivés que je trouve absolument étonnante et qui ne semble pas

---

Ce résultat est dû au théorème de représentation de Feynman-Kac. Le produit dérivé peut donc être évalué, après tout, comme l'espérance de son *payoff* actualisée au taux monétaire. Formellement, tout se passe comme si le prix de l'action suivait le processus suivant :

$$\frac{dS}{S} = rdt + \sigma dW$$

et que les investisseurs évaluaient l'option d'une manière indifférente au risque.

18. C'est le coefficient  $\mu$  de la dérive de l'action, en général strictement supérieur au taux d'intérêt non risqué, qui reflète l'aversion au risque des investisseurs. Pour accepter de détenir un actif risqué, ces derniers exigent, en effet, une compensation qui est que la croissance attendue de l'actif sera plus grande. Or, la réplication dynamique de Black et Scholes parvient à éliminer  $\mu$  de la formule de *pricing* des produits dérivés. Non que  $\mu$  ait disparu de la valeur « absolue » des produits dérivés et que ceux-ci soient devenus des actifs non risqués.  $\mu$  a seulement disparu de la formule déterministe qui évalue les produits dérivés *relativement* à l'action sous-jacente.

interpeller la communauté pensante plus que ça <sup>19</sup> peut donc se résumer à ces deux étrangetés :

- Les états du monde sont posés comme étant ceux du *marché*, sans que l'on se soucie du genre de « milieu » que peut réellement être un marché : sans doute le milieu le plus impropre à la représentation et à la catégorisation en collection d'« états » ; pire encore, le milieu sans limitation d'état : celui où tout est possible, tout est négociable, tout est changeable, et tout peut donner lieu à de nouveaux états.
- Pour la première fois, un élément performatif et volontariste est mélangé avec la théorie et le formalisme. Pour rapide qu'ait été le passage dans l'article original de Black et Scholes, force est de se recueillir un instant et de constater que le résultat théorique n'est plus, cette fois, indépendant de l'acteur. Le porteur du produit dérivé doit en même temps activement traiter l'action sous-jacente – la revendre ou la racheter continuellement de façon à réaliser la réplique dynamique – afin que le résultat théorique soit garanti et que la valeur du produit dérivé soit « défendue ».

---

19. Mais peut-être la communauté qui a reçu le résultat de Black et Scholes, et qui, pour sa moitié composée des praticiens, s'est aussitôt jetée dans l'exploitation immédiate de ce résultat (faisant ainsi exploser les marchés des produits dérivés), et pour sa moitié composé des théoriciens et des académiques, s'est lancée dans la généralisation de ce résultat au cas de processus autres que le mouvement brownien et de produits dérivés autrement plus complexes que le call ou le put, peut-être cette communauté n'a-t-elle pas eu matériellement le temps, depuis 1973, de s'arrêter un instant pour *penser*. La philosophie des produits dérivés est une discipline encore inexistante. Dans ce domaine (le marché) qui est purement celui de l'action et du gain financier, à quoi l'attitude réflexive peut-elle servir en effet ? Et pour ceux qui sont déjà immergés dans le marché, à quoi cela peut-il servir de tenter de le définir, comme j'ai l'intention de le faire ? Sans doute suis-je trop ambitieux, et cela, même vis-à-vis du projet de cet ouvrage collectif qui est de rapporter, dans une science humaine *a priori* éloignée de la théorie quantique, un phénomène étrange pouvant tirer profit du formalisme prédictif de cette dernière. Mais j'ai déjà répondu que, dans mon cas, la science humaine en question allait elle-même être définie en même temps que le phénomène étrange que je vais rapporter. Se tient là une occasion philosophique que les acteurs financiers seront toujours excusés de ne pas voir, mais qui me semble, pour le coup, surpasser le cadre anecdotique où l'on ne ferait que noter que le formalisme de la théorie quantique s'applique à une certaine science humaine.

L'attitude formaliste peut se refuser à voir dans le marché et dans ses états autre chose que la donnée, parfaitement neutre et parfaitement stérile (non épidémique), de la série des prix de l'action sous-jacente. Et d'ailleurs, rétorque-t-elle, le mouvement brownien n'est qu'un modèle théorique simpliste. Rien ne garantit que l'action sous-jacente suive réellement ce processus et que le raisonnement de Black et Scholes puisse réellement s'appliquer. Et pour peu que l'on entretienne un moment cette fiction théorique, il n'y aura nul besoin, dans ce monde idéal et réglé, que « quelqu'un » s'occupe effectivement de surveiller et d'ajuster la dérivée partielle du portefeuille d'arbitrage. Un programme informatique peut parfaitement s'en charger.

La raison pour laquelle je persiste à croire qu'il y a bien plus dans la création de Black et Scholes que l'argument formel écrit sur le papier et qu'il y a bien plus dans la théorie de *pricing* des produits dérivés qu'une simple branche du calcul stochastique (car s'y trouvera la clé pour dire enfin ce qu'*est* le marché) c'est, d'abord, que le mouvement brownien et la réplication dynamique qui en est la conséquence ne sont pas là pour être *vrais* ou *faux*, pour être réels, fictifs, ou théoriques. Ils sont proprement *historiques* (et je l'entends au sens heideggérien du terme), car c'est de l'instant de leur « découverte » (je ne trouve pas de meilleur mot) que date la création du marché des produits dérivés au sens moderne du terme.

## 12. LE MODE D'ÊTRE TRÈS SPÉCIAL DU MARCHÉ

Aucune des théories d'évaluation que nous avons jusque-là entrevues (ni celle des fonctions d'utilité, ni celle de Black et Scholes) n'a encore trouvé quelque chose à dire sur la notion de « vérité-dans-un-marché » ou de « validité-dans-un-marché ». L'histoire du développement des marchés de produits dérivés (dont je semble vouloir faire si grand cas) *ne fait pas* partie de la théorie de Black et Scholes, qui s'arrête juste avant. Cette dernière est même, à strictement parler, *contradictoire* avec l'idée d'un marché de produits dérivés, puisque son résultat principal – et c'est celui-là qui a fait, ironiquement, sa fortune dans les marchés – est que le prix du produit dérivé ne dépend

que du temps et que du prix de l'action sous-jacente. En soi-même, le marché de l'action nous livre donc tout ce qu'il y a jamais à savoir et à attendre des produits dérivés. Pourquoi ceux-là admettraient-ils alors un marché qui leur serait propre ?

Sans doute le prix de l'action sous-jacente ne suit-il pas, en réalité, un processus aussi simple que le mouvement brownien. Qui sait, d'ailleurs, quel processus il suit ou il pourra suivre ? Ce n'est certainement pas la série connue des prix passés qui pourra nous aider à l'inférer ! Car le marché, répétons-le, n'est pas une réalité fixe dont les générateurs aléatoires seraient stationnaires – quoique certainement complexes – et dont la seule difficulté qu'elle nous poserait serait celle de l'inférence statistique. Le marché *n'existe pas* dans le passé. Autant dire que le seul sens que l'on puisse faire de la « réalité » du processus de l'action est celui du processus qu'elle suit *à l'instant*, et encore, ce processus peut changer du tout au tout dès l'instant suivant ! La notion de processus temporel stochastique qui n'est identifiable qu'instantanément a-t-elle d'ailleurs un sens ? J'ignore dans quelle métaphysique cette question pourra être réglée, et d'ailleurs je m'en désintéresse. Mon point est simplement que se tient, en face de ces interrogations et de ces finesses, l'enjeu entier du marché des produits dérivés, et que c'est réellement la réplique dynamique de ces derniers qui a été le facteur décisif pour que ce marché ait pu exister et qu'il se soit développé ou pour qu'il n'ait pas existé du tout !

Le marché *n'existe pas*. Il n'est pas une entité présente et identifiable. Il n'existe que pour autant que quelqu'un le fait. Or, les *traders* des produits dérivés n'ont fait ce marché que pour autant que la réplique dynamique de Black et Scholes leur a laissé croire qu'il suffisait d'utiliser une formule pour évaluer un produit dérivé (cela, c'est la « fausse » conséquence du modèle de Black et Scholes, celle qui n'est pas vraie et qui nous laisse penser qu'il est important de savoir si les *traders* se trompent ou pas, alors que seul compte ce qu'ils font) mais que, surtout, elle les a engagés à *suivre activement* l'évolution de cette valeur et à *négo-cier* continuellement l'action sous-jacente dans un ratio égal à sa dérivée partielle (cela, c'est la « vraie » conséquence du modèle de Black et Scholes, celle qui a créé un marché et une validité-dans-ce-marché et qui les a créés *dans la mesure où le trader* était désormais assuré d'être « collé », d'être littéralement enchaîné, à son portefeuille de produits dérivés).

## 13. LE MARCHÉ COMME DONNÉ

L'hypothèse du mouvement brownien et l'argument de réplication dynamique ont eu pour conséquence une chose aussi monumentale que la création (et très vite, l'explosion) des marchés des produits dérivés, et c'est pourquoi, disais-je, la question de leur vérité et de leur fausseté, et au-delà d'elle, la question entière de la signification d'un *modèle* dans le domaine du *pricing*, ne peuvent plus garder la même pertinence ou admettre le même style de réponse que dans les autres sciences. Je répète que la théorie du *pricing* des produits dérivés (dont Black et Scholes ont fourni le paradigme) est achevée et complète *avant* que ne se pose la question des marchés, et que ce que je vais, à partir de là, élaborer comme problème philosophique ne l'interpelle même pas.

Mon problème commence, non pas avec la genèse et la formation du marché des produits dérivés (dont je disais que la théorie ne pouvait avoir idée), mais avec la seule façon acceptable dont il puisse être question du marché dans ma philosophie et qui est que le marché, aussitôt son nom prononcé, ne peut que devenir lui-même la source et lui-même le donné.

Il serait, en effet, erroné de penser que l'élément volontariste inhérent à la réplication dynamique de Black et Scholes nous invite à imaginer ce qui aurait pu se passer si l'agent, censé maintenir nulle la dérivée partielle du portefeuille d'arbitrage par son action perpétuelle dans le marché, n'avait pas fait son travail, ou à imaginer les prix empiriques des produits dérivés se plier lentement, comme résultat de cette action, à la valeur prévue par l'équation de Black et Scholes. Dès le moment où Black et Scholes ont produit leur résultat et où la stratégie de réplication dynamique a provoqué l'explosion des marchés des produits dérivés, la question ne se pose plus de savoir ce que deviendraient ces marchés si les *traders*, individuellement ou collectivement, manquaient de se comporter comme le prescrivent Black et Scholes<sup>20</sup>. Le marché des produits dérivés est bien

---

20. Il suffit qu'un seul intervenant de marché applique l'algorithme de Black et Scholes pour obliger tous les autres à s'aligner sur ses prix de produits dérivés. Car s'ils ne le faisaient pas, il pourrait monter un arbitrage contre eux. Évidemment, je ne fais pas cette remarque pour que vous me posiez la ques-

la conséquence historique de l'action dynamique décrite par l'algorithme de Black et Scholes – sans la réplication dynamique, *il n'aurait pas existé* une telle chose que le marché de produits dérivés – mais c'est une erreur de penser cela au sens génétique où ce marché émergerait comme un résultat auquel on pourrait assister. Au contraire, la vision qui s'acharne à penser le marché comme un résultat est, on l'a vu, celle qui ne veut pas le comprendre, celle qui s'interdit même de poser sa question. Car je dis qu'il doit être la donnée première et non pas le résultat dérivé.

Ainsi, la seule chose qu'il faut imaginer ici est que le prix (ou le marché) du produit dérivé est désormais *donné* comme étant celui de Black et Scholes, et le seul *résultat* qu'il faut calculer ici est la quantité d'action,  $-\frac{\partial V}{\partial S}$ , qu'il faut détenir, et maintenir, comme réplication du produit dérivé. C'est donc désormais l'inverse. Ce n'est plus le prix qui est le résultat de la réplication dynamique, mais la réplication dynamique qui est le résultat du prix. Le *trader* est immergé dans son marché de produits dérivés ; il ne se pose plus la question de savoir comment ce marché est venu à se former et à exister ; que lui-même soit présent et enchaîné à la stratégie de surveillance de la valeur du produit dérivé et à sa réplication fait également partie de l'« origine » qu'il faut oublier ; sa présence et sa potentialité performative ne prendront désormais tout leur sens, que nous savions tellement contraire au formalisme, qu'à la lumière de ce qui va suivre.

#### 14. LE MARCHÉ COMME L'« INVERSION » DE LA THÉORIE, OU L'AMBIVALENCE DE LA NOTION DE PRIX

Or, ce qui va suivre dans ce marché qui est maintenant notre donné, c'est que le prochain prix observé du produit

---

tion: « Et si personne n'appliquait l'algorithme de Black et Scholes? » Le phénomène qui nous intéresse n'est pas celui du marché des produits dérivés envisagé dans toutes ses latitudes et lâché en toute liberté, mais celui du marché des produits dérivés *en tant qu'*issu du résultat historique de Black et Scholes.

dérivé, par exemple le prix du call, va s'écarter de la valeur prévue par l'équation de Black et Scholes. Plus spécifiquement, alors que le prix précédent correspondait à la valeur  $V_1(S, t)$  calculée sous l'hypothèse d'une volatilité  $\sigma_1$  de l'action sous-jacente, le prix suivant va maintenant refléter une valeur  $V_2(S, t)$  qui ne s'expliquera que sous l'hypothèse d'une volatilité différente  $\sigma_2$ . C'est-à-dire que le *trader* de produits dérivés préférera penser que l'algorithme de réplication dynamique de Black et Scholes tient toujours, que quelqu'un, dans le marché, est toujours en train de l'appliquer et qu'il doit donc l'appliquer lui-même – sauf qu'il doit l'appliquer maintenant sous une volatilité différente  $\sigma_2$  –, plutôt que penser que le marché a « lâché » la réplication dynamique et que le prix du call a repris sa liberté. Le *trader* ne peut pas penser autre chose parce qu'il est lui-même issu (et son marché avec lui) de la réplication dynamique.

Évidemment, nous nous retrouvons expulsés là à l'extérieur de la théorie. Le modèle de Black et Scholes suppose que la volatilité est constante et serait mis en échec si elle devenait stochastique. Il ignore jusqu'à l'existence d'un marché des produits dérivés, alors de là à considérer ce marché comme donné et devoir maintenant inférer la volatilité de l'action à partir de la donnée du prix du call (au lieu que ce prix était normalement calculé à partir de la volatilité)!

Et pourtant, il ne se passe pas autre chose dans le marché d'options, et dans la pratique quotidienne des *traders* d'options. Personne n'utilise le modèle de Black et Scholes dans le sens prévu par la théorie; mais tout le monde l'utilise dans le sens inverse, celui qui infère la volatilité (appelée alors « volatilité implicite ») à partir du prix de l'option, et la réplication dynamique à partir de cette dernière. *Le marché des produits dérivés, disions-nous, ne fait pas partie de la théorie de pricing des produits dérivés*<sup>21</sup>. Il ne peut donc proprement se situer et avoir lieu – je dirais même qu'il ne peut être défini – que dans cette inversion.

---

21. On peut ériger ce principe d'exclusion en véritable loi. Dans une veine inspirée de Richard Rorty, nous avons, en d'autres lieux, suggéré que le marché tenait du principe de l'*ironie*, par opposition à celui de la *théorie*. (Cf. Élie Ayache, « The Irony in the Variance Swaps », *Wilmott magazine*, September 2006, 16-23)

(Or, c'est le marché qui est ici le but de notre étude, mieux, de notre recherche.)

Ainsi, ce que le *trader* d'options va proprement jouer dans le marché des options, ce n'est pas la variabilité de leurs prix en fonction de celle du prix de l'action sous-jacente. Car cela reviendrait simplement à jouer la variabilité du prix de l'action dans son propre marché. Ce que les options apportent de nouveau, c'est la variabilité de leurs prix en fonction de la *volatilité de l'action*. Quand le *trader* d'options annule la dérivée partielle du portefeuille d'arbitrage par rapport au prix de l'action, la dimension qui s'ouvre devant lui est bien celle de la variation du coefficient  $\sigma$  (contredisant ainsi la théorie). C'est pourquoi le marché des options est également appelé « marché de la volatilité ». En inférant différentes valeurs de la volatilité à partir du prix donné, et changeant, de l'option, on dira que le marché *donne* la valeur de la volatilité. Se fait jour l'idée que le marché des produits dérivés est un nouveau moyen – littéralement une technologie nouvelle – pour inférer les coefficients statistiques des distributions de probabilité (ici, la variance). Une technologie qui proprement révolutionne les méthodes traditionnelles d'inférence statistique puisqu'elle base, pour la première fois, son inférence sur le *futur* et non pas sur le passé<sup>22</sup>.

La réplique dynamique a créé le marché des produits dérivés et l'a rendu liquide. En dépassant le cercle de la théorie par une lecture historique, on peut même déclarer que le *but* du modèle de Black et Scholes, ainsi que de tout outil de *pricing* qui lui succèdera, est de rendre liquides les produits dérivés et de développer leurs marchés. Mais – et c'est là que revient la notion clé, ambivalente, de *prix* – cet outil n'ira pas vers son but, il ne touchera pas à son but (ce marché), dans le but d'y trouver une validation. Car le but (fatalement ignoré par la théorie) c'est de *négoier* les options, et donc que *leurs prix s'écartent de la fonction déterministe qui les lie au prix de l'action*.

En d'autres termes, les prix des options (tantôt obtenus comme résultat théorique) ont assez vite fait de rejoindre leur destinée de *prix de marché*, c'est-à-dire qu'ils deviennent également des états du monde. Ils deviennent une donnée. Voilà le

---

22. Cf. Élie Ayache, « What Is Implied by Implied Volatility », *Wilmott magazine*, January 2006, 28-35.

tableau complet où il pourra seulement être fait sens du marché ! Voilà les deux étrangetés relevées là-haut (prix de marché comme états du monde et association du *trading* actif à l'outil de *pricing* théorique) qui prennent leur sens complet :

**Sens complet :** Si les prix sont les états du monde, alors *tous* les prix doivent être des états du monde (c'est-à-dire, maintenant, ceux des options), et si le *trader* est *déjà là* pour traiter activement l'action sous-jacente en face de son produit dérivé (et que c'est cela, d'ailleurs, qui a fait naître et exploser les marchés de produits dérivés) alors, *a fortiori*, il traitera le produit dérivé<sup>23</sup>.

## 15. UNE « LOGIQUE » NOUVELLE POUR UNE SCIENCE NOUVELLE

Va se dérouler, à partir de là, la logique implacable qui fera que cette « histoire de prix » n'aura jamais de fin, que le marché ne pourra être capturé dans *aucun* contexte stable, aussi complexe et général soit-il, mais qu'il nous obligera sans cesse à nous élever au niveau méta-contextuel. Nous pouvons dès à présent énoncer cette logique sous la forme des trois règles suivantes :

**Règle n° 1** Étant *donné* le prix de marché d'un produit dérivé, on utilisera l'outil de *pricing* du moment (le modèle de Black et Scholes ou n'importe lequel de ses successeurs) pour obtenir, comme *résultat*, sa stratégie de réplification dynamique.

---

23. Je ne sais pas encore nommer la logique qui me permet de faire ce « genre » d'inférence. Certainement pas une logique déductive classique. Et mon inférence n'est pas non plus – n'est surtout pas ! – chrono-logique. Si, selon Heidegger, la question de l'être est première à celle de la logique, alors cette logique est simplement celle qui « suit » de l'être du marché dont je cherche, avant tout, à susciter la question. L'idée que les états du monde du marché doivent être des prix, rien que des prix, et tous les prix, est formulée explicitement par Philippe Henrotte (Philippe Henrotte. « Construction of a state space for interrelated securities with an application to temporary equilibrium theory », In : *Endogeneous Economic Fluctuations : Studies in the Theory of Rational Beliefs*, Mordecai Kurz, ed., Studies in Economic Theory, Berlin : Springer Verlag 1997). Pour profonde que soit cette idée, et cruciale pour la philosophie des produits dérivés, elle n'a pas encore réussi à ébranler les idées reçues de la théorie financière.

**Règle n° 2** Le prix d'un produit dérivé ayant été obtenu comme *résultat* théorique de l'outil de *pricing* du moment, le *but* en sera de négocier ce prix dans un marché propre au produit dérivé, et donc que ce prix *dévie* du résultat théorique ainsi obtenu.

**Règle n° 3** Ce prix déviant étant désormais un prix de marché, c'est-à-dire un *donné*, il nous obligera à revoir et à *étendre* notre outil de *pricing* afin de théoriquement rendre compte de ce nouveau donné qui vient ainsi s'ajouter aux donnés précédents.

Plus spécifiquement, si, du prix de marché du call et en inversant le modèle de Black et Scholes, on infère la volatilité  $\sigma_1$  le premier jour, la volatilité  $\sigma_2$  le deuxième jour, et la volatilité  $\sigma_3$  le troisième (cela, afin de mettre en place la réplification dynamique), alors cela, en soi, est *déjà* le signe que le modèle de Black et Scholes n'est pas valide, car le modèle de Black et Scholes suppose la volatilité constante ! Mieux, deux options différentes (de prix d'exercice différents ou de maturités différentes) peuvent invalider Black et Scholes *dès le premier jour*, si les volatilités inférées de leurs prix simultanés s'avèrent différentes ! Ce phénomène, appelé *smile* de volatilité, est en effet la règle plutôt que l'exception, dans les marchés d'options.

La communauté financière a, d'ailleurs, depuis longtemps songé à généraliser le processus stochastique de l'action sous-jacente en faisant, par exemple, l'hypothèse que les trajectoires continues du prix de l'action étaient assorties de sauts soudains et discontinus (processus de *jump-diffusion*), ou l'hypothèse que la volatilité  $\sigma$  de la composante diffusive suivait elle-même un processus de diffusion :

$$\frac{dS}{S} = (r - \lambda m)dt + (e_j - 1)dN + \sigma dW$$

$$d\sigma^2 = \kappa(\theta - \sigma^2)dt + \varepsilon\sigma dZ$$

où  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ ,  $W$  est un processus de Wiener indépendant de  $N$ ,  $j$  est une taille de saut logarithmique aléatoire de distribution de probabilité  $\phi(j)$  et  $m$  est la moyenne de  $e_j - 1$ . Quant à la volatilité brownienne du prix de l'action,  $\sigma$ , elle suit elle-même une diffusion de volatilité

$\varepsilon$  et pilotée par le processus  $Z$ , dont la corrélation avec  $W$  est  $\rho^{24}$ .

Cela veut dire que les prix de l'action sous-jacente ne sont plus les seuls états du monde, mais qu'il faut désormais y ajouter la variable binaire qui détermine s'il y a ou non un saut à l'instant suivant, l'ensemble des tailles différentes des sauts possibles, et l'ensemble des volatilités différentes. La réplication dynamique utilisant seulement des ratios d'action ne s'applique évidemment plus, et pour répliquer un produit dérivé (c'est-à-dire pour défendre sa valeur théorique et adjoindre à celle-ci un nouveau portefeuille d'arbitrage qui évoluera sans risque), il faut se donner désormais la possibilité de vendre et d'acheter continuellement dans le marché des actifs *supplémentaires*. À quelque chose malheur est bon : comme les prix des options elles-mêmes sont maintenant supposés donnés par le marché (et que c'est cela, d'ailleurs, qui est la cause du retournement et de la faillite de Black et Scholes), il suffira de traiter dans le marché, et d'ajuster dynamiquement, des ratios de réplication faisant intervenir l'action et *quelques options bien choisies*<sup>25</sup>.

---

24. Le modèle de *jump-diffusion* est dû à Merton : cf. Merton R., « Options pricing when underlying stock returns are discontinuous », *Journal of Financial Economics*, 3(1), 1976 : 125-144. Le modèle de volatilité stochastique est dû à Heston : cf. Heston, Steven L. (1993), « A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options », *Review of Financial Studies*, 6(2), 327-43.

25. En réalité, les choses ne sont pas aussi simples. Les processus des prix des options ne peuvent pas être complètement indépendants du processus du prix de l'action, puisqu'ils en sont des produits dérivés, ou complètement indépendants les uns des autres. Bien que jouissant d'un degré de liberté supplémentaire (celui de la volatilité supposée indépendamment stochastique), le processus du prix de l'option doit donc, en un certain sens, toujours se déterminer *relativement* à celui de l'action. Or, cette évaluation relative posera un problème, maintenant que la réplication dynamique n'est pas assurée. Il existe une solution, bien sûr, consistant à passer par le préalable d'une réplication dynamique *optimale* de l'option (dans un sens de l'optimalité qui restera à préciser), qui généralisera la réplication parfaite de Black et Scholes. Le processus du prix de l'option en émergera alors comme un processus dépendant à la fois de celui du prix de l'action et de celui de la volatilité stochastique. (Cf. Philippe Henrotte, « Dynamic Mean Variance Analysis », Working paper, July 2002 et Philippe Henrotte, « Pricing Kernels and Dynamic Portfolios », Working paper, August 2002).

Pour résumer : les paramètres du processus de jump-diffusion et de volatilité stochastique écrit ci-dessus sont assez nombreux pour permettre d'expliquer, le même jour, toute la variété des prix d'options observés ce jour-là, aussi écartés soient-ils de la prévision initiale de Black et Scholes. (L'opération par laquelle on infère ces paramètres est appelée « calibration du processus aux prix d'options ».) Et les options sont alors elles-mêmes utilisées dans la réplication dynamique. Mais la réplication de *quoi*, exactement ? Et pour évaluer et défendre la valeur théorique de *quoi* ? Si les prix d'options sont supposés donnés et vont servir, maintenant, à calibrer l'outil de *pricing*, ne seront-ils pas alors trivialement évalués par cet outil et ne seront-ils pas trivialement répliqués par eux-mêmes ?

## 16. GÉNÉRATIONS NOUVELLES, GÉNÉRATION SANS FIN

En réalité, une *nouvelle* classe de produits dérivés émergera, qui jouera, pour notre modèle de jump-diffusion et de volatilité stochastique, le rôle qu'avaient joué les options pour le modèle de Black et Scholes. Ce seront, par exemple, les *options barrière*, dont une variété (appelée option *knock-out*) a le même *payoff* que les options classiques à maturité, mais possède la caractéristique supplémentaire que, si la trajectoire de l'action sous-jacente touchait prématurément un niveau *B* appelé « barrière désactivante », l'option mourrait à l'instant où cette barrière serait touchée. Les options barrière sont particulièrement sensibles aux sauts pouvant survenir au processus de l'action pendant leur durée de vie, parce que les sauts augmentent considérablement les chances que la barrière soit touchée. Elles sont également relativement plus sensibles au processus de la volatilité stochastique que les options classiques, car tandis que la valeur des options classiques ne dépend que de la valeur de l'action à leur maturité, et donc seulement de la valeur moyenne de la volatilité observée le long de la trajectoire, celle des options barrière peut largement varier, selon que la volatilité de l'action est plus grande ou plus faible lorsque sa trajectoire s'approche de la barrière, car l'action touchera alors celle-ci plus ou moins rapidement.

Le processus de jump-diffusion et de volatilité stochastique, une fois calibré aux prix donnés des options classiques (que l'on appellera maintenant options *plain vanilla*, ou « options vanilles », par opposition aux options barrière, qui sont dites « exotiques »), permettra alors d'évaluer les options barrière et de mettre en place leur stratégie de réplication dynamique (qui fait intervenir l'action sous-jacente et les options vanilles). Le marché des options barrière connaîtra alors, à son tour, un grand essor (dû à la faculté de les répliquer). Et de nouveau on réalisera, ironiquement, que si le dernier mot des options barrière devait être qu'elles seront à jamais évaluées d'une façon qui ne dépende strictement que des options vanilles et de la stratégie de réplication faisant intervenir ces dernières, alors cela n'aurait pas de sens que ces options barrière traitent dans un marché qui leur soit propre et elles n'apporteraient rien de nouveau.

Car les options barrière deviendront liquides et on constatera un jour que leurs *prix* s'écarteront des valeurs prévues par le nouvel outil de *pricing*, après calibration de ce dernier aux prix des options vanilles. D'ailleurs, la re-calibration, jour après jour, du processus de jump-diffusion et de volatilité stochastique aux prix changeants des options vanilles suggérerait déjà depuis un moment que les paramètres de ce processus étaient eux-mêmes stochastiques et qu'il fallait donc étendre ce dernier ! À l'étape suivante, les prix des options barrière feront partie de notre collection d'états du monde ; eux-mêmes serviront à la calibration d'un processus plus général et à la réplication d'un produit dérivé plus complexe ; celui-là deviendra à son tour liquide ; et ainsi de suite.

## 17. NÉCESSITÉ DU CONTEXTE ET NÉCESSITÉ DE SON DÉPASSEMENT

Pour revenir à la vision méta-contextuelle des probabilités (et à l'analogie avec la théorie quantique), je dirai donc que le *trader*, afin qu'il puisse s'insérer dans son marché et qu'il puisse, *ainsi*, faire quelque chose, doit d'abord se projeter dans un contexte donné. (Un certain *trader*, dans un certain contexte, s'intéressera, par exemple, uniquement aux options vanilles et

ne tirera jamais les conséquences consistant à dépasser le modèle à volatilité stochastique.) Les états du monde seront bien fixes et bien délimités dans ce contexte, les distributions de probabilité y seront bien définies, et d'ailleurs la théorie a absolument besoin de cette stabilité pour pouvoir énoncer l'argument de réplication dynamique et en exprimer l'algorithme.

C'est cette réplication dynamique qui est le ticket d'entrée du *trader* de produits dérivés dans son marché et qui est, réciproquement, la garantie de liquidité de ce marché. *Mais elle ne donnera le marché que lorsque le marché sera considéré comme donné*, c'est-à-dire qu'à la fois les états du monde de départ devront s'élargir pour intégrer l'idée que leur gamme entière devient maintenant stochastique (puisqu'elle est donnée par le marché et que le marché est, par définition, changeant) et ils devront s'étendre pour inclure les nouveaux prix des nouveaux produits dérivés comme *nouveaux* états du monde (ces produits dérivés qui étaient à l'instant évalués par la réplication théorique dans ce contexte). La gamme des prix de l'action sous-jacente, dans le contexte de Black et Scholes, doit, par exemple, s'élargir pour désormais inclure les prix d'options (ce qui revient au même que de dire qu'elle doit intégrer le fait que la volatilité est devenue stochastique).

La théorie du *pricing* a donc nécessairement besoin de se projeter dans un contexte, mais le marché ne se donne, quant à lui, qu'à *travers un contexte* (celui de l'outil de *pricing* du moment qui a permis la réplication du moment) *dans le changement de ce contexte* et la transition au contexte suivant. Le marché, c'est simplement reconnaître que certains prix ne peuvent pas être donnés (ceux requis pour la réplication) sans que *tous* les prix ne soient donnés (ceux des produits dérivés obtenus, dans ce contexte-ci, comme résultat).

La *théorie* du *pricing* des produits dérivés peut se borner à n'être qu'une sous-section de la théorie du contrôle stochastique. Elle posera ses états du monde et ses probabilités dans le contexte qu'elle jugera digne de la difficulté de l'exercice demandé ou qui correspondra à l'air du temps, elle déroulera la réplication dynamique, et elle se contentera d'afficher le prix du produit dérivé. En tant que telle, elle peut parfaitement s'accommoder de la vision du marché comme système vivant et de son « évolution » comme processus séquentiel d'apprentissage. C'est la vision qui

soutient qu'à l'époque de Black et Scholes et du marché de l'action, on ne savait pas que les marchés d'options allaient exister, et qu'à l'époque du marché des options vanilles on ne savait pas que les marchés d'options barrière allaient exister.

Autre chose que le cahier des charges de l'*outil de pricing*, qui doit être livré au *trader*. Il doit lui être livré *en sachant* qu'en tant que *trader* d'options vanilles, ce *trader* va traiter les options vanilles, et qu'en tant que *trader* d'options barrière, il va traiter les options barrière. Il lui est livré *en sachant* que la re-calibration journalière du processus qui est censé être donné dans un contexte spécifique donné va entraîner la « stochasticisation » de ce contexte. En tant que tel, l'*outil de pricing* est avant tout un outil de marché et il doit s'accommoder du *sens complet* du marché, ainsi que nous l'avons déjà exprimé.

## 18. UN OUTIL DE *PRICING* MÉTA-CONTEXTUEL

C'est pourquoi la question s'est sérieusement posée, de la possibilité d'un outil de *pricing méta-contextuel*. Non qu'il s'agisse d'un vecteur d'onde qui permettrait d'articuler des gammes de possibles différentes dont le contexte expérimental déterminerait seulement laquelle aurait lieu ; ou d'une situation non classique où la cause du phénomène serait elle-même subordonnée à son contexte de manifestation et rendrait, ainsi, invalides les propositions contre-factuelles. Notre situation est, en effet, en ceci différente que c'est le passage obligé par le contexte (réplication du produit dérivé et son *pricing*) qui nous amène à nous élever au-dessus du contexte (signification du marché et élargissement du contexte) et que cette transition se déroule, chez nous, dans le temps<sup>26</sup>. En revanche, la situation en théorie quantique est que le niveau méta-contextuel (la donnée du vecteur d'état qui offre des prédictions pour n'importe quel contexte de mesure d'une observable à la suite d'une préparation) s'articule « avant » la projection dans le contexte donné (avant le choix d'un appareil

---

26. Sans que le marché, qui se donne à l'instant où le contexte est débordé et où a lieu l'inversion du donné, ne soit compris comme un processus temporel ! Car son « être-là » et sa « signification-là » sont intemporels.

de mesure) et que, si l'on veut changer de contexte (si l'on veut mesurer une autre variable à la place de celle qu'on a choisie), il faut alors tout recommencer (depuis la préparation).

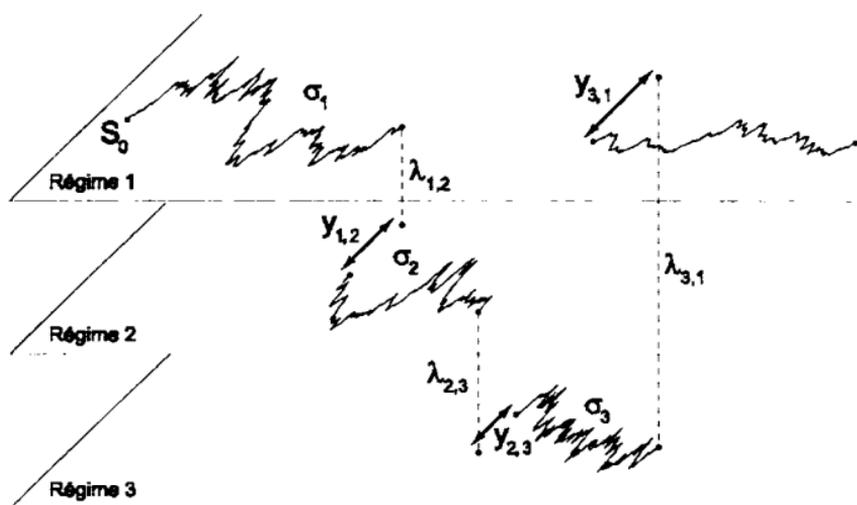
L'outil de *pricing* recherché devra donc être un processus stochastique dont on *ne pourra pas* dire, avant qu'on délimite le contexte et qu'on décide si l'on veut, par exemple, prendre les prix des options vanilles comme donnés ou si l'on veut prendre en plus ceux des options barrière, etc., de quel « ordre stochastique » il est ou dans quel contexte il subsiste. C'est-à-dire qu'on ne pourra pas dire si la volatilité y sera constante, ou si elle y sera stochastique, ou si la volatilité de la volatilité y sera elle-même stochastique, etc. Mais, à la différence de l'outil prédictif méta-contextuel de la théorie quantique, notre outil de *pricing* devra nous permettre, le moment venu, de changer de contexte sans réinitialiser l'outil et devoir tout recommencer.

En d'autres termes, il s'agira d'un processus stochastique qui aura la propriété d'être similaire à sa propre stochasticisation. La solution, que nous avons déjà décrite dans plusieurs publications<sup>27</sup>, revient à renoncer à la méthode de généralisation illustrée plus haut, où les paramètres d'un premier processus stochastique étaient, à leur tour, rendus stochastiques dans un processus qui s'écrivait à la ligne *suivante*. Au lieu de décrire une séquence, sans cesse augmentée, de variables d'état de noms différents (prix de l'action, sauts du prix de l'action, volatilité du prix de l'action, sauts de la volatilité, volatilité de la volatilité, sauts de la volatilité de la volatilité, etc.), on se donne d'emblée une variable d'état *sans nom*, qui pourra prendre, selon le contexte, les noms qu'il faut, et changer de noms au contexte suivant (sans augmenter le nombre de « lignes »).

Étrangement, le modèle a l'air plus simple que les modèles traditionnellement proposés. C'est un modèle à changement de *régimes*, qui peut d'abord s'interpréter comme une discrétisation du type de processus écrit là-haut. Sa variable d'état sans nom est le régime. (Voir Figure 2)

---

27. Cf. Élie Ayache, « The Equity-to-credit Problem (or the Story of Calibration, Co-calibration, and Re-calibration) », In : *The Best of Wilmott 1*, West Sussex, England : John Wiley & Sons 2005, 79-107 et Élie Ayache, « *OpSession* : A New Logic for Option Pricing and Trading », *Wilmott magazine*, May 2006, 32-42.

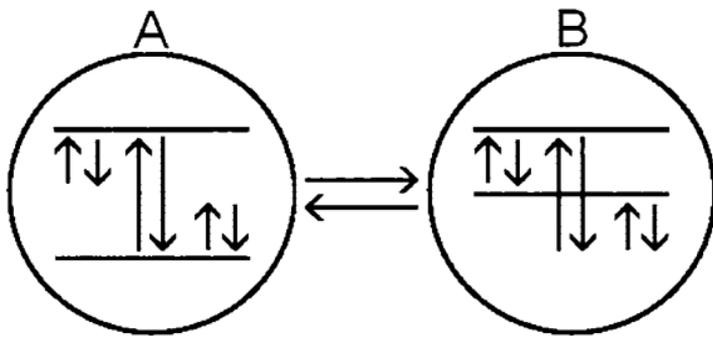


**Figure 2 :** Dans le modèle à changement de régimes (dont nous avons limité le nombre à trois, dans le graphique), le prix de l'action suit un processus de *jump-diffusion* dont les paramètres, à savoir la volatilité brownienne  $\sigma$ , l'intensité du processus de saut  $\lambda$ , et la taille du saut  $y$ , sont eux-mêmes stochastiques et admettent des valeurs différentes selon le régime où on se trouve. L'action commence dans le régime 1 où elle diffuse avec la volatilité  $\sigma_1$ , mais peut, avec une probabilité mesurée par l'intensité de Poisson  $\lambda_{1,2}$  (ou  $\lambda_{1,3}$ , ou  $\lambda_{1,n}$ ), sauter dans le régime 2 (ou 3, ou  $n$ ), où à la fois son prix subira un saut discontinu de taille  $y_{1,2}$  (ou  $y_{1,3}$ , ou  $y_{1,n}$ ) et la volatilité sautera à la valeur  $\sigma_2$  (ou  $\sigma_3$ , ou  $\sigma_n$ ). Dans le régime 2 (ou 3, ou  $n$ ), les intensités pour sauter dans les autres régimes et les tailles des sauts correspondants seront, à leur tour, différentes.

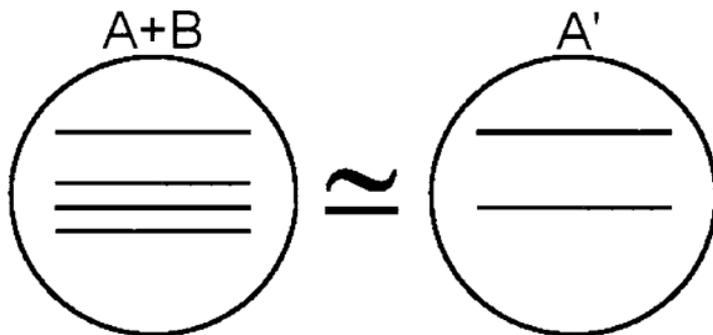
La propriété fondamentale du modèle à régimes est que la stochasticisation d'un modèle à régimes est encore un modèle à régimes. (Voir Figures 3 et 4).

Un régime peut « référencer » plus d'une variable d'état à la fois (volatilité, volatilité de la volatilité, taille du saut, etc.), et ainsi, la richesse du modèle n'est pas limitée. Si une variable d'état possède la même valeur dans tous les régimes, alors elle n'est pas stochastique et fera office de paramètre plutôt que de variable d'état.

Quand il n'est calibré qu'aux prix des options vanilles, on dira que le modèle à régimes n'est qu'un modèle de volatilité stochastique. Mais dès qu'il sera, en plus, calibré aux prix des options barrière, on dira qu'il est un modèle où la volatilité de la



**Figure 3:** Imaginons que l'outil de *pricing* du moment soit le modèle à changement de régimes *A*. Les régimes sont symbolisés par les traits horizontaux de couleurs différentes et les transitions entre régimes par les flèches aller-retour. La re-calibration du modèle *A* à des prix de produits dérivés différents le change en un modèle à régimes *B*, de paramètres différents. On peut alors penser que le « vrai » modèle est un méta-modèle à régimes où des transitions stochastiques ont lieu entre *A* et *B*, au gré de la re-calibration.



**Figure 4:** En raison de l'*associativité* de l'opération de transition stochastique entre régimes ou entre modèles à régimes, le méta-modèle à régimes est en réalité lui-même un modèle à régimes, que nous avons baptisé *A + B*. Ce dernier apparaît d'abord comme un modèle à 6 régimes. Comme les régimes n'ont pas de *réalité métaphysique* dans notre philosophie instrumentaliste, que leur seul but est de fournir un *outil* de calibration, de *pricing* et de réplication dynamique, et que l'espérance mathématique compte ici plus que les états du monde individuels ou les probabilités individuelles, la remarque décisive est alors que, dans la mesure où *seuls importent en pratique* la calibration, le *pricing* et la réplication dynamique, un modèle *A'* plus restreint, pourquoi pas à 3 régimes, pourrait bien être équivalent à *A + B*. En définitive on ne peut pas dire, avant d'avoir élucidé le contexte d'utilisation, si l'outil de *pricing* est un certain modèle à régimes ou le méta-modèle de celui-là.

volatilité est elle-même maintenant stochastique (c'est-à-dire qu'il est la stochasticisation du modèle élaboré dans le contexte précédent) et que, d'ailleurs, *il en était toujours ainsi*, sauf qu'on ne le voyait pas et qu'on n'avait, empiriquement, aucun moyen de le distinguer, avant qu'on ait spécifiquement calibré aux options barrière. Ainsi, c'est l'histoire passée qui est réinterprétée à la lumière du présent (c'est-à-dire à la lumière du futur – car les prix présents des produits dérivés sont *forward-looking*, tournés vers le futur). Voilà le correspondant, chez nous, de la rétrodiction caractéristique de la théorie quantique et du niveau méta-contextuel<sup>28</sup>. Et voilà comment le processus « temporel » du marché est constamment rendu à son événement unique (c'est-à-dire qu'il est rendu à sa signification, qui est essentiellement un échange et une réécriture, et non pas une succession, une intensification et non pas une extension).

---

28. Je fais ici allusion à l'idée de reconstitution *a posteriori* de la chaîne causale, qui a été introduite par la jeune philosophe et mathématicienne allemande Grete Hermann dans un écrit qu'elle a publié en 1935 sous le titre *Les Fondements philosophiques de la mécanique quantique*. Grete Hermann cherchait à sauver la catégorie de la causalité, répertoriée par Kant comme l'une des conditions de possibilité de la connaissance, de la menace que laissait peser sur elle le caractère acausal du phénomène quantique. Dans l'interprétation, plus moderne, de la théorie quantique comme théorie prédictive méta-contextuelle, on pourrait reformuler l'idée de reconstitution causale *a posteriori* de Grete Hermann en remarquant que la notion de causalité appartient à notre langage ordinaire non contextuel et qu'on ne peut, par conséquent, la mettre en œuvre en théorie quantique qu'une fois que le contexte expérimental a été déterminé. Ce qui veut dire que la « cause » du phénomène (plus exactement, sa reconstitution) est, en quelque sorte, « postérieure » à celui-ci, puisque le phénomène est coextensif avec son contexte de manifestation. Comme l'explique Léna Soler dans la présentation de l'ouvrage où elle a traduit l'écrit de Grete Hermann, cela revient à dissocier causalité et prévisibilité. C'est la procédure classique de vérification des hypothèses causales qui a induit les physiciens en erreur. écrit Soler. « Parce que pour eux la mise à l'épreuve d'une explication se résumait à formuler à partir d'elle des prédictions puis à les confronter à l'expérience, ils ont identifié à tort la possibilité de connaître les chaînes causales [...] et celle de formuler des prédictions [...] » (Grete Hermann, *Les Fondements philosophiques de la mécanique quantique* avec une présentation et une postface de Léna Soler, traductrice, Paris : Vrin 1996, p. 39) Or justement, la théorie quantique est une théorie prédictive méta-contextuelle, c'est-à-dire qu'elle est plus « générale » que la causalité et qu'elle ne peut pas servir à vérifier une hypothèse causale.

## 19. TECHNOLOGIE DU FUTUR VERSUS CONNAISSANCE DU FUTUR

Le *trader* des produits dérivés peut donc utiliser le même outil de *pricing* à travers les contextes différents. Ce sont sa propre présence, sa propre performativité, et sa propre décision-dans-le-marché-qu'il-fait (ainsi que notre propre décision philosophique, qui est que la signification et l'être du marché seront les mêmes à travers tous les contextes) qui relèvent en propre du niveau méta-contextuel.

L'«être» et la signification du marché s'articulent au niveau méta-contextuel, mais toute notre «logique» revient à insister qu'il demeure la donnée première, qu'il soit toujours le parquet (le *floor*) et le niveau zéro (de l'océan de la liquidité). C'est-à-dire qu'il faut se garder de prêter au marché un être suprême ou même une connaissance suprême. Il n'est pas rare, en effet, d'entendre dire que «le marché anticipe les événements futurs» (par exemple que le prix d'une certaine action va monter), ou carrément qu'il a la «connaissance du futur». La pratique des marchés de produits dérivés a elle-même contribué à rendre courant ce langage, puisque leur mécanique consiste, on l'a vu, à inférer les processus stochastiques et leur paramètres (c'est-à-dire à inférer les distributions de probabilité) à partir des prix de marchés des produits dérivés, et non pas l'inverse.

Certes, les probabilités font partie intégrante de l'outil de *pricing* et il est tentant de leur prêter un «sujet», qui serait le marché. Aussi belle que soit la métaphore de la prescience de ce dernier, je me contenterai, quant à moi, d'une interprétation instrumentaliste des probabilités. Elles ne servent, quand on y regarde de près, qu'à mettre en place la stratégie de répliation dynamique des produits dérivés (des prix desquels on les a inférées), et qu'à calculer le *prix* d'autres produits dérivés. On a beau «tirer» les probabilités des prix du marché (et être alors tenté par l'image panoramique de la connaissance), elles ne sont là, en réalité, que pour nous *replonger* dans le marché et dans le *trading* (celui de l'action sous-jacente, dans la stratégie de répliation; celui des autres produits dérivés, dans leur marché propre).

Le marché ne *connaît* pas le futur. Il est impropre à la connaissance, voire incompatible avec toute idée de représentation. Ce sont les notions d'états du monde et de probabilité qui

sont typiques du schéma représentationnel. Quant au marché, il se donne dans ce moment purement performatif où le *trader* fait ce qu'il est-là pour faire, à savoir *sortir* de son contexte de représentation et de répliation pour *faire* le marché du produit dérivé.

Les contextes ne servent pas tant à connaître ou à représenter quelque chose qu'à *répliquer* quelque chose et faire que le *trader* y soit *impliqué*. Et ce n'est pas un hasard si une nouvelle génération de produits dérivés (options barrière, swaps de variance, options à départ différé, etc.) émerge chaque fois que la *sortie* du contexte précédent – ce que nous avons appelé le « marché » – le réclame. Car le marché, c'est tout ça : l'avènement des produits dérivés de nouvelle génération et le contexte pour les répliquer et les négocier à leur tour. Le marché ne connaît pas le futur. Il *traite* directement le futur. (Ou plutôt, il est la *technologie du futur*<sup>29</sup> – c'est-à-dire qu'il ne regarde pas le futur comme une notion métaphysique mais comme quelque chose qui *fonctionne* aujourd'hui.) Car le futur n'est autre que l'évolution du marché et des produits dérivés.

## 20. LE DÉPASSEMENT PERFORMATIF DE LA REPRÉSENTATION ET DE LA POSSIBILITÉ

Il me restera, pour finir, à faire face à une dernière objection qui est que j'ai essentiellement décrit le marché comme la *dynamique* de changement de contexte (avec tout ce que cela impliquait comme tension au sein du contexte où le produit dérivé était d'abord *théoriquement* répliqué et rendu accessible, mais hors duquel il devait, ensuite, *ironiquement* traiter et gagner une liquidité indépendante) mais que j'ai, par ailleurs, continuellement insisté pour que le marché soit toujours considéré comme donné et qu'il remette toujours tout à plat. Pourquoi ne pas, en effet, se donner le marché en une fois, comme l'entière collection de prix de tous les produits dérivés de toutes les générations, sans

---

29. Cf. Élie Ayache, « Why 13 can only succeed to 11, or, the End of Probability », *Wilmott magazine*, July 2006, 30-38.

la hiérarchisation et la structuration issues des contextes et de leur changement ?

En réalité, ce sont les produits dérivés eux-mêmes qui imposent la nécessité d'une structuration et d'une représentation en états du monde. Un grand théorème de la finance des marchés établit en effet que, pour qu'il y ait absence d'opportunités d'arbitrage, il faut et il suffit que les prix des produits dérivés (en fait, de tous les actifs) soient *formellement* représentés comme l'espérance de leur *payoff* sous une certaine probabilité<sup>30</sup>. Il existe autant de familles de prix de produits dérivés (ne violant pas l'absence d'arbitrage) qu'il existe de manières différentes de représenter les états du monde (en gammes plus ou moins riches) et d'assigner des probabilités à ces états. En réalité, personne ne connaît les « vrais » états du monde et les « vraies » probabilités (à supposer que de telles choses existent dans le marché), et cette multiplicité de façons d'assigner des prix aux produits dérivés traduit simplement le fait que seuls les prix comptent (et qu'ils ne violent pas, alors, l'absence d'arbitrage) et que chacun est libre de les former en donnant de son monde la représentation qu'il veut et les probabilités qu'il veut<sup>31</sup>.

---

30. Cette probabilité purement formelle est alors appelée « probabilité risque neutre » puisque le calcul d'espérance où elle intervient ne fait pas intervenir la fonction d'utilité et l'attitude vis-à-vis du risque. Nous l'avons déjà rencontrée dans le monde de Black et Scholes, après le théorème de Feynman-Kac. Comme la valeur des actifs contingents fait par ailleurs intervenir l'espérance de l'utilité de leur *payoff* sous la probabilité *réelle*, la probabilité risque neutre apparaît comme un moyen formel de « contracter » probabilité réelle et fonction d'utilité. Elle revient à répondre à la question suivante : « Quel changement de probabilité serait-il nécessaire pour qu'un investisseur évalue les actifs contingents comme s'il était devenu insensible au risque ? »

31. Ce qui ne signifie pas du tout un retour aux probabilités subjectives ! La probabilité risque neutre n'est que l'outil formel – votre outil de *pricing* – qui garantit que les prix des produits dérivés que vous affichez dans le marché sont exempts d'arbitrage et que personne ne peut monter un *Dutch book* contre vous. Au contraire, vos probabilités subjectives, censées refléter votre opinion sur l'évolution du prix de l'action, seraient telles que vous utiliseriez alors vos fonctions d'utilité pour évaluer les produits dérivés, or, tel n'est plus notre propos. Quant aux probabilités et processus stochastiques inhérents à l'outil de *pricing*, ils ne sont « réalistes » ni au sens des probabilités objectives ni au sens des probabilités subjectives. Les notions de « prix » et de « marché » renversent jusqu'au schéma représentationnel lui-même, alors de là à interpréter

C'est seulement lorsqu'une collection d'états du monde est considérée comme *donnée et fixée* que l'argument de réplication dynamique peut se mettre en place et imposer l'unicité de la famille des prix des produits dérivés (et leur indépendance vis-à-vis des fonctions d'utilité). Mais, d'une part, rien n'oblige les *traders* à mettre en œuvre la réplication dynamique (si, d'un *commun accord*, ils décident de s'en priver) et, d'autre part, tout porte à croire que la collection d'états du monde n'est jamais fixée, car c'est le *propre* du marché que de l'étendre sans cesse ! Rien n'oblige même de croire à la possibilité préalable d'une représentation en états du monde ! Vue d'en haut, du point de vue où le marché entier est supposé « donné » dans toute la multiplicité des prix (changeants) de tous les produits dérivés et dans l'*impossibilité structurelle* de le capturer dans un contexte donné et fixé, la réplication dynamique (et sa présupposition représentationnelle) se révèle être, en effet, une stratégie (ou une méthode) de *pricing comme une autre*, qui n'a pas plus de prétention qu'une autre à la vérité.

La raison pour laquelle je la préfère dans l'exposition *philosophique* du problème du marché est que, justement, elle est *immanente*. C'est la vision surélevée et « absolue », qui prétend qu'aucune représentation n'est vraie, que le marché est toujours ouvert, qu'aucune famille de prix n'est unique et que la réplication ne sera jamais valide, qui est, à mon avis, la vision *transcendante* (bien qu'elle soit vraie, évidemment) ! La vision par réplication, elle, ne prétend rien ; ses contextes ne sont pas là pour connaître ou représenter mais pour fournir un *outil* de *pricing* permettant au *trader* de faire le marché. Et ce qui est

---

les probabilités risque neutre au-delà de l'instrument ! Certains théoriciens de la probabilité soutiennent la primauté de la notion d'espérance par rapport à celle de probabilité (Cf. Peter Whittle, *Probability via Expectation*, New York : Springer Verlag New York Inc. 2000). La probabilité serait ainsi une notion dérivée dont le seul but est de permettre de représenter l'espérance. Mon interprétation du marché des produits dérivés revient à soutenir la primauté de la notion de *prix* par rapport à celle d'espérance. Car l'espérance présuppose encore la représentation d'une variable aléatoire et le dispositif représentationnel des états du monde et des probabilités. Selon mon interprétation, elle serait ainsi elle-même une notion dérivée dont le seul but est de permettre de représenter théoriquement le prix. Car le prix est en réalité encore plus *simple*. Il ne présuppose rien d'autre que le marché.

alors proprement juste et original, c'est que la « vérité » – à savoir que le marché échappera toujours au contexte donné et à la représentation donnée – est obtenue, dans le cas de la vision par réplique, d'une manière *performative* et non pas représentationnelle. Car c'est en utilisant effectivement son outil de *pricing* et de réplique que le *trader* contribuera, d'une part, à rendre le marché du produit dérivé plus liquide, et d'autre part, *justement* à dépasser le contexte et à assurer que le marché n'y sera jamais limité. L'être du marché, ce dépassement même, est ainsi immanent au marché.

Bien qu'il soit structurellement le lieu de la faillite de la représentation et de la structure, le marché n'est pas une jungle où tout est possible. Il est principalement un lieu d'action et je caractériserai, justement, cette dernière comme devant *associer* la représentation avec le désir (et la nécessité) de dépasser la représentation. On ne va pas au marché sans préparation ou équipement. Si on y va, c'est pour tenter d'y répliquer des idées, des concepts et des représentations établis, mais également (et même, surtout) pour les traiter et les échanger. On va au marché parce qu'on projette des *possibilités* (et que cela confirme notre faculté d'exercer notre contrôle, et de réagir de la manière dont le prévoient nos schémas de représentation et de décision); mais on y va surtout pour mettre à l'épreuve notre *capacité*<sup>32</sup>, celle de réorienter nos outils et nos décisions de la manière qui n'était pas projetée.

## BIBLIOGRAPHIE

Ayache, Élie, 2005. «The Equity-to-credit Problem (or the Story of Calibration, Co-calibration, and Re-calibration)». In: P. Wilmott (ed.), *The Best of Wilmott 1*. West Sussex, England: John Wiley & Sons.

---

32. Concept bien plus « initial » que la possibilité (il correspond à la pensée du commencement-initial), ou même que les modalités en général, qui ne sont, d'après le Heidegger des *Contributions à la philosophie*, que les modalités de l'être dans la *question métaphysique* de l'être. Pour une élaboration de la différence entre capacité et possibilité, voir Élie Ayache, « Why 13 can only succeed to 11. or, the End of Probability », *op. cit.*

- Ayache, Élie, 2006. « What Is Implied by Implied Volatility? ». *Wilmott* January 2006 : 28-35.
- Ayache, Élie, 2006. « *OpSession: A New Logic for Option Pricing and Trading* ». *Wilmott* May 2006 : 32-42.
- Ayache, Élie, 2006. « Why 13 can only succeed to 11, or, the End of Probability ». *Wilmott* July 2006 : 30-38.
- Ayache, Élie, 2006. « The Irony in the Variance Swaps ». *Wilmott* September 2006 : 16-23.
- Bachelier, Louis, 1900. *Théorie de la spéculation*. Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3<sup>e</sup> série, tome 17, 1900 : 21-86.
- Bitbol, Michel, 1996. *Mécanique quantique, une introduction philosophique*. Paris : Flammarion.
- Bitbol, Michel, 1998. « La Mécanique quantique comme théorie des probabilités généralisées ». In : E. Klein et Y. Sacquin (éds.), *Prévision et probabilités dans les sciences*. Paris : Éditions Frontières.
- Bitbol, Michel, 2001. « Non-Representationalist Theories of Knowledge and Quantum Mechanics ». *SATS (Nordic Journal of Philosophy)* 2 : 37-61.
- Black, Fischer & Myron Scholes, 1973. « The Pricing of Options and Corporate Liabilities ». *The Journal of Political Economy* Volume 81, Issue 3 (May – June 1973) : 637-654.
- Heidegger, Martin, 1989. *Beiträge zur Philosophie – Vom Ereignis (Contributions à la Philosophie – De l'événement)*. Francfort-sur-le-Main : Vittorio Klostermann.
- Henrotte, Philippe, 1997. « Construction of a state space for interrelated securities with an application to temporary equilibrium theory ». In : Mordecai Kurz, (ed.), *Endogeneous Economic Fluctuations: Studies in the Theory of Rational Beliefs*, Studies in Economic Theory. Berlin : Springer Verlag 1997.
- Henrotte, Philippe, 2002. « Dynamic Mean Variance Analysis ». Working paper, July 2002.
- Henrotte, Philippe, 2002. « Pricing Kernels and Dynamic Portfolios ». Working paper, August 2002.
- Hermann, Grete, 1996. *Les Fondements philosophiques de la mécanique quantique*, traduction, présentation et postface de Léna Soler. Paris : Vrin.
- Heston, Steven L., 1993. « A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options ». *Review of Financial Studies* 6(2) : 327-343.
- Merton, Robert, 1973. « Theory of Rational Option Pricing ». *Bell Journal of Economics and Management Science* volume 4. Spring 1973 : 141-183.
- Merton, Robert, 1976. « Options pricing when underlying stock returns are discontinuous ». *Journal of Financial Economics* 3(1) : 125-144.

- Pöggeler, Otto, 1991. *Martin Heidegger's Path of Thinking*. New York: Humanity Books.
- Whittle, Peter, 2000. *Probability via Expectation*. New York: Springer Verlag New York Inc.

Élie Ayache

# La structure quantique de la connaissance individuelle et sociale

La mécanique quantique est perçue comme paradoxale aussi longtemps qu'on pense qu'elle a pour but de décrire le monde. Les paradoxes se dissolvent dès qu'on a admis qu'elle est une réponse formelle à une certaine classe de situations de connaissance. Pour le comprendre, on doit d'abord se rappeler que l'acte de connaître consiste idéalement à mettre à distance une partie de ce qui arrive, de façon à ne plus se contenter d'y adhérer et d'y participer, mais de l'anticiper et de le maîtriser. On doit ensuite réaliser que ce programme idéal définit en creux ses propres bornes : d'une part rien n'empêche qu'il rencontre des obstacles infranchissables dans certains domaines, et d'autre part il suppose de toutes manières un état initial où la distance n'est pas encore établie.

La mécanique quantique se comprend comme la réponse des sciences physiques au premier type de borne que rencontre le programme de la connaissance. Elle est une réponse formelle aux strictes limites de la distanciation objectivante des phénomènes spatio-temporels, imposées par la valeur non-nulle de la constante de Planck. Sa stratégie consiste à établir une distanciation objectivante de second ordre, une objectivation de substitution sur un mode réflexif. Puisqu'on ne peut pas désentrelacer les phénomènes spatio-temporels microscopiques de leurs contextes expérimentaux, et puisque toute perspective d'en détacher un objet également spatio-temporel doté d'une trajectoire manifestant sa permanence et son identité, s'en trouve bloquée, il reste à objectiver les modalités mêmes de l'entrelacement entre phénomènes et contextes. La théorie quantique transcrit formellement ces modalités d'entrelacement par des relations de commutation entre observables, et par des relations d'indétermination de Heisenberg, qui expriment la sensibilité des phénomènes à l'ordre d'utilisation des moyens d'accès expérimental (sensibilité qui n'existerait pas si les phénomènes

étaient complètement indépendants de ces moyens d'accès). Par ailleurs, puisque l'entrelacement des phénomènes spatio-temporels et de leurs contextes expérimentaux interdit de maîtriser toutes les conditions d'occurrence de ces phénomènes, et donc de les *anticiper* de manière univoque et certaine, la théorie quantique ne peut objectiver qu'un instrument *probabiliste* de prévision, en le représentant dans un espace abstrait.

Cet instrument de prévision s'identifie plus précisément à un ensemble de vecteurs dans un espace de Hilbert. Parmi ces vecteurs, les vecteurs propres des observables dans un espace de Hilbert correspondent terme à terme aux résultats de mesure possibles. Les vecteurs d'état, qui s'écrivent comme superpositions linéaires de ces vecteurs propres, expriment certaines symétries élémentaires des situations expérimentales ; et ces symétries ont des conséquences quantitatives en termes d'évaluation des probabilités de chaque résultat de mesure d'une variable donnée. Les vecteurs d'état globaux intriqués (*entangled* en anglais) prennent quant à eux en charge des symétries plus complexes qui se traduisent par des *corrélations* entre *plusieurs* variables. À l'inverse, la *levée* de la superposition et de l'intrication (« *entanglement* » en anglais, « *Verschränkung* » en allemand), autrement dit la *réduction* des vecteurs d'état à la suite de la prise en compte de l'information expérimentale, introduit une brisure de symétrie. La brisure de symétrie a, entre autres conséquences, celle de défaire la corrélation initialement prévue, et de restituer leur *indépendance* aux prévisions concernant les diverses variables mises en jeu.

Pour résumer, les relations d'indétermination, les symétries de superposition et d'intrication, et la brisure de symétrie des vecteurs d'état, sont les principales marques objectivées des *limites du détachement objectivant* que la physique a rencontrées au début du vingtième siècle.

Cette façon de procéder offre *a priori* un modèle pour toutes les configurations épistémiques où la distanciation objectivante est incomplète. Pas seulement celles où se rencontrent tardivement des limites infranchissables à la décontextualisation ; mais aussi celles, beaucoup plus courantes (et relevant de la seconde sorte de bornes), où des connaissances à l'état naissant n'ont pas laissé l'objectivation s'accomplir intégralement ; ou bien encore celles qui s'imposent à elles-mêmes une objecti-

vation incomplète afin de ne pas laisser perdre certains aspects participatifs ou interprétatifs des domaines étudiés. Or, la dernière configuration, celle d'une connaissance intentionnellement élargie à sa dimension participative ou herméneutique, est typique des sciences humaines, qu'il s'agisse de la « psychologie » phénoménologique, de la psychologie cognitive, de la sociologie des sciences, ou de l'anthropologie.

Ce sont ces identités de configurations épistémologiques qu'ont eu pour but de formaliser les théories proto-quantiques d'Atmanspacher, de Lambert-Mogiliansky, et de Zwirn<sup>1</sup>, en les extrayant du réseau de particularités qui leur sont imposées par la physique. Mon but ici va être de montrer : (1) que les deux caractéristiques centrales des théories proto-quantiques, à savoir l'incompatibilité des observables et l'intrication, s'appliquent parfaitement à certains champs sélectionnés des sciences humaines ; et (2) que réaliser cela permet d'aborder certains problèmes philosophiques connectés aux sciences humaines avec un regard neuf.

Je partirai d'un modèle proto-quantique de la phénoménologie de la perception proposé par Patrick Heelan<sup>2</sup>. Ce modèle comporte l'équivalent formel de la construction de symétrie (représentable par les superpositions et les intrications de la théorie quantique), de la brisure de symétrie (représentable par la réduction de l'état dans la théorie quantique), et de la contextualité formelle des phénomènes (représentable par des relations de commutation en théorie quantique). La pertinence de ce modèle est manifeste pour au moins trois modalités perceptives : (a) celle de la construction d'un *eidos* stable d'objet au-delà de la variété des moments sensibles vécus ; (b) celle de la bistabilité perceptive entre deux formes eidétiques distinctes ; et (c) celle de la bistabilité entre une forme sous-interprétée et une forme sur-interprétée de ce qu'on peut considérer après coup comme le « même » tableau perceptif.

Première modalité, par conséquent, la construction d'un *eidos*. Construire un *eidos*, c'est remonter d'une série de traits individuels (choses, profils, aspects, etc.), vers l'invariant dont

---

1. Voir les chapitres écrits par ces auteurs dans le présent volume.

2. P.A. Heelan, « The phenomenological role of consciousness in measurement », *Mind and Matter*, 2, 61-84, 2004.

chaque trait individuel puisse être considéré comme l'une des réalisations contingentes possibles. L'*eidōs* d'un objet de type corps matériel est ainsi ce qui forme le pôle d'identité des divers aspects qu'il est susceptible de montrer sous toutes sortes d'angles et d'approches<sup>3</sup>. Corrélativement, l'*essence* d'une classe d'objets est le pôle idéal-typique d'identité, de communauté, dont les objets individuels peuvent être considérés comme autant d'instanciations. Une caractéristique centrale de la thèse husserlienne est que nous pouvons avoir une intuition propre de chaque essence, par-delà l'intuition des variantes que nous synthétisons en elle. Et que l'intuition de l'essence est *exclusive* de celle d'un individu concret particulier instanciant cette essence. Mais cette exclusion, qui frappe les individus concrets, ne concerne en aucune manière la gamme des individus *concevables*, ou plutôt *imaginables*, qui pourraient instancier l'essence. La multiplicité ouverte des variations possibles, loin d'être absente de l'intuition de l'invariant eidétique, en reste partie intégrante. « C'est seulement si nous gardons en prise les imaginés antérieurs, écrit Husserl (...), que nous obtenons l'*eidōs*<sup>4</sup>. »

Le parallèle entre l'analyse phénoménologique et les traits épistémologiques de la théorie proto-quantique est facile à amorcer à ce stade. Tout d'abord, la remontée des individus particuliers vers un *eidōs* constitue un processus de construction de symétries. Voyons comment cette construction s'opère, à deux niveaux.

Au premier niveau, celui de l'étape préliminaire de la perception qualifiée d'antéprédicative par Husserl dans *Expérience et jugement*, il n'est pas encore question d'une séparation nette entre le sujet percevant et l'objet perçu. Ni l'objet ni ses déterminations ne sont encore *constitués*, au sens plein dont témoigne la formulation d'un jugement catégorique. Tout ce que met en place l'acte de perception est une présomption encore vague d'identité de ce qui est visé, et un intérêt tendu vers le déploiement hypothétique de ses faces cachées. La structure présumée reste incertaine. En cas de non-confirmation des attentes qu'elle conduit à entretenir, elle peut perdre d'un instant à l'autre sa transcendance alléguée, et se contracter sur l'immanence de ce

3. Pour toutes ces analyses sur les « essences », voir E. Husserl, *Expérience et Jugement*, P.U.F., 1970, §87 suiv. (p. 413 suiv.).

4. *Ibid.*

qui se présente. À un stade perceptif encore plus originaire, lorsque la première ébauche interprétative n'est pas encore installée ou que la tentative d'interprétation a été bloquée par l'ambiguïté de la sollicitation sensorielle, l'analyse phénoménologique peut aller jusqu'à mettre en évidence une symétrie interprétative entre *plusieurs eidos* d'objets.

Mais une fois accompli un choix relativement stable, une fois la perception fixée sur un *eidos* déterminé, un second niveau de construction de symétries intervient. Dans le cas de l'*eidos* d'un corps matériel, les symétries concernées sont même parmi les plus connues qui soient, puisqu'il s'agit de celles de l'espace euclidien : translations, rotations et réflexions. Remonter à un *eidos* de corps matériel, souligne Heelan, revient alors à construire la « symétrie sous un groupe de transformations qui engendre la multiplicité cohérente des profils d'un seul objet local ». Corrélativement, la remarque de Husserl selon laquelle l'intuition de l'*eidos* suppose de « garder en prise » la suite ouverte des profils imaginés, invite à assimiler l'*eidos* à une *superposition* convenablement pondérée de visées de profils individuels, ou plus généralement d'individus possibles aptes à l'instancier. La comparaison entre superposition d'instanciations possibles d'un *eidos*, et superposition d'états propres d'une observable en théorie quantique, n'a *a priori* rien d'artificiel. L'*eidos* et l'état quantique sont des formes anticipatrices intersubjectivement utilisables, des complexes structuraux générateurs de prévisions, tantôt perceptives, tantôt expérimentales, mais valant pour tous. C'est évident pour l'état quantique, qui opère comme générateur universel de probabilités à travers l'algorithme de Born. C'est également clair pour l'*eidos* husserlien, puisque, comme toute objectivation, il « (...) vise à créer, par-delà la situation momentanée, un trésor de connaissance qui soit communicable et utilisable dans l'avenir<sup>5</sup> ». Par ailleurs, chaque profil possible particulier apte à instancier l'*eidos*, comporte une teneur prédictive puisqu'il ne se réduit pas à une présentation, mais est entouré d'attentes qui portent la visée perceptive au-delà de lui-même. De la même façon, chaque vecteur propre d'une observable inclut une valeur prédictive,

5. E. Husserl, *Expérience et Jugement*, op. cit., p. 74.

pour cette observable (dont la valeur propre correspondante a une probabilité égale à 1) et pour d'autres observables. L'*eidos*, superposition de profils, aussi bien que le vecteur d'état, superposition de vecteurs propres, consiste donc en une combinaison et une pondération des divers contenus prédictifs des éléments superposés. Il est vrai que le seul trait qui risque ne pas être semblable, entre les superpositions de profils apparents et les superpositions de vecteurs propres, est précisément celui qui fait la spécificité de la théorie quantique, à savoir l'*interférence* entre les divers termes de la superposition. De fait, de simples profils au sens de la géométrie projective n'ont aucune raison d'interférer ; tout au plus ils se recouvrent spatialement, ce qui est différent. Mais en phénoménologie, on n'a justement pas affaire à de simples projections spatiales ; comme nous l'avons tout juste signalé, les « profils » dont il est question sont ce que Husserl appelle des « esquisses » (*Abschattungen*, traduit par « adumbrations » en anglais), c'est-à-dire des aspects aux bords flous, entourés d'un « horizon » mixte fait d'incertitudes et d'attentes. Et ces attentes anticipent d'autres esquisses comportant elles-mêmes des bords flous. Dans ces conditions, aucune attente propre à une esquisse n'est indépendante des attentes impliquées par les autres esquisses qu'elle enveloppe. L'absence d'indépendance des anticipations partielles les unes par rapport aux autres, leur influence mutuelle dans une anticipation globale, évoquent cette fois d'assez près les superpositions quantiques.

Dans cette configuration anticipatrice, on peut également désigner un équivalent de la complémentarité au sens de Bohr, ou encore de la non-commutativité des observables, même si, en l'absence d'une valeur jouant un rôle analogue à la constante de Planck, il n'est pas question d'en dériver des relations d'indétermination. Rappelons qu'en théorie quantique, un cas de complémentarité et de non-commutativité prévaut entre : (a) l'observable ayant pour vecteurs propres ceux qui interviennent dans la superposition, et (b) une autre observable qui aurait parmi ses vecteurs propres le vecteur d'état entier qu'exprime cette superposition. En phénoménologie de la perception, il y a complémentarité (au sens d'exclusivité mutuelle et de nécessité conjointe) entre (a) l'attention dirigée vers les individus ou aspects particuliers qui, étant susceptibles d'instancier une essence, sont superposés en elle, et (b) l'attention dirigée vers

l'essence elle-même en tant que superposition. Nous verrons plus tard que, dans certains cas, il est facile de trouver un équivalent formel de la non-commutativité des observables en termes de non-commutativité de projecteurs perceptifs.

Après la construction de symétrie, venons-en à la brisure de symétrie. En théorie quantique, celle-ci se trouve représentée, on l'a dit, par la *réduction* du vecteur d'état, qui est la méthode la plus simple pour réviser son contenu prédictif en tenant compte d'un résultat expérimental effectivement obtenu, concrètement constaté, au laboratoire. En phénoménologie de la perception, la brisure de symétrie se produit lorsque, à la suite du remplissement sensible de l'intention ayant la forme d'une certaine essence, on passe brusquement d'une intuition d'essence en attente, à la perception d'une chose donnée «en chair et en os»; ou encore lorsqu'on passe de l'*eidos* à un noème perceptif, c'est-à-dire au perçu en tant que tel<sup>6</sup>. À l'inverse, le flux encore informe du vécu n'acquiert la signification d'un profil de chose qu'à travers son *interprétation* au moyen d'un ou plusieurs *eidos*. Dans tous les cas, en théorie quantique comme en phénoménologie de la perception, la brisure de symétrie équivaut à une irruption de l'existence concrète dans l'idéalité visée. Heelan écrit qu'elle est un « passage de la pensée à la vie ».

Mais ce passage équivaut aussi à une cristallisation de l'objet, et de la dichotomie sujet-objet qui le conditionne. En effet, tant qu'on s'en tient à une intuition d'essence, ou à la représentation d'un vecteur d'état, il y a total entrelacement entre: (i) le sujet qui propose (l'essence ou le vecteur d'état prédictif), et (ii) l'objet qui n'a d'autre existence qu'en tant que proposé ou attendu. Mais dès que l'intention informée par l'essence, ou l'anticipation structurée par le vecteur d'état, rencontre un remplissement, une désentrelacement se produit entre le sujet qui propose et l'objet qui a disposé. L'intention une fois remplie, le noème perceptif une fois cristallisé, la structure prédictive probabiliste une fois redéfinie par un résultat de mesure, on peut en effet les transcrire en un jugement d'existence: tel objet, conforme à tel *eidos*, ou caractérisé par telle valeur d'une observable, s'est présenté et manifesté. Ce n'est pas pour rien

---

6. E. Husserl, *Idées directrices pour une phénoménologie*. Gallimard. 1950, p. 305 (§88).

qu'on appelle en anglais « objectification » le processus qui aboutit à la réduction de l'état quantique.

La seconde modalité perceptive qu'on peut mettre en parallèle avec la situation épistémologique des théories quantiques et proto-quantiques est celle qui consiste à avancer non pas une, mais deux ou plusieurs essences à remplir par la même configuration concrète. Ici, la construction de symétrie s'avance une étape plus loin, puisqu'elle n'opère pas dans une essence, mais entre deux ou plusieurs essences. Un bon exemple est celui du cube de Necker, qui se présente, en l'absence d'interprétation perceptive, comme un faisceau de lignes sur un plan, mais qui peut être interprété perceptivement en volume tantôt comme un cube dont la face avant se situe en bas à droite, tantôt comme un cube dont la face avant se situe en haut à gauche. Cette bistabilité perceptive se met naturellement en parallèle avec une superposition d'états quantiques, apte à basculer d'un côté ou de l'autre du choix qu'elle offre, au cours d'un acte de perception concrète qui brise la symétrie initiale. Ici, la complémentarité, au sens d'exclusion mutuelle et nécessité conjointe, peut concerner deux couples distincts de formes : soit les deux interprétations volumiques, mutuellement exclusives car relevant de deux états mentaux incompatibles du sujet ; soit d'un côté les interprétations volumiques prises en bloc, et de l'autre côté l'appréhension strictement immanente, sans interprétation tri-dimensionnelle du réseau de lignes. Un tel modèle proto-quantique de la bistabilité perceptive a été utilisé avec succès par le groupe d'Atmanspacher, afin de relier quantitativement entre elles deux échelles de temps mentales : le temps d'identification interprétative de première intention, et le temps de basculement spontané d'une configuration interprétative à l'autre<sup>7</sup>.

La troisième modalité perceptive analogue à la situation épistémique de la théorie quantique, concerne également un cas de bi-stabilité ; mais cette fois la bistabilité entre une forme sous-interprétée et la même forme sur-interprétée. L'un des exemples commentés par Heelan est celui d'une photographie de personnage ; mais on peut également penser, dans un registre

---

7. H. Atmanspacher, T. Filk, & H. Römer, « Quantum Zeno features of bistable perception », *Biological Cybernetics*, 90, 33-40, 2004. Voir également l'article d'Atmanspacher et de son équipe dans le présent volume.

voisin, à la perception d'un stéréogramme. La sous-interprétation consiste à voir la photographie comme une simple surface colorée bi-dimensionnelle. La sur-interprétation revient à voir, en quelque sorte à travers elle, à la fois le personnage lui-même et son environnement tri-dimensionnel. La différence entre sous-interprétation et sur-interprétation peut se comprendre en termes de distanciation et d'engagement, ou encore d'appréhension de la scène en troisième personne et en première personne. Appréhender la scène de manière distanciée, en troisième personne, c'est voir quelqu'un en train de fixer un rectangle de papier glacé plat couvert de taches de couleur. Appréhender la même scène de manière engagée, en première personne, c'est être *concerné* par ce que représente la photographie, et percevoir ce représenté dans un espace figuré par-delà la photographie. Ici encore, la toute première étape perceptive peut être comprise comme une phase de construction de symétrie, celle qui se traduit par une indécision, une superposition, entre les deux états interprétatifs. La superposition, comme les précédentes, traduit une intrication entre le sujet et l'objet putatif, le sujet n'ayant pas encore opté entre les attitudes engagée et distanciée, et l'objet corrélatif de chacune des deux attitudes restant à cause de cela indéterminé et suspendu à un choix non encore accompli. L'étape perceptive finale, pour sa part, comprend un acte de brisure de symétrie qui conduit à stabiliser la visée intentionnelle en la fixant soit sur l'entité bi-dimensionnelle « photographie », soit sur le personnage tri-dimensionnel qu'elle représente. Elle instaure une dichotomie sujet-objet, puisque le sujet a choisi son rôle (soit distancié, soit engagé) face à l'objet, et que l'objet-corrélat de ce rôle se trouve fixé par le choix. La structure de complémentarité, à présent, est facile à désigner dans cette configuration perceptive. Elle associe et oppose les appréhensions perceptives en surface et en profondeur. Ces deux genres d'appréhension sont mutuellement exclusifs, une nouvelle fois en raison de l'incompatibilité des états mentaux qui leur correspondent. On pourrait dire qu'en même temps, ils sont conjointement requis pour caractériser pleinement la situation: le sujet voit un personnage par le biais de la surface colorée de la photographie. Mais attention, cette nécessité conjointe, et la description composite qui en est donnée, n'annulent pas l'exclusivité mutuelle. Lorsqu'on déclare que le sujet voit un personnage en

profondeur par le biais d'une surface colorée, c'est une manière de parler approximative qui met sur le même plan deux moments perceptifs disjoints. Une telle approximation est généralement sans conséquence lorsqu'on parle de perception, car chacun sait de quoi il s'agit, mais elle peut engendrer des confusions dans les configurations épistémologiques plus élaborées qu'on rencontre, nous le verrons, en sociologie de la connaissance scientifique.

L'exemple de la bi-stabilité interprétative a un intérêt particulier pour le parallèle avec la théorie quantique parce qu'il offre l'occasion non seulement d'une comparaison qualitative mais aussi d'une esquisse d'isomorphisme. Rappelons cependant que la comparaison ne peut même pas s'amorcer si on tient le formalisme de la théorie quantique standard pour la description de choses pré-existantes dans la nature ; et en particulier les vecteurs dans un espace de Hilbert pour la description de l'état intrinsèque de ces choses. Après tout, l'état des photographies ou des stéréogrammes *eux-mêmes* (*An Sich*) n'est pas bi-stable, et il n'a donc aucune raison de manifester une quelconque superposition entre deux pôles de bi-stabilité. Mais tout change si on réalise que les vecteurs d'état de la mécanique quantique sont des symboles à visée prédictive, fournissant la probabilité de résultats qui impliquent la totalité de la chaîne de mesure, depuis la préparation jusqu'à la configuration finale de l'instrument. Dans certaines configurations de la phénoménologie de la perception, on peut tenter d'attribuer le même genre de statut à des vecteurs d'un espace doté de la structure d'un espace de Hilbert, comme le propose P. Heelan à titre d'hypothèse allant au-delà de la version la plus générale de formalisme proto-quantique. Ces vecteurs seront des symboles à visée anticipatrice, évaluant les poids respectifs des états mentaux sous-interprétant et sur-interprétant (et accessoirement d'autres états mentaux connexes), qui impliquent la totalité de la chaîne perceptive, depuis l'image et son environnement jusqu'aux dispositions du sujet percevant. À partir de là, on définit deux projecteurs dans cet espace de Hilbert, chacun représentant l'une des deux fonctions perceptives distinguées : la fonction d'engagement et la fonction de distanciation, la fonction d'appréhension de l'image en tant qu'acteur possible de ce qui s'y déroule, ou en tant que spectateur radicalement passif, inapte à esquisser la moindre possibilité d'insertion de soi dans la scène représentée. Appelons-les  $P_1$  et  $P_3$  (pour première et

troisième personne). Le sous-espace défini par l'action de  $P_1$  restreint les possibilités perceptives à ce qui est *représenté* par l'image, tandis qu'à l'inverse, le sous-espace défini par l'action de  $P_3$  restreint les possibilités perceptives à l'image elle-même. Cela étant admis, l'action séquentielle des deux projecteurs dépend forcément de l'ordre de leur mise en œuvre. La perception de l'image peut en effet être considérée comme un médiateur vers ce qu'elle représente, tandis que la perception de ce qu'elle représente, disons le personnage ou le paysage, ne constitue pas un médiateur vers la perception d'une image particulière. La séquence  $P_1P_3$  ( $P_3$  puis  $P_1$  :  $P_1P_3\psi = P_1(P_3\psi)$ ) projette l'état  $\psi$  sur un sous-espace comportant comme seule possibilité celle de percevoir ce qui est représenté, après une étape intermédiaire de projection sur les possibilités de percevoir l'image. Mais la séquence inverse  $P_3P_1$ , qui consiste à sélectionner d'abord comme seule possibilité celle de percevoir ce qui est représenté, puis d'essayer (mais généralement en vain) de tirer de là une perception de l'image bi-dimensionnelle photographique, ne retient en fin de parcours aucune vraie possibilité perceptive. Les deux opérateurs ne commutent donc pas, et cela ouvre formellement la voie (sous certaines conditions supplémentaires qui ne sont pas toujours réalisées) à la dérivation de relations d'indétermination.

Venons-en à présent à une quatrième modalité perceptive, que Heelan ne mentionne pas. Si celle-ci me semble intéressante, c'est qu'elle comble une lacune dans l'établissement de parallèles entre des situations relevant de la psychologie phénoménologique et des situations relevant de la théorie quantique. Jusque là, il n'a été question que de déterminations perceptives superposées en raison de l'entrelacement entre l'état de ce qui est perçu et l'état de du sujet qui perçoit. Mais la situation vraiment typique de la mécanique quantique est celle où non seulement la superposition, mais aussi *l'intrication des déterminations entre elles*, résulte de l'entrelacement entre ce qui est à mesurer et le sujet instrumental. Autrement dit, on a affaire ici à un entremêlement à deux niveaux : une intrication entre objets, sous-tendue par un entrelacement entre ces objets et les moyens expérimentaux d'accès. C'est ce qui se passe lorsqu'on effectue la mesure d'une observable globale sur un système composite, au lieu de mesurer des observables individuelles sur chaque sous-système. Dans ce cas, ce qu'on connaît (c'est-à-dire ce qu'on peut prévoir

avec certitude), est seulement une *relation* entre les déterminations individuelles des sous-systèmes, et non pas ces déterminations elles-mêmes. On peut par exemple connaître la *distance* de deux particules sans connaître la position de chacune d'entre elles, ou bien leur *moment cinétique total résultant* sans connaître le moment cinétique de l'une et de l'autre. De surcroît, cette détermination globale est complémentaire, c'est-à-dire en particulier *exclusive*, des déterminations locales.

On peut également trouver une illustration de cette configuration dans le domaine de la phénoménologie de la perception. Considérons par exemple l'« illusion » des flèches de Müller-Lyer. En percevant globalement le couple des deux flèches dotées de pointes dirigées respectivement vers l'intérieur et vers l'extérieur, on établit une *relation d'ordre apparente* entre leurs longueurs (celle dont les pointes sont dirigées vers l'intérieur apparaissant *plus courte que* celle dont les pointes sont dirigées vers l'extérieur). Les longueurs apparentes sont intriquées *entre elles* dans la mesure où, n'étant justement qu'*apparentes*, elles sont entrelacées *avec* le sujet percevant pour qui elles sont des apparences. De plus, l'établissement d'une relation d'ordre globale entre les longueurs apparentes est clairement *complémentaire* de la détermination métrique locale de chacune des longueurs de flèche, puisque leurs conditions d'évaluation sont mutuellement exclusives. Comme dans le cas de l'intrication quantique, l'appréhension de la relation exclut celle des déterminations reliées. La différence majeure avec le cas quantique est cependant que la mesure individuelle des longueurs peut très bien s'inscrire en faux contre l'évaluation perceptive globale d'une relation (d'inégalité) entre longueurs. Nous y reviendrons un peu plus loin.

Je passe à présent à un parallèle méthodologique et structural entre la théorie quantique et une autre discipline relevant des sciences humaines. Le parallèle concerne cette fois l'établissement des consensus sociaux à propos d'un paradigme scientifique. La transition n'est pas très difficile à faire, si l'on se souvient de la comparaison établie par Kuhn<sup>8</sup> entre les pro-

---

8. T. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, University of Chicago Press, 1962, 2<sup>e</sup> ed. 1970, p. 62-64, 111-114. P. Hoyningen-Huene, *Reconstructing scientific revolutions*, The University of Chicago Press, 1993, p. 39-63.

cessus de perception (avec leurs possibles « gestalt-switch(es) », ou basculements du voir-comme), et les processus d'adoption de paradigmes par de larges communautés de chercheurs.

Le principal intérêt de ce parallèle ne réside pas dans le simple fait de l'isomorphisme, qui illustre une fois encore la généralité d'un schéma de théorisation, comme la théorie proto-quantique, adapté à toute situation d'inextricabilité entre le connaissant et ce qui est à connaître. Il peut être trouvé, on va le voir, dans la capacité du schéma proto-quantique à indiquer des issues pour un débat souvent houleux à propos du statut des connaissances scientifiques : ces connaissances donnent-elles accès à une vérité intemporelle, atopique, indépendante de la communauté humaine qui les a élaborées et qui les entretient, ou bien sont-elles irrémédiablement expressives d'une configuration anthropologique, culturelle et sociale ? Lorsqu'on n'est pas aveuglé par une idéologie, soit réaliste soit constructiviste, on a envie de répondre « les deux ». La connaissance scientifique est tendue vers l'intemporalité et l'universalité de ses contenus ; mais en même temps, cette tension, les valeurs qui l'inspirent, et le choix de tenir un certain aboutissement pour satisfaisant, prennent racine dans un éthos individuel et social particulier, qui est celui d'un être vivant doté d'intérêt tendu, d'une civilisation survalorisant les succès obtenus en mettant en commun l'intérêt tendu (c'est-à-dire en objectivant), puis d'une communauté spécialisée à l'intérieur de cette civilisation.

Comment tenir compte des deux leçons apparemment opposées ? D'abord en constatant que celles-ci tirent leur force de deux points de vue distincts et « complémentaires » au sens bohrien. Le point de vue de qui est engagé dans la recherche des connaissances, et le point de vue de qui cherche à prendre de la distance par rapport à cette recherche afin de mettre son fonctionnement au jour. Le point de vue de l'acteur et le point de vue du spectateur de l'acquisition des connaissances. Le point de vue en première personne et le point de vue en troisième personne. L'acteur-chercheur, avec son attitude en première personne, a en effet tendance à traverser le plan immanent des méthodes pour concentrer son attention sur l'objet supposé transcendant vers lequel convergent les méthodes. Au contraire, le spectateur-anthropologue ou sociologue, avec son attitude en troisième personne, ne veut accorder de crédit à la visée d'objet que dans

la mesure où la méthode collectivement acceptée lui offre des points d'appui ; il va jusqu'à tenir la visée d'objet pour un simple instrument méthodologique parmi d'autres, aussi flexible que bien d'autres, pour une entreprise éminemment institutionnelle et sociale. Mais cette claire réalisation de la dualité de points de vue ne suffit pas à résoudre la controverse. Deux options peuvent encore être prises à ce stade ; une option absolutiste et une option relativiste. Selon l'option absolutiste, le point de vue en première personne tend à donner accès à la nature telle qu'elle est ; il doit donc être affecté d'une marque de vérité potentiellement absolue. L'acteur-chercheur tend ici à révéler ce qu'*est* la chose transcendante, et si le spectateur socio-anthropologue révèle quelque chose, c'est seulement les voies par lesquelles l'acteur accède à une telle transcendance, ou bien celles qui le conduisent à manquer son but. Selon l'option relativiste, au contraire, chacun des deux points de vue accède à une forme de vérité qui lui est propre et qui reste incommunicable à l'autre. La vérité de l'acteur-chercheur est que sa situation biologique, culturelle, sociale ne fait qu'opposer un écran à la réalité, et en même temps offrir des moyens indirects pour sa mise au jour. Mais la vérité du spectateur-anthropologue, également recevable dans sa perspective, est que le mot « réalité » ne recouvre rien d'autre que le terme, toujours provisoire, d'un processus de stabilisation des croyances qui implique des capacités biologiques, des normes technologiques, des manipulations expérimentales, des jeux d'association symboliques, et des pratiques sociales allant de la demande de promotion au rite de la publication.

N'avons-nous donc ces deux possibilités : soit unifier le champ de la vérité en absolutisant le point de vue de l'acteur-chercheur, soit accepter la fragmentation du champ de la vérité en autant de points de vue épistémiques incommensurables, parmi lesquels celui du sociologue des sciences ? En sommes-nous réduits à osciller indéfiniment entre deux accusations réciproques d'auto-réfutation, l'absolutiste renvoyant au relativiste l'absurdité qu'il y a à affirmer la vérité universelle de l'énoncé de relativité de la vérité ; et le relativiste renvoyant à l'absolutiste l'absurdité qu'il y a à caractériser une vérité indépendante de tout acte de caractérisation ? Il existe en fait une troisième possibilité. Cette troisième voie permet d'unifier les deux points de vue

sur la connaissance, qualifiés d'engagé et de distancié, en première et en troisième personne, tout en préservant strictement leur diversité, leur validité locale et leur exclusivité mutuelle. Dit ainsi, cela ressemble à une utopie. Mais nous savons qu'il n'en est rien, et que cette possibilité nous est déjà familière. Rappelons-nous de la bi-stabilité perceptive entre la surface de la photographie et le personnage représenté par la photographie. L'unification de deux états perceptifs mutuellement exclusifs est dans ce cas assurée par une construction de symétrie entre eux. C'est-à-dire par la reconnaissance que ces états perceptifs peuvent être ceux d'un seul et même sujet qui ne s'est pas encore restreint à l'un des deux actes interprétatifs, et n'a pas encore posé un objet déterminé face à lui, surface colorée ou personnage représenté. Ce n'est que dans une seconde étape, de brisure de symétrie ou de réduction, ici par décision d'opportunité (ou par tension adaptative dans les stéréogrammes), que l'exclusivité des états perceptifs se manifeste. Une fois le choix effectué, on peut percevoir en surface ou en profondeur ; pas les deux simultanément. Mais outre la possibilité d'entrer dans un rapport d'intentionnalité avec l'un des deux objets, il reste toujours, pour un sujet percevant donné, l'issue d'un nouveau retrait en-deçà de la distension entre lui et tel objet déterminé, d'un ré-entrelacement entre son état indéterminé et un objet lui-même indéterminé, autrement dit d'un retour à l'état unifié symétrique et superposé. Il en va exactement de même dans le conflit des positions épistémiques en sociologie des sciences. Au delà du choix entre imposer l'unité sous l'une de ces positions, généralement la position d'autorité en première personne du chercheur, ou bien accepter leur dissociation relativiste, il reste une troisième issue : celle d'une unification dans l'état d'indécision et d'indiscrimination qui est celui d'un sujet de la connaissance en instance d'adopter l'une des deux perspectives : la perspective de l'anthropologue des laboratoires ou bien celle du chercheur de laboratoire. Un sujet en état de suspens dont les potentialités de réalisation sont plus grandes que celles, restrictives, de chacune de ces deux options. En somme, un sujet humain générique, un simple « citoyen », qui n'a pas à adopter les intérêts de l'un ou de l'autre cercle professionnel.

Si la controverse se prolonge, c'est que les protagonistes sur-valorisent l'une des deux perspectives épistémique et rejettent

dans l'ombre leurs propres capacités d'adoption de l'autre. Le chercheur scientifique sur-valorise sa projection intentionnelle vers un objet, en déclarant qu'elle donne accès à une vérité à la fois absolue et unique; et l'anthropologue sur-valorise son inventaire clinique des actes socio-cognitifs qui aboutissent à la *croissance* en un certain objet, en déclarant qu'elle retire toute valeur à la prétention du chercheur à une vérité intemporelle. Mais si la controverse *peut* simplement se déployer en première instance, si le débat peut prendre son essor sans rester un dialogue de sourds, c'est que les deux adversaires partagent un terrain et un langage commun qui n'est ni celui de l'un ni celui de l'autre, ni un troisième complètement étranger à l'un et à l'autre, mais celui d'un état symétrique d'indétermination, de suspension de l'engagement perspectiviste, et d'aptitude de principe à entrer si nécessaire dans n'importe laquelle<sup>9</sup>. Ici encore, il s'agit d'un état de simple « citoyenneté », d'une capacité de débat dans l'Agora partagée.

Souvenons-nous à présent que l'analyse proto-quantique de la bi-stabilité d'interprétation perceptive, transposable à la dualité de perspective épistémologique, comportait au moins un résultat non-trivial. Ce résultat était la *non-commutativité* des projections respectives dans un état de distanciation perceptive et dans un état d'engagement perceptif. L'image perçue, aussi bien que le réseau des opérations cognitives et des interactions sociales, peuvent être considérés comme des médiateurs vers l'objet de la représentation; tandis que l'objet représenté, qu'il s'agisse d'un personnage ou d'une région naturelle, ne renvoie pas automatiquement aux champs d'immanence qui le conditionnent. En termes épistémologiques, cette non-indifférence à l'ordre des projections perspectives se traduit ainsi : (1) Le point de vue distancié et réflexif de l'anthropologue, mais aussi du théoricien de la connaissance empiriste ou transcendantal, est plus ouvert, et plus flexible historiquement que celui du chercheur scientifique, parce que l'immanence vers laquelle il attire l'attention est grosse de plusieurs visées transcendantes possi-

---

9. Le passage du relativisme au point symétrique de suspension équivaut à celui que décrit I. Stengers sous le nom de transition de la « relativité de la vérité » à la « vérité du relatif ». I. Stengers, *La vierge et le neutrino*, La Découverte, 2006.

bles; (2) D'autre part, le point de vue engagé du chercheur scientifique à l'égard d'un objet présumé transcendant s'avère plus mobilisateur, et plus immédiatement opérant en période d'absence (provisoire) de doute sur le paradigme en vigueur. On comprend ainsi le penchant d'un large secteur de la pensée philosophique pour le point de vue réflexif, *sauf* lorsqu'il s'agit pour elle de se couler autant que possible dans la perspective des chercheurs scientifiques. On comprend à l'inverse le penchant de la communauté scientifique pour le « réalisme spontané du savant », *sauf* lorsque les consensus paradigmatiques sont menacés et qu'on doit, comme à chaque révolution scientifique, revenir sur le matériau immanent, qu'il soit empirique, instrumental, ou axiologique, qui donnait lieu précédemment à des visées transcendantes inquestionnées. Dans les deux cas, on voit apparaître, juste après la préposition « sauf », la possibilité d'une position symétrique d'indétermination. Le philosophe a toujours la faculté de se rendre disponible pour la perspective du chercheur afin de comprendre ce qu'il qualifie de « naïveté » chez celui-ci (afin de construire, s'il le souhaite, une philosophie en évolution, une philosophie « compagnon de route » des vicissitudes de la science). À l'inverse, le chercheur en période révolutionnaire est jeté dans un état de trouble d'où il ne peut sortir, comme on le sait par bien des exemples historiques, qu'en adoptant provisoirement la perspective du philosophe. Le véritable lieu d'unité des deux perspectives épistémiques, mutuellement exclusives et conjointement nécessaires sans être équivalentes, est ici encore l'état symétrique et superposé d'où elles restent toutes les deux accessibles.

Je voudrais à présent donner un exemple du genre de controverse sans fin à laquelle conduit l'incapacité d'identifier la troisième voie entre absolutisme et relativisme épistémologique, et sa résolution possible dans un cadre conceptuel de type quantique. L'exemple tourne autour des affirmations provocantes de l'anthropologue des laboratoires qu'est Bruno Latour<sup>10</sup>. Bruno Latour nie que Ramsès II soit mort d'une infection par le bacille de Koch, en dépit de ses lésions squelettiques que *nous* savons être caractéristique d'une tuberculose

---

10. B. Latour, *Nous n'avons jamais été modernes*, La Découverte. 1997; B. Latour, *Pasteur : Guerre et paix des microbes*, La Découverte, 2001.

osseuse. La raison qu'il donne à l'appui de sa négation est qu'à l'époque du *nouvel empire* égyptien, aucun travail scientifique n'avait encore caractérisé ni l'objet particulier « bacille de Koch », ni plus généralement les objets « bactéries » ou « micro-organismes ». Étrange déclaration. Rien d'étonnant qu'elle suscite le plus souvent une réaction de rejet, où se mêlent l'in-crédulité (face à tant d'apparente candeur), et l'indignation (devant l'assimilation de la science à une activité incantatoire). Pourtant, si on y réfléchit un peu, la déclaration d'inexistence des microbes avant Pasteur n'est pas tant fausse que *déplacée*. Elle se développe comme si son auteur pouvait ignorer sa situation historique et sa perspective épistémique.

Pour le comprendre, nous devons commencer par adopter une attitude neutre vis-à-vis de la question du réalisme. Nous devons commencer par rappeler de quelle manière se cristallisent les croyances associées à une théorie scientifique, sans entretenir de préjugé quant au bien-fondé métaphysique de ces croyances. Remarquons dans cet esprit qu'avant d'être une description de quoi que ce soit, une théorie scientifique est un corpus de prescriptions. Elle prescrit de *voir* tels phénomènes *comme* manifestation de telles propriétés d'objets. Elle prescrit toujours, au minimum, de prévoir et d'agir conformément à l'ordre indiqué par son formalisme mathématique ou par ses règles de classification.

Lorsque ce genre de prescription est émise, elle l'est sans limite dans le temps. Ce que prescrit une théorie scientifique, ce n'est pas de conduire nos activités et de faire nos prédictions sous la présupposition que ses objets ont acquis une efficience causale à partir de la date de *sa propre création*, mais sous la présupposition plus large que ses objets ont *toujours-déjà* eu cette efficience causale, et qu'ils la conserveront *à jamais* dans l'avenir. Le succès de l'ensemble des activités scientifiques est d'ailleurs suspendu à cette sorte de décret de pérennisation. Car, même si elles ne sont pas de nature archéologique, les activités scientifiques ont souvent besoin d'extrapoler dans le passé l'efficience causale des objets qu'elles postulent. Il suffit de penser à ce que ferait un astrophysicien s'il lui était interdit d'admettre que les photons recueillis dans ses instruments étaient déjà dotés d'efficience causale avant 1905 ! Mais à partir du moment où toutes sortes d'actions sont accomplies efficacement sous l'idée de la continuité

dans le temps des objets présumés par les opérations expérimentales, ces objets acquièrent une consistance ontologique. La clause forte du « toujours-déjà » et du « toujours-encore », combinée au succès des pratiques accomplies sous son égide, justifie la croyance en *l'existence* permanente des objets de la théorie, aux yeux de tous ceux qui participent à la « forme de vie » de la recherche scientifique. Et aussi, il faut l'ajouter, aux yeux de l'ensemble des personnes participant d'une culture comme la nôtre, qui inclut les représentations scientifiques.

Comment Bruno Latour, qui occupe une situation historique postérieure à l'avènement des paradigmes scientifiques de Pasteur et d'Einstein, peut-il dans ces conditions dénier la conception du temps qui les sous-tend ? De quel droit leur refuse-t-il la clause de pérennité de leurs entités, sans laquelle leurs succès seraient réduits à peu de chose ? Cela n'est admissible que s'il parvient à montrer que *sa* conception du temps, selon laquelle les objets n'acquièrent d'efficience causale qu'après leur constitution historique, n'entre pas vraiment en conflit avec la *leur*. Il pourrait y arriver en concédant que *son* ordonnancement du temps ne vaut que dans le seul cadre d'une pratique d'anthropologue des laboratoires. Après tout, il est manifeste pour un anthropologue des sciences, que les objets et propriétés postulés par les chercheurs *changent* assez radicalement d'une époque à l'autre, même si cette dérive est parfois voilée par un usage persistant des *mots*. Il est manifeste aussi pour cet anthropologue que chaque objet nouvellement caractérisé par les chercheurs scientifiques est investi par eux d'une prétention à l'existence anhistorique. En somme, on pourrait dire que le temps de anthropologue *prend pour objet secondaire* le temps (voire *les* temps successifs) du chercheur de laboratoire, plutôt qu'il ne le(s) nie. Si l'anthropologue Latour se contentait de reconnaître cela, la portée de ses énoncés se trouverait réduite, parce qu'elle serait explicitement restreinte à son propre point de vue. En même temps, ses énoncés ne contrediraient plus ceux de la communauté scientifique étudiée, car ils se situeraient ouvertement sur un autre plan. Latour regagnerait ainsi en crédibilité ce qu'il aurait perdu en force dramatique. Mais ce serait là recourir à un mode faible de désamorçage de la contradiction par fragmentation du domaine de vérité, typique du relativisme. Or, Bruno Latour semble ne pas se contenter du simple partage relativiste des domaines de

compétences. Il préfère se retrancher derrière le constat que ce n'est qu'après avoir réussi l'opération consistant à mettre à part ce qui revient à l'objet et ce qui revient à ses conditions d'exploration que nous pouvons prétendre l'avoir découvert. Ce n'est qu'après avoir réussi l'opération de tri entre sujet collectif, objet naturel, et artéfacts instrumentaux, que nous nous sentons en droit de décrire la connaissance comme une interaction entre sujet et objet à travers les instruments. Mais il ne s'agit là que d'une reconstruction *a posteriori*, qui ne doit se voir accorder aucun crédit *a priori*; et qui n'a donc aucun pouvoir de se substituer à toutes les autres lectures d'un événement passé. Latour va alors jusqu'à suggérer que l'effcience d'un ensemble donné de causes « naturelles », comme les microbes, commence *réellement* à l'époque où s'achève leur « purification » dans un processus de recherche. Le problème est qu'en soutenant cela, il se rend coupable du défaut même qu'il reproche aux chercheurs scientifiques. C'est-à-dire qu'il survalorise et absolutise ce qui est seulement un présupposé utile à sa propre activité d'investigation. Après avoir refusé la solution relativiste au conflit des perspectives, il endosse son contraire pourtant honni, à savoir la solution absolutiste d'une hégémonie indiscutée de la perspective anthropologique. Rien d'étonnant que les porte-parole de l'autre tentation hégémonique, la plus courante, celle des sciences de la nature, réagissent vigoureusement.

Le seul moyen de résoudre le conflit entre la perspective de distanciation anthropologique et d'engagement scientifique consiste d'abord à renoncer aux deux absolutismes dérivés, c'est-à-dire ici à ne pas imposer comme seule vraie l'une des deux conceptions du temps (cosmologique ou historique). Elle consiste ensuite à retenir le principe d'un désamorçage relativiste du débat, mais en évitant de le cristalliser en une thèse de la double vérité, et de le pérenniser en qualifiant les deux perspectives et les deux vérités d'incommunicables. Plutôt que d'enraciner l'exclusivité mutuelle entre les perspectives en leur associant une vérité locale, il s'agit ici de prendre conscience que le simple fait de les identifier comme perspectives renvoie à un point de vue logiquement antérieur à elles, d'où elles peuvent aussi apparaître comme conjointement indispensables et donc au total comme *complémentaires*. Ce point de vue est celui qui comporte un état symétrique de superposition, ou de bi-stabilité entre les

deux options épistémologiques ; il est si l'on veut celui de l'honnête homme qui sous-tend aussi bien le point de vue de l'anthropologue que le point de vue du chercheur. Seul l'honnête homme, dans son état épistémique superposé, peut laisser coexister le temps historique et le temps de la reconstruction rationnelle, qui font tous deux partie de son éthos civilisationnel, et ne faire un choix, c'est-à-dire ne briser la symétrie, que lorsque la nécessité d'un certain mode d'action ou d'une certaine logique interne du discours s'impose.

Je vais présenter, pour finir, un correspondant en histoire et en sociologie de la connaissance scientifique de ce que j'ai appelé la quatrième modalité perceptive. Celle où l'intrication des déterminations d'objets est sous-tendue par un autre entrelacement, entre ces déterminations et un moyen de les appréhender globalement. Et où la désintrication de ces déterminations entre elles ne se produit qu'à partir du moment où est mis en œuvre un moyen de les appréhender localement. En psycho-physiologie perceptive, l'exemple que j'avais proposé était celui des flèches de Müller-Lyer, liées perceptivement par la relation « plus grand que » sans se voir assigner une longueur individuelle aussi longtemps qu'on n'a pas effectué de mesure séquentielle au moyen d'une règle. La mesure des longueurs individuelles pouvait aboutir secondairement aussi bien à confirmer qu'à contredire l'évaluation perceptive globale d'une relation métrique. L'exemple relève d'une complémentarité actuelle des déterminations, locales ou globales. Il illustre également la coexistence d'une évaluation de relation métrique dépendant de circonstances annexes, comme l'orientation contingente des flèches, et d'une évaluation indépendante de ces circonstances par l'usage de la procédure standardisée de la coïncidence avec une règle. Le second genre d'évaluation, local et au moyen d'une règle, suppose une constitution d'objectivité au sens large, c'est-à-dire au sens où, tout en maintenant l'indispensable relativité des déterminations à un moyen d'accès, on les rend aussi indépendantes que possible de toutes les circonstances annexes, qu'elles relèvent du temps, de l'espace, du sujet, ou de l'environnement graphique.

On peut aussi considérer des cas où la complémentarité des déterminations est historique plutôt qu'actuelle, où la constitution d'objectivité est exigée comme condition pour se libérer des contingences et des circonstances qui pèsent sur l'évaluation

d'une détermination globale, plutôt que comme quelque chose de déjà acquis.

Considérons l'évaluation des températures<sup>11</sup>. Pendant très longtemps, la seule possibilité pour y parvenir a consisté à apprécier les différences de sensation tactiles de chaleur au contact de plusieurs corps. Seuls les rapports de sensations caloriques étaient accessibles, car l'intrication de la détermination avec l'état de son moyen d'évaluation corporel et sensible était complet. Pire encore, l'affirmation d'un rapport du type « A est plus chaud que B » dépendait fortement de circonstances physiologiques contingentes. Elle pouvait par exemple être modifiée selon qu'un contact intermédiaire avec un corps très chaud ou très froid avait été imposé. On comprend à partir de là que se soit faite jour la demande d'une évaluation « objective » de l'état thermique, c'est-à-dire d'un désentrelacement progressif entre cet état et ses moyens d'accès. Le désentrelacement n'implique pas, redisons-le, l'absence des moyens, ni même l'indépendance à l'égard des moyens, mais la stabilité, l'invariance, par changement de moyens. La recherche d'une évaluation thermométrique objective et exacte a donc coïncidé, comme l'ont montré E. Mach et G. Bachelard, avec l'établissement patient d'une congruence, et donc d'une co-variance, entre les zones linéaires des phénomènes de dilatation thermique des divers matériaux (alcool, mercure, métaux). Les échelles étaient rapportées à des repères présumés fixes (dont la fixité ne peut cependant être montrée, à l'inverse, que par référence à leur position dans les échelles une fois établies), comme les points de congélation et d'évaporation de l'eau. En même temps, le critère à la fois lointain et omniprésent de la fiabilité était la correspondance à peu près satisfaisante avec les sensations de chaleur qu'on pouvait avoir dans des circonstances pas trop exotiques. Ainsi s'explique une confusion fréquente ; non pas une confusion entre la température et la sensation de chaleur, mais une confusion entre l'explication des phénomènes thermiques tels qu'ils ressortent de la mesure par les thermomètres et l'explication de la chaleur en un sens assez flou pour inclure la sensation, pour ne pas dire la qualité sensible.

---

11. I. Peschard and M. Bitbol, « Heat, temperature and mental concepts: A critique of a standard reductionist confusion », in : E. Wright (ed.), *The Case for Qualia*, MIT press, 2008.

Dans la littérature sur la philosophie de l'esprit, on relève assez souvent la remarque selon laquelle la croyance en l'ineffabilité, voire l'ineffabilité, des qualités sensibles thermiques est complètement réfutée par les explications relevant de la thermodynamique ou de la théorie cinétique, elles-mêmes exprimées en des termes quantitatifs dérivés de la mesure thermométrique. Pourtant, aussi loin que soit poussée l'explication des corrélats objectifs de la sensation de chaleur, celle-ci s'arrête (comme le remarquait déjà Von Neumann, dans ses *Fondements mathématiques de la mécanique quantique*) au point où quelque chose, précisément, est senti et vécu. L'explication thermodynamique ou cinétique ne concerne en rien la qualité sensible de chaleur elle-même. Bien qu'elle semble s'en approcher indéfiniment en s'articulant à d'autres corrélats objectifs comme les corrélats neurophysiologiques, elle en reste aussi indéfiniment séparée par une sorte de discontinuité catégoriale. Tout au plus l'explication thermodynamique parvient-elle à rendre raison, sur un mode distancié, de la *structure*, des *rappports* mutuels, des séquences de sensations de chaleur et de froid (on peut par exemple expliquer pourquoi un métal semble toujours *plus* froid qu'une boiserie pourtant située dans la même pièce); mais elle laisse intouchée la composante d'engagement (le « ce que c'est d'être sentant ») qui justifiait l'imputation d'ineffabilité. Une forme de complémentarité entre (a) l'entrelacement non-dual du sentant et du senti qu'implique la sensation, et (b) le désentrelacement objectivant que requiert la mesure des températures, semble dans ce cas ignorée. On tente de tout mettre sur le même plan, de qualifier aussi bien la température que la sensation de « phénomène naturel », parce qu'on ne voit pas que la visée de la température objective et l'inscription dans l'actualité du sensible relèvent de deux attitudes mutuellement exclusives. Ces deux attitudes sont bien décrites par K. Goldstein : « On distingue généralement deux attitudes possibles à l'égard de la nature : nous cherchons soit à la connaître soit à agir sur elle. Mais cette distinction est insuffisante. On devrait plutôt parler d'une attitude d'acceptation immédiate et d'une attitude analytique »<sup>12</sup>. La connaissance est ici mise en correspondance avec la

---

12. K. Goldstein. *La structure de l'organisme*, Gallimard, 1983, p. 426.

réceptivité, avec l'acceptation du flux noétique dont fait partie le sensible ; et l'action est mise en correspondance avec l'attitude analytique, c'est-à-dire avec la discrimination des facteurs et des circonstances, qui conduit à l'extraction progressive de l'invariant et donc à l'objectivité. Dans l'attitude d'acceptation, l'entrelacement du connaissant et du connu est total : « Aussi longtemps que notre attitude reste purement réceptive, il n'y a pas de séparation tranchée entre la nature vivante et la nature non-vivante ». Au contraire, l'attitude analytique aboutit à une image structurée des résultats concernant « une partie de ceux qui représentent le monde entier ; ils sont comme découpés dans ce dernier ». La séparation ou le désentrelacement a alors lieu ; un découpage et une mise à part de la fraction objectivée du monde s'ensuit. Les deux attitudes sont clairement exclusives : recevoir et intervenir, accepter et discriminer, préserver l'entrelacement et extraire un fragment objectivé. Mais cela implique-t-il une dualité des modes de connaissance, et une relativité des contenus à chacun des modes distingués ? N'a-t-on, ici encore, que le choix entre un absolutisme (habituellement objectivant), et un relativisme des attitudes ? La réponse à cette interrogation est une nouvelle fois négative, pour une raison qui nous est désormais familière. En deçà de la dualité des attitudes, se trouve en effet la source des attitudes, l'état indiscriminé qui correspond non seulement à une superposition, mais à une absence de décomposition préalable selon la grille de lecture d'une observable donnée : « Ce point de vue n'est pas seulement celui de l'homme non-scientifique ou même de l'homme primitif. Chez le savant, il peut exister à côté du point de vue de l'analyse scientifique ». Le chercheur est aussi un être humain, apte à toutes les attitudes possibles ; avant d'être dans l'une ou dans l'autre, il est dans l'« ouvert », dans la source des attitudes, dans la disposition. Tel est l'équivalent cognitif le plus général de l'intrication quantique.

Michel Bitbol

*CREA CNRS/École Polytechnique  
32, boulevard Victor, 75015 Paris, France*

Seconde partie

# **Parallèles formels**



# Théorie Quantique Faible : Cadre formel et applications

## 1. INTRODUCTION

Dans cet article, les deux concepts clés de la théorie quantique, la complémentarité et l'intrication, seront étudiés en physique et au-delà du domaine de la physique. Une version faible et axiomatisée de la théorie quantique, plus générale que la théorie quantique ordinaire des systèmes physiques, sera décrite. Sa structure mathématique généralise l'approche algébrique de la théorie quantique ordinaire. Ici, comme dans la théorie quantique ordinaire, la caractéristique formelle cruciale qui conduit à la complémentarité et à l'intrication est la non-commutativité des observables.

L'espace de Hilbert ordinaire de la mécanique quantique standard peut être retrouvé en ajoutant par étapes les éléments formels nécessaires. Cela instaure une hiérarchie de cadres formels de généralité décroissante et de spécificité croissante.

Deux applications concrètes, plus spécifiques que la Théorie Quantique Faible, mais plus générales que la théorie quantique ordinaire, seront discutées : (a) la complémentarité et l'intrication dans les systèmes dynamiques classiques, et (b) la complémentarité et l'intrication dans la bistabilité perceptive de stimuli ambigus.

Remarquons qu'à propos de ces phénomènes de *forme quantique* qui incorporent la complémentarité et l'intrication au-delà du domaine de la physique (comme c'est le cas du phénomène cognitif de la bistabilité perceptive), trois attitudes mutuellement non-exclusives sont possibles et ont trouvé des défenseurs :

- L'application des concepts quantiques à des situations non physiques est métaphorique, et elle n'est pas élucidée d'une manière précise et générale. Les analogies choisies sont simplement *ad hoc*, et varient d'une situation à l'autre.
- Dans l'esprit du physicalisme le plus strict, tout peut être réduit à la physique. Puisque rien ne saurait être laissé en dehors du

domaine de la physique, les phénomènes de forme quantique mentionnés ci-dessus sont purement et simplement des phénomènes quantiques.

- En supposant au contraire un cadre de pensée non-réductionniste, il est possible et adéquat de décrire des caractéristiques cruciales de parties déterminées du monde, qu'elles soient physiques ou non-physiques, par un formalisme *isomorphe* à celui de la théorie quantique standard. Cet isomorphisme peut être total, ou plus vraisemblablement partiel; de telle sorte que seuls certains traits particuliers du formalisme quantique sont réalisés dans un contexte non-physique.

C'est une approche conforme à la troisième attitude de cette liste que nous allons développer, en l'appuyant sur la structure de la Théorie Quantique Faible<sup>1</sup>.

## 2. LA THÉORIE QUANTIQUE ET SA GÉNÉRALISATION

### 2.1. Concepts-clés de la théorie quantique : Complémentarité et intrication

La théorie quantique a révolutionné notre compréhension du monde physique sur un plan épistémologique aussi bien que scientifique. Elle a été développée durant la troisième décennie du vingtième siècle comme une théorie décrivant le comportement des systèmes atomiques. Par la suite, son domaine de validité s'est avéré beaucoup plus vaste que cela. La théorie quantique ne régit pas seulement les noyaux, et des particules élémentaires plus petites de sept ordres de grandeur que les systèmes atomiques; elle décrit également avec succès des phénomènes macroscopiques comme la supraconductivité et la superfluidité, en permettant de les comprendre. La structure

---

1. Le texte traduit a été publié dans: *American Institute of Physics Conference Proceedings*, 810, 34-46, 2006. La seconde partie de ce résumé introductif a cependant été empruntée à un autre article des mêmes auteurs: «Quantum Zeno Features of Bistable Perception», *Biological Cybernetics*, 90, 33-40, 2004. Elle a en effet l'intérêt de clarifier d'emblée la position épistémologique des auteurs au sujet du rapport physique / sciences humaines.

conceptuelle et les fondements axiomatiques de la théorie quantique ont montré qu'elle est une conséquence logique de quelques hypothèses simples et plausibles, et avant tout de l'hypothèse de non-commutativité des observables. Dans un tel cadre, la physique classique représente seulement un cas particulier : celui pour lequel toutes les observables commutent entre elles. Les fondements axiomatiques de la théorie quantique ont ainsi montré à quel point certains de ses concepts apparemment bizarres ont des racines profondes.

Deux de ces notions de base de la théorie quantique qui apparaissent très différentes de ce que suggère notre compréhension classique de la nature, sont celles de complémentarité et d'intrication. L'une comme l'autre ont été introduites très tôt au cours du développement de la théorie, et une partie importante, pour ne pas dire l'essentiel, de l'enseignement conceptuel reçu de la théorie quantique, est due à leur signification très particulière.

La complémentarité a été proposée par Bohr en 1927 [15] afin de souligner certaines caractéristiques cruciales de la théorie quantique (pour plus de détails on se réfèrera à [27, 33, 34]). Bohr a utilisé le concept de complémentarité pour indiquer un rapport entre des notions apparemment opposées voire contradictoires, qui doivent en fait être considérées en termes de relation de polarité. Des traits complémentaires s'excluent l'un l'autre, mais en même temps se complètent mutuellement pour fournir un accès complet au phénomène étudié. Un exemple physique bien connu est celui de la complémentarité d'observables non-commutatives, comme la position et la quantité de mouvement, qui implique à la fois une indétermination ontique et une incertitude épistémique. D'un autre point de vue, la complémentarité intervient à chaque fois que les propriétés d'un système requièrent une description non-booléenne, qui diffère de la représentation booléenne classique.

L'intrication, pour sa part, est formellement connectée à la complémentarité. Elle caractérise en effet l'indécomposabilité d'un système dans un état pur en sous-systèmes eux-mêmes dans un état pur. Et cette indécomposabilité, à son tour, est liée à la non-commutativité des observables locales (portant sur les sous-systèmes) avec des observables globales (portant sur le système dans son ensemble), autrement dit à la *complé-*

mentarité de ces observables globales et locales. En un certain sens, on pourrait même dire que de tels sous-systèmes n'existent pas *a priori* dans le système complet qui, étant dans un état pur, peut se voir attribuer une valeur précise d'observables globales. Ils doivent être engendrés par des procédures (expérimentales) appropriées impliquant la mesure d'observables locales.

L'indécomposabilité des systèmes intriqués a des conséquences qui ont été initialement signalées par Einstein, Podolsky et Rosen [19]. Quant au terme « intrication » qui la désigne (en anglais « entanglement », et en allemand « Verschränkung »), il a été forgé par Schrodinger en 1935 [43]. Les progrès théoriques dûs à Bell [13] et les résultats expérimentaux dûs à Aspect *et al.* [1] ont confirmé, au-delà de tout doute possible, le caractère intriqué (holistique) des systèmes quantiques, entraînant des corrélations dites non-locales entre leurs sous-systèmes. En dépit de nombreuses confusions dans l'esprit du grand public, il est cependant incorrect d'interpréter ces corrélations comme la conséquence d'interactions causales entre les sous-systèmes.

## 2.2. Pourquoi généraliser la théorie quantique ?

Dès les premières années de la théorie quantique, Bohr (et d'autres auteurs) ont émis l'idée selon laquelle les notions de complémentarité et d'intrication pourraient avoir une signification et une importance majeure bien au-delà du domaine de la physique. Chez Bohr, cette idée a été motivée par l'intérêt qu'il portait à des disciplines non-physiques, lesquelles ont historiquement attiré son attention vers le concept de complémentarité bien avant qu'il ne l'ait appliqué à la physique [23]. Parmi beaucoup d'autres exemples, en psychologie et dans d'autres domaines des sciences humaines et des sciences biologiques, Bohr entretenait une certaine familiarité avec des expériences sur la perception bi-stable de stimuli ambigus, par l'intermédiaire de son ami le psychologue Rubin [35]. Sa connaissance de tels faits psychologiques a joué un grand rôle dans la genèse complexe de la complémentarité en physique quantique, en plus de l'étude par Bohr des écrits philosophiques de Kierkegaard, Høffding et James. Bien que les meilleurs exemples formalisés de paires complémentaires de notions soient fournis par les paires

d'observables non-commutatives d'un système microscopique, Bohr a vite souligné que la signification de la complémentarité dépasse de beaucoup cette situation particulière. Il a souvent mis en valeur l'idée fondamentale d'une complémentarité qui serait due à une intrication holistique de la connaissance et de l'action. De même, remarquait ainsi Bohr, que la connaissance des systèmes microscopiques est intriquée avec l'action minimale que l'expérimentateur ne peut manquer d'exercer sur eux (par le biais de *quanta* d'action dont la borne inférieure est fixée par la valeur de la constante de Planck), la connaissance de faits psychologiques est intriquée avec l'action minimale que le sujet ne peut manquer d'exercer sur eux par l'introspection. De ce point de vue, la complémentarité au sens de Bohr renvoie à un élément-clé de la tradition pragmatiste, à savoir la relation réflexive entre l'expérience immédiate d'un objet et l'appréhension de son procédé actif d'objectivation [28].

De toute évidence, couvrir une large gamme de phénomènes incluant des questions de psychologie et de philosophie, voire des thèmes d'expérience artistique et religieuse, par un cadre conceptuel comme celui de la physique quantique, est une tentative hautement problématique. Si l'on veut maintenir la rigueur d'une approche théorique de ces questions, on doit par conséquent se restreindre à des situations qui sont traitables sur un plan formel, même si c'est en un sens minimal pouvant être (nettement) plus faible que ce qu'on arrive à faire en physique. Cette idée de base a été pour la première fois mise en oeuvre dans [10], et elle a conduit à formuler une structure mathématique axiomatisée qui préserve les éléments nécessaires aux notions de complémentarité et d'intrication, indépendamment de leur instantiation physique et des applications relevant de cette science. Les ingrédients principaux de cette structure, appelée la Théorie Quantique Faible, seront exposés dans la section suivante. Par la suite, on présentera deux exemples qui ont été traités dans une certaine mesure auparavant [10, 8] : (i) les traits spécifiques des systèmes dynamiques de traitement de l'information, où la théorie quantique faible est appliquée à l'intérieur de la physique, mais au-delà de la physique quantique standard, et (ii) la perception bi-stable de stimuli ambigus, où la théorie quantique faible est appliquée à la science cognitive, qui est extérieure à la physique.

### 3. CADRE AXIOMATIQUE

#### 3.1. La structure mathématique de la Théorie Quantique Faible

Une exigence préliminaire pour toute description scientifique d'un système  $\Sigma$ , physique ou autre, est sa séparation à l'égard du reste de l'univers de discours. Un système  $\Sigma$  est considéré comme une partie de la réalité au sens très général où il peut être objet d'attention et de recherche, même au-delà du domaine de la physique quantique, voire au-delà des limites définies par la notion de réalité matérielle. Bien qu'il soit souvent problématique d'isoler des parties de la réalité, la possibilité d'y parvenir, fût-ce approximativement, est un préalable indispensable pour tout acte d'observation. De plus, cette possibilité est implicitement admise dans le clivage épistémique entre sujets et objets de connaissance. Lors d'une étape ultérieure, un ensemble  $\mathcal{A}$  d'observables et un ensemble  $\mathcal{Z}$  d'états sont assignés à chaque système  $\Sigma$ . Une observable est une propriété du système  $\Sigma$  en tant qu'elle peut être étudiée dans un contexte expérimental donné. Des observables non-triviales doivent exister dans tous les cas où  $\Sigma$  a suffisamment de structure interne pour être l'objet d'une étude signifiante. Par ailleurs, à chaque observable  $A$  doit être associé un ensemble  $spec A$  de résultats possibles d'une étude de  $A$ . Et il doit au minimum être concevable que le système  $\Sigma$  existe dans différents états. Ces derniers sont reflétés dans différents résultats de mesures associées aux observables de type  $A$ . La possibilité de différents états est indispensable pour discuter des critères de stabilité pour  $\Sigma$ , car pour parler de « stabilité » d'un *même* système, il faut que celui-ci maintienne son identité à travers des changements « mineurs » représentés par des changements d'état.

En dehors de cette portée pouvant passer pour ontique, la notion d'état a aussi des aspects épistémiques, en ce sens qu'il reflète des degrés variés de connaissance sur l'état ontique présumé de  $\Sigma$  [9]. De la même façon qu'en théorie quantique ordinaire, nous appelons « pur » un état qui encode une quantité maximale d'information au sujet de  $\Sigma$ .

Dans ce qui suit, nous entreprenons de caractériser la structure générale de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{Z}$ .

La première propriété de  $\mathcal{A}$  que nous formulons est :

**Axiome I.** À chaque observable  $A \in \mathcal{A}$  est associé un ensemble  $specA$ , qui n'est autre que l'ensemble des résultats possibles d'une « mesure » de  $A$ .

Les observables quantiques peuvent être identifiées à des fonctions  $A: Z \rightarrow Z$  sur l'ensemble des états. Ce fait, qui souligne le caractère actif, opérationnel, des observations, peut être formulé ainsi :

**Axiome II.** Les observables sont (identifiables à) des *applications*  $A: Z \rightarrow Z$ , qui associent à tout état  $z$  un autre état  $A(z)$ .

L'axiome II implique que les observables peuvent être composées exactement de la même manière que des applications sur  $Z$ ; c'est-à-dire de telle sorte que l'application  $AB$  est définie comme celle qui ferait opérer  $B$  puis  $A$ . Nous supposons :

**Axiome III.** De même que  $A$  et  $B$ ,  $AB$  est également une observable.

Une conséquence directe de l'axiome III est l'*associativité* de la composition des observables :

$$A(BC) = (AB)C \quad (1)$$

De plus, nous pouvons postuler :

**Axiome IV.** Il existe une observable unité  $1$  telle que :  $1A = A1 = A \forall A \in \mathcal{A}$ .

$1$  est l'opération sur  $Z$  qui ne change aucun état. Elle correspond à une proposition toujours vraie, autrement dit :  $spec1 = \{\text{vrai}\}$ .

Les axiomes I–IV impliquent que l'ensemble des observables a la structure d'un *monoïde*, également appelé un *semigroupe avec unité* ou un *magma associatif avec unité*.

Pour compléter le formalisme, nous avons également besoin d'un *état zéro* « impossible »  $z = o$  et d'une *observable zéro*  $0$  avec  $spec0 = \{\text{faux}\}$ , correspondant à une proposition toujours fautive :

**Axiome V.** Il existe un état zéro  $o$  et une observable zéro  $0$  tels que

$$\begin{aligned} 0(z) &= o \quad \forall z \in Z, \\ A(o) &= o \quad \forall A \in \mathcal{A}, \\ A0 &= 0A = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}. \end{aligned} \quad (2)$$

Dans le cadre généralisé de la Théorie Quantique Faible, il n'y a aucune place évidente pour l'*addition* des observables. Par conséquent, l'ensemble des états ne peut pas être supposé convexe comme dans la théorie quantique ordinaire. Cela est lié au fait qu'une interprétation probabiliste n'est pas immédiatement disponible en Théorie Quantique Faible, bien qu'elle puisse être surajoutée (comme on le verra ci-dessous).

Par ailleurs, il n'y a pas de raison d'admettre la commutativité  $AB = BA$ , pour tout  $A, B \in \mathcal{A}$ . On admettra donc qu'il y a aussi bien des paires d'observables commutatives (compatibles) que des paires d'observables non-commutatives (incompatible), selon que  $AB = BA$  ou  $AB \neq BA$ . Cela implique que la structure de monoïde de  $\mathcal{A}$ , aussi générale qu'elle soit, incorpore des notions de complémentarité et d'intrication comme traits essentiels. Ces traits appartiennent donc aussi bien à la Théorie Quantique Faible qu'à la théorie quantique standard.

En plus de la structure définie par les axiomes I–V, nous introduisons dans l'ensemble des observables  $\mathcal{A}$ , des *propositions*  $P$  qui jouent un rôle très particulier. Une proposition  $P \neq 0, 1$  est une observable dont la valeur est soit « vrai » soit « faux » :

$$\text{spec}P = \{\text{vrai}, \text{faux}\} \text{ pour } P \neq 0, 1 \quad (3)$$

De plus, pour chaque proposition  $P$ , il doit y avoir une négation  $\bar{P}$ , fournissant la valeur « vrai » si et seulement si  $P$  fournit la valeur « faux ».

Voici quelques axiomes assez évidents supposés valoir pour les propositions :

#### Axiome VIa.

$$\begin{aligned} P^2 &= P, \\ \bar{\bar{P}} &= P, \bar{1} = 0, \\ P\bar{P} &= \bar{P}P = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Pour deux propositions *compatibles*  $P_1, P_2$ , telles que  $P_1P_2 = P_2P_1$ , nous pouvons définir une *conjonction*

$$P_1 \wedge P_2 = P_2 \wedge P_1 = P_1P_2 \quad (5)$$

et une *disjonction*

$$P_1 \vee P_2 = \overline{\overline{P_1} \overline{P_2}} = P_2 \vee P_1 \quad (6)$$

avec les propriétés usuelles.

$P$  a la signification d'une « vérification » si elle obéit à l'axiome suivant :

**Axiome VIb.** Si  $P(z) \neq 0$ , alors  $P(z)$  est un état dans lequel  $P$  est certainement vraie.

Finalement, nous avons besoin d'un axiome qui remplace le théorème spectral de la théorie quantique ordinaire. Chaque observable  $A$  doit être équivalente à un ensemble de propositions mutuellement exclusives. Plus précisément, soit  $A$  une observable et supposons que  $\alpha \in \text{spec} A$ .  $A_\alpha$  dénote alors la proposition selon laquelle le résultat d'une mesure de  $A$  est  $\alpha \in \text{spec} A$ . Dans ces conditions, nous avons :

**Axiome VIc.**

$$A_\alpha A_\delta = A_\delta A_\alpha = 0 \text{ pour } \alpha \neq \delta, \quad A A_\alpha = A_\alpha A, \quad \bigvee_{\alpha \in \text{spec} A} A_\alpha = 1. \quad (7)$$

$A$  et  $B$  sont compatibles si et seulement si  $A_\alpha$  et  $B_\beta$  sont compatibles pour tout  $\alpha \in \text{spec} A$  et  $\beta \in \text{spec} B$ . En général, des observables incompatibles n'ont pas des valeurs simultanément définies, et les états associés ne sont pas sans dispersion.

### 3.2. Comparaison avec la théorie quantique ordinaire

Bien que la Théorie Quantique Faible définie par les axiomes I-VI soit considérablement plus générale que la théorie quantique ordinaire, l'une et l'autre partagent les deux caractéristiques suivantes :

- L'incompatibilité et la complémentarité dérivent de la non commutativité du produit des observables, ce qui a pour corrélat que les états associés ne sont généralement pas sans dispersion ;
- Des corrélations holistiques et l'intrication des états dérivent de l'incompatibilité des observables. En particulier, l'intrication des états se produit lorsque, pour un système composite,

les observables portant sur le système dans sa totalité sont incompatibles avec les observables de ses sous-systèmes.

Dans ce contexte, on doit souligner que la Théorie Quantique Faible fait référence à la description d'un système dans sa totalité. Toute identification de parties ou de sous-systèmes implique un choix spécifique de représentation en termes de monoïdes partiels. Ce choix reste ouvert dans le cadre général, où l'absence d'une structure d'espace vectoriel (et particulièrement d'une structure d'espace de Hilbert) implique qu'il n'y a pas de construction de produit tensoriel pour l'ensemble des observables d'un système composite. En général, nous pouvons seulement attendre :

$$\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathcal{Z} \supset \mathcal{Z}_1 \times \mathcal{Z}_2, \quad (8)$$

$$\mathcal{A}_1(\mathcal{Z}_1) \subset \mathcal{Z}_1, \mathcal{A}_2(\mathcal{Z}_2) \subset \mathcal{Z}_2. \quad (9)$$

Une remarque similaire peut être appliquée à la forme spécifique de l'évolution dynamique des (sous-)systèmes en Théorie Quantique Faible. La dynamique d'un système est généralement décrite par un (semi-)groupe d'endomorphismes à un paramètre. Le processus qui engendre les sous-systèmes (par exemple à travers une mesure), ainsi que la dynamique de sous-systèmes en interaction, dépend des détails du système considéré et de sa décomposition. En particulier, l'équation de Schrodinger de la théorie quantique ordinaire, à vocation universelle dans le domaine de la physique, n'est pas incluse dans la Théorie Quantique Faible. Plusieurs autres caractéristiques importantes de la théorie quantique ordinaire ne sont pas partagées par la Théorie Quantique Faible :

- Il n'existe aucune quantité semblable à l'action de Planck  $h$  qui, en théorie quantique ordinaire, fournit une évaluation quantitative du degré de non-commutativité de deux observables données. Cela indique que, dans la théorie généralisée, la complémentarité et l'intrication ne sont pas restreintes à un degré particulier de non-commutativité.
- La Théorie Quantique Faible n'inclut pas une représentation dans un espace de Hilbert. Dès lors, la compatibilité ou l'incompatibilité des observables ne peut pas être caractérisée en termes d'existence ou d'inexistence de vecteurs propres communs. Par suite, la complémentarité ne peut pas être caracté-

térisée comme degré maximal d'incompatibilité au sens où les observables n'auraient rigoureusement aucun vecteur propre en commun. Cependant, cette caractérisation peut être remplacée par la condition selon laquelle les observables maximales incompatibles doivent engendrer l'ensemble complet des observables de la Théorie Quantique Faible.

- Puisque la somme des observables n'est pas définie en Théorie Quantique Faible, on ne peut avoir ni une algèbre de Von Neumann d'observables, ni des relations d'incertitude de Heisenberg. Il n'y a pas d'ensemble convexe d'états, il n'y a pas de fonctionnelles linéaires de valeur moyenne, et il n'y a pas d'interprétation probabiliste (c'est-à-dire qu'il n'y a pas de règle de Born). Les distributions de probabilité sur des ensembles  $spec A$  n'ont pas lieu d'être, et ne sont de toutes façons pas calculables en Théorie Quantique Faible. De fait, le concept de probabilité ne peut que manquer lorsque une attribution de valeurs quantitatives aux observables d'un système est inappropriée ou impossible.
- Il n'y a pas moyen de généraliser suffisamment les inégalités de Bell pour les confronter au cadre général de la Théorie Quantique Faible, et il n'y a pas lieu d'affirmer que la complémentarité et l'indétermination en Théorie Quantique Faible sont de nature ontique plutôt qu'épistémique. Au contraire, il y a tout lieu de s'attendre à ce qu'elles soient d'origine épistémique dans de nombreux cas ; par exemple qu'elles résultent d'une connaissance incomplète du système ou de perturbations incontrôlables par l'observation. Rappelons en effet qu'une interprétation ontique est justifiée lorsque l'état du système est sans dispersion. Lorsque l'état est dispersif, une interprétation ontique reste appropriée pour des états purs individuels. Par contre, si les états dispersifs sont des mélanges statistiques, l'interprétation appropriée est épistémique.

Les axiomes I-VI peuvent être considérés comme des exigences minimales pour une théorie générale des observables et des états de systèmes manifestant complémentarité et intrication. Entre la Théorie Quantique Faible et la théorie quantique ordinaire, il existe donc des théories intermédiaires qui peuvent être obtenues en enrichissant par étapes le système axiomatique de la Théorie Quantique Faible. Commençons par discuter des enri-

chissements possibles de la proposition axiomatique VI. Une option évidente consiste à postuler que la conjonction et la disjonction de propositions sont également définies dans le cas moins intuitif où  $P_1$  et  $P_2$  sont *incompatibles*, de telle sorte que les propositions  $P_1 \wedge P_2$  et  $P_1 \vee P_2 = \overline{\overline{P_1} \wedge \overline{P_2}}$  remplissent toujours les conditions de l'axiome VIa. De surcroît, il est naturel de postuler :

$$\begin{aligned} P_1 \wedge (P_1 \vee P_2) &= (P_1 \vee P_2) \wedge P_1 = P_1, \\ P_1 \vee (P_1 \wedge P_2) &= (P_1 \wedge P_2) \vee P_1 = P_1 \wedge P_2. \end{aligned} \quad (10)$$

La condition de distributivité plus forte :

$$\begin{aligned} P_1 \wedge (P_2 \vee P_3) &= (P_1 \wedge P_2) \vee (P_1 \wedge P_3), \\ P_1 \vee (P_2 \wedge P_3) &= (P_1 \vee P_2) \wedge (P_1 \vee P_3), \end{aligned} \quad (11)$$

n'est pas même satisfaite en théorie quantique ordinaire. Si tout sous-système propositionnel engendré par deux propositions compatibles telles que  $P_1 \wedge P_2 = P_1$  ainsi que leurs négations, est booléen, alors (modulo quelques complications techniques), le système propositionnel est déjà isomorphe à un système de projecteurs orthogonaux dans un espace de Hilbert [38, 47]. Cette propriété booléenne ne découle pas des axiomes I-VI.

Pour une interprétation probabiliste des états, on ne perd pas grand chose à supposer que  $\text{spec} A \in \mathbb{C}$ , car il est vraisemblable que l'ensemble des valeurs de  $A$  peut être mis en correspondance de manière bi-univoque avec les nombres complexes. Si l'on suppose cela, introduire une interprétation probabiliste revient à postuler pour chaque  $z \neq 0$  l'existence d'une fonctionnelle de valeur moyenne :

$$\begin{aligned} E_z : \mathcal{A} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ A &\mapsto E_z(A) \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (12)$$

avec :

$$E_z(1) = 1. \quad (13)$$

L'existence d'une fonctionnelle de valeur moyenne a des conséquences importantes :

- La somme des observables et le produit des observables par des nombres complexes peuvent désormais être définis en postulant :

$$E_z(\alpha A + \beta B) = \alpha E_z(A) + \beta E_z(B) \quad (14)$$

pour tout  $E_z$ .

- La valeur moyenne  $E_z(A)$  d'une distribution de probabilité, doit obéir à des clauses de valeurs réelles et positives. Le seul moyen d'y parvenir est d'introduire une star-involution  $A \rightarrow A^*$  ( $A^*A$  doit être également auto-adjointe si  $A$  and  $A^*$  ne commutent pas), ce qui implique une  $C^*$ -algèbre d'observables.
- L'ensemble de toutes les fonctionnelles de valeur moyenne sera convexe, de telle sorte que des états purs peuvent être définis de la même manière qu'en théorie quantique.

Pour la discussion d'applications concrètes, on doit s'attendre à devoir restreindre la pleine généralité de la Théorie Quantique Faible, de manière à formuler un niveau intermédiaire approprié entre les théories quantiques faible et ordinaire.

#### 4. APPLICATIONS CHOISIES

Les exemples que nous allons discuter dans les paragraphes suivants concernent :

(i) l'évolution temporelle de systèmes dynamiques non-linéaires, et (ii) un modèle de bistabilité perceptive de stimuli ambigus, inspiré de l'effet Zénon quantique. Un traitement approprié de ces exemples exige certains détails qui ne sont pas inclus dans le cadre minimal de la Théorie Quantique Faible, tel que nous l'avons spécifié par les axiomes qui viennent d'être discutés. En particulier, la somme des observables est définie et une interprétation probabiliste est adoptée dans les deux exemples. La différence entre le traitement adopté pour les deux exemples et la théorie quantique ordinaire, se manifeste de la manière la plus claire par leur façon très spéciale de mettre en oeuvre des observables non-commutatives. Alors qu'en théorie quantique ordinaire, le quantum d'action de Planck représente un commutateur *universel* d'observables *cano-*

*niquement conjuguées*, il n'en va pas ainsi pour les deux exemples considérés. Dans les systèmes dynamiques, la complémentarité est exprimée par un commutateur de différents types de générateurs de la dynamique, *propre à chaque système* : l'entropie dynamique. Quant à la situation cognitive choisie, elle est encore plus générale, en ce sens qu'aucun commutateur *particulier* n'a à y être spécifié.

## 4.1. La dynamique informationnelle

### 4.1.1. La complémentarité entre la dynamique de Liouville et la dynamique informationnelle

En généralisant un travail récent de Misra et de ses collaborateurs [29, 30], on peut montrer qu'une description des systèmes chaotiques (y compris les  $K$ -systèmes) est associée à une relation de commutation entre l'opérateur de Liouville  $L$  pour ces systèmes et un opérateur d'information  $M$  convenablement défini [11]. Comme d'habitude, la définition de  $L$  est donnée par :

$$L \rho = i \frac{\partial}{\partial t} \rho \quad (15)$$

Où  $L$  agit sur des distributions  $\rho$  représentant les états d'un système dans un espace de probabilités (pas dans un espace de Hilbert). La dynamique du système est par conséquent caractérisée en termes d'un automorphisme, qu'on notera  $A$ .

Le spectre continu de  $M$  dérive pour sa part de l'information dépendant de temps  $I(t)$ , qui peut être acquise en mesurant des propriétés particulières d'un système au temps  $t$  et en effectuant une comparaison avec ses propriétés prédites :

$$M \rho = I(t) \rho = (I(0) + Kt) \rho. \quad (16)$$

$K$  est ici l'entropie de Kolmogorov-Sinai, un invariant dynamique statistique du système. Cette entropie est expérimentalement accessible à travers des algorithmes du type de ceux proposés par Grassberger et Procaccia [22]. On a  $K > 0$ , seulement pour des systèmes chaotiques avec une dynamique intrinsèquement instable.

Dans une interprétation en termes informationnels [44],  $K$  caractérise la quantité d'information engendrée par le système par unité de temps, le long de ses variétés instables.  $Kt$  est donc l'information engendrée par le système après un intervalle de temps  $[0, t]$ . Ceci veut dire que la précision d'une anticipation diminue au fur et à mesure que l'événement à anticiper est plus éloigné dans le temps. Dans des cas simples, le commutateur de  $L$  et  $M$  est donné directement par le taux d'engendrement de l'information, c'est-à-dire par l'entropie de Kolmogorov-Sinai (voir la prochaine section, ainsi que [3] pour davantage de détails) :

$$i[L, M] = K\hbar. \quad (17)$$

Les deux opérateurs  $L$  and  $M$  commutent si le système considéré n'engendre pas d'information, par exemple s'il est intrinsèquement stable et que  $K = 0$ . Si  $K > 0$ , les descriptions dynamiques liées à  $L$  et  $M$  diffèrent quant à leurs prévisions de l'état futur du système. Il s'agit là d'une conséquence de l'incertitude croissante de l'état prévu du système au cours du temps. À chaque fois que  $K > 0$ , l'état  $\rho(t)$  d'un système ne peut pas être prévu avec autant de précision que celle avec laquelle les conditions initiales ont été mesurées, ou au moins fixées, à  $t = 0$ .

La relation de commutation de  $L$  et  $M$  ressemble à des relations de commutation correspondantes en théorie quantique ordinaire, mais il existe aussi des différences. Tout d'abord, puisque  $K$  dépend fortement du système et des paramètres (autrement dit, puisque  $K$  est hautement contextuel), le « degré » de non-commutativité de  $L$  et de  $M$  n'est pas déterminé universellement. Cette situation diffère de celle de la mécanique quantique conventionnelle, où la valeur  $\hbar$  de la constante de Planck est le commutateur universel. D'autre part,  $K$  est une quantité statistique spécifiant le flux moyen d'information dans les systèmes chaotiques, alors que  $\hbar$  est une constante universelle non-statistique.

En conséquence de l'équation (17),  $L$  et  $M$  représentent des modes complémentaires de description. On relèvera deux caractéristiques fondamentales de cette complémentarité. Premièrement, alors que  $L$  renvoie à une description globale du système pris comme un tout,  $M$  renvoie à une description relative à ses seules variétés instables. Deuxièmement, tandis qu'une description en termes de  $L$  est symétrique par renversement du temps

(autrement dit est réversible), cette symétrie est brisée par une description en termes de  $M$ , impliquant ainsi une irréversibilité.

### 4.1.2. Partitions complémentaires et variétés non-hyperboliques

La définition de  $M$  dépend de manière cruciale du choix d'une partition de l'espace des états. Puisque l'entropie de Kolmogorov-Sinai  $K$  est définie comme l'optimum de l'entropie dynamique  $H(P, A)$  par rapport à toutes les partitions possibles  $P$ , on a :

$$K = \sup_P H(P, A),$$

$$\text{où } H(P, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(P \vee AP \vee \dots \vee A^{n-1}P), \quad (18)$$

Le choix approprié pour  $M$  est la partition qui maximise l'entropie dynamique. Cette partition est appelée une partition générative. Elle est définie de telle sorte que les limites entre ses cellules se voient associer une image les unes dans les autres, de telle sorte que les corrélations entre points intérieurs aux cellules soient maximisées et que les corrélations entre points de différentes cellules soient minimisées. Autrement dit, les états épistémiques définis par les cellules d'une partition générative sont stables sous la dynamique. Un exemple bien connu de partition générative est celui des partitions de Markov.

Comme cela a été démontré récemment [12], des partitions différentes, et leurs descriptions associées, sont complémentaires, ou incompatibles, les unes par rapport aux autres, si elles ne sont pas génératives. Ce résultat formel montre comment des descriptions complémentaires de l'espace des états épistémiques peuvent être formulées, en dépit du fait que leur description ontique sous-jacente est purement classique, c'est-à-dire rigoureusement commutative.

En vertu d'un théorème de Bowen [16], tous les systèmes hyperboliques ont des partitions génératives ; il existe même des possibilités de les construire explicitement (par exemple par des méthodes d'ombrage [21] ou d'analyse de gabarit [39]). Cependant, on ne connaît de partitions génératives que pour de rares systèmes spécifiques comme la fonction logistique ou la fonction

de Hénon. Le fait fondamental qui distingue les systèmes hyperboliques est qu'ils peuvent être représentés en termes d'une somme directe  $E = E^s \oplus E^u$  de variétés stables et instables par rapport à un point fixe  $x$  :

$$E^s(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : f^n(y) \rightarrow x \text{ pour } n \rightarrow \infty\} \quad (19)$$

$$E^u(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : f^{-n}(y) \rightarrow x \text{ pour } n \rightarrow \infty\}. \quad (20)$$

Dans des systèmes hyperboliques, les trajectoires appartenant à  $E^s$  et  $E^u$  ne peuvent se croiser que transversalement. Si un système n'est pas hyperbolique (par exemple dans le cas de tangences homoclines ou hétéroclines), des variétés stables et instables ne sont pas strictement séparables, mais intriquées, et une décomposition en somme directe est alors impossible. Trouver ou approximer des partitions génératives pour des systèmes non-hyperboliques est une tâche hautement non-triviale (voir [48]). Puisque la plupart des systèmes ayant un intérêt physique ou biologique sont (ou doivent être supposés être) non-hyperboliques, il s'agit là d'un sérieux obstacles à la définition d'états épistémiques robustes pour de tels systèmes. Un grand intérêt se manifeste donc pour ces problèmes, ainsi que d'autres problèmes connexes, et il reste beaucoup de domaines à explorer. On peut conjecturer que la complémentarité des partitions est essentiellement reliée à une autre complémentarité plus fondamentale de variétés stables et instables dans les systèmes non-hyperboliques. Des applications pratiques de ce thème théorique peuvent être trouvées dans la discussion des niveaux émergents de description, esquissée dans [6]. Par exemple, les états cognitifs sont très souvent définis en termes de classes d'équivalence d'états neuronaux microscopiques [20], ce qui revient à utiliser une stratégie de partitionnement de l'espace d'états neuronaux sous-jacent. La partition est habituellement choisie sur la foi de sa plausibilité empirique. Mais la question de la robustesse des cellules résultantes, et, par suite, des états cognitifs qui leur sont associés, n'est habituellement pas soulevée. S'il est vrai que les systèmes biologiques sont génériquement non-hyperboliques, de telle sorte que les partitions génératives sont difficiles (voire impossibles) à obtenir, cela pourrait expliquer l'observation selon laquelle les descriptions psychologiques sont génériquement complémentaires, c'est-à-dire mutuellement incompatibles.

### 4.1.3. Logique non-booléenne de systèmes dynamiques

Une interprétation générale des relations de commutation entre  $L$  et  $M$  en termes de propositions est parfaitement possible dans le cadre de la théorie des treillis. De manière analogue au travail de Birkhoff et von Neumann [14], qui a ouvert la voie à la logique non-booléenne de la théorie quantique, une telle interprétation éclaire les traits logiques fondamentaux des systèmes de traitement de l'information. En s'appuyant sur une idée de Krueger [26], on a pu montrer que l'évolution temporelle des systèmes de traitement de l'information est gouvernée par une logique non-booléenne [4]. Plus précisément, le treillis propositionnel caractérisant cette logique est complémentée mais non distributive. Cette non-distributivité manifeste cependant une différence subtile mais importante avec la non-distributivité liée à la théorie quantique ordinaire. Un trait fondamental des treillis, en tant que structures mathématiques, est la dualité de leurs propriétés. Sur un plan formel, cela signifie que chaque proposition vraie est transformée en une autre proposition vraie par l'échange des opérations duales définies dans la théorie des treillis. Il en résulte que la différence entre la non-distributivité typique de la théorie quantique ordinaire et la non-distributivité liée aux systèmes de traitement de l'information rend précisément compte de cette dualité. Alors que la théorie quantique ordinaire comporte des relations de non-distributivité de la forme :

$$\begin{aligned} & a > (a \wedge b) \vee (a \wedge b') \\ \wedge & \quad b > (b \wedge a) \vee (b \wedge a') \end{aligned} \quad (21)$$

(où  $a'$  est le complément de la proposition  $A$ , et  $b'$  est le complément de la proposition  $B$ ), les systèmes de traitement de l'information satisfont à des relations de non-distributivité de la forme :

$$\begin{aligned} & a < (a \vee b) \wedge (a \vee b') \\ \vee & \quad b < (b \vee a) \wedge (b \vee a'). \end{aligned} \quad (22)$$

Contrairement à (21), sa version duale (22) demande seulement que l'une des deux inégalités soit satisfaite. Une analyse détaillée [4] montre que ceci est effectivement crucial pour la

non-distributivité des systèmes de traitement de l'information. Il est par conséquent possible de considérer la logique des systèmes quantiques ordinaires et celle des systèmes de traitement de l'information comme des aspects duaux d'une seule structure de treillis non-distributifs sous-jacente.

#### 4.1.4. Un seuil d'ordre temporel dans la perception

Il existe une relation intéressante entre (17), et une autre relation de commutation qui implique  $L$  et un opérateur temps  $T$  introduit par Misra et collaborateurs [29, 30]:

$$i[L, T] = 1 . \quad (32)$$

$T$  est défini si  $K > 0$ . Dans la mesure où, par-delà son rôle d'opérateur d'évolution (comme dans (15)),  $L$  peut aussi être interprété comme une différence d'énergie due à  $L\rho = [H, \rho]$  pour un hamiltonien  $H$ , (23) indique une complémentarité entre l'énergie et le temps pour les systèmes chaotiques. Cela suggère l'idée d'une intrication temporelle pour ces systèmes. Cette intrication peut être interprétée comme une non-localité temporelle [31] liée au découpage grossier (coarse graining) de l'espace des états (pour une discussion plus détaillée, on se reportera à [3]). Il faut souligner que cette non-localité est épistémique, et ne doit pas être confondue avec la non-localité ontique de la théorie quantique ordinaire.

Il a été suggéré dans un récent article [7] d'appliquer ce genre d'intrication à des observations expérimentales portant sur la perception d'une séquence temporelle de stimuli présentés en succession. De nombreuses études de ce type (voir [41, 40]) révèlent l'existence d'une fenêtre temporelle dont la durée est d'environ 20 à 40 millisecondes, durant laquelle les stimuli individuels peuvent être discriminés sans que l'ordre de leur succession ne puisse être identifié correctement. La taille de cette fenêtre temporelle, représentant ce qu'il est convenu de nommer le *seuil d'ordre*, est indépendante de la modalité sensorielle mise en jeu. Certains auteurs ont suggéré qu'elle représente la durée d'un « maintenant » étendu, ou encore d'une unité de « présence » [41]. On peut la considérer comme un exemple cognitif de non-localité temporelle, ou de holisme temporel.

Puisqu'il y existe de nombreux arguments à l'appui de la thèse que bien des processus cérébraux sont chaotiques [46], leur entropie de Kolmogorov-Sinai  $K$  est positive, et il est tentant d'interpréter l'inverse de  $K$  comme durée d'un *seuil d'ordre*. Un scénario de « doubles fentes d'Young temporelles » a ainsi été proposé [7] sur la base de la complémentarité de  $L$  et  $T$  indiquée dans (23), où  $L$  correspond soit à une différence d'énergie, soit, de manière équivalente, à une différence de fréquence  $\Delta\nu$ . Si l'on prend en considération la remarquable coïncidence numérique entre  $\Delta t \approx 30$  msec pour le *seuil d'ordre* et  $\Delta\nu \approx 40$  Hz pour la bande- $\gamma$  d'oscillations neuronales (en termes d'une relation d'incertitude temps-énergie ou temps-fréquence généralisée), cela conduit à faire une intéressante prévision empirique. Selon cette relation d'incertitude, la distribution expérimentale des valeurs de  $\Delta t$  devrait varier de manière bien définie si la distribution de  $\Delta\nu$  dans la bande- $\gamma$  de fréquences est modifiée. De nouveaux travaux expérimentaux sont requis afin de tester cette prévision.

Mais une autre application de la théorie quantique faible aux processus psycho-cognitifs a doré et déjà été confirmée expérimentalement, et c'est elle que nous allons décrire dans la prochaine section.

## 4.2. Le modèle de Zénon-Necker

### 4.2.1. Perception bistable de stimuli ambigus

La bistabilité perceptive se manifeste à chaque fois qu'un stimulus peut être interprété de deux manières distinctes avec un degré presque égal de plausibilité. Un exemple très simple et souvent étudié de bistabilité perceptive est la figure appelée « cube de Necker » [24]. La grille des arêtes d'un cube en représentation bidimensionnelle peut être perçue comme un objet tridimensionnel suivant deux perspectives distinctes : soit comme un cube vu du dessus, soit comme un cube vu du dessous. La perception du cube de Necker bascule sans cesse entre ces deux représentations possibles ; et si le basculement peut être imposé volontairement, il est dans la plupart des cas à la fois spontané et inévitable.

Nous avons proposé récemment [8] de décrire la perception bistable à l'aide du formalisme d'un système quantique à deux états, dans lequel les deux états de base correspondent aux deux façons différentes de représenter le stimulus. La « mesure » est assimilée au processus mental déterminant de quelle manière la figure est perçue. Le basculement entre les deux perceptions différentes correspond aux transitions entre les deux états, qui sont des états propres de l'opérateur représentant une perception particulière, et sont instables à travers l'évolution temporelle du système. Une telle description de la perception bistable met en oeuvre une version non-minimale de la Théorie Quantique Faible, comprenant une structure linéaire et un espace des états linéaire et bidimensionnel. Cette version est assez proche de la structure de la théorie quantique complète utilisée en physique. Cela n'implique cependant en rien de considérer la bistabilité perceptive comme un phénomène quantique au sens où les processus cérébraux concernés seraient des processus quantiques ordinaires (on trouvera une description de ce genre d'approches dans [5]). Au lieu de cela, nous discuterons du comportement de type quantique de la bistabilité perceptive en tant que résultat de la simplification d'un système extrêmement compliqué en un système à deux états, dans lequel l'effet d'une multitude de variables non-contrôlées et d'influences est pris en compte de manière globale. Dans ce but, nous allons considérer un système décrit par un espace d'états linéaire, engendré par deux états de base  $\psi_1$  and  $\psi_2$  dont aucun n'est un état propre de l'Hamiltonien  $H$  qui engendre la matrice d'évolution  $U(t) = e^{iHt}$ . Si le système est initialement dans l'état  $\psi_1$  et qu'il est autorisé à évoluer librement selon  $U(t)$ , son état va osciller entre  $\psi_1$  et  $\psi_2$ . Cette oscillation peut être ralentie en augmentant la fréquence à laquelle le système est mesuré dans le but de savoir s'il est demeuré dans son état initial. En passant à la limite d'une mesure continue, incessante, l'évolution du système peut être complètement bloquée. *En mécanique quantique standard, ce phénomène est connu sous le nom d'« effet Zénon quantique ».* Sa possible signification cognitive a été mentionnée antérieurement par Ruhnau [42] ainsi que par Stapp [45]. Des applications concrètes et quantitatives de cet effet pour des systèmes cognitifs ont été proposés pour la première fois par [8].

### 4.2.2. La complémentarité de l'observation et de la dynamique

L'effet Zénon<sup>2</sup> quantique a initialement été présenté comme un « paradoxe » par Misra et Sudarshan [32] qui l'ont appliqué à la désexcitation de systèmes quantiques instables. Sa signification essentielle est que l'observation répétée de tels systèmes ralentit l'évolution temporelle qu'ils subiraient en l'absence d'observation. Un exemple de ce genre d'effet serait le ralentissement du taux de désintégration radioactive pour des atomes instables soumis à une observation réitérée. Le proverbe « une casserole que l'on regarde ne bout jamais » illustre métaphoriquement ce comportement dans la limite d'une observation continue.

La situation que l'on traitera dans ce qui suit concerne un système quantique oscillant entre deux états non-stationnaires. Dans ce but, considérons un système à deux états dotés des propriétés suivantes (sachant que les résultats obtenus s'appliqueraient également à des systèmes plus généraux à deux niveaux) :

- Une observation est représentée par un opérateur :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Immédiatement après une observation, le système se trouvera dans l'un des états propres correspondants :

$$\psi_1 = |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \psi_2 = |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

---

2. Le philosophe grec Zénon d'Elée a proposé une antinomie que l'on peut décrire ainsi : « Aussi longtemps qu'une chose est dans un espace égal à ses propres dimensions, elle est au repos. Une flèche est dans un espace égal à ses propres dimensions à chaque moment de son parcours, et donc le long de la totalité de son parcours. Par conséquent, la flèche lancée est au repos » (Voir Aristote, *Physique* VI, 9, 239 b5). Le rapport de cette antinomie avec l'effet qui nous intéresse ici est assez évident : en situant l'objet en mouvement à chaque instant, on l'immobilise.

- les deux états propres  $\sigma_3$  peuvent aussi être représentés par leurs opérateurs de projection :

$$P_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

- Sans aucune perte de généralité, l'opérateur Hamiltonien qui induit des transitions dans le système peut s'écrire :

$$H = g\sigma_1 = g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Où  $g$  est une constante de couplage. Par conséquent, l'opérateur unitaire d'évolution temporelle est représenté par :

$$U(t) = e^{iHt} = \begin{pmatrix} \cos gt & i \sin gt \\ i \sin gt & \cos gt \end{pmatrix} \quad (28)$$

Notons que  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$  ne commutent pas, ce qui justifie l'application du cadre de la Théorie Quantique Faible, puisque l'observation et la dynamique sont complémentaires.

- Dans ce modèle,  $\Delta T$  définit l'intervalle de temps entre deux observations successives, et  $T$  définit l'échelle de temps caractéristique après laquelle l'état a changé avec une probabilité égale à 50 %. On suppose par ailleurs que  $T/\Delta T = N \gg 1$ . L'interprétation cognitive de  $\Delta T$  et de  $T$  sera discutée dans la section suivante.

Les quantités expérimentalement accessibles  $\Delta T$  et  $T$  peuvent être reliées au temps d'évolution spontanée du système, obtenu sous la condition hypothétique qui serait réalisée si aucune observation n'était accomplie [8]. Dans ce dernier cas empiriquement irréalisable, l'évolution temporelle est exclusivement décrite par  $U(t)$ , et l'état du système oscille entre les deux états propres  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$  avec des périodes  $t_0$ . Ceci permet d'établir une première expression de la constante  $g$ , en fonction du temps d'oscillation spontané  $t_0$ . Une seconde expression de la constante  $g$  peut par ailleurs être établie en évaluant le temps d'évolution du système lorsqu'il est soumis à des observations à intervalles  $\Delta T$ . Comme on l'a montré dans [8], en égalant ces deux expressions de la constante  $g$ , le modèle de Necker-Zenon prédit alors que ces trois échelles de temps sont reliées par :

$$t_0 = \frac{\pi}{4\sqrt{\ln 2}} \sqrt{T\Delta T} \approx \sqrt{T\Delta T}. \quad (29)$$

La dérivation de cette relation dépend de deux choix arbitraires:  $T$  est une valeur moyenne déterminée à partir de la condition que la probabilité d'inversion de l'état est  $1/2$ , et  $t_0$  est déterminé à partir de la condition que l'état oscillant est une superposition linéaire des états propres de l'observables  $\sigma_3$ , avec des coefficients égaux. Ce choix n'a d'ailleurs qu'une importance secondaire, car, même si les conditions choisies sont modifiées, le résultat général reste inchangé.

Les deux prévisions suivantes s'ensuivent :

1. Aussi longtemps que l'intervalle de temps  $\Delta T$  entre deux observations n'est pas nul, les états basculeront spontanément de l'un à l'autre après une durée moyenne  $T$  longue par rapport à la fois à  $\Delta T$  et à  $t_0$ .
2. La relation entre les échelles de temps  $T$ ,  $\Delta T$  et  $t_0$  est donnée par (29).

### 4.2.3. Échelles de temps cognitives

Afin d'attribuer un sens aux échelles temporelles  $T$ ,  $\Delta T$  et  $t_0$  en termes de processus associés à la bistabilité perceptive, des échelles de temps cognitives correspondantes ont été identifiées. Ainsi que nous l'avons discuté en détail dans [8], il existe des options naturelles pour l'identification des échelles de temps cognitives. Une structure assez invariante lors de la perception de stimuli ambigus est le taux d'inversion de la forme perçue, qui s'avère remarquablement stable d'un sujet à l'autre. Ce taux correspond à un « temps moyen de première transition » compris entre 1 et 15 secondes. On a découvert que la durée après laquelle l'orientation de la figure perçue s'inverse spontanément chez les sujets soumis à un stimulus de type « cube de Necker » est distribuée selon une loi Gamma, autour d'un maximum situé vers 3 secondes [18]. De récents résultats favorisent, il est vrai, des distributions statistiques alternatives, mais toujours aux environs de 3 secondes [17]. Cette échelle de temps peut être considérée comme identique à la période d'oscillation  $T$ , étalée à cause des observations. Son ubiquité et sa signification fondamentale (voir [8] pour d'autres exemples) suggère que

la valeur  $T \approx 3$  sec est également importante pour quantité de processus cognitifs, y compris en dehors du cas de la perception bistable de stimuli ambigus.

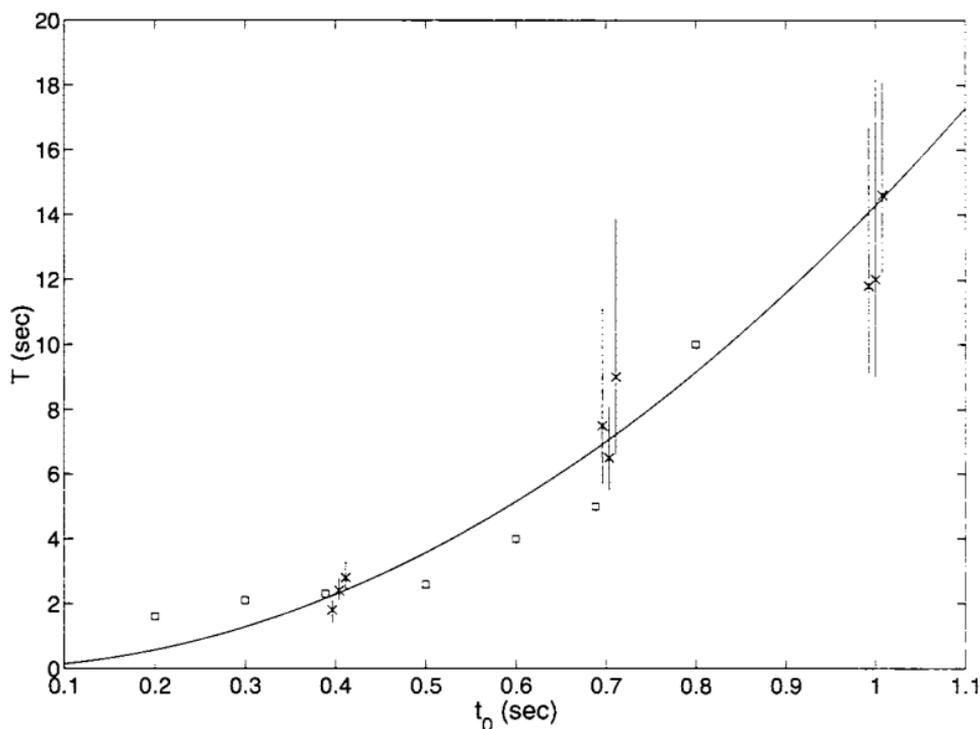
Par ailleurs, il est difficile d'obtenir une estimation raisonnable du temps entre deux observations au sens de l'effet Zénon quantique,  $\Delta T$ , à partir de la phénoménologie de la bistabilité perceptive. L'estimation doit cependant satisfaire à une condition majeure : le système perceptif doit pouvoir assigner une séquence temporelle à des événements successifs, c'est-à-dire à des observations successives. De ce point de vue, le *seuil d'ordre* dans la perception des stimuli séquentiels [41, 40] est hautement significatif. Ainsi qu'on l'a signalé plus haut, l'ordre séquentiel de stimuli se succédant avec un intervalle temporel plus petit qu'environ 30 millisecondes ne peut pas être reconnu par un sujet humain. Cela suggère de considérer le *seuil d'ordre* comme une borne inférieure universelle pour le temps  $\Delta T$  entre des observations successives, et de l'introduire en tant que tel dans le modèle d'effet Necker-Zénon. Des observations séparées par un intervalle temporel plus petit que cela ne peuvent en effet même pas être ordonnées. Le fait que le *seuil d'ordre* soit indépendant de la modalité sensorielle considérée, et sa signification fondamentale pour le problème de la liaison des divers actes mentaux, par-delà de mode d'opération modulaire du cerveau, accroît encore la plausibilité de cette suggestion.

Enfin, le sens de  $t_0$  est celui d'une période d'oscillation du processus de transition sous l'hypothèse qu'aucune observation ne se trouve effectuée. Autrement dit, dans ce cas, l'évolution du système est seulement gouvernée par  $U(t)$ . Selon (29), l'observation aboutit à une augmentation du temps d'oscillation effectif, de  $t_0$  à  $T \approx t_0^2/\Delta T$ . Avec  $T \approx 3$  secondes et  $\Delta T \gtrsim 30$  millisecondes, cela aboutit à  $t_0 \gtrsim 300$  millisecondes. Sous l'influence d'observations séparées par un intervalle de temps égal à 30 millisecondes, la période d'oscillation spontanée, égale à 300 millisecondes, se trouve donc augmentée jusqu'à atteindre une période d'oscillation de 3 secondes. L'ordre de grandeur le plus souvent évoqué comme étant le temps nécessaire pour qu'un stimulus devienne perçu consciemment correspond à quelques centaines de millisecondes (c'est le cas de l'onde P300 dans les potentiels électro-encéphalographiques liés à l'occurrence d'événements). À la différence de

$T$ , qui représente le « temps de vie » (ou le temps moyen de premier passage) de chacune des représentations perceptives,  $t_0$  peut être considéré comme le temps de relaxation vers chacune des représentations. Ce dernier est bien plus court que le temps de vie de chaque représentation indiqué par le modèle de Necker-Zénon. En l'absence d'effet Zénon, le temps de vie  $T$  serait identique au temps de transition  $t_0$ .

#### 4.2.4. Résultats expérimentaux

On a observé que le temps de vie  $T$  pour la perception bistable du cube de Necker change considérablement lorsque le stimulus est présenté de manière discontinue [36]. Des combinaisons particulières des durées de présentation et de masquage du stimulus conduisent à des modifications sensibles de  $T$ . De récents résultats [24] montrent que  $T$  dépend essentiellement des durées de masquage, plutôt que des durées de présentation du stimulus.  $T$  est maximale pour des longues durées de masquage du stimulus (de l'ordre d'une seconde). De longues durées de masquage du stimulus accroissent manifestement l'intervalle à la suite duquel une inversion du cube de Necker devient possible. Du point de vue théorique qui a été esquissé plus haut, une présentation discontinue du cube de Necker avec de longues durées de masquage altère l'Hamiltonien du système, ce qui conduit à une augmentation du temps d'oscillation effectif  $t_0$ . Plus précisément, l'argument vaut si les durées de masquage sont plus grandes que le temps  $t_0$  correspondant à une présentation continue (autrement dit à un temps de masquage tendant vers zéro). Pour une présentation non-continue, des temps de masquage plus ou moins longs peuvent par conséquent être utilisés pour « simuler » une variation de  $t_0$ , d'une manière expérimentalement bien contrôlée. Pour une telle situation, la figure 1 montre des résultats expérimentaux issus de [24, 36] concernant la variation  $T$  en fonction de  $t_0$  ( $T = f(t_0)$ ). Ces résultats expérimentaux sont comparés à une courbe théorique correspondant à l'équation (29), avec  $\Delta T = 70$  millisecondes. La courbe théorique est remarquablement conforme aux résultats expérimentaux. Si l'on utilise  $\Delta T = 70$  millisecondes pour estimer le temps  $t_0$  correspondant à une présentation continue du stimulus, on obtient  $t_0 \approx 460$  millisecondes.



**Figure 1 :** Temps de vie expérimentaux  $T$  pour la perception bistable d'un cube de Necker présenté non-continûment. Les données représentés par des croix proviennent de [24] : à chaque valeur  $t_0$  du temps de masquage du stimulus,  $T$  est porté (avec sa barre d'erreur) pour trois temps de présentation du stimulus, respectivement égaux à 0.05 seconde, 0.1 seconde, and 0.4 seconde. Les données représentés par des carrés proviennent de [36], pour un temps de présentation du stimulus égal à 0.3 seconde (l'erreur n'est pas indiquée dans [36]). La courbe tracée sur le graphique décrit  $T$  comme une fonction des temps de masquage  $t_0$  conformément à (29), avec  $\Delta T = 70$  msec.

Pour des temps de masquage inférieurs à 300 millisecondes,  $T$  recommence à croître avec les temps de masquage décroissants. Ce phénomène peut se comprendre comme conséquence de la dynamique non-perturbée  $U(t)$  du modèle, pour laquelle aucun effet Zénon n'intervient. Des résultats empiriques récents pour des temps de masquage inférieurs à 300 millisecondes, s'accordent avec les prévisions théoriques correspondantes [25]. De plus, on peut dériver théoriquement la distribution statistique de  $T$  (à savoir une distribution conforme à la loi Gamma), à condition de choisir convenablement le comportement initial transitoire de  $U(t)$  après chaque observation [25].

Dès lors que la distribution statistique des valeurs de  $T$  peut varier assez considérablement d'un individu à l'autre, il serait intéressant de voir si cela correspond ou non à une variation corrélative de  $\Delta T$ . Une augmentation énorme des valeurs de  $T$  d'un facteur proche de 1000 ont été récemment décrites pour des moines Tibétains pris comme sujets d'expérience [37]. Il est cependant évident que les changements associés de  $\Delta T$  sont beaucoup plus difficiles à mesurer, et qu'aucune donnée de ce type n'est disponible actuellement.

Remarquons enfin que la Théorie Quantique Faible ouvre la possibilité de superpositions linéaires des états propres  $|+\rangle$  et  $|-\rangle$ . On peut imaginer que ce genre de superposition est un bon candidat pour servir de modèle à des états cognitifs intermédiaires, qui ne se réduisent à aucune des deux représentations catégorielles du cube de Necker. Dans la perspective des systèmes dynamiques, de tels états sont intrinsèquement instables. Ils ont été qualifiés d'« acatégoriaux »[2]. Des travaux ultérieurs seront nécessaires pour préciser cette idée.

## 5. CONCLUSION RÉCAPITULATIVE

La première partie de cet article nous a permis d'esquisser la formulation de la Théorie Quantique Faible proposée initialement dans [10]. Cette théorie a été motivée par le besoin de trouver un cadre formel pour les concepts de complémentarité, de superposition, et d'intrication non seulement dans le domaine de la physique quantique standard, mais aussi dans des contextes beaucoup plus généraux. La Théorie Quantique Faible est fondée sur un ensemble minimal d'axiomes définissant la structure mathématique d'un monoïde. La condition-clé pour la complémentarité et l'intrication dans ce cadre général n'est autre que la non-commutativité des observables. La théorie quantique ordinaire peut être retrouvée à partir de la Théorie Quantique Faible en introduisant des axiomes, des restrictions, et des spécifications supplémentaires. Ainsi, la version minimale de la Théorie Quantique Faible ne fournit aucune algèbre de Von Neumann, et n'inclut aucune représentation dans un espace de Hilbert. Il n'y a ni équation de Schrödinger pour la dynamique,

ni règle de Born pour l'interprétation probabiliste des vecteurs d'état. En général, par ailleurs, la non-commutativité des observables n'a pas d'échelle quantitative fixée par la constante de Planck, la variance des observables n'est pas fournie par les relations d'incertitude de Heisenberg, et il est impossible de formuler des inégalités du type de celles de Bell. La Théorie Quantique Faible est applicable aux deux niveaux, ontique et épistémique, de discussion.

Dans la seconde partie de l'article, deux applications de la Théorie Quantique Faible ont été présentées, afin de montrer la viabilité et la fécondité de la Théorie Quantique Faible. Ces applications concernent (i) les types complémentaires de descriptions dynamiques de systèmes dynamiques classiques, et (ii) la perception bistable de stimuli ambigus. Les exemples traités sont fondés sur des niveaux différents de généralisation intermédiaires entre la théorie quantique ordinaire et la Théorie Quantique Faible, selon le nombre et le type de restrictions ajoutées au cadre formel minimal. La principale différence formelle entre les deux exemples peut être exprimée par le commutateur (supposé à chaque fois non-nul) des opérateurs introduits. Dans l'exemple (i), le commutateur est spécifique au système plutôt qu'universel ; et dans l'exemple (ii), aucun commutateur quantitativement précis n'est spécifié. Les deux exemples dépendent fortement de concepts probabilistes (ce qui va au-delà du cadre formel minimal), et ils font référence à une interprétation épistémique plutôt qu'ontique.

Les deux applications de la Théorie Quantique Faible ont été suffisamment développées pour pouvoir être comparées à des résultats expérimentaux. Dans l'exemple (i), la quantité-clé pour la comparaison est la valeur empiriquement accessible de l'entropie de Kolmogorov-Sinai pour les systèmes dynamiques classiques. Elle spécifie le degré de non-commutativité de différentes descriptions dynamiques si la partition sous-jacente de l'espace des états est capable de l'engendrer. Si ce n'est pas le cas, les partitions elles-mêmes sont *complémentaires*. On souligne alors la relation entre des descriptions complémentaires et une logique non-booleenne pour des systèmes dynamiques. Enfin, on indique la manière dont les opérateurs non-commutatifs des systèmes dynamiques classiques peuvent impliquer une version temporelle de l'intrication. Dans l'exemple (ii), un

modèle de Necker-Zénon pour la bistabilité perceptive est présenté en tant que généralisation de l'effet Zénon quantique. Ce modèle est fondé sur la complémentarité d'un processus cognitif élémentaire d'observation et sur le processus de basculement entre les différentes représentations d'un stimulus ambigu. Le processus de basculement est décrit comme une oscillation entre deux états instables sous l'effet de la dynamique mise en jeu, dans un cas où il y a *complémentarité* entre la dynamique et l'acte d'observation. Le modèle fournit une relation quantitative entre trois échelles de temps cognitives très différentes, de l'ordre de quelque dizaines de millisecondes, de quelques centaines de millisecondes, et de quelques secondes. Les résultats expérimentaux disponibles s'accordent avec cette prévision théorique. Les superpositions linéaires d'états correspondant à des représentations perceptives distinctes sont proposées, en fin de parcours, comme un bon modèle théorique pour des états cognitifs intermédiaires.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aspect, A., Dalibard, J., and Roger, G., Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical Review Letters* **49**, 1804-1807 (1982).
- [2] Atmanspacher, H., Categorical and acategorical representation of knowledge, *Cognitive Systems* **3**, 259-288 (1992).
- [3] Atmanspacher, H., Dynamical entropy in dynamical systems, in *Time, Temporality, Now*, ed. by H. Atmanspacher and E. Ruhau, Springer, Berlin, 1997, pp. 327-346.
- [4] Atmanspacher, H., A propositional lattice for the logic of temporal predictions, in *Solitons and Chaos*, ed. by I. Antoniou and F.J. Lambert, Springer, Berlin 1991, pp. 58-70.
- [5] Atmanspacher, H., Quantum approaches to consciousness. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2004 Edition), ed. by Edward N. Zalta.
- [6] Atmanspacher, H., Stability conditions in contextual emergence: from physics to cognitive neuroscience. Submitted (2005).
- [7] Atmanspacher, H., and Filk, T., Discrimination and sequentialization of events in perception. In *The Nature of Time: Geometry, Physics, and Perception*. Edited by R. Buccheri et al. Kluwer, Dordrecht, 2003, pp. 67-75.

- [8] Atmanspacher, H., Filk, T., and Romer, H., Quantum Zeno features of bistable perception. *Biological Cybernetics* **90**, 33-40 (2004).
- [9] Atmanspacher, H., and Primas, H., Epistemic and ontic quantum realities, in Khrennikov, A. (ed.): *Foundations of Probability and Physics*, American Institute of Physics 2005, pp. 49-61. Originally published in Castell, L., and Ischebeck, O. (eds.): *Time, Quantum and Information*, Springer, Berlin 2003, pp. 301-321.
- [10] Atmanspacher, H., Romer, H. and Walach, H., Weak quantum theory: complementarity and entanglement in physics and beyond. *Foundations of Physics* **32**, 379-406 (2002).
- [11] Atmanspacher, H., and Scheingraber, H., A fundamental link between system theory and statistical mechanics. *Foundations of Physics* **17**, 939-963 (1987).
- [12] Graben, P., and Atmanspacher, H., Complementarity in classical dynamical systems. Submitted (2005). Preprint at LANL nlin. CD/0407046.
- [13] Bell, J.S., On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics* **1**, 195-200 (1964).
- [14] Birkhoff, G., and von Neumann, J., The logic of quantum mechanics, *Annals of Mathematics* **37**, 823-843 (1936).
- [15] Bohr, N., The quantum postulate and the recent development of atomic theory, *Nature* **121** (Suppl.), 580-590 (1928).
- [16] Bowen, R., Markov partitions for axiom A diffeomorphisms, *American Journal of Mathematics* **92**, 725-747 (1970).
- [17] Brascamp, J.W., van Ee, R., Pestman, W.R., and van den Berg, A.V., Distributions of alternation rates in various forms of bistable perception. *Journal of Vision* **5**, 287-298 (2005).
- [18] De Marco, A., Penengo, P., Trabucco, A., Borsellino, A., Carlini, F., Riani, M., and Tuccio, M.T., (1977): Stochastic models and fluctuations in reversal time of ambiguous figures, *Perception* **6**, 645-656 (1977).
- [19] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N., Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review* **47**, 777-780 (1935).
- [20] Fell, J., Identifying neural correlates of consciousness: the state space approach. *Consciousness and Cognition* **13**, 709-729 (2004).
- [21] Grebogi, C., Hammel, S., Yorke, J.A., and Sauer, T., Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: containment and refinement. *Physical Review Letters* **65**, 1527-1530 (1990).
- [22] Grassberger, P., and Procaccia, I., Estimation of the Kolmogorov entropy from a chaotic signal. *Physical Review A* **28**, 2591-2593 (1983).
- [23] Holton, G., The roots of complementarity, in Holton, G. (ed.): *Thematic Origins of Scientific Thought*. Harvard University Press, Cambridge 1973, pp. 90-146.

- [24] Kornmeier, J., Wahrnehmungswechsel bei mehrdeutigen Bildern – EEG-Messungen zum Zeitverlauf neuronaler Mechanismen. PhD thesis, University of Freiburg 2002.
- [25] Kornmeier, J., Filk, T., Romer, H., and Atmanspacher, H., unpublished material.
- [26] Krueger, F.R., *Physik und Evolution*, Parey, Berlin 1984.
- [27] Meyer-Abich, K.M., *Korrespondenz, Individualität und Komplementarität*. Steiner, Wiesbaden 1965.
- [28] Meyer-Abich, K.M., Bohr's complementarity and Goldstein's holism in reflective pragmatism. *Mind and Matter* 2(2), 91-104 (2004).
- [29] Misra, B., Nonequilibrium entropy, Lyapounov variables, and ergodic properties of classical systems, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 75, 1627-1631 (1978).
- [30] Misra, B., Prigogine, I., and Courbage, M., From deterministic dynamics to probabilistic descriptions, *Physica A* 98, 1-26 (1979).
- [31] Misra, B., and Prigogine, I., Irreversibility and nonlocality, *Letters in Mathematical Physics* 7, 421-429 (1983).
- [32] Misra, B., and Sudarshan, E.C.G., The Zeno's paradox in quantum theory. *Journal of Mathematical Physics* 18, 756-763 (1977).
- [33] Murdoch, D., *Niels Bohr's Philosophy of Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [34] Pais, A., *Niels Bohr's Times In Physics, Philosophy, and Politics*. Clarendon, Oxford, 1991.
- [35] Plaum, E., Bohrs quantentheoretische Naturbeschreibung und die Psychologie. *Psychologie und Geschichte* 3, 94-101 (1992).
- [36] Orbach, J., Zucker, E., and Olson, R., Reversibility of the Necker cube VII. Reversal rate as a function of figure-on and figure-off durations. *Perceptual and Motor Skills* 22, 615-618 (1966).
- [37] Carter, O.L., Presti, D.E., Callistemon, C., Liu, G.B., and Pettigrew, J.D., Meditation alters perceptual rivalry in Tibetan Buddhist monks, *Current Biology* 11, R412-R413 (2005).
- [38] Piron, C., *Foundations of Quantum Physics*. Benjamin, Reading, 1976.
- [39] Plumecoq, J., and Lefranc, M., From template analysis to generating partitions, I and II. *Physica D* 144, 231-278 (2000).
- [40] Poppel, E., The brain's way to create «nowness», in *Time, Temporality, Now*, ed. by H. Atmanspacher and E. Ruhnau, Springer, Berlin 1997, pp. 107-120.
- [41] Ruhnau, E., The now – a hidden window to dynamics, in *Inside Versus Outside*, ed. by H. Atmanspacher and G.J. Dalenoort, Springer, Berlin 1994, pp. 291-308.
- [42] Ruhnau, E., Time Gestalt and the observer. In *Conscious Experience*, ed. by T. Metzinger, Imprint Academic, Thorverton 1995, pp. 165-184.

- [43] Schrodinger, E., Die gegenwartige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften* **23**, 807-812, 823-828, 844-849 (1935).
- [44] Shaw, R., Strange attractors, chaotic behavior, and information flow. *Zeitschrift fur Naturforschung* **36a**, 80-112 (1981).
- [45] Stapp, H.P., Attention, intention, and will in quantum physics. *Journal of Consciousness Studies* **6**, 143-164 (1999), particularly p. 159.
- [46] Skarda, C.A. and Freeman, W.J, How brains make chaos in order to make sense of the world, *Behavioral and Brain Sciences* **10**, 162-195 (1987).
- [47] Thirring, W., *Quantum Mechanics of Atoms and Molecules*. Springer, Berlin, 1981.
- [48] Viana, R.L., Grebogi, C., de S. Pinto, S.E., and Barbosa, J.R.R., Pseudo-deterministic chaotic systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **13**, 1-19 (2003).

Harald Atmanspacher

*Institute for Frontier Areas of Psychology and Mental Health,  
Wilhelmstr. 3a, 79098 Freiburg, Germany*

Thomas Filk

*Parmenides Foundation, Via Mellini 26-28,  
57031 Capoliveri, Italy*

Hartmann Römer

*Institute of Physics, University of Freiburg,  
Hermann-Herder-Str. 3, 79104 Freiburg, Germany*

*Traduction de l'anglais et adaptation  
par M. Bitbol*



# Formalisme quantique et préférences indéterminées en théorie de la décision

## 1. INTRODUCTION

Il est aujourd'hui bien connu que les acteurs en situation de choix ou de décision se comportent quelquefois de manière apparemment irrationnelle, constat que l'on qualifie d'anomalies comportementales<sup>1</sup>. Ces anomalies peuvent se manifester de différentes manières. Confronté aux mêmes possibilités, un agent peut, par exemple, faire un choix différent selon la manière dont le choix lui est présenté, ou selon le contexte dans lequel il est placé alors que les différents contextes semblent équivalents quant à ce choix. Il est également possible qu'ayant à faire plusieurs choix successifs indépendants, l'agent aboutisse à des résultats dépendant de l'ordre dans lequel ces choix sont faits. Les approches usuelles rencontrent des difficultés à rendre compte de ces anomalies sans recourir à des arguments qui semblent souvent ad hoc.

L'approche bayésienne traditionnelle, suggérée par Harsanyi, pour modéliser l'information incomplète, consiste à adopter une distribution de probabilité a priori sur les types des agents (un type étant censé représenter toute l'information pertinente relative à l'agent dans la situation de décision considérée), à faire un tirage au sort des types et à informer chaque

---

1. Cet article présente un travail qui a été mené en collaboration avec Shmuel Zamir du Center for the Study of Rationality de l'université de Jérusalem et Ariane Lambert de la Paris School of Economics (PSE). Il a donné lieu à un article préliminaire en anglais: Lambert Ariane, Zamir Shmuel et Zwirn Hervé, 2006. *Type Indeterminacy: A Model of the KT (Kahneman-Tversky)-Man*. arXiv:physics/0604166 v1 20 Apr 2006 et à une soumission au *Journal of Economic Theory*.  
Kahneman D. and A. Tversky, 2000, *Choice, Values and Frames*, Cambridge, Cambridge University Press.

agent de son propre type. Il en résulte que l'incertitude sur le type d'un agent reflète principalement l'information incomplète qu'en ont les autres agents. Ceci provient du fait qu'un type est parfaitement déterminé et représente l'ensemble complet et bien défini des caractéristiques d'un agent. Chaque agent connaît son propre type mais ne dispose que d'une distribution de probabilité sur le type des autres agents. C'est sur ce point que nous nous écartons de l'approche traditionnelle en ce que nous supposons qu'au-delà d'un manque d'information, l'incertitude sur le type d'un agent peut provenir du fait que celui-ci n'est pas complètement déterminé avant que l'agent n'ait fait son choix ou pris sa décision. L'état de l'agent est alors une superposition de différents types au sens où le formalisme quantique l'autorise. C'est alors seulement au moment de la décision, que nous identifions à l'équivalent d'une mesure, que la préférence se détermine. Cette idée est conforme avec ce que suggèrent Tversky et Simonson<sup>2</sup> selon lesquels : « *Il y a un nombre croissant d'indices qui confortent une position alternative selon laquelle les préférences sont souvent construites – pas seulement révélées – au moment du processus de choix. Ces constructions dépendent du cadre dans lequel le problème est posé, de la méthode d'obtention des résultats et du contexte du choix.* »

Ce point de vue semble assez en accord avec les observations selon lesquelles des agents (même a priori hautement rationnels) peuvent se comporter différemment dans des situations équivalentes qui ne diffèrent que par des facteurs apparemment non pertinents (comme l'environnement ou des événements préalables n'ayant aucun lien avec la situation considérée)<sup>3</sup>.

---

2. Tversky A. et Simonson I., 1993. « Context-Dependent Preferences », *Management Sciences* 39 : 85-117.

3. Voir l'avertissement à la fin de l'article. Une version anglaise préliminaire de ce papier est disponible : Lambert Ariane, Zamir Shmuel et Zwirn Hervé, 2006. *Type Indeterminacy: A Model of the KT (Kahneman-Tversky)-Man.*, arXiv :physics/0604166 v1 20 Apr 2006.

## 2. LE CADRE FORMEL

Dans cette partie, nous présentons le formalisme que nous utiliserons ainsi que son interprétation. Nous emprunterons à la mécanique quantique une partie des outils qui ont été développés pour modéliser le monde atomique. Le formalisme quantique repose en grande partie sur le modèle d'espace de Hilbert qui est la structure naturelle pour exprimer l'état d'un système sous forme d'un vecteur. Ce modèle est complété en physique par une équation dynamique décrivant la manière dont l'état évolue dans le temps, c'est l'équation de Schrödinger, mais nous n'en aurons pas d'équivalent dans le cadre proposé ici. Nous utiliserons donc uniquement le formalisme des espaces de Hilbert auquel nous associerons quelques règles supplémentaires, comme celle qui régit la mesure. Il est par ailleurs connu que ce formalisme peut être considéré comme une généralisation du calcul des probabilités quand on veut y introduire des dépendances contextuelles. Le fait qu'il soit adéquat pour décrire les observations mentionnées plus haut n'est donc pas si surprenant, mais nous n'aurons pas l'occasion d'approfondir cette remarque de manière plus détaillée car cela nécessiterait des développements techniques n'ayant pas leur place ici<sup>4</sup>. Le lecteur trouvera en appendice, les éléments de mécanique quantique suffisants pour comprendre le cadre formel que nous allons développer<sup>5</sup>.

### 2.1. La notion d'état et de superposition

Ce que nous cherchons à décrire, c'est le comportement de choix d'un agent dans une situation de décision, ce que nous interprétons comme une révélation de ses préférences. Dans cet article, nous nous limiterons aux situations où un choix doit être fait de manière non répétitive et sans prise en compte de notion

---

4. Le lecteur intéressé pourra éventuellement se reporter Mackey G.W., 1963, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, New York, Benjamin.

5. Pour une présentation complète du formalisme quantique voir par exemple Cohen-Tannoudji C., Diu B., et Laloe F., 1973, *Mécanique Quantique*, Paris, Hermann ou l'ouvrage récent de Basdevant J.L., 2006. *12 leçons de mécanique quantique*, Paris, Vuibert.

de stratégie. Nous excluons donc les situations de jeux où un joueur doit répondre de manière itérée à un choix du joueur adverse. Ces situations, plus complexes, demandent des développements qui font l'objet de travaux en cours. Des exemples de situations qui entrent dans le cadre du présent article sont :

- choisir entre acheter un ordinateur de marque  $M_1$  ou  $M_2$  ou  $M_3$
- choisir d'investir ou pas dans un projet
- choisir entre un gain certain de 100 € ou un pari donnant 250 € avec une probabilité 0,5 et 0 € avec une probabilité 0,5
- préférer manger une banane, une pomme ou une poire
- Choisir de coopérer ou de dénoncer dans le dilemme du prisonnier

Dans le reste de l'article, en dehors des cas explicites de situations tirées de la littérature et mettant en évidence des anomalies comportementales, les exemples que nous donnerons pour illustrer notre propos seront toujours élémentaires. Il va de soi que cela n'affecte en rien la possibilité d'utiliser le formalisme dans des cas plus sophistiqués. Un agent est représenté par un état qui englobe tout ce qu'on peut savoir de son comportement attendu dans la situation considérée. Dans le cas classique le plus simple, l'état pourrait être directement la désignation du choix qu'il fera en fonction des différentes possibilités. Dans ce cas, l'état représente la préférence qu'a l'agent pour tel ou tel choix. Par exemple, si la situation de décision consiste à choisir entre une banane, une pomme ou une poire, l'état de l'agent pourrait être « poire ». Ceci signifierait que, confronté au choix en question, l'agent choisira la poire avec certitude. Une situation plus intéressante est justement celle modélisée par le formalisme bayésien dans lequel chaque possibilité possède une probabilité d'être choisie. L'état pourra alors être « banane avec une probabilité 0,3, poire avec une probabilité 0,2 et pomme avec une probabilité 0,5 ». Mais il est également possible que l'état contienne un ordre sur les préférences comme « poire, banane, pomme » signifiant que l'agent préférera une poire à tout autre fruit mais qu'entre une banane et une pomme il choisira une banane.

Par analogie avec le cas de la mécanique quantique, nous représenterons mathématiquement l'état de l'agent comme un

vecteur dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et le noterons  $|\psi\rangle$ . Le lien entre l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  et la situation de décision sera précisé plus bas. À ce stade, ce que représente exactement l'état  $|\psi\rangle$  est laissé ouvert. La connaissance de l'état de l'agent doit, en principe, autoriser à faire des prédictions sur ce qu'il fera lorsqu'il sera confronté à une certaine situation de décision. Nous verrons que l'interprétation qu'il est possible d'en donner peut varier selon le contexte et selon la modélisation qu'on souhaite faire. Selon le principe de superposition, si  $|\psi_1\rangle$  et  $|\psi_2\rangle$  sont deux états possibles de l'agent, toute combinaison linéaire  $\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$  avec  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 1$  est également un état possible. Ceci signifie déjà que, même dans le cas de l'interprétation la plus simple que nous avons mentionnée plus haut, à savoir celle où l'état représente directement le choix que fera l'agent, il est possible d'obtenir par combinaison linéaire de tels états, des états (dits superposés) qui ne s'interprètent plus classiquement. Ce sont des superpositions par exemple d'un état qui représente le choix certain d'une pomme avec un état qui représente un choix certain d'une banane. De tels états, impossibles à concevoir dans un cadre classique et qu'il ne faut pas tenter de « comprendre », sont l'essence même de la différence entre les formalismes habituels et celui que nous proposons.

## 2.2. La notion d'observable et de mesure

Une mesure est une opération menée sur le système et qui produit un résultat. Typiquement, en physique, une mesure est effectuée au moyen d'un appareil qui est censé permettre de déterminer la valeur d'une grandeur physique, comme une position, une impulsion ou un spin. La caractéristique d'une opération de mesure est que, si celle-ci est répétée immédiatement après, sans qu'une mesure différente ait été faite, elle redonnera le même résultat. À toute grandeur physique du système est associée une observable dont les valeurs propres donnent les seuls résultats possibles qu'il est possible d'obtenir lors d'une mesure de cette grandeur<sup>6</sup>. Après une mesure ayant donné une

---

6. Se référer à l'appendice sur les éléments de mécanique quantique pour plus de détails à ce sujet.

des valeurs propres comme résultat, le vecteur d'état du système est projeté sur le sous-espace propre associé à cette valeur propre. Lorsque la valeur propre n'est pas dégénérée, le vecteur d'état devient donc égal au vecteur propre associé à la valeur propre obtenue lors de la mesure. C'est ce mécanisme que nous allons utiliser pour modéliser une situation dans laquelle un agent est confronté à un choix entre plusieurs alternatives, ce que nous appellerons une « situation de décision ».

### 2.3. Situation de décision unique

Une situation de décision est définie par l'ensemble des alternatives entre lesquelles l'agent doit choisir. C'est la situation qui déterminera l'espace de Hilbert associé et sa dimensionnalité. On choisira l'espace correspondant de manière à ce que sa dimension soit au moins égale au nombre de choix possibles (supérieure, si on souhaite utiliser des valeurs propres dégénérées comme nous le verrons plus loin). Nous assimilerons une telle situation à une mesure en identifiant le choix fait à la valeur produite par la mesure. Le processus du choix est donc semblable à la mesure d'une grandeur. Une observable  $A$  sera associée à chaque situation de décision<sup>7</sup>. Si  $n$  choix différents sont proposés, les vecteurs propres de  $A$  seront conventionnellement notés  $|1\rangle, \dots, |n\rangle$  et seront associés aux valeurs propres  $1, \dots, n$  avec la convention selon laquelle obtenir la valeur propre  $j$  correspond à avoir fait le choix  $j$  dans la liste des choix possibles. Comme dans cette hypothèse aucune des valeurs propres n'est dégénérée,  $\{|1\rangle, \dots, |n\rangle\}$  est l'unique base orthonormée de  $\mathcal{H}$  formée de vecteurs propres de  $A$ . L'état de l'agent peut donc être écrit sur cette base :

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k |k\rangle \text{ avec } \sum_{k=1}^n |\lambda_k|^2 = 1$$

7. Par abus de langage, nous appellerons du même nom la situation de décision et l'observable associée. Ainsi à la situation de décision  $A$  sera associée l'observable  $A$  (qu'il aurait fallu en toute rigueur noter  $\hat{A}$ ).

Selon le principe de réduction, la probabilité que l'agent dans l'état  $|\psi\rangle$  choisisse l'alternative  $i$  (c'est-à-dire qu'il obtienne la valeur propre  $i$ ) est :

$$|\langle i|\psi\rangle|^2 = |\lambda_i|^2$$

Immédiatement après la mesure, l'état de l'agent est projeté sur l'état propre associé à la valeur propre  $i$ , c'est à dire  $|i\rangle$ . Si on reconduit la même situation de décision en demandant à l'agent de se prononcer à nouveau, il reconduira avec certitude le choix précédent en optant pour l'alternative  $i$ .

Dans ce cas simple, notre formalisme est équivalent au formalisme probabiliste usuel dans lequel on attribuerait des probabilités aux différents choix possibles de l'agent. Les prédictions obtenues à partir de l'état  $|\psi\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k |k\rangle$  sont identiques à celles qu'on obtiendrait à partir d'un état classique décrit comme le fait que chaque choix possible  $k$  a la probabilité  $|\lambda_k|^2$  d'être obtenu.

## 2.4. Situations de décision multiples

### 2.4.1. Situations de décisions qui commutent

Supposons que l'agent soit confronté à deux situations de décision (par exemple, le choix entre une pomme et une banane d'une part, et celui entre passer ses vacances à la mer ou à la montagne d'autre part). Soient  $A$  et  $B$  les observables associées respectivement à chacune des situations. Supposons d'abord que les deux situations offrent le même nombre  $n$  d'alternatives, ce qui permettra de supposer que les valeurs propres ne sont pas dégénérées. Si  $A$  et  $B$  commutent, il existe une base de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  formée de vecteurs propres communs à  $A$  et  $B$ . Notons  $|i\rangle$  ces vecteurs de base. On a alors :

$$A|i\rangle = i_A|i\rangle \text{ et } B|i\rangle = i_B|i\rangle \text{ avec } i_A \text{ et } i_B \in \{1, \dots, n\}$$

Mais compte tenu de notre convention selon laquelle obtenir la valeur propre  $i$  lors d'une mesure de  $A$  signifie obtenir le choix de rang  $i$  dans la liste des choix possibles de  $A$ ,

on peut toujours ordonner la liste des choix de  $A$  et  $B$  de telle manière que

$$A|i\rangle = B|i\rangle = i|i\rangle$$

Ce qui signifie que  $A = B$ . Tout vecteur de l'espace de Hilbert peut être écrit sur la base et l'état de l'agent sera :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |i\rangle \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = 1$$

Si on mesure  $A$  en premier<sup>8</sup>, la probabilité d'obtenir la valeur propre  $i$  est :

$$p_A(i) = |\lambda_i|^2$$

On pourra noter ce choix  $i(A)$  pour éviter toute ambiguïté. Ainsi  $i(A)$  est le choix de rang  $i$  de la situation de décision  $A$  alors que  $i(B)$  est le choix de même rang  $i$  de la situation de décision  $B$ . Ces deux choix sont associés à la même valeur propre.

La probabilité  $p_A(i)$  d'obtenir la valeur propre  $i$  lors de la mesure de  $A$  en premier est la même que la probabilité  $p_B(i)$  d'obtenir la valeur propre  $i$ , donc le choix  $i(B)$ , si on mesure  $B$  en premier.

Supposons qu'on ait mesuré  $A$  et obtenu le choix  $i(A)$ . Le vecteur d'état de l'agent après la mesure sera  $|i\rangle$  et la probabilité d'obtenir le choix  $j(B)$  lors d'une mesure suivante de  $B$  sera  $|\langle j | i \rangle|^2 = \delta(j, i)$  (qui vaut 1 si  $j = i$  et 0 autrement). On voit donc que dans ce cas très simple, il y a une corrélation totale entre les choix de la situation  $A$  et ceux de la situation  $B$ . Le choix de rang  $i$  étant fait pour  $A$ , on est sûr d'obtenir le choix de rang  $i$  pour  $B$  (et vice versa), ce qui découle directement du fait que  $A = B$ .

Afin de relaxer cette contrainte, il est nécessaire d'utiliser des valeurs propres dégénérées, ce qui nous permettra également de traiter le cas où le nombre de choix de chacune des situations n'est pas le même. Dans ce cas nous noterons :

---

8. Par abus de langage nous dirons : « mesurer  $A$  » au lieu de : « effectuer le choix correspondant à la situation de décision à laquelle l'observable  $A$  est associée ».

$$A|i\rangle = i_A|i\rangle \quad \text{et} \quad B|i\rangle = i_B|i\rangle$$

de telle sorte que  $i_A$  est la valeur propre de  $A$  associée au vecteur propre  $|i\rangle$  et sachant qu'une valeur propre de  $A$  sera dégénérée si, pour au moins un couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ , on a  $i_A = j_A$  (idem pour  $B$ ). Le nombre de vecteurs propres de  $A$  est alors supérieur au nombre d'alternatives possibles de la situation de décision associée à  $A$ <sup>9</sup>.

Dans ce cas, la probabilité d'obtenir le choix  $i(A)$ , si on mesure  $A$  en premier, devient :

$$p_A(i) = \sum_{j:j_A=i} |\lambda_j|^2$$

Si on mesure  $B$  en premier, la probabilité d'obtenir le choix  $j(B)$  est :

$$p_B(j) = \sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2$$

Après avoir obtenu  $j(B)$ , l'état de l'agent devient :

$$|\psi_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2}} \sum_{k:k_B=j} \lambda_k |k\rangle$$

Si on mesure ensuite  $A$  pour un agent dans cet état, la probabilité d'obtenir  $i(A)$  est<sup>10</sup> :

$$p_{AB}(i|j) = \frac{1}{\sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2} \sum_{k:k_B=j \text{ et } k_A=i} |\lambda_k|^2$$

donc la probabilité d'obtenir  $i$  quand on mesure  $A$  après avoir mesuré  $B$  est :

9. Le cas non dégénéré correspond à une situation à  $n$  alternatives et où  $i_A = i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

10. On note  $p_{AB}(i|j)$  la probabilité d'obtenir  $i$  en mesurant  $A$  quand on a obtenu  $j$  en mesurant d'abord  $B$ .

$$\begin{aligned}
 p_{AB}(i) &= \sum_j p_B(j) p_{AB}(ij) \\
 &= \sum_j \left[ \sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2 \frac{1}{\sum_{k:k_B=j} |\lambda_k|^2} \sum_{k:k_B=j \text{ and } k_A=i} |\lambda_k|^2 \right] \\
 &= \sum_j \sum_{k:k_B=j \text{ and } k_A=i} |\lambda_k|^2 = \sum_{k:k_A=i} |\lambda_k|^2 = p_A(i)
 \end{aligned}$$

On constate donc que  $p_{AB}(i) = p_A(i)$  ce qui signifie que mesurer  $B$  avant  $A$  ne change rien à la mesure de  $A$  (idem pour  $B$ ). Lorsque les observables associées à deux situations de décision commutent, on peut mesurer l'une et l'autre indépendamment. La mesure de l'une n'influe pas sur la mesure de l'autre. On peut également mesurer les deux et déterminer la probabilité conjointe  $p_{AB}(i \wedge j) = \sum_{k:k_A=i \text{ and } k_B=j} |\lambda_k|^2$ . Ceci signifie que l'événement

consistant à mesurer  $i$  sur  $A$  et  $j$  sur  $B$  est bien défini. On peut donc fusionner les deux situations et définir un espace de probabilité sur les couples  $(i, j)$ . De plus, la formule de probabilité conditionnelle  $p_{AB}(i \wedge j) = p_A(i)p_B(j|i)$  s'applique. L'introduction de valeurs propres dégénérées permet donc de s'affranchir de la contrainte de corrélation totale (et même d'identité) que nous avons constatée initialement et de traiter le cadre général dans lequel toutes les combinaisons de choix entre  $A$  et  $B$  sont possibles.

Notre formalisme dans le cas de situations de décision qui commutent reproduit donc les résultats du formalisme bayésien classique dans lequel on se donne une distribution de probabilité sur les choix conjoints des situations. Ce constat, nécessaire, montre la cohérence de l'extension que nous proposons vis-à-vis de sa limite classique.

#### 2.4.2. Situations de décisions qui ne commutent pas

C'est dans le cas de situation de décision qui ne commutent pas que le formalisme quantique apporte des prédictions nou-

velles par rapport au formalisme classique. Comme nous allons le voir, les différences proviennent de termes d'interférence dans le calcul des probabilités. Supposons que nous sommes dans le cas de deux situations de décision  $A$  et  $B$  associées à des observables  $A$  et  $B$  qui ne commutent pas et que ces observables ont le même nombre  $n$  de valeurs propres non dégénérées<sup>11</sup> (que nous pouvons donc noter  $1, 2, \dots, n$ ). Contrairement au cas précédent, il n'existe plus de base de vecteurs propres communs à  $A$  et  $B$ . Notons donc  $\{|1_A\rangle, |2_A\rangle, \dots, |n_A\rangle\}$  la base de vecteurs propres de  $A$ , le vecteur propre  $|i_A\rangle$  étant associé à la valeur propre  $i$  (idem pour  $B$ ). L'état initial de l'agent peut s'écrire sur chacune de ces bases :

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |i_A\rangle = \sum_{j=1}^n \nu_j |j_B\rangle \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n |\nu_j|^2 = 1$$

On peut écrire les vecteurs propres de  $B$  sur la base de vecteurs propres de  $A$  :

$$|j_B\rangle = \sum_{i=1}^n \mu_{ij} |i_A\rangle$$

Donc :

$$|\psi\rangle = \sum_{j=1}^n \nu_j |j_B\rangle = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \nu_j \mu_{ij} |i_A\rangle$$

Si l'agent se trouve en premier dans la situation de décision  $A$ , il choisira le choix de rang  $i$  avec la probabilité :

$$p_A(i) = \left| \sum_{j=1}^n \nu_j \mu_{ij} \right|^2$$

11. Dans ce cas, l'introduction de valeurs propres dégénérées, nécessaire quand le nombre de choix possibles n'est pas le même pour les deux situations, ne change rien d'essentiel aux résultats que nous allons montrer. En revanche, elle complique la notation à utiliser.

Si l'agent se trouve d'abord dans la situation de décision  $B$ , il choisira le choix de rang  $j$  avec la probabilité  $|\nu_j|^2$  et son état sera projeté sur le vecteur  $|j_B\rangle$ . La probabilité que, confronté ensuite à la situation de décision  $A$ , il choisisse alors le choix de rang  $i$  est  $|\mu_{ij}|^2$ . Il est résulte que la probabilité que l'agent, d'abord soumis à la situation de décision  $B$ , choisisse ensuite le choix de rang  $i$  dans la situation  $A$  est :

$$p_{AB}(i) = \sum_{j=1}^n |\nu_j|^2 |\mu_{ij}|^2 = \sum_{j=1}^n |\nu_j \mu_{ij}|^2$$

qui est en général différent de  $p_A(i)$  qui contient des termes croisés (termes d'interférence) :

$$p_A(i) = \left| \sum_{j=1}^n \nu_j \mu_{ij} \right|^2 = p_{AB}(i) + \sum_{j \neq j'} \nu_j^* \mu_{ij}^* \nu_{j'} \mu_{ij'}$$

Il en résulte que le choix que fera l'agent dans la situation  $A$  sera en général différent selon qu'il a préalablement été confronté à la situation  $B$  ou pas. De plus, dans le cas de deux observables qui ne commutent pas, on sait qu'il n'est pas possible de considérer que les résultats sont simultanément définis pour les deux (au sens où une mesure de l'une ou de l'autre redonnera toujours le même résultat). Il en résulte également que la formule de probabilité conditionnelle  $p_{AB}(i \wedge j) = p_A(i)p_B(j|i)$  ne s'applique plus comme il est facile de le vérifier puisque :

$$\left| \sum_{j=1}^n \nu_j \mu_{ij} \right|^2 = p_A(i) \neq \sum_{j=1}^n p_B(j) p_A(i|j) = \sum_{j=1}^n |\nu_j \mu_{ij}|^2$$

### 3. DEUX EXEMPLES D'APPLICATION

Donnons maintenant deux exemples dans lesquels le formalisme présenté peut apporter une modélisation permettant

d'expliquer de manière naturelle un résultat a priori surprenant. Le premier exemple est une expérience fictive que nous proposons dans le but de tester nos hypothèses. Si la possibilité pour un agent d'être dans un état d'esprit superposé (représentant une véritable indétermination de ses préférences) est réelle, alors une expérience du type de celle qui est présentée ci-dessous devrait donner un résultat non conforme à ce que l'intuition classique nous dicte. Faire une véritable expérience sur un mode similaire à celui, très schématique, que nous proposons, et obtenir un tel résultat serait un indice appréciable pour conforter notre modèle. Le deuxième exemple est tiré de la littérature et concerne le célèbre problème du *framing* pour lequel nous proposons une nouvelle explication.

### 3.1. Superposition d'états d'esprit

Comme nous allons le voir, cette expérience est une transposition de l'expérience des trous d'Young au contexte de la décision<sup>12</sup>.

#### 3.1.1. Le dispositif expérimental

Considérons deux populations identiques d'agents *I* et *II*. Supposons que chacun des membres de chaque population soit invité à jouer au dilemme du prisonnier<sup>13</sup> contre un joueur caché. Avant de jouer, les agents de la population *I* doivent répondre individuellement à une question par OUI ou NON. Le détail de la question importe peu pour les besoins de l'argument sauf que la question porte sur une caractéristique typique en rapport avec le jeu. Par exemple, la question peut être interprétée comme révélant le fait que l'agent est plutôt altruiste ou plutôt égoïste. Les agents de la population *II* eux, jouent directement sans avoir à répondre à la question. Considérons tout d'abord la population *I*. Supposons que nous ayons une proportion  $\alpha$  de réponses OUI et  $(1 - \alpha)$  de réponses NON à la question. Les agents jouent alors au dilemme du prisonnier.

---

12. Voir l'annexe 1 en fin d'article.

13. Voir l'annexe 2 en fin d'article.

Supposons que nous ayons une proportion  $\beta$  d'agents ayant répondu OUI qui coopèrent (une proportion  $(1 - \beta)$  dénonce). De même, supposons que nous ayons une proportion  $\gamma$  d'agents ayant répondu NON qui coopèrent (une proportion  $(1 - \gamma)$  dénonce). La proportion d'agents de la population  $I$  qui coopèrent sera donc :

$$P_I(\text{coop}) = \alpha\beta + (1 - \alpha)\gamma$$

Considérons maintenant la population  $II$  pour laquelle les agents ont joué directement. On trouve une proportion d'agents qui coopèrent égale à  $P_{II}(\text{coop})$ . On s'attend bien sûr à ce que  $P_{II}(\text{coop}) = P_I(\text{coop})$ . Plusieurs raisons font penser cela. La plus simple est que les deux populations sont identiques et qu'en conséquence, elles doivent produire les mêmes résultats à moins qu'un événement les ait différenciées avant que leurs agents jouent. Or, le simple fait de répondre à une question sur leur caractère ne peut ni avoir transformé les agents, ni les inciter à jouer différemment. Un raisonnement plus détaillé aboutit à la même conclusion. Si on note  $p_{II}(A)$  la proportion d'agents altruistes et  $p_{II}(E)$  la proportion d'agents égoïstes de la population  $II$ , on peut écrire en suivant la loi des probabilités conditionnelles :

$$P_{II}(\text{coop}) = p_{II}(A)p(\text{coop}|A) + p_{II}(E)p(\text{coop}|E)$$

Mais la population  $II$  est identique à la population  $I$ . Par conséquent, même si on ne l'a pas mesurée, il est naturel de supposer que la proportion d'agents altruistes (respectivement égoïstes) de la population  $II$  est identique à celle de la population  $I$  pour laquelle la mesure a été faite (un agent est altruiste ou égoïste indépendamment du fait qu'on lui ai posé la question ou pas). Donc :

$$p_{II}(A) = \alpha ; p_{II}(E) = (1 - \alpha) ;$$

De la même manière, il n'y a aucune raison de supposer que la proportion d'agents altruistes qui coopèrent (respectivement qui dénoncent) soit différente dans les deux populations. Il en résulte donc que :

$$p(\text{coop}|A) = \beta ; p(\text{coop}|E) = \gamma$$

Donc :

$$\begin{aligned} P_{II}(\text{coop}) &= p_{II}(A)p(\text{coop}|A) + p_{II}(E)p(\text{coop}|E) \\ &= \alpha\beta + (1 - \alpha)\gamma = P_I(\text{coop}) \end{aligned}$$

### 3.1.2. La possibilité d'un résultat surprenant

Supposons maintenant que l'expérience effectuée, on trouve  $P_{II}(\text{coop})$  significativement différent de  $P_I(\text{coop})$ . Quelle explication pourra-t-on donner? Dans un cadre classique, la formule de probabilités conditionnelles ci-dessus s'applique obligatoirement. Si elle donne un résultat différent pour les deux populations, c'est que les proportions qui entrent en jeu ne sont pas les mêmes. Il n'est pas raisonnable de supposer que les proportions d'agents altruistes (respectivement égoïstes) qui coopèrent (respectivement qui dénoncent) sont différentes dans les deux populations. On voit mal en effet la raison pour laquelle un agent altruiste ayant répondu à une question jouerait différemment d'un agent altruiste n'ayant répondu à aucune question. Il faut donc que ce soit les proportions d'agents altruistes et égoïstes qui aient changé. L'explication en serait que le fait d'avoir demandé aux agents s'ils étaient ou pas altruistes a conduit certains d'entre eux à changer leur nature : certains altruistes sont devenus égoïstes et certains égoïstes sont devenus altruistes. Cette explication, bien que théoriquement possible, semble cependant bien étrange. S'il suffit d'être interrogé sur ses préférences ou son caractère pour en changer, on peut douter de la stabilité de ces caractéristiques et partant, de la fiabilité du modèle tout entier qui repose sur leur prise en compte.

L'explication dans le cadre du formalisme que nous avons présenté est en revanche beaucoup plus naturelle. Avant qu'on leur pose la question (population  $I$ ) ou qu'ils jouent au dilemme du prisonnier (population  $II$ ) les agents sont dans un état superposé du type :

$$|\psi\rangle = \lambda_1|A\rangle + \lambda_2|E\rangle$$

où on note  $|A\rangle$  un état altruiste,  $|E\rangle$  un état égoïste et où les coefficients  $\lambda$  sont les mêmes au départ pour les deux populations

(c'est l'hypothèse d'identité des deux populations). Ceci revient à considérer que le questionnaire est associé à une observable dont les vecteurs propres sont  $|A\rangle$  et  $|E\rangle$ . La situation de décision du dilemme est également associée à une observable dont les vecteurs propres sont  $|coop\rangle$  et  $|den\rangle$ . Supposons que ces deux observables ne commutent pas. Dans ce cas, il n'y a pas de base de vecteurs propres communs et on peut écrire une matrice de changement de base sous la forme :

$$\begin{aligned}|A\rangle &= \mu_{11}|coop\rangle + \mu_{12}|den\rangle \\ |E\rangle &= \mu_{21}|coop\rangle + \mu_{22}|den\rangle\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \lambda_1|A\rangle + \lambda_2|E\rangle \\ &= (\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{21})|coop\rangle + (\lambda_1\mu_{12} + \lambda_2\mu_{22})|den\rangle\end{aligned}$$

Les agents de la population *II* jouent directement au dilemme du prisonnier. On a donc :

$$P_{II}(coop) = |(\lambda_1\mu_{11} + \lambda_2\mu_{21})|^2$$

Les agents de la population *I* commencent par répondre au questionnaire puis joue au dilemme du prisonnier. Donc :

$$\begin{aligned}P_I(coop) &= P_I(A)P_I(coop|A) + P_I(E)P_I(coop|E) \\ &= |\lambda_1|^2|\mu_{11}|^2 + |\lambda_2|^2|\mu_{21}|^2\end{aligned}$$

On voit donc qu'en général  $P_{II}(coop) \neq P_I(coop)$ . Ce résultat est très semblable à celui obtenu dans l'expérience des trous d'Young. Si on raisonne de manière classique, on pense que le fait de prendre connaissance ou pas du trou par lequel est passé le photon (l'analogie ici du fait qu'un agent est altruiste ou égoïste) ne changera rien à son trajet (ici, à sa réponse au dilemme du prisonnier). Alors qu'en fait, dans le cas où aucune mesure préalable n'est faite, les deux trajets possibles interfèrent à l'arrivée sur l'écran (ici, les deux comportements interfèrent au moment de la décision). Dans le cas de la population *II*, des interférences, matérialisées par des termes croisés du type  $(\lambda_1\mu_{11})^*(\lambda_2\mu_{21})$ , sont présentes alors que ces

termes sont détruits par la première mesure (le questionnaire) dans le cas de la population *I*.

Notre explication n'oblige donc pas à supposer qu'il suffit de répondre à un questionnaire pour changer une préférence préalable déterminée.

### 3.2. Framing

Kahneman et Tversky définissent l'effet de *framing* à travers une modélisation en deux étapes du processus de décision<sup>14</sup>. La première correspond à la construction d'une représentation de la situation de décision, la seconde au choix proprement dit. Comme ils le disent : « *les véritables objets d'évaluation ne sont ni les objets du monde réel ni les descriptions verbales de ces objets ; ce sont les représentations mentales qu'on s'en fait.* » Afin de tenir compte de ce point, nous modéliserons le processus de construction d'une représentation mentale de la même manière que le processus de choix, en le considérant comme l'analogie d'une mesure et en lui associant une observable. Un processus de *framing* sera donc défini comme un ensemble de représentations mentales alternatives associées aux vecteurs propres de l'observable correspondante. Donnons un exemple de ce type de modélisation appliqué à une expérience effectuée par Pruitt<sup>15</sup> et citée par Selten<sup>16</sup>.

#### 3.2.1. Le dilemme du prisonnier décomposé

Une première population se voit présenter le dilemme des prisonniers sous la forme du tableau des gains suivants :

14. Kahneman D. and A. Tversky, 2000. *op. cit.*, p. xiv.

15. Pruitt D.G., 1970, « Reward Structure of Cooperation : the Decomposed Prisoner's Dilemma Game », *Journal of Personality and Psychology* 7 : 21-27.

16. Selten R., 1998, « Features of Experimentally Observed Bounded Rationality », *European Economic Review* : 413-436.

|   |        |        |
|---|--------|--------|
|   | C      | D      |
| C | 3<br>3 | 0<br>4 |
| D | 4<br>0 | 1<br>1 |

Les gains du joueur 1 sont indiqués en ligne dans les coins en haut à gauche et ceux du joueur 2 sont indiqués en colonne dans les coins en bas à droite. Ainsi, si le premier joueur joue C et le second joue D, le premier ne touchera rien tandis que le second touchera 4. Si le premier joueur joue D ainsi que le second, ils toucheront 1 tous les deux.

Une deuxième population se voit présenter le même problème sous la forme décomposée :

|   |          |          |
|---|----------|----------|
|   | Pour moi | Pour lui |
| C | 0        | 3        |
| D | 1        | 0        |

Dans ce deuxième cas, le gain est la somme de ce que vous gardez pour vous et de ce que vous obtenez de l'autre joueur. Ainsi, si le premier joueur joue C et le deuxième D, le premier joueur ne garde rien pour lui et donne 3 à l'autre, tandis que le deuxième ne donne rien mais garde 1 pour lui. Les gains seront donc de 0 pour le premier joueur et de 4 pour le second.

Malgré une présentation différente, les deux jeux sont rigoureusement équivalents et, si les agents sont rationnels, on doit obtenir les mêmes résultats dans les deux populations. Cependant, Pruitt a observé que l'on obtient beaucoup plus de coopération dans la deuxième forme que dans la première. Selten propose une explication basée sur la rationalité limitée des agents qui ne seraient pas capables de se rendre compte de l'équivalence entre les deux jeux.

Nous proposons une explication basée sur le fait que l'état des agents est influencé par la présentation qui est faite et que, même si l'état initial (avant qu'on leur ait présenté le jeu) de tous les agents est identique, les agents qui jouent dans le cas 1 sont dans un état différent de ceux qui jouent dans le cas 2. Appelons

$A$  et  $B$  les observables associées respectivement à la présentation 1 et 2. Appelons  $G$  l'observable associée à la décision elle-même. Les vecteurs propres de  $G$  associés aux actions  $C$  et  $D$  seront notés  $|C\rangle$  et  $|D\rangle$ . Supposons que la présentation 1 induise un choix de représentations mentales<sup>17</sup> (associées à des vecteurs propres de  $A$ ) entre :

$|a_1\rangle$  = le jeu est perçu comme purement ludique

$|a_2\rangle$  = le jeu est perçu comme ayant un enjeu réel

de même, supposons que la présentation 2 induise le choix suivant :

$|b_1\rangle$  = le jeu est perçu comme un test de générosité

$|b_2\rangle$  = le jeu est perçu comme un test d'intelligence

L'état initial d'un agent peut être écrit sur l'une ou l'autre de ces bases :

$$|\psi\rangle = \alpha_1|a_1\rangle + \alpha_2|a_2\rangle = \beta_1|b_1\rangle + \beta_2|b_2\rangle = \lambda|C\rangle + \mu|D\rangle$$

Quelque soit son état initial, un agent, soumis à l'une ou l'autre des présentations, verra son état projeté sur l'un ou l'autre des états propres associés à cette représentation. Supposons que :

$$|a_i\rangle = \gamma_{1i}|C\rangle + \gamma_{2i}|D\rangle \quad \text{pour } i = 1, 2$$

$$|b_i\rangle = \delta_{1i}|C\rangle + \delta_{2i}|D\rangle \quad \text{pour } i = 1, 2$$

L'effet de *framing* s'exprime alors sous la forme  $p_{GA}(C) \neq p_{GB}(C)$ , ce qui signifie que la probabilité de choisir l'action  $C$  n'est pas la même selon qu'on a été confronté à la situation  $A$  ou à la situation  $B$ . Or en utilisant les résultats de la partie 2, on peut voir que :

$$p_{GA}(C) = p_G(C) - 2\alpha_1^* \gamma_{11}^* \alpha_2 \gamma_{12}$$

$$p_{GB}(C) = p_G(C) - 2\beta_1^* \delta_{11}^* \beta_2 \delta_{12}$$

---

17. La description des représentations mentales donnée ici est bien sûr arbitraire et ne prétend pas à l'exactitude psychologique. Elle n'est indiquée que pour illustrer notre propos. Le point que nous mettons en avant est surtout la possibilité de l'existence de représentations mentales différentes.

où  $p_G(C)$  est la probabilité de choisir  $C$  dans une hypothétique situation où aucun cadre de présentation n'aurait été utilisé et où l'état de l'agent serait resté l'état initial :

$$p_G(C) = |\lambda|^2$$

L'effet de *framing* sera donc visible dès lors que

$$\alpha_1^* \gamma_{11}^* \alpha_2 \gamma_{12} \neq \beta_1^* \delta_{11}^* \beta_2 \delta_{12}$$

Notre explication repose donc sur l'idée que, initialement dans le même état superposé de  $C$  et  $D$ , deux agents confrontés à deux représentations différentes du même jeu vont voir leur état projeté sur deux nouveaux états différents. Il en résultera alors une action différente lorsqu'ils auront à choisir entre  $C$  et  $D$ .

#### 4. CONCLUSION

Nous avons proposé dans cet article un modèle basé sur le formalisme quantique. Celui-ci permet de retrouver les résultats du formalisme bayésien classique lorsqu'ils sont corrects. Il permet de plus d'expliquer, de manière semble-t-il plus satisfaisante, certaines anomalies comportementales en évitant les hypothèses ad hoc que sont conduits à accepter les auteurs de modèles classiques. Notre hypothèse de base est que les préférences (ou les types) des agents peuvent être indéterminées (c'est-à-dire superposées au sens quantique du terme) avant que la décision ne soit prise. Dans un tel cas, des effets analogues aux interférences qui se produisent en physique, peuvent modifier le comportement classique des agents et expliquer les anomalies constatées. Nous avons proposé une explication du phénomène de *framing*. Elle n'est pas en contradiction avec l'interprétation classique du *framing* qui admet que changer de cadre de présentation influe sur l'état de l'agent. Cependant, le formalisme classique, en supposant que l'état de l'agent est parfaitement déterminé initialement, ne permet pas de modéliser le phénomène du changement. Il est en effet peu satisfaisant de supposer qu'un agent qui est initialement dans un état bien déterminé qui va le conduire à choisir l'action  $C$ , va conserver ce choix s'il est

confronté à la présentation 1 et va en changer s'il est confronté à la situation 2. L'avantage de l'hypothèse d'indétermination de l'état initial est qu'elle laisse ouverte la possibilité de choix différents au moment même où la décision doit être prise. Nous avons également proposé une expérience pour tester notre modèle. Elle est l'analogie de l'expérience des trous d'Young et permet de mettre clairement en évidence l'effet d'interférences probabilistes dans les choix effectués par les agents de deux populations. L'argument le plus fort en faveur de notre hypothèse concerne la robustesse des préférences. Expliquer, dans un modèle classique, les résultats différents (si tel est le cas) selon le fait qu'on ait ou pas répondu à une question est toujours possible. Il suffit de supposer que le simple fait d'avoir répondu a abouti à changer les préférences. Mais cette supposition n'est pas satisfaisante car on est en droit d'exiger une certaine robustesse des préférences. Notre modèle donne une raison plus acceptable de ces résultats. Il s'agit maintenant de mettre en place un véritable protocole expérimental permettant de mettre le modèle à l'épreuve. Une suite de ces travaux est en cours. Elle concerne l'extension à plusieurs décisions successives et à la notion de stratégie afin de pouvoir l'utiliser en théorie des jeux.

## Annexe 1 : Quelques éléments de mécanique quantique

### 4.1. ÉTATS ET OBSERVABLES

Nous supposons connu le concept d'espace de Hilbert et les notions mathématiques qui s'y rapportent. En mécanique quantique, l'état d'un système est représenté par un vecteur souvent noté  $|\psi\rangle$  (suivant une notation due à Dirac) dans un espace de Hilbert  $H$ . Selon le principe de superposition, toute

combinaison linéaire de vecteurs d'états possibles est elle-même un vecteur d'état possible. Un opérateur hermitien, qu'on appelle une observable, est associé à toute grandeur physique du système.

### ***Théorème 1***

Si un opérateur  $A$  est hermitien alors :

- les valeurs propres de  $A$  sont réelles
- des vecteurs propres correspondants à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux
- il existe une base de l'espace de Hilbert formée de vecteurs propres de  $A$

Soient  $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle$  des vecteurs propres normalisés de  $A$  formant une base de  $\mathcal{H}$ . Ils sont associés à des valeurs propres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (donc  $A|v_i\rangle = \alpha_i|v_i\rangle$ ). Les valeurs propres peuvent éventuellement être dégénérées, c'est-à-dire que pour un  $i$  et un  $j$ ,  $\alpha_i = \alpha_j$ . Ceci traduit le fait qu'il y a plusieurs vecteurs propres linéairement indépendants associés à la même valeur propre. Le nombre  $k_i$  de ces vecteurs définit le degré de dégénérescence de la valeur propre  $\alpha_i$  et donne le nombre de dimensions du sous-espace propre qui lui est associé. Dans ce cas, il existe plusieurs bases orthonormales de  $\mathcal{H}$  constituées de vecteurs propres de  $A$  puisqu'il est possible de remplacer les  $k_i$  vecteurs propres associés à la valeur propre dégénérée  $\alpha_i$  par  $k_i$  combinaisons linéaires indépendantes quelconques de ces mêmes vecteurs. Quand aucune valeur propre n'est dégénérée, il existe une unique base orthonormée de vecteurs propres. Dans ce cas (voir plus bas),  $A$  est à elle seule un ensemble complet d'observables qui commutent (qu'on appelle un ECOC).

### ***Théorème 2***

Si  $A$  et  $B$  sont deux observables qui commutent alors il existe une base de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  formée de vecteurs propres communs à  $A$  et  $B$ .

Soit  $A$  une observable avec au moins une valeur propre dégénérée. Il n'y a pas unicité de la base de  $\mathcal{H}$  formée de vecteurs propres de  $A$ . Soit  $B$  une observable commutant avec  $A$ . Il existe une base de  $\mathcal{H}$  formée de vecteurs propres communs. Si cette base est unique alors par définition  $\{A, B\}$  est appelé un ensemble complet d'observables qui commutent (ECOC). Plus généralement, un ensemble d'observables  $\{A, B, \dots\}$  est appelé «ensemble complet d'observables qui commutent» s'il existe une unique base orthonormée de  $\mathcal{H}$  formée de vecteurs propres communs à toutes les observables de l'ensemble.

## 4.2. LA MESURE

À chaque propriété physique du système  $S$  est associée une observable  $A$ . Soient  $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_n\rangle$  les vecteurs propres normalisés de  $A$ , associés aux valeurs propres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  et formant une base de  $\mathcal{H}$ . Supposons que  $S$  soit dans l'état normalisé  $|\psi\rangle$ . Une mesure sur  $S$  de la propriété associée à  $A$  obéit aux règles suivantes (dites règles de réduction du paquet d'ondes ou principe de réduction) :

- le résultat d'une mesure de la propriété physique associée à  $A$  sur le système  $S$  ne peut être qu'une valeur propre de  $A$
- la probabilité d'obtenir la valeur propre non dégénérée  $\alpha_i$  est  $P(\alpha_i) = |\langle v_i | \psi \rangle|^2$
- si la valeur propre est dégénérée alors la probabilité est la somme sur les vecteurs propres qui lui sont associés  $P(\alpha_i) = \sum_j |\langle v'_j | \psi \rangle|^2$
- si la mesure de  $A$  sur le système  $S$  dans l'état  $|\psi\rangle$  a donné le résultat  $\alpha_i$  alors, immédiatement après la mesure, le nouvel état du système est la projection normalisée de  $|\psi\rangle$  sur le sous-espace propre associé à  $\alpha_i$ .

Si deux observables  $A$  et  $B$  commutent alors il est possible de les mesurer simultanément : le résultat de la mesure de  $A$  n'est pas affecté par la mesure de  $B$  (et vice versa). Ceci signifie qu'on peut les mesurer l'une après l'autre et que le résultat d'une pre-

mière mesure de  $A$  sera retrouvé à l'identique lors d'une deuxième mesure de  $A$ , même si on a procédé à une mesure de  $B$  entre les deux. Il est donc possible de considérer que les deux observables ont des valeurs définies simultanément. Ceci n'est pas vrai si  $A$  et  $B$  ne commutent pas.

### 4.3. INTERFÉRENCES

L'exemple typique d'interférences en mécanique quantique est donné par la célèbre expérience des deux fentes<sup>18</sup> aussi appelée expérience des trous d'Young. Un faisceau lumineux traverse un diaphragme avec deux fentes parallèles et tombe sur une plaque photographique. On peut y voir un motif typique d'interférences avec une alternance de raies parallèles sombres et claires. Si l'une des fentes est obturée, on verra une raie lumineuse en face de la fente restée ouverte. Ceci est parfaitement compréhensible si on considère que la lumière est constituée d'ondes comme on le suppose en électromagnétisme classique. L'explication est basée sur le fait que lorsque les deux fentes sont ouvertes, le faisceau lumineux se divise en deux parties suivant chacune l'un des deux chemins possibles à travers l'une ou l'autre des fentes et que, lorsqu'il se reconstitue sur la plaque, les deux parties du faisceau se recombinent en interférant constructivement à certains endroits (donnant une raie claire) et destructivement à d'autres endroits (donnant une raie sombre) selon la différence de longueur des trajets parcourus. Mais, si la lumière est constituée de photons assimilés à des particules, le phénomène devient moins aisément explicable. Il est en effet possible de réduire l'intensité du faisceau lumineux de manière à n'avoir qu'un seul photon à la fois dans le faisceau. Dans ce cas, si on observe les fentes pour détecter à travers laquelle passe chaque photon, on constatera que chacun d'entre eux passe par une fente et une seule. Aucun photon ne se coupe en deux pour passer à travers les deux fentes à la fois. On vérifie donc que les photons se comportent bien comme des

---

18. Pour une présentation lumineuse de cet exemple, voir Feynman R., 1980. *La Nature de la Physique*, Paris, Seuil.

particules. Mais, avec ce protocole expérimental (consistant à détecter par quelle fente passe chaque électron) on n'observe plus aucune interférence. Si on refait l'expérience en n'observant plus cette fois par quelle fente passe les photons, alors on retrouve les interférences. En résumé, si on observe par quelle fente passent les photons, on constate qu'ils passent chacun par une fente unique mais on n'a plus d'interférences et si on ne regarde plus leur chemin, on retrouve les interférences. Le simple fait d'observer leur chemin détruit les interférences. L'explication donnée par la mécanique quantique est que, lorsqu'on n'observe pas leur trajet, l'état de chaque photon qui arrive sur la plaque photographique est la superposition des états « passé par la fente 1 » et « passé par la fente 2 ». La mesure de position qui est effectuée alors à l'arrivée se fait dans cet état superposé qui autorise l'apparition d'interférences. Lorsqu'on observe par quelle fente passent les photons, on fait une mesure qui projette l'état de chaque photon dans l'état « passé par la fente 1 » ou dans l'état « passé par la fente 2 ». La superposition est détruite et les interférences ne sont plus possibles.

## **Annexe 2 :**

### **Le dilemme du prisonnier**

Imaginons que deux prisonniers, Paul et Jacques, soient enfermés dans des cellules différentes sans moyen de communiquer. Ils ont été arrêtés pour un vol commun. Le gardien vient expliquer à chacun d'eux que, s'il avoue avoir commis le vol avec l'autre (stratégie de dénonciation de l'autre prisonnier) et que l'autre nie leur participation au vol (stratégie de coopération entre les deux prisonniers), il en sera tenu compte et qu'il sera libéré pendant que l'autre écoperà de 4 ans de prison, mais que, si l'autre avoue aussi, alors ils écoperont tous les deux de 3 ans. En revanche, s'il nie et que l'autre avoue, c'est lui qui écoperà de 4 ans de prison tandis que s'ils nient tous les deux, faute de

preuve, ils n'auront chacun qu'un an de prison. Une telle formulation est classique en théorie des jeux et peut se formuler de manière condensée dans le tableau de la figure 3.6 :

|                 | Paul dénonce | Paul coopère |
|-----------------|--------------|--------------|
| Jacques dénonce | 3,3          | 0,4          |
| Jacques coopère | 4,0          | 1,1          |

**Figure 3.6 :** Table des gains dans le dilemme du prisonnier.

Le tableau se lit en regardant le gain respectif de chaque joueur dans la case correspondant au coup de chaque joueur. Si Jacques coopère et Paul dénonce, le gain est 4,0 signifiant que Jacques aura 4 ans de prison et Paul sera libéré. La difficulté du problème vient de ce que la stratégie optimale apparente est peu satisfaisante : il semble que quel que soit le comportement de Jacques, Paul a intérêt à dénoncer. En effet, si Jacques dénonce aussi, Paul aura 3 ans de prison contre 4 s'il avait coopéré et si Jacques coopère, Paul sera libéré au lieu d'avoir 1 an de prison s'il avait coopéré. Pourtant, comme chacun sait que l'autre peut faire le même raisonnement, ils seront donc conduits à dénoncer tous les deux et à écoper de 3 ans de prison chacun alors que s'ils avaient coopéré tous les deux, ils n'auraient eu qu'un an. Le problème se généralise en dilemme itéré dans lequel plusieurs parties successives sont jouées et où la notion de stratégie et d'anticipation de la réaction de l'autre joueur devient importante. On peut s'attendre à ce qu'un joueur de tempérament altruiste ait plutôt tendance à coopérer alors qu'un joueur égoïste va plutôt vouloir dénoncer.

## BIBLIOGRAPHIE

- Basdevant Jean-Louis, 2006, *12 leçons de mécanique quantique*, Paris, Vuibert.
- Cohen-Tannoudji C., Diu B., et Laloe F., 1973, *Mécanique Quantique*, Paris, Herman.
- Feynman R., 1980, *La Nature de la Physique*, Paris, Seuil.

- Kahneman D. et Tversky A., 2000, *Choice, Values and Frames*, Cambridge, Cambridge University Press.
- Lambert Ariane, Zamir Shmuel et Zwirn Hervé, 2009, *Type Indeterminacy: A Model of the KT(Kahneman-Tversky)-Man.*, *Journal of Mathematical Psychology*, in press.
- Mackey G.W., 1963, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, New York, Benjamin.
- Pruitt D.G., 1970, « Reward Structure of Cooperation : the Decomposed Prisoner's Dilemma Game », *Journal of Personality and Psychology*, 7: 21-27.
- Selten R., 1998, « Features of Experimentally Observed Bounded Rationality », *European Economic Review*, 413-436.
- Tversky A. et Simonson I., 1993, « Context-Dependent Preferences », *Management Sciences*, 39: 85-117.

Hervé Zwirn

CMLA (UMR 8536 CNRS | ENS Cachan)  
& IHPST (UMR 8590 CNRS | Paris 1 | ENS Ulm)  
[herve.zwirn@m4x.org](mailto:herve.zwirn@m4x.org)



# L'utilité espérée projective

## 1. INTRODUCTION

John von Neumann (1903-1957) est généralement considéré comme un père fondateur dans de nombreux domaines, parmi lesquels la théorie des jeux, la théorie de la décision, la mécanique quantique et l'informatique. Deux de ses contributions sont particulièrement importantes en ce qui nous concerne. En 1932, von Neumann jeta les premières bases rigoureuses de la mécanique quantique, fondées sur un calcul de projections dans des espaces d'Hilbert. En 1944, en collaboration avec Oskar Morgenstern, il donna à l'hypothèse de l'utilité espérée (Bernoulli 1738) ses premières bases axiomatiques. Dans les deux cas, les cadres d'analyse qu'il fut l'un des premiers à exploiter servent encore de fondement au domaine considéré. En particulier, l'hypothèse de l'utilité espérée est encore *de facto* au fondement de champs tels que la finance et la théorie des jeux.

L'axiomatisation de l'utilité espérée par von Neumann et Morgenstern fut immédiatement saluée pour sa simplicité et son attrait intuitif. Pourtant, au fil du temps, plusieurs paradoxes et violations empiriques (Allais 1953, Ellsberg 1961, Rabin et Thaler 2001) sont venus jeter le doute sur la validité de l'hypothèse comme fondement de la théorie des choix rationnels dans le risque et l'incertitude subjective. En économie et dans les sciences sociales, les défauts de l'hypothèse de l'utilité espérée sont en général bien connus, mais souvent tacitement acceptés en regard de la grande maniabilité et de la puissance du cadre mathématique correspondant. De fait, l'hypothèse postule que les préférences peuvent être représentées au moyen d'un fonctionnel d'utilité qui est linéaire en probabilités, et la linéarité rend les représentations de l'utilité espérée particulièrement faciles à manier dans les modèles et les applications.

Les paradoxes expérimentaux qui ont justifié l'introduction de la mécanique quantique en physique entretiennent des rapports intéressants avec quelques uns des paradoxes en théorie de la décision qui sont venus remettre en cause le statut de l'utilité

espérée dans les sciences sociales. En physique, la mécanique quantique fut introduite comme un cadre mathématique à la fois maniable et empiriquement exact quand de telles violations sont présentes. En économie et dans les sciences sociales, l'importance de prendre en compte les violations de l'utilité espérée a été reconnue depuis longtemps, mais jusqu'ici aucune des nombreuses alternatives n'a réussi à s'imposer comme dominante, parfois à cause de leur manque de maniabilité mathématique, ou à cause du caractère *ad hoc* de certaines propositions axiomatiques. À partir de ces considérations, nous aimerions introduire un cadre d'analyse en théorie de la décision qui intègre ces paradoxes dominants tout en restant relativement simple et maniable. Comme nous le verrons, ce résultat peut s'obtenir en réduisant l'hypothèse d'utilité espérée à son équivalent projectif, d'une manière analogue à la généralisation par la mécanique quantique de la théorie classique des probabilités.

L'article est organisé comme suit : la prochaine section passe brièvement en revue le cadre de von Neumann-Morgenstern. Les sections 3 et 4 présentent respectivement les paradoxes d'Allais et d'Ellsberg. La section 5 introduit un cadre d'analyse mathématique pour l'utilité espérée projetée, ainsi que notre résultat principal. La section 6 contient une brève discussion. Les sections 7 et 8 montrent respectivement comment les paradoxes d'Allais et d'Ellsberg peuvent s'intégrer dans le nouveau cadre. La section 9 discute des applications et extensions, puis conclut.

## 2. L'UTILITÉ ESPÉRÉE DE VON NEUMANN-MORGENSTERN

Soit  $S$  un ensemble fini de conséquences, et  $\Delta$  l'ensemble des fonctions de probabilités définies sur  $S$ , choisies pour représenter les perspectives risquées (loteries). Ensuite, soit  $\succsim$  une relation binaire complète et transitive définie sur  $\Delta \times \Delta$ , représentant l'ordre de préférence d'un décideur sur les loteries. Conformément à l'usage, l'indifférence entre  $p$  et  $q$  ( $p, q \in \Delta$ ) est définie comme  $\{p \succsim q \text{ et } q \succsim p\}$  et notée  $p \sim q$ , tandis que la préférence stricte de  $p$  sur  $q$  est définie comme

$\{p \succsim q \text{ et non } q \succsim p\}$ , et notée  $p \succ q$ . L'ordre de préférences est supposé satisfaire les deux conditions suivantes :

**Axiome 1 :** Quels que soient  $p, q, r \in \Delta$  avec  $p \succ q \succ r$ , il existe  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  tels que  $\alpha p + (1 - \alpha)r \succ q \succ \beta p + (1 - \beta)r$ .

**Axiome 2 :** Quels que soient  $p, q, r \in \Delta$ ,  $p \succsim q$  si et seulement si  $\alpha p + (1 - \alpha)r \succsim \alpha q + (1 - \alpha)r$  pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

On dit qu'un fonctionnel  $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  représente  $\succsim$  si quels que soient  $p, q \in \Delta$ ,  $p \succsim q$  si et seulement si  $u(p) \geq u(q)$ .

**Théorème 3 :** Les axiomes 1 et 2 pris ensemble sont équivalents à l'existence d'un fonctionnel  $u : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  qui représente  $\succsim$  et tel que, pour tout  $p \in \Delta$ ,

$$u(p) = \sum_{s \in S} u(s)p(s).$$

### 3. LE « PARADOXE DE LA DOUBLE FENTE » DE LA THÉORIE DE LA DÉCISION

Le paradoxe suivant est dû à Allais (1953). Tout d'abord, veuillez choisir entre les loteries suivantes :

A : une chance de gagner 4 000 euros avec probabilité 0,2 (valeur espérée 800 euros).

B : une chance de gagner 3 000 euros avec probabilité 0,25 (valeur espérée 750 euros).

Ensuite, veuillez choisir entre les loteries suivantes :

C : une chance de gagner 4 000 euros avec probabilité 0,8 (valeur espérée 3 200 euros).

D : une chance de gagner 3 000 euros avec certitude.

Si vous avez choisi A plutôt que B, et D plutôt que C, alors vous êtes dans la classe modale des personnes interrogées. Le paradoxe tient à l'observation que A et C sont des cas particuliers d'une loterie E à deux périodes, qui en première période donne 0 euro avec probabilité  $(1 - \alpha)$  et conduit avec probabilité  $\alpha$  à la deuxième période, où l'on reçoit 4 000 euros avec probabilité 0,8 et rien sinon. En particulier, si on fixe  $\alpha$  à 1, alors E se réduit à C, et si on le fixe à 0,25, E se réduit à A. De même, B et D sont des cas particuliers d'une loterie à deux périodes F, qui là encore donne 0 euros en première période avec probabilité

$(1 - \alpha)$ , et conduit avec une probabilité  $\alpha$  à la deuxième période où on gagne 3 000 avec probabilité 1. À nouveau, si  $\alpha = 1$ , alors F se réduit à D, et si  $\alpha = 0.25$ , F se réduit à B. Il est alors facile de voir que le résultat  $\{A \succ B, D \succ C\}$  viole l'axiome d'indépendance, puisque E peut être considéré comme une loterie  $\alpha p + (1 - \alpha)r$  et F comme une loterie  $\alpha q + (1 - \alpha)r$ , où  $p$  et  $q$  représentent respectivement les loteries C et D, et  $r$  représente la loterie qui donne zéro euros avec certitude. Pourquoi la valeur de  $\alpha$  devrait-elle jouer un rôle ? C'est pourtant ce que l'on observe empiriquement.

Le paradoxe d'Allais a certaines ressemblances avec le paradoxe bien connu de la double fente en physique. Imaginons qu'on coupe deux fentes parallèles dans une feuille de carton, qu'on fasse passer de la lumière à travers ces fentes, et qu'on observe le motif obtenu quand les particules passant à travers les deux fentes se répartissent sur un mur derrière la feuille de carton. On observe expérimentalement que quand les deux fentes sont ouvertes, le motif d'ensemble n'est pas la somme des deux motifs produits quand une des fentes est ouverte et l'autre fermée. L'effet ne disparaît pas même si les particules lumineuses sont émises une par une, ce qui est paradoxal : quand il se trouve qu'une particule individuelle passe par la fente de gauche, en quoi la probabilité qu'elle avait de passer plutôt par la fente de droite devrait-elle l'influencer au moment de déterminer son point d'impact final ? En un sens, chaque particule dans l'expérience de la double fente se comporte comme un décideur qui viole l'axiome d'indépendance dans l'expérience d'Allais.

#### 4. LE PARADOXE D'ELLSBERG

Une autre violation troublante de l'hypothèse d'utilité espérée a été relevée par Ellsberg (1961). Supposez qu'une urne contienne 300 boules qui peuvent être de trois couleurs au choix : rouge (R), vert (V) et bleu (B). Vous savez que l'urne contient exactement 100 boules rouges, mais vous n'avez aucune information sur la proportion de vertes et de bleues.

Vous gagnez si vous devinez quelle couleur sera tirée. Préférez-vous parier sur rouge (R) ou sur vert (V) ? Un grand

nombre de personnes interrogées choisissent  $R$ , pour la raison que la probabilité de tirer une boule rouge est connue ( $1/3$ ), alors que la seule information sur la probabilité de tirer une boule verte est qu'elle est comprise entre  $0$  et  $2/3$ . Maintenant supposez que vous gagnez si vous devinez quelle couleur ne sera *pas* tirée. Préférez-vous parier que rouge ne sortira pas ( $\bar{R}$ ), ou que vert ne sortira pas ( $\bar{V}$ )? À nouveau, un grand nombre de personnes interrogées préfèrent parier sur  $\bar{R}$ , dont la probabilité est connue ( $2/3$ ) tandis qu'on sait seulement de la probabilité de  $\bar{V}$  qu'elle est comprise entre  $1$  et  $1/3$ .

Le résultat  $\{R \succ V, \bar{R} \succ \bar{V}\}$  est incompatible avec l'utilité espérée de von Neumann-Morgenstern, qui ne traite que de probabilités connues, et il est aussi incompatible avec la formulation de l'utilité espérée en termes de probabilités subjectives par Savage (1954), puisqu'il viole l'axiome de la Chose Sûre dans ce cadre. Par conséquent, ce paradoxe suggère que l'incertitude subjective et le risque doivent être traitées comme des notions distinctes.

## 5. L'UTILITÉ ESPÉRÉE PROJÉTÉE

Soit  $S_+$  l'orthant positif de la sphère unitaire de  $\mathbb{R}^n$ , où  $n$  est le cardinal de l'ensemble des conséquences pertinentes  $S := \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ . Alors les loteries de von Neumann-Morgenstern, considérées comme des éléments du simplexe unitaire, sont en bijection avec les éléments de  $S_+$ , qui peuvent donc s'interpréter comme des perspectives risquées, dont les probabilités pertinentes sont pleinement connues. Notons que, tandis que les projections des éléments du simplexe unitaire (donc des vecteurs unitaires de  $L^1$ ) sur les vecteurs de la base peuvent naturellement être associées aux probabilités, si nous choisissons de modéliser les loteries de von Neumann-Morgenstern comme des éléments de la sphère unitaire (et donc comme des vecteurs unitaires dans  $L^2$ ), les probabilités sont naturellement associées avec les projections *au carré*. L'avantage d'une telle décision est que  $L^2$  est le seul espace  $L^p$  qui soit également un espace de Hilbert, et que les espaces de Hilbert ont une structure de projections particulièrement maniable que notre représentation

mettra à profit. Nous appelons de telles perspectives risquées, quand les probabilités pertinentes sont complètement connues, des loteries *pures*, et nous réservons l'expression de loteries *mixtes* pour les combinaisons convexes (mixtures) dans  $\mathbb{R}^n$ , que nous interprétons comme des situations d'incertitude subjective sur la loterie pure qui intervient effectivement. Soit  $M$  la fermeture convexe de  $S_+$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On observe que les loteries pures ne peuvent pas être obtenues comme des mixtures non triviales, et c'est pour cette raison que nous les appelons pures.

Ensuite, soit  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  le produit scalaire habituel dans  $\mathbb{R}^n$ , et soit  $p_{s_i}(x)$  la probabilité de l'état  $s_i$  dans la loterie  $x$ , telle que perçue par le décideur.

**Axiome 4:** (Règle de Born) Il existe une base orthonormale  $(z_1, \dots, z_n)$  telle que, pour tout  $x \in S_+$ , et pour tout  $s_i \in S$ ,

$$p_{s_i}(x) = \langle x | z_i \rangle^2$$

L'axiome 4 exige qu'il existe une interprétation des éléments de  $S_+$  en termes des dimensions pertinentes du risque, telles que perçues par le décideur. Dans le traitement de von Neumann-Morgenstern, on suppose implicitement que l'axiome 4 est valide en ce qui concerne la base naturelle de  $\mathbb{R}^n$ . À l'inverse, la *base préférée* telle que postulée dans l'axiome 4 peut varier d'un décideur à l'autre, capturant l'idée que les dimensions pertinentes du risque peuvent être perçues différemment d'un sujet à l'autre, peut-être à cause d'effets de portefeuille, tandis que la base naturelle peut être utilisée pour représenter les dimensions pertinentes du risque, telles que perçues par le modélisateur ou un observateur extérieur.

Dans notre cadre, l'orthogonalité capture l'idée que deux événements ou conséquences sont mutuellement exclusifs (pour qu'un des événements ait la probabilité un, l'autre doit avoir la probabilité zéro). Parmi toutes les façons possibles de partitionner l'incertitude pertinente en un ensemble d'événements (ou conséquences) mutuellement exclusifs, la base préférée capture celle qui conduit à un ensemble de loteries qui sont pertinentes par rapport aux paiements, à partir desquelles les préférences sur toutes les autres loteries peuvent être déterminées de façon linéaire. En particulier, les éléments de la base doivent couvrir tout le domaine des préférences. Par exemple, dans le cas où un

décideur est indifférent entre deux conséquences, mais préfère strictement recevoir les deux en même temps avec la même fréquence, les préférences sur les deux conséquences ne couvrent pas tout le domaine correspondant ; par conséquent, ce type de préférence ne peut pas être capturé dans la base naturelle, et donc dans l'utilité espérée de von Neumann-Morgenstern. L'axiome 4 postule que chaque loterie est évaluée par le décideur seulement sur la base de l'incertitude qu'elle entraîne sur des dimensions correctement choisies pour être pertinentes par rapport aux paiements. Une fois qu'une base orthonormale est donnée, chaque loterie mixte  $x$  correspond de façon unique à une fonction  $p(x) : S \rightarrow [0, 1]$  telle que  $p_{s_i}(x) = \langle x | z_i \rangle^2$  pour tout  $s_i \in S$ . Si  $x$  est une loterie pure, alors  $\sum_{s \in S} p_s(x) = 1$  et  $p(x)$  peut être considéré comme une fonction de probabilité. Pour une loterie mixte quelconque  $x \in M$ ,  $1/\|x\|^2$  peut être considéré comme une mesure de l'incertitude subjective, et

$$q_{s_i}(x) := \frac{1}{\|x\|^2} \langle x | z_i \rangle^2$$

comme une probabilité subjective. Nous interprétons  $p(x)$  comme le *degré de croyance* attribué à chaque issue par la loterie  $x$ . Soit  $B$  l'ensemble de tous les  $p(x)$  pour  $x \in M$ , et soit  $\succsim$  un ordre de préférences complet et transitif, défini sur  $B \times B$ . Nous postulons les deux axiomes suivants, qui font pendant à ceux du traitement de von Neumann-Morgenstern.

**Axiome 5** (archimédien) Quels que soient  $x, y, z \in M$  avec  $p(x) \succ p(y) \succ p(z)$ , il existe  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  tels que  $\alpha p(x) + (1 - \alpha)p(z) \succ p(y) \succ \beta p(x) + (1 - \beta)p(z)$ .

**Axiome 6** (indépendance) Quels que soient  $x, y, z \in M$ ,  $p(x) \succsim p(y)$  si et seulement si  $\alpha p(x) + (1 - \alpha)p(z) \succsim \alpha p(y) + (1 - \alpha)p(z)$  pour tout  $\alpha \in [0, 1]$ .

Notons que les deux axiomes imposent des conditions seulement sur les croyances, et pas sur les loteries sous-jacentes. En particulier, remarquons qu'une combinaison convexe  $\alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y)$ , où  $x$  et  $y$  sont des loteries pures, correspond encore à une loterie pure, puisque la combinaison convexe de deux fonctions de probabilité est encore une fonction de probabilité. Par conséquent, le type de mélanges opéré dans les Axiomes 5 et 6 peut être considéré comme objectif tandis que les

mélanges subjectifs sont rendus par des combinaisons convexes des loteries sous-jacentes, telles que  $\alpha x + (1 - \alpha)y$ , qui n'est pas une loterie pure dans le cas général, même si  $x$  et  $y$  sont tous deux des loteries pures.

**Théorème 7** Les axiomes 4-6 pris conjointement sont équivalents à l'existence d'une matrice symétrique  $U$  telle que  $u(x) := x'Ux$  pour tout  $x \in M$  représente  $\succsim$ .

**Preuve.** Supposons que l'Axiome 4 soit valide pour une base orthonormale donnée  $(z_1, \dots, z_n)$ . D'après le résultat de von Neumann-Morgenstern (qui s'applique à tout ensemble de mélanges convexes tel que  $B$ ), les Axiomes 5 et 6 pris conjointement sont équivalents à l'existence d'un fonctionnel  $u$  qui représente l'ordre et qui est linéaire en  $p$ , c'est-à-dire :

$$u(x) = \sum_{i=1}^n u(s_i)p_{s_i}(x) = \sum_{i=1}^n u(s_i)\langle x|z_i\rangle^2$$

où la deuxième égalité vient de la définition de  $p$  comme le carré du produit scalaire associé à la base préférée. Ces égalités peuvent s'écrire de manière équivalente en termes matriciels, soit

$$u(x) = x'P'DPx = x'Ux$$

où  $D$  est la matrice diagonale qui contient les paiements sur sa diagonale principale,  $P$  est la matrice de projection associée à  $(z_1, \dots, z_n)$  et  $U := P'DP$  est symétrique. Inversement, d'après le théorème de la Décomposition Spectrale, pour toute matrice symétrique  $U$ , il existe une matrice diagonale  $D$  et une matrice de projection  $P$  telle que

$$x'Ux = x'P'DPx$$

pour tout  $x \in M$ . Mais il s'agit précisément de l'utilité espérée exprimée en termes de la base orthonormale définie par  $P$ . Par conséquent, les trois axiomes pris conjointement sont équivalents à l'existence d'une matrice symétrique  $U$  telle que  $u(x) := x'Ux$  représente l'ordre de préférences.

## 6. PROPRIÉTÉS DE LA REPRÉSENTATION

La représentation introduite dans la section précédente généralise l'utilité espérée de von Neumann-Morgenstern dans trois directions. Tout d'abord, l'incertitude subjective (pour les états mixtes) et le risque (pour les états purs) sont traités comme des notions distinctes. Ensuite, au sein de cette classe de préférences, les paradoxes d'Allais et d'Ellsberg sont pris en compte. Enfin, la construction s'étend facilement à la boule unitaire complexe, à la condition que  $\langle x|y \rangle^2$  soit remplacé par  $|\langle x|y \rangle|^2$  dans la définition de  $p$ , auquel cas le théorème 7 est valable pour une matrice de paiements  $U$  hermitienne (au lieu de symétrique), et le résultat fournit aussi des fondations axiomatiques pour les décisions impliquant l'incertitude quantique.

Soit  $e_i, e_j$  les loteries dégénérées assignant respectivement la probabilité 1 aux conséquences  $s_i$  et  $s_j$ , et soit  $e_{ij}$  la loterie assignant la probabilité 1/2 à chacun des deux états. Notons que pour deux  $s_i$  et  $s_j$  distincts,

$$U_{ij} = u(e_{ij}) - \left( \frac{1}{2}u(e_i) + \frac{1}{2}u(e_j) \right)$$

Il s'ensuit que dans la matrice des paiements, le terme  $U_{ij}$ , non situé sur la diagonale, peut être interprété comme la décôte ou la prime attribuée à une combinaison équiprobable des deux conséquences par rapport au niveau de référence de l'utilité espérée, et donc comme la mesure de l'aversion pour le risque pour la dimension particulière du risque qui implique les conséquences  $s_i$  et  $s_j$ .

Observons que le fonctionnel dans le Théorème 7 est quadratique en  $x$ , mais linéaire en  $p$ . Si  $U$  est diagonale, alors ses valeurs propres coïncident avec les termes de la diagonale. Dans l'utilité espérée de von Neumann-Morgenstern, ces valeurs propres contiennent toute l'information pertinente sur les attitudes envers le risque du décideur. Dans notre cadre, les attitudes envers le risque sont représentées conjointement par la matrice diagonale  $D$ , qui contient les valeurs propres de  $U$  sur sa diagonale principale, et par une matrice de projection  $P$ . De plus, dans notre cadre, les attitudes envers le risque sont capturées par la concavité ou la convexité (en  $x$ ) de la forme quadratique  $x'Ux$ , et

donc en définitive par la condition que  $U$  soit définie et par le signe de ses valeurs propres. La convexité correspond au cas où toutes les valeurs propres sont positives, et rend compte de l'idée que toutes choses égales par ailleurs, le risque est préféré à l'incertitude, tandis que la concavité correspond au cas où toutes les valeurs propres sont négatives et rend compte de l'idée inverse.

## 7. EXEMPLE : L'INCERTITUDE OBJECTIVE

La figure 1 ci-dessous présente plusieurs exemples de cartes d'indifférence sur des loteries pures qui peuvent être obtenues au sein de notre classe de préférences, pour différents choix de  $U$ .

La première situation (des lignes droites parallèles) est caractéristique de l'utilité espérée de von Neumann-Morgenstern. Dans notre classe de représentations, elle correspond au cas particulier d'une matrice de paiements  $U$  diagonale. Toutes les autres situations sont impossibles dans le cadre de l'utilité espérée de von Neumann-Morgenstern.

Notre représentation est suffisamment générale pour prendre en compte le paradoxe d'Allais (section 3). Dans le contexte de l'exemple présenté dans la section 3, soit  $\{s_1, s_2, s_3\}$  les états où l'on gagne respectivement 4 000, 3 000 et 0 euros. Pour prendre en compte le paradoxe d'Allais, supposons une légère aversion pour le risque de n'obtenir aucun gain ( $s_3$ ) :

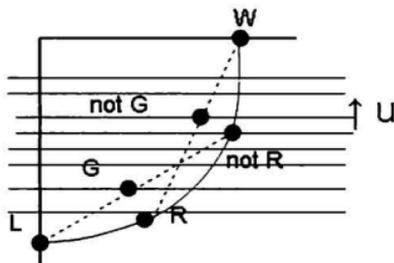
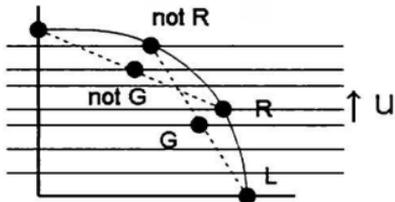
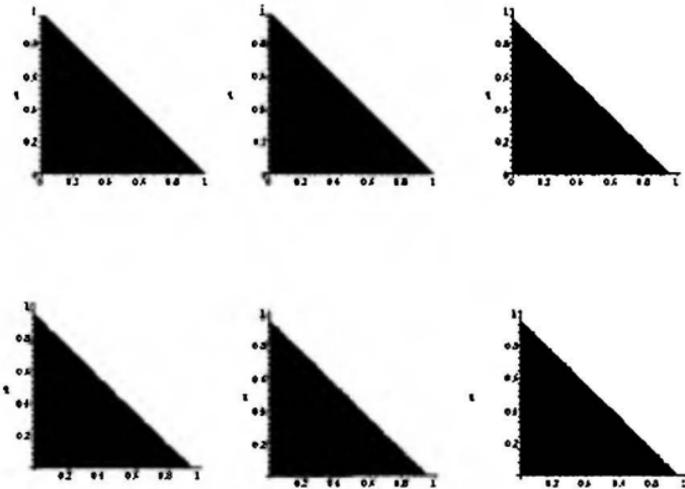
$$U = \begin{array}{cccc} & s_1 & s_2 & s_3 \\ \begin{array}{c} 13 \\ 0 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ 10 \\ -1 \end{array} & \begin{array}{c} -1 \\ -1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} \end{array}$$

Soit les quatre loteries  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  définies respectivement comme les vecteurs unitaires suivants de  $S_+$  :

$$a = \begin{pmatrix} \sqrt{0,2} \\ 0 \\ \sqrt{0,8} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{0,25} \\ \sqrt{0,75} \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} \sqrt{0,8} \\ 0 \\ \sqrt{0,2} \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alors la loterie  $A$  est préférée à  $B$  et  $D$  à  $C$ , puisque

$$\begin{aligned} u(a) &= a'Ua = 1,8, \\ u(b) &= b'Ub = 1,634 \\ u(c) &= c'Uc = 9,6 \\ u(d) &= d'Ud = 10 \end{aligned}$$



## 8. EXEMPLE : L'INCERTITUDE SUBJECTIVE

Dans l'énigme d'Ellsberg, supposons que toutes les boules non-rouges sont vertes ( $R = 100, V = 200, B = 0$ ) ou qu'elles sont toutes bleues ( $R = 100, V = 0, B = 200$ ) avec la même probabilité subjective. De plus, supposons qu'il n'y ait que deux conséquences qui soient pertinentes pour les paiements, Gagner et Perdre. Dans ce cas, la spécification suivante de la matrice des paiements permet de prendre en compte le paradoxe :

|       | <i>Gagner</i> | <i>Perdre</i> |   |
|-------|---------------|---------------|---|
| $U =$ | <i>Gagner</i> | 1             | 0 |
|       | <i>Perdre</i> | 0             | 0 |

En fait, soit  $r = \left( \frac{\sqrt{1/3}}{\sqrt{2/3}} \right)$ ,  $\bar{r} = \left( \frac{\sqrt{2/3}}{\sqrt{1/3}} \right)$  les loteries repré-

sentant respectivement  $R$  et  $\bar{R}$ , et soit  $g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $p = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  les loteries correspondant respectivement à un gain sûr et à une perte sûre. Enfin, soit  $v := \alpha \bar{r} + (1 - \alpha)p$  et  $\bar{v} := \beta g + (1 - \beta)r$  les loteries représentant respectivement  $V$  et  $\bar{V}$ , avec  $\alpha$  et  $\beta$  choisis pour être les solutions uniques respectivement de  $v_1^2 = 1/3$ , et de  $\bar{v}_1^2 = 2/3$  (puisque la probabilité subjective de gagner est de  $1/3$  dans  $V$ , et de  $2/3$  dans  $\bar{V}$ ). On a alors  $\alpha = \sqrt{1/6}$ ,  $\beta = 1/(3 - \sqrt{3})$ , et

$$\begin{aligned} u(r) &= r'Ur = 1/3, \\ u(\bar{r}) &= \bar{r}'U\bar{r} = 2/3, \\ u(v) &= v'Uv = 1/9, \\ u(\bar{v}) &= \bar{v}'U\bar{v} = 0,4 \end{aligned}$$

Donc le paradoxe est bien pris en compte.

À l'inverse, si la matrice des paiements est donnée par

|       | <i>Gagner</i> | <i>Perdre</i> |    |
|-------|---------------|---------------|----|
| $U =$ | <i>Gagner</i> | 0             | 0  |
|       | <i>Perdre</i> | 0             | -1 |

le phénomène inverse se produit, puisque maintenant, toutes choses égales par ailleurs, l'incertitude subjective est préférée au risque.

## 9. LES DÉCISIONS MULTI-AGENTS ET L'ÉQUILIBRE

Au sein de la classe de préférences caractérisée par le théorème 7, est-il encore vrai que tout jeu fini a un équilibre de Nash ? Si la matrice des paiements  $U$  est diagonale et non-négative, nous sommes dans le cas classique, donc nous savons que tout jeu fini a un équilibre, qui de plus ne fait intervenir que du risque (objectif) – dans les termes que nous avons définis, ce type d'équilibre doit être appelé « pur », car il ne fait pas intervenir d'incertitude subjective. Dans le cas général, considérons que  $u(p)$  est encore continue et linéaire en  $p \in B$ , tandis que  $B$  est un ensemble convexe et compact. Par conséquent, on retrouve dans notre cas toutes les étapes nécessaires pour la preuve de Nash (montrer que la correspondance de meilleure réponse est non-vide, semi-continue supérieurement et convexe pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Kakutani). Donc tout jeu fini a un équilibre même dans cette classe plus large de préférences, même si l'équilibre n'est pas forcément pur (selon notre définition de ce terme) : en général, un équilibre reposera sur une combinaison de hasard objectif et d'incertitude subjective à propos des décisions des joueurs.

## 10. CONCLUSION

Nous avons présenté une généralisation projective de l'utilité espérée, et nous avons montré qu'elle peut intégrer les principaux paradoxes rencontrés en théorie de la décision. Alors que les autres généralisations de l'utilité espérée sont typiquement non-linéaires en probabilités, notre représentation est linéaire en degrés de croyance (et donc en probabilités subjectives), et par conséquent relativement facile à manipuler dans les applications. En particulier, tout jeu fini a encore un équilibre, même au sein de cette classe de préférence plus large.

Notre généralisation de l'utilité espérée est très proche de celle de Gyntelberg et Hansen (2004), qui est obtenue dans le cadre de Savage en postulant une structure non-classique (c'est-à-dire non-Booléenne) pour les événements pertinents. À

l'inverse, bien que notre représentation soit obtenue dans le cadre de von Neumann-Morgenstern (c'est-à-dire que les croyances sont considérées comme étant déjà données), elle n'impose pas de contraintes spécifiques sur la nature de l'incertitude en jeu. En particulier, dans notre cadre, les paradoxes dominants peuvent être résolus même si l'incertitude en jeu est de nature complètement classique. De plus, dans le cas où l'espace des événements est non-classique, notre résultat fournit aussi des fondations pour les décisions impliquant de l'incertitude quantique.

Pierfrancesco La Mura

*Department of Microeconomics and Information Systems  
Leipzig Graduate School of Management (HHL)*

# La théorie non-classique de la mesure : Un cadre pour les sciences du comportement\*

## 1. INTRODUCTION

Avec la Mécanique Quantique (MQ) nous avons appris que le monde des particules subatomiques est régi par les lois «étranges» (c'est-à-dire, non-classiques). Récemment, l'intérêt pour MQ a connu un grand essor. Partiellement, cela est dû aux développements de l'informatique quantique, qui ont incité des physiciens et, plus récemment, des économistes, à étudier l'utilisation de l'information quantique dans les jeux (Eisert (1999), La Mura (2004)). Une autre direction de recherche s'est développée en réponse à des observations d'objets (macro) classiques (par exemple, la perception humaine ou les préférences) manifestant des propriétés considérées comme propres aux objets de la MQ. Dans un article (2009), Lambert-Mogiliansky, Zamir et Zwirn proposent une version simplifiée du modèle hilbertien de la MQ pour décrire les préférences des agents économiques et la prise de décisions. Aerts (1994), Busemeyer et Townsend (2004) et Khrenikov et al. (2003) étudient des phénomènes de type quantique-probabiliste en psychologie. L'idée dans ces travaux est que le formalisme mathématique de la MQ, souvent appelé «la logique quantique», plutôt que son contenu physique, offre un modèle approprié pour la description, l'explication et la prédiction de phénomènes de

---

\* Nous sommes très reconnaissants pour des discussions utiles avec J. Busemeyer, J.-C. Falmagne, Y. Feinberg D. Luce, B. Wilson, S. Zamir, H. Zwirn et pour les commentaires des participants des séminaires à Stanford, Irvine et Indiana.

comportement humain en psychologie et dans les sciences sociales<sup>1</sup>.

Le terme « logique quantique » est apparu pour la première fois dans l'article fondateur de Birkhoff et von Neumann (1936). Ils proposèrent une formulation des fondements mathématiques de la mécanique quantique en termes de logique non-classique. Une seconde étape importante, fût franchit par Mackey (1963) qui proposa une approche axiomatique du calcul probabiliste de la théorie quantique standard. Piron (1976) étendit de façon significative le travail de Mackey. Son théorème de représentation et la structure axiomatique qu'il formula donnèrent lieu à de nombreux travaux. En même temps, Foulis et Randal (1978) développaient une approche fondée sur des bases opérationnelles plus simples. Le chapitre introductif du livre de Coecke, Moore et Wilce (2000) offre un excellent aperçu de ce domaine de recherche.

Une des spécificités déterminantes de la théorie non-classique (quantique) de la mesure est qu'il est admis que toute mesure réalisée sur un système affecte ce système, c'est-à-dire, en modifie l'état. De ce fait certaines expériences ou mesures peuvent être « incompatibles » dans le sens où les propriétés révélées par ces mesures vont dépendre de l'ordre dans lequel les mesures sont effectuées.

En économie, nous définissons un agent par ses préférences et ses croyances, en psychologie – par ses valeurs, attitudes et sentiments. Nous parlons aussi de « révélation » ou du « dévoilement » de ces préférences et attitudes. Cela suppose (implicitement) que ces propriétés soient suffisamment bien définies et stables. En particulier, cela suppose que le simple fait de soumettre une personne à une procédure de révélation n'affecte pas la personne. Néanmoins, les psychologues savent bien que le simple fait de répondre à une question sur un sentiment peut affecter la personne interrogée à tel point qu'elle en modifie ses attitudes. Par exemple, si on demande une personne : « Êtes-vous en colère ? », la réponse « Oui » peut la transporter d'un état

---

1. Le terme « logique quantique » est souvent utilisé de façon moins stricte en se référant au formalisme mathématique de PersonNameProductIDla MQ. Orla MQ. Or, d'un point de vue formel, le terme de logique quantique se réfère aux treillis orthomodulaires.

émotionnel «flou» à l'expérience de colère. Or, avant de répondre, la personne n'était peut-être pas vraiment en colère. Elle pouvait se trouver dans un état d'«émotions brouillées» [27]<sup>2</sup>. Dans un registre voisin, Erev, Bornstein et Wallsten (1993) ont montré dans une expérience de laboratoire que le simple fait de révéler (en répondant à un questionnaire) ses croyances (probabilités subjectives) pouvait affecter un agent à tel point que ses décisions ultérieures en étaient modifiées. Le phénomène connu sous le nom de «l'effet de disjonction» (Tversky et Shafir (1992)) peut aussi être vu dans cette perspective. Dans une expérience bien connue, les auteurs ont montré qu'un nombre nettement plus élevé d'étudiants se disent prêts à acheter un séjour non-remboursable à Hawaï lorsqu'ils connaissent le résultat de leur examen, – qu'ils aient réussi ou échoué –, comparé au cas où ils ignorent le résultat. En cas de réussite certains achètent le séjour pour se récompenser et en cas d'échec, certains étudiants achètent le séjour pour se consoler. Quand ils ne connaissent pas le résultat, un comportement apparemment incohérent est observé : moins de séjours sont achetés que dans chacune des deux issues possibles. On peut dire que les étudiants qui ne connaissent pas le résultat se trouvent dans un état flou : ni satisfaits ni déçus. La théorie non-classique de la mesure a développé une notion d'incertitude dont la cause n'est pas l'information incomplète (ce qui est représenté comme un mélange statistique d'états), à savoir la notion de «superposition d'états». Les données de l'expérience de Tversky-Shafir sont compatibles avec le comportement attendu d'étudiants se trouvant dans un état superposé. Les phénomènes de dissonance cognitive sont un autre exemple de comportement apparemment incohérent qui peut être expliqué dans les termes de l'incertitude quantique<sup>3</sup>.

À la différence de la physique, dans les sciences du comportement nous ne possédons pas de faits expérimentaux créant une nécessité absolue de rejeter le modèle

---

2. La distinction entre les deux états (avant et après que la personne ne répond à la question) peut être mise en évidence par ses réponses à des questions posées ultérieurement.

3. Un modèle hilbertien (HSM) de la dissonance cognitive est présenté dans [14].

classique<sup>4</sup>. Néanmoins, il y a nombre de phénomènes expérimentaux qui ne peuvent être expliqués par la théorie standard sans faire des hypothèses supplémentaires (parfois purement *ad hoc*, voir Kahneman et Tversky (2000), Camerer 2003). Il est intéressant de noter que Kahneman et Tversky décrivent certaines anomalies en termes de théorie de la mesure : « De manière analogue à la théorie de la mesure en physique classique – la théorie classique des préférences suppose que chaque personne possède un ordre de préférences bien défini et que différentes méthodes de révélation découvriront le même ordre de préférence ». Or, « Dans ces situations – celles de violation de « l'invariance procédurale » – les préférences observées ne sont pas simplement révélées ; elles sont en réalité construites au cours du processus de révélation ». ([11] p. 504). Le lauréat du prix Nobel A. Sen (1997) souligne également que « l'acte de choix » a des conséquences pour les préférences<sup>5</sup> (le choix est une procédure de révélation des préférences). L'existence de nombreuses « analogies intrigantes » entre les phénomènes de MQ et les phénomènes psychologiques et comportementaux suggèrent que la théorie non-classique de la mesure peut se révéler utile pour la description et la modélisation du comportement humain<sup>6</sup>. L'objectif de ce chapitre est d'introduire quelques fondements de la théorie non-classique de la mesure et d'en discuter la pertinence pour les sciences du comportement et les sciences sociales. Une version plus technique et plus complète peut-être consultée dans notre article publié dans le *Journal of Mathematical Sciences*. Nos résultats montrent que les axiomes et les propriétés de cette théorie peuvent être formulés de façon à permettre une interprétation sensée en sciences sociales. L'homme non-clas-

---

4. Évidemment, tous les cas de non-commutativité du comportement ne demandent pas une mise en question de l'approche classique. Dans la théorie standard du consommateur, les choix peuvent avoir des conséquences pour le comportement ultérieur quand les biens sont substitués ou complémentaires les uns des autres. Nous nous concentrons sur ce qui est appelé « les anomalies du comportement », c'est-à-dire sur les cas où rien ne justifie une modification des préférences (ou des croyances). Or, le comportement révèle une modification.

5. Par le choix qu'il fait l'agent révèle ses préférences

6. D. Luce (2005) décrit, lui aussi, des analogies entre mesures physiques et comportement. Luce s'intéresse exclusivement aux mesures classiques et se concentre sur des ressemblances en termes de formes fonctionnelles.

sique qui émerge de notre étude est un être « plastique » par excellence. Ceci s'explique par la propriété de non-orthogonalité (connectivité) des états (purs) de comportement. Cette caractéristique clé de la théorie implique une incertitude irréductible qui est aussi au cœur de sa dimension dynamique<sup>7</sup>. Quand l'homme non-classique interagit avec son environnement – par exemple, fait un choix dans un contexte décisionnel donné, une certaine incertitude est résolue, ce qui provoque la modification de son état comportemental. L'homme non-classique est structurellement contextuel. Dans un exemple simple nous montrons comment la théorie non-classique de la mesure peut expliquer des phénomènes d'inversion des préférences (une anomalie de comportement qui a fait l'objet de nombreuses recherches empiriques et théoriques). Enfin, nous suggérons comment notre formalisme pourrait être utilisé afin de développer une théorie des préférences actualisées.

Dans la section 2 nous décrivons quelques exemples de comportement quantique et quasi-quantique. Dans la section 3 nous introduisons de façon informelle quelques notions centrales de la théorie non-classique de la mesure. Certains éléments du formalisme mathématique de la théorie sont exposés dans la section 4. Dans la section 5 nous proposons une interprétation de ses axiomes et propriétés dans le cadre des sciences du comportement et nous développons une application à la théorie de décision.

## 2. EXEMPLES

### 2.1. Exemple 1 : Le spin de l'électron

Un électron possède plusieurs propriétés, y compris la masse, la charge électrique et le spin. Pour se faire une idée de ce dont nous allons parler, nous pouvons imaginer l'électron comme une balle de cricket qui tourne autour d'un axe.

---

7. Ici le terme dynamique fait exclusivement référence au processus de changement lié à la mesure et non pas à une dimension temporelle.

Puisque l'électron est chargé, cette rotation affecte son moment magnétique (associé au spin) qui lui peut être mesuré<sup>8</sup>.

Une première observation est que le résultat de la mesure a toujours ( $\pm$ ) la même valeur indépendamment de l'orientation du dispositif de mesure. Si nous mesurons un électron particulier par rapport à un axe  $x$  et que nous obtenons le résultat (+), une nouvelle mesure par rapport à ce même axe donnera le même résultat. Supposons que nous ayons préparé de cette façon un certain nombre d'électrons. Si, pour la deuxième mesure, nous changeons l'orientation de l'axe (par exemple, en tournant le dispositif de mesure à  $90^\circ$ ), le résultat nous montrera que la probabilité pour les deux résultats est égale et égale à  $1/2$ . Si enfin nous effectuons après cela une nouvelle mesure par rapport à l'axe  $X$ , nous ne retrouverons pas notre résultat initial. Au lieu de cela le résultat sera ( $-$ ) avec une probabilité égale à  $1/2$ .

Au vue de l'objectif de cet article, nous nous contenterons de constater que dès lors que le spin de l'électron relativement à un certain axe est connu, le résultat de la mesure du spin de cet électron relativement à un autre axe est de nature probabiliste. C'est le point principal. Dans le monde classique, nous sommes habitués aux probabilités. Mais là, nous pouvons facilement trouver une explication au caractère aléatoire du résultat. En effet nous ne connaissons, tout simplement, pas l'état exact du système que nous représentons par un mélange pondéré d'états. Si nous faisons le tri de ce mélange, en fin de compte nous obtenons un état pur et la réponse sera déterministe. Dans le cas du spin, il n'est pas possible de simultanément éliminer le caractère aléatoire des résultats de mesures relatives à différents axes.

## 2.2. Exemple 2 : La mouche

Imaginons une boîte divisée à l'aide de deux cloisons en quatre compartiments (avant-Gauche (aG), Arrière-Gauche

---

8. Stern et Gerlach ont inventé un appareil tel que l'interaction entre le moment magnétique de l'électron et celui du dispositif expérimental entraîne la division du faisceau d'électrons en deux faisceaux séparés. La mesure de la déviation peut être interprétée comme la mesure du spin (relativement à une certaine orientation).

(AG), avant-Droit (aD) et Arrière-Droit (AD). Dans cette boîte il y a une mouche qui vole ici et là. À cause des cloisons, ses mouvements sont limités au compartiment où elle se trouve.

Supposons que nous ne puissions effectuer que deux types de mesure. La première, GD, nous permet de répondre à la question « Est-ce que notre mouche se trouve dans la moitié Gauche (G) ou dans la moitié Droite (D) de la boîte ? » Au cours du processus de mesure la cloison entre la moitié avant (a) et Arrière (A) de la boîte est retirée, tandis que la cloison séparant les parties Droite et Gauche reste en place. La mouche peut alors voler d'avant en arrière. Quand l'opération de mesure est terminée et que nous avons déterminé par exemple que la mouche est dans la partie gauche, la cloison entre les compartiments avant et Arrière est remise en place. Notre connaissance quant à la position de la mouche relativement à la dimension avant/arrière est alors de nature aléatoire (aG ou AG).

Supposons donc que nous ayons réalisé la mesure GD et obtenu la réponse G. En répétant la même mesure même 100 fois nous obtiendrons toujours la même réponse G. Mais si, entre temps, nous réalisons une mesure aA, nous aurons immédiatement après cette opération des chances égales (par simplicité) d'obtenir la réponse G comme la réponse D. Nous voyons que le comportement de notre système rappelle celui du spin (quand le dispositif de Stern-Gerlach est tourné à  $90^\circ$ ). Ici, la position de la mouche ne peut pas simultanément être déterminée avec certitude par rapport aux deux mesures G D et aA. La mesure affecte le système de manière inévitable et non-contrôlable<sup>9</sup>.

### 2.3. Exemple 3: Attitudes et valeurs

Considérons la situation suivante. Nous avons affaire à un groupe de personnes, et nous nous intéressons à leurs préférences (ou leurs attitudes). Nous avons à notre disposition deux tests. Le premier test est un « Dilemme du prisonnier » (avec un partenaire anonyme) sous forme de questionnaire. Il faut choisir entre

---

9. Cet exemple simple illustre quelques propriétés de base de la mesure non-classique. Cependant ce système ne possède pas toutes les propriétés d'un système quantique.

les options C (coopérer) et D («defect» ou trahir).<sup>10</sup> Le deuxième test est également un questionnaire avec les options du premier joueur dans un «jeu de l'Ultimatum» (UG).<sup>11</sup> Le choix est entre une offre de partage dans les proportions 9/1 ou 4/6.

Les observations que nous allons décrire, ne pourraient pas être obtenues dans un monde où les agents sont rationnels et dont les préférences sont définies exclusivement sur les gains monétaires<sup>12</sup>. Mais ce n'est pas ce qui nous intéresse ici. Nous voulons souligner que ces observations révèlent des caractéristiques semblables à celles que nous avons rencontrées dans l'exemple du spin et de la mouche.<sup>13</sup>

Supposons que nous ayons obtenu les résultats suivants. Les sujets qui avaient répondu (C) dans le premier questionnaire, ont répété (avec une probabilité proche de 1) leur réponse dans un test PD effectué immédiatement après. Puis nous effectuons le second test (UG) et de nouveau un troisième test PD. Dans ce troisième PD nous constatons que les sujets ne répètent pas toujours leurs réponses initiales. Une part (significative) de ceux qui initialement optaient pour la coopération, maintenant choisissent de trahir.

10. Dans le dilemme du prisonnier, les deux joueurs choisissent simultanément entre deux actions : coopérer ou trahir. La spécificité de ce jeu est que chaque joueur a individuellement intérêt à trahir indépendamment de l'action de l'autre. Cependant les deux joueurs collectivement ont intérêt à coopérer.

11. Dans le jeu de l'ultimatum le premier joueur fait une offre de partage d'une somme d'argent. Le deuxième joueur soit accepte le partage et l'argent est alors distribué conformément à l'offre. Soit il refuse et dans ce cas-là personne ne reçoit rien.

12. Nous savons que la théorie des jeux prédit le comportement de manière univoque : selon cette théorie, les gens trahissent (D) toujours dans le jeu PD et, en accord avec une hypothèse de connaissance commune de la rationalité, ils offrent le partage 9/1 dans le jeu UG. Les expérimentateurs nous ont pourtant appris à distinguer entre les gains monétaires que l'on peut contrôler et les préférences qui peuvent inclure les éléments non monétaires inconnus des expérimentateurs.

13. D.Balkenberg et T.Kaplan (University of Exeter, non publié) ont réalisé une expérience avec les mêmes deux jeux mais avec deux populations de sujets. Ils ont étudié la fréquence des choix dans les cas où ces deux jeux étaient joués dans un certain ordre comparé à la situation lorsque l'ordre est inversé. Les données montrent que le premier choix a un impact sur le deuxième choix ce qui est une caractéristique des mesures non classiques.

Comment comprendre ce comportement ? Il est possible qu'au moment de prendre sa décision dans le test PD, le sujet se sentait hésitant : il désire toujours encourager la coopération mais il n'aime pas que l'on abuse de sa confiance. Examinons le cas où son « moi optimiste » a pris le dessus : notre sujet décide de coopérer. Son état mental est à présent celui du moi optimiste et, questionné immédiatement après il ne ressent plus de conflit intérieur : il confirme son choix initial. Ensuite, il doit répondre au questionnaire de l'UG. L'offre 4/6 est très généreuse mais elle peut être perçue comme totalement stupide. L'offre 9/1 n'est pas généreuse mais, compte tenu de l'alternative, elle ne devrait pas être perçue comme blessante. Notre sujet se sent de nouveau hésitant : son moi optimiste ne lui indique pas clairement un choix. Supposons qu'il choisisse 9/1. Maintenant, en examinant de nouveau le DP, il hésite de nouveau. En effet, le choix 9/1 n'est pas vraiment en accord avec son moi optimiste (c'est un partage très inégal). En conséquence il n'est peut être plus du tout dans l'humeur de faire confiance et il peut très bien choisir de trahir.

Comme dans les exemples précédents, la mesure (des attitudes) affecte le système (l'état du sujet) d'une manière qui ne peut être contrôlée. Ainsi les comportements observés (les résultats de la mesure) révèlent des phénomènes de non-commutativité spécifiques à la théorie non-classique de la mesure.

### 3. MESURES NON-CLASSIQUES

Dans cette section, nous introduisons de manière informelle certaines notions centrales de la théorie. Supposons que nous ayons affaire à un certain système (un électron, les préférences d'une personne, une mouche dans une boîte). À chaque moment ce système est caractérisé par son *état* qui contient toute l'information existante sur le système. Il existe divers dispositifs expérimentaux permettant de réaliser des mesures sur ce système. Notre système peut donner des « réponses » différentes à la même mesure quand il se trouve dans des états différents. L'état du système est la raison principale (et idéalement la seule) de ces différentes réponses. Néanmoins, notre système peut donner des réponses différentes à la même question même

s'il se trouve dans le même état. Dans le monde classique, le caractère probabiliste des résultats peut être expliqué par notre connaissance incomplète de l'état du système<sup>14</sup>. La théorie de la mesure non-classique décrit une incertitude dont la cause n'est pas (uniquement) notre connaissance incomplète et ainsi reconnaît un caractère probabiliste intrinsèque (objectif) aux résultats de mesure. Ci-après, la notion d'état se rapporte aux états *purs*, c'est-à-dire aux états qui ne sont pas des mélanges statistiques (non triviaux) d'autres états.

De manière concrète un dispositif expérimental sera composé de fils électriques, d'aimants, de questionnaires, de contextes décisionnels etc. Cela ne peut que difficilement être décrit dans tous ses détails. Cependant, tout ce que nous devons connaître – c'est l'ensemble désigné  $O(M)$  des résultats possibles des mesures réalisables avec un dispositif expérimental donné. Par exemple, dans le cas du spin les résultats sont (+) ou (-) pour une orientation donnée dans l'espace. Dans l'exemple de la mouche ou de la décision, nous avons deux expériences, chacune donnant un ensemble de résultats comprenant 2 éléments. En général, les résultats d'une mesure peuvent être les éléments d'un ensemble abstrait arbitraire. En mécanique quantique, les résultats sont des nombres réels, c'est-à-dire les valeurs propres d'un opérateur hermitien (appelé « observable »), qui représente la propriété mesurée. Dans notre contexte, les résultats de la mesure ne sont pas des nombres mais plutôt des « étiquettes » conventionnelles. Comme cas spécial, nous rencontrerons aussi des nombres.

Quand le système interagit avec un dispositif expérimental ( $M$ ), nous obtenons comme résultat une des valeurs appartenant à l'ensemble  $O(M)$ . Nous disons que la valeur particulière obtenue  $o \in O(M)$  est le *résultat de la mesure*.

Les mesures appartiennent à une classe spéciale d'interactions. Nous nous limiterons aux mesures non-destructives. Ce qui signifie que le système n'est pas détruit dans le processus de

---

14. Le fait que l'information est incomplète signifie que l'état du système est un mélange des différents états pondéré par les probabilités associées à ces états. En utilisant les mesures, nous pouvons trier ou « filtrer » ce mélange de telle façon que nous obtiendrons en fin de compte un état pur que nous connaissons parfaitement.

mesure (mais son état peut changer). Cela signifie aussi que nous pouvons réaliser de nouvelles mesures sur ce système. La particularité la plus importante caractérisant la mesure consiste en ce que, si nous réalisons la même mesure (sur le même système) deux fois *de suite*, nous obtenons la même réponse. Cette propriété est appelée « le postulat de mesure de von Neumann ». Les mesures qui satisfont à ce postulat s'appellent « les mesures du premier type » (« *first-kind* »)<sup>15</sup>.

Le postulat de mesure suppose que le système n'a pas de dynamique propre (ou bien que les mesures peuvent être réalisées avec des intervalles de temps suffisamment courts pour éviter que, entre temps, le système n'ait évolué). La mesure de la position d'un train en marche, ou bien celle de la disposition à payer pour une dose d'héroïne d'un toxicomane, n'est pas une mesure du premier type. De même, supposons que nous sélectionnions une personne appartenant à une population donnée et nous lui posons une question. Ici, le rôle du système est joué par la population. Si nous répétons cette mesure en choisissant une autre personne, la nouvelle réponse peut être différente de la première. Ce n'est donc pas une mesure de premier type. Cela signifie que notre système doit, dans un certain sens, être suffisamment « élémentaire ».

Les mesures du premier type s'offrent à une interprétation selon laquelle le résultat de la mesure fournit de l'information sur une *propriété* du système. Si nous mesurons la couleur d'un système, que nous obtenons « rouge » et, que lorsque nous répétons l'expérience, nous obtenons de nouveau « rouge », alors, nous sommes enclins à penser que le système est effectivement de couleur rouge et que notre mesure permet seulement de « révéler » cette propriété qui existait déjà c'est à dire *avant* que la mesure n'ait été réalisée. Tout bonnement, nous ne le savions pas encore. Notre approche consiste à suggérer que la propriété « être rouge » pouvait ne pas préexister la mesure. Elle a été obtenue comme le résultat de l'interaction du système avec le

---

15. Il n'existe aucun exemple concret d'une grandeur physique ne permettant pas au moins un appareil de mesure satisfaisant, fût-ce approximativement, au postulat de von Neumann et au postulat de Lüder (plus strict). Les appareils utilisés en réalité peuvent pourtant ne pas satisfaire à ces postulats.

dispositif expérimental. Nous dirons plutôt que cette propriété est *actualisée* (et non «révélée») par le dispositif expérimental. La propriété appartient effectivement au système ce qui peut être confirmé par une répétition de la mesure. Mais elle peut aussi disparaître si nous effectuons la mesure d'une autre propriété qui n'est pas compatible (voir ci-dessous) avec la première. La figure 1 illustre des mesures non-classiques du premier type avec deux résultats possibles.

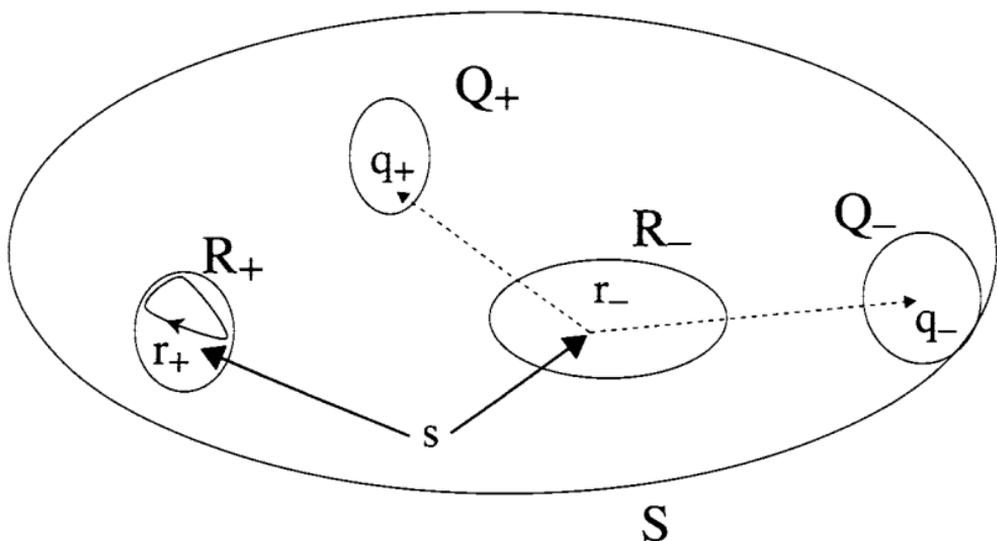


Figure 1

L'état du système avant d'effectuer la mesure est représenté par le point  $s$ . N'importe quel état  $s \in S$ , où  $S$  est l'ensemble des états purs, s'il est mesuré donnera le résultat  $R_+$  avec une certaine probabilité et le résultat  $R_-$  avec la probabilité complémentaire. Quand nous effectuons une mesure, l'état «saute» soit dans le sous-ensemble  $R_+$  et donne le résultat  $R_+$ , soit dans le sous-ensemble  $R_-$  et donne le résultat  $R_-$ . On dit que l'état  $s$  est une superposition d'un certain état  $r_+ \in R_+$  et  $r_- \in R_-$ . Mettons que  $s \in R_+$  (après que nous ayons effectué la mesure  $R$ ) et que nous effectuons cette mesure de nouveau, nous obtenons avec certitude la même réponse  $R_+$  ce qui est illustré par la boucle dans le sous-ensemble  $R_+$ .

Pour préciser l'intuition, nous comparons à présent avec des mesures similaires effectuées sur un système classique (Figure 2).

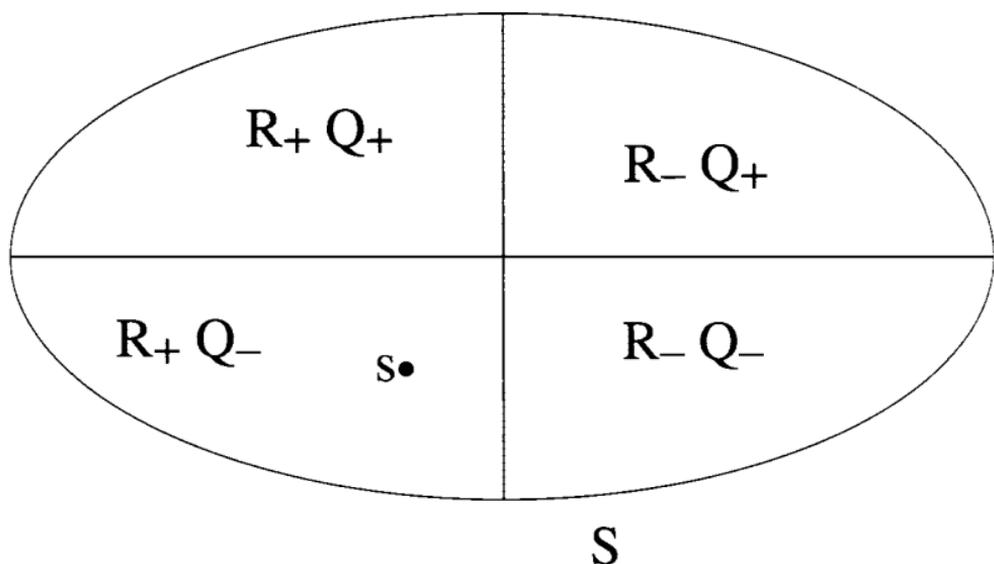


Figure 2

La mesure classique  $R$  est représentée par une partition de l'espace des états :  $R_+ \cup R_- = S$ . L'état du système est représenté par le point  $s$ . Il n'y a aucun impact de la mesure  $R$  sur l'état. Cette mesure révèle (seulement) que  $s \in R_+$ .

Les figures 1 et 2 peuvent être utilisées pour illustrer une autre notion fondamentale : celle de propriétés *incompatibles* ou bien de mesures *non-commutatives*. Supposons que la mesure  $R$  ait donné le résultat  $r_+$  et qu'ensuite nous ayons effectué une mesure  $Q$ . L'état du système est maintenant ou bien un certain  $q_+ \in Q_+$  ou bien un certain  $q_- \in Q_-$ , où  $q_- \neq r_+$ . Une répétition de la mesure  $R$  changera l'état du système encore une fois. Avec une probabilité non nulle, le système sautera dans le sous-ensemble  $R_-$ , c'est-à-dire nous ne retrouverons pas le résultat initial  $R_+$ . Par contre toutes les mesures effectuées sur un système classique sont compatibles. Le résultat de la mesure  $R$  sera toujours  $R_+$  indépendamment du fait que la mesure  $Q$  ait été effectuée ou non sur le système.

Nous allons à présent passer à la description du formalisme de la théorie. Nous nous contenterons ici de présenter un formalisme simplifié qui nous permettra de formuler la notion d'orthoséparabilité qui est la base de la construction non-classique. Nous toucherons brièvement à certains aspects dynamiques sans entrer dans les détails. Pour une version complète nous

renvoyons le lecteur à notre article dans *Mathematical Social Sciences*.

#### 4. ÉLÉMENTS DU FORMALISME MATHÉMATIQUE

Dans cette section nous introduisons quelques éléments du modèle non-classique. Notre objectif ici se limite à l'exposition formelle d'une des notions clé qui fonde la distinction entre le modèle classique et le modèle non-classique : la notion d'*orthoséparabilité* de l'espace des états du système.

Notre point de départ est un dispositif expérimental de mesure que nous dénotons  $M$ . L'ensemble des résultats de la mesure  $M$  est dénoté  $O(M)$ . Par simplicité nous faisons l'hypothèse que  $O(M)$  est un ensemble fini.  $S$  dénote l'ensemble des états de notre système. L'action d'effectuer une mesure est décrite par la correspondance suivante

$$\mu = \mu_M : S \rightarrow \Delta(O(M))$$

où  $\Delta(X)$  dénote le simplexe de mesures probabilistes sur un ensemble fini  $X$ . Pour tout état  $s \in S$  et tout résultat  $o \in O$  le nombre non négatif  $\mu_M(o|s)$  est la probabilité que le résultat  $o$  soit observé lorsque l'on effectue une mesure de  $M$  sur le système dans l'état  $s$ . Nous faisons l'hypothèse que pour tout résultat  $o$  il existe un état  $s \in S$  tel que  $\mu_M(o|s) > 0$ . Pour  $A \subset O(M)$ , nous écrivons  $\mu_M(A|s) = \sum_{o \in A} \mu_M(o)$ . Une mesure  $M$  est dite de premier type si la propriété suivante est satisfaite.

**Définition.** Supposons que nous ayons effectué la mesure  $M$  sur un système et que nous ayons obtenu le résultat  $o$ . Si nous effectuons  $M$  de nouveau (sans qu'aucune autre mesure n'ait été effectuée entre temps) nous obtenons le résultat  $o$  avec une probabilité égale à 1.

Pour  $A \subset O(M)$ ,  $E_M(A)$  dénote l'ensemble des états  $s$  tels que  $\mu_M(A|s) = 1$ . En particulier l'ensemble  $E_M(o)$ , pour  $o \in O$  est appelé « l'ensemble propre » ou « eigenset » du résultat  $o$ . Les ensembles propres  $E_M(o)$  sont non vides. Après avoir obtenu le résultat  $o$ , l'état du système se trouve dans  $E_M(o)$  du à la propriété de premier type de la mesure  $M$ . Nous disons qu'une

mesure est *complète* si tous ces ensembles propres sont des singletons. Une mesure à deux résultats (conventionnellement lus comme OUI et NON) est appelée une *question*.

$\mathcal{M}$  dénote l'ensemble de toutes les mesures de premier type. Nous faisons l'hypothèse que les différentes mesures sont reliées par un postulat «monotonie». Pour formuler ce postulat nous introduisons la notion centrale de *propriété*.

**Définition.** Le sous-ensemble  $P \subset S$  est appelé une propriété (testable) si  $P = E_M(A)$  pour une mesure  $M \in \mathcal{M}$  et un résultat  $A \subset O(M)$ .

**Postulat de monotonie.** Soient deux mesures  $M$  et  $M' \in \mathcal{M}$ , et deux résultats  $A$  et  $A'$  tels que  $E_M(A) \subset E_{M'}(A')$ . Alors tout état  $s$  vérifie  $\mu(A|s) \leq \mu(A'|s)$ .

En particulier si  $P = E_M(A) = E_{M'}(A')$  est une propriété alors les probabilités  $\mu(A|s)$  et  $\mu(A'|s)$  sont égales entre elles et ne dépendent que de  $P$ . Pour cette raison nous pouvons écrire  $s(P)$  et comprendre cette expression comme la probabilité d'obtenir la propriété  $P$  lorsque nous effectuons une mesure sur le système dans l'état  $s$ . Le nombre  $s(P)$  est bien défini et ne dépend pas du dispositif de mesure.

L'ensemble de toutes les propriétés est dénoté  $\mathbf{P}$ . C'est un sous-ensemble de  $2^S$  ce qui en fait un «poset» (ensemble partiellement ordonné). Il contient un élément minimal  $\mathbf{0}$  et un élément maximal  $\mathbf{1} = S$ . Tout état  $s$  définit une fonction monotone:  $\mathbf{P} \rightarrow R^+$ , tels que  $s(\mathbf{0}) = 0$ ,  $s(\mathbf{1}) = 1$ . La valeur de  $s(P)$  est la probabilité que le système dans l'état  $s$  *transite* vers le sous-ensemble  $P$  lorsque l'on effectue une mesure appropriée.

Nous décrivons à présent une autre structure fondamentale du poset  $\mathbf{P}$ . Mettons que  $P = E_M(A)$  soit une propriété. Si  $\bar{A} = O(M) - A$  est le complément de  $A$  dans  $O(M)$ , alors le sous-ensemble  $P' = E_M(\bar{A})$  est aussi une propriété. Et nous avons que  $s(P') = 1 - s(P)$  pour tout état  $s \in S$ . Donc

$$P' = \{s \in S, s(p') = 1\} = \{s \in S, s(P) = 0\}$$

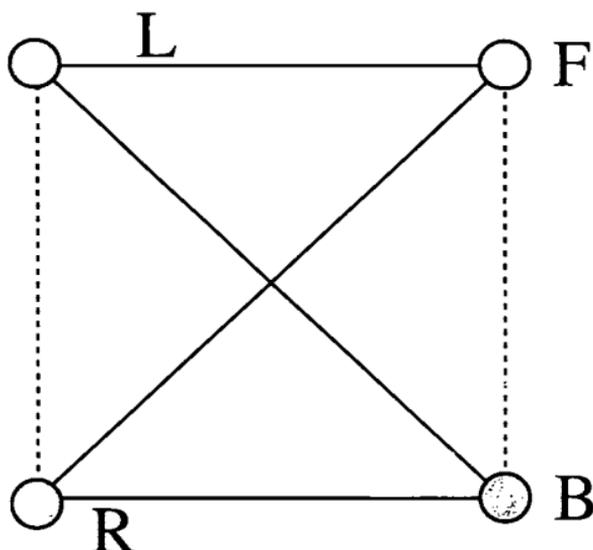
et le sous-ensemble propriété  $P'$  ne dépend que de  $P$ . Nous appelons  $P'$  la propriété *opposée* à  $P$ . Il est clair que  $P \vee P' = \mathbf{1}$  dans le poset de propriétés  $\mathbf{P}$ . En d'autres termes  $\mathbf{P}$  est un *orthoposet*.

## 5. ORTHOGONALITÉ

L'espace des états possède une structure d'orthogonalité similaire. Deux états  $s$  et  $t$  sont dits orthogonaux et nous écrivons  $s \perp t$  s'il existe une propriété  $P$  telle que  $s(P) = 1$  et  $t(P) = 0$ . Pour la propriété opposée  $P'$  nous avons par définition  $s(P') = 0$  et  $t(P') = 1$  donc  $t \perp s$ . Ce qui signifie que  $\perp$  est une relation symétrique. Clairement elle est aussi non-réflexive.

**Définition.** Une relation d'orthogonalité sur un ensemble est une relation binaire symétrique et non-réflexive  $\perp \subset X \times X$ . Un ensemble  $X$  équipé d'une relation d'orthogonalité est appelé un *ortho-espace*.

Lorsque l'on représente graphiquement un ortho-espace, on peut relier les éléments orthogonaux (c'est souvent la représentation la plus «économique»). De manière alternative les éléments non-orthogonaux dits *tolérants* (ou connectés) peuvent être reliés. Le graphe de la tolérance devient rapidement très complexe. Dans les cas simples il est possible de combiner les deux graphes. Les pointillés correspondent à l'orthogonalité et les lignes pleines à la connectivité. Ci-dessous le graphe de l'exemple 2 (La Mouche).



Pour  $A \subset X$  on dénote  $A^\perp$  l'ensemble des éléments orthogonaux à tous les éléments de  $A$

$$A^\perp = \{x \in X; x \perp A\}$$

**Définition.** L'ensemble  $A^{\perp\perp}$  est appelé *l'ortho-fermeture* de l'ensemble  $A$ . Un ensemble  $F$  est dit ortho-fermé (aussi appelé flat) si et seulement si  $F = F^{\perp\perp}$ .

Un ensemble est dit ortho-séparable si tout tous ses sous-ensembles singletons sont ortho-fermés. Nous pouvons à présent formuler le premier axiome de la théorie de la mesure non-classique.

**Axiome 1.** Pour tout élément,  $s \in S$ ,  $\{s\}$  est une propriété.

Cet axiome garantit que l'ensemble des états est *ortho-séparable*. Cette propriété représente une des caractéristiques clé de la théorie. La notion d'ortho-séparabilité des états purs d'un système est moins contraignante que la notion classique d'orthogonalité des états. L'ortho-séparabilité admet la connectivité des états purs mentionnée ci-dessus. Ainsi à la différence d'un système classique, un système non-classique peut se révéler sous l'impact de mesures appropriées « être » dans deux états mutuellement exclusifs ou de manière équivalente posséder des propriétés incompatibles. Nous reviendrons sur cette particularité dans la section suivante.

La reconstruction de modèle Hilbertien de la Mécanique Quantique fait appel à d'autres propriétés en particulier l'orthomodularité de l'espace des états qui assure que tout état peut-être exprimé comme une mesure de probabilité sur le treillis des propriétés. Cependant la théorie de la mesure non-classique n'acquière toute la structure du modèle hilbertien que lorsque l'on impose une structure particulière au processus de changement lié à la mesure: on fait une hypothèse de *perturbation minimale* de l'état dans l'opération de mesure. Pour plus de précision nous invitons le lecteur à consulter notre article dans *Mathematical Social Sciences*.

## 6. APPLICATION AUX SCIENCES DU COMPORTEMENT

Dans le cadre des sciences humaines et sciences du comportement nous proposons de considérer une personne comme un système (ou une collection de sous-systèmes irréduc-

tibles).<sup>16</sup> Elle est caractérisée par son état ou type qui contient l'information maximale (concernant ses préférences, ses croyances, son information privée) permettant de prédire (de manière probabiliste) le comportement. Le dispositif de mesure sera un questionnaire ou un « contexte décisionnel ». Le comportement (par exemple, le choix fait dans un contexte décisionnel, l'action prise dans une situation stratégique, ou bien encore la réponse donnée à un questionnaire) correspond au résultat d'une mesure (d'une caractéristique) du type de la personne.

Nous proposons d'abord une interprétation psychologique et comportementale de certains axiomes et propriétés de la théorie non-classique de la mesure. Ensuite, nous présentons un exemple montrant comment ce formalisme peut être utilisé pour expliquer une « anomalie comportementale » bien connue, à savoir l'inversion des préférences. Nous finirons en suggérant comment ce formalisme pourrait être utilisé afin de développer une théorie des préférences actualisées.

## 6.1. Une interprétation

### 6.1.1. Ortho-séparabilité

Dans le modèle classique, tous les états (atomiques) sont orthogonaux l'un à l'autre (ou déconnectés). Dans le modèle non-classique les états (purs) ne sont pas tous orthogonaux l'un à l'autre, ils sont juste ortho-séparables. Les états non-orthogonaux sont connectés l'un avec l'autre de telle sorte que sous l'effet de la mesure l'état du système peut passer de l'un à l'autre. L'ortho-séparabilité est un affaiblissement de la propriété classique d'orthogonalité.

Les particularités propres à la « connectivité » non-classique sont bien connues dans l'analyse de la perception visuelle. En regardant une image ambiguë, la représentation cérébrale (« l'état de perception ») peut sauter d'une image (complète)

---

16. Un système est dit irréductible s'il est possible de le faire transiter de n'importe quel état pur vers n'importe quel autre état pur par une séquence de mesures appropriées, voir ci-dessous.

vers une autre. Ces images différentes sont des perceptions d'une même image qui s'excluent mutuellement cependant l'état (de perception) peut transiter de l'une vers l'autre. Dans l'application à la psychologie et aux sciences humaines une interprétation des « des états comportementaux » (type) non-orthogonaux peut être formulée comme suit. Nous disons que deux états comportementaux sont connectés s'il existe deux contextes décisionnels (incompatibles entre eux) tels que, quand l'agent est sûr de son attitude dans le premier contexte, il est incertain (hésitant) dans le second et vice et versa. L'incertitude ne peut jamais être entièrement éliminée : quand elle est résolue dans un contexte, elle réapparaît dans l'autre. Une manière d'exprimer ce propos est de dire que l'agent non-classique est caractérisé par une irréductible multitude de « moi » : des inclinations (à agir) concurrentielles coexistent toujours dans l'esprit de la personne. L'exemple 3, section 2 est une illustration de cette idée. La personne n'est pas capable à résoudre son conflit intérieur dans les deux contextes décisionnels PD et UG simultanément.

### 6.1.2. Irréductibilité

Un sous-système irréductible (non trivial) est caractérisé par le fait que sous l'effet d'une série de mesures le système peut passer de n'importe quel état pur à n'importe quel autre état pur. Un système non-classique est une entité structurellement « plastique ». Et qui plus est, les transformations de l'état résultant de la mesure ne peuvent pas être prévues avec certitude.

Une thématique commune à la psychologie et à la neurobiologie est l'étude de la personne humaine comme entité qui évolue sans cesse. Ledoux (2003) souligne ce qu'il appelle « plasticité synaptique » : – le moi est une entité qui change perpétuellement, un réseau de synapses qui est formé par l'expérience plutôt qu'il n'accumule l'expérience de manière téléologique (cf. processus d'apprentissage). Dans les sciences sociales, cela s'exprime par la contextualité des préférences qui est extensivement confirmée dans les expériences de laboratoire (voir par exemple Kahneman et Tversky (2000) p. 518-528). L'approche non-classique fait apparaître la plasticité et la contextualité comme des conséquences directes de la connectivité (non-orthogonalité).

En physique quantique «les règles de transformation» (contenues dans les matrices de corrélation qui connectent les observables entre elles) ne dépendent pas du système individuel. Nous présumons qu'il existe suffisamment de régularités comportementales et psychologiques pour que cette hypothèse soit une approximation raisonnable en ce qui concerne les êtres humains. Ces régularités sont des objets d'étude de la neurologie et de la psychologie.

### 6.1.3. Stabilité de l'état

Le modèle mathématique de la mécanique quantique repose sur propriété cruciale de régularité qui signifie que sous l'impact d'une mesure un état pur transite vers un autre état pur parfaitement défini. Cela signifie en particulier qu'une mesure approximative laisse *inchangée* l'incertitude qui n'est pas résolue.

Dans le contexte de la psychologie, une interprétation possible est que lorsqu'une personne doit choisir à partir de l'état initial d'hésitation, cette hésitation est résolue afin de rendre possible la décision, mais sans plus. L'incertitude restante est laissée «intacte». Ce principe de «perturbation minimale» suppose donc une certaine stabilité de l'état comportemental (type). Si nous faisons l'hypothèse que la résolution d'une hésitation est liée à un certain effort, cela peut être considéré comme un «principe d'économie». Dans cette perspective, cette propriété de régularité apparaît comme assez raisonnable pour les «systèmes humains».

La théorie de base de la mesure non-classique permet de faire des prédictions qualitatives qui peuvent être testées et comparées à celles du modèle classique ou à celles d'autres théories comportementales. Lorsque l'on ajoute la propriété de régularité (perturbation minimale) nous obtenons le modèle Hilbertien de la mécanique quantique (sous une forme généralisée) ce qui permet, en principe, de faire les prédictions quantitatives exactes qui peuvent être vérifiées par l'expérience. Il faut souligner qu'en mécanique quantique les prédictions quantitatives exactes ne concernent que les propriétés primitives de systèmes simples. Dans les sciences du comportement et les sciences humaines, il est plus que probable que nous ayons affaire à des mesures plutôt approximatives qui ne mettent en évidence que

des ensembles de propriétés/caractéristiques du type plutôt que d'en isoler une de nature primitive. Cela signifie qu'une application «mécanique» du modèle d'espace hilbertien n'est pas recommandée en particulier cela concerne les tentatives d'obtenir des prédictions quantitatives.

#### **6.1.4. Avertissement**

Dans les applications aux sciences du comportement, notre théorie se caractérise par une particularité moins attrayante, à savoir que la mesure efface l'information sur l'état du système avant la mesure c'est-à-dire qu'il y a une forme de perte de mémoire. Néanmoins, il ne faut pas oublier qu'une personne consisterait en une multitude de systèmes irréductibles. Alors, l'amnésie ne serait de tout façon que locale, c'est-à-dire elle ne concernerait qu'un sous-système (irréductible). De plus, conformément au principe de perturbation minimale, même dans un tel sous-système, la mémoire ne serait complètement perdue que dans le cas où la mesure est complète (non grossière). Cependant notre approche implique les choix du passé n'ont qu'un impact limité sur le type présent de la personne. Elle peut se rappeler de ses choix mais ne se sent pas «obligée» par ceux-ci. Implicitement, nous supposons que les gens acceptent des changements de leur propre comportement qui ne sont pas motivés par des nouvelles connaissances mais plutôt par exemple dus à un simple changement de goût.

## **6.2. Préférences actualisée : une exploration**

La théorie classique de la décision repose sur une hypothèse selon laquelle les individus ont des préférences (un ordre linéaire) définies sur l'ensemble universel d'alternatives  $X$ . Ces préférences ne sont peut-être pas connues des autres mais l'individu lui-même les connaît et ces préférences peuvent être révélées en lui posant des questions (bien sûr nous faisons l'hypothèse que nous avons affaire à une personne honnête). Nous pouvons demander à un individu de ranger par ordre de préférence les options. Ou bien (si l'on doute que le comportement de cette personne soit régi par des préférences), nous pouvons lui demander de faire des

choix sur des sous-ensembles. Et si ces choix satisfont l'axiome de Houthacker (ou celui de Arrow ou de Sen), nous révélerons éventuellement un ordre complet. Comment doit-on modifier ce modèle simple lorsque nous avons affaire à des individus non-classiques ?

Nous n'avons pas l'intention de donner une réponse exhaustive à cette question. Plutôt nous en ferons une première exploration en étudiant un exemple simple.

Considérons la situation suivante. Nous disposons de trois items  $a$ ,  $b$  et  $x$ . Nous effectuons des expériences sur une population d'agents présumés identiques c'est-à-dire dans le même état. Nous leur demandons d'abord de faire leur choix dans la paire  $(a, b)$ . Puis nous leur demandons de faire un choix dans l'ensemble  $(a, b, x)$ . Mettons (pour simplifier) que la moitié de la population choisisse  $a$  dans  $(a, b)$  et l'autre moitié  $b$ . Dans la deuxième expérience (choix dans  $(a, b, x)$ ) nous observons que certains individus qui avaient choisi  $a$  dans  $(a, b)$  maintenant choisissent  $b$  et certains qui avaient choisi  $b$  choisissent  $a$ . Ceci est un exemple d'inversion des préférences ou de violation du principe d'indépendance du choix face aux alternatives non-pertinentes (ici  $x$ ). En effet la présence de  $x$  ne devrait pas affecter les préférences entre  $a$  et  $b$ .

Nous allons procéder à l'analyse de cette situation dans le cadre de la théorie développée ci-dessus que nous précisons avec les deux hypothèses suivantes :

- i. Tout choix entre deux items est une mesure de premier type ;
- ii. Le processus de choix dans un ensemble de plusieurs items est modélisé comme une séquence de choix (mesures) binaires.

La première hypothèse représente un affaiblissement de l'hypothèse faite implicitement dans le modèle standard qui pose que tout choix effectué sur un ensemble d'alternatives si grand soit-il est une mesure de premier type. La deuxième hypothèse précise le processus mental qui résulte en un choix. Dans le cadre classique cette hypothèse n'a aucune implication. En effet quelque soit l'ordre dans lequel l'individu effectue les mesures binaires le résultat sera le même. Dans notre contexte cette hypothèse nous permet de travailler avec des mesures de premier type sans faire l'hypothèse classique que tout ensemble de choix, si grand soit-il, est associé à une mesure de premier type.

La première expérience mesure les préférences entre  $a$  et  $b$ . Elle a deux résultats possibles :  $a > b$  et  $b > a$ . La deuxième expérience est une séquence de mesures binaires dont nous ne connaissons ni l'ordre, ni le nombre. Toute séquence est constituée d'une série constituée de deux ou plusieurs des quatre mesures possibles : choix dans  $(a, b)$ ,  $(b, c)$ ,  $(a, x)$ ,  $(b, x)$ , chacune ayant deux résultats.

Généralement les mesures binaires peuvent être soit compatibles (commutatives) soit incompatibles. Dans le cas où elles sont compatibles l'ordre n'a pas d'importance et que l'individu choisisse dans l'ensemble  $(a, b)$  ou bien  $(a, b, x)$  les préférences révélées sont les mêmes. Mais nous avons vu que le comportement de choix mis en évidence par l'expérience montrait que la relation entre  $a$  et  $b$  n'est pas toujours confirmée en présence de  $x$ . Cela suggère que les mesures binaires sont incompatibles auquel cas l'espace des états peut être représenté par le graphique ci-dessous.

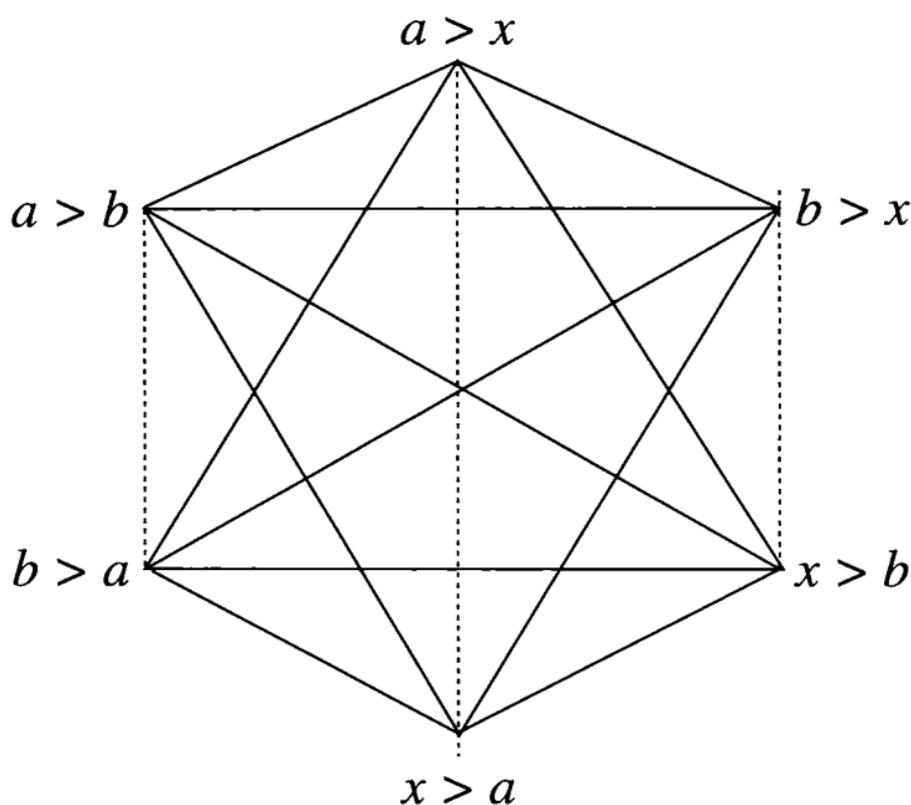


Figure 5

Nous voyons que les états  $a > b$  et  $b > a$  sont orthogonaux cependant il existe un « passage » entre les deux par exemple si on fait la mesure  $(a, x)$ .

La représentation de l'espace des états dans la figure 5 illustre l'absence d'existence d'un ordre de préférence sur l'ensemble  $(a, b, x)$ . Une autre manière d'exprimer cela est de dire que faire un choix dans le contexte décisionnel  $(a, b, x)$  n'est pas une mesure de premier type. Nous dirons que  $(a, b, x)$  n'est pas un ensemble de choix de premier type. La théorie générale ne donne pas d'indication précise quand à ce qui se passe quand nous effectuons une mesure qui n'est pas de premier type. Sous l'hypothèse que les choix binaires sont des mesures de premier type, nous pouvons cependant décrire ce processus comme une séquence de mesures de premier type incompatibles entre elles.

Bien entendu il est possible que certains phénomènes d'inversion des préférences soient dus au fait que l'individu ne possède aucune préférence, il choisit au hasard. Mais cela peut également révéler que les préférences sont des propriétés non-classiques. Dans ce cas nous devons abandonner l'hypothèse qu'il existe un ordre unique défini sur l'ensemble universel des options comme dans l'approche classique. En revanche nous permettons l'existence d'une multiplicité d'ordre de préférences définis sur des ensembles de choix (sous-ensembles de  $X$ ) de premier type incompatibles entre eux. Lorsque que l'on prend l'union de ces ensembles nous n'obtenons pas un ensemble de choix de premier type.

Nous allons à présent montrer comment cet exemple simple peut être interprété dans les termes de la littérature expérimentale en théorie du choix. Une hypothèse que l'on rencontre souvent dans cette littérature est le processus de choix est « lexicographique » plus précisément, ce processus inclut la sélection d'un attribut dominant (« prominent »). Selon les psychologues de la décision, l'attribut dominant est sélectionné pour faciliter le processus de choix et doit permettre de clairement distinguer entre les options (voir Kahneman et Tversky, p. 505). Cela signifie que la composition de l'ensemble de choix va déterminer quels attributs peuvent qualifier de dominant. Lichtenstein et Slovic (1968) initièrent une recherche sur « violation de l'invariance procédurale » reposant sur l'hypothèse de l'attribut dominant. Cette recherche se concentre sur des choix binaires et

compare la procédure de choix classique avec une procédure qui consiste à demander à l'agent de donner le prix qui le compenserait de la différence d'utilité entre les deux options. En particulier cette recherche ne s'intéresse pas aux situations où il n'existe pas d'attribut unique qui permette de distinguer entre plus de deux options. Cependant l'hypothèse du l'attribut dominant repose sur l'idée que l'individu est incapable de produire un critère synthétique de tous les attributs. Notre théorie peut contribuer à expliquer pourquoi il en est incapable et comment il procède pour faire ses choix.

Reprenons notre exemple ci-dessus. Dans chaque ensemble de choix nous pouvons distinguer deux candidats d'attribut dominant qui induisent respectivement le choix pour l'une ou l'autre des deux options. Ces deux candidats sont des alternatives mutuellement exclusive, ils orthogonaux l'un à l'autre. Mais les attributs candidats pertinents dans différents ensembles de choix ne sont pas nécessairement orthogonaux entre eux. Par exemple dans  $(a, b)$  nous pourrions avoir que le prix (conduisant au choix de  $a$ ) et la durée de la garantie (conduisant au choix de  $b$ ) soient les deux attributs, candidats à la dominance. Cependant pour le choix entre  $a$  et  $x$ , ni le prix ni la durée de la garantie ne sont des attributs pouvant guider le choix de manière intelligente. Par contre la taille et la beauté sont des attributs pertinents. Supposons que l'individu ait sélectionné le prix comme attribut dominant (en faisant le choix de  $a$ ). Si nous observons le genre d'inversion de préférence décrit plus haut, il se peut que ses attributs soient connectés entre eux à la manière des propriétés non-classiques. Selon cette théorie si l'individu maintenant choisit «la beauté» en sélectionnant  $a$  dans  $(a, x)$ , son état c'est-à-dire ses préférences ont été modifiées et c'est pourquoi il peut vouloir reconsidérer son choix dans  $(a, b)$ . Lorsqu'il est dans une humeur qui valorise la beauté, la valeur de la durée de la garantie peut lui apparaître sous un nouveau jour par exemple comme la valeur d'être libéré de préoccupation pratique comme celle d'avoir à acheter un nouvel objet pour remplacer celui qui se serait cassé. Cela conduira, avec une certaine probabilité, au choix de  $b$ .

Cet exemple illustre quelques distinctions clés entre la théorie du choix classique et une théorie du choix fondée sur la théorie non-classique de la mesure. Un agent non-classique n'a

pas de préférences définies sur l'ensemble universel des options  $X$ , seulement sur des sous-ensembles de  $X$ . Les préférences sur les ensembles de choix de premier type sont traitées comme des propriétés non-classiques. Certaines peuvent ne pas être compatibles entre elles c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas être actualisées simultanément. Un agent non-classique ne se comporte pas comme un agent classique car son comportement est caractérisé par des éléments probabilistes irréductibles. Un agent non-classique ne se comporte pas comme dans la théorie du choix stochastique non plus. Dans un ensemble de choix de premier type, une fois qu'il a fait son choix il le répète par force de la propriété de mesure de premier type (sauf si entre ces choix il est confronté à un autre contexte décisionnel incompatible avec le premier).

## 7. CONCLUSIONS

Dans ce chapitre nous avons donné quelques éléments de description de la structure mathématique de base de la théorie de la mesure non classique. L'objectif a été d'explorer d'un point de vue théorique la pertinence de cette théorie pour la description, l'explication et la prédiction des comportements humains.

Nous avons défendu la thèse selon laquelle les axiomes et les propriétés de base qui soutiennent la théorie, peuvent être interprétés de manière cohérente aux vues de thèmes centraux étudiés en psychologie, en science du comportement et en sciences sociales. L'homme non-classique qui émerge de notre exploration est une créature structurellement plastique. Cela est dû à la propriété de non-orthogonalité (connectivité) des états purs (correspondants à des propriétés psychologiques ou des caractéristiques de type incompatibles). Cet élément central de la théorie implique une incertitude irréductible dans les comportements. C'est aussi la source du changement d'état. Lorsque qu'une personne interagit avec son environnement dans un contexte décisionnel donné, une certaine incertitude est résolue ce qui induit un changement de son état comportemental. L'homme non classique est essentiellement contextuel.

Dans un exemple simple nous illustrons comment cette approche peut être utilisée pour expliquer le phénomène d'inver-

sement de préférences et nous formulons des ingrédients de base d'une théorie des préférences actualisées.

## BIBLIOGRAPHIE

- Aerts D. and S. Aerts (1994), « Applications of Quantum Statistics in Psychological Studies of Decision Processes », *Foundations of Sciences*, 85-97.
- Beltrametti E. G. and G. Cassinelli, (1981), « The Logic of Quantum Mechanics », *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Ed. G-C Rota, Vol. 15, Addison-Wesley, Massachussets.
- Birkhoff G. and J. von Neumann (1936), « The Logic of Quantum Mechanics », *Annals of Mathematics*, 37/4, 823-843.
- Busemeyer J. R. Z. Wang and J. T. Townsend (2006), « Quantum Dynamic of Human Decision-making », *Journal of Mathematical Psychology*, 50, 220-241.
- Coecke B., Moore D.J. and Wilce A. (2000), *Current Research in Operational Quantum Logic: Algebra, Categories, Languages*, Kluwer Academic Publishers.
- Danilov V. I and A. Lambert-Mogiliansky (2008), « Measurable Systems and Behavioral Sciences », *Mathematic Social Sciences*, 55/3, 315-340.
- Eisert J., M. Wilkens and M. Lewenstein (1999), « Quantum Games and Quantum Strategies », *Phys. Rev. Lett.*, 83, 3077-3080.
- Erev I., G. Bornstein and T. Wallsten (1993), « The Negative Effect of Probability Assessment on Decision Quality », *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 55, 78-94.
- Foulis D.J., and Randal C.H., (1978), « Manuals, Morphism and Quantum Mechanics », in A. Marlow, *Mathematical Foundations of Quantum Theory*, New York.
- Geanakoplos J., D. Pierce, and E. Stacchetti, (1989), « Psychological Games and Sequential Rationality », *Games and Economic Behavior*, 1, 60-79.
- Holland S. S. JR. (1995), « Orthomodularity in Infinite Dimensions; a Theorem of M. Soler », *Bulletin of the American Mathematical Society*, 32, 205-234.
- Kahneman D. and A. Tversky (2000), *Choice, Values and Frames*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Kalmbach G. (1983), *Orthomodular Lattices*, Academic press, London.
- Khrennikov A. (2007), « Quantum-like Description of Probabilistic Data from the Shafir-Tversky Experiment – Evidence of Trigonometric

and Hyperbolic Interference», [www.arXiv.org](http://www.arXiv.org): gen-ph/0708.2993v2.

- Lambert-Mogiliansky A, S. Zamir and H. Zwirn (2009), « Type Indeterminacy – A model of the KT(Kahneman–Tversky)-Man », in press *Journal of Mathematical Psychology*.
- La Mura P. (2005), « Correlated Equilibrium of Classical Strategic Game with Quantum Signals », Special issue on the foundations of quantum information, *International Journal of Quantum Information* 3/1 183-188.
- Mackey G. W. (1957), « Quantum Mechanics and Hilbert Space », *American Mathematical Monthly* 64/2, 45-57.
- Mackey G. W. (2004, first ed. 1963), *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Dover Publication, Mineola New York.
- Moore D.J., (1999), « On State Space and Property Lattices », *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 30/1, 61-83.
- Tversky A. and E. Shafir (1992), « The Disjunction Effect in Choice under Uncertainty », *Psychological Science*, 3/5, 305-309.
- Tversky A. and I. Simonson (1993), « Context-dependent Preferences », *Management Sciences*, 39, 85-117.
- Sen A. (1997), « Maximization and the Act of Choice », *Econometrica*, 65, 745-779.
- Von Neumann John, (1996 first edition 1955), *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton Landmarks in Mathematics.
- Wright R. (2003), *Statistical Structures Underlying Quantum Mechanics and Social Sciences*, [www.arXiv.org](http://www.arXiv.org): quant-ph/0307234.

V. I. Danilov

*CEMI, Académie des Sciences de Russie, Moscou,*  
*[danilov@cemi.rssi.ru](mailto:danilov@cemi.rssi.ru), [vdanilov43@mail.ru](mailto:vdanilov43@mail.ru)*

A. Lambert -Mogiliansky

*PSE, Paris School of Economics, Paris,*  
*[alambert@pse.ens.fr](mailto:alambert@pse.ens.fr)*

# Théorie non-classique de l'utilité espérée

## 1. INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous développons une extension de l'approche (standard) de Savage à la prise de décision dans l'incertain, au cadre de la théorie non-classique de la mesure (c'est-à-dire au cadre mathématique de la mécanique quantique). Formellement cela signifie que nous substituons à l'algèbre Booleenne une structure plus générale celle des ortho-treillis. Afin de d'offrir une première justification à notre démarche nous allons revisiter la théorie de Savage dans une version simplifiée. Chez Savage le problème est l'évaluation d'« actes » dont le résultat ou les conséquences sont incertaines. Une première simplification consiste à faire l'hypothèse que nous sommes capables de fournir une mesure cardinale des résultats – en « utiles », c'est-à-dire en unité d'utilité (nous serons plus précis par la suite).

Un acte mène à un résultat mais ce résultat est incertain. Comment formaliser des actes dont les résultats sont incertains ? L'approche standard est la suivante. Il existe un ensemble  $X$  d'états de la Nature qui peuvent se réaliser. Un acte correspond à une fonction  $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ . Si l'état  $s \in X$  est réalisé notre agent reçoit  $f(s)$  utiles. Mais il n'est pas possible de savoir à l'avance quel est l'état qui se réalisera. Le problème est que l'agent doit faire son choix parmi les actes avant d'apprendre l'état du monde. Ceci est le cœur du problème.

Parmi les actes, il y a ceux que l'on appelle des *actes constants*, c'est-à-dire des actes dont le résultat est connu à l'avance, ils ne dépendent pas de l'état du monde  $s$ . Un acte constant est décrit par un nombre réel  $c \in \mathbf{R}$ . Pour cette raison il est naturel d'associer à tout acte  $f$  son « équivalent certain »  $EC(f) \in \mathbf{R}$ . Cela correspond à définir l'acte constant  $c$  (dont le résultat en utiles est égal à  $EC(f)$ ) tel que notre décideur est indifférent entre l'acte  $f$  et l'acte constant (avec une valeur en utilité  $EC(f)$ ). Le premier

postulat de ce modèle de Savage simplifié affirme l'existence de l'équivalent certain :

- S1. Il existe un équivalent certain  $EC : R^X \rightarrow R$  et pour l'acte constant  $1_X$  nous avons  $EC(1_X) = 1$ .

Il est assez naturel d'exiger de la correspondance  $EC$  qu'elle soit monotone :

- S2. Si  $f \leq g$  alors  $EC(f) \leq EC(g)$ .

La propriété principale que nous imposons à  $EC$  est la linéarité

- S3.  $EC(f + g) = EC(f) + EC(g)$  pour tout  $f$  et  $g \in R^X$ .

Présenté de cette manière cela semble être une exigence très sérieuse. Savage lui-même préférerait la « cacher » derrière ce qu'il appelait « le principe de la chose certaine » de sorte que la linéarité était en quelque sorte dérivée. Mais en ce qui nous concerne cela serait plutôt un artifice.

En fait l'axiome S3 devrait être compris comme une condition d'additivité plutôt que de linéarité. Associé avec la monotonie il implique vraiment la linéarité c'est-à-dire  $EC(\alpha f + \beta g) = \alpha EC(f) + \beta EC(g)$  pour tout  $\alpha, \beta \in R$ .  $EC(f)$  peut s'écrire sous la forme  $EC(f) = \sum f(x)\mu(x)$ , une fonctionnelle linéaire sur l'espace vectoriel  $R^X$ . Par l'axiome S2  $\mu \geq 0$ ; par  $EC(1_X) = 1$  nous avons  $\sum_x \mu(x) = 1$ . Et donc  $\mu(x)$  peut être interprété comme la probabilité pour la réalisation de l'état  $x$ . Parfois cette probabilité est appelée subjective ou personnelle. Parce qu'elle n'exprime que la probabilité qu'un certain agent assigne à la réalisation de l'état  $x$ . Avec cette interprétation  $EC(f)$  devient une utilité espérée, l'utilité espérée associée à l'acte incertain  $f$  (il est plus correct de dire associée à l'acte  $f$  aux conséquences incertaines).

Avec cette approche nous pouvons assigner des probabilités non seulement aux états mais aussi à n'importe quel sous-ensemble d'états (ou événements)  $A \subset X$ .  $\mu(A)$  peut être compris soit comme la somme  $\sum_{x \in A} \mu(x)$ , ou comme  $EC(1_A)$ , où  $1_A$  est la fonction caractéristique du sous-ensemble  $A$ . L'interprétation dans la seconde formulation est claire : l'acte  $1_A$  est un pari sur l'événement  $A$  tel que nous recevons une utile si l'événement  $A$  se réalise et zéro sinon (si l'événement complémentaire  $A'$  survient). Le décideur peut comparer ces paris sur les événements et donc il peut comparer les événements en termes de leur probabilité.

Ainsi nous en arrivons à la notion de mesure qualitative des probabilités.

Notre idée centrale est de remplacer le treillis d'événements Booléen par un ortho-treillis. Les premiers pas dans cette direction furent accomplis il y a longtemps avec la création de la mécanique quantique. L'espace Hilbertien fit son entrée dans la théorie immédiatement, avec von Neumann qui proposa un treillis de projecteurs dans l'espace de Hilbert comme le modèle convenant à la physique quantique – à la place de la logique (Booléenne) classique. Birkhoff et von Neumann dans leur article fondateur de 1936 explorèrent les propriétés nécessaires à cette logique non-distributive. Récemment un petit nombre d'articles en théorie de la décision sont apparus dans lesquels la théorie de l'utilité espérée standard est transposée dans l'espace de Hilbert. À part l'argument formel, la motivation pour ce genre de recherche est qu'une description plus générale du monde permet d'expliquer certaines anomalies de comportement comme par exemple le paradoxe de Eldsberg (voir La Mura, dans ce volume).

Lehrer et Shmaya (2005) écrivent « Nous adoptons une approche similaire et l'appliquons au cadre de la mécanique quantique... alors que les probabilités classiques sont définies sur des sous-ensembles (des événements) de l'espace des états, les probabilités quantiques sont définies sur des sous-ensembles de l'espace de Hilbert ». Gyntelberg and Hansen (2004) font usage d'un treillis d'événements général (avec des axiomes qui ressemblent à ceux de von Neumann et Morgenstein). On aurait pu s'attendre à ce que Gyntelberg et Hansen vraiment travaillent avec des treillis généraux mais non, eux aussi se tournent immédiatement vers les sous-espaces de l'espace de Hilbert. Notre premier objectif est de montrer qu'il n'y a pas de nécessité pour l'espace de Hilbert, et que l'approche de Savage peut être tout aussi bien (sinon mieux) développée dans le cadre général des ortho-treillis. Une autre source de motivations que nous partageons avec les autres articles de théorie de la décision dans ce domaine (voir Busemeyer et Townsend, La Mura, Khrennikov) est que ce modèle peut être une meilleure représentation du monde subjectivement perçu. Pour des aspects non-classiques de la perception voir Atmanspacher et al., dans ce volume. Par ailleurs il a été proposé que les agents soient modé-

lisés comme des systèmes non-classiques dont le type est incertain et donc endogène à l'interaction (voir chapitre précédent et Zwirn dans ce volume). Dans la section 5 nous illustrons avec quelques exemples dans cet esprit la distinction entre l'approche classique standard et l'approche non-classique générale développée dans ce chapitre.

## 2. PROBABILITÉS NON-CLASSIQUES

Un ortho-treillis est un ensemble ordonné tel que chacun de ses sous-ensembles y compris l'ensemble vide a une limite inférieure maximale ( $\vee$  ou *sup*) et une limite supérieure minimale ( $\wedge$  ou *inf*) qui garantit l'existence d'un élément maximal  $\mathbf{1}$  et d'un élément minimal  $\mathbf{0}$ . Un ortho-treillis est un treillis équipé d'une opération d'ortho-complémentation  $\perp: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ . Cette opération est supposée être une involution ( $a^{\perp\perp} = a$ ), renverser l'ordre ( $a \leq b$  si et seulement si  $b^{\perp} \geq a^{\perp}$ ) et satisfaire la condition suivante  $a \vee a^{\perp} = \mathbf{1}$  (ou de manière équivalente  $a \wedge a^{\perp} = \mathbf{0}$ ).

Nous allons défendre la thèse selon laquelle les ortho-treillis sont la structure naturelle pour tous les concepts utilisés en théorie de la décision dans l'incertain. Tout comme dans le modèle Booléen nous pouvons parler d'intersection ( $\wedge$ ) et d'union ( $\vee$ ) de même que de complémentation (ou de négation et la comprendre comme une ortho-complémentation). Toutes les relations usuelles entre ces opérations sont préservées à l'exception d'une: la loi de distributivité qui n'est pas satisfaite dans le cas général, mais est-elle souvent utilisée? Dans les preuves de quelques théorèmes et propositions peut-être. Mais pas dans la formulation des concepts.

Un premier point central est qu'il est possible de parler de probabilités qui peuvent être vues comme une saturation quantifiée du squelette de l'ortho-treillis.

Nous allons à présent montrer que les concepts de bases des probabilités sont transposables aux ortho-treillis.

La théorie des probabilités commence par la définition d'un ensemble  $X$  d'événements élémentaires. Après elle se développe avec la définition d'événements généraux. Dans notre langage des événements (ou propriétés) sont les éléments d'un ortho-

treillis  $\mathcal{L}$ . Le second concept de base est celui de «collection d'événements mutuellement exclusifs». Dans le modèle classique c'est simplement une partition de l'ensemble  $X$ , c'est-à-dire une décomposition  $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$  où les  $A_i$  sont disjoints entre eux. Dans le cas général la notion de collection d'éléments mutuellement exclusifs doit être remplacée par la notion de Décomposition Orthogonale de l'Unité (DOU).

**Définition.** Une Décomposition Orthogonale de l'Unité (DOU) dans un ortho-treillis  $\mathcal{L}$  est une famille (finie) d'éléments  $\alpha = (a(i), i \in I(\alpha))$  de  $\mathcal{L}$  satisfaisant la propriété suivante: for tout  $i \in I(\alpha)$

$$a(i)^\perp = \bigvee_{j \neq i} a(j)$$

La justification pour cette formulation est que  $a(i) \perp a(j)$  pour  $i \neq j$  et  $\bigvee_i a(i) = \mathbf{1}$ . Par exemple la famille à élément unique  $\mathbf{1}$  est une DOU triviale. Et pour tout  $a \in L$  la famille à deux éléments  $(a, a^\perp)$  est une DOU que nous appelons une *question* sur la propriété  $a$ . Intuitivement la famille  $\alpha$  doit être comprise comme une mesure (ou une grille ou source d'information) avec un ensemble de résultats possibles  $I(\alpha)$ . Si une telle mesure produit un résultat  $i$  nous en concluons que le système possède la propriété  $a(i)$  (ou que l'événement  $a(i)$  s'est réalisé). Supposons que nous puissions préparer le système dans un état donné et de manière répétée effectuer des mesures (chaque fois sur le système dans le même état). Le résultat de la mesure peut différer d'une mesure à l'autre. Imaginons que nous ayons effectué  $n$  ( $n$  relativement large) mesures de cette sorte et que le résultat  $i$  ait été obtenu  $n_i$  fois. Alors nous pouvons assigner à chaque résultat  $i$  la probabilité  $p_i = n_i/n$ . En fait nous avons que  $p_i \geq 0$  et  $\sum p_i = 1$ . Ceci nous amène à la définition suivante :

**Définition.** Une évaluation sur un ortho-treillis est  $L$  est une correspondance  $\nu : \mathcal{L} \rightarrow R$ .

Une évaluation est dite

- 1) *nonnegative* si  $\nu(a) \geq 0$  pour tout  $a \in \mathcal{L}$ ;
- 2) *monotone* si  $\nu(a) \geq \nu(b)$  lorsque  $a \geq b$ ;
- 3) *normée* si  $\nu(\mathbf{1}) = 1$ ;
- 4) *additive* (ou une *mesure*) si  $\nu(a \vee b) = \nu(a) + \nu(b)$  pour  $a$  et  $b$  des événements orthogonaux. Nous écrivons  $a \oplus b$  plutôt que  $a \vee b$  pour souligner le fait que  $a \perp b$ .

5) *probabiliste* (ou simplement une probabilité) si elle est non-négative et  $\sum_i \nu(a(i)) = 1$  for toute DOU  $\alpha : a(i), i \in (I)$ .

Il y a un cas important dans lequel tout se simplifie et se rapproche du cas classique. C'est le cas des treillis ortho-modulaires. Ce sont des treillis qui satisfont la propriété d'ortho-modularité : si  $a \leq b$  alors  $b = a \vee (b \wedge a^\perp)$ . Il est clair que tout treillis Booléen est ortho-modulaire. Nous affirmons que pour les treillis ortho-modulaires la propriété 5) implique 3) et 4).

**Lemme.** Si  $\mathcal{L}$  est un treillis ortho-modulaire alors toute probabilité sur  $\mathcal{L}$  est additive et monotone.

Les preuves sont omises. Elles peuvent être consultées sur [www.arxiv.gov/physics/0606056](http://www.arxiv.gov/physics/0606056).

Donc dans le cas des treillis ortho-modulaires, une probabilité peut aussi être définie comme une mesure normée non-négative.

### 3. MESURES QUALITATIVES

Comme nous l'avons dit plus haut nous modélisons l'incertitude avec un ortho-treillis de propriétés ou d'événements. Si nous comprenons les éléments du treillis comme des événements nous pouvons parler de probabilité plus ou moins grande de leur réalisation. Par la suite nous nous concentrons sur la relation qualitative « plus (ou moins) probable que » entre événements.

**Définition.** Une mesure qualitative sur un ortho-treillis  $\mathcal{L}$  est une relation binaire  $^\circ$  sur  $\mathcal{L}$  qui satisfait les deux axiomes suivants :

QM1  $^\circ$  est complète et transitive.

QM2 Si  $a^\circ b$  et  $a'^\circ b'$ . Alors  $a \oplus a'^\circ b \oplus b'$  (rappelons que cela signifie que  $a \perp b$  et  $a' \perp b'$ . La dernière inégalité est stricte si au moins une des premières inégalités est stricte.<sup>1</sup>

Une mesure qualitative est générée par une mesure (quantitative)  $\mu$  quand  $a^\circ b$  si et seulement  $\mu(a) \geq \mu(b)$ . Dans cette section nous nous intéressons à la question de savoir sous quelles conditions une mesure qualitative peut-elle être générée par une mesure quantitative (c.a.d quand existe-t-il une sophistication

1. Le cas spécial de QM2 ou  $a' = b'$  est appelé l'axiome de De Finetti.

probabiliste). Par simplicité nous allons supposer que le treillis  $\mathcal{L}$  est fini. Mais même dans le contexte classique la réponse est en général négative (Kraft, Pratt, Seidenberg 1959). Pour cette raison et afin d'obtenir une réponse positive nous devons imposer quelques conditions de plus qui renforcent QM2. Nous allons considérer une condition qui généralise la condition classique dite d'annulation. Nous préférons l'appeler «hyper acyclique».

**Définition.** Une relation binaire sur  $\mathcal{L}$  est dite hyper-acyclique si la condition suivante est vérifiée :

Supposons que nous ayons une collection finie de paires  $(a_i, b_i)$  et que  $a_i \circ b_i$  pour tous les  $i$  et pour certains  $i$  l'inégalité est stricte. Alors  $\Sigma\mu(a_i) \neq \Sigma\mu(b_i)$  pour quelque mesure  $\mu$  sur  $\mathcal{L}$ .

Il est clair que la propriété d'hyper-acyclique implique l'acyclique.

Clairement si une relation qualitative  $\circ$  est générée par une mesure  $\mu$  alors elle est hyper-acyclique. Le résultat principal de cette section affirme que pour des ortho-treillis finis l'inverse est également vrai.

**Théorème 1.** Soit  $\circ$  une mesure qualitative hyper acyclique sur un treillis fini  $L$ . Alors  $\circ$  est générée par une mesure  $\mu$  sur  $\mathcal{L}$ .

Clairement si la relation est monotone (c'est-à-dire  $a \circ b$  pour  $a \geq b$ ) alors toute mesure  $\mu$  qui génère  $\circ$  est aussi monotone. Si en plus  $0 \neq \mathbf{1}$  alors  $(\mu(\mathbf{1}) < 0$  et en divisant la mesure  $\mu$  par  $\mu(\mathbf{1})$  nous pouvons faire l'hypothèse que  $\mu$  est une mesure normalisée. Donc la mesure  $\mu$  est une probabilité monotone.

#### 4. THÉORIE NON-CLASSIQUE DE L'UTILITÉ ESPÉRÉE

Tout d'abord nous devons formuler une généralisation du concept Savagien d'acte. Très simplement on peut dire qu'un acte est un pari sur le résultat d'une mesure.

**Définition.** Un acte est une paire  $(\alpha, f)$  où  $\alpha = (a(i), i \in I(\alpha))$  est une DOU (ou une mesure) et  $f: I(\alpha) \rightarrow R$  est une fonction.

Nous appelons  $\alpha$  la base de notre acte. Intuitivement si un résultat  $i \in I(\alpha)$  se réalise comme le résultat de la mesure  $\alpha$  alors l'agent reçoit  $f(i)$  utiles.

De cette manière l'ensemble des actes ayant  $\alpha$  pour base, peut-être identifié avec l'ensemble (un espace vectoriel)  $F(\alpha) = R^\alpha$ . L'ensemble de tous les actes  $F$  est l'union disjointe des  $F(\alpha)$  pris sur tous les DOU  $\alpha$ .

Nous nous intéressons à une comparaison entre les actes en termes de leur attractivité pour notre décideur. Nous commençons par une expression implicite de cette comparaison. Supposons que notre agent décideur connaisse (ou plus précisément qu'il croit connaître) l'état du système, c'est à dire supposons qu'il ait à l'esprit une mesure (subjective) de probabilité  $\mu$  sur l'ortho-treillis  $\mathcal{L}$ . Alors pour tout acte  $f$  sur la base  $\alpha = (a(i) | i \in I(\alpha))$ , il peut calculer le nombre suivant (la valeur espérée de l'acte  $f$ )

$$EC_\mu(f) = \sum \mu(a(i))f(i)$$

En utilisant ces nombres l'agent peut comparer les différents actes.

Nous allons à présent, suite à Savage, faire le chemin inverse. Nous commençons par la relation  $\circ$  représentant des préférences sur l'ensemble  $F$  de tous les actes, puis nous formulons des axiomes, imposons des conditions et nous en arriverons à la conclusion que ces préférences peuvent être expliquées par une mesure  $\mu$  sur  $\mathcal{L}$ .

Plus précisément à la place de la relation  $\circ$  sur l'ensemble  $F$  des actes nous faisons l'hypothèse immédiatement qu'il existe un équivalent certain  $EC(f)$  pour tout acte  $f \in F$ . Bien sûr cela simplifie un peu le problème. Mais cette simplification n'est pas liée à la question de la nature classique ou non classique de l'incertitude ; c'est simplement une affirmation de l'existence d'une fonction utilité sur l'ensemble des actes. Il eût été possible d'obtenir l'existence de cette fonction d'utilité avec d'autres axiomes. Nous avons choisit cette voie plus directe.

Étant donné cela nous allons simplement imposer trois conditions sur  $EC$ . Les deux premières concernent des actes définis sur une même base. Ces actes sont identifiés avec des éléments de l'espace vectoriel  $F(\alpha) = R^\alpha$ .

**Axiome de monotonie.** La restriction de  $EC$  sur chaque  $F(\alpha)$  est une fonctionnelle monotone.

**Axiome de linéarité.** Pour toute mesure  $\mu$  la restriction  $EC$  sur  $F(\alpha)$  est une fonctionnelle linéaire.

Le troisième axiome relie des mesures différentes mais dans un certain sens comparables. Considérons deux DOU ( $\alpha = (a(i) \in I(\alpha))$  et  $\beta = (b(i) \in I(\beta))$ ) nous disons que la mesure  $\alpha$  est plus fine que la mesure  $\beta$  si il existe une correspondance  $\varphi : I(\alpha) \rightarrow I(\beta)$  telle que  $a(i) \leq b(i)$  pour tout  $i$ . Cela signifie simplement que quand nous connaissons le résultat de la première mesure  $\alpha$  nous connaissons également celui de la deuxième, sans l'effectuer – c'est  $j = \varphi(i)$ . Notons également que la correspondance de transformation  $\varphi$  est définie de manière unique. Supposons que  $\varphi(i)$  appartienne simultanément à  $b(j)$  et  $b(k)$ . Alors  $a(i)$  appartient à  $b(j)$  et  $b(k)$ . Mais puisque  $b(j)$  et  $b(k)$  sont orthogonaux  $b(j) \wedge b(k) = \mathbf{0}$  alors  $a(i) = 0$ . Mais ce type d'événements ne rentre que de manière purement formelle dans la décomposition de l'unité et peut être négligé.

Quoiqu'il en soit la correspondance  $\varphi : I(\alpha) \rightarrow I(\beta)$  définit la correspondance

$$\varphi^* : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$$

Pour une fonction  $g$  sur  $I(\beta)$ , la fonction  $\varphi^*(g)$  en un point  $i$  prend la valeur  $g(\varphi(i))$ .

Intuitivement, les paiements des deux fonctions (actes)  $g$  et  $f = \varphi^*(g)$  sont identiques dans toutes les situations. Pour cette raison notre agent devrait les considérer comme équivalentes et leur assigner le même équivalent certain. Ceci est l'idée de l'axiome qui suit.

**Axiome de concordance.** Supposons qu'une mesure  $\alpha$  est plus fine que  $\beta$  et est la correspondance  $\varphi^* : F(\alpha) \rightarrow F(\beta)$  lui correspondant. Alors  $EC(g) = EC(\varphi^*(g))$  pour tout  $g \in F(\beta)$ .

Prenons par exemple  $f$  pour la fonction constante avec valeur 1 dans  $I(\alpha)$ . L'axiome de concordance dit que l'agent est indifférent entre les deux actes suivants. Le premier est de recevoir 1 sans faire de mesure. Le second est de faire la mesure et (indépendamment du résultat) de recevoir une unité d'utile.

Enfin la dernière condition qui ne peut être appelée un axiome dit que l'utilité de l'acte trivial avec un paiement de 1 est égale à 1. C'est-à-dire  $EC(1) = 1$ .

**Théorème 2.** Supposons qu'un équivalent certain  $EC$  satisfasse les axiomes de monotonie, de linéarité et de concordance. Alors il existe une évaluation probabiliste  $\mu$  sur  $\mathcal{I}$  telle que

$EC(f) = \sum \mu(a(i))f(i)$  pour tout acte  $f$  sur la base de la mesure  $\alpha = (a(i) \in I(\alpha))$ . De plus la mesure  $\mu$  est définie de manière unique.

Nous n'affirmons pas encore que l'évaluation  $\mu$  est monotone. Cela peut être fait en substituant l'axiome de concordance par l'axiome plus fort de dominance que nous énonçons ci-dessous. Pour le détail de l'argument voir [www.arxiv.physics/0606056](http://www.arxiv.physics/0606056).

**Axiome de dominance.** Si  $f \leq g$  alors  $EC(f) \leq EC(g)$ .

Il est clair que l'axiome de dominance implique la monotonie. Nous affirmons qu'il implique également l'axiome de concordance.

**Théorème 3.** Supposons que les axiomes de linéarité et de dominance soient satisfaits. Alors EC est une utilité espérée pour quelque mesure  $\mu$  de probabilité sur  $\mathcal{L}$ .

Et ainsi nous trouvons que l'argument de Savage peut-être formulé dans le cadre général des ortho-treillis.

## 5. ILLUSTRATION: L'INCERTITUDE NON-CLASSIQUE SUR LES TYPES

Nous avons développé une approche très générale de la décision dans un environnement incertain. Une question naturelle est si cette généralité a une réelle valeur pour la théorie de la décision. Existe-t-il des événements ou propriétés de la Nature pertinents à la prise de décision qui soient de nature à nécessiter une modélisation si générale? N'est-il pas toujours possible de trouver une représentation classique convenante? En effet considérons le cas où les états de la nature pertinents à la l'évaluation de la décision sont comme dans l'exemple classique de Savage à savoir « l'œuf que je veux ajouter à l'omelette est frais ou pourri? ». Il est clair que le l'ortho-treillis représentant la Nature est Booléen, il possède deux états: l'œuf est frais, l'œuf est pourri. On peut vraiment se demander si la vie réelle offre des exemples de contextes décisionnels où l'incertitude doit être représentée avec un treillis non Booléen.

Dans cette section nous proposons un exemple. Il correspond au cas où le décideur fait face à une incertitude quant à

l'identité de la personne à qui il a affaire. C'est à dire ce que nous appelions Nature est ici un autre décideur. Nous invitons le lecteur à consulter le chapitre précédent et Zwirn dans ce volume. Pour une formulation et une motivation de la thèse selon laquelle les agents décideurs (représentés par leurs préférences ou type) peuvent être modélisés comme des systèmes non-classique. Dans ce contexte le terme « type » est équivalent au terme état lorsque nous parlons de systèmes arbitraires ou de la Nature. Une situation de décision notée  $SD$  est une  $DOU$  qui mesure une « caractéristique de type » de l'agent. Une caractéristique de type est donc l'équivalent de ce que nous appelions propriété ou événement.

L'approche standard de l'incertitude sur le type des agents dans le contexte de situations interactives (de jeux) est due à Harsanyi. Toute l'incertitude sur les aspects physiques des fonctions de paiement, sur les fonctions d'utilité et sur les espaces de stratégie est capturée dans le type des joueurs. L'incertitude c'est-à-dire les croyances des joueurs sur le type des autres sont représentées par un treillis Booléen de caractéristiques de type. Nous allons à présent considérer quelques exemples où un joueur classique interagit avec un joueur de type indéterminé c'est-à-dire un joueur représenté par un treillis général de caractéristiques de type.

## 5.1. Jouer avec un opposant non-classique

Nous commencerons par transposer le modèle général à une situation de jeu simple. Puis nous illustrerons la distinction entre la représentation classique et la représentation non-classique avec quelques exemples.

### Les j-actes

Une équivalence formelle avec le modèle non-classique de Savage très immédiate s'obtient lorsque nous considérons un jeu séquentiel à deux pas ou notre décideur (nous l'appellerons joueur 1) fait le premier pas et l'opposant (le joueur 2) fait le second pas ce qui conclut le jeu. Nous considérons le problème du point de vue du joueur 1 qui lui est classique, qui connaît son type et qui a des croyances sur le type de l'opposant.

Le joueur non-classique est représenté par son type, un élément  $\theta \in (\Theta, \perp)$ . Ou de manière équivalente le joueur 2 est

décrit par une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathcal{L}$  l'ortho-treillis de caractéristiques de type correspondant. Le type  $\theta$  ou la mesure  $\mu$  exprime les croyances du joueur 1 sur le type du joueur 2.

Nous commençons par une définition d'un acte-jeu ou j-acte qui parallèle celle d'acte dans le modèle non-classique de Savage.

**Définition.** Un j-acte est une paire  $(\alpha, f)$  où  $\alpha = (a(i) | i \in I(\alpha))$  est une DOU (où une mesure) et  $f: I(\alpha) \rightarrow R$  est une fonction de paiement.

La motivation pour le terme j-acte est qu'un j-acte représente un « pas » dans une interaction, tel que ce pas implique un pari sur le comportement incertain de l'opposant. Dans notre séquence de mouvements seulement le pas du premier joueur peut qualifier de j-acte. Il induit une mesure  $\alpha$  correspondant à une situation de décision  $SD$  pour le joueur 2. Le parallèle avec le modèle général est immédiat : choisir un j-acte c'est faire un pari (sélectionner une mesure) sur le type du joueur 2. Le résultat de la mesure c'est la décision prise par le joueur 2. Lorsque le joueur 2 choisit  $i$  c'est-à-dire lorsque le type  $a(i)$  est actualisé, le joueur 1 reçoit  $f(i)$  utiles (cardinales).

Supposons que le joueur 1 (connaisse ou croit connaître) le type  $\theta \in \Theta$  du joueur 2 ou, de manière équivalente, il connaît la mesure de probabilité  $\mu$  sur  $\mathcal{L}$ . C'est-à-dire la distribution de probabilité sur les décisions dans les différents  $\alpha \in F$ . Alors pour  $f: I(\alpha) \rightarrow R$  sur la base  $\alpha = (a(i) | i \in I(\alpha))$  et  $g: I(\beta) \rightarrow R$  sur la base  $\beta = (b(i) | i \in I(\beta))$  le joueur 1 peut calculer et comparer les nombres suivants (valeurs espérées)

$$EC(f; \mu) = \sum_i \mu(a(i))f(i) \text{ et}$$

$$EC(g; \mu) = \sum_i \mu(b(i))g(i).$$

Faisant appel au Théorème 3 nous savons que si les axiomes de linéarité et de dominance sont satisfaits, alors, nous pouvons définir un  $EC$  qui est une utilité espérée pour tout type initial (du joueur 2). On voit que les types ou les mesures de probabilités sur l'ortho-treillis de caractéristiques de type, jouent un rôle similaire à celui des croyances dans le modèle d'Harsanyi pour l'analyse de la maximisation de l'utilité du joueur classique confrontant un opposant non-classique. Le

décideur rationnel sélectionne parmi les  $j$ -actes possibles celui qui est associé à l'utilité espérée la plus grande.

## 5.2. Exemples

Nous illustrons maintenant la distinction entre la représentation classique et la représentation non-classique de l'incertitude. Le premier exemple implique deux jeux : le Dilemme du Prisonnier ( $DP$ )<sup>2</sup> et le Jeu de l'Ultimatum ( $JU$ )<sup>3</sup>. Dans le deuxième exemple nous ajoutons un troisième jeu le Jeu de Confiance ( $JC$ )<sup>4</sup>. Dans le troisième exemple nous considérons une situation de décisions répétées.

Le joueur 1 doit choisir entre jouer un  $DP$  ou un  $JU$  avec le joueur 2. De son point de vue le  $PD$  est un  $j$ -acte :  $(\alpha, f)$  où  $I(\alpha) = \{C, D\}$  avec  $C$  pour « coopérer » et  $D$  pour « trahir » et la fonction  $f$  est le paiement du joueur 1.<sup>5</sup> De manière similaire,  $JU$  est un  $j$ -acte :  $(\beta, g)$  où  $I(\beta) = \{G, E\}$  correspondant à deux options pour diviser le « gâteau » :  $G$  pour généreux,  $E$  pour égoïste, et  $G$  est la fonction de paiement du joueur 1. Les mesures  $\alpha$  et  $\beta$  sont des DOU incompatibles. L'ensemble des types (purs) est  $X = \{C, D, G, E\}$ .

Le joueur 1 fait le premier pas c.a.d qu'il sélectionne un  $j$ -acte. Il est suivi par le joueur 2 qui par son choix actualise une

2. Le dilemme du prisonnier est jeu où chaque joueur choisit entre coopérer et trahir. Il est toujours plus profitable individuellement de trahir, mais il est plus profitable collectivement de coopérer. Nous considérons une version simultanée de ce jeu.

3. Le jeu de l'ultimatum est un jeu où le premier joueur (ici joueur 2) choisit comment diviser un « gâteau ». Le deuxième joueur répond en acceptant l'offre du partage ou en la refusant. S'il refuse aucun des joueurs ne gagne rien. S'il accepte le partage se fait selon la proposition.

4. Le jeu de confiance est un jeu dans lequel le premier joueur (ici joueur 1) fait un investissement. Le deuxième joueur fait un effort coûteux qui valorise l'investissement. Les paiements dépendent de la taille de l'investissement et du niveau d'effort. Si l'effort est bas, le premier joueur ne retrouve pas la valeur de son investissement.

5. Nous ne traitons pas de manière explicite l'action du joueur 1 dans les jeux. Les paiements doivent être compris comme les paiements associés respectivement à la meilleure réponse dans un  $DP$  avec actions simultanées et dans le  $JU$  comme le paiement associé à l'acceptation de l'offre (qui est également la meilleure réponse).

caractéristique de type. Tout type  $\theta$  du joueur 2 est décrit par 4 nombres correspondants aux probabilités subjectives que le joueur 1 assigne aux différentes caractéristiques de type dans chacun des deux j-actes.  $Prob(C; \theta) = \mu$ ,  $Prob(D; \theta) = 1 - \mu$ ,  $Prob(G; \theta) = \lambda$ ,  $Prob(E; \theta) = 1 - \lambda$ .

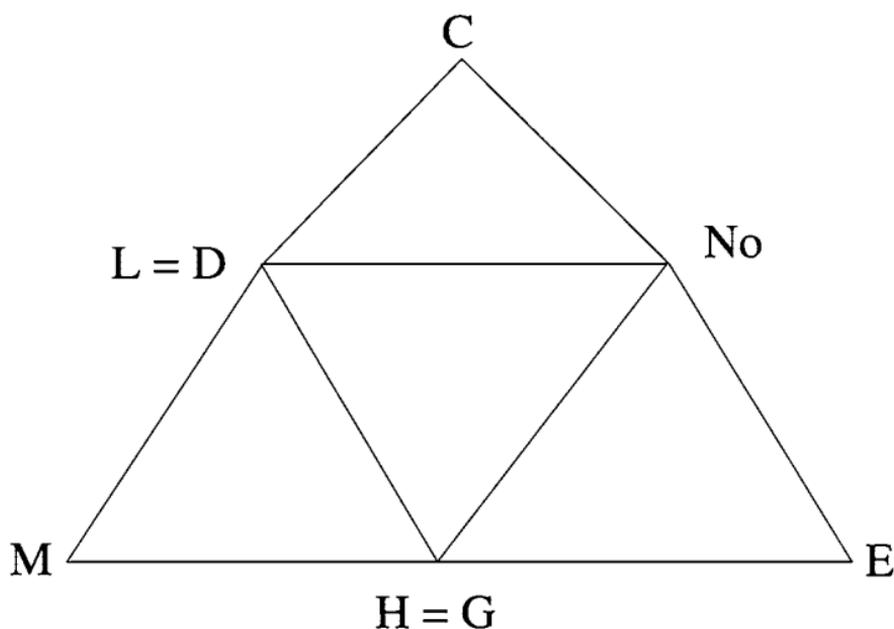
Pour construire le modèle classique nous devons tout d'abord définir l'ensemble des types. Un type classique est caractérisé par le fait qu'il donne une réponse déterministe pour toutes les (ici deux) mesures. Enfin il faut associer à cet ensemble de types une distribution de probabilité telle que les prédictions des mesures soient les mêmes que dans le modèle initial<sup>6</sup>. Dans cet exemple l'ensemble des types classiques est tout simplement  $X = \{CG, EC, DD, DE\}$ . On voit immédiatement qu'un agent de type  $\theta$  peut être représenté par un mélange statistique des types classiques. Avec des probabilités définies comme suit :  $Prob(CG; \theta) = \mu\lambda$  et similairement pour les autres types. Il est facile de vérifier que nous obtenons les mêmes prédictions que dans le vrai modèle non-classique.

Il semble donc que le modèle classique puisse représenter cet agent d'une manière tout à fait équivalente. Il y a cependant un problème avec cette représentation. Elle est fondée sur la création de types «artificiels» dans le sens qu'ils ne peuvent être vérifiés par aucune mesure reproductible (dite de «premier type» voir chapitre précédent). Mais ceci nous amène à un argument dynamique que nous aborderons plus tard.

Dans notre second exemple nous considérons trois j-actes :  $(\alpha, f)$ ,  $(\beta, g)$  et  $(\delta, h)$  chacun impliquant une situation de décision pour le joueur 2 avec trois alternatives. Le *DP* et le *JU* ont été augmentés d'une option celle de ne pas jouer dénotée *N*. Le *JC* est construit pour avoir un type en commun avec chacun des deux autres jeux. Les options dans le *JC* correspondent à trois niveaux d'effort : bas *B*, Moyen *M* et haut *H*. L'ortho espace est donné dans la figure 2<sup>7</sup>.

6. Il est possible de montrer que cette procédure pour construire le modèle classique exprime des résultats généraux d'équivalence si l'on se contraint à considérer le modèle classique le plus simple c.a.d sans variable cachée.

7. Un ortho espace est représenté par un graphe qui joint les éléments orthogonaux.



La représentation signifie que le type  $L$  dans le  $JC$  est le même que le type  $D$  dans le  $DP$  et similairement  $H = G$ . Notre ortho-espace est composé de six éléments :  $C, D, M, G, E, N$ .

Selon la même logique que dans l'exemple précédent nous construisons le modèle classique correspondant. Ici l'ensemble des types classiques ne se compose que de 4 éléments :  $CEM, CG, NM, DE$ <sup>8</sup>.

Considérons à présent le type  $\theta_0$  décrit par les probabilités suivantes :  $Prob(N; \theta_0) = 1/2$ ,  $Prob(D; \theta_0) = 1/2$ ,  $Prob(G; \theta_0) = 1/2$ . Ce qui implique que la probabilité des types  $C, E$  et  $M$  est égale à 0.

Est-il possible de reproduire les prédictions de notre modèle non-classique en assignant des probabilités aux types classiques ? La réponse est : non. En effet puisque pour le type  $\theta_0$ , le résultat  $C$  a probabilité 0, les types  $CEM$  et  $CG$  doivent avoir probabilité 0. Par le même argument, nous devons assigner une probabilité nulle à  $NM$  et  $DE$ , à cause de  $M$  et  $E$ . Nous ne pouvons associer de probabilité positive à aucun des types classiques ! Nous voyons donc que le type  $\theta_0$  ne peut être représenté dans le modèle classique.

---

8.

Pour mieux comprendre la distinction entre les deux modèles considérons les paiements (pour le joueur 1) suivants:  $DP: f(D) = f(N) = 1$  et  $f(C) = 10$ ; dans le  $JU: g(N) = g(G) = 2$  et  $g(E) = 0$ ; et dans le  $JC: h(L) = 0$  et  $h(M) = h(H) = 3$ . L'utilité espérée d'un j-acte lorsque le joueur a la représentation classique à l'esprit est donnée par

$$EU_{cl} = p_1 DE + p_2 NM + p_3 GC + p_4 MCE, \quad \sum p_i = 1, \quad i = 1, \dots, 4$$

Ce qui donne respectivement  $EU_{cl}(DP) = 1 + 9(p_3 + p_4)$ ,  $EU_{cl}(JU) = 2(p_2 + p_3)$ ,  $EU_{cl}(JC) = 3p_2 + 3(p_3 + p_4)$ . Ce qui signifie que le  $JU$  est (toujours) dominé par  $JC$  et donc ne peut jamais (pour aucun type du joueur 2) être recommandé. Considérons maintenant un décideur qui a le modèle correct à l'esprit et qui sait que son opposant est de type  $\theta_0$  nous calculons l'utilité espérée du joueur 1 pour chaque j-acte étant donné le type  $\theta_0$  du joueur 2 :

$$EU_{ncl}(DP) = 1, \quad EU_{ncl}(JU) = 2 \quad \text{et} \quad EU_{ncl}(JC) = 1,5.$$

Nous voyons que le  $JU$  domine et le  $JC$  et le  $DP$ . La recommandation est donc celle qui était exclue par le modèle classique c'est-à-dire celle choisir le  $JU$ .

Dans un contexte (dynamique) de décisions répétées, la différence entre le modèle non-classique et le modèle classique correspondant est encore plus claire. Et nous pouvons même utiliser notre premier exemple: le  $DP$  avec options  $C$  et  $D$  et le  $JU$  avec les options  $G$  et  $E$ . L'ensemble des types est  $X = \{C, D, G, E\}$ . Nous savons que  $C \perp D$  et  $G \perp E$ , supposons les corrélations suivantes: Si le type est  $D$  (ou  $C$ ) le  $JU$  donnera  $G$  (ou  $E$ ) avec une probabilité de  $1/2$ . Et réciproquement si le type est  $E$  (ou  $G$ ) le  $DP$  donnera  $C$  (ou  $D$ ) avec probabilité  $1/2$ . Comme nous l'avons déjà constaté il existe un modèle classique correspondant avec les types  $CG, CE, DG, DE$ . Ici nous allons simplement souligner une implication du fait que dans le modèle classique les mesures n'affectent pas le type. Pour la théorie concernant l'impact de la mesure sur les états nous invitons le lecteur à consulter le chapitre précédent.

Considérons un cas où le résultat  $C$  donne 100 euros,  $f(C) = 100, f(D) = g(E) = 0$  et  $g(G) = 10$ . Si notre joueur ne

doit faire qu'une mesure, la recommandation est la même dans des deux modèles : il choisit bien évidemment le *DP*.

Supposons à présent que notre décideur puisse faire une série de trois décisions. Dans le cas classique la stratégie optimale est choisir le *DP* la première fois. S'il a de la chance, que le résultat est *C*, il répète ce choix deux fois encore et gagne 300. S'il est malchanceux et que le résultat de la première mesure est *D*, il choisit *JU* en deuxième. S'il a de la chance, que le résultat est *G* il gagne 10 et répète ce choix. S'il a de la malchance il gagne 0 et répète ce choix. Donc en moyenne il gagne 160. Considérons à présent la stratégie du décideur qui a le modèle non-classique correct à l'esprit. Comme première mesure il choisit aussi le *DP*. Si le résultat est *C*, il répète ce choix deux fois de plus et obtient 300. Si le résultat de la première mesure est *D*, il choisit *JU* comme seconde mesure. Jusqu'à présent il n'y a aucune différence avec le joueur classique. En troisième choix et quelque soit le résultat du *JU* Il choisit tenter à nouveau un *DP* car il sait que le type du joueur 2 a changé et que le *DP* donne 50 en valeur espérée. Une telle stratégie donne donc en moyenne 175 euros. Nous voyons que même dans ce cas simple les recommandations des deux modèles ne sont pas les mêmes et qu'elles sont associées à des paiements différents.

## 6. CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons montré que la théorie de la décision dans l'incertain de Savage peut être formulée en termes d'une structure algébrique très générale appelée un ortho-treillis. Cela contribue à mettre en lumière la généralité et la valeur de l'approche de Savage. Par ailleurs cela permet d'étendre cette théorie et de considérer des situations où l'incertitude pertinente à la prise de décision est de nature non-classique. Dans un exemple nous suggérons que cette approche peut ouvrir la voie pour le développement d'une théorie des jeux avec des joueurs de type incertain c'est-à-dire des joueurs dont le type est endogène à l'interaction. Nos résultats peuvent également permettre de modéliser l'incertitude sur le monde subjectivement perçu qui comme le suggère les expériences sur la perception humaine d'Atmanspasher serait de nature non-classique.

## BIBLIOGRAPHIE

- Atmanspacher H., Filk T., and Romer H. (2004), «Quantum Zeno features of bistable perception», *Biological Cybernetics*, 90, 33-40.
- Birkhoff G. and von Neumann J. (1936), «The logic of quantum mechanics», *Ann. Math.*, 37, 823-843.
- Busemeyer J. R. Z. Wang and J. T. Townsend (2006), «Quantum Dynamic of Human Decision-making», *Journal of Mathematical Psychology*, 50, 220-241.
- Danilov V. I and A. Lambert-Mogiliansky (2008), «Measurable Systems and Behavioral Sciences», *Mathematic Social Sciences*, 55/3, 315-340.
- Gyntelberg J. and F. Hansen (2004), Expected utility theory with «small worlds». <http://www.econ.ku.dk/wpa/pink/2004/0420.pdf>
- La Mura P. (2005), «Decision Theory in the Presence of Risk and Uncertainty», *Mimeo*, Leipzig Graduate School of Business.
- Lehrer E. and Shmaya E. (2005), «A Subjective Approach to Quantum probability», *Mimeo*.
- Lambert-Mogiliansky A, S. Zamir and H. Zwirn (2009), «Type Indeterminacy – A model of the KT(Kahneman–Tversky)-Man», in press, *Journal of Mathematical Psychology*.
- Pitowsky I. (2003), «Betting on the outcomes of measurements», *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 34, 395-414. See also [xxx.lanl.gov/quant-ph/0208121](http://xxx.lanl.gov/quant-ph/0208121).
- Rockafellar R.T. (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton.
- Savage L. (1954), *The Foundations of Statistics*, John Wiley, New York.
- Wright R. (1978), «The state of the Pentagon», in A. R. Marlow (ed.) *Mathematical Foundation of Quantum Theory*, Academic Press New York San Fransisco London.

V. I. Danilov

*CEMI, Académie des Sciences de Russie, Moscou,*  
*[danilov@cemi.rssi.ru](mailto:danilov@cemi.rssi.ru), [vdanilov43@mail.ru](mailto:vdanilov43@mail.ru)*

A. Lambert -Mogiliansky

*PSE, Paris School of Economics, Paris,*  
*[alambert@pse.ens.fr](mailto:alambert@pse.ens.fr)*

# Liste des auteurs

**Harald Atmanspacher**, Associate Fellow, *Collegium Helveticum*, Zurich. Directeur du département théorique à l'*Institute for Frontier Areas of Psychology*, Fribourg (Allemagne). Ph. D. en physique, à l'université de Munich. Spécialités : théorie des systèmes dynamiques et des systèmes complexes, théorie quantique algébrique, philosophie de l'esprit.

**Elie Ayache**, Fondateur et PDG d'ITO 33. Ancien élève de l'École Polytechnique (X84), DEA en philosophie. Spécialités : technologie de pricing des produits dérivés, philosophie de leurs marchés.

**Michel Bitbol**, Directeur de recherche au CNRS, CREA – École Polytechnique. Docteur en médecine, Docteur d'État ès sciences physiques, HDR en philosophie. Spécialités : philosophie des sciences, philosophie de l'esprit, philosophie de l'émergence et de la complexité.

**Vladimir Ivanovitch Danilov**, Professeur à l'*Institut Central d'Économie Mathématiques* de l'Académie de Sciences de Russie à Moscou. Docteur d'État ès Mathématiques et Physique. Spécialités : géométrie algébrique et économie mathématique.

**Jean-Pierre Dupuy**, Professeur émérite à l'école Polytechnique, Professeur à l'université Stanford (Californie), fondateur du centre de sciences cognitives et d'épistémologie de l'École Polytechnique (le CREA). Spécialités : philosophie sociale et politique, éthique des sciences et des technique.

**Ariane Lambert-Mogiliansky**, Chercheur associé à la Paris School of Economics, Docteur ès Sciences Économiques. Spécialités : économie théorique, y compris théorie des incitations et des mécanismes : économie comportementale.

**Pierfrancesco La Mura**, Professor of Economics and Information systems, HHL – Leipzig Graduate School of Management. Ph.D. à l'université de Stanford. Spécialités : décision et théorie des jeux, intelligence artificielle, information quantique.

**Hervé Zwirn**, Directeur de Recherche Associé à l'École Normale Supérieure de Cachan, Chercheur associé à l'IHPST, Président de la société Eurobios. Docteur d'État ès sciences physiques. Spécialités : philosophie des sciences, épistémologie, systèmes complexes.



Achévé d'imprimer en mai 2009 par EMD S.A.S. – 53110 Lassay-les-Châteaux  
N° d'impression : 21387 – Dépôt légal : mai 2009  
Imprimé en France



# THÉORIE QUANTIQUE ET SCIENCES HUMAINES

**E**t si la science physique la plus récente sortait de son domaine d'application traditionnel ? Si la physique quantique, développée par Planck, Bohr et Einstein, se confrontait aux sciences dites humaines ? Tel est le projet de Michel Bitbol et de son équipe dans cet ouvrage hors norme, faisant fi des frontières traditionnelles.

Dans les années 1930, Otto Neurath avait proposé de soumettre les processus individuels et sociaux à la seule physique. Loin de ce réductionnisme, Michel Bitbol reprend complètement la question et renouvelle son examen. Quelles affinités peuvent partager ces deux types de sciences ? Quel rôle y joue l'homme ? C'est la méthode qui rapproche physique quantique et sciences humaines. Dans les deux domaines on ne peut pas séparer la connaissance de l'objet étudié. Le sujet est impliqué dans l'objet de recherche, particulièrement lorsqu'il utilise le langage.

C'est à la découverte d'un champ singulièrement neuf que nous invite Michel Bitbol à travers quelques thèmes choisis : la prise de décision, la théorie du comportement, la sensibilité des marchés financiers aux anticipations des agents, la théorie du choix rationnel.

Une théorie originale de l'homme pleinement engagé dans son milieu, un tournant décisif dans nos manières de voir le monde.

**Michel Bitbol** est Directeur de recherche au CNRS au Centre de Recherche en Epistémologie Appliquée (CREA) de l'École Polytechnique. Il a reçu une formation en médecine, en physique et en philosophie. Il est notamment l'auteur de : *Mécanique quantique ; une introduction philosophique* (1996, Prix Grammaticakis-Neumann de l'Académie des Sciences Morales et Politiques), *Physique et philosophie de l'esprit* (2000), et *De l'intérieur du monde ; connaissance et relations* (2009).

25 € prix valable en France  
ISBN : 978-2-271-06855-2



www.cnrseditions.fr