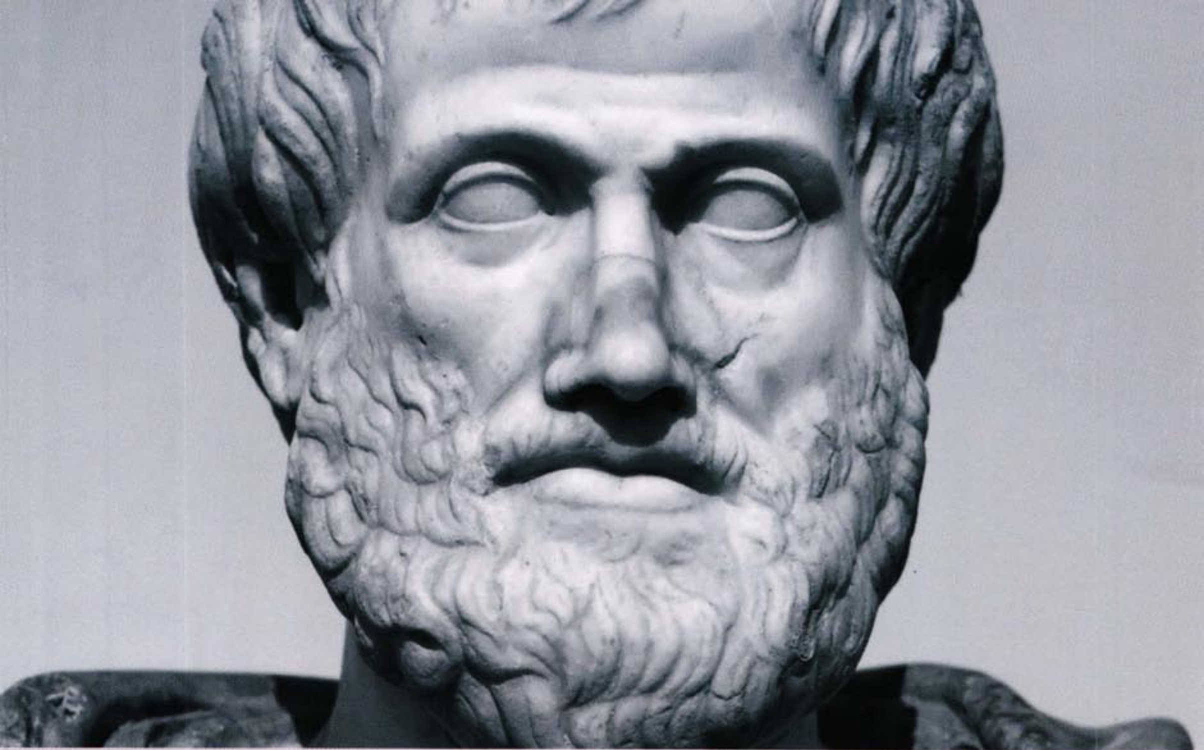


HISTOIRE DE LA LOGIQUE

Jean-Pierre **Belna**

ellipses

Histoire de la logique

Jean-Pierre Belna

ellipses

ISBN 978-2-7298-8448-2
©Ellipses Édition Marketing S.A., 2014
32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15

www.editions-ellipses.fr

INTRODUCTION

Puisqu'il s'agit ici de raconter l'histoire de la logique, il semble naturel de se demander : qu'est-ce que la *logique* ? La réponse est délicate. Le *Petit Robert* en fait la « science ayant pour objet l'étude, surtout formelle, des normes de la vérité », le *Petit Larousse* celle « du raisonnement en lui-même, abstraction faite de sa matière et de tout processus psychologique ». Les auteurs d'un ouvrage d'initiation à la logique la présente comme « la science des lois du raisonnement, des règles de la pensée », précisant ensuite que, depuis toujours, la discipline « s'occupe de la *forme* des expressions » et « traite de la *validité* des raisonnements ». De ces définitions, retenons les notions de vérité, de raisonnement, de loi, de règle, de forme et de validité, que nous retrouverons tout au long de cet ouvrage. Ajoutons que la logique est par nature abstraite, notamment parce qu'elle vise l'*universalité*. La question de savoir si elle est une science, liée à la philosophie ou à la mathématique, demanderait de longs développements. Connaître l'histoire de la logique peut aider à trouver des éléments de réponse à cette problématique, en même temps qu'un début d'explication aux termes employés ci-dessus.

Il n'y a pas lieu de s'étonner qu'on ne puisse dire en quelques mots ce qu'est la logique. Il en va de même de la philosophie, des mathématiques, etc. C'est en la pratiquant qu'on peut comprendre ce qu'est la logique. Mais ce n'est pas ce qui est ici demandé. L'introduction de quelques termes techniques étant cependant nécessaire, nous essaierons de les expliquer au mieux, en tentant d'allier rigueur, simplicité et clarté. Le lecteur ne doit pas être surpris du caractère extrêmement subtil, parfois apparemment futile, de certaines questions : la logique se doit, par nature, d'être aussi rigoureuse que possible, et ne peut se permettre aucun écart. Les logiciens de toutes les époques l'ont compris. Les quelques licences que nous nous autoriserons visent à simplifier, non à masquer cette exigence.

Si la logique est née en Grèce il y a fort longtemps, l'étude de son développement historique est très récente. C'est qu'on a longtemps cru que la discipline n'avait pas d'histoire, née et achevée au même moment avec Aristote. Les premiers travaux d'histoire de la logique datent de la fin du XIXe siècle. Encore étaient-ils largement lacunaires, car ce n'est qu'au XXe siècle qu'a vraiment été connue la logique stoïcienne, appréciés à leur juste valeur les travaux des savants du Moyen Âge et découvertes les avancées de Leibniz et de Bolzano. La révolution accomplie par les logiciens à partir du milieu du XIXe siècle n'en a été que mieux comprise. Ce sont les travaux de Jan Łukasiewicz et de Heinrich Scholz, dans les années 1930, qui ont donné l'impulsion décisive. Plus près de nous, parmi les ouvrages de référence, citons ceux de Innocent Marie Bochenski (1956), William et Martha Kneale (1962) et les onze gros volumes du *Handbook of History of Logic* publiés depuis 2004[1]. En France, l'ouvrage le plus complet est *La logique et son histoire* publié en 1970 par Robert Blanché et complété pour sa partie finale par Jacques Dubucs en 1996.

Il nous a semblé légitime, bien qu'inévitablement en partie arbitraire, de découper cette introduction à l'histoire de la logique en six chapitres, dont le deuxième est à part puisque les logiques chinoise et indienne, aussi anciennes que la logique occidentale, n'ont eu historiquement aucun contact avec elle. Pour ce qui concerne cette dernière, après sa naissance en Grèce, qui est l'objet du premier chapitre, la fin de l'Antiquité n'a fait que poursuivre l'œuvre entreprise. À la logique médiévale, qui culmina au XIVe siècle et dont traite le troisième chapitre, succédèrent les critiques de l'âge dit « classique » (XVIe-XVIIe siècles) et un sommeil relatif de près de deux siècles, dont nous parlons au quatrième chapitre. Ce qu'on peut appeler la « logique moderne » est née au XIXe siècle, ce dont le cinquième chapitre rend compte. Le dernier, consacré pour l'essentiel à la première moitié du XXe siècle, prolonge le précédent, car la logique n'a alors cessé de se développer, dans diverses directions.

On ajoutera à ce rapide tableau trois points essentiels, qu'on gardera à l'esprit en lisant cet ouvrage :

1. Il est difficile de donner une définition de la logique. Mais y a-t-il un sens à parler de *la* logique ? N'y aurait-il pas plutôt *des* logiques ? Et si oui, qu'est-ce qui les éloigne et qu'est-ce qui les rapproche ?
2. La logique est née au voisinage de la philosophie, et ce lien est demeuré jusqu'au milieu du XIXe siècle. Mais les réformateurs de la logique traditionnelle, qui ont donné naissance à la logique mathématique, furent eux, des mathématiciens, qui ont néanmoins mené une réflexion philosophique profonde.

---

1. Voici les références des ouvrages non mentionnés dans la bibliographie : H. Scholz, *Esquisse d'une histoire de la logique*, 1931, trad. Aubier, 1968 ; I.M. Bochenski, *Formale Logik*, Fribourg & Munich, Karl Alber, 1956 ; W. & M. Kneale, *The Development of Logic*, Oxford University Press, 1962 ; Dov M. Gabbay (dir.), *Handbook of History of Logic*, North-Holland, 2004-2012.

3. La logique actuelle utilise une langue symbolique qui peut sembler difficile à manier, mais constitue une économie de pensée et d'écriture facilitant les analyses et les avancées conceptuelles. Il est plus simple de raisonner avec la langue logique d'aujourd'hui qu'avec le grec de l'antiquité, le latin du Moyen Âge ou les langues européennes du XVII^e siècle. Il serait cependant injuste de qualifier d'archaïques les travaux des logiciens de ces époques. On verra au contraire qu'ils ont abordé nombre de problèmes et fait maintes découvertes que la logique moderne a mis en forme. Des lectures rétrospectives permettront de le mieux comprendre.

Le présent livre est la réédition modifiée, augmentée et, nous l'espérons, améliorée, d'un précédent ouvrage, portant le même titre, paru en 2005 dans la collection « L'esprit des sciences » dirigée par Georges Barthélemy, et épuisé depuis quelques années.

CHAPITRE 1

LA LOGIQUE GRECQUE

I. DIALECTIQUE, *LOGOS* ET LOGIQUE

Selon Aristote, souvent considéré comme l'inventeur de la logique, rien n'existait avant lui en la matière :

> Sur cette question, il n'y avait pas une partie déjà élaborée et une autre non : il n'existait absolument rien.

Ce n'est pas tout à fait exact, puisque c'est une réflexion sur la *dialectique* qui a mené Aristote à son « invention ». Lui-même faisait de Zénon d'Élée l'inventeur de cet « art du dialogue », qui voyait deux interlocuteurs répondre à une interrogation en confrontant des thèses opposées, et dont Socrate et Platon feront la méthode philosophique par excellence. On ne sait presque rien de Zénon, philosophe présocratique dont il ne reste aucun écrit, mais Aristote le tenait pour celui qui a introduit en philosophie le *raisonnement par l'absurde*[1], soit qu'il l'eût emprunté aux mathématiques, soit qu'au contraire celles-ci l'eussent repris de la dialectique. Le recours à ce type de raisonnement, qui consiste à démontrer une proposition en montrant que sa négation conduit à une contradiction, est avéré au VI^e^ siècle avant J.-C., lorsque les pythagoriciens prouvèrent l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré, en montrant que poser l'existence d'une grandeur commune mène à une conclusion contredisant cette hypothèse. Mais la dialectique n'est qu'un savoir logique implicite, qui ne formule pas les lois qui le justifie, même si elle mérite, aux yeux de ses défenseurs d'alors, d'être distinguée de la rhétorique

1. On dit aussi raisonnement indirect ou apagogique.

et de la sophistique. Elle ouvre cependant la voie à la logique comme science de la déduction, notamment grâce aux progrès que Platon, dont Aristote fut le disciple, lui fit accomplir.

Platon donnait une origine mathématique au raisonnement par l'absurde, qu'il formulait de la façon suivante : si une même hypothèse conduit à des conclusions qui ne s'accordent pas, elle est fausse. Lui qui voyait dans les mathématiques un modèle pour la philosophie et la dialectique comme un véritable mode de philosopher fit un grand usage de cette forme de raisonnement, qu'il a souvent intégré aux dialogues qui mettent en scène son maître Socrate. Dans certains d'entre eux, il tente d'appliquer, parfois en se trompant, parfois avec difficulté, certaines de nos lois logiques. Elles ne sont pas explicitées, mais dans le *Timée*[1], l'une de ses dernières œuvres, il explique que, de même que des lois divines règlent le mouvement des astres, il existe des « lois de la pensée », qui devraient guider nos raisonnements :

> Ayant étudié à fond ces mouvements célestes, participant à la rectitude rationnelle des raisonnements, imitant les mouvements divins qui ne comportent absolument aucune erreur, nous pourrons stabiliser les nôtres, qui ne cessent point d'errer.

Chez Platon, la dialectique procède d'un double mouvement : *ascendante*, elle va du concret aux Idées[2], comme le Bien ou l'Un ; *descendante*, des Idées aux « choses » en lesquels elles s'incarnent. Ainsi ira-t-on, par un mouvement ascendant, d'une bonne action, d'un homme sage, vers l'Idée de Bien, des hommes vers l'Idée d'homme, des sciences vers l'Idée de science, pour parvenir enfin à l'Un. Par un mouvement descendant, la connaissance de l'Idée de Bien nous fera reconnaître ce qu'il y a de bon dans telle ou telle action, de sage dans tel ou tel homme, de même que la connaissance des Idées d'homme ou de science nous fera savoir ce qui distingue les hommes des autres animaux et la science de ce qui n'en est pas. Enfin, la connaissance de l'Un nous fera voir quelle unité se cache derrière ce qui paraît multiple. Aristote, qui n'adhèrera pas à la théorie platonicienne des Idées, mettra en évidence une faille logique dans chacun de ces deux mouvements.

Il reprochera au mouvement ascendant de faire apparaître l'Idée comme une entité existant séparément des objets singuliers dont elle est le modèle, empêchant par là d'en faire l'attribut commun de plusieurs sujets, comme on verra que la formulation de la proposition le réclame dans la logique aristotélicienne. Il reprochera au mouvement descendant de ne pas atteindre son but lorsqu'il s'agit de définir ce qu'on appellerait aujourd'hui un *concept*, en le caractérisant par une propriété commune valant partout où on l'applique. Pour ce faire, la dialectique procède

---

1. Sauf rares exceptions, nous donnons l'original du titre pour les ouvrages rédigés en latin et en sanskrit, et le traduisons en français lorsqu'ils sont écrits dans d'autres langues.

2. L'usage de la majuscule indique que le terme a ici un sens propre à Platon.

par division ou *dièrèse*, selon une procédure dichotomique qu'on retrouvera chez Porphyre au début de l'ère chrétienne. Dit de façon moderne, on enrichit progressivement la *compréhension* du concept – on ajoute des propriétés –, ce qui en diminue simultanément l'*extension* – la quantité d'objets qui ont ces propriétés est moindre (nous préciserons plus loin le sens de ces termes). Soit un concept S à définir : on part d'un concept A plus vaste, qu'on divise en B et non-B (telles que la réunion des deux donne A), opération qu'on répète jusqu'à placer S dans une « case ». Par exemple, soit à définir le concept d'homme (S) à partir de celui de corps (A). Parmi les corps, on distinguera ceux qui sont animés (comme les animaux) et ceux qui ne le sont pas (comme les minéraux) ; parmi les premiers, certains sont doués de raison (les hommes), d'autres non (les animaux non humains). On conclura que l'homme est un corps animé doué de raison.

Aristote reprochera à la dièrèse platonicienne, d'une part de ne pouvoir emporter la décision par la force de la seule nécessité logique et de devoir y ajouter une certaine forme de consentement, d'autre part de prouver en réalité plus que ce qu'on en attend. Soit à montrer, comme précédemment, que S est B sachant que S est A. La logique nous dit que S est B ou non-B, donc plus que ce que nous cherchons, mais ce n'est pas elle seule qui nous dit dans laquelle de ces deux sous-classes placer S. Il faut que nous l'admettions, et chaque étape pose le même problème. L'exemple précédent nous a amené à la division entre corps animés doués de raison et corps animés non doués de raison. Mais l'expression « corps animé doué de raison » est-elle une bonne définition du concept d'homme ? Ne pourrait-il pas y avoir des humains non doués de raison ou des corps animés doués de raison qui ne soient pas des humains ? Où placer les centaures, les sirènes, etc. ? C'est cette critique de la dièrèse platonicienne qui conduira Aristote à inventer le syllogisme.

Nous avons utilisé plusieurs fois le mot « logique », à propos de ce qui ne lui appartient que de manière approchée. S'il est difficile d'en donner une définition, son étymologie est simple. Le nom « logique » vient du substantif grec « *logikê* », par le biais de l'adjectif « *logikos* », lui-même dérivé du substantif « *logos* », terme très difficile à traduire en français, signifiant « parole », « discours », « sens », « raison », « proportion », « relation », « analogie », « étude ». La logique serait donc un discours rationnel, établissant des liens entre des termes ou des propositions. Les spécialistes renoncent souvent à traduire « *logos* », étant entendu qu'on sait ce que le terme recouvre, selon le contexte, ou qu'on souhaite justement en conserver la pureté originelle.

Quant à la naissance du nom « logique » pour désigner une discipline intellectuelle, elle n'est pas facile à repérer, et l'histoire de son emploi difficile à restituer. Aristote utilise l'adjectif « *logikos* », mais n'a recours à aucun substantif pour désigner quelque chose qui serait *la* logique. Selon une indication de Boèce à la fin de l'époque romaine, ce serait une création des commentateurs du philosophe grec au début de l'ère chrétienne, mais il serait en réalité antérieur à Aristote lui-même : Xénocrate divisait la philosophie en logique, éthique et « physique[1] », et on verra que les stoïciens en faisaient usage pour désigner une des espèces de la philosophie. Au sens d'une « science » du raisonnement correct, le terme est présent chez Cicéron, et les écrits de Galien et d'Alexandre d'Aphrodise semblent attester qu'il était d'un usage courant au début de l'ère chrétienne. Son emploi est devenu systématique en Occident au XIII[e] siècle, précisément lors de la redécouverte des travaux d'Aristote.

II. LA LOGIQUE D'ARISTOTE

A. Présentation

Aristote naquit à Stagire, dans le nord de la Grèce, en 384 avant J.-C. Il entra à l'Académie de Platon en 366, et y resta jusqu'à la mort de ce dernier en 348. Après être devenu le précepteur et ami d'Alexandre le Grand, il revint à Athènes en 335 et fonda sa propre école, le Lycée. Obligé de s'exiler en 323, il mourut l'année suivante. Bien que son disciple le plus brillant, Aristote est le premier grand critique de Platon, en particulier par son rejet de la théorie des Idées et sa conception de la dialectique.

Ce qui fait d'Aristote l'un des « inventeurs » de la logique, c'est qu'il l'a érigée en discipline autonome et que, contrairement à ses prédécesseurs, il a théorisé le raisonnement logique, jusqu'alors intégré empiriquement à l'argumentation philosophique dont certains traits ne faisaient que l'illustrer. Aristote l'a fait à partir d'une double critique de la dialectique platonicienne, dont il a néanmoins conservé l'usage du raisonnement par l'absurde. Ses ouvrages logiques ont été regroupés, entre les III[e] et VI[e] siècles de notre ère, sous le titre générique d'*Organon*, c'est-à-dire instrument. On ne peut dire avec certitude dans quel ordre ils ont été composés, mais en voici la liste, selon une chronologie sur laquelle les spécialistes s'accordent à peu près (d'autres ouvrages, notamment la *Métaphysique*, contiennent des considérations relatives à la logique) :

1. *Catégories* (présentation des catégories logiques et de la structure générale de la proposition) et *Topiques* (débuts de la théorie du syllogisme) ;
2. *Réfutations sophistiques* (prolongement des *Topiques*) ;
3. *Hermeneia* ou *De l'Interprétation* (théorie de l'opposition des propositions) ;
4. *Premiers Analytiques* (théorie du syllogisme) et *Seconds Analytiques* (syllogismes démonstratifs).

1. L'usage des guillemets est ici destiné à prévenir le lecteur que la physique de l'Antiquité a peu à voir avec la physique moderne.

Si l'appellation d'*Organon* n'est pas d'Aristote, elle se justifie car lui-même ne voyait pas dans la logique une partie de la philosophie, mais une discipline intellectuelle préparatoire : « il faut connaître les *Analytiques* avant d'aborder aucune science », dit-il dans la *Métaphysique*. Et il écrit au tout début de ces *Analytiques* que le « sujet de son enquête est la démonstration », qui s'applique à la science, c'est-à-dire aux mathématiques, à la « physique » et à la philosophie. Pour Aristote, la logique n'est donc pas une science au sens strict, mais un « art », celui de construire formellement le raisonnement pour l'appliquer à la science démonstrative.

Mais une démonstration doit reposer sur des principes et la logique sur des lois. Pour certaines d'entre elles et comme ses prédécesseurs, Aristote n'a fait qu'en approcher l'explicitation. Dans un texte aujourd'hui perdu, rédigé avant l'*Organon*, le philosophe aurait présenté l'argument suivant : *S'il ne faut pas philosopher, il faut philosopher [pour montrer qu'il ne faut pas philosopher], donc il faut philosopher.* Est ici illustrée une forme du raisonnement par l'absurde autre que celle utilisée par Zénon : si, pour une certaine proposition, supposer sa fausseté implique sa vérité, alors cette proposition est vraie. Et dans les *Topiques*, Aristote donne le conseil suivant, qui exprime une règle logique liée à la définition de l'*implication* dont on parlera plus loin :

> Pour établir une thèse, chercher une proposition dont la vérité implique celle de la thèse : alors si l'on montre que cette proposition est vraie, on aura par-là même démontré la thèse ; pour la réfuter, chercher une proposition qui soit une conséquence de la thèse : alors si l'on montre que cette conséquence est fausse, on aura par-là même réfuté cette thèse.

Et toujours en lien avec l'implication, Aristote écrit dans les *Premiers Analytiques* (chez lui, « prémisse » et « proposition » sont synonymes) :

> De prémisses vraies on ne peut tirer une conclusion fausse, mais de prémisses fausses on peut tirer une conclusion vraie.

On ne trouve pas chez Aristote de véritables formulations du *principe d'identité*, ni pour les termes – il aurait la forme « Toute chose est identique à elle-même » –, ni pour les propositions – sa forme serait *si p, alors p*[1]. Si Aristote utilise implicitement les formules « A appartient à tout A », « Tout A est A » ou « A se dit de tous les A », il ne les énonce jamais explicitement, peut-être parce qu'il trouvait le principe d'identité trop évident pour devoir le faire.

---

1. Nous respecterons le plus souvent la convention suivante : les propositions en langue usuelle seront entourées de guillemets, les lois et expressions utilisant, même en partie, des lettres symbolisant des propositions seront en italiques.

Les écrits d'Aristote contiennent en revanche des formulations de ce qu'on appelle les *principes de contradiction* – une proposition et sa négation ne peuvent être simultanément vraies – et du *tiers exclu* – de deux propositions dont l'une est la négation de l'autre, l'une est vraie et l'autre fausse. Ce ne sont pas pour Aristote des lois logiques au sens strict, mais des « principes communs » à toutes les sciences, dont il a donné plusieurs versions. Dans la *Métaphysique*, le principe de contradiction est plus qu'une loi logique, c'est une loi fondamentale de l'Être, selon laquelle « il est impossible qu'une chose soit et ne soit pas en même temps », écrit Aristote, qui ajoute qu'« il est impossible que le même attribut appartienne et n'appartienne pas en même temps, au même sujet et sous le même rapport ». Dans les *Analytiques*, il lui donne la forme suivante : « il est impossible d'affirmer et de nier en même temps un prédicat d'un sujet ». Le principe du tiers exclu semble être moins une loi de l'Être que de la pensée, selon laquelle « toute chose doit nécessairement être niée ou affirmée », écrit Aristote dans la *Métaphysique*, les *Analytiques* précisant que « pour tout prédicat, c'est l'affirmation ou la négation qui est vraie ».

B. Catégories logiques et types de propositions

Précisons la signification des mots « sujet » et « prédicat » utilisés par Aristote. Sa logique est une logique des *termes* – « un terme étant ce en quoi se résout la prémisse », laquelle est « une phrase qui affirme ou nie quelque chose de quelque chose », explique-t-il. Ces termes, qui sont au centre des analyses logiques d'Aristote, sont le *sujet* et le *prédicat*, la proposition – ou prémisse – consistant en l'*attribution* d'un prédicat à un sujet, le lien étant assuré par un *verbe*. Par exemple, dans la proposition « La mortalité appartient à (est affirmée de, est prédiquée de) l'homme », le sujet est l'homme et le prédicat la mortalité. Étant donnée la nature uniquement attributive de la proposition, Aristote exclut que le prédicat puisse renvoyer à un individu.

Aristote utilisant implicitement l'idée de *variable*, c'est-à-dire d'expression pouvant prendre n'importe quelle valeur dans un domaine donné[1], la forme générale de la proposition aristotélicienne est « B appartient à A », « B est affirmé de A » ou « B est prédiqué de A ». Les médiévaux la transformeront en « S est P », où S est le *sujet*, P le *prédicat* (l'attribut, le qualificatif, l'épithète) et « est » la *copule* (le lien, le verbe). Par exemple : « L'homme est mortel ». Pour simplifier, nous utiliserons parfois cette forme, notamment pour les exemples, comme Aristote l'a fait lui-même aussi dans ce cas.

1. Dans le cas de $f(x) = 1/x$ par exemple, f est une fonction de la variable x, laquelle peut prendre pour valeur n'importe quel nombre, 0 excepté.

Selon lui, il y a dix manières de prédiquer, qui sont autant de catégories. Par un jeu de transformations grammaticales, Aristote n'a retenu en logique que les catégories de *qualité* et de *quantité*, selon des dénominations qui ne lui appartiennent pas mais que la tradition a consacrées :

1. Selon la *qualité*, Aristote distingue les propositions qui affirment quelque chose d'un sujet (« L'homme est mortel ») de celles qui nient quelque chose d'un sujet (« L'homme n'est pas oiseau »), la négation portant toujours sur la copule.
2. Selon la *quantité*, Aristote distingue les propositions universelles (« Tout homme est mortel »), particulières (« Quelque homme est médecin »), indéfinies (« L'homme est juste ») et singulières (« Socrate est homme »). Les mots « tout » et « quelque », qu'il utilise systématiquement, signifient respectivement « tous les » et « quelques », c'est-à-dire « au moins un ».

Les propositions indéfinies ne jouent pratiquement aucun rôle dans la logique d'Aristote, qui les traite, en syllogistique, comme des particulières, sans s'en expliquer vraiment et alors que leur sujet apparaît plutôt comme un terme universel. Les propositions singulières, dont le sujet est un unique individu, doivent être, selon Aristote, exclues de la logique pour plusieurs raisons, dont l'une est que sa définition de la prémisse – « une phrase qui affirme ou nie quelque chose de quelque chose » –, n'est pas satisfaite dans le cas d'un sujet singulier. Mais la principale raison, et la seule vraiment décisive, est que la syllogistique aristotélicienne exige qu'un même terme puisse être tantôt sujet, tantôt prédicat, ce qui est impossible avec un terme singulier. Car si l'on peut dire que la mortalité appartient à Socrate, on ne peut prédiquer la « socratitude » de la mortalité :

> Nécessairement, conclut Aristote, toute démonstration et tout syllogisme prouvent une attribution ou une non attribution à un sujet, soit universellement, soit particulièrement.

Restent donc, en combinant qualité et quantité, quatre types de propositions (peu importe que celles des exemples qui suivent soient vraies ou fausses) :

1. Les *affirmatives universelles* (A.U.), de la forme « A appartient à tout B », comme « Tout homme est mortel ».
2. Les *affirmatives particulières* (A.P.), de la forme « A appartient à quelque B », comme « Quelque homme est mortel ».
3. Les *négatives universelles* (N.U.), de la forme « A n'appartient à aucun B », comme « Aucun homme n'est mortel ».
4. Les *négatives particulières* (N.P.), de la forme « A n'appartient pas à quelque B », comme « Quelque homme n'est pas mortel ».

Aristote a lui-même examiné comment passer d'un type de proposition à un autre : par *opposition*, en distinguant la *contradiction* et la *contrariété*, et par *conversion*.

Deux propositions sont *contradictoires* lorsqu'elles ne peuvent être toutes deux vraies ou toutes deux fausses. On peut donc conclure de la vérité de l'une à la fausseté de l'autre et inversement. La relation de contradiction, qui correspond à la négation de la logique moderne, vaut entre affirmative universelle et négative particulière correspondantes : « Tout S est P » et « Quelque S n'est pas P » sont deux propositions contradictoires, de même que « Aucun S n'est P » et « Quelque S n'est pas P ». Par exemple, « Tout homme est mortel » et « Quelque homme n'est pas mortel », ainsi que « Aucun homme n'est mortel » et « Quelque homme est mortel », sont deux couples de propositions contradictoires.

Deux propositions *contraires* sont incompatibles, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent être toutes deux vraies, sans qu'on puisse rien dire de leur fausseté. On peut donc conclure de la vérité de l'une à la fausseté de l'autre, mais on ne peut rien dire, si l'une est fausse, de la vérité ou de la fausseté de l'autre. La relation de contrariété ne peut valoir qu'entre universelles. « Tout S est P » et « Aucun S n'est P » sont deux propositions contraires, par exemple « Tout homme est mortel » et « Aucun homme n'est mortel ». Ici, la vérité de la première proposition entraîne la fausseté de la seconde. En revanche, si « Aucun homme n'est philosophe » et « Tout homme est philosophe » sont bien des propositions contraires, la fausseté de la première proposition n'entraîne pas la vérité de la seconde, qui est également fausse. Comme on le voit, les propriétés de la double relation d'opposition reposent sur les principes de contradiction et du tiers exclu.

La *conversion* consiste à permuter sujet et prédicat, ce qui n'est possible que si les deux termes sont de même nature. Aristote excluant qu'un prédicat désigne un individu, ils ne peuvent être que ce qu'on appelle des concepts. Se demandant à quelles conditions la conversion est légitime, Aristote constate qu'elle l'est pour une définition du type « A est B », qui devient « B est A » : c'est ainsi que « Homme est animal doué de raison » se convertit en « Animal doué de raison est homme ». Mais il souligne qu'elle ne l'est pas lorsque la relation est du genre à l'espèce : « L'homme est animal », où *homme* est traité comme une espèce du genre *animal*, n'est pas convertible en « L'animal est homme ». Lorsque Aristote examine la conversion relativement aux quatre types de propositions qu'il a dégagés, il donne les résultats suivants. La négative universelle « Aucun S n'est P » et l'affirmative particulière « Quelque S est P » se convertissent en une proposition du même type, respectivement « Aucun P n'est S » et « Quelque P est S ». Par exemple, « Aucun homme n'est mortel » devient « Aucun mortel n'est homme » et « Quelque homme est philosophe » « Quelque philosophe est homme ». L'affirmative universelle « Tout

S est P » n'est convertible qu'en l'affirmative particulière correspondante « Quelque P est S » : par exemple « Tout homme est mortel » devient « Quelque mortel est homme ». Quant à la négative particulière, Aristote montre qu'elle n'est pas convertible : de « Quelque animal n'est pas homme », par exemple, on ne peut rien tirer par conversion.

Ces différents types de transformation relèvent de ce que les logiciens appelleront plus tard « inférence immédiate » : on cherche comment passer d'*une* proposition à une autre. Son étude est préalable à celle du syllogisme, qui concerne le passage de *plusieurs* propositions à une autre et appartient à la théorie de l'« inférence médiate ».

C. La syllogistique

Le *syllogisme* (de « *sun* », « avec », et « *logos* ») est pour Aristote, dont c'est la grande découverte en logique, *le* raisonnement par excellence. Le terme apparaît pour la première fois dans les *Topiques*, où son emploi et sa définition lui donnent le sens large de « déduction ». Celle-ci est reprise dans les *Premiers Analytiques*, bien que le terme y ait un sens plus restreint :

> Le syllogisme est un discours (*logos*) dans lequel, certaines choses étant posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données. *Par le seul fait de ces données* : je veux dire que c'est par elles que la conséquence est obtenue ; à son tour, l'expression *c'est par elles que la conséquence est obtenue* signifie qu'aucun terme étranger n'est requis en plus pour produire la conséquence nécessaire.

Un syllogisme combine trois termes, deux à deux unis dans trois propositions : deux *prémisses* d'où découle la *conclusion*[1]. Chaque terme apparaît deux fois, ce qu'Aristote appelle le *moyen* terme jouant un rôle capital puisque servant de médiation entre les deux autres termes avant de disparaître de la conclusion. Pour ce faire, il doit être présent dans chaque prémisse. Les définitions qu'Aristote donne du grand terme ou *majeur*, qu'il a la plus grande extension, et du petit terme ou *mineur*, qu'il a la plus petite, définitions traditionnellement adoptées, ne valent en fait pas toujours, et il est préférable de suivre la convention suivante : le majeur est le prédicat de la conclusion et le mineur son sujet. Aristote ne fixe pas non plus vraiment d'ordre pour énoncer les deux prémisses, mais la tradition a retenu ce qui ne vaut en réalité que pour les syllogismes dits de la première figure : la prémisse *majeure*, où apparaît le grand terme, est placée en première position, la prémisse *mineure*, où apparaît le petit terme, en deuxième. Voici un exemple de syllogisme :

1. Selon la définition qu'Aristote donne du mot « prémisse », la conclusion est aussi une prémisse, mais la tradition a retenu que le terme ne valait pas pour elle.

Tous les hommes sont mortels, (majeure)
Tous les Grecs sont des hommes, (mineure)
Donc tous les Grecs sont mortels. (conclusion)

Le grand terme, « mortel », est prédicat de la majeure et de la conclusion. Le petit terme, « Grec », est sujet de la mineure et de la conclusion. Le moyen terme, « homme », sujet de la majeure et prédicat de la mineure, disparaît de la conclusion.

La position du moyen terme dans chaque prémisse caractérise la *figure* du syllogisme, les types de propositions qui y apparaissent déterminent son *mode*. Aristote explique qu'il ne peut y avoir que trois figures : si on veut lier deux termes A et C par un syllogisme, on ne peut le faire qu'à l'aide d'un moyen terme B, soit en prédiquant A de B et B de C, soit en prédiquant B de A et de C, soit en prédiquant A et C de B. Une division plus systématique fait apparaître une quatrième figure, en prédiquant C de B et B de A, mais Aristote en considère les modes comme des formes simplement dérivées de ceux des autres figures. Pour chacune d'elles, il y a $4^3 = 64$ modes possibles. Mais tous les syllogismes ne sont pas concluants – s'en tenant à sa définition, Aristote ne les tient alors pas pour des syllogismes. De deux prémisses particulières, par exemple, on ne peut rien conclure : de « Quelques hommes sont médecins » et de « Quelques médecins sont mortels », il ne suit rien. Aristote n'a reconnu que quatorze modes concluants, exhibant des contre-exemples pour les autres modes possibles.

Aristote a privilégié la première figure, qui produit les quatre types de conclusions possibles. Le moyen terme y est sujet de la majeure, toujours universelle, et prédicat de la mineure, toujours affirmative. Ce sont les seuls syllogismes dont Aristote dit qu'ils sont *parfaits*, parce qu'ils n'ont « besoin de rien autre chose que ce qui est posé dans les prémisses pour que la nécessité de la conclusion soit évidente ». Les syllogismes des deux autres figures, dits *imparfaits*, s'y réduisent, ce qu'Aristote montre soit par conversion, soit par un raisonnement par l'absurde.

La première figure compte quatre modes, dont le premier est le plus simple et le plus célèbre. Sa forme générale, ou syllogisme *abstrait*, telle que donnée par Aristote lui-même, est :

- (L1) Si A est prédiqué de tout B, et B de tout C, nécessairement A est prédiqué de tout C.

  Par exemple, si « mortel » (A) est prédiqué de tout « homme » (B), et « homme » (B) de tout « Grec » (C), alors « mortel » (A) est prédiqué de tout « Grec » (C). D'où le syllogisme *concret* suivant, qui n'est pas d'Aristote :

(S1) *Tous les hommes sont mortels,* (majeure A.U.)
Tous les Grecs sont des hommes, (mineure A.U.)
Tous les Grecs sont mortels. (conclusion A.U.)

Pour chacun des trois autres modes de la première figure, Aristote indique également la forme générale, que nous faisons suivre d'un syllogisme concret dont il n'est pas l'auteur :

- (L2) Si A n'est prédiqué de nul B, mais B de tout C, il en résulte que A n'appartiendra à nul C :

(S2)	*Aucun homme n'est mortel,*	(majeure N.U.)
	Tous les Grecs sont des hommes,	(mineure A.U.)
	Aucun Grec n'est mortel.	(conclusion N.U.)

- (L3) Que A appartienne à tout B, et B à quelque C, nécessairement A appartient à quelque C :

(S3)	*Tous les hommes sont mortels,*	(majeure A.U.)
	Quelques Grecs sont des hommes,	(mineure A.P.)
	Quelques Grecs sont mortels.	(conclusion A.P.)

- (L4) Si A n'appartient à nul B, mais B à quelque C, nécessairement A n'appartient pas à quelque C :

(S4)	*Aucun homme n'est mortel,*	(majeure N.U.)
	Quelques Grecs sont des hommes,	(mineure A.P.)
	Quelques Grecs ne sont pas mortels.	(conclusion N.P.)

La deuxième figure est caractérisée par le fait que la conclusion est toujours négative. En voici les quatre modes :

1. Que M, qui n'est affirmé de nul N, soit affirmé de tout X. En conséquence, N n'appartiendra à nul X.
2. Si M appartient à tout N, mais n'appartient à nul X, N n'appartiendra non plus à nul X.
3. Si M n'appartient à nul N, mais appartient à quelque X, nécessairement N n'appartient pas à quelque X.
4. Si M appartient à tout N, mais non à quelque X, nécessairement N n'appartient pas à quelque X.

La troisième figure est caractérisée par le fait que la conclusion est toujours particulière. En voici les six modes :

1. Quand P et R appartiennent à tout S, il suit que P appartiendra nécessairement à quelque R.
2. Si R appartient à tout S, et P à nul S, il y aura syllogisme concluant que P nécessairement n'appartiendra pas à quelque R.
3. Si R appartient à tout S, et P à quelque S, P appartient nécessairement à quelque R.
4. Si R appartient à quelque S et P à tout S, P appartient nécessairement à quelque R.

5. Si R appartient à tout S, et si P n'appartient pas à quelque S, nécessairement P n'appartient pas à quelque R.
6. Si P n'appartient à nul S, et si R appartient à quelque S, P n'appartiendra pas à quelque R.

D. Une logique formelle mais non formaliste

Aristote, contrairement à ce que nous avons fait par souci de clarté pour la première figure, ne fait suivre aucun de ces quatorze modes d'un syllogisme à termes concrets. En voici l'exemple le plus connu, donné à la fin des *Seconds Analytiques* :

> Admettons que *perdre ses feuilles* soit représenté par A, *avoir de larges feuilles* par B, et *vigne* par C. Si A appartient à B (car toute plante à feuilles larges perd ses feuilles) et si B appartient à C (car toute vigne est une plante à feuilles larges), alors A appartient à C, autrement dit toute vigne perd ses feuilles.

Ce syllogisme concret, d'une forme plus compliquée que celle que nous avons donnée en exemple, illustre le syllogisme abstrait (L1), dont la formulation est modifiée.

Aristote n'a donné que très peu d'exemples de syllogismes concrets. Cela renforce l'idée qu'il souhaitait donner à sa syllogistique, et à sa logique en général, un caractère en grande partie *formel*. Comme le syllogisme ci-dessus, notre syllogisme (S1), par exemple, est justifié non par son *contenu*, ce que les successeurs d'Aristote appelleront sa *matière*, à savoir les termes « homme », « mortel » et « Grec », mais par sa *forme*, donnée par (L1). Comme le dit Aristote dans sa définition du syllogisme, la conclusion découle *nécessairement* des prémisses, « par le seul fait » de celles-ci. Si on substitue « Français » à « hommes », « Européens » à « mortels », et « Parisiens » à « Grecs », la conclusion – « Tous les Parisiens sont Européens » – coule de source, parce que la forme du raisonnement demeure : si tous les B sont A et tous les C sont B, alors tous les C sont A. Ce caractère formel apparaît clairement avec la relation d'inclusion entre classes : si la classe des B est incluse dans celle des A et la classe des C incluse dans celle des B, alors la classe des C est incluse dans celle des A[1]. Toute autre substitution que celle indiquée ci-dessus donnerait le même résultat. Cela revient à dire que (L1), (L2), (L3) et (L4) valent indépendamment de ce qu'on substitue à A, B et C.

1. Une classe est incluse dans une autre si tous les individus de la première sont aussi des individus de la seconde. En simplifiant, la notion de classe (constituée d'individus) appartient à la logique, celle d'ensemble (constituée d'éléments) aux mathématiques. Nous les considérerons souvent comme synonymes.

Avec l'usage de ces lettres, Aristote a introduit l'idée de *variable* comme, beaucoup plus tard, les mathématiciens, qui remplaceront en algèbre les constantes numériques par x, y et z. Aristote n'avait probablement pas pleinement conscience de l'importance de cette découverte pour l'histoire de la pensée, et du vaste usage qui peut en être fait. On le voit à propos du principe d'identité : s'il cite comme exemple de proposition fausse « Une science particulière n'est pas science », nulle part il n'énonce le principe général selon lequel « Quelque A n'est pas A » est toujours une proposition fausse.

Avec Aristote apparaît donc l'idée de raisonnement formellement *valide*[1], c'est-à-dire logiquement légitime. Un syllogisme concret peut correspondre à un raisonnement non valide, bien que ses prémisses et sa conclusion soient vraies. Il suffit que sa forme soit incorrecte, comme celle du syllogisme concret suivant :

Quelques hommes sont médecins,
Quelques médecins sont mortels,
Quelques hommes sont mortels.

Inversement, un syllogisme concret peut illustrer un mode concluant sans que sa conclusion soit vraie. Le syllogisme suivant satisfait (L1), mais sa conclusion est fausse, du fait de la fausseté de la mineure :

Tous les hommes sont des animaux,
Toutes les tables sont des hommes,
Toutes les tables sont des animaux.

Cependant, si la logique d'Aristote est formelle, elle n'est pas *formaliste*, comme elle le sera chez certains logiciens des XIX^e^ et XX^e^ siècles. Ce qui caractérise le formalisme, c'est que le raisonnement y porte sur des signes, et non sur leur contenu : si deux énoncés ont des formes différentes, ils doivent être traités comme distincts, même s'ils ont la même signification. Cela suppose l'usage d'un langage extrêmement précis et la possibilité, *in fine*, d'interpréter ces signes dans des domaines différents. Sur le second point, Aristote n'autorise à substituer aux lettres A, B, C, etc. que des termes concrets de prédicats. Sur le premier, il n'opère pas la substitution en respectant scrupuleusement la formulation de départ, manifestant une discordance entre le syllogisme abstrait et le syllogisme concret correspondant. C'est si vrai que, comme nous l'avons fait, il lui arrive de remplacer « être prédiqué de » ou « appartenir à » par le verbe « être », comme dans l'exemple suivant :

> Si on a pris B comme appartenant à tout A et C comme n'appartenant à aucun A, il en résulte que C n'appartient pas à quelque B.
> *Si on a posé que toute science médicale est science et qu'aucune science médicale n'est science, il en résulte qu'une science particulière n'est pas science.*

1. On dit qu'un raisonnement est valide, correct, juste, etc. ou non valide, non correct, non juste, etc., pas qu'il est vrai ou faux. Seules les propositions sont vraies ou fausses.

Cette manière de procéder est grammaticalement motivée, mais d'une façon générale – on peut le voir sur la forme qu'il donne aux quatorze modes retenus –, le vocabulaire d'Aristote n'est pas stable : il a plusieurs termes pour la copule (« être prédiqué de », « être affirmé de », « appartenir à ») ; exprime tantôt explicitement la nécessité, tantôt l'omet ; introduit en général la prémisse majeure par *si* et lui lie la mineure par *et*, mais pas toujours. C'est sans dommage pour sa logique, mais c'est une démarche qu'interdit le formalisme. La logique d'Aristote n'est pas non plus une logique *symbolique*, puisque ses seuls signes spécifiques sont les lettres désignant des termes universels concrets. Tous les autres appartiennent à la langue grecque usuelle. Cela en complique considérablement l'exposé et la compréhension.

E. Sur quelques difficultés d'interprétation

Lorsqu'on examine les syllogismes aristotéliciens abstraits, on voit que, au-delà des variations de formulation, si on appelle p et q les prémisses et r la conclusion, ils peuvent tous se lire ainsi : *si* (p *et* q), *alors* r ou *si* p *et si* q, *alors* r[1]. Le syllogisme aristotélicien abstrait a donc la structure de ce qu'on appelle une *forme*, ou *fonction, propositionnelle hypothétique*, le syllogisme concret ayant celle d'une *proposition hypothétique*, dont, dans les deux cas, l'antécédent est la conjonction des prémisses p et q et le conséquent la conclusion r. C'est également vrai de la façon dont Aristote présente la conversion, par exemple lorsqu'il écrit « Si A appartient à tout B, B aussi appartient à quelque A », où « A appartient à tout B » et « B appartient à quelque A » sont respectivement l'antécédent et le conséquent d'une hypothétique. Tout cela signifie que, du point de vue de la logique actuelle, la forme générale du syllogisme aristotélicien est celle d'une *loi* logique (ou *tautologie*), toujours vraie quels que soient les termes concrets substitués aux variables A, B et C.

Mais si cette présentation est celle de l'exposé systématique de la syllogistique dans les *Premiers Analytiques*, il arrive qu'Aristote l'abandonne, dès lors qu'il applique la logique à la démonstration scientifique, comme dans cet exemple tiré des *Seconds Analytiques* :

> Admettons que D signifie *plantes à larges feuilles*, E perdre ses feuilles et Z *vigne*. Alors E appartient à Z (car toute vigne perd ses feuilles), et D à E (puisque toute plante qui perd ses feuilles est une plante à larges feuilles) : donc toute vigne est une plante à larges feuilles.

1. La nuance entre ces deux lectures n'affecte pas notre propos.

Cet exemple est particulièrement parlant, puisqu'il suit le syllogisme concret d'Aristote donné plus haut, qui respecte la forme (L1). Ce n'est pas le cas ici, puisque la forme adoptée est celle de ce qu'on appelle, dans le cas d'un syllogisme abstrait, un *schéma* ou *règle d'inférence*, dans celui d'un syllogisme concret, une *inférence* : p et q, donc r. Soit, puisqu'il s'agit du premier mode de la première figure :

	Tout B est A,		*Tous les hommes sont mortels,*
(L1)'	Tout C est B,	(S1)'	*Tous les Grecs sont des hommes,*
	Donc tout C est A.		*Donc tous les Grecs sont mortels.*

Ici, ce n'est pas du syllogisme lui-même qu'on peut dire s'il est vrai ou faux, mais de ses prémisses et de sa conclusion. Lui-même est valide ou non valide. (L1)' et (S1)' étant valides, de la vérité des prémisses découle la vérité de la conclusion, alors que toute hypothèse sur la vérité de ces propositions est absente de (L1) et (S1). Il y a bien une différence de nature entre (L1) et (L1)' : (L1) exprime une loi logique, (L1)' une inférence. Ce n'est pas une mince différence : une loi est une vérité intemporelle, universelle ; une inférence est une opération de l'esprit, correcte ou incorrecte. La seconde est une règle, justifiée par la première : dans le cas présent, c'est la vérité de (L1) qui assure la validité de (L1)' et de (S1)', et c'est cette vérité qui nous autorise à tirer les conclusions de (L1)' et de (S1)' de la conjonction de leurs prémisses. Si la logique traditionnelle a pu facilement confondre loi et règle, la logique actuelle l'interdit. D'autant que considérer la logique comme fondée sur des lois, et non sur des règles, c'est la rapprocher des mathématiques, avec ses énoncés vrais, plutôt que de la morale ou de l'esthétique, avec ces prescriptions sur le bien et le mal, le beau et le laid.

Il est ici difficile de faire dire à Aristote plus que de raison car on se heurte à la difficulté qu'il y a à interpréter un auteur ancien à la lumière de divisions actuelles. D'un côté, Aristote s'en tient scrupuleusement, dans les *Premiers Analytiques*, à la présentation du syllogisme sous forme de loi ; de l'autre, il adopte ensuite parfois la forme inférentielle, sans rien dire d'une modification qui le voit passer de la première, qui ne dit rien de la vérité des prémisses, à la seconde, qui impose leur vérité. Dans le premier cas, Aristote serait proche de la logique contemporaine et seuls ses successeurs seraient responsables d'avoir modifié subrepticement sa syllogistique. Dans le second, il s'en éloigne et serait l'auteur premier de ce changement. Faute de consensus chez les spécialistes, nous avons volontairement adopté une présentation neutre pour nos exemples.

Cette hésitation étonne moins si on examine comment Aristote articule logique et science. Pour lui, un syllogisme est aussi un outil au service de la seconde : à partir de vérités connues antérieurement, on en déduit une nouvelle, qui peut à son tour servir de prémisse à un autre syllogisme. Et une suite de syllogismes correctement enchaînés constitue une démonstration. La logique, qui ne s'inquiète que de la validité du raisonnement, ne requiert pas que les prémisses d'un syllogisme soient vraies. Mais pour une science démonstrative, explique Aristote, il en va autrement. Dans un syllogisme scientifique, ou démonstratif, dit-il, « les prémisses doivent être vraies ». Et au point de départ de la science, il faut des vérités premières, immédiates, nécessaires et universelles, qu'Aristote appelle des *principes*. Il est remarquable que ses conceptions précèdent de peu la rédaction des *Éléments* d'Euclide, qui rassemblent une grande partie des connaissances mathématiques de la Grèce de l'époque. Mais il est difficile de distinguer ce qu'Euclide doit à Aristote, et ce que ce dernier a emprunté à la mathématique. Il est également remarquable de voir Aristote examiner la possibilité d'appliquer le syllogisme aux sciences inductives (l'induction consiste à remonter des faits aux principes et à passer du particulier au général), comme la « physique », la zoologie ou la botanique, où ses contributions sont capitales.

Ainsi présentée, la logique aristotélicienne apparaît bien comme un « *organon* » au service de la science. A-t-elle le même rapport avec la philosophie ? Pour Łukasiewicz, les *Premiers Analytiques* sont « un ouvrage de pure logique tout à fait exempt de toute contamination philosophique ». La thèse est défendable, sous réserve en effet de la limiter à l'exposé des *Premiers Analytiques*, car un examen attentif de l'ensemble de l'œuvre d'Aristote montre que sa logique est surtout parfaitement adaptée à sa philosophie, dont le sommet est la métaphysique.

Une autre difficulté d'interprétation apparaît si on examine les deux termes d'une alternative particulièrement présente au XIXe siècle : dans la logique d'Aristote, est-ce le point de vue de la *compréhension* ou de l'*extension* qui domine ? La difficulté tient au vocabulaire même du philosophe, dont on ne sait pas toujours s'il entend, derrière les constituants de la proposition que sont le sujet et le prédicat, des mots ou des notions. Aristote les appelle des termes, donc des signes écrits, parlés ou pensés, conformément à l'idée que la prédication porte sur ceux-ci et non sur ce qu'ils désignent. Mais il lui arrive aussi d'écrire le contraire : « on construit le syllogisme en posant que quelque chose appartient ou n'appartient pas à une autre chose ». Quoi qu'il en soit, la forme attributive qu'Aristote donne à la proposition en général laisse à penser qu'il privilégie le point de vue de la compréhension. Mais comme les termes qu'elle contient peuvent être pris universellement ou particulièrement, il leur confère implicitement une extension, et c'est ce point de vue qui l'emporte alors.

Ces difficultés d'interprétation, apparaissant grâce aux acquis de la logique moderne, ne relèvent pas d'une subtilité inutile. Au contraire, elles excluent que des confusions dommageables polluent l'œuvre logique d'Aristote, dont elles révèlent le véritable contenu, qu'une lecture trop superficielle pourrait masquer. Elles contribuent ainsi à restituer l'authenticité du texte d'Aristote, que la tradition a contribué à effacer progressivement.

F. Les limites de la logique d'Aristote

Comme les remarques qui précèdent, ces limites apparaissent en partie grâce à une lecture rétrospective de l'œuvre d'Aristote et de ses prolongements. En premier lieu, si la logique d'Aristote est, au moins partiellement, formelle, elle n'est que très peu *formalisée*. On l'a vu, beaucoup de lois logiques utilisées ne sont pas explicitées, certaines étant même passées sous silence, le symbolisme est réduit et l'idée de variable, bien que présente, est à peine développée. Certes, la forme des syllogismes est toujours la même – *si* $(p$ *et* $q)$, *alors* r –, mais Aristote ne s'impose pas de lui donner une expression unique et, surtout, il ne peut voir vraiment pourquoi certains syllogismes sont concluants et d'autres pas. Il lui manque notamment d'avoir dégagé le rôle des *quantificateurs* universel et existentiel, avec passage de l'un à l'autre par négation. Certes, le « tous les » et le « quelques » de sa syllogistique en sont les correspondants en français, mais cela ne suffit pas. L'analyse de la proposition en sujet et prédicat rencontre ici une limite que la logique contemporaine a dépassée.

En second lieu, bien que la logique d'Aristote prétende donner la forme de toutes les déductions, elle est inapte à rendre compte de certains raisonnements. Toutes les démonstrations ne se réduisent pas à des suites de syllogismes et toute la logique ne se réduit pas au raisonnement syllogistique. C'est notamment le cas lorsque intervient la notion de *relation*, fondamentale en logique et en mathématiques. Les raisonnements suivants, extrêmement simples, ne résultent ni des lois données par Aristote pour la conversion et l'opposition ni ne sont des syllogismes : « Si tout homme est un animal, alors la tête d'un homme est la tête d'un animal », « Si P est le père de F, alors F est un enfant de P.

D'ailleurs, la conversion entre propositions, qui autorise à permuter le sujet et prédicat, rend relative la distinction entre l'un et l'autre. La théorie aristotélicienne des définitions en souffre. Une définition est une identité entre deux expressions dont l'une est supposée connue, l'autre non. Si on peut les permuter, on perd cette asymétrie. Par exemple, dans « Homme est animal doué de raison » et « Animal doué de raison est homme », qu'est-ce qui définit et est connu, qu'est-ce qui est défini et est inconnu ? Sont en cause les différentes fonctions du verbe « être », bien qu'Aristote en ait limité l'usage : exprimant à la fois un lien, une identité, une attribution, il est porteur d'ambiguïté.

La distinction entre propositions affirmatives et propositions négatives est elle aussi relative, et moins essentielle que celle entre une proposition et sa négation. Du fait qu'Aristote fait porter cette dernière sur la copule et non sur la proposition tout entière, il suffit d'affecter le prédicat d'une proposition négative d'un préfixe privatif pour la transformer en affirmative. Par exemple, la négative « Les Dieux ne sont pas mortels » et l'affirmative « Les Dieux sont immortels » ont la même signification. La logique contemporaine ne tient pas la distinction d'Aristote pour pertinente, ayant adopté l'*opérateur*[1] de négation, qui distingue la proposition p de sa négation *non-p*.

Beaucoup de ces défauts proviennent de ce que la logique d'Aristote est d'abord une logique des termes, ou des noms, liés par une copule, logique à ce titre fondée sur la *langue naturelle* et sa *grammaire*, et non une logique des propositions, fondée sur des relations formelles entre ces dernières. Elle traduit donc les imperfections et les ambiguïtés de la langue, et n'est qu'en partie un calcul logique et une explicitation de la pensée mathématique. Cela ne signifie pas qu'Aristote ignorait tout de la logique des propositions. Il en a utilisé parfois implicitement certaines lois, et en a même énoncé quelques-unes, soit dans toute leur généralité, soit sur un exemple.

Ce rapport à la langue pose la question suivante : puisque logique et « *logos* » sont liés, la logique aristotélicienne est-elle de l'ordre de la *parole* ou de l'ordre de la *pensée* ? Bien que dialectique, rhétorique et logique aient quelques points communs, Aristote nous dit que « la démonstration, pas plus que le syllogisme, ne s'adresse au discours extérieur, mais au discours intérieur de l'âme ». Pour Aristote, une proposition, c'est un « *logos* » vrai ou faux, la vérité et la fausseté appartenant d'abord aux pensées. Une parole, un discours, n'en sont que l'expression. C'est par la pensée que nous jugeons de la validité d'un raisonnement. La logique norme la rectitude de la première, la correction du langage n'en est qu'une conséquence. Cela ne signifie pas que la logique d'Aristote soit contaminée par des considérations relevant de la psychologie. Dès le début de l'*Hermeneia*, Aristote explique que les « affections de l'âme » n'ont rien à voir avec la logique. L'exposé systématique des *Premiers Analytiques* n'utilise aucun terme qui soit emprunté au monde psychique et les « lois » du raisonnement logique n'y apparaissent nullement comme des « lois de la pensée », au sens psychologique qui sera parfois donné à cette expression. On verra en effet que l'histoire de la logique est marquée par un double lien, entre logique et pensée, entre logique et langage.

Malgré les réserves exprimées précédemment, la découverte du philosophe grec est un événement considérable dans l'histoire de la pensée. La logique aristotélicienne est demeurée en usage, avec quelques modifications plus ou moins mineures,

1. Nous utiliserons ce terme générique pour désigner tout ce qui, en logique symbolique, affecte la vérité d'une ou de plusieurs propositions (on dit aussi « foncteur ») : dans le cas d'un opérateur liant deux propositions, ce qui exclut la négation, on peut parler de « connecteur ».

jusqu'au début du XIXe siècle. C'est pourquoi il a fallu une étude minutieuse de l'œuvre logique d'Aristote pour faire apparaître clairement ce qui lui appartient en propre et ce que la tradition y a importé sans le savoir ou sans le dire expressément. C'est en ce sens qu'on peut qualifier de « traditionnelle » la logique d'Aristote, qui apparaît désormais, contrairement à ce qu'on a longtemps cru, non plus comme la logique tout entière, mais comme *une* théorie logique particulière, adaptée à ses conceptions philosophiques et scientifiques. L'analyser grâce aux outils de la logique contemporaine ne la dévalue pas, mais montre qu'il y a d'autres manières de faire de la logique, ce qu'on sait depuis le XIXe siècle, et ce que savaient déjà les stoïciens de la Grèce antique.

III. THÉOPHRASTE

Théophraste fut le successeur immédiat d'Aristote à la tête du Lycée. La plupart de ses œuvres, dont toutes celles de logique, sont aujourd'hui perdues, mais des témoignages fiables nous font connaître son apport à la discipline. L'un deux concerne la proposition universelle. L'idée se trouvait déjà chez Aristote, mais comme une simple remarque sans conséquence. Théophraste note que *A est prédiqué universellement de B* peut être transformée en *Ce de quoi B est prédiqué universellement, de cela A est aussi prédiqué universellement*. Par exemple, « Tous les hommes sont mortels » devient « Tout ce qui est prédiqué des mortels l'est des hommes ». De là que, disons : « Si tous les mortels ont une âme, alors tous les hommes ont une âme », « Si tous les mortels ont des plumes, alors tous les hommes ont des plumes », etc. Ainsi peut-on construire, à partir d'une seule universelle, une multitude, voire une infinité, de nouvelles propositions hypothétiques, du type « *si..., alors...* ».

Théophraste lui-même n'y a sans doute vu qu'une différence verbale, mais en plaçant A et B dans la position commune de prédicat d'un sujet indéterminé, le « de quoi » A et B sont prédiqués, alors qu'Aristote tenait à l'asymétrie de la relation sujet/prédicat, il renvoie sans le savoir au quantificateur universel actuel. Ce « de quoi » joue en effet le rôle d'une variable, même si, comme son maître, Théophraste n'a pas perçu pleinement l'importance de cette notion. Si on nomme x cette variable, et P et Q deux prédicats quelconques, respectivement « homme » et « mortel » dans notre exemple, son analyse de la proposition universelle correspond à celle de la logique moderne : *pour tout* x, *si* $P(x)$, *alors* $Q(x)$.

Un apport plus mineur concerne la syllogistique, domaine où Théophraste a poursuivi le travail de son maître. Il a intégré les modes de la quatrième figure, qu'Aristote connaissait mais n'avait pas retenus, à la première, dont il a donné une définition plus générale que celle de ce dernier : le moyen terme est sujet d'une des prémisses et prédicat de l'autre. Il a ainsi ajouté cinq modes à la première figure. Bien que cette innovation ne soit finalement qu'une affaire de classement, ces « modes indirects », comme les logiciens les appelleront ultérieurement, appartiennent à l'histoire de la syllogistique aristotélicienne.

Par ailleurs, et c'est une modification plus importante dont il est difficile de dire si elle est sa seule propriété, Théophraste a introduit ce qu'on appelle les syllogismes *hypothétiques*, alors qu'Aristote n'avait retenu que les *catégoriques*. Dans ce dernier cas, aucune des propositions composant le syllogisme n'est une hypothétique, tandis que dans le premier, au moins une des prémisses l'est, et est donc une proposition du type « *si*..., *alors*... ». Voici les trois figures retenues par Théophraste, par analogie avec celles d'Aristote, telles qu'elles ont été léguées par ses commentateurs immédiats :

1. Si A, alors B ; si B, alors C ; donc si A, alors C.
2. Si A, alors C ; si B, alors non-C ; donc si A, alors non-B.
3. Si A, alors B ; si non-A, alors C ; donc si non-B, alors C.

Voici un exemple de la première figure : « Si homme, alors mortel ; si Grec, alors homme ; donc si Grec, alors mortel ».

Même si Théophraste ne s'en est probablement pas rendu compte, il a transformé la présentation de la syllogistique d'Aristote. Là où ce dernier donnait à ses syllogismes abstraits la forme d'une loi logique, constituée d'une proposition complexe rassemblant trois propositions simples, Théophraste y a vu l'expression d'un *schéma d'inférence*, avec trois propositions indépendantes, « donc » marquant le début de la conclusion. Les logiciens ultérieurs, sans le savoir ou sans en prendre la pleine mesure, reprendront cet infléchissement dans leur présentation de la syllogistique aristotélicienne.

IV. LA LOGIQUE MÉGARICO-STOÏCIENNE

On doit à l'Antiquité grecque une autre logique, dite « stoïcienne ». C'est l'expression que nous utiliserons couramment dans les chapitres à venir, bien qu'il y ait là une double approximation : d'une part parce que les stoïciens appelaient « dialectique » ce que nous nommons « logique », ce dernier terme recouvrant pour eux tout ce qui se rapporte au langage, dont la rhétorique et la grammaire ; d'autre part parce qu'ils empruntaient à une école antérieure, celle de Mégare, contemporaine et rivale de celle d'Aristote. Il est donc plus juste de parler de logique mégarico-stoïcienne et de distinguer la logique mégarique et la logique stoïcienne proprement dite, même s'il est difficile de dire avec certitude ce qui appartient en propre à l'une ou à l'autre, d'autant que la seconde s'est appuyée sur la première pour se développer.

Aristote n'a semble-t-il rien connu de cette logique. Aucun ouvrage original ne nous en est parvenu, et on ne la connaît qu'au travers de sources relativement tardives et peu compétentes en la matière[1], de sorte qu'elle a longtemps été mal comprise et critiquée. Et alors que la fin de l'Antiquité en avait fait entrer certains éléments dans la logique aristotélicienne, ce n'est qu'au début du XX^e^ siècle qu'elle a vraiment été redécouverte et appréciée à sa juste valeur, grâce là encore aux acquis de la logique contemporaine. Les logiques aristotélicienne et stoïcienne ne s'opposent pas, mais se complètent, car elles diffèrent sur deux points importants, liés à une inspiration philosophique distincte : la logique stoïcienne est une logique des propositions et non des termes, elle manifeste un souci de formalisme et d'explicitation des hypothèses nécessaires aux opérations logiques poussé à un stade que n'atteint jamais Aristote. Cela la rapproche de la logique actuelle, d'où l'aptitude de cette dernière à en faire une analyse qui lui rend justice.

A. La logique mégarique

Le terme vient du nom de la cité grecque Mégare. Son École, qui couvre les V[e] et IV[e] siècles avant J.-C., fut fondée par un disciple de Socrate ayant également subi l'influence de Zénon, Euclide, qu'on ne confondra pas avec l'auteur des *Éléments*. De l'École de Mégare, qui précède celle d'Aristote de quelques décennies, émergeront Eubulide, Diodore et Philon. Comme chez Aristote, le point de départ des mégariques est la dialectique. Mais alors que ce dernier, en quête de l'Être, posait la question : « A appartient-il à B ? », eux demandaient : « Comment réfuter telle ou telle affirmation ? ». C'est ainsi qu'au lieu de développer une théorie des rapports entre noms, donc une logique des termes, ils ont considéré les phrases dans leur totalité, ce qui les a conduits à élaborer une logique des *propositions*.

Eubulide est surtout connu pour sa découverte de divers paradoxes. Contrairement à beaucoup, dont Aristote, qui les considéraient comme de purs sophismes, les mégariques y voyaient des problèmes graves montrant les limites de l'usage rationnel du discours. Le plus célèbre est le paradoxe du *Menteur*, dont la forme la plus simple est la suivante. Imaginons qu'un homme dise : « Je mens ». La proposition « Je mens » est-elle vraie ou fausse ? S'il est vrai que cet homme ment, il dit la vérité en disant « Je mens », et donc il est faux qu'il mente ; s'il est

1. Les deux principales sont Diogène Laërce (III[e] siècle) et Sextus Empiricus (II-III[e] siècles), qui n'étaient ni logiciens, ni stoïciens.

faux qu'il mente, alors il ne dit pas la vérité en disant « Je mens », et donc il est vrai qu'il ment : chaque hypothèse mène à une conclusion qui la contredit. On retrouve le paradoxe du *Menteur* dans toute l'histoire de la logique, y compris récente, et plusieurs variantes en ont été données, jusque dans la littérature. La plus célèbre est celle-ci : « Épiménide le Crétois dit : «Tous les Crétois mentent tout le temps» ». Si ce qu'il dit est vrai, il ment (puisque Crétois), donc ce qu'il dit est faux ; si ce qu'il dit est faux, c'est qu'il ment, donc (bien que Crétois) ce qu'il dit est vrai. On verra au dernier chapitre comment la logique actuelle traite du paradoxe du *Menteur*.

Diodore et son élève Philon se sont opposés sur la nature de l'*implication*. Dans la logique actuelle, une implication, ou proposition hypothétique, ou mieux, proposition conditionnelle, de la forme *si p, alors q* et notée $p \Rightarrow q$, ou mieux $p \longrightarrow q$, est une proposition qui n'est fausse que lorsque son antécédent p est vrai et son conséquent q faux[1]. Cela correspond à la définition de Philon, qui examine les quatre combinaisons possibles, selon que p ou q est vraie ou fausse :

> Philon, rapporte Sextus Empiricus, disait que l'implication est vraie lorsqu'elle ne commence pas avec le vrai pour finir avec le faux ; de sorte qu'il y a pour cette implication trois façons d'être vraie et une d'être fausse.

En procédant ainsi, Philon a anticipé l'utilisation des tables de vérité pour définir les opérateurs logiques. Celle du conditionnel se lit ainsi de haut en bas :

- si p vraie et q vraie (ligne 1), $p \longrightarrow q$ est vraie ;
- si p vraie et q fausse (ligne 2), $p \longrightarrow q$ est fausse ;
- dans les deux autres cas (lignes 3 et 4), $p \longrightarrow q$ est vraie.

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La définition philonienne correspond à ce que Russell appellera au XXe siècle « implication matérielle », expression à laquelle on préférera, pour éviter toute ambiguïté, le terme de *conditionnel*, qui désigne le connecteur liant l'antécédent et le conséquent d'une proposition conditionnelle, connecteur et proposition que

1. La littérature logique entretient parfois une ambiguïté sur le mot « implication », qui désigne tantôt la proposition hypothétique elle-même, à savoir $p \Rightarrow q$, tantôt le connecteur liant p et q. Pour notre part, nous utiliserons $\longrightarrow$ pour le connecteur que nous appellerons « conditionnel », et $\Rightarrow$ pour le symbole du métalangage qui signifie « implique » et exprime que $p \longrightarrow q$ est vraie quelques soient les valeurs de vérité de p et de q.

Philon prenait d'ailleurs soin de désigner différemment. Le mot « implication » a en effet l'inconvénient de suggérer, de même que l'expression « *si..., alors...* », l'existence d'un lien de conséquence entre l'antécédent et le conséquent, comme dans « S'il pleut, alors le sol est mouillé ». Aujourd'hui, le conditionnel n'est que le connecteur logique qui lie deux propositions, ici notées p et q, connecteur défini par la table ci-dessus. Il peut donc lier des propositions sans rapport entre elles : « Si 2 + 2 = 4, alors Platon est l'élève de Socrate », « Si 2 + 2 = 4, alors Socrate est l'élève de Platon », « Si 2 + 2 = 5, alors Platon est l'élève de Socrate », « Si 2 + 2 = 5, alors Socrate est l'élève de Platon ». Selon Philon et selon la logique actuelle – on pourra le vérifier à l'aide de la table ci-dessus –, seule la deuxième proposition est fausse.

Il faut cependant rester prudent sur ce rapprochement entre implication philonienne et implication matérielle. Les exemples attribués à Philon respectent en effet tous une certaine homogénéité de l'antécédent et du conséquent. En voici quatre, selon l'ordre de la table ci-dessus : « S'il est jour, il fait clair », « S'il est jour, il fait nuit », « Si la Terre vole, la Terre existe », « Si la Terre vole, la Terre a des ailes ». Philon a eu en tout cas le mérite de voir il y a longtemps que pour élaborer une théorie du rapport entre propositions, il convenait de la faire reposer sur une base minimale, à savoir une notion plus pauvre que celle de conséquence. Pauvreté qui lui confère justement la généralité qu'on demande aux théories actuelles.

Devant le caractère apparemment artificiel de la définition de Philon, Diodore en proposa une autre, plus complexe et plus restrictive, selon laquelle une implication est vraie lorsqu'*elle n'a pas pu ni ne peut* commencer par le vrai pour finir par le faux. Diodore fait ici appel aux idées de nécessité et de temporalité, et semble voir l'implication comme établissant un lien de conséquence entre l'antécédent et le conséquent, comme dans « Si nous étions hier mardi, nous sommes aujourd'hui mercredi ». Cela rapproche l'implication diodorienne de l'*implication stricte*, introduite par Lewis en 1918, qui pose que l'antécédent ne peut être vrai sans que le conséquent le soit aussi. Aristote semble de son côté avoir ignoré qu'il pouvait y avoir une double interprétation de l'implication. Mais là encore, bien que le rapprochement soit tentant, il ne doit pas être abusif : même si Diodore envisage la nécessité et la temporalité comme deux notions fortement liées, il faut distinguer la première, purement modale, qui est celle du possible et de l'impossible et est marquée par la négation du verbe « pouvoir », de la seconde, purement temporelle, qui est marquée par l'introduction du passé et du présent. C'est sur l'idée de temps que repose, selon Diodore, l'idée de nécessité, point de vue qui n'est pas celui de Lewis.

Diodore faisant appel à deux notions étrangères à Philon, l'une modale, l'autre temporelle, il apparaît, dès ses débuts, une double approche dans la logique mégarico-stoïcienne : celle de Philon l'engage dans la voie du formalisme en réduisant les connecteurs logiques à de simples *fonctions de vérité*[1] ; celle de Diodore manifeste une attention particulière à la grammaire des langues naturelles et s'efforce de mettre en accord formules logiques et formules du langage. La définition de l'implication a d'ailleurs donné lieu à de vives controverses chez les mégariques et les stoïciens.

B. La logique des stoïciens

Le stoïcisme, dont la doctrine a survécu jusqu'au début de l'ère chrétienne, est un des grands courants de la philosophie grecque. Ses débuts se situent aux IVe-IIIe siècles avant J.-C. Les stoïciens les plus connus de cette première période sont Zénon de Citium, le fondateur, qui enseignait dans une école appelée le Portique (« *stoa* » en grec), Cléanthe, et surtout Chrysippe. Au contraire d'Aristote qui voyait la logique comme un instrument au service de la science et de la philosophie, les stoïciens la considéraient comme faisant partie de cette dernière, avec l'éthique et la « physique ». Ils divisaient la logique en deux « sciences », la rhétorique et la dialectique, cette dernière étant à l'origine, comme chez Aristote, un art de la discussion. La dialectique comptait elle-même deux parties : l'une concernait les *signifiants*, et traitait de la grammaire et de tout ce qui touche au langage, l'autre les *signifiés*, et c'est cette partie qui est au plus proche de ce qu'on appelle aujourd'hui la logique. Cette division montre tout l'intérêt que les stoïciens portaient à l'analyse du langage.

Les stoïciens, et en particulier Chrysippe, développèrent donc une théorie distinguant le *signifiant*, le *signifié*, et ce que *vise* le signifié. Le signifiant, c'est-à-dire ce qui signifie et se transmet par la voix ou par l'écrit, appartient au langage, au discours. Parmi les signifiants, Chrysippe distingue les *noms* (nos noms propres), comme « Diogène » ou « Socrate », et les *appellatifs* (nos noms communs), comme « cheval » ou « homme ». Le signifié, c'est-à-dire ce qui est signifié par le signifiant, est le sens, l'idée exprimés par celui-ci ; ce que vise le signifié est une chose ou un événement du monde. Dans « Aristote court », le signifiant est la phrase, écrite ou parlée ; le signifié est ce qu'elle exprime ; ce qui est visé est l'événement qu'Aristote est en train de courir. Alors que signifiant et chose visée appartiennent au monde des corps et sont perçus par les sens, le signifié est un *incorporel*, qui n'appartient cependant pas au monde psychique ou mental de ce que nous pensons ou nous représentons. Les stoïciens l'appelaient « *lecton* », mot dérivé d'un verbe lui-même issu de « *logos* » et à peu près synonyme de « dire », « vouloir dire », « signifier ». Le terme étant difficilement traduisible et désignant un concept compliqué, on

1. Une fonction de vérité fait correspondre à une proposition complexe, ou composée, sa valeur de vérité.

le conserve en général tel quel. On dira pour simplifier qu'il désigne le sens d'une expression, inaccessible à la perception sensible précisément parce que hors du temps et hors du monde.

Il n'y a que le *lecton* qui soit véritablement objet de la logique. C'est seulement de lui, et non du signifiant verbal ou de ce à quoi il renvoie, qu'on peut dire s'il est vrai ou faux. Encore cela ne vaut-il que pour les *lecta* qui sont exprimés par une phrase complète, sous réserve qu'elle ne soit pas une prière, un ordre, une interrogation, etc. Ainsi de « Il fait jour » et « Dion marche », précise Chrysippe. Un *lecton* est donc bien une proposition. Et pour toute proposition, il n'y a qu'une alternative, conformément au *principe de bivalence*, dont on trouve l'énoncé chez Chrysippe : une proposition est vraie ou fausse. Tout cela fait de la logique stoïcienne, comme de celle de Mégare, une logique *propositionnelle*.

Parmi les propositions, les stoïciens faisaient la distinction entre celles qui sont *simples* et celles qui sont *composées*. Les premières ne contiennent aucune partie qui soit elle-même un *lecton*. Le type en est l'affirmative « Il est jour » (c'est-à-dire « C'est le jour », par opposition à « C'est la nuit »). Parmi les propositions affirmatives, les stoïciens distinguaient les *catégoriques*, comme « Dion marche » ou « Socrate est assis », les *catagoreutiques*, comme « Celui-ci marche » ou « Celui-ci est assis », et les *indéfinies*, comme « Quelqu'un marche » ou « Un homme est assis ».

Les stoïciens considéraient les propositions négatives comme des propositions simples. Mais ils en distinguaient trois types selon ce sur quoi porte la négation. Quand elle porte sur le sujet, comme dans « Personne ne marche », ils parlaient de *dénégatives* ; quand elle porte sur le prédicat, comme dans « Celui-ci est non philanthrope », ils les appelaient *privatives*. La *négative* proprement dite des stoïciens, celle qu'ils nommaient ainsi, est restreinte au cas où la négation porte sur la proposition tout entière, la particule négative étant placée en début de phrase, et non, comme chez Aristote, accolée à la copule : pour nier « Il est jour », les stoïciens ne disaient pas « Il n'est pas jour », mais « Non – il est jour » (pour simplifier, nous abandonnerons plus loin cette distinction). Cela permet d'éviter l'ambiguïté de certaines formes négatives exprimées en langue naturelle, dont le grec ancien. La phrase « Tous les hommes ne sont pas mortels » signifie-t-elle *Tous non mortels* (« Aucun homme n'est mortel ») ou *Non tous mortels* (« Quelques hommes sont mortels et d'autres non ») ? Cela permet également de faire apparaître facilement qu'une double négation vaut affirmation, ce qu'exprime désormais, à l'aide de l'opérateur de négation noté $\neg$, une loi de la logique des propositions : $\neg\neg p = p$[1]. Par exemple, la proposition « Non – non – il est jour », dite *hypernégative* par les

1. Nous utilisons ici le signe = pour simplifier. Il ne s'agit pas d'un connecteur logique, mais d'un symbole du métalangage.

stoïciens, équivaut à « Il est jour ». L'analyse stoïcienne de la négation, semblable à celle de la logique actuelle, confirme la priorité donnée à la proposition dans leur logique.

Il y a ensuite six types de propositions *composées* :

1. l'hypothétique ou conditionnelle, comme « S'il est jour, il fait clair » ;
2. la conjonctive, comme « Il est jour et il fait clair » ;
3. la disjonctive, comme « Ou il est jour ou il est nuit » ;
4. la consécutive ou inférentielle ou paraconditionnelle, comme « Puisqu'il est jour, il fait clair » ;
5. la causale, comme « Parce qu'il est jour, il fait clair » ;
6. la comparative, augmentative, comme « Il est plus jour que nuit », ou diminutive, comme « Il est moins nuit que jour ».

Cette liste manifeste la persistance d'un lien entre logique et grammaire. Ne sont, pour un œil actuel, des propositions relevant de la logique que l'hypothétique, la conjonctive et la disjonctive, parce que leur vérité ne dépend que de celle des propositions simples qui les composent. Il en va différemment des autres types de propositions, qui leur sont analogues du point de vue grammatical, mais s'en distinguent du point de vue logique : elles expriment un fait, vrai ou faux selon le moment où on les lit ou les dit. Les maîtres de la logique stoïcienne semblent ne pas avoir ignoré ce problème : ils ne se sont occupés que des propositions de la première catégorie.

Apparaissent dans les propositions 1, 2 et 3, les principaux *connecteurs* logiques du calcul moderne des propositions :

1. le *conditionnel*, l'implication occupant une place centrale chez les stoïciens. Ils ont poursuivi les discussions des mégariques, analysant l'affirmative universelle d'Aristote comme on le fait aujourd'hui : plutôt que, par exemple, « Tout homme est mortel », ils disaient « Si c'est un homme, c'est un mortel ».
2. la *conjonction*, aujourd'hui notée $\wedge$, dont la définition actuelle – $p \wedge q$ est vraie si et seulement si p et q sont toutes deux vraies – correspond à celle que donnent explicitement les stoïciens.
3. la *disjonction*, dont les stoïciens privilégiaient la forme *exclusive*, aujourd'hui notée w : p w q est vraie si et seulement si l'une des deux propositions p et q est vraie et l'autre fausse, comme dans l'exemple indiqué. Mais ils connaissaient aussi la disjonction *inclusive*, aujourd'hui notée $\vee$, présente dans ce qu'ils appelaient *paradisjonctive*, proposition vraie si l'une au moins de ses composantes est vraie[1].

1. Par exemple, à l'entrée d'un cinéma : « Vous ne payez que 7 € si vous êtes chômeur ou âgé de moins de 26 ans ».

Les stoïciens possédaient également l'*incompatibilité*, aujourd'hui notée | : équivalente à la négation de la conjonctive, $p \mid q$ est vraie si p et q ne sont pas toutes deux vraies.

Certaines combinaisons de propositions forment des raisonnements, composés comme chez Aristote (mais les termes grecs sont différents), de prémisses et d'une conclusion. Ils proviennent de structures abstraites que les stoïciens appelaient *tropes* (de « *tropos* », « tour », « manière »), pour les distinguer de leurs applications concrètes, les *logoi*. Par extension du terme en principe réservé aux *lecta*, ils disaient qu'un raisonnement est *vrai* lorsque ses prémisses le sont et que l'implication les liant à la conclusion est valide. Les stoïciens distinguaient ainsi plus clairement que ne le faisait Aristote raisonnement formellement valide, indépendamment de la vérité des propositions qui le composent, et raisonnement permettant de passer de prémisses vraies à une conclusion vraie.

Parmi les raisonnements vrais, certains étaient nommés *démonstrations*, parce que permettant d'établir une chose jusqu'alors inconnue à partir de choses connues. Autrement dit, une démonstration va de l'évident au non évident. C'est ainsi que le syllogisme stoïcien « S'il est jour il fait clair, or il est jour, donc il fait clair », et le syllogisme aristotélicien (S1), qui conclut à la mortalité des Grecs, ne sont pas des démonstrations, au contraire de « Si la sueur traverse la peau il y a des pores, or la sueur traverse la peau, donc il y a des pores ». À la différence d'Aristote, les stoïciens admettaient des raisonnements non syllogistiques, comme « Il est jour, or tu dis qu'il est jour, donc tu dis la vérité » ou « Le premier plus grand que le second, or le second plus grand que le troisième, donc le premier plus grand que le troisième ».

Cinq tropes, attribués à Chrysippe, étaient fondamentaux, parce que tenus pour indémontrables ou, plus exactement, traités comme non démontrés (les stoïciens semblent avoir eu conscience de la relativité du choix des propositions premières dans un système déductif). Pour les stoïciens, n'étaient des syllogismes que les raisonnements s'exprimant sous l'une de ces cinq formes ou s'y ramenant selon quatre règles, dont nous ne connaissons que deux : l'une concerne le raisonnement par l'absurde, l'autre la déduction d'une proposition à partir de deux prémisses. Dans ces syllogismes, les *variables*, qui représentent des propositions et non des termes, sont expressément reconnues comme telles et désignées par des nombres ordinaux, selon leur place dans la composée :

1. *Si le premier le second, or le premier, donc le second.* Par exemple : « S'il est jour il fait clair, or il est jour, donc il fait clair ».
2. *Si le premier le second, or pas le second, donc pas le premier.* Par exemple : « S'il est jour il fait clair, or il ne fait pas clair, donc il n'est pas jour ».

3. *Pas à la fois le premier et le second, or le premier, donc pas le second.* Par exemple : « Il est faux qu'il soit jour et qu'il soit nuit, or il est jour, donc il n'est pas nuit ».
4. *Ou le premier ou le second, or le premier, donc pas le second.* Par exemple : « Ou il est jour ou il est nuit, or il est jour, donc il n'est pas nuit ».
5. *Ou le premier ou le second, or pas le second, donc le premier.* Par exemple : « Ou il est jour ou il est nuit, or il n'est pas nuit, donc il est jour ».

Ces cinq « formules » montrent que les stoïciens utilisaient les opérateurs propositionnels mentionnés plus haut – conditionnel, conjonction, disjonction exclusive et négation – en leur donnant le même sens qu'aujourd'hui, une réserve étant possible sur le conditionnel. Ce sont les termes premiers du « système » logique stoïcien. Les tropes, exprimés, peut-être en partie pour des raisons grammaticales, comme des syllogismes hypothétiques, donc non catégoriques, en constituent les cinq axiomes. Ils ont la forme de *schémas d'inférence*, implicitement justifiés par cinq lois de la logique moderne des propositions[1] :

1. $\Vdash ((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
2 $\Vdash ((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$
3. $\Vdash (\neg(p \wedge q) \wedge p) \rightarrow \neg q$
4. $\Vdash ((p \mathrm{~w~} q) \wedge p)) \rightarrow \neg q$
5. $\Vdash ((p \mathrm{~w~} q) \wedge \neg q)) \rightarrow p$

On sait aujourd'hui que les stoïciens ont tiré de leurs tropes une multitude de conclusions, parfois appliquées à la science, mais seulement un tout petit nombre nous est parvenu. Voici quelques-uns de ces théorèmes logiques, dont les deux premiers sont dus à Chrysippe :

1. *Si le premier le premier, or le premier, donc le premier.*
2. *Ou le premier ou le second ou le troisième, or pas le premier et pas le second, donc le troisième.*
3. *Si le premier et le second, le troisième, or pas le troisième mais le premier, donc pas le second.*
4. *Si le premier, alors si le premier, le second ; or le premier ; donc le second.*

Les théorèmes 1 et 2 ont un caractère d'évidence – le premier est une forme du principe d'identité –, ce qui montre que Chrysippe, et les stoïciens en général, prenaient soin de démontrer tout ce qui leur semblait démontrable et d'organiser leur logique en un système déductif, selon une démarche adoptée par la logique actuelle. Et alors qu'Aristote n'explicitait guère les lois sur lesquelles repose sa logique,

1. $\Vdash$ est un symbole du métalangage qui signifie que l'expression qui le suit est une tautologie, c'est-à-dire une proposition toujours vraie, quelle que soit la valeur de vérité des propositions qu'elle contient.

les stoïciens veillaient au contraire à les énoncer, voire à les démontrer : ainsi des principes de contradiction et du tiers exclu (présents respectivement dans le trope 3 et les tropes 4 et 5), de la double négation et d'identité.

On a pu, dans l'Antiquité et jusqu'au XIX^e siècle, reprocher aux stoïciens leur excès de formalisme, mais il témoigne en fait d'une remarquable prise de conscience des exigences de la logique formelle. Pour cette raison et d'autres, dont le fait qu'elle est une logique des propositions et non des termes, la logique mégarico-stoïcienne est plus proche de la logique moderne que ne l'est celle d'Aristote. Łukasiewicz, qui a grandement contribué à sa redécouverte, le résume ainsi, à propos de la manière dont les stoïciens démontraient l'un des théorèmes ci-dessus :

> Les bons logiciens raisonnaient il y a deux mille ans de la même façon que nous le faisons aujourd'hui.

V. LA NAISSANCE DE LA LOGIQUE MODALE

La logique modale traite des *modalités* que sont la nécessité, la possibilité, la contingence et l'impossibilité. Reprise par les médiévaux, elle fut délaissée par les fondateurs de la logique moderne, avant de se développer considérablement au XX^e siècle. Elle est aussi ancienne que la logique non modale, puisque née dans la Grèce antique avec Aristote, qui tâcha de l'ériger en système, et avec les stoïciens, chez qui elle est apparue à l'occasion de la controverse sur l'implication.

Aristote ne s'est pas limité à dire que, dans un syllogisme, la conclusion découle *nécessairement* des prémisses, il a examiné, plus profondément, les cas où, dans une proposition elle-même, le prédicat est attribué au sujet selon l'une des modalités ci-dessus, puis est passé à l'étude des syllogismes modaux, ceux qui contiennent au moins une proposition *modalisée*. En usant d'un vocabulaire qui n'est pas d'Aristote, on nomme *assertoriques* les énoncés, et par extension, les syllogismes, non modalisés ; *apodictiques*, ceux qui renforcent l'assertion par la nécessité, affirmative ou négative ; *problématiques*, ceux qui l'affaiblissent en complétant la prédication par le possible ou le contingent. « Le sage est nécessairement heureux » et « Une bataille navale aura possiblement lieu » sont des propositions respectivement apodictique et problématique. Aristote use de quatre termes modaux : « nécessaire », « impossible », « possible » et « contingent ». Le nécessaire est ce qui est nécessairement, l'impossible ce qui ne peut être, le possible ce qui peut être, et le contingent ce qui peut être ou ne pas être. Il y a donc en principe une nuance entre le possible et le contingent, mais Aristote ne distingue parfois pas du tout les deux termes, notamment dans le cadre de la syllogistique modale, où le contingent est défini comme « ce qui n'est pas nécessaire et peut être supposé exister sans qu'il y ait à cela d'impossibilité ».

Autre difficulté, plus grave, et qu'Aristote n'a dépassée qu'en partie, il y a deux manières de faire intervenir une nuance modale dans une proposition : en la liant au prédicat, comme dans les deux exemples ci-dessus, ou à la proposition complète. Dans ce dernier cas, nos deux exemples deviennent « Il est nécessaire que le sage soit heureux » et « Il est possible qu'une bataille navale ait lieu ». Il n'y a pas là qu'une nuance, puisque si la première formulation a la préférence d'Aristote car correspondant à sa philosophie et à sa logique des termes, un flottement apparaît lorsqu'il traite logiquement des propositions, comme s'il considérait les deux formulations comme semblables, alors qu'elles n'ont pas la même structure logique.

C'est donc non sans de multiples tâtonnements et sans y réussir totalement qu'Aristote a établi les relations entre modalités, par équivalence et par négation. La complexité du traitement modal des propositions fait que cette dernière pose particulièrement problème : par exemple, la négation de « Il est possible que p » est « Il n'est pas possible que p », et non « Il est possible que non-p ». Chez Aristote, la négation est traitée, comme en logique non modale, selon le double aspect de la contradiction et de la contrariété. Cependant, dans la liste ci-dessous, qui synthétise les réflexions d'Aristote et où « possible » et « contingent » sont synonymes, la négation d'une proposition est sa contradictoire au sens d'Aristote :

1. possible que p = contingent que p = non impossible que p = non nécessaire que non p ;
2. possible que non p = contingent que non p = non impossible que non p = non nécessaire que p ;
3. non possible que p = non contingent que p = impossible que p = nécessaire que non p ;
4. non possible que non p = non contingent que non p = impossible que non p = nécessaire que p.

Voici des exemples illustrant 1 et 2 :

1. « Il est possible qu'une bataille navale ait lieu », « Il n'est pas impossible qu'une bataille navale ait lieu » et « Il n'est pas nécessaire qu'une bataille navale n'ait pas lieu » sont des propositions équivalentes.
2. « Il est possible que le sage ne soit pas heureux », « Il n'est pas impossible que le sage ne soit pas heureux » et « Il n'est pas nécessaire que le sage soit heureux » sont des propositions équivalentes.

La théorie aristotélicienne des syllogismes modaux souffre des complications dues à la présence de trois modalités différentes, ce qui multiplie les combinaisons possibles, et des difficultés liées à l'usage de la négation, selon qu'elle porte sur la proposition ou sur le mode. Après une laborieuse recherche – on compte un total de 1 536 combinaisons –, Aristote a réparti tous les syllogismes modaux en les mêmes trois figures que pour la syllogistique assertorique, qu'il ramène ensuite aussi à la première. Son modèle est donc la syllogistique non modale, le cas le plus simple étant celui du syllogisme à deux prémisses apodictiques, qui ajoute la nécessité aux trois propositions qui composent le syllogisme assertorique correspondant. Il y a tout de même des différences puisque, entre autres, alors qu'aucun syllogisme assertorique avec deux prémisses négatives n'est concluant, cela peut arriver pour un syllogistique modal. Voici, tel qu'Aristote l'énonce, un syllogisme modal de la première figure, dérivé de (L3) et illustré par un syllogisme concret dont il n'est pas l'auteur :

> (M3) Supposons que A appartienne nécessairement à tout B, et que B appartienne simplement à quelque C. Il est nécessaire alors que A appartienne nécessairement à quelque C.
>
> *Tous les sages sont nécessairement heureux,*
> *Quelques hommes sont sages,*
> *Quelques hommes sont nécessairement heureux.*

Malgré l'identité des termes utilisés, Aristote distingue bien la nécessité modale, qui appartient au contenu de la conclusion, de la « nécessité syllogistique », qui concerne la connexion des prémisses et de la conclusion et est présente dans (L3) et (M3), d'où elle peut d'ailleurs être éliminée.

Les commentateurs modernes saluent en Aristote le défricheur de la logique modale, mais concluent unanimement que sa théorie des syllogismes modaux n'est pas à la hauteur de celle des syllogismes assertoriques. Elle pêche par son manque de rigueur, en particulier à cause de l'indécision qui règne sur ce qu'est le contingent et sur ce qui, prédicat ou proposition, porte la modalité. La validité de certains des syllogismes qu'Aristote a retenus a d'ailleurs été discutée et même rejetée. Il a sans doute eu tort de vouloir fonder la syllogistique modale sur la syllogistique assertorique et on peut même se demander s'il est réellement légitime de vouloir élaborer une syllogistique modale.

C'est d'ailleurs sur la logique modale que Théophraste a, probablement sans en avoir conscience, apporté le plus de modifications. D'une part, tout en conservant la synonymie entre contingent et possible, il leur a donné le seul sens de *pur possible*, c'est-à-dire de contraire de l'impossible, de sorte que ce qui est nécessaire est également possible. D'autre part, il a considéré explicitement que la modalité porte sur la proposition complète. Dès lors, il aurait contesté le caractère nécessaire de la conclusion du syllogisme ci-dessus car, selon lui, c'était la modalité la plus faible (la possibilité et la simple assertion sont moins fortes que la nécessité) qui devait l'emporter, parce que le lien qu'elle contient se transfère à la conclusion. Ainsi, si on pose que l'homme est nécessairement un être vivant et si on admet, empiriquement, que l'homme est un bipède, on conclura que les bipèdes sont des êtres vivants, mais pas que cela est nécessaire. Théophraste, plus qu'Aristote, ayant proposé une syllogistique modale s'accordant mieux avec sa syllogistique assertorique, les médiévaux suivront davantage le premier que le second.

Dans la logique mégarico-stoïcienne, c'est avec l'implication qu'apparaît l'idée de modalité. On a vu que chez Diodore elle liait nécessité et *temporalité*. Cette dernière prédomine, comme le montrent les définitions suivantes : le nécessaire est ce qui est vrai et ne sera pas faux, l'impossible ce qui est faux et ne sera pas vrai, le possible ce qui est vrai ou sera vrai, le non nécessaire ce qui est faux ou sera faux. Diodore souhaitait donc ramener les nuances modales à de simples nuances temporelles, portant sur le présent et le futur (dans le passé, quelque chose a ou n'a pas été). Au *nécessairement* d'Aristote pourrait être substitué le *toujours* de Diodore : par exemple, « Le sage est toujours heureux », ou plutôt « Toujours, le sage est heureux ». On est ainsi amené à interpréter l'implication diodorienne de deux manières :

1. pour tout temps t, on n'a jamais l'antécédent vrai au temps t et le conséquent faux au temps t ;
2. l'implication diodorienne est un cas spécial de l'implication philonienne, celui où cette dernière vaut *pour tout temps*.

Chez les stoïciens, et spécialement chez Chrysippe, apparaît aussi une nouvelle espèce d'implication, dite *connexe*, fondée sur une conception apparemment modale de l'incompatibilité : une proposition conditionnelle est vraie lorsque la négation de son conséquent est incompatible avec la vérité de son antécédent, d'où un rapport de conséquence logique et non de simple consécution. Dans une implication connexe, sans doute plus proche de l'implication stricte de Lewis que ne l'est celle de Diodore, le conséquent résulte nécessairement de l'antécédent, comme dans « S'il pleut, le sol est mouillé » : de la vérité de l'antécédent découle *toujours* la vérité du conséquent, ce qui n'est pas le cas dans « S'il pleut, je prends mon parapluie », où le rapport n'est que de simple consécution.

La Grèce antique a découvert la logique ou, plutôt, *deux* logiques, en lien étroit avec la grammaire de la langue qu'elle utilisait. Malgré ses limites, la logique aristotélicienne est demeurée longtemps la référence des logiciens, tandis que celle des mégarico-stoïciens, pourtant plus fine sur certains points, sombrait en partie dans l'oubli, quelques-uns de ses éléments étant agrégés subrepticement à sa concurrente.

CHAPITRE 2

LES LOGIQUES ORIENTALES

Pour les Occidentaux, la logique est née dans l'Antiquité grecque. À peu près à la même époque pourtant, les civilisations chinoise et indienne donnaient aussi une place importante aux questions de raisonnement. De la logique chinoise, peu d'écrits originaux nous sont parvenus et on peut discuter de leur appartenance à la logique, au sens où on l'entend en Occident. Les travaux qui y sont consacrés sont encore peu nombreux, mais les décennies à venir modifieront probablement cette situation. Quant à la logique indienne, sa découverte en Occident est récente, puisque ce n'est que vers 1800 que la philosophie indienne y a été connue. C'est dans les années 1930, grâce là encore aux analyses rendues possibles par la logique moderne, que l'existence d'une logique indienne proprement dite a été admise. Elle est mieux connue que celle de la Chine ancienne, mais cela n'a pas été chose facile. Les travaux de logique indienne exigent en effet d'être traduits en s'appuyant sur une tradition orale faite de commentaires successifs qui ne se prêtent pas aisément à une interprétation dans les termes de la logique occidentale. On gardera à l'esprit l'ensemble de ces réserves en lisant les quelques pages qui suivent.

I. LA LOGIQUE CHINOISE

Comme la logique grecque, la logique chinoise[1], dont les débuts datent du VI[e] siècle avant J.-C., est liée à la dialectique, en tant que pratique de la discussion argumentée. On parle aussi de « sophistique », pour des raisons que l'on va

1. Sur la logique chinoise, nous avons consulté différents articles de Kristopher Schipper dans le *Dictionnaire des philosophes* mentionné dans la bibliographie, ainsi que les textes suivants : Ferong Liu et Wujing Yang, A Brief Hystory of Chinese Logic ; Guo Weiwei, Le *Canon mohiste* et la logique,

comprendre. Les sophistes donc, sont des penseurs dont il ne reste aucun écrit, mais dont l'enseignement a été transmis par d'autres philosophes. Ils se préoccupaient de questions dont on dirait aujourd'hui qu'elles appartiennent plus à la philosophie du langage qu'à la logique proprement dite et de problèmes liés à des paradoxes qu'on peut qualifier de logiques.

A. La logique chinoise : une théorie des noms et de l'argumentation

La logique est apparue en Chine avec l'« école des noms » (*Mingjia*), terme donné *a posteriori* à un mouvement qui a eu une vraie influence sur la philosophie chinoise. Fondée par Deng Xi au VI^e^ siècle avant J.-C., elle visait à isoler les notions abstraites au sein de la langue et de l'écriture chinoises, tâche rendue difficile par le caractère idéographique de ces dernières et le fait qu'un même nom peut y désigner plusieurs réalités différentes[1]. Le chinois ne distingue notamment pas, pour un mot pris individuellement, le terme concret du terme abstrait. Par exemple, alors que le français a l'adjectif « blanc » pour qualifier les objets blancs et le nom « blancheur » pour désigner le concept commun à tous les objets blancs, le chinois n'a qu'un seul signe, *bai*.

La question du *nom* avait déjà été posée du temps de Confucius, avec le problème de la « rectification des noms » :

> Si les noms ne sont pas corrects, le langage n'est pas en accord avec la réalité et, dans ce cas, aucune chose ne peut être accomplie. Corriger les noms suppose que chacun se conforme à ce qu'il est.

En logique, le problème donnera naissance à des spéculations sur la relation entre le « nom » (*ming*) et la « forme » (*xingming*) supposée lui correspondre.

Elles furent pour la première fois véritablement développées au V^e^ siècle avant J.-C. par Mozi, considéré comme le fondateur de la logique chinoise, au travers de l'école mohiste, qui plaça la recherche de la vérité et l'*argumentation* (*bian*) au cœur de l'enquête intellectuelle. Il reste six textes de l'école mohiste sur la logique, écrits par des membres anonymes, et regroupés sous le titre de *Canon mohiste*[2]. Pour les mohistes, comme pour Confucius, le nom doit se conformer aux objets, avec des discussions qui tournaient essentiellement autour de deux couples : « le même et le différent », « le dur et le blanc ». Pourquoi ces deux couples ? Parce

Études chinoises 26, 2007, p. 267-283 ; Chris Fraser, The School of Names, *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Tous sont disponibles sur internet.

1. Contrairement au français, qui est une langue phonétique, le chinois est fait d'idéogrammes, c'est-à-dire de signes désignant des « choses ».
2. Toutes les citations qui suivent, jusqu'au paragraphe consacré aux paradoxes, en sont extraites.

que l'« école des noms » se demandait comment distinguer l'identique du différent lorsqu'on a affaire à un même terme général comme « cheval », qui renvoie à divers individus, et à des traits différents mais inséparables présents en un même objet, telle que la dureté et la blancheur dans une pierre blanche.

Dans le premier cas, il est essentiel de reconnaître ce qui est identique au-delà de qui diffère. Cela se faisait par l'usage du mot « ainsi » (*ran*), et de son opposé « non-ainsi » :

> Si les noms sont corrects, l'ordre règne ; si les noms ne sont pas corrects, c'est le désordre. Ce qui rend les noms déplacés sont les explications fallacieuses. Si les explications sont fallacieuses, l'inadmissible est jugé admissible et le non-ainsi ainsi, le non-juste est jugé juste et le non-faux, faux.

Dans le cas du couple « dur/blanc », la difficulté est que, les deux qualités pouvant coexister, elles se pénètrent mutuellement dans la pierre blanche, de sorte que si on peut dire qu'elles sont distinctes et donc deux, ce ne sera pas au même sens où des chaussures d'une paire le sont. Lorsque deux traits sont mutuellement exclusifs, il est au contraire impossible qu'ils apparaissent ensemble : si un objet peut être dur et blanc, aucun ne peut être bœuf et cheval.

L'*argumentation* était menée à l'aide de phrases (*ci*) : le *ci* est « un tout organisé de manière à former une idée cohérente », qui sert à « exprimer des idées ». C'est en examinant les faits et en argumentant par une *explication* (*shuo*) qu'on peut juger de la vérité ou de la fausseté du *ci*. Le *ci* est proche de la proposition de la logique grecque et le *shuo* s'apparente au raisonnement. L'école mohiste utilisait différents types de phrases, où apparaissent, avec toute la prudence qui doit présider à une telle transposition, certains opérateurs de la logique occidentale :

1. les *quantificateurs* sont exprimés par différents termes, dans des phrases comme « tout ce qui n'est rien n'est pas ». Les mohistes ont montré qu'ils sont liés par la négation.
2. la *disjonction*, exclusive, est présente dans de nombreux exemples, tels que « soit on l'appelle bœuf, soit on l'appelle non-bœuf ».
3. le *conditionnel* exprime une condition ou une cause, et a deux versions, celle d'une condition nécessaire et celle d'une condition suffisante.

Selon les mohistes, il y avait sept manières de raisonner, dont trois essentielles : la comparaison (*pi*), l'analogie (*yuan*), l'extension (*tui*). La *comparaison* « consiste à prendre une chose pour en expliquer une autre ». Par exemple : puisque qu'un état opulent envahisse un état pauvre (a) et qu'un riche vole un pauvre (a') sont de même nature et que (a') est évidemment injuste, (a) est injuste.

L'*analogie* « consiste à dire : «Vous êtes ainsi. Pourquoi moi seul ne serais-je pas ainsi ?» ». Sa structure logique est la suivante :

a. les objets ou les jugements A et A' sont de la même sorte (A a la propriété P si et seulement si A' a la propriété P) ;
b. A' a la propriété P ;
c. A a la propriété P.

L'*extension* « consiste à identifier ce que l'on refuse avec ce que l'on accepte et à leur attribuer les mêmes qualités », de façon à déjuger un interlocuteur. En voici la structure logique :

a. les objets ou les jugements A et A' sont de la même sorte (A a la propriété P si et seulement si A' a la propriété P) ;
b. A' n'a pas la propriété P ;
c. A n'a pas la propriété P.

Ce dernier type de raisonnement, où entrent les idées de négation et de contradiction, est typique de la logique chinoise. On trouve d'ailleurs dans le *Canon mohiste* des versions plus ou moins explicites des principes de contradiction et du tiers exclu :

> Deux opinions opposées ne peuvent toutes les deux correspondre à la réalité. Il y en a donc au moins une qui ne correspond pas à la réalité.

Mais le critère qui permet de décider laquelle de deux opinions opposées est conforme à la réalité n'est pas toujours purement logique et il peut s'y mêler des questions d'un autre ordre. La différence entre art de l'argumentation et lois du raisonnement n'est donc pas aussi nette que dans la logique grecque. Cela se confirme avec le dernier chapitre du *Canon*, qui théorise moins les lois du raisonnement qu'il ne réfléchit aux divers aspects de l'argumentation. Comme dans l'exemple donné pour le raisonnement par comparaison, apparaissent des éléments qui ne relèvent pas de ce qu'on appelle en Occident la logique : jeu sur les noms et questions éthiques. On peut donc se poser la question de savoir si la logique ne serait pas simplement au service de la morale. C'est ce que semble dire cet extrait de la fin du *Canon*, en écho au confucianisme :

> Le *bian* consiste à éclairer la distinction entre ce qui est correct et ce qui est incorrect, à examiner les règles de bon ou mauvais gouvernement, à éclairer les points de similarité et de différence, à examiner les principes des noms et des réalités, à déterminer ce qui est bénéfique et ce qui est nuisible et à résoudre les doutes et les incertitudes.

On est loin du caractère formel de la logique grecque. Le double exemple suivant le confirme :

> C'est ceci et c'est ainsi : Huo est un être humain, aimer Huo est aimer un être humain.
> C'est ceci et ce n'est pas ainsi : un voleur est un être humain, mais tuer un voleur n'est pas tuer un être humain.

Le point de départ est une proposition de la forme « S est P », et la question est de savoir si avoir la relation R à un objet de S conduit à l'avoir aussi avec un objet de P : la réponse n'est pas la même dans les deux cas. Dans le second, il semble que le mot « tuer » n'a pas le même sens dans le cas général de l'être humain et dans le cas particulier du voleur : « tuer_1 » (un être humain) veut dire assassiner, « tuer_2 » (un voleur) exécuter. Au premier sens, tuer est illégal, au second non, si la peine de mort est autorisée par la loi : il n'est plus ici question de logique, mais de morale et de législation. Si l'on s'intéresse non plus au verbe « tuer » mais au nom commun « être humain », on lui donnera aussi un sens différent, selon qu'on en parle en général, ou en tant qu'un voleur est un être humain qui « offense la morale » : on ne tue alors pas l'être humain qu'est le voleur, mais l'offenseur de la morale qu'il est en tant qu'il est un voleur. Là encore, l'explication n'entre pas dans le cadre de la pure logique, mais pour les mohistes « le langage a plusieurs aspects, et il ne faut pas le voir sous un seul angle ». On ne s'étonnera donc pas que la logique chinoise se soit fort intéressée à divers paradoxes.

B. Les paradoxes

Ce qui nous reste en effet de plus frappant de l'art chinois de l'argumentation consiste en une liste de paradoxes dus pour la plupart à Hui Shi et Gongsun Long, qui vécurent aux IVe et IIIe siècles avant J.-C. Un premier paradoxe, anonyme, figure dans le *Canon mohiste* :

> Affirmer que tout ce qui se dit se contredit soi-même est contradictoire.
> Expliquer par : ce qu'il dit lui-même.

Cette phrase qui renvoie à elle-même rappelle la formulation du paradoxe du *Menteur*. Si j'affirme que tout ce que je dis se contredit, cette affirmation doit elle-même se contredire, et donc être fausse : je ne peux donc affirmer sans contradiction que tout ce que je dis se contredit. Certains en tirent la conclusion que les logiciens de l'école mohiste auraient eu conscience du problème posé par ce qu'au XXe siècle on appellera *autoréférence*.

Hui Shi est réputé avoir soutenu des points de vue semblables à ceux des mohistes, en tâchant notamment d'exprimer en chinois des notions abstraites. On connaît de lui une liste de dix paradoxes d'autant plus obscurs qu'on n'en possède que la conclusion, sans rien savoir, hormis le contexte philosophique, de l'argumentation qui y conduit. Voici le plus connu :

> L'infiniment grand n'a pas de dehors, il s'appelle le Grand Un ; l'infiniment petit n'a pas de dedans, il s'appelle le Petit Un.

Au-delà des difficultés d'interprétation, un tel paradoxe permet de dégager le fond de la philosophie de Hui Shi, à savoir que l'univers est un, thèse qu'il défend dans tous les domaines, politique et moral en particulier.

Gongsun Long est le plus grand logicien de la Chine classique. Son œuvre est composée d'un recueil dont le deuxième chapitre, « Discours sur le cheval blanc », contient le paradoxe suivant :

> Cheval blanc n'est pas cheval. Car si vous cherchez un cheval, on peut vous amener indifféremment un cheval jaune ou noir ; mais si vous cherchez un cheval blanc, on ne peut vous fournir ni un cheval jaune ni un cheval noir. C'est pourquoi, bien que le cheval jaune et le cheval noir soient identiques, ils ne peuvent correspondre qu'à « cheval » et non à « cheval blanc ». Il est donc évident que cheval blanc n'est pas cheval.

Diverses interprétations ont été données de cet argument, qui tournent toutes autour de l'idée qu'il faut distinguer le même du différent et traiter de qualités inséparables comme si elles ne l'étaient pas :

1. « cheval » est le nom d'une *forme*, « blanc » celui d'une *couleur*. Donc « cheval blanc », qui nomme et une forme et une couleur, ne nomme pas la même chose que « cheval ».
2. Le verbe « être » est ambigu, puisqu'il peut désigner les relations, distinctes, d'*identité* et de *prédication*. La conclusion de l'argument renvoie à la seconde alors qu'on peut entendre la première.
3. La *forme* (cheval) et la *couleur* (blanc) sont deux choses différentes qui, combinées ensemble, forment quelque chose de différent de cheval. Les espèces *cheval blanc* et *cheval* sont distinctes.
4. La relation entre *cheval blanc* et *cheval* n'est pas une relation d'*identité*. Ici « n'est pas » veut dire « n'est pas identique à ».
5. *Couleur* et *forme* diffèrent. Le cheval blanc et le cheval ont des traits distincts et sont donc différents.

Gongsun Long aurait ainsi refusé de « choisir » entre le jugement vrai « [l'espèce] cheval blanc n'est pas [identique à l'espèce] cheval » et le jugement faux « le cheval blanc n'est pas [de l'espèce] cheval ». Il semble avoir été le premier philosophe chinois à distinguer nettement la nature de chaque espèce de sa réalité concrète et à faire apparaître des concepts universels, dépassant une difficulté inhérente à la langue et à l'écriture chinoises. Ce travail de rectification des noms a chez lui la particularité de ne pas avoir d'implications morales, politiques ou philosophiques, mais de viser un ordre logique. La question est développée dans le chapitre qui succède au « Discours », intitulé « Des concepts (*zhi*) et des choses ». Gongsun Long y oppose explicitement le concept à ce qui désigne les choses, objets ou phénomènes.

La suite de l'histoire de la logique chinoise date des premiers siècles de notre ère, avec des commentaires sur le *Canon mohiste*, des développements sur les trois types de raisonnement mentionnés plus haut et des discussions qu'on peut rattacher à la tradition de l'« école des noms ». La philosophie chinoise a atteint son apogée entre les XI^e^ et XIII^e^ siècles et c'est au tout début du XVIII^e^ que la philosophie occidentale l'a rencontrée, en particulier grâce à Leibniz qui s'est intéressé de près au caractère idéographique de l'écriture chinoise. Ce n'est que dans les années 1890-1900 que la Chine a découvert la logique occidentale.

II. LA LOGIQUE INDIENNE

Comme les logiques grecque et chinoise, la logique indienne[1] vient de la dialectique, entendue au sens où deux philosophes peuvent argumenter et se réfuter mutuellement. On distingue en général trois phases dans l'histoire de la logique indienne :

1. le *Nyāya Sūtra*, ou vielle école (jusqu'au II^{e} siècle) ;
2. l'école médiévale de logique bouddhiste (V^{e}-VIII^{e} siècles) ;
3. le *Nyava Nyāya*, ou nouvelle école (XIV^{e}-XVII^{e} siècles).

A. Le *Nyāya Sūtra* et la doctrine de l'inférence

La logique indienne est née vers 500 avant J.-C., lorsqu'il a fallu se doter d'outils de controverse à propos de la tradition des *Vedas*, les livres sacrés de l'Inde. Le terme le plus ancien qu'on connaisse pour désigner à la fois l'action de raisonner et la théorie du raisonnement est « *ānvīkṣikī* », attesté en 300 avant J.-C. Un mot plus ancien, « *vibhajya* », désignait une méthode de division appliquée à des questions philosophiques. Se constituèrent, à partir de celle-ci, plusieurs systèmes d'argumentation,

1. Sur la logique indienne, nous avons consulté les textes suivants : Kuno Lorenz, « Logique indienne », *Encyclopædia Universalis* ; Brendan Gillon, « Logic in Classical Indian Philosophy », *Stanford Encyclopedia of Philosophy* ; Alain Lecomte, « Logique indienne ». Tous sont accessibles sur internet.

variant selon les écoles philosophiques, mais toujours destinés à savoir si tel ou tel prédicat convient à telle ou telle chose. En voici une typologie, issue de l'école *mādyamikha* du bouddhisme *mahāyāna*, qui a la particularité de n'autoriser que les jugements négatifs :

1. un objet n'est pas *a*,
2. un objet n'est pas non-*a*,
3. un objet n'est pas à la fois *a* et non-*a*,
4. un objet n'est ni *a*, ni non-*a*.

Les logiciens de l'Inde ancienne ont en commun de fonder tous les moyens de connaissance sur la distinction entre perception (*pratyakşa*) et inférence (*anumāna*). On trouve dans un ouvrage du IIe siècle avant J.-C. l'explication suivante :

> L'inférence permet d'accéder par la connaissance d'un perçu à la connaissance d'un non-perçu (ou de quelque chose qui n'est pas accessible à la perception), le premier étant alors un signe du second.

C'est de ces éléments de doctrine de la controverse que sont nés les premiers véritables traités de logique. Le plus ancien qui nous soit connu est le *Kathāvatthu* (250 av. J.-C.), qui concerne les règles de la logique des propositions appliquées à l'art de la controverse. En voici trois :

1. *pūrvavat* (« avec précédent ») : dans si A, alors B, en posant ou affirmant A, on pose ou affirme B ;
2. *şeşavat* (« avec le reste ») : dans A ou B, en niant A, on affirme B ;
3. inférence par analogie, dont voici un exemple : « Si les oies sont des oiseaux, alors les canards sont des oiseaux, parce que tous deux ont des plumes » (il est sous-entendu qu'avoir-des-plumes implique être-un-oiseau).

Ces règles, qui appartiennent à ce qu'on appelle la *doctrine de l'inférence*, supposent l'usage des principes de contradiction et du tiers exclu, énoncés ainsi dans des ouvrages plus tardifs :

> Quand quelque chose est une chose unique, elle ne peut pas être à la fois existante et non existante.
> Une chose doit être soit existante, soit non existante ; il n'y a pas de tierce possibilité.

Un autre courant de logique, remontant à 400 ans avant J.-C., fut inauguré par l'école des grammairiens organisée autour de la grammaire de Pāṇini. À partir de Kātyāyana, vers 250 avant J.-C., elle traita du problème de l'inférence dans le cadre général d'une analyse du langage. On lui doit d'avoir introduit une particule spéciale, *iti*, qui joue le rôle de guillemets en indiquant que le passage qui la précède est une citation, et d'avoir traité de la négation, avec une formulation explicite de la règle de contraposition, à savoir « «si p, alors q» implique «si non-q, alors non-p» ». En voici un exemple d'application : « Il est obligatoire de manger exclusivement la chair de cinq animaux à cinq griffes » implique « Il est interdit de manger tout autre animal ».

C'est ainsi qu'un double courant traverse la logique indienne : celui des grammairiens lie la logique à la philosophie du langage, celui des logiciens bouddhistes à l'épistémologie ou théorie de la connaissance. Il s'en est suivi, durant la presque totalité du premier millénaire de notre ère, un vif débat entre les tenants respectifs de ces deux courants sur la nature de la relation entre le mot (*Sabda*) et la chose (*artha*) qu'il désigne. Selon les premiers, on ne saurait désigner que ce qui est, si bien que toute connaissance représentée par une forme verbale est présumée vraie, et si on le nie, il faut dire pourquoi. Selon les seconds, le lien entre le mot et ce qu'il désigne n'est que conventionnel, de sorte que toute connaissance ayant une forme verbale n'est qu'une assertion dont il faut déterminer si elle est vraie ou fausse.

B. La logique bouddhiste et le syllogisme en cinq parties

Dans la logique indienne, l'inférence est donc destinée à permettre le passage de ce qui est perçu à ce qui n'est pas ou ne peut être perçu. Vātsyāyana a inauguré véritablement *l'ānvīkşikī* aux IVe-Ve siècles, sous le titre de théorie de la logique (*nyāya-vidyā*). Dignāga, s'inspirant du *Kathāvatthu*, fonda ensuite, au VIe siècle, l'école médiévale bouddhiste. La théorie de l'inférence y repose sur le syllogisme en cinq parties (*pañcāvayava vākya*, « phrase à cinq parties »), dont voici le paradigme :

- assertion (*pratijñā*)
  1. [Cette] montagne porte du feu,
- raison (*hetu*)
  2. à cause de la fumée,
- exemple et contre-exemple (*udāharana*)
  3. comme [cela est] dans la cuisine, contrairement à [ce qui est] dans la mare,
- application (*upanaya*)
  4. et cela [est] ainsi (c'est-à-dire cette montagne porte de la fumée),
- conclusion (*nigamana*)
  5. donc [cela est] ainsi (c'est-à-dire cette montagne porte du feu).

Ici, l'objet de connaissance perçue est la montagne et le signe perçu la fumée. Cette dernière est traitée comme la « cause » du feu, qui en est la conséquence non perçue. L'inférence repose donc sur la relation d'implication (*vyāpti*) qui lie raison et conséquence, relation ici donnée au travers d'un exemple et de son contre-exemple. On peut mettre en forme le raisonnement ci-dessus en transformant ces deux énoncés singuliers en énoncés universels :

1. le signe figure dans l'objet ;
2. le signe ne figure que là où la conséquence se produit, c'est-à-dire dans des lieux semblables ;
3. le signe est absent là où la conséquence est absente, c'est-à-dire dans les lieux qui ne sont pas semblables à l'objet.

(1) énonce une appartenance – à [l'emplacement de] cette montagne, [il y a] fumée –, (2) une implication générale – partout [où il y a] fumée, il [y a] du feu –, (3) la contraposition de cette implication – partout où [il y a] non-feu, [il y a] non-fumée.

C'est en étudiant ce type de raisonnement que Dignāga rédigea le premier traité de logique indienne formelle. Selon que le sujet de l'inférence est dans *toutes*, *quelques* ou *aucune* des variantes du semblable, et dans *toutes*, *quelques* ou *aucune* des variantes du non semblable, il a dégagé neuf possibilités, dont deux seulement donnent des raisonnements valides (M est un signe quelconque, la fumée dans notre exemple) :

1. M apparaît dans tous les cas semblables et aucun cas dissemblable,
2. M apparaît dans quelques cas semblables et aucun cas dissemblable.

On repère une similitude avec la syllogistique d'Aristote, même si les Indiens ne formulent jamais de proposition universelle telle que « Dans toutes les montagnes, il y a de la fumée ».

C. Le *Nyava Nyāya*

Grâce aux travaux de Dignāga et de son disciple Dharmakīrti, le caractère général du *vyāpti* a été éclairci. L'implication est alors devenue le thème central de la logique indienne et a connu d'importants développements à partir du XI[e] siècle, grâce notamment à Udayana, le fondateur du *Nyava Nyāya*, et à GangeSa. À propos du syllogisme ci-dessus, celui-ci a explicité l'énoncé « Partout où [il y a] fumée, là [est] le feu », ce qui permet de réduire de cinq à trois le nombre des parties du syllogisme. C'est ce que la tradition a retenu jusqu'à aujourd'hui, comme cela apparaît au XVII[e] siècle dans le *Takasamgraha* de Annambhaṭṭa, un des plus célèbres manuels de logique indienne.

Logiques chinoise, indienne et grecque ont quelques points communs, notamment leur origine, la dialectique, et leur but, la correction du raisonnement. Mais les différences sont importantes. D'une part, si la logique grecque est liée à la grammaire, c'est bien moins fortement que les logiques chinoise et indienne, en particulier par le soin qu'elle a eu de mettre en forme le raisonnement grâce à l'usage des variables. D'autre part, alors qu'en Grèce la logique est apparue d'emblée comme une discipline autonome, c'est moins le cas dans la tradition indienne, et surtout chinoise, pour laquelle certains commentateurs hésitent d'ailleurs à parler d'une véritable logique. La logique indienne est sans doute plus proche de la logique grecque, mais elle y mêle des traits relevant d'un empirisme étranger à cette dernière.

CHAPITRE 3

LA LOGIQUE AU MOYEN ÂGE

On considère traditionnellement que le Moyen Âge commence avec la chute de l'empire romain d'Occident en 476 et s'achève avec la prise de Constantinople par les Turcs en 1453. Cette vision est celle d'un Moyen Âge occidental et chrétien, qui rejetterait ce qui est chrétien mais non occidental, c'est-à-dire le monde des chrétiens d'Orient, et ce qui est occidental mais non chrétien, c'est-à-dire les mondes arabo-musulman et juif. Nous n'en discuterons pas ici, mais préciserons, dans ce chapitre auquel sont rattachés les travaux datant de la fin de l'Antiquité, ce que la logique du Moyen Âge occidental doit aux philosophes arabes[1].

I. LA FIN DE L'ANTIQUITÉ

Après l'Antiquité grecque, la logique a vécu un relatif sommeil. La civilisation romaine et le haut Moyen Âge (Ve-XIe siècles) se sont peu intéressés aux questions théoriques, en particulier à la logique. Il y a donc peu d'innovations ou de grands noms à retenir. La tendance était à mêler, sans bien établir la distinction, logiques stoïcienne et aristotélicienne, sous la domination de cette dernière. Et comme l'influence de la civilisation romaine fit du latin la langue savante, elle devint progressivement celle de la logique. C'est donc en latin que s'est fixé le vocabulaire de la logique, dans des ouvrages qui étaient des manuels d'enseignement ou des commentaires des textes classiques.

1. Il y a un traitement de la logique aristotélicienne spécifique au monde arabo-musulman, qui ne s'identifie pas totalement à la logique médiévale occidentale, mais on ne le développera pas ici.

Parmi les commentateurs, certains, dont les plus célèbres sont Alexandre d'Aphrodise, Jean Philopon et Simplicius, apportent des précisions, voire quelques amendements, à la logique aristotélicienne. On doit au premier une formulation détournée du principe d'identité, l'explicitation de l'équivalence entre prémisses indéfinies et particulières, la mise en lumière du rôle des variables, l'habitude d'exprimer les syllogismes sous forme inférentielle et l'assimilation de la définition aristotélicienne de la contingence à celle de la possibilité. Jean Philopon a défini majeur et mineur du syllogisme aristotélicien comme, respectivement, prédicat et sujet de la conclusion, et souligné l'importance des variables. Quant à Simplicius, auteur d'un commentaire des *Catégories* d'Aristote, il montre comment le savoir « voyageait » à l'époque : formé à Athènes et à Alexandrie, il dut un temps s'exiler en Perse. D'autres auteurs, comme le sceptique Sextus Empiricus et le compilateur Diogène Laërce sont précieux par ce qu'ils nous apprennent de la logique stoïcienne.

Enfin, tandis que l'Europe voyait s'éteindre l'étude de la philosophie, des sciences et de la logique, la civilisation arabe (VIIe-XIIIe siècles), qui couvrait un espace allant de l'Espagne à l'Inde en passant par le sud de l'Italie et le nord de l'Afrique, les fit vivre, y apportant ses propres contributions. Aristote et ses commentateurs de la fin de l'Antiquité furent traduits et abondamment discutés, en particulier par Ibn Sinâ et Ibn Rushd, appelés respectivement Avicenne et Averroès en Occident. Le premier, philosophe et médecin perse du XIe siècle, est une des grandes figures de l'Islam oriental. Le second, né et mort au XIIe siècle, appartient à l'Islam occidental. Tous deux, parfaits connaisseurs d'Aristote et notamment de sa logique, en ont rapporté fidèlement la pensée. C'est en grande partie grâce à eux, à partir du XIIe siècle et avant même que l'Aristote originel y fût connu, que l'Occident médiéval a été initié à l'aristotélisme et a redécouvert la logique.

Le premier apport non grec à la logique aristotélicienne date du IIe siècle. Il est dû à Apulée, poète et philosophe de l'empire romain. Son traité de logique, le plus ancien écrit en latin, contient le *carré logique* (figure 1), qui est un tableau des rapports entre les quatre types de propositions retenus par Aristote. En voici une présentation légèrement modifiée :

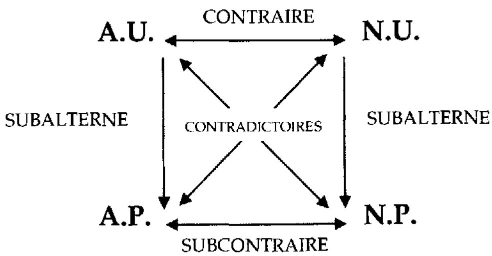


Figure 1. Carré logique d'Apulée

Sont ainsi schématisées les deux relations d'opposition (contrariété et contradiction) relevées par Aristote. Quant à la subcontrariété, elle découle de la contrariété, après passage des universelles aux particulières. Cela suppose que le lien de subordination entre l'universelle et la particulière correspondante, sa *subalterne*, ait été reconnu, ce qu'Aristote n'avait pas fait explicitement. Apulée souligne le caractère asymétrique de cette relation, du point de vue de la vérité et de la fausseté. L'universelle confirme sa particulière, sans que sa fausseté l'infirme : si « Tout homme est mortel » est vraie, « Quelque homme est mortel » l'est aussi ; mais si « Tout homme est mortel » est fausse, on ne peut rien dire de « Quelque homme est mortel ». La fausseté de la particulière infirme son universelle, sans que sa vérité la confirme : si « Quelque homme est mortel » est fausse, « Tout homme est mortel » l'est aussi ; mais si « Quelque homme est mortel » est vraie, on ne peut rien dire de « Tout homme est mortel ».

En logique, la notoriété de Galien, médecin romain du IIe siècle, repose en partie sur une erreur. On lui a longtemps attribué la découverte d'une quatrième figure syllogistique, mais on a compris au siècle dernier que c'est parce qu'il traitait des syllogismes comptant non pas trois mais quatre termes. Il mérite tout de même de figurer ici, d'abord parce qu'il illustre la combinaison des logiques aristotélicienne et stoïcienne, dont il mêle les vocabulaires et juxtapose le syllogisme catégorique de la première et hypothétique de la seconde. On lui doit surtout d'y avoir ajouté l'idée de relation. Sans en avoir fait lui-même la théorie, il a donné quelques exemples de la *conversion* et de la *multiplication* des relations : « Sophronisique est le père de Socrate, donc Socrate est le fils de Sophronisique » pour la conversion, « Théon possède deux fois plus que Dion, et Philon deux fois plus que Théon, donc Philon possède quatre fois plus que Dion » pour la multiplication. Il y avait là une lacune dans la logique grecque, qui ne sera vraiment comblée qu'au XIXe siècle.

Porphyre est le logicien le plus important de la fin de l'Antiquité. Commentateur de Platon et d'Aristote, il rédigea au IIIe siècle l'*Isagoge*, introduction à l'*Organon* qui nous est parvenue. Il y modifie la liste des types de prédicats admis par Aristote. Chez ce dernier, lorsque le prédicat exprime l'essence du sujet, la proposition est une *définition*, comme « Homme est animal doué de raison » ; lorsqu'il énonce quelque chose qui appartient en propre au sujet et à rien d'autre, mais sans en constituer l'essence, c'est un *propre*, comme dans « L'homme est doué de la faculté de rire » ; lorsqu'il dit ce que le sujet partage avec d'autres sujets, il marque le *genre*, comme dans « L'homme est un être vivant » ; lorsqu'il appartient à un sujet, mais pourrait aussi bien ne pas lui appartenir, c'est un *accident*, comme dans « Un homme est endormi ». Dans cette liste, où apparaissent divers usages du verbe « être », Porphyre remplaça la définition par la *différence* et ajouta l'*espèce* au genre. La définition de type aristotélicien s'effectuait par différenciation à l'intérieur d'un genre : dans le cas de l'homme, Aristote spécifiait le genre animal en y distinguant la propriété d'être doué de raison. Chez Porphyre, différence et espèce permettent d'aboutir à la définition, donc de ne pas faire de ce qui est une identité une forme de prédication. Le verbe « être » est ainsi limité à son rôle prédicatif. En outre, contrairement à Aristote, Porphyre a admis les propositions singulières en syllogistique, y considérant le sujet comme une espèce dont l'extension est un unique individu. La logique médiévale retiendra la leçon.

Enfin, et c'est ce qui le distingue le plus d'Aristote, Porphyre a implicitement une conception exclusivement *extensionnelle* de la logique. Son insistance sur le rapport entre genre et espèce suggère en effet une interprétation en termes de *classes* et d'emboîtement de classes. L'exemple qu'il a donné sera rapidement schématisé par ce qu'on appelle « arbre de Porphyre » (figure 2), qui va de la substance, c'est-à-dire tout ce qui est – le genre « suprême » ou classe « universelle » –, à l'individu, Socrate par exemple, en passant par tous les degrés intermédiaires, qui sont autant d'espèces ou de sous-classes. Chaque terme y est espèce par rapport à celui qui le précède et genre par rapport à celui qui le suit.

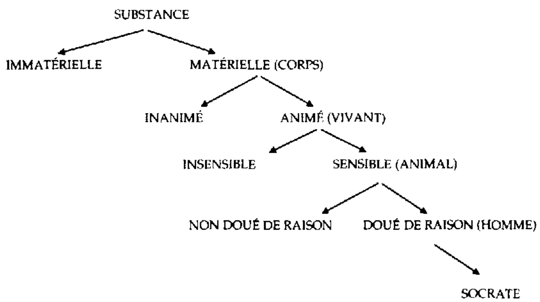


Figure 2. Arbre de Porphyre

Boèce, philosophe et homme politique romain du VI^e siècle, vaut surtout pour son travail de traducteur. Imprégné de culture grecque, il se donna pour tâche de transmettre la philosophie grecque aux Latins. On lui doit la première traduction latine de la quasi-totalité de l'*Organon*, avec des commentaires plus laborieux que vraiment originaux. C'est grâce à elle que les médiévaux commenceront de connaître Aristote, mais avec des traits ne lui appartenant pas vraiment, puisque Boèce y a ajouté des éléments de logique stoïcienne, probablement sans en avoir conscience. Certains termes lui sont propres, qui demeureront dans la tradition, comme « sujet » et « prédicat ». Avec notamment l'usage systématique du verbe « être » pour marquer la prédication, Boèce a fixé le vocabulaire logique en latin. Son apport est donc maigre, mais son œuvre est pour nous une source d'informations sur la logique ancienne : il apparaît comme un trait d'union entre les mondes romain et médiéval.

II. LOGIQUE MÉDIÉVALE ET LOGIQUE SCOLASTIQUE

A. Présentation d'ensemble

En toute rigueur, il faudrait distinguer la logique *médiévale*, qui recouvre, du VI^{e} au XV^{e} siècle, la totalité du Moyen Âge, de la logique *scolastique* (du latin « *schola* », « école »), née avec son enseignement dans les universités[1]. Les plus anciennes datant du XII^{e} siècle, la logique n'a repris son essor qu'à cette époque, de sorte que logiques médiévale et scolastique ne diffèrent guère, si ce n'est que l'influence de la seconde s'est étendue bien au-delà du Moyen Âge. L'âge d'or des universités s'achevant au XIV^{e} siècle, on ne peut parler d'une logique authentiquement médiévale que sur une période de quatre cents ans à peine, du XII^{e} au XV^{e} siècle, avec pour sommet la charnière des XIII^{e} et XIV^{e} siècles.

La logique médiévale est encore relativement méconnue, pour plusieurs raisons. Antérieurs à l'invention de l'imprimerie, certains écrits ne sont que manuscrits, et les plus célèbres, imprimés à partir de la fin du XV^{e} siècle, n'existent qu'en éditions rares. Les uns et les autres sont donc peu accessibles. Il est vrai aussi que la logique médiévale n'a pendant longtemps intéressé personne, selon l'idée reçue que pratiquement rien ne la distinguait de la logique aristotélicienne. C'est seulement dans les années 1930 qu'elle a connu un regain d'intérêt, les outils de la logique moderne permettant de mieux la comprendre, et donc de mieux l'apprécier. Il demeure cependant une difficulté : notre connaissance parcellaire des manuscrits du Moyen Âge et le fait, courant à l'époque, qu'un auteur ne cite pas ses sources, rendent problématique l'attribution de telle ou telle innovation à un logicien en particulier.

La logique – ou dialectique – était enseignée, à partir du XII^{e} siècle, à la faculté des *arts*, au côté de la rhétorique et de la grammaire, avant que les étudiants ne passent à l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie et la musique. La suite du cursus menait à la faculté de théologie, qui faisait aussi usage de la logique, moins comme une science spéculative que comme un outil d'argumentation et de preuve. Deux courants apparurent alors : certains, à la suite de Boèce, considérèrent la logique comme une science et un instrument pour la science, donc comme une discipline formelle, tandis que d'autres, influencés par la théologie et la lecture des philosophes grecs et arabes traduits en latin, firent naître une sorte de « logique philosophique », profondément imprégnée de métaphysique. C'est ainsi que les grands philosophes des XIII^{e} et XIV^{e} siècles, tels Albert le Grand, Roger Bacon, Thomas d'Aquin et Jean Duns Scot, donnèrent à la logique une place importante dans leur œuvre.

1. La scolastique désigne à la fois le contenu général de l'enseignement et la méthode qui s'y pratiquaient.

Cette logique philosophique fut dominée par la *querelle des universaux*, qui intéressa tous les philosophes et logiciens du Moyen Âge. La dispute dura trois siècles et portait sur le statut ontologique, c'est-à-dire le mode d'Être, des entités désignées par des termes généraux, renvoyant à des idées telles que le Beau, l'Homme ou l'Égal. Elle était la conséquence des diverses interprétations données par les philosophes de l'Antiquité à la théorie platonicienne des Idées et à la théorie aristotélicienne de la substance. Il y eut trois grands types de réponses : soit les universaux sont des réalités purement intelligibles, existant par elles-mêmes et séparées des particuliers qui les incarnent ; soit ils sont à la fois dans les choses et dans l'esprit, qui se les représente par abstraction à partir de la réalité concrète ; soit ils n'existent que dans l'esprit de celui qui les conçoit, ce qui conduisit les moins modérés des *nominalistes* à ne les considérer que comme des noms, de sorte que n'existent réellement que les individus. La dispute, traitée avec les outils de la logique contemporaine, vit encore aujourd'hui et concerne le statut des entités mathématiques et logiques.

Le logicien du Moyen Âge qui ne s'occupait que de logique formelle et rejetait la métaphysique était plutôt nominaliste. Pour lui, l'universalité n'appartenait qu'aux termes, et un terme universel, c'était un prédicat – « beau », « homme », « mortel » – susceptible d'être attribué à un ensemble de sujets. Il n'existait alors rien de tel que la beauté, l'humanité ou la mortalité[1]. C'était d'autant plus cohérent que si la logique était bien une science du raisonnement, elle était aussi considérée comme une science du langage, commandée par la grammaire du latin. La logique médiévale repose essentiellement sur une analyse de celui-ci, tenu non pas pour un idiome parmi d'autres, mais pour une langue parvenue au plus haut degré de rationalité.

Avant l'avènement de la scolastique, la logique se réduisait à ce que l'Antiquité en avait légué, en particulier grâce aux traductions et commentaires de Boèce, alors étudiés seulement dans les monastères. Aristote n'était connu que par les *Catégories* et l'*Hermeneia*, ainsi que par Apulée et l'*Isagoge* de Porphyre, mais la syllogistique était presque totalement ignorée. Un bouleversement se produisit au milieu du XII^e siècle, en particulier grâce aux traductions transmises par les savants arabes, notamment Averroès, traductions imparfaites puisque passées du grec au latin par l'intermédiaire d'autres langues. On redécouvrit alors l'*Organon* complet, qui commença à être enseigné dans les « écoles épiscopales », avant que l'ensemble de la philosophie d'Aristote ne le fût dans les universités. La logique stoïcienne était, elle, à peu près ignorée, à l'exception de quelques éléments intégrés subrepticement à celle d'Aristote. Selon une périodisation due aux médiévaux eux-mêmes, on distingue donc dans la logique scolastique l'*ars vetus* (XII^e-XIII^e siècles), qui ne connaît

1. D'où la formulation de la proposition aristotélicienne : « Les hommes sont mortels » plutôt que « La mortalité appartient à l'homme ».

qu'une partie de l'*Organon* et l'*Isagoge* de Porphyre, l'*ars nova* (XIIIe-XIVe siècles), qui suit la redécouverte de l'*Organon* complet et de la philosophie d'Aristote dans son ensemble, et la *logica modernorum* (XIVe-XVe siècles), qui voit les logiciens développer une logique vraiment originale. La logique médiévale a donc un double aspect : une partie relève de simples aménagements de la logique aristotélicienne, une autre de modifications plus profondes. Comme il est difficile de les attribuer en propre à tel ou tel auteur, mentionnons d'abord les quelques logiciens ayant joué un rôle essentiel au Moyen Âge.

Le premier, qui domine l'*ars vetus*, est Pierre Abélard. C'est en grande partie grâce à lui, par son enseignement et ses écrits, que la logique devint un vrai sujet d'étude au Moyen Âge. Avec Guillaume de Sherwood et Pierre d'Espagne commence le véritable âge d'or de la scolastique. Tous deux publièrent, vers le milieu du XIIIe siècle, les premiers grands manuels de logique. Celui du second servit longtemps de référence, son influence allant jusqu'au XVIIe siècle. Le logicien le plus célèbre du Moyen Âge est Guillaume d'Ockham ou d'Occam, le philosophe scolastique par excellence, qui appartient à la période de l'*ars nova*. Il développa une logique formelle censée être dégagée de tout lien avec la métaphysique. Son nom est attaché à un principe toujours d'actualité, le « rasoir d'Ockham », principe d'économie ontologique et logique qui demande qu'on ne multiplie pas les entités au-delà de ce qui est nécessaire. Les grands logiciens qui suivirent, Gauthier Burley, Jean Buridan et Albert de Saxe subirent tous, parfois en s'y opposant, l'influence d'Ockham, et posèrent, en s'éloignant peu à peu d'Aristote, les prémices d'une véritable logique des propositions. Avec la mort d'Albert de Saxe s'achève la période féconde de la logique médiévale.

B. Sur quelques aménagements de la logique aristotélicienne

Le premier aménagement de la logique aristotélicienne répond à un souci de simplification. Dû à Abélard, il consiste à lier le sujet et le prédicat par le verbe « être », en en distinguant le sens existentiel, comme dans « Socrate est », et le sens attributif, comme dans « Socrate est mortel ». Privilégiant ce dernier, Abélard employa pour la première fois le mot « copule » et transforma « B est prédiqué de A » en « A est B ». Un autre aménagement, presque le seul connu pendant longtemps, était pédagogique et mnémotechnique. Présent dans les manuels de Guillaume de Sherwood et de Pierre d'Espagne, ce qui ne signifie pas qu'ils en étaient les auteurs, il consiste en un codage. Les quatre types de propositions d'Aristote étaient désignées par des voyelles : ***A*** pour les affirmatives universelles, ***E*** pour les négatives universelles, ***I*** pour les affirmatives particulières, ***O*** pour les négatives particulières. À chaque mode syllogistique correspondait un mot, dont les voyelles indiquaient la nature des propositions, selon l'ordre majeure-mineure-conclusion, et les consonnes les opérations nécessaires pour retrouver un mode de la première figure. Par exemple, *Barbara* désignait le syllogisme du premier mode de la première figure. Ces mots, mis bout à bout, formaient des phrases pour tous les modes de chacune des figures. Ainsi, *Barbara Celarent Darii Ferio* (« Les étrangers vainquirent par l'épée de Darius ») codait les quatre modes de la première figure, dans l'ordre L1-L2-L3-L4. Un autre système permettait de mémoriser les règles de non validité d'un syllogisme et de transfert de la nature de l'une des prémisses à celle de la conclusion. Le but de toutes ces procédures, avantage et inconvénient à la fois, était de remplacer une compréhension intelligente par un procédé mnémotechnique, donc mécanique et aveugle.

La syllogistique elle-même fut modifiée. La présentation des médiévaux diffère de celle d'Aristote, chez qui un syllogisme est une loi logique. Ainsi, pour celui en *Barbara*, il écrivait : *Si A est prédiqué de tout B et B de tout C, alors A est prédiqué de tout C*. Les médiévaux procédaient autrement : énonçant les règles à suivre pour construire un syllogisme correct ou décrivant les schémas syllogistiques concluants, ils formulaient les syllogismes comme des schémas d'inférence, plutôt à la manière des stoïciens. Ils retinrent donc les leçons de Théophraste et des commentateurs d'Aristote, plus que la lettre de ce dernier. Cela revenait à dire, toujours pour *Barbara* : *Tout syllogisme de la forme « Tout B est A, tout C est B, donc tout C est A » est valide*. D'où la forme des syllogismes que la tradition a retenue et que nous avons indiquée d'emblée.

Furent aussi admis les modes *subalternes*, absents chez Aristote mais mentionnés par certains de ses commentateurs immédiats, où la conclusion, universelle, est remplacée par la particulière correspondante. Ainsi passe-t-on de *Barbara* à *Barbari* :

Barbara	*A*	*Tous les hommes sont mortels,*
	A	*Tous les Grecs sont des hommes,*
	A	*Donc tous les Grecs sont mortels.*
Barbari	*A*	*Tous les hommes sont mortels,*
	A	*Tous les Grecs sont des hommes,*
	I	*Donc quelques Grecs sont mortels.*

Plus notable est l'admission des syllogismes comportant un ou plusieurs termes *singuliers*, qu'Aristote avait proscrits. Les médiévaux suivirent Porphyre, en assimilant un terme singulier à un terme général dont l'extension ne compte qu'un seul membre, et une proposition singulière à une universelle dont le sujet a pour extension une *classe* réduite à un unique individu. C'est chez Ockham qu'on trouve le célèbre syllogisme singulier (en *Barbara*) :

(S5) *Tous les hommes sont mortels,*
Socrate est un homme,
Donc Socrate est mortel.

La logique médiévale construisit également des syllogismes où le même terme singulier figurait dans les deux prémisses, ou bien ne comportait que des termes singuliers. Par exemple :

Socrate est blanc,	*Octave est l'hériter de César,*
Socrate est un homme,	*Je suis Octave,*
Donc un homme est blanc.	*Donc je suis l'héritier de César.*

L'introduction des syllogismes singuliers constitue sans doute un progrès, mais pour un œil moderne, elle s'est faite de façon bancale. On ne peut, sans explication, assimiler l'individu à la classe le contenant comme unique membre[1]. Il est donc incorrect de ne pas distinguer les deux formes, universelle et singulière, du syllogisme en *Barbara*, selon que le sujet de la mineure renvoie un concept ou un individu. Leurs structures logiques sont en effet différentes. Reprenons les exemples (S1) et (S5) avec « homme » pour $\boldsymbol{P}$, « mortel » pour $\boldsymbol{Q}$, « Grec » pour $\boldsymbol{R}$ et « Socrate » pour a :

	(S1)
Tous les hommes sont mortels,	Pour tout x, si $\boldsymbol{P}(x)$ alors $\boldsymbol{Q}(x)$,
Tous les Grecs sont des hommes,	Pour tout x, si $\boldsymbol{R}(x)$ alors $\boldsymbol{P}(x)$,
Donc tous les Grecs sont mortels.	Pour tout x, si $\boldsymbol{R}(x)$ alors $\boldsymbol{Q}(x)$.
	(S5)
Tous les hommes sont mortels,	Pour tout x, si $\boldsymbol{P}(x)$ alors $\boldsymbol{Q}(x)$,
Socrate est un homme,	$\boldsymbol{P}(a)$,
Donc Socrate est mortel.	$\boldsymbol{Q}(a)$.

Trois attitudes sont possibles à propos du problème posé par les propositions singulières dans la syllogistique : les exclure, comme Aristote et la plupart de ses successeurs de l'Antiquité ; les accepter, en les assimilant à des universelles, comme Ockham et divers scolastiques ; les admettre, mais en signalant qu'elles donnent aux syllogismes où elles figurent une structure différente, comme indiqué ci-dessus.

Les logiciens du Moyen Âge se sont également intéressés à la logique modale. On leur doit la distinction explicite, perçue par Abélard, entre ce qu'on appelle depuis modalité *de re* et modalité *de dicto* : dans le premier cas, la modalité est liée au prédicat, de manière interne à la proposition, comme dans « Le sage est nécessairement heureux » ; dans le second, elle est liée à la proposition tout entière, de

1. C'est-à-dire l'élément avec le *singleton* correspondant, pour parler le langage de la théorie des ensembles, qui proscrit les égalités $\{a\} = a$, {Socrate} = Socrate ou $\{1\} = 1$.

manière externe à celle-ci, comme dans « Il est nécessaire que le sage soit heureux ». Alors qu'Aristote, et à sa suite Abélard, considéraient la modalité comme *de re* dans les deux cas, Théophraste faisant le choix opposé, Ockham envisagea les deux possibilités et étudia leurs combinaisons. Comme il fit en outre explicitement la différence, au contraire d'Aristote, entre le possible et le contingent, il allongea considérablement la liste des syllogismes modaux et compliqua donc la logique modale aristotélicienne.

C. Sur quelques modifications plus profondes

D'autres apports sont plus originaux, même si les logiciens de l'époque n'en eurent sans doute pas pleinement conscience. Ils consistent essentiellement en la théorie des *suppositions* et la théorie des *conséquences*, laquelle ouvre la voie à une ébauche de logique des propositions plus proche de la conception stoïcienne que de celle d'Aristote.

Apparue chez Sherwood avant d'être systématisée par Ockham, la théorie des suppositions, d'origine théologique et grammaticale, visait entre autres la résolution de paradoxes. Relative à la signification des mots, donc à ce qu'on appelle aujourd'hui la *sémantique*, elle repose sur la distinction entre *catégorèmes* et *syncatégorèmes*. Les premiers sont des termes qui, signifiant quelque chose « par eux-mêmes », peuvent être sujet ou prédicat (ou une partie de ceux-ci) d'une proposition. Les seconds, comme « tout », « quelque », « ne pas », « et », « ou », etc., ne peuvent avoir la même fonction, car ils n'ont de sens qu'en liaison avec un sujet ou un prédicat. Leur rôle n'est donc en quelque sorte que grammatical ou *syntaxique*. Dans « Tout homme est mortel » par exemple, « homme » et « mortel » sont des catégorèmes, car « homme » désigne (« suppose pour ») les humains et « mortel » renvoie à (« suppose pour ») la mortalité. En revanche, « tout » est un syncatégorème, car il ne signifie rien par lui-même et ne fait qu'indiquer de quelle manière le sujet est « supposé » : il n'est qu'un « signe d'universalité ». Buridan et Albert de Saxe en tirèrent la distinction entre la *matière* de la proposition – ses catégorèmes que sont le sujet et le prédicat – et sa *forme* – ses syncatégorèmes. Ces derniers devinrent très vite l'objet privilégié de la logique médiévale, à juste titre car fixant la nature (universelle, particulière, négative, conjonctive, etc.) de la proposition, ils correspondent à peu près aux opérateurs de la logique moderne, qui les appelle des *constantes logiques*[1].

1. « À peu près », car les médiévaux comptent parmi les syncatégorèmes des termes comme « excepté », « sauf », etc., qui ne sont pas des constantes logiques.

La supposition d'un terme est donc ce qu'il désigne. Une autre distinction vient d'Avicenne, qui faisait la différence entre l'intention *première* et l'intention *seconde* d'une proposition ou d'un terme, selon qu'ils sont utilisés dans leur usage ordinaire, lorsqu'ils désignent quelque chose d'autre qu'eux-mêmes, ou non, lorsqu'ils se désignent eux-mêmes. Par exemple, dans « L'homme est mortel », le sujet et le prédicat sont de première intention. Au contraire, dans « La proposition «L'homme est mortel» est vraie », l'expression « L'homme est mortel » n'est pas prise pour ce qu'elle signifie ordinairement, à savoir que l'homme est mortel, mais considérée en tant que proposition – qui se trouve être vraie –, d'où les guillemets qui l'encadrent.

Les médiévaux en tirèrent la théorie des suppositions, relative aux noms, qui peuvent être sujets d'une proposition. Les logiciens des XIII[e] et XIV[e] siècles distinguaient la supposition *formelle*, la supposition *simple* et la supposition *matérielle* d'un terme. Dans sa supposition formelle, qui avait la primauté, le terme est pris pour ce qu'il signifie habituellement. Dans sa supposition simple, et il ne peut alors s'agir que d'un terme conceptuel, il ne renvoie pas aux individus concernés, mais au concept qu'il désigne, comme dans « Homme est une espèce ». Dans sa supposition matérielle, le terme renvoie à lui-même, et non à ce qu'il signifie. Laissons de côté la supposition simple, qui pose beaucoup de problèmes et sur laquelle il y eut des désaccords, et examinons le cas de la proposition « Homme est un mot ». Si on prend « homme » dans sa supposition *formelle*, cette proposition est fausse, puisque ni Jean, ni Pierre, ni Paul, ni vous, ni moi, etc. ne sommes des noms. Pour la rendre vraie, il faut entendre « homme » dans sa supposition *matérielle*, au quel cas il renvoie à lui-même. La convention actuelle sur l'usage des guillemets, que les médiévaux ignoraient et qu'on utilise pour les citations, est destinée à éviter la confusion : elle permet de distinguer « Homme est mortel » et « "homme" est un mot ». Cette distinction entre *usage* et *mention*, comme on dit aujourd'hui, préfigure celle entre *langage-objet*, qui ne comporte que des signes de logique, et *métalangage*, qui y ajoute des termes portant sur ceux-ci. Les deux sont essentielles aux exposés actuels de logique, car elles permettent d'éviter les ambiguïtés et de traiter de certains paradoxes.

Quant à la théorie des *conséquences*, qui apparaît aujourd'hui comme le sommet de la logique médiévale, elle préfigure en partie la logique actuelle des propositions et montre que les médiévaux avaient conscience du caractère formel de la logique. Dégagée par Ockham et développée par ses successeurs, elle commença à prendre forme chez Abélard, qui appelait *conséquence* une proposition conditionnelle ou hypothétique, définie par le fait qu'elle lie un antécédent et un conséquent de façon qu'il soit *impossible* que le premier soit vrai et le second faux. À cette définition, qui rappelle celle de l'implication chez les stoïciens, s'en superposa une autre, qui ne concernait plus la proposition elle-même, mais la validité d'un raisonnement, et faisait apparaître la conséquence comme un schéma d'inférence :

> Une conséquence, écrit Buridan, est une proposition hypothétique, formée de plusieurs propositions au moyen du mot « si », ou encore du mot « donc », ou un autre équivalent. Ces mots indiquent que, des propositions qu'ils relient, l'une suit de l'autre.

Il en résulte une confusion, au moins lexicale, entre la forme hypothétique d'une proposition, faite d'un antécédent et d'un conséquent et qui est vraie ou fausse, et la forme inférentielle d'un raisonnement, fait de prémisses et d'une conclusion et qui est valide ou non valide.

La notion d'impossibilité, présente dans la définition de la conséquence en tant que proposition, conduisit les scolastiques à distinguer les conséquences *formelles* des conséquences *matérielles* :

> Une conséquence formelle, dit Buridan, est une *conséquence* telle que toute proposition ayant la même forme est une *conséquence* valide.

Une conséquence formelle est donc une proposition conditionnelle, respectivement une inférence, qui conserve sa vérité, respectivement sa validité, quels que soient les termes qu'elle contient. Soit la proposition « Si Dieu existe, Dieu existe », qui est de la forme « *si p, alors p* », soit $p \longrightarrow p$ en logique symbolique. Si on remplace « Dieu » par « l'homme » et « existe » par « est immortel », la proposition, qui devient « Si l'homme est immortel, l'homme est immortel » demeure vraie. Et cela vaut pour toute substitution respectant la forme indiquée : $p \longrightarrow p$ est vraie quelque proposition qu'on substitue à p – c'est une tautologie. « Si Dieu existe, Dieu existe » est donc une conséquence formelle. Au contraire, la conséquence *matérielle* peut perdre sa vérité ou sa validité si, sans en modifier la forme, on en change les termes. Buridan donne l'exemple de « Si quelque homme court, alors quelque animal court ». La proposition n'est plus vraie si on remplace « homme » par « cheval », « animal » par « forêt » et « court » par « se promène ». Elle devient en effet « Si quelque cheval se promène, alors quelque forêt se promène », proposition évidemment fausse, alors que celle donnée est vraie[1]. C'est la nature de l'impossibilité entrant dans la définition de la conséquence qui distingue celle qui est formelle de celle qui est matérielle. Dans le premier cas, il est *logiquement* impossible qu'un antécédent vrai donne un conséquent faux ; dans le second, cette impossibilité *dépend* de leurs contenus, c'est-à-dire du sens des termes qui y figurent, et n'est donc pas une impossibilité logique.

---

1. Buridan autorise une substitution qui ne respecte pas l'inclusion du sujet de l'antécédent dans le sujet du conséquent, car il ne considère pas que cette inclusion fait partie de la forme de la conséquence.

Une division supplémentaire concerne les conséquences matérielles, qui peuvent être *simples* ou valables *ut nunc* (« pour maintenant »). Les premières, bien que non formelles, sont vraies ou valides pour tout temps, c'est-à-dire que jamais elles n'ont pu avoir leur antécédent vrai sans que leur conséquent le fût aussi. Les secondes ne remplissent pas cette condition. Cette distinction rappelle la controverse entre Diodore et Philon sur l'implication. Les logiciens du Moyen Âge ont donc retrouvé les apparences paradoxales de l'implication philonienne, sous la forme de « règles conséquentielles » auxquelles Buridan donna la forme suivante : une proposition fausse implique toutes les propositions, une proposition vraie est impliquée par toutes les propositions.

Buridan fit le lien entre les différents types de conséquences, en montrant d'abord que les conséquences matérielles ne sont justifiées que par réduction à des conséquences formelles. Cela se fait par l'ajout d'une prémisse supplémentaire vraie. Pour une conséquence simple, ce sera une proposition nécessairement ou intemporellement vraie ; pour une conséquence *ut nunc*, ce sera une proposition factuellement ou temporellement vraie. Dans « Si quelque homme court, alors quelque animal court », le conséquent est prouvé et la conséquence formellement justifiée si on ajoute à l'antécédent la prémisse « Tout homme est un animal ». Dans « S'il est jour, il fait clair », on ajoute la prémisse « Il est jour ». À l'intérieur des conséquences matérielles, la relation entre conséquences simples et conséquences *ut nunc* s'établit en identifiant le faux et l'impossible.

La théorie des conséquences conduisit les logiciens du XIVe siècle, en particulier Albert de Saxe, à énoncer, de manière plus ou moins systématique et toujours sous forme de règles, certaines lois du calcul moderne des propositions :

- loi de la double négation : deux négations successives équivalent à une affirmation. Soit : *non-non-p = p.*
- principe d'identité : le passage d'une proposition à elle-même est une conséquence formelle. Soit : *de p suit p.*
- loi de contraposition : si une conséquence est valide, est également valide celle où la contradictoire de l'antécédent suit de la contradictoire du conséquent. Soit : *si de p suit q, alors de non-q suit non-p.*
- réduction à l'absurde : si d'une proposition résulte son opposée, on peut inférer celle-ci. Soit : *si de p suit non-p, alors non-p.*
- lois dites de De Morgan, du nom d'un logicien du XIXe siècle dont nous reparlerons : la contradictoire d'une proposition conjonctive est la proposition disjonctive composée des contradictoires des parties de la conjonctive, soit

non-(p et q) = non-p ou non-q ; la contradictoire d'une proposition disjonctive est la proposition conjonctive composée des contradictoires des parties de la disjonctive, soit *non-(p ou q) = non-p et non-q*[1].

D. Les paradoxes

Les paradoxes étaient très prisés par les logiciens du Moyen Âge, en particulier à partir du XIIe siècle. Ils les appelaient, selon leur nature, *sophismata* ou *insolubilia*. Les premiers, dont Albert de Saxe analysa plus de deux cents cas, étaient simplement des propositions à la formulation ambiguë faute d'une ponctuation adéquate, d'où l'importance de bien marquer ce qu'on appelle la « portée » d'un opérateur à l'aide de parenthèses, comme on le fait aujourd'hui en logique et en mathématiques. Soit la proposition « Tous les hommes sont ânes ou hommes et ânes sont ânes ». Elle est vraie si on la considère comme la conjonction de « Tous les hommes sont ânes ou hommes » et de « Ânes sont ânes », propositions toutes deux vraies. Elle est fausse si on la considère comme la disjonction de « Tous les hommes sont ânes » et de « Hommes et ânes sont ânes », propositions toutes deux fausses. Il faut donc préciser sa forme à l'aide de parenthèses : soit *(p ou q) et r*, soit *p ou (q et r)*. On distinguera donc aussi $(p \vee q) \wedge r$ et $p \vee (q \wedge r)$, un groupement comme $p \vee q \wedge r$ n'étant pas une expression correctement formée.

Les *insolubilia*, surtout traités à la fin du Moyen Âge, étaient des difficultés non pas insolubles, mais dont la solution était malaisée et posait problème au logicien. C'étaient pour l'essentiel des propositions dont la vérité implique la fausseté et inversement. Albert de Saxe en a présenté une longue liste, dont beaucoup sont des variantes du *Menteur*. En voici deux exemples :

- « Je dis le faux » (si je dis le faux, je dis le vrai en disant « Je dis le faux » ; si je dis le vrai, je dis le faux en disant « Je dis le faux »).
- « Cette proposition est fausse » (si cette proposition est vraie, elle est fausse ; si elle est fausse, elle est vraie).

Dans ce type de paradoxes, la difficulté vient de ce que la proposition contient un prédicat (de vérité et/ou de fausseté) relatif à la proposition elle-même : en d'autres termes, celle-ci dit quelque chose d'elle-même. Dans le second cas, par exemple, la fausseté est prédiquée d'une proposition qui dit d'elle-même qu'elle est fausse. Pour les médiévaux, ces antinomies logiques ne posaient pas les problèmes fondationnels qui pousseront les logiciens du XXe siècle à leur trouver une solution. Ils tâchèrent

1. Ces règles, dont les deux dernières supposent l'adoption de la forme inclusive de la disjonction, peuvent être formulées de la façon suivante :
$\neg\neg p = p$; $p \Rightarrow p$; $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$; $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$; $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$; $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$.

néanmoins de leur trouver des réponses. En voici une, relative au premier exemple, assez proche de celle que donnera Russell au XX^e siècle : dans « Je dis le faux », le prédicat « le faux » ne peut concerner (« supposer pour ») la proposition dont il fait partie.

Les médiévaux ont été de remarquables logiciens, qui ont fait plus qu'aménager le savoir reçu d'Aristote. La théorie des suppositions, celle des conséquences, l'énoncé de certaines lois de la logique propositionnelle, l'importance accordée aux paradoxes, montrent la richesse de leurs réflexions et leur actualité.

CHAPITRE 4

L'ÂGE CLASSIQUE

I. LA CRITIQUE DE LA LOGIQUE SCOLASTIQUE

Pour comprendre pourquoi l'âge classique (XVIe-XVIIe siècles) s'est désintéressé de la logique, il faut évoquer Raymond Lulle, philosophe et logicien du Moyen Âge, dont l'*Ars Magna* concentre tout ce qui a participé de ce discrédit. Présentée comme un « art » et truffée de classifications, divisions et subdivisions, la logique de Lulle porte en germe deux idées qu'on retrouvera pourtant chez Leibniz et les logiciens contemporains : celles d'une langue symbolique et d'un calcul proprement logique. L'usage systématique d'une représentation visuelle – lettres, couleurs, schémas, figures géométriques, etc. – rend manifestes ces deux idées, réduites à un unique dessein : substituer à des opérations intellectuelles souvent peu assurées la certitude de procédures mécaniques posées une fois pour toutes. Mais en poussant au plus loin les procédés mnémotechniques destinés à enseigner la logique, Lulle a contribué à la désincarner. Après avoir un temps fasciné les esprits, son œuvre fut rejetée par les classiques, souvent avec mépris. Leibniz notamment se détacha de l'attrait qu'elle exerça un temps sur lui. Quant aux logiciens contemporains, ils reprochent à sa logique de n'être en fait ni formaliste, ni même simplement formelle.

La critique de la scolastique et de sa logique commence à la Renaissance (XVe-XVIe siècles), qui prétend rompre avec le Moyen Âge par son souci d'humanisme et un retour à l'Antiquité grecque, Platon étant mis en avant au détriment d'Aristote. L'époque classique voit la mise en sommeil de la logique, qui continue d'être enseignée, mais à laquelle on reproche son inutile subtilité et sa stérilité. La syllogistique aristotélicienne est délaissée au profit d'une théorie de l'argumentation que dominent la dialectique et la rhétorique. C'est le cas chez le plus célèbre logicien de la Renaissance, Pierre de la Ramée, dit Ramus, dont la *Dialectique* de 1555 est le premier ouvrage de logique écrit en langue vulgaire, ici le français, justement en réaction contre la pédanterie en vigueur. Le but de Ramus était de faire de la dialectique un art de bien argumenter et de bien juger, non de manière formelle, mais afin de trouver une méthode dont on pût assimiler les règles en s'exerçant à les appliquer à des problèmes réels. Bien que Ramus ait enseigné les mathématiques, rien n'en transparaît dans sa logique. Il n'a pas vu qu'elles pouvaient, mieux que la rhétorique, servir de modèle d'ordre et d'invention. Son apport à la logique proprement dite est donc mince et l'écart vis-à-vis d'Aristote minime, mais sa renommée durera près d'un siècle, de sorte qu'on trouve la trace de ses travaux chez Descartes et dans *La logique* dite « de Port-Royal ».

Avec les débuts de la science moderne, et notamment de la physique, la critique d'Aristote se fit extrêmement vive, et même si la démonstration mathématique était encore considérée comme constituée de syllogismes, on ne demanda plus à la logique, mais à la *mathématique*, de fournir son *Organum* aux sciences. C'est cette dernière, et non la logique, qui apparut alors comme le modèle d'invention et de certitude dont il fallait s'inspirer pour trouver une méthode de découverte de la vérité. Le représentant le plus éminent de ce courant de pensée fut le philosophe et mathématicien René Descartes. Pur produit de la scolastique, il condamna très vite le formalisme stérile de la logique, lui préférant la pratique des mathématiques pour lesquelles il montra très tôt des dons exceptionnels. Dans les *Règles pour la direction de l'esprit* de 1628, il explique que la logique n'appartient pas à l'ordre de la découverte, mais à celui de l'exposition ou du discours, et ne sert à rien pour « apercevoir la vérité des choses ».

Fondée sur une pensée mécanique dont les principes sont extérieurs à l'activité de l'esprit humain, la logique, avec son formalisme aveugle et sa prétention à l'autonomie, tourne à vide, selon Descartes. Pour corriger ce défaut, il faut la plonger au sein d'une activité intellectuelle vivante, capable de produire de vrais objets de connaissance. C'est l'idée qui préside à son invention de la *géométrie analytique* : construire des courbes en résolvant des équations algébriques, c'est-à-dire des problèmes liés à des relations mathématiques, plutôt que présenter une suite de théorèmes s'enchaînant mécaniquement. S'y exemplifie une *méthode*, dont on ne saurait « se passer pour se mettre en quête de la vérité des choses », écrit Descartes. Méthode qui n'est pas destinée être enseignée car « elle consiste plus en pratique qu'en théorie », ajoute-t-il en 1637, lorsqu'il publie le *Discours de la méthode*, qui expose une stratégie d'acquisition de connaissances certaines, dont le modèle est la *mathématique*, non en tant qu'elle présente des théories, mais parce qu'on y résout des problèmes et y découvre des théorèmes.

Les quatre règles du *Discours*, premier ouvrage de philosophie écrit en français, sont dominées par l'*évidence*, qui éclaire immédiatement la raison ; l'*analyse*, qui permet de diviser les difficultés d'un problème ; la *synthèse*, qui ordonne les découvertes en déductions certaines ; le *dénombrement*, qui assure l'absence d'omission. Grâce à sa méthode, qu'il pensait appliquer à toutes les sciences, philosophie incluse, Descartes croyait pouvoir découvrir tout ce qu'il est possible de découvrir. L'intuition et l'invention, et non la logique mécanisée du Moyen Âge, sont au centre de sa démarche. L'esprit cartésien a dominé une grande partie de la deuxième moitié du XVII^e siècle, la logique scolastique, toujours enseignée, tendant à être subordonnée à la méthode. Ce fut aussi le cas chez des adversaires pourtant déclarés de Descartes, Pascal et les logiciens de Port-Royal.

II. PASCAL ET « LA LOGIQUE DE PORT-ROYAL »

Formé par son père et non par la scolastique, Blaise Pascal a proposé en matière de logique et de mathématiques des réflexions d'une grande profondeur. Dans *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, écrit vers 1657, il parle d'une « méthode encore plus éminente et plus accomplie » que celle de la géométrie[1], qu'il dit pourtant exemplaire :

> Cette véritable méthode, qui formerait les démonstrations dans la plus haute excellence, s'il était possible d'y arriver, consisterait en deux choses principales : l'une, de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant donné le sens ; l'autre, de n'avancer jamais aucune proposition qu'on ne démontrât pas par des vérités déjà connues ; c'est-à-dire, en un mot à définir tous les termes et à prouver toutes les propositions.

Ayant expliqué qu'une *définition* mathématique est simplement une abréviation servant à « éclaircir le discours » (par exemple, *pair* pour *divisible par deux*), Pascal admet que cette méthode est impraticable :

> Il est évident que les premiers termes qu'on voudrait définir, en supposeraient de précédents pour servir à leur explication, et que de même les premières propositions en supposeraient d'autres qui les précédassent ; et ainsi il est clair qu'on n'arriverait jamais aux premières.

Se pose en effet un problème déjà examiné par Aristote, celui de la *régression à l'infini* : chaque terme est défini par un autre, et ainsi de suite ; chaque proposition est démontrée par une autre, et ainsi de suite. On ne peut donc ni tout définir, ni tout démontrer. Mais comme il existe, dit Pascal, des « choses si claires » qu'il est inutile, voire nuisible, de vouloir les définir et des « principes si clairs » qu'ils n'ont pas

1. Comme ses contemporains, Pascal dit « la géométrie » pour la mathématique en général.

besoin de preuve, il faut admettre que la connaissance se fonde en partie sur l'évidence. Sur ce point, Pascal était en accord, chose rare, avec Descartes. La divergence, profonde, tient à ce que, pour le premier, la *déduction*, c'est-à-dire le passage des propositions simples, ou axiomes, aux propositions complexes, ou théorèmes, ne relève aucunement de l'*intuition*. Pour Pascal donc, à la base d'un système déductif, il y a des notions et des propositions tenues sans arbitraire pour *primitives*[1], les premières n'ayant pas besoin de définition, les secondes de démonstration, ce qui, pour lui, n'est pas le signe d'un manque, mais d'une supériorité.

Ce qu'on appelle « La logique de Port-Royal » est exposée dans un traité paru anonymement en 1662, intitulé *La Logique ou l'art de penser*. Ses auteurs, Antoine Arnauld et Pierre Nicole étaient attachés à l'Abbaye de Port-Royal. Située dans la vallée de Chevreuse près de Paris, elle abritait les défenseurs du jansénisme – Pascal en faisait partie – alors combattu par l'Église catholique. L'ouvrage connut un immense succès, y compris hors de France, et initia les « honnêtes gens » à la logique pendant deux siècles. Le dessein de l'ouvrage était *pédagogique*, par l'usage constant d'exemples concrets, empruntés non à la logique (à quoi sert d'apprendre par un raisonnement que Socrate est mortel ?), mais à divers domaines de l'activité humaine, dont les mathématiques, la morale et la poésie latine.

Partant de l'idée que nous raisonnons naturellement, selon des règles qui n'ont été dégagées et formulées qu'après réflexion sur les démarches spontanées de la pensée, la logique de Port-Royal se propose de réagir contre la scolastique d'inspiration aristotélicienne. Elle est donc hostile au formalisme, et même aux aspects les plus simples de la logique formelle, d'où le rejet des variables et des formules mnémotechniques, et l'usage systématique d'exemples au détriment des énoncés généraux qu'on trouve chez Aristote. La logique de Port-Royal emprunte beaucoup aux méthodes prônées par Descartes et par Pascal. Elle doit au premier l'appel constant aux idées claires et distinctes, à la lumière naturelle de l'évidence, presque au « bon sens », mais elle suit surtout le second, en ce qu'elle fait du jugement moral *la* finalité de la logique. La logique de Port-Royal est donc plus proche de l'art de bien gouverner la pensée que de la science du raisonnement formel, d'où le titre de l'ouvrage.

Sa caractéristique la plus flagrante est effectivement le peu de cas qu'il fait de la logique comme l'entendait la scolastique. Le propos n'est pas de combiner des mots ou des formules, mais de donner des règles pour raisonner : moins pour *raisonner correctement*, au sens de la rectitude formelle de la conclusion, que pour *juger sainement*, au sens de la justesse morale ou de l'action juste. La logique de Port-Royal apparaît comme une « grammaire » de la pensée, qui *analyse* les opérations *logiques*

1. Le terme, courant en ce sens depuis le XIX^{e} siècle, est utilisé par Pascal.

de l'esprit et *exprime* la forme du discours, sans que la pensée ne soit prisonnière ni des premières ni de la seconde. La quatrième partie de l'ouvrage, intitulée « De la méthode », manifeste cette subordination de l'art de raisonner à l'art de penser. Il y est dit que la logique doit « servir d'instrument aux autres sciences », lesquelles doivent en retour faire de même « pour perfectionner la raison ». Elle montre aussi à quel point la logique de Port-Royal fait grand cas de la pratique des mathématiciens et doit plus à Descartes et à Pascal qu'à Aristote et à la scolastique :

> Il sert de peu, pour bien démontrer, de savoir les règles des syllogismes ; le tout est de bien arranger ses pensées, en se servant de celles qui sont claires et évidentes, pour pénétrer dans ce qui paraissait plus caché.

Mais la logique de Port-Royal n'est pas si révolutionnaire qu'elle ne doive rien au philosophe grec. Le fond du livre est aristotélicien et donné pour tel, et l'enseignement scolastique, même remis en question, semble l'inspirer. C'est ainsi que la logique de Port-Royal persiste à lier analyse logique et analyse grammaticale, même si elle le fait à partir d'un constat d'inadéquation partielle entre langage et pensée. Mais, écartant le projet de créer une langue spécifique pour la logique et reprenant l'idée, présente chez Aristote, que « la démonstration ne regarde proprement que le discours intérieur », Arnauld et Nicole se sont contentés de dévoiler quelques ambiguïtés des langues ordinaires, dues aux places respectives du sujet et du prédicat, à la confusion possible entre universelle et particulière, aux difficultés liées à la négation.

Sur les propositions, Arnauld et Nicole assimilèrent, comme les médiévaux, les singulières à des universelles, et ajoutèrent aux types retenus par Aristote les propositions dites *composées* parce qu'elles comptent plus d'un sujet ou plus d'un attribut, et qui sont de deux formes. Dans l'une, la composition apparaît par analyse logique de la forme grammaticale : en font partie les *exclusives*, marquées par la présence de « seul » ou d'un terme semblable (« Seuls les hommes sont doués de raison »), les *exceptives*, universelles où certains individus sont exclus du sujet (« Aucun animal, sauf l'homme, n'est doué de raison ») et les *comparatives* (« Il fait plus clair que sombre »). Dans l'autre forme, la composition est exprimée par la langue : en font partie les *copulatives*, affirmatives (« Le sage est heureux et bienveillant ») ou négatives (« Les hommes ne sont ni bons ni mauvais ») ; les *disjonctives*, le *ou* exclusif étant nettement privilégié ; les *conditionnelles* et les *causales* (« Les Français sont aimés parce qu'ils sont polis »). On reconnaît des tournures déjà répertoriées par les stoïciens.

C'est sur la syllogistique que la logique de Port-Royal a le moins innové, reprenant les modes et figures aristotéliciens, présentés exclusivement à l'aide d'exemples. La plupart ont la forme inférentielle adoptée au Moyen Âge, mais quelques-uns sont constitués d'une unique proposition conditionnelle, comme parfois chez Aristote.

Arnauld et Nicole y ajoutèrent des syllogismes correspondant, sans que ce soit dit, aux cinq tropes de la logique stoïcienne. Et comme les médiévaux, ils firent la liste des règles régissant les syllogismes concluants, les ramenant à un principe très général, sans grand intérêt : « Que les prémisses doivent contenir la conclusion ».

Une modification de vocabulaire intéressante apparaît : le *concept* de la scolastique fait place à l'*idée* cartésienne, le mot faisant partie, selon Arnauld et Nicole, de ceux qui sont « si clairs qu'on ne peut les expliquer par d'autres ». Très importante est la distinction entre *compréhension* et *étendue* d'une idée :

> J'appelle *compréhension* de l'idée, les attributs qu'elle enferme en soi, et qu'on ne peut lui ôter sans la détruire, comme la compréhension de l'idée du triangle enferme extension, figure, trois lignes, trois angles, et l'égalité des ces trois angles à deux droits, etc. J'appelle *étendue* de l'idée les sujets à qui cette idée convient.

La compréhension d'une idée consiste donc en l'indication des propriétés caractéristiques des individus qui y satisfont, son étendue en la liste de tous ces individus. Par exemple, *homme* est défini en compréhension comme un animal doué de raison, avec tous les attributs qui caractérisent l'idée d'homme. Il est défini en étendue par la totalité des êtres humains : Socrate, Platon, Pascal, vous, moi, ...[1]. La logique de Port-Royal fait donc apparaître une distinction seulement implicite chez les Grecs, que le XIXe siècle reprendra en opposant *intension* et *extension*, logique intensionnelle et logique extensionnelle.

La théorie traditionnelle des *définitions* est également amendée. Aristote et la scolastique distinguaient les définitions d'*essence*, qui indiquent en quoi consiste la chose, et les définitions *nominales*, qui donnent simplement le sens d'un mot. La logique de Port-Royal a repris cette distinction, sous les appellations respectives de définitions de *choses* et définitions de *noms*, celles-ci étant arbitraires, celles-là non. Mais elle a insisté, comme Pascal, sur le rôle particulier que la mathématique donne à certaines définitions de noms, à savoir d'être une abréviation. L'opération consiste à choisir arbitrairement un terme unique pour remplacer une suite de mots : par exemple *triangle* pour *figure à trois côtés*. Une telle définition n'est ni vraie ni fausse et ne nécessite pas de preuve, mais a sa place dans une démonstration conforme à la bonne méthode.

Du point de vue de la logique moderne, les progrès apportés par les logiciens de Port-Royal sont relatifs : nulle avancée, au contraire, vers le formalisme ou une langue symbolique adaptée à la mathématique ; l'association d'origine scolastique entre analyse grammaticale et analyse logique demeure. Deux apports sont intéressants :

1. Il n'est pas toujours possible, ni en pratique, ni en théorie, de faire la liste complète des membres d'une totalité : on ne peut le faire, par nature, pour une idée satisfaite par une infinité d'individus, par exemple celle de *nombre*.

la distinction entre compréhension et étendue, et le privilège donné à la définition de nom, arbitraire et abréviative. Et tout ce qui concerne la méthode montre une grande intelligence des systèmes déductifs et des règles à respecter pour qu'une démonstration soit rigoureuse.

III. L'APPORT DE LEIBNIZ

A. Un logicien d'exception

Gottfried Wilhelm Leibniz, esprit universel, juriste et diplomate de profession, mais surtout mathématicien et philosophe, occupe une place particulière dans l'histoire de la logique. Ce n'est que récemment qu'on a compris que, tout en demeurant attaché à la tradition aristotélicienne, il a anticipé certaines idées des fondateurs de la logique moderne. Ceux-ci mentionnent Leibniz, mais sans connaître la totalité de ses travaux, éparpillés dans des brouillons, notes, essais, ébauches. Et faute de l'avoir lui-même systématisée, on ne peut parler de *la* logique de Leibniz que par une reconstruction ultérieure, exigeant de la prudence.

Il s'ensuit qu'elle vaut plus par ses anticipations que par ses réalisations effectives. Comme dans d'autres domaines que la logique, Leibniz s'est comporté en visionnaire, soit qu'il ait abandonné une idée en cours de route, soit qu'il ait buté sur des obstacles conceptuels, soit que sont ambition fût démesurée. Il constitue en tout cas une remarquable exception dans une époque marquée par la désaffection pour la logique, lui qui écrit en 1703 :

> Je tiens que l'invention de la forme des syllogismes est une des plus belles de l'esprit humain, et même des plus considérables. C'est une espèce de *mathématique universelle* dont l'importance n'est pas assez connue ; et l'on peut dire qu'un *art d'infaillibilité* y est contenu, pourvu qu'on sache et qu'on puisse bien s'en servir.

Une grande partie de la pensée logique de Leibniz est dans cette citation. Il admirait la tradition, mais moins la syllogistique elle-même que le principe qui l'inspirait : assurer l'infaillibilité du raisonnement en réduisant ce dernier à sa forme. C'est ce que réalisait, selon Leibniz, la mathématique et spécialement l'*algèbre.* Le syllogisme n'était pour lui qu'une partie, restreinte, de l'*art* de raisonner, et même d'inventer, que le savant allemand a tenté de traduire en un système symbolique.

B. La logique traditionnelle

C'est par l'étude de la logique traditionnelle que Leibniz a commencé, avec le *De arte combinatoria* de 1666. Inspiré notamment par Ramus, il y a systématisé et complété la syllogistique aristotélicienne, dénombrant vingt-quatre modes valides, avec six modes dans chaque figure, selon une symétrie qui témoigne, conformément à une pensée qui traverse sa philosophie, de ce que la « nature est régulière en toutes choses ». Pour ramener tous ces syllogismes à ceux de la première figure, Leibniz utilisait systématiquement le raisonnement par l'absurde, qu'il fondait sur le principe de contradiction. Excluant la conversion, la méthode a l'avantage de réduire les présupposés de la syllogistique à ce seul principe et aux quatre modes « parfaits » de la première figure, mais l'inconvénient de recourir à la subalternation.

Pour représenter les différents syllogismes, Leibniz imagina deux systèmes de diagrammes, l'un par cercles, l'autre par des droites. On verra comment la logique moderne retrouvera la première idée, dont une version apparaît chez Euler au XVIII[e] siècle. La seconde présentation (figure 3), bien que moins lisible, est plus satisfaisante. Elle consiste à symboliser les extensions de concepts par des droites horizontales, et la relation d'inclusion entre les concepts par des pointillés verticaux. Elle s'applique aux propositions, puis aux syllogismes. Pour les premières, quand les pointillés verticaux tombent sur la ligne horizontale, il y a inclusion et donc proposition affirmative ; lorsqu'ils tombent dans le vide, il n'y a pas inclusion et la proposition est négative. Pour les syllogismes, la figuration est plus compliquée mais procède de la même idée, la conclusion étant marquée par deux traits pleins verticaux.

Affirmative universelle
Tout B est A

Syllogisme en Barbara
Tout B est A
Tout C est B
Tout C est A

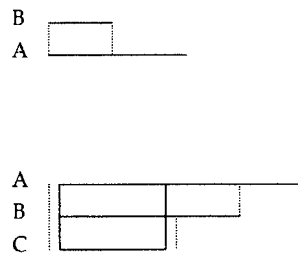


Figure 3. Diagrammes de Leibniz

Ce système de figuration constitue la première contribution de Leibniz à la syllogistique traditionnelle. Mais il a vite compris que celle-ci ne recouvrait pas tous les types d'inférences possibles, probablement après avoir lu Joachim Jungius, qui en avait découvert certains, absents de la logique d'Aristote. Tous deux en ont donné quelques exemples. D'abord sur l'inversion des relations, comme dans « David est le père de Salomon, donc Salomon est le fils de David ». Puis sur les conséquences *a compositis ad divisis* (« de composition à division »), comme dans « Platon est un philosophe éloquent, donc Platon est un philosophe et Platon est éloquent », et *a divisis ad composita* (« de division à composition »), comme dans « Toute planète parcourt le zodiaque, toute planète est un astre, donc toute planète est un astre qui parcourt le zodiaque ». Enfin et surtout sur l'inférence *oblique*, comme dans « Tout cercle est une figure, donc tout ce qui décrit un cercle décrit une figure » et « Quiconque est riche n'est pas heureux, donc la richesse n'est pas le bonheur ».

Leibniz remarqua que ces inférences semblaient relever de manipulations sur des signes, et non de règles logiques classiques. Épris de formalisme, il tenta de les dégager au travers des divers calculs logiques qu'il a ébauchés, mais il a échoué, en particulier à élaborer une véritable logique des relations, sans doute par respect pour la logique traditionnelle. C'est que sa théorie de la proposition se fondait sur ce qu'il considérait comme une évidence : le prédicat est inclus dans le sujet. « C'est là mon grand principe », disait Leibniz. Principe conforme à la lettre de l'enseignement d'Aristote, dont les propositions sont de la forme *B appartient à A*, et non *A est B*, mais que Leibniz fut le premier à rapprocher du principe d'identité. C'est ce qui l'empêcha de traiter correctement des jugements de relation : dans « Roméo aime Juliette » et « Juliette aime Roméo », il est impossible, à moins de contorsions grammaticales artificielles, de voir l'inclusion d'un prédicat dans un sujet.

Une autre conséquence du « grand principe » leibnizien concerne le double rôle du verbe « être » dans les propositions : à la fois lien et marque de l'existence. Suspectée par les médiévaux et dégagée au XIX^{e} siècle, cette ambiguïté du langage fut soulignée par Leibniz, qui proposa deux versions des catégories propositionnelles d'Aristote. Dans l'une, il conserve la copule et introduit le concept « universel » et les concepts vides. Dans l'autre, la copule est remplacée par l'égalité, ce qui donne à la logique traditionnelle une forme qui anticipe l'expression des propositions en termes d'intersection de classes[1]. D'où la traduction suivante, dans un vocabulaire actuel :

- *Tout A appartient à (est) B* : l'intersection de (la classe des) A et de (la classe des) B est (la classe des) A ($A \cap B = A$).
- *Quelque A appartient à (est) B* : l'intersection de (la classe des) A et de (la classe des) B n'est pas vide ($A \cap B \neq \varnothing$).
- *Aucun A n'appartient à (n'est) B* : l'intersection de (la classe des) A et de (la classe des) B est vide ($A \cap B = \varnothing$).
- *Quelque A n'appartient pas à (n'est pas) B* : l'intersection de (la classe des) A et de (la classe des) B n'est pas (la classe des) A ($A \cap B \neq A$).

1. L'intersection (notée $A \cap B$) de deux classes (de deux ensembles) A et B est la classe (l'ensemble) constituée des individus (des éléments) qui appartiennent à la fois à l'une *et* à l'autre. Lorsque A et B sont disjoints, cette intersection ne compte aucun élément et est l'ensemble vide, noté $\varnothing$.

Avec cette interprétation extensionnelle de la proposition aristotélicienne, Leibniz fut proche de dégager ce qui sera une des grandes découvertes de la logique moderne : l'*isomorphisme* du calcul des propositions et du calcul des classes (deux structures sont isomorphes si une correspondance parfaite permet de transférer toutes les propriétés de l'une à l'autre et inversement). Mais l'attachement de Leibniz à la tradition l'a empêché de comprendre pleinement cette analogie. En fondant sa logique sur le principe d'inclusion du prédicat dans le sujet, il a privilégié, comme Aristote, l'interprétation en intension de la proposition. Le point de vue de l'extension ne lui était pourtant pas étranger, puisqu'il a entrevu le double sens du mot « contient », relation entre concepts et relation entre classes, comme l'attestent sa relecture des catégories logiques d'Aristote et sa figuration des propositions et des syllogismes. Et son ébauche de calcul logique se prête facilement à une interprétation en termes de classes, selon le point de vue de l'extension.

C. Une langue et un calcul logiques

Le projet de Leibniz, seulement ébauché, de faire du raisonnement un calcul logique, qu'il appelle *calculus ratiocinator*, est indissociable de celui, également non accompli, de construire une langue nouvelle, la *lingua caracteristica universalis*. Tous deux sont liés à la mathématique et à l'idée de faire de l'argumentation un art infaillible. Même inabouti, ce double projet marque une rupture avec la tradition et contient certaines idées présentes chez les logiciens des XIX^e^ et XX^e^ siècles.

La *lingua caracteristica universalis* est une langue en un sens nouveau. La logique s'exprimait jusqu'alors en langue naturelle, grec, latin, français, allemand, etc., en lien étroit avec la grammaire. Y échappaient à peine les variables utilisées par Aristote et les stoïciens. Leibniz ambitionna au contraire de fabriquer une langue *artificielle*, libérée des particularités grammaticales des langues en usage et dont les signes soient en rapport direct avec les choses ou les idées, loin de toute équivoque ou ambiguïté. Universelle, une telle langue serait une « écriture rationnelle », un « instrument pour la raison », comme aimait à le dire Leibniz. Et elle serait, chose totalement nouvelle, *écrite* et non plus orale. Certes, la logique traditionnelle a été transmise par écrit, mais à seule fin d'en conserver le contenu. L'enseignement d'Aristote et de la scolastique était oral, et jusqu'à la Renaissance, on lisait à haute voix. La caractéristique universelle de Leibniz ne sera pas *phonétique* – un signe exprime un son –, comme les langues occidentales, mais *idéographique* – un signe exprime une idée ou une chose –, comme l'écriture chinoise, à laquelle Leibniz porta un vif intérêt. Son but était donc de forger une langue symbolique, constituée de caractères – d'où le nom de *caractéristique* – qui parle aux yeux et non aux oreilles et plus encore à l'entendement, comme celle des mathématiques, expliquait-il. Nous *écrivons* « $a = b$ », « $f(x)$ », « $\int_a^b f(x)dx$ », etc., et lorsque nous *disons* ces formules, nous les *traduisons*, en les trahissant plus ou moins. C'est sur ces formules écrites et sur ce qu'elles signifient que nous raisonnons, non sur leur traduction orale. Ce sont l'arithmétique et surtout l'algèbre qui inspirèrent Leibniz, inspirèrent seulement, puisque les signes y désignant des nombres, il ne les tenait pas pour des langues universelles : l'« algèbre n'est qu'une branche fort petite » de ma *caractéristique universelle*, disait-il.

À la base du projet leibnizien, maintes et maintes fois remanié, il faut un travail encyclopédique immense, visant à faire la liste de toutes les connaissances humaines. Pour Leibniz, nos idées sont des *combinaisons* d'idées, simples ou dérivées de ces dernières. Si l'on admet que l'analyse permet de révéler les premières, reste à constituer un système de signes associant à chaque idée primitive, ou indécomposable, un « caractère », d'où ce que Leibniz appelait un « alphabet des pensées humaines ». Les idées composées seront alors exprimées en combinant ces signes élémentaires. Cela implique de n'utiliser que des signes simples pour les idées simples et de rendre leurs combinaisons facilement lisibles. Une première ébauche prend l'arithmétique pour modèle. Chaque idée simple étant désignée par un nombre premier, l'« alphabet des pensées humaines » est l'ensemble des nombres premiers, parmi lesquels Leibniz compte 1[1]. Comme tout entier naturel est décomposable en un unique produit de facteurs premiers, chaque concept complexe peut être symbolisé de même. Ainsi, si 1, 2, 3, 5 désignent respectivement les idées simples *être*, *corps*, *sensible* et *doué de raison* :

homme	=	être		corps		sensible		doué de raison
30	=	1	x	2	x	3	x	5

Comme nos connaissances sont susceptibles de croître avec le temps et que l'ensemble des nombres premiers est infini, rien n'interdit de transcrire une connaissance nouvelle dans cette langue symbolique. Leibniz avait donc vu que son système de notations n'avait pas de limite, mais l'algèbre, avec ses lettres x, y, z, ... pour les inconnues, offre plus de possibilités que l'arithmétique. Il utilisa donc ensuite un symbolisme algébrique, où les nombres laissaient la place à des caractères correspondant à des variables. Trop ambitieux pour être effectivement réalisé, le projet leibnizien de langue universelle n'a pas abouti. Mais l'idée d'une caractéristique, limitée aux disciplines logico-mathématiques, a poursuivi son chemin chez Leibniz, sous la forme d'un *calculus ratiocinator*, « calcul pour le raisonnement » consistant à formaliser la logique.

1. Aujourd'hui, un nombre premier est un nombre, autre que 1, qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Là encore, Leibniz a tenté de lier tradition et innovation. Pour lui, la logique traditionnelle n'est qu'une partie d'une logique générale restant à établir. Aussi « susceptible de démonstration que la géométrie », disait-il, elle devra se trouver si étroitement liée à la mathématique que les deux domaines semblent parfois se recouvrir, au sens très général d'une *mathesis universalis*. Et de même que le projet d'une *lingua caracteristica universalis* voit Leibniz avancer sur le chemin de la logique *symbolique* moderne, celui d'un *calculus ratiocinator* le rapproche de notre logique *mathématique*. Avec cette réserve : la logique actuelle est née d'une réflexion sur le fondement des mathématiques, étrangère à Leibniz. Et alors que le formalisme fait partie intégrante de la logique moderne, lui le réduisait à un simple moyen d'assurer la certitude des raisonnements.

Au centre de la caractéristique universelle est l'« art combinatoire », c'est-à-dire la représentation des idées simples et de leurs relations par un système de symboles et de combinaisons de ceux-ci. Il en est de même pour le *calculus ratiocinator*, censé réduire les opérations logiques à un *calcul* sur des *signes*, avec pour modèle l'*algèbre*, dont l'écriture symbolique permet de mécaniser le raisonnement, conformément à ce que Leibniz appelle une « pensée aveugle ». L'algèbre apparaît alors moins comme une discipline mathématique dont l'objet est la *quantité* que comme un langage formel, ce que doit être, selon Leibniz, la logique. Elle se trouverait ainsi réduite à un calcul, au sens large du terme qui est celui de la logique contemporaine :

> Un calcul, écrit Leibniz, n'est rien d'autre qu'une opération au moyen de caractères, qui a sa place non seulement quand il s'agit de quantités, mais encore dans tout autre raisonnement.

Leibniz veut donc dépasser la syllogistique aristotélicienne en transformant en calculs les raisonnements susceptibles d'un traitement formel, tout comme en algèbre, où on résout des équations en répétant les mêmes procédures. Pour formaliser la « pensée » et la rendre infaillible, il faut une écriture symbolique parfaitement réglée, une caractéristique donc, qui assure la certitude de ses conclusions. Par l'univocité de ses signes, par la stabilité de ses règles de formation, elle pourra éliminer les risques d'erreur et prétendre à l'*universalité* que réclame la quête de la vérité. Une telle écriture serait, dit Leibniz, « une espèce d'Algèbre générale », qui « donnerait moyen de raisonner en calculant, de sorte qu'au lieu de disputer, on pourrait dire : comptons ». Le projet de *calculus ratiocinator* est donc bien lié à celui de *caractéristique universelle*.

Bien que Leibniz n'ait rien publié de ses essais logiques, on sait qu'il est passé par trois étapes, dont certains traits recoupent le projet de *caractéristique universelle*. Il a d'abord utilisé le modèle de l'arithmétique et de l'algèbre, mais sans pousser très loin l'idée. Puis, par une analyse détaillée des notions dérivées et des propositions composées, il a anticipé certaines découvertes de la logique moderne, comme indiqué plus haut. Enfin, utilisant un calcul logique formel fondé sur l'égalité et l'inclusion (qu'il appelait la *contenance*), qui rappelle sa formulation des propositions aristotéliciennes, il a fait de « *ens* » (« (tout) être ») la constante « universelle », ajouté « *nihil* » pour « rien », et remplacé « est » par « est contenu dans ». Il fonda son système sur deux axiomes : AA = A (la classe des Français français est identique à la classe des Français), AB = BA (la classe des Français femmes est identique à la classe des femmes françaises). Ces axiomes sont complétés par deux principes attachés au nom de Leibniz : le principe d'*identité des indiscernables*, qui énonce que deux choses ayant les mêmes propriétés ne sont qu'une seule et même chose, et le principe de *substitution des identiques*, selon lequel on peut, dans une proposition, substituer à un terme un terme équivalent sans en modifier la vérité ou la fausseté.

Cette troisième forme de calcul, inaboutie comme les deux précédentes, aurait pu mener Leibniz sur le chemin d'une logique extensionnelle, plus facile à mettre en œuvre qu'en conservant le point de vue traditionnel de la compréhension. Mais Leibniz s'en est toujours tenu à l'idée que la forme de la proposition est le jugement de prédication, du type *B est contenu dans* A. C'est ce qui l'a empêché d'anticiper vraiment les vues modernes, car il n'a fait que traduire en langue symbolique la logique aristotélicienne. Il demeure que les calculs logiques de Leibniz consistent à traduire des relations au moyen de formules – une formule étant, dit-il, « ce qui est composé de plusieurs caractères » –, selon certaines lois. Cela se fait en deux étapes, comme en logique moderne : en fixant les règles assurant la constitution des formules, en énonçant les règles de transformation permettant de passer d'une formule à une autre.

Réduire le raisonnement à un calcul était une idée assez courante à l'époque, mais Leibniz est le seul à avoir poussé aussi loin ses analyses sur la question. A-t-il échappé aux reproches que Descartes a adressés à la logique, le pur formalisme et la stérilité ? Oui, pour deux raisons. Si Leibniz a fait du formalisme une garantie contre l'erreur, il a souligné qu'au travers des signes, il fallait toujours penser aux idées. Il n'est pas nécessaire, lorsqu'on raisonne, de toujours revenir *effectivement* aux éléments premiers, mais il l'est de *pouvoir* le faire, en particulier lorsqu'il y a doute. Un calcul par signes abrège le discours et « nous fait raisonner à peu de frais, en mettant des caractères à la place des choses, pour désembarasser l'imagination », expliquait Leibniz. Comme en mathématiques, ajoutait-il, et particulièrement avec l'arithmétique binaire – Leibniz fut le premier à en parler en Occident –, par certains côtés plus simple que le système décimal.

La seconde raison est liée à la précédente et explique en partie pourquoi la logique de Leibniz est inaboutie. Plus soucieux de montrer la voie que de parvenir à sa réalisation pleine et entière, Leibniz savait que ses travaux logiques n'étaient que des ébauches. La logique est pour lui un « art d'inventer » qui, en tant que *méthode*, est non seulement destiné à servir l'exposition infaillible mais aussi la découverte. Elle procède, comme chez Descartes, par *analyse*, en allant du donné aux éléments simples, et par *synthèse*, en allant du simple au composé. Or, l'algèbre, pour la première, et la combinatoire, pour la seconde, offrent ces deux possibilités par un raisonnement symbolique. Le *calculus ratiocinator* devait permettre la découverte de connaissances nouvelles grâce à ce que Leibniz comparait à un « fil d'Ariane », qui conduirait « l'esprit, comme les lignes tracées en géométrie et les formes des opérations qu'on prescrit aux apprentis en arithmétique ».

Bien que Leibniz et Descartes aient prôné l'idée d'une méthode de découverte, inspirée de l'algèbre et visant l'idéal d'une *mathesis universalis*, tout les oppose. Descartes apprécie l'évidence des raisons et le caractère intuitif des enchaînements, Leibniz met en avant le formalisme, avec une conception différente de l'algèbre : le premier y voit un principe d'ordre, le second une langue formelle. À propos de la tâche démonstrative de la logique, Leibniz rejoint Pascal dans son exigence de remonter aux notions et vérités premières. Pour lui, la seule vérité évidente est le principe d'identité, *A est A*, dont il a donné plusieurs versions. Par ses exigences en matière de démonstration, Leibniz s'est approché de certaines vues modernes. Une démonstration a deux composantes : *logique*, elle assure la vérité de la proposition ; *épistémologique*, elle explique sur quelles bases cette vérité repose. Il n'est donc pas oiseux de démontrer une proposition apparemment évidente, et en cela, Leibniz est en désaccord avec Pascal. Ce n'est pas seulement la rigueur qui est en cause, mais le fondement de la connaissance.

Leibniz joue donc un rôle original dans l'histoire de la logique. Alors qu'Aristote, avec l'usage des variables, a inventé la logique *formelle*, le savant allemand a ébauché une logique *formaliste*, qui se traduit dans son double projet de « caractéristique universelle » et de « calcul logique ». Calcul symbolique qui se prête à différentes *interprétations*, révélées après coup : *intensionnelle*, lorsque les lettres désignent des propriétés ; *extensionnelle*, lorsqu'elles désignent des extensions de concepts, d'où résulte une logique des classes ; *propositionnelle*, lorsqu'elles désignent des propositions. Tout cela rend Leibniz proche des fondateurs de la logique moderne. Mais non systématisée et inaboutie, à la fois réformatrice et respectueuse de la tradition, la logique de Leibniz a un caractère hybride. Leibniz n'en apparaît pas moins aujourd'hui comme un logicien d'exception, d'autant qu'il appartient à une époque qui délaissa largement la logique.

CHAPITRE 5

LA NAISSANCE DE LA LOGIQUE MODERNE

On peut dire rapidement que la logique moderne, caractérisée par son rapport étroit avec la mathématique, est née dans les années 1850-1880 avec Boole en Angleterre et Frege en Allemagne. Tous deux ont repris l'idée leibnizienne d'une langue pour la logique, mais en empruntant des voies différentes, dans une opposition soulignée par le second et reprise depuis dans les termes suivants : Boole, pour qui la logique était plutôt un *calculus ratiocinator*, a privilégié l'aspect extensionnel et mis au premier plan le calcul des classes ; Frege, qui la tenait avant tout pour une *lingua caracteristica*, a privilégié l'aspect intensionnel et mis à la base de son système la logique des propositions. Plutôt que de respecter la chronologie, le présent chapitre examine le développement de la logique selon ces deux courants, au carrefour duquel se trouve la logique des relations. Avant d'y venir, voyons comment quelques mathématiciens et philosophes des XVIIIe et XIXe siècles ont abordé les questions logiques.

I. LOGIQUE ET MATHÉMATIQUES

La mathématisation de la logique a commencé avec les travaux, dont certains relativement mineurs pour l'histoire de la discipline, de mathématiciens des XVIIIe et XIXe siècles. Tous, à l'exception de Bolzano, sont attachés à la logique traditionnelle : persuadés que la mathématique peut la servir au mieux, ils visent pour l'essentiel à visualiser géométriquement la syllogistique. Sur ce point, Johann Heinrich Lambert et surtout Leonard Euler méritent une attention particulière.

Désireux, comme Leibniz, de constituer une *mathesis universalis*, Lambert ébaucha lui aussi un calcul logique. Prenant également pour modèle l'algèbre, considérée comme une langue symbolique, il en appliqua les procédés à la logique traditionnelle. Certaines de ses idées le rapprochent de Boole et, comme lui, il a buté sur les difficultés liées à l'imparfaite analogie entre calcul logique et calcul algébrique. Il a aussi imaginé, sans rien savoir de ce qu'avait fait Leibniz, une représentation, peu convaincante, des syllogismes aristotéliciens par des diagrammes linéaires.

C'est également par le biais de diagrammes qu'Euler, dont l'œuvre mathématique est considérable, occupe une place dans l'histoire de la logique. Ce qu'on appelle les « cercles d'Euler » datent des années 1760 – les manuscrits de Leibniz sur la logique lui étaient inconnus. Ils consistent à représenter chaque terme de la proposition aristotélicienne par un cercle (figure 4). Dans le cas des universelles, celui représentant le sujet est à l'intérieur de celui représentant le prédicat pour les affirmatives, à l'extérieur pour les négatives. Le cas des particulières pose problème : alors qu'on devrait pouvoir distinguer l'affirmative de la négative, le diagramme est le même, avec deux cercles ayant une intersection commune. Il faut pourtant un moyen de figurer la différence, ce à quoi Euler est parvenu de manière peu satisfaisante. Un syllogisme comptant trois termes, il a examiné toutes les combinaisons possibles des trois cercles correspondants, ce qui permet en principe de visualiser chaque mode syllogistique (figure 4), en se conformant à deux règles simples : 1) « tout ce qui dans le contenu est aussi dans le contenant » 2) « tout ce qui est hors du contenant est aussi hors du contenu ».

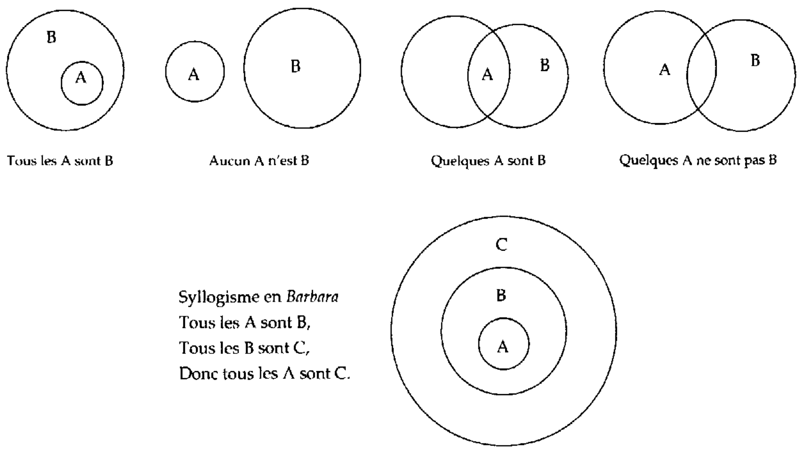


Figure 4. Cercles d'Euler

Euler n'a donc pas réformé la logique aristotélicienne, mais tâché de représenter géométriquement le raisonnement. L'idée sera ultérieurement améliorée et ouvre la voie à la « tradition diagrammatique » en logique.

Le mathématicien français Joseph Gergonne, qui s'est aussi intéressé aux diagrammes logiques et a plaidé pour la naissance d'une logique symbolique, est célèbre pour avoir introduit, en 1818, l'idée de définition *implicite*, qu'on retrouve au XX^{e} siècle avec la méthode axiomatique. Par une définition *explicite*, ou ordinaire, un terme inconnu est introduit à la place d'une expression complexe connue, comme Pascal et Port-Royal l'ont expliqué : par exemple, « diagonale » pour « droite qui joint les sommets opposés d'un quadrilatère ». La définition implicite est fondée sur l'idée de *relation* au sens large, et non plus de seule identité. Dans un exemple donné par Gergonne, si on sait ce que sont un triangle et un quadrilatère, on donnera une définition implicite de la diagonale en disant qu'elle partage le quadrilatère en deux triangles égaux. Gergonne ayant eu l'idée, présente chez Leibniz et plus tard chez Boole, de la pluralité des *interprétations* possibles d'une proposition mathématique, il apparaît comme une référence pour les tenants du formalisme en logique et en mathématiques.

Pour diverses raisons, les travaux de Bernard Bolzano, philosophe et mathématicien pragois de langue allemande, n'ont guère été remarqués par ses contemporains. Mais grâce à la découverte, parfois récente, des multiples manuscrits qu'il a laissés, il apparaît aujourd'hui comme un penseur très moderne, proche de Frege : comme lui, il fit de la logique une discipline autonome en même temps qu'il lui demanda de servir à fonder la mathématique. Dès 1810, dans *Contributions à un exposé mieux fondé de la mathématique*, il projette de bâtir l'ensemble des mathématiques sur une logique rénovée. Sur les définitions, Bolzano reprend l'idée, chère à Pascal et à la logique de Port-Royal, qu'il faut privilégier les définitions nominales et qu'on ne peut tout définir. Mais sa conclusion diffère, car il refuse le critère d'évidence : dans le cas d'un terme « premier », il faut s'en tenir à ce qu'il appelle une *explication* ou *entente sur le sens*, grâce à laquelle chacun est supposé lui donner la même signification par son usage dans diverses combinaisons.

Exposée pour la première fois au début des années 1810 mais sans publication immédiate, puis transformée dans les années 1830 dans *De la méthode mathématique* et *Théorie de la science*, la logique de Bolzano n'a pour objet ni le jugement, qui relève de la psychologie, ni son expression, qui relève de la grammaire, mais la *proposition en soi* ou *proposition objective*, et ce qui la compose, les *représentations en soi* :

> Ce que j'entends par *propositions*, écrit Bolzano, on le saisira en faisant remarquer que, pour moi, il ne s'agit pas de ce que les grammairiens appellent proposition, à savoir l'expression du langage, mais uniquement du *sens* de cette expression, lequel, nécessairement et toujours, ne peut être que vrai ou faux : je l'appelle *proposition en soi* ou *proposition objective*.

Pour Bolzano, une proposition est donc le contenu d'une phrase, écrite, dite ou pensée, contenu indépendant du fait que cette phrase soit écrite, dite ou pensée. Cela correspond à ce qui demeure invariant par traduction, paraphrase ou transformation grammaticale : « 2 + 2 = 4 » et « deux et deux font quatre » expriment la même proposition, tout comme « Brutus a tué Jules César », « Jules César a été tué par Brutus » et « Brutus killed Caesar ». La logique de Bolzano, contrairement à celle de la tradition, part donc de la *proposition*, susceptible d'être vraie ou fausse, et non du terme, du concept ou de l'idée.

La proposition (en soi) est composée de *représentations* (en soi). Bolzano ayant reconnu que le choix de ce dernier terme était malheureux, on lui préfèrera le mot « concept », comme il le fait lui-même parfois. Dans « Dieu a l'omniscience » – Bolzano dit « A a B » plutôt que « A est B[1] » –, la proposition est composée de trois représentations : « Dieu », « a » et « omniscience ». Une représentation n'est ni vraie ni fausse, mais peut être vide, comme « montagne d'or » ou « carré rond ». Auteur par ailleurs d'une *doctrine des ensembles*, Bolzano associe à chaque représentation son *extension*, à savoir, dit-il, « la collection de tous les objets qu'elle subsume », c'est-à-dire des objets qui satisfont à cette représentation : par exemple, la représentation « habitant de Prague » a pour extension la totalité des habitants de Prague. Deux représentations A et B sont susceptibles de diverses relations : lorsqu'un ou plusieurs objets sont subsumés sous A et sous B, A et B sont *compatibles* ; lorsque tout objet de A est subsumé sous B, A est *incluse* dans B ; lorsque la relation d'inclusion est réciproque, A et B sont *équivalentes* ; lorsque deux représentations sont compatibles sans que l'une soit incluse dans l'autre, elles ont une *intersection*. Ce traitement extensionnel des représentations a conduit Bolzano à une logique des classes, où apparaît la classe universelle, définie comme l'extension de la représentation « identique à soi-même » et dont il suspecta un temps le caractère contradictoire. Niant qu'une collection puisse contenir moins de deux objets, Bolzano a ignoré la classe vide et les classes ne comptant qu'un seul individu.

Apparaît ainsi une correspondance entre représentation et proposition, logique des classes et logique des propositions. Mais pour Bolzano, c'est de la logique des propositions que dérive celle des classes, car c'est en étudiant les différentes combinaisons entre propositions qu'il développe sa logique, utilisant ce qu'on appelle la « méthode de la variation ». Il a ainsi été le premier à proposer une véritable analyse de la notion de *forme*, ou *fonction*, *propositionnelle* : selon la définition de Bolzano, qui l'assimile à une proposition, une forme propositionnelle est une proposition où une ou plusieurs représentations sont considérées comme variables ; selon la définition actuelle, une fonction propositionnelle est une expression contenant

1. « A a B » signifie que l'objet A possède la propriété B. L'exemple « Dieu a l'omniscience », comme ceux qui suivent, est emprunté à Bolzano.

une ou des variables d'individus et qui ne devient une proposition que quand on substitue à cette ou ces variables un ou des individus. Différents cas sont possibles, selon le résultat de la substitution. Par exemple, substituer « Platon » à « Socrate » dans la proposition « Socrate est un homme » lui conserve sa vérité, mais substituer « Zeus » à « Socrate » la rend fausse. La substitution peut aussi affecter la représentation « homme », auquel cas « Socrate est un dieu » donne une proposition fausse.

Le cas particulier d'une proposition telle que toutes les substitutions permises pour une certaine représentation donnent une proposition vraie permet à Bolzano d'introduire la notion de *validité universelle*, que la logique actuelle a reformulée. « L'homme Cajus est mortel » est une proposition, ou forme propositionnelle, universellement valide pour la représentation « Cajus », sous réserve, puisque Bolzano n'autorise à remplacer un constituant d'une proposition que par un constituant appartenant à la même classe, de ne substituer à *Cajus* que des hommes. Chez Bolzano, la notion de vérité logique coïncide avec ce qu'il appelle *analyticité logique* : une forme est « logiquement analytique » si toutes les substitutions possibles pour les représentations non logiques donnent des propositions vraies. Une telle forme est une loi logique, dont Bolzano donne quelques exemples : « A est A », « A qui est B est A », « Tout objet est B ou non-B ».

La méthode de la variation permet à Bolzano d'introduire une autre notion de la logique actuelle, qu'il l'appelle *déductibilité* :

> Les propositions M, N, O, ... sont *déductibles* des propositions A, B, C, D, ..., à l'égard des parties variables ***i***, ***j***, ..., si toute collection de représentations qui, à la place des ***i***, ***j***, ..., rend vraies toutes les propositions A, B, C, D, ..., rend vraies aussi toutes les propositions M, N, O, ...

Par exemple, explique Bolzano, la proposition « Tous les ***i*** sont ***k*** » est déductible des propositions « Tous les ***i*** sont ***j*** » et « Tous les ***j*** sont ***k*** », « relativement aux parties variables ***i***, ***j***, ***k*** ». Il ajoute que la relation de déductibilité, plus large que celle à l'œuvre en syllogistique, est habituellement exprimée par « la locution *si,... alors* ». L'idée bolzanienne de déductibilité sera reformulée au XX^e^ siècle par Tarski, sous le nom de *conséquence logique*.

Malgré la profondeur de certaines de ses analyses, qu'on retrouve chez quelques grands logiciens des XIX^e^ et XX^e^ siècles, la pensée logique de Bolzano trouve ses limites dans une complexité souvent rebutante, dans l'absence d'un calcul logique et d'une langue artificielle aptes à faciliter l'élaboration d'une véritable logique symbolique. Bolzano est un « moderne », mais moins par ses réalisations « techniques » que par son approche de la discipline. Et comme il a travaillé dans un contexte peu favorable à la reconnaissance de son travail, on comprend que les mathématiciens et logiciens ultérieurs l'aient longtemps ignoré.

II. LOGIQUE ET PHILOSOPHIE

Les philosophes aussi se sont intéressés à la logique, avec, pour certains, un point de vue intéressant. Le plus célèbre est Emmanuel Kant, qui écrit imprudemment en 1787 que « depuis Aristote, [la logique] n'a pu faire un seul pas en avant, et qu'ainsi, selon toute apparence, elle semble close et achevée ». Les conceptions philosophiques de Kant sont pourtant remarquables, mais elles seront l'objet de nombreuses objections de la part des logiciens, Bolzano et Frege notamment. Un autre courant, lui aussi très contesté par ces derniers, a fait se rencontrer logique, psychologie et théorie de la connaissance. Le philosophe et économiste anglais John Stuart Mill défendit l'idée que la logique formelle ne saurait suffire à valider un raisonnement. Il expliqua que ce dernier va du fait au fait et critiqua le syllogisme. « Socrate est mortel » n'est pas pour lui la conclusion d'un syllogisme dont une prémisse serait « Tous les hommes sont mortels » : d'une part, celle-ci est en réalité invérifiable et ne peut être vraie que si la conclusion l'est aussi ; d'autre part, que Socrate soit mort est un fait. Mill tira de son empirisme deux conséquences pour la logique : qu'elle est fondée sur des règles à respecter pour passer de l'énoncé d'un fait à celui d'un autre fait et qu'une vérité générale n'est que la réunion de vérités particulières. Au contraire de Mill, William Hamilton voyait la logique comme « une science formelle » et il eut l'idée, après George Bentham en 1827, de quantifier, non seulement sur le sujet, mais aussi sur le prédicat[1]. C'est ainsi qu'une proposition comme « Tous les hommes sont quelques mortels », non retenue par Aristote, fait partie des huit types de propositions de la logique d'Hamilton.

Plus intéressante sans doute est la réflexion menée sur la nature existentielle des propositions, en particulier des affirmatives universelles. Pour la logique actuelle, la proposition « Quelque A est B » affirme l'existence d'au moins un sujet ayant les attributs A et B (dans « Quelques hommes sont médecins », il est entendu qu'un homme existe qui est médecin), tandis que l'affirmative universelle ne suppose rien de tel : « Tout A est B » affirme simplement que si un sujet quelconque possède la propriété A – rien ne dit qu'il existe –, il possède aussi la propriété B (« Tous les hommes sont mortels » signifie que *si* quelqu'un *est* un homme, il est mortel). En général, pour la tradition remontant à Aristote, il était admis, notamment du fait de l'usage du verbe *être* comme copule, que l'affirmative universelle a une portée existentielle. Au XIX[e] siècle, Johann Friedrich Herbart, qui soutenait la thèse du caractère essentiellement hypothétique des jugements, était d'avis que ceux-ci expriment simplement une relation entre un sujet et un prédicat, et rien sur l'existence du premier. Pour Franz Brentano au contraire, toutes les propositions disent quelque chose de l'existence de leur sujet, l'affirmant ou la niant, et sont donc

1. Le logicien William Hamilton n'a rien à voir avec son homonyme mathématicien.

des existentielles : « Quelque homme est malade » veut dire qu'*il y a* un homme malade, « Quelque homme n'est pas savant » qu'*il y a* un homme non savant et « Tous les hommes sont mortels » qu'*il n'y a pas* d'homme non mortel. Brentano tira de ces analyses une réforme complète de la logique, la liant à la psychologie dans un esprit étranger à la logique mathématique alors naissante.

Durant la seconde moitié du XIXe siècle en effet, les deux courants, celui liant la logique à la philosophie et celui la liant à la mathématique, se séparèrent nettement. À l'intérieur du premier, l'antipsychologisme de Kant et Herbart inspira Hermann Lotze, cependant que la logique psychologique se développa, en réaction contre l'idéalisme kantien. Edmund Husserl appartint un temps à cette dernière voie, avant de s'y opposer grâce à Frege : tous deux, qui étaient de vrais mathématiciens, insistèrent sur le caractère objectif et non empirique des lois de la logique et sur la différence entre le contenu, vrai ou faux, d'un jugement et l'acte de juger, qui est un événement psychique.

III. ALGÈBRE DE LA LOGIQUE ET CALCUL DES CLASSES

L'algèbre de la logique en tant que *système* est née au milieu du XIXe siècle avec les travaux de George Boole. Comme la notion de classe y domine celle de proposition, nous insisterons sur l'aspect extensionnel de la logique de Boole et de ses successeurs. Boole est un mathématicien anglais qui s'est formé à la discipline en dehors de l'université et l'y a ensuite enseigné sans jamais posséder de titre universitaire. Il appartient à l'école algébrique anglaise de la première moitié du XIXe siècle dont tous les membres avaient en commun de voir l'algèbre moins comme une théorie des équations dont les solutions sont des nombres que comme une discipline formelle traitant de symboles sur lesquels on peut opérer conformément à des règles. En Angleterre, la question de savoir si la connaissance est fondée sur les mathématiques ou la logique était alors débattue, d'où un regain d'intérêt pour cette dernière, qui amena Boole à penser que les relations logiques pouvaient trouver une expression algébrique.

Une autre source de la rencontre entre logique et algèbre se trouve dans deux idées présentes chez des logiciens anglais de la première moitié du XIXe siècle : celle de *quantification du prédicat*, due à Bentham et Hamilton, on l'a vu, ainsi qu'à De Morgan ; et celle d'*univers du discours*, due à ce dernier. Ayant posé qu'un terme négatif comme « non-homme » est indéfini, la tradition aristotélicienne faisait porter la négation exclusivement sur la copule. L'univers du discours fixant le domaine de ce dont on parle, une autre possibilité voit le jour, car le terme positif et le terme négatif partagent cet univers en deux classes disjointes et complémentaires, symétriquement définies. Par exemple, si l'univers du discours est la classe des animaux, le terme « non-homme » désigne celle des animaux non humains. Il devient alors possible de faire porter la négation sur le prédicat. Par ailleurs, tandis que la tradition aristotélicienne distinguait les propositions universelles, particulières et singulières en ne quantifiant que sur le sujet, la réforme proposée permet de le faire également sur le prédicat, de façon à obtenir des propositions telles que « Tous les hommes sont quelques mortels ». Cette formulation fait d'une attribution une identité et donne à la proposition la forme d'une équation : « Tous les hommes = quelques mortels ». De même pour les négatives : ainsi, dans un exemple dû à Richard Whately, dont Boole fut un lecteur attentif, « Des membres de l'université ne sont pas savants » devient « Quelques membres de l'université sont quelques non-savants », proposition qui a, elle aussi, la forme d'une équation.

A. Boole et l'algèbre de la logique

On le voit, le travail de Boole doit beaucoup à un contexte. C'est dans *L'Analyse mathématique de la logique* de 1847 et, surtout, *Les lois de la pensée* de 1854, qu'il a exposé ce qu'il tenait lui-même pour un nouveau « système » logique. Dès le début du premier ouvrage, Boole rompt avec la tradition, affirmant que « la logique n'a rien à voir avec la philosophie » et qu'il faut l'« associer aux mathématiques ». Il retient de celles-ci, et en particulier de l'algèbre, ce qui est essentiel à ses yeux, à savoir qu'on y combine des symboles dont on peut ne donner la signification qu'à la fin du calcul :

> Ceux qui sont au fait de l'état actuel de la théorie de l'Algèbre Symbolique sont conscients que la validité des processus d'analyse ne dépend pas de l'interprétation des symboles qui sont employés, mais seulement des lois de leur combinaison. Chaque système d'interprétation qui ne modifie pas la vérité de la relation supposée est également admissible.

Dès lors, ajoute Boole en 1854, « il n'est pas de l'essence des mathématiques de s'occuper des idées de nombre et de quantité ». Voyant une « étroite analogie entre les opérations de l'esprit dans le raisonnement en général et celles qu'il mène dans l'algèbre », Boole veut montrer que nous raisonnons conformément à des lois qui sont celles de l'algèbre et, reprenant l'idée leibnizienne de *calculus ratiocinator* sans lui associer celle de caractéristique universelle, il entend appliquer à la logique le calcul algébrique, considéré comme purement formel. Il est ainsi le premier à avoir vraiment mathématisé la logique.

En 1847, Boole se contenta d'exprimer symboliquement les propositions et syllogismes de la logique aristotélicienne. En 1854, il fut plus ambitieux en se donnant pour tâche de formuler mathématiquement les procédures du raisonnement humain, dont le langage, fait de signes arbitraires, est, disait-il, l'« instrument ». Il examina alors comment fonctionne l'esprit humain, puis énonça indépendamment d'un quelconque sujet pensant, donc sans adopter le psychologisme ou l'empirisme d'un Mill, les lois communes à l'algèbre et au raisonnement logique, les fameuses « lois de la pensée » :

> Toutes les opérations du langage en tant qu'instrument du raisonnement, écrit Boole, peuvent se conduire dans un système de signes composé des éléments suivants :
>
> 1. des symboles littéraux, tels que x, y, etc., représentant les choses en tant qu'objets de nos conceptions ;
> 2. des signes d'opérations, tels que +, −, ×, représentant les opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou séparées de manière à former de nouvelles conceptions comprenant les mêmes éléments ;
> 3. le signe d'*identité*, =.
>
> Et ces symboles voient leur usage soumis à des lois déterminées, qui en partie s'accordent et en partie ne s'accordent pas avec les lois des symboles correspondants dans la science de l'algèbre.

1. Boole et la logique des classes

Le fait de ne retenir, avec le signe =, qu'une seule des fonctions de la copule aristotélicienne, l'identité, fait de la logique de Boole une logique extensionnelle où chaque raisonnement élémentaire est exprimé, comme en algèbre, par une équation. Les symboles du premier groupe se prêtant aisément à une interprétation en termes de classes, ce que Boole fait spontanément, ceux du second correspondent aux opérations sur les classes. Le tableau ci-dessous met en évidence les analogies entre quelques-unes des *lois* de l'algèbre et quelques-unes des *lois* de la logique :

Lois de l'algèbre	Traduction logique
$xy = yx$	moutons blancs = blancs moutons
$x + y = y + x$	hommes et femmes = femmes et hommes
$z(x + y) = zx + zy$	les Européens (hommes et femmes) = les Européens hommes et les Européens femmes
$z(x - y) = zx - zy$	les Européens (les hommes, mais non les femmes) = les Européens hommes, mais non les Européens femmes
$(x = y + z) = (x - z = y)$	les astres sont les soleils et les planètes = les astres, excepté les planètes, sont les soleils.

Mais comme le souligne Boole à plusieurs reprises, il n'y a pas « équivalence exacte » entre lois de l'algèbre et lois de la logique, de sorte que l'analogie entre algèbre et logique est imparfaite. En particulier, on a toujours, en logique, $x^2 = x$. Par exemple, si x désigne la classe des chevaux, xx, ou x^2, qui désigne la classe des chevaux qui sont des chevaux, désigne aussi la classe des chevaux. En algèbre, cette égalité ne vaut que pour deux nombres, 0 et 1, les solutions de l'équation $x^2 = x$, ou $x(1 - x) = 0$. L'algèbre de la logique de Boole est donc une algèbre spéciale, *binaire*, où les seules valeurs numériques possibles sont 0 et 1. Reste à établir les lois de cette algèbre et à trouver une interprétation logique acceptable pour 0 et pour 1.

Le premier point nous emmènerait trop loin. L'algèbre de la logique de Boole satisfait à la plupart des lois de l'algèbre ordinaire, comme le montre le tableau ci-dessus : commutativité de la multiplication et de l'addition, distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction, règle sur le « changement de membre » dans une équation algébrique, etc. Elle s'en distingue en particulier par la loi d'*idempotence* : $x^2 = x$.

Sur le second point, Boole a emprunté à son collègue et ami De Morgan l'idée d'*univers du discours* – l'expression est de Boole – qu'il désigne par 1 et appelle « Tout », et qui représente la classe universelle, c'est-à-dire la totalité des êtres. Le signe 0 représente alors la classe vide, dite « Rien » : la nouveauté était considérable, puisque c'est la première fois que la logique extensionnelle prenait explicitement en compte la classe vide. Il en résulte que si x désigne une classe d'objets appartenant à l'univers du discours, $1 - x$ désigne la classe des objets qui n'appartiennent pas à x, c'est-à-dire son complémentaire[1]. Boole était d'ailleurs convaincu que l'homme a la faculté de « séparer mentalement » les objets qui appartiennent à une classe et ceux qui ne lui appartiennent pas. Par exemple, si l'univers du discours est la classe des animaux et si v désigne celle des vertébrés, $1 - v$ désigne celle des invertébrés, ou animaux sans squelette. On vérifie que $v + (1 - v) = 1$, c'est-à-dire que l'union des vertébrés et des invertébrés est l'univers du discours, et que $v \times (1 - v) = 0$, c'est-à-dire que les classes des vertébrés et des invertébrés sont mutuellement exclusives.

Les formules ci-dessus valent évidemment pour toute classe, et les lois suivantes sont des lois de l'algèbre de la logique de Boole : $x + (1 - x) = 1$ et $x \times (1 - x) = 0$. La seconde est une forme du *principe de contradiction* : l'intersection de la classe des x et de la classe des non-x est vide (on ne peut à la fois être x et non-x). Ainsi se développe une logique des classes, où le principe de contradiction découle de la loi d'idempotence. Dans cette interprétation, + symbolise la réunion de deux classes disjointes, × leur intersection et = leur égalité. Le signe – permet le passage d'une

1. Il serait plus exact de dire que la classe X (ou classe des X) est désignée par le symbole x, qui sélectionne, dans l'univers du discours, les individus qui appartiennent à (ou sont des) X, mais Boole ne maintient pas toujours la distinction.

classe à son complémentaire. L'algèbre de la logique de Boole se prête idéalement à cette interprétation extensionnelle, où on combine des symboles pour obtenir des équations algébriques qu'on résout formellement, c'est-à-dire conformément aux lois de l'algèbre de Boole, et dont on peut ensuite interpréter les solutions en termes de classes (encadré). Une telle procédure permet d'examiner toutes les combinaisons possibles, de sorte qu'on peut, pour un syllogisme, tirer des prémisses toutes les conclusions compatibles avec celle retenue par la logique traditionnelle.

Soit le syllogisme :

(1) *Aucun dieu n'est mortel,*

(2) *Tous les hommes sont mortels,*

(3) *Donc Aucun dieu n'est un homme* ou *Aucun homme n'est un dieu.*

Dans ce qui suit, x désigne la classe des X (les dieux), y la classe des Y (les mortels) et z la classe des Z (les hommes) :

(1) $xy = 0$: la classe des individus qui sont à la fois X (dieux) et Y (mortels) est vide.

(2) $z(1 - y) = 0$: la classe des individus qui sont Z (hommes) sans être Y (mortels) est vide.

(3) De (1) et (2), on déduit, par des lois de l'algèbre de Boole : [$xy = 0$, d'où $y = 1 - x$, d'où $1 - y = x$, d'où $z(1 - y) = zx = 0$] : $xz = zx = 0$.

La classe des individus qui sont à la fois X (dieux) et Z (hommes) est vide.

Mais le calcul abstrait qu'est l'algèbre de la logique de Boole se prête, comme lui-même l'a remarqué, à une interprétation autre que celle qui en fait un calcul des classes : celle où x, y, z représentent des propositions. Les signes + et $\times$ désignent alors respectivement la disjonction exclusive et la conjonction, le signe – correspondant à la négation du prédicat, 1 et 0 étant les deux seules valeurs possibles pour des propositions, à savoir le Vrai et le Faux. $x^2 = x$ est alors une loi de la logique des propositions : $x \wedge x = x$ (x symbolise une proposition quelconque p). Par exemple, si x et y désignent respectivement deux propositions p et q, l'équation $x(1 - y) + y(1 - x) = 1$ signifie que soit p, soit q est vraie, mais pas les deux.

Boole a ainsi mis en évidence ce que Leibniz n'avait fait que suggérer, à savoir l'*isomorphisme* entre calcul des classes et calcul des propositions : lui-même a souligné cette analogie formelle qui fait que les deux calculs ne diffèrent que par l'interprétation qu'on donne aux symboles. Mais cette correspondance fonctionne moins bien dès lors qu'il faut quantifier sur le sujet et le prédicat d'une proposition. Son traitement de la logique obligea en effet Boole, pour éviter le symbole non algébrique $\neq$, à introduire un opérateur auxiliaire, noté v, pour exprimer

« quelques »[1]. En simplifiant une théorie qui se complique alors, « Tous les X sont quelques (ou des) Y », « Quelques X sont quelques (ou des) Y », « Quelques non-X sont quelques (ou des) non-Y » sont les interprétations respectives des équations $x = vy$, $vx = vy$ et $v(1 - x) = v(1 - y)$.

2. Sur quelques difficultés de la logique de Boole

Avec ce calcul abstrait dont il tire *une* logique des classes, Boole a rencontré plusieurs problèmes. Le premier est celui du symbole v, dont la nature est imprécise. Il satisfait à la loi d'idempotence et désigne une classe indéterminée ou, plus exactement, un « sélecteur » indiquant qu'est retenue une quantité *indéterminée* des individus de la classe auquel il est accolé : si x désigne la classe X, vx désigne une classe contenant *un*, *plusieurs* ou *tous* les individus de X. On pourrait l'assimiler à un *quantificateur*, mais pas au sens de la logique actuelle, puisqu'il est lié à la classe auquel il est accolé et ne signifie ni « pour tout » ni « il existe ». Autre difficulté, en logique des propositions cette fois, le + de Boole exprime la disjonction *exclusive*, qui correspond bien à l'addition numérique, mais pas à la somme logique, le *ou* inclusif s'accordant mieux avec le *et* du produit logique. Quant à son –, il ne symbolise pas parfaitement la négation, qui porte sur la proposition tout entière et non sur le seul prédicat. On ne trouvera pas non plus en logique l'équivalent de la division en algèbre. L'attachement de Boole à cette dernière l'a en un sens éloigné de la logique et empêché de concevoir l'articulation entre calcul propositionnel et calcul des prédicats, comme c'est le cas depuis Frege.

Ces difficultés mettent en évidence un défaut du calcul logique de Boole : l'adéquation entre démarches *algébrique* et *logique* est contestable car imparfaite, notamment parce qu'elle privilégie la notion de classe au détriment de celle de proposition. Boole prétendait développer une théorie générale du raisonnement déductif, mais son algèbre ne représente pas toute la logique élémentaire. Elle est efficace pour résoudre des problèmes plus complexes que ceux de la logique aristotélicienne mais est plus un instrument *pour* la logique qu'*une* logique. L'approche algébrique, dont Boole salua l'idéal de symétrie, nie en effet une caractéristique fondamentale de la logique, non conforme à cet idéal : elle est faite d'*inférences* ou de *déductions*, non d'*équations*.

Ces quelques critiques ne doivent pas faire oublier l'apport considérable de Boole : il a montré que la syllogistique n'est pas toute la logique et inventé la logique *formelle* et *mathématique*, avec des idées dont certaines seront reprises au XX^e^ siècle. Sa contribution à l'informatique n'est pas moindre. L'un des fondateurs de la discipline, John Von Neumann, a emprunté à l'algèbre de Boole le traitement

1. Pour « Quelques x sont des y », il faudrait écrire $xy \neq 0$.

binaire des données et du découpage des calculs, à partir de l'idée que le cerveau fonctionne de cette manière. Et depuis leur axiomatisation au début du XX^{e} siècle, *les* algèbres de Boole constituent des structures mathématiques couramment utilisées en informatique. La théorie de l'information a également recours à ces structures, particulièrement bien adaptées aux montages électroniques, avec 1 pour « le courant passe » et 0 pour « le courant ne passe pas ».

B. Un successeur de Boole : Jevons

Les idées de Boole n'ont pas bénéficié d'une reconnaissance immédiate. Pendant un temps, la syllogistique et l'absence de traitement formel de la logique ont continué de dominer en Angleterre. L'économiste anglais William Stanley Jevons fut le premier, en 1864, à discuter de l'algèbre de la logique de Boole et à y apporter quelques aménagements. On peut en faire un successeur de ce dernier, même s'il lui reprocha d'avoir asservi la logique aux mathématiques en construisant un système artificiel qui ne rend pas authentiquement compte des opérations de la pensée. Il nota en particulier que rien en logique ne correspond à l'addition ou à la soustraction de l'algèbre et que le système de Boole est incompatible avec une loi de la pensée, pourtant évidente selon Jevons, à savoir l'idempotence de +, soit $x + x = x$.

Jevons considérait aussi que l'usage du *ou* exclusif, induit par l'addition numérique, est dommageable pour la logique, avec un argument qu'on peut présenter de la façon suivante. Soient 7 logiciens et 5 mathématiciens : leur « addition » ne fait 12 personnes que si aucune n'est à la fois logicien et mathématicien, ce que la logique n'interdit nullement. La condition d'exclusivité est indispensable à l'arithmétique, entre autres parce qu'elle permet de passer de $z = x + y$ à $x = z - y$, mais nuisible en logique, où la disjonction doit avoir la forme du *ou* inclusif : ce traitement de la disjonction, qui distingue la logique de la mathématique, sépare le système logique de Jevons de celui de Boole. Mill et Whately déjà admettaient que la disjonction inclusive s'accorde mieux avec la langue que sa forme exclusive. L'adopter implique d'ajouter à l'idempotence de $\times$ celle de +, qui ne vaut en mathématiques que pour 0 et était nécessairement absente chez Boole qui ne réunissait que des classes disjointes.

Ses critiques n'empêchèrent pas Jevons de soumettre lui aussi la logique à un traitement mathématique, mais excluant toute considération numérique. Admettant comme Boole qu'un calcul logique ne peut être mené qu'à l'aide d'égalités, il développa sa propre algèbre de la logique, dont rien n'a survécu dans la logique actuelle. Son grand mérite est d'avoir orienté les logiciens vers le *ou* inclusif, alors que la tendance opposée dominait depuis l'Antiquité.

C. Les diagrammes logiques

L'œuvre de Jevons fut à son tour sévèrement critiquée par John Venn, très attaché à l'inspiration mathématique du travail de Boole et à sa logique des classes. Contre Jevons, il en conserva l'interprétation exclusive de la somme logique, au nom de ce qu'elle préserve les opérations inverses de l'addition et de la multiplication. On lui doit aussi d'avoir systématiquement considéré les propositions de manière existentielle, à partir d'une conception extensionnelle de la logique et de cette question sur les universelles : la proposition « Tous les x sont y », selon laquelle la classe X des x est incluse dans celle Y des y, affirme-t-elle implicitement qu'il existe des x, c'est-à-dire que la classe X n'est pas vide[1] ? Le langage usuel le laisse entendre, la logique traditionnelle aussi, qui a admis la relation de subalternation. Pour Venn, et pour la logique actuelle, l'affirmative universelle est une proposition hypothétique, qui dit simplement que *si* il existe des x, ces x sont également y : par exemple, « Les dieux sont immortels » affirme que « S'il existe des dieux, ils sont immortels », mais ne dit pas que les dieux existent. Avec cette interprétation, la subalternation ne vaut plus et le carré logique d'Apulée devient obsolète. Cela conduisit Venn à privilégier non pas la forme affirmative de l'universelle, mais sa forme négative correspondante. Dire « Tous les x sont y », c'est dire qu'il n'existe rien qui soit à la fois x et non-y, ou que l'intersection $X \cap \overline{Y}$ de la classe X des x et de la classe $\overline{Y}$ des non-y est vide : c'est la seule certitude qu'on ait quant à une question d'existence.

Cette interprétation a l'avantage de se prêter au mieux à ce qui fait la célébrité de Venn depuis sa *Logique symbolique* de 1881, la représentation des opérations logiques par des *diagrammes*, qui portent aujourd'hui son nom et sont utilisés en logique des prédicats et en théorie élémentaire des ensembles. Euler avait eu l'idée de représenter les propositions et syllogismes aristotéliciens à l'aide de cercles, mais les diagrammes de Venn les améliorent sensiblement car, plutôt que de ne figurer que les relations entre classes données par le problème, ils prennent en compte toutes les combinaisons possibles, celles correspondant au problème recevant une marque distinctive. Il y a cependant deux écueils dont Venn avait conscience : la difficulté à trouver une marque distinctive adéquate pour les propositions particulières et la lisibilité, qui diminue à mesure qu'augmente le nombre des termes entrant dans le raisonnement. Dans le cas de n termes (x, y, z, ...), représentés par n classes (X, Y, Z, ...), il y a 2^n possibilités pour la relation entre deux de ces termes (x et y,

1. Dans ce qui suit, nous utilisons des majuscules pour distinguer la classe des individus qu'elle contient, et le symbole $\cap$ d'intersection. Venn parle de la classe x des x, xy désignant la classe des x qui sont aussi des y.

x et non-y, x et z, x et non-z, ...), donc 2^n « compartiments », ou intersections entre deux des n classes ($X \cap Y, X \cap \overline{Y}, X \cap Z, X \cap \overline{Z}, \ldots$). Pour quatre termes, comme dans l'exemple ci-dessous, il y a donc $2^4 = 16$ compartiments à figurer.

Soit à résoudre le problème dont les prémisses sont les suivantes :

(1) Tous les x sont ou bien à la fois y et z, ou bien non-y,
(2) Tous les x et y qui sont z sont aussi w,
(3) Aucun w et x n'est à la fois y et z.

Quel lien y a-t-il entre les x et les y ?

Étape 1. On construit quatre ellipses (on ne peut traiter par des cercles d'un problème à quatre termes) telles que toutes les intersections possibles soient figurées.

Étape 2. On met les prémisses sous la forme d'une existentielle négative :

(1) exclut tout xy qui n'est pas z,
(2) exclut tout xyz qui n'est pas w,
(3) exclut tout wx qui n'est pas y et z.

Étape 3. On transforme ces énoncés en intersections de classes donnant la classe vide :

(1) $X \cap Y \cap \overline{Z} = \varnothing$,
(2) $X \cap Y \cap Z \cap \overline{W} = \varnothing$,
(3) $W \cap X \cap \overline{Y \cap Z} = \varnothing$.

Étape 4. On hachure ces sous-classes, horizontalement pour (1), verticalement pour (2), obliquement pour (3).

D'où la figure suivante :

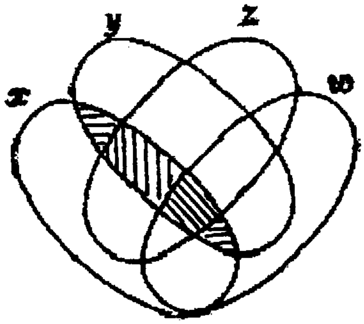


Figure 5. Diagrammes de Venn

Étape 5. On retient ce qui est hachuré, soit : $X \cap Y = \varnothing$.

La conclusion du problème, en termes existentiels, est donc « Il n'existe rien qui soit à la fois x et y », c'est-à-dire, en s'exprimant comme en logique traditionnelle : « Aucun x n'est y » (ou, ce qui revient au même, « Aucun y n'est x »).

L'un des grands avantages des diagrammes de Venn, qui réclament une grande dextérité logique, est leur simplicité, qui permet en particulier de traiter tous les syllogismes avec une seule figure de départ. Et ils autorisent à conclure, pour toute forme syllogistique, si elle est valide ou non, selon que le diagramme final est lisible ou non sans ambiguïté.

Certains auteurs ont un peu amélioré les diagrammes de Venn. Alexander Macfarlane, qui lui reprocha de ne pas représenter l'univers du discours, les entoura en 1885 d'un rectangle le figurant. Allan Marquand, qui avait fait la même objection, proposa en 1881 des diagrammes où l'univers du discours était représenté par un carré. Quant à Charles Sanders Peirce, dont nous reparlerons, il marqua d'une croix les compartiments correspondant à des propositions particulières, pour les distinguer de ceux qui sont vides, marqués d'un 0, et introduisit une convention supplémentaire pour représenter les disjonctives. Mais ce que ces diagrammes gagnaient en capacité d'information, ils le perdaient en facilité de visualisation.

À la même époque, d'autres diagrammes furent proposés, notamment sous forme de « matrices ». L'auteur le plus célèbre de ce genre de représentations est Charles L. Dodgson, plus connu sous son pseudonyme de Lewis Carroll, l'auteur d'*Alice au pays des merveilles*[1]. Intéressé par la logique toute sa vie, il publia en 1886 *Le jeu de la logique* et en 1896 la première partie d'une trilogie portant le même titre que l'ouvrage de Venn, *Logique symbolique*. Convaincu que la logique est utile, y compris dans la vie pratique, Carroll, qui signait ainsi ses ouvrages sur le sujet, voulut en faire une discipline distrayante qu'il faut populariser. Ce sera un échec de ce point de vue et ses travaux sont encore relativement méconnus.

Sur les propositions, Carroll fit comme ses prédécesseurs : il quantifia sur le prédicat et transforma les particulières négatives en affirmatives. Après avoir discuté de la portée existentielle des propositions, il jugea, comme Brentano et Venn, que toutes affirment ou nient l'existence de leur sujet. Mais contrairement à ce dernier, il ne fit pas des universelles des propositions hypothétiques. En 1896, il exposa une écriture symbolique indicielle qu'il utilisa pour résoudre des problèmes de logique, discutant alors des avantages et inconvénients de la version matérielle de l'implication.

Mais la logique de Carroll est avant tout une logique des classes à la figuration de laquelle il a travaillé. Comme Boole et Venn, il retint l'idée qu'il est toujours possible de séparer une classe donnée en deux sous-classes exclusives l'une de l'autre, et emprunta à De Morgan la notion d'univers du discours. Il put alors exposer un procédé de résolution de problèmes logiques par des *diagrammes* où, comme

1. Les quelques pages qui suivent sur Lewis Carroll doivent beaucoup aux travaux et aux remarques d'Amirouche Moktefi.

Venn, il représente d'abord les classes, puis les propositions. Il commence par figurer l'univers du discours par un carré, lui donnant une représentation close alors que Venn en faisait sciemment un espace indéfini. Il divise ensuite ce carré horizontalement pour obtenir les deux subdivisions x et non-x[1], avant de procéder, s'il y a un second terme, à une nouvelle division, verticale. Cela donne naissance à quatre sous-carrés ou cellules, qui correspondent aux sous-classes xy, xy', $x'y$, $x'y'$ (Carroll écrit x' pour non-x). On obtient ainsi ce que Carroll appelle un diagramme *bilittéral*, qu'il recommande de parfaitement mémoriser (figure 6.1).

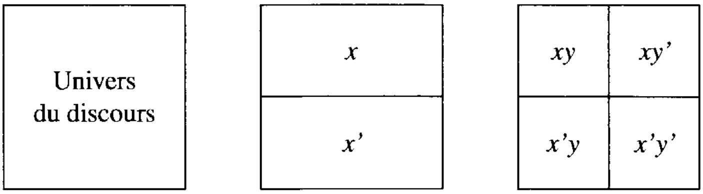
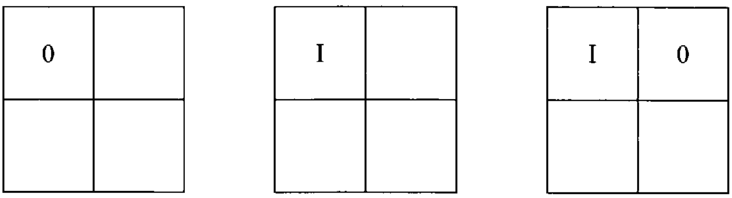


Figure 6.1 Diagramme bilittéral

Pour indiquer qu'une classe est vide, respectivement occupée, Carroll propose d'y placer un jeton gris, respectivement rouge, (dans ses livres, il y marque un 0, respectivement un I), la laissant sans indication lorsqu'on ne peut rien en dire. Lorsqu'un I se trouve sur la ligne séparant deux cellules, cela veut dire que l'une au moins des deux cellules est occupée, mais qu'on n'en sait pas davantage (figure 6.2).



Aucun x n'est y — Quelques x sont y — Tous les x sont y = Quelques x sont y et Aucun x n'est y

Figure 6.2 Marquage des cellules

1. En toute rigueur, x est une « qualité » qui caractérise ce que Carroll appelle la classe-x ou classe des x, c'est-à-dire la classe des individus de l'univers du discours qui possède la propriété x. On néglige ici cette distinction.

S'il y a un troisième terme (qu'il appelle m), Carroll insère un carré à l'intérieur de celui représentant l'univers du discours, d'où un diagramme comptant huit cellules qu'il appelle *trilittéral* (figure 6.3).

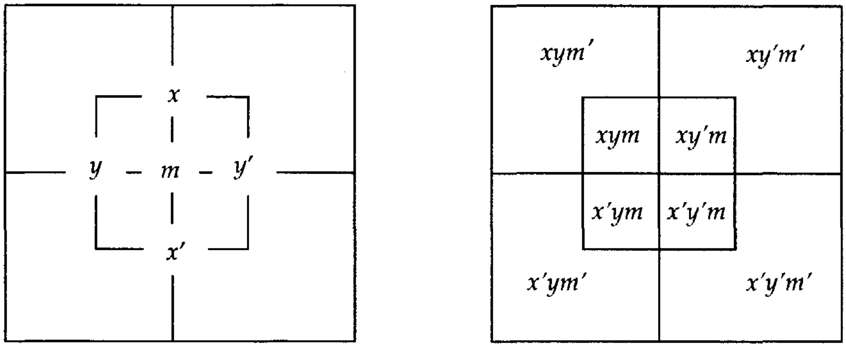


Figure 6.3 Diagramme trilittéral

Ces diagrammes trilittéraux permettent à Carroll de traiter des syllogismes :

Soit à déterminer la conclusion du syllogisme en *Barbara*, dont les prémisses sont (figure 6.4) :

(1) Tous les x sont m,

(2) Tous les m sont y.

Étape 1. On construit un diagramme trilittéral, dont on garde en mémoire ce que chaque cellule figure (figure 6.3).

Étape 2. On marque les cellules de la façon suivante :

(1) signifie que « Aucun x n'est non-m » et que « Quelques x sont m ». On place un 0 sur les cellules xym' et $xy'm'$ et un I sur la ligne séparant les cellules xym et $xy'm$.

(2) signifie que « Aucun m n'est non-y » et que « Quelques m sont y ». On place un 0 sur les cellules $xy'm$ et $x'y'm$ et un I sur la ligne séparant les cellules xym et $x'ym$.

Étape 3. On transforme le diagramme de façon à ne plus avoir de symbole à cheval sur deux cellules. Puisque, d'après (2), $xy'm$ est vide et que, d'après (1), l'une des deux cellules xym et $xy'm$ est occupée, la cellule xym est occupée, et on la marque d'un I, la cellule $x'ym$ devenant neutre.

Étape 4. On élimine m, transformant ainsi le diagramme trilittéral en diagramme bilittéral. Puisque la cellule xym est occupée, la cellule xy l'est aussi. Puisque les cellules $xy'm$ et $xy'm'$ sont vides, la cellule xy' l'est aussi. Les autres cellules sont neutres.

Étape 5. On lit la conclusion du syllogisme sur ce diagramme : « Tous les x sont y ».

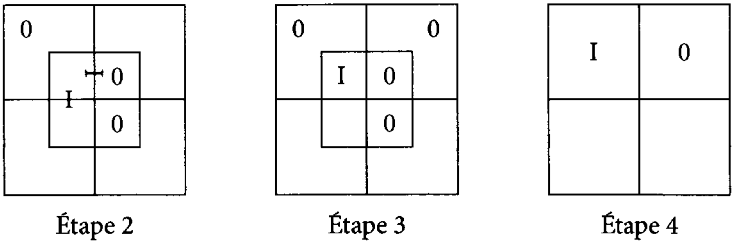


Figure 6.4 Syllogisme en *Barbara*

Il est évident que, comme chez Venn, ce genre de « calcul » exige une grande dextérité, qui augmente avec le nombre de termes du raisonnement : plus il est élevé, plus la figuration se complique, ce qu'ont en commun toutes les méthodes diagrammatiques. Carroll proposa des diagrammes très astucieux pour plus de trois termes, mais ne résolut en fait aucun problème de ce genre. Les diagrammes de Venn et de Carroll ne sont pas fondamentalement différents, d'autant que tous deux privilégient la forme syllogistique de l'inférence. Les seconds ont l'avantage d'avoir un univers du discours clos, de conserver la symétrie des classes mutuellement complémentaires et de permettre de lire la conclusion sur un diagramme de rang inférieur à celui du problème posé.

Pendant ce temps, Peirce remettait en cause certaines conceptions de ses prédécesseurs, en particulier de Venn. Dès 1870, dans un texte alors inédit, il rejeta la logique équationnelle, qu'il transforma en logique de l'inclusion[1], relation dont dérive celle d'identité : deux classes sont identiques si chacune inclut l'autre. Rejetant également les opérations arithmétiques et leurs inverses, il s'éloigna du calcul des classes de Boole dans les années 1880, au moment où d'autres choisissaient de privilégier la logique des propositions, et prépara la voie aux travaux de Schröder et de Whitehead.

D. La synthèse de Schröder et de Whitehead

Ernst Schröder, l'un des rares défenseurs en Allemagne de l'algèbre de la logique, expliqua dans divers travaux publiés dans les années 1870 que l'algèbre est un calcul abstrait dont une application est la logique, et particulièrement la logique des classes. Il travailla ensuite à ses *Leçons sur l'algèbre de la logique*, parues en trois volumes de 1890 à 1895, dont le dernier est inachevé, où il réforme le système de Boole grâce aux acquis de Peirce. La logique des propositions y est dépendante de

1. La relation d'inclusion est apparue chez Gergonne dès 1816.

celle des classes, à propos de laquelle Schröder part de l'idée, juste mais fondée sur un raisonnement en partie incorrect, que la « classe universelle » est contradictoire parce que trop vaste.

Pour y remédier, il donne, comme Peirce, le rôle de relation primitive non à l'égalité, mais à l'inclusion entre classes, qu'il nomme *subsomption*. Mais les conséquences qu'il en tire souffrent, entre autres, d'ignorer de fait la relation d'*appartenance*, qui lie un individu à une classe, en l'assimilant à celle d'inclusion, qui lie une classe à une autre classe. La distinction était pourtant apparue chez Peirce dès 1870 et était parfaitement claire chez Dedekind et plus encore chez Frege depuis les années 1880. Malgré les critiques de ce dernier et de Husserl, et le fait que deux signes distincts avaient été introduits par Peano en 1889, Schröder persista à conserver l'unique symbole qui désigne chez lui les deux relations. Cette confusion l'amena à identifier, comme Boole, l'individu à la classe réduite à cet élément, ce que la théorie des ensembles appelle un *singleton*.

Bien qu'il donne un même sens à l'inclusion et à la copule « *est* » de la logique des propositions, qu'elle lie un individu ou un concept à un prédicat, Schröder traite correctement des propositions particulières, ce que n'avaient pas fait Boole et ses successeurs. Incidemment, sa manière de restreindre la classe universelle à un univers du discours mieux déterminé l'amène à introduire quelques éléments présents quelques années plus tard dans la théorie des types de Russell. On lui doit aussi un programme de recherche sur les fondements des mathématiques utilisant sa propre écriture symbolique. Ce projet, « logiciste » en un sens différent de celui de Frege, n'est resté qu'à l'état d'ébauche, du fait du décès de Schröder.

Dans le même temps, le philosophe et mathématicien Alfred North Whitehead, qui s'inscrit dans la tradition algébriste anglaise, écrit en 1898, un *Traité sur l'algèbre générale*. Il y explique que différentes algèbres existent, selon les lois particulières qui les spécifient. Il distingue deux groupes, dont le premier contient, en plus de l'algèbre « classique », diverses algèbres spéciales nées au XIX^{e} siècle. Le second ne compte qu'une seule algèbre, l'algèbre de la logique, caractérisée par les lois $a + a = a$ et $a \times a = a$, et que Whitehead développe en reprenant les travaux de ses prédécesseurs. Il en ressort que l'algèbre de la logique n'est pas à proprement parler la logique, mais un calcul formel général et abstrait, dont deux interprétations, par des classes et par des propositions, appartiennent à la logique, et une troisième, par des régions dans l'espace, est utilisée par les tenants des diagrammes logiques. Mais tandis qu'il travaillait au second volume de son traité, il découvrit les *Principles of Mathematics* dont Russell préparait la suite[1]. Les deux auteurs décidèrent alors de collaborer pour les *Principia Mathematica*.

1. Pour éviter toute confusion avec l'ouvrage de Couturat, nous ne traduisons ni ici, ni par la suite, le titre anglais de celui de Russell.

Louis Couturat déplorait alors que la France n'eût en rien contribué aux progrès accomplis par la logique au XIXe siècle. Dans *Les principes des mathématiques* de 1905, où il expose les idées défendues par Russell dans les *Principles*, et notamment celle qui fait du calcul des propositions le fondement de la logique, il mentionne les travaux de Boole, de Peirce, de Schröder et de Whitehead sur l'algèbre de la logique. La même année, il présente les deux premiers volumes des *Leçons* de Schröder dans *L'algèbre de la logique*, ouvrage qui est comme le pendant du précédent. L'algèbre de la logique, axiomatisée par Edward Huntington en 1904 puis 1933, possède finalement un double aspect : en mathématiques, elle apparaît comme un calcul particulier ; en logique, elle vise à analyser le raisonnement en ses démarches élémentaires.

IV. LA LOGIQUE DES RELATIONS

A. De Morgan et la naissance de la logique des relations

Professeur de mathématiques à l'université de Londres, Augustus De Morgan publia en 1847 son premier ouvrage de logique. Contrairement à celle de Boole, qui se présente comme un système visant une refonte de la logique, son œuvre, faite de l'addition dispersée de vues de détail souvent ingénieuses, n'est nullement révolutionnaire : le but de De Morgan, en particulier dans différents articles parus entre 1846 et 1864, était de trouver un symbolisme adéquat pour les syllogismes aristotéliciens.

De Morgan a cependant innové, d'abord avec l'idée d'*univers du discours*, présente dès 1846 sous le vocable d'« univers d'une proposition ou d'un nom ». Partisan de faire porter la négation sur le prédicat plutôt que sur la copule, De Morgan associa à chaque concept son correspondant « négatif », même quand il n'y a pas de terme pour ce dernier. Cela exige de préciser ce sur quoi porte notre pensée. Par exemple, si j'oppose *invertébré* à *vertébré*, je me limite au genre *animal* et je ne pense pas à qualifier d'invertébré, ou de non vertébré, une étoile, un théorème ou un match de tennis. Dans ce cas, l'univers du discours, au sens de De Morgan, est constitué des seuls animaux, et non de la classe universelle comme chez Boole, à qui on doit les notations 0 et 1. De Morgan en a tiré une notation qui élimine la distinction entre affirmatives et négatives, en désignant tout concept dit « positif » par une majuscule, et le concept qui le complète dans l'univers du discours par la minuscule correspondante. Si l'univers du discours est celui des animaux et si X désigne le concept *homme*, x désignera le concept *animal non humain*, et si Y désigne le concept *vertébré*, y désignera le concept *invertébré*. La négation porte donc sur le prédicat et s'intègre au symbolisme utilisé. Il en résulte une nouvelle classification des différentes formes de propositions. Ainsi, une négative comme « Aucun X n'est Y » devient l'affirmative « Tout X est y ». Par exemple, dans l'univers des animaux, « Aucun homme n'est vertébré » devient « Tout homme est invertébré » (propositions toutes deux fausses).

Même si De Morgan remédie ici à une limite de la logique aristotélicienne, cette contribution est relativement mineure. Une autre, plus importante, est qu'il a découvert, ou plutôt redécouvert – la fin du Moyen Âge les connaissait déjà –, les lois de *dualité* entre somme et produit logiques, lois qui portent aujourd'hui son nom et qu'il exprime ainsi (De Morgan appelle « agrégat » la somme logique et « composé » le produit logique) :

> Le contraire d'un agrégat est le composé des contraires des agrégants ; le contraire d'un composé est l'agrégat des contraires des composants.

Soit, en écriture symbolique : $\overline{A+B} = \overline{A} \times \overline{B}$ et $\overline{A \times B} = \overline{A} + \overline{B}$ [1].

En vertu de l'isomorphisme entre calcul des classes et calcul des propositions, ces lois valent aussi en logique des propositions pour la disjonction inclusive et la conjonction :

- La négation de la disjonction est la conjonction des négations, soit :

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q.$$

- La négation de la conjonction est la disjonction des négations, soit :

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q.$$

La reconnaissance de cette dualité, qui ne vaut que pour la version inclusive de la disjonction, est une des raisons qui incitera la majorité des logiciens (Boole est une exception) à adopter cette dernière.

Mais surtout, comme le dira Peirce trente ans plus tard, De Morgan est « incontestablement le père de la logique des relations ». Formaliste convaincu, il inventa un symbolisme constitué d'un assemblage de lettres, de points et d'exposants, destiné à formaliser les propositions et la syllogistique aristotéliciennes. Et c'est en réfléchissant aux limites de cette dernière, notamment celles induites pas l'usage du seul verbe « être » comme copule, que De Morgan en vint à constater que certaines inférences valides et très simples ne pouvaient être rendues par un syllogisme. Ainsi : « Si un homme est un animal, la tête d'un homme est la tête d'un animal », « Si 12 est un multiple de 3, 3 est un diviseur de 12 ». Ce dernier exemple montre qu'à une relation peut être associée sa *converse*, ou relation inverse : ici « être un diviseur

1. $\overline{A}$ est la classe des individus de l'univers du discours qui ne sont pas dans A. Les lois de De Morgan ont leur version ensembliste : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

de » pour « être un multiple de ». Voici quelques exemples du traitement symbolique morganien de la logique des relations, X et Y désignant des termes singuliers indéfinis et L une relation quelconque (le double point vaut affirmation, le simple négation) :

- $X..LY$ signifie que X est un L de Y,
- $X.LY$ signifie que X n'est aucun L de Y (négation),
- $X..lY$ signifie que X est un non-L de Y (relation contraire),
- $Y..L^{-1}X$ signifie que Y est un L-inverse de X (relation converse).

Ainsi, dans l'univers des entiers naturels autres que 1, avec « être un multiple de » pour L, les formules ci-dessus correspondent respectivement aux propositions suivantes :

- « 12 est un multiple de 3 »,
- « 5 n'est le multiple d'aucun nombre »,
- « 5 n'est pas un multiple de 2 »,
- « 3 est un diviseur de 12 ».

Le symbolisme de De Morgan pour la logique des relations a été abandonné en raison de son incommodité, mais il lui a permis un traitement des syllogismes conclu par une table des seize formes élémentaires qu'il a dénombrées. Il a également formulé quelques résultats sur la conversion et la composition des relations, comme dans l'exemple suivant : si « x aime y » et « y est la fille de z », alors « x aime la fille de z ». De Morgan a aussi dégagé certaines propriétés des relations, essentielles en logique et en mathématiques ($\Re$ désigne ici une relation binaire, ou prédicat liant deux individus, quelconque) :

- *réflexivité* : quel que soit x, $\Re(x, x)$, comme pour « aussi chaud que » ;
- *symétrie* : si $\Re(x, y)$, alors $\Re(y, x)$, comme pour « aussi chaud que » ;
- *asymétrie* : si $\Re(x, y)$, alors non-$\Re(y, x)$, comme pour « plus chaud que » ;
- *transitivité* : si $\Re(x, y)$ et $\Re(y, z)$, alors $\Re(x, z)$, comme pour « plus chaud que ».

B. Un successeur de De Morgan : Peirce

La logique des relations est née chez De Morgan d'une réflexion sur les limites de la logique aristotélicienne, mais, demeurant attaché à celle-ci, il n'a pas cherché à développer celle-là. D'autres s'y sont appliqués, faisant de la logique des relations une partie essentielle de la logique formelle. Le philosophe, mathématicien et logicien américain Charles Sanders Peirce, déjà mentionné, est l'un d'eux, en particulier dans plusieurs articles consacrés à l'algèbre de la logique entre 1880 et 1885. Peirce est un penseur original, dont les contributions à la logique symbolique sont nombreuses et variées, mais qui, pour diverses raisons, n'a pas toujours mené à bien les multiples projets qu'il a conçus, et ne publia pas tous ses résultats.

Pour Peirce, il n'y a de pensée exacte, et donc de logique, que si elle opère sur des figures écrites. Inventeur de la *sémiotique*, ou théorie générale des signes, il était convaincu qu'une langue symbolique est nécessaire en logique, comme en mathématiques, ce qu'illustre l'algèbre. Mais bien que se réclamant de la tradition algébriste en logique, il s'en est éloigné dès 1867, lorsqu'il reprocha à Boole d'avoir excessivement soumis la logique à la mathématique. Pour Peirce, opérations logiques et mathématiques sont distinctes : la mathématique, disait-il, est une science « prélogique », dont les arguments sont tellement évidents qu'elle n'a « besoin d'aucune aide venant de la logique ». Un autre point de désaccord est que le calcul des classes n'est selon lui qu'un instrument pour la déduction, qu'il a remplacé par une logique formelle et symbolique qu'il lia, voire intégra ou identifia, à la sémiotique.

Le grand problème de la soumission de la logique à l'algèbre, note Peirce dès 1870, est la présence répétée d'équations, donc d'égalités. Or, une égalité est la composée de deux relations : deux quantités sont égales si l'une est plus petite que l'autre et inversement, deux classes sont identiques si l'une est incluse dans l'autre et inversement, deux propositions sont équivalentes si l'une implique l'autre et inversement. Peirce insista donc sur le fait que ce qui est premier en logique, ce n'est pas l'identité, mais l'inclusion entre classes, et plus profondément encore, l'*implication* (matérielle) entre propositions. Examinant les propriétés de cette dernière, il posa en 1885 les bases du calcul propositionnel, mais de façon moins achevée que Frege. Il lui apporta néanmoins quelque chose d'essentiel, que son contemporain ne fit qu'entrevoir, l'utilisation systématique de *tables de vérité* pour définir les opérateurs logiques – on en a vu un exemple avec l'implication philonienne – et décider de la vérité ou de la fausseté d'une formule. Ludwig Wittgenstein, Emil Post et Jan Łukasiewicz redécouvriront cette méthode au début du XX^{e} siècle. Peirce anticipa aussi la possibilité de définir tous les opérateurs logiques par un seul.

C'est fort de l'importance donnée à l'implication, ainsi qu'en constituant une logique des *relations*, que Peirce découvrit un élément capital de la logique moderne : les *quantificateurs*. En 1870, il utilisa une notation matricielle où les relations binaires étaient représentées, extensionnellement, par les paires ordonnées des individus vérifiant la relation. Il définit également la notion de *produit relatif* : celui de « frère de » et de « père de » est « frère du père de », soit « oncle paternel de ». En 1883, il adopta un symbolisme original, fait d'indices, pour indiquer quels termes sont reliés par une relation et dans quel ordre. Par exemple, si a désigne la relation « aime », il écrit a_{ij} pour « i aime j ». Ce symbolisme, plus simple que celui de De Morgan, permet d'exprimer facilement la réflexivité d'une relation – a_{ii} pour

« i s'aime lui-même » –, de symboliser sa converse – $b_{ji} = a_{ij}$ pour « j est aimé de i » –, et d'envisager le cas des relations, ou prédicats, à plus de deux termes : par exemple, c_{ijk} pour « i achète j à k ».

Mais comment symboliser des propositions telles que « Tout le monde aime Mozart » ou « Tout le monde aime quelqu'un » ? Grâce aux lettres grecques Π et Σ, initiales respectives de « produit » et de « somme », que Peirce introduisit au début des années 1880, et qui jouent le rôle des quantificateurs universel et existentiel de la logique actuelle des prédicats. Le premier est défini à l'aide de la conjonction, ou produit logique, le second à l'aide de la disjonction inclusive, ou somme logique. Par exemple, si x désigne une propriété quelconque :

1. $\Pi_i x_i$ signifie que x est une propriété de *tous les* individus désignés par i, soit $\Pi_i x_i = x_j x_k x_l$... Par exemple, « Tous les hommes sont mortels » signifie que Socrate *et* Platon *et* Mozart *et* vous *et* moi..., sommes mortels.
2. $\Sigma_i x_i$ signifie que x est une propriété *d'au moins un* des individus désignés par i, soit $\Sigma_i x_i = x_j + x_k + x_l +$... Par exemple, « Quelques hommes sont des philosophes » signifie que Socrate *ou* Platon *ou* Descartes *ou* Mozart ..., sont des philosophes.

Les propositions « Tout le monde aime Mozart » et « Tout le monde aime quelqu'un » sont alors respectivement exprimées par $\Pi_i a_{im}$ (m désigne l'individu Mozart) et $\Pi_i \Sigma_j a_{ij}$. Le symbolisme de Peirce, même s'il n'a pas été conservé, permet de représenter des rapports de quantification très complexes et d'élever le calcul des relations à un niveau bien supérieur à celui atteint par De Morgan.

La question se pose de savoir si la découverte par Peirce des quantificateurs fait de lui, au même titre que Frege, le père de la quantification moderne. Faute d'unanimité des spécialistes sur la question, nous la laissons ouverte, un élément de réponse factuel étant que chacun a élaboré sa propre théorie sans rien connaître de celle de l'autre, Frege l'exposant pour la première fois en 1879, Peirce en 1885. Il y a çà et là chez ce dernier quelques autres idées remarquables, dont certaines présentes chez Frege et Russell notamment. Deux d'entre elles, qui lui sont propres, sont l'introduction des « diagrammes existentiels », publiés en 1897, et l'exposé d'un calcul logique non bivalent. Ils ajoutent à la place éminente de Peirce dans l'histoire de la logique, sa contribution ne se limitant donc pas à sa théorie des relations, même si celle-ci est essentielle.

V. LE LOGICISME DE FREGE

On voit l'effort, commun à tous les logiciens du XIXe siècle, pour donner une forme symbolique à la logique. Hugh MacColl, s'appuyant sur un symbolisme parfois judicieux, parfois peu praticable, a expliqué en 1877 que la logique repose non sur le calcul des classes, mais sur celui des propositions, avec ses opérateurs dont le plus important était à ses yeux l'implication, qui signifie selon lui que le conséquent est nécessairement vrai si l'antécédent l'est. Il fut ensuite amené à découvrir quelques lois de la logique des propositions et à retrouver celles que De Morgan avait formulées pour les classes, et pas explicitement pour les propositions. Enfin, il a utilisé la notion de fonction propositionnelle, déjà présente chez Bolzano, mais sans la distinguer correctement de celle de proposition.

Mais tout cela est peu par rapport à ce que la logique actuelle doit à Gottlob Frege, qui en a dégagé et systématisé nombre d'éléments essentiels. Mathématicien de formation, il consacra ses premiers travaux, dans les années 1870, à la géométrie. C'est en réfléchissant aux fondements de l'arithmétique qu'il jugea nécessaire de réformer la logique, sans qu'on sache avec précision quand il a modifié l'orientation de ses recherches ni ce qui l'y a poussé. Lui-même mentionne, dans son premier écrit de logique, un ouvrage sur la caractéristique universelle de Leibniz, à laquelle il fait souvent référence.

A. L'idéographie

Insistant constamment sur l'inadéquation des langues ordinaires à traduire le raisonnement logique, Frege a inventé une écriture symbolique entièrement nouvelle, l'*idéographie*, visant à exclure toute ambiguïté et tout enchaînement non justifié. Par exemple : éviter qu'un même signe puisse avoir plusieurs sens, comme le mot « fraise » en français, qui désigne un fruit, un outil, un instrument dentaire et un ancien accessoire vestimentaire ; empêcher que le verbe « être » joue différents rôles ; éliminer la relativité de la position du sujet dans la proposition et de la distinction entre affirmatives et négatives. Difficultés présentes dans la logique aristotélicienne et que certains prédécesseurs de Frege avaient déjà relevées. Il voulut aussi rejeter l'intuition et l'usage d'expressions imprécises comme « donc », « il est évident que », « mais », « puisque », etc., courantes dans les exposés de mathématiques de l'époque, même les plus rigoureux.

La nouvelle écriture est également destinée à justifier une thèse sur le fondement des mathématiques, le *logicisme*, qui, dans sa version fregéenne, soutient que l'arithmétique – mais pas la géométrie – n'est qu'une extension de la logique. D'après Frege, on peut définir toutes les notions et démontrer tous les théorèmes de l'arithmétique à partir des concepts et lois de la seule logique, étant entendu que celle-ci est pour lui une discipline universelle qui, « faisant abstraction des caractéristiques particulières des choses, s'appuie exclusivement sur des lois qui fondent toute connaissance ». Frege n'était alors pas le seul à défendre le logicisme, on l'a dit pour Schröder et c'était également vrai du mathématicien Richard Dedekind, mais il fut le seul à le faire de cette façon :

> Il a assurément bien souvent été dit, écrit Frege en 1893, que l'arithmétique n'est qu'une logique plus largement développée ; mais cela reste discutable tant qu'apparaissent dans les démonstrations des transitions qui ne sont pas effectuées d'après des lois logiques connues, mais semblent reposer sur une connaissance intuitive. Ce n'est que quand ces transitions sont décomposées en étapes logiques simples qu'on peut se convaincre que rien d'autre que la logique ne sert de base.

Frege a correspondu avec des logiciens, mathématiciens et philosophes parmi les plus illustres – Hilbert, Husserl, Peano, Russell entre autres –, mais il eut parfois du mal à se faire comprendre, en particulier à cause de l'extrême complexité de son idéographie (figure 7). S'il utilisait les deux dimensions, horizontale et verticale, de la page, c'est qu'il pensait ainsi transcrire au mieux le déroulement du raisonnement logique :

> La simple disposition en une série linéaire, écrit Frege en 1882, ne correspond nullement à la multiplicité des rapports logiques suivant lesquels les pensées sont liées les unes aux autres.

Son idée n'a pas été conservée, le symbolisme actuel s'inspirant davantage des écritures linéaires de Peirce, Peano et Russell.

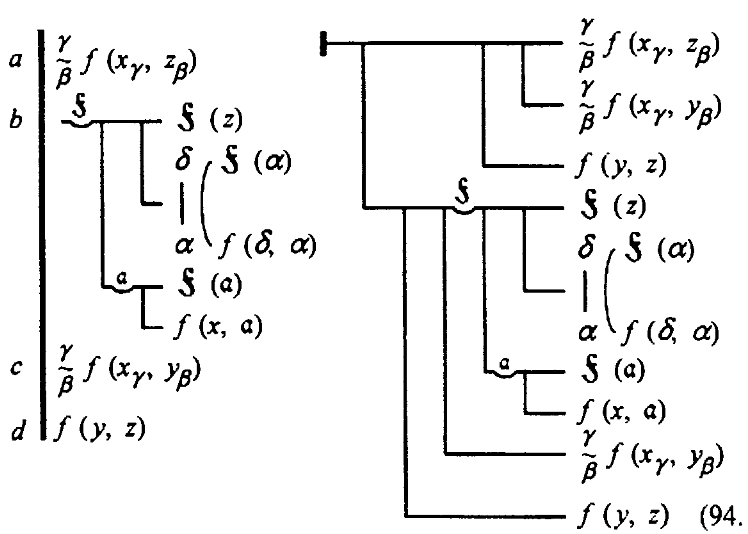


Figure 7. Extrait de *Begriffsschrift* de Frege

C'est donc en mathématicien que Frege s'est attaqué à la logique. Il a proposé une première version de l'idéographie dans *Begriffsschrift* (littéralement « écriture du concept »[1]), publié en 1879. Il a ensuite précisé certaines de ses conceptions, notamment dans *Les fondements de l'arithmétique* de 1884, où est exposée informellement sa théorie des entiers naturels. La version « définitive » de l'idéographie fregéenne (on comprendra plus loin l'usage des guillemets) est celle des deux tomes des *Lois fondamentales de l'arithmétique* de 1893 et 1903, qui devaient valider la thèse logiciste, avec les définitions idéographiques des entiers naturels et des nombres réels, et les théorèmes élémentaires de l'arithmétique.

B. La réforme de la logique aristotélicienne

Puisque la logique aristotélicienne a montré ses limites, Frege la réforme en profondeur. Alors que la première voit dans la proposition l'attribution d'un prédicat à un sujet, la logique fregéenne a pour élément premier la *proposition*, considérée comme le contenu d'un énoncé dont on peut dire qu'il est vrai ou faux. À la distinction d'origine grammaticale entre sujet et prédicat, Frege substitue la distinction, d'origine mathématique, entre *argument* et *fonction*, substitution nécessaire à la refonte de la logique. En mathématiques, une fonction f fait correspondre à un argument, c'est-à-dire une valeur de la *variable* x, la valeur $f(x)$. Par exemple, si la fonction f est définie par $f(x) = x^2$, on a $f(x) = 4$ pour $x = 2$, $f(x) = 1$ pour $x = -1$, etc. Aux arguments 2 et – 1 correspondent donc respectivement les valeurs 4 et 1.

Frege étend la notion mathématique de fonction, du côté des arguments, qui peuvent être autres que des nombres, et du côté des valeurs qu'elle prend, qui peuvent être le Vrai et le Faux. Et au lieu d'analyser grammaticalement la proposition « Socrate est mortel » en sujet-copule-prédicat, il y voit l'expression d'une fonction f – « mortel » ou « être mortel » –, qui donne une proposition vraie ou fausse selon l'argument qui la complète : f(Socrate) donne une proposition vraie, f(Zeus) une proposition fausse. Ce qui vaut pour une fonction à un argument, un *concept* dans le vocabulaire de Frege, vaut aussi pour les fonctions à deux arguments ou relations. Soit $\mathfrak{R}$ la relation « meurtrier de » : $\mathfrak{R}$(Brutus, César) et $\mathfrak{R}$(César, Cléopâtre) donnent respectivement une proposition vraie et une proposition fausse. On peut généraliser à un nombre quelconque d'arguments, comme dans « x est un nombre plus petit que y et plus grand que z ». Ainsi apparaissent explicitement la notion actuelle de *prédicat*, défini non plus comme une propriété qu'on attribue à un sujet, mais comme une fonction à une ou plusieurs variables désignant des individus, et

1. L'usage veut qu'on réserve le nom allemand au titre de l'ouvrage et sa traduction habituelle (*idéographie*) à l'écriture inventée par Frege.

les deux valeurs de vérité, le Vrai et le Faux. On peut alors facilement exprimer par formules des propositions des langues ordinaires. Par exemple, dans un symbolisme qui n'est pas celui de Frege :

- « Socrate est mortel » : $M(s)$ (avec $M(x)$ pour « x est mortel » et s pour Socrate) ;
- « Si Socrate est un homme, Socrate est mortel » : $H(s) \rightarrow M(s)$ (avec $H(x)$ pour « x est un homme » et $M(x)$ pour « x est mortel »).

C. Une « nouvelle » logique

Ces exemples simples montrent comment formaliser l'« ancienne » logique, même si tel n'est pas le but de Frege. Cette formalisation induit notamment l'élimination du verbe « être » et le remplacement de la distinction entre propositions affirmatives et négatives par celle entre propositions vraies et fausses. La logique de Frege est donc bien une logique *intensionnelle* des propositions et des prédicats, alors que Boole privilégiait la notion de classe et l'idée d'extension. Logique des propositions et non des concepts, spécifia Frege, qui regrettera que le terme *Begriffsschrift* ait pu laisser penser que le point de départ de sa logique fût le concept. Il a au contraire insisté sur le fait qu'on atteint ce dernier par analyse de la proposition. Quelques éléments, présents dès le début de *Begriffschrift* et sur lesquels il n'a pas varié, marquent la primauté de la proposition :

1. Frege distingue la *forme* et le *contenu* de celle-ci. « Brutus a tué Jules César » et « Jules César a été tué par Brutus » ont deux formes différentes, car ce sont deux phrases grammaticalement distinctes. Mais, du point de vue logique, seul pertinent ici, elles ont le même « contenu conceptuel », selon l'expression de Frege.
2. Le premier opérateur logique que Frege introduit est le *conditionnel*, qu'il symbolise par ce qu'il appelle « trait de condition », et qu'il définit par le fait que $p \rightarrow q$ n'est fausse que si p est vraie et q fausse.
3. Après avoir précisé que ce symbole n'exprime aucun lien causal entre les propositions qu'il relie, Frege utilise un signe distinct pour désigner l'inférence.
4. Le deuxième opérateur introduit est la *négation*, qui rend vraie une proposition fausse et inversement.

Pour Frege, la logique ne traite donc pas d'équations mais d'inférences entre propositions, et s'intéresse à la validité des premières et à la vérité ou fausseté des secondes.

Frege montre ensuite que la disjonction (inclusive) et la conjonction peuvent être dérivées des deux opérateurs précédents, qui sont donc primitifs dans l'idéographie. Il en explique la signification par l'examen de leurs cas de vérité respectifs :

par exemple, $p \vee q$ n'est fausse que si p et q sont fausses, les autres combinaisons donnant une proposition vraie[1]. Il y ajoute un signe pour la relation d'identité ou d'égalité, assimilées l'une à l'autre. Elle lui pose d'ailleurs problème puisque aucun des deux traitements qu'il en donne, dans *Begriffsschrift* et dans les *Lois fondamentales*, n'est satisfaisant. En 1879, le signe $\equiv$ indique une identité de contenu entre deux expressions ; en 1893, le signe = placé entre deux propositions signifie qu'elles ont la même valeur de vérité.

Sans distinguer véritablement logique des propositions et logique des prédicats, Frege introduit ensuite un signe spécifique pour exprimer ce qu'il appelle la généralité, qui correspond au *quantificateur universel* de la logique actuelle, qu'on note $\forall$. En mathématiques, on a : $(\forall x)((x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1))$. En logique, « Tous les hommes sont mortels », c'est-à-dire « Si x est un homme, x est mortel », se traduit par $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$ (avec $H(x)$ pour « x est un homme » et $M(x)$ pour « x est mortel »). Frege montre que le *quantificateur existentiel*, qui n'a chez lui ni nom ni signe spécifiques et qu'on note aujourd'hui $\exists$, peut être dérivé du quantificateur universel à l'aide de la négation. Affirmer « Il existe un x qui est P », c'est nier « Tous les x sont non-P », soit : $(\exists x)P(x) = \neg(\text{«}x)\neg P(x)$. Frege peut ainsi compléter le carré logique d'Apulée par des formules idéographiques.

À la distinction entre fonction et argument, Frege en lie une autre en 1884, tout aussi fondamentale à ses yeux, car indispensable à sa définition des entiers naturels. Il lui faut distinguer entre ce qu'il appelle *concept* et *objet*. Un objet ne peut jouer que le rôle d'argument, c'est un individu, toujours désigné par un « nom propre » et précédé de l'article défini : *le* nombre 4, (*le*) Socrate, etc. Un concept est de nature essentiellement prédicative, c'est ce qu'on appelle un prédicat unaire, désigné par un nom commun et précédé de l'article indéfini : « (être) *un* nombre », « (être) *un* homme », etc. Frege dit qu'un objet *tombe sous* un concept – « 4 est un nombre », « Socrate est un homme » – et qu'un concept est *subordonné* à un autre concept – « Un nombre est une entité mathématique », « Un homme est un animal ». Dans un vocabulaire qui n'est pas le sien, Frege est l'un des premiers à bien distinguer deux relations ensemblistes, notées aujourd'hui respectivement $\in$ et $\subset$: l'*appartenance* d'un élément à un ensemble, ce que Frege appelle une *extension de concept*, et l'*inclusion* d'un ensemble dans un autre.

Une autre distinction, de nature logico-linguistique, est encore l'objet de nombreuses discussions et objections. Pour tout signe, symbole logico-mathématique ou expression de la langue naturelle, Frege distingue, à partir de 1892, son *sens*

1. Sur ce chemin, Frege a également rencontré la disjonction exclusive et l'incompatibilité, mais n'a pas procédé à l'examen de tous les connecteurs possibles.

de sa *référence*[1]. Cette dernière est ce que le signe désigne, le sens est la manière dont la référence est donnée. D'où son analyse de l'identité : dans « $2 + 4 = 2 \times 3$ » par exemple, le même objet – le nombre 6 (la référence) – est donné de deux façons (en deux sens) différentes. De même, deux phrases distinctes comme « Brutus a tué César » et « César a été tué par Brutus » ont la même référence, leur valeur de vérité – ici le Vrai –, donnée au travers de deux sens différents, que Frege appelle *pensées*. Cela l'a conduit à insister, par l'usage de guillemets, sur la différence entre le signe et ce qu'il désigne, retrouvant une problématique des médiévaux : par exemple, le *concept d'homme* est bien un concept, mais « le *concept d'homme* » est un nom, qui désigne ce concept.

De ce travail de dépouillement de la langue logique vis-à-vis des langues ordinaires découle une *sémantique* (théorie de la vérité et de la signification) et une *syntaxe* (règles de formation des formules et lois gouvernant l'inférence) qui visent la parfaite rigueur[2]. Elles permettent en principe de répondre à une exigence de l'idéographie : toute formule correctement construite, quel que soit son sens, doit avoir une référence et une seule. L'exposé de Frege, dans *Begriffsschrift* comme dans *Les lois fondamentales*, suit un ordre rigoureux, qui est le suivant dans le second ouvrage :

1. Introduction des notions *primitives*, avec les signes servant à les désigner et l'*explication* de leur signification : fonction, concept, relation, objet, valeurs de vérité, sens et référence, etc.
2. Définition des *opérateurs* logiques primitifs – implication, négation, quantificateur universel – par l'examen de leurs « cas de vérité » (les autres opérateurs en sont dérivés) : le résultat de chaque combinaison entre vrai et faux est examiné. Ces définitions sont accompagnées des symboles idéographiques désignant ces opérateurs.
3. S'y ajoutent l'*égalité*, puis ce que Frege appelle le *parcours de valeurs* d'une fonction, qui correspond *grosso modo* à l'ensemble des valeurs prises par cette fonction, et enfin un opérateur jouant le rôle de l'*article défini* des langues naturelles, qui permet de distinguer l'unique objet tombant sous une extension de concept de cette extension de concept elle-même, soit, en termes ensemblistes, l'unique élément d'un ensemble et le singleton correspondant.

1. « Référence » traduit l'allemand « *Bedeutung* », qu'on peut aussi rendre par « dénotation », « signification ».
2. Les termes « sémantique » et « syntaxe », qui font partie du vocabulaire de la logique depuis la première moitié du XXe siècle, sont absents chez Frege.

4. Suit tout ce qui concerne la *déduction* : les modes d'inférence utilisés, dont la règle de détachement ou *modus ponens* – « Si p et si p alors q, alors q » – et les six lois fondamentales de la logique, dont l'une posera problème[1].
5. La suite concerne les *définitions*, dont Frege applique sa conception à sa théorie des entiers naturels, puis les théorèmes élémentaires de l'arithmétique.

La présentation est *axiomatique*, et voulue comme telle, faisant du système frегéen pour la logique un système déductif. Les principes fondamentaux de la logique traditionnelle – identité, contradiction et tiers exclu – y sont d'ailleurs des théorèmes et non des axiomes. Frege est le premier, avec une réussite presque complète, à avoir ainsi formalisé la logique. Les démonstrations sont automatiques, rien d'intuitif ne s'introduit subrepticement, mais rien n'est perdu du contenu : toutes les formules idéographiques sont accompagnées de leur explication informelle. En procédant ainsi, Frege a fait de la logique une science *normative* de « l'être vrai », c'est-à-dire qu'il ne dit pas comment on pense, ce qui serait faire de la psychologie, mais comment on doit penser quand on raisonne logiquement. Ce n'est donc pas le « penser » ou « acte de penser », le discours ou le langage, qui déterminent la logique. Même convaincu que la notion de vérité est indéfinissable et à peine susceptible d'une explication, Frege conclut que « la logique est la science des lois les plus générales de la vérité ».

Avec son idéographie intégrant le « calcul logique » des fonctions de vérité (la logique élémentaire des *propositions*) et la quantification (la logique élémentaire des *prédicats*), Frege apparaît aux yeux de certains historiens de la logique comme le fondateur, plus que Boole, de la logique moderne. Tous deux, en formulant symboliquement les lois de ce qu'ils appelaient la « pensée pure », ont rapproché la logique des mathématiques et mécanisé le raisonnement, mais ils ne l'ont pas fait de la même manière. Boole a appliqué une théorie mathématique particulière à la logique, utilisant une langue symbolique déjà constituée, celle de l'algèbre. Frege s'est inspiré des méthodes démonstratives et des procédés de calcul par signes de l'arithmétique, mais a créé une langue entièrement nouvelle pour la logique. Il a souvent critiqué le travail de son prédécesseur, s'opposant, en insistant sur la signification des symboles de l'idéographie, au *formalisme* de Boole. Pour ce dernier, qui met en avant le caractère formel de l'algèbre, l'égalité « $x + y = y + x$ » n'énonce rien d'autre que le droit de permuter les symboles de part et d'autre du signe +. Boole parle donc de la propriété d'un signe. Et selon l'interprétation qu'on donne à ces symboles, cette égalité exprime, entre autres, une propriété de l'addition numérique, de la réunion et de l'intersection d'ensembles, de la disjonction et de la conjonction de propositions. Pour Frege, « $x + y = y + x$ » ne dit qu'une chose, à savoir qu'ajouter deux nombres

1. Il est malaisé de donner une forme actuelle à certains des axiomes de la logique fregéenne. Voici comment on peut rendre la loi I : $\Vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$.

quelconques peut se faire dans n'importe quel ordre. Il parle donc de la propriété de l'addition numérique. La logique fregéenne est, grâce à l'idéographie, *formalisée*, mais non formaliste.

Sans rien enlever aux mérites de Frege, on notera que tout n'est pas nouveau dans sa logique : sans remonter aux stoïciens, l'implication est le connecteur fondamental chez Peirce, MacColl voit dans la logique des propositions la base de toute la logique et Boole a libéré la discipline de l'emprise de la philosophie pour la lier à la mathématique. À quoi s'ajoutent de nombreux points de convergence avec la logique de Bolzano dont Frege ignorait apparemment tout. On lui doit d'avoir intégré tout cela à un système cohérent, porté par une langue spécifique, une caractéristique, ce qui fait de sa logique la première réalisation de cette partie du projet leibnizien. Et il lui appartient en propre d'avoir introduit en logique la notion de fonction, échappant ainsi à la distinction sujet-prédicat, et de traiter d'un seul tenant concept et relation. La théorie de la quantification, dont il partage la paternité avec Peirce, lui a permis aussi, grâce à l'idéographie, de traiter de propositions complexes à plusieurs quantificateurs et plusieurs arguments. Enfin, il lui a été possible de parler de fonctions de différents ordres, selon que leurs arguments sont des individus ou eux-mêmes des fonctions.

Au regard de la logique actuelle, celle de Frege souffre cependant de quelques défauts. Dans les manuels d'aujourd'hui, la logique des propositions et la logique des prédicats sont clairement distinguées, la seconde s'appuyant sur la première, alors que Frege introduit par exemple le quantificateur universel sans avoir achevé l'exposé de la logique des propositions. Le fait que l'idéographie donne une place au signe de l'inférence est discutable, même si Frege distingue nettement loi logique et mode d'inférence. Qu'elle intègre également l'égalité ne va pas sans poser des problèmes, dont il n'a pas une conscience parfaitement claire. Enfin, en appliquant la quantification à la totalité des individus et des fonctions, Frege, adepte d'un « universalisme logique » désormais difficile à soutenir, ne traite pas des quantificateurs comme on le fait aujourd'hui, avec un univers du discours ayant précisément pour fonction d'en limiter le domaine d'application.

D. Un paradoxe grave

Ces défauts ont pu recevoir un remède satisfaisant. Le dernier n'aurait pas eu l'aval de Frege, car mettant en cause une des thèses auxquelles il tenait. Il est lié au fait que ce qui aurait dû être le couronnement de son projet logiciste en a provoqué la ruine : sa définition des *entiers naturels*, fondée sur l'idée qu'un nombre est un objet qui *appartient* à un concept. Par exemple, le mot « mathématique » compte 12 lettres, de sorte que 12 appartient au concept « lettre du mot «mathématique» » (en langage ensembliste : le nombre d'éléments de l'ensemble des lettres de « mathématique » est 12). De même, 12 appartient aux concepts « côté d'un dodécagone », « mois de l'année », « apôtre de Jésus », etc. Le nombre 12 est donc ce qui est commun à tous ces concepts : ce que Frege appelle leur extension compte 12 éléments.

Plus précisément, un même nombre appartient à deux concepts si et seulement si ils sont *équinumériques*, c'est-à-dire s'il existe une *bijection* entre leurs extensions, à savoir la classe des objets qui tombent sous l'un et celle des objets qui tombent sous l'autre, comme dans les exemples ci-dessus[1]. La définition générale de Frege est que le nombre qui appartient à un concept F est l'« extension du concept "équinumérique au concept F" » ou, comme le dira Russell plus simplement, un nombre est une classe de classes en bijection mutuelle. Une fois cette définition générale donnée, il suffit, pour définir un nombre particulier, de trouver un concept auquel il appartient. Ainsi, 0 appartient au concept « non identique à soi-même » puisque, selon le principe d'identité, aucun objet ne tombe sous ce concept. 1 est défini à partir de 0 comme étant le nombre qui appartient au concept « identique à 0 », et ainsi de suite. Frege peut ainsi « construire » l'ensemble des entiers naturels à partir de 0, dans le cadre d'une théorie purement logique, puisque fondées sur les notions d'objet, de concept, d'extension de concept et d'identité.

Mais l'introduction des extensions de concepts oblige Frege à poser un axiome – une « loi fondamentale de l'arithmétique » –, qui donne lieu à un *paradoxe logique* que Russell lui communiqua en 1902. Il fait apparaître un prédicat ou un ensemble – un concept et son extension dans le vocabulaire de Frege – menant à une contradiction. En logique, on peut distinguer deux types de prédicats : ceux qu'on peut prédiquer d'eux-mêmes, comme le prédicat *concept* qui est lui-même un concept, et ceux qu'on ne peut prédiquer d'eux-mêmes, comme le prédicat *mortel* qui n'est pas lui-même mortel. Russell considère le prédicat *être un prédicat qu'on ne peut prédiquer de lui-même*, et pose la question : ce prédicat peut-il être prédiqué de lui-même ? Il conclut que de chacune des réponses, oui ou non, suit son opposée. La version ensembliste est plus simple à saisir. Certains ensembles sont éléments d'eux-mêmes : par exemple, l'ensemble $\mathbf{I}$ des objets inanimés étant un objet inanimé, il est élément de lui-même ($\mathbf{I} \in \mathbf{I}$). D'autres ne vérifient pas cette propriété : par exemple, l'ensemble $\mathbf{H}$ des hommes n'étant pas un homme, il n'est pas élément de lui-même ($\mathbf{H} \notin \mathbf{H}$). Considérons l'ensemble $\mathbf{W}$ des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes, soit : $\mathbf{W} = \{x\,;\, x \notin x\}$. Sa définition est contradictoire :

1. Ou bien $\mathbf{W}$ est élément de lui-même ($\mathbf{W} \in \mathbf{W}$) et $\mathbf{W}$ ne vérifie pas la propriété qui définit $\mathbf{W}$. $\mathbf{W}$ n'est donc pas élément de $\mathbf{W}$ et on a $\mathbf{W} \notin \mathbf{W}$.

1. Deux classes ou ensembles A et B sont en bijection s'il existe une correspondance associant à chaque individu ou élément de A un unique individu ou élément de B et inversement.

2. Ou bien **W** n'est pas élément de lui-même ($\mathbf{W} \notin \mathbf{W}$) et **W** vérifie la propriété qui définit **W**. Il est donc élément de **W** et on a $\mathbf{W} \in \mathbf{W}$.

Quelle que soit l'hypothèse faite, la conclusion qu'on en tire la contredit. Le paradoxe n'est pas anecdotique, car il montre que les notions d'ensemble et de classe, de prédicat ou de concept et d'extension de concept, sont problématiques : alors qu'il semble acquis qu'à toute propriété correspond un ensemble, éventuellement vide, celui des éléments qui possèdent cette propriété, ce n'est pas le cas. Cela met à mal un principe jusque-là implicitement admis en mathématiques et en logique, que Frege fut le premier à formuler explicitement, et la correspondance apparemment sans nuage entre intension et extension. La situation est analogue à ce qui se produit lorsqu'une expérience invalide une théorie physique : il faut réviser cette dernière. Dès lors qu'un des axiomes de la logique fregéenne est atteint, c'est le système entier qui l'est : cet axiome énonce que deux concepts sont équivalents si et seulement si ils ont la même extension. C'est la réciproque qui pose problème, car elle autorise à faire figurer dans une extension de concept cette extension de concept elle-même, ce qu'interdit le paradoxe de Russell. Il s'ensuit qu'il existe un terme conceptuel, celui qui définit l'ensemble **W**, qui n'a pas de référence : la règle fregéenne selon laquelle toute expression correctement formée doit avoir une référence ne vaut plus. D'autre part, Frege définissant les nombres comme des extensions de concepts, sa théorie est minée par le fait que celles-ci sont problématiques.

Frege prit connaissance du paradoxe de Russell alors qu'il venait de terminer la rédaction du tome II des *Lois fondamentales*. Il y ajouta un appendice, où il tenta de résoudre la contradiction, avant de reconnaître qu'on ne pouvait y parvenir qu'au prix d'une refonte, inacceptable à ses yeux, de la logique. Il abandonna alors la thèse logiciste, pour ne plus publier ensuite que des travaux traitant informellement de la logique, puis imagina fonder toute la mathématique sur la géométrie. Il ne fut d'ailleurs pas le seul à être atteint. Comme il le souligna, tous ceux qui définissaient les nombres à l'aide de classes ou d'ensembles – ils étaient alors quelques-uns – devaient affronter ce problème. C'est ce que les logiciens et mathématiciens du XXe siècle ont fait, de diverses manières.

CHAPITRE 6

LOGIQUE(S) AU XX^e SIÈCLE

Nous avons vu jusqu'ici que, à l'exception de sa forme modale, presque totalement ignorée par le XIX^e siècle, la logique, qu'elle s'occupe de termes, de classes, de propositions ou de relations, utilise une langue ordinaire, symbolique ou des diagrammes, a toujours été fondée sur le principe de *bivalence*, selon lequel une proposition est ou vraie ou fausse. Une des caractéristiques du XX^e siècle est d'avoir développé, à côté de la logique issue des travaux de Boole et de Frege, qu'on qualifie désormais de « classique » ou « standard », des logiques qui ne respectent pas toutes le principe de bivalence. D'où l'intitulé de ce chapitre. Encore ce caractère bivalent de la logique standard cache-t-il des conceptions divergentes : dans les années 1920, on pouvait distinguer la tradition logiciste des *Principia Mathematica*, c'est-à-dire celle de Frege et Russell, la tradition algébriste de Boole et Schröder, et la tradition formaliste qui émergeait alors avec Hilbert. Ce sont les développements de cette logique standard, dont la proximité avec les mathématiques n'a cessé de se renforcer, que nous allons d'abord étudier.

I. L'ÉCRITURE SYMBOLIQUE DE PEANO

Le logicien et mathématicien italien Giuseppe Peano partageait avec Frege l'idée que la logique a besoin d'une langue symbolique exempte des défauts des langues ordinaires, avec cette différence qu'il la destinait également aux mathématiques. Il l'a exposée pour la première fois en 1889, juste avant de découvrir les travaux de Frege, dans un petit livre écrit en latin, où il présente sa théorie des entiers naturels. Il l'a remaniée dans les différentes éditions du *Formulaire de mathématiques*, publiées de 1895 à 1908. Moins philosophe et logicien que Frege, Peano propose des analyses d'une profondeur moindre, et sans adhérer au logicisme : il a axiomatisé l'arithmétique – d'où ce qu'on appelle « l'arithmétique de Peano » – en se fondant sur des notions et des axiomes n'appartenant pas à la logique. Pas plus à ses yeux n'était-il possible de prouver les règles du raisonnement mathématique.

Du point de vue logique, ses travaux souffrent de multiples défauts, dont l'absence d'énoncé des règles d'inférence utilisées et la double signification donnée au symbole d'implication, à la fois simple connecteur, au sens de l'implication matérielle de Russell, et marque de la déduction, au sens de la conséquence logique de Tarski. Les travaux de Peano se situent pour partie dans la lignée de Boole, puisque la notion de classe y domine et que la plupart des signes utilisés sont susceptibles d'une double interprétation, par des classes et par des propositions. Il apparaît aussi comme un précurseur du formalisme hilbertien, puisque c'est sciemment que certaines notions arithmétiques n'ont chez lui pas d'autres définitions que celles que leur confèrent les axiomes où apparaissent les signes les désignant.

À l'exception de =, l'écriture symbolique de Peano n'emprunte, contrairement à celle de Boole mais comme celle de Frege, aucun signe aux mathématiques de son époque. Moins subtile mais beaucoup plus simple, car linéaire, que l'idéographie, elle comporte au moins deux innovations importantes, auxquelles Frege avait déjà pensé. La première est l'introduction du signe ε, initiale de ἐστί (*est* en grec), devenu $\in$, pour l'*appartenance* d'un individu à une classe (ou d'un élément à un ensemble) : « $x \, \varepsilon \, a$ » se lit « x est un individu de la classe a » ou « x est un a », écrit Peano. Rien n'y correspond en logique des propositions pour laquelle il introduit le signe Ɔ, qui désigne l'*implication*, ou la déduction, entre propositions. S'appuyant sur l'analogie entre logique des propositions et logique des classes, il utilise le même symbole, devenu $\subset$, pour l'*inclusion* entre classes, dont il note qu'elle peut être définie par l'appartenance. En résumé, si a et b sont des propositions, a Ɔ b signifie que de a on déduit b ou que b est conséquence de a ; si a et b sont des classes, a Ɔ b signifie que a est contenue dans b[1]. Comme on l'a dit, la distinction entre les relations d'appartenance et d'inclusion, faite par Frege mais pas par Schröder, est fondamentale, d'autant qu'elles n'ont pas les mêmes propriétés formelles : la première est transitive – si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ –, la seconde non – de $a \in A$ et $A \in B$, il ne suit pas que $a \in B$.

Cette distinction faite, rien n'interdit de considérer, pour un individu donné, la classe ne contenant que cet individu, à condition de distinguer celui-ci de celle-là. Peano a donc ajouté à ses symboles pour la classe vide et le quantificateur universel, un signe spécifique pour désigner l'unique individu d'une telle classe. Il a utilisé le

1. On notera bien que a Ɔ b s'écrit aujourd'hui $a \subset b$.

iota grec renversé, qu'on notera ι pour simplifier. Ainsi « $\iota x \, \varepsilon \, a$ » signifie « *Le* x qui est l'unique membre de la classe a ». Frege avait aussi introduit un signe en 1893 pour ce qui correspond de fait à l'article défini, mais c'est le symbole de Peano qui a été conservé. On le trouve chez Russell, qui fut influencé de façon décisive par le premier pour ses conceptions logiques, et par le second pour la langue logique symbolique qu'il a lui aussi créée.

II. RUSSELL ET LES *PRINCIPIA MATHEMATICA*

Bertrand Russell est un logicien, mathématicien et philosophe britannique, dont l'œuvre couvre un vaste domaine et qui reçut le prix Nobel de littérature en 1950. Antimilitariste et pacifiste convaincu, il s'opposa à la Première Guerre mondiale, ce qui lui valut six mois de prison. Il ne cessa ensuite de défendre la paix dans le monde, militant notamment contre l'utilisation de l'arme nucléaire. Dans son autobiographie, il raconte qu'après avoir découvert à onze ans les *Éléments* d'Euclide, il se passionna pour les mathématiques, qu'il étudia à Cambridge, où il finira sa carrière de professeur – Wittgenstein fut l'un de ses élèves. D'abord intéressé par les fondements de la géométrie, il fut impressionné par Peano lors du Congrès international de philosophie de Paris en 1900, et étudia son écriture symbolique. C'est grâce à lui qu'il aurait découvert l'œuvre de Frege, auquel il rend hommage dans un appendice des *Principles of Mathematics* de 1903. De manière voisine, mais indépendamment, Russell expose informellement dans cet ouvrage sa propre doctrine logiciste, avec un programme plus vaste, puisque visant à montrer que toute la mathématique, géométrie comprise, est réductible à la logique.

A. La résolution des paradoxes

À peine achevée la rédaction des *Principles*, Russell découvre le paradoxe qui porte son nom, qui s'ajoute à celui du *Menteur* et à ceux de la théorie des ensembles, connus depuis quelques années. Ayant réfléchi à leur nature, il y décèle la présence de ce qu'il appellera à partir de 1906 un « cercle vicieux », expression empruntée à Henri Poincaré. Il consiste à admettre qu'une classe, qui est déterminée par ses éléments, puisse être définie en la faisant figurer comme un de ses éléments possibles, et qu'une fonction, qui est définie par la valeur qu'elle prend pour chaque argument, puisse prendre pour argument la valeur qu'elle a pour cet argument-là. C'est le cas dans les versions, ensembliste et logique, du paradoxe de Russell : l'ensemble W des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes fait partie des éléments qui définissent W ; un argument possible de la fonction définie par « être un prédicat qu'on ne peut prédiquer de lui-même » est ce prédicat. Un cercle vicieux semblable est à l'œuvre dans le paradoxe du *Menteur*, où la proposition « Je mens » affirme sa propre fausseté. C'est le problème des définitions *non prédicatives*, qui définissent une entité à l'aide d'une totalité à laquelle cette entité appartient, ou de l'*autoréférence*, qui fait qu'une propriété renvoie à elle-même et ajoute sans fin des termes à la classe correspondante.

Puisqu'il faut donc interdire à un ensemble d'être élément de lui-même et à une fonction d'être argument d'elle-même, Russell pose ce qu'il appelle le « principe du cercle vicieux », en 1906 pour les fonctions et en 1910 pour les classes :

> Tout ce qui contient une variable apparente ne doit pas être une des valeurs possibles de cette variable[1].
> Tout ce qui met en jeu *tout* d'une collection ne doit pas être un des éléments de la collection.

Mais ce seul constat ne saurait suffire : il faut une théorie dont ce principe soit la conséquence. Russell a envisagé plusieurs possibilités. La théorie *zigzag* consiste à exiger de toute fonction qui définit une classe qu'elle soit suffisamment simple pour empêcher que l'argument varie en même temps que la fonction. Un concept ou une propriété comme ceux qui donnent naissance au paradoxe de Russell sont alors interdits. Mais cette solution, ébauchée en 1903 et reprise en 1906, a été écartée par Russell car supposant des axiomes trop complexes et d'une évidence logique contestable. La deuxième solution, qui deviendra la « *no-class theory* », est plus radicale puisqu'elle consiste, écrit Russell, « à se passer de la notion de *classe* ou d'*ensemble*, en se servant uniquement de celle de fonction ». Elle est à peine mentionnée dans les *Principles* et en 1906, Russell la trouve très coûteuse.

La solution qui a sa préférence en 1903 est la *théorie des types*, introduite en appendice aux *Principles*, et développée en 1908 et 1910. Cette théorie, dont des prémices se trouvent chez Schröder et chez Frege, est dite aujourd'hui *théorie simple des types* et consiste à hiérarchiser les « domaines de signification (*range of signifiance*) », ou *types*, des formules où apparaissent une ou des variables, conformément à ce que pratique, selon Russell, le sens commun. De même qu'un habitant d'une ville n'est pas habitant de lui-même, qu'une ville appartient non à elle-même mais à un département, et un département non à lui-même mais à une région, etc., Russell distingue les individus, de type 0 (l'habitant de Caen, de Rennes, de Marseille, etc.) ; les classes d'individus, de type 1 (les villes de Caen, de Rennes, de Marseille, etc.) ; les classes de classes, de type 2 (les départements du Calvados, d'Ille-et-Vilaine, des Bouches-du-Rhône, etc.) ; les classes de classes de classes, de type 3 (les régions Basse-Normandie, Bretagne, Provence-Alpes-Côte-d'Azur, etc.) ; et ainsi de suite.

---

1. Comme on le précisera un peu plus loin, une variable est dite apparente lorsqu'elle se trouve dans la portée d'un quantificateur.

La théorie stipule que toute formule doit être d'un type immédiatement supérieur à celui des variables qu'elle contient, ce qui n'interdit pas de considérer une classe comme un individu, mais de regarder, dans une même formule, la classe et les individus qui la composent comme de même type. La relation d'appartenance ne pouvant lier deux individus ou classes de même type, un énoncé tel que $x \in x$ est exclu : que x désigne un individu ou une classe, cet énoncé n'a pas de sens et on ne peut former des totalités qui soient membres d'elles-mêmes. De même, $f(x)$ ne peut avoir de sens que si x est une variable dont les arguments possibles sont tous du même type, et donc pas une valeur de la fonction pour l'un de ces arguments.

Un énoncé qui viole la théorie des types n'est donc pas un énoncé faux : si c'était le cas, la négation de $x \in x$, à savoir $\neg(x \notin x)$ ou $x \in x$, serait vraie, et la difficulté serait déplacée sans être résolue. Les énoncés qui violent la théorie des types sont *dénués de sens*. Ce ne sont pas des propositions fausses, mais de fausses propositions, parce que d'une forme irrecevable. Le principe de bivalence demeure puisque vérité et fausseté ne concernent que les propositions authentiques, c'est-à-dire douées de sens. Une fausse proposition est un énoncé qui comporte une faute de *syntaxe*, comme la formule mathématique $\int x^2 dy$ ou la phrase « Socrate la pluie », qui ne veulent rien dire parce que mal construites. Une formule logique respectant les règles de syntaxe est dite une *expression bien formée*, une expression violant la théorie des types étant une expression mal formée.

La théorie simple des types permet de résoudre les paradoxes portant sur les classes, mais ne suffit pas à résoudre tous les paradoxes. Russell en a eu conscience dès 1903, et il lui est vite apparu que son paradoxe demeurait lorsqu'on l'exprime en termes de propositions et de classes de propositions. En 1908, il a donc adjoint à la hiérarchie des types portant sur les objets une hiérarchie des ordres portant sur les propositions. D'où ce qu'on appelle la *théorie ramifiée des types* : sans entrer dans des détails d'une théorie assez complexe, il faut distinguer, pour chaque type, différents *ordres*, ou *niveaux*, de propositions, et donc de vérité : les propositions sont d'ordre 1, les propositions portant sur les propositions d'ordre 1 sont d'ordre 2, etc. Russell peut alors proposer une solution aux paradoxes comme celui du *Menteur*. La proposition « Je mens » veut dire « Tout ce que j'affirme est faux », proposition qui condense les propositions « J'affirme une proposition fausse d'ordre 1 », « J'affirme une proposition fausse d'ordre 2 », etc., qui sont respectivement d'ordres 2, 3, etc. Comme aucune proposition d'ordre 1 n'est affirmée, la première proposition est fausse. Comme elle est d'ordre 2, la seconde proposition est vraie, et ainsi de suite. Comme on a affaire à des propositions, qui sont vraies ou fausses selon leur ordre, la contradiction disparaît[1].

1. On ne discute pas ici de la difficulté qu'il peut y avoir à affirmer une infinité de propositions.

La théorie des types aura sa place dans l'axiomatisation russellienne de la logique, mais celle-ci doit aussi beaucoup à la doctrine des *symboles incomplets*, mise en œuvre de 1903 à 1910. La *no-class theory* entraînait le bannissement des classes mais, plutôt que d'adopter une solution aussi drastique, Russell a préféré leur imposer un certain nombre de contraintes et les considérer comme de simples expressions, associées aux *fonctions propositionnelles*.

B. Fonctions propositionnelles et descriptions définies

Dans l'esprit de Russell, la théorie des types pour les classes dérive de la théorie des types pour les fonctions. Comme chez Frege, où le concept caractérise les objets qui tombent sous lui, la classe est déterminée par une *fonction propositionnelle*, notion introduite dès 1903 comme une fonction ayant pour valeurs des propositions. Soit l'expression « x est un homme ». Ce n'est pas une proposition puisque, explique Russell, « tant que x reste indéterminé, elle n'est ni vraie ni fausse ». Elle ne le devient que lorsqu'on attribue une valeur à x : « Socrate est un homme », « Jones est un homme » sont des propositions vraies ; « 2 est un homme », « Zeus est un homme », « Pégase est un homme » des propositions fausses. La classe des hommes, c'est donc l'ensemble des valeurs, Socrate, Jones, Pierre, Paul, ..., qui font de la fonction « x est un homme » une proposition vraie.

La notion de fonction propositionnelle permet à Russell de développer, à partir de 1905, la théorie des descriptions, en particulier des *descriptions définies* (« un homme » est, par exemple, une description *indéfinie*). La question est centrale, notamment pour la raison suivante : de même qu'il y a des définitions d'ensemble ou de prédicat qui en fait ne définissent rien, il y a des descriptions qui en fait ne décrivent rien. Frege avait préparé la théorie des descriptions, mais Russell s'en est démarqué. Pour le premier, toute expression désignant un unique individu était un nom propre, que ce soit « Socrate » ou « Le maître de Platon ». L'analyse des difficultés liées au remplacement, dans certains contextes, de « Socrate » par « Le maître de Platon » a conduit le second à la conclusion suivante : si la première expression est un authentique nom propre, ayant un sens par elle-même, la seconde ne l'est pas. C'est une description définie, qui renvoie bien à un unique individu, mais n'a de sens qu'à l'intérieur d'une proposition.

Soit, par exemple, la fonction propositionnelle « x est grec ». Elle donne deux propositions vraies quand on remplace « x » par « Socrate » ou par « Le maître de Platon », mais on ne peut en faire la même analyse logique, bien qu'elles semblent identiques grammaticalement. Russell fait remarquer que « Socrate est grec » est une proposition singulière, avec un sujet, désigné par « Socrate », et un prédicat, « grec », alors que « Le maître de Platon est grec », avec son article défini, a la structure logique suivante : « Il existe un x tel que x est un maître de Platon, et tout y qui est maître de Platon est identique à x, et x est grec ». « Le maître de Platon » désigne donc bien le même individu que « Socrate », mais par le biais d'un prédicat, « maître de Platon ». Derrière la proposition « Le maître de Platon est grec », il y a un double énoncé : *existentiel*, ce qu'atteste la présence de « il existe », que rendra formellement le quantificateur existentiel ; *général*, ici exprimé par le mot « tout », que rendra formellement le quantificateur universel. Une proposition contenant une description définie sera donc vraie si l'individu décrit existe *et* possède la propriété voulue, fausse lorsqu'il n'existe pas, lui attribuer une propriété n'ayant alors pas de sens. Avec cette analyse, l'article défini *le* disparaît et « Le maître de Platon » n'est plus qu'une expression, qu'on peut éliminer.

Cette théorie est un bon « test » pour les logiciens, car elle permet de résoudre un certain nombre de difficultés, dont celles signalées en 1904 par Alexius Meinong. Celui-ci avait remarqué qu'on peut faire figurer comme sujets de propositions vraies des objets dont on sait qu'ils n'existent pas. Par exemple : « Le carré rond est une figure géométrique impossible à tracer », « Une montagne d'or est dure », « Les licornes n'existent pas ». Soit la deuxième de ces propositions : Russell explique que la fonction propositionnelle « x est une montagne et x est en or » est toujours fausse puisque c'est une conjonctive dont les membres ne peuvent être tous deux vrais. Il n'y a donc rien qui soit une montagne d'or et, si cela peut avoir un sens, grammaticalement, d'en faire le sujet d'une proposition, une analyse logique montre qu'elle n'a en réalité pas ce sujet. Plus troublant encore est le cas de la proposition « L'actuel roi de France est chauve », dont Russell a fait une analyse remarquable. C'est une proposition fausse, mais dont la négation apparente, « L'actuel roi de France n'est pas chauve », est tout aussi fausse. Cependant, la fausseté de ces deux propositions ne vient pas de la présence ou de l'absence de cheveux sur le crâne du roi de France, mais du fait qu'aucun individu ne correspond à la description « L'actuel roi de France ». Les deux propositions contiennent en fait la fonction propositionnelle « Il existe un x et x est actuellement roi de France », qui donne une proposition fausse quel que soit x.

C'est la première vraie application de la logique à l'analyse du langage, même si Frege avait ouvert la voie. La logique a évolué : Aristote s'inspirait des langues naturelles pour la constituer, Boole utilisait l'algèbre pour son système de logique, Frege forgea l'idéographie pour en éliminer les défauts de nos langues, Russell s'en est servi pour dévoiler, derrière les formes grammaticales de certaines phrases, leur structure logique. C'est avec ces deux derniers qu'est née la philosophie *analytique*, qui place au cœur de sa méthode l'analyse, notamment logique, du langage dans ses rapports avec la pensée et la réalité.

C. Les *Principia Mathematica*

Les éléments ci-dessus sont réunis, développés et pour certains amendés dans les trois tomes des *Principia Mathematica*, publiés entre 1910 et 1913 et rédigés en étroite collaboration avec Whitehead pour la partie logique et mathématique, Russell traitant seul des questions philosophiques. Ils reprennent le projet logiciste des *Principles* à l'aide d'une écriture symbolique qui doit beaucoup à Peano, que Russell crédite d'avoir libéré la logique symbolique de ce qu'il appelle son « obsession » algébrique. Au début de la préface, les auteurs rappellent que les différentes disciplines mathématiques sont désormais *axiomatisées*, c'est-à-dire que les énoncés de base de l'arithmétique, de la géométrie, de l'analyse, de l'algèbre, etc. sont explicitement formulés, de sorte que chaque théorème en est dérivé et que la théorie correspondante constitue un système. Ils signalent aussi que les travaux récents de Georg Cantor ont conduit la plupart des mathématiciens à adopter la théorie des ensembles, finis et infinis, comme fondement des mathématiques.

Dans la perspective logiciste des *Principia*, il faut réduire la notion mathématique d'ensemble à celle, logique, de fonction propositionnelle, et montrer que les axiomes ensemblistes sont en réalité des théorèmes, dérivables de principes purement logiques, même si Russell, pas plus que Frege, n'a donné les critères permettant de reconnaître les notions et vérités relevant de la logique. Sous réserve que les *Principia* parviennent à formaliser les conditions d'élimination des paradoxes logiques et ensemblistes, leur contenu constituera un système logique achevé, fondant la totalité des mathématiques.

1. Logique des propositions

Le plan général des *Principia* est aujourd'hui adopté par de nombreux traités, selon un ordre de dépendance logique. Après la présentation des notations logiques utilisées, accompagnées de l'explication de ce qu'elles symbolisent, Russell et Whitehead commencent par la *logique des propositions*, qu'ils appellent « théorie de la déduction ». Les principales « idées primitives », comme ils disent, sont les suivantes :

1. Les propositions *simples*, ou *atomiques*, désignées par les lettres p, q, r, etc. Elles ne contiennent, comme par exemple « Le monde est fini », aucune partie qui soit vraie ou fausse. C'est à partir d'elles que sont constituées les propositions *complexes*, ou *moléculaires*, par exemple « Le monde est fini ou infini ».
2. L'*assertion*, notée |-. |- p signifie « Il est vrai que p ». Asserter la proposition « César est mort », c'est faire plus que simplement la considérer. Frege avait fait une distinction voisine.
3. La *négation* et la *disjonction*, respectivement notées ~ et V.

À ces deux derniers opérateurs s'en ajoutent trois autres, que Russell et Whitehead ne tiennent pas pour primitifs :

1. La *conjonction* est notée par un point et définie à l'aide de la négation et de la disjonction : $p \cdot q =_{Df} \neg(\neg p \vee \neg q)$ (le signe $=_{Df}$, dû à Russell, signifie « est défini par »).
2. L'*implication*, appelée « implication matérielle » et notée $\supset$ comme chez Peano, est également définie à l'aide de la négation et de la disjonction : $p \supset q =_{Df} \neg p \vee q$. Russell et Whitehead insistent sur le fait qu'il ne s'agit que d'un connecteur propositionnel, qui n'exprime pas plus de relation entre deux propositions que la conjonction.
3. L'*équivalence* est notée $\equiv$. $p \equiv q$ signifie que p et q ont la même valeur de vérité, ce qui revient à dire que p implique q et réciproquement.

Il y a des ressemblances avec le système fregéen, à ceci près, notamment, que les auteurs des *Principia* ne font pas de l'implication un connecteur primitif, lui préférant la disjonction. C'était l'inverse dans les *Principles* et cette modification répond à l'objectif annoncé au début des *Principia* de diminuer autant que possible le nombre d'idées et de propositions primitives. Entre 1903 et 1910 en effet, celui des premières n'a pas changé, mais celui des secondes a diminué. Les *Principia* compte huit propositions primitives, dont cinq sont d'authentiques axiomes, relatifs à l'implication et à la disjonction, énoncés en langue symbolique, les cinq autres étant plutôt des règles de syntaxe, énoncées en anglais. Russell et Whitehead ne méconnaissaient pas la différence, mais ils ne l'ont pas accusée aussi nettement que le font les manuels de logique d'aujourd'hui. Comme chez Frege, les principes de contradiction et du tiers exclu sont des théorèmes et non des axiomes.

2. Logique des prédicats et axiome de réductibilité

Suit la logique des *prédicats*, dite « théorie des variables apparentes ». Russell et Whitehead symbolisent les fonctions propositionnelles par des lettres grecques (nous conserverons les notations déjà utilisées), les variables par x, y, z, et les constantes par a, b, c. Pour une fonction propositionnelle f à une variable, ils distinguent trois cas, dont seuls les deux premiers retiennent leur attention : $f(x)$ est une proposition vraie pour toutes les valeurs de x, $f(x)$ est une proposition vraie pour quelques valeurs de x, $f(x)$ n'est une proposition vraie pour aucune valeur de x. Apparaissent ainsi les *quantificateurs* : le premier cas correspond à $(\forall x)f(x)$, le deuxième à $(\forall x)f(x)$, le troisième à $(\forall x)\neg f(x)$. Même s'ils notent que la négation permet de définir l'un par l'autre, Russell et Whitehead considèrent les deux quantificateurs comme primitifs, car il leur semble essentiel de conserver leur signification à chacun des mots « tous » et « quelques ». Ce qui vaut pour les fonctions à une variable vaut évidemment pour celles à plusieurs variables.

À la suite de Peano, Russell et Whitehead ont distingué, comme on le fait désormais, variable *réelle*, ou *libre*, et variable *apparente*, ou *liée*[1]. Lorsqu'une formule contient un quantificateur, une variable apparaît nécessairement dans ce qu'on appelle sa *portée*. On dit alors que cette variable est liée à ce quantificateur, une variable non liée étant une variable libre. Dans $(\forall x)f(x) \rightarrow g(x)$, x est liée dans l'antécédent et libre dans le conséquent. Dans $(\forall x)(f(x) \rightarrow g(x))$, x est partout liée, puisque se trouvant, dans ses deux occurrences, dans la portée du quantificateur. On voit sur ces deux exemples combien il est essentiel de respecter les règles de syntaxe sur les parenthèses. De la distinction entre les deux espèces de variables résulte celle entre implication *matérielle* et implication *formelle*. La première concerne deux propositions, la seconde généralise la précédente en liant deux fonctions propositionnelles. Cette dernière est de la forme $(\forall x)(f(x) \rightarrow g(x))$, et Russell et Whitehead lui donnent une importance capitale, en logique parce qu'elle révèle la structure des propositions universelles, en mathématiques parce qu'elle est la forme plus courante de leurs énoncés.

Pour développer le calcul des prédicats, Russell et Whitehead ajoutent aux axiomes et théorèmes de la logique propositionnelle six nouvelles propositions primitives : deux sont des axiomes, relatifs au quantificateur existentiel, deux sont des règles d'inférences, deux sont les formulations en langue symbolique, nécessaires à la théorie des types, de l'axiome de *réductibilité* pour les fonctions propositionnelles. Énoncé pour la première fois informellement en 1908, il postule l'existence, pour toute fonction propositionnelle, d'une fonction *prédicative*, c'est-à-dire d'un ordre immédiatement supérieur à celui de ses arguments, *formellement équivalente* à la fonction donnée. Cela signifie que l'une et l'autre doivent prendre les mêmes valeurs (le vrai ou le faux) pour les mêmes arguments : par exemple, « x est un homme » et « x est un animal rationnel » sont deux fonctions propositionnelles formellement équivalentes.

Pour comprendre l'importance de cet axiome, voyons comment il fonctionne sur un exemple traité dans les *Principia*. Soit la proposition « Napoléon avait toutes les qualités d'un grand général ». Le prédicat « avoir toutes les qualités d'un grand général » n'est pas un prédicat d'ordre 1, sous lequel tomberait l'individu Napoléon, mais un prédicat d'ordre 2 portant sur des propriétés d'individus, lesquelles sont d'ordre 1. Mais supposons que certaines qualités – la bravoure, le sens stratégique, etc. – sont des qualités spécifiques – elles leur appartiennent et à eux seuls – des grands généraux. Il existe donc un prédicat d'ordre 1 – la conjonction des prédicats « être brave », « être fin stratège », etc. – équivalent au prédicat d'ordre 2 ci-dessus, prédicat d'ordre 1 sous lequel tombent les grands généraux et eux seuls, et donc

1. Aujourd'hui, le couple « variable libre/liée » a remplacé le couple « variable réelle/apparente » de Peano et de Russell.

Napoléon. L'axiome de réductibilité dit qu'une telle réduction, qui transforme le prédicat de prédicats donné en la disjonction des prédicats propres à chaque individu de la collection, est toujours possible. Elle ne pose en effet aucun problème, au moins lorsque la collection est finie, restriction dont Russell a conscience.

3. Logique des classes et *no-class theory*

Pour Russell et Whitehead, comme pour Frege, la classe est donc une notion dérivée, du concept chez le second, de la fonction propositionnelle chez les premiers, mais ce n'est qu'une différence terminologique :

> Une classe est l'ensemble des objets qui satisfont une fonction propositionnelle. Chaque fonction propositionnelle détermine alors une classe.

La fonction propositionnelle « x est un homme », par exemple, détermine la classe des hommes. Comme d'autres fonctions déterminent la même classe – « x est un animal rationnel », « x est un bipède sans plume » – on ne peut dire qu'une classe est définie par une fonction propositionnelle. Pour contourner la difficulté, Russell et Whitehead utilisent à nouveau les fonctions *formellement équivalentes*. Les fonctions « x est un homme », « x est un animal rationnel » et « x est un bipède sans plume », qui ne sont pas matériellement équivalentes car elles ne déterminent pas la classe des hommes de la même façon, le sont formellement, puisqu'elles ont la même valeur de vérité pour les mêmes arguments. Deux fonctions formellement équivalentes ont la même extension, et déterminent donc la même classe. Moyennant la résolution d'une difficulté supplémentaire dont on ne parlera pas ici, une classe est l'extension commune à toutes les fonctions propositionnelles mutuellement équivalentes. Avec la théorie des types munie de l'axiome de réductibilité pour les classes, il est impossible de construire des classes donnant lieu à des paradoxes comme celui de Russell.

Comme celle de description définie, la notion de classe n'a de sens que contextuellement et, dérivée de celle de fonction propositionnelle, elle est éliminable. Descriptions définies et classes sont pour Russell des *symboles incomplets*, des *fictions logiques* dira-t-il plus tard. En mathématiques, un symbole comme $\int_b^a$ est incomplet, car il n'a de sens que si on lui ajoute quelque chose qui lui donne une signification, $f(x)dx$ par exemple. En français, comme on l'a vu, la description définie « Le maître de Platon » est aussi un symbole incomplet. Il n'est pas non plus nécessaire, selon Russell et Whitehead, de supposer qu'il y a vraiment une entité telle que *la* classe des hommes. Lorsqu'on dit que « la classe des hommes est incluse dans celle des mortels », on ne dit rien d'autre que « tous les hommes sont mortels » et on affirme quelque chose des hommes et des mortels, sans avoir besoin ni de *la* classe des hommes, ni de *la* classe des mortels en tant que telles. Il n'est donc pas indispensable de donner aux classes le même statut qu'aux individus : tout ce que la mathématique et la logique exigent des premières, expliquent les auteurs des *Principia*, peut être atteint sans supposer qu'il y a des classes, simples « objets symboliques » dérivant de la notion de fonction propositionnelle, laquelle suffit donc.

C'est la nouvelle version, esquissée en 1906 et désormais fondée sur l'idée de symbole incomplet, de la *no-class theory*. Russell n'affirme pas dogmatiquement qu'il n'y a rien de tel que les classes, mais il ne veut pas non plus être obligé d'affirmer leur existence, et s'épargne toute hypothèse quant à des entités qu'il juge douteuses. Appliquant le « rasoir d'Ockham » – « il ne faut pas multiplier les entités sans nécessité » –, il choisit d'assurer à son système le maximum de « sécurité logique », la *no-class theory* évitant les cercles vicieux à l'origine des paradoxes. Il n'est donc pas interdit de parler de « classes », mais il doit toujours être possible de remplacer le terme par une expression où il est absent.

C'est sur cette base que Russell et Whitehead ont développé un calcul des classes. Il vient pour l'essentiel de Peano mais, avec la théorie des types pour les classes, il y a une classe universelle et une classe vide pour chaque type d'objets. Privilégiant la notion de fonction, les auteurs des *Principia* ont donné la priorité à l'intension sur l'extension, sans rejeter cette dernière, adoptant un point de vue semblable à celui défendu par Frege :

> Tandis que la logique mathématique exige des extensions, la logique philosophique refuse de fournir autre chose que des intensions. Notre théorie des classes en prend acte et réconcilie ces deux faits apparemment opposés en montrant qu'une extension (qui est la même chose qu'une classe) est un symbole incomplet dont l'usage acquiert toujours son sens au moyen d'une référence à l'intension.

4. Logique des relations

La logique des *relations*, dont Russell dit en 1903 qu'elle est en rapport immédiat avec la mathématique, est un domaine où les *Principia* ont particulièrement innové, dans une théorie tenue pour « exactement analogue » à celle des classes. Prise en extension, comme chez Schröder et Peirce, une relation est une classe de couples (x, y), où x et y sont en relation. Ils prétendaient alors transposer à la logique des relations les théorèmes de l'algèbre de la logique des classes. Mais la première est en réalité plus complexe que la seconde et, explique Russell dans les *Principles*, la théorie de ses prédécesseurs souffre précisément de ce qu'ils voient avant tout une relation comme une classe de couples : or, la notion d'ordre, essentielle à celle de relation, est étrangère à celle de classe. Dans (x, y), il faut pouvoir distinguer la place de x et la place de y : un couple n'est pas une paire (qu'on note $\{x, y\}$), mais une paire *ordonnée*. Il semble donc impossible de réduire le calcul des relations à celui des classes.

Pour Russell et Whitehead, on ne peut correctement distinguer la relation allant de x à y de sa relation *converse*, qui va de y à x, qu'en adoptant le point de vue de l'intension. Une relation est donc déterminée par une fonction à deux arguments, qu'ils notent $\boldsymbol{R}$. La classe des couples (x, y) dérive donc de la fonction propositionnelle $x\boldsymbol{R}y$, où x est le *référent* et y le *relatum*. Ils montrent alors, plus facilement que dans une théorie extensionnelle, que toute relation a une relation converse, qu'ils notent $\breve{\boldsymbol{R}}$ comme Schröder. C'est ainsi que la classe de couples (Paris, France), (Madrid, Espagne), (Londres, Grande-Bretagne), etc. est déterminée par la relation « est la capitale de », et que la classe de couples (France, Paris), (Espagne, Madrid), (Grande-Bretagne, Londres), etc. l'est par sa converse, « a pour capitale ».

La théorie des relations étant analogue à celle des classes, les symboles des premières sont aussi incomplets que ceux des secondes, il y a une *no-relation theory* et une version de l'axiome de réductibilité. Il s'ensuit aussi qu'une partie du calcul des relations n'est qu'une extension du calcul des classes. Mais les relations ont également des propriétés dont on ne peut traiter facilement en termes de classes, notamment celles examinées par De Morgan. Il faut également distinguer deux types de produit, ce que Peirce avait déjà fait. Soient les relations « ami de » et « collègue de ». Leur produit logique × est comme l'intersection de deux classes, c'est-à-dire « ami *et* collègue de ». Leur produit *relatif* / est « ami *du* collègue de », qui n'a ni le même sens ni les mêmes propriétés : le premier est commutatif – « collègue *et* ami de » veut dire la même chose que « ami *et* collègue de » –, pas le second – « ami *du* collègue de » et « collègue *de* l'ami de » ne sont pas synonymes. Avec le produit relatif apparaît la *puissance* $\boldsymbol{R}^2$ d'une relation : si $\boldsymbol{R}$ est la relation « père de », $\boldsymbol{R}^2 = \boldsymbol{R} / \boldsymbol{R}$ est la relation « grand-père paternel de », différente de $\boldsymbol{R}$. En général, le produit relatif, contrairement au produit logique, ne satisfait pas à la loi d'idempotence. Ce n'est le cas que pour les relations transitives, comme « frère de ». L'analogie entre calcul des relations et calcul des classes est ici perdue.

Outre cette étude des propriétés des relations, Russell et Whitehead se sont aussi intéressés à des notions entièrement nouvelles : le *domaine*, le *domaine converse* (ou *co-domaine*) et le *champ* d'une relation, qui sont respectivement la classe de tous ses référents, la classe de tous ses relata et la réunion des deux classes. Soit la relation « père de » : son domaine est la classe des pères, son co-domaine la classe des enfants, son champ la classe des pères et des enfants. Le champ d'une relation n'est pas son extension : celle-ci est une classe de couples, celui-là une classe d'individus. Avec cette étude des relations, complétée par celle des relations à plus de deux termes, Russell et Whitehead ont dépassé les résultats obtenus par Peirce et développé une théorie devenue désormais un classique de la logique des relations.

D. Logique et fondement des mathématiques

Les analyses logiques de Russell visaient au départ à fonder solidement les mathématiques et, dans le cadre du projet logiciste, de mettre au défi ses opposants d'indiquer, dans les *Principia*, « le point précis où selon eux finit la logique et commencent les mathématiques », dira-t-il en 1919. Le projet a-t-il abouti ? Russell a maintenu que oui, malgré quelques réserves, dont celles portant sur les axiomes de *réductibilité* et de l'*infini* et l'axiome *multiplicatif*. Ce dernier correspond à la version que Russell a donnée d'un axiome de la théorie des ensembles, l'*axiome du choix*, contesté par certains mathématiciens. Lui-même ne le considérait pas comme relevant de la pure logique, ni comme absolument indispensable aux mathématiques, mais il convenait de son utilité. Du fait de la complexité des problèmes liés à l'axiome du choix, on dira simplement que Russell a, comme d'autres, longtemps douté de sa vérité, ou au moins de son évidence.

L'axiome de l'*infini* est lié à la définition russellienne des entiers naturels. Très proche de celle de Frege, elle consiste *grosso modo* à dire qu'un nombre est une classe de classes en bijection. Par exemple, 2 est la classe de tous les duos ou, plus exactement, la classe définie par ce que tous les duos, et eux seuls, ont en commun (à savoir de compter deux éléments). De même, 3 est la classe de tous les trios, etc.[1]. Mais rien ne garantit que la suite de nombres ainsi formée sera infinie, comme l'est l'ensemble des entiers naturels. Si l'univers ne compte qu'un nombre fini n d'individus, il n'y a pas de classe contenant plus de n objets, et on ne peut définir aucun nombre plus grand que n. La théorie des types interdit en effet de former indéfiniment des classes à partir d'un nombre fini d'individus, en ajoutant à ceux-ci des classes de ces individus, puis des classes de ces classes, etc. Pour fonder logiquement l'arithmétique, Russell a donc besoin d'un axiome affirmant l'existence d'un nombre infini d'objets dans le monde. Mais c'est là une hypothèse empirique discutable, qui ne fait pas de l'axiome de l'infini un principe logique. Russell en est vite convenu, et à la fin des années 1950, il admit que « le logicien ne pouvait se permettre d'avoir une opinion sur le sujet ».

1. La circularité de ces définitions n'est qu'apparente : dans la théorie de Russell, duo, trio, etc. sont définis de manière purement logique.

L'axiome de réductibilité est le seul de ceux dont nous parlons à appartenir au système logique des *Principia*. Il a été posé dans le seul but d'éviter les paradoxes, grâce à la théorie des types. C'est donc un axiome *ad hoc*, destiné à résoudre un problème spécifique. Russell a reconnu que sa vérité peut sembler douteuse, mais comme les théorèmes qui en découlent paraissent, eux, incontestables, il jugeait difficile de l'écarter. Mais il admit que cette justification empirique ou pragmatique ne donne pas à l'axiome l'évidence et la nécessité d'un principe purement logique et conclut qu'il fallait viser à s'en passer le plus souvent possible :

> C'est un défaut, écrit-il en 1919, d'admettre l'axiome de réductibilité dans un système de logique. Il y a encore du travail à faire au sujet de la théorie des types, dans l'espoir qu'on pourra parvenir à une théorie des classes qui n'exige pas une hypothèse aussi douteuse.

La théorie des types a l'avantage de résoudre les paradoxes connus, mais, restreignant l'ensemble de définition des fonctions propositionnelles et le champ de la relation d'appartenance, elle a l'inconvénient de limiter l'universalité des lois logiques. Cela a une conséquence coûteuse pour les mathématiques : la généralité n'y est plus exprimable que pour un ordre donné. C'est parce qu'il défendait l'universalité de la logique que, face aux paradoxes, Frege avait abandonné le logicisme. C'est pour le défendre que le système des *Principia* intègre à la logique un axiome qui prétend la restaurer, mais sans avoir toutes les qualités d'un principe purement logique. De nombreux logiciens et mathématiciens du XX^e^ siècle le jugeront d'ailleurs inacceptable.

Malgré ses propres réserves sur cet axiome, Russell a toujours été convaincu qu'*une* théorie des types était indispensable, sous une forme à déterminer. Il a admis que la sienne était insuffisante, et l'a reformulée en 1925, dans la seconde édition des *Principia*, mais c'est son dernier apport à la logique proprement dite. Il n'a jamais non plus renié le logicisme. Sous les traits que lui ont donné Frege et Russell, il a pourtant été mis en échec. Cela ne condamne pas leur regard sur le fondement des mathématiques : d'abord parce que les « erreurs » sont souvent fécondes, ce qu'attestent les discussions qui eurent alors lieu et se poursuivent aujourd'hui, autour du néo-logicisme ; ensuite parce que la logique russellienne, même amendée et « expurgée » de l'axiome de réductibilité, constitue une part essentielle de la logique standard. Ce n'est pas négliger l'antériorité de Frege, mais la profondeur de ses travaux n'a pas été tout de suite reconnue. Russell a contribué à cette reconnaissance, et on retrouve chez lui la plupart des innovations de son prédécesseur, imposées grâce à une axiomatisation et une organisation de la logique qu'on retrouve dans les manuels actuels de logique, et à une écriture symbolique devenue, à quelques variantes près, la langue commune des logiciens, à l'exception notable de Łukasiewicz. Les *Principia* seront d'ailleurs, jusque dans les années 1930, l'ouvrage de référence de la logique mathématique.

III. AUTOUR DES *PRINCIPIA MATHEMATICA*

La théorie ramifiée des types et son axiome de réductibilité, et l'œuvre logique de Russell en général, donnent une réponse aux paradoxes logiques et mathématiques, mais ce ne fut pas la seule à l'époque. Dans une perspective voisine, Frank Ramsey a distingué en 1926 les paradoxes purement *logiques*, relatifs à des objets logico-mathématiques comme les classes, les prédicats ou les nombres, et les paradoxes *sémantiques*, qui font plutôt référence à la pensée, au langage ou au symbolisme, comme le paradoxe du *Menteur*. Il a prouvé que la théorie simple des types suffit à éviter les premiers. Pour les seconds, il a hiérarchisé les propositions, à l'aide d'une théorie des ordres différente de celle de Russell, car indépendante de celle des types. Ce dernier a reconnu l'intérêt de cette stratégie, qui lui rappelait sa propre réponse au *Menteur*. Tarski montrera ensuite, en 1933, que la distinction des niveaux de langage permet de résoudre de telles antinomies.

Malgré les réserves exprimées sur l'axiome de réductibilité, la théorie des types a continué de jouir d'un grand prestige. Dans *La syntaxe logique du langage* de 1934, Rudolf Carnap, un élève de Frege, a présenté un système formel pour la logique adoptant une forme de théorie des types et dans leurs importants travaux du début des années 1930, Gödel et Tarski choisirent de se référer au système logique des *Principia*. À l'époque, la théorie des types, parfois reformulée, conservait donc une grande influence. Elle commençait pourtant d'être supplantée par la logique du *premier ordre*, moins puissante mais plus sûre que la logique russellienne, car ne faire porter les quantificateurs que sur des variables d'individus élimine bien des difficultés[1].

Au même moment, la logique des *Principia* subissait quelques aménagements. Norbert Wiener en 1914 et Kasimierz Kuratowski en 1921 montrèrent qu'il est possible de fonder la logique des relations sur la notion de classe ou d'ensemble. Henry Sheffer prouva en 1913 que l'*incompatibilité* suffit à définir tous les opérateurs de la logique propositionnelle, découverte que Peirce avait anticipée. Fort de ce

1. Les expressions « logique du premier ordre » et « calcul (ou logique) des prédicats » sont aujourd'hui synonymes. Quand on autorise la quantification sur des variables de prédicats, on parle de « logique du second ordre ».

résultat, Jean Nicod montra en 1917 qu'un seul axiome permet de fonder toute la logique propositionnelle. Enfin, Paul Bernays établit en 1926 qu'un des axiomes de la logique propositionnelle des *Principia* est en réalité démontrable à l'aide des autres.

C'est alors qu'apparut l'idée de définir tous les connecteurs par leur table de vérité, comme on l'a vu pour l'implication. Cela modifie grandement la logique de Frege et de Russell. À leur point de vue *syntaxique*, consistant à traiter de la vérité d'une formule en la dérivant des axiomes du système, s'est dès lors opposé le point de vue *sémantique*, qui atteint le même résultat en se fondant sur les conditions de vérité de ce qui compose cette formule. La seconde option, pédagogiquement plus simple, a été largement adoptée par les auteurs des manuels actuels de logique élémentaire. Frege et surtout Peirce en avaient donné une approche, mais la *méthode des tables de vérité*, due à Post et Wittgenstein en 1921, va plus loin en substituant à la liste des opérateurs primitifs et des axiomes les concernant, celle, exhaustive, de toutes les combinaisons possibles des valeurs de vérité pour deux propositions. Le point de vue sémantique a également le mérite d'assurer qu'on peut donner la valeur de vérité de n'importe quelle formule de la logique propositionnelle. Et dès lors qu'on peut se passer d'axiomes, le chemin est ouvert pour donner à la logique non pas des *lois*, énoncées dans une langue qui lui est propre, mais des *règles*, énoncées dans une métalangue portant sur la première et utilisant la langue naturelle. C'est sur cette base qu'est née en 1934 la « méthode de la déduction naturelle » de Gerhard Gentzen.

IV. FORMALISME ET PROGRAMME DE HILBERT

Quelques-uns des apports qui précèdent s'inscrivent dans un cadre différent de celui adopté par Frege et Russell, et s'inspirent en partie des travaux de Hilbert et de ses disciples. En même temps qu'ils proposaient, à l'époque où paraissaient les *Principia*, une solution mathématique aux paradoxes et une autre conception du fondement des mathématiques, dite *formaliste*, ils s'intéressaient aux propriétés qu'on est en droit d'attendre d'un système axiomatique. C'est ainsi que sont nées, dans le premier quart du XX^e siècle, l'*axiomatique formelle* et la *métamathématique*.

A. Les débuts de l'axiomatique formelle

Comme on l'a déjà dit, la fin du XIX^e siècle a vu l'*axiomatisation* de diverses disciplines : la géométrie, à la suite de l'apparition des géométries non euclidiennes, qui nient la vérité du postulat d'Euclide sur les parallèles – « par un point extérieur à une droite, il passe une parallèle et une seule » – ; l'arithmétique, avec Dedekind et

Peano ; la logique, avec Frege et Russell. Sur un modèle qui rappelle celui d'Euclide, ces derniers expliquent les notions primitives qu'ils tiennent pour indéfinissables ou choisissent de ne pas définir et énoncent les axiomes qu'ils tiennent pour indémontrables ou choisissent de ne pas démontrer.

À la toute fin du XIX^e siècle, un infléchissement s'est produit avec divers travaux sur les fondements de la géométrie et les axiomatiques de Dedekind et de Peano pour l'arithmétique qui se démarquaient du modèle euclidien, le second posant en outre explicitement le problème de l'*indépendance* des axiomes de la géométrie (un axiome est indépendant d'autres axiomes si ces derniers ne permettent pas de le démontrer). La découverte de paradoxes, en logique et en théorie des ensembles, et les polémiques qui en ont découlé, ont accentué ce mouvement. Puisque le logicisme et la théorie des ensembles semblaient montrer leurs limites, certains ont tâché de trouver une autre manière de fonder la logique et les mathématiques. L'une d'elles est l'*axiomatique formelle*, née en 1899 avec la parution des *Fondements de la géométrie* de David Hilbert. Mathématicien allemand de renommée mondiale, il fonda à l'université de Göttingen, une véritable école de pensée, qui attira de nombreux logiciens, mathématiciens et physiciens.

Hilbert a transformé la méthode axiomatique : d'une part, il a progressivement adopté le principe selon lequel le raisonnement porte sur des signes, et non sur leur contenu ; d'autre part, il a soutenu de plus en plus fermement que les mathématiques et la logique doivent être reconstruites simultanément. Frege et Russell avaient axiomatisé la logique et poussé la formalisation au point de créer une langue spécifique pour en exprimer le contenu, mais ils insistaient sur l'existence d'intuitions logiques élémentaires et sur le fait qu'un signe et une proposition logique ou mathématique ont une signification univoque. Frege, en particulier, ne cessa de condamner le formalisme en arithmétique, supposé interdire son application à la numération et empêcher toute référence à la vérité. Même si l'idéographie était destinée à formaliser totalement la déduction logique, on n'y raisonnait pas sur des signes, mais sur leur contenu. Bref, il y a une différence entre *formalisation*, c'est-à-dire mise en forme d'un contenu, et *formalisme*, c'est-à-dire exclusion du contenu au profit de la forme.

Hilbert a défendu l'une et l'autre, en privilégiant le formalisme. Pour lui, sur ce point bien plus proche de Boole que de Frege, les signes mathématiques sont dénués de sens en eux-mêmes, et c'est sur ces signes qu'il faut raisonner, avant de leur donner une interprétation adéquate. Dans l'axiomatique formelle hilbertienne, il n'y a donc plus lieu de parler de notions primitives qu'il faudrait expliquer faute de pouvoir les définir, ni de considérer les axiomes comme des énoncés relatifs à des « objets ». Les premières ne seront que nommées, les seconds énonceront de simples relations entre des désignations. Dans les *Fondements de la géométrie*, Hilbert ne donne pas de définitions *explicites* des « point », « droite », « plan », etc. de la géométrie, mais une liste d'axiomes décrivant les relations – « se trouver sur », « parallèle à », etc. – possibles entre ces « choses ». C'est ce qu'il appellera plus tard une *détermination implicite* : point, droite et plan sont caractérisés par le système d'axiomes dans sa totalité. De même, dans *Sur le concept de nombre* paru en 1900, c'est la totalité des axiomes qui définit ce qu'on appelle « nombres » ou, plus exactement, donne la liste des propriétés que possède l'ensemble des nombres réels.

Ce point de vue conduit à mettre en avant, comme Boole, mais en la précisant, la notion d'*interprétation*. Selon, par exemple, qu'on conserve ou non le postulat d'Euclide sur les parallèles, on obtiendra des géométries distinctes. La volontaire ambiguïté des termes utilisés en 1899 permet en outre d'utiliser les mêmes axiomes pour des domaines des mathématiques autres que la géométrie, selon la signification, ou interprétation, donnée aux mots « point », droite » et « plan ». Il y aura ainsi différents *modèles* de la géométrie euclidienne : elle-même bien entendu, mais aussi et en particulier, l'ensemble $\mathbb{R}^3$ des triplets de nombres réels, puisqu'un point est déterminé par ses coordonnées dans un repère. On dit alors que ces deux modèles sont identiques à un isomorphisme près. Une formule logique aussi a différents modèles. Soit $(\forall x)P(x)$ et l'univers des nombres : cette forme propositionnelle admet pour modèle l'ensemble des entiers naturels et le prédicat « x a un successeur », car ils la rendent vraie, mais pas le même ensemble et le prédicat « x a un prédécesseur », qui la rendent fausse (0 n'a pas de prédécesseur).

B. Le problème de la non contradiction

Dans une axiomatique formelle « à la Hilbert », les explications ou circonlocutions destinées à faire entendre le contenu intuitif des notions primitives disparaissent. Rien d'autre que les axiomes n'est dit à leur propos. Il n'y a plus lieu non plus de demander à ceux-ci, comme il était convenu depuis Euclide, d'être intuitifs, évidents, ou même vrais. En revanche, il est capital qu'ils constituent un système *cohérent*. On ne veut pas seulement qu'ils ne se contredisent pas entre eux, on exige qu'il soit impossible d'en dériver une contradiction, c'est-à-dire de démontrer une proposition et sa négation, ce que serait prouver $1 \neq 1$, par exemple. Un renversement important s'est produit. À Frege, qui soutient que l'existence d'une notion implique sa non contradiction et que de « la vérité des axiomes, il suit qu'ils ne se contredisent pas », Hilbert répond en 1899 :

> Si les axiomes arbitrairement posés avec toutes leurs conséquences ne se contredisent pas, ils sont vrais et les choses qu'ils définissent existent. C'est pour moi le critère de la vérité et de l'existence.

Ce point de vue a une double conséquence. La première est qu'il faudra démontrer pour les axiomes de l'arithmétique et de la géométrie et, plus généralement, pour tout système d'axiomes destiné à fonder les mathématiques, leur *cohérence*, *consistance* ou *non contradiction* – ces termes sont synonymes. La seconde est l'intérêt de la notion de modèle. Toute propriété, dont la non contradiction, qui vaut pour un modèle d'un système d'axiomes vaut pour tout modèle qui lui est isomorphe. En 1900, dans une conférence donnée à Paris lors du IIe congrès international des mathématiciens, Hilbert a donné une liste de vingt-trois problèmes à résoudre. Après avoir affirmé que tout problème mathématique est susceptible d'une solution, « soit par une réponse directe à la question posée, soit par la démonstration de l'impossibilité de la résolution », il énonce le deuxième problème, « De la non contradiction des axiomes de l'arithmétique » :

> Démontrer que les axiomes ne sont pas contradictoires ; c'est-à-dire démontrer qu'en se fondant sur les axiomes l'on ne pourra jamais arriver à des résultats contradictoires au moyen d'un nombre fini de déductions logiques.

Jusque-là, à l'aide de modèles, Hilbert avait produit des démonstrations de consistance *relative* : ainsi avait-il prouvé que si la géométrie euclidienne est non contradictoire, les géométries non euclidiennes le sont aussi, et que, si l'arithmétique est non contradictoire, la géométrie euclidienne l'est aussi. De proche en proche, il aboutit à la nécessité de démontrer la consistance *absolue* de l'arithmétique, absolue parce que ne pouvant être réduite, sans circularité, à celle d'une autre théorie : elle « demande à être effectuée par voie directe », conclut-il.

C. Un programme de fondement des mathématiques

Dans un article de 1905, *Sur les fondements de la logique et des mathématiques*, Hilbert a précisé son programme de fondement formaliste des mathématiques. De façon tout à fait nouvelle, il n'y assigne ni à une discipline telles que la logique ou l'arithmétique, ni à un objet tel que le nombre entier, mais à une *méthode*, l'axiomatique formelle, le soin de fonder la mathématique, en une sorte d'*autofondation*. Avec les logicistes, Hilbert convient qu'il faut formaliser rigoureusement l'inférence logique, et avec ceux qui ne le sont pas, que le concept de nombre entier est un concept primitif, irréductible à la logique. Dans le projet formaliste, il y a donc aussi l'idée, esquissée en 1905 et développée dans les années 1920, qu'il faut construire simultanément la logique et l'arithmétique. Formaliser cette dernière, ce sera donc aussi formaliser les lois logiques qu'on y utilise.

On n'entrera pas ici dans le détail de l'article de Hilbert, qui ne fait qu'esquisser ses recherches, notamment sa démonstration de non contradiction de l'arithmétique. Il y considère des « objets de pensée » ou « choses », désignés par des symboles[1]. Les deux premiers, que l'on peut agréger à loisir, sont 1 et =. En utilisant le même symbole pour distinguer la classe de ce qui est de la classe de ce qui n'est pas et les énoncés corrects des énoncés incorrects, Hilbert peut édifier l'arithmétique et la logique dans le même mouvement, car ses « signes » correspondent aussi bien à un nombre qu'à une proposition arithmétique ou à une proposition logique[2]. Il introduit ensuite l'implication, la conjonction, la disjonction et les fonctions propositionnelles, où la variable ne prend ses valeurs que dans le domaine des objets précédemment construits, ce qui évite les paradoxes liés à l'idée de totalité des choses. 1 et = sont définis par deux axiomes, cependant que trois nouveaux symboles, pour *ensemble infini*, *successeur* et *opération successeur*, sont accompagnés de trois axiomes supplémentaires, empruntés à Peano. Cela suffit pour l'arithmétique élémentaire et Hilbert prétend ensuite prouver, ou du moins indiquer comment prouver, qu'il est impossible de déduire de ces axiomes des énoncés contradictoires, comme 11 = 111 (11 et 111 sont ici des assemblages de 1 et non les nombres onze et cent onze).

La démonstration de Hilbert a immédiatement été critiquée, notamment par Poincaré, qui y décela un double cercle : l'utilisation d'expressions numériques, qui présupposent ce qu'il faut définir, et l'application implicite d'un principe arithmétique, dit d'*induction complète*, qu'il faut au contraire justifier. Il conclut qu'aucune définition du concept de nombre entier ne peut se passer totalement de l'intuition. Hilbert a admis la seconde objection, mais n'est revenu à sa démonstration qu'à partir de 1922, en distinguant les principes à fonder, qui relèvent de la *mathématique*, de ceux qu'on utilise pour ce fondement, qui relèvent de la *métamathématique*.

D. La métamathématique hilbertienne ou théorie de la démonstration

Au sens large, la *métamathématique* est l'étude des propriétés des théories mathématiques formalisées. Par exemple, 2 + 3 = 5 est une formule de l'arithmétique car elle ne contient que des signes arithmétiques, mais l'assertion « 2 + 3 = 5 est une formule arithmétique » n'appartient pas à proprement parler à l'arithmétique, mais à la métamathématique en ce qu'elle dit quelque chose de 2 + 3 = 5. La question de la consistance de l'arithmétique n'est pas une question de pure arithmétique, mais bien de métamathématique. Chez Hilbert, cette dernière coïncide

1. À partir de 1922, les symboles seront les objets de pensée eux-mêmes.
2. Par exemple, 1 = 1 est à la fois une proposition arithmétique et le signe que cette proposition est correcte.

à partir de 1922 avec ce qu'il appelait « théorie de la démonstration », ce qui la restreint aux méthodes qu'il mettait en œuvre pour prouver la non contradiction de l'arithmétique.

En 1922, Hilbert est parti de l'idée qu'il y a, préalablement à tout raisonnement assuré, quelque chose d'intuitif qui est donné à l'expérience sensible. Ce donné sensible, ce sont les *signes* :

> Les objets de l'arithmétique sont les signes eux-mêmes. *Au commencement est le signe*, telle est la loi ici.

Le traitement intuitif de ces signes suffit pour l'arithmétique élémentaire, qui a pour base des objets tels que les chiffres et les signes =, >, <, etc. Objets que Hilbert dit *concrets* et sur lesquels on raisonne de façon que l'arithmétique ne soit constituée que de propositions *finitistes*, c'est-à-dire ne portant que sur des totalités finies. On peut contrôler ces raisonnements, et cette arithmétique élémentaire, ou *à contenu* comme dit Hilbert, n'a besoin ni de formalisation ni de preuve de consistance. Pour obtenir l'arithmétique et la mathématique qui traitent de l'infini, que Hilbert appelle *abstraites*, il faut formaliser l'arithmétique tout entière, lois logiques et démonstrations comprises. Il y aura donc, outre la mathématique *à contenu*, une mathématique dite *formelle*, auxquelles se superpose la métamathématique ou théorie de la démonstration :

> Dans cette métamathématique, on travaille sur les démonstrations de la mathématique proprement dite, et ce sont ces démonstrations qui deviennent l'objet de l'étude contentuelle.

La tâche de cette métamathématique sera notamment de prouver la consistance de l'arithmétique, en adoptant donc, non les méthodes de la mathématique formelle, mais celles de la mathématique *à contenu*. Les démonstrations étant des suites finies de formules et donc des objets concrets, les raisonnements de la métamathématique pourront n'utiliser que des méthodes *finitistes*. C'est à cette occasion que Hilbert a introduit la « méthode des éléments *idéaux* », qui permet d'étendre le domaine de l'arithmétique. Pour la justifier, il a ajouté aux axiomes *finitistes* de la logique et de l'arithmétique « classiques », un axiome, dit *transfini*, qui permet de transformer les propositions existentielles et universelles portant sur un domaine infini d'individus en des propositions portant sur un unique individu. Cet axiome ne dit pas que l'individu en question existe *réellement*, mais qu'on peut faire comme s'il existait. Avec cet axiome, qui assure que les méthodes non finitistes ne risquent pas de rendre démontrable ce qui ne le serait pas sans elles, la théorie de la démonstration peut fonctionner comme l'arithmétique élémentaire. Reste à prouver la non contradiction de l'arithmétique :

Partout où on emploie la méthode axiomatique, répète Hilbert en 1925, apparaît le problème de prouver la non contradiction. Puisque notre théorie de la démonstration, grâce à la méthode des éléments idéaux, rend possible cette étape terminale, elle constitue la clef de voûte de la construction axiomatique.

E. Le programme de Hilbert

Au programme hilbertien de formalisation des mathématiques et de démonstration de consistance de l'arithmétique sont attachés une conception des mathématiques et un certain nombre d'autres problèmes métamathématiques. Si ce programme est réalisable, cela signifie qu'il est possible, étant donnée la manière dont Hilbert conçoit la métamathématique, de *mécaniser* le raisonnement, en le réduisant à un pur calcul sur des signes. Cela conduit à l'*Entscheidungsproblem* (« problème de la décision »), formulé en 1928 : existe-t-il une procédure *finie* permettant de déterminer si toute formule de la logique du premier ordre en est ou non un théorème ? Plus généralement, le « problème de la décision » pose la question pour un système formel donné[1]. Avec une telle procédure, il serait possible d'établir *a priori* qu'aucune contradiction ne résulte des axiomes de ce système.

En définitive, ce qu'on appelle le « programme de Hilbert » suppose de faire de l'arithmétique, et donc de la totalité des mathématiques, un système formel reposant sur une liste d'axiomes au sens hilbertien. Mais cela n'est possible que si on a l'assurance que ce système formel est :

1. *consistant*, *cohérent*, ou *non contradictoire*, c'est-à-dire qu'il est impossible de démontrer une formule du système et sa négation à partir des mêmes axiomes ;
2. *complet*, c'est-à-dire que toute formule du système, ou sa négation, est démontrable à partir des axiomes ;
3. *décidable*, c'est-à-dire qu'il existe un *algorithme*, à savoir un procédé de calcul constitué d'une suite finie d'instructions, permettant de déterminer, pour toute formule du système, si elle est démontrable ou non, et, dans le premier cas, de la démontrer.

1. Originellement, l'*Entscheidungsproblem* ne concernait que la logique du premier ordre. On lui réservera donc l'original allemand et on parlera de « problème de la décision » pour les systèmes formels en général.

Les « définitions » ci-dessus appellent quelques explications (dans ce qui suit, G est une formule d'un système formel) :

1. Il faut distinguer le couple *démontrable/réfutable* – il existe une preuve de G/il existe une preuve de non-G – relatif à la *complétude*, et le couple *démontrable/non démontrable* – il existe une preuve de G/il n'existe pas de preuve de G – relatif à la *décidabilité*.
2. Il faut distinguer la *décidabilité* de G relativement à un système formel donné (G est démontrable ou réfutable dans ce système) et la *décidabilité* du système lui-même (il existe une procédure permettant de déterminer si toute formule est démontrable ou non dans ce système).
3. L'existence d'une formule G *indécidable* dans un système formel prouve que ce système n'est pas *complet*.
4. La *décidabilité* d'un système formel n'entraîne pas sa *complétude*, puisque de ce qu'il existe une procédure permettant de décider pour toute formule si elle est démontrable ou non, il ne suit pas que toute formule soit démontrable ou réfutable.
5. La *complétude* d'un système n'entraîne pas sa *décidabilité*, puisque de ce que toute formule est démontrable ou réfutable, il ne suit pas qu'il existe une procédure, la même pour toutes les formules, permettant de déterminer si toute formule est ou non démontrable.
6. Enfin, la décidabilité des mathématiques ne transformerait pas forcément le mathématicien en une simple machine. À supposer qu'un algorithme existe, il pourrait être si complexe qu'il soit inefficace pratiquement lorsqu'il s'agit de prouver une proposition mathématique.

On a vu comment Hilbert a posé la question de la non contradiction de l'arithmétique. Il a fait de même pour sa *complétude* (syntaxique)[1] en 1928, après avoir fait émerger celle de sa décidabilité en 1918. Il a été assez vite montré que certains systèmes formels satisfont à quelques-unes des exigences du programme de Hilbert. Le cas le plus simple est celui du calcul propositionnel, dont la méthode des tables de vérité, qui permet de déterminer à tout coup les conditions de vérité et de fausseté d'une proposition, suffit à prouver la décidabilité. Post l'a fait en 1921, de même que pour sa consistance et sa complétude (sémantique). Dès 1915, Leopold Löwenheim avait montré la dédidabilité du calcul des prédicats monadiques (à une variable d'individu). En 1928, Hilbert et Wilhelm Ackermann démontrèrent la consistance du calcul des prédicats, et en 1929, Gödel prouva sa complétude (sémantique), mais par une méthode non finitiste. Le programme de Hilbert a connu aussi

1. On verra que les propriétés de complétude sémantique et de complétude syntaxique ne sont pas équivalentes, la première étant plus faible que la seconde.

quelques succès partiels pour des systèmes plus riches que les précédents avec, en particulier les résultats d'Ackermann et de Jacques Herbrand pour une partie de l'arithmétique.

Mais historiquement, le premier résultat métalogique[1] important est le théorème de Löwenheim-Skolem, prouvé en 1915 par le premier et complété en 1920 par le second. Il concerne la logique du premier ordre et s'avérera d'une importance capitale. Travaillant dans un esprit proche de Peirce et de Schröder, donc ni logiciste ni formaliste, Löwenheim et Thoralf Skolem ont montré que si une formule, ou un ensemble dénombrable (c'est-à-dire en bijection avec $\mathbb{N}$) de formules, de la logique du premier ordre a un modèle infini, elle, ou il, a un modèle dénombrable. Il s'ensuit que ce que peut exprimer un langage pour la logique du premier ordre est limité : aucune formule ou ensemble de formules lui appartenant ne permet de caractériser l'ensemble des nombres réels, qui n'est pas dénombrable.

Tous ces résultats ont pu laisser penser que le programme de Hilbert pouvait aboutir. Mais le théorème de Gödel l'a ruiné pour partie. Cela n'enlève rien à la fécondité des travaux de Hilbert : une démonstration d'impossibilité permet souvent de réorienter les recherches. C'est ce qui s'est passé dans le cas présent, notamment en incitant les logiciens à adopter une conception de la démonstration moins restrictive que celle de Hilbert.

V. LE THÉORÈME DE GÖDEL[2]

Dans les années 1930, la langue commune des logiciens devient l'anglais. La ville allemande de Göttingen avait vu se regrouper autour de Hilbert beaucoup d'entre eux, mais la montée du nazisme provoqua l'exil de nombre de grands logiciens européens vers les États-Unis. Ce fut notamment le cas de Tarski, Carnap et von Neumann. Mais si la période marque un tournant dans l'histoire de la logique, c'est surtout grâce au fameux théorème de Gödel. Kurt Gödel était d'origine autrichienne et écrivit d'abord en allemand, mais après son installation définitive aux Etats-Unis en 1939, il ne publia plus qu'en anglais. En 1929, il démontra la *complétude* du calcul des prédicats. La nouveauté n'était pas tant dans le résultat, que chacun pressentait, mais dans le fait qu'on pût le démontrer. Mais la démonstration de Gödel n'entre pas dans le cadre de la métamathématique hilbertienne, où on montre la complétude, syntaxique, d'un système consistant en prouvant que l'ajout

1. En principe, on qualifie de métalogiques, et non de métamathématiques, les propriétés syntaxiques et sémantiques des systèmes logiques.
2. En 2005, la première version de ce paragraphe, ici légèrement modifié, avait bénéficié des conseils avisés de Philippe de Rouilhan.

d'un axiome le rend inconsistant. Utilisant le concept sémantique de *validité*[1], Gödel montra que toute formule valide du calcul des prédicats est démontrable dans ce calcul, c'est-à-dire que le calcul des prédicats est sémantiquement complet, alors qu'il ne l'est pas syntaxiquement. Gödel a donc prouvé moins que ce que voulait prouver Hilbert, car la complétude sémantique est une propriété plus faible que la complétude syntaxique.

La surprise est venue de son, ou plutôt de ses, théorèmes d'*incomplétude* relatifs à l'arithmétique et, plus généralement, aux systèmes formels. En 1930, son doctorat à peine obtenu, Gödel fut invité à un colloque se tenant à Königsberg en l'honneur de Hilbert, qui y avait fait ses études. On lui offrit quelques minutes pour parler de son théorème de complétude, mais Gödel y donna en fait un aperçu de ce qui allait devenir le théorème qui porte son nom. Double théorème, publié en 1931 dans un article en allemand, *Sur les propositions formellement indécidables des* Principia Mathematica *et des systèmes apparentés*, et dont voici l'énoncé sous la forme qu'il lui donnera en 1963 :

> Dans tout système formel consistant contenant une théorie des nombres finitaires relativement développée, il existe des propositions arithmétiques indécidables.
>
> La consistance d'un tel système ne saurait être démontrée à l'intérieur de ce système.

Gödel donne une réponse négative au deuxième problème de Hilbert et met à mal le programme établi par ce dernier. Dans la version proposée en 1936 par John Barkley Rosser, qui ne modifie que très peu le fond et la forme de la démonstration de Gödel, le théorème établit que, si l'arithmétique est *consistante* :

1. elle contient des propositions indécidables et est donc incomplète,
2. la traduction arithmétique de la consistance de l'arithmétique est justement l'une de ces propositions indécidables.

Et ce double résultat vaut pour tout système formel capable de contenir suffisamment d'arithmétique, comme c'est le cas, par exemple, de la théorie des ensembles ou du calcul des prédicats du second ordre – avec quantification sur les prédicats –, dont les seules ressources ne suffisent pas à prouver la non contradiction.

L'article de Gödel est extrêmement dense et ne peut être expliqué en détail. Pour simplifier, nous utiliserons par endroits la version de Rosser. Gödel appelle P le système formel constitué des axiomes de Peano pour l'arithmétique et d'une version simplifiée des *Principia Mathematica* pour la logique. Il code chaque symbole,

1. Une forme propositionnelle est valide si elle est vraie pour toute interprétation dans tout domaine non vide : par exemple, $(\forall x)P(x) \to (\exists x)P(x)$ est une forme propositionnelle valide.

chaque formule et chaque démonstration de *P* par un entier naturel, aujourd'hui dit « nombre de Gödel », ce qui lui permet de traduire arithmétiquement certains énoncés métamathématiques relatifs à *P*, et donc d'arithmétiser, au moins en partie, la métamathématique. Pour démontrer le premier théorème, Gödel construit une proposition de *P*, appelons-la G, qui traduit arithmétiquement la proposition métamathématique « G n'est pas démontrable ». La proposition arithmétique G affirme donc d'elle-même, de façon codée, qu'elle n'est pas démontrable. Elle rappelle la proposition paradoxale du *Menteur*, qui dit d'elle-même qu'elle n'est pas vraie, la démontrabilité remplaçant ici la vérité et l'indécidabilité la contradiction. La démonstration du théorème se déroule comme suit :

1. On montre d'abord que G est *démontrable* si et seulement si sa *négation* est démontrable. Mais qu'une proposition et sa négation soient démontrables signifie que le système *P* n'est pas *consistant*.
2. En utilisant la contraposée du résultat précédent, on a montré que si *P* est consistant, il existe une proposition G de *P*, qui n'est ni démontrable, ni réfutable. C'est donc une proposition *indécidable* du système *P*.
3. Toujours dans l'hypothèse où *P* est consistant, il y a donc une proposition de *P*, G ou sa négation, qui est vraie mais non démontrable dans *P*. Autrement dit, *P* n'est pas *complet*.

Un argument métamathématique utilisant des moyens excédant ceux de P montre que c'est la proposition G qui est vraie, bien que (ou plutôt puisque) non démontrable dans *P*. Cela signifie, souligne Gödel, que lorsqu'une proposition est arithmétiquement indécidable, elle peut être décidée par des considérations excédant l'arithmétique, et qu'il n'existe donc pas de proposition *absolument* indécidable. Cela signifie aussi que *P* contient des propositions vraies dont on ne peut prouver la vérité dans *P*. La conjecture de Goldbach, selon laquelle tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers, pourrait être l'une d'elle : elle n'a à ce jour pas été démontrée mais on ne lui a pas non plus trouvé de contre-exemple. Il pourrait donc s'agir d'une proposition arithmétique vraie mais non dérivable des axiomes de l'arithmétique.

Démontrabilité et *vérité* sont des notions de nature différente – on dit qu'elles ne sont pas *coextensives*. La première est interne aux systèmes formels tels que *P*, la seconde non : il faut donc distinguer le mathématiquement vrai, au sens des mathématiques usuelles – G est une proposition de *P* qui est vraie –, et le formellement démontrable, au sens des systèmes formels – G n'est pas démontrable dans *P*. C'est ainsi aussi que la démontrabilité d'une proposition arithmétique est arithmétiquement exprimable, alors que sa vérité ne l'est pas. C'est en 1933, dans un article en polonais traduit en anglais en 1935, que Tarski a expliqué que le prédicat de vérité pour les langages formalisés ne peut être défini dans ce langage lui-même, mais seulement dans un autre langage, un *métalangage*, ayant un pouvoir d'expression supérieur au précédent, tout comme la vérité de G n'est démontrable que dans un système formel plus puissant que ***P***.

Quant aux difficultés mises en évidence par Gödel, on pourrait croire qu'en ajoutant des axiomes *ad hoc*, la proposition G par exemple, on parvient à les éliminer. Il en résultera un système plus puissant, mais qui contiendra une nouvelle proposition indécidable, différente de la précédente. Car Gödel a établi que tout système formel contenant l'arithmétique, s'il est consistant, est incomplet et contient une proposition indécidable. C'est ce que dit son second théorème, qui vaut pour tout système contenant un minimum d'arithmétique : si ***P*** est consistant, la traduction arithmétique de cette consistance fournit précisément un exemple de proposition vraie non démontrable dans ***P***.

Le théorème de Gödel est un événement majeur de l'histoire de la logique, qui a suscité de multitudes interprétations, y compris dans des domaines auxquels il n'était pas destiné. Pour ce qui concerne la logique, les mathématiques et l'informatique, sa valeur formelle n'a pas été contestée et le désaccord s'est plutôt manifesté à propos de son incidence sur le travail du mathématicien. La proposition indécidable de Gödel est construite de façon à produire le résultat cherché, mais elle ne fait pas partie des propositions que le mathématicien rencontre habituellement. Gödel et certains de ses successeurs se sont donc efforcés de découvrir des propositions indécidables appartenant aux « vraies » mathématiques. Ils y sont parvenus, même si elles ne relèvent pas de l'arithmétique élémentaire.

Les systèmes formels couramment utilisés en mathématiques ne peuvent donc suffire pour la pratique approfondie de la discipline : il y a des propositions indécidables ayant un vrai contenu mathématique. Le théorème de Gödel n'empêche pas de chercher de nouveaux axiomes, au contraire. D'une part, il signale qu'aucun système formel ne nous garantit à coup sûr contre l'apparition de paradoxes, en théorie des ensembles par exemple. Cela ne s'est pas encore produit, du moins pour l'axiomatique la plus courante, mais si c'était le cas, une refonte de celle-ci, probablement partielle et en fonction des besoins, se révélerait nécessaire. D'autre part, l'existence d'indécidables indique « seulement », selon Gödel, que nos axiomes « ne contiennent pas une description complète » de la « réalité mathématique bien déterminée » à laquelle ils se rapportent.

Qu'établit finalement le théorème de Gödel ? L'impossibilité de constituer l'arithmétique, et *a fortiori* la totalité des mathématiques, en un système formel au sens de Hilbert. C'est un théorème de *limitation*, qui n'interdit pas de faire des mathématiques et ne signifie nullement qu'on ne sait rien. On sait au contraire quelque chose de fondamental, car il y a une grande différence entre *ne pas savoir démontrer* quelque chose, et *savoir qu'on ne peut démontrer* ce quelque chose. Gödel admet à la fin de son article que son théorème n'entraîne pas la réfutation totale du point de vue formaliste de Hilbert, car il prouve seulement qu'on ne peut espérer formaliser les mathématiques qu'en utilisant des raisonnements non finitistes. Gödel a vu l'intérêt de telles recherches :

> Il reste un espoir, écrit-il en 1933, que dans le futur on puisse trouver des méthodes satisfaisantes dépassant les limites du système [finitiste de Hilbert] et permettant de fonder l'arithmétique classique et l'analyse. Cette question ouvre un champ de recherches fécond.

C'est ainsi que Gentzen en 1935 et Gödel lui-même en 1958 ont fourni des preuves de consistance de l'arithmétique utilisant des moyens moins restrictifs que ceux de Hilbert. Une autre approche, datant des années 1980, a pris en quelque sorte le chemin inverse, conservant les contraintes de Hilbert, mais examinant l'étendue des mathématiques qu'elles permettent de fonder.

Les deux théorèmes de Gödel, de complétude de la logique du premier ordre et d'incomplétude de l'arithmétique, ont orienté la logique dans deux directions : l'une, prenant plutôt en compte le second, concerne la calculabilité et a donné naissance à l'informatique ; l'autre, prenant plutôt en compte le premier, demeure à l'intérieur de la logique et a fait naître la théorie des modèles. Cette double orientation accuse une fracture ou, au moins une complémentarité, enfin explicitée, entre syntaxe et sémantique, la tradition de la première remontant à Frege et Russell *via* Hilbert, celle de la seconde à Boole, Peirce et Schröder *via* Löwenheim et Skolem. On va étudier le destin de ces deux orientations après les travaux de Gödel, sans trancher dans le débat qui peut opposer les défenseurs de l'une ou de l'autre.

VI. CALCULABILITÉ, MACHINE DE TURING ET INFORMATIQUE THÉORIQUE

Après les résultats de Gödel sur l'incomplétude de l'arithmétique, beaucoup de travaux ont concerné le « problème de la décision », avec pour des parties importantes des mathématiques, dont l'arithmétique élémentaire, une réponse *négative*. De quelque manière qu'on formalise cette dernière, elle est indécidable : *il n'existe pas* de procédure permettant d'affirmer, pour toute formule arithmétique, si elle démontrable ou non. Dans le même temps, au travers de l'aspect mécaniste du programme de Hilbert, perçait l'idée qu'il est possible de décrire le fonctionnement de l'esprit humain :

> L'idée maîtresse de ma théorie de la démonstration, écrit Hilbert en 1927, n'est rien d'autre que de dépeindre l'activité de notre intelligence, de dresser l'inventaire des règles suivant lesquelles notre pensée fonctionne réellement.

Mais chercher une solution à l'*Entscheidungsproblem* et répondre aux questions de décidabilité des systèmes formels imposent de définir rigoureusement les notions de procédure et d'algorithme. C'est ainsi que sont nés le concept de fonction *calculable* et la théorie de la *calculabilité*. Intuitivement, une fonction est calculable s'il existe un algorithme, c'est-à-dire une procédure utilisant des moyens finis, qui permet de donner sa valeur pour tout argument possible : l'addition des entiers, par exemple, est une fonction calculable. En revanche, si, E étant une équation qu'on ne sait pas résoudre, la fonction f est définie par $f(n) = 1$ si n est une solution de E et $f(n) = 0$ sinon, f est non calculable. Mais qu'est-ce précisément qu'un algorithme et que veut dire « moyens finis » ?

Dans son article de 1931, Gödel a introduit les fonctions *récursives primitives*, fonctions dont les arguments sont des entiers naturels et telles que leur valeur pour un entier n peut être calculée si on connaît leurs valeurs pour les $n - 1$ entiers précédents. De telles fonctions sont calculables mais, en 1926, Hilbert avait donné un exemple, dû à Ackermann, de fonction calculable quoique non récursive primitive. La notion de fonction *récursive*, introduite en 1934 par Gödel, est plus générale que la précédente : c'est une fonction définissable à partir des fonctions constante, successeur et identité, de sorte que « pour chaque ensemble de valeurs donné à ses arguments, explique Gödel, sa valeur peut être calculée par une procédure finie ».

En 1936, Alonzo Church, utilisant les travaux de Stephen C. Kleene de la même année, identifia les fonctions calculables aux fonctions récursives. Cela donna lieu à la thèse qui porte son nom et qui lui permit de prouver l'indécidabilité du calcul des prédicats et de l'arithmétique[1]. Il l'a fait à l'aide du « λ-calcul », formalisme qui utilise une définition de la calculabilité que le mathématicien et logicien anglais Alan Turing va tâcher de rendre plus intuitive. La même année en effet, et de manière indépendante, celui-ci travaillait aussi sur le « problème de la décision ». L'année suivante, il rejoignit Church aux Etats-Unis puis, de retour en Angleterre, il se forma à la cryptographie et contribua, par ses qualités exceptionnelles en ce domaine, à la victoire des Alliés, décryptant les messages envoyés par les sous-marins allemands. À partir de 1945, il mena de front travaux théoriques et recherches relatives à la fabrication d'ordinateurs.

La « machine de Turing » donne corps à l'aspect mécaniste du projet hilbertien. Elle a été introduite en 1937, dans *Sur les nombres calculables avec une application à l'*Entscheidungsproblem, où Turing explique ce qu'il entend par calculabilité. L'article concerne les nombres calculables, dont la définition est analogue à celle des fonctions calculables : un nombre calculable est « sommairement », dit Turing, « un nombre réel dont l'expression décimale est calculable avec des moyens finis »,

1. On rappelle que le calcul des prédicats monadiques est décidable mais que la propriété ne vaut plus si on y ajoute les prédicats à plus de deux termes.

c'est-à-dire tel qu'il existe un algorithme permettant de calculer les décimales qui suivent la virgule. Par exemple, π = 3,14159... est calculable, car on sait comment calculer autant de décimales qu'on veut dans la suite de chiffres qui suit la virgule, même si celle-ci est infinie. Pour éviter ce qui pourrait apparaître comme une circularité entre *calculable* et *calculer*, Turing ajoute que, selon sa « définition, un nombre est calculable si sa représentation décimale peut être écrite par une machine ». Pour préciser ce qu'il entend par « machine », il identifie, à partir d'une analyse des méthodes de calcul mises en œuvre par l'esprit humain, la notion intuitive de calculabilité à celle de calculabilité par une machine. C'est cette identification qu'on appelle « thèse de Turing » qui, si elle ne peut être mathématiquement démontrée, repose sur de solides arguments, dont l'un est l'appel à l'intuition et un autre la convergence avec les définitions de la calculabilité données par Gödel et Church.

Le travail de Turing appartient à la postérité de ceux de Hilbert et Gödel. Il utilise d'abord un système de codage pour montrer qu'il existe des nombres réels, et par là même des fonctions, *non calculables*. L'ensemble des nombres calculables est en effet *dénombrable*, ce qui n'est pas le cas de l'ensemble des réels. Les nombres et fonctions calculables sont pourtant des nombres et des fonctions définissables, mais les exemples, dont celui que donne Turing, sont trop compliqués pour être rapportés ici. Il en tire une démonstration d'indécidabilité du calcul des prédicats, de sorte que « l'*Entscheidungsproblem*, dit-il, ne peut avoir de solution ». Tous ces résultats sont liés au *concept* de « machine de Turing », qui résulte donc de la manière dont Turing définit la calculabilité. Il ne le fait pas de façon purement *formelle*, mais en se fondant sur des considérations intuitives qui le conduisent à « imaginer » – imaginer seulement – une *machine* capable d'effectuer réellement des calculs, même lourdement et lentement, en reproduisant les états mentaux supposés d'un être humain en train de calculer. La nouveauté de l'article de Turing est donc dans la *description* – jamais ne sera fabriquée la machine qui porte son nom – de cette « machine de papier » qui apparaît aujourd'hui comme un modèle d'ordinateur. Mais en 1937, ce n'était pas l'avenir de cette machine qui intéressait Turing, mais ses possibilités logiques.

Au début de son article, Turing identifie donc « calculable avec des moyens finis » et « calculable par une machine ». Il se justifie en écrivant « que la mémoire humaine est nécessairement limitée » et qu'un « homme en train de calculer la valeur d'un nombre réel peut être comparé à une *machine* susceptible de se trouver dans un nombre fini d'états ». Il caractérise ensuite une machine *automatique* par le fait qu'« à chaque étape, son comportement est entièrement déterminé par sa seule configuration » et une « machine à calculer » comme une machine automatique capable de réaliser un calcul *donné à l'avance*. En ce sens, chaque machine de Turing *est* une procédure effective de calcul. Turing décrit sa fameuse « machine », ce que nous faisons plus simplement qu'il ne le fait lui-même (figure 8).

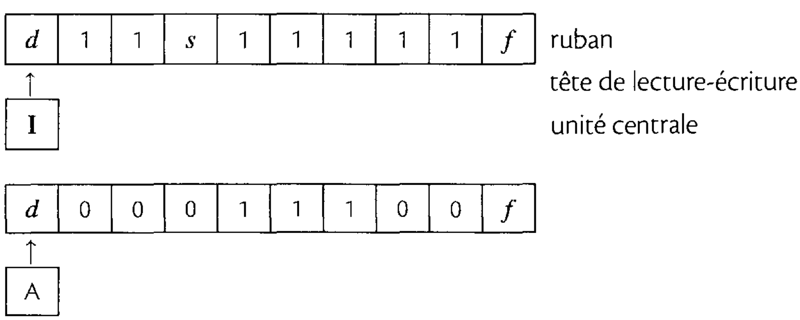
Une machine de Turing est constituée ainsi :

- Un ruban, composé de cases, avec une extrémité à gauche et infini à droite.
- Un ensemble fini de symboles, par exemple 0, 1 (pour la numération binaire), *s* (pour séparer deux expressions), *d* et *f* (pour le début et la fin de ce qui est à lire sur le ruban). Ces symboles, au plus un par case, sont inscrits sur le ruban.
- Une unité centrale, ou table d'instructions, qui peut prendre un nombre fini d'états.
- Une tête de lecture-écriture qui, permettant la communication entre le ruban et l'unité centrale, examine une seule case et se déplace d'une seule case à gauche ou à droite (bien entendu, on peut imaginer que c'est le ruban qui se déplace et que la tête demeure immobile).
- Un ensemble fini d'instructions : à chaque étape, selon le symbole lu dans la case et l'état de l'unité centrale, la tête de lecture-écriture efface ce symbole, le laisse, ou en écrit un autre après avoir effacé celui qu'elle a lu, et se déplace d'une case à gauche ou à droite ou s'arrête.

Le programme fonctionne ainsi :

- Les données initiales sont inscrites sur le ruban, sous forme de 0 et de 1, avec les symboles *d*, *s* et *f*.
- La machine est initialisée sur la première case dans l'état I.
- A chaque impulsion, la configuration correspondra au numéro *n* de la case inspectée, à l'état de l'unité centrale et à la partie du ruban à gauche de *f*.

Par exemple, si on a à faire 5 - 2 :



Le programme consiste à partir de *d* (état I), à aller successivement à droite, puis à gauche en remplaçant les 1 par des 0 jusqu'à se trouver en *s*, qu'on remplace par 0, puis à retourner en *d* et à s'arrêter (état A).

Figure 8. Fonctionnement de la machine de Turing

Mais à ce stade, pour tel calcul, telle machine. Turing passe donc à l'étape suivante, celle de ce qu'il appelle la « machine à calculer universelle », capable de remplacer *n'importe quelle* machine de Turing équipée de *n'importe quel* programme : il suffit de lui fournir, écrit-il, un ruban « au début duquel est inscrite la description standard d'une machine à calculer quelconque ». Il explique le fonctionnement de cette machine universelle en se fondant sur le même argument intuitif que précédemment : un homme et une machine calculent de la même façon. Sachant que chaque machine de Turing, avec le calcul qu'elle a à faire, peut être codée par un entier que la machine universelle peut traiter, il prouve *mathématiquement* que cette dernière existe et peut effectuer n'importe quel calcul. Il montre ensuite, par un raisonnement qui rappelle celui qui produit la proposition indécidable du théorème de Gödel (la machine s'arrête si et seulement si elle ne s'arrête pas), que ce qu'on appelle le « problème de l'arrêt » n'a pas de solution : il n'existe pas de machine capable de prédire l'arrêt ou non de n'importe quelle machine dont on lui aura donné le programme codé. De manière plus générale, le problème de l'arrêt a la formulation suivante : peut-on savoir à l'avance si tout calcul aura ou non une fin ? La réponse est négative, car Turing montre que si l'*Entscheidungsproblem* a une solution, le « problème de l'arrêt » en a une également. Or il a prouvé que le premier n'en a pas : de l'existence de nombres non calculables, il suit qu'il n'existe pas d'algorithme, c'est-à-dire pas de machine, capable de déterminer si toute formule du calcul des prédicats est ou non démontrable.

Avec sa machine, Turing procède comme il est familier à l'informaticien, en fournissant à celle-ci, afin d'effectuer un calcul, un *programme* formulé dans un *langage* ou *alphabet*. On comprend que l'article de 1937 ait eu des conséquences importantes pour la naissance de l'*informatique*. Si personne n'a fabriqué la machine qui y est décrite, elle a servi de modèle aux machines à calculer et ordinateurs modernes, nés à la fin des années 1940, grâce aux progrès techniques et aux affinements théoriques réalisés notamment par von Neumann et Turing lui-même.

La suite appartient à l'histoire désormais liée de l'informatique et de la logique car, en faisant se correspondre calcul et démonstration, Church et Turing ont jeté un pont entre les deux disciplines. Sont ainsi nées la *théorie de la calculabilité*, qui examine les capacités des ordinateurs, et celle de la *complexité*, qui classe les problèmes selon le temps et l'espace qui leur sont nécessaires pour obtenir un résultat, la machine de Turing servant de « mètre-étalon ». Le point culminant du lien entre logique et informatique est la « correspondance de Curry-Howard » entre preuves et programmes, formules et types de données, établie dans les années 1960. On ajoutera que Turing est également à l'origine d'une discipline actuellement en pleine expansion et qui a permis l'essor des *sciences cognitives*, l'*intelligence artificielle*, entendue généralement comme une discipline dont l'objet est la simulation, au moyen de machines informatiques, des comportements intelligents initialement réservés à l'homme. C'est ainsi que, malgré un résultat qui, comme celui de Gödel, établit les limites du calcul, Turing a, en un sens, ouvert la voie à l'accomplissement du rêve leibnizien d'une identification entre pensée et calcul ou, à tout le moins, entre raisonnement ou démonstration et calcul.

VII. SÉMANTIQUE ET THÉORIE DES MODÈLES

L'orientation syntaxique de la logique a conduit à la théorie hilbertienne de la démonstration et à la notion de calculabilité : on étudie les preuves et les systèmes de dérivation formelle. Son orientation sémantique a fait naître la *théorie des modèles*, centrée sur le concept d'énoncé vrai dans une structure et relativement à un langage et sur l'étude des relations entre énoncés et interprétations qui rendent vrais ces énoncés. Les deux orientations ne s'opposent pas systématiquement, elles se complètent, d'autant que Hilbert n'a pas négligé la seconde lorsqu'il se proposait d'interpréter de diverses manières les axiomes de l'analyse et de la géométrie.

Les résultats de Gödel et l'échec du programme de Hilbert ont montré qu'on ne pouvait établir d'équivalence entre les concepts syntaxiques de démontrabilité et de dérivation formelle et les concepts sémantiques de vérité et de conséquence logique. Nous avons vu en effet que dans tout système formel consistant contenant l'arithmétique, il existe des formules vraies mais indémontrables dans ce système. Il a donc fallu, dans les années 1930, réexaminer minutieusement le contenu de la différence entre syntaxe et sémantique.

C'est Alfred Tarski, membre avec Łukasiewicz de la brillante école polonaise de logique de l'entre-deux guerres, qui a donné l'impulsion fondamentale, dans trois articles : *Sur le concept de vérité dans les langages formalisés* (1933-35), *Sur le concept de conséquence logique* (1936), *Sur la complétude de l'algèbre et de la géométrie élémentaire* (1939). On a déjà parlé du premier article à propos du théorème de Gödel. Dans le deuxième, Tarski pose la question suivante : quelles sont les conditions qui font qu'un énoncé X est une conséquence logique d'un ensemble K d'énoncés[1] ? La réponse « classique », qui remonte à Aristote, consiste à dire que si les énoncés de K sont vrais, X l'est aussi *nécessairement*. Il y a là une double idée : que la relation de conséquence préserve la vérité, que cette préservation a un caractère de nécessité. S'il y a toujours eu unanimité sur le premier point, le second a posé problème aux logiciens du XXe siècle, à cause de la présence d'un terme modal trop obscur pour être accepté sans discussion. Il y a eu accord sur un troisième point, à savoir le caractère formel de la relation de conséquence logique. Qu'une proposition r soit une conséquence de deux propositions p et q ne dépend

1. Le mot « énoncé » a ici le sens général d'une formule exprimée dans un certain langage, qui peut être la langue naturelle ou un langage formalisé.

pas de leur contenu mais de leur forme. On l'a dit du syllogisme (S1) d'Aristote, mais cela est vrai aussi des autres syllogismes : il est valide en vertu de sa forme et non du contenu de ses prémisses et de sa conclusion, de sorte que celle-ci est une conséquence logique de celles-là. C'est donc Tarski qui a donné une forme rigoureuse aux conditions de nécessité et de formalité. Empruntant à Carnap une de ses idées et reprenant certaines de celles exposées dans son article sur le concept de vérité, il a utilisé la notion de *satisfaction* dans *un modèle* pour donner la définition suivante :

> Nous disons que l'énoncé X *suit logiquement* des énoncés de la classe K si et seulement si tout modèle de la classe K est aussi un modèle de l'énoncé X.

On n'entrera pas ici dans les détails techniques des concepts de satisfaction et de modèle. Ils sont traités dans les manuels de logique, auquel nous renvoyons le lecteur, ainsi qu'aux exemples, traités informellement, donnés dans ce chapitre. En voici un dernier : puisque 2 < 3, la formule xRy est *satisfaite* par le couple (2, 3) et la relation <, de sorte que $(\mathbb{N}, <)$ est un *modèle* de la formule $(\exists x)(\exists y)(xRy)$. En simplifiant la définition de Tarski, on dira que X est conséquence logique de K si et seulement si *tout* ce qui rend vrais les énoncés de K rend vrai aussi l'énoncé X. En logique propositionnelle, une proposition complexe B est conséquence logique d'une proposition complexe A si dans la table de vérité de B apparaît un V chaque fois qu'apparaît un V dans celle de A : $p \vee q$ est, par exemple, une conséquence logique de $p \wedge q$. En logique des prédicats, étant donné que sa définition spécifie qu'un modèle ne peut être vide, $(\forall x)P(x)$ est conséquence logique de $(\exists x)P(x)$. De la définition de la conséquence logique suit celle de la *vérité logique* : pour un langage logique donné, les vérités logiques sont les conséquences logiques de l'ensemble vide ou, de façon équivalente, de tout ensemble de formules, ce qui revient à dire que tout modèle les rend vraies.

Bien qu'ils aient en commun de viser à caractériser au mieux le lien qu'il y a, dans un raisonnement correct, entre une ou des prémisses et la conclusion, les points de vue sémantique et syntaxique diffèrent. Le premier, celui de la conséquence logique, se centre sur les relations entre les formules d'un langage et le nombre infini de ses structures d'interprétation, sans rien dire des étapes qui mènent de la ou des prémisses à la conclusion. Le second, celui de la dérivabilité formelle, porte au contraire sur des objets finis, des suites de suites de signes, et est relatif à un système formel donné pour lequel on codifie les preuves. Pour ce qui concerne la seule logique du premier ordre, le théorème de complétude sémantique établit une forme d'équivalence : on peut y montrer que la relation de conséquence logique se réduit à celle de dérivation formelle.

L'approche sémantique appartient plus à la tradition de l'algèbre de la logique qu'à celle de l'axiomatique formelle. Tarski connaissait d'ailleurs parfaitement les travaux de Schröder. En revanche, il semble n'avoir découvert qu'après 1936 que la notion bolzanienne de déductibilité préfigure sa définition de la conséquence logique. La notion de modèle n'est de toute façon pas née avec Tarski, puisqu'elle apparaît au XIX^e siècle avec Boole mais aussi dans les travaux sur les géométries non euclidiennes et dans les *Fondements de la géométrie* de Hilbert. Elle est présente aussi dans les deux articles de Gödel de 1930 et 1931, ainsi que chez Carnap en 1935.

Quant à la *théorie des modèles* – l'expression daterait de 1954 et serait de Tarski –, elle étudie les rapports entre une syntaxe, celle des langages formels, et une sémantique, qui interprète ceux-ci « concrètement » grâce au vocabulaire de la théorie élémentaire des ensembles. Elle est devenue à partir des années 1960 à la fois une théorie mathématique unificatrice et une partie intégrante de la logique. Plus vaste que la théorie hilbertienne de la démonstration, elle englobe désormais une métamathématique que Tarski ne voulait pas distinguer de la mathématique elle-même, et met en avant l'idée de *structure* mathématique. On ne peut détailler ici tout ce que la logique, les mathématiques et même la philosophie doivent à la théorie des modèles. Le premier résultat qui en relève est le théorème de Löwenheim-Skolem, déjà mentionné. Dans le dernier des articles cités plus haut, Tarski lui-même a prouvé, par des méthodes sémantiques, la complétude et la décidabilité de l'algèbre et de la géométrie élémentaires. La théorie des modèles a également permis de dégager la notion de modèle *non standard*, à partir de la question suivante : étant donnée une théorie mathématique, existe-t-il un langage du premier ordre et un ensemble d'axiomes formels qui la caractérisent (à un isomorphisme près) ? La réponse est négative pour la théorie des ensembles et l'arithmétique. En 1922, Abraham Fraenkel a prouvé que les axiomes de la théorie des ensembles ne définissent pas seulement les ensembles familiers au mathématicien, mais aussi des ensembles « non standard[1] », et en 1934, Skolem a décrit un modèle non standard pour tout système d'axiomes du premier ordre de l'arithmétique, qui ne caractérisent donc pas seulement la structure de $\mathbb{N}$. Née en 1961, l'*analyse non standard* prolonge ce résultat en ajoutant aux réels des nombres infinitésimaux.

VIII. UNE PLURALITÉ DE LOGIQUES

Le XX^e siècle a célébré le mariage de la mathématique et de la logique, mais la question se pose de savoir si la seconde doit se doter d'un langage suffisamment riche pour formaliser les principaux concepts de l'arithmétique au prix d'un renoncement à certaines propriétés métalogiques, ou d'un langage plus pauvre mais qui les lui assure. La plupart des logiciens contemporains ont fait le second choix,

1. Un exemple d'ensembles non standard est donné par les ensembles a tels que $a = \{a\} = \{\{a\}\}$, etc.

celui de la logique du premier ordre, invoquant sa complétude et sa consistance, et ajoutant que si la logique du second ordre permet de définir les entiers naturels, elle n'est pas assez sûre pour prétendre reposer sur des principes authentiquement logiques. La tendance est donc à considérer la logique du premier ordre, dotée de la sémantique tarskienne, comme étant *la* logique, par delà la diversité des traitements dont elle est susceptible. C'est ce que reflète la structure de la plupart des manuels de logique récents, quelques-uns ajoutant un chapitre sur la théorie des ensembles.

Les différentes manières de traiter de *cette* logique ont en commun de respecter quelques principes venant pour la plupart de la Grèce antique. Mais le XXᵉ siècle a vu naître des logiques qui ne le font pas, au moins en partie. À côté de la logique « classique » ou « standard » ont émergé des logiques qui en sont soit des *présentations différentes*, comme la déduction naturelle, rapidement mentionnée, soit des *extensions*, comme la logique modale, soit encore des *alternatives*. On peut donc parler désormais, non plus de *la* logique, mais d'une pluralité de logiques ou même *des* logiques, en utilisant sciemment le pluriel. Ces logiques reposent sur des systèmes d'axiomes dont le choix est en partie libre. C'est ce que Carnap a exprimé en 1934 avec le principe de « *tolérance de la syntaxe* » :

> Notre affaire n'est pas d'édicter des interdictions, mais de parvenir à des conventions. En logique, il n'y a pas de morale. Chacun est libre de construire à sa guise sa propre logique, c'est-à-dire sa propre forme de langage.

Parmi les logiques *étendues*, ou *complémentaires* de la logique standard, qui en renforcent les possibilités par l'ajout d'axiomes dont aucun ne contredit ceux de cette dernière, la plus ancienne est la logique *modale*. La logique grecque, on l'a vu, avait introduit une théorie des *modalités* que les médiévaux avait reprise, mais que les fondateurs de la logique contemporaine avaient délaissée, la considérant comme relevant de la théorie de la connaissance. La logique modale moderne, ou mieux, *les* logiques modales[1], sont nées en 1918, lorsque Clarence Irving Lewis a défini l'*implication stricte* en disant que p implique strictement q signifie qu'il n'est *pas possible* que p soit vraie et q fausse, donc que si p est vraie, q est *nécessairement* vraie. L'implication stricte est un connecteur plus fort que le conditionnel et correspond davantage à la notion intuitive d'implication que ce dernier. La logique modale affine donc l'opposition entre vrai et faux, en distinguant le nécessaire, le possible, le contingent et l'impossible. Le *possible* est ce dont la négation n'est pas nécessaire, le *contingent* est ce qui est possible mais dont la négation est également possible, l'*impossible* est ce dont la négation est nécessaire. Le nécessaire est vrai et l'impossible faux, mais le possible et le contingent peuvent être vrais ou faux. Un système de logique modale a été proposé par Łukasiewicz en 1957, mais c'est Saul

1. On distingue aujourd'hui les modalités *aléthiques*, relatives à la vérité, *épistémiques*, relatives à la croyance, et *déontiques*, relatives à ce qui est obligatoire ou permis.

Kripke qui a donné, dans les années 1960, un traitement convaincant à la notion de nécessité, en généralisant l'idée leibnizienne selon laquelle est nécessaire ce qui est vrai dans tous les « mondes possibles ». Il a ainsi permis le développement de nouveaux systèmes de logique modale, qui tous contiennent les théorèmes de la logique standard.

La logique *épistémique*, créée par Jaakko Hintikka en 1962 et dont il y a quelques prémices au Moyen Âge, est une variété de logique modale, qui intègre les notions de savoir et de croyance, de sorte que les propositions y sont qualifiées selon l'*attitude propositionnelle* de celui qui les énonce. Elle distingue la connaissance au sens strict – « a *sait* que p » – et la simple croyance – « a *croit* que p ». Il est en effet naturel, dans un cadre cognitif, de marquer la différence entre « Pierre *sait* que Paul est rentré » et « Pierre *croit* que Paul est rentré ». Les divers systèmes d'axiomes, encore actuellement en concurrence, contiennent tous deux opérateurs destinés à modéliser l'un la connaissance, l'autre la croyance. La logique épistémique a trouvé des applications remarquables, notamment en sciences cognitives et en informatique.

Outre les logiques *étendues*, il existe des logiques *alternatives* ou *rivales*, dont les axiomes sont soit incompatibles avec ceux de la logique standard soit ne permettent pas d'en dériver les principes. La plus simple est la logique *trivalente*. Nous parlons depuis le début de ce livre de logique *bivalente*, à deux valeurs de vérité, le vrai et le faux, de sorte qu'une proposition est soit vraie soit fausse. Pourtant, une porte n'est pas soit ouverte soit fermée, elle peut être entrouverte. La première logique non bivalente est apparue en 1920 avec les travaux de Łukasiewicz sur la logique aristotélicienne. Pour Aristote, on ne pouvait rien dire des propositions portant sur des événements futurs, comme « une bataille navale aura lieu demain ». Pour y remédier, Łukasiewicz a eu l'idée d'introduire une troisième valeur, 1/2, représentant « le possible ». Il reconstruisit alors les tables de vérité des différents connecteurs, évidemment plus compliquées que celles de la logique standard. Une application est la logique *quantique*, née en 1936, qui traite des « anomalies logiques » de la mécanique du même nom, en acceptant le principe du tiers exclu mais en rejetant le principe de bivalence.

Dans la logique trivalente forte de Kleene de 1952, la troisième valeur de vérité est l'*Indéterminé*. En 1975, Kripke a choisi ce cadre pour construire un langage logique trivalent suffisamment riche pour contenir son propre prédicat de vérité, remettant en cause le résultat de Tarski pour la logique standard. On peut alors résoudre, autrement que par une différenciation des niveaux de langage, le paradoxe du *Menteur* : la proposition « Je mens » n'est plus problématique car sa valeur de vérité est l'Indéterminé. On peut augmenter à loisir le nombre de « valeurs de vérité » et il est possible de construire des logiques *multivalentes*, ou *plurivalentes*, à plus de trois valeurs de vérité, logiques d'autant plus complexes que ce nombre est élevé. Dans tous les cas, les principes du tiers exclu et de contradiction ne valent plus, non qu'ils soient tenus pour faux ou deviennent réfutables, mais qu'ils ne font pas partie des axiomes ou des théorèmes du système logique considéré.

La *logique floue*, ou logique du flou, est plus compliquée, mais repose sur l'idée, assez simple, que certains concepts ou prédicats ne permettent pas de décider à tout coup si un objet y satisfait ou pas, de sorte qu'il ne leur correspond pas une classe déterminée, alors qu'on l'admet, hors paradoxes, en logique bivalente. Le prédicat « homme », par exemple, sépare la classe des individus qui sont des humains de ceux qui ne le sont pas. Mais que dire d'un prédicat comme « jeune » ? Quelle classe détermine-t-il ? Les enfants de huit ans y appartiennent sûrement, les personnes âgées de plus de soixante-dix ans non, mais les hommes de trente ans ? « Jeune » est un prédicat *flou* ou *vague*, comme « beau », « grand », etc. On est plus ou moins jeune, plus ou moins beau, plus ou moins grand, etc. La théorie des ensembles flous, développée à partir de 1965, attribue des degrés d'appartenance à une classe. Il en résulte une logique qui assouplit le calcul des prédicats en définissant une fonction d'appartenance prenant ses valeurs, non dans {0,1} ou {Faux, Vrai}, mais dans tout l'intervalle [0,1]. Un énoncé y a un *degré de vérité* compris entre 0 et 1 – « Jean a un degré de jeunesse de 0,2 » par exemple –, les énoncés vrais et faux étant de degrés respectifs 1 et 0. Une telle logique, qui évacue les principes du tiers exclu et de contradiction, permet de traiter des adverbes tels que « un peu », « beaucoup », etc., et d'introduire une échelle de valeurs de vérité : « plus ou moins vrai », « pas totalement faux », etc. Une application en est l'expertise médicale : un patient n'est pas mort ou vivant, il peut être atteint d'une maladie *plus ou moins* grave.

Enfin, la logique *intuitionniste* est liée à une conception spécifique des mathématiques, l'intuitionnisme du mathématicien hollandais Luitzen E. Jan Brouwer qui rejeta, au tout début du XXe siècle, et le logicisme de Frege et Russell et le formalisme de Hilbert. Pour Brouwer, une intuition première, l'unité, est à la base des mathématiques, et c'est à partir d'elle que l'esprit humain construit les entiers naturels, puis la totalité des objets mathématiques. Cela conduit l'intuitionniste à réduire le champ d'application du raisonnement par l'absurde : pour lui, la preuve de l'existence d'un objet mathématique ne se fait pas à l'aide d'une inférence « aveugle » montrant que l'hypothèse contraire conduit à une absurdité, mais en « éprouvant » ou « faisant l'expérience » de cette existence.

Le cas typique est celui d'un raisonnement portant sur l'infini. Soient un sac de billes et la question : contient-il une bille noire ? Selon le principe du tiers exclu, la proposition « Le sac contient une bille noire » est ou bien vraie ou bien fausse. Si le nombre de billes est fini, même très grand, une procédure simple permet de répondre à la question posée : on extrait successivement une bille du sac et on en vérifie la couleur. À la fin de cet inventaire, quand bien même il est impraticable si le sac contient un trop grand nombre de billes, soit on aura trouvé une boule noire et la proposition ci-dessus est vraie, soit on n'en aura pas trouvé et elle est fausse. Mais si la quantité de billes est infinie, il y a problème. Il se peut qu'on trouve une bille noire au bout d'un certain temps, et la réponse à la question posée est « non ». Il se peut aussi qu'on ne puisse y parvenir, même si le sac contient bien, en un certain sens, une bille noire, et on ne peut répondre. Pour l'intuitionniste, tant qu'on n'a pas *effectivement* sorti une bille noire du sac ou donné la *procédure* pour en juger, on ne peut rien dire de la proposition « Le sac contient une bille noire ». La cause en est qu'un inventaire complet du sac de billes est par nature – en pratique *et* en théorie – impossible dans le cas infini. Ici, le principe du tiers exclu ne vaut plus.

En limitant drastiquement ce qui est admis dans une démonstration, l'intuitionnisme « dévalue » la logique au profit d'une intuition mathématique effectivement réalisée : la logique ne sous-tend pas les mathématiques, elle lui est subordonnée et n'est pas une source de vérité. En 1930, un disciple de Brouwer, Arend Heyting, a pourtant axiomatisé, contre l'avis de son maître, la logique intuitionniste des propositions en définissant, non leurs conditions de vérité, mais leurs *conditions d'assertabilité*. Dans son système, ni le principe du tiers exclu, ni celui de la double négation ne sont valables, de sorte que pour prouver que $\neg p$ est vraie, il ne suffit pas de prouver que p est fausse. Les opérateurs, en particulier l'implication qui reçoit un traitement spécifique, ne sont pas introduits par des tables de vérité, mais à l'aide de la notion de preuve : par exemple, la donnée d'une preuve de $p \vee q$ consiste en la donnée d'une preuve de p ou en celle d'une preuve de q. La logique intuitionniste, qui donne lieu à un calcul trivalent différent de celui de Łukasiewicz, s'accorde bien avec la méthode de déduction naturelle de Gentzen, où l'*acte* qui justifie $A \wedge B$, par exemple, est un couple d'actes, dont le premier justifie A et le second B.

Forte de cette diversité, « la » logique actuelle, née d'un rapprochement avec les mathématiques, ne se limite pas à fournir à ces dernières des éléments de réponse à la question de leur fondement. Elle joue un rôle privilégié dans des sciences aujourd'hui hautement mathématisées, comme la physique, la chimie ou la biologie, pour lesquelles la découverte de logiques non standard a été capitale. La logique a également contribué à la naissance de disciplines nouvelles telles que l'informatique, l'intelligence artificielle, les sciences cognitives, la cybernétique et la théorie de l'information. Il est d'ailleurs remarquable que certains *systèmes experts*, composés de moteurs d'inférence logique et de bases de données issues du savoir humain, soient aujourd'hui au service de la médecine. L'idée est ancienne : Galien avait insisté il y a 2000 ans sur l'importance du raisonnement dans le diagnostic médical. Le droit aussi a fait très tôt usage de la logique : Aristote avait organisé les rapports entre logique et rhétorique et Leibniz avait réfléchi à ces questions. La logique *déontique*, née dans les années 1950, permet aujourd'hui de formaliser les raisonnements juridiques. De manière générale, les *sciences de l'homme et de la société* – linguistique, psychologie, sociologie, économie, etc. – demandent aux mathématiques, mais aussi à la logique, de leur fournir des *modèles*. Car plus une discipline prétend se formaliser, moins elle peut se passer d'un aspect essentiel de la logique : son caractère formel et hypothético-déductif.

En retour, la logique a réinvesti le champ de la philosophie. La logique *temporelle*, née en 1957, permet d'analyser les différents sens du concept de temps. La logique *illocutoire* et la *sémantique des jeux de langage* s'intéressent depuis les années 1970 au fonctionnement pratique des langues naturelles. La logique poursuit ainsi son apport à la philosophie du langage. La philosophie des sciences aussi utilise la logique dans son effort d'analyse des méthodes scientifiques et celle des mathématiques en est un champ d'application privilégié, comme les polémiques entre logicistes, formalistes et intuitionnistes l'ont mis en évidence. Là encore, les controverses ne sont pas nouvelles. Descartes avait prétendu remplacer la logique scolastique par une méthode vivante d'invention et de découverte. La querelle des universaux du Moyen Âge a pour version moderne l'opposition entre les *réalistes*, pour qui les objets de connaissance, tels les nombres, ont une forme d'être dans un monde purement intelligible, ni sensible ni psychique, et les *nominalistes*, qui n'y voient que des conventions. En théologie, les scolastiques avaient développé un certain nombre d'arguments logiques aujourd'hui formalisables grâce à la logique. L'« argument ontologique » par exemple, dont la version cartésienne est que l'existence de Dieu découle de Sa perfection, a été réfuté de manière purement logique par Frege et Russell.

De façon générale, des questions philosophiques comme celles de l'existence, de la vérité, de la nécessité, déjà traitées par les philosophes de la Grèce antique, ont vu, grâce à la logique du XX^e siècle, leur problématique renouvelée. C'est en ce sens que Russell a pu parler de « logique philosophique » et que la philosophie *analytique* utilise l'analyse logique et linguistique pour aborder les questions philosophiques. Mais de même qu'il n'y a pas *une* philosophie des mathématiques, il n'y a pas *une* philosophie « officielle » de la logique. Les différents aspects de cette dernière et les multiples développements qu'elle a connus depuis un siècle l'interdisent. Il y a donc une philosophie de la logique, qui réfléchit entre autres aux fondements de la discipline et tâche de trouver des réponses à la question : qu'est-ce que la logique ?

CONCLUSION

La logique est donc née en Grèce : chez Aristote comme logique des termes, chez les stoïciens comme logique des propositions. Cette dualité ne doit pas masquer une unité profonde : la logique était alors étroitement liée à la grammaire et à la philosophie, dont elle fut rapidement considérée comme une partie. Le *Grand Dictionnaire de la philosophie*, au paragraphe « Philosophie antique » de l'article « Logique », donne cette définition de la logique :

> Partie de la philosophie relative au *logos* (raison ou langage) comprenant la dialectique, la rhétorique et, dans certains cas, la théorie du critère (épistémologie).

Il est ensuite ajouté que cette division, due à Xénocrate, vaut davantage pour les stoïciens que pour Aristote et que « ce sens antique du terme est assez éloigné du sens moderne ». À propos de ce dernier, *Le Petit Robert* précise que la *logique mathématique* est la « science de la démonstration qui consiste en l'étude des rapports *formels* existant entre les propositions, indépendamment de toute interprétation », *Le Petit Larousse* que la *logique formelle* ou *symbolique* est l'« étude générale des raisonnements déductifs, abstraction faite de leur application à des cas particuliers ».

Ces précisions rendent compte d'un profond changement de statut, conforme à un processus commencé au milieu du XIX^{e} siècle qui a rapproché la logique de la mathématique. Mais la question de son objet demeure, comme le dit un ouvrage récent d'initiation à la logique :

> Pour les uns, la logique est la science du raisonnement correct. Pour d'autres, la logique énonce les lois les plus générales de la pensée, en tant que celle-ci vise le vrai.

Encore faut-il préciser ce que sont le raisonnement et la vérité, ce à quoi le XXe siècle a largement contribué. La première position serait celle de Ian Hacking, éminent philosophe des sciences qui définit la logique comme la science de la *déduction* ; la seconde celle du philosophe et logicien Willard van Orman Quine, pour qui elle est celle des *vérités*. Cette dualité traverse le XXe siècle qui a vu s'opposer différentes conceptions de la logique. Et alors que la logique traditionnelle pouvait apparaître comme un tout, les manuels de logique élémentaire divisent aujourd'hui la discipline en calcul des propositions et calcul des prédicats, le second s'appuyant sur le premier. Chacun y apparaît comme un système déductif formalisé, possédant trois dimensions :

1. La dimension *syntaxique* contient tout ce qui relève de la théorie de la démonstration. Elle se compose d'un alphabet et de règles de formation des formules, ainsi que des axiomes et des règles de déduction des théorèmes.
2. La dimension *sémantique* appartient à la théorie des modèles. Elle comprend les règles d'interprétation et de validation des formules.
3. La dimension *métalogique* étudie les propriétés de consistance, de complétude et de décidabilité du système.

Chacune de ces dimensions, dont aucune n'exclut les autres, emprunte aux fondateurs de la logique actuelle : Frege et Russell pour la première, Boole et Tarski pour la deuxième, Hilbert pour les trois. Et il ne faut pas oublier l'autre grande affaire du XXe siècle qui a connu, grâce notamment à la naissance d'une pluralité de logiques, un renouvellement de ses problématiques. Nous espérons que ce bref ouvrage aura contribué à montrer combien la logique, née il y a fort longtemps, a su et sait encore se remettre en question.

BIBLIOGRAPHIE

On s'est limité aux textes rédigés ou traduits en français les plus souvent cités, en distinguant ceux de logique proprement dite et ceux d'histoire de la logique.

LOGIQUE

Aristote, *Les Premiers Analytiques*, trad. et notes J. Tricot, Vrin, 2001.

Aristote, *Les Seconds Analytiques*, trad. et notes J. Tricot, Vrin, 2000.

Arnauld Antoine, Nicole Pierre, *La logique ou l'art de penser*, Gallimard, 1992.

Bolzano Bernard, *De la méthode mathématique*, trad. C. Maigné, J. Sebestik, Vrin, 2008.

Bolzano Bernard, *Premiers écrits. Philosophie, logique, mathématique*, C. Maigné, J. Sebestik éd., Vrin, 2010.

Bolzano Bernard, *Théorie de la science*, trad. J. English, Gallimard, 2011.

Boole George, *Les lois de la pensée*, trad. S.B. Diagne, Vrin, 1992.

Carroll Lewis, *Logique sans peine*, trad. J. Gattégno, Hermann, 1966.

Frege Gottlob, *Idéographie*, trad. C. Besson, postface J. Barnes, Vrin, 1999.

Gödel Kurt, *Le théorème de Gödel*, trad. J.-B. Scherrer, Éditions du Seuil, 1989.

Largeault Jean, *Logique mathématique. Textes*, Armand Colin, 1972.

Pascal Blaise, *De l'esprit géométrique et de l'art de persuader*, in Œuvres *complètes*, « La Pléiade », Gallimard, 1954.

Russell Bertrand, *Écrits de logique philosophique*, trad. J.-M. Roy, PUF, 1989.

Turing Alan, *La machine de Turing*, trad. J. Basch, P. Blanchard, Éditions du Seuil, 1995.

HISTOIRE DE LA LOGIQUE

Dictionnaire des philosophes et *Dictionnaire de la philosophie*, Encyclopædia Universalis & Albin Michel, 2006.

Belna Jean-Pierre, *Histoire de la théorie des ensembles*, Ellipses, 2009.

Benmakhlouf Ali, *Russell*, Les Belles Lettres, 2004.

Blanché Robert, Dubucs Jacques, *La logique et son histoire*, Masson & Armand Colin, 1996.

Blay Michel dir., *Grand Dictionnaire de la philosophie*, Larousse et CNRS éditions, 2003.

Boniface Jacqueline, *Hilbert et la notion d'existence mathématique*, Vrin, 2004.

Cassou-Noguès Pierre, *Hilbert*, Les Belles Lettres, 2001.

Cassou-Noguès Pierre, *Gödel*, Les Belles Lettres, 2004.

Ildefonse Frédérique, *Les Stoïciens I. Zénon, Cléanthe, Chrysippe*, Les Belles Lettres, 2000.

Imbert Claude, *Pour une histoire de la logique*, PUF, 1999.

Kleene Stephen C., *Logique mathématique*, trad. J. Largeault, Armand Colin, 1971.

Libera Alain de, *La philosophie médiévale*, PUF, 2004.

Łukasiewicz Jan, *La syllogistique d'Aristote dans la perspective de la logique formelle moderne*, trad. Fr. Caujolle-Zaslawsky, Vrin, 2010.

Popelard Marie-Dominique, Vernant Denis, *Eléments de logique*, Le Seuil, 1998.

Rivenc François, Rouilhan Philippe de (dir.), *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914)*, Payot, 1992.

Vernant Denis, *La philosophie mathématique de Russell*, Vrin, 1993.

Vernant Denis, *Introduction à la logique standard*, Flammarion, 2001.

Vernant Denis, *Bertrand Russell*, Flammarion, 2003.

Wagner Pierre, *La machine en logique*, PUF, 1998.

Wagner Pierre, *La logique*, PUF, « Que sais-je ? », 2007.

INDEX DES NOMS

Conformément à l'usage, les auteurs du Moyen Âge sont répertoriés sous leurs prénoms. Les numéros en gris sont ceux des pages où le nom n'est mentionné qu'en note.

TABLE DES MATIÈRES

Achevé d'imprimer par Corlet, Imprimeur, S.A. - 14110 Condé-sur-Noireau
N° d'Imprimeur : 161144 - Dépôt légal : mars 2014 - *Imprimé en France*

NÉE dans l'Antiquité grecque avec Aristote et les stoïciens, la logique a continué de côtoyer la philosophie durant le Moyen Âge et jusqu'au XVII^e^ siècle. C'est à partir du milieu du XIX^e^ siècle que des mathématiciens, en l'axiomatisant et en la formalisant à l'aide de diverses langues symboliques, l'ont rapprochée des mathématiques. Le XX^e^ siècle a consacré ce basculement et renouvelé les questions philosophiques grâce à cette logique rénovée. Passée de la science du seul syllogisme à la théorie générale de la déduction, elle a même un temps pu prétendre fonder la mathématique.

Le présent ouvrage raconte ce cheminement et ses étapes majeures, d'Aristote à la naissance de l'informatique avec Turing et de la théorie des modèles avec Tarski, en passant par Guillaume d'Ockham, Boole, Frege, Gödel et bien d'autres, sans oublier les logiques non occidentales. S'il ne prétend pas répondre à la question de savoir ce qu'est la logique ni si en parler au singulier est parfaitement légitime, il n'élude pas ces problèmes et examine les interrogations qui ont guidé les philosophes, logiciens et mathématiciens dans leurs démarches.

S'adressant aux étudiants en philosophie et en mathématiques aussi bien qu'aux personnes intéressées par la manière dont les différentes époques ont envisagé les problématiques du raisonnement et de la vérité, l'ouvrage offre au lecteur la possibilité de s'initier à la logique par le biais instructif de son histoire.

Jean-Pierre Belna est maître ès mathématiques et docteur en philosophie. Auteur de différents ouvrages sur l'histoire des mathématiques, dont une « Histoire de la théorie des ensembles » chez Ellipses, il est chargé de cours dans l'enseignement supérieur et chercheur associé au CNRS (équipe SPHERE, Université Paris 7 Denis Diderot).

9 782729 884482

www.editions-ellipses.fr