CAHIERS DU CENTRE DE LOGIQUE

1

INTUITIONNISME et THÉORIE de la DÉMONSTRATION

CAHIERS DU CENTRE DE LOGIQUE

1

INTUITIONNISME et THÉORIE de la DÉMONSTRATION

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
INSTITUT SUPÉRIEUR DE PHILOSOPHIE

CABAY - LOUVAIN-LA-NEUVE - 1980

D / 1980 / 2457 / 17

© CABAY, Libraire-Conseil.
Tous droits réservés.

Ce recueil rassemble des exposés présentés
au "Séminaire de logique formalisée"
de l'Institut Supérieur de Philosophie
de l'UCL pendant l'année académique
1978-1979.

M. CRABBÉ et Th. LUCAS.

TABLE DES MATIERES

LUCAS Th. Les thèses de la logique intuitionniste..... 1.

DRABBE J. Présentation topologique du calcul propositionnel intuitionniste ..... 11.

DRABBE J. Logique propositionnelle intuitionniste et forcing.... 19.

MOREAU M. Modèles de Krioke ..... 27.

MOENS J.L. Déduction naturelle ..... 45.

LUCAS Th. L'interprétation "Dialectica" ..... 69.

CRABBÉ M. Normalisation du calcul des fonctionnelles récursives primitives ..... 83.

LEONARD R. Remarques sur la philosophie de Brouwer ..... 95.

LES THESES DE LA LOGIQUE INTUITIONNISTE

Th. LUCAS

Bibliographie :

[1] KLEENE S.C. "Introduction to Metamathematics"
North-Holland, Amsterdam, London, 1971.

[2] MYHILL J. "Embedding Classical Logic in Intuitionistic Logic"
Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen d. Math. 19, pp.93-96 (1973).

Deux parties dans cet exposé donneront des indications sur l'ensemble des thèses de la logique intuitionniste. La première reprend le système formel (de type hilbertien) de Kleene; des tableaux indiqueront certaines implications démontrables dans ce système; une implication non retournée n'est pas démontrable en général dans le système. La deuxième montre en quel sens des transformations du type "double négation" permettent de plonger la logique classique dans la logique intuitionniste : elle est basée sur [1] pp. 492 ss et [2].

I. Quelques thèses de la logique intuitionniste.

Voici le système décrit par Kleene.

a) Pour le calcul des propositions :

$P \to (Q \to P)$

$(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$

$\dfrac{P, \quad P \to Q}{Q}$

$P \to (Q \to P \wedge Q)$

$P \wedge Q \to P$

$P \wedge Q \to Q$

$P \to P \vee Q$

$Q \to P \vee Q$

$(P \to R) \to ((Q \to R) \to (P \vee Q \to R))$

$(P \to Q) \to ((P \to \neg Q) \to \neg P)$

$(\neg P \to (P \to Q))$

b) Pour le calcul des prédicats : a) et :

$$\frac{Q \to P(x)}{Q \to \forall x\, P(x)}$$

$$\forall x\, P(x) \to P(t)$$

$$\frac{P(x) \to Q}{\exists x\, P(x) \to Q}$$

$$P(t) \to \exists x\, P(x)$$

avec les restrictions classiques sur x et t.

c) Pour l'arithmétique: a), b) et :

$$P(0) \wedge \forall x\, (P(x) \to P(x')) \to P(x)$$

$$x' = y' \to x = y$$

$$\neg\, x' = 0$$

$$x = y \to (x = z \to y = z)$$

$$x = y \to x' = y'$$

$$x + 0 = x$$

$$x + y' = (x+y)'$$

$$x.0 = 0$$

$$x.y' = x.y + x$$

Les systèmes classiques correspondants s'obtiennent par l'adjonction du schéma :

$$\neg\neg P \to P$$

A noter que ceci affecte directement le caractère intuitionniste de la négation mais aussi celui du quantificateur universel, car ajouter

$$\neg\neg P(x) \to P(x)$$

revient à ajouter

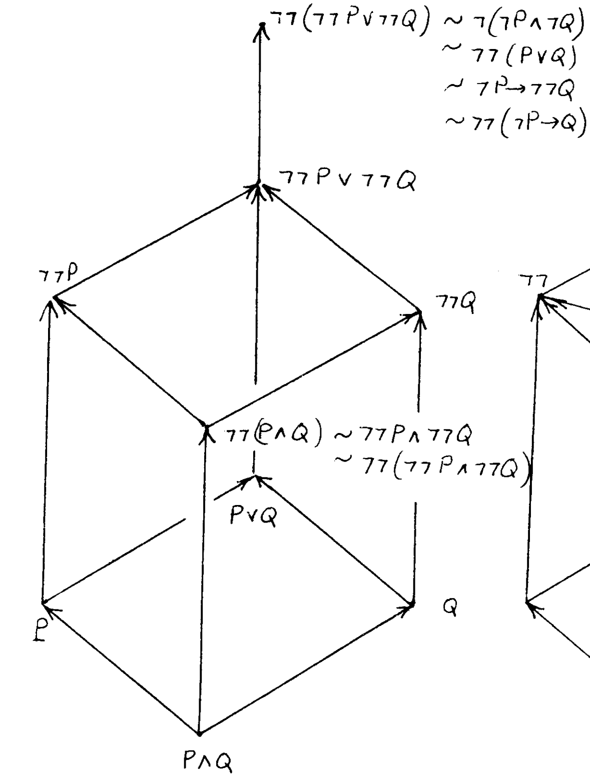
$$\forall x(\neg\neg P(x) \to P(x)),$$

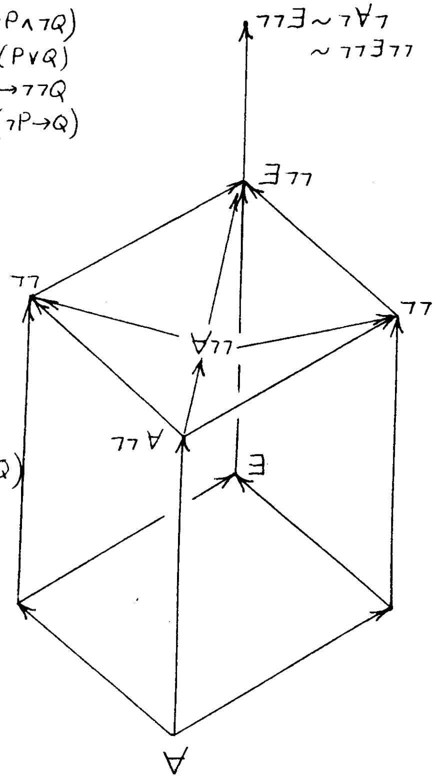
d'où l'on déduira

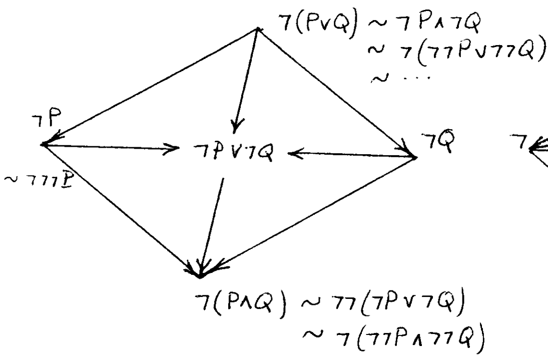
$$\forall x\, \neg\neg P(x) \to \forall x\, P(x),$$

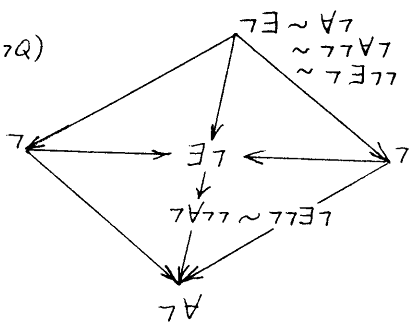
écrasant ainsi les différences que l'intuitionnisme met entre $\forall\neg\neg$, $\neg\neg\forall$ et $\forall$.

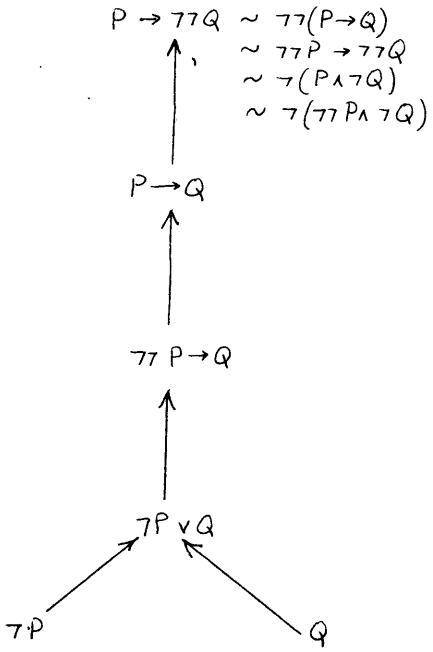
Voici quelques tableaux qui éclairent surtout le comportement de la négation. Pour d'autres théorèmes, voir [1].

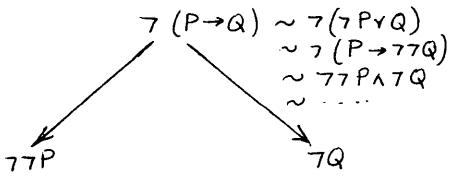

¬¬(¬¬P ∨ ¬¬Q) ~ ¬(¬P ∧ ¬Q)
~ ¬¬(P ∨ Q)
~ ¬P → ¬¬Q
~ ¬¬(¬P → Q)
¬¬P ∨ ¬¬Q
¬¬P
¬¬Q
¬¬(P ∧ Q) ~ ¬¬P ∧ ¬¬Q
~ ¬¬(¬¬P ∧ ¬¬Q)
P ∨ Q
P
Q
P ∧ Q


¬¬∃ ~ ¬∀¬
~ ¬¬∃¬¬
∃¬¬
¬¬
¬¬
∀¬¬
¬¬∀
∃
∀


¬(P ∨ Q) ~ ¬P ∧ ¬Q
~ ¬(¬¬P ∨ ¬¬Q)
~ ...
¬P
~ ¬¬¬P
¬P ∨ ¬Q
¬Q
¬(P ∧ Q) ~ ¬¬(¬P ∨ ¬Q)
~ ¬(¬¬P ∧ ¬¬Q)


¬∃ ~ ∀¬
~ ¬¬∀¬
~ ¬∃¬¬
¬
∃¬
¬
¬∀¬¬ ~ ¬¬∃¬
¬∀


P → ¬¬Q ~ ¬¬(P→Q)
~ ¬¬P → ¬¬Q
~ ¬(P∧¬Q)
~ ¬(¬¬P∧¬Q)
P→Q
¬¬P→Q
¬P∨Q
¬P
Q


¬(P→Q) ~ ¬(¬P∨Q)
~ ¬(P→¬¬Q)
~ ¬¬P∧¬Q
~ ....
¬¬P
¬Q

II. Plongements des systèmes classiques dans les systèmes intuitionnistes correspondants.

Le prototype de ces plongements est la transformation de double négation : si P est un théorème du calcul propositionnel classique, $\neg\neg P$ est un théorème du calcul propositionnel intuitionniste. Plus généralement, on associe à chaque formule P une formule P^* (que nous appellerons ci-dessous sa "traduction") et on essaie de prouver des résultats du type :

(A) $\Gamma \vdash_{pc} P$ entraîne $\Gamma^* \vdash_{pi} P^*$
(B) $\Gamma \vdash_{c} P$ entraîne $\Gamma^* \vdash_{i} P^*$
(C) $\Gamma \vdash_{ac} P$ entraîne $\Gamma^* \vdash_{ai} P^*$

où Γ^* est l'ensemble des traductions des formules de Γ et $\vdash_{pc}$, $\vdash_{pi}$, $\vdash_{c}$, $\vdash_{i}$, $\vdash_{ac}$, $\vdash_{ai}$ sont respectivement les relations de conséquence du calcul des propositions classique, du calcul des propositions intuitionniste, du calcul des prédicats classique, du calcul des prédicats intuitionniste, de l'arithmétique classique, de l'arithmétique intuitionniste.

Les deux lemmes techniques qui suivent permettent de simplifier les vérifications nécessaires pour établir la plupart des propriétés des traductions que nous envisagerons.

Lemme 1. Soient une traduction $*$ et un ensemble Δ de formules satisfaisant les conditions suivantes pour toutes formules P et Q et pour toute variable x :

(1) $\Delta \vdash_i \neg\neg P^* \to P^*$ pour P atomique
(2) $\Delta \vdash_i (\neg P)^* \leftrightarrow \neg P^*$
(3) $\Delta \vdash_i (P \wedge Q)^* \leftrightarrow P^* \wedge Q^*$
(4) $\Delta \vdash_i (P \vee Q)^* \leftrightarrow \neg(\neg P^* \wedge \neg Q^*)$
(5) $\Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \to Q^*$ entraîne $\Delta \vdash_i \neg\neg(P \to Q)^* \to (P \to Q)^*$
(6) $\Delta \vdash_i (\exists x P)^* \leftrightarrow \neg \forall x \neg P^*$
(7) $\Delta \vdash_i \neg\neg P^* \to P^*$ entraîne $\neg\neg(\forall x P)^* \to (\forall x P)^*$.

Alors, pour toutes formules P,
$\Delta \vdash_i \neg\neg P^* \to P^*$.

Démonstration. On démontre " $\Delta \vdash_i \neg\neg P^* \rightarrow P^*$" par induction sur la forme de P

(1) donne l'étape atomique.

Si P est de la forme $\neg Q$, $Q \vee R$ ou $\exists x Q$, le résultat s'obtient sans hypothèse d'induction à partir de (2), (4) ou (6).

Si P est de la forme $Q \rightarrow R$ ou $\forall x\, Q$, on applique (5) ou (7).

Finalement, si P est de la forme $Q \wedge R$, on a :

$$\begin{aligned} \Delta \vdash_i \neg\neg(Q \wedge R)^* &\leftrightarrow \neg\neg(Q^* \wedge R^*) && \text{par (3)},\\ &\leftrightarrow \neg\neg Q^* \wedge \neg\neg R^*, \\ &\leftrightarrow Q^* \wedge R^* && \text{par l'hypothèse d'induction},\\ &\leftrightarrow (Q \wedge R)^* && \text{par (3)}. \end{aligned}$$

Lemme 2. Soient une traduction $*$ et un ensemble Δ satisfaisant les conditions du lemme (1) et de plus, pour tous P, Q, x, t

(8) $\Delta \vdash_i \neg\neg(P \rightarrow Q)^* \leftrightarrow (\neg\neg P^* \rightarrow \neg\neg Q^*)$

(9) $\Delta \vdash_i \exists x \neg\neg Q^* \rightarrow \neg(\forall x Q)^*$

(10) si x n'a pas d'occurences libres dans P, alors x n'a pas d'occurences libres dans P^*

(11) si t est libre pour x dans P, alors t est libre pour x dans P^*.

Alors, pour tout ensemble Γ de formules, $\Gamma \vdash_c P$ entraîne $\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i P^*$.

Démonstration. Par induction sur la démonstration (classique) de P à partir de Γ.

Si $P \in \Gamma$, alors $P^* \in \Gamma^*$ et de là $\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i P^*$.

Si P est un axiome classique, on prouve que $\Delta \vdash_i P^*$; il en résulte que $\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i P^*$.

Nous envisageons ci-dessous la plupart des cas, laissant la vérification des autres au lecteur.

Si P est de la forme $Q \rightarrow (R \rightarrow Q)$, on a :

$$\begin{aligned} &\vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow (\neg\neg R^* \rightarrow \neg\neg Q^*),\\ &\Delta \vdash_i \neg\neg(Q \rightarrow (R \rightarrow Q))^* && \text{par (8)},\\ &\Delta \vdash_i (Q \rightarrow (R \rightarrow Q))^* && \text{par le lemme 1}. \end{aligned}$$

e P. Si P est de la forme $Q \to (R \to Q \wedge R)$, on a :

$$\vdash_i \neg\neg Q^* \to (\neg\neg R^* \to \neg\neg(Q^* \wedge R^*)),$$

$$\Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \to (\neg\neg R^* \to \neg\neg(Q \wedge R)^*) \quad \text{par (3)},$$

et on achève par (8) et le lemme 1 comme ci-dessus.

Si P est de la forme $Q \to (Q \vee R)$, on a :

$$\vdash_i \neg\neg Q^* \to \neg\neg(\neg Q^* \wedge \neg R^*),$$

$$\Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \to \neg\neg(Q \vee R)^* \quad \text{par (4)},$$

et on achève par (8) et le lemme 1.

Le cas de l'axiome classique $\neg\neg Q \to Q$ n'offre pas de difficultés particulières, car (2) entraîne :

$$\Delta \vdash_i (\neg\neg Q)^* \leftrightarrow \neg\neg Q^*.$$

Si P est de la forme $Qt \to \exists x Qx$ (avec t libre pour x dans Q), on a : $\vdash_i \forall x \neg Qx^* \to \neg Qt^*$ par (11),

$$\vdash_i \neg\neg Qt^* \to \neg\neg\forall x \neg Qx^*,$$

$$\Delta \vdash_i \neg\neg Qt^* \to \neg\neg(\exists x Qx)^*$$

et on achève par (8) et le lemme 1.

Si P est de la forme $\forall x Qx \to Qt$ (avec t libre pour x dans Q), on a : $\Delta \vdash_i \exists x \neg Qx^* \to \neg(\forall x Qx)^*$ par (9),

$$\vdash_i \neg Qt^* \to \exists x \neg Qx^* \quad \text{par (11)},$$

$$\Delta \vdash_i \neg Qt^* \to \neg(\forall x Qx)^*,$$

$$\Delta \vdash_i \neg\neg(\forall x Qx)^* \to \neg\neg Qt^*,$$

et on achève par (8) et le lemme 1.

Il nous reste à envisager les cas où P est obtenu par les règles de dérivation.

Si P est obtenu par la règle d'introduction du quantificateur existentiel, l'hypothèse d'induction est du type

$$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i (Qx \to R)^*,$$

d'où l'on tire :

$$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg(Qx \to R)^*,$$

$$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Qx^* \to \neg\neg R^* \text{ par (8)},$$

$$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg R^* \to \neg Qx^*,$$

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg R^* \rightarrow \forall x \neg Q x^*$ par (10),

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg\forall x \neg Q x^* \rightarrow \neg\neg R^*$,

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg(\exists x Q x)^* \rightarrow \neg\neg R^*$ par (6),

et l'on achève par (8) et le lemme 1.

Le cas où P est obtenu par la règle de modus ponens se traite de façon plus simple encore, en appliquant (8) et le lemme 1. Finalement, si P est obtenu par la règle d'introduction du quantificateur universel, l'hypothèse d'induction est du type :

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i (Q \rightarrow Rx)^*$,

d'où l'on tire :

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg (Q \rightarrow Rx)^*$

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow \neg\neg Rx^*$ par (8),

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow Rx^*$ par le lemme 1,

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow \forall x Rx^*$ par (10),

$\Gamma^* \cup \Delta \vdash_i \neg\neg Q^* \rightarrow \neg\neg\forall x Rx^*$,

et on achève par (8) et le lemme 1.

Voici quelques exemples de "traduction".

EXEMPLE 1. La traduction* définie pour tout P par $P^* = \neg\neg P'$, où P' est définie inductivement selon la forme de P par les clauses :

$P' = P$ pour P atomique,

$(\neg Q)' = \neg Q'$,

$(Q \wedge R)' = Q' \wedge R'$,

$(Q \vee R)' = Q' \vee R'$,

$(Q \rightarrow R)' = Q' \rightarrow R'$,

$(\exists x Q)' = \exists x Q'$,

$(\forall x Q)' = \neg\exists x \neg Q'$.

On vérifie que cette traduction satisfait toutes les conditions des lemmes pour $\Delta = \emptyset$.

On en déduira immédiatement le résultat (B). Le résultat (A) vaut aussi si l'on considère le calcul propositionnel comme un cas dégénéré de calcul des prédicats (où l'ensemble des variables est vide) ; on retrouve ici le théorème de la double négation :

$$\Gamma \vdash_{pc} P \quad \rightarrow \quad \neg\neg\Gamma \vdash_{pi} \neg\neg P$$

(car dans ce cas P' = P).

Un corollaire de ce genre de résultats est l'équiconsistance des calculs de propositions (ou des calculs de prédicats) classique et intuitionniste ; en effet, si $P \wedge \neg P$ était une théorème classique, $(P \wedge \neg P)^*$, à savoir $\neg\neg(P' \wedge \neg P')$ en serait un du système intuitionniste correspondant.

On en déduit aussi que pour P sans autres connecteurs que $\wedge$ et $\neg$,

$$\vdash_{pc} P \rightarrow \vdash_{pi} P .$$

EXEMPLE 2. La traduction P^* définie inductivement selon la forme de P par les clauses :

$$\begin{aligned}
P^* &= P \text{ pour P atomique} \\
(\neg Q)^* &= \neg Q^* \\
(Q \wedge R)^* &= Q^* \wedge R^* \\
(Q \vee R)^* &= \neg(\neg Q^* \wedge \neg R^*) \\
(Q \rightarrow R)^* &= Q^* \rightarrow R^* \\
(\exists x Q)^* &= \neg \forall x \neg Q^* \\
(\forall x Q)^* &= \forall x Q^*
\end{aligned}$$

On vérifie que cette traduction satisfait toutes les conditions des lemmes pour $\Delta = \{\neg\neg Q \rightarrow Q \mid Q \text{ atomique}\}$.

On en déduit que pour tout Γ , $\Gamma \vdash_c P \rightarrow \Gamma^* \cup \Delta \vdash_i P^*$ (12).

On peut établir le résultat (C) par l'argument suivant, Ar désignant l'ensemble des axiomes de l'arithmétique :

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash_{ac} P &\rightarrow \Gamma \cup Ar \vdash_c P \\
&\rightarrow \Gamma^* \cup Ar^* \cup \Delta \vdash_i P^* \text{ par (12)} \\
&\rightarrow \Gamma^* \cup Ar \cup \Delta \vdash_i P^* \text{ (car } Ar \vdash_i Ar^*) \\
&\rightarrow \Gamma^* \cup Ar \vdash_i P^* \text{ (car } Ar \vdash_i \Delta \text{)} \\
&\rightarrow \Gamma^* \vdash_{ai} P^* .
\end{aligned}$$

Ce résultat entraîne l'équiconsistance de l'arithmétique classique et de l'arithmétique intuitionniste.

EXEMPLE 3. La traduction P^* définie par les mêmes clauses que celles de l'exemple 2 sauf

$$(Q \to R)^* = \neg(Q^* \wedge \neg R^*).$$

On vérifie que cette traduction satisfait toutes les conditions des lemmes pour $\Delta = \{\neg\neg Q \to Q \mid Q \text{ atomique}\}$. On établit le résultat (C), comme ci-dessus. On a aussi le résultat (A) pour $\Gamma = \emptyset$, en utilisant la dernière remarque de l'exemple 1.

EXEMPLE 4. La traduction $P^{*\neg\neg}$ obtenue à partir de la traduction P^* de l'exemple 2 en remplaçant dans P^* chaque formule atomique par sa double négation.

On vérifie que cette traduction satisfait toutes les conditions des lemmes pour $\Delta = \emptyset$. On établit les résultats (A), (B) et (C) pour tout Γ.

Cet exemple admet plusieurs variantes.

EXEMPLE 5. La traduction P^* définie inductivement par les clauses :

$$\begin{aligned}
&P^* = P \text{ pour } P \text{ atomique}\\
&(\neg Q)^* = \neg Q^*\\
&(Q \wedge R)^* = Q^* \wedge R^*\\
&(Q \vee R)^* = \neg(\neg Q^* \wedge \neg R^*)\\
&(Q \to R)^* = \neg(Q^* \wedge \neg R^*)\\
&(\exists x Q)^* = \neg \forall x \neg Q^*\\
&(\forall x Q)^* = \neg \exists x \neg Q^* .
\end{aligned}$$

Cette traduction vérifie toutes les clauses des lemmes pour $\Delta = \emptyset$, sauf (1), On modifie la conclusion du lemme (1) en :

$$\vdash_c P \quad \longrightarrow \quad \vdash_i \neg\neg P^* \to P^*$$

et sa démonstration en prouvant cette assertion par induction sur la forme de P. De même on modifie la conclusion du lemme 2 en :

$$\vdash_c P \quad \longrightarrow \quad \vdash_i P^*$$

et la démonstration subsiste moyennant quelques adaptations évidentes.

Pour une discussion des avantages de cette traduction, voir [2].

PRESENTATION TOPOLOGIQUE DU CALCUL PROPOSITIONNEL INTUITIONNISTE.

J. DRABBE.

I. Introduction.

La présentation élémentaire usuelle du calcul propositionnel classique par l'intermédiaire des tables de vérité a fait très tôt l'objet de généralisations permettant un nombre de valeurs de vérité supérieur à 2 (voir, par exemple, E. POST "Introduction to a General Theory of Elementary Propositions", Amer. Journal of Math. 43 (1921), pp. 163-185).

Notons qu'il résulte immédiatement du théorème de représentation de M. STONE (1934) pour les algèbres de Boole que si l'on utilise les éléments d'une algèbre de Boole (de cardinal $\geqslant 2$) B, V, $\wedge$, $'$, $\rightarrow$ (où $a \rightarrow b$ est défini par $a' \vee b$) comme valeurs de vérité, en interprétant :

le "vrai" par le maximum de B, V, $\wedge$, $'$, $\rightarrow$

la disjonction par V

la conjonction par $\wedge$

la négation par $'$ (complément booléien)

l'implication par $\rightarrow$,

on retrouve exactement les tautologies classiques.

Cette remarque sera utilisée plus loin.

Nous allons montrer que la présentation et l'étude élémentaires du calcul propositionnel intuitionniste peuvent être réalisées de manière très simple en utilisant les ouverts de la droite réelle (avec la topologie usuelle) comme valeurs de vérité en admettant l'ouvert impropre $\mathbb{R}$ comme <u>valeur désignée</u> (valeur "vraie").

Cette présentation résulte essentiellement de travaux de A. TARSKI "Der Aussagenkalkül und die Topologie", Fund. Math. 31 (1938), pp. 103-134 et de J. MCKINSEY - A. TARSKI "On closed Elements in Closure Algebras", Annals of Math. 47 (1946), pp. 122-162.

Une introduction (très détaillée) à la logique intuitionniste peut être trouvée dans le récent ouvrage de M. DUMMETT "Elements of Intuitionism" Oxford Univ. Press (1977).

II. Notations - Terminologie.

Désignons par $\mathcal{T}$ l'ensemble des ouverts de la droite réelle.

Pour $A \subset \mathbb{R}$, posons : $-A = \mathbb{R} \setminus A$,
$\text{int } A$ = intérieur de A,
$A^{\perp} = \text{int} - A$.

Nous dirons que A $(\in \mathcal{T})$ est un ouvert régulier ssi $A^{\perp\perp} = A$.

L'ensemble Rég des ouverts réguliers peut être érigé en algèbre de Boole (complète)
Rég, $\vee$, $\wedge$, $'$, $\longrightarrow$ en posant :

$$A \vee B = (A \cup B)^{\perp\perp}$$
$$A \wedge B = A \cap B$$
$$A' = A^{\perp\perp}$$
$$A \longrightarrow B = (A^{\perp} \cup B)^{\perp\perp}$$

Ce résultat est essentiellement une conséquence des propriétés :

Si, $A, B \in \mathcal{T}$, alors :
(i) $A \subset A^{\perp\perp}$
(ii) $A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}$
(iii) $A \subset B \Rightarrow A^{\perp\perp} \subset B^{\perp\perp}$
(iv) $(A \cap B)^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp}$
(voir, par exemple, P. HALMOS "Lectures on Boolean Algebras", Van Nostrand, 1963).

III. Tables de vérité topologiques pour la logique intuitionniste.

Ensemble des valeurs de vérité : $\mathcal{T}$

Valeur désignée : $\mathbb{R}$

p	$\vee$	q	p	$\wedge$	q
A	$A \cup B$	B	A	$A \cap B$	B

$\sim$	p	p	$\Rightarrow$	q
int(-A)	A	A	int(-A $\cup$ B)	B

Notons que les tables de vérité de $\vee$ et $\wedge$ sont naturelles car la réunion et l'intersection de deux ouverts sont encore des ouverts. Comme il n'est pas nécessairement vrai que si A et B sont des ouverts, $-A$ et $-A \cup B$ sont encore des ouverts, la "correction" int a été apportée à la situation classique pour définir les tables de vérité de $\sim$ et $\Rightarrow$.

Nous appellerons "tautologie intuitionniste" toute formule dont la valeur de vérité est $\mathbb{R}$, quelles que soient les valeurs de vérité attribuées à ses variables propositionnelles.

Exemples :

(i) $(p \wedge q) \Rightarrow p$ est une tautologie intuitionniste car pour $A, B \in \mathcal{T}$
$\operatorname{int}(-(A \cap B) \cup A) = \mathbb{R}$.

(ii) $\sim\sim p \Rightarrow p$ n'est pas une tautologie intuitionniste car $\sim\sim p \Rightarrow p$ a la valeur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ lorsque p reçoit la valeur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(iii) On vérifie très facilement que

$$p \vee \sim p$$
$$(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

ne sont pas des tautologies intuitionnistes.

(iv) toute tautologie intuitionniste est une tautologie classique
(à une traduction triviale près, les tables de vérité intuitionnistes restreintes aux cas où les variables prennent leurs valeurs dans $\{\emptyset, \mathbb{R}\}$ sont les tables de vérité classiques).

IV. La structure $\mathcal{T}, \vee, \wedge, ', \rightarrow$.

Les tables de vérité intuitionnistes fournissent une motivation naturelle nous permettant d'ériger $\mathcal{T}$ en structure $\mathcal{T}, \vee, \wedge, ', \rightarrow$ en posant :

$A \vee B = A \cup B$
$A \wedge B = A \cap B$
$A' = A^{\perp}$
$A \rightarrow B = \operatorname{int}(-A \cup B)$.

Ceci va nous permettre de donner une démonstration simple du théorème de Glivenko.

Théorème de GLIVENKO

Si φ est une tautologie classique, alors $\sim\sim\varphi$ est une tautologie intuitionniste.

Notons que la réciproque, est vraie mais triviale en vertu de la propriété (iv) page 13.

V. Démonstration du théorème de Glivenko.

(a) En vertu des propriétés (i) à (iv), page 12 pour tout ouvert A, $A^{\perp\perp}$ est un ouvert régulier.

Soit $^{\perp\perp}$ l'application de $\mathcal{O}$ dans Rég. définie par

$$A \longmapsto A^{\perp\perp} .$$

Il est aisé de vérifier (en utilisant les propriétés (i) à (iv), page 12) que $^{\perp\perp}$ est un morphisme de $\mathcal{O}, \vee, \wedge, ', \rightarrow$ dans Rég, $\vee, \wedge, ', \rightarrow$.

(b) Soit $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ une formule du calcul propositionnel intuitionniste. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont dans $\mathcal{O}$, nous notons $\varphi_{\mathcal{O}}(A_1, \ldots, A_n)$ la valeur topologique de φ pour la valuation topologique qui donne à p_i la valeur A_i, $\varphi_{Rég}(A_1^{\perp\perp}, \ldots, A_n^{\perp\perp})$ l'ouvert régulier, valeur booléienne de φ pour la valuation booléienne qui donne à p_i la valeur $A_i^{\perp\perp}$.
En vertu de (a), on a :

$$(\varphi_{\mathcal{O}}(A_1, \ldots, A_n))^{\perp\perp} = \varphi_{Rég}(A_1^{\perp\perp}, \ldots, A_n^{\perp\perp})$$

Il en résulte que si φ est une tautologie classique, alors

$$(\sim\sim\varphi)_{\mathcal{O}}(A_1, \ldots, A_n) = \mathbb{R} \quad \text{pour tout } A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{O}$$

et, par conséquent, $\sim\sim\varphi$ est une tautologie intuitionniste.
C.q.f.d.

On montre aisément en utilisant le théorème de Glivenko et des considérations topologiques élémentaires que si $\varphi \Leftrightarrow \psi$ est une tautologie classique, alors

$$\sim\sim\varphi \iff \sim\sim\psi$$

est une tautologie intuitionniste.

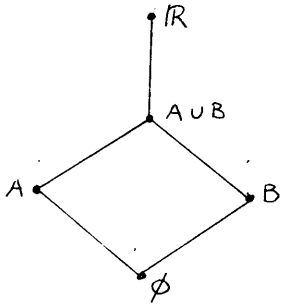
VI. Indépendance des connecteurs $\vee$, $\wedge$, $\sim$, $\Rightarrow$ en logique propositionnelle intuitionniste.

Il est bien connu que chacun des connecteurs $\vee, \wedge, \sim, \Rightarrow$ de la logique intuitionniste est indépendant des trois autres. Nous allons établir, à titre d'illustration, l'indépendance de $\vee$ par rapport à $\wedge, \sim, \Rightarrow$ en utilisant une méthode topologique.

Posons $A = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} (2z, 2z + 1)$

$B = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}} (2z + 1, 2z + 2)$.

Trivialement, $\{\emptyset, A, B, \mathbb{R}\}$ est stable pour l'intersection. Cette partie est stable pour '(=int-.) car $\emptyset' = \mathbb{R}$, $A' = B$, $B' = A$ et $\mathbb{R}' = \emptyset$.



La table suivante donne les valeurs de $\rightarrow$ pour les arguments dans $\{\emptyset, A, B, A \cup B, \mathbb{R}\}$

$\rightarrow$	$\emptyset$	A	B	$A \cup B$	$\mathbb{R}$
$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
A	B	$\mathbb{R}$	B	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
B	A	A	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$A \cup B$	$\emptyset$	A	B	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$\emptyset$	A	B	$A \cup B$	$\mathbb{R}$

$\{\emptyset, A, B, \mathbb{R}\}$ est donc stable pour $\rightarrow$.
Notons que l'on a toujours :

$$X \rightarrow Y = \mathbb{R} \quad \text{ssi} \quad X \subset Y.$$

$p \vee q$ ne peut donc être équivalente à une formule ne faisant intervenir que $\wedge$, $\sim$, $\rightarrow$ (donner à p la valeur A et à q la valeur B).

VII. Remarque

Les définitions données dans le paragraphe 3 peuvent être adaptées naturellement à tout espace topologique E, ce qui permet d'introduire la notion de E- tautologie.

Si $\mathcal{C}$ est la classe de tous les espaces topologiques, on a :

$$\bigcap_{E \in \mathcal{C}} \{\varphi \mid \varphi \text{ est E- tautologie}\}$$
= l'ensemble des tautologies intuitionnistes.

Ce résultat est établi dans l'article de McKinsey, Tarski mentionné plus haut. Cette "propriété universelle" de la topologie réelle se retrouve notamment pour les rationnels munis de la topologie induite (par celle des réels) et donc pour tous les espaces dénombrables métrisables sans point isolés (théorème de Sierpinski).

VIII. Variante d'un résultat de K. GODEL.

Il est trivial que si E est un espace topologique à 1 élément, alors l'ensemble des E-tautologies est l'ensemble des tautologies classiques.

Nous allons montrer qu'on ne peut espérer une situation aussi simple pour le calcul propositionnel intuitionniste; de manière précise :

Si E est un espace topologique ne contenant qu'un nombre fini d'ouverts, alors, l'ensemble des E - tautologies est distinct de l'ensemble des tautologies intuitionnistes.

Démonstration :

Supposons que E contienne exactement n ouverts.

(a) Il est aisé de vérifier que

$$\bigvee_{1 \leq i < j \leq n+1} p_i \Leftrightarrow p_j$$

est une E - tautologie.

(b) Nous montrons que la formule considérée en (a) n'est pas une tautologie intuitionniste. Afin d'éviter des notations trop compliquées, supposons n = 5 ; la généralisation sera immédiate et triviale.

Défnissons les ouverts (réels) A à A par :

$$A_1 = \bigcup_{n \in \omega} \left(-\frac{1}{4n}, -\frac{1}{4n+1}\right) \cup \bigcup_{n \in \omega} \left(\frac{1}{4n+1}, \frac{1}{4n}\right)$$

(en posant $-\frac{1}{0} = -\infty$, $\frac{1}{0} = \infty$),

$$A_2 = \bigcup_{n \in \omega} \left(\frac{-1}{4n+1}, \frac{-1}{4n+2}\right) \cup \bigcup_{n \in \omega} \left(\frac{1}{4n+2}, \frac{1}{4n+1}\right)$$

$$A_3 = \bigcup_{n \in \omega} \left(\frac{-1}{4n+2}, \frac{-1}{4n+3}\right) \cup \bigcup_{n \in \omega} \left(\frac{1}{4n+3}, \frac{1}{4n+2}\right)$$

$$A_4 = \bigcup_{n \in \omega} \left(\frac{-1}{4n+3}, \frac{-1}{4n+4}\right) \cup \bigcup_{n \in \omega} \left(\frac{1}{4n+4}, \frac{1}{4n+3}\right)$$

Posons $B_1 = \mathbb{R}$, $B_2 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$,
$B_3 = A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $B_4 = A_1 \cup A_2$,
$B_5 = A_1$, $B_6 = \emptyset$.

Si l'on attribue à p_i la valeur B_i la formule considérée en (a) reçoit une valeur distincte de $\mathbb{R}$ car pour $i<j$, $o \notin \text{int}\,(-B_i \cup B_j)$ (aucun ouvert comprenant o n'est contenu dans $-B_i \cup B_j$).

Noter cependant que le calcul propositionnel intuitionniste est décidable (voir, par exemple, l'ouvrage de Dummett mentionné plus haut).

Logique propositionnelle intuitionniste et forcing

J. DRABBE.

1. Terminologie et notations

Les notations et la terminologie non explicitées sont celles des notes "Une présentation topologique du calcul propositionnel intuitionniste".

Nous noterons toujours un espace topologique sous la forme $E, \mathcal{C}$ où E désigne l'ensemble des "points" de l'espace considéré et $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties ouvertes (de E).

L'espace topologique usuel des réels est noté $\mathbb{R}, \mathcal{C}_{us}$

2. Nous nous proposons de montrer que si φ est une formule (du calcul propositionnel intuitionniste) qui n'est pas une tautologie intuitionniste, alors il existe un espace topologique fini $E, \mathcal{C}$ tel que φ n'est pas une $E, \mathcal{C}$ -tautologie.

Proposition 1 : Si φ n'est pas une tautologie intuitionniste, alors, il existe une topologie $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$\mathcal{C}$ est finie ;
φ n'est pas une $\mathbb{R}, \mathcal{C}$ - tautologie.

Démonstration :

si $\varphi(p_1, \cdots, p_n)$, (avec la notation usuelle qui prévoit que toutes les variables propositionnelles figurant dans φ sont dans la liste $p_1, \cdots, p_n$) n'est pas une tautologie intuitionniste, alors, il existe des ouverts

$A_1, \ldots, A_n$ (de $\mathbb{R}, \mathcal{C}_{us}$) tels que

$$\varphi_{\mathbb{R}, \mathcal{C}_{us}}(A_1, \ldots, A_n) \neq \mathbb{R}$$

Soit $\mathcal{C}$ le plus petit ensemble de parties de $\mathbb{R}$ tel que

$\mathcal{C}$ comprend $\emptyset$ et $\mathbb{R}$

$$\mathcal{C} \supset \{ \psi_{\mathbb{R}, \mathcal{C}_{us}}(A_1, \ldots, A_n) \mid \psi \text{ est formule partie de } \varphi \}$$

$$\forall X, Y \in \mathcal{C} \quad X \cup Y \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad X \cap Y \in \mathcal{C}.$$

Il est aisé de vérifier que $\mathcal{C}$ est un ensemble fini (ceci résulte des propriétés de distributivité de $\cup, \cap$).

Trivialement $\mathbb{R}, \mathcal{C}$ est un espace topologique et une induction régulière sur la complexité des sous-formules de φ permet de démontrer que pour toute sous-formule ψ de φ :

$$\psi_{\mathbb{R}, \mathcal{C}_{ws}}(A_1, \ldots, A_n) = \psi_{\mathbb{R}, \mathcal{C}}(A_1, \ldots, A_n).$$

En particulier, $\varphi_{\mathbb{R}, \mathcal{C}}(A_1, \ldots, A_n)$ n'est pas une $\mathbb{R}, \mathcal{C}$ -tautologie.

Proposition 2. Supposons que E, $\mathcal{C}$ soit un espace topologique tel que $\mathcal{C}$ soit fini. Alors, il existe un espace topologique fini $E^*, \mathcal{C}^*$ tel que les structures

$$(\mathcal{C}, \vee, \wedge, ', \rightarrow) \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}^*, \vee, \wedge, ', \rightarrow)$$

soient isomorphes (notations : voir page 13 de l'article cité précédemment).

Démonstration : Définissons la relation d'équivalence $\equiv$ sur E par

$x \equiv y$ ssi $\forall X \in \mathcal{C} \quad x \in X \Leftrightarrow y \in X$.

Soit $\underline{x}$ la classe d'équivalence de $x \in E$ par $\equiv$.

Notons f la fonction de domaine $\mathcal{C}$ telle que pour tout $X \in \mathcal{C}$,

$$f(X) = \{\underline{x} \mid x \in X\}.$$

Posons $E^* = f(E)$

$$\mathcal{C}^* = \{f(X) \mid X \in \mathcal{C}\}.$$

On vérifie aisément que $E^*, \mathcal{C}^*$ a les propriétés souhaitées.

Corollaire 3 : Pour toute formule φ telle que φ n'est pas une tautologie intuitionniste, il existe un espace topologique fini E, $\mathcal{C}$ tel que φ n'est pas une E, $\mathcal{C}$ - tautologie.

3. Nous nous proposons d'établir une amélioration du corollaire 3.

Rappelons qu'à tout ordonné $E, \leqslant$ on peut associer un espace topologique noté $E, \mathcal{T}_{\leqslant}$ dont la topologie $\mathcal{T}_{\leqslant}$ admet une base d'ouverts formée par toutes les sections initiales de $E, \leqslant$ (une section initiale de $E, \leqslant$ est une partie A de E telle que

$$\forall\, x, y \in E \qquad x \leqslant y \in A \quad \Rightarrow \quad x \in A).$$

Définition : Un ouvert A d'un espace topologique E. $\mathcal{T}$ sera dit irréductible ssi $A \neq \emptyset$ et

$$\forall\, B, C \in \mathcal{T} \qquad A = B \cup C \Rightarrow A = B \text{ ou } A = C.$$

Propriété élémentaire : Si A, B, C sont des ouverts de E, $\mathcal{T}$ et si A est irréductible, alors

$$A \subset B \cup C \quad \Rightarrow \quad A \subset B \quad \text{ou} \quad A \subset C$$

Vérification :

$A = (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$.
Comme A est irréductible $A = B \cap A$ ou $A = C \cap A$;
par conséquent $A \subset B$ ou $A \subset C$.

Proposition 4 :
Pour tout espace topologique fini E, $\mathcal{T}$ il existe un ordonné fini J, $\leqslant$ et un morphisme θ de $(\mathcal{T}, \vee, \wedge, ', \rightarrow)$ dans $(\mathcal{T}_{\leqslant}, \vee, \wedge, ', \rightarrow)$ tel que pour tout $A \in \mathcal{T}$

$$\theta(A) = J \quad \Rightarrow \quad A = E.$$

(La proposition pourrait être formulée de manière plus fine en exigeant que θ soit un isomorphisme, mais nous n'aurons besoin que de la forme faible indiquée).

Démonstration : soit J, $\leqslant$ l'ensemble des ouverts irréductibles de E, $\mathcal{T}$ ordonné par l'inclusion ensembliste.
Posons (pour $A \in \mathcal{T}$)

$$\theta(A) = \{D \in J \mid \quad D \subset A\}.$$

Les propriétés suivantes sont triviales :
Pour tout A, $B \in \mathcal{T}$.
. $\theta(A)$ est une section de J, $\subset$ (et donc un ouvert de J, $\mathcal{T}_{\subset}$) ;

. $\theta(A \cap B) = \theta(A) \cap \theta(B)$;
. $\theta(A) \cup \theta(B) \subset \theta(A \cup B)$;
. $\theta(\emptyset) = \emptyset$.

On a également,

. $\theta(A \cup B) \subset \theta(A) \cup \theta(B)$ car si D est irréductible et $D \subset A \cup B$, alors $D \subset A$ ou $D \subset B$ (propriété élémentaire, page 21).

D'autre part,

. $\theta(A \to B) = \theta(A) \to \theta(B)$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout D irréductible,

$D \subset \text{int}(- A \cup B)$ ssi $D \in (\theta(A) \to \theta(B))$

C'est-à-dire, pour tout D irréductible,

$D \subset \text{int}(-A \cup B)$ ssi $\forall D'_{irréd} \subset D \quad D' \in - \theta(A) \cup \theta(B)$

$\Rightarrow$: si $D'_{irréd} \subset D$ et $D' \in \theta(A)$
alors $D' \subset (- A \cup B) \cap A$ et donc $D' \subset B$.

$\Leftarrow$: considérons l'ouvert $D \cap A$.

(i) si $D \cap A = \emptyset$, alors $D \subset - A$ et donc $D \subset \text{int}(-A \cup B)$.
(ii) si $D \cap A$ est irréductible, alors $D \cap A \subset B$ et trivialement $D \subset \text{int}(-A \cup B)$.
(iii) si $D \cap A$ n'est ni irréductible, ni vide, alors $D \cap A$ est une réunion finie d'ouverts irréductibles $D_1 \cup \ldots \cup D_n$. Comme tous les $D_i \subset B$, on obtient $D \cap A \subset B$ et dès lors $D \subset \text{int}(- A \cup B)$.

Il est trivial que

. $\theta(A') = (\theta(A))'$ car $A' = A \to \emptyset$.

Finalement $\theta(A) = J$ entraîne que $A = E$ car tout ouvert est réunion de tous les ouverts irréductibles qu'il contient.

Corollaire 5 :
Pour toute formule φ telle que φ n'est pas une tautologie intuitionniste, il existe un ordonné fini $J,\leq$ tel que φ n'est pas une $J, \mathcal{O}_{\leq}$ - tautologie.

Un examen attentif des démonstrations des propositions 1, 2 et 4 permet d'obtenir récursivement une limitation supérieure sur le cardinal de J, à partir de φ.

Remarque 6 : la proposition 4 peut être améliorée en exigeant que $J,\leq$ soit un ordonné maximé (si $J,\leq$ n'admet pas d'élément maximum, prolonger $J,\leq$ de manière naturelle en adjoignant un maximum; le calcul est régulier).

4. McKinsey et Tarski ont établi (Annals of Math. 47 (1946), pages 122-162) le résultat :

Théorème 7 : Pour toute formule φ, si pour tout espace topologique fini $E,\mathcal{O},\varphi$ est une $E,\mathcal{O}$ - tautologie, alors, φ est une tautologie intuitionniste.

On en déduit aisément (en utilisant une généralisation immédiate de la proposition 1) :

Théorème 8 : pour toute formule φ, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) φ est une tautologie intuitionniste;
(b) pour tout espace topologique $E,\mathcal{O}$ φ est une $E,\mathcal{O}$ -tautologie;
(c) pour tout espace topologique fini $E,\mathcal{O}$ φ est une $E,\mathcal{O}$ -tautologie
(e) pour tout ordonné fini $J,\leq$ φ est une $J,\leq$ -tautologie.

5. Topologie des sections initiales et forcing.
Soient $P,\leq$ un ordonné maximé et v une fonction de l'ensemble des variables propositionnelles dans l'ensemble des ouverts de $P,\mathcal{O}_{\leq}$. v détermine évidemment une valuation topologique (que nous notons encore v) de l'ensemble des formules du calcul propositionnel dans l'ensemble des ouverts de $P,\mathcal{O}_{\leq}$ vérifiant :

$v(\varphi \vee \psi) = v(\varphi) \vee v(\psi)$
$v(\varphi \wedge \psi) = v(\varphi) \wedge v(\psi)$
$v(\varphi \Rightarrow \psi) = v(\varphi) \rightarrow v(\psi)$
$v(\sim \varphi) = (v(\varphi))'$.

Pour $p \in P$, φ formule du calcul propositionnel intuitionniste, définissons $\Vdash_v$ (que nous noterons plus simplement $\Vdash$) par

$p \Vdash \varphi$ ssi $p \in v(\varphi)$ (lire "p force φ" pour $p \Vdash \varphi$).

Proposition 9 :
Pour tout $p, q \in P$, pour toute formule φ, ψ:

(i) $(p \Vdash \varphi$ et $q \leq p) \Rightarrow q \Vdash \varphi$
(ii) $p \Vdash \varphi \vee \psi$ ssi $p \Vdash \varphi$ ou $p \Vdash \psi$
(iii) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ ssi $p \Vdash \varphi$ et $p \Vdash \psi$
(iv) $p \Vdash \sim \varphi$ ssi $\forall q \leq p \quad q \not\Vdash \varphi$
(v) $p \Vdash \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $\forall q \leq p \ (q \Vdash \varphi \Rightarrow q \Vdash \psi)$
(vi) On ne peut avoir $p \Vdash \varphi$ et $p \Vdash \sim \varphi$
(vii) pour toute tautologie intuitionniste φ, $p \Vdash \varphi$.

Vérification :

(i) résulte du fait que $v(\varphi)$ est un ouvert de $P, \mathcal{T}_{\leq}$.
(ii) et (iii) sont triviales.
(iv) $p \Vdash \sim\varphi$ ssi $p \in v(\sim\varphi)$ ssi $p \in (\varphi(v))'$
ssi $p \in \text{int}(-v(\varphi))$ ssi $\forall q \leq p \quad q \notin v(\varphi)$
ssi $\forall q \leq p \quad q \not\Vdash \varphi$.
(v) $p \Vdash \varphi \Rightarrow \psi$ ssi $p \in \text{int}(-v(\varphi) \cup v(\psi))$
ssi $\forall q \leq p \quad q \in -v(\varphi) \cup v(\psi)$ ssi
$\forall q \leq p \ (q \in v(\varphi) \Rightarrow q \in v(\psi))$ ssi
$\forall q \leq p \ (q \Vdash \varphi \Rightarrow q \Vdash \psi)$.
(vi) est alors triviale.
(vii) est une conséquence immédiate du théorème 8.

Remarque : Notons 1 le maximum de $P, \leq$. On a alors
$(\forall p \in P \quad p \Vdash \varphi)$ ssi $1 \Vdash \varphi$
(en vertu de la proposition 9(i)).
Notons $p \Vdash^* \varphi$ pour $p \Vdash \sim\sim\varphi$.

Proposition 10 :
pour tout $p \in P$, pour toute formule φ :

(i) $p \Vdash \varphi \Rightarrow p \Vdash^* \varphi$
(ii) $p \Vdash \sim\varphi$ ssi $p \Vdash^* \sim\varphi$
(iii) $p \Vdash^* \varphi \wedge \psi$ ssi $p \Vdash^* \varphi$ et $p \Vdash^* \psi$
(iv) si φ est une tautologie classique, alors $1 \Vdash^* \varphi$

Vérification :

(i), (ii) et (iii) : utiliser les propriétés de $\perp$ décrites page 12, dans l'article "Une présentation topologique du calcul propositionnel intuitionniste".

(iv) Conséquence triviale du théorème de Glivenko et du théorème 8.

Remarque 11 :
en utilisant le théorème 8, il est aisé d'obtenir une caractérisation des tautologies intuitionnistes en termes de forcing.

Modèles de Kripke

Michel Moreau

0. Introduction

Le but de ces notes est d'exposer l'abord sémantique de la logique intuitionniste proposée par Saul KRIPKE lors du huitième Logic Colloquium (Oxford, juillet 1963). Nous suivons essentiellement le texte de Kripke, édité dans les Actes du colloque (cfr (1)), mais nos notations seront plus proches de celles de Melvin Fitting (cfr (2)). (C'est au travail très complet et détaillé de Fitting que nous renvoyons tout lecteur désireux d'élargir son horizon). Nous ferons, chemin faisant, un large crochet par les tableaux de Beth pour le calcul intuitionniste des prédicats, qui nous servira à amener le théorème de complétude (sans démonstration). La métalogique de l'exposé sera constament classique.

1. Motivations

L'univers intuitionniste peut se penser comme une collection d'"états de connaissance". Chaque état est constitué de l'ensemble des objets construits par un "sujet créateur" jusqu'à ce moment, et de ce qu'on peut savoir avec "évidence" de ces objets à ce moment. Le sujet créateur étant essentiellement dynamique, il profite du temps qui va pour élargir son domaine d'évidences, passant d'un état de connaissance à un autre, plus riche, dans lequel rien du précédent ne peut être oublié, l'évidence présentant l'éternité sous sa guise inchoative.

Nous conviendrons de relier entre eux les divers états de connaissance d'un même sujet créateur selon l'ordre de leur succession, meublant ainsi l'univers intuitionniste de chaînes dirigées le long desquelles les évidences d'un sujet s'accroissent. Notre point de vue ne pouvant être celui de la science achevée, le futur d'un sujet créateur s'ouvre sur divers possibles, selon l'éventail des évidences encore à conquérir, et donc, par le fait même, maintenant indécidables. Une chaîne d'états de connaissance admet ainsi des ramifications, présentant la structure classique

des branches d'un arbre.

Dans un contexte strictement Brouwerien, on ne reconnaîtra d'existence qu'à un unique sujet créateur, et comme le caractère cumulatif des états de connaissance successifs permet de négliger tous les états qui précèdent l'état présent, qui les récapitule tous en lui, l'univers intuitionniste prendra l'aspect d'un unique arbre ayant un état origine, et allant se compliquant selon l'hésitation des évidences à venir. Ces restrictions ne sont cependant pas essentielles, au sens où les rejeter ou les adopter ne modifie pas la notion de validité que nous allons définir en nous inspirant des remarques qui précèdent.

2. Formalisation

Supposons donnés un langage $\mathcal{L}$ du premier ordre, et l'ensemble $\mathcal{F}$ des formules de $\mathcal{L}$. Nous appellerons

Modèle (intuitionniste) de Kripke :

la donnée $\langle E, p, \delta, \vDash \rangle$

a) d'un ensemble E (des états de connaissance) ;

b) d'une relation p d'ordre partiel sur E (i.e. réflexive, transitive et antisymétrique.) (Pour Γ et Δ dans E, on notera $\Gamma \, p \, \Delta$ le fait que l'état de connaissance Γ est ou précède l'état Δ).

c) d'une application δ de E dans les ensembles (qui fait correspondre, à chaque état Γ l'ensemble $\delta(\Gamma)$ des objets construits jusqu'en l'état Γ).

δ doit satisfaire à la condition :

pour tout Γ , Δ dans E

$$\Gamma \; p \; \Delta \Rightarrow \delta(\Gamma) \subseteq \delta(\Delta)$$

d) d'une relation $\vDash$ entre E et $\mathcal{F}$, satisfaisant aux conditions suivantes :

pour tous états Γ, Δ dans E, pour tout n-uple $\overline{a} = (a_1 \ldots a_n)$

d'éléments de $\bigcup_{\Delta \in E} \delta(\Delta)$ et

pour toutes formules φ, ψ dans $\mathcal{F}$ on a

0. $\Gamma \models \varphi[\bar{a}] \Rightarrow \bar{a} \subset \delta(\Gamma)$

(où $\varphi[\bar{a}]$ note le résultat de la substitution dans $\varphi(x_1, \ldots x_n)$ de a_i à x_i);

1. $\Gamma \models \varphi$ et $\Gamma \, p \, \Delta \Rightarrow \Delta \models \varphi$

2. $\Gamma \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$ et $\Gamma \models \psi$

3. $\Gamma \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$ ou $\Gamma \models \psi$

4. $\Gamma \models \neg\varphi \Leftrightarrow$ pour tout Δ dans E, si $\Gamma \, p \, \Delta$, ou n'a pas $\Delta \models \varphi$

5. $\Gamma \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow$ pour tout Δ, si $\Gamma \, p \, \Delta$ et si $\Delta \models \varphi$ alors $\Delta \models \psi$

6. $\Gamma \models (\exists \bar{x}) \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow$ il existe $\bar{a} \subset \delta(\Gamma)$ tel que $\Gamma \models \varphi[\bar{a}]$

7. $\Gamma \models (\forall \bar{x}) \varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow$ pour tout Δ tel que $\Gamma \, p \, \Delta$ et pour tout $\bar{a} \subset \delta(\Delta)$, $\Delta \models \varphi[\bar{a}]$.

Une formule $\varphi[\bar{a}]$ est dite valide dans le modèle $\langle E, p, \delta, \models \rangle$ si pour tout $\Gamma \in E$ tel que $\bar{a} \subset \delta(\Gamma)$, on a $\Gamma \models \varphi[\bar{a}]$.

φ est valide si elle l'est dans tout modèle.

Nous allons formuler quelques remarques pour éclairer cette définition au jour de ce qui a été dit des motivations.

1. L'ensemble E, muni de la relation p, est chargé de représenter l'ensemble des états de connaissance et les chaînes qui les relient : $\Gamma \, p \, \Delta$ ssi Γ est ou précède Δ , Δ étendant les connaissances de Γ , l'extension pouvant être nulle si Δ est Γ . Le fait d'exiger que p soit réflexive permet d'alléger certaines conditions ; ainsi les conditions 4, 5 et 7 seraient éventuellement vides si Γ était un état terminal, sans successeur, et l'on devrait ajouter explicitement ces conditions écrites pour Γ.

Notons qu'en général (cfr (1) et (2)), on n'exige pas que p soit antisymétrique (x p y et y p x $\Rightarrow$ x = y) : rien ne s'oppose alors à l'existence d'une boucle (Γ p Δ, Δ p ∇ , ∇ p Γ , par exemple) dans la succession des états de connaissance, une telle boucle étant pourtant peu compatible avec nos motivations, un changement d'état correspondant à un progrès. En fait, le gain en généralité d'une définition qui n'imposerait pas l'antisymétrie pour p n'est qu'apparente : il est facile de transformer un modèle de M non préordonné en un modèle M^* préordonné qui valide exactement les mêmes formules que M (il suffit d'écraser chaque boucle sur un de ses éléments, puisqu'il est clair que si $\Gamma \models \varphi$, alors pour tout Δ dans une boucle contenant Γ , on a aussi $\Delta \models \varphi$, et sous les mêmes conditions $\Gamma \not\models \varphi \Rightarrow \Delta \not\models \varphi$.)
Pour des raisons techniques, on se restreint parfois à ne considérer que des arbres au sens strict : ensembles préordonnés avec élément initial précédant tous les autres (cfr (1)). Cette restriction est sans conséquence pour la notion de validité.

2. L'application δ associe à chaque état de connaissance l'ensemble des objets déjà construits dans cet état : bien entendu, tout objet construit en l'état Γ est conservé dans les états étendant Γ ; c'est le sens de la condition imposée sur δ .

3. La relation $\models$, généralement lue "force" dans ce contexte, est chargée de lier états de connaissance et formules du langage $\mathcal{L}$: $\Gamma \models \varphi$ si les évidences conquises à l'état Γ permettent une démonstration effective de φ .

La condition o) exprime que $\varphi[\bar{a}]$ ne peut être soutenue à bon droit à l'état Γ si elle parle d'objets $\bar{a} = (a_1 \ldots a_n)$ qui n'ont pas encore été construits en Γ.

La condition 1) impose que ce qui a été soutenu en Γ soit désormais soutenu dans tout état étendant Γ : c'est l'aspect éternel des évidences. (Cette condition peut être restreinte aux formules atomiques ; on déduit alors sa validité pour une formule quelconque par induction sur la construction de cette formule).

Les conditions 2, 3 et 5 sont classiques : une conjonction, une disjonction ou une existentielle se décident au moment même. Par contre, la condition 4 fait appel à tous les futurs de Γ, car soutenir $\neg\varphi$ aujourd'hui impose qu'on soutienne $\neg\varphi$ dans tout futur, et comme il est exclu d'admettre une contradiction, il convient de s'assurer que jamais de nouvelles évidences étendant Γ ne conduiront à soutenir φ. Il en va de même pour la condition 5 : il faut que dans tout état étendant Γ, si φ peut être soutenue, ψ puisse l'être aussi. Enfin, la condition 7 exige qu'on ne juge pas l'universalité d'une proposition seulement au vu des seuls objets construits en Γ, mais qu'on prenne en considération tous les objets qui pourront être construits dans les états ultérieurs.

4. On vérifiera sans peine que si l'ensemble E est réduit à un seul élément, les conditions 4, 5 et 7 se ramènent aux conditions classiques habituelles. Le logicien classique est un intuitionniste sans avenir ...

3. Premières applications.

Voici quelques modèles très élémentaires servant de contre exemple pour certaines tautologies classiques :

a : le tiers exclu : $\varphi \vee \neg\varphi$

on utilise un modèle $(E, p, \delta, \models)$ ainsi constitué :

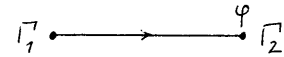
$E = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

$p = \{(\Gamma_1, \Gamma_1), (\Gamma_1, \Gamma_2), (\Gamma_2, \Gamma_2)\}$, id est Γ_1 précède Γ_2 ;

δ quelconque;

$\models = \{(\Gamma_2, \varphi)\}$, id est $\Gamma_2 \models \varphi$

On visualise ce modèle ainsi



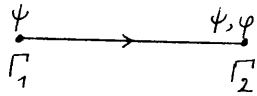
Dans ce modèle, on n'a pas $\Gamma_1 \models \varphi$ (φ n'étant pas démontrable en Γ_1), et on n'a pas non plus $\Gamma_1 \models \neg\varphi$ (puisque $\Gamma_2 \models \varphi$!).
On n'a donc pas $\Gamma_1 \models \varphi \vee \neg\varphi$, et $\varphi \vee \neg\varphi$ n'est pas valide.

b : $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

On utilise le modèle $(E, p, \delta, \models)$ déterminé par :

E, p et δ comme en a ;

$\models = \{(\Gamma_1, \psi), (\Gamma_2, \psi), (\Gamma_2, \varphi)\}$



Dans ce modèle $\Gamma_1 \models (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$, puisque dans aucune extension de Γ_1 , y compris Γ_1 , on n'a $\neg\varphi$, mais on n'a pas $\Gamma_1 \models (\psi \rightarrow \varphi)$, puisque $\Gamma_1 \models \psi$ mais $\Gamma_1 \not\models \varphi$.

Remarque : tout ici semble se jouer en Γ_1 : il n'est cependant pas possible de réduire le modèle au seul point Γ_1 ,

puisque dans ce cas Γ_1 n'ayant aucun futur, on devrait adjoindre $\neg\varphi$ aux évidences de Γ_1, et on n'aurait plus $\Gamma_1 \models \neg\varphi \to \neg\psi$, n'ayant pas $\Gamma_1 \models \neg\psi$. La présence d'un Γ_2 à venir permet de surseoir à la nécessité d'opter dès Γ_1 pour φ ou $\neg\varphi$.

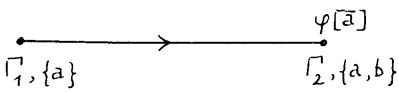
c : $\neg(\forall x)\varphi(x) \to (\exists x)\neg\varphi(x)$.

Modèle : $(E, p, \delta, \models)$

E et p comme en a ;

δ : $\delta(\Gamma_1) = \{a\}$; $\delta(\Gamma_2) = \{a, b\}$

$\models = \{(\Gamma_2, \varphi[\bar{a}])\}$

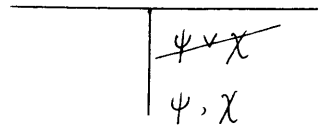


On voit facilement que $\Gamma_1 \models \neg(\forall x)\varphi(x)$, alors qu'on n'a pas $\Gamma_1 \models (\exists x)\neg\varphi(x)$ (puisqu'on n'a pas $\Gamma_1 \models \neg\varphi[\bar{a}]$!).

4. Les tableaux de BETH et le théorème de complétude

Les procédures dénommées tableaux de BETH ou tableaux sémantiques sont bien connues dans le cas classique : elles consistent à expliciter les conditions de fabrication d'une formule, et, selon que toutes ces conditions imposent ou non une contradiction, on conclut que la formule est ou non valide. Afin que toutes ces conditions soient prises en compte systématiquement, selon leurs enchaînements ou leurs alternations, on recourt à la mise en scène des tableaux : dans chaque tableau, la moitié droite figure l'antre du faux, et la moitié gauche les plaines de la vérité. Si la formule φ que vous supposez fausse - et écrivez par conséquent dans la partie droite de votre tableau - est de la forme $\psi \vee \chi$,

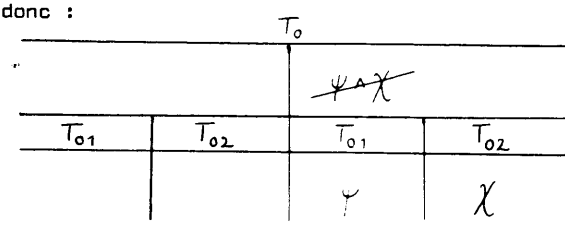
vous écrirez également dans la partie droite ψ , et χ , puisque la fausseté simultanée de ψ et de χ est une condition nécessaire et suffisante de la fausseté de φ. On peut symboliser cette démarche par le schéma suivant :



(où $\psi \vee \chi$ est biffée, puisque toute l'information donnée par sa présence à la droite du tableau est restituée par la présence à droite de ψ et χ .)

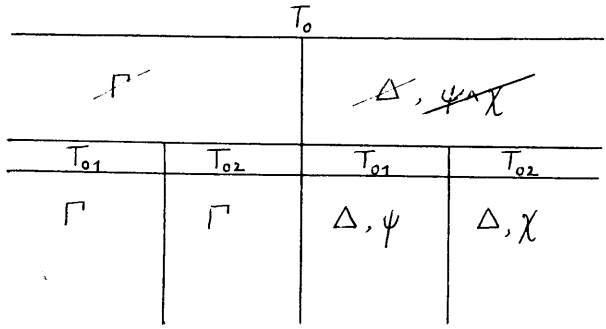
Si φ avait été de la forme $\psi \wedge \chi$, sa fausseté pouvait découler, indépendamment, de celle de ψ , ou de celle de χ . Afin de tenir compte de ces deux possibilités, on convient de scinder le tableau d'origine en deux "tableaux alternatifs", l'usage voulant qu'on scinde la part "vrai" (gauche) en deux, la part "faux" (gauche) en deux également, la moitié gauche (resp. la moitié droite) du vrai formant avec la moitié gauche (resp. droite) du faux le premier (resp. second) tableau de l'alternative.

On aura donc :



où T_{01} et T_{02} sont "sous-tableaux" de T_0. En tant que prolongement de T_0, T_{01} et T_{02} contiennent tout ce que contenait T_0 ; Si φ

et Δ représentent les autres formules présentes dans T_o, le schéma ci-dessus devient :



les autres règles de déconstruction des formules dans le cas classique sont bien connues et découlent naturellement du sens des connecteurs logiques. Le fait d'obtenir dans un même tableau, par application mécanique de ces règles, une même formule φ à la fois à droite et à gauche constitue clairement une contradiction, qui met fin au jeu dans ce tableau : ce tableau est dit clôturé. Si tous les tableaux qu'il a fallu construire, en vertu des règles, pour déconstruire une formule φ supposée fausse peuvent être clôturés, on conclut que φ doit être tenue pour vraie.

L'univers intuitionniste étant plus riche que le simple vrai-faux du monde classique, les règles gouvernant les tableaux de Beth y sont naturellement plus complexes. Pour rester dans l'ambiance des motivations énoncées tout au début, nous dirons que la partie gauche d'un tableau contient des formules pour lesquelles on dispose d'une démonstration effective au moment où ce tableau est établi, alors que la portion droite contient des formules pour lesquelles une telle démonstration n'existe pas à ce moment. Le jeu revient alors à recenser non plus les manières d'infirmer

une formule, mais des modes sous lesquels une formule peut "manquer de démonstration". Si φ ne peut manquer de démonstration qu'au prix d'une contradiction (dans tout tableau servant à déconstruire φ, on trouve une formule présente à gauche et à droite, i.e. qui simultanément a et n'a pas de démonstration), un principe de cohérence impose d'accepter φ comme démontrée.

Pour certaines formules, par exemple de la forme $\neg\varphi$, manquer de démonstration aujourd'hui renvoie à des états de connaissance plus étendus, dans lesquels φ aura une démonstration. Ceci explique que les règles de formation des tableaux intuitionnistes comportent, en plus de la technique de scission d'un tableau en tableaux alternatifs synchrones, celle de création de tableaux nouveaux, étagés selon la diachronie des états de connaissance.

Voici ces règles de formation :

$\wedge_g$: Si $\varphi \wedge \psi$ apparaît à gauche dans le tableau T, inscrire φ et ψ à gauche dans T et biffer $\varphi \wedge \psi$;

$\wedge_d$: Si $\varphi \wedge \psi$ apparaît à droite dans le tableau T, dédoubler T en deux tableaux alternatifs, T_1 et T_2 : dans T_1 (resp. T_2) recopier T sauf $\varphi \wedge \psi$, et ajouter φ (resp. ψ) à droite ;

$\vee_g$: Si $\varphi \vee \psi$ apparaît à gauche dans T, dédoubler T en T_1 et T_2 : dans T_1 (resp. T_2) recopier T sauf $\varphi \vee \psi$, et ajouter φ (resp. ψ) à gauche ;

$\vee_d$: Si $\varphi \vee \psi$ apparaît à droite dans T, écrire φ et ψ à droite dans T et biffer $\varphi \vee \psi$;

$\neg_g$: Si $\neg\varphi$ apparaît à gauche dans T, écrire φ à droite dans T et biffer $\neg\varphi$;

$\neg_d$: Si $\neg\varphi$ apparaît à droite dans T, créer un nouveau tableau S : y transcrire à gauche toute la part gauche de T ainsi que φ (S est un tableau succédant à T, et tout ce qui a une démonstration en T en a forcément une en S), biffer $\neg\varphi$ dans T et poursuivre la déconstruction dans T et S séparément;

$\rightarrow_g$: Si $\varphi \rightarrow \psi$ apparaît à gauche dans T, dédoubler T en T_1 et T_2 : dans T_1 (resp. T_2) recopier T sauf $\varphi \rightarrow \psi$, et ajouter ψ à gauche (resp. φ à droite) ;

$\rightarrow_d$: Si $\varphi \rightarrow \psi$ apparaît à droite dans T, créer un nouveau tableau S succédant à T et y transcrire, à gauche, toute la part gauche de T ainsi que φ, et à droite ψ ;

Pour les formules quantifiées il convient, comme dans le cas classique d'introduire des symboles pour objet a, b, c,... (constituant le "domaine" du tableau), en respectant les règles suivantes : à l'ouverture du tableau initial, on admet un unique objet a ; les autres objets sont introduits seulement si cela est imposé par une des règles $\forall_d$ et $\exists_g$ ci-après : tout objet présent dans T est présent dans tous les tableaux alternatifs obtenus par scission à partir de T, et dans tous les tableaux succédant à T.

$\forall_g$: Si $\forall x\, \varphi(x)$ apparaît à gauche dans T, écrire $\varphi(a)$ à gauche dans T pour tout objet a présent dans T : si un nouvel objet b est introduit par après dans T ou dans un tableau succédant à T, il convient d'écrire également $\varphi(b)$ à gauche dans ce tableau, et pour cette raison on ne biffera pas $\forall x\, \varphi(x)$;

$\forall_d$: Si $\forall x\, \varphi(x)$ apparaît à droite dans T, créer un nouveau tableau S succédant à T : si a est un symbole d'objet n'étant encore apparu dans aucun tableau de la construction en cours a est introduit comme nouvel objet présent dans S, où on recopie, à gauche toute la portion gauche de T, et à droite $\varphi(a)$: biffer $\forall x\, \varphi(x)$ dans T ;

$\exists_g$: Si $\exists x\, \varphi(x)$ apparaît à gauche dans T, et si a est un symbole d'objet n'étant encore apparu dans aucun tableau de la construction en cours, a est introduit comme nouvel objet présent dans T, et $\varphi(a)$ inscrite à gauche dans T : biffer $\exists x\, \varphi(x)$;

$\exists_d$: Si $\exists x\, \varphi(x)$ apparaît à droite dans T, écrire $\varphi(a)$ à droite dans T pour tout objet a présent dans T, ou tout objet nouveau : ne pas biffer $\exists x\, \varphi(x)$.

Un tableau est dit clôturé dès qu'une même formule y apparaît à gauche et à droite, et on stoppe alors sa construction ; une suite de tableaux successifs est clôturée si l'un de ses tableaux l'est ; un ensemble de tableaux alternatifs est clôturé si tous

ses tableaux le sont (plus exactement toutes ses suites de tableaux le sont). Une construction est clôturée si tous les tableaux alternatifs le sont.

Voici deux exemples qui permettront au lecteur non familier de mieux percevoir le fonctionnement des tableaux.

Considérons tout d'abord la tautologie intuitionniste

$$(\varphi \vee \forall x\, \psi(x)) \rightarrow \forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$$

Tableau de départ : T avec $\{a\}$ pour domaine :

$T, \{a\}$
$\varphi \vee \forall x\, \psi(x) \rightarrow \forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$

Application de $\rightarrow_d$: création d'un nouveau tableau S succédant à T avec même domaine

$S, \{a\}$			
~~$\varphi \vee \forall x\, \psi(x)$~~		~~$\forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$~~	
S_1	S_2	S_1	S_2
φ	$\forall x\, \psi(x)$ $\psi(a)$	$\forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$	$\forall x\, (\varphi \vee \psi(x))$

application de $\forall_d$

application de $\forall_d$: création d'un tableau R_1 succédant à S_1, et d'un tableau R_2 succédant à S_2 : domaine de R_1 : $\{a,b\}$; domaine de R_2 $\{a, c\}$

$R_1, \{a, b\}$	
φ	~~$\varphi \vee \psi(b)$~~
	$\varphi, \psi(b)$

clôturé

$R_2, \{a,c\}$	
$\forall x\, \psi(x)$ $\psi(a), \psi(c)$	~~$\varphi \vee \psi(c)$~~
	$\varphi, \psi(c)$

clôturé

Les suites de tableaux (T, S, S_1, R_1) et (T, S, S_2, R_2) sont toutes deux clôturées puisque R_1 et R_2 le sont : l'ensemble alternatif $(T, S_1, R_1), (T, S_2, R_2)$ l'est aussi puisque chaque suite l'est.

Considérons par contre la formule converse

$$\forall x\,(\varphi \vee \psi(x)) \rightarrow \varphi \vee \forall x\,\psi(x)$$

qui n'est pas une tautologie intuitionniste :

$T, \{a\}$
$\forall x(\varphi \vee \psi(x)) \rightarrow \varphi \vee \forall x\,\psi(x)$

création de S ($\rightarrow$ d)

$S, \{a\}$	
$\forall x\,(\varphi \vee \psi(x))$	~~$\varphi \vee \forall x\,\psi(x)$~~
	φ , $\forall x\,\psi(x)$

création de R ($\forall$ d)

$R, \{a,b\}$

$\forall x\,(\varphi \vee \psi(x))$		$\psi(b)$	
~~$\varphi \vee \psi(a)$~~ , ~~$\varphi \vee \psi(b)$~~			
R_1	R_2	R_1	R_2
~~$\varphi \vee \psi(a)$~~, φ	$\varphi \vee \psi(a)$, $\psi(b)$	$\psi(b)$	$\psi(b)$
R_{11} | R_{12}	clôturé	R_{11} | R_{12}	clôturé
φ | $\psi(a), \varphi$		$\psi(b)$ | $\psi(b)$	

R_{11} et R_{12} sont non clôturables, donc (T, S, R, R_1) et finalement toute la construction.

Il est assez facile de transposer la situation décrite par un tableau de Beth non clôturé en un contre exemple au sens des modèles de Kripke. Pour le voir, reprenons l'exemple c du § 3 :

$$\neg \forall x\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \neg \varphi(x)$$

$T, \{a\}$

	$\neg \forall x\, \varphi(x) \rightarrow \exists x\, \neg \varphi(x)$

$(\rightarrow_d)$ création de S

$S, \{a\}$

$\neg \forall x\, \varphi(x)$	$\exists x\, \neg \varphi(x)$
$(\exists_d)$	$\neg \varphi(a)$

$(\neg_d)$ création de R

$R, \{a\}$

$\neg \forall x\, \varphi(x)\ ,\ \varphi(a)$	
$(\neg_g)$	$\forall x\, \varphi(x)$

$(\forall_d)$ création de Q

$Q, \{a, b\}$

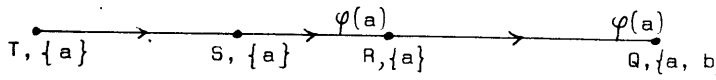
$\varphi(a)$	$\varphi(b)$

Q n'est pas clôturable.

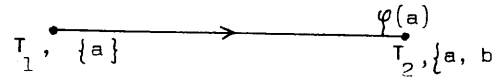
Considérons le modèle de Kripke $(E, \rho, \delta, \models)$ suivant :

$E = \{T, S, R, Q\}$: P est la plus petite relation réflexo-transitive contenant $\{(T, S), (S, R), (R, Q)\}$ (donc T précède S qui précède R qui précède Q).

$\delta(T) = \delta(S) = \delta(R) = \{a\}$; $\delta(Q) = \{a, b\}$
$R \not\models \varphi(a)$ et $Q \models \varphi(a)$



Dans ce modèle, on a $T \models \neg \forall x \varphi(x)$, puisque dans toute extension U de T on n'a jamais que dans une extension ultérieure V de U, pour tout objet v de V, $V \models \varphi(v)$, puisque $Q \not\models \varphi(b)$. Par contre $T \not\models \exists x \neg \varphi(x)$, puisque $T \not\models \neg \varphi(a)$. Ce contre-modèle (obtenu en prenant pour états de connaissance les tableaux, dans leur succession, et pour connaissances à un état donné les formules atomiques figurant à gauche dans le tableau correspondant) est assez proche de celui proposé dans l'exemple c au § 3 :



Il va de soi que le passage des tableaux de Beth aux modèles de Kripke ne saurait conduire à un modèle naturel ou canonique, puisque l'ordre d'application des règles de déconstruction d'une formule n'est pas fixé. Ces indications informelles font cependant pressentir que toute formule donnant lieu à une construction en tableaux de Beth non clôturable peut être montrée non valide pour la modélisation de Kripke. On dispose en fait du résultat suivant (cfr[1]) :

Proposition 1 : Une formule du calcul des prédicats intuitionnistes est valide pour les modèles de Kripke ssi elle donne lieu à une construction par tableaux de Beth clôturée.

On trouvera également dans [1] la démonstration détaillée de la

Proposition 2 : Si une formule de calcul des prédicats intuitionniste donne lieu à une construction par tableaux de Beth clôturée, alors elle est démontrable dans le calcul des prédicats intuitionniste .

Du fait que les axiomes du calcul des prédicats intuitionniste sont valides pour la modélisation de Kripke, et que les règles de déduction préservent la validité, on déduit que toute formule démontrable doit être valide. Tout ceci conduit au

THEOREME DE COMPLETUDE : Une formule est démontrable dans le calcul des prédicats intuitionniste ssi elle est valide au sens des modèles de Kripke.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Formal Systems and Recursive Function (Proceedings of the eighth Logic Colloquium, Oxford, July 1963) ed. by Crossley - Dummett, North-Holland, Amsterdam, 1965 (Le texte de Kripke y figure aux pages 92 à 130, sous le titre Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I).

[2] Melvin Fitting, Intuitionistic Logic, Model Theory and Forcing, North-Holland, Amsterdam, 1969.

DEDUCTION NATURELLE

J.L. MOENS

0. BIBLIOGRAPHIE

(1) Collected papers of G. Gentzen. Edited by M.E. Szabo. North-Holland, 1969.

(2) Natural deduction. D. Prawitz. Almqvist and Wiksell, 1965.

(3) Ideas and results in proof theory, D. Prawitz, in Proceedings of the second Scandinavian logic symposium. Edited by J.E. Fenstad, North Holland, 1971.

I. INTRODUCTION

La théorie de la démonstration est née avec le projet de Hilbert de démontrer la consistance des mathématiques. En gros, son idée était la suivante : il considérait les preuves mathématiques comme des objets mathématiques constitués d'une suite de symboles concrets. Prouver la consistance revenait alors à montrer qu'aucune suite de symboles ne pouvait se terminer par $0 = 1$, par exemple. Ceci amenait à une démonstration finitiste de la consistance des mathématiques à l'intérieur d'elles-mêmes, de même qu'il existe une démonstration finitiste de l'énoncé : il n'y a pas de nombre rationnel égal à $\sqrt{2}$.

Malheureusement, le théorème d'incomplétude de Gödel est venu mettre un point final à cet espoir. Ce théorème affirme qu'il n'est pas possible de prouver la consistance d'une théorie T comprenant la théorie élémentaire des nombres à l'intérieur deT, c'est-à-dire en n'utilisant que les techniques permises dans T.

Ce théorème oblige donc un changement de programme de Hilbert : il faut s'intéresser aux consistances relatives et non plus à la consistance en général. C'est l'objet de ce qu'on appelle "la théorie

réductive de la démonstration". Son but est donc de réduire la consistance d'une théorie à celle d'une autre; elle se propose d'atteindre ce but par l'étude des preuves dans la théorie en question. Pour que les résultats obtenus par ces techniques soient intéressants, il faut encore que l'étude des preuves n'utilise que des principes plus élémentaires que ceux de la théorie étudiée.

Tout ceci nécessite une connaissance de ce qu'est une preuve. C'est le sujet d'investigation de la "théorie générale de la démonstration". Cette théorie fournit des formalisations de la notion de preuve et s'intéresse à leurs propriétés. Nous allons étudier ici une de ces formalisations, dues à Gentzen (1934) (1), appelée système de déduction naturelle. Les démonstrations sont formalisées par des arbres qu'on appelle dérivations. Toute dérivation est une suite d'applications de règles atomiques (les schémas de déduction) qui sont relatives à un seul connecteur et où intervient la constructibilité si importante pour un intuitionniste. C'est ainsi que l'on rejoint naturellement la notion de preuve pour un intuitionniste, ce qui est en fait essentiellement une construction de la formule démontrée.

Pour illustrer cet aspect constructif, considérons le principe de dualité de la géométrie projective.
Ce principe affirme que tout théorème de la géométrie projective qui parle de points et de droites peut être transformé en un nouveau théorème (dual) en remplaçant "droite" par "point" et "point" par "droite". Ce principe fournit de manière constructive de nouveaux théorèmes : il transforme effectivement toute preuve d'un théorème en une preuve de son dual. C'est un principe de théorie de la démonstration. C'est de cette manière qu'il faut comprendre chacun des schémas de déduction de Gentzen : ils transforment les preuves des formules situées au-dessus de la barre d'inférence en une preuve de la formule située en-dessous.

II. LE CALCUL DE DEDUCTION NATURELLE (Gentzen, 1934)(1)

Ce calcul constitue une des formalisations possibles de la notion de démonstration. Une démonstration sera représentée par une dérivation , c'est-à-dire un arbre construit à l'aide d'un certain nombre de règles d'inférence. Le qualificatif"naturel" provient de ce que ce calcul est lié de très près aux raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques.

Nous travaillerons toujours dans le langage $\mathcal{L}$ défini à l'aide des variables , des symboles fonctionnels et relationnels et des constantes logiques $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\bot$, $\neg$, $\forall$, $\exists$. Les variables seront notées x, y,...; les termes t, s,...: les formules φ, ψ, ... Nous écrirons $\varphi\wedge\psi$, $\varphi\vee\psi$, $\neg\varphi$, $\varphi\rightarrow\psi$, $\exists x\,\varphi$, $\forall x\,\varphi$ pour désigner des formules dont le connecteur principal est respectivement $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\exists$, $\forall$.

Ce cadre étant fixé, nous définissons les différents schémas de déduction :

$\wedge I$ $\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi\wedge\psi}$ $\qquad$ $\wedge E$ $\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}$ $\qquad$ $\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\psi}$

$\vee I$ $\dfrac{\varphi}{\varphi\vee\psi}$ $\qquad$ $\dfrac{\psi}{\varphi\vee\psi}$ $\qquad$ $\vee E$ $\dfrac{\varphi\vee\psi \quad \overset{[\varphi]}{\chi} \quad \overset{[\psi]}{\chi}}{\chi}$

$\rightarrow I$ $\dfrac{\overset{[\varphi]}{\psi}}{\varphi\rightarrow\psi}$ $\qquad$ $\rightarrow E$ $\dfrac{\varphi \quad \varphi\rightarrow\psi}{\psi}$

$\neg I$ $\dfrac{\overset{[\varphi]}{\bot}}{\neg\varphi}$ $\qquad$ $\neg E$ $\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}$

Int $\dfrac{\bot}{\varphi}$

$\forall I$ $\dfrac{\varphi(x)}{\forall x\,\varphi(x)}$ (voir rem 1) $\qquad$ $\forall E$ $\dfrac{\forall x\,\varphi(x)}{\varphi(t)}$

$\exists I$ $\dfrac{\varphi(t)}{\exists x\,\varphi(x)}$ $\qquad$ $\exists E$ $\dfrac{\exists x\,\varphi(x) \quad \overset{[\varphi(x)]}{\psi}}{\psi}$ (voir rem 1)

Remarques

1. Les schémas $\forall I$ et $\exists E$ doivent vérifier la restriction suivante concernant la variable x (appelée paramètre propre du schéma) qui y apparaît.
   Pour $\forall I$, il faut que x n'apparaisse pas dans les hypothèses dont $\varphi(x)$ dépend. Dans ce cas il est clair qu'on peut en déduire $\forall x\, \varphi(x)$.
   Pour $\exists E$, il faut que x n'apparaisse ni dans ψ ni dans aucune hypothèse dont ψ dépend, sauf éventuellement $\varphi(x)$.

2. Chaque schéma doit être compris comme un procédé constructif pour transformer des dérivations des formules apparaissant au-dessus de la barre horizontale en une dérivation de la formule du dessous. Les crochets signifient qu'on décharge l'hypothèse en question. Ainsi, par exemple, le schéma $(\rightarrow I)$ se comprend comme suit : si j'ai une dérivation de la formule ψ à partir de φ et d'autres formules éventuellement, alors le schéma $(\rightarrow I)$ me fournit une dérivation de $\varphi \rightarrow \psi$ n'ayant plus φ parmi ses hypothèses.

3. Les schéma $(\neg I)$ et $(\neg E)$ peuvent être supprimés si on remplace $\neg\varphi$ par $\varphi \rightarrow \bot$.

4. Il peut être intéressant de numéroter les hypothèses comme nous le verrons dans les exemples qui suivent.

5. Une des particularités les plus remarquables du calcul de déduction naturel est que l'ensemble de ses schémas se divise en deux groupes : les schémas d'introduction(I) et les schémas d'élimination(E). Un seul schéma ne rentre pas dans cette classification, c'est le schéma Int (E falso sequitur quodlibet) nécessaire pour obtenir la logique intuitionniste.
   Il y a une correspondance étroite entre la signification constructive d'un connecteur logique et sa règle d'introduction (comme le montre la remarque 2 pour le $\rightarrow$I).

6. Pour obtenir la logique classique, il suffit d'ajouter la règle suivante

$$\neg C \quad \frac{[\neg\varphi]}{\varphi} \perp .$$

Exemples

Démontrons $\exists x \forall y \ \varphi(x,y) \to \forall y \exists x \ \varphi(x,y)$.

a. Raisonnement intuitif :

Supposons qu'il existe un x tel que pour tout y, $\varphi(x,y)$ soit valide. Soit a un tel x; alors pour tout individu b, $\varphi(a,b)$ est valide. Donc, il y a un x (x = a) tel que on ait $\varphi(x,b)$ et ceci est vrai pour n'importe quel b, donc pour tout y.

b. Formalisation

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y\ \varphi(x,y)}{\varphi(x,y)}\,1}{\exists x\ \varphi(x,y)}}{\exists x \forall y\ \varphi(x,y)}\,2 \qquad \forall y \exists x\ \varphi(x,y)}{\forall y \exists x\ \varphi(x,y)}\,-1}{\exists x \forall y\ \varphi(x,y) \to \forall y \exists x\ \varphi(x,y)}\,-2$$

Cette dérivation est bien sans hypothèse, car les formules qui ont servi d'hypothèses au cours du raisonnement ont été déchargées.

III. EQUIVALENCE DU CALCUL DE DEDUCTION NATURELLE ET DE L'AXIOMATIQUE DE KLEENE POUR LA LOGIQUE INTUITIONNISTE.

Rappelons cette axiomatique :

(1.1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(1.2) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))$

(2.1) $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$

(2.2) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$

$\varphi \wedge \psi \to \psi$

(3.1) $(\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi \to \chi))$

(3.2) $\varphi \to \varphi \vee \psi$

$\psi \to \varphi \vee \psi$

(4.1) $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$

(4.2) $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

Règle d'inférence : si φ et $\varphi \rightarrow \psi$, alors ψ.

(5.1) $\forall x\, \varphi(x) \rightarrow \varphi(t)$

(6.1) $\varphi(t) \rightarrow \exists x\, \varphi(x)$

Règles d'inférence : (valables si x n'apparaît pas librement dans φ)

- si $\varphi \rightarrow \psi(x)$ alors $\varphi \rightarrow \forall x\ \psi(x)$
- si $\psi(x) \rightarrow \varphi$ alors $\exists x\, \psi(x) \rightarrow \varphi$

Dans ce système, une démonstration est une suite de formules ne comprenant que des axiomes ou des formules obtenues à l'aide des règles d'inférence et des formules qui les précèdent.

Le but de ce paragraphe est de montrer que

Toute dérivation dans le calcul de déduction naturelle donne lieu à une démonstration dans l'axiomatique de Kleene, et vice versa.

3.a. Passage du système de Kleene aux déductions naturelles.

Pour démontrer ce point, il suffit de montrer que tous les axiomes de Kleene sont dérivables dans le calcul de déduction naturelle et que les règles d'inférence s'expriment à l'aide de schémas de déduction.

Procédons point par point.

(1.1) Voici une dérivation de $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$

$$\dfrac{\dfrac{\varphi}{\psi \rightarrow \varphi}\,(a)}{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)}\,-1$$

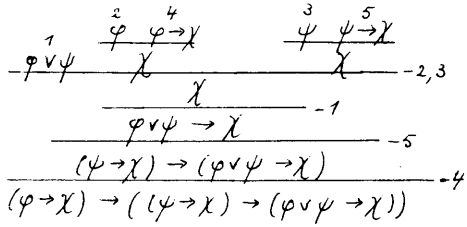
Le passage (a) s'est fait à l'aide de $(\rightarrow I)$ en déchargeant les occurrences de ψ dont φ dépend, i.e. en ne déchargeant rien.

(1.2)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi^{1}\quad \varphi\rightarrow\psi^{3}}{\psi}\quad \dfrac{\varphi^{1}\quad \varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi)^{2}}{\psi\rightarrow\chi}}{\chi}\,-1}{\varphi\rightarrow\chi}\,-2}{(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi))\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi)}\,-3$$
$$(\varphi\rightarrow\psi)\rightarrow((\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\chi))\rightarrow(\varphi\rightarrow\chi))$$

(2.1)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi^{1}\quad \psi^{2}}{\varphi\wedge\psi}\,-2}{\psi\rightarrow(\varphi\wedge\psi)}\,-1}{\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow(\varphi\wedge\psi))}$$

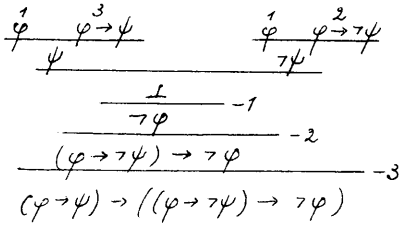
(2.2) triviel.

(3.1)

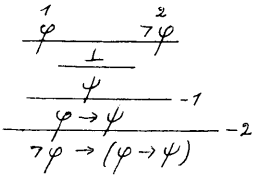


(3.2) trivial.

(4.1)



(4.2)



La règle d'inférence pour le calcul propositionnel est le modus ponens qui correspond exactement à ($\rightarrow$ E).

(5.1) triviel.

(6.1) triviel.

Les règles d'inférence pour le calcul des prédicats correspondent respectivement à ($\forall$ I) et ($\exists$ E).

3.6. Passage des déductions naturelles à l'axiomatique de Kleene.

Décidons de noter $\Gamma \vdash \varphi$ toute dérivation de φ à partir de la collection de formules Γ et $\Gamma D \varphi$ toute démonstration de φ dans l'axiomatique de Kleene à l'aide des axiomes, des règles d'inférence et des formules de la suite Γ.

Il s'agit de montrer que toute dérivation $\Gamma \vdash \varphi$ peut se transformer en une démonstration $\Gamma D \varphi$.

Nous allons prouver cela par induction sur la longueur de la dérivation $\Gamma \vdash \varphi$.

Par définition, la longueur d'une dérivation est le nombre de barres horizontales qu'elle contient.

- longueur 1 :

A $\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}$ on fait correspondre $(\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)), \psi \to (\varphi \wedge \psi), \varphi \wedge \psi)$.

Les cas $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ et $\dfrac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$ sont triviaux, de même que $\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ et $\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}$.

A $\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}$ on fait correspondre $(\varphi, \varphi \to \psi, \psi)$.

On voit bien que cela va se passer sans problème pour les dérivations de longueur 1.

- Il reste à utiliser l'hypothèse d'induction pour des règles comme (VE), (↔I), ($\neg$ I), ($\exists$ E) car pour les autres, c'est trivial.

Analysons d'abord le cas du ($\to$ I) : métathéorème de la déduction.

$\dfrac{[\varphi]}{\psi}$: Par hypothèse d'induction, nous savons qu'à une dérivation $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ on associe une démonstration $\Gamma, \varphi D \psi$.
Il faut donc associer à la dérivation donnée une démonstration $\Gamma D (\varphi \to \psi)$.
Par hypothèse, nous avons une suite $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ de formules telles que $\varphi_n = \psi$ et pour tout i compris entre 1 et n, φ_i est soit un axiome, soit une formule de Γ, soit φ , soit une conséquence immédiate par les règles d'inférence de formules figurant parmi $\varphi_1 \ldots \varphi_{i-1}$.
Dans un premier temps, montrons que $\Gamma D (\varphi \to \varphi_1)$.

1. Si φ_1 est un axiome, on construit $(\varphi_1, \varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_1), \varphi \to \varphi_1)$
2. Si φ_1 est une formule de Γ , alors (Γ , $\varphi_1 \to (\varphi \to \varphi_1)$, $\varphi \to \varphi_1$) est une démonstration.

3. Si $\varphi_i = \varphi$, c'est trivial.
4. φ_1 ne peut être une formule du quatrième type.
Montrons maintenant que si $\forall i$, $i < i_0$ on a $\Gamma \vdash D\ (\varphi \to \varphi_i)$ alors on aura aussi $\Gamma \vdash D\ (\varphi \to \varphi_{i_0})$, et cela achèvera la démonstration.

Le seul nouveau cas à envisager est le cas où φ_{i_c} est la conséquence d'une règle d'inférence.

1. φ_{i_0} est obtenue par modus ponens à partir de φ_{i_1} et $\varphi_{i_1} \to \varphi_{i_0} = \varphi_{i_2}$ $(i_1, i_2 < i_0)$.
Par induction $\varphi \to \varphi_{i_1}$ et $\varphi \to \varphi_{i_2}$ sont démontrables à partir de Γ et donc grâce à l'axiome $(\varphi \to \varphi_{i_1}) \to ((\varphi \to \varphi_{i_2}) \to (\varphi \to \varphi_{i_0}))$, $\varphi \to \varphi_{i_0}$ est aussi démontrable.
2. Si $\varphi_{i_0} = \varphi' \to \forall x\, \psi(x)$ obtenue à partir de $\varphi' \to \psi(x)$, on sait que $\varphi \to (\varphi' \to \psi(x))$ est démontrable à partir de Γ (c'est l'hypothèse d'induction qui nous l'affirme) de même évidemment que $\varphi' \to \psi(x)$. Mais alors $(\varphi' \to \psi(x))) \to (\varphi' \to \forall x\ \psi(x))$ est démontrable grâce à l'axiome (1.1.) et le fait que $\varphi' \to \forall x\ \psi(x)$ est démontré.

Et donc, $\varphi \to ((\varphi' \to \psi(x)) \to (\varphi' \to \forall x\ \psi(x))$ est aussi démontrable grâce à (1.1) et ce qui précède. En appliquant (1.2), il vient que $\varphi \to (\varphi' \to \forall x\ \psi(x))$ est démontrable à partir de Γ.
3. Si φ_{i_0} est obtenue grâce à la règle d'inférence qui concerne le connecteur $\exists$, on procède comme en 2.

Analysons maintenant le cas $(\vee E)$.

$$\frac{\varphi \vee \psi \qquad \begin{matrix}[\varphi] \\ \chi\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\psi] \\ \chi\end{matrix}}{\chi}$$

Par induction, nous avons deux démonstrations de χ : $\Gamma, \varphi \vdash D\chi$ et $\Gamma, \psi \vdash D\chi$. Nous avons à en construire une $\Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi \vdash D\chi$.

Grâce au métathéorème de la déduction que nous venons de démontrer ci-dessus, nous avons donc $\Gamma \vdash D\ (\varphi \to \chi)$ et $\Delta \vdash D\ (\psi \to \chi)$.
Dès lors, à partir de Γ, Δ et $\varphi \vee \psi$, à l'aide de l'axiome (3.1), nous obtenons une démonstration de χ où φ et ψ n'apparaissent plus comme hypothèses.

Le cas de ($\exists$ E) est analogue, et le cas ($\neg$I) se réduit à ce qui précède en remplaçant $\neg\varphi$ par $\varphi\to\bot$.
Ceci achève la démonstration.

IV. ENCORE QUELQUES EXEMPLES DE DERIVATION.

a)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\exists x\varphi \quad \exists x\varphi}{\bot}\,-1}{\neg\varphi(x)}}{\forall x\neg\varphi}\,-2}{\neg\exists x\varphi \to \forall x\neg\varphi}$$

b)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\neg\varphi \quad \neg\varphi(x) \quad \varphi(x)}{\exists x\varphi \qquad \bot}\,-1}{\bot}}{\neg\exists x\varphi}\,-3}{\forall x\neg\varphi \to \neg\exists x\varphi}$$

c)
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x\varphi \quad \varphi(x) \quad \neg\varphi(x)}{\bot}\,-1}{\neg\forall x\varphi \quad \neg\neg\forall x\varphi}}{\bot}\,-2}{\neg\neg\varphi}}{\forall x\neg\neg\varphi}\,-3$$
$$\neg\neg\forall x\varphi \to \forall x\neg\neg\varphi$$

d) $\varphi\wedge\neg\varphi\to\psi$ pour toute formule ψ.
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi\wedge\neg\varphi \quad \varphi\wedge\neg\varphi}{\varphi \quad \neg\varphi}}{\bot}}{\psi}\,-1$$
$$\varphi\wedge\neg\varphi\to\psi$$

e) Enfin, un exemple de dérivation pour la logique classique, c'est-à-dire utilisant la règle ($\neg$C).
$$\dfrac{\dfrac{\neg\varphi \quad \neg\neg\varphi}{\bot}\,-1\ (\neg C)}{\varphi}$$
$$\neg\neg\varphi\to\varphi$$

Il est clair que dans l'autre sens ($\varphi \to \neg\neg\varphi$) la règle ($\neg$I) suffit.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \quad \neg\varphi}{\bot}\,1}{\neg\neg\varphi}\,2$$
$$\varphi \to \neg\neg\varphi$$

V. PRINCIPE D'INVERSION ET THEOREME DE NORMALISATION

Nous avons déjà vu qu'à part la règle Int, tous les schémas de déduction se rangent en deux catégories : les introductions qui définissent en quelque sorte le connecteur et les éliminations. Introduction et élimination sont en un certain sens inverses l'une de l'autre. En effet, la conclusion d'une élimination n'apporte rien de neuf si la prémisse majeure de cette élimination était elle-même conclusion d'une introduction.

Ainsi, dans les deux exemples suivants, donnant une dérivation de la formule ψ, il y avait déjà une dérivation de ψ apparaissant plus haut.

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi}}{\psi} \qquad \dfrac{\dfrac{[\varphi]}{\psi}}{\dfrac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi}}$$

Ces deux dérivations contiennent donc ce qu'on peut appeler un détour puisqu' elles partent de dérivations de ψ pour aboutir encore à des dérivations de ψ. Le théorème de normalisation va nous permettre de court-circuiter tous ces détours. Mais cela nécessite une définition rigoureuse de "détour dans une dérivation". C'est la notion de segment maximum.

On appelle <u>segment</u> une suite $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ d'occurrences de la même formule telle que

- φ_1 n'est pas la conséquence d'une ($\vee$ E) ou ($\exists$ E).
- φ_i ($i < n$) est prémisse mineure d'une ($\vee$ E) ou ($\exists$ E) et
- φ_n n'est pas prémisse mineure d'une ($\vee$ E) ou ($\exists$ E).

Un segment maximum ($\varphi_1 \dots \varphi_n$) est un segment tel que φ_1 soit la conclusion d'une introduction et φ_n soit la prémisse majeure d'une règle d'élimination (i.e. φ_n contient le connecteur qui est éliminé).

Si n = 1, on parle de formule maximale.

Dans les deux exemples ci-dessus, $\varphi \wedge \psi$ et $\varphi \to \psi$ étaient respectivement des formules maximales.

Voici deux exemples de segments maximaux :

$$\dfrac{\dfrac{\varphi \vee \psi \quad \dfrac{\chi \quad \varphi}{\chi \wedge (\varphi \vee \psi)} \quad \dfrac{\chi \quad \psi}{\chi \wedge (\varphi \vee \psi)}}{\chi \wedge (\varphi \vee \psi)}}{\chi}$$

$$\dfrac{\dfrac{\exists x\, \varphi(x) \quad \dfrac{\dfrac{\psi \quad \varphi(x)}{\psi \wedge \varphi(x)}}{\exists x\, (\psi \wedge \varphi(x))}}{\exists x\, (\psi \wedge \varphi(x))} \quad \dfrac{\dfrac{\psi \wedge \varphi(x)}{\varphi(x)}}{\exists x\, \varphi(x)}}{\exists x\, \varphi(x)}$$

Nous allons définir une réduction sur les dérivations qui consiste à raccourcir la longueur des détours, c'est-à-dire des segments maximaux.

$\wedge$R :
$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\varphi_1} \quad \dfrac{\Sigma_2}{\varphi_2}}{\dfrac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_i}} \triangleright \dfrac{\Sigma_i}{\varphi_i} \qquad i = 1, 2$$

$\vee$R :
$$\dfrac{\dfrac{\Sigma}{\varphi_i} \quad \dfrac{[\varphi_1]}{\Sigma_1} \quad \dfrac{[\varphi_2]}{\Sigma_2}}{\varphi_1 \vee \varphi_2 \quad \psi \quad \psi}{\psi} \triangleright \dfrac{\dfrac{\Sigma}{[\varphi_i]}}{\dfrac{\Sigma_i}{\psi}} \qquad i = 1, 2$$

$[\varphi_i]$ symbolise l'ensemble des hypothèses déchargées par (VE) et apparaissant dans Σ_i.

$\to$R :
$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\varphi_1} \quad \dfrac{\dfrac{[\varphi_1]}{\Sigma_2}}{\varphi_2}}{\varphi_1 \to \varphi_2}{\varphi_2} \triangleright \dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{[\varphi_1]}}{\dfrac{\Sigma_2}{\varphi_2}}$$

$[\varphi_1]$ symbolise l'ensemble des hypothèses de Σ_2 déchargées par ($\to$E).

$\forall$ R : $\dfrac{\dfrac{\overline{\Sigma(x)}}{\varphi(x)}}{\dfrac{\forall x\,\varphi(x)}{\varphi(t)}} \triangleright \dfrac{\Sigma(t)}{\varphi(t)}$

$\exists$ R : $\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\varphi(t)} \quad \dfrac{[\varphi(x)]}{\Sigma_2(x)}}{\dfrac{\exists x\,\varphi(x) \quad \psi}{\psi}} \triangleright \dfrac{\Sigma_1 \quad \dfrac{[\varphi(t)]}{\Sigma_2(t)}}{\psi}$

Les deux derniers schémas de réduction supposent la convention suivante sur les paramètres propres (voir 2, remarque 1) pour être corrects :

- une variable est paramètre propre d'au plus une règle d'inférence,
- le paramètre propre d'une ($\forall$ I) intervient seulement au-dessus de la conclusion de l'inférence
- le paramètre propre d'une ($\exists$ E) intervient uniquement au-dessus de la prémisse mineure de l'inférence.

Cette convention intervient tacitement dans les deux derniers schémas de réduction pour assurer qu'on ne perturbe pas d'éventuelles autres applications de ($\forall$I) ou ($\exists$ E) en substituant t à x.

$\vee$E-R : $\dfrac{\dfrac{\Sigma_1 \quad \dfrac{\Sigma_2}{\chi} \quad \dfrac{\Sigma_3}{\chi}}{\varphi \vee \psi} \quad \dfrac{\chi \qquad \Sigma_4}{\chi'}}{\chi'} \triangleright \dfrac{\Sigma_1 \quad \dfrac{\Sigma_2}{\chi} \quad \dfrac{\Sigma_4}{\chi'} \quad \dfrac{\Sigma_3}{\chi} \quad \dfrac{\Sigma_4}{\chi'}}{\varphi \vee \psi \qquad\qquad \chi'}$

Cette réduction est valable si, dans la dérivation de gauche, l'occurrence inférieure de χ est la dernière occurrence d'un segment maximum.

$\exists E\text{-}R$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\exists x\,\varphi(x)}\quad\dfrac{\Sigma_2}{\chi}}{\psi}\quad\Sigma_4}{\chi} \;\triangleright\; \dfrac{\dfrac{\Sigma_1}{\exists x\,\varphi(x)}\quad\dfrac{\dfrac{\Sigma_2}{\psi}\quad\Sigma_4}{\chi}}{\chi}$$

Même remarque pour ψ que plus haut.

Le théorème de normalisation s'énonce alors comme suit :

Toute dérivation du calcul de déduction naturelle se réduit à une dérivation ne contenant ni formule maximale, ni segment maximum.

Une pareille dérivation est dite normale, or sous forme normale. On peut de plus montrer que la dérivation normale associée à une dérivation donnée est unique (théorème de normalisation forte). La démonstration de ce théorème se fait par induction à la fois sur la longueur des segments maximaux et la longueur des formules qu'ils contiennent.
Pour la démonstration, je vous renvoie au texte de Prawitz ((2) p. 50).
Voici un exemple de réduction à une forme normale :
Soient :

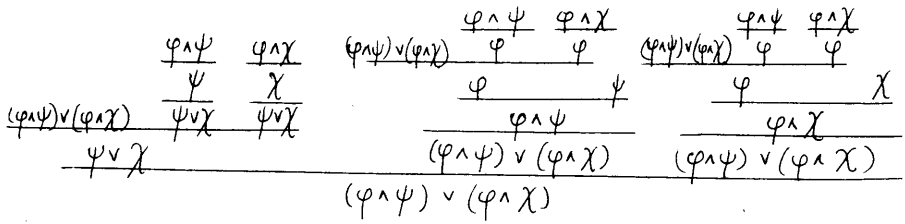
$$\dfrac{\dfrac{(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)\quad\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\varphi}\quad\dfrac{\varphi\wedge\chi}{\varphi}}{\varphi}\qquad\dfrac{(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)\quad\dfrac{\varphi\wedge\psi}{\psi}\vee\chi\quad\dfrac{\varphi\wedge\chi}{\chi}\vee\psi}{\psi\vee\chi}}{\varphi\wedge(\psi\vee\chi)}$$

et

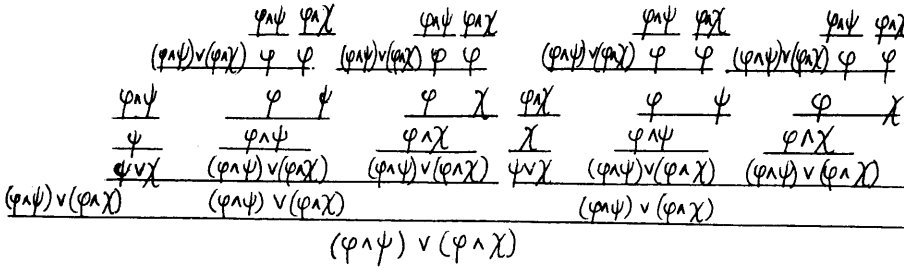
$$\dfrac{\varphi\wedge(\psi\vee\chi)\quad\dfrac{\dfrac{\varphi\wedge(\psi\vee\chi)}{\varphi}\quad\psi}{\varphi\wedge\psi}}{(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)}\qquad\dfrac{\varphi\wedge(\psi\vee\chi)\quad\dfrac{\varphi\wedge(\psi\vee\chi)}{\varphi}\quad\chi}{\varphi\wedge\chi}}{(\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi)}$$

Remplaçons dans cette dernière dérivation toutes les occurrences de l'hypothèse $\varphi \wedge (\psi \vee \chi)$ par sa dérivation, et voyons quelle est la forme normale qui correspond à cette dérivation nouvelle.

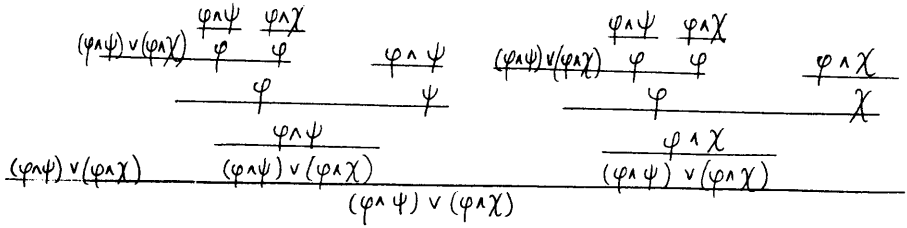
On obtient d'abord



Ce qui par vE-R donne :



Ce qui se réduit à la forme normale :



Voici un système qui n'admet pas de théorème de normalisation. Il est basé sur le système d'implication faible de Church, avec négation. Dans ce système, on accepte la règle $(\rightarrow I)$ ssi l'introduction de l'implication décharge effectivement une hypothèse. Ce système (avec $\rightarrow$ et $\neg = \rightarrow \perp$) admet la normalisation, mais l'axiome $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ n'y est pas démontrable. Si on ajoute le connecteur $\wedge$, le système perd la propriété de normalisation, mais l'axiome $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ y est démontrable par une dérivation qui ne peut se réduire à une forme normale.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi^{2} \quad \psi^{1}}{\varphi \wedge \psi}}{\varphi}}{\psi \to \varphi}\,{}^{1}}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\,{}^{2}$$

Cette dérivation utilise la règle ($\to$ I) en déchargeant effectivement une hypothèse chaque fois.
La dérivation normale qui lui serait associée devrait être :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\varphi^{1}}{\psi \to \varphi}\,(a)}{\varphi \to (\psi \to \varphi)}\,{}^{1}}{}$$

mais l'inférence (a) (introduction de l'implication sans décharger d'hypothèse) est illicite dans ce système, et donc, n'est pas une dérivation du système.

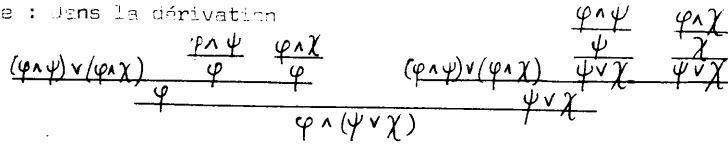
VI. APPLICATION DU THEOREME DE NORMALISATION

(a) Forme des dérivations sous forme normale.

Définition : Une suite de formules $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ apparaissant dans une dérivation forme un chemin si

- φ_1 est une formule du sommet non déchargée par (VE) ou ($\exists$ E)
- pour $i < n$, φ_i n'est pas prémisse mineure d'une ($\to$ E) et si φ_i n'est pas premisse majeure d'une (VE) ou ($\exists$ E), φ_{i+1} se trouve immédiatement sous φ_i, dans le cas contraire, φ_{i+1} est une des hypothèses déchargées par l'application de cette règle (VE) ou ($\exists$ E).
- φ_n est soit prémisse mineure d'une ($\to$ E) soit prémisse majeure d'une (VE) ou ($\exists$ E) ne déchargeant aucune hypothèse soit enfin la formule finale de la dérivation.

Exemple : Dans la dérivation



il y a quatre chemins : $((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi), \varphi\wedge\psi, \underline{\varphi}, \underline{\varphi}, \varphi\wedge(\psi\vee\chi))$, $((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi), \varphi\wedge\chi, \underline{\varphi}, \underline{\varphi}, \varphi\wedge(\psi\vee\chi))$, $((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi), \varphi\wedge\psi, \psi, \underline{\psi\vee\chi}, \underline{\psi\vee\chi}, \varphi\wedge(\psi\vee\chi))$ et enfin $((\varphi\wedge\psi)\vee(\varphi\wedge\chi), \varphi\wedge\chi, \chi, \underline{\psi\vee\chi}, \underline{\psi\vee\chi}, \varphi\wedge(\psi\vee\chi))$.

Comme on le voit facilement, un chemin peut être considéré comme une suite de segments. Ainsi dans l'exemple donné plus haut, chaque formule forme à elle seule un segment sauf les suites soulignées qui constituent chacune un segment.

Dorénavant un chemin $(\varphi_1 \ldots \varphi_n)$ sera noté $(\sigma_1 \ldots \sigma_m)$ où les σ_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ forment l'ensemble des segments qui constituent le chemin.

Théorème

Soit $(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$ un chemin dans une dérivation normale.
Alors il existe un segment σ_ℓ, appelé segment minimum qui sépare le chemin en deux parties éventuellement vides, et vérifiant les propriétés suivantes :

1. Pour tout σ_j $(i > j)$ σ_j est la prémisse majeure d'une règle d'élimination et la formule qui apparaît dans σ_{j+1} est sous-formule de celle qui apparaît dans σ_j.

2. σ_i (si $i \neq n$) est la prémisse d'une règle d'introduction ou de la règle (Int).

3. Pour tout σ_j $(i < j < n)$, σ_j est la prémisse d'une règle d'introduction et la formule qui apparaît dans σ_j est sous-formule de celle qui apparaît dans σ_{j+1}.

Ce théorème possède un corollaire important, le principe des sous-formules :

Toute formule qui apparaît dans une déduction normale est sous-formule de la formule finale ou d'une des hypothèses de la dérivation.

Ceci entraîne évidemment qu'aucune formule atomique n'est démontrable (i.e. dérivable sous hypothèse). En particulier, $\perp$ n'est pas démontrable, ce qui fournit une démonstration du fait déjà bien connu par ailleurs de la non-contradiction de la logique des prédicats intuitionniste .

En fait, ce résultat peut se généraliser de la manière suivante :

Un système de Post S est un système déterminé par la donnée

- d'un ensemble de constantes descriptives (individuelles, opérationnelles et prédicatives)
- d'un ensemble de règles d'inférences entre formules atomiques du type $\frac{\varphi_1 \cdots \varphi_n}{\varphi}$ où φ ne contient pas de variables n'apparaissent pas dans un des φ_i au moins.

Dans un tel système un axiome est une formule atomique obtenue par une règle sans prémisse.

On appelle I (S) le système de déduction naturelle dont le langage est celui décrit plus haut, augmenté des constantes du système S, et dont les schémas de déduction sont ceux de la logique intuitionniste plus les règles d'inférence de S.

Le théorème de normalisation, le principe des sous-formules se généralisent au système I(S) (voir p.e.(3)).
Le principe des sous-formules donne lieu au corollaire suivant : Si une formule atomique est démontrable dans I(S), c'est qu'elle l'était déjà dans S.

Prenons donc le système de Post A suivant :

- les constantes descriptives sont o, s, =, +, ., où o est une constante individuelle, s une constante opérationnelle unaire.

= une constante prédicative binaire et +,. deux constantes prédicatives ternaires (l'interprétation de ces constantes dans le modèle canonique de l'arithmétique est évidente).

- les règles d'inférences sont celles habituelles pour l'égalité, les règles correspondant aux 3è et 4è axiomes de Péano, les règles induites par les définitions récursives de l'addition et de la multiplication, les règles donnant le caractère fonctionnel de + et .

  Par exemple, le quatrième axiome de Péano donne

$$\frac{s(x) = s(y)}{x = y}$$

De nouveau chacune de ces règles est trivialement vérifiée dans le modèle canonique de l'arithmétique.
Dans l'arithmétique de Péano, on peut démontrer la normalisation de I(A), car comme nous l'avons remarqué, la démonstration du théorème de normalisation utilise une simple induction.
Et donc on peut démontrer dans l'arithmétique de Péano, la consistance de I(A).
D'une manière générale, la normalisation d'un système implique sa consistance.

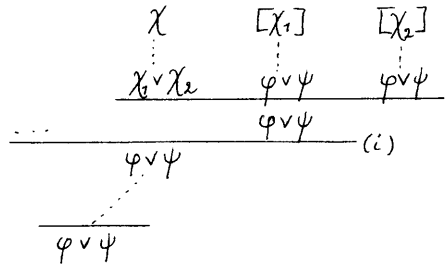
(b) Si Γ est une suite de formules ne contenant pas le connecteur $\vee$ et si $\Gamma \vdash \varphi \vee \psi$, alors, soit $\Gamma \vdash \varphi$ soit $\Gamma \vdash \psi$.

Donc, en logique intuitionniste, pour pouvoir démontrer $\varphi \vee \psi$, il faut démontrer φ ou ψ .

Idée de la démonstration :
On appelle segment final un segment qui contient la formule finale de la dérivation.
Considérons une dérivation Π normale de $\varphi \vee \psi$ à partir de Γ .
Nous procédons en deux étapes :

1. Il y a exactement un seul segment final σ dans Π .
   En effet, s'il y en avait deux, ils proviendraient automatiquement d'une règle (VE) dont ils contiendraient chacun une des premisses

mineures. Soit $\chi_1 \vee \chi_2$ la prémisse majeure de cette règle (VE). Soient π le chemin qui contient $\chi_1 \vee \chi_2$, et χ la formule située au sommet de π. Il est clair que χ n'est pas déchargée : en effet par construction χ ne peut être déchargée par (VE) ou $(\exists\, E)$ (c'est la définition de chemin que nous l'assure) et de plus χ ne peut être déchargée par $(\rightarrow I)$ car il n'y a pas de pareille règle utilisée en-dessous de $\chi_1 \vee \chi_2$. En effet, π se présente en fait sous la forme suivante



avec sous la ligne (i) des $(\exists\, E)$. Donc χ appartient à Γ.
Comme de plus $\chi_1 \vee \chi_2$ se trouve dans la partie éliminatoire de π (voir théorème 6.a) le principe des sous-formules affirme que $\chi_1 \vee \chi_2$ est sous-formule de χ et donc que Γ contient une formule χ dans laquelle apparaît le connecteur de disjonction.
C'est contraire à l'hypothèse et il y a bien un seul segment final.

2. Trois possibilités s'ouvrent maintenantpour σ:

- σ est segment minimum : on montre alors que cela implique que $\varphi \vee \psi$ soit sous-formule d'une formule de Γ, ce qui est impossible;
- σ est conséquence d'une règle Int, auquel cas on remplace cette règle $\dfrac{\bot}{\varphi \vee \psi}$ par $\dfrac{\bot}{\dfrac{\varphi}{\varphi \vee \psi}}$ ou par $\dfrac{\bot}{\dfrac{\psi}{\varphi \vee \psi}}$
- σ est conséquence d'une règle (VI).

On voit aisément que les deux derniers cas fournissent des démonstrations de φ ou de ψ à partir de Γ, en remplaçant par exemple toutes les occurrences de $\varphi \vee \psi$ dans σ par φ ou ψ selon les cas.

Conséquences

- Le contrexemple de Gödel.
  La formule $\bigvee_{1\leq i<j\leq n} (p_i \leftrightarrow p_j)$ n'est pas valide intuitionnistiquement. Car si elle l'était, elle serait démontrable (voir 3), et donc par ce qui précède on pourrait démontrer $p_i \leftrightarrow p_j$ pour $i \neq j$, ce qui est clairement impossible (cela implique par exemple $\bot \leftrightarrow T$).

- Si φ est atomique, $\varphi \vee \neg\varphi$ est non démontrable.
  En effet, sinon on en déduit une démonstration de φ (ce qui est impossible (6.a) ou une de $\neg\varphi$, ce qui est également impossible en vertu du principe des sous-formules.

(c) Indépendance des constantes logiques en logique intuitionniste

c1. Un connecteur ou un quantificateur $*$ est faiblement définissable dans un système S s'il existe une transformation ε qui transforme toute formule φ en une formule $\varepsilon(\varphi)$ ne contenant pas $*$ et qui vérifie - $\varepsilon(\varphi)$ s'obtient en remplaçant dans φ toutes les sous-formules du type $\chi * \psi$ ou $* \times \psi$ par $\varepsilon(\chi * \psi)$ ou $\varepsilon(*\times\psi)$ (en supposant que $*$ n'apparaît ni dans ψ ni dans χ)
  - $\vdash_S \varepsilon(\varphi)$ ssi $\vdash_S \varphi$.

c2. Des constantes logiques sont fortement indépendantes dans le système S si elles ne sont pas faiblement définissables dans S.

On démontre le théorème suivant :

Toutes les constantes logiques sont fortement indépendantes dans la logique intuitionniste.

A titre exemplatif, nous allons démontrer l'indépendance du $\vee$, $\rightarrow$, $\forall$ et $\bot$. On procède par l'absurde : on suppose que ε est une transformation vérifiant c1 pour chaque constante.

1. Indépendance du $\vee$.

Soient P et Q deux symboles relationnels o-aires, $\varphi = P \vee Q$ et soit R un symbole relationnel O-aire n'apparaissant pas dans $\varepsilon(\varphi) = \psi$.
On sait que $\vdash (P \vee Q) \to ((P \to R) \wedge (Q \to R) \to R)$
et donc $\psi \vdash (P \to R) \wedge (Q \to R) \to R$
En substituant $P \vee Q$ à R, on obtient $\psi \vdash P \vee Q$.
Par le point (b) ci-dessus, on en conclut $\psi \vdash P$ ou $\psi \vdash Q$.
Mais comme $P \vdash P \vee Q$ et $Q \vdash P \vee Q$, on a les séquents $P \vdash \psi$ et $Q \vdash \psi$. Ceci amène à conclure $P \vdash Q$ ou $Q \vdash P$, ce qui est clairement impossible en vertu du principe des sous-formules.

2. Indépendance du $\to$.

Ceci est immédiat car une formule qui ne contient pas $\to$ n'est pas démontrable.
En effet soit une dérivation Π de la formule φ.

Considérons un chemin contenant l'occurrence finale de φ dans la dérivation Π. Comme Π est une preuve (i.e. il n'y a pas d'hypothèses), ce chemin commence par une occurrence de formule déchargée. Comme un chemin ne peut commencer par une occurrence de forumle déchargée par $\vee$ E ou $\exists$E, c'est donc une $\to$I qui décharge la formule du sommet. Par le théorème (a), la formule φ doit donc contenir l'implication introduite de cette manière.

3. Indépendance du $\forall$.

Soient P un symbole relationnel 1-aire, $\varphi = \varepsilon(\forall x\, P(x))$; et y une variable n'apparaissant pas dans φ.
Comme $\vdash \forall x\, P(x) \to P(y)$, on a aussi $\vdash \varphi \to P(y)$, et donc $\varphi \vdash \forall_x P(x)$

En admettant le lemme suivant (sa démonstration se trou e dans (2) p. 61)
Si φ ne contient pas de connecteur $\forall$,
Alors $\varphi \vdash \forall x P(x)$ implique $\varphi \vdash \bot$.
l'indépendance se montre facilement.

En effet, il est clair que $\forall x P(x) \to \bot$ est non démontrable.
Or par définition de faible définissabilité, l'équivalence
$\vdash \forall x P(x) \to \bot$ ssi $\vdash \varepsilon(\forall x P(x) \to \bot)$ est vraie.
Or le second séquent n'est autre que $\vdash \varphi \to \bot$ qui est valide par le lemme. Nous débouchons donc sur la contradiction attendue.

4. Indépendance de $\bot$.

Soit $\varphi = \varepsilon(\bot)$ et supposons que $\bot$ puisse être remplacé par φ sans changer la démonstrabilité.
Si P est un symbole relationnel o-aire n'apparaissant pas dans φ, puisque $\vdash \bot \to P$ on a aussi $\vdash \varepsilon(\bot \to P)$ et donc $\vdash \varphi \to P$ ou encore $\varphi \vdash P$;
Ceci implique par le principe des sous-formules que P est est sous-formule de φ ce qui contredit l'hypothèse.

Remarque

Certains des résultats ci-dessus ont déjà été démontrés dans un précédent exposé par des méthodes topologiques. Il faut remarquer que les résultats d'indépendance que nous venons d'établir sont plus généraux puisque valables non seulement dans la logique des propositions intuitionnistes mais aussi dans la logique des prédicats.

L'INTERPRETATION "DIALECTICA"

Th. LUCAS

Bibliographie.

[1] GOEDEL K. "Ueber eine bisher noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes"
Dialectica, 12, (1958), pp. 280-287.

[2] SHOENFIELD J.R. "Mathematical Logic"
Addison - Wesley, Reading, Mass., etc... 1967.

[3] TROELSTRA A.S. "Aspects of Constructive Mathematics"
in "Handbook of Mathematical Logic", Ed. BARWISE J., North-Holland, Amsterdam, etc... 1979.

Le programme de Hilbert demandait de prouver la consistance de l'arithmétique par des moyens finitistes.

"Par des moyens finitistes" peut signifier

(1) par la seule considération de signes, de combinaisons de signes, d'assertions élémentaires sur ces combinaisons ("a finitary proof deals only with concrete objects" [2, p. 214])

(2) par des raisonnements constructifs ("the proof deals with these objects in a constructive fashion"[2, p. 214]).

Par ailleurs, le deuxième théorème d'incomplétude de Gödel montre que si l'arithmétique A est consistante, alors

$$A \nvdash Con_A .$$

On admet généralement que :

(1') les objets concrets des démonstrations finitistes et leurs combinaisons sont tous "représentés" dans A et que Con_A "représente" l'assertion que A est consistante,

(2') les raisonnements constructifs sont "représentés" dans A.

On interprète donc le deuxième théorème d'incomplétude comme affirmant qu'"il n'y a pas moyen de démontrer par des moyens finitistes la consistance de A".

Dans [1], Gödel propose de conserver (2) mais d'élargir (1) en admettant la considération de concepts abstraits (que seront les fonctionnelles) :

"Da die finite Mathematik als die der anschaulichen Evidenz definiert ist, so bedeutet das [...], dass man für den Widerspruchsfreiheitsbeweis der Zahlentheorie gewisse, abstrakte Begriffe braucht. Dabei sind unter abstrakten (oder nichtanschaulichen) Begriffen solche zu verstehen, die wesentlich von zweiter oder höherer Stufe sind, das heisst, die nicht Eigenschaften oder Relation konkreter Objekte (z.B. von Zeichenkombinationen) beinhalten, sondern sich auf Denkgebilde (z.B. Beweise, sinvolle Aussagen usw.) beziehen, wobei in den Beweisen Einsichten über die letzteren gebraucht

werden, die sich nicht aus den kombinatorischen (raumzeitlichen) Eigenschaften der sie darstellenden Zeichenkombinationen, sondern nur aus deren Sinn ergeben".

Quelques remarques préliminaires constitueront le premier paragraphe de cet exposé. Dans le second, nous esquisserons un calcul de fonctionnelles. Dans le troisième nous présenterons"l'interprétation Dialectica".

I; Quelques remarques préliminaires.

Rappelons que pour prouver de façon finitiste la consistance de l'arithmétique, il suffit de prouver celle de l'arithmétique intuitionniste. On décrit en effet de façon effective une transformation $*$ qui à une formule φ du langage de l'arithmétique associe une formule φ^* de telle sorte que $A \vdash_c \varphi$ entraîne $A \vdash_i \varphi^*$.
Si l'arithmétique classique était inconsistante, on y démontrerait "0 = 1" et de là : $A \vdash_i (0 = 1)^*$, puis $A \vdash_i 0 = 1$, car $(0 = 1)^*$ est $(0 = 1)$. (Voir l'exposé page 1 ci-dessus).

L'idée de Gödel est proche de la procédure classique de "Skolemisation" d'une théorie. Dans cette procédure, (à titre d'exemple), à une formule du type

$$\forall x \ \exists y \ \forall z \ \exists t \quad Q(x, y, z, t) \qquad (1)$$

dans un langage L, on associe dans le langage L enrichi de symboles de fonctions une formule du type

$$\forall x \ \forall z \quad Q(x, gx, z, hxz) \qquad (2)$$

de sorte que prouver (1) dans une théorie T revient à prouver (2) dans une théorie T* contenant T et des axiomes sur ces symboles de fonctions. En termes plus attentifs à l'aspect constructif. il s'agira d'associer constructivement aux formules telles que (1) des fonctions, et cela de telle sorte que si $A \vdash_i (1)$, on puisse "construire" g et h. Pour formaliser quelque peu, nous présenterons la construction de g et h dans un langage de fonctionnelles LF (voir § 2) et le résultat de Gödel prendra la forme suivante :

"A chaque formule $P(\overline{z})$ de A, on associe une formule sans quantificateurs $P_D(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$.
A une démonstration de $P(\overline{z})$ dans l'arithmétique intuitionniste on peut associer effectivement une suite $\overline{X}$ de termes de LF (dont les variables sont dans $\overline{z}$) de telle sorte que $P_D(\overline{X}, \overline{y}, \overline{z})$ soit valide".

La consistance de l'arithmétique en découle comme suit : si $A \vdash_i (0 = 1)$, alors $(0 = 1)_D$, qui s'avère être $0 = 1$ est valide. Indépendamment de nos remarques initiales, on retrouve l'aspect non finitiste de cette démonstration de consistance dans l'examen de la validité de la formule sans quantificateurs $P_D(\overline{X}, \overline{y}, \overline{z})$ qui exige l'évaluation des termes de $\overline{X}$: des articles de Tait, Howard font apparaître des concepts non finitistes ou une induction transfinie jusqu'à ε_o dans la preuve que ces évaluations s'achèvent pour donner un nombre entier (Voir aussi note à la fin de cet article).

II. Les fonctionnelles.

On définit les types inductivement :

1) 0 est un type,
2) si σ et τ sont des types, $(\sigma \to \tau)$ est un type.
Les types de forme $(\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \ldots \to (\sigma_n \to \tau)\ldots))$ sont notés $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \to \tau$.

Une fonctionnelle de type 0 est un nombre entier.
Une fonctionnelle de type $(\sigma \to \tau)$ est une application de l'ensemble des fonctionnelles de type σ dans l'ensemble des fonctionnelles de type τ

Dans une perspective constructiviste, on sera amené à restreindre cette hiérarchie de fonctionnelles : l'article de Gödel parle de fonctionnelle "calculables" ("berechenbar") : une fonctionnelle calculable de type $(\sigma \to \tau)$ est une application calculable de l'ensemble des fonctionnelles calculables de type σ dans l'ensemble des fonctionnelles calculables de type τ. Quoi qu'il en soit de l'interprétation de cette notion de calculabilité, ces hiérarchies de fonctionnelles doivent contenir les entiers, la fonction successeur et être stables pour les opérations d'application,

d'abstraction et de récursion; à noter cependant que si la notion d'égalité entre fonctionnelles obéit aux règles habituelles de l'égalité (y compris la compatibilité avec l'abstraction et la récursion), elle ne doit pas nécessairement être extensionnelle ($F = G$ dès que $\forall x \; F(x) = G(x)$). Nous adopterons ici le point de vue que cette notion est suffisamment claire pour, d'une part, donner un sens précis à la notion de validité (voir ci-dessous), d'autre part donner tout son sens à l'entreprise de Gödel. (On peut aussi adopter une perspective plus formelle et développer un <u>calcul</u> de fonctionnelles avant d'en préciser les éventuels modèles : cfr [3]).

Pour parler des fonctionnelles, nous introduisons un langage pour fonctionnelles LF.

Les <u>symboles</u> de LF sont

(1) pour chaque type σ, les variables de type σ,
(2) les constantes 0, de type 0, S, de type $(0 \to 0)$,
R_σ, de type $(\sigma, 0 \to (\sigma \to \sigma), 0) \to \sigma$,
(3) les symboles λ et ap,
(4) le symbole $=$,
(5) les symboles $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

Les <u>termes</u> sont définis par les clauses:
(1) variables et constantes de type σ sont des termes de type σ,
(2) si X est un terme de type σ et Y un terme de type $\sigma \to \tau$, ap X Y est un terme de type τ,
(3) si X est un terme de type τ et x une variable de type σ, λ x X est un terme de type $(\sigma \to \tau)$.

Les termes de forme ap X Y seront notés (X Y) et $X_1 X_2 \ldots X_n$ abréviera $(\ldots((X_1 X_2) X_3) \ldots X_n)$. Le symbole λ est considéré comme liant x dans λx X et $\lambda x_1 \ldots \lambda x_n$ X est noté $\lambda x_1 \ldots x_n$ X.

Les formules atomiques de type σ de LF sont les formules de la forme $X = Y$ où X et Y sont des termes de type σ.

Les formules s'obtiennent à partir des formules atomiques au moyen des connecteurs logiques de (S). Les formules de type 0 s'obtiennent à partir des formules atomiques de type 0 par les connecteurs propositionnels de (S) et les quantificateurs en des variables de type 0. Une 0-formule est une formule de type 0 sans quantificateurs.

Modulo les remarques du début de ce paragraphe, la notion de validité est claire. La constante 0 est interprétée par le nombre naturel 0, S par la fonction successeur, ap par l'application de fonctionnelle à fonctionnelle, λ par l'abstraction, R par l'opération de récursion et $=$ par l'égalité entre fonctionnelles. Il suffit pour ce qui suivra de définir la satisfaction d'une 0-formule pour une valuation donnée et sa validité, comme la satisfaction pour toutes les valuations, " $\models P$" signifiera que la 0-formule P est valide.

Voici maintenant quelques indications sur le pouvoir d'expression de LF. Pour faciliter la lecture, on ne mentionnera pas le type des variables et termes, lorsqu'il peut être reconstitué par le contexte.

Il résulte immédiatement de nos définitions que l'explicitation de variables s'exprime dans LF, en ce sens que pour tout terme X de type 0 et pour toutes variables $x_1, \ldots, x_n$, il y a un terme Z de LF dont les variables libres sont parmi celles de X, mais différentes de $x_1, \ldots, x_n$ et tel que $\models Z\, x_1 \ldots x_n = X$.
(Prendre $Z = \lambda x_1 \ldots x_n\, X$)

En utilisant les symboles R_σ, on montrera que les "schémas de récursion" s'expriment dans LF; plus précisément, pour tous termes X, de type 0 et Y, pour toutes variables $x_1, \ldots, x_n$, z il y a un terme Z sont les variables libres sont parmi celles de X, mais différentes de $x_1, \ldots x_n$ et tel que :

$$\vdash Z\ 0\ x_1 \ldots\ x_n = X$$
$$\vdash Z\ (S\ z)\ x_1 \ldots\ x_n = Y\ (Zz)\ x_1 \ldots\ x_n\ .$$

Ceci nous permet d'"exprimer" l'addition, la multiplication, la fonction prédécesseur, la soustraction partout définie, l'égalité entre termes de type 0 (en ce sens qu'il y a un terme E avec $\models Exy = 0 \leftrightarrow x = y$), les tableaux de vérité des connecteurs propositionnels. On en déduira que pour toute 0-formule P, il y a un terme X_P de type 0 sans autres variables libres que celles de P tel que $\models P \leftrightarrow X_P = 0$.

On en déduira aussi que les "définitions par cas" s'expriment dans LF, en ce sens que pour toute 0-formule P, pour tous termes X et Y de type 0 et pour toutes variables $x_1, \ldots, x_n$, il y a un terme Z dont les variables libres sont parmi celles de P, de X ou de Y, mais différentes de $x_1, \ldots, x_n$ et tel que

$$\models P \rightarrow Zx_1 \ldots\ x_n = X$$
$$\vdash \neg P \rightarrow Zx_1 \ldots\ x_n = Y\ .$$

On peut enfin utiliser nos remarques sur l'expressibilité de l'addition et de la multiplication pour identifier les formules du langage de A tel que celui utilisé par exemple p. 2 à des formules de type 0 de LF.

III. L'interprétation "Dialectica"

Dans les définitions qui suivent, $\overline{x}$, $\overline{y}, \ldots$ désignent des suites de variables de LF, $\overline{X}$, $\overline{Y}, \ldots$ des suites de termes de LF. Si $\overline{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ et $\overline{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$, $(\overline{X}\overline{Y})$ est la suite $(X_1 Y_1 \ldots Y_n, \ldots, X_m Y_1 \ldots Y_n)$. Si $\overline{x} = (x_1, \ldots x_m)$, $\forall \overline{x}$ est $\forall x_1 \ldots \forall x_m$ et $\exists \overline{x}$ est $\exists x_1 \ldots \exists x_m$.

A chaque formule P de LF nous associons une formule P^D de forme $\exists \bar{x}\ \forall \bar{y}\ P_D$ où P_D est une formule sans quantificateurs de LF et dont les variables libres sont parmi $\bar{x}$, $\bar{y}$ et celles de P. Les définitions entraîneront que si P est une formule de type 0(en particulier une formule du langage de l'arithmétique), P_D est une 0-formule.

(1) Si P est atomique, $P^D = P_D = P$. En particulier, $\bot^D = \bot_D = \bot$.
(2) Si $P = P_1 \wedge P_2$ et si $P_1^D = \exists \bar{x}\ \forall \bar{y}\ P_{1D}$ et $P_2^D = \exists \bar{x}'\ \forall \bar{y}'\ P_{2D}$, alors $P^D = \exists \bar{x}\ \bar{x}'\ \forall \bar{y}\ \bar{y}'\ (P_{1D} \wedge P_{2D})$
(Il est sous-entendu qu'on évite les confusions de variables et que P^D n'est défini qu'à un changement de variables liées près).
(3) Si $P = P_1 \vee P_2$ et si $P_1^D = \exists \bar{x}\ \forall \bar{y}\ P_{1D}$ et $P_2^D = \exists \bar{x}'\ \forall \bar{y}'\ P_{2D}$, alors
$P^D = \exists z\ \bar{x}\ \bar{x}'\ \forall \bar{y}\ \bar{y}'\ ((z = 0 \to P_{1D}) \wedge (z \neq 0 \to P_{2D}))$
(où z est une variable de type 0).
(4) Si $P \doteq \exists z\ Q$ et si $Q^D = \exists \bar{x}\ \forall \bar{y}\ Q_D$,
alors $P^D = \exists z\ \bar{x}\ \forall \bar{y}\ Q_D$.
(5) Si $P \doteq \forall z\ Q$ et si $Q^D = \exists \bar{x}\ \forall \bar{y}\ Q_D(\bar{x}, z, \ldots)$
alors $P^D = \exists \bar{x}'\ \forall z\ \bar{y}\ Q_D(\bar{x}'z, z, \ldots)$
(6) Si $P = P_1 \to P_2$ et si $P_1^D = \exists \bar{x}\ \forall \bar{y}\ P_{1D}(\bar{x}, \bar{y}, \ldots)$
et $P_2^D = \exists \bar{x}'\ \forall \bar{y}'\ P_{2D}(\bar{x}', \bar{y}', \ldots)$,
alors $P^D = \exists \bar{x}''\bar{y}''\ \forall \bar{x}\bar{y}'\ (P_{1D}(\bar{x}, \bar{y}''\bar{x}\bar{y}', \ldots) \to P_{2D}(\bar{x}''\bar{x}, \bar{y}', \ldots))$.

Pour la justification de (5), voir le § 1.
Pour celle de (6), considérer les équivalences classiques :

$$\exists x\ \forall y\ P_{1D} \to \exists x'\ \forall y'\ P_{2D}$$
$$\sim \forall x\ \exists x'(\forall y\ P_{1D} \to \forall y'\ P_{2D})$$
$$\sim \forall x\ \exists x'\ \forall y'\ \exists y'\ (P_{1D} \to P_{2D})$$

et appliquer à cette dernière formule la procédure de Skolem rappelée dans le § 1. (On peut aussi raisonner en termes de preuves).

THEOREME

Soit une formule $P(\overline{z})$ du langage de l'arithmétique. A une démonstration de $P(\overline{z})$ dans l'arithmétique intuitionniste, on peut associer une suite de termes $\overline{X}$ de LF dont les variables sont dans $\overline{z}$ de telle sorte que $\vdash P_D(\overline{X}, \overline{y}, \overline{z})$.

Démonstration. Elle se fait par induction sur la forme de cette démonstration. Un système se pliant bien aux nécessités de la démonstration est donné par les axiomes et règles qui suivent (voir [1] et [3]) : $\dfrac{P \qquad P \to Q}{Q}$; $\dfrac{P \to Q \qquad Q \to R}{P \to R}$; $P \vee P \to P$;

$P \to P \vee Q$; $P \vee Q \to Q \vee P$; $\dfrac{P \to Q}{R \vee P \to R \vee Q}$; $P \to P \wedge P$;

$P \wedge Q \to P$; $P \wedge Q \to Q \wedge P$; $\dfrac{P \wedge Q \to R}{P \to (Q \to R)}$; $\dfrac{P \to (Q \to R)}{P \wedge Q \to R}$;

$\bot \to P$; $\dfrac{P \to Q}{P \to \forall x Q}$; $\forall x\, Q(x,\ldots) \to Q(t,\ldots)$; $\dfrac{Q \to R}{\exists x Q \to R}$;

$Q(t,\ldots) \to \exists x\, Q(x,\ldots)$ (ces quatre derniers axiomes et règles avec les restrictions usuelles); les axiomes de l'égalité et ceux de Peano mais où l'axiome d'induction est remplacé par la règle

$$\frac{P(0,\ldots) \qquad P(x,\ldots) \to P(Sx,\ldots)}{P(z,\ldots)} \quad .$$

Nous examinerons quelques cas et, pour alléger la notation, supposerons autant qu'il est possible avoir à faire à des suites de variables réduites à une seule variable.

(a) Le cas des axiomes arithmétiques autres que l'induction est trivial.

(b) Le cas de la règle $\dfrac{P \qquad P \to Q}{Q}$

Soient $P^D = \exists x \ \forall y \ P_D(x, y)$ et $Q^D = \exists x' \ \forall y' \ Q_D(x', y')$.
La formule $(P \to Q)^D$ sera de forme

$$\exists x'' y'' \ \forall x y' \ (P_D(x, y'' x y') \to Q_D(x'' x, y'))$$

L'hypothèse d'induction nous donne des termes X, X", Y" (dont les variables sont parmi les variables libres de P, Q et P respectivement) tels que

$$\vdash P_D(X, y) \qquad (1)$$

et

$$\vdash P_D(x, Y'' x y') \to Q_D(X'' x, y') \qquad (2).$$

On en tire successivement

$$\vdash P_D(X, Y'' x y') \qquad (3), \text{ par } (1),$$
$$\vdash P_D(X, Y'' X y') \to Q_D(X'' X, y') \qquad (4), \text{ par } (2),$$
$$\vdash Q_D(X'' X, y') \qquad (5), \text{ par } (3) \text{ et } (4).$$

Le terme X"X est le terme recherché.

(c) Le cas de l'axiome $P \vee P \to P$.
Ecrivons P^D sous les formes $\exists x \ \forall y \ P_D(x, y)$,
$\exists x' \ \forall y' \ P_D(x', y')$ et $\exists x'' \ \forall y'' \ P_D(x'', y'')$ (6).
La formule $(P \vee P)^D$ s'écrira sous la forme
$\exists z \ x \ x' \ \forall y \ y' ((z = 0 \to P_D(x, y)) \wedge (z \neq 0 \to P_D(x', y')))$.

Notons-la ici

$$\exists z \ x \ x' \ \forall y \ y' \ (Q(z, x, x', y, y').$$

La formule $(P \vee P \to P)^D$ s'écrit alors en considérant (6) :

$$\exists y''' \ y'^{v} \ x''' \ \forall z \ x \ x' (Q(z, x, x', y''' \ z x x' y'', y'^{v} \ z x x' y'')$$
$$\to P_D(x''' z x x', y''')),$$

c.à.d.

$$\exists y''' y'^{v} \ x''' \ \forall z \ x \ x'$$
$$((z=0 \to P_D(x, y''' z x x' y'')) \wedge (z \neq 0 \to P_D(x', y'^{v} \ z x x' y''))$$
$$\to P_D(x''' z x x', y'''))$$

Nous devons donc trouver des termes $Y"',Y^{IV}$, $X"'$ tels que

$$\vdash((z=0 \rightarrow P_D(x, Y"'zxx'y"))\wedge(z\neq 0 \rightarrow P_D(x',Y^{IV}\ zxx'y")) \rightarrow P_D(X"'zxx',y").$$

Il suffit pour cela de poser $Y^{IV} = Y"'$ et de déterminer $X"'$ et $Y"'$ de telle sorte que

$$\vdash Y"'\ zxx'y" = y"$$

et $$\vdash X"'\ zxx' = x,$$

ce qui peut se faire dans LF (en respectant les contraintes sur les variables).

(d) Le cas de l'axiome $(P \wedge P \rightarrow P)$.

On vérifiera que $(P \wedge P \rightarrow P)^D$ s'écrit sous la forme

$$\exists y"xx'\ \forall y\ y'x"\ (P_D(x",y"xyy') \rightarrow P_D(xx",y) \wedge P_D(x'x",y')).$$

Nous devons donc trouver des termes $Y",X,X'$ tels que

$$\vdash P_D(x",Y"x"yy') \rightarrow P_D(Xx",y) \wedge P_D(X'x",y').$$

On commencera par poser $X' = X$ et déterminer X par

$$\vdash Xx" = x".$$

Le problème revient donc à trouver $Y"$ de telle sorte que

$$\vdash P_D(x",\ Y"x"yy') \rightarrow P_D(x",y) \wedge P_D\ (x",y')\quad (7).$$

Il suffit pour cela de déterminer $Y"$ au moyen d'une "définition par cas" :

$$\vdash P_D(x",y) \rightarrow Y"x"yy' = y' \qquad (8)$$

$$\vdash \neg P_D(x",y) \rightarrow Y"x"yy' = y \qquad (9);$$

en effet, (8) entraîne

$$\vdash P_D(x",y) \rightarrow (P_D(x",Y"x"yy') \rightarrow P_D(x",y'))$$

et (9) entraîne

$$\vdash \neg P_D\ (x",y) \rightarrow \neg\ P_D(\ x",Y"x"yy'),$$

d'où (7) résultera en utilisant

$$\vdash P_D(x'',y) \vee \neg P_D(x'',y).$$

(e) Le cas de la règle $\dfrac{P(0) \quad P(z) \to P(Sz)}{P(x)}$

$(P(0))^D$ est de forme $\exists x \ \forall y \ P_D(x,y,0)$,

$(P(z) \to P(Sz))^D$ est de forme

$$\exists yx' \ \forall xy' \ (P_D(x,yxy',z) \to P_D(x'x,y',Sz)),$$

de sorte que par hypothèse d'induction, il y a des termes X, Y, X' (z peut figurer dans ces deux derniers) tels que

$$\vdash P_D(X,y,0) \tag{10}$$

et $$\vdash P_D(x,Yxy',z) \to P_D(X'x,y',Sz) \tag{11}.$$

Il s'agit de trouver un terme X" pour lequel

$$\vdash P_D(X'',y'',z) \tag{12}.$$

On commence par "expliciter" la variable z de Y et X' en déterminant Y_1 et X'_1 par

$$\vdash Y_1 \, xy'z = Yxy'$$

$$\vdash X'_1 \, xz = X'x$$

de sorte que (11) s'écrit :

$$\vdash P_D(x,Y_1xy'z,z) \to P_D(X'_1xz,y,Sz) \tag{13}.$$

On détermine un terme X''_1 par récursion:

$$\vdash X''_1 \, 0 = X \tag{14}$$

$$\vdash X''_1 \, (Sz) = X'_1 \, (X''_1 z)z \tag{15}$$

(ou en posant directement $X''_1 = R \, X_1 \, X'_1$)

et on pose $X'' = X''_1 \, z$. On prouve alors (12) par récurrence sur la valeur de z. Si z a la valeur 0, (12) est assuré par (10) et(14). Nous supposons maintenant que

$P_D(X'',y'',z)$ est satisfait lorsque z prend la valeur n et y" une valeur quelconque (16).

D'ailleurs, (13) entraîne

$$\vdash P_D(X'',Y_1X''y''z,z)\rightarrow P_D(X'_1X''z,y'',Sz).$$

En vertu de (16), l'antécédent de cette implication est satisfait lorsque z prend la valeur n.
Donc, toujours pour cette même valeur de z,

$$P_D(X'_1\ X''z,y'',Sz),$$

à savoir $P_D(X'_1(X''_1z)z,y'',Sz)$,
à savoir $P_D(X''_1(Sz),y'',Sz)$ (en vertu de (15)),
est satisfait. En d'autres termes,

$$P_D(X'',y'',z)$$

est satisfait lorsque z prend la valeur n + 1, ce qu'il fallait démontrer.

N.B. Si le calcul des fonctionnelles est entièrement présenté de façon formelle (sans notion sémantique, comme dans l'article de M. Crabbé page 83) la démonstration précédente montre que $P_D(X'',y'',z)$ pour tout terme clos z seulement si tout terme fermé de type 0 se réduit à un numéral. Plus précisément, pour z clos et de type 0,

1) si l'on admet le point de vue <u>sémantique</u>, z désigne un naturel, et ceci justifie la preuve par induction.

2) si l'on adopte le point de vue <u>syntaxique</u>, il faut pour justifier la preuve par induction, démontrer au préalable que z se réduit à un numéral; cette démonstration excède l'arithmétique.

NORMALISATION DU CALCUL DES FONCTIONNELLES RECURSIVES PRIMITIVES

Marcel Crabbé

Nous renvoyons à l'article de Th. Lucas : "L'interprétation Dialectica" pour la justification de ce qui suit. Pour des raisons techniques, il nous a semblé nécessaire de présenter le système T indépendamment de la manière dont cela fut fait dans l'article cité. En annexe, nous indiquons brièvement comment on peut raccorder les deux formulations.

Référence. TAIT, Intensional interpretations of functionals of finite type. J.S.L. 32 (1967), pp. 198-212.

1. Types

Les types sont les éléments de la plus petite classe qui comprend o et est fermée pour l'opérateur $(\sigma \to \tau)$.

Remarques

- Le type o est le type des nombres naturels. Le type $(\sigma \to \tau)$ est le type des fonctionnelles calculables définies sur les fonctionnelles de type σ et dont la valeur est une fonctionnelle de type τ.

- Tout type est de la forme $(\sigma_1 \to \dots \quad (\sigma_n \to o) \dots)$ $\qquad (n \geqslant o)$

- Le type $(\sigma_1 \to \dots \to (\sigma_n \to \tau) \dots)$ pourra être noté $\sigma_1, \dots, \sigma_n \to \tau$.

2. Termes

Pour chaque type σ on se donne une suite infinie de variables $v_1^\sigma, v_2^\sigma, \dots$ de type σ.

On dispose également de deux constantes : **0** et **S**et, pour chaque type σ, d'une constante R_σ.

Si f est un terme et σ un type, la notation $f \models \sigma$ signifiera que f est de type σ.

Règles de formation des termes

1. Toute variable de type σ est un terme de type σ.

2. O, S et R_σ sont des termes de types o, $(o \to o)$ et σ , $(o \to (\sigma \to \sigma))$, $o \to \sigma$ respectivement.

3. Si $f \models \tau$ et $x \models \sigma$ alors $\lambda x f \models (\sigma \to \tau)$ (abstraction)

4. Si $f \models (\sigma \to \tau)$ et $g \models \sigma$ alors $(fg) \models \tau$ (évaluation).

Remarques

- Le terme $\lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n} f$ de type $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \to \tau$ se note aussi $\lambda x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}. f$.
- Le terme $(\ldots(f\ g_1)\ldots\ g_n)$ se note aussi $fg_1 \ldots\ g_n$.
- On peut omettre les parenthèses extérieures.
- Tout terme est de la forme $\lambda x_1 \ldots x_n.(fg_1 \ldots g_m)$ où n, m $\geq$ 0 et f est une constante, une variable ou un terme de la forme $\lambda\ y\ f'$.

Substitution, occurrences libres et liées

- Une occurrence de la variable x dans le terme f est liée si elle se trouve dans un sous-terme de f de la forme $\lambda x\ g$. Elle est libre sinon.

Une occurrence libre de la variable x dans f est libre pour g ssi elle ne se trouve pas dans un sous-terme de f de la forme $\lambda\ y\ h$ où y a une occurrence libre dans g.
Si le type de g_i $(1 \leq i \leq n)$ est le même que celui de x_i, alors $f\ [g_1/x_1, \ldots, g_n/x_n]$ est le résultat de la substitution de g_i aux occurrences libres de x_i dans f $(1 \leq i \leq n)$. Toutefois, ceci ne présente un intérêt que si chaque occurrence libre de x_i dans f est libre pour g_i. Nous supposerons qu'il en est toujours ainsi.

Plus formellement nous pouvons introduire une relation d'équivalence $\asymp$ entre termes en postulant $f \asymp g$ ssi "g ne diffère de f que par les variables liées". Si $\bar{f}$ et $\bar{g}$ sont les classes d'équivalence de

f et g et si x est libre pour g dans f alors $\overline{f}\ [\overline{g}/x]$ est $\overline{f[g/x]}$
Les considérations qui suivent se rapportent non aux termes eux-mêmes, mais à leurs classes d'équivalence.

En fait, la méthode que nous venons d'esquisser revient à présenter le système à l'aide des carrés de Bourbaki.
On peut également éliminer les variables liées en utilisant des combinateurs, comme chez Tait, mais ceci modifie en même temps la structure du système.

3. La réduction

$f \rhd g$ ("f se réduit à g") est la relation transitive, stable pour les opérations d'abstraction et d'évaluation engendrée par

R1. $(\lambda x\ f)g \rhd f\ [g/x]$
R2. $R\ f\ g\ 0 \rhd f$
R3. $R\ f\ g\ (S\ t) \rhd g\ t\ (R\ f\ g\ t)$

On vérifie sans peine que :

- $f \rhd g$ et $f \models \sigma$ impliquent $g \models \sigma$
- si f est un terme et $f \rhd g$ alors g est un terme.

Définitions

f se réduit immédiatement à g si on a $f \rhd g$ sans utiliser la transitivité de $\rhd$. (Plus précisément : si g s'obtient en remplaçant dans f une occurrence d'un sous-terme ayant une des formes indiquées à gauche de $\rhd$ dans les règles R1, R2 et R3 par le terme correspondant mentionné à droite).

Une réduction de f est une suite de termes dont le premier terme est f et dans laquelle chaque autre terme est obtenu par réduction immédiate du précédent.

Un terme f est normal ssi il n'y a pas de terme g tel que $f \rhd g$
(Toute réduction de f est de longueur 1)

Exemples

- R 0(λ x y.x) (S0) se réduit immédiatement à (λ x y.x) 0 (R 0(λ x y.x) 0).
- Les suites :
  R 0(λ x y.x) (S0), (λ x y.x) 0 (R0(λ x y.x)0), (λ x y.x) 00, (λ y 0) 0, 0.
  et
  R 0 (λ x y.x) S0, (λ x y.x) 0 (R0 (λ x y.x)0), (λ y 0)(R 0(λ x y.x)0), 0.
  sont des réductions de R0 (λ x y.x) (S0)

- Les termes λxx, λy0, 0, S0 et R0(λ x y.x) z sont normaux.

Le théorème suivant se démontre d'une manière finitiste :

Théorème de Church-Rosser

Si f $\triangleright$ g_1 et f $\triangleright$ g_2 et $g_1 \neq g_2$ alors il existe un terme h tel que $g_1 \triangleright h$ et $g_2 \triangleright h$

Corollaire
Un terme ne se réduit qu'à un terme normal au plus.

4. Numéraux

Définition :

Les numéraux sont les termes de la plus petite classe contenant 0 et S t pour tout t dans la classe.

Le numéral (S...(S0)...) où S a n occurrences est noté S^n0 ou $\overline{n}$ (S^0 0 = 0). Tous les numéraux sont de cette forme.

Lemme 1
Tout terme normal fermé de type 0 (c.à.d. sans occurrences libres de variables) est un numéral (et réciproquement).

Démonstration

La réciproque est évidente.
L'autre partie se démontre par induction sur la longueur du terme.
Soit $t : \lambda x_1 \dots x_n.(f\ g_1 \dots g_n)$ un terme normal fermé de type 0.
Comme t est de type 0, n = 0. En outre f est une constante, car t est fermé.

Trois cas sont à envisager.

1. f est 0. Alors t est f.
2. f est S. Alors g_1 est fermé et de type 0, et m = 1
   Par l'hypothèse d'induction g_1 est $S^k\ 0$ pour un certain naturel k. Donc t est $S^{k+1}\ 0$.
3. f est R_σ . Alors $g_1 \vDash \sigma$, $g_2 \vDash 0 \to (\sigma \to \sigma)$ et $g_3 \vDash 0$. Par l'hypothèse d'induction g_3 est un numéral. Dès lors t n'est pas normal. Ce cas est impossible. □

5. Théorème de normalisation

Le théorème de normalisation s'énonce :

Tout terme se réduit à un terme normal. (Pour tout terme il y a une réduction finie).

En vertu du lemme 1, il a comme corollaire que tout terme fermé de type 0 se réduit à un numéral. L'intérêt de ce corollaire réside dans le fait qu'il implique élémentairement la cohérence de l'arithmétique (intuitionniste ou classique).
Il s'ensuit que le théorème de normalisation ne peut-être démontré dans l'arithmétique. Howard a montré qu'on peut l'établir dans une extension de l'arithmétique primitive récursive obtenue par addition du schéma d'induction jusqu'à l'ordinal ε_0 (premier point fixe de la fonction $\alpha \longmapsto \omega^\alpha$) Ce résultat montre que la preuve de la cohérence de l'arithmétique via l'interprétation de Gödel transgresse le point de vue finitiste de la même manière que la fameuse démonstration de Gentzen.

Nous présentons ici une démonstration d'un théorème plus fort que le théorème de normalisation.

Théorème de normalisation forte :

Toute réduction d'un terme est finie.

L'idée directrice de cette démonstration, due à Tait, est de concevoir les termes comme des notations pour les fonctionnelles calculables (récursives primitives) au sens de Gödel.

Cette interprétation est clarifiée dans les définitions qui suivent :

Définition

Un terme est absolument normalisable ssi toutes ses réductions sont finies.

Notion de calculabilité (Gödel-Tait)
La calculabilité des termes est définie par récurrence sur la complexité des types.

Si $f \models 0$, f est calculable ssi f est absolument normalisable.
Si $f \models \sigma \to \tau$, f est calculable ssi pour tout terme g de type σ, fg est calculable (notez que $fg \models \tau$).

Remarque
On peut remplacer la définition qui vient d'être donnée par la suivante :

Si $f \models \sigma_1, \ldots, \sigma_n \to 0$, alors f est calculable ssi pour tous termes calculables $g_1, \ldots, g_n$ ($g_i \models \sigma_i \quad (1 \leq i \leq n)$)
$f\, g_1 \ldots g_n$ est absolument normalisable.

Lemme 2
1. Toute variable est calculable.
2. Tout terme calculable est absolument normalisable.

On démontre simultanément les deux points par induction sur la complexité des types. Le cas du type 0 est immédiat.

1. Soient x une variable de type $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \rightarrow 0$ et $g_1, \ldots, g_n$ des termes calculables de types respectifs $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$. Par l'hypothèse de récurrence les termes g_i $(1 \leq i \leq n)$ sont absolument normalisables. Donc, $x\ g_1 \ldots g_n$ est absolument normalisable.

2. Soit f un terme calculable de type $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \rightarrow 0$. Par l'hypothèse de récurrence, les variables $x_1, \ldots, x_n$ de types respectifs $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sont calculables. Donc, $f\ x_1 \ldots x_n$ est absolument normalisable. Par conséquent f l'est également. □

On définit un concept de réduction "<u>critique</u>" (noté $\triangleright_c$) en postulant :

$(\lambda x\ f)\ g \triangleright_c f\ [g/x]$, si g est absolument normalisable lorsque x n'a pas d'occurrences libres dans f;

$R\ f\ g\ t \triangleright_c f$, si t et g sont absolument normalisables et $t \triangleright o$.

$R\ f\ g\ t \triangleright_c g\ t'(R f g t')$, si toute réduction de t comprend un terme de la forme St^* et $t \triangleright St'$.

Un terme <u>critique</u> est un terme de la forme indiquée ci-dessus à gauche de $\triangleright_c$ et vérifiant les conditions de la règle de réduction critique correspondante.

<u>Lemme 3</u>

Si r est un terme critique et si pour tout terme s tel que $r \triangleright_c s$, s est calculable, alors r est calculable.

<u>Démonstration</u>

On envisage chacune des trois réductions critiques.

1. $(\lambda x\ f)g \underset{c}{\triangleright} f\ [g/x]$.

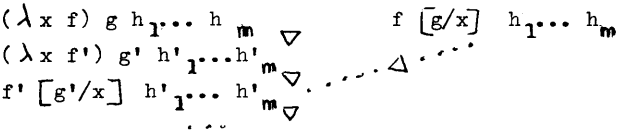
On sait que $f\ [g/x]$ est calculable et que g est absolument normalisable(par la condition imposée à la première réduction critique ou par le lemme 1)

Soient des termes calculables $h_1, \ldots, h_m$ tels que $(\lambda xf)\ g\ h_1 \ldots h_m$ soit de type 0 .Sachant que $f\ [g/x]\ h_1 \ldots h_m$ est calculable, il faut montrer que $(\lambda x\ f)\ g\ h_1 \ldots h_m$ l'est également.

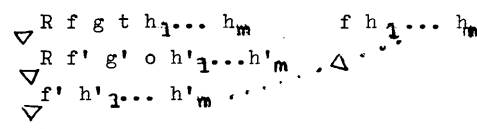
Les termes g, $h_1, \ldots h_m$ étant absolument normalisables (lemme 1) il est clair que toute réduction de $(\lambda xf)\ gh_1 \ldots h_m$ comprend deux termes successifs de la forme $(\lambda x\ f')\ g'\ h'_1 \ldots h'_m$, $f'[g'/x]\ h'_1 \ldots h'_m$, où $f \triangleright f'$, $g \triangleright g'$, $h_1 \triangleright h'_1, \ldots, h_m \triangleright h'_m$.

Par ailleurs $f\ [g/x]\ h_1 \ldots h_m \triangleright f'\ [g'/x]\ h'_1 \ldots h'_m$.
Ainsi toute réduction de $(\lambda\ x\ f)\ g\ h_1 \ldots h_m$ a un terme en commun avec une réduction de $f\ [g/x]\ h_1 \ldots h_m$. Mais cette dernière réduction est finie.

On peut illustrer cet argument de la façon suivante :



2. $R\ f\ g\ t \triangleright f$.
On sait que t et g sont absolument normalisables et que $t \triangleright 0$.
La démonstration, analogue à la précédente peut se représenter par le diagramme suivant :



3. r est de la forme R f g t où toute réduction de t comprend un terme de la forme St^* . Par hypothèse $g\ t^*$ $(R\ f\ g\ t^*)$ est calculable. Dès lors f, g et t sont absolument normalisables (lemme 2)

Soient $h_1 \ldots h_m$ des termes calculables tels que R f g t $h_1 \ldots h_m$ soit de type τ. Toute réduction de R f g t $h_1 \ldots h_m$ contient deux termes successifs de la forme : R f'g' (St') $h'_1 \ldots h'_m$, g' t' (R f'g't') $h'_1 \ldots h'_m$.
D'autre part, R f g t $\triangleright_c$ g t' (R f g t'), qui est calculable par hypothèse.
Il suffit donc, pour terminer, de remarquer que g t' (R f g t') $h_1 \ldots h_m \triangleright$ g't' (R f'g't') $h'_1 \ldots h'_m$.

Calculabilité sous substitution

Un terme f est calculable sous substitution ssi pour tous termes calculables $h_1, \ldots h_n$, f $[h_1/x_1 \ldots, h_n/x_n]$ est calculable.

Pour un terme fermé la calculabilité sous substitution coïncide donc avec la calculabilité.

Théorème

Tout terme est calculable sous substitution.

Démonstration

Par induction sur la structure des termes.

1. O est calculable.
2. S est calculable.
3. R_σ est calculable.

Soient f et g deux termes calculables de type σ et $o \to (\sigma \to \sigma)$ respectivement.

Un terme calculable de type o se réduit à un unique terme normal $S^k t^*$ où t^* n'est pas de la forme St'.

Nous montrons par induction sur k que, pour tout terme t calculable de type o, R f g t est calculable.

1. k = 0 On distingue deux cas.

11 $t^* \equiv 0$. Alors R f g t $\triangleright_c$ f, qui est calculable.
Donc R f g t est calculable (lemme 3).

12 $t^* \not\equiv 0$.

Soient $h_1, \ldots, h_m$ des termes calculables tels que R f g t $h_1 \ldots$ h_m soit de type o. Tout terme apparaissant dans une réduction de R f g t $h_1 \ldots h_m$ est de la forme R f'g't'h'$_1 \ldots$h'$_m$ où f $\triangleright$ f', g $\triangleright$ g', $h_1 \triangleright h'_1, \ldots h_m \triangleright h'_m$. Une telle réduction est nécessairement finie.

2. k = p + 1

Soit t' un terme tel que t $\triangleright$ St'. Alors R f g t $\triangleright_c$ g t'(R f g t') qui est calculable par l'hypothèse d' induction (t' $\triangleright$ S^p t^*).
Donc, par le lemme 4, R f g t est calculable.

4. Toute variable est calculable sous substitution.

5. Si f est calculable sous substitution, alors λ x f l'est aussi. En effet, si $h_1, \ldots, h_m$ g sont calculables, alors λx f [h_1/x_1, $\ldots h_m/x_m$] g $\triangleright_c$ f[g/x, $h_1/x_1, \ldots h_m/x_m$]qui est calculable, par hypothèse. On applique alors le lemme 3.

6. Si f et g sont calculables sous substitution, alors il en va de même pour f g.

Corollaires

1. Tout terme est calculable.
2. Tout terme est absolument normalisable.
3. Tout terme fermé de type o se réduit à un numéral.

6. Annexe

Nous relions ici l'exposé précédent à "L'Interprétation Dialectica" de T. Lucas.

On montre facilement que pour toute fonction primitive récursive φ de $\mathbb{N}^n$ vers $\mathbb{N}$ il existe un terme $\overline{\varphi}$ de T ayant le type $0, \ldots, 0 \to 0$ tel que pour toute suite de naturels $k_1, \ldots, k_n$, $\overline{\varphi}\,\overline{k_1}\ldots\overline{k_n} \rhd \overline{\varphi(k_1,\ldots k_n)}$.

En particulier, considérons les définitions suivantes :

$$P =_{déf} R0\,(\lambda xy.x) \quad ; \quad \overline{\wedge} =_{déf} \lambda xy.Rx\,(\lambda z\,S)y \; ;$$

$$\overline{\dot{-}} =_{déf} \lambda xy.Rx\,(\lambda z\,P)y \quad ; \quad E =_{déf} \lambda xy.\,\overline{\wedge}\,(\overline{\dot{-}}xy)(\overline{\dot{-}}yx);$$

$$\overline{\neg} =_{déf} \lambda x\,\overline{\dot{-}}(S0)x \quad ; \quad \overline{\rightarrow} =_{déf} \lambda xy.\,\overline{\neg}\,(\overline{\wedge}x\,(\overline{\neg}y))$$

$$\overline{\vee} =_{déf} \overline{\neg}\,(\overline{\wedge}\,(\overline{\neg}x)(\overline{\neg}y)) .$$

On remarquera que

$P\,0 \rhd 0$; $P\,\overline{n+1} \rhd \overline{n}$; $\overline{\wedge}\,\overline{n}\,\overline{m} \rhd \overline{n+m}$;

$\overline{\dot{-}}\,\overline{n}\,\overline{m} \rhd \overline{n \dot{-} m}$.

Dès lors, si f et g sont des termes clos de type o (se réduisant à un numéral, par le théorème de normalisation), on a :

$E\,f\,g \rhd 0$ ssi f et g se réduisent au même numéral;
$\overline{\wedge}\,f\,g \rhd 0$ ssi $f \rhd 0$ et $g \rhd 0$;
$\overline{\neg}\,f \rhd 0$ ssi $f \not\rhd 0$;
$\overline{\rightarrow}\,f\,g \rhd 0$ ssi $f \not\rhd 0$ ou $g \rhd 0$;
$\overline{\vee}\,f\,g \rhd 0$ ssi $f \rhd 0$ ou $g \rhd 0$.

On peut dès lors représenter toute 0-formule $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ de LF par un terme $\overline{\psi}$ de telle sorte que pour tous termes fermés $t_1, \ldots, t_n$ de type 0 :

$$\vDash \psi(t_1, \ldots, t_n) \quad \text{ssi} \quad \overline{\psi}\,\overline{t_1}\ldots\overline{t_n} \rhd 0 .$$

Appelons "terme général" toute expression métalinguistique de la forme $\exists x_1 \ldots \exists x_n \; \forall y_1, \ldots \; \forall y_m \; f(\vec{z})$ où f est un terme de T de type 0 et $\vec{z}$ indique les occurrences libres de variables autres que $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_m$.

L'interprétation Dialectica peut-être considérée comme associant à chaque formule $\varphi(\vec{z})$ de l'arithmétique intuitionniste un terme général $\exists \vec{x} \; \forall \vec{y} \; \varphi(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, de sorte que

si H A $\vdash \varphi(\vec{z})$, alors on peut construire une suite $\vec{f}$ $(f_1,\ldots,f_n)$ de termes de T telle que pour toutes les suites $\vec{g}$ et $\vec{h}$ de termes de T $\varphi(\vec{f}\,\vec{h}, \vec{g}, \vec{h}) \rhd 0$ ($\vec{f}\,\vec{h}$ est la suite $f_1\vec{h}$,...$f_n\vec{h}$).

Cela montre la consistance de H A (et aussi de PA, via l'interprétation de l'arithmétique classique dans l'intuitionniste) puisque HA $\vdash 0 = 1$ entraînerait E 0(S0) $\rhd$ 0, ce qui est faux car E 0 (S0) $\rhd$ S0.

REMARQUES SUR LA PHILOSOPHIE DE BROUWER

Richard Leonard

Dans un livre récent, Michaël Dummett insiste avec force sur l'importance que revêt à ses yeux la philosophie intuitionniste des mathématiques. Il affirme très raisonnablement que la pratique mathématique de l'intuitionnisme est étroitement liée à une philosophie des mathématiques qui la motive. Moins raisonnablement, il oppose d'une manière abstraite et simplifiée la philosophie intuitionniste à deux autres grands courants de la philosophie des mathématiques - celles dérivant des travaux de Frege et de Hilbert - en vue d'établir sa suprématie totale. D'après Dummett, étant donné les échecs de construction d'un système logique englobant les mathématiques et d'une preuve finitiste de cohérence, la philosophie intuitionniste est "le seul système unifié de l'ancienne époque, quand plusieurs philosophies mathématiques rivales étaient en conflit, qui a survécu intact..." (Dummett, EI, p. 1). Encore moins raisonnablement cette vaste affirmation, qui déforme l'idée même d'une philosophie des mathématiques en la liant trop rigidement à la réalisation d'un projet mathématique précis, semble pousser Dummett à lier malencontreusement la valeur des mathématiques intuitionnistes à la victoire de la philosophie intuitionniste sur les autres philosophies rivales. "Si jamais il (l'intuitionnisme perd cette bataille, la pratique même des mathématiques intuitionnistes et l'étude métamathématique des systèmes intuitionnistes toutes les deux, deviendront une perte de temps" (Dummett, EI, p. viiis). Voilà qui est étonnant : l'apport constructiviste en mathématique dû aux mathématiciens et logiciens intuitionnistes devrait alors être rejeté si jamais une philosophie réaliste des mathématiques s'avérait plus juste que celle des intuitionnistes. Mais est-ce que l'on n'a pas à faire ici à une vue de l'esprit ? Il existe des affirmations qui en surface, pour ainsi dire, sont vraies, mais en profondeur sont fausses. Elles annoncent une vérité partielle qui trompe puisqu'elle ne dit pas assez. Il en va ainsi des affirmations de Dummett telles celles-ci : "... les mathématiques intuitionnistes sont vaines en dehors de la motivation philosophique qui

les sous-tend... Les mathématiques intuitionnistes ne peuvent être justifiées par leur seul intérêt mathématique "(Dummett, EI, p. viii).

Au contraire, on peut penser que l'intérêt principal de l'intuitionnisme est en quelque sorte mathématique. Je dis en quelque sorte car il est évident qu'il y a un rapport organique entre la philosophie des mathématiques et la pratique mathématique. Mais ce rapport n'est ni forcément assumé consciemment par les mathématiciens, ni transparent. La philosophie intuitionniste des mathématiques n'est pas constituée en un système parfaitement défini et statique. Elle est composée d'un nombre d'éléments fondamentaux plus ou moins harmonieusement intégrés en un tout. Dès lors il faut examiner le rapport entre la pratique mathématique et chacun des éléments, et non pas d'un tout mal défini et indifférencié, d'une philosophie évolutive. On ne peut pas supposer sans démonstration que la pratique mathématique intuitionniste dérive d'une manière également substantielle de chaque élément qui ait pu se présenter à un moment ou l'autre. Il se peut que les éléments factices s'accolent à d'autres éléments réels et qu'il faille faire la part des choses. Mais qu'est-ce exactement que la philosophie intuitionniste dont il est ici question ? Cela se discute sans doute, mais ce qui est indiscutable c'est que le fondateur de cette philosophie (et sa pratique mathématique) est L.E.J. Brouwer. C'est avant tout sa philosophie qu'il faut voir, et quand on parle d'un système unifié de l'époque de grandes écoles de la philosophie des mathématiques, c'est de son système que l'on parle.

Les prémisses

En 1905 à l'âge de 24 ans Brouwer rédigea un texte intitulé "Life, Art And Mysticism", qui éclaire bien les prémisses de sa philosophie. A l'origine l'être humain vivait isolé, insouciant d'autrui et du monde qui s'opposaient tous les deux à lui. Intervient la chute ; les contacts avec les autres ; la tristesse et la misère. Il faut alors, dit Brouwer, opérer un retour au Soi, seule protection possible contre "ce triste monde" que le Soi "libre et illuminé" reconnaît, du reste, comme étant "une réalité

qui n'est plus complètement distincte du Soi, mais dirigée au dedans du Soi et avec le Soi" (LAM, p. 2). Le retour au Soi offre le grand avantage de tout maîtriser, car il s'agit après tout de soi-même. "Ayant contemplé la tristesse de ce monde, regarde en toi-même. En toi il y a conscience... le contenu de ta conscience... est en grande partie déterminé par tes humeurs et celles-ci sont en ton pouvoir" (LAM, p. 1s).

La chute de l'être humain fut causée par l'Intellect. L'Intellect et sa production, le savoir rationnel, nous jouent le mauvais tour de nous distancer de nous-mêmes. "Dans la science tout ce qui est perçu est placé en dehors du Soi, dans un monde de perception indépendant du Soi ; le lien avec le Soi, sa seule source et guide, est rompu'. Ensuite elle construit un substratum mathématico-logique qui est complètement étranger à la vie, une illusion, qui agit dans la vie comme une tour de Babel avec sa confusion de langues" (LAM, p. 7). Langage et logique, véhicules du savoir rationnel, ne méritent pas notre confiance. La communication par langage est impossible, la logique ne peut nous servir de guide. N'ayant de réalité que par rapport à la vie et l'activité du Soi, coupés de celui-ci ils deviennent rigides et inadéquats : "Le langage en soi n'a pas de signification ... La logique est la vie du cerveau humain ; elle peut accompagner la vie en dehors de celui-ci, elle ne peut jamais servir de guide en vertu de ses seuls pouvoirs" (LAM, p. 6).

Il ne faut pas avoir d'illusion, nous dit Brouwer, sur les possibilités de changer le monde vers un mieux. La science ou d'autres formes de savoir plus ou moins rationnels comme l'art et la religion peuvent nous renseigner sur ce que Brouwer appelle la Vérité Immanente, à savoir, l'impasse dans laquelle le triste monde se trouve : "... la bêtise et l'injustice sont essentielles à la société humaine; en effet, si la société humaine était meilleure, était gouvernée par l'amour et la fraternité, il n'y aurait pas de raison à son existence, elle n'existerait simplement pas ...

Ceux qui sont libres voient leur prochain comme une hallucination... Non, le monde ne peut être transformé de manière à apporter le bien à l'homme"(LAM, p. 9). La Vérité Immanente, accessible par le savoir rationnel, peut ouvrir nos yeux à la possibilité d'une Vérité plus élevée mais elle ne peut nous libérer des "chaînes irreligieuses (sinful) de la science, de la foi dans la réalité et de la pensée logique" (LAM, p. 5).

Non, il n'y a qu'une solution, c'est de quitter le monde et d'opérer le repli en Soi. Une vérité plus élevée que la Vérité Immanente peut nous faire entrevoir notre salut. Il s'agit de la Vérité Transcendante qui est définie comme "l'Auto-réflexion éternellement émanant et se résorbant" (LAM. p. 8). La Vérité Transcendante nous place au plan de la sagesse qui efface la distance entre le Soi et le non-Soi et qui procure la Vie Libérée. La sagesse est au-delà de la science et de la logique. Elle seule est religieuse, tout le reste, y compris la religion (entendez la théologie spéculative) , est irreligieuse (sinful).

Dans ces réflexions sur la vie, l'art et le mysticisme, on voit se dessiner plus ou moins clairement les trois traits fondamentaux de la philosophie intuitionniste fondée par Brouwer : 1) l'idéalisme subjectif du type solipsiste, 2) le reductionnisme positivistique et 3) le constructivisme. Le monde en dehors de mon ego est méchant et aggressif; il m'échappe. Le Soi est une forteresse isolée et cela vaut mieux car il contrôle alors tout. Dès lors il importe de réduire à moi ce qui est en dehors de moi, le monde, l'autrui, le langage, la logique, la science. Le Soi-forteresse ne dépend de et n'est responsable devant personne. La société est injuste ; mes semblables sont des hallucinations. Tout, monde matériel et autrui, doit être ramené à moi. Ce que je construis en moi, je le contrôle immédiatement et totalement ; il est absolument sûr. Ce qui va au-delà de mes constructions ne l'est plus. "Les manifestations du Soi dans les limites et formes particulières de cette vie sont des irruptions de la Vérité" (LAM, p. 7). Moi je crée, je contrôle ; le reste n'a plus aucune prise sur moi.

Philosophie générale

Si maintenant on demande à quoi cela peut servir de se donner beaucoup de mal pour développer le savoir rationnel , comme l'a fait Brouwer pour les mathématiques, la réponse n'est pas claire. Pourquoi ne pas se consacrer uniquement à la sagesse si "la pensée scientifique" n'est rien d'autre qu'une fixation de la volonté à l'intérieur des limites de la tête humaine, une vérité scientifique (n'est) rien d'autre qu'un engouement, un désir limité à l'esprit humain"(LAM, p. 4). Peut-être en partie parce que si l'on est condamné à passer par ce triste monde autant vaut faire ce qui nous rapproche le plus de la Vérité Transcendante et de la Vie Libérée. Sans doute, Brouwer, ne voyait-il pas la pratique de la Vérité Immanente comme une propédeutique nécessaire à l'étape suprême. Peut-être aussi partiellement parce que, en bonne logique Schopenhauerienne, l'Intellect étant néfaste, le Soi est conçu comme Volonté. En mathématiques du moins, discipline à laquelle Brouwer se consacra, la Volonté crée librement par des constructions mentales le savoir rationnel qui est ainsi dominé par la Volonté. Il est possible qu'aux yeux de Brouwer, c'est donc cette domination de la Volonté qui rend les mathématiques dignes, avant toute autre activité consciente, de notre attention. En tout cas il place les mathématiques au centre de toute pensée comme l'unique source du savoir a priori et donc libéré du poids déformant du monde pragmatique.

Dans son texte de 1905 Brouwer avait écrit : "A présent tu reconnaîtras ta Libre Volonté, dans la mesure où elle est libre de se retirer du monde de la causalité et de rester ensuite libre, obtenant seulement alors une Direction définie qu'elle suivra librement et d'une manière réversible (LAM, p. 2). Plus tard dans une conférence donnée en 1928 il insistera sur le rôle primordial que joue "la Volonté à la Vie" dans le développement de la Conscience (MWS, p. 417). Dans ce texte il semble indiquer la dépendance de toute activité rationnelle de la Volonté, car il en fait dépendre les "principales fonctions de l'activité des

hommes", à savoir, les mathématiques, la science, et le langage. Selon lui ces trois activités principales des hommes dérivent de trois formes opérationnelles de cette Volonté : l'attention mathématique, l'abstraction mathématique et l'imposition de la volonté par la parole. On le voit, l'activité humaine est conçue comme essentiellement consciente et subjuguée à la Volonté. La philosophie idéaliste de Brouwer est axée sur le Soi conscient, dont l'attribut principal semble être la Volonté, et son développement.

Dans une communication de 1948 Brouwer donna une présentation globale de sa philosophie générale. Cette communication, intitulée "Consciousness, Philosophy and Mathematics", explique l'ontogénèse de la Conscience qui, d'après Brouwer consiste en trois phases ou niveaux de développement : la phase naïve, la phase causale et la phase sociale. Cette évolution ontologique mène la Conscience de sa "demeure la plus profonde" (deepest home), et pourrait-on dire la plus isolée, au "monde extérieur" de coopération et d'entendement mutuel entre "nous". On doit cependant noter qu'à peine Brouwer a-t-il annoncé ce voyage de la Conscience que, fidèle à son attitude solipsistique, l'irréalité du terme de ce voyage est rappelée : "Cette explication (des phases de la Conscience) n'implique pas un entendement mutuel et pourrait d'un certain point de vue rester un monologue" (CPM, p. 480).

Avant que ne s'enclenche le processus du développement, la Conscience, comfortablement logée dans sa demeure profonde, est dans un état tranquille de passivité en dehors de toute attitude d'attention. Elle "semble osciller lentement, sans volonté et d'une manière réversible entre immobilité et sensation" (ibid). Il semble que cet état de grâce et de tranquilité isolée est la seule attitude vraiment religieuse.

La Conscience quitte son sein ontologique en adoptant une attitude d'attention vis-à-vis des sensations qui lui viennent.

Dans le monde-rêve du départ surgit un monde pragmatique, pour employer une terminologie utilisée ailleurs par Brouwer (DF), au moyen d'un phénomène de discernement. Ce phénomène initial est temporel, car il s'agit de la fixation de l'attention sur une sensation qui passe et qui cède la place à une autre de telle manière que la première est retenue par la Conscience comme passée. C'est grâce à un tel "déplacement du temps"(move of time) que la Conscience devient esprit, que la phase naïve est engagée. Du coup l'"égoïcité", c'est-à-dire, la nature subjective de l'objet est perdue, et ce dernier devient étranger à moi et je peux dès lors le désirer ou l'appréhender. Ce phénomène de discernement peut aussi être un phénomène de "deux-ité" (two-ity) réitérable à volonté qui est à la base de la pensée mathématique et par conséquent de toute pensée scientifique. La réitération conduit à l'idée de nombre, si elle ne tient aucun compte qualitatif des sensations, et sinon à l'idée de séquence ou complexe temporel de sensations, c'est-à-dire, des séquences causales et les objets.

La phase causale est le fait de l'attention causale qui s'exerce sur les séquences dégagées de la "pluralité hétéroclite" des sensations. On identifie une séquence des sensations avec une autre faite de sensations semblables et dans même ordre temporel ; ce sont des complexes itératifs de sensations. "Un complexe itératif de sensations, dont les éléments ont un ordre invariable de succession dans le temps, tandis que si un de ses éléments se produit, tout les éléments subséquents sont censés se produire également dans le bon ordre, est appelé une séquence causale" (ibid). Des objets, au sens normal du mot, sont réduit en fait aux complexes de sensations causées par ces objets. Plus précisément les objets sont des séquences causales qui ont la propriété suivante : l'ordre temporel de sensations est permutable. Parmi les objets composant le monde extérieur du sujet il y a mon corps et les autres corps semblables, à savoir, des individus.

C'est par le biais de l'attention causale que nous intervenons dans le monde extérieur. Mon attention étant fixée sur une séquence causale, il se peut que je désire un élément qui ne

m'est pas conativement disponible dans l'immédiat; alors j'effectue la production d'un élément antérieur dans la séquence qui m'est conativement disponible, et qui sera suivi plus tard par l'élément désiré. Cela s'appelle l'acte rusé (cunning act), et grâce à lui je crée "une sphère causale d'influence que d'un côté... (je) protège par une activité destructive de choses qui menacent des séquences causales utiles, et de l'autre côté...(j')étends par une activité de construction de choses capables de nouvelles séquences causales utiles" (CPM, p. 481).

Il est évident que dans ma sphère causale d'influence se trouvent des individus et que par conséquent j'agis conativement sur eux. Dès lors s'installe une sorte de coopération entre individus, et la Conscience passe à la phase sociale où les principales activités sont le langage et la science. La Conscience passe d'actes causals individuels aux systèmes de pensée causals qui sous-tendent les actes coopératifs causals. En premier lieu il s'agit de pensée scientifique qui "d'une manière économe et efficace, catalogue les vastes groupes de séquences causales coopératives" (CPM, p. 482). La pensée scientifique est avant tout basée sur les mathématiques qui sont essentiellement une manière de généraliser et universaliser librement dans l'abstrait des groupes de séquences causales observées et donc forcément très limitées. Il y a donc savoir, mais c'est un savoir solitaire et en fait incommunicable. Car s'il y a une phase sociale de la Conscience et du langage, cela se manifeste uniquement au niveau de l'interaction de différentes activités conatives des individus : une rencontre plus ou moins harmonieuse des volontés brutes. L'organisation coopérative d'une groupe d'individus consiste en un "treillis métallique de transmission de volontés" (wire-netting of will-transmission) (ibid). Brouwer ne reconnaît pas l'existence d'une pluralité de sujets. Il n'y a pas d'autres Consciences, il n'y a pas non plus échange de pensée. "En dehors de l'âme, tout exposé sur le sens et l'essence de la vie est un monologue, et toute discussion sur l'esprit pluralifié (pluralified) est un jeu de dialectique dans l'arène de l'hypothèse collective d'un super-sujet collectif apercevant un monde objectif qui existe indépendamment des soi-disant sujets humains..."(CPM, p. 485).

Ayant esquissé le développement de la Conscience, Brouwer se demande "si et où, pendant et après cet exode de la Conscience, la beauté, l'entendement mutuel, la sagesse et la vérité peuvent être trouvés" (CPM, p. 483). Nous avons déjà vu suffisament pour savoir qu'il n'y a pas beaucoup d'espoir dans ces domaines. L'entendement mutuel est exclu, la vérité est éclatée, et la sagesse se trouve au bout d'un chemin difficile de retraite en Soi. "Dans la pensée et l'action causales la beauté ne peut guère être trouvée"(ibid), même si un aspect ludique peut s'y immiscer et nous libérer momentanément du désir et de la crainte. Plus important, il y a "la beauté constructionnelle". Ce n'est que dans les mathématiques qu'elle fleurit abondamment... l'intuition de base des mathématiques est laissée à un libre épanouissement...(qui) n'est pas enchaîné au monde extérieur, et par là à la finitude et à la responsabilité; par conséquent ses harmonies introspectives peuvent atteindre n'importe quel degré de richesse et de clarté"(CPM, p. 484).

La philosophie de Brouwer ne recèle rien de profondément original. Elle est basée, comme tout bon idéalisme subjectif, sur une conception empiriste de la perception qui remonte à Locke et à Berkeley. Le sujet percevant est assailli d'une foule désordonnée et désunie de sensations, une "pluralité hétéroclite" comme disait Brouwer, à partir de laquelle il faut construire la réalité. Les parties disparates de ce monde perceptuel sont immédiatement données au sujet et par conséquent libres d'incertitude. Il les rassemble pour créer un monde tout en se résignant à quelques contraintes mal définies. Car, bien que cela soit peu clair, la Conscience, la Volonté, échappe partiellement au sujet. Le monde est triste et méchant. Il faut "détruire" certains éléments des séquences causales; il faut lutter pour survivre. Le sujet ne peut se libérer complètement de toute dépendance et de toute responsabilité dans ce triste monde qu'en s'isolant solipsistiquement dans ses propres constructions : "... il se peut que la sagesse nous invite à nous tendre patiemment vers notre libération réversible de la participation dans le commerce coopératif et des rapports présupposant une pluralité d'esprit"(CPM,

p. 487). La science est purement pragmatique; elle est basée sur une conception Huméenne de la causalité ; elle n'explique pas, elle prédit. Comme dit Heyting elle est "une arme dans la lutte pour la vie"(Heyting , 8, p. 310). Le langage sert principalement aux monologues. Seules les mathématiques et dans un moindre degré, la logique échappent quelque peu au miasme du monde pragmatique. Elles ont l'aspect des jeux poursuivis en dehors de la crainte, la contrainte, le désir et la vocation. Elle nous ramène vers la demeure profonde de la Conscience et par là nous rapprochent de la sagesse. La science est une arme dans la lutte pour la vie; les mathématiques sont un refuge menant au salut.

Philosophie des mathématiques

En 1905, nous l'avons vu, Brouwer publia un texte dans lequel apparaissent les prémisses de sa philosophie générale. En 1907, il publia sa thèse doctorale sur les fondements des mathématiques dans laquelle apparaît la première formulation de sa philosophie des mathématiques. Je voudrais d'abord attirer l'attention sur le premier chapitre, intitulé "The Construction of Mathematics". Dans ce chapitre, Brouwer esquisse la construction des entiers, des nombres négatifs, des rationels des irrationnels et la géométrie à partir des "intuitions de base" pour arriver à une conclusion intitulée "Mathematics can deal with no other matter than that which it has itself constructed"(FM, p. 51). Voici comment Brouwer conclut sa (re)construction des mathématiques : "Dans les pages précédentes on a montré comment les parties fondamentales des mathématiques peuvent être construites à partir des unités de perception par la simple juxtaposition, la construction des séquences du type ω, ou η, ou en construisant des continus, tandis qu'à chaque étape du processus des systèmes complets déjà construits peuvent être employés comme des nouvelles unités. Dans le troisième chapitre, il sera expliqué pourquoi aucune mathématique ne peut exister qui n'a pas été construite intuitivement de cette manière; pourquoi par conséquent la seule fondation possible des mathématiques doit être recherchée dans une telle construction sous obligation d'observer attentivement quelles constructions sont admises par l'intuition et quelles ne le sont pas; et pourquoi toute autre tentative de fondement est vouée à l'échec"(FM, p. 51 s).

L'essentiel de la philosophie intuitionniste est là. Un objet mathématique n'existe que dans la mesure où l'on l'a construit; on ne peut par conséquent l'obtenir par l'absurde ou d'autres méthodes purement logiques. On part de l'absolument certain : mes perceptions intuitives immédiates et transparentes. Chaque étape est soumise à la surveillance, immédiate et transparente elle aussi, de mon intuition. Je contrôle directement, intuitivement tout. Comme l'a dit Heyting"... une conscience scientifique tranquille suffit..." (i, p. 6). Les bonnes mathématiques sont fondées en les faisant correctement. Car oui, il y a des mauvaises mathématiques, à savoir, celles où s'éloignant de l'intuition on se laisse guider à travers le vide intellectuel par des principes logiques relatifs pour arriver à une des contradictions mathématiques bien connues. On ne peut rien trouver de plus fondamental à la pensée scientifique que les mathématiques. Plus ou moins explicitement les écrits de Brouwer font dériver tout, et très explicitement la logique, des mathématiques. On ne peut les fonder sur autre chose; elles fondent tout.

Ce noyau de la philosophie intuitionniste laisse ouvert bien entendu, beaucoup de questions importantes. Etant très schématique l'on ne sait pas encore quelles perceptions de base peuvent être acceptées ni exactement quels principes de constructions sont admissibles. Pour voir avec plus de précision les principes intuitionistes de Brouwer regardons un écrit tardif, "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism", publié en 1952.

Au départ les mathématiques étaient observationnelles. On s'efforçait d'observer les propriétés du temps et de l'espace, supposées immuables et indépendantes du langage et de la perception, en érigeant en axiomes les propriétés perçues comme absolument invariables. De ces axiomes on déduisait d'autres propriétés en faisant des raisonnements"... guidés par la perception mais en suivant et en employant linguistiquement les principes de la logique classique" (HBM, p. 508). Cette période observationnelle a duré jusqu'au 19° siècle, quand due à la découverte des géométries non-euclidiennes, l'étude de l'espace perdait sa place à côté de celle du temps pour

devenir une mathématique appliquée. Le succès que rencontrait à ce moment-là la méthode logico-linguistique en développant des systèmes géométriques non-observationnels amenait à des tentatives de lier étroitement logique et mathématiques en dehors de toute expérience ou perception mathématique. Il s'agit de systèmes formellement axiomatisés développés par des gens comme Dedekind, Cantor, Peano, Hilbert, Frege, Russell et Zermelo. Parallèlement certains mathématiciens pré-intuitionnistes (Poincaré, Borel, Lebesque) cherchaient à maintenir "une attitude observationnelle modifiée" (HBPM, p. 509). Ils n'auraient pas cherché à fonder intuitivement le continu, mais l'auraient fait dépendre de la logique et du langage.

Cela étant d'après Brouwer l'évolution des mathématiques, l'intuitionnisme intervient pour clarifier et pour résoudre les problèmes inhérents aux mathématiques à ce stade de leur développement. Les mathématiques sont allées trop loin dans leur dépendance de la logique et du langage; elles ont outrepassé les limites de l'expérience intuitive. Deux actes de la Conscience intuitionniste vont remettre les choses en place. Le premier acte de l'intuitionnisme "sépare complètement les mathématiques du langage mathématique, et en particulier des phénomènes du langage décrits par la logique théorique, et reconnaît que les mathématiques intuitionnistes sont une activité de l'esprit essentiellement alinguistique ayant son origine dans la perception d'un déplacement du temps, c'est-à-dire, la désagrégation d'un moment vécu en deux choses distinctes, l'une cédant la place à l'autre mais tout en étant retenue par la mémoire. Si l'on dépouille cette deux-ité de toute qualité, il restera la forme vide du substratum commune à toute deux-ité. C'est ce substratum commun cette forme vide, qui est l'intuition de base des mathématiques" (HBPM, p. 509s).

Nous avons ici les pierres fondamentales de l'édifice mathématique; on voudrait tout construire avec elles. Du concept de deux-ité nous passons directement aux concepts d'entité, d'encore-une-fois et d'ainsi-de-suite. Cela nous suffit pour ce que Brouwer appelle "un déroulement sans limite", c'est-à-dire, l'engendrement par réitération d'une séquence dénombrablement infinie du type d' ordre ω.

Les nombres naturels, l'arithmétique, nous sont donnés plus ou moins directement par l'intuition. Les mathématiciens classiques pensent en termes d'axiomes et de déductions logiques, les intuitionnistes en termes d'intuition, d'évidence et d'inspection introspective des propriétés dont sont dotées les nombres. Pour les intuitionnistes le principe d'induction n'est pas un axiome mais une propriété constructible des naturels. Rien n'est plus certain, immédiat et contrôlable que l'arithmétique. Quand il faut aller au-delà du fini nous introduisons une loi s'appuyant sur le caractère inductif des naturels, pour engendrer des séquences infinies. Cette légalité nous procure une certitude aussi absolue que dans le cas de constructions finies.

On conclut donc que ce premier acte d'intuitionnisme suffit pour la base des mathématiques : "une fois en possession des méthodes fondamentales de l'induction et de la récursion, nous ne recontrons aucune difficulté sérieuse dans l'arithmétique des nombres naturels, pas plus d'ailleurs, que dans celle des entiers ou même des rationels" (Heyting, I, p. 14). Mais le véritable problème posé par le développement historique des mathématiques, surtout aux 18° et 19° siècles, c'est le passage de "la nature discrète, qualitative et individuelle du nombre dans le domaine 'combinatorial' du dénombrement (arithmétique) " à "la nature continue , quantitative et homogène des points de l'espace (ou du temps) dans le domaine 'analytique' de la mesure (géométrique)" (Fraenkel and Bar-Hillel, FST, p. 212).

Dans la thèse de 1907 Brouwer, comme les soi-disant pré-intuitionnistes qu'il critiqua plus tard, accepte le continu comme intuitionnistement valable : "... le <u>continu en tant qu'un tout</u> nous était donné par l'intuition; une construction pour lui, une action qui créerait à partir de l'intuition mathématique (de base) 'tous' ses points en tant qu'individus, est inconcevable et impossible. L'intuition mathématique (de base) est incapable de créer autre chose que des ensembles dénombrables d'individus. Mais elle est capable, après avoir créé une échelle du type d'ordre η, de superposer sur celle-ci un <u>continu en tant qu'un tout</u>, qui ultérieurement peut être inversement

considéré comme un continu mesurable, et qui est la matrice des points sur l'échelle"(FM, p. 45). Brouwer semble avoir délaissé assez vite cette conception "pré-intuitionniste", car très vite tout concept de l'infini comme un tout actuel, complété, étendu ou existentiel est mis au ban. Ce genre de conception essentielle aux théories de Cantor est remplacé par une conception purement intuitionniste de l'infini comme étant potentiel, en devenir ou constructif. Il ne peut être question de manipuler, par exemple, la totalité des naturels comme une entité close sur pied d'égalité avec ses membres pris individuellement.

Donc, il ne peut être question d'accepter un axiome de complétude; cela revient à abandonner l'attitude constructiviste. Mais, il ne peut être non plus question d'une théorie comme disons celle de la théorie ramifiée des types qui rejette toute quantification portant sur plus d'un sous-ensemble dénombrable des réels à la fois. Car"... un système toujours inachevé et toujours dénombrable de "nombres réels" est incapable de remplir les fonctions mathématiques du continu, pour la raison simple qu'il ne peut jamais avoir une mesure positivement différente de zéro"(HBPM, p. 509). Ni non-constructive, ni trop constructive; ce qu'il fallait c'est une possibilité de quantification portant sur toutes les séquences de naturels ou sur toutes les séquences satisfaisant une certaine condition.

C'est le second acte de l'intuitionisme qui nous place sur la voie d'une théorie mathématique de l'infini qui est juste. C'est un acte "..qui reconnaît la possibilité de la génération d'entités mathématiques nouvelles : d'abord dans la forme de séquences procédant infiniment p_1, p_2, ..., dont les termes sont choisis plus ou moins librement parmi les entités mathématiques préalablement acquises de telle sorte que la liberté de choix qui joue éventuellement pour le premier élément p_1 pourrait être sujette à une restriction durable à partir d'un p_r ultérieur, et encore à des restrictions durables plus contraignantes ou même l'abolition à d'autres p_r ultérieurs, tandis que l'on peut faire dépendre toutes ces interventions restrictives, ainsi que les choix des p_r eux-mêmes, des expé-

riencesfutures possibles du sujet créateur; deuxièmement dans la forme d'espèces mathématiques, c'est-à-dire, des propriétés attribuables aux entités mathématiques préalablement acquises, et satisfaisant la condition que si elles s'appliquent à une certaine entité mathématique, elles s'appliquent également à toute entité mathématique définie comme égale à celle-ci : les relations d'égalité devant être symétriques, réflexives et transitives; les entités mathématiques préalablement acquises auxquelles la propriété s'applique sont appelées les éléments de l'espèce" (HBPM, p.511). Cet acte crée la possibilité de construction du continu intuitionniste comme l'espèce des séquences convergentes infinies de rationnels procédant plus ou moins librement. Et Brouwer croit tenir là, avec ce qu'apporte le premier acte, la totalité des bonnes mathématiques.

On notera sans surprise que le constructivisme de Brouwer est bien ancré dans sa philosophie idéaliste. C'est dans la phase sociale du développement de la Conscience que naissent les mathématiques en vertu de l'intuition pure (i.e. toute considération qualitative des sensations mise à part) du temps : "Le phénomène de base... est l'intuition simple du temps, dans laquelle la répétition est possible dans la forme "chose dans le temps et encore chose"... (FM, p. 53). Comme pour Kant, pour Brouwer les propositions mathématiques sont des propositions a priori synthétiques dérivées des constructions de l'intuition. Mais à la différence de Kant, Brouwer restreint l'a priori aux intuitions temporelles puisque, d'après lui, seul est a priori ce qui est à la fois commun à toutes les mathématiques et suffisant pour construire toutes les mathématiques. Or il y a plusieurs géométries, mais une seule science des nombres qui peut servir à tout construire. Donc, "Le seul élément a priori en science est le temps" (FM, p. 61).

Mais qui parle de l'intuition temporelle parle d'une activité de la Conscience. Les objets mathématiques ne sont dès lors pas des objets séparés de la Conscience et indépendants d'elle qui doivent être découverts. Comme l'a dit Heyting, "Ce qui caractérise la pensée mathématique c'est qu'elle n'apporte pas de vérité sur le monde extérieur, mais s'occupe seulement des constructions mentales" (I, p. 8s).

Ou encore : "Toute affirmation mathématique peut être exprimée dans la forme : 'J'ai effectué la construction A dans mon esprit'" (Heyting, I, p. 19). Les objets mathématiques se trouvent dans la Conscience et, pour Brouwer au moins, nulle part ailleurs. Car comme on l'a vu Brouwer adopte une philosophie solipsiste de telle sorte que le sujet créateur mathématicien se suffit à lui-même.

Le solipsisme est une attitude philosophique cohérente, et donc possible, qu'accepte qui veut. Cependant il faut dire que peu de monde l'accepte. D'autre part, étant donné son extrême invraisemblance, pour ne pas dire plus, on pourrait estimer refutée par l'absurde une philosophie qui mène jusque là. Mais comme on sait une théorie, qui est presque toujours faite de plusieurs principes, n'est pas forcément refutée in toto par l'échec d'un de ses principes. Laissons donc le côté spécifiquement solipsiste de la philosophie idéaliste de Brouwer pour regarder le côté subjectif.

L'idéalisme subjectif de Brouwer veut que le mathématicien construise dans son esprit les objets mathématiques. Mais que devient alors la valeur intersubjective des mathématiques qui semble tout de même irrécusable ? Si je construis dans mon esprit un objet mathématique dont je découvre certaines propriétés, est-ce que l'objet et ses propriétés n'auraient pas existé avant, est-ce qu'ils n'existeraient plus quand je n'y pense plus, est-ce que l'on peut les comparer avec d'autres objets et propriétés, dans mon esprit dans l'esprit d'un autre mathématicien ? Questions qui sont embarassantes, du moins pour ceux qui entendent maintenir une attitude de bon sens. Toute forme de l'idéalisme subjectif vire vers le solipsime - le sujet étant limité à ses perceptions, ses intuitions, qu'est-ce qui pourrait lui procurer un monde objectif - à moins d'un coup de force. En fait on voit que ceux qui pratiquent les mathématiques intuitionistes taisent simplement ces problèmes ou essaient d'atténuer tant bien que mal les conséquences inacceptables de l'idéalisme subjectif. Par exemple, Heyting après avoir affirmé la nature subjective de l'activité mathématique est amené à dire qu'il faut"... reviser quelque peu notre concept d'un nombre naturel"(I, p. 15). Il semble suggérer qu'une sorte de permanence peut être associée à nos constructions mentales en les fixant, disons, sur papier (ibid). Acceptera qui peut cette solution boîteuse.

Les écrits de Heyting illustrent bien un autre problème dérivant de l'idéalisme subjectif de la philosophie de Brouwer. Dans ce genre de philosophie on est acculé à s'appuyer sur "l'évidence" pour juger de la valeur d'une proposition mathématique. Or l'évidence est un critère notoirement variable d'une personne à l'autre en plus d'être souvent traître. Heyting dit qu'une conscience scientifique tranquille suffit pour accepter une proposition. Mais ce qui est évident pour moi ne l'est peut-être pas pour vous et vice versa. Frege considérait comme évident l'axiome naïf de compréhension avant que l'on démontre l'existence d'une contradiction découlant de ses axiomes. D'autre part on constate que les intuitionnistes diffèrent d'avis sur des sujets pourtant substantiels. Les uns acceptent des constructions qui emploient la négation les autres pas, les uns acceptent le théorème de l'éventail les autres pas. Brouwer lui-même, comme l'on a vu, avait à un moment donné accepté l'idée du continu comme intuitivement valable pour la rejeter par la suite. Sa conscience scientifique n'était-elle pas tranquille ? Heyting a été amené à distinguer pas moins de sept degrés différents d'évidence (8, p. 316). Y aurait-il donc des consciences scientifiques plus ou moins tranquilles ? Manifestement pour ceux qui veulent discuter, sur des bases indépendantes des particularités des individus, de la valeur des propositions mathématiques le recours à la seule "évidence" subjective est exclu.

Ce n'est pas une pure coïncidence que ces objections au subjectivisme de la philosophie intuitioniste de Brouwer semblent être reprises ailleurs. Elles ont été appliquées à une autre forme de subjectivisme réductif, à savoir, le positivisme. Celle-là faisait appel à l'évidente certitude de nos sensations aussi. Comme remarque Heyting : "Ses sensations (celles de Brouwer) correspondent aux 'Protokollsätze' des positivistes... Comme les positivistes, Brouwer accepte comme principe méthodologique la nécessité de partir de ce qui est directement observé et immédiatement clair, et il trace la frontière de ce matériel de base au même endroit qu'eux"(8, p. 312). Rien d'étonnant alors de voir, par exemple, Heyting dénigrer comme de la métaphysique, entendez mystification, tout appel à une réalité objective en dehors des constructions mentales du sujet (I, p. 1-12). Rien d'étonnant non plus de voir Dummett, tout comme Locke et Hume, remplacer signification et référence par la manière que nous avons apprise et que nous comprenons, ou de le voir s'étonner que l'on

puisse supposer que notre savoir transcende ce que nous avons pu concrètement observer, apprendre (EI, pp. 1-8).

Voulant la certitude absolue les positivistes réduisaient tout aux observations perceptuelles. Pour la même raison, les intuitionnistes réduisent tout aux constructions mentales à partir des sensations introspectives temporelles. Le positivisme amène la réjection de grands pans de la physique; l'intuitionnisme aboutit à la réjection de parties importantes des mathématiques. Du reste, la certitude absolue, peut-on l'avoir, où n'est-elle pas plutôt chimérique ? L'expérience historique du développement de la pensée scientifique semble indiquer que nous ne disposons que de certitudes relatives. Une épistémologie conséquente, riche de l'apport des philosophes antérieures, arrive à la même conclusion. Il est dès lors difficile de voir comment on peut s'accommoder dans un cas comme dans l'autre d'une philosophie qui nous fait délaisser des parties considérables de l'acquis scientifique collectif de l'homme. Le "retour" solipsistique au Soi que nous propose Brouwer serait un moyen, mais y en a-t-il d'autres ?

Il y a quelque chose de demesuré dans l'idée qu'un jugement personnel d'un mathématicien génial, ou même d'un courant vigoureux et fertile de pensée mathématique, puisse décider de la faillite, en raison de sa "conscience scientifique tranquille", des théories produites et acceptées collectivement dans le temps et l'espace. Cela frappe d'autant plus que la philosophie intuitionnistetend à placer les mathématiques intuitionnistes au-delà de toute critique. C'est un corollaire de cet idéalisme subjectif que les mathématiques sont indépendantes du langage et de la logique codifiée. Cette idée des mathématiques comme fondement auto-fondé de toute pensée est une thèse dominante dans les écrits de Brouwer des premiers aux derniers. Le langage et la logique (codifiée) ne sont que des ossifications plus ou moins utiles de la vie libre, spontanée et foisonnante de la Conscience. Ils peuvent nous servir mais il ne faut jamais perdre de vue le fond des choses : "... les constructions alinguistiques qui dérivent de l'auto-déroulement (self-unfolding)

de l'intuition de base, sont exactes et vraies, en vertu de leur présence même dans la mémoire, mais la faculté humaine de mémoire qui doit passer en revue ces constructions, est par sa nature limitée et susceptible de faire erreur, même quand elle sollicite le support des signes linguistiques. Donc, pour un esprit humain équipé d'une mémoire illimitée, les mathématiques pures, pratiquées dans la solitude et sans l'emploi des signes linguistiques, seraient exactes, mais l'exactitude serait perdue dans la communication mathématique entre les êtres humains avec une mémoire illimitée, car ils n'auraient d'autres moyens d'entendement que le langage "(VKL, p. 443). La logique n'étant que la codification des structures apparaissant dans le langage, on peut s'attendre à ce qu'elle nous induise aussi en erreur. C'est, en effet, l'avis de Brouwer, du moins pour un principe logique, à savoir, le tiers-exclu. Langage et logique (codifiée) sont en raison de leur nature, viciés; ils peuvent être utiles pour un semblant de communication, mais ils ne peuvent jamais suffire à préserver totalement intacte la richesse et l'exactitude de la pensée solitaire et encore moins de l'épuiser ? Qui pourrait, alors, critiquer ces constructions libres qui en fin de compte ne concernent que moi ? En 1950 Brouwer se résumait comme suit :"... par suite de l'affranchissement total du lest des objets, dont jouissent les mathématiques... leurs plus beaux développements n'auront probablement jamais aucun rapport avec les questions techniques, économiques ou politiques" (DF, p. 503). Sur base de quelle réalité pourrait-on critiquer des constructions si spirituelles ?

Conclusions

Nous avons vu que depuis sa première formulation la philosophie intuitionniste de Brouwer se compose de trois éléments essentiels : l'idéalisme subjectif du type solipsistique, le réductionnisme positiviste, et le constructivisme. Dummett affirme que c'est le seul système encore intact de l'époque héroïque des chercheurs de fondements des mathématiques. Manifestement c'est inexact. Que reste-t-il alors du système de départ ? Pour Heyting, "Seule l'attitude solipsistique... est inessentielle pour sa (Brouwer) fondation des mathématiques"

(B, p. 312). Heyting ampute, donc, très modérément le système en gardant non seulement le réductionnisme mais également l'idéalisme subjectif. Il est vrai que ce dernier est organiquement lié au réductionnisme et que dans la mesure où l'on estime primordiale la possession de la certitude absolue, l'on est poussé à réduire le savoir au contenu immédiat et non-réfléchi de la Conscience. Cependant en raison du caractère radical de cette conception qui amène au rejet des parties généralement reconnues comme valables du savoir collectif humain, et étant donné que la certitude absolue paraît être parfaitement chimérique, il est difficile de voir comment on peut retenir l'idéalisme subjectif et le réductionnisme. Les difficultés que soulève cette sorte de philosophie sont très nombreuses et l'on ne voit pas comment les résoudre en dehors de leur évacuation totale, c'est-à-dire, le solipsisme. On constate que cette philosophie n'a que peu d'adhérents.

Pourtant les travaux intuitionnistes lancés par Brouwer continuent bon train et suscitent un intérêt mathématique et logique réel. A quoi cela peut-il tenir si ce n'est à l'intérêt philosophique et mathématique du constructivisme ? Il me semble clair que même pour Heyting et d'autres intuitionnistes c'est là l'essentiel. Pour Heyting les mathématiques sont des constructions mentales. Troelstra pense de même : "L'objet de l'intuitionnisme pourrait être décrit en premier lieu comme 'la pensée mathématique constructive' " (PI, p.2) (c'est moi qui souligne). Mental d'accord, mais ce qui compte avant tout c'est que les objets mathématiques soient construits et non pas simplement imposés par la rigueur des lois logiques. Il n'y a aucune nécessité logique, du reste, à ce qu'une construction soit mentale.

Kreisel semble adopter une telle attitude, car il distingue deux aspects de l'intuitionisme de Brouwer (et de Heyting); un aspect négatif qui rejette le réalisme conceptuel (théorie classique des ensembles) et un aspect positif qui met en valeur les notions de construction et de preuve constructive (Kreisel, FIL, p. 198). Se basant sur cette distinction Kreisel s'est appliqué à développer une "théorie abstraite de construction" qui pourrait servir d'interpré-

cation aux systèmes intuitionnistes. Du reste, comme le remarque Dummett, Kreisel rejette l'aspect négatif de l'intuitionnisme pour ne garder que l'aspect positif. C'est placer l'intérêt principal au niveau du constructivisme sans rejeter les "mathématiques classiques".

Dummett ne l'accepte pas: "... mais il reste que, si les mathématiques classiques sont intelligibles , alors, bien que les mathématiques intuitionnistes soient peut-être intelligibles aussi, elles perdent largement leur intérêt" (Dummett, EI, p. 361). Pour le sujet créateur solipsiste peut-être, mais pour le reste du monde ce n'est simplement pas vrai. Il ne faut être ni solipsiste ni positiviste subjectif pour voir un grand intérêt à déterminer ce qui peut être effectivement construit en mathématiques et éventuellement ce qui ne le peut pas. Même si l'on est déterminé à rejeter tout ce qui ne peut être construit cela reste vrai. Et puis qu'est-ce que cela veut dire construire ? Il faut voir avec quoi et avec quelles méthodes on construit. On peut regarder l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel comme une construction à partir de l'ensemble vide et l'ensemble dénombrablement infini à l'aide de certaines opérations. On peut estimer aussi que le principe d'induction est douteux et n'accepter que des nombres finis. Le constructivisme est, en fait, comme une large gamme spectrale de possibilités graduées selon le point de départ et les moyens que l'on se donne. Ne pourrait-on voir ici un effort de dégager le minimum nécessaire pour telle ou telle théorie ou partie d'une théorie mathématique sans préjuger de la valeur de ce qui va au-delà de ce que ce minimum nous permet ? Nous avons vu qu'il y a des différences parmi les intuitionistes et ceux qui sont proches d'eux. N'est-il pas mieux d'y voir simplement différentes possibilités de constructions que de vouloir légiférer et discerner des brevets de bonnes et de mauvaises mathématiques ?

Il me semble que la philosophie intuitionniste de Brouwer n'est pas restée intacte, mais que les éléments factices, le solipsisme, l'idéalisme subjectif et le réductionnisme, sont sujets, en ordre croissant, à un grand nombre d'objections qui rend malaisé leur

rétention. Toute personne qui accepte une philosophie réaliste des mathématiques ne pourrait les accepter. Par contre, toute personne même celle qui adhère à une philosophie réaliste, peut reconnaître l'intérêt du constructivisme sous une forme ou l'autre. Brouwer était incontestablement un grand mathématicien et logicien. Ses travaux mathématiques et logiques ont eu un grand écho et ils le méritent. Sa pensée philosophique est marquée par la franchise, la vigueur et la sincérité. L'accent qu'il a mis sur l'intuition créative en opposition à un formalisme à outrance et sur le caractère évolutif des mathématiques et de la logique sont sans aucun doute salutaires. Mais son insistance sur le subjectivisme et le constructivisme à outrance ne le sont pas. On peut comprendre qu'un certain tempérament psychologique porté vers le subjectivisme soit propice à une philosophie constructiviste, mais on ne peut admettre que les deux soient indissolublement liées de telle façon que reconnaître une valeur au deuxième nécessite la reconnaissance du premier. Il est toujours navrant de voir une intuition profonde portant sur une réalité quelconque, les mathématiques par exemple, qui permet d'éclaircir cette réalité s'ériger en un mur intransigeant qui veut interdire tout passage. Les philosophies rivales de celle de Brouwer sont aussi intactes qu'elle; ou plutôt la sienne est aussi peu intacte que celles-là. Les retombées philosophiques et mathématiques de toutes subsistent, bien que libérées, du moins on peut l'espérer, des limites étroites de leur première définition. En ce qui concerne l'intuitionnisme, ce qui semble vigoureux et important aujourd'hui ce sont des mathématiques constructives et les systèmes formels associés plutôt que le solipsisme, l'idéalisme subjectif ou le réductionnisme positiviste.

Références

Dans le texte chaque référence est faite en donnant le nom de l'auteur suivi du sigle pour l'écrit sauf pour les écrits de Brouwer et les cas clairs où le nom n'est pas donné.

Brouwer, L.E.J.

(CW) L.E.J. Brouwer, Collected Works, ed. par A. Heyting, Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1975, vol. I, Philosophy and Foundations of Mathematics

(CPM) Consciousness, Philosophy and Mathematics, in (CW). pp. 480 -494

(DF) Discours final, in (CW), p. 503

(HBPM) Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism, in (CW) , pp. 508-515.

(LAM) Life, Art and Mysticism, in (CW) ,pp. 1-10.

(FM) On the Foundations of Mathematics, in (CW), pp. 13-101.

(MWS) Mathematik, Wissenschaft und Sprache, in (CW), pp. 417-428

(VKL) Volition, Knowledge, Langage, in (CW), pp. 443-446.

Dummett, Michael

(EI) Elements of Intuition, Oxford: Clarendon Press, 1978

Fraenkel, A.A., Y. Bar-Hillel, A. Lévy

(FST) Foundations of Set Theory , Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1973.

Heyting, A.

(I) Intuitionism : an Introduction, Amsterdam : North-Holland Publishing Co., 1972

(B) L.E.J. Brouwer, in Klibansky, R. (ed), La Philosophie Contemporaine, Vol. I, Logique et Fondements des Mathématiques, Firenze : La Nuova Italia Editrice, 1968, pp. 308-315.

Kreisel, G.

(FIL) Foundations of Intuitionistic Logic, in Nagel, E., P. Suppes, A. Tarski (eds.) Logic, Methodology and Philosophy of Science, Stanford : Stanford University Press, 1962, pp. 198-210

Troelstra, A.

(PI) Principles of Intuitionism, Berlin : Springer, 1969.