Probabilités

Didier Müller, avril 2010

www.apprendre-en-ligne.net

Table des matières

1. Dénombrement

1.1. Deux principes fondamentaux du dénombrement....1
1.2. Exercices d'échauffement....2
1.3. Permutations simples....3
1.4. Permutations avec répétitions....4
1.5. Arrangements simples....5
1.6. Arrangements avec répétitions....5
1.7. Combinaisons simples....6
1.8. Combinaisons avec répétitions....6
1.9. Exercices....6
1.10. Coefficients binomiaux....9
1.11. Ce qu'il faut absolument savoir....10

2. Probabilités

2.1. Un peu d'histoire....11
2.2. Univers, issues et événements....12
2.3. Premiers pas en probabilités....13
2.4. Axiomes du calcul des probabilités et théorèmes (résumé)....17
2.5. Probabilité conditionnelle....17
2.6. Événements indépendants....19
2.7. Épreuves successives....20
2.8. La loi binomiale....23
2.9. La loi multinomiale....23
2.10. Exercices supplémentaires....25
2.11. Ce qu'il faut absolument savoir....26

3. Variables aléatoires

3.1. Un peu d'histoire....27
3.2. Variables aléatoires discrètes....27
3.3. Espérance de gain....28
3.4. Loi de Poisson....30
3.5. Variables aléatoires continues....32
3.6. Loi normale de Gauss-Laplace....33
3.7. Ce qu'il faut absolument savoir....38

1. Dénombrement

Analyse combinatoire est un synonyme de dénombrement.

Le **dénombrement** s'emploie à étudier et à dénombrer divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis.
Il est né de l'étude des jeux de hasard et s'est fortement développé sous l'influence du calcul des probabilités. Il est par ailleurs lié à la théorie des nombres et à la théorie des graphes.

1.1. Deux principes fondamentaux du dénombrement

Principe des tiroirs

« Si vous disposez d'une commode avec 5 tiroirs et que vous devez ranger 6 pantalons, alors au moins un des tiroirs contiendra au moins 2 pantalons. »

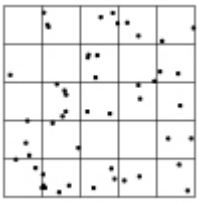
Plus généralement, si vous avez n « tiroirs » à disposition pour y ranger $n+k$ « objets », alors certains « tiroirs » contiendront plus d'un « objet ».

Un exemple simple

Dans un village de 400 habitants, y a-t-il deux personnes qui sont nées le même jour (pas forcément de la même année) ?

Ici, les tiroirs représentent les jours de l'année et les objets les habitants. Seuls 366 habitants peuvent avoir des dates de naissance différentes.

Un exemple plus subtil



On jette 51 miettes sur une table carrée de 1 m de côté. Montrez qu'il y a toujours au moins un triangle formé de 3 miettes dont l'aire vaut au plus 200 cm^2.

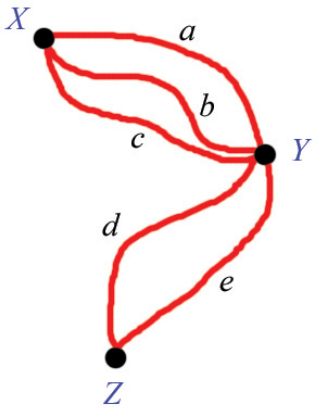
On partage la table en 5 x 5 = 25 carrés de 20 cm de côté; comme il y a 51 miettes, il existe au moins 1 carré qui contient 3 miettes. Le triangle formé par ces 3 miettes a une aire au plus égale à la moitié de l'aire du carré dans lequel il est inscrit, soit 200 cm^2.

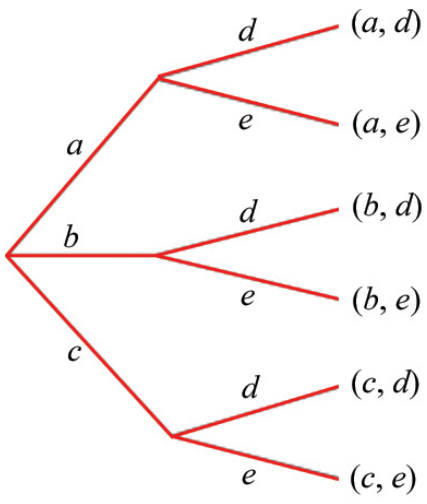
Principe de décomposition

Si une opération globale peut se décomposer en k opérations élémentaires successives, ces dernières pouvant s'effectuer respectivement de n_1, n_2, ..., n_k manières, alors l'opération globale peut se faire de $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ manières différentes.

Exemple

Les localités X et Y sont reliées par trois routes (a, b et c) et les localités Y et Z par deux routes (d et e). Combien y a-t-il de trajets de X à Z en passant par Y ?





Il y a 6 (= 3·2) trajets possibles : (a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e).

1.2. Exercices d'échauffement

Exercice 1.1

À la fin d'une réunion d'anciens élèves, tout le monde se serre la main. S'il y a n personnes à la fête, combien de poignées de mains sont échangées ?

Exercice 1.2

Combien de diagonales contient un polygone convexe à n côtés (une diagonale relie deux sommets non adjacents) ?

Exercice 1.3

Le jeu « Tantrix » est composé de tuiles hexagonales sur lesquelles sont dessinés des rubans comme le montre le dessin ci-dessous. Un ruban part du milieu d'un côté pour aller vers le milieu d'un autre côté. Il y a quatre couleurs en tout, mais sur chaque tuile ne figurent que trois rubans de couleurs différentes.

Indication
Résolvez d'abord le problème avec trois couleurs puis réfléchissez comment passer à quatre couleurs.
Attention aux doublons obtenus par rotation !

De combien de tuiles différentes est composé un jeu complet ?

Exercice 1.4

Vous voulez construire un château de cartes avec…

a. un jeu de 52 cartes.
b. dix jeux de 52 cartes.

Combien d'étages aura votre château ? Le château doit être complet et on n'est pas obligé d'utiliser toutes les cartes.

Château de cartes et jeux amoureux, par Patrick Martin
www.patrick-martin.com

Exercice 1.5

Combien de mots différents de 7 lettres alternant consonne et voyelle peut-on former…

a. si la première lettre est une consonne ?

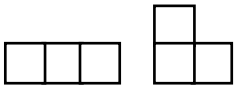
b. si la première lettre est une voyelle ?

Exercice 1.6

Le nombre de cheveux d'une femme ne dépasse jamais 400'000. Parmi les 1'500'000 Parisiennes, on peut donc être sûr qu'il en existe deux qui ont le même nombre de cheveux, mais on peut ajouter que bien plus de deux d'entre elles possèdent certainement le même nombre de cheveux. Combien, au moins ?

Exercice 1.7

Les deux triminos :



Les polyminos ont été étudiés par les Anglais **Dudeney** et **Dawson** au début du XX^{e} siècle. Ils doivent leur popularisation, à partir des années cinquante, à Solomon W. **Golomb**, et sont devenus aujourd'hui un thème classique des récréations mathématiques. Les polyminos sont des assemblages de carrés de même taille par un de leurs côtés. Deux carrés s'assemblent en un domino, trois carré en un trimino (il n'y a que deux configurations possibles : le « bâton » et le « trimino en L »), quatre carrés en un tétramino (vous connaissez le jeu « Tétris » ?), cinq carrés en un pentamino, etc.

Combien y a-t-il de pentaminos différents (attention aux rotations et aux symétries axiales) ?

1.3. Permutations simples

Définition

Tout classement **ordonné** de n éléments distincts est une **permutation** de ces n éléments. Par exemple *aebcd* est une permutation des éléments *a, b, c, d, e*.

Nombre de permutations simples

Le nombre de permutations de n éléments peut être calculé de la façon suivante : il y a n places possibles pour un premier élément, $n-1$ pour un deuxième élément, ..., et il ne restera qu'une place pour le dernier élément restant. On peut représenter toutes les permutations possibles sur un arbre.

On remarque facilement alors qu'il y a $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$ permutations possibles.

$n!$ se lit « n factorielle ».

On note $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n = n!$ Par convention, $0! = 1$.

Il y a donc $n!$ permutations de n éléments distincts.

$$P_n = n!$$

Les 4! = 24 permutations de 4 éléments distincts a, b, c, d :

abcd	bacd	cabd	dabc	abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac	acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	cdab	dcab	adcb	bdca	cdba	dcba

Exemple type

Nombre de dispositions de cinq personnes sur un banc de cinq places.

Remarques sur la fonction factorielle

La fonction factorielle croît extrêmement vite. Elle est tellement rapide que la plupart des calculatrices courantes ne peuvent pas calculer au-delà de 69!

Pourquoi 69 ?

Pour calculer au-delà de 69!, vous pouvez utiliser un logiciel puissant comme *Mathematica.*

Notation cyclique

Une permutation de nombres peut être écrite en notation cyclique :

(2 4 5) (1 3) (6)

Cela signifie que 2 est remplacé par 4, 4 par 5, 5 par 2. 1 est remplacé par 3 et 3 par 1. 6 est remplacé par 6.

Si l'on part de 1 2 3 4 5 6, on aura après permutation 3 4 1 5 2 6.

Exercice 1.8

Soient les nombres entiers de 1 à 9 classés par ordre croissant.

a. À quelle permutation de ces nombres correspond la notation cyclique (1 4 6 3)(2 9 7)(5 8) ?
b. Écrivez en notation cyclique la permutation 1 5 8 2 6 4 9 3 7.
c. Combien de fois faut-il appliquer la permutation du point **a.** pour retrouver la séquence 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ?
d. Combien de fois faut-il appliquer la permutation du point **b.** pour retrouver la séquence 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ?

Nombre d'inversions

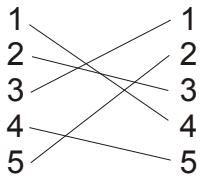
Le **nombre d'inversions** dénombre combien de fois un nombre plus grand se rencontre avant un plus petit dans la suite i_1, i_2, …, i_n. Si le nombre d'inversions est pair, la permutation est dite paire; dans le cas contraire, elle est impaire.

Exemple

La permutation 4 3 1 5 2 comporte six inversions : 4 est avant 1, 2 et 3, 3 est avant 1 et 2, et enfin 5 est avant 2. Cette permutation est donc paire.

Méthode graphique

On peut aussi trouver le nombre d'inversions à l'aide d'un dessin. On met sur deux colonnes les n nombres de la permutation, puis on relie le chiffre de gauche qui a été remplacé par l'élément de droite. Le nombre d'inversions correspond au nombre d'intersections de segments.
Voici un exemple avec la permutation 4 3 1 5 2 :



Il y bien 6 intersections qui correspondent aux 6 inversions que l'on avait déjà calculées.

Exercice 1.9

a. Soit une suite de n nombres entiers définissant une permutation. Montrez que si on permute deux nombres de cette suite, la parité de la permutation change toujours.

b. Samuel **Loyd** (1841-1911), l'inventeur du taquin, avait inversé l'ordre des pièces 14 et 15, et lancé le défi de reconstituer l'ordre naturel des petits carrés en les faisant coulisser.

Utilisez la propriété vue au point **a.** pour démontrer que c'est impossible.

1.4. Permutations avec répétitions

Nombre de permutations avec répétitions

Le nombre de permutations que l'on peut constituer si certains des éléments sont identiques est plus petit que si tous les éléments sont distincts. Lorsque seuls k éléments sont distincts ($k \leq n$), chacun d'eux apparaissant n_1, n_2, ..., n_k fois, avec $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ et $n_i \geq 1$, on a :

La barre sur le *P* signifie « avec répétitions ».

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

En effet, si chacune des n_i places occupées par des éléments identiques ($i \in \{1, 2, ..., k\}$) était occupée par des éléments différents, le nombre de permutations serait alors à multiplier par $n_i\,!$, d'où :

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) \cdot n_1!\, n_2! \cdot \ldots \cdot n_k! = n!$$

Les $\frac{5!}{2!\,2!\,1!}$ permutations des 5 éléments a, a, b, c, c :

aabcc	aacbc	aaccb	abacc	abcac	abcca	acabc	acacb	acbac	acbca
accab	accba	baacc	bacac	bacca	bcaac	bcaca	bccaa	caabc	caacb
cabac	cabca	cacab	cacba	cbaac	cbaca	cbcaa	ccaab	ccaba	ccbaa

Exemple type Nombre d'anagrammes différentes que l'on peut former avec les lettres du mot « excellence ».

1.5. Arrangements simples

Définition Un **arrangement** est une collection de p objets pris successivement parmi n **en tenant compte de l'ordre d'apparition**. Il est dit **simple** si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

Nombre d'arrangements simples Le nombre d'arrangements de p éléments distincts choisis parmi n est noté A_p^n (dans certains livres, p et n sont inversés).
Le premier élément peut être choisi de n façons différents, le deuxième peut alors prendre $(n-1)$ valeurs, le troisième $(n-2)$ valeurs et le p-ième élément $(n-p+1)$ valeurs. D'où :

$$A_p^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Les $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ arrangements de 3 éléments choisis parmi a, b, c, d :

abc	abd	acb	acd	adb	adc	bac	bad	bca	bcd	bda	bdc
cab	cad	cba	cbd	cda	cdb	dab	dac	dba	dbc	dca	dcb

Exemple type Après les prolongations d'un match de football, le nombre de façons de choisir les 5 tireurs de penalties parmi les onze joueurs et l'ordre de passage.

1.6. Arrangements avec répétitions

Nombre d'arrangements avec répétitions Le nombre d'arrangements de p éléments choisis parmi n avec répétitions possibles est noté $\overline{A}_p^n$. Si les répétitions sont permises, alors tous les éléments peuvent prendre n valeurs. On a donc, d'après le principe de décomposition :

$$\overline{A}_p^n = n^p$$

Les $3^2 = 9$ arrangements avec répétitions de 2 éléments choisis parmi a, b, c :

aa ab ac ba bb bc ca cb cc

Exemple type Nombre de numéros de téléphone composés de 7 chiffres.

1.7. Combinaisons simples

Définition Une **combinaison** est une collection de p objets pris simultanément parmi n, donc **sans tenir compte de l'ordre d'apparition**. Elle est dite **simple** si on ne peut prendre chaque objet qu'une fois au plus.

Nombre de combinaisons simples Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est noté C_p^n.
Si l'on permute les éléments de chaque combinaison simple, on obtient tous les arrangements simples. Il y a donc $p!$ fois plus d'arrangements que de combinaisons, ce qui s'écrit :

$$A_p^n = p!\,C_p^n$$

Le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est donc :

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Les $\frac{3!}{2!1!} = 3$ combinaisons de 2 éléments choisis parmi a, b, c : ab ac bc

Notation Les $\binom{n}{p}$ sont les **coefficients binomiaux** (voir § 1.10).

Exemple type Nombre de mains possibles au bridge.

1.8. Combinaisons avec répétitions

Nombre de combinaisons avec répétitions Si les répétitions sont permises, le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n est noté $\overline{C}_p^n$.
La démonstration de la formule est un peu compliquée. Comme les combinaisons avec répétitions sont assez rares, nous donnerons la formule sans commentaires :

$$\overline{C}_p^n = \binom{n+p-1}{p} = \frac{(n+p-1)!}{(n-1)!\,p!}$$

Les $\frac{4!}{2!2!} = 6$ combinaisons avec répétitions de 2 éléments choisis parmi a, b, c :

aa ab ac bb bc cc

Exemple type Nombre de dominos possibles avec 7 symboles différents possibles.

1.9. Exercices

Pour tous ces exercices, il s'agira tout d'abord de déterminer s'il s'agit d'une permutation, d'un arrangement ou d'une combinaison. **Demandez-vous toujours si l'ordre intervient ou non**. Si c'est le cas, c'est un arrangement ou une permutation ; sinon, c'est une combinaison. **Demandez-vous ensuite s'il y a des répétitions ou non**.

Exercice 1.10

Combien un village doit-il avoir d'habitants au minimum pour que l'on soit sûr que deux personnes au moins ont les mêmes initiales (composées de 2 lettres) ?

Exercice 1.11

Calculez A_3^{100} sans calculatrice.

Exercice 1.12

6 piles de marques différentes sont dans un tiroirs dont 3 sont neuves et 3 déchargées.

a. Combien peut-on réaliser d'échantillons différents de 3 piles ?

b. Combien, parmi ces échantillons, contiennent 3 piles neuves ?

c. Combien contiennent au moins une pile neuve ?

Exercice 1.13

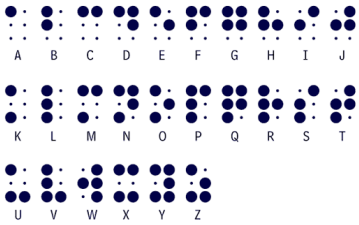
Les douze tomes d'une encyclopédie sont rangés au hasard.

a. Combien y a-t-il de manières de les classer ?

b. Parmi ces classements, combien y en a-t-il où les tomes 1 et 2 se trouvent côte à côte (dans cet ordre) ?

Exercice 1.14

Les symboles de l'écriture braille sont formés d'un assemblage de six points en relief, comme le montre l'image ci-dessous. Combien de symboles différents peut-on fabriquer selon ce principe ?



Exercice 1.15

Combien d'anagrammes distinctes peut-on former avec les lettres des mots :

a. deux **b.** abracadabra **c.** sociologique

Exercice 1.16

Dans un passé relativement proche, chaque classe du lycée cantonal devait avoir une délégation de trois élèves : un délégué, un suppléant du délégué et un laveur de tableau. Une classe est composée de 11 filles et 3 garçons.

a. Combien y a-t-il de délégations possibles ?

Combien y a-t-il de délégations possibles…

b. si le délégué et le suppléant doivent être de sexe différent ?

c. si le laveur de tableau doit être un garçon ?

d. si les deux sexes doivent être présents dans la délégation ?

Exercice 1.17

Un représentant s'apprête à visiter cinq clients. De combien de façons peut-il faire cette série de visites...

a. s'il les fait toutes le même jour ?

b. s'il en fait trois un jour et deux le lendemain ?

Exercice 1.18

a. Combien de plaques d'immatriculation de véhicules peut-on former si chaque plaque contient deux lettres différentes suivies de trois chiffres différents ?

b. Même problème mais en interdisant que le premier chiffre soit un 0.

Exercice 1.19

Une maîtresse de maison a onze amis très proches. Elle veut en inviter cinq à dîner.

a. Combien de groupes différents d'invités existe-t-il ?

b. Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux ne peuvent venir qu'ensemble ?

c. Combien de possibilités a-t-elle si deux d'entre eux sont en mauvais termes et ne veulent plus se voir ?

Exercice 1.20

Un atelier comprend 15 ouvriers de même spécialité, 8 femmes et 7 hommes. On veut former une équipe de 5 ouvriers.

a. Combien d'équipes différentes peut-on former ?

b. Combien d'équipes comportant 3 hommes peut-on former ?

Exercice 1.21

Combien y a-t-il de pièces différentes dans un jeu de dominos si sur chaque pièce figurent deux symboles choisis parmi {blanc, 1, 2, 3, 4, 5, 6} ?

Exercice 1.22

17 chevaux sont au départ d'une course hippique. Combien y a-t-il de tiercés possibles :

a. au total,
b. gagnants dans l'ordre,
c. gagnants mais dans le désordre ?

Exercice 1.23

Lors d'un examen, un élève doit répondre à 10 questions sur 13.

a. Combien de choix a-t-il ?
b. Combien de possibilités a-t-il s'il doit répondre aux deux premières questions ?
c. Combien s'il doit répondre à la première ou à la deuxième question, mais pas aux deux ?
d. Combien s'il doit répondre à exactement 3 des 5 premières questions ?
e. Combien s'il doit répondre à au moins 3 des 5 premières questions ?

Exercice 1.24

À partir d'un jeu de 36 cartes, de combien de façons peut-on choisir exactement :

a. deux cartes rouges et un pique ?
b. deux rois et un carreau ?

Exercice 1.25

Au « Swiss Lotto », il faut cocher 6 numéros sur 45.

a. Combien y a-t-il de grilles possibles ?
b. Combien y a-t-il de grilles avec exactement trois numéros gagnants (sans tenir compte du numéro complémentaire) ?

Exercice 1.26

Dans une classe de dix élèves, de combien de façons peut-on choisir trois élèves pour tenir les rôles de Cléante, Valère et Harpagon ?

Exercice 1.27

D'un jeu de 36 cartes, on veut choisir une main de 9 cartes. Combien y a-t-il de mains...

a. ne comportant que des cartes noires (trèfle ou pique) ?
b. ne comportant que des figures (valet, dame, roi ou as) ?
c. comportant 4 as ?
d. comportant 5 figures, dont 3 noires ?
e. comportant 3 as, 3 dames et 3 carreaux ?

Exercice 1.28

En 1961, Raymond **Queneau** a publié une œuvre majeure de la littérature combinatoire. Malheureusement, le début du titre vous a échappé, mais vous vous rappelez que cela se termine par « ... milliards de poèmes ».
Le livre contient 10 sonnets de 14 alexandrins chacun. Chaque page du livre contient un sonnet et est découpée en languettes contenant chacune un alexandrin. On peut ainsi composer un poème par exemple avec le premier alexandrin du cinquième sonnet, le deuxième alexandrin du neuvième sonnet, et ainsi de suite jusqu'au quatorzième alexandrin.

a. Quel est alors le titre du livre de *Queneau* ?
b. À raison d'un poème toutes les minutes, combien d'années faudrait-il pour lire tous les poèmes possibles ?

Exercice 1.29

Résolvez **a.** $A_2^n = 72$ **b.** $A_4^n = 42\,A_2^n$ **c.** $2\,A_2^n + 50 = A_2^{2n}$

Exercice 1.30

Sur une feuille quadrillée, dessinez un rectangle de 10 carrés de long et de 6 carrés de large.
En se déplaçant uniquement vers la droite ou vers le haut en suivant les lignes du quadrillage, combien y a-t-il de chemins pour aller du coin inférieur gauche au coin supérieur droit du rectangle ?

Exercice 1.31

Quatre hommes, au bord d'un précipice, doivent traverser la passerelle qui mène sur l'autre bord. Mais il y a un problème : la passerelle n'est pas très solide et on ne peut pas la franchir à plus de deux. De plus, il faut se munir d'une torche, car la nuit est tombée et certaines planches sont pourries. Notons pour finir que le pas doit toujours s'accorder sur celui de la personne la plus lente.

André traverse en 1 minute,
Boris en 2 minutes,
Claude en 5 minutes et
Denis, plus peureux, met 8 minutes.

Ils n'ont qu'une seule torche, et ils ne peuvent pas se la lancer d'un bord du ravin à l'autre ; il faut donc la rapporter à chaque fois.

a. Combien y a-t-il de façons de faire traverser cette passerelle à ces quatre personnes en cinq passages ?

b. Quelle est la solution la plus rapide ?

Exercice 1.32

Le *problème du voyageur de commerce* consiste à trouver le plus court de ces circuits. C'est un problème très difficile. On ne connaît pas actuellement de méthode.

Soient n villes reliées deux à deux par une route.

a. Combien y a-t-il de routes ?

b. Combien de circuits passent par n villes ? On ne passe qu'une fois par chaque ville et on finit le parcours en revenant à la première ville. On ne tient pas compte du sens de parcours.

Application numérique : combien y a-t-il de routes et de circuits pour 16 villes ?

Indication pour le point **b.**
Procédez par récurrence : commencez par 3 villes, puis 4, puis 5, etc. Puis voyez comment vous passez de k villes à k+1 villes.

1.10. Coefficients binomiaux

Triangle de Pascal

En fait, ce triangle était connu des mathématiciens chinois au 12e siècle déjà puisque **Zhu Shi Jie** s'y intéressait. *Pascal* en fait une étude détaillée en 1653, c'est pourquoi il porte son nom.

Blaise **Pascal**
(Clermont-Ferrand, 19/6/1623 - Paris, 19/8/1662)

Le triangle de **Pascal** se construit ligne par ligne : chaque terme est l'addition des deux nombres de la ligne supérieure qui lui sont adjacents.

							p=0 ↗								
								p=1 ↗							
n=0 ←							1		↗		p=2				
n=1 ←						1		1		↗		p=3			
n=2 ←					1		2		1		↗		p=4		
n=3 ←				1		3		**3**		**1**		↗		p=5	
n=4 ←			1		4		6		**4**		1		↗		p=6
n=5 ←		1		5		10		10		5		1		↗	p=7
n=6 ←	1		6		15		20		15		6		1	↗	
n=7 ←	1	7		21		35		35		21		7		1	

Exemple : on voit que le **4** est égal à **3** + **1**.

Ce triangle permet de déterminer les coefficients binomiaux sans connaître la formule.

Par exemple, le nombre $C_3^4 = \frac{4!}{3!1!}$ se lit à l'intersection de la ligne n = 4 et de la diagonale p = 3.

Curiosité Dans ce triangle, si tous les nombres pairs sont coloriés en blanc et tous les nombres impairs en noir, le triangle de **Sierpinski** apparaît.
Essayez !

Binôme de Newton

Vous connaissez les identités binomiales depuis longtemps déjà :

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = a+b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Mais quelles sont les formules pour des degrés supérieurs ?
En comparant les formules de degré 0, 1, 2 et 3 avec les lignes 0, 1, 2 et 3 du triangle de Pascal, vous constaterez que les coefficients des identités binomiales correspondent avec les nombres du triangle. Donc :

C'est d'ailleurs pour cette raison qu'on les appelle coefficients binomiaux !

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

etc.

Soit n un nombre entier strictement positif. La formule générale du **binôme de Newton** est :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Rappel

$\binom{n}{p}$ est une autre notation de C_p^n.

Formules concernant les coefficients binomiaux

En étudiant bien le triangle de Pascal, on peut observer les propriétés suivantes :

Il y a toujours un 1 dans les bords : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

Le triangle est symétrique par rapport à la verticale : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$

Par la construction du triangle, on a : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Vérifiez encore que : $\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \ldots + \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m}{n+1}$

Exercice 1.33

a. Développez $(a+b)^7$.
b. Écrivez le cinquième terme du développement de $(r \cdot s^2 + 3)^{16}$.

1.11 Ce qu'il faut absolument savoir

Maîtriser le principe des tiroirs	❑ ok
Maîtriser le principe de décomposition	❑ ok
Reconnaître à quel type de dénombrement on a affaire en lisant une donnée	❑ ok
Calculer tous les types de dénombrement sur sa calculatrice	❑ ok
Connaître le triangle de Pascal et les coefficients binomiaux	❑ ok

2. Probabilités

2.1. Un peu d'histoire

Pierre de **Fermat**
(Beaumont-de-Lomagne, 17/8/1601 - Castres, 12/1/1665)

Jacques **Bernoulli**
(Bâle, 27/12/1654 - Bâle, 16/8/1705)

Pierre-Simon **Laplace**
(Beaumont-en-Auge, 23/3/1749 - Paris, 5/3/1827)

Les premiers écrits sur les probabilités sont l'œuvre de Jérôme **Cardan** (1501-1576), qu'un de ses biographes a surnommé « le joueur savant ». Un problème qui intéressait **Cardan** était le suivant : comment doit-on répartir les mises d'un jeu de dés si le jeu venait à être interrompu ? La même question fut posée en 1654 à Blaise **Pascal** par son ami le **Chevalier de Méré**, qui était un joueur impénitent. Un joueur parie qu'il tirera un as en huit coups de dés, mais la police interrompt le jeu après le troisième coup. Les assistants protestent, mais comment doit-on répartir les mises ? Cette question fut à l'origine d'une correspondance entre **Pascal** et **Fermat**, et leurs réflexions furent publiées en 1657 dans *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). L'auteur est le néerlandais Christiaan **Huygens**, plus connu pour ses travaux en astronomie et en physique. C'est donc à partir de problèmes posés par les jeux de hasard que se définirent les concepts et les premières approches de cette nouvelle branche des mathématiques.

On avait observé que, lorsque l'on répétait de nombreuses fois la même expérience, les fréquences tendaient à se stabiliser. On savait de plus que ces fréquences se stabilisaient autour des probabilités, lorsque celles-ci étaient connues. Ainsi, dans le cas d'un dé, au bout d'un grand nombre de tirages, chaque face était obtenue environ une fois sur six. Cette observation empirique pouvait-elle recevoir un fondement théorique ? Le premier à se poser la question est le bâlois Jacques **Bernoulli**, fils de Nicolas Bernoulli, premier membre d'une longue dynastie de mathématiciens, dont les plus célèbres sont Jacques, Jean (son frère) et Daniel (le fils de Jean). Jacques Bernoulli a écrit *Ars Conjectandi*, qui ne sera publié qu'après sa mort en 1713 par son neveu Daniel.

Au 19ème siècle, la croissance rapide des sciences rendit nécessaire l'extension de la théorie des probabilités au-delà des jeux de hasard. Elle devint très utilisée en économie et dans le domaine des assurances.

Pour faire de la théorie des probabilités une discipline à part entière, il ne manquait finalement plus qu'une chose : une définition précise de son objet, la probabilité.

Pafnouti Lvovitch **Tchebychev**
(Okatovo, 16/5/1821 - St-Pétersbourg, 8/12/1894)

Andrei Andreeivich **Markov**
(Ryazan, 14/6/1856 - St-Pétersbourg, 20/7/1922)

Andrei Nikolaevich **Kolmogorov**
(Tambov, 25/4/1903 - Moscou, 20/10/1987)

C'est **Laplace** qui s'en charge dans son ouvrage *Théorie analytique des probabilités*, paru en 1812 : « La probabilité est une fraction dont le numérateur est le nombre de cas favorables, et dont le dénominateur est le nombre de tous les cas possibles. »

D'autres noms importants dans le domaine des probabilités sont Abraham **de Moivre** (1667-1754), Carl Friedrich **Gauss** (1777-1855), Denis **Poisson** (1781-1840), Pafnouti Lvovitch **Tchebychev** (1821-1894), Andrei Andreeivich **Markov** (1856-1922) et Andrei Nikolaevich **Kolmogorov** (1903-1987).

2.2. Univers, issues et événements

Une expérience aléatoire, comme celle consistant à jeter un dé, est appelée une **épreuve.**

Une **issue** est aussi appelée événement élémentaire.

Supposons que l'on jette un dé. Lorsqu'il s'immobilisera, il indiquera l'une des six **issues** suivantes : 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Les statisticiens appellent l'ensemble

$\Omega = \{$ $\}$

l'**univers des résultats**.

Plus formel

Soit Ω un univers comportant un nombre fini d'issues possibles.

$$\Omega = \{i_1, i_2, i_3, ..., i_n\}.$$

Les événements $I_1 = \{i_1\}$, $I_2 = \{i_2\}$, ... $I_n = \{i_n\}$ sont appelés **événements élémentaires**.

Exemple du dé

$I_1 =$, $I_2 =$, $I_3 =$,

$I_4 =$, $I_5 =$, $I_6 =$.

Événements

On appelle **événement** tout sous-ensemble de Ω, ou, ce qui revient au même, un ensemble d'événements élémentaires.

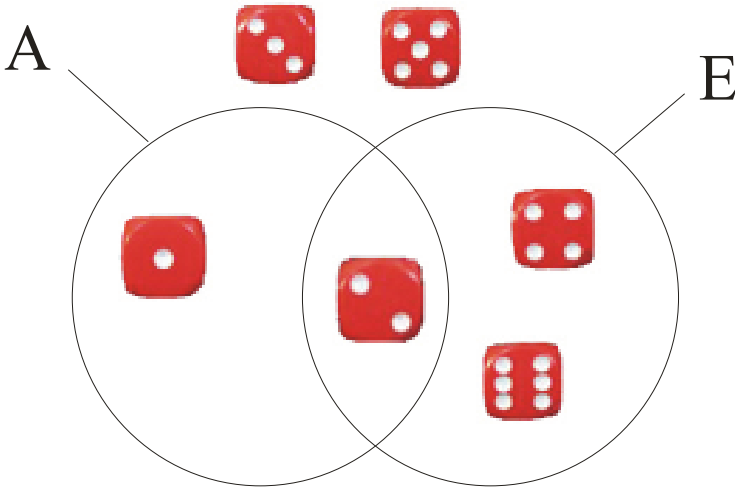
Ainsi, l'événement « le résultat d'un lancer de dé est un nombre pair » est identifié par le sous-ensemble

$E =$

Opérations sur les événements

Les opérations sur les événements sont les opérations classiques sur les ensembles.
Soit l'événement « le résultat du lancer est plus petit que 3 » identifié par l'ensemble $A = \{1, 2\}$ et l'événement $E = \{2, 4, 6\}$.

Si l'intersection de deux événements E et F est vide ($E \cap F = \varnothing$), on dit que ces deux événements sont **incompatibles**.
Deux événements élémentaires sont bien évidemment incompatibles.



Intersection

$A \cap E$ représente l'événement « le résultat du lancer est un chiffre pair **et** plus petit que 3 », donc $B = A \cap E = \{2\}$.

Union

$A \cup E$ représente l'événement « le résultat du lancer est un chiffre pair **ou** un chiffre plus petit que 3 », donc $C = A \cup E = \{1, 2, 4, 6\}$.

Complémentaire

L'événement complémentaire de E, que l'on note $\overline{E}$ (on prononce « **non** E »), correspond à l'événement « le résultat du lancer est un nombre impair ». On a donc $\overline{E} = \{1, 3, 5\}$.

Exercice 2.1

On lance deux fois une pièce de monnaie. On écrit *p* si la pièce montre pile et *f* si elle montre face. Écrivez l'ensemble Ω.

Exercice 2.2

Une urne contient quatre boules numérotées 1, 2, 3 et 4.
On tire successivement deux boules de l'urne, sans remettre la première boule tirée avant le tirage de la seconde. Écrivez l'ensemble Ω.

Exercice 2.3

Quatre chevaux avec les dossards numérotés de 1 à 4 font une course. Écrivez l'ensemble Ω des tiercés possibles.

2.3. Premiers pas en probabilités

Considérons une expérience dont l'univers est Ω. Nous voulons assigner à chaque issue *I* un **nombre** *P*(*I*) qui indiquera sa **probabilité**.

La probabilité d'une issue *I* est un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$0 \leq P(I) \leq 1$$

0 indiquera que l'issue est **impossible** et **1** qu'elle est **certaine**.

Par exemple, si on lance un dé non pipé, chaque face aura une probabilité égale de sortir (1 chance sur 6). On peut donc dire que la probabilité d'une face est de 1/6.

De plus, quand on lance un dé, on est sûr qu'il indiquera un chiffre de 1 à 6. On doit donc avoir $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$, ce qui est bien le cas.

Attention ! Cette propriété n'est toujours vraie que pour des événements élémentaires.

Donc, en généralisant :

$$P(I_1) + P(I_2) + \ldots + P(I_n) = P(\Omega) = 1$$

Événements élémentaires équiprobables

On vient de voir ce qui se passait avec un dé non pipé. Les événements {1}, {2}, {3}, {4}, {5} et {6} sont ce qu'on appelle des **événements élémentaires équiprobables** (ils ont tous la même probabilité).

Ce théorème est la version moderne de la définition qu'avait donnée *Laplace* en 1812 (voir introduction).

Soit Ω un univers comportant *n* événements élémentaires **équiprobables**. Si *A* est un événement de Ω formé de la réunion de *k* événements élémentaires, alors $P(A)=\frac{k}{n}$.

Autre formulation

« La probabilité est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles » (si tous les cas sont équiprobables).

Le seul moyen de vérifier qu'un dé n'est pas pipé, c'est de le lancer un grand nombre de fois, par exemple 6000 fois. On devrait alors en principe obtenir environ 1000 fois chacune des faces. Plus on lancera le dé, plus les fréquences observées seront proches des probabilités théoriques. C'est la **loi forte des grands nombres.**

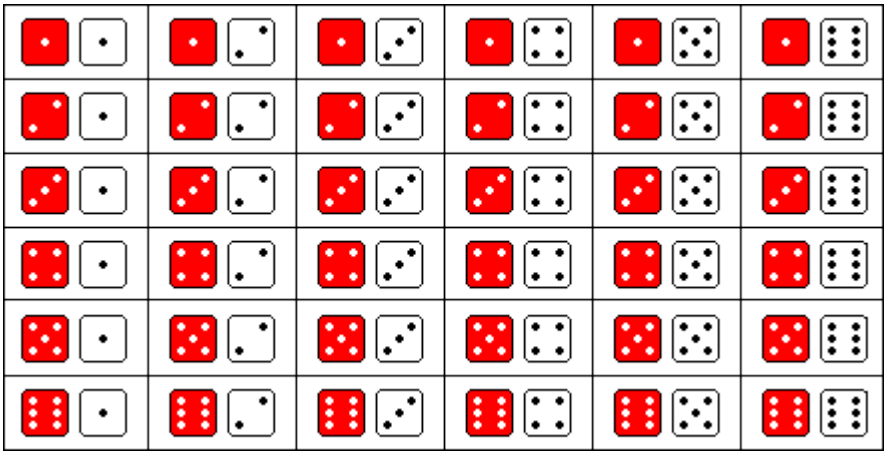
Si on utilise un dé pipé, les issues ne sont plus équiprobables et le théorème ci-dessus n'est plus vrai ; on peut choisir par exemple un dé dont les faces ont les probabilités d'apparition suivantes :

0.25 0.15 0.15 0.15 0.15 0.15

On peut vérifier que la somme des probabilités donne bien 1.

Exemple

On lance deux dés, un rouge et un blanc. Il y a 36 événements élémentaires possibles équiprobables. Chaque paire aura donc une probabilité d'apparition de 1/36 (1 cas favorable sur 36 possibles).
On notera chaque issue par la paire (r ; b) où r indiquera le résultat du dé rouge et b celui du dé blanc.



Description de l'événement	Événement	Probabilité
A : la somme des deux dés est 3	$A = \{(1; 2), (2; 1)\}$	$P(A)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$
B : la somme des deux dés est 6	$B = \{(1; 5), (2; 4), (3; 3), (4; 2), (5; 1)\}$	$P(B)=\frac{5}{36}$
C : le dé rouge montre un 1	$C = \{(1; 1), (1; 2), (1; 3), (1; 4), (1; 5), (1; 6)\}$	$P(C)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$
D : la somme des dés est inférieure à 7 et est un nombre premier	$D = \{(1; 1), (1; 2), (1; 4), (2; 1), (2; 3), (3; 2), (4; 1)\}$	$P(D)=\frac{7}{36}$

Théorème 2.1

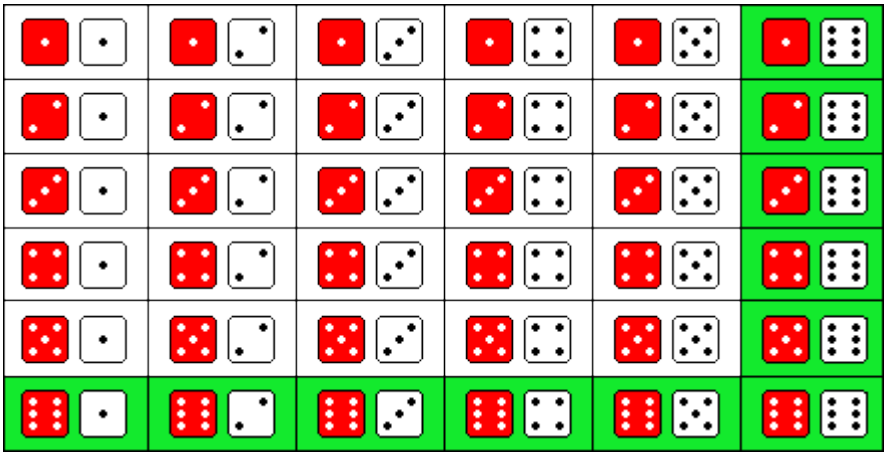
Reprenons l'exemple des deux dés. Soit E l'événement « le dé rouge montre un 6 » et F l'événement « le dé blanc montre un 6 ».

$E \cup F$: « le dé rouge **ou** le dé blanc montre un 6 ».

$E \cap F$: « le dé rouge **et** le dé blanc montrent un 6 ».

$P(E \cup F) = \frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$

En comptant les paires vertes, on voit qu'il y en a bien 11 sur 36.



$E \cup F$ est toute la partie verte.
$E \cap F$ est l'intersection de la bande verticale et de la bande horizontale.
Cela illustre le théorème 2.1 :

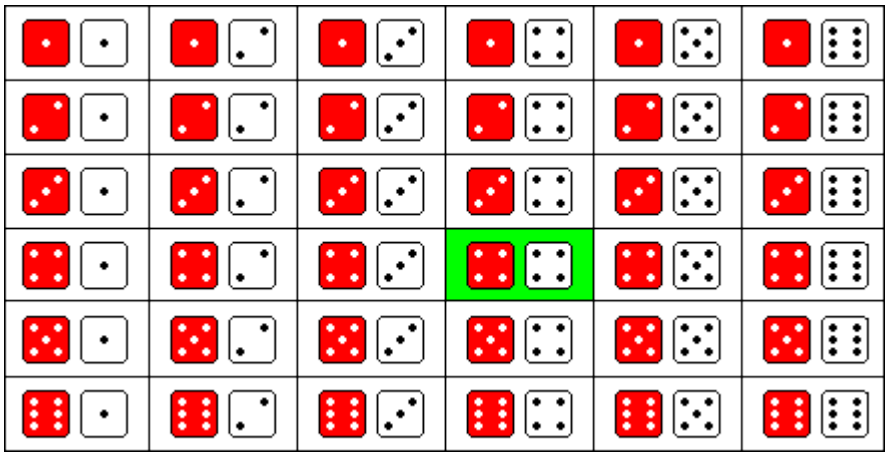
$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Lorsque les deux événements sont **incompatibles**, le théorème 2.1 se simplifie et devient :

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F), \quad \text{car } E \cap F = \varnothing.$$

Théorème 2.2

Soit l'événement E « les deux dés montrent un 4 ». L'événement $\overline{E}$ est « au moins un des deux dés ne montre pas un 4 ».



$$P(E) = \frac{1}{36}$$

$$P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

On vérifie immédiatement sur le dessin que

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

On peut commenter ce théorème comme suit : la probabilité qu'un événement ne survienne pas est 1 moins la probabilité qu'il survienne. Par exemple, si la probabilité de toucher une cible est 0.23, la probabilité de rater la cible est 0.77.

Exercice 2.4

Dans un canton, il y a 40'000 voitures dotées de plaques numérotées de 1 à 40'000. En n'observant que les voitures de ce canton, quelle probabilité a-t-on de voir une voiture dont le numéro de plaque commence par 1 ?

Exercice 2.5

On lance deux dés. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir…

a. un 3 et un 5 ? **b.** deux 3 ?
c. deux chiffres identiques ? **d.** un total de 8 ?

Exercice 2.6

On propose à Pierre de lancer simultanément trois pièces de monnaie parfaitement équilibrées de 10, 20 et 50 centimes respectivement. Il pourra conserver les pièces qui présentent le côté pile.

a. Décrivez l'univers.

Quelle probabilité a-t-il de gagner…

b. 20 centimes ? **c.** moins de 50 centimes ? **d.** plus de 20 centimes ?

Exercice 2.7

Un tétraèdre pipé vous sert de dé. Les faces sont numérotées de 1 à 4. Après le jet, la face gagnante est celle qui repose contre le sol.
La probabilité de gain est proportionnelle au numéro inscrit sur la face : par exemple, la face numéro 4 a une probabilité de sortie 4 fois plus élevée que la face numéro 1.
Quelle est la probabilité de sortie de la face numéro 3 ?

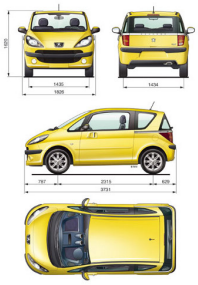
Exercice 2.8

On jette deux dés. Quelle est la probabilité que la somme des points soit i ? Faites les calculs pour $i = 2, 3, ..., 12$. Dessinez un histogramme.

Exercice 2.9

Deux boules sont tirées d'une urne contenant 6 boules blanches et 5 noires. Quelle est la probabilité qu'une des boules tirées soit blanche et l'autre noire ?

Exercice 2.10



Dans une enquête portant sur les pannes de voitures qui se sont produites au cours d'une année, on a pris en considération, pour un type de voiture déterminé, les possibilités suivantes :

P_0 : il n'y a pas eu de panne ;
P_1 : il y a eu une panne ;
P_2 : il y a eu deux pannes ;
P_3 : il y a eu plus de deux pannes.

Le dépouillement de l'enquête a montré que ces possibilités se sont produites respectivement 233, 310, 156 et 81 fois. Quelle probabilité y a-t-il, pour un possesseur d'une voiture de ce type, de tomber en panne dans l'année qui vient...

a. au moins une fois ?
b. moins de deux fois ?

Exercice 2.11

On tire d'un paquet de 52 cartes deux cartes au hasard. Quelle est la probabilité qu'elles forment un black jack, ou, autrement dit, que l'une soit un as et l'autre un dix, un valet, une dame ou un roi ?

Indication : utilisez les combinaisons.

Exercice 2.12

On admet que les C_5^{52} mains possibles au poker fermé sont équiprobables.
Quelle est la probabilité de recevoir...

a. une quinte royale (10, V, D, R, 1 de la même couleur) ?
b. une quinte flush (5 cartes consécutives de la même couleur, mais pas une quinte royale) ?
c. un carré (p. ex. D ♠, D ♣, D ♦, D ♥, 2 ♠) ?
d. un full, i.e. brelan + paire (p. ex. V ♠, V ♣, V ♦, 4 ♦, 4 ♥) ?
e. un flush (p. ex. 2 ♥, 3 ♥, 4 ♥, 9 ♥, V ♥) ?
f. une quinte (p. ex. 2 ♥, 3 ♣, 4 ♣, 5 ♦, 6 ♠) ?
g. un brelan (p. ex. 1 ♠, 1 ♣, 1 ♦, 5 ♦, 8 ♠) ?
h. deux paires (p. ex. 6 ♠, 6 ♣, 9 ♦, 9 ♠, 10 ♦) ?
i. une paire (p. ex. R ♠, R ♣, 7 ♦, 3 ♦, 2 ♠) ?

Exercice 2.13

a. Si n personnes sont présentes dans une pièce, quelle est la probabilité que leurs anniversaires tombent tous sur des jours différents ?
b. Quelle valeur faut-il donner à n pour que cette probabilité tombe en dessous de 1/2 ?

Pour simplifier, on exclura les gens nés le 29 février.

Indication
Commencez par calculer la probabilité de non-coïncidence pour n = 2, 3 et 4. Donnez ensuite la formule générale.

Exercice 2.14

Trois frères possèdent chacun trois chapeaux identiques, soit, au total, neuf chapeaux identiques, à part les initiales de chaque propriétaire, invisibles de l'extérieur.
Ces neuf chapeaux sont accrochés les uns à côté des autres. Un jour, les trois frères prennent chacun un chapeau au hasard.

Quelle est la probabilité qu'aucun des trois frères n'ait pris un chapeau qui lui appartienne ?

2.4. Axiomes du calcul des probabilités et théorèmes (résumé)

Résumons de manière un peu plus formelle nos constatations du § 2.3.

Axiome 2.1 La probabilité d'un événement E est un nombre réel compris entre 0 et 1 :

$$0 \le P(E) \le 1$$

Axiome 2.2 La probabilité de l'événement certain est égale à 1 :

$$P(\Omega) = 1$$

Axiome 2.3 La probabilité de la réunion de deux événements **incompatibles** est égale à la somme de leur probabilité :

si $E \cap F = \varnothing$, alors $P(E \cup F) = P(E) + P(F)$

Théorème 2.1 $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Théorème 2.2 $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

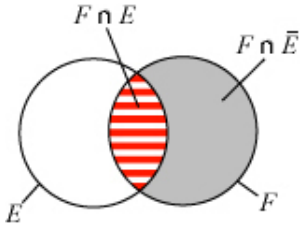
Théorème 2.3 $P(\varnothing) = 0$

Théorème 2.4 $P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n)$ si les événements E_i sont deux à deux incompatibles.

Théorème 2. 5 $P(F \cap \overline{E}) = P(F) - P(F \cap E)$

Preuve du théorème 2.5

$F \cap \overline{E}$ et $F \cap E$ sont incompatibles. En effet, $(F \cap \overline{E}) \cap (F \cap E) = \varnothing$ (voir dessin ci-contre).



Par ailleurs, $(F \cap \overline{E}) \cup (F \cap E) = F$.

Donc, en vertu de l'axiome 3 :

$$P(F) = P\big((F \cap \overline{E}) \cup (F \cap E)\big) = P(F \cap \overline{E}) + P(F \cap E)$$

ce qui prouve le théorème 2.5.

Exercice 2.15

Formules de de Morgan :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

A, B et $A \cup B$ sont trois événements de probabilités 0.4, 0.5 et 0.6, respectivement. Calculez les probabilités des événements suivants :

a. $\overline{A}$ **b.** $\overline{B}$ **c.** $A \cap B$
d. $\overline{A} \cap B$ **e.** $A \cap \overline{B}$ **f.** $\overline{A} \cup B$
g. $A \cup \overline{B}$ **h.** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **i.** $\overline{A} \cup \overline{B}$

2.5. Probabilité conditionnelle

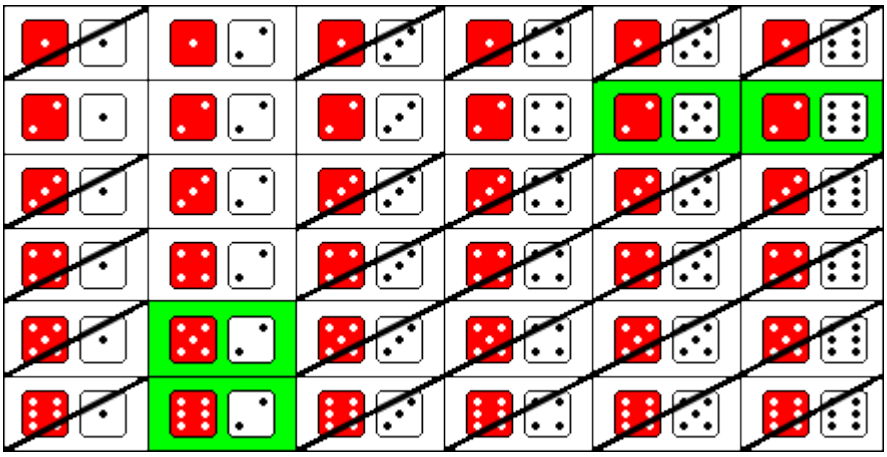
Nous noterons $P(E \mid F)$ cette nouvelle probabilité (probabilité conditionnelle de E, sachant que F s'est produit).

Supposons que nous attendions le résultat d'une épreuve et que nous connaissions la probabilité $P(E)$ de l'événement attendu E. Si, l'épreuve s'étant déroulée, nous recevons une information supplémentaire, par exemple que l'événement F s'est produit, ce renseignement va en général modifier la probabilité de réalisation de l'événement E.

Définition Soient E et F deux événements d'un univers Ω. Si $P(F) \neq 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de E par F le nombre noté $P(E \mid F)$ et tel que

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Exemple On lance deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieure à 6, sachant que l'un des deux dés indique un 2 ?



Résolution sans la définition Remarquons tout d'abord que toutes les 36 paires « habituelles » ne sont pas envisageables. En fait, seules 11 sont possibles. Et sur ces 11 paires, 4 ont une somme supérieure à 6. Donc $p=\frac{4}{11}$.

Résolution avec la définition

On pose : E : « la somme des dés est supérieure à 6 »
F : « un des deux dés indique un 2 ».
Donc $E \cap F$: « la somme des dés est supérieure à 6 **et** un des deux dés indique un 2 ».

Il est souvent plus facile de résoudre une probabilité conditionnelle **sans** la formule.

D'après la figure ci-dessus, on voit que $P(E \cap F)=\frac{4}{36}$ et $P(F)=\frac{11}{36}$.

Donc, selon la formule, on obtient bien $P(E|F)=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{4}{11}$.

Exercice 2.16

On choisit au hasard une famille parmi celles qui ont deux enfants. Quelle est la probabilité que ce soient deux garçons...

a. si l'on sait que l'un des deux au moins est un garçon ?
b. si l'on sait que l'un des deux enfants s'appelle Ernest ?

Exercice 2.17

Un sac contient vingt jetons ; la moitié sont noirs, les autres blancs. Cinq jetons portent en plus une marque spéciale et trois de ceux-là sont noirs.
On tire au hasard un jeton du sac. Quelle est la probabilité que ce jeton...

a. soit noir si l'on sait qu'il porte une marque ?
b. ne porte pas de marque si l'on sait qu'il est blanc ?

Exercice 2.18

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre un 6, sachant que les deux chiffres montrés sont différents ?

Exercice 2.19

On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre un 6, sachant que la somme des deux est i ? Calculez le résultat pour toutes les valeurs possibles de i.

Exercice 2.20

Dans une petite ville, la police recherche un ivrogne. Il y a quatre chances sur cinq qu'il se trouve dans un des huit bars de la ville. Deux agents de police visitent sept des huit bars sans le trouver. Quelle est la probabilité qu'ils le trouvent dans le huitième bar ?

Exercice 2.21

On considère trois urnes. L'urne *A* contient 2 boules blanches et 4 rouges ; l'urne *B*, 8 blanches et 4 rouges ; l'urne *C* 1 blanche et 3 rouges. On tire une boule de chacune des urnes.
Quelle est la probabilité que la boule tirée de l'urne *A* soit blanche, si l'on sait que le tirage a livré 2 boules blanches exactement ?

Indication : utilisez la formule de la probabilité conditionnelle.

Formule de Bayes

La formule de la probabilité conditionnelle peut être écrite sous une autre forme, appelée **formule de Bayes** :

Thomas **Bayes**
(Londres, ?/?/1702 -
Tunbridge Wells, 17/4/1761)

$$P(E|F)=\frac{P(F|E)\cdot P(E)}{P(F|E)\cdot P(E)+P(F|\overline{E})\cdot P(\overline{E})}$$

Le numérateur découle de la formule de la probabilité conditionnelle :

$$P(F|E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)} \Rightarrow P(F\cap E)=P(F|E)\cdot P(E)$$

Le dénominateur s'obtient ainsi :

$$P(F)=P(F\cap E)+P(F\cap\overline{E})=P(F|E)\cdot P(E)+P(F|\overline{E})\cdot P(\overline{E})$$

Exemple
Un élève répond à une question à choix multiple. De deux choses l'une : soit il connaît la réponse, soit il la devine. Soit *p* la probabilité que l'élève connaisse la réponse et donc 1–*p* celle qu'il la devine. On admet que l'élève qui devine répondra correctement avec probabilité 1/*m* où *m* est le nombre de réponses proposées. Quelle est la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question s'il y a répondu correctement ?

Soient *E* et *F* respectivement les événements « il connaît vraiment la réponse » et « l'étudiant répond correctement à la question ». Alors

$$P(E|F)=\frac{1\cdot p}{1\cdot p+\left(\frac{1}{m}\right)(1-p)}=\frac{m\cdot p}{1+(m-1)\cdot p}$$

En prenant par exemple $m = 5$ et $p = 0.5$, la probabilité qu'un élève connaisse la réponse à une question sachant qu'il a répondu correctement sera ainsi de $\frac{5}{6}$.

Exercice 2.22

Une maladie atteint une personne sur mille. Il existe un test pour savoir si une personne est infectée, mais ce test n'est pas parfait : si la personne est infectée, le test sera positif dans 99% des cas ; mais, dans 2% des cas, le test sera positif alors que la personne est saine.
Vous venez d'être examiné et le test est positif. Quelle est la probabilité que vous soyez vraiment atteint par cette maladie ?

2.6. Événements indépendants

Occurrence : apparition, réalisation

Deux événements *E* et *F* sont indépendants l'un de l'autre si l'occurrence de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de l'autre. Par exemple, le jet d'un dé n'a pas d'influence sur le jet d'un autre (sauf s'ils sont collés, magnétisés, etc.).

De la formule de la probabilité conditionnelle donnée au § 2.5, on sait que $P(E \cap F) = P(E \mid F)\cdot P(F)$. Si les deux événements *E* et *F* sont indépendants, alors $P(E \mid F) = P(E)$, donc $P(E \cap F) = P(E)\cdot P(F)$.

Définition On dit que deux événements E et F sont **indépendants** si $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$. Dans le cas contraire, on dit qu'ils sont **dépendants**.

Exercice 2.23

On jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « Le même côté sort deux fois. »
B : « Le nombre de côtés face est inférieur à deux. »

Exercice 2.24

On tire au hasard une carte d'un paquet de 52 cartes à jouer ordinaires. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « La carte tirée est un as. »
B : « La carte tirée est un pique. »

Exercice 2.25

Je vais lancer une pièce de monnaie équilibrée pour la quatrième fois. Les trois premières fois j'ai obtenu pile. Quelle est la probabilité que j'obtienne pile encore cette fois ?

Exercice 2.26

Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée vaut 0.9, celle que toutes deux soient occupées 0.5.

Questions **a** - **d** : voir exercice 2.15

Quelle probabilité y a-t-il...

a. que la première salle soit libre ?
b. que les deux salles soient libres ?
c. que l'une des deux salles au moins soit libre ?
d. qu'une seule salle soit libre ?
e. que la seconde salle soit libre si l'on sait que la première est occupée ?

f. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?
A : « La première salle est occupée ».
B : « La seconde salle est occupée ».

Exercice 2.27

Un caméléon daltonien posé sur du vert prend soit la couleur verte, soit la couleur rouge, avec la même probabilité. Quand il est posé sur du rouge, il prend soit la couleur verte une fois sur cinq, soit la couleur rouge quatre fois sur cinq.
Julie étale chaque matin sa couverture bicolore sur l'herbe, une fois sur trois côté rouge visible, deux fois sur trois côté vert visible.
Un couple de caméléons daltoniens vient s'ébattre sur sa couverture.

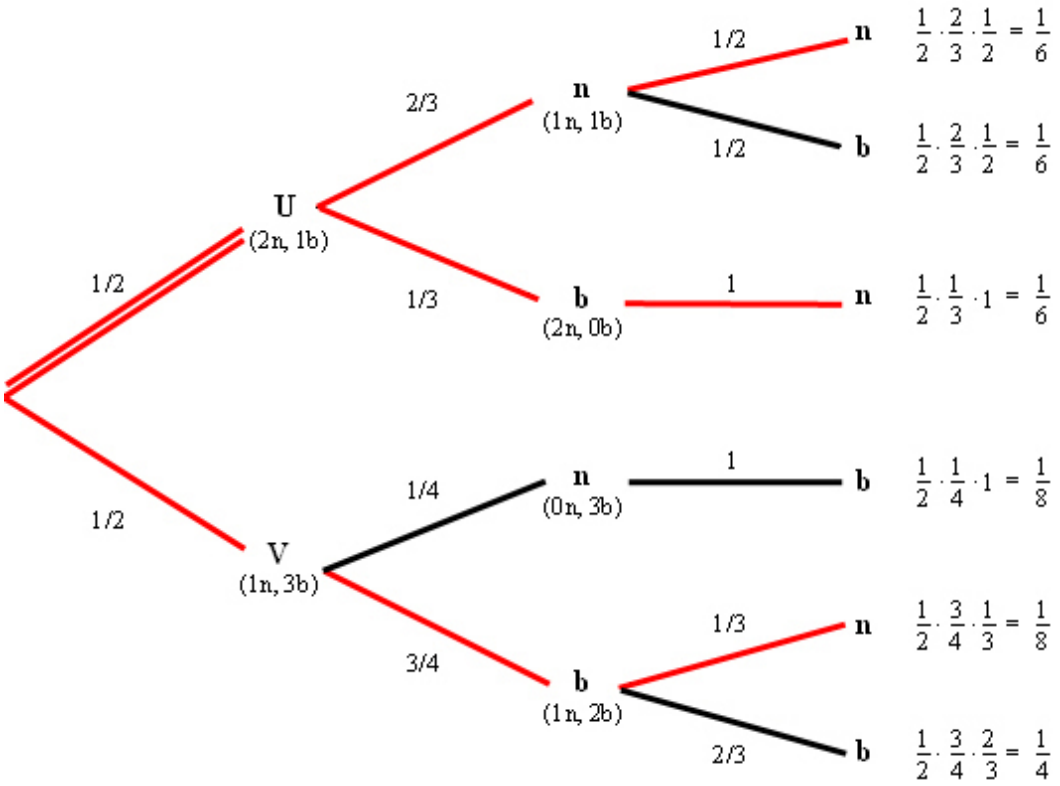
a. Calculez la probabilité qu'ils soient de la même couleur.
b. Les événements « le caméléon mâle est vert » et « le caméléon femelle est vert » sont-ils indépendants ?
c. Sachant qu'ils sont de couleurs différentes, calculez la probabilité que la face apparente de la couverture soit rouge.

2.7. Épreuves successives

Dans de nombreuses applications, une épreuve globale se compose de n épreuves partielles successives. Les issues possibles sont alors des n-uplets $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Exemple On a deux urnes U et V extérieurement identiques. U contient 2 boules noires et 1 blanche, V contient 1 noire et 3 blanches.
On choisit d'abord une des deux urnes au hasard, puis on extrait d'elle successivement 2 boules (sans remettre la première dans l'urne).

L'arbre ci-dessous représente cette suite d'opérations, avec les probabilités associées :



La probabilité d'un chemin est égale au **produit** des probabilités des branches qui forment ce chemin. En effet, d'après la formule de probabilité conditionnelle :
$P(E \cap F) = P(E|F) \cdot P(F)$.

On remarquera que dans un arbre deux chemins sont toujours incompatibles. Pour calculer la probabilité d'un événement qui est la réunion de plusieurs chemins, on **additionne** les probabilités de ces chemins (voir théorème 2.4).

Les questions suivantes se résolvent aisément à l'aide de l'arbre :

Ce sont les trois chemins rouges dans le dessin ci-dessus.

a. Quelle probabilité a-t-on de tirer en dernier une boule noire ?

$P((-,-,n) = P((U,n,n) \cup (U,b,n) \cup (V,b,n)) =$

$= P((U,n,n)) + P((U,b,n)) + P((V,b,n)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{11}{24}$

b. Quelle probabilité a-t-on de tirer deux boules de même couleur ?

$P((-,n,n) \cup (-,b,b)) = P((U,n,n) \cup (V,b,b)) = \frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$

c. Quelle probabilité a-t-on de tirer une boule noire en dernier si l'on sait que la première était blanche ?

Les questions **c** et **d** sont des probabilités conditionnelles.

$$P((-,-,n)|(-,b,-)) = \frac{P((-,b,n))}{P((-,b,-))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}} = \frac{7}{13}$$

d. Quelle probabilité a-t-on d'avoir choisi l'urne U si la seconde boule tirée est noire ?

$$P((U,-,-)|(-,-,n)) = \frac{P((U,-,n))}{P((-,-,n))} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{8}{11}$$

Exercice 2.28

Me voici sur une plage isolée d'Hawaii. J'ai l'intention d'y prendre un vrai bain de vagues, c'est-à-dire passer les brisants, nager tranquillement au large puis rentrer en me faisant ramener par une vague. Mais on me le déconseille fortement. Les vagues sont en effet ici colossalement fortes et charrient 2 mètres d'écumes environ. Aussi, 1 bon nageur sur 5 ne réussit pas à franchir les brisants et revient directement sur la plage. Quand on nage tranquillement au large, les requins vous dévorent 1 fois sur 4. Puis la probabilité de se noyer dans l'écume en suivant une vague au retour est de 40%. Pour finir, 3 personnes sur 20 parmi les rescapés apparents de ce bain s'effondrent terrassés par une crise cardiaque en arrivant sur le sable.

Quelle est donc la probabilité, si je me lance malgré tout en mer...

a. de me noyer ?
b. de revenir vivant sur la plage ?
c. de revenir vivant sur la plage après avoir passé les brisants ?

Épreuves successives indépendantes

Lorsqu'une épreuve globale est formée d'une succession d'épreuves **indépendantes** les unes des autres, ce qui constitue un cas particulier du paragraphe précédent, les formules à utiliser se simplifient considérablement. Par exemple si A, B et C sont trois événements relatifs à trois épreuves successives indépendantes, on aura :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

Exemple On lance un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité d'obtenir la suite 2, 5, 3 ?

La réponse est simplement $P((2,5,3)) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$.

Exercice 2.29

On lance un dé trois fois de suite. Quelle est la probabilité que ni le 3 ni le 5 n'apparaissent ?

Exercice 2.30

On atteint une cible 3 fois sur 10. Combien de fois faut-il tirer pour avoir plus de 99 chances sur 100 de toucher la cible au moins une fois ?

Exercice 2.31

Vous jouez 1000 grilles par an au *Swiss Lotto*, où il faut cocher 6 numéros sur 45.

a. Quelles sont vos chances de gagner le gros lot (i.e. d'avoir coché les 6 bons numéros) au moins une fois si vous persévérez à ce rythme pendant cinquante ans ?
b. À ce rythme, combien d'années devriez-vous jouer pour avoir plus d'une chance sur deux de gagner le gros lot au moins une fois ?

Exercice 2.32

Cette politique de « surréservation » (overbooking) est très courante parmi les compagnies d'aviation.

Un guide dispose d'un minicar à 10 places pour faire visiter Paris. Avec le temps, il a remarqué qu'une personne qui a réservé une place annule sa réservation 1 fois sur 5. Il décide donc de toujours louer 11 places.

Quel est le nombre approximatif de jours dans l'année où le guide devra renvoyer un de ses clients par manque de place, en supposant qu'il travaille 250 jours par an ?

Exercice 2.33

Problème du Chevalier de Méré (posé à Blaise **Pascal** en 1654).
Qu'est-ce qui est le plus probable : obtenir au moins un 6 en quatre lancers d'un dé, ou obtenir au moins un double-6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice 2.34

Quand je plante des capucines, ça marche 1 fois sur 4. Combien de capucines (au minimum) dois-je planter pour avoir plus de 3 chances sur 4 d'en voir au moins une fleurir ?

Exercice 2.35

Un automate peut délivrer du thé, du lait ou du chocolat. Un second bouton permet de préciser si la boisson doit être chaude ou froide.
À la suite d'un dérangement le bouton permettant le choix de la boisson ne fonctionne que 1 fois sur 2 en moyenne et celui qui permet le choix de la température que 2 fois sur 3 en moyenne.
Un consommateur tient absolument à avoir une tasse de chocolat chaud. Il est prêt à payer 3 fois de suite pour satisfaire son désir. Quelle probabilité a-t-il de ne pas obtenir satisfaction ?

Exercice 2.36

On tire successivement 4 cartes d'un jeu de 36 cartes. Le jeu ayant été brassé convenablement, quelle probabilité a-t-on de tirer...

a. dans l'ordre : as ♠, as ♣, as ♦, as ♥ ?
b. les quatre as ?
c. les quatre as sachant que les deux premières cartes tirées étaient des as ?
d. un as et trois autres cartes (ordre indifférent) ?
e. un as au moins ?
f. un as au moins sachant que la première carte tirée n'était pas un as ?

Exercice 2.37

Deux urnes U et V contiennent respectivement :
U : 3 boules rouges, 2 boules bleues
V : 1 boule rouge, 1 boule bleue
On enlève une boule de U puis l'on met les boules restantes dans V. On tire alors une boule de V. Calculez la probabilité...

a. que cette boule soit rouge
b. que cette boule soit rouge si l'on sait que la première boule tirée était rouge
c. que la première boule tirée ait été rouge si au second tirage on a une boule rouge.

Exercice 2.38

Un joueur professionnel garde dans sa poche 2 pièces, l'une normale et l'autre ayant ses deux faces identiques, disons deux fois pile. Il en prend une au hasard et la lance ; elle montre pile.
a. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse de la pièce normale ?
b. Il jette la pièce une seconde fois et elle montre à nouveau pile. Même question.

Exercice 2.39

Combien faut-il rencontrer de personnes pour avoir plus d'une chance sur deux de trouver quelqu'un qui est né le même jour que soi (par exemple le 3 juillet, peu importe l'année) ?

Attention ! Cet exercice ressemble beaucoup au 2.13, mais le résultat est, comme vous le verrez, très différent.

2.8. La loi binomiale

Schéma

p est la probabilité de tirer une boule rouge lors d'un tirage (succès).
p ne varie pas au cours du temps.
$1-p$ est la probabilité d'échec.
k est le nombre de succès.
$n-k$ est le nombre d'échecs.

Une urne contient N boules. R de ces boules sont rouges. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve n fois de suite.
La probabilité de tirer k boules rouges est égale à :

$$C_k^n p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{avec} \quad p = \frac{R}{N}$$

Cette loi s'utilise lorsqu'il n'y a que **deux issues possibles** à l'épreuve : **succès** (boule rouge) ou **échec** (boule pas rouge) et que l'on s'intéresse au nombre de succès possibles (k) sur un total de n épreuves.

Exemple On lance un dé équilibré 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir respectivement 1, 2, 3, 4 fois « 6 » ?

$$P(\text{1 fois « 6 »}) = C_1^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{19} \approx 0.104$$

$$P(\text{2 fois « 6 »}) = C_2^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \approx 0.198$$

$$P(\text{3 fois « 6 »}) = C_3^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \approx 0.238$$

$$P(\text{4 fois « 6 »}) = C_4^{20}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \approx 0.202$$

Exercice 2.40

Quand p=1/2, les calculs se simplifient beaucoup, car $p = 1-p$.

On lance une pièce de monnaie 20 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir...

a. 8 fois face
b. 9 fois face
c. 10 fois face
d. plus de 7 fois et moins de 13 fois face
e. moins de 4 fois face ?

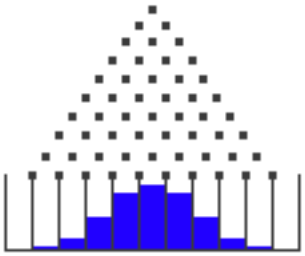
Exercice 2.41

On admet qu'un trait physique (telle la couleur des yeux ou le fait d'être gaucher) chez un homme est déterminé par une paire de gènes. On désignera par *d* le gène de la paire qui est dominant, et par *r* celui qui est récessif. Une personne portant *dd* sera ainsi à dominance pure, une autre portant *rr* sera à caractère récessif pur, alors que *rd* entraînera une dominance hybride. Les dominances pures et hybrides ne se distinguent pas extérieurement. Un enfant recevra un gène de chacun de ses parents. Si, pour un trait particulier, les deux parents sont hybrides et s'ils ont 4 enfants, quelle est la probabilité que 3 de ceux-ci manifestent extérieurement le trait dominant ?

Exercice 2.42

Le crible de Galton

Des billes tombent verticalement sur un assemblage de clous placés en quinconce sur des lignes horizontales et équidistants de leurs voisins immédiats (voir dessin ci-contre). Le diamètre des billes est égal à la distance entre les clous. Chaque fois qu'une bille tape un clou, elle a la même probabilité (p = 0.5) de continuer sa chute à gauche ou à droite. En bas du crible se trouvent des compartiments dans lesquels tombent les billes. Si nous réalisons l'expérience un grand nombre de fois, les billes viennent s'accumuler dans les compartiments et forment ainsi un histogramme. La hauteur d'un bâton de l'histogramme est proportionnelle au nombre de billes s'y trouvant.



a. Déterminer l'histogramme théorique du crible de Galton ci-contre. On laisse tomber 1024 billes.
b. Même question si la probabilité que la bille tombe à droite d'un clou est p = 0.25. Dessinez la répartition obtenue et comparez-la avec l'histogramme du point **a.**

Exercice 2.43

Il y a en moyenne 10% de gauchers. Calculez la probabilité d'avoir au moins 4 gauchers parmi 20 personnes.

Exercice 2.44

Un graphologue prétend être capable de déterminer le sexe d'une personne d'après son écriture dans 90% des cas. On lui soumet 20 échantillons d'écriture.
On accepte son affirmation s'il réussit à identifier au moins 15 fois le sexe correct. Dans le cas contraire, on rejette son affirmation. Quelle est la probabilité...

a. que l'on accepte son affirmation alors qu'il répond au hasard ?
b. que l'on rejette son affirmation alors qu'elle est fondée ?

2.9. La loi multinomiale

Il s'agit d'un tirage avec remise dans une urne multicolore. Une urne contient des boules de k couleurs différentes r_k. On note p_j la proportion de boules de couleur r_j. On effectue n tirages avec remise.

Considérons une expérience aléatoire avec k résultats possibles, disons les résultats r_1, r_2, …, r_k.

La probabilité du résultat r_j sera notée p_j. On a donc $0 \leq p_j \leq 1$ et $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$.

Maintenant, considérons n répétitions indépendantes de cette expérience aléatoire. La probabilité d'obtenir n_1 fois le résultat r_1, n_2 fois le résultat r_2, …, et n_k fois le résultat r_k est donné par la formule :

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{n_k}$$

avec $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Exercice 2.45

Une urne contient 10 boules rouges, 15 bleues, 3 jaunes et 8 vertes. On tire une boule de cette urne, on note sa couleur, puis on la remet dans l'urne. On répète cette épreuve dix fois de suite.
Quelle est la probabilité d'avoir noté 3 boules rouges, 4 bleues, 1 jaune et 2 vertes ?

Exercice 2.46

On lance un dé équilibré 24 fois de suite. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir...

a. 5 six et 5 cinq ?
b. 9 six et 12 nombres impairs ?
c. les 6 chiffres 4 fois ?

Exercice 2.47

On « alourdit » un dé pour que le 6 apparaisse 30% du temps, pour que la face opposée 1 apparaisse 10% du temps, et pour que chacune des autres faces apparaisse 15% du temps. On jette le dé six fois. Calculez la probabilité que...

a. chaque face apparaisse une fois ;
b. les faces 4, 5 et 6 apparaissent chacune deux fois.

2.10. Exercices supplémentaires

Exercice 2.48

Une urne contient 5 boules blanches et 5 boules noires. On y tire au hasard 3 boules une par une, d'abord en les remettant chaque fois dans l'urne (méthode 1), puis sans les y remettre (méthode 2). Avec quelle méthode a-t-on le plus de chances de tirer ainsi une boule blanche et 2 boules noires (l'ordre d'apparition n'a pas d'importance) ?

Exercice 2.49

Sur un damier dont chaque case carrée mesure 58 mm de côté, on lance une pièce de 5 centimes (dont le diamètre est de 17 mm). Quelle est la probabilité que la pièce tombe à l'intérieur d'une case, sans en déborder ?

Exercice 2.50

Au début des années trente J. B. **Rhine** à l'université Duke (États-Unis) aurait obtenu des résultats significatifs avec des sujets apparemment doués. L'une de ses expériences de clairvoyance avec l'étudiant H. E. **Pearce** est restée célèbre : celui-ci avait su dire exactement 558 fois sur 1 850 tirages successifs (la probabilité pour que ce résultat ait été dû au hasard est de 10^{-22}) quelle carte *Zener* avait été tirée en un lieu éloigné de 90 à 230 mètres de lui.

À partir des années 1930, la perception extrasensorielle fit l'objet d'investigations standardisées en laboratoire. Le matériel comprenait des cartes *Zener*, c'est-à-dire un jeu de vingt-cinq cartes portant cinq symboles simples (un cercle, une croix, un carré, trois lignes ondulées, une étoile). Dans les expériences de perception extrasensorielle, il s'agit de deviner la carte retournée par un sujet manipulant les cartes hors de la vue du « devin ».

On fait deviner à un sujet vingt-cinq cartes *Zener* en tirant les cartes successivement. Quelle est la probabilité qu'il devine juste…

a. les 25 cartes (sans remise) ?
b. les 25 cartes (avec remise) ?
c. entre 0 et 7 cartes (avec remise) ?
d. entre 8 et 16 cartes (avec remise) ?
e. entre 17 et 25 cartes (avec remise) ?

Exercice 2.51

Let's Make A Deal ! était un jeu très populaire diffusé sur une chaîne américaine dans les années septante. À la fin du jeu, Monty Hall vous offrait la possibilité de gagner ce qui se trouvait derrière une porte.

Vous avez trois portes devant vous : derrière une se trouve un prix magnifique (par exemple une voiture) et derrière les deux autres un prix moins intéressant (par exemple une chèvre). Vous choisissez une porte. Pour ménager le suspense, l'animateur, avant de révéler ce qu'il y a derrière votre porte, ouvre une des deux autres portes (derrière laquelle se trouve toujours une chèvre). Il vous pose alors la question : « Parmi les deux portes encore fermées, laquelle choisissez-vous ? »

Vaut-il mieux garder la première porte choisie ou au contraire prendre l'autre porte ? À moins que cela n'ait aucune importance...

Exercice 2.52

Pour cet exercice, nous supposerons que les jeunes filles australiennes mesurent entre 1.50 m et 1.75 m, qu'elles pèsent entre 40 kg et 70 kg, que toutes les mesures possibles sont équiprobables et qu'il n'y a pas de lien particulier entre la taille et le poids (ouf !).
Australian Airways recrute des hôtesses de l'air parmi les jeunes filles qui mesurent au moins 1.65 m et pèsent au plus 10 kg de moins que leur nombre de centimètres au-dessus d'un mètre.
Quelle est alors la proportion de jeunes filles australiennes pouvant prétendre à un poste d'hôtesse de l'air chez Australian Airways ?

Indication
Faites un graphique avec la taille en abscisse et le poids en ordonnée. Comparez ensuite des aires.

2.10 Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître les axiomes	❑ ok
Connaître les théorèmes	❑ ok
Reconnaître et calculer les probabilités conditionnelles	❑ ok
Reconnaître deux événements indépendants	❑ ok
Savoir faire un arbre pour résoudre un problème d'épreuves successives	❑ ok
Maîtriser la loi binomiale	❑ ok
Maîtriser la loi multinomiale	❑ ok

3. Variables aléatoires

3.1. Un peu d'histoire

Blaise **Pascal**
(1623 - 1662)

Les origines de la notion d'**espérance mathématique** remontent au *problème des parties* de **Pascal** : « Deux joueurs *A* et *B* jouent une partie en plusieurs coups ; à chaque coup, chaque joueur a la même probabilité de gagner. Le premier qui a gagné trois coups ramasse l'enjeu qui est de 64 pistoles, chaque joueur ayant misé 32 pistoles au début du jeu. Soudain, les joueurs aperçoivent la police et doivent interrompre le jeu avant la fin de la partie. Comment faut-il partager l'enjeu ? »
Supposons que le joueur *A* ait gagné deux coups et le joueur *B* un coup au moment où la police arrive. Pour partager l'enjeu, on raisonnera ainsi : si le coup suivant était joué, *A* pourrait le gagner et empocherait donc les 64 pistoles. Il pourrait aussi le perdre : *A* et *B* auraient alors gagné deux coups chacun et il serait légitime de partager l'enjeu de manière égale. *A* peut donc espérer avec des chances égales gagner 64 pistoles ou 32. Donc, 32 pistoles lui sont assurées et ce sont les 32 pistoles restantes qui sont le véritable enjeu du coup suivant. Il est légitime de les partager également entre *A* et *B*. Donc finalement *A* va toucher 32+16=48 pistoles et *B* 16 pistoles.

Exercice 3.1

À l'aide d'un arbre d'épreuves successives, calculez la probabilité de gain des deux joueurs de l'introduction historique et vérifiez que la répartition de *Pascal* (3/4, 1/4) est juste.

3.2. Variables aléatoires discrètes

On désigne une variable aléatoire par une lettre majuscule.
Les valeurs qu'elle prend sont écrites en minuscules (x_1, x_2, etc.)

Il arrive souvent qu'à propos d'une épreuve, on soit amené à attribuer des valeurs numériques à ses issues.

D'un point de vue formel, une **variable aléatoire** est une **fonction** $X : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est l'univers des résultats. Si l'ensemble des valeurs de cette fonction est fini ou dénombrable, on dit que cette variable aléatoire est **discrète**.

Exemple

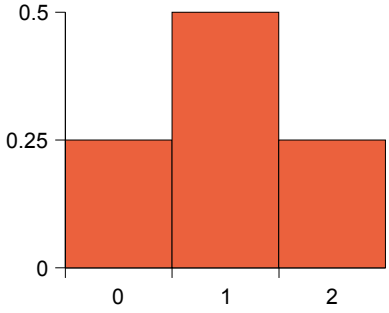
Prenons tout de suite un exemple : on lance deux pièces de monnaie et on compte le nombre de côtés pile, nombre que l'on désignera par la variable aléatoire *X*. Trois résultats sont possibles : 0, 1 ou 2. À chacun de ces trois résultats possibles, on **associe une probabilité** :

On remarque que la somme de des probabilités est égale à 1.

$$P\{X=0\} = P\{(F, F)\} = 1/4$$
$$P\{X=1\} = P\{(F, P), (P, F)\} = 1/2$$
$$P\{X=2\} = P\{(P, P)\} = 1/4$$

On obtient ce qu'on appelle une **loi de probabilité** ou **distribution**, que l'on peut représenter sous la forme d'un diagramme en bâtons:

On remarque que si la largeur d'un rectangle vaut 1, la somme des aires des rectangles est égale à 1.



Espérance

C'est en fait une moyenne pondérée !

L'espérance est aussi notée μ

L'**espérance d'une variable aléatoire** est l'un des concepts les plus importants en théorie des probabilités. Pour une variable aléatoire discrète X, on définit l'espérance de X, notée $E[X]$, par l'expression :

$$E[X] = \sum_i p_i x_i$$

où la variable aléatoire discrète X peut prendre les valeurs x_1, x_2, x_3, ... avec les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, ...

Pour y voir plus clair, reprenons l'exemple des deux pièces de monnaie. L'espérance de la variable aléatoire X est $E[X] = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 = 1$.

Variance et écart-type

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance μ, prenant les valeurs x_1, x_2, x_3, ..., avec les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, ... On appelle **variance** de X le nombre $V(X)$ défini par :

$$V(X) = E[(X-\mu)^2] = \sum_i (x_i - \mu)^2 p_i$$

Johann Samuel **König**, mathématicien allemand, 1712-1757. Sa formule facilite les calculs.

On utilise souvent la formule de **König** : $V(X) = \sum_i p_i x_i^2 - \mu^2 = E[X^2] - (E[X])^2$

On appelle **écart-type** de X le nombre σ défini par $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Exercice 3.2

On lance trois pièces équilibrées. On désigne par X le nombre de piles.

a. Dessinez le diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X.
b. Calculez $E[X]$.
c. Calculez $V(X)$.

Exercice 3.3

On jette deux dés équilibrés. On désigne par X le chiffre maximum montré par les deux dés.

a. Dessinez le diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X.
b. Calculez $E[X]$.
c. Calculez $V(X)$.

Exercice 3.4

Un dé est pipé de sorte que la probabilité d'apparition d'une face est proportionnelle à ce nombre. Soit X la variable aléatoire attachée au nombre de points qui apparaissent lorsqu'on lance ce dé.

a. Dessinez le diagramme en bâtons de la loi de probabilité de X.
b. Calculez $E[X]$.
c. Calculez $V(X)$.

3.3. Espérance de gain

Un lascar nous propose le jeu suivant : « Je lance deux pièces en l'air. Si on voit deux piles, je vous donne 3 francs, dans les autres cas, vous me donnez un franc. »
Ce jeu est-il équitable ?

Pour le savoir, on va calculer notre **espérance de gain**. Les deux côtés pile apparaîtront 1 fois sur 4. Nous gagnerons donc en moyenne 3 francs une fois sur quatre, et nous perdrons 1 franc trois fois sur quatre.

Notre espérance de gain est l'espérance mathématique de la variable aléatoire *Y*, *Y* étant une fonction de la variable aléatoire *X*. On a :

$$E[Y]=E[g(X)]=\sum_i p_i g(x_i)=\sum_i p_i y_i$$

C'est plus simple qu'il n'y paraît ; les y_i sont :

$y_1 = g(x_1) = g[X=0] = -1$
$y_2 = g(x_2) = g[X=1] = -1$
$y_3 = g(x_3) = g[X=2] = 3$

Les probabilités respectives étant les mêmes que dans l'exemple du § 3.2, l'espérance de gain est :

$$E[Y]=\underbrace{\frac{1}{4}}_{p_1}\cdot\underbrace{(-1)}_{y_1}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{p_2}\cdot\underbrace{(-1)}_{y_2}+\underbrace{\frac{1}{4}}_{p_3}\cdot\underbrace{3}_{y_3}=0$$

Le jeu est équitable. Si notre lascar nous avait proposé plus de 3 francs, le jeu nous aurait favorisés, car notre espérance de gain aurait été positive. Inversement, s'il nous avait proposé moins de 3 francs, le jeu nous aurait été défavorable, car notre espérance aurait été négative.

Exercice 3.5

Un sac contient 5 jetons numérotés 1, 1, 2, 2, 3. On vous propose le jeu suivant :
Vous tirez un jeton au hasard et vous recevez alors une somme d'argent (positive ou négative !) égale au carré du nombre tiré, diminué de 4 francs.
Cette proposition est-elle avantageuse ?

Exercice 3.6

On vous propose le jeu suivant qui se joue en lançant 3 dés. Pour jouer, il faut verser 1 franc. Pour 3 six je reçois 36 francs ; pour 2 six, 7 francs et pour 1 six, 1 franc.
Est-ce équitable ?

Exercice 3.7

On vous propose le jeu suivant :
Pour pouvoir jouer, il faut d'abord verser 1 franc.
On jette deux dés simultanément. Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, on ne gagne rien. Si les dés présentent deux chiffres pairs différents, on gagne 1 franc. Enfin, si les dés présentent le même chiffre pair, on gagne une somme égale au total des points des deux dés.
Joueriez-vous à ce jeu ?

Exercice 3.8

Bob et Bobette jouent aux dés. Ils lancent tour à tour 2 dés en l'air et observent les chiffres sortis. Quand la somme est 7 ou le produit 6, Bob marque 1 point ; quand la somme est 6 ou le produit 4, Bobette marque 1 point.
Ce jeu est-il équitable ?

Exercice 3.9

Les jeux à gratter de la loterie romande

Calculez l'espérance de gain des différents jeux à gratter de la loterie romande.
Lequel est le plus « favorable » ?

Vous trouverez toutes les informations sur www.loterie.ch (cherchez « jeux à gratter », puis « tableau des lots »).

Exercice 3.10

Swiss Lotto
Jouer une grille coûte 1 franc. On doit cocher 6 numéros sur 45.
Le tirage au sort comprend 6 numéros. Un numéro complémentaire est encore tiré mais celui-ci n'entre en ligne de compte que si 5 des 6 premiers numéros tirés sont exacts.
Si on a 3 numéros cochés exacts, on gagne 6 francs.
Si on a 4 numéros cochés exacts, on gagne 50 francs.
Si on a 5 numéros cochés exacts, on gagne 4'000 francs.
Si on a 5 numéros cochés exacts plus le numéro complémentaire, on gagne 100'000 francs.
Si on a 6 numéros cochés exacts, on gagne 2 millions de francs.

Avec 5 numéros gagnants et plus, les gains dépendent du nombre de gagnants et de la cagnotte. On a donné ci-contre des dotations réalistes.

Calculez l'espérance de gain au *Swiss Lotto* en ne remplissant qu'une seule grille (n'oubliez pas de soustraire le prix de la grille).

Exercice 3.11*

Demandez à un de vos amis de jouer avec vous au jeu suivant : asseyez-vous autour d'une table. Chacun des deux joueurs doit initialement cacher ses mains sous la table, puis, brusquement, montrer l'une des deux.
Si chacun a montré la main droite, votre partenaire vous donne 3 francs. Qu'il vous en donne 2 si chacun a montré la main gauche. Si, par contre, vous montrez la main droite et lui la gauche, donnez-lui 1 franc ; et si enfin, vous montrez la main gauche alors qu'il montre la droite, donnez-lui 4 francs.
Si vous jouez de nombreuses fois à ce jeu avec astuce (mais sans tricher), vous pouvez être sûr de gagner de l'argent.
Comment procéder ?

Indication
Vous devez maximiser votre espérance de gain… en priant pour qu'elle soit positive !

3.4. Loi de Poisson

Siméon Denis **Poisson**
(1781 - 1840)

Il introduisit cette distribution dans *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* (1837).

Une variable aléatoire discrète X pouvant prendre pour valeur 0, 1, 2, … est dite **de Poisson avec paramètre λ** s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$p_k = Pr(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Dans la loi de Poisson $E[X] = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Le domaine d'application de la loi de Poisson a été longtemps limité à celui des événements rares comme les suicides d'enfants, les arrivées de bateaux dans un port ou les accidents dus aux coups de pied de cheval dans les armées (étude de Ladislaus Bortkiewicz).
Depuis quelques décennies, son champ d'application s'est considérablement élargi. Actuellement, on l'utilise beaucoup dans les télécommunications (pour compter le nombre de communications dans un intervalle de temps donné), le contrôle de qualité statistique, la description de certains phénomènes liés à la désintégration des noyaux radioactifs, la biologie, la météorologie, la finance pour modéliser la probabilité de défaut d'un crédit, ...

Exercice 3.12

Démontrez que la loi de poisson est bien une loi de probabilité.

Montrez pour cela que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ et que $p_k \geq 0$, pour tout k.

Exercice 3.13

Démontrez que, dans la loi de Poisson, $E[X] = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson

La loi de Poisson est la loi des phénomènes rares, de faible probabilité. Les variables aléatoires de Poisson ont un champ d'application fort vaste, en particulier du fait qu'on peut les utiliser pour approcher des variables aléatoires binomiales de paramètre (n, p) pour autant que n soit grand et p assez petit pour que np soit d'ordre de grandeur moyen (environ 5).

Pour s'en convaincre, admettons que X soit une variable aléatoire binomiale de paramètre (n, p) et posons $\lambda = np$.

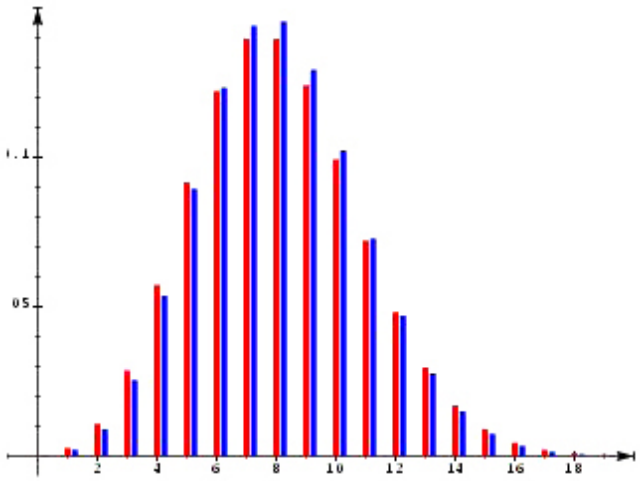
$$\Pr(X = k) = \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{C_k^n} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k}\,\frac{\lambda^k}{k!}\,\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}$$

Maintenant, pour n grand et λ modéré, on a :

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} \approx 1 \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda} \qquad \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1$$

Donc, pour n grand et λ modéré : $p_i = \Pr(X = i) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$



En bleu, la loi binomiale (n = 100, p = 0.08) et en rouge la loi de Poisson de paramètre λ = 8.

Exemple

Un certain vaccin provoque chez un individu sur 800 environ une réaction dangereuse. Quelle probabilité y a-t-il, en vaccinant 3000 personnes, qu'il y ait

a. trois réactions dangereuses ?

b. plus de deux réactions dangereuses ?

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre total de réactions dangereuses. On a une distribution binomiale avec $p = \frac{1}{800}$; n = 3000 ; λ = 3.75.

a. $\Pr(X = 3) = \frac{3000!}{3!2997!}\left(\frac{1}{800}\right)^3\left(\frac{799}{800}\right)^{2997} \approx \frac{3.75^3 e^{-3.75}}{3!} = 0.2067$

Loi binomiale Loi de Poisson

On voit que le calcul est grandement facilité par le recours à la loi de Poisson.

Les valeurs exactes données par la loi binomiale sont :

a. 0.20678

b. 0.7231

b. $\Pr(X > 2) = 1 - \Pr(X \leqslant 2) = 1 - (\Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) + \Pr(X = 2))$

$$\approx 1 - \left(\frac{3.75^0 e^{-3.75}}{0!} + \frac{3.75^1 e^{-3.75}}{1!} + \frac{3.75^2 e^{-3.75}}{2!}\right) = 0.7229$$

Exercice 3.14

Admettons que le nombre de fautes de frappe par page suive une loi de Poisson de moyenne 0.75. On ouvre un livre à une page au hasard.
Calculez la probabilité qu'il y ait au moins une faute de frappe sur cette page.

Processus de Poisson

D'une manière générale, lorsqu'un phénomène permet de supposer que

- un seul événement arrive à la fois,
- le nombre d'événements se produisant pendant un intervalle de durée t ne dépend que de la durée de cette période,
- les événements sont indépendants,

on dit que ce phénomène suit un **processus de Poisson**.
Si le nombre d'événements par unité de temps est égal à λ, on démontre que la probabilité d'obtenir k événements pendant un temps t est :

$$\Pr(X=k) \approx e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Exemple

Le nombre de tremblements de terre par semaine sur la côte ouest américaine suit une loi de Poisson de moyenne 2.
Quelle est la probabilité qu'il y ait 6 secousses pendant le prochain mois ?

On a λ =2, et t=4 (semaines). $\Pr(X=6) \approx e^{-(2\cdot 4)} \frac{(2\cdot 4)^6}{6!} = 0.122$.

Exercice 3.15

Le nombre moyen de chiens abandonnés chaque semaine au bord d'une route cantonale au mois de juillet est 2.5.

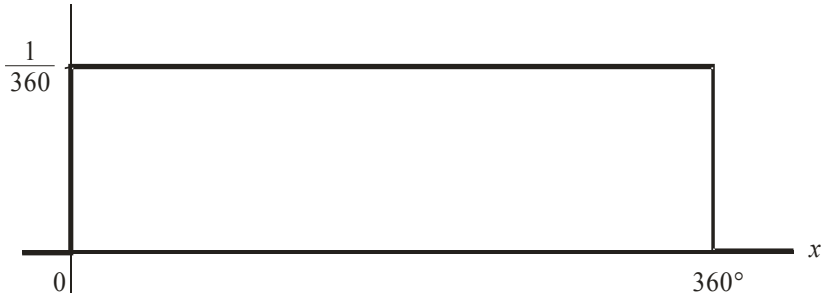
a. Calculez la probabilité qu'aucun chien ne soit abandonné entre le 7 et le 14 juillet.
b. Quelle est la probabilité que plus de 5 chiens soient abandonnés entre le 14 et le 21 juillet ?

Exercice 3.16

En moyenne, 5 clients par heure entrent dans un magasin. La vendeuse ferme boutique pendant 5 minutes.
Quelle est la probabilité que plus d'un client trouve porte close ?

3.5. Variables aléatoires continues

Imaginons une expérience où toutes les issues ont une probabilité 0. Un exemple simple est une girouette parfaite que l'on fait tourner à la main : à l'arrêt, elle peut indiquer n'importe quelle direction, et donc n'importe quel angle *réel* entre 0 et 360°. Il y a un nombre infini de valeurs possibles.
Certaines probabilités sont faciles à trouver, par exemple la probabilité d'indiquer un angle X compris entre 0 et 90° : Pr(0° ≤ X ≤ 90°) = 1/4.
Mais qu'en est-il pour calculer la probabilité Pr(X = 90°) ? Comme il y a un nombre infini de valeurs possibles, la probabilité d'indiquer précisément 90° est nulle (!).
Par analogie avec les variables aléatoires discrètes, on peut représenter cette situation comme l'aire sous une courbe. Pour la girouette, cette courbe ressemble à ceci :

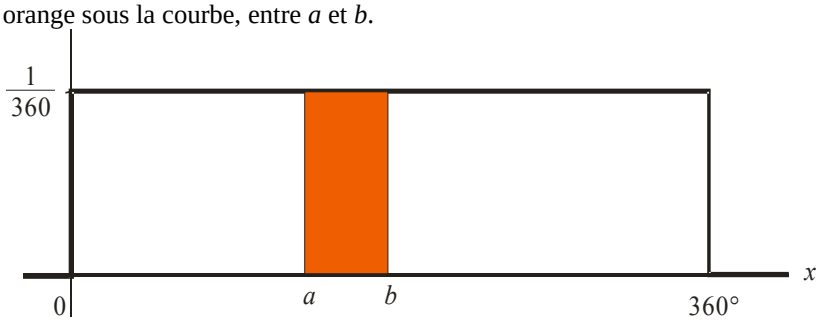


Remarquez que l'aire sous la courbe vaut 1.

La probabilité que la girouette indique un angle compris entre a et b est précisément l'aire orange sous la courbe, entre a et b.

Ici, l'aire orange, qui est la probabilité, vaut

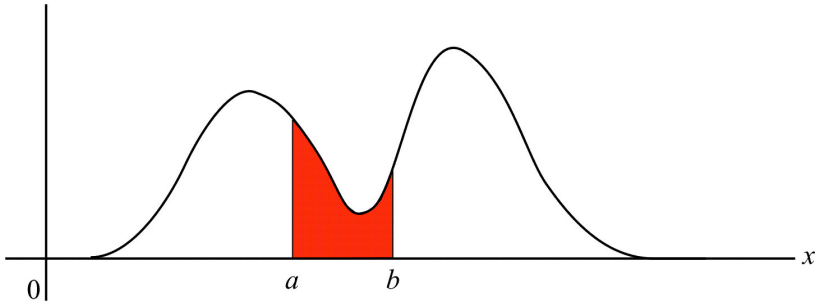
$$p = \frac{b - a}{360}$$



La courbe $y = f(x)$ est appelée **densité de probabilité** de la variable aléatoire continue X. Chaque variable aléatoire continue a sa propre fonction de densité. La probabilité $\Pr(a \le X \le b)$ est l'aire sous la courbe entre a et b.

Autrement dit, le calcul de cette probabilité revient au calcul d'une intégrale :

$$\Pr(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)\,dx$$



Propriétés de *f(x)*

La courbe de densité $f(x)$ doit avoir certaines propriétés pour être compatible avec les axiomes des probabilités :

$$f(x) \geqslant 0 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

Moyenne et variance

V. A. continues	à comparer avec	**V. A. discrètes**
$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$		$\mu = \sum_{\text{tout } x} x\, p(x)$
$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2\, f(x)\,dx$		$\sigma^2 = \sum_{\text{tout } x} (x-\mu)^2\, p(x)$

Fonction de répartition *F(x)*

On appelle **fonction de répartition** l'aire sous la courbe de densité de probabilité entre $-\infty$ et x.

$$F(x) = \Pr(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

3.6. La loi normale de Gauss-Laplace

Abraham **de Moivre**
(1667-1754)

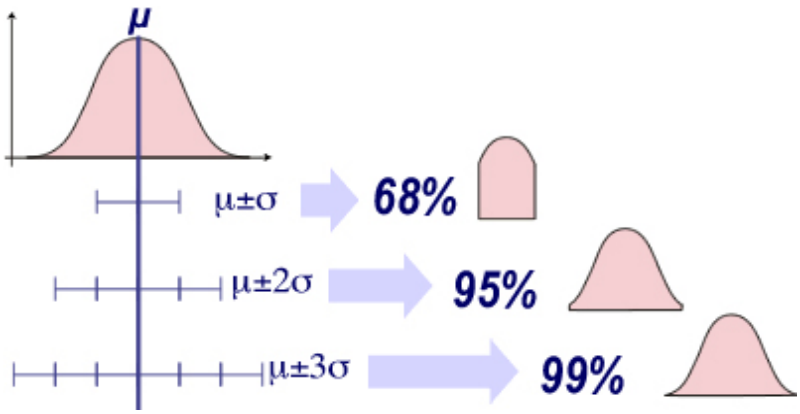
La **loi normale** (ou **loi gaussienne**, ou **loi de Gauss-Laplace**) est une des principales distributions de probabilité. Elle a été introduite par le mathématicien Abraham de Moivre en 1733 et utilisée par lui afin d'approcher des probabilités associées à des variables aléatoires binomiales possédant un paramètre n très grand. Cette loi a été mise en évidence par Gauss au 19ème siècle et permet de modéliser de nombreuses études biométriques.

Le théorème de Moivre-Laplace affirme la convergence d'une loi binomiale vers une loi de Gauss quand le nombre d'épreuves augmente.

Une variable aléatoire X est dite **normale**, avec paramètres (μ ; σ) si la densité de probabilité de X est donnée par

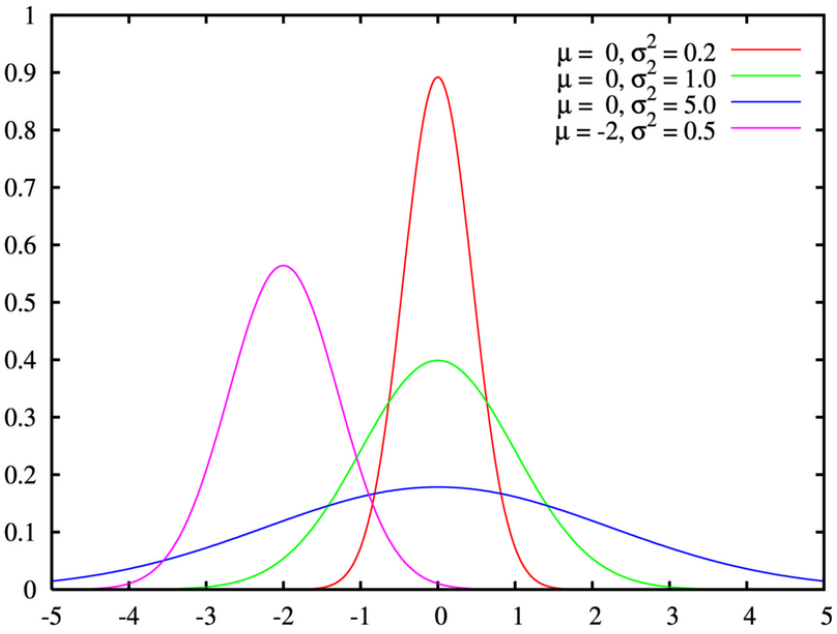
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Le graphe de cette densité est une courbe en **forme de cloche** avec un axe de symétrie vertical en μ.



On recalculera ces pourcentages à l'exercice 3.24

On voit ci-dessous l'influence de la moyenne μ et de la variance σ^2 sur la forme de la courbe.



Loi centrée réduite

C'est la courbe verte sur le graphe ci-dessus.

Une variable normale $\mathbf{N}(0\ ;\ 1)$, c'est-à-dire de moyenne 0 et d'écart-type 1 est dite **standard** ou **centrée réduite**.

On note habituellement la fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite par le symbole Φ :

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

Cette fonction de répartition $\Phi(x)$ n'ayant pas de forme analytique, on se réfère à une table numérique où elle est tabulée pour différentes valeurs de x.

Fonction de répartition de la loi normale N (0 ;1)

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	**0.05**	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8906	0.8925	0.8943	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	**0.9505**	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

La table ci-dessus contient les valeurs de $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

On lit les décimales dans les lignes, et les centièmes dans les colonnes. Par exemple, la valeur de $\Phi(1.65)$ se trouve à l'intersection de la ligne 1.6 et de la colonne 0.05 ; on trouve $\Phi(1.65)=0.9505$, à 10^{-4} près.
Pour les valeurs négatives de x, on utilise la relation $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$.

Exercice 3.17 Esquissez la fonction de répartition de la loi normale **N** (0 ;1).

Propriétés

Si une variable aléatoire X suit une loi $\mathbf{N}(\mu\,;\,\sigma)$, la variable aléatoire centrée réduite $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi $\mathbf{N}(0\,;\,1)$.

$$\Pr(a < X \leqslant b) = \Pr\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < X^* \leqslant \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

En effet, si on effectue la substitution $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$, les bornes d'intégration deviennent $\dfrac{a-\mu}{\sigma}$ et $\dfrac{b-\mu}{\sigma}$. On a d'autre part $dt = \dfrac{1}{\sigma}dx$.

D'où $\Pr(a < X \leqslant b) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\frac{a-\mu}{\sigma}}^{\frac{b-\mu}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$

1. $\Pr(a < X \leqslant b) = \Pr\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma} < X^* \leqslant \dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right)$

2. $\Pr(X^* \leqslant -x) = \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

3. $\Pr(-x \leqslant X^* \leqslant x) = 2\Phi(x) - 1$

Exercice 3.18

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathbf{N}(0\,;1)$. Calculez

a. $\Pr(0 \leq X \leq 1.42)$
b. $\Pr(-1.37 \leq X \leq 2.01)$
c. $\Pr(X \geq 1.13)$
d. $\Pr(-0.5 \leq X \leq 0.5)$
e. $\Pr(-1 \leq X \leq 1)$

Exercice 3.19

Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathbf{N}(0\,;\,1)$. Trouvez t pour que

a. $\Pr(0 \leq X \leq t) \approx 0.4236$
b. $\Pr(X \leq t) \approx 0.7967$
c. $\Pr(X \leq t) \approx 0.0655$
d. $\Pr(t \leq X \leq 2) \approx 0.1$

Exercice 3.20

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathbf{N}(5\,;\,5)$. Calculez

a. $\Pr(0 \leq X \leq 1)$
b. $\Pr(-1 \leq X \leq 2)$
c. $\Pr(X \geq 7)$
d. $\Pr(3 \leq X \leq 7)$

Exercice 3.21

On considère une variable aléatoire X suivant une loi normale $\mathbf{N}(\mu\,;\,\sigma)$. Calculez la probabilité que X soit compris

a. entre $\mu-\sigma$ et $\mu+\sigma$
b. entre $\mu-2\sigma$ et $\mu+2\sigma$
c. entre $\mu-3\sigma$ et $\mu+3\sigma$

Exercice 3.22

La taille des conscrits suit une loi normale de moyenne 173 cm et d'écart-type 8 cm. Quelle est la probabilité qu'un conscrit pris au hasard mesure entre 160 cm et 175 cm ?

Exercice 3.23

La température en Suisse au mois de mai suit une loi normale de moyenne 20°C et d'écart-type 3°C. Calculez la probabilité que la température un jour donné de mai soit comprise entre 21°C et 26°C.

Exercice 3.24

Les résultats d'un examen (exprimés en points entiers) suivent une loi normale $\mathbf{N}(76\,;\,15)$. Calculez le nombre minimal de points à exiger pour faire réussir 90% des candidats.

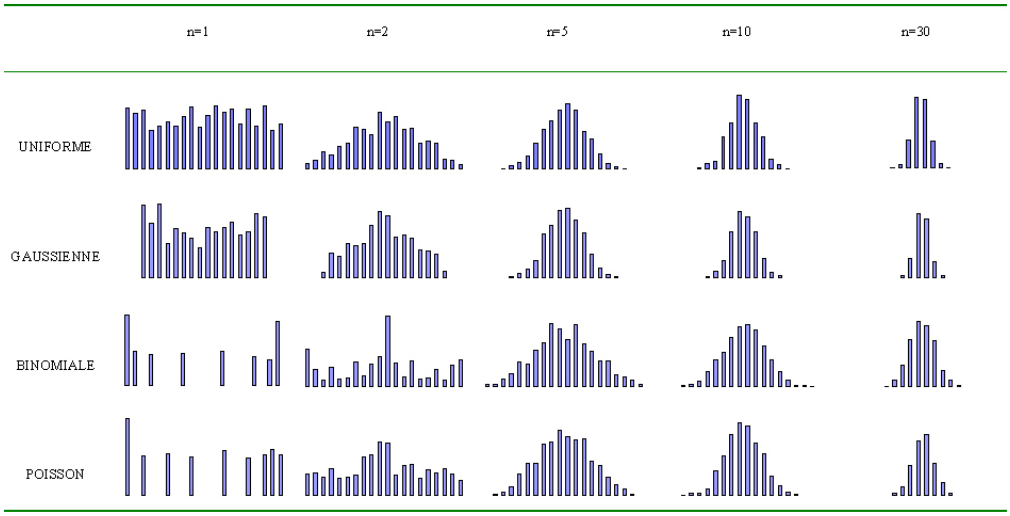
Exercice 3.25

Une machine permet de remplir automatiquement des paquets de farine. La masse M désirée est réglable. En réalité, la masse de farine effectivement versée est une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne M et d'écart-type égal à 3% de M.
Sur quelle valeur de M faut-il régler la machine pour que 95% des paquets contiennent au moins 1 kg ?

Théorème central limite

On note $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ la somme de n variables aléatoires indépendantes de même moyenne μ et de même écart-type σ.
La variable aléatoire centré réduite $T^* = \dfrac{T - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ suit approximativement la loi normale $\mathbf{N}(0\,;\,1)$ si $n \to \infty$.

Voici ci-dessous une illustration du théorème central limite pour les quatre lois que nous connaissons : uniforme, gaussienne, binomiale, Poisson.



Alexandre Mikhailovitch **Liapounov** (1857-1918)

Ce théorème, un des piliers de la théorie des probabilités, fournit une méthode simple pour calculer des probabilités liées à une somme de variables aléatoires. Il explique également le fait remarquable que beaucoup de phénomènes naturels suivent une distribution ayant la forme d'une courbe en cloche, c'est-à-dire une distribution normale.
En 1733, Abraham de **Moivre**, mathématicien anglais, le démontra dans le cas des variables de Bernoulli avec p = 0.5. **Laplace** l'étendit à un p quelconque en 1812. Il fallut ensuite attendre jusqu'en 1902 pour que le mathématicien russe Alexandre **Liapounov** le démontre rigoureusement dans tous les cas.

Pour le cas de la loi binomiale, on peut alors énoncer le théorème suivant.

Approximation de la loi binomiale par la loi normale

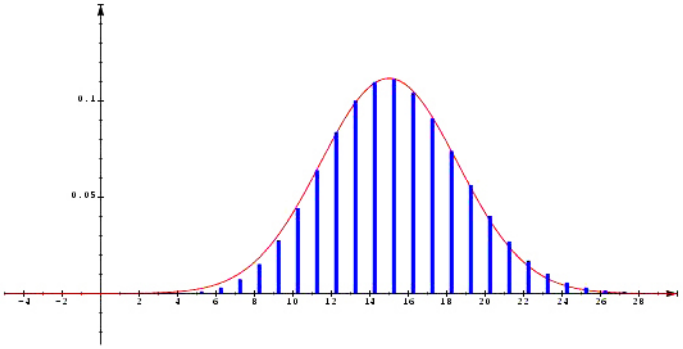
n : nombre d'épreuves
p : probabilité de succès

Si X suit une loi binomiale $\mathbf{B}(n\,;\,p)$ avec n grand (dans la pratique, on exige $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$), on peut estimer $\Pr(a \leq X \leq b)$ avec la loi normale $\mathbf{N}(\,np\,;\,\sqrt{np(1-p)}\,)$.

$$\Pr(a \leqslant X \leqslant b) \approx \Phi\left(\frac{b+\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{a-\frac{1}{2}-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

En bleu, la loi binomiale $\mathbf{B}(100, 0.15)$ et
en rouge la loi normale $\mathbf{N}(15, 3.57071)$.

Note :
$\sqrt{100 \cdot 0.15 \cdot 0.85} = 3.57071$



Exercice 3.26

On lance 100 fois une pièce de monnaie. Estimez la probabilité d'observer...

a. moins de 60 fois pile.
b. moins de 36 fois pile.
c. un nombre de fois pile strictement compris entre 35 et 60.

Exercice 3.27

On lance 90 fois un dé. Estimez la probabilité d'observer...

a. moins de 10 fois un six.
b. un nombre de six strictement compris entre 20 et 50.

Exercice 3.28

On considère 10'000 chiffres (de 0 à 9) pris au hasard. Calculez la probabilité que le chiffre 3 apparaisse plus de 850 fois.

Exercice 3.29

Au jass, après chaque donne, on a neuf cartes en main. Il y a quatre couleurs (pique, cœur, trèfle et carreau) et neuf cartes par couleur (6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as). Quelle est la probabilité...

a. d'avoir quatre valets lors d'une donne ?
b. d'avoir cinq fois les quatre valets en recevant 935 donnes ? Donnez le résultat exact et les approximations avec la loi de Poisson et la loi normale.

Exercice 3.30

On lance 10 dés équilibrés. Utilisez le théorème central limite pour évaluer la probabilité que la somme des dix résultats soit comprise entre 30 et 40.

3.7 Ce qu'il faut absolument savoir

Connaître la définition d'une variable aléatoire discrète	❑ ok
Savoir calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire discrète	❑ ok
Connaître la définition d'une loi de probabilité	❑ ok
Savoir calculer et interpréter l'espérance de gain	❑ ok
Connaître et savoir appliquer la loi de Poisson et le processus de Poisson	❑ ok
Savoir approcher la loi binomiale avec la loi de Poisson	❑ ok
Connaître la définition d'une variable aléatoire continue	❑ ok
Savoir calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire continue	❑ ok
Connaître et savoir appliquer la loi normale	❑ ok
Savoir approcher la loi binomiale avec la loi normale	❑ ok

Solutions des exercices

Chapitre 1

1.1. $\frac{n(n-1)}{2}$

1.2. $\frac{n(n-3)}{2}$

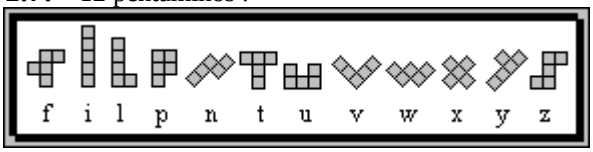
1.3. Il devrait y avoir 64 tuiles, mais le jeu réel n'en a que 56 !

1.4. **a.** 5 étages **b.** 18 étages

1.5. **a.** 34'560'000 mots **b.** 10’368'000 mots

1.6. 4

1.7. 12 pentaminos :



1.8. **a.** 4 9 1 6 8 3 2 5 7
b. (1)(2 5 6 4)(3 8)(7 9)
c. 12 fois
d. 4 fois

1.10. 677 habitants

1.11. 970’200

1.12. **a.** 20 **b.** 1 **c.** 19

1.13. **a.** $4.79 \cdot 10^8$ **b.** $3.99 \cdot 10^7$

1.14. 64

1.15. **a.** 24 **b.** 83'160 **c.** 39’916’800

1.16. **a.** 2184 **b.** 792 **c.** 468 **d.** 1188

1.17. **a.** 120 **b.** 120

1.18. **a.** 468’000 **b.** 421’200

1.19. **a.** 462 **b.** 210 **c.** 378

1.20. **a.** 3003 **b.** 980

1.21. 28

1.22. **a.** 4080 **b.** 1 **c.** 5

1.23. **a.** 286 **b.** 165 **c.** 110 **d.** 80
e. 276

1.24. **a.** 1377 **b.** 27

1.25. **a.** 8’145’060 **b.** 182’780

1.26. 720

1.27. **a.** 48'620 **b.** 11'440 **c.** 201’376
d. 7’596'960 **e.** 15'911

1.28. **a.** Cent mille milliards de poèmes
b. env. 190'128'527 années

1.29. **a.** $n = 9$ **b.** $n = 9$ **c.** $n = 5$

1.30. 8008

1.31. **a.** Il y a 108 manières de traverser
b. La plus rapide dure 15 minutes

1.32. **a.** Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ routes.
b. Il y a $\frac{(n-1)!}{2}$ circuits.
Application numérique : il y a 120 routes et 653'837'184'000 circuits passant par 16 villes.

1.33. **a.** $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$
b. 147'420 $r^{12}\,s^{24}$

Chapitre 2

2.1. Ω = {pp, pf, fp, ff}

2.2. Ω = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}

2.3. Ω = {123, 124, 132, 134, 142, 143, 213, 214, 231, 234, 241, 243, 312, 314, 321, 324, 341, 342, 412, 413, 421, 423, 431, 432}

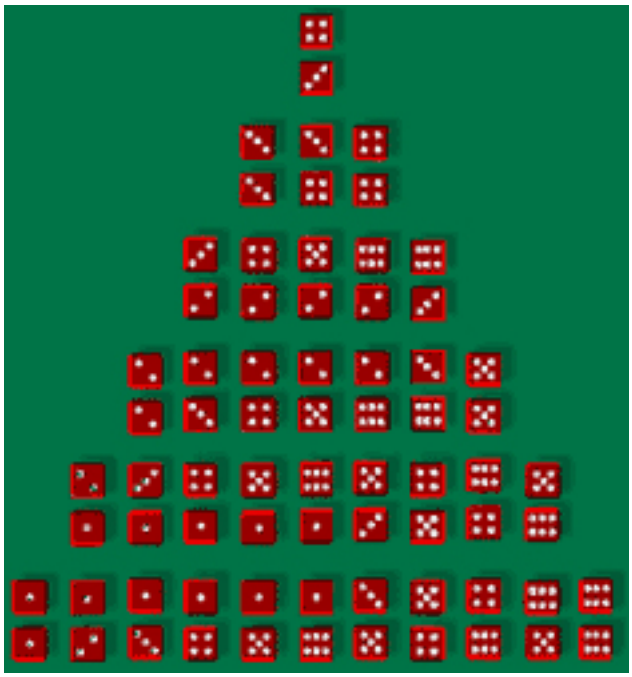
2.4. 0.277775

2.5. **a.** 1/18 **b.** 1/36 **c.** 1/6 **d.** 5/36

2.6. **b.** 1/8 **c.** 1/2 **d.** 5/8

2.7. 0.3

2.8.



2.9. 6/11

2.10. **a.** 0.701 **b.** 0.696

2.11. 32/663

2.12. **a.** 1.54×10^{-6} **b.** 1.39×10^{-5} **c.** 0.00024
d. 0.00144 **e.** 0.00197 **f.** 0.00392
g. 0.0211 **h.** 0.0475 **i.** 0.4226

2.13. 23

2.14. 9/28

2.15. **a.** 0.6 **b.** 0.5 **c.** 0.3
d. 0.2 **e.** 0.1 **f.** 0.9
g. 0.8 **h.** 0.4 **i.** 0.7

2.16. **a.** 1/3 **b.** 1/2

2.17. **a.** 3/5 **b.** 4/5

2.18. 1/3

2.19. si $i < 7$, $p = 0$ si $i = 7$, $p = 1/3$ si $i = 8$, $p = 2/5$
si $i = 9$, $p = 1/2$ si $i = 10$, $p = 2/3$
si $i = 11$, $p = 1$ si $i = 12$, $p = 1$

2.20. 1/3

2.21. 7/11

2.22. 0.0472 étonnant non ?

2.23. non

2.24. oui

2.25. 1/2

2.26. **a.** 0.3 **b.** 0.1 **c.** 0.5
d. 0.4 **e.** 2/7 **f.** non

2.27. **a.** 14/25 **b.** non **c.** 8/33

2.28. **a.** 0.24 **b.** 0.506 **c.** 0.3825

2.29. 8/27

2.30. 13 fois

2.31. **a.** 0.00612 **b.** 5645.7 ans

2.32. environ 22 jours

2.33. au moins un 6 en 4 lancers

2.34. 5

2.35. 8/27

2.36. **a.** $7.07 \cdot 10^{-7}$ **b.** $1.7 \cdot 10^{-5}$ **c.** $1.78 \cdot 10^{-3}$
d. 0.3368 **e.** 0.3895 **f.** 0.3132

2.37. **a.** 17/30 **b.** 1/2 **c.** 9/17

2.38. **a.** 1/3 **b.** 1/5

2.39. 253

2.40. **a.** 0.1201 **b.** 0.1601 **c.** 0.1761
d. 0.7368 **e.** 0.001288

2.41. 27/64

2.42. voir « le crible de Galton » sur le site

2.43. 0.1329

2.44. **a.** 0.0207 **b.** 0.0113

2.45. 0.0335

2.46. **a.** 0.028 **b.** 0.0005 **c.** 0.00068

2.47. **a.** 0.0109 **b.** 0.00103

2.48. avec la méthode 2

2.49. 1681/3364 = 0.4997

2.50. **a.** $1.6\ 10^{-15}$ **b.** $3.35\ 10^{-18}$
Pour les trouver réponses suivantes, il est pratique d'utiliser un tableur.
c. 0.891 **d.** 0.109 **e.** $2.67\ 10^{-7}$

2.51. On double ses chances en changeant de porte ! On a alors 2 chances sur 3 de gagner.

2.52. 26.7 %

Chapitre 3

3.2. **b.** 1.5 **c.** 0.75

3.3. **b.** 4.4722... **c.** 1.9714

3.4. **b.** 4.33... **c.** 2.22...

3.5. Non, on perdra en moyenne 20 cts par partie

3.6. Oui

3.7. Non, on perdra en moyenne 17 cts par partie

3.8. Oui

3.10. – 36.5 centimes

3.11. Si vous levez toujours la main droite, votre adversaire lèvera toujours la main gauche et vous perdrez 1 fr chaque fois. L'astuce consiste à lever la main gauche avec une probabilité de 2/5, et vous gagnerez en moyenne 0.2 fr par partie.
En effet, si l'adversaire lève la main gauche, votre espérance de gain sera de $\frac{2}{5}\cdot 2+\frac{3}{5}\cdot(-1)=0.2$. S'il lève la main droite, elle sera de $\frac{2}{5}\cdot(-4)+\frac{3}{5}\cdot 3=0.2$.

3.12. $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1$

3.13. $E[X]=\sum_{k=0}^{\infty} k\, e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=$

$e^{\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda$ (on a posé j=k–1)

$$E[X^2]=\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+1)\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \quad \text{(on a posé } j=k-1\text{)}$$

$$=\lambda\left(\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}}_{E[X]=\lambda}+\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!}}_{1}\right)=\lambda(\lambda+1)$$

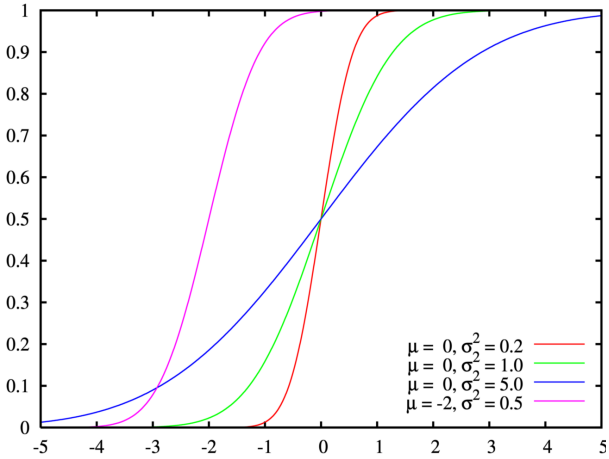
$$V(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\lambda(\lambda+1)-\lambda^2=\lambda$$

3.14. 0.5276

3.15. **a.** 0.08208 **b.** 0.04202

3.16. 0.06608

3.17.



3.18. **a.** 0.4222 **b.** 0.8924
c. 0.1292 **d.** 0.3829
e. 0.68268

3.19. **a.** 1.43 **b.** 0.83
c. –1.51 **d.** 1.16

3.20. **a.** 0.0532 **b.** 0.1592
c. 0.3446 **d.** 0.3108

3.21. **a.** 0.68268 **b.** 0.9545 **c.** 0.9973

3.22. 0.5466

3.23. 0.3479

3.24. 57

3.25. 1.0521

3.26. **a.** 0.9713 **b.** 0.0019
c. 0.9694

3.27. **a.** 0.06 **b.** 0. 06

3.28. $\Phi(4.98) \approx 1$

3.29. **a.** 0.002139
b. loi binomiale : 0.036012
loi de Poisson : 0.036089
loi normale : 0.0317

3.30. environ 0.65