Corina Reischer
Raymond Leblanc
Bruno Rémillard
Denis Larocque

Théorie des probabilités

Problèmes et solutions

Presses de l'Université du Québec

des Théorie probabilités
Problèmes et solutions

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC
Le Delta I, 2875, boulevard Laurier, bureau 450
Sainte-Foy (Québec) G I V 2M2
Téléphone : (418) 657-4399 • Télécopieur : (418) 657-2096
Courriel : puq@puq.uquebec.ca • Internet : www.puq.uquebec.ca

Distribution :

CANADA et autres pays

DISTRIBUTION DE LIVRES UNIVERS S.E.N.C.
845, rue Marie-Victorin, Saint-Nicolas (Québec) G7A 3S8
Téléphone : (418) 831-7474 /1-800-859-7474 • Télécopieur : (418) 831-4021

FRANCE

DIFFUSION DE L'ÉDITION QUÉBÉCOISE
30, rue Gay-Lussac, 75005 Paris, France
Téléphone : 33 1 43 54 49 02
Télécopieur: 33 1 43 54 39 15

SUISSE

SERVIDIS SA
5, rue des Chaudronniers, CH-1211 Genève 3, Suisse
Téléphone : 022 960 95 25
Télécopieur: 022 776 35 27

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Corina Reischer
Raymond Leblanc
Bruno Rémillard
Denis Larocque

Théorie des probabilités

Problèmes et solutions

2002

Presses de l'Université du Québec
Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bur. 450
Sainte-Foy (Québec) Canada G1V 2M2

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Données de catalogage avant publication (Canada)

Vedette principale au titre :

Théories des probabilités ; problèmes et solutions

ISBN 2-7605-1197-9

1. Probabilités – Problèmes et exercices. 2. Statistique mathématique – Problèmes et exercices. 3. Variables aléatoires – Problèmes et exercices. 4. Probabilités.
I. Reischer, Corina, 1931-

QA273.25.T43 2002 519.2'076 C2002-941248-X

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise du Programme d'aide au développement de l'industrie de l'édition (PADIÉ) pour nos activités d'édition.

Conception graphique de la couverture : RICHARD HODGSON

1 2 3 4 5 6 7 8 9 PUQ 2002 9 8 7 6 5 4 3 2 **1**

Dépôt légal – 4e trimestre 2002
Bibliothèque nationale du Québec / Bibliothèque nationale du Canada
Imprimé au Canada

Table des matières

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Introduction

Le livre *Théorie des probabilités* présente un recueil de problèmes qui constitue une banque importante d'exercices variés pour familiariser les étudiants aux notions de probabilités qui soutiennent la formation des statisticiens, des actuaires et des ingénieurs. Nous estimons que l'apprentissage et la maîtrise des concepts et des notions abstraites que proposent les probabilités passent nécessairement par la résolution de problèmes et par la rédaction détaillée et rigoureuse de solutions.

Les auteurs fournissent pour chaque chapitre un cadre succinct présentant et résumant les concepts, les définitions, la théorie et les modèles ainsi que la terminologie nécessaire pour aborder les exercices qui sont généralement présentés par ordre croissant de difficulté. Nous incluons également une liste des principales notations employées dans le milieu scientifique.

Chaque chapitre propose une série de problèmes accompagnés des solutions complètes et détaillées. Cette approche propose aux lecteurs des modèles de la démarche à suivre pour résoudre un problème et fournit également des spécimens de présentation des arguments qui constituent une preuve ou une démonstration. Plusieurs chapitres se terminent par une suite de problèmes qui viennent compléter et valider l'assimilation des concepts en invitant le lecteur à résoudre lui-même les exercices. Nous fournissons alors des indications et des réponses pour permettre la vérification des résultats obtenus par les étudiants et ainsi assurer la validité de leur propre démarche. Souvent les problèmes permettent de faire des liens avec d'autres domaines de la connaissance mathématique comme ceux de l'arithmétique, de l'algèbre, de la géométrie, etc..

Le texte se divise en deux grandes parties ce qui permet de traiter les

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

concepts probabilistes dans le cas des modèles finis séparément de ceux des modèles infinis. Le lecteur peut ainsi mieux gérer son cheminement et adapter l'ouvrage à ses besoins spécifiques et à sa propre connaissance des outils mathématiques employés en probabilité.

Le document aborde les grandes lois classiques de la théorie des probabilités et introduit le lecteur aux propriétés fondamentales des modèles et des distributions si souvent utilisées en statistique et en recherche.

Les auteurs sont convaincus que ce recueil peut répondre à plusieurs types de besoins tant au niveau collégial qu'universitaire.

Les auteurs remercient à deux collègues du département de mathématiques et d'informatique de l'Université du Québec à Trois-Rivières : le professeur Harry White pour ses informations concernant l'histoire des mathématiques et ses conseils concernant l'usage du français, et le professeur Kilani Ghoudi pour sa collaboration et son soutien au niveau de la préparation du manuscrit à l'aide du système TEX employé pour produire ce document.

Liste de notations

Symbole	**Usage**	**Signification**
$\in$	$a \in A$	a est un élément de A
$\notin$	$a \notin A$	a n'est pas un élément de A
$\subset$	$A \subseteq B$	A implique B
$\subseteq$	$A \subseteq B$	A implique ou est équivalent à B
$\cup$	$A \cup B$	A réunion B
$\cap$	$A \cap B$	A intersection B
$\setminus$	$A \setminus B$	différence de A et B
$\leq$	$a \leq b$	a plus petit où égal à b
$<$	$a < b$	a plus petit que b
$\sim$	$X \sim$	X suit la loi
$\approx$	$a \approx b$	a approximativement égal à b
$\uparrow$	$A_n \uparrow$	suite monotone croissante
$\downarrow$	$A_n \downarrow$	suite monotone décroissante

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Abréviations standard	Signification
$\max\{a, b\}$	maximum entre a et b
$\min\{a, b\}$	minimum entre a et b
$n!$	factoriel de n; $\quad n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$
$(\Omega,\ \mathcal{A}), \quad (\Omega,\ \mathcal{F})$	espace probabilisable
$(\Omega,\ \mathcal{A},\ P), \quad (\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$	espace probabilisé
$B(n,\ p)$	loi binomiale
$P(\lambda)$	loi de Poisson
$H(n,\ N,\ a,\ b)$	loi hypergéométrique
$G(p)$	loi géométrique
$BN(p,\ r)$	loi binomiale négative
$N(\mu,\ \sigma^2)$	loi normale
$N(0,\ 1)$	loi normale centrée réduite
$Gamma(\alpha,\ \beta)$	loi gamma
$\chi^2(r)$	loi du khi-deux
$\mathcal{E}(\lambda)$	loi exponentielle
$U(a,\ b)$	loi uniforme
$Beta(\alpha,\ \lambda)$	loi bêta
$C(\mu,\ \sigma)$	loi de Cauchy

Lettres avec une signification fixe	**Signification**
Ω	espace echantillonnal, événement certain
$\mathcal{A}$	algèbre sur Ω
$\mathcal{F}$	σ-algèbre sur Ω
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{B}$	σ-algèbre de Borel sur $\mathbb{R}$
$\mathcal{B}_{[a,\ b]}$	σ-algèbre de Borel sur l'intervalle $[a,\ b]$
$\emptyset$	événement impossible
A, B	événements
ω	épreuve, réalisation d'une expérience
A^c	événement contraire à A
$\mathcal{P}(\Omega)$	espace d'événements discrets
$\mathcal{P}(M)$	ensemble de toutes les parties de M
X, Y	variables aléatoires
Z	variable aléatoire normale standard
F, F_X	fonction de répartition
Φ, Φ_Z	fonction de répartition de Z
f, f_X	fonction de densité
g, g_X	fonction génératrice de moments
ϕ, ϕ_X	fonction caractéristique

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$E(X)$	valeur moyenne de X
$Var(X)$	variance de X
σ_X	écart type de X
$E(X^n)$	moment d'ordre n de X
me_X	médiane de X
mo_X	mode de X
$Cov(X, Y)$	covariance de X et Y
$Corr(X, Y)$	coefficient de corrélation entre X et Y
$P(.)$	probabilité de
p	probabilité
$\binom{n}{k} = \mathcal{C}_k^n$	combinaison de k éléments prise parmi n
$\mathcal{P}_n$	permutation de n éléments
$\mathcal{A}_k^n$	arrangement de k éléments prise parmi n
$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres naturels $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{Z}$	l'ensemble des nombres entiers
$\mathbb{Q}$	l'ensemble des nombres rationnels
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexe

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Alphabet Grec

A	α	alpha	N	ν	nu
B	β	bêta	Ξ	ξ	ksi
Γ	γ	gamma	O	o	omikron
Δ	δ	delta	Π	π	pi
E	ϵ	epsilon	P	ρ	rô
Z	ζ	dzéta	Σ	σ	sigma
H	η	êta	T	τ	tau
Θ	θ	thêta	Υ	υ	upsilon
I	ι	iota	Φ	ϕ	phi
K	κ	kappa	X	χ	khi
Λ	λ	lambda	Ψ	ψ	psi
M	μ	mu	Ω	ω	oméga

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Partie I
Modèles finis

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Chapitre 1

Espace fini d'événements

1.1 Notions de base — Définitions et propriétés

1.1.1 Expériences aléatoires, épreuves et événements

La théorie des probabilités traite des expériences dont les résultats dépendent du hasard. Dans ce contexte, on parle *d'expériences aléatoires ou* plus simplement *d'expériences.*

Définition 1. Les différents résultats possibles d'une expérience aléatoire s'appellent les *épreuves ou* les *réalisations* de l'expérience.

L'ensemble de toutes les réalisations possibles s'appelle *l'espace échantillonnal) ou le référentiel,* et on le représentera par Ω.

Les expériences peuvent avoir un nombre fini ou infini d'épreuves. Par conséquent, l'ensemble Ω peut être fini ou infini. Dans ce chapitre, nous considérons seulement des cas où Ω est fini.

Définition 2. On appelle *événement aléatoire* ou plus simplement *événement (rattaché à l'expérience)* toute situation qui peut être réalisée par une ou plusieurs épreuves.

Un événement aléatoire est donc totalement déterminé par l'ensemble des épreuves par lesquelles l'événement se réalise. On peut donc interpréter ou identifier chaque événement avec un sous-ensemble de Ω de toutes les épreuves de l'expérience.

Nous représenterons les événements aléatoires par des lettres majuscules comme

$$A, B, C, E, \ldots, A_1, \ldots .$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

et les différentes épreuves ou réalisations d'une expérience par la lettre grecque minuscule ω, comme

$$\omega, \omega_1,..., \omega_{\mathrm{i}},...$$

Pour cette raison, si un événement A se réalise par les épreuves ω_{i}, ω_{i}, ..., ω_k on le représentera souvent par $A = \{\omega_i, \omega_j, ..., \omega_k\}$.

Définition 3. Les événements qui sont réalisables par une seule épreuve s'appellent *événements élémentaires* et correspondent aux singletons, les sous-ensembles comportant un seul élément ; les autres événements s'appellent *événements composés, ou* simplement *événements.*

Pour des raisons qui deviendront claires par la suite, en liaison avec une expérience, on ajoute aussi les deux événements singuliers suivants :

- l'événement qui se réalise à chacune des épreuves, nommé *l'événement certain.* Cet événement correspond à l'ensemble de toutes les épreuves possibles de l'expérience, donc à Ω, l'espace échantillonnal lui-même et pour cette raison il sera représenté par Ω.
- l'événement qui ne peut être réalisé par aucune épreuve de l'expérience aléatoire, nommé *l'événement impossible.* Cet événement est associé à l'ensemble vide et pour cette raison il sera représenté par ø.

Dans le contexte que nous venons de définir, nous identifierons tout événement d'une expérience aléatoire avec le sous-ensemble de l'espace échantillonnal Ω auquel il est associé. Dorénavant, souvent nous ne distinguerons pas entre l'événement lui-même et le sous-ensemble de Ω auquel il est identifié.

1.1.2 Relations entre les événements

1) Équivalence des événements

On appelle *événements équivalents,* des événements qui se réalisent simultanément. L'équivalence de deux événements revient à l'égalité des ensembles des épreuves correspondant aux événements. Nous représenterons l'équivalence des événements A et B par $A = B$.

2) L'implication des événements

On dit que l'événement A *implique* l'événement B si la réalisation de l'événe-

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ment A entrane nécessairement la réalisation de l'événement B. L'implication de A par B sera notée $A \subseteq B$.

Exemple 1. Dans l'expérience qui consiste à lancer un dé, l'événement A "obtenir le nombre 2" et l'événement B "obtenir un nombre pair" sont deux événements tels que la réalisation de A entrane forcément celle de B, et par conséquent $A \subseteq B$.

Remarque 2. Notons que $A \subseteq B$ revient au fait que chaque épreuve qui réalise l'événement A réalise aussi l'événement B c'est-à-dire que l'ensemble des épreuves rattachées à l'événement A est inclus dans l'ensemble des épreuves rattachées à l'événement B. Cela justifie la notation $A \subseteq B$ et puisque $\emptyset \subseteq A$, cela amène la constatation que l'événement impossible implique tout événement quelconque A. Tout événement A implique l'événement certain puisque $A \subseteq \Omega$. De plus, un événement élémentaire est impliqué seulement soit par lui-même, soit par l'événement impossible.

Notons que dans l'ensemble des événements rattachés à une expérience, il y a des paires d'événements A et B telles que $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$.

1.1.3 Événements contraires

Définition 1. *L'événement contraire à A*, ou encore, *non A* est l'événement qui se réalise si et seulement si A ne se réalise pas. Cet événement sera noté A^c.

Remarquons que $(A^c)^c = A$. Les sous-ensembles des épreuves rattachées aux événements A et A^c sont complémentaires par rapport à l'ensemble W de toutes les épreuves de l'expérience.

Exemple 2. Dans l'expérience qui consiste à lancer un dé, l'événement A "obtenir un nombre impair" et l'événement B "obtenir un nombre pair" sont des événements contraires.

1.1.4 Opérations sur les événements

Dans l'ensemble de tous les événements reliés à une expérience on peut introduire plusieurs opérations.

1) Réunion d'événements

Étant donnés deux événements A et B, leur *réunion* est l'événement qui se réalise si et seulement si au moins un des événements A ou B se réalise. La réunion des événements A et B est représentée $A \cup B$ que l'on lit *"A ou B"*

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ou encore *"A réunion B"* .

2) Intersection d'événements
Étant donnés deux événements *A* et *B,* leur *intersection* est l'événement qui se réalise si et seulement si les événements *A* et *B* se réalisent simultanément. L'intersection des événements *A* et *B* est notée $A \cap B$ que l'on lit *"A et B"* ou encore *"A inter B"* .

Remarque 1. Les opérations de réunion et d'intersection peuvent être étendues à un nombre fini quelconque d'événements. Soit $A_1 \ldots , A_n$, une suite d'événements d'une expérience aléatoire, alors la réunion

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$$

est l'événement qui se réalise si et seulement si au moins un des événements A_j se réalise. De même, l'intersection

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

est l'événement qui se réalise si et seulement si tous les événements A_j se réalisent simultanément. Ces opérations sont commutatives et associatives, autrement dit pour tous événements *A, B, C on a*

1. $A \cup B = B \cup A;$ $\quad A \cap B = B \cap A;$
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$ $\quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

De plus, la réunion est distributive par rapport à l'intersection et l'intersection est distributive par rapport à la réunion, autrement dit pour tous événements *A, B, C on a*

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

et

4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

Définition 2. Deux événements *A* et *B* sont *incompatibles ou disjoints si A* Ç *B* = ø, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas se réaliser simultanément. Dans le cas contraire on dit que les événements sont *compatibles.*

3) Différence d'événements

La *différence* des événements A et B est l'événement qui se réalise chaque fois que conjointement A se réalise et que B ne se réalise pas. Nous noterons cet événement $A \setminus B$ que l'on lit *"A moins B."* On a

$$A \setminus B = A \cap B^c \quad \text{et} \quad A^c = \Omega \setminus A.$$

Remarque 3. Notons que si on rattache à un événement l'ensemble des épreuves associées, alors les opérations entre les événements reviennent aux opérations respectives entre les ensembles des épreuves correspondantes, et donc les résultats des opérations avec des événements reliés à une expérience sont encore des événements reliés à la même expérience.

1.1.5 Espace probabilisable

Soit Ω l'ensemble de toutes les épreuves possibles correspondant à une expérience, donc l'espace échantillonnal.

Définition 1. On appelle *espace d'événements* sur Ω un ensemble non-vide $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ (où $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de Ω, incluant l'ensemble Ω lui-même et l'ensemble vide), et tel que

1. $A \in \mathcal{A}$ implique $A^c \in \mathcal{A}$;
2. $A, B \in \mathcal{A}$ implique $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Si Ω est un ensemble fini, alors l'ensemble $\mathcal{A}$ s'appelle aussi *algèbre* sur Ω.

Remarque 2. Pour deux événements A et B quelconques d'un espace d'événements $\mathcal{A}$, notons que les sous-ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c, B^c sont aussi des événements de $\mathcal{A}$. On dit dans ce cas que l'espace d'événements $\mathcal{A}$ est *fermé par rapport aux opérations respectives.* En particulier, $\Omega \in \mathcal{A}$, car si $A \in \mathcal{A}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$ et $\Omega = A \cup A^c \in \mathcal{A}$. Puisque $\emptyset = \Omega^c$ il s'ensuit que $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Exemple 3. Pour tout événement $A \subseteq \Omega$, l'ensemble $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ est un espace d'événements sur Ω. L'espace d'événements $\{\emptyset, \Omega\}$ s'appelle *espace d'événements trivial*. De même $\mathcal{P}(\Omega)$ est un espace d'événements sur Ω, appelé *espace d'événements discret*.

Pour un ensemble fini Ω, on prendra en général $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Soit Ω un ensemble fini où $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, et soit $A = P(\Omega)$. Dans cet espace fini d'événements, on trouve

- d'abord l'ensemble vide $\emptyset$;
- les singletons $\{\omega_1\}, \ldots, \{\omega_n\}$ qui sont au nombre de $\binom{n}{1}$;
- les paires $\{\omega_1, \omega_2\}, \ldots, \{\omega_{n-1}, \omega_n\}$ qui sont au nombre de $\binom{n}{2}$;
- les triplets $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \ldots$ qui sont au nombre de $\binom{n}{3}$;
- $\vdots$
- $\{\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}\}, \ldots$ qui sont au nombre de $\binom{n}{n-1}$;
- finalement $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, qui compte pour 1 car $\binom{n}{n} = 1$.

Un espace fini d'événements contient donc

$$1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

événements, où n est le nombre d'événements élémentaires, c'est-à-dire la cardinalité de l'espace échantillonnal Ω.

Définition 4. Soit Ω l'ensemble de toutes les épreuves possibles correspondant à une expérience et A un espace d'événements sur Ω. On appelle *espace probabilisable* le couple (Ω, A).

Remarque 5. Désormais chaque fois qu'on trouvera une relation entre plusieurs événements, on supposera que les événements en question appartiennent tous au même espace d'événements.

1.2 Problèmes et solutions

1. Donner l'espace échantillonnai associé au tirage simultané de deux cartes de jeu, si on s'intéresse seulement à la couleur des cartes obtenues (carreau, coeur, pique ou trèfle).

   Solution. En notant Q un carreau, C un coeur, P un pique et T un trèfle, on trouve

$$\Omega = \{QQ,\ CC,\ PP,\ TT,\ QC,\ QP,\ QT,\ CP,\ CT,\ PT\}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

2. Quelles sont les épreuves de l'expérience suivante : on extrait simultanément, deux boules d'une urne qui contient 3 boules blanches et 2 boules noires ?

Solution. Désignons les boules blanches par b_i, b_2, b_3 et les boules noires par n_i, n_2. Représentons par $\{a_i, a_i\}$, a_i, $a_i \in \{b_i, b_2, b_3, n_i, n_2\}$ la réalisation qui consiste à extraire les boules a_i *et* a_i. Les épreuves (les événements élémentaires) de l'expérience sont :

$$\{b_1, b_2\}, \quad \{b_1, b_3\}, \quad \{b_2, b_3\}, \quad \{b_1, n_1\}, \quad \{b_1, n_2\},$$
$$\{b_2, n_1\}, \quad \{b_2, n_2\}, \quad \{b_3, n_1\}, \quad \{b_3, n_2\}, \quad \{n_1, n_2\}.$$

Il y a (5/2) = 10 épreuves où (5/2) représente le nombre de combinaisons que l'on peut former en choisissant 2 objets parmi 5 sans tenir compte de l'ordre de sélection.

3. Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On extrait au hasard deux boules.

i) On considère les événements :

A_1 - "obtenir deux boules noires",

A_2 - "obtenir au moins une boule blanche",

A_3 - "obtenir une seule boule blanche",

A_4 - "obtenir une seule boule noire",

A_5 - "obtenir deux boules vertes".

Déterminer si chaque événement est d'une part, aléatoire, certain, impossible et, d'autre part, s'il est élémentaire ou composé.

ii) Trouver les réponses du point i), en utilisant les ensembles d'épreuves rattachées aux événements.

Solution. i) A_1, A_2, A_3, A_4 sont des événements aléatoires, car chaque fois que l'expérience est réalisée, chacun de ces événements se réalise ou ne se réalise pas. Par exemple, si le résultat de l'expérience est $\{b_1, b_2\}$, l'événement A_1 ne se réalise pas, mais si le résultat de l'expérience est $\{n_1, n_2\}$, l'événement A_1 se réalise. (Ici on a utilisé la notation du problème précédent.)

L'événement A_5 est l'événement impossible, car pour tout résultat de l'expérience, A_5 ne se réalise pas.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

A_1 est un événement élémentaire, car il se réalise seulement par une seule épreuve, à savoir : $\{n_1, n_2\}$.

A_2 est un événement composé, car il se réalise par plusieurs épreuves.

A_3 et A_4 sont également des événements composés.

A_5 n'est ni élémentaire ni composé.

ii) On a :

$A_1 = \{\{n_1, n_2\}\}$ est un événement élémentaire;

$$A_2 = \left\{ \begin{array}{lll} \{b_1, b_2\}, & \{b_1, b_3\}, & \{b_1, n_1\}, \\ \{b_1, n_2\}, & \{b_2, b_3\}, & \{b_2, n_1\}, \\ \{b_2, n_2\}, & \{b_3, n_1\}, & \{b_3, n_2\} \end{array} \right\}$$

est un événement aléatoire composé;

$$A_3 = \left\{ \begin{array}{lll} \{b_1, n_1\}, & \{b_1, n_2\}, & \{b_2, n_1\}, \\ \{b_2, n_2\}, & \{b_3, n_1\}, & \{b_3, n_2\} \end{array} \right\}$$

est un événement aléatoire composé;

$$A_4 = \left\{ \begin{array}{lll} \{n_1, b_1\}, & \{n_1, b_2\}, & \{n_1, b_3\}, \\ \{n_2, b_1\}, & \{n_2, b_2\}, & \{n_2, b_3\} \end{array} \right\}$$

est un événement aléatoire composé;

$A_5 = \emptyset$.

4. On considère les événements A_1, A_2, A_3, A_4 du problème précédent. Trouver les paires d'événements équivalents, les paires d'événements compatibles, les paires d'événements incompatibles, les paires d'événements contraires, les paires d'événements dont le premier implique le second.

Solution. $A_3 = A_4$, car obtenir une seule boule blanche (la réalisation de l'événement A_3) implique l'obtention d'une seule boule noire, donc cela revient à la réalisation de l'événement A_4, et vice-versa. On peut obtenir le même résultat de l'égalité des ensembles d'épreuves rattachées aux événements.

Les paires d'événements suivants sont compatibles :

$$\{A_2, A_3\}, \{A_2, A_4\}, \{A_3, A_4\},$$

car ils peuvent se réaliser simultanément.

Les paires d'événements suivants sont incompatibles:

$$\{A_1, A_2\},\ \{A_1, A_3\},\ \{A_1, A_4\},$$

car ils ne peuvent pas se réaliser simultanément.

Les événements A_1 et A_2 sont contraires, car obtenir deux boules noires (la réalisation de l'événement A_1) implique l'impossibilité d'obtenir au moins une boule blanche, c'est-à-dire la réalisation de l'événement A_2 et réciproquement.

Les relations $A_3 \subseteq A_4$ et $A_4 \subseteq A_3$ sont immédiates. La relation $A_3 \subseteq A_2$ découle du fait que chaque fois qu'on obtient une seule boule blanche (la réalisation de l'événement A_3), l'événement A_2 (obtenir au moins une boule blanche) se réalise aussi. Parce que $A_4 = A_3$, on a $A_4 \subseteq A_2$.

On peut arriver aux mêmes résultats en considérant les ensembles d'épreuves rattachées aux événements.

5. On choisit au hasard un nombre parmi les 5 000 premiers nombres naturels. Soit A l'événement "le nombre choisi est impair". Que représente l'événement A^c ?

   Solution. "Le nombre choisi est pair" est l'événement contraire A^c.

6. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ et $A = \{1, 2, 3\}$. Trouver les événements B de sorte que

   i) $\{1\} \subseteq B$.

   ii) $B \subseteq A$.

   Solution. i)

$$\{1\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,2,3\}, \{1,2,4\},\ \{1,3,4\},\ \{1,2,3,4\}.$$

ii)

$$\emptyset, \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}.$$

7. On contrôle la qualité de dix produits. Soit A l'événement "au moins un des produits est défectueux" et B l'événement "au plus deux des produits sont bons". Décrire les événements A^c et B^c.

Solution. A^c est l'événement "tous les produits contrôlés sont bons", tandis que B^c est l'événement "au moins trois produits sont bons".

8. Soit $\Omega = \{a, b, c\}$, $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$. Énumérer les éléments des événements suivants :

i) A^c,

ii) B^c,

iii) $A \cup B$,

iv) $A \cap B$,

v) $A^c \cap B^c$,

vi) $A^c \cap (A \cup B)$.

Solution. i) $A^c = \{b, c\}$,

ii) $B^c = \{a, c\}$,

iii) $A \cup B = \{a, b\}$,

iv) $A \cap B = \emptyset$,

v) $A^c \cap B^c = \{c\}$,

vi) $A^c \cap (A \cup B) = \{b\}$.

9. Dans l'ensemble des polynômes de degré plus petit que ou égal à n et dont les coefficients appartiennent à l'ensemble des nombres entiers de l'intervalle [—5 000, 5 000], on choisit au hasard un polynôme, disons $P(x)$. Soit A l'événement "$P(x)$ est divisible par le binôme *x — 1" et* soit B l'événement "la dérivée $P'(x)$ est divisible par le binôme *x -1".* Décrire les événements $A \cap B$ et $A \cup B$.

Solution. L'événement *A* Ç *B* signifie que le polynôme *P(x)* ainsi que sa dérivée *P'*(c) sont divisibles par le binôme *x — 1,* autrement dit, le polynôme *P(x)* admet 1, au moins, comme racine double.

L'événement *A* È *B* signifie que $P(1) = 0$ ou $P'(1) = 0$, c'est-à-dire que 1 est une racine pour le polynôme *P(x)* ou $P'(x)$, ou pour les polynômes *P(x)* et $P'(x)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

10. Trouver des expressions plus simples pour désigner les événements :

i) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c)$,

ii) $(A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$,

iii) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

Solution. i) $A \cup (B \cap B^c) = A \cup \emptyset = A$,

ii) $((A \cap A^c) \cup B) \cap (A \cup B^c) = B \cap (A \cup B^c) = (B \cap A) \cup (B \cap B^c) = B \cap A$,

iii) $(A \cup B) \cap (C \cup B) = (A \cap C) \cup B$.

11. Soit *A, B, C* trois événements quelconques. Exprimer les événements suivants. Parmi *A, B, C :*

i) *A* seul se produit.

ii) *A* et *B* se produisent mais non *C*.

iii) Les trois événements se produisent en même temps.

iv) Au moins un des événements se produit.

v) Au moins deux des événements se produisent.

vi) Un et un seulement se produit.

vii) Deux et deux seulement se produisent.

viii) Aucun événement ne se produit.

Solution. i) $A \cap B^c \cap C^c$.

ii) $A \cap B \cap C^c$.

iii) $A \cap B \cap C$.

iv) $A \cup B \cup C$.

v) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$.

vi) $(A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$.

vii) $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$.

viii) $A^c \cap B^c \cap C^c$.

12. Une machine a produit n pièces. Soit A_i l'événement "la *i*-ième pièce est défectueuse", $i = 1, \ldots, n$. Écrire les événements suivants :

i) B_1 - "aucune pièce n'est défectueuse".

ii) B_2 - "au moins une pièce est défectueuse".

iii) B_3 - "une seule pièce est défectueuse".

iv) B_4 - "deux pièces sont défectueuses".

v) B_5 - "au moins deux pièces sont défectueuses".

vi) B_6 - "au plus deux pièces sont défectueuses".

Solution. i)

$$B_1 = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c.$$

ii)

$$B_2 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

iii)

$$B_3 = \bigcup_{i=1}^{n} (A_1^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c).$$

iv)

$$\begin{aligned} B_4 \quad = \quad & \bigcup_{\substack{i=1,j=1 \\ i<j}}^{n} (A_1^c \cap \cdots \cap A_{i-1}^c \cap A_i \cap A_{i+1}^c \cap \\ & \cdots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \cap A_{j+1}^c \cap \cdots \cap A_n^c). \end{aligned}$$

v) $B_5 = B_1^c \cap B_3^c$.

vi) $B_6 = B_1 \cup B_3 \cup B_4$.

13. On choisit au hasard un nombre parmi les 5 000 premiers nombres naturels. Soit A l'événement "le nombre choisi commence par le chiffre 3" et soit B l'événement "le nombre choisi finit par le chiffre 5." Que représente l'événement $A \setminus B$?

Solution. On *a* $A \setminus B = A \cap B^c$, donc le nombre choisi doit commencer par le chiffre 3 et finir par tout chiffre différent de 5.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

14. On choisit au hasard un nombre parmi les 5 000 premiers nombres naturels. Soit A l'événement "le nombre choisi est divisible par 2" ; B l'événement "le nombre choisi est divisible par 3" ; C l'événement "le nombre choisi finit par le chiffre 0". Décrire les événements :

i) $C \cap (A \cup B)$.

ii) $(A \cap B) \cup C$.

iii) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Solution. i) Le nombre choisi finit par 0 et il se divise par 2, par 3 ou par 6.

ii) Le nombre choisi est divisible par 6, ou se termine par 0, ou est divisible par 6 et se termine par 0.

iii) Le nombre choisi est divisible par 2 et finit par 0, ou le nombre choisi est divisible par 3 et finit par 0, ou il est divisible par 6 et finit par 0.

15. Que peut-on dire des événements A et B d'un même espace d'événements si :

i) $A \setminus B = \Omega$?

ii) $A \setminus B = \emptyset$?

iii) $A \cap B = A \cup B$?

iv) $A \setminus B = A$?

v) $A \cap B = B$?

Solution. i) Il est certain que l'événement A est réalisé et que l'événement B ne l'est pas, donc A est l'événement certain, $A = \Omega$ et B est l'événement impossible, $B = \emptyset$.

ii) Il est impossible que l'événement A soit réalisé et en même temps que l'événement B ne le soit pas, donc si A est réalisé, B l'est aussi, donc $A \subseteq B$.

iii) Dire que les événements A et B sont réalisés en même temps, c'est dire que A est réalisé ou B est réalisé, donc A et B sont équivalents, $A = B$.

iv) Dire que l'événement A est réalisé et l'événement B ne l'est pas, c'est dire que l'événement A est réalisé, donc les événements A et B ne sont jamais réalisés en même temps, par suite les événements A et B sont incompatibles, $A \cap B = \emptyset$.

v) Dire que les événements A et B sont réalisés en même temps, c'est dire que l'événement B est réalisé, donc si l'événement B est réalisé, l'événement A l'est aussi, et par suite $B \subseteq A$.

16. Montrer les relations de De Morgan[1]

i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Solution. i) L'événement $A \cup B$ se réalise si au moins un des événements A ou B se réalise; par conséquent, l'événement contraire $(A \cup B)^c$ signifie la non réalisation tant de A que de B, donc la réalisation de A^c et de B^c, c'est-à-dire, de l'événement $A^c \cap B^c$, d'où

$$(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c. \tag{1.1}$$

L'événement $A^c \cap B^c$ signifie la non réalisation de l'événement A et la non réalisation de l'événement B, par conséquent, la non réalisation de l'événement $A \cup B$, donc la réalisation de son événement contraire $(A \cup B)^c$, d'où

$$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c. \tag{1.2}$$

De (1.1) et (1.2) on obtient l'égalité demandée en i).

ii) L'événement $A \cap B$ se réalise si les événements A et B se réalisent; par conséquent, l'événement contraire $(A \cap B)^c$ signifie la non réalisation d'au moins un des événements A ou B, donc la réalisation d'au moins un des événements A^c ou B^c, c'est-à-dire, de l'événement $A^c \cup B^c$, d'où

$$(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c. \tag{1.3}$$

L'événement $A^c \cup B^c$ signifie la non réalisation de l'événement A ou la non réalisation de l'événement B, par conséquent, la non réalisation de l'événement $A \cap B$ donc la réalisation de son événement contraire, $(A \cap B)^c$, d'où

$$A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c. \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4) on obtient l'égalité demandée en ii).

[1]Augustus De Morgan (1806-1871), mathématicien et logicien britannique.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

17. Montrer que

i) $(A^c \cap B^c)^c = A \cup B$.

ii) $(C^c \cup D^c)^c = C \cap D$.

Solution. i) L'événement $A^c \cap B^c$ signifie la non réalisation de l'événement A et la non réalisation de l'événement B et par conséquent, l'événement contraire de cet événement à savoir $(A^c \cap B^c)^c$ signifie la réalisation au moins d'un des événements A et B, donc

$$(A^c \cap B^c)^c \subseteq A \cup B. \tag{1.5}$$

D'autre part, si l'événement $A \cup B$ se réalise, donc au moins, un des événements A et B, alors l'événement $A^c \cap B^c$ ne se réalise pas, ce qui implique que l'événement $(A^c \cap B^c)^c$ se réalise, et

$$A \cup B \subset (A^c \cap B^c)^c. \tag{1.6}$$

De (1.5) et (1.6) on obtient l'égalité désirée.

ii) En posant dans l'égalité i) $A^c = C$ et $B^c = D$, on obtient

$$(C \cap D)^c = C^c \cup D^c,$$

d'où en passant aux événements contraires,

$$C \cap D = (C^c \cup D^c)^c.$$

Ce problème peut être résolu d'une autre façon en tenant compte des relations de De Morgan et du fait que $(A^c)^c = A$.

18. Montrer que les relations suivantes

$$A \subseteq B;\ B^c \subseteq A^c;\ A \cup B = B;\ A \cap B = A$$

sont équivalentes.[2]

Solution. Montrons d'abord que les relations $A \subseteq B$ et $B^c \subseteq A^c$ sont équivalentes. Soit $A \subseteq B$, alors la réalisation de A implique la

[2]Deux relations R_1 et R_2 sont équivalentes si le fait que R_1 soit vraie entraîne que R_2 est vraie et réciproquement.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

réalisation de B et si B^c se réalise, alors A ne peut pas se réaliser, c'est donc A^c qui se réalise dans ce cas et donc, $B^c \subseteq A^c$.

Supposons maintenant que $B^c \subseteq A^c$, alors la réalisation de B^c implique la réalisation de A^c et si A se réalise, alors B^c ne peut pas se réaliser, donc c'est B qui se réalise dans ce cas et par conséquent, $A \subseteq B$.

Montrons maintenant l'équivalence des relations $A \subseteq B$ et $A \cup B = B$. Supposons que $A \subseteq B$ et montrons que $A \cup B \subseteq B$ qui avec l'implication évidente $B \subseteq A \cup B$ donnera $A \cup B = B$. Si $A \cup B$ se réalise, alors B ou A se réalise et parce que $A \subseteq B$, l'événement B se réalise, donc dans toute situation $A \cup B \subseteq B$.

Soit maintenant $A \cup B = B$. On a alors $A \subseteq A \cup B = B$, donc $A \subseteq B$.

Montrons maintenant l'équivalence des relations $A \subseteq B$ et $A \cap B = A$. Soit d'abord $A \subseteq B$, alors $A \subseteq A \cap B$ et parce que $A \cap B \subseteq A$ il s'ensuit $A \cap B = A$. Supposons que $A \cap B = A$, alors de $A \cap B \subseteq B$, il s'ensuit $A \subseteq B$, donc l'équivalence désirée.

Parce que les relations $B^c \subseteq A^c$ et $A \cup B = B$ sont équivalentes avec la relation $A \subseteq B$, il s'ensuit par transitivité qu'elles sont équivalentes.

De façon analogue, parce que les relations $B^c \subseteq A^c$ et $A \cap B = A$ sont équivalentes avec la relation $A \subseteq B$, il s'ensuit par transitivité qu'elles sont équivalentes.

Le même raisonnement montre que les relations $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$ sont équivalentes.

Montrons d'une autre façon l'équivalence des relations $A \cup B = B$ et $A \cap B = A$. Soit $A \cup B = B$, alors parce que $A = A \cap (B \cup A)^3$, il s'ensuit $A = A \cap B$. Réciproquement, soit maintenant $A = A \cap B$ alors de $B = B \cup (A \cap B)^4$ il s'ensuit $B = B \cup A = A \cup B$.

19. Montrer l'équivalence des relations suivantes:

$$A \cap B = \emptyset; \ A \subseteq B^c; \ B \subseteq A^c.$$

Solution. Montrons que les relations $A \cap B = \emptyset$ et $A \subseteq B^c$ sont équivalentes. De $A \cap B = \emptyset$ découle que les événements A et B sont

[3] La propriété d'absorption, voir problème 13 ii), Section 1.3.
[4] La propriété d'absorption, voir problème 13 i), Section 1.3.

incompatibles. Supposons que A se réalise, alors B ne peut pas se réaliser et par conséquent, c'est B^c qui se réalise et ainsi, $A \subseteq B^c$. Réciproquement, soit $A \subseteq B^c$ et supposons que A se réalise, alors B^c se réalise aussi et par suite, B ne peut pas se réaliser, autrement dit, les événements A et B ne peuvent pas se réaliser simultanément, donc $A \cap B = \emptyset$.

Montrons que les relations $A \subseteq B^c$ et $B \subseteq A^c$ sont équivalentes. Soit $A \subseteq B^c$ alors si A se réalise B ne peut pas se réaliser et par conséquent, si B se réalise alors A^c se réalise aussi, donc $B \subseteq A^c$. Réciproquement, soit $B \subseteq A^c$, alors si B se réalise, A ne peut pas se réaliser et par suite si A se réalise alors B^c se réalise aussi, donc $A \subseteq B^c$.

Parce que les relations $A \cap B = \emptyset$ et $A \subseteq B^c$ sont équivalentes, et puisque les relations $A \subseteq B^c$ et $B \subseteq A^c$ sont équivalentes, il s'ensuit, par transitivité, que les relations $A \cap B = \emptyset$ et $B \subseteq A^c$ sont équivalentes.

20. On considère l'expérience qui consiste à tirer une boule d'une urne contenant 4 boules blanches numérotées 1, 2, 3 et 4, et une boule noire numérotée 5.

i) Décrire l'espace probabilisable relié à cette expérience.

ii) Combien d'événements y-a-t-il dans l'espace des événements ?

iii) Énumérer les événements élémentaires.

iv) Énumérer les implications de l'événement {1}.

Solution. i) L'espace probabilisable est (Ω, A) où $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $A = P(\Omega)$ est donc donné par l'ensemble

$$\left\{ 0, \{k\}, \{i, j\}, \{i, j, k\}, \{i, j, k, l\}, \{1, 2, 3, 4, 5\} \right\}$$

où i, j, k, l prennent indépendamment les valeurs de 1 à 5, mais avec la restriction que dans le cadre d'un même groupe tous les indices soient différents et deux groupes avec le même nombre d'indices diffèrent au moins par un indice. On a noté par $\{k\}$ la sélection de la boule numérotée k, par $\{i, j\}$ la sélection des boules numérotées i et j, etc. et $\{1, 2, 3, 4, 5\} = \Omega$ représente l'événement certain.

ii) Le nombre d'événements dans l'espace des événements est

$$1 + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = (1+1)^5 = 2^5 = 32.$$

iii) Les événements élémentaires sont :

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}.$$

iv) En plus de $\{1\} \subseteq \{1\}$, on trouve

$$\begin{array}{lll}
\{1\} \subseteq \{1,2\}; & \{1\} \subseteq \{1,3\}; & \{1\} \subseteq \{1,4\}; \\
\{1\} \subseteq \{1,5\}; & \{1\} \subseteq \{1,2,3\}; & \{1\} \subseteq \{1,2,4\}; \\
\{1\} \subseteq \{1,2,5\}; & \{1\} \subseteq \{1,3,4\}; & \{1\} \subseteq \{1,3,5\}; \\
\{1\} \subseteq \{1,4,5\}; & \{1\} \subseteq \{1,2,3,4\}; & \{1\} \subseteq \{1,2,3,5\}; \\
\{1\} \subseteq \{1,2,4,5\}; & \{1\} \subseteq \{1,3,4,5\}; & \{1\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}.
\end{array}$$

1.3 Problèmes proposés

1. On lance deux pièces de monnaie (une de 1 cent et une de 10 cents) et on considère les résultats qui apparaissent.

   i) Quelles sont les épreuves de l'expérience ?

   ii) Soit les événements :

   A_1 - "l'apparition d'une face sur une des pièces de monnaie",

   A_2 - "l'apparition de face sur la pièce de 10 cents".

   Les événements A_1 et A_2 sont-ils compatibles ou incompatibles?

2. D'une urne contenant 20 boules dont 6 sont blanches et 14 sont noires, on extrait, au hasard sans remise, deux boules. Soit A l'événement "parmi les deux boules choisies, il y a au moins une boule blanche" et B l'événement "les deux boules sont blanches". Les événements A et B sont compatibles ou incompatibles ? S'agit-il d'événements élémentaires ou composés ?

3. On lance un dé. Notons A l'événement "l'apparition de la face 1 ou 4" et B l'événement "l'apparition de la face 2 ou 3 ou 5 ou 6." Quelle est la relation entre les événements A et B ?

4. On pige 10 pièces d'un lot de pièces fabriquées par une machine. Représentons par A l'événement "toutes les pièces choisies sont bonnes" et par B l'événement "au moins une pièce est défectueuse". Quel est le type d'événement de

i) $A \cup B$,

ii) $A \cap B$?

5. Deux étudiants jouent une partie d'échec. Soit *A* l'événement "le premier étudiant gagne la partie" et soit *B* l'événement "le deuxième étudiant gagne la partie". La partie se termine sur une nulle.

   i) Est-ce qu'un des événements *A* ou *B* s'est réalisé ?

   ii) Écrire l'événement réalisé en utilisant les événements *A* et *B*.

6. Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$, $A = \{a, b\}$ et $B = \{d\}$. Énumérer les éléments des événements suivants :

   i) A^c,

   ii) $A \cup B^c$,

   iii) $A \cap B$,

   iv) $A^c \cap B$.

7. On lance un dé deux fois de suite.

   i) Préciser les événements suivants :

   A_1 - "on obtient la face 1 suivi d'un nombre pair" ,

   A_2 - "la somme est 5" ,

   A_3 - "les deux chiffres obtenus sont égaux".

   ii) Que pouvez-vous dire des événements *A, B, C* tels que

   A est réalisé quand A_1 et A_2 sont réalisés,

   B est réalisé quand A_2 et A_3 sont réalisés,

   C est réalisé quand A_2 est réalisé et que A_1 ne l'est pas.

8. L'espace échantillonnal Ω étant un jeu de 52 cartes. Soit *T* le sous-ensemble des trèfles, *Q* celui des carreaux, *C* celui des coeurs, *P* celui des piques, *N* celui des cartes nobles (dix, valet, dame, roi et as). Décrire les sous-ensembles suivants et donner le nombre d'éléments qu'ils contiennent :

   i) $T \cap N$,

   ii) $(T \cap P) \cup N$,

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

iii) $(T \cap Q) \cup N^c$,
iv) $(P \cap C^c) \cup (P^C \cap C)$.

9. De l'ensemble des nombres naturels de l'intervalle [1, 499] on choisit au hasard un nombre. Soit A l'événement "le nombre choisi est divisible par 5" et soit B l'événement "le nombre choisi se termine par le chiffre 0". Décrire l'événement $A \setminus B$?

10. On écrit au hasard un polynôme, disons $P(x)$, de l'ensemble des polynômes dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle [-10, 20]. Considérons les événements :
A_1 - "le polynôme $P(x)$ est divisible par $x - 2$",
A_2 - "le polynôme dérivé $P'(x)$ est divisible par $x - 2$",
A_3 - "la dérivé seconde $P''(x)$ est divisible par $x - 2$",
B - "2 est au moins une racine triple du polynôme $P(x)$",
C - "2 est une racine double pour le polynôme $P(x)$".
Exprimer les événements B et C à l'aide des événements A_i, $i = 1, 2, 3$.

11. Montrer les propriétés de *distributivité*:
i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

12. Montrer les propriétés d'*idempotence*:
i) $A \cup A = A$,
ii) $A \cap A = A$.

13. Montrer les propriétés d'*absorption*:
i) $A \cup (B \cap A) = A$,
ii) $A \cap (B \cup A) = A$.

14. Trouver, en fonction des événements A et B, l'événement C de

$$(C \cup A)^c \cup (C \cup A^c)^c = B.$$

15. Montrer que

i) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$,

ii) $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$,

iii) $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$,

iv) $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$.

16. Montrer que

i) $A \cup \left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n}(A \cup B_i)$,

ii) $A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n}(A \cap B_i)$.

17. Montrer que

$$A \setminus \bigcap_{i=1}^{n} B_i = \bigcup_{i=1}^{n}(A \setminus B_i).$$

18. Montrer que

i) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$,

ii) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$,

iii) $A \setminus (A \setminus C) = A \cap C$,

iv) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$,

v) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

19. Montrer que si les événements A et C sont incompatibles alors

$$A \setminus (B \setminus C) = A \setminus B.$$

20. Montrer que

i) $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) \cap (A^c \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = \emptyset$,

ii) $(A \cap B) \cup (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = \Omega$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

21. On lance une pièce de monnaie. Décrire l'espace des événements rattachés à cette expérience.
22. Décrire l'espace des événements rattachés à l'expérience qui consiste à lancer un dé.
23. Décrire l'espace des événements rattachés à l'expérience qui consiste à lancer simultanément une pièce de monnaie et un dé et à observer les faces supérieures présentées après le lancer.
24. Décrire l'espace des événements rattachés à l'expérience suivante : on écrit un nombre de deux chiffres choisis au hasard, parmi les chiffres 1, 5, 8.

1.4 Indications et réponses

1. i) Les épreuves sont :

    - sur les deux pièces apparaissent des piles,
    - sur les deux pièces apparaissent des faces,
    - sur la pièce de monnaie de 1 cent apparat pile et sur la pièce de monnaie de 10 cents apparat face,
    - sur la pièce de monnaie de 1 cent apparat face et sur la pièce de monnaie de 10 cents apparat pile.

    Symboliquement on peut écrire *(P, P), (F, F), (P, F), (F, P).*

    ii) A_1 et A_2 sont des événements aléatoires, car en effectuant l'expérience, ils peuvent ou non se produire. Ce sont des événements composés, car chacun peut être réalisé par plusieurs épreuves. Les événements A_1 et A_2 sont compatibles, car ils peuvent se produire simultanément par l'épreuve *(F, F).*

2. A et B sont des événements compatibles, car ils peuvent se produire en même temps, à savoir quand on extrait de l'urne deux boules blanches. A et B sont des événements composés.

3. Les événements A et B sont contraires, car si A se réalise, alors »B ne peut pas se réaliser et réciproquement, $B = A^c$ et $A = B^e$. Les événements A et B sont incompatibles.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

4. i) Événement certain.

   ii) Événement impossible.

5. i) Non.

   ii) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

6. i) $A^c = \{c, d\}$,

   ii) $A \cup B^c = \{a, b, c\}$,

   iii) $A \cap B = \varnothing$,

   iv) $A^c \cap B = \{d\}$.

7. D'abord l'espace échantillonnal Ω contient 36 événements élémentaires, à savoir les couples *(a, b)* de nombres compris entre 1 et 6.

   i) $A_l = \{(1, 2), (1,4), (1, 6)\}$,

   $A_2 = \{(1, 4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$,

   $A_3 = \{(1,1), (2,2), ..., (6,6)1$.

   ii) $A = \{(1, 4)\}$, donc A est un événement élémentaire, il se réalise quand on obtient la face avec 1, puis un nombre pair et la somme est 5.

   $B = \varnothing$, car la somme de deux nombre égaux ne peut être 5, donc B est l'événement impossible.

   $C = \{(2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$, car la somme est 5 et on n'a pas obtenu un 1 suivi d'un nombre pair.

8. i) $T \cap N$ contient 5 cartes, les cartes nobles de trèfles.

   ii) Notons que $T \cap P = \emptyset$, donc $(T \cap P) \cup N = N$ contient 20 cartes, toutes les cartes nobles de trèfles, de carreaux, de coeurs et de piques.

   iii) Notons que $T \cap Q = \emptyset$, donc $(T \cap Q) \cup N^c = N^c$ contient 32 cartes, toutes les cartes autres que les cartes nobles.

   iv) Puisque $P \subseteq C^c$ et $C \subseteq P^c$, on a $(P \cap C^c) \cup (P^c \cap C) = P \cup C$ qui contient 26 cartes, toutes les cartes de piques et toutes les cartes de coeurs.

9. Le nombre naturel choisi doit se terminer par le chiffre 5, car il est divisible par 5. Mais il ne peut pas se terminer par 0.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

10. $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3$,

$C = (A_1 \cap A_2) \cap A_3^c$.

11. i) La réalisation de l'événement $A \cup (B \cap C)$ signifie la réalisation l'événement A ou des événements B et C, ce qui implique la réalis tion des événements A ou B ainsi que la réalisation des événemer A ou C, donc de l'événement $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ et par conséque $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Réciproquement on montre que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$, d' il s'ensuit $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

ii) Se démontre de la même façon qu'en i).[5]

12. i) La réalisation de l'événement $A \cup A$ signifie la réalisation de l'évér ment A, donc $A \cup A \subseteq A$.

Réciproquement, la réalisation de l'événement A implique la réalisati de l'événement $A \cup A$, donc $A \subseteq A \cup A$ et donc $A \cup A = A$.

ii) Il en est de même pour le point i) mais pour les implications $A \cap A$ A et $A \subseteq A \cap A$.

13. i) La réalisation de l'événement $A \cup (B \cap A)$ signifie la réalisation l'événement A, ou de l'événement A et B, donc dans toute situatic la réalisation de l'événement A et par conséquent $A \cup (B \cap A) \subseteq A$.

Réciproquement, la réalisation de l'événement A implique la réalis tion de l'événement $A \cup (B \cap A)$, donc $A \subseteq A \cup (B \cap A)$ et par su $A \cup (B \cap A) = A$.

ii) Il en est de même pour le point i) mais pour les événements A $(B \cup A)$ et A.

14. On passe aux événements contraires et on utilise la distributivité. (obtient $C = B^c$.

[5]En interprétant les événements comme des sous-ensembles des épreuves par lesquelles ils se réalisent, résoudre ce problème comme les suivants de même type, revient à démontrer l'égalité d'ensembles. Pour habituer le lecteur au raisonnement propre à la théorie des probabilités nous avons préféré des démonstrations telles que proposées.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

15. i) L'événement $A \cup B \cup C$ signifie la réalisation d'au moins un des événements A, B, C, son contraire, $(A \cup B \cup C)^c$ signifie la réalisation du $A^c \cap B^c \cap C^c$, donc

$$(A \cup B \cup C)^c \subseteq A^c \cap B^c \cap C^c.$$

De façon analogue on montre l'implication inverse, d'où l'égalité désirée.

ii) On procède comme pour le point i).

iii)On utilise la preuve par récurrence. Pour le cas à deux et trois événements on vérifie les relations du problème 16 i), Section 1.2, et du point i) du présent problème.

On suppose l'égalité vraie pour $(n-1)$ événements, c'est-à-dire

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i^c.$$

On montre maintenant que l'égalité est vraie pour n événements. On trouve

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c &= \left(\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right)^c \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)^c \cap A_n^c \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c,\end{aligned}$$

donc l'égalité est vraie pour tout nombre naturel n.

iv) On procède comme pour le point iii).

16. Se démontre par récurrence tout en utilisant les propriétés de distributivité des opérations $\cup$ et $\cap$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

17.

$$\begin{aligned} A \setminus \bigcap_{i=1}^{n} B_i &= A \cap (B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n)^c \\ &= A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i^c \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i^c) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (A \setminus B_i). \end{aligned}$$

18. i) La réalisation de l'événement $A \setminus B$ signifie la réalisation de A et la non réalisation de B, donc l'événement $A \cap B$ ne se réalise pas non plus et par conséquent, l'événement $A \setminus (A \cap B)$ se réalise, d'où $A \setminus B \subset A \setminus (A \cap B)$.

Réciproquement, la réalisation de $A \setminus (A \cap B)$ signifie la réalisation de l'événement A et la non réalisation de l'événement $A \cap B$, donc la non réalisation de B et par conséquent la réalisation de l'événement $A \setminus B$. Donc

$$A \setminus (A \cap B) \subseteq A \setminus B.$$

ii), iii) se démontrent de la même façon que i).

iv) L'événement $(A \cup B) \setminus C$ signifie la réalisation de $A \cup B$ et la non réalisation de C, donc la réalisation de $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$, par conséquent

$$(A \cup B) \setminus C \subseteq (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

Réciproquement, $(A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ signifie la réalisation de A et la non réalisation de C, ou la réalisation de B et la non réalisation de C, donc la réalisation de A ou B et la non réalisation de C, donc

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) \subseteq (A \cup B) \setminus C,$$

d'où

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

v) On le montre de la même façon que le point iv).

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

19. $A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cap C^c) = A \cap (B \cap C^c)^c = A \cap (B^c \cup C) = (A \cap B^c) \cup (A \cap C) = A \setminus B$, car $A \cap C = \emptyset$.

20. i) On applique la propriété de distributivité et on trouve

    $(A \cup (B \cap B^c)) \cap (A^c \cup (B \cap B^c)) = (A \cup \emptyset) \cap (A^c \cup \emptyset) = A \cap A^c = \emptyset$.

    ii) De façon analogue au point i).

21. Notons par P et F les épreuves pile et face respectivement. On a

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \Omega\},$$

où $\Omega = \{P, F\}$. Il y a $2^2 = 4$ événements.

22. L'espace d'événements sera

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{k\}, \{i,j\}, \{i,j,k\}, \{i,j,k,l\}, \{i,j,k,l,m\}, \Omega\},$$

ici *i, j, k,1, m* prennent indépendamment toutes les valeurs de 1 à 6, (voir la restriction faite dans le problème 20, Section 1.2). On a noté par $\{k\}$ l'apparition de la face avec k points, par $\{i, j\}$ l'événement qui signifie l'apparition de la face avec i points ou de la face avec j points, donc $\{i, j\} = \{i\} \cup \{j\}$, etc.

Il y a $1 + \sum_{s=1}^{6} \binom{6}{s} = 2^6 = 64$ événements.

23. D'abord l'espace échantillonnal sera $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, c'est-à-dire le produit cartesien de l'espace échantillonnal $\Omega_1 = \{P, F\}$, rattachés à l'expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie, (voir problème 21) et de l'espace échantillonnal $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, rattachés a l'expérience qui consiste à lancer un dé, (voir problème 22), donc

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (P,1),(P,2),(P,3),(P,4),(P,5),(P,6), \\ (F,1),(F,2),(F,3),(F,4),(F,5),(F,6) \end{array} \right\}$$

L'espace d'événements sera $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Il y a $1 + \sum_{s=1}^{8} \binom{8}{s} = 2^8 = 256$ événements.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

24. D'abord l'espace échantillonnal sera $\Omega = \{15,\ 18,\ 51,\ 58,\ 81,\ 85\}$. Le nombre d'épreuves est $\mathcal{A}_2^3 = 6$ où $\mathcal{A}_2^3$ représente le nombre d'arrangements que l'on peut former en choisissant 2 objets parmi 3 en tenant compte de l'ordre de sélection.

    L'espace d'événements sera $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

    Il y a $1 + \sum_{s=1}^{6} \binom{6}{s} = 2^6 = 64$ événements.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Chapitre 2
Espace fini de probabilité

2.1 Notions de base — Définitions et propriétés

2.1.1 Définition classique de probabilité

Considérons une expérience dont l'espace échantillonnal Ω compte n épreuves, toutes également vraisemblables. Soit $A \subseteq \Omega$ un événement quelconque (rattaché à l'expérience) qui peut se produire par la réalisation d'une épreuve parmi m épreuves, $m \leq n$.

Définition 1. Relativement à une expérience aléatoire, la *probabilité de l'événement* A est le nombre

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

où m est le nombre d'épreuves qui réalisent A et n le nombre total d'épreuves dans l'espace échantillonnal Ω rattaché à l'expérience. Ainsi $P(A)$ est le rapport entre le nombre de cas favorables à la réalisation de l'événement A et le nombre de cas possibles, tous cas possibles étant également vraisemblables.

Pour calculer la probabilité d'un événement quelconque A, il faut donc déterminer le nombre de

- cas favorables, c'est-à-dire, le nombre d'éléments de l'ensemble des épreuves rattachées à l'événement A,
- cas possibles, c'est-à-dire, le nombre d'éléments de l'ensemble des épreuves rattachées à l'événement certain Ω.

La probabilité $P(A)$ est le rapport de ces deux nombres.

On pourrait aussi écrire

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)},$$

où *card(A), card(Ω)* représentent la cardinalité respective des ensembles A et Ω.

Remarque 2. On peut utiliser cette définition *classique ou fréquentiste* de probabilité seulement pour les expériences où les événements élémentaires sont *équiprobables*, c'est-à-dire également vraisemblables.

On dit que les épreuves sont *équiprobables*, c'est-à-dire que les probabilités des événements élémentaires sont égales.

La probabilité d'un événement élémentaire d'une telle expérience est $1/n$ (n étant le nombre total d'épreuves). Cette probabilité est la même pour tout événement élémentaire, car le nombre de cas favorables est nécessairement égal à 1.

Exemple 3. Quand on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on présume que les épreuves "pile" et "face" sont également possibles. Dans ce cas les probabilités classiques seraient 1/2 pour les événements élémentaires. On dit que ces événements sont équiprobables.

De même, quand on lance un dé bien équilibré, les différents résultats possibles sont tous également probables et les probabilités pour les événements élémentaires sont toutes 1/6.

Remarque 4. En considérant la définition 1, on constate que la notion de probabilité d'un événement a les propriétés suivantes :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$; car $0 \leq m \leq n$.
2. $P(\Omega) = 1$; car dans cette situation tous les cas sont favorables et ainsi $m = n$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si les événements A et B sont incompatibles, c'est-à-dire, $A \cap B = \emptyset$.
4. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
5. $P(\emptyset) = 0$.
6. $P(A) \leq P(B)$ si $A \subseteq B$.

2.1.2 Définition axiomatique de probabilité

Définition 1. Une *mesure de probabilité,* ou une *probabilité P* définie sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une fonction $P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ qui associe à tout événement A de $\mathcal{A}$ un nombre réel $P(A)$, $A \to P(A)$ qui satisfait les axiomes suivants :[1]

1. $P(A) \geq 0$ pour tout événement $A \in \mathcal{A}$;
2. $P(\Omega) = 1$, Ω étant l'événement certain;
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour tout $A, B \in \mathcal{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$.

Remarque 2. L'axiome 3 peut être étendu, par récurrence, à tout nombre fini d'événements incompatibles deux à deux; ainsi, pour $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$; $i, j = 1, \ldots, k$, on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i).$$

Remarque 3. Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ et soit $A \in \mathcal{A}$. Si $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_j}\}$, alors

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\}) + \cdots + P(\{\omega_{i_j}\})$$

et pour connaître la probabilité de tout événement $A \in \mathcal{A}$ il suffit donc de connaître les probabilités des événements élémentaires,

$$p_1 = P(\{\omega_1\}), \ldots, p_n = P(\{\omega_n\}),$$

où $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ et $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

Définition 4. La *distribution de probabilité* attachée à l'espace échantillonnal $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ est le schéma

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \ldots \omega_n \\ p_1 \ldots p_n \end{pmatrix},$$

où $p_i = P(\{\omega_i\}) \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ et $p_1 + \cdots + p_n = 1$.

[1] Cette définition axiomatique de probabilité a été donnée en 1933 par Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903-1987), mathématicien russe.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $P(A)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires qui composent l'événement A.

Signalons que la définition classique de probabilité satisfait bien sûr tous les axiomes de la définition axiomatique car on obtient la première de la seconde comme cas particulier où $p_1 = \cdots = p_n = 1 / n$

2.1.3 Espace probabilisé

Définition 1. Un *espace probabilisé* est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *où* $(\Omega, \mathcal{A})$ est un espace probabilisable, et P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 2. Un *système complet d'événements* est un ensemble d'événements $\{A_k \,;\, k = 1, \ldots, m\}$ qui satisfait les conditions suivantes :

1. $A_k \neq \emptyset,\ k = 1, \ldots, m;$
2. $A_k \cap A_j = \emptyset,\ k \neq j;\ k, j = 1, \ldots, m;$
3. $\bigcup_{k=1}^{m} A_k = \Omega.$

En fait un système complet d'événements est une *partition* de 52 en événements disjoints.

Il s'ensuit que si les événements $\{A_k \,;\, k = 1, \ldots, m\}$ forment un système complet d'événements alors

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} P(A_k).$$

Remarque 3. L'ensemble de tous les événements élémentaires associés à une expérience forme un système complet d'événements.

2.1.4 Probabilité conditionnelle

Soit A un événement tel que $P(A) > 0$.

Définition 1. On appelle *probabilité conditionnelle de l'événement B par rapport à l'événement A,* ou encore, la probabilité de *B étant donné A,* le nombre

$$P_A(B) = P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{2.1}$$

Si $P(B) > 0$ alors on peut définir, de façon analogue, la probabilité conditionnelle de l'événement A par rapport à l'événement B, à savoir

$$P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}. \tag{2.2}$$

Des formules (2.1) et (2.2), on tire

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A), \text{ et } P(A \cap B) = P(B)P(A \mid B),$$

d'où

$$P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B).$$

Cette formule fait le lien entre les probabilités conditionnelles réciproque pour deux événements.

Notons que la probabilité conditionnelle satisfait aux axiomes de la définition 1, de 2.1.2, donc elle est également une probabilité sur (Ω, A).

On peut interpréter la probabilité conditionnelle $P(B \setminus A)$ comme la probabilité de l'événement B sachant que l'événement A s'est réalisé.

En comparant les probabilités $P(B)$ et $P(B \setminus A)$, on peut déterminer si la réalisation de l'événement A influence ou non la réalisation de l'événement B, ce que nous abordons maintenant.

2.1.5 Événements indépendants

Définition 1. Deux événements A_1 et A_2 sont *indépendants* si

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2).$$

Remarque 2. Si $P(A_1) > 0$ et $P(A_2) > 0$ et les événements A_1 et A_2 sont indépendants alors

$$P(A_1 \mid A_2) = P(A_1) \text{ et } P(A_2 \mid A_1) = P(A_2),$$

et réciproquement, si $P(A_1 \mid A_2) = P(A_1)$ ou $P(A_2 \mid A_1) = P(A_2)$, alors les événements A_1 et A_2 sont indépendants.

Définition 3. Les événements $\{A_k \ ; \ k = 1, \ldots, n\}$ sont *indépendants* si

$$P(A_{k_1} \cap \cdots \cap A_{k_s}) = P(A_{k_1}) \cdots P(A_{k_s}),$$

pour tous indices $1 \leq k_1 < \cdots < k_s \leq n$.

Définition 4. Les événements $\{A_k\ ;\ k = 1, \ldots, n\}$ sont *mutuellement indépendants*, ou encore, *indépendants deux à deux*, si

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

pour tous indices i, j tels que $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$.

Évidemment, si les événements $\{A_k\ ;\ k = 1, \ldots, n\}$ sont indépendants, alors ils sont aussi mutuellement indépendants.

L'exemple suivant montre que la réciproque de cette affirmation n'est pas, en général, vraie.

Exemple 5. Considérons un tétraèdre dont les faces sont colorées de la façon suivante: une face est blanche, une face est noire, une face est rouge et la dernière face comprend les trois couleurs. On lance le tétraèdre sur une table et on regarde la couleur de la face sur laquelle le tétraèdre est tombé. Soient les événements

A_1 - "on voit la couleur blanche",
A_2 - "on voit la couleur noire",
A_3 - "on voit la couleur rouge".

Notons que $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$. Alors

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j),$$

pour tout i, j tel que $1 \leq i, j \leq 3, i \neq j$, donc les événements $\{A_k\ ;\ k = 1, 2, 3\}$ sont mutuellement indépendants. Par contre

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

donc les événements $\{A_k\ ;\ k = 1, 2, 3\}$ ne sont pas indépendants.

De même, l'exemple suivant montre que la condition

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n),$$

n'est pas suffisante à elle seule pour l'indépendance des événements $\{A_k\ ;\ k = 1, \ldots, n\}$.

Exemple 6. Considérons les événements $A_1 = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$, $A_2 = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, et $A_3 = \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7\}$. Soit $p_i = P(\{\omega_i\})$ et soient $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{2}{27}$, $p_5 = \frac{1}{27}$, $p_6 = p_7 = \frac{4}{27}$. Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3).$$

On a $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$ et $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$, mais $P(A_1 \cap A_2) \neq P(A_1)P(A_2)$, donc les événements A_1 et A_2 ne sont pas indépendants.

Remarque 7. Si les événements $\{A_k \; ; \; k = 1, \ldots, n\}$ sont indépendants alors les événements $\{B_k \; ; \; k = 1, \ldots, n\}$ où $B_k \in \{A_k, A_k^c\}$, $k = 1, \ldots, n$ sont aussi indépendants.

Remarque 8. Si les événements $\{A_k \; ; \; k = 1, \ldots, n\}$ sont indépendants, alors

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= 1 - P\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)^c\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k^c\right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n P(A_k^c) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n (1 - P(A_k)). \end{aligned}$$

2.1.6 Formules de calcul

1) Probabilité d'une réunion d'événements

On démontre par récurrence, la formule

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) &= \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j \cap A_k) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ &\quad - \cdots + (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pour $k = 2$, la formule (2.3) revient à

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Si les événements $\{A_k \; ; \; k = 1, \ldots, n\}$ sont incompatibles deux à deux, alors la formule (2.3) revient à

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

Si les événements $\{A_k \; ; \; k = 1, \ldots, n\}$ sont indépendants, alors la formule (2.3) revient à

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j)P(A_k) + \sum_{i<j<k} P(A_i)P(A_j)P(A_k)$$
$$- \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1) \cdots P(A_n).$$

2) Probabilité d'une intersection d'événements

On démontre par récurrence que si $P\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} A_k\right) \neq 0$ alors on a la formule

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = P(A_1)P(A_2 \,|\, A_1)P(A_3 \,|\, A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n \,|\, A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}). \tag{2.4}$$

Cette formule est très utile lorsqu'il s'agit de calculer des probabilités d'événements consécutifs.

Pour $k = 2$ la formule (2.4) revient à

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2 \,|\, A_1).$$

Si les événements $\{A_k; \; k = 1, \ldots, n\}$ sont indépendants, alors la formule (2.4) revient à

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k).$$

3) Probabilité d'une différence d'événements

On a

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B). \tag{2.5}$$

Si $B \subseteq A$, alors (2.5) se réduit à

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(B).$$

4) Formule de la probabilité totale

Si $\{A_k\ ;\ k = 1, \ldots, n\}$ est un système complet d'événements et B est un événement quelconque, alors on a *la formule de la probabilité totale*

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots + P(A_n)P(B \mid A_n).$$

Cette formule est également appelée la *règle d'élimination*.
Si $P(C) > 0$, on a aussi la formule

$$P(B \mid C) = P(B \mid A_1 \cap C)P(A_1 \mid C) + \cdots + P(B \mid A_n \cap C)P(A_n \mid C).$$

5) Formule de Bayes

Si $\{A_k\ ;\ k = 1, \ldots, n\}$ est une partition de Ω, c'est-à-dire un système complet d'événements et B est un événement quelconque, alors on a *la formule de Bayes*,[2] connue aussi sous le nom de *la formule des hypothèses ou des causes*

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B \mid A_k)};\ j = 1, \ldots, n.$$

On peut appliquer cette formule à la situation suivante. À la suite d'une expérience, un événement B peut apparaître. Cependant cet événement peut apparaître comme conséquence den événements $A_1, \ldots, A_n$ qui forment un système complet d'événements (c'est-à-dire, B peut apparaître simultanément avec un et seulement un des événements A_k, $k = 1, \ldots, n$). Supposons que l'on connaisse les probabilités des événements $A_1 \ldots, A_n$ (qui s'appellent également *probabilités a priori des événements* $A_1, \ldots, A_n$) et que l'on connaisse aussi la probabilité d'apparition de l'événement B comme conséquence de l'événement A_k, c'est-à-dire $P(B \setminus A_k)$, $k = 1, \ldots, n$. *En* supposant qu'à la suite de l'expérience l'événement B se soit produit, la formule de Bayes permet de trouver séparément pour chaque $k = 1, \ldots, n$, la probabilité que l'événement A_k soit apparue à cause de l'événement B, c'est-à-dire la probabilité $P(A_k \setminus B)$, $k = 1, \ldots, n$ (les probabilités $P(A_k \setminus B)$, $k = 1, \ldots, n$ s'appellent aussi *les probabilités a posteriori des événements* $A_1, \ldots, A_n$).

En comparant les probabilités $P(A_k \setminus B)$ et $P(A_k)$ on peut connaître l'effet de l'événement B sur la probabilité de l'événement A_k lorsqu'on sait que l'événement B s'est produit.

[2]Thomas Bayes (1702-1761), révérend et mathématicien anglais.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

2.1.7 Modèles classiques de probabilité

1) Modèle de Bernoulli[3] ou modèle binomial

Le modèle de Bernoulli consiste en une expérience qui ne peut produire que deux résultats. On peut soit obtenir l'événement A avec probabilité p, ou bien son contraire A^c avec probabilité 1 — p. Si on répète cette expérience n fois, indépendamment et dans des conditions identiques, la probabilité *P(n ; k) qu'à* la suite des n expériences, l'événement A soit apparu k fois est donnée par

$$P(n;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Parce que la probabilité *P(n ; k)* correspond au coefficient de x^k dans le développement du binôme $(p+(1-p)x)^n$, ce schéma s'appelle aussi *le modèle binomial.*

Le modèle binomial peut être réalisé à l'aide d'une urne contenant des boules de deux couleurs (disons blanches et noires). On tire une seule boule à la fois et à chaque fois on remet la boule dans l'urne pour assurer que les conditions ne changent pas d'un tirage à l'autre. Après n répétitions, on dénombre les apparitions de la couleur blanche. Cette situation correspond au modèle binomial et pour cette raison ce schéma est également connu aussi sous le nom de *modèle de l'urne avec remise.*

2) Modèle de Bernoulli à plusieurs états ou modèle multinomial

Considérons une expérience qui peut produire un et un seul des événements $\{A_k ; k = 1, \ldots, s\}$ qui forment un système complet d'événements et posons

$$p_k = P(A_k),\ k = 1, \ldots, s, \quad \text{où} \quad \sum_{k=1}^{s} p_k = 1.$$

On répète l'expérience n fois, indépendamment et dans des conditions identiques. La probabilité $P(n ; m_1, m_2, \ldots, m_8)$ que dans les n expériences l'événement A_k soit apparu m_k fois, $k = 1, \ldots, s$ est donnée par

$$P(n; m_1, m_2, \ldots, m_s) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_s!} p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s} \ ; \ \sum_{k=1}^{s} m_k = n.$$

[3]Jacob (Jacques) Bernoulli (1654-1705), le premier mathématicien de la famille Bernoulli, famille de mathématiciens suisses bien connue.

Ce schéma est connu sous le nom de *modèle multinomial.*

3) Modèle de Poisson[4]

Pour le modèle de Poisson, on considère n expériences indépendantes. Comme résultat de la k-ième expérience, on peut avoir l'événement A avec probabilité p_k, ou bien l'événement A^c avec probabilité $1 - p_k$, $k = 1, \ldots, n$. La probabilité que dans les n expériences l'événement A soit apparu m fois est le coefficient P_m de x^m dans le polynôme

$$\begin{aligned} P(x) &= \big(p_1x + (1-p_1)\big)\big(p_2x + (1-p_2)\big) + \cdots + \big(p_nx + (1-p_n)\big) \\ &= P_nx^n + \cdots + P_mx^m + \cdots + P_0. \end{aligned}$$

Le schéma de Poisson peut être réalisé par une séquence de n urnes contenant, dans des proportions différentes, des boules de deux couleurs (disons blanches et noires). On extrait successivement une boule de chaque urne.

Remarque 1. La schéma de Bernoulli peut être obtenu comme un cas particulier du schéma de Poisson en prenant $p_1 = \cdots = p_n$.

4) Modèle de l'échantillon sans remise ou modèle hypergéométrique

D'une urne contenant α boules blanches et β boules noires, on pige n boules, sans remise, $n \leq \alpha + \beta$. La probabilité $P(\alpha, \beta; a, b)$ que parmi les boules extraites, a soient blanches et b noires, $a + b = n$, est

$$P(\alpha, \beta; a, b) = \frac{\binom{\alpha}{a}\binom{\beta}{b}}{\binom{\alpha+\beta}{a+b}}.$$

Extraire n boules de l'urne revient à extraire n *fois* une seule boule, mais sans retourner la boule pigée dans l'urne, ce qui justifie le nom de ce schéma.

2.2 Problèmes et solutions

1. On extrait au hasard une boule d'une urne qui contient 20 boules numérotées de 1 à 20. Trouver la probabilité que le nombre inscrit sur la boule soit :
   i) un nombre premier.
   ii) un nombre pair.

[4]Denis Poisson (1781-1840), célèbre mathématicien français.

iii) un nombre divisible par 3.

Solution. Le nombre de cas possibles pour cette expérience est 20. Trouvons le nombre de cas favorables pour chaque événement considéré :

i) Le nombre de cas favorables est 8 à savoir les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, donc $p = 8/20 = 2/5$.

ii) Le nombre de cas favorables est 10, à savoir les nombres 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, donc_ $p = 10/20 = 1/2$

iii)Le nombre de cas favorables est 6, à savoir les nombres 3, 6, 9, 12, 15, 18, donc $p = 6/20 = 3/10$

2. Chacune des 26 lettres de l'alphabet est écrite sur une carte et introduite dans une urne. Trouver la probabilité qu'en choisissant au hasard et sans remise quatre cartes l'on obtienne dans l'ordre de sélection le mot PAIX.

Solution. Le nombre de cas favorables est 1, car il faut choisir les quatre lettres du mot *P, A, I, X* dans cet ordre.

Le nombre de cas possibles est 26 x 25 x 24 x 23. En effet, la première lettre peut être n'importe laquelle des 26 lettres de l'urne, donc pour la première extraction on a 26 cas possibles. Pour la deuxième lettre il reste seulement 25 cas possibles, et chaque cas peut être associé avec les 26 cas possibles de la première lettre choisie, donc on obtient au total, 26 x 25 cas possibles pour le choix des deux premières lettres. Il y a 24 cas possibles pour le choix de la troisième lettre (car dans l'urne il ne reste que 24 lettres), qui combinés avec tous les cas possibles pour les deux premières lettres donnent 26 x 25 x 24 cas possibles pour le choix des trois premières lettres. Finalement, pour la dernière lettre il reste 23 choix possibles, qui combinés avec les 26 x 25 x 24 choix possibles pour le choix des trois premières lettres, donnent 26 x 25 x 24 x 23 cas possibles quand on choisit sans remise les quatre lettres, donc $p = 1 / 26x25x24x23$

Remarque. Le nombre de cas possibles peut être obtenu d'une autre façon. Extraire successivement 4 fois une lettre en tenant compte de l'ordre de sélection revient à extraire d'un coup 4 lettres, mais en tenant compte de l'ordre des lettres dans la formation des groupes, donc le nombre de choix possibles est donné par le nombre d'arrangements de 4 objets qu'on peut former à partir de 26 objets. Deux groupes diffèrent au moins par la nature d'un objet ou par l'ordre des objets, donc ce nombre est *A26/4* = 26 x 25 x 24 x 23.

3. Dix boules numérotées de 1 à 10 sont alignées au hasard une après l'autre. Trouver la probabilité que la boule numérotée 5 apparaisse après la boule numérotée 4.

   Solution. Le nombre de cas possibles est P_{10} = 10 !

   Le nombre de cas favorables est 9 x 8 !. En effet, la boule numérotée 4 peut occupée n'importe quelle des 9 premières places, tout en étant suivie par la boule numérotée 5. Il y a donc 9 façons de placer les boules 4 et 5 l'une après l'autre. Les 8 autres boules peuvent être placées sur les 8 places laissées disponibles de 8 ! façons différentes. Par suite chaque cas d'arrangement des boules 4 et 5 doit être associé avec les 8 ! cas possibles d'arrangement des 8 autres boules, et au total il y a 9 x 8 ! façons différentes de placer les 10 boules sous la condition que la boule 4 soit suivie par la boule 5.

   La probabilité cherchée est donc p = 9x8! / 10! = 1/10

4. On lance *n fois* deux dés. Trouver la probabilité que le double six apparaisse au moins une *fois.*

   Solution. Dans ce problème, il est plus facile de calculer la probabilité de l'événement contraire. Cherchons donc la probabilité q qu'en lançant *n fois* deux dés le double six n'apparaisse jamais.

   Le nombre de cas possibles est $(36)^n$. En effet, à chaque lancer de deux dés il y a 36 cas possibles, car chacune des 6 faces du premier dé peut être combinée avec n'importe laquelle des six faces du deuxième dé, donc au total 6 x 6 = 36. Pour les n lancers des deux dés il y a donc $(36)^n$ cas différents possibles.

   Le nombre de cas favorables est $(35)^n$. En effet, à chaque lancer de deux dés il y 35 cas favorables (de 36 cas possibles il faut éliminer le cas où la face 6 apparaît sur les deux dés). Pour les n lancers il y a donc $(35)^n$ cas favorables.

   Donc $q = (35/36)^n$ et par conséquent, la probabilité cherchée est

$$p = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n .$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

5. Montrer que la probabilité d'obtenir au moins un six quand on lance 4 fois un dé est plus grande que la probabilité d'obtenir au moins un double six, quand on lance 24 fois deux dés.[5]

Solution. Soit *A* l'événement "obtenir au moins un six quand on lance 4 fois un dé" et *B* l'événement "obtenir au moins le double six, quand on lance 24 fois deux dés." Alors, en faisant le même raisonnement que dans le problème 4, on trouve

$$P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,517\ 700,$$

et

$$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491\ 400.$$

Note. Le chevalier De Méré[6], un grand joueur de dés du XVII-ième siècle, a observé à partir de sa propre expérience, qu'il y a plus de chances de gagner si on parie que sur 4 lancers d'un dé, le six apparaîtra au moins une fois, que si on parie que dans 24 lancers de deux dés, le double six apparaîtra au moins une fois. De Méré a constaté que dans une grande série de paris de ce type, dans le premier cas la fréquence du gain est plus grande que 1/2, donc le nombre de jeux gagnants est plus grand que le nombre de jeux perdants, le résultat final étant un gain pour le joueur, tandis que dans le deuxième cas, le résultat final amènera une perte pour le joueur. De Méré considérait que cette observation contredisait le calcul mathématique, car 4 faces par rapport à 6 (le nombre de cas possibles quand on lance un dé) est dans le même rapport que 24 faces par rapport à 36 (le nombre de cas possibles quand on lance deux dés) et donc les chances de gagner doivent être égales dans les deux cas. De Méré a soumis ce problème à Pascal, qui l'a résolu, en introduisant à cette occasion la définition de probabilité d'un événement. La probabilité est plus grande que 1/2 dans le premier cas, tandis que la probabilité est plus petite que 1/2 dans

[5] Ce problème, connu aussi sous le nom du "Paradoxe du chevalier De Méré", a une importance historique, étant le premier problème de probabilité résolu par Blaise Pascal (1623-1662), célèbre mathématicien et physicien français qui avec Pierre De Fermat (1601-1665), non moins célèbre mathématicien français, a établi les bases du calcul des probabilités.

[6] Antoine Gombaud chevalier De Méré (1607-1685), écrivant français.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

le second cas, ce qui correspond exactement avec l'observation de De Méré.

Si dans le second cas, on demande qu'en 25 lancers de deux dés le double six apparaisse au moins une fois, alors la probabilité de gagner devient plus grande que 1/2 (voir problème 7, Section 2.3).

6. On extrait au hasard une boule d'une urne contenant α boules blanches et β boules noires. Trouver la probabilité que la boule extraite soit blanche ; la probabilité que la boule extraite soit noire.

   Solution. Il y a $\alpha + \beta$ cas possibles et a cas favorables pour extraire une boule blanche, donc $p = \alpha / \alpha+\beta$; la probabilité d'extraire une boule noire est $q = 1 - p = \beta / \alpha+\beta$

7. Une urne contient 6 boules blanches et 8 boules noires. On extrait une boule qu'on met de coté. Par la suite on extrait une seconde boule.

   i) Sachant que la première boule pigée est blanche, trouver la probabilité que la deuxième boule pigée soit également blanche et la probabilité que la deuxième boule pigée soit noire.

   ii) Sans connaître la couleur de la première boule extraite, trouver la probabilité que la deuxième boule extraite soit blanche et la probabilité que la deuxième boule extraite soit noire.

   Solution. i) Le nombre de cas possibles est 6 x 13 = 78. En effet, pour la sélection de la première boule il y a 6 possibilités (le nombre de boules blanches dans l'urne) et pour la sélection de la deuxième boule il y a 13 possibilités (le nombre de boules restant dans l'urne).

   Le nombre de cas favorables est 6 x 5 = 30, car pour la première sélection il y a 6 cas favorables tandis que pour la deuxième sélection 5 cas sont favorables (avant la deuxième sélection il y a dans l'urne 5 boules blanches). Par conséquent, la probabilité que la deuxième boule pigée soit blanche, sachant que la première boule pigée est blanche est $p = 30/78 = 15/13$

   Pour que la deuxième boule sélectionnée soit une noire, sachant que la première boule extraite est blanche, il y a 78 cas possibles et 6 x 8 = 48 cas favorables, donc $\boldsymbol{q} = 48/78 = 8/13$. On peut obtenir directement $\boldsymbol{q}$, car $q = 1 - p$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ii) Le nombre de cas possibles est 14 x 13 = 182, car il y a 14 cas possibles pour le choix de la première boule et chaque cas doit être combiné avec les 13 cas possibles lors du choix de la seconde boule, donc 14 x 13 = 182 cas possibles.

Le nombre de cas favorables est 30 + 48 = 78. En effet, si on suppose d'abord que la première boule pigée est blanche, alors il y a 6 cas favorables pour le choix de la première boule et 5 cas pour la deuxième boule, donc 6 x 5 = 30 cas favorables. Si on suppose maintenant que la première boule pigée est noire, alors il y a 8 cas favorables pour le choix de la première boule et 6 cas pour la deuxième boule, donc 8 x 6 = 48 cas favorables dans ce dernier cas. Au total il y a 30 + 48 = 78 cas favorables et par conséquent, la probabilité que la deuxième boule pigée soit blanche est p^1 = 78/182 = 3/7. Pour la probabilité de l'événement que la deuxième boule soit noire, sans connaître la couleur de la première boule, un raisonnement analogue donne q^1 = 52/91 = 4/7 ou directement $q^1 = 1 - p^1$.

Remarque. Les probabilités obtenues dans les deux cas du problème diffèrent car la probabilité d'un événement dépend essentiellement des conditions données.

Pour une autre méthode de résolution, voir problème 33.

8. D'une urne qui contient α boules blanches et β boules noires on extrait k boules ($k < \min(\alpha - 1, \beta - 1)$) que l'on met de coté, sans connaître leurs couleurs. On tire ensuite une autre boule. Trouver la probabilité que cette dernière boule soit blanche et la probabilité qu'elle soit noire.

Solution. Parce que dans ce problème l'ordre des choix est important, le nombre de cas possibles est $\mathcal{A}_{k+1}^{\alpha+\beta} = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\cdots(\alpha+\beta-k)$, car les $k+1$ boules peuvent être extraites parmi les $\alpha+\beta$ de $\mathcal{A}_{k+1}^{\alpha+\beta}$ manières différentes, c'est-à-dire le nombre de groupes de $k+1$ boules qu'on peut former à partir de $\alpha+\beta$ boules, en tenant compte de l'ordre des boules dans un groupe.

Le nombre de cas favorables est $\alpha\mathcal{A}_{k}^{\alpha+\beta-1} = \alpha(\alpha+\beta-1)\cdots(\alpha+\beta-k)$. En effet, notons que la dernière boule extraite (qui doit être blanche) peut être n'importe laquelle des α boules blanches et les k premières boules peuvent être pigées de $\mathcal{A}_k^{\alpha+\beta-1}$ manières différentes, donc

$$p = \frac{\alpha \mathcal{A}_k^{\alpha+\beta-1}}{\mathcal{A}_{k+1}^{\alpha+\beta}} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

De façon analogue on trouve que la probabilité que la k-ième boule choisie soit noire est $q = 1 - p = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

Remarque. Notons que la condition $k < \min(\alpha - 1, \beta - 1)$ assure que après k tirage, il reste dans l'urne, au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

La probabilité d'obtenir une boule blanche (respectivement noire) à la (k + 1)-ième pige est égale à la probabilité d'obtenir une boule blanche (respectivement noire) à la première pige, quand on n'a pas extrait au préalable k boules de l'urne (voir problème 6).

9. Une urne contient 10 boules parmi lesquelles 3 sont rouges, 4 sont jaunes, 1 est bleue et 2 sont blanches. Les boules rouges, jaunes, bleue et blanches sont marquées de 2, 5, 10 et 20 points respectivement. Trouver la probabilité qu'en tirant 2 boules sans remise, on obtienne

i) sept points.

ii) au moins 7 points.

iii)une boule ayant plus de 10 points et un boule ayant moins de 10 points.

Solution. i) La probabilité que parmi les 2 boules pigées, l'une soit rouge et l'autre jaune est

$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{3 \times 4}{45} = \frac{4}{15}.$$

ii) Calculons la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire obtenir moins de 7 points. Les deux boules sont donc rouges et alors $q = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$ et $p = 1 - q = \frac{14}{15}$ est la probabilité cherchée.

iii) On cherche la probabilité que parmi les deux boules, l'une soit rouge et l'autre blanche ou bien, une soit jaune et l'autre blanche, donc

$$\frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{10}{2}} + \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{14}{45}.$$

10. Dix ballons sont mis au hasard dans trois boîtes, B_1, B_2, B_3. Trouver la probabilité que la boîte B_2 contienne exactement 3 ballons.

Solution. Le nombre de cas possibles est 3^{10}. En effet supposons que l'on numérote les ballons de 1 à 10. Alors le premier ballon peut être distribué dans n'importe quelle boîte, il y a donc 3 cas possibles, le deuxième ballon peut être aussi distribué dans n'importe laquelle des trois boîtes, donc seulement pour deux ballons il y a 3^2 cas possibles (car chaque cas possible pour le premier ballon se combine avec tous les cas possibles pour le deuxième ballon). De la même façon on trouve que pour trois ballons il y a 3^3 cas possibles et, pour 10 ballons, 3^{10} cas possibles.

Le nombre de cas favorables est $\binom{10}{3} \times 2^7$. Supposons qu'un groupe de 3 ballons soit introduit dans la deuxième boîte, il y a $\binom{10}{3}$ manières différentes de choisir un tel groupe de 3 ballons parmi les 10. Les autres ballons peuvent être distribués dans les deux autres boîtes de 2^7 manières différentes (on fait le même raisonnement que pour calculer le nombre de cas possibles), donc au total il y a $\binom{10}{3} \times 2^7$ cas favorables et par conséquent $p = \frac{\binom{10}{3}\times 2^7}{3^{10}} = 2^7 \times \frac{40}{3^9}$.

11. On distribue au hasard n boules dans N urnes.

i) Trouver la probabilité p que dans une urne spécifiée il y ait $k \leq n$ boules.

ii) Montrer que

$$\frac{(\frac{n}{N})^k}{k!}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}\left(1-\frac{k}{2n}\right)^{k-1} \geq p,$$

et

$$p > \frac{(\frac{n}{N})^k}{k!}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}},$$

où p est la probabilité trouvée en i).

Solution. i) Le nombre de cas possibles est N^n. En effet, supposons qu'on numérote les boules de 1 à n. Alors la première boule peut être distribuée dans n'importe laquelle des N urnes, la deuxième boule peut être distribuée dans n'importe laquelle des N urnes, donc s'il y avait seulement que 2 boules, il y aurait N^2 cas possibles (car chaque cas possible pour la première boule doit être combiné avec tous les cas possibles pour la deuxième boule). Enfin parce qu'il y a n boules, on a N^n cas possibles.

Il y a $\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}$ cas favorables. En effet, supposons qu'un groupe de k boules soient introduites dans une urne. On a $\binom{n}{k}$ manières différentes de choisir ce groupe de k boules. Pour les autres $n-k$ boules il y a $(N-1)^{n-k}$ manières de les distribuer dans les $N-1$ urnes restantes, donc au total il y a $\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}$ cas favorables. Par conséquent,

$$p = \frac{\binom{n}{k}(N-1)^{n-k}}{N^n} .$$

ii) On peut écrire

$$p = \frac{(\frac{n}{N})^k}{k!}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-k} M,$$

où

$$M = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) .$$

Soit maintenant $1 \leq h \leq k-1$, alors

$$\left(1-\frac{h}{n}\right)\left(1-\frac{k-h}{n}\right) = 1-\frac{k}{n}+\frac{h(k-h)}{n^2} > 1-\frac{k}{n}. \tag{2.6}$$

D'autre part, comme $\left(\frac{k}{2}-h\right)^2 \geq 0$, on trouve

$$h(k-h) \leq \frac{k^2}{4}$$

et donc

$$\left(1-\frac{h}{n}\right)\left(1-\frac{k-h}{n}\right) \leq \left(1-\frac{k}{2n}\right)^2. \tag{2.7}$$

De

$$M^2 = \prod_{h=1}^{k-1}\left(1-\frac{h}{n}\right)\left(1-\frac{k-h}{n}\right),$$

et en utilisant les inégalités (2.6) et (2.7), on trouve

$$M \leq \left(1 - \frac{k}{2n}\right)^{k-1} \text{ et } M > \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{\frac{k-1}{2}}$$

et donc la double inégalité désirée.

Notons que pour de grandes valeurs des nombres n, N et k, l'application directe de la formule obtenue pour la probabilité $_p$ au point i), devient fastidieuse, et dans ce cas il est préférable d'utiliser les approximations trouvées au point ii).

12. Considérons n boules et N urnes, $N > n$. On distribue au hasard les n boules dans les N urnes. Trouver la probabilité que :

i) n urnes fixées contiennent une seule boule.

ii) qu'un groupe quelconque de n urnes parmi les N urnes contienne chacune une seule boule.

Solution. i) Il y a N^n cas possibles (voir problème 11 i)).

Il y a $n!$ cas favorables. En effet, les n boules peuvent être placées dans n urnes (une boule dans une urne) de P_n manières différentes (on place n objets sur n positions), et par suite

$$p = \frac{\mathcal{P}_n}{N^n} = \frac{n!}{N^n}.$$

ii) Il y a N^n cas possibles.

Il y a $\binom{N}{n}n!$ cas favorables. En effet, des N urnes on peut choisir de $\binom{N}{n}$ manières différentes un groupe de n urnes et pour chaque groupe de n urnes il y a $n!$ cas favorables (voir i)), donc au total $\binom{N}{n}n!$, d'où

$$p' = \frac{\binom{N}{n}n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

13. Trouver la probabilité qu'au moins deux personnes parmi 20 aient la même date de naissance, à savoir même jour et même mois. Considérer qu'une année compte 365 jours.

Solution. Soit A l'événement "les 20 personnes ont des dates de naissance différentes". On cherche la probabilité $P(A^c) = 1 - P(A)$. Pour trouver $P(A)$, on peut raisonner de la façon suivante en considérant l'expérience qui consiste à tirer avec remise 20 boules d'une urne qui contient 365 boules différentes. Posons B l'événement "tirer 20 boules différentes". Alors $P(A) = P(B)$. La manière de représenter les résultats de cette expérience est d'utiliser des 20-tuplets, la i-ième composante représentant le résultat du i-ième tirage. Or le nombre possible de 20-tuplets pour cette expérience est 365^{20} et le nombre de 20-tuplets contenant 20 boules différentes est

$$\frac{365!}{(365-20)!} = 365 \times 364 \times \cdots \times 346.$$

Donc la probabilité cherchée est

$$1 - P(A) = 1 - \frac{365!}{345!\, 365^{20}} = 1 - 0,588 = 0,412.$$

14. Dix étudiants parmi lesquels il y a 5 filles et 5 garçons sont assignés au hasard, deux par deux, à 5 pupitres. Trouver la probabilité qu'à chaque pupitre il y ait une fille et un garçon.

    Solution. Il y a $(10! / 2^5)$ cas possibles. En effet, numérotons les pupitres de 1 à 5. Au premier pupitre, on peut asseoir 2 étudiants qu'on peut choisir parmi les 10 étudiants; il y a (10 / 2) choix possibles. Au deuxième pupitre, on peut choisir 2 étudiants parmi les 8 qui restent ; il y a (8 / 2) choix possibles. Donc seulement pour ces deux pupitres, il y a (10 / 2) • (8 / 2) choix possibles. On continue de la même façon pour le troisième pupitre. Il y a 6 / 2) paires d'étudiants qu'on peut former à partir des 6 étudiants restants, (après avoir déjà assigné deux paires d'étudiants, une paire au premier pupitre et une paire au deuxième pupitre). Pour le quatrième pupitre, il y a (4 / 2) manières de choisir une paire d'étudiants parmi les 4 étudiants restants et enfin pour le cinquième pupitre il y a (2 / 2) choix possibles. Donc au total pour les 5 pupitres, il y a

$$\begin{aligned}\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} &= \frac{10\times 9}{2} \times \frac{8\times 7}{2} \times \frac{6\times 5}{2} \times \frac{4\times 3}{2} \times \frac{2\times 1}{2} \\ &= \frac{10!}{2^5}\end{aligned}$$

choix possibles.

Il y a $(5!)^2$ cas favorables. En effet, au premier pupitre on peut asseoir n'importe lequel des 5^2 couples (une fille et un garçon) qu'on peut former en groupant de toutes les façons possibles un garçon avec une fille parmi les 10 étudiants (il y a 5 x 5 = 25 possibilités). Ensuite pour le deuxième pupitre on peut asseoir n'importe lequel des 4^2 couples qu'on peut former en groupant de toutes les façons possibles un garçon et une fille des 4 qui restent. En raisonnant de la même façon, on trouve que pour le troisième pupitre il y a 3^2 possibilités de choisir un paire, pour la quatrième pupitre il y a 2^2 possibilités et enfin pour le cinquième pupitre il y a 1^2 possibilités, donc en total il y a $5^2 \times 4^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 1^2 = (5!)^2$ possibilités d'assigner les 10 étudiants deux par deux à un pupitre, de manière telle qu'à chaque pupitre il y ait une fille et un garçon.

La probabilité cherchée est donc

$$p = \frac{2^5 \times (5!)^2}{10!}.$$

15. *Lotto 6/49* — Calculer la probabilité des événements suivants :

i) "Avoir exactement 3 bons numéros sur 6".

ii) "Avoir exactement 4 bons numéros sur 6".

iii) "Avoir exactement 5 bons numéros sur 6, sans le complémentaire".

iv) "Avoir exactement 5 bons numéros sur 6 ainsi que le numéro complémentaire".

v) "Avoir les 6 numéros".

vi) "Recevoir un prix en argent à la Lotto 6/49", c'est-à-dire avoir au moins 3 bons numéros sur 6.

Solution. Le nombre de façons de choisir sans remise 6 nombres parmi 49 est $\binom{49}{6}$. Pour choisir des sous ensembles de 6 éléments contenant exactement k éléments d'un sous ensemble fixé de 6 éléments, il faut d'abord choisir les k éléments, ce qui peut être fait de $\binom{6}{k}$ façons, et ensuite choisir $6-k$ éléments parmi les 43 éléments qui restent, ce qui peut être fait de $\binom{43}{6-k}$ façons. On en déduit que la probabilité d'avoir exactement k numéros parmi les 6 numéros gagnants est

$$\frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}, \quad 0 \leq k \leq 6.$$

Soit A_k l'événement "avoir exactement k numéros semblables aux 6 numéros gagnants" et C l'événement "avoir le complémentaire".

i) On cherche

$$P(A_3) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246\ 820}{13\ 983\ 816} = 0{,}017\ 650.$$

ii) On cherche

$$P(A_4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13\ 545}{13\ 983\ 816} = 0{,}000\ 970.$$

iii) On cherche

$$\begin{aligned} P(A_5 \setminus C) &= P(A_5 \cap C^c) \\ &= P(C^c \mid A_5)P(A_5) \\ &= \frac{42}{43}\frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} \\ &= \frac{252}{13\ 989\ 816} \\ &= 0{,}000\ 018. \end{aligned}$$

iv) On cherche

$$\begin{aligned} P(A_5 \cap C) &= P(C \mid A_5)P(A_5) \\ &= \frac{1}{43}\frac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} \\ &= \frac{6}{\binom{49}{6}} \\ &= \frac{6}{13\ 983\ 816} \\ &= 0{,}000\ 000\ 400. \end{aligned}$$

v) On cherche

$$P(A_6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\ 983\ 916} = 0,000\ 000\ 070.$$

vi) On cherche

$$P(A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = \frac{260\ 624}{13\ 983\ 916} = 0,018\ 640.$$

16. *La ruine du joueur* — Une personne désire accumuler un capital de N dollars. Elle dispose initialement d'un capital de k dollars, $0 < k < N$. Pour accroître son capital, elle décide de jouer à un jeu de hasard où la probabilité de réaliser un gain de 1 dollar est p, et la probabilité d'une perte de 1 dollar est $1 - p$, $0 < p < 1$. Elle jouera jusqu'à ce qu'elle réalise son rêve ou qu'elle soit ruinée.

i) Trouver la probabilité qu'elle se ruine éventuellement.

ii) Trouver la probabilité qu'elle accumule éventuellement N dollars.

Déduire que l'une ou l'autre de ces deux possibilités surviendra avec probabilité 1.

Solution. i) Soit R_k l'événement "le joueur se ruine à partir d'une fortune initiale de k dollars", et $p_k = P(R_k)$, $0 \leq k \leq N$. Alors on trouve que $p_0 = 1$ et $p_N = O$. Soit A l'événement "le joueur perd au premier jeu". Alors

$$\begin{aligned} p_k &= P(R_k) \\ &= P(R_k \mid A)P(A) + P(R_k \mid A^c)P(A^c) \\ &= P(R_{k-1})P(A) + P(R_{k+1})P(A^c) \\ &= (1-p)p_{k-1} + p \cdot p_{k+1}, \end{aligned}$$

où $1 \leq k \leq N-1$.

On doit maintenant résoudre ces équations. Pour ce faire posons $x_k = p_k - p_{k-1}$ et $\rho = \frac{1-p}{p}$. Les équations précédentes deviennent

$$x_{k+1} = \rho x_k, \ 1 \leq k \leq N-1.$$

De
$$x_k = \rho x_{k-1} = \rho^2 x_{k-2} = \cdots = \rho^{k-1} x_1,$$
on déduit que $x_k = \rho^{k-1} x_1$. On peut également écrire
$$\begin{aligned} p_k &= 1 + x_1 + \cdots + x_k \\ &= 1 + x_1(1 + \rho + \cdots + \rho^{k-1}) \\ &= 1 + (p_1 - 1)(1 + \rho + \cdots \rho^{k-1}), \end{aligned}$$
car $x_1 = p_1 - p_0 = p_1 - 1$. Si $p = 1/2$, alors $\rho = 1$ et $p_k = 1 + k(p_1 - 1)$, et si $p \neq 1/2$, alors $p_k = 1 + (1 - p_1)\frac{1-\rho^k}{1-\rho}$. Par conséquent
$$p_k = \begin{cases} 1 + k(p_1 - 1) & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ 1 + (1 - p_1)\frac{1-\rho^k}{1-\rho} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$
Pour $k = N$, et puisque $p_N = 0$, on trouve
$$0 = p_N = \begin{cases} 1 + N(p_1 - 1) & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ 1 + (1 - p_1)\frac{1-\rho^N}{1-\rho} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$
donc
$$p_1 = \begin{cases} 1 - \frac{1}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ 1 + \frac{1-\rho}{1-\rho^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$
Enfin, on trouve
$$p_k = \begin{cases} 1 - \frac{k}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2} \\ \frac{\rho^k - \rho^N}{1-\rho^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ii) Pour trouver la probabilité que le joueur accumule éventuellement le capital désiré, posons F_k l'événement "le joueur accumule éventuellement N dollars à partir d'une fortune initiale de k dollars". Si $q_k = P(F_k)$, alors on a $q_0 = 0$ et $q_N = 1$. De plus,
$$\begin{aligned} q_k &= P(F_k) \\ &= P(F_k \mid A)P(A) + P(F_k \mid A^c)P(A^c) \\ &= P(F_{k-1})P(A) + P(F_{k+1})P(A^c) \\ &= (1-p)q_{k-1} + p \cdot q_{k+1}, \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

où $1 \leq k \leq N-1$. En posant $r_k = 1 - q_k$, $0 \leq k \leq N$, on trouve que $r_0 = 1$ et $r_N = 0$ et par suite

$$r_k = (1-p)r_{k-1} + pr_{k+1},\ 1 \leq k \leq N-1,$$

qui est le même système d'équations satisfaites par $P_1, \ldots, P_N$. Comme la solution de ces équations est unique, on obtient $r_k = p_k$ et donc que $q_k = 1 - p_k$. Par conséquent

$$P(R_k \cup F_k) = P(R_k) + P(F_k) = 1,$$

c'est-à-dire que, éventuellement, le joueur sera ruiné ou aura accumulé N dollars.

17. On a k couleurs différentes et n boules de chaque couleur. Ces kn boules tombent au hasard dans n urnes qui ne peuvent contenir plus de k boules chacune. Trouver la probabilité que dans chaque urne on retrouve toutes les couleurs (c'est-à-dire une boule de chaque couleur).

Solution. Il y a $\frac{(kn)!}{(k!)^n}$ cas possibles. En effet, numérotons les urnes de 1 à n. N'importe quel groupe de k boules prises dans l'ensemble des kn boules peut tomber dans la première urne. Cela peut se faire de $\binom{kn}{k}$ manières. Pour la deuxième urne, on doit choisir k boules parmi les $kn-k = k(n-1)$ boules restantes; il y a $\binom{k(n-1)}{k}$ façons de le faire. Pour la troisième urne il y a $\binom{k(n-2)}{k}$ manières de choisir un groupe de k boules parmi les $kn - 2k$ restantes, (après avoir introduit k boules dans la première urne et k dans la deuxième). En raisonnant de la même façon, on trouve que pour l'avant dernière urne il y a $\binom{k(n-n+2)}{k}$ possibilités et enfin pour la dernière urne, on compte $\binom{k(n-n+1)}{k}$ possibilités. Au total, on obtient

$$\begin{aligned}\binom{kn}{k} \cdot \binom{k(n-1)}{k} \cdots \binom{k2}{k} \cdot \binom{k}{k} \\ &= \frac{(kn)!}{k!(kn-k)!} \cdot \frac{(k(n-1))!}{k!(kn-2k)!} \cdots \frac{k!}{k!0!} \\ &= \frac{(kn)!}{(k!)^n}\end{aligned}$$

cas possibles.

Il y a $(n!)^k$ cas favorables. En effet, en plus de numéroter les urnes de 1 *à n,* numérotons les couleurs de 1 à *k.* Pour la première urne choisissons d'abord une boule de couleur 1, il y a *n* possibilités. Choisissons ensuite une boule de couleur 2, il y a *n* possibilités et ainsi de suite, pour le choix d'une boule de couleur *k il y* a *n* possibilités. On obtient donc n^k possibilités pour la première urne. Pour la deuxième urne c'est le même procédé sauf qu'il reste $n - 1$ boules pour chaque couleur. On a donc $(n - 1)^k$ possibilités pour cette deuxième urne et ainsi de suite. On obtient

$$n^k \cdot (n-1)^k \cdot (n-2)^k \cdots 1^k = (n!)^k$$

cas favorables.

La probabilité cherchée est donc

$$p = \frac{(k!)^n (n!)^k}{(kn)!}.$$

Remarque. Le problème 14 s'obtient comme cas particulier en prenant *ici* $k = 2$ et $n = 5$.

Note. Pour de grandes valeurs de *k* et *n,* le calcul de p peut devenir fastidieux et même dépasser les capacités d'un micro-ordinateur. Par exemple, pour $n = 15$ et $k = 9$, on a déjà $(n!)^k = 8.5506E96$. On peut alors utiliser l'approximation donnée par la formule de Stirling[7]

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

qui est valable pour les grandes valeurs de n. On obtient alors

$$\begin{aligned} p = \frac{(k!)^n (n!)^k}{(kn)!} &\approx \frac{k^{kn} e^{-nk} \sqrt{(2\pi k)^n} n^{nk} e^{-nk} \sqrt{(2\pi n)^k}}{(kn)^{kn} e^{-kn} \sqrt{2\pi kn}} \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{k+n-1}{2}} k^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{k-1}{2}}}{e^{kn}}. \end{aligned}$$

18. Une urne contient *n* boules numérotées de 1 à *n.* On en tire *m* boules. Notons par α le plus petit nombre et par β le plus grand nombre apparaissant sur les boules choisies. Soit *x* et *y* deux entiers entre 1 et *n.* Considérant le cas des sélections avec et sans remise, trouver :

[7]James Stirling (1692-1770), mathématicien écossais.

i) $P(a > x), P(\alpha = x)$.

ii) $P(\beta \leq y), P(\beta = y)$.

Solution. *Sélections avec remise*

i) L'événement $\alpha > x$ signifie que les boules sont choisies parmi les boules numérotées $x + 1, x + 2, \ldots, n$. Pour chaque pige il y a $n - x$ cas favorables et n cas possibles. La probabilité est donc $n\text{-}z\ /\ n$. Si on fait m sélections indépendantes, la probabilité cherchée est le produit des probabilités correspondant à chaque pige, donc

$$P(\alpha > x) = \frac{(n-x)^m}{n^m}.$$

Or

$$\begin{aligned} P(\alpha > x) &= P(\alpha = x+1) + P(\alpha = x+2) + \cdots + P(\alpha = n) \\ &= \frac{(n-x)^m}{n^m}. \end{aligned}$$

Parce que

$$\begin{aligned} P(\alpha > x-1) &= P(\alpha = x) + P(\alpha = x+1) + \cdots + P(\alpha = n) \\ &= \frac{(n-x+1)^m}{n^m}, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} P(\alpha = x) &= P(\alpha > x-1) - P(\alpha > x) \\ &= \frac{(n-x+1)^m}{n^m} - \frac{(n-x)^m}{n^m}. \end{aligned}$$

ii) L'événement $\beta \leq y$ signifie que les boules extraites sont numérotées $1, 2, \ldots, y$. Pour chaque sélections il y a y cas favorables et n cas possibles et par suite la probabilité est $\frac{y}{n}$. Pour les m sélections indépendantes, on a

$$P(\beta \leq y) = \frac{y^m}{n^m}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Or

$$P(\beta \leq y) = P(\beta = 1) + P(\beta = 2) + \cdots + P(\beta = y-1) + P(\beta = y),$$

donc

$$P(\beta = y) = P(\beta \leq y) - P(\beta \leq y-1) = \frac{y^m}{n^m} - \frac{(y-1)^m}{n^m}.$$

Sélection sans remise

i) Pour l'événement $\alpha = x$ il y a $\binom{n}{m}$ cas possibles et $\binom{n-x}{m-1}$ cas favorables, car pour la boule avec le plus petit nombre on a un seul cas favorable à savoir la boule numérotée x, cas qu'on combine avec les $\binom{n-x}{m-1}$ manières différentes de choisir les autres $m-1$ boules parmi les boules numérotées $x+1, x+2, \ldots, n$ (donc parmi $n-m$ boules) et par suite

$$P(\alpha = x) = \frac{\binom{n-x}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

On a $P(\alpha = x) \neq 0$ si $n - x \geq m - 1$, c'est-à-dire $x \leq n - m + 1$.

On trouve

$$\begin{aligned} P(\alpha > x) &= P(\alpha = x+1) + P(\alpha = x+2) + \\ &\quad \cdots + P(\alpha = n-m+1) \\ &= \sum_{k=x+1}^{n-m+1} \frac{\binom{n-k}{m-1}}{\binom{n}{m}}. \end{aligned}$$

ii) Pour l'événement $\beta = y$ il y a $\binom{n}{m}$ cas possibles et $\binom{y-1}{m-1}$ cas favorables, car pour la boule avec le plus grand nombre on a un seul cas favorable à savoir, la boule numérotée y, cas qu'on combine avec les $\binom{y-1}{m-1}$ manières différentes d'extraire les autres $m-1$ boules parmi les boules numérotées $1, 2, \ldots, y-1$ et par suite

$$P(\beta = y) = \frac{\binom{y-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}.$$

On a $P(\beta = y) \neq 0$ si $y - 1 \geq m - 1$ c'est-à-dire $y \geq m$.

On trouve

$$\begin{aligned} P(\beta \le y) &= P(\beta = m) + P(\beta = m+1) + \cdots + P(\beta = y) \\ &= \sum_{k=m}^{y} \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}. \end{aligned}$$

19. Soit A et B deux événements définis sur le même espace échantillonnal et tels que $P(A) = \frac{2}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{2}$.

i) Les événements A et B peuvent-ils être incompatibles?

ii) L'un des deux événements peut-il impliquer l'autre? Si oui, lequel?

Solution. i) Parce que $P(A) + P(B) > 1$, les événements A et B ne sont pas incompatible, car $P(A \cup B) \neq P(A) + P(B)$.

ii) Comme $P(A) > P(B)$ il est possible que l'événement B soit inclus dans l'événement A, donc B peut impliquer A, mais il est impossible que A implique B.

20. Soit A, B, C des événements définis sur le même espace échantillonnal. On considère les deux événements

$$D_1 = A \cap B^c \cap C^c, \ D_2 = A \cap (B \cup C).$$

Sachant que $P(D_1) = 0,2$ et $P(D_2) = 0,4$ trouver

i) $P(D_1 \cap D_2)$.

ii) $P(D_1^c \cap D_2^c)$.

Solution. i) Parce que $D_1 = A \cap (B \cup C)^c$ on trouve $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ et par suite, $P(D_1 \cap D_2) = 0$.

ii) Parce que $P(D_1 \cap D_2) = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} P(D_1^c \cap D_2^c) &= P((D_1 \cup D_2)^c) \\ &= 1 - P(D_1 \cup D_2) \\ &= 1 - (P(D_1) + P(D_2)) \\ &= 1 - (0,2 + 0,4) = 0,4. \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

21. Montrer que les événements

$$A,\ A^c \cap B,\ (A \cup B)^c$$

forment un système complet d'événements.

Solution. On doit montrer d'abord que les événements donnés sont deux à deux incompatibles. Notons que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ et parce que $A \cap A^c = \emptyset$ il s'ensuit que $A \cap (A^c \cap B) = \emptyset$, $A \cap ((A \cup B)^c) = \emptyset$ et $(A^c \cap B) \cap (A \cup B)^c = \emptyset$.

De plus

$$\begin{aligned} A \cup (A^c \cap B) \cup (A \cup B)^c &= A \cup ((A^c \cap B) \cup (A^c \cap B^c)) \\ &= A \cup (A^c \cap (B \cup B^c)) \\ &= A \cup A^c \\ &= \Omega, \end{aligned}$$

donc $P(A) + P(A \cap B) + P((A \cup B)^c) = 1$.

22. On choisit au hasard une carte d'une série de 18 cartes numérotées de 1 à 18. Quelle est la probabilité que le numéro soit un multiple de 3 ou de 7 ?

Solution. Considérons les événements

A - "le numéro est un multiple de 3",

B - "le numéro est un multiple de 7".

On cherche la probabilité $P(A \cup B)$. Parce que $A \cap B = \emptyset$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{18} + \frac{2}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$.

23. On pige au hasard une boule d'une urne qui contient n boules comprenant a blanches, b noires, c rouges et d jaunes. Trouver la probabilité que la boule pigée soit blanche ou rouge.

Solution. Soit A_1 l'événement "la boule extraite est blanche" et A_2 l'événement "la boule extraite est rouge." Comme les événements A_1 et A_2 sont incompatibles, on a

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{a}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+c}{n}.$$

24. Soit A, B et C trois événements indépendants. Prouver que

i) A et B^c sont indépendants.

ii) $A \setminus B$ et C sont indépendants.

Solution. i) On a

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A \cap (\Omega \setminus B)) \\ &= P(A \cap \Omega) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^c). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} P((A \setminus B) \cap C) &= P(A \cap B^c \cap C) \\ &= P(A)P(B^c)P(C) \\ &= P(A \cap B^c)P(C) \\ &= P(A \setminus B)P(C). \end{aligned}$$

25. Trois tireurs tirent simultanément sur la même cible. Les probabilités respectives que chaque tireur touche la cible sont $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,5$ et $p_3 = 0,7$. Trouver la probabilité que la cible soit touchée exactement une fois.

Solution. Soit A l'événement "la cible est touchée exactement une fois" et A_1, A_2, A_3 les événements "la cible est touchée par le premier, le deuxième et le troisième tireur" respectivement. Alors

$$A = (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3),$$

donc A est la réunion de 3 événements incompatibles et par suite,

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3).$$

Parce que les événements A_i, A_j^c, A_k^c sont indépendants, $i \neq j \neq k$; $i, j, k = 1, 2, 3$, (voir problème 24 i)) il s'ensuit que

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c) + P(A_1^c)P(A_2)P(A_3^c) \\
&\quad + P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3) \\
&= p_1(1-p_2)(1-p_3) + (1-p_1)p_2(1-p_3) \\
&\quad + (1-p_1)(1-p_2)p_3 \\
&= 0,4 \times 0,5 \times 0,3 + 0,6 \times 0,5 \times 0,3 + 0,6 \times 0,5 \times 0,7 \\
&= 0,36.
\end{aligned}$$

26. Soit $0 < P(A) < 1$. Montrer que les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$P(B \mid A) = P(B \mid A^c).$$

Solution. Soit d'abord $P(B \mid A) = P(B \mid A^c)$. Alors

$$\begin{aligned}
P(B \mid A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\
&= \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} \\
&= \frac{P(A \cap B) + P(A^c \cap B)}{P(A) + P(A^c)} \\
&= \frac{P(B)}{1} \\
&= P(B),
\end{aligned}$$

donc les événements A et B sont indépendants. On a utilisé ici la propriété des fractions, à savoir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$.

Supposons maintenant que les événements A et B soient indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Alors on a aussi $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$, et par suite

$$P(B \mid A) = P(B \mid A^c) = P(B).$$

27. Soit $P(A) = 0,30$; $P(B) = 0,40$; $P(A \cap B) = 0,15$. Trouver

i) $P(A^c \cap B)$.

ii) $P(A \mid B)$.

iii) $P(B \mid A)$.

iv) $P(A \mid A \cup B)$.

v) $P(B \mid A \cap B)$.

vi) $P(B \mid A^c)$.

vii) $P(A^c \mid B)$.

viii) $P(B^c \mid B)$.

Solution. i) De $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (A \cup A^c)) = P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$ on trouve $P(B \cap A^c) = P(B) - P(B \cap A) = 0,40 - 0,15 = 0,25$.

ii) $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,15}{0,40} = \frac{3}{8}$.

iii) $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0,15}{0,30} = \frac{1}{2}$.

iv) $P(A \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A \cap B)} = \frac{0,30}{0,30+0,40-0,15} = \frac{6}{11}$.

v) $P(B \mid A \cap B) = \frac{P(B \cap A \cap B)}{P(A \cap B)} = 1$.

vi) $P(B \mid A^c) = \frac{P(B \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{0,25}{0,70} = \frac{5}{14}$.

vii) $P(A^c \mid B) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,40} = \frac{5}{8}$.

viii) $P(B^c \mid B) = \frac{P(B^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\emptyset)}{P(B)} = 0$.

28. Soit $P(A) = 0,25$; $P(B) = 0,30$; $P(A \cap B) = 0,10$. Calculer

i) $P(A \cap B \mid B)$.

ii) $P(A \cap B \mid A \cup B)$.

iii) $P((A \cup B)^c \mid B)$.

Solution. i) $P(A \cap B \mid B) = \frac{P(A \cap B \cap B)}{P(B)} = \frac{0,10}{0,30} = \frac{1}{3}$.

ii) $P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}$. Parce que $A \cap B \subseteq A \cup B$, il s'ensuit que $P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0,10}{P(A)+P(B)-P(A \cap B)} = \frac{0,10}{0,45} = \frac{2}{9}$.

iii) $P((A \cup B)^c \mid B) = \frac{P((A \cup B)^c \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A^c \cap B^c \cap B)}{P(B)} = 0$.

29. Considérons deux urnes U_1 U_2 avec les compositions suivantes :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	a	b
U_2	c	d

On extrait de l'urne U_1 une boule et sans connaître sa couleur on l'introduit dans l'urne U_2. Ensuite on extrait une boule de l'urne U_2. Trouver la probabilité que la boule extraite de l'urne U_2 soit blanche.

Solution. Représentons par A l'événement "la boule extraite de l'urne U_2 est blanche". Cet événement peut être réalisé par deux événements incompatibles A_1 et A_2, où

• A_1 signifie "la boule transférée de l'urne U_1 est blanche et est suivie par la sélection d'une boule blanche de l'urne U_2",

• A_2 signifie "la boule transférée de l'urne U_1 est noire et est suivie par la sélection d'une boule blanche de l'urne U_2".

On a $A = A_1 \cup A_2$ et donc $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$, car $A_1 \cap A_2 = \varnothing$
Or

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{c+1}{c+d+1},$$

car l'événement A_1 consiste en la réalisation de deux événements à savoir: B_1 le choix d'une boule blanche de l'urne U_1 (avec probabilité $P(B_1) = \frac{a}{a+b}$) que l'on introduit dans l'urne A_2 et B_2 la sélection d'une boule blanche de l'urne U_2 (probabilité $P(B_2 \mid B_1) = \frac{c+1}{c+d+1}$), $P(A_1) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_2 \mid B_1) \cdot P(B_1)$.

De façon analogue,

$$P(A_2) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{c}{c+d+1},$$

d'où

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{a(c+1)}{(a+b)(c+d+1)} + \frac{bc}{(a+b)(c+d+1)} \\ &= \frac{ac+bc+a}{(a+b)(c+d+1)}. \end{aligned}$$

30. On considère le jeu suivant. D'une urne contenant a boules blanches et b boules noires, deux joueurs tirent successivement une boule sans la remettre dans l'urne. Le premier qui extrait une boule blanche est gagnant.

    i) Trouver la probabilité que le joueur qui commence le jeu gagne.

    ii) Montrer que

$$1 + \frac{b}{a+b-1} + \frac{b(b-1)}{(a+b-1)(a+b-2)} + \cdots + \frac{b(b-1)\cdots 1}{(a+b-1)\cdots a}$$
$$= \frac{a+b}{a}$$

pour tous nombres naturels a et b.

Solution. i) Soit A l'événement "le premier joueur gagne" et pour $i = 1, \ldots, b+1$, posons A_i l'événement "on extrait la première boule blanche à la i-ième sélection". On a

$$A = A_1 \cup A_3 \cup A_5 \cup \cdots$$

$$A^c = A_2 \cup A_4 \cup A_6 \cup \cdots$$

Les événements $A_1, A_2, A_3, \ldots$ étant incompatibles, il s'ensuit que

$$P(A) = P(A_1) + P(A_3) + P(A_5) + \cdots$$

Or

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b},$$

$$P(A_3) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b-2},$$

$$P(A_5) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b-2}{a+b-2} \cdot \frac{b-3}{a+b-3} \cdot \frac{a}{a+b-4},$$

$$\vdots$$

$$P(A_{2k+1}) = \frac{\frac{b!}{(b-2k)!} \cdot a(a+b-(2k+1))!}{(a+b)!}.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{a}{a+b}\left(1 + \frac{b(b-1)}{(a+b-1)(a+b-2)}\right. \\ &\qquad \left. + \frac{b(b-1)(b-2)(b-3)}{(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)(a+b-4)} + \cdots\right) \end{aligned}$$

ii) On a

$$P(A_2) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1}$$

et

$$P(A_4) = \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b-2}{a+b-2} \cdot \frac{a}{a+b-3},$$

$$\vdots$$

$$P(A_{2k}) = \frac{\frac{b!}{(b-(2k-1))!} \cdot a(a+b-2k)!}{(a+b)!}.$$

Donc

$$P(A^c) = P(A_2) + P(A_4) + \cdots$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P(A^c) = \frac{a}{a+b}&\left(\frac{b}{a+b-1}\right. \\ &\left. + \frac{b(b-1)(b-2)}{(a+b-1)(a+b-2)(a+b-3)} + \cdots\right) \end{aligned}$$

et de l'égalité $P(A) + P(A^c) = 1$ on obtient le résultat escompté.

31. Le télégraphe utilise les signes • (point) et – (trait). On sait qu'en moyenne 2/5 des points et 1/3 des traits sont altérés par la transmission. De même on sait qu'en moyenne le rapport entre le nombre de points et le nombre de traits est 5/3. Calculer la probabilité de recevoir le signal transmis si le signal reçu est :

    i) un point •.

    ii) un trait -.

    Solution. Considérons les événements

    A - "on a reçu un point",

    B - "on a reçu un trait",

    C - "on a transmis un point",

    D - "on a transmis un trait".

    i) On demande $P(C \mid A)$. On a $P(B \mid C) = \frac{2}{5}$, $P(A \mid D) = \frac{1}{3}$. De $\frac{P(C)}{P(D)} = \frac{5}{3}$ et $P(C) + P(D) = 1$ on tire $P(C) = \frac{5}{8}$, $P(D) = \frac{3}{8}$. On a $P(A \mid C) = 1 - P(B \mid C) = \frac{3}{5}$, $P(B \mid D) = 1 - P(A \mid D) = \frac{2}{3}$. Puis, $P(A) = P(C)P(A \mid C) + P(D)P(A \mid D) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = 1 - P(A) = \frac{1}{2}$, donc
    $$P(C \mid A) = \frac{P(C)P(A \mid C)}{P(A)} = \frac{3}{4}.$$

    ii) On demande $P(D \mid B)$. On trouve
    $$P(D \mid B) = \frac{P(D)P(B \mid D)}{P(B)} = \frac{1}{2}.$$

32. Dans une urne il y a 10 boules dont 6 blanches et 4 noires. On extrait deux fois une boule de l'urne sans remettre la boule choisie dans l'urne. Soit A l'événement "la deuxième boule pigée est blanche" et B l'événement "la première boule pigée est noire." Montrer que les événements A et B ne sont pas indépendants.

    Solution. On a $P(A \mid B) = \frac{6}{9}$. Parce que $P(A) = P(B)P(A \mid B) + P(B^c)P(A \mid B^c) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{3}{5}$, il s'ensuit que $P(A \mid B) \neq P(A)$ et les événements A et B ne sont pas indépendants.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

33. Une urne contient 6 boules blanches et 8 boules noires. On extrait une boule qu'on met de coté. Par la suite on extrait une seconde boule.

i) Sachant que la première boule pigée est blanche, trouver la probabilité que la deuxième boule pigée soit également blanche et la probabilité que la deuxième boule pigée soit noire.

ii) Sans connaître la couleur de la première boule extraite, trouver la probabilité que la deuxième boule extraite soit blanche et la probabilité que la deuxième boule extraite soit noire.

Solution. Soit B_i l'événement "la i-ième boule pigée est blanche" , $i = 1, 2$ et soit A_i l'événement "la i-ième boule pigée est noire" , $i = 1, 2$.

i) On cherche d'abord la probabilité conditionnelle $P(B_2 \setminus B_1)$. Donc

$$\begin{aligned} P(B_2 \mid B_1) &= \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\frac{6}{14} \times \frac{5}{13}}{\frac{6}{14}} \\ &= \frac{5}{13}. \end{aligned}$$

On cherche la probabilité $P(A_2 \mid B_1)$. Donc

$$\begin{aligned} P(A_2 \mid B_1) &= \frac{P(B_1 \cap A_2)}{P(B_1)} \\ &= \frac{\frac{6}{14} \times \frac{8}{13}}{\frac{6}{14}} \\ &= \frac{8}{13}. \end{aligned}$$

On peut obtenir directement $P(A_2 \mid B_1)$, car $P(A_2 \mid B_1) + P(B_2 \mid B_1) = 1$.

ii) Notons que B_1^c est l'événement "la première boule pigée est noire" , et que $\{B_1, B_1^c\}$ est un système complet d'événements. En utilisant la formule de la probabilité totale, on obtient

$$\begin{aligned}
P(B_2) &= P(B_2 \mid B_1)P(B_1) + P(B_2 \mid B_1^c)P(B_1^c) \\
&= \frac{5}{13} \times \frac{6}{14} + \frac{6}{13} \times \frac{8}{14} \\
&= \frac{6(5+8)}{13 \times 14} \\
&= \frac{6}{14} \\
&= \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

Comme $B_1^c = A_1$, en procédant comme avant, on trouve

$$\begin{aligned}
P(A_2) &= P(A_2 \mid B_1)P(B_1) + P(A_2 \mid B_1^c)P(B_1^c) \\
&= P(A_2 \mid B_1)P(B_1) + P(A_2 \mid A_1)P(A_1) \\
&= \frac{8}{13} \times \frac{6}{14} + \frac{7}{13} \times \frac{8}{14} \\
&= \frac{8(6+7)}{13 \times 14} \\
&= \frac{8}{14} \\
&= \frac{4}{7}.
\end{aligned}$$

On peut obtenir directement $P(A_2)$, car $P(B_2) + P(A_2) = 1$. Voir aussi problème 7.

34. Un étudiant a trois disques colorés des deux cotés de la façon suivante :

- un disque a les deux cotés blancs,
- un disque a un coté blanc et l'autre noir,
- un disque a les deux cotés noirs.

On choisi au hasard un disque et on constate qu'un coté est blanc. Trouver la probabilité que le second coté soit également blanc.

Solution. Soit A l'événement "le premier coté est blanc" et B l'événement "le second coté du même disque est également blanc". On doit calculer la probabilité conditionnelle $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Parce que $P(A) = \frac{1}{2}$ (car il y a 6 faces parmi lesquelles 3 sont blanches) et $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ (car il y a 3 disques parmi lesquels seulement un a les deux cotés blancs), il s'ensuit que $P(B \mid A) = \frac{2}{3}$.

35. Sachant que $P(A \mid B) = \frac{2}{5}$; $P(A \mid B^c) = \frac{1}{10}$ et $P(B \mid A) = \frac{3}{5}$ trouver $P(A)$ et $P(B)$.

Solution. Pour les inconnues $P(A)$ et $P(B)$ on peut obtenir un système de deux équations linéaire en considérant les relations

$$\begin{aligned} P(A) \cdot P(B \mid A) &= P(B) \cdot P(A \mid B) \\ P(A) \cdot P(B^c \mid A) &= P(B^c) \cdot P(A \mid B^c). \end{aligned}$$

En utilisant les relations $P(B^c) = 1 - P(B)$ et $P(B^c \mid A) = 1 - P(B \mid A)$ le système précédent devient

$$\begin{aligned} P(B \mid A) \cdot P(A) - P(A \mid B) \cdot P(B) &= 0 \\ (1 - P(B \mid A)) \cdot P(A) + P(A \mid B^c) \cdot P(B) &= P(A \mid B^c). \end{aligned}$$

Dans notre cas, on a

$$\begin{aligned} \frac{3}{5}P(A) - \frac{2}{5}P(B) &= 0 \\ \frac{2}{5}P(A) + \frac{1}{10}P(B) &= \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

d'où

$$P(A) = \frac{2}{11} \text{ et } P(B) = \frac{3}{11}.$$

36. Soit A et B deux événements définis sur le même espace échantillonnal et tels que $P(A) = 0,5$ et $P(A \cup B) = 0,7$. Trouver $P(B)$, quand

i) les événements A et B sont incompatibles.

ii) les événements A et B sont indépendants.

iii) $P(B \mid A) = 0,5$.

Solution. i) De $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, on trouve $P(B) = 0,7 - 0,5 = 0,2$.

ii) De $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$, on trouve

$$P(B) = \frac{P(A \cup B) - P(A)}{P(A^c)} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4.$$

iii) De $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B \mid A)$, on trouve

$$P(B) = 0,7 - 0,5 + 0,5 \times 0,5 = 0,45.$$

37. Trois canons tirent simultanément sur une cible. Les probabilités d'atteindre la cible sont $p_1 = 0,6$, $\boldsymbol{p_2} = 0,8$, $\boldsymbol{p}_2 = 0,7$, pour les trois canons respectivement. Trouver la probabilité que la cible soit atteinte au moins une fois.

Solution. Soit A_1, A_2, et A_3 les événements que le premier, le deuxième et respectivement le troisième canon atteigne la cible. On cherche la probabilité de l'événement $A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Les événements A_k, $k = 1, 2, 3$ sont indépendantes et compatibles, donc

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) \\
&\quad - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\
&\quad - P(A_1)P(A_2) - P(A_1)P(A_3) - P(A_2)(P(A_3) \\
&\quad + P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\
&= 0,6 + 0,8 + 0,7 - 0,6 \times 0,8 - 0,6 \times 0,7 - 0,8 \times 0,7 \\
&\quad + 0,6 \times 0,8 \times 0,7 \\
&= 0,976.
\end{aligned}$$

Aussi, on trouve directement

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P((A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c) \\
&= 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\
&= 1 - 0,4 \times 0,2 \times 0,3 \\
&= 1 - 0,024 \\
&= 0,976.
\end{aligned}$$

38. Une personne écrit n lettres à n correspondantes. Elle mêle les lettres et les place au hasard dans n enveloppes sur lesquelles les adresses ont été écrites à l'avance. Trouver la probabilité qu'au moins un destinataire reçoive la lettre qui lui est destinée.[8]

[8]Ce type de problème est connu sous le nom de problème des concordances ou des coïncidences.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Solution. Notons par A_k l'événement "la k-ième lettre arrive à son destinataire", $k = 1, \ldots, n$; on doit calculer la probabilité $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$, où les événements A_k, $k = 1, \ldots, n$ sont compatibles, donc on utilise la formule

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j \cap A_k) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(\cap_{k=1}^{n} A_k).$$

Mais,

$$P(A_k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n},\ k = 1, \ldots, n.$$

En effet, il y a n ! manières également probables d'introduire les n lettres dans les n enveloppes et, parce qu'une lettre doit être introduite dans son enveloppe, il y a $(n - 1)$! cas favorables (les autres $n - 1$ lettres peuvent être introduites dans les $n - 1$ enveloppes de $(n - 1)$! manières différentes). De même

$$P(A_j \cap A_k) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)},$$

pour tout j et k avec $j < k$;

$$P(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

pour tout i, j, k avec $i < j < k$. Enfin

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \frac{1}{n!}\ .$$

La probabilité cherchée est donc

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= n\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} \\ &\quad + \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Cette série converge assez rapidement. Pour $n = 13$ on a déjà la valeur 0,632 120 558 800. La valeur limite n'est autre que $1 - e^{-1}$ comme on peut le montrer en développant e^{-1} en série de MacLaurin.[9]

39. Des balles numérotées de 1 à n sont placées au hasard dans n urnes aussi numérotées de 1 à n. On dit qu'il y a concordance lorsqu'une balle est placée dans l'urne portant le même numéro.

i) Trouver est la probabilité qu'il y ait au moins une concordance.

ii) Trouver est la probabilité qu'il y ait exactement k concordances.

Solution. i) Notons par A_k l'événement "la boule k est dans l'urne k", $k = 1, \ldots, n$; on doit calculer la probabilité $P = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$, où les événements A_k, $k = 1, \ldots, n$ sont compatibles. En procédant de la même manière que dans le problème précédant on trouve que $P \approx 1 - e^{-1}$.

ii) Le nombre de façons d'avoir exactement k concordances est le nombre de façons de choisir les k endroits des concordances multiplié par le nombre de façons pour n'avoir aucune concordance parmi les $n - k$ urnes restantes. Donc la probabilité d'avoir exactement k concordances est

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{k} \cdot (n-k)! \left(\sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}\right)}{n!} &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \\ &\approx \frac{e^{-1}}{k!}, \end{aligned}$$

si n est grand.

40. D'une urne qui contient 3 boules rouges, 3 boules vertes et 4 boules bleues, on tire sans remise, trois boules. Quelle est la probabilité que la première boule soit bleue, la seconde verte et la troisième bleue ?

Solution. Considérons les événements

A_1 - "la première boule tirée est bleue",

A_2 - "la deuxième boule tirée est verte",

A_3 - "la troisième boule tirée est bleue".

[9]Colin MacLaurin (1698-1746), mathématicien écossais.

On cherche la probabilité $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. Puisque les événements sont dépendants, on a

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ &= \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{3}{8} \\ &= \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

41. Un lot de 100 pièces de machines est soumis à un contrôle de la qualité. En testant 5 pièces du lot, on rejette le lot si l'on trouve au moins une pièce défectueuse. Trouver la probabilité que le lot soit rejeté, s'il contient effectivement 5% de pièces défectueuses.

Solution. Il est plus facile de trouver la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité que le lot soit accepté après avoir passé par le contrôle de la qualité. Notons A_i l'événement "la i-ième pièce contrôlée est acceptable", $i = 1, \ldots, 5$. On doit calculer la probabilité de l'événement fl $_1$Ai. Parce que les événements A_i, $i = 1, \ldots, 5$ ne sont pas indépendants, on doit utiliser la formule

$$\begin{aligned} q = P(\cap_{i=1}^5 A_i) = {} & P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ & P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3)P(A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4). \end{aligned}$$

Dans notre cas $P(A_1) = \frac{95}{100}$, $P(A_2 \mid A_1) = \frac{94}{99}$, car si l'événement A_1 se réalise, alors dans le lot il reste encore 99 pièces parmi lesquelles 94 sont correctes, $P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{93}{98}$, $P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{92}{97}$ et $P(A_5 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{91}{96}$, donc

$$q = \frac{95}{100} \times \frac{94}{99} \times \frac{93}{98} \times \frac{92}{97} \times \frac{91}{96} = 0,77,$$

d'où $p = 1 - q = 0,23$.

42. Deux tireurs visent simultanément une cible. La probabilité d'atteindre la cible est $p_1 = 0,7$ pour le premier tireur et $p_2 = 0,6$ pour le second tireur. Trouver la probabilité que le premier tireur atteigne la cible et que le second ne l'atteigne pas.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Solution. Soit A_1 et A_2 les événements "le premier (respectivement le second) tireur atteint la cible"; les événements A_1 et A_2 sont indépendants. On cherche

$$P(A_1 \setminus A_2) = P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c) = 0,7 \times 0,4 = 0,28.$$

43. On considère trois urnes d'aspect identique et dont la composition est donnée dans le tableau suivant :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	1	1
U_2	5	3
U_3	1	3

On choisit au hasard une urne dont on tire une boule. Trouver la probabilité que la boule extraite soit blanche.

Solution. On applique la formule des probabilités totales. Soit B l'événement "la boule pigée est blanche" et A_k l'événement "la sélection provient de l'urne U_k", $k = 1, 2, 3$, alors $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B)$ et par suite

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + P(A_3)P(B \mid A_3) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{24}. \end{aligned}$$

44. On considère deux urnes dont la composition est donnée dans le tableau suivant :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	2	1
U_2	1	5

On pige une boule de l'urne U_1 et on l'introduit dans l'urne U_2. On extrait ensuite une boule de l'urne U_2. Sachant que la boule tirée de

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

l'urne U_2 est blanche, trouver la probabilité que la boule transférée était noire.

Solution. On applique la formule de Bayes. Soit B l'événement "la boule pigée de l'urne U_2 est blanche" et A_1 (respectivement A_2) l'événement "la boule transférée de l'urne U_1 à l'urne U_2 est blanche (respectivement noire)" , alors

$$P(A_1) = \frac{2}{3},\ P(A_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(B \mid A_1) = \frac{2}{7},\ P(B \mid A_2) = \frac{1}{7},$$

d'où

$$P(A_2 \mid B) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{7}}{\frac{2}{3} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{7}} = \frac{1}{5}.$$

Notons que la probabilité *a priori* de l'événement A_2 est tandis que la probabilité *a posteriori* de l'événement A_2 est 1/5.

45. Soit deux machines M_1 *et* M_2 produisant respectivement 100 et 200 objets. La machine M_1 produit 5% d'objets défectueux, la machine M_2 en produit 6%. On tire un objet parmi les 300 objets fabriqués et il est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il ait été fabriqué par la machine M_1 ?

Solution. On applique la formule de Bayes. Soit :

A - "l'objet est fabriqué par la machine M_1",

B - "l'objet est fabriqué par la machine M_2",

D - "l'objet est défectueux".

$$P(A \mid D) = \frac{P(A)P(D \mid A)}{P(A)P(D \mid A) + P(B)P(D \mid B)}$$

et

$$P(A) = \frac{1}{3},\ P(B) = \frac{2}{3},\ P(D \mid A) = \frac{5}{100},\ P(D \mid B) = \frac{6}{100},$$

d'où

$$P(A \mid D) = \frac{5}{17}.$$

46. Quatre chasseurs visent simultanément une fois sur une cible. Sachant que chaque chasseur atteint la cible 2 fois en 5 tirs, trouver la probabilité p que la cible soit atteinte par au moins un chasseur.

Solution. Il est plus facile de trouver la probabilité q de l'événement contraire, c'est-à-dire aucun chasseur n'atteint la cible. On applique le modèle de Bernoulli,

$$q = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0,129\ 600, \text{ et par la suite } p = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0,870\ 400.$$

47. n tireurs visent en même temps une cible mobile. La probabilité d'atteindre la cible est la même pour tous les tireurs et est égale à 1/k où k est un nombre naturel. Trouver la probabilité p que la cible soit atteinte.

Solution. Calculons la probabilité q de l'événement contraire, c'est-à-dire aucun tireur n'atteint la cible. On applique le modèle de Bernoulli, où $p = 1/k$ et $1 - p = k\text{-}1/k$ donc

$$q = \left(\frac{k-1}{k}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n = 1 - \binom{n}{1}\frac{1}{k} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{k^n}$$

et

$$p = 1 - q = 1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)^n.$$

48. À la suite d'une expérience, la probabilité qu'un événement A puisse se produire est 0,01.

i) Trouver la probabilité qu'en effectuant 10 fois l'expérience, l'événement A se produise 4 fois.

ii) Combien d'expériences faut-t-il faire pour que la probabilité d'apparition de l'événement A, au moins une fois, soit égale ou supérieure à 0,5 ?

Solution. i) On applique le modèle de Bernoulli avec $n = 10$, $k = 4$, $p = 0,01$ et $1 - p = 0,99$. La probabilité d'observer 4 fois l'événement A est

$$P(10; 4) = \binom{10}{4}(0,01)^4(0,99)^6.$$

ii) Il est plus facile de calculer la probabilité de l'événement contraire. Cherchons la probabilité q qu'en n essais l'événement A n'apparaisse jamais. On trouve $q = (0,99)^n$. On détermine l'entier n à partir de l'inégalité.

$$1 - (0,99)^n \geq \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$(0,99)^n \leq \frac{1}{2}.$$

En prenant le logarithme, on obtient $n \log 0,99 \leq -\log 2$, d'où $n \geq 70$.

Remarque. Au moins 70 expériences sont nécessaires pour que l'événement A apparaisse au moins une fois avec une probabilité égale ou supérieure à 0,5. Il serait faux de croire que si on fait deux fois plus d'expériences, la probabilité d'apparition, au moins une fois, de l'événement A sera presque 1. Par exemple, vouloir s'assurer que l'événement A apparaisse au moins une fois avec une probabilité égale ou supérieure à 0,98 nécessite un minimum de 396 expériences (et non pas 140), car

$$1 - (0,99)^n \geq 0,98$$

donne $(0,99)^n \leq 0,02$ c'est-à-dire $n \log 0,99 \leq \log 0,02$, d'où $n \geq 396$.

49. Sachant que la probabilité qu'un étudiant soit diplômé est de 0,4, calculer pour un groupe de cinq étudiants, la probabilité

i) qu'aucun étudiant ne soit diplômé.

ii) qu'un seul étudiant soit diplômé.

iii) que deux étudiants soient diplômés.

iv) qu'au moins deux étudiants soient diplômés.

v) que les cinq étudiants soient diplômés.

Solution. Soit A_j l'événement "l'étudiant j est diplômé". Les événements A_j, $1 \leq j \leq 5$ sont indépendants, et $P(A_j) = 0,4$, $1 \leq j \leq 5$. On applique le modèle de Bernoulli.

i) $P(\cap_{j=1}^5 A_j^c) = \prod_{j=1}^5 P(A_j^c) = (0,6)^5 = 0,077\ 760$.

ii) $\binom{5}{1}(0,4) \times (0,6)^4 = 0,259\ 200$.

iii) $\binom{5}{2}(0,4)^2 \times (0,6)^3 = 0,345\ 600$.

iv) $\binom{5}{2}(0,4)^2 \times (0,6)^3 + \binom{5}{3}(0,4)^3 \times (0,6)^2 + \binom{5}{4}(0,4)^4 \times 0,6 + \binom{5}{5}(0,4)^5 = 0,663\ 040$.

v) $P(\cap_{j=1}^5 A_j) = \prod_{j=1}^5 P(A_j) = (0,4)^5 = 0,010\ 240$.

50. Une urne contient des boules blanches et noires. Les tirages se font avec remise. Soit *p* la probabilité d'extraire une boule blanche et 1 - p la probabilité d'extraire une boule noire.

i) Trouver la probabilité que la première boule blanche soit obtenue à la *k*-ième sélection.

ii) On pige jusqu'à ce qu'on obtienne *h* boules noires. Soit *h* + *x* le nombre d'essais nécessaire pour y arriver. Trouver la probabilité que *x* = *m*.

Solution. i) Soit A_i l'événement "à la *i*-ième sélection, on obtient une boule blanche", alors *Ac/i* est l'événement "à la *i*-ième sélection, on obtient une boule noire" . Les événements A_i sont indépendants, car les sélections se font avec remise. On cherche la probabilité de l'événement

$A_1^c \cap \cdots \cap A_{k-1}^c \cap A_k$. Or

$$\begin{aligned} P(A_1^c \cap \cdots \cap A_{k-1}^c \cap A_k) &= P(A_1^c) \cdots P(A_{k-1}^c) P(A_k) \\ &= (1-p)^{k-1} p, \end{aligned}$$

car $P(A_i) = p$ et $P(A_i^c) = 1 - p$.

ii) Pour obtenir *h* boules noires en *h* + *x* sélections, la dernière boule extraite doit être noire (autrement on aurait atteint plus rapidement l'objectif d'obtenir les *h* boules noires). Il faut réaliser deux événements indépendants, à savoir : dans les premières *h* + *x* - 1 sélections, on doit obtenir *h* - 1 boules noires (la probabilité de cet événement s'obtient en utilisant le modèle de Bernoulli) et lors de la dernière sélection on doit obtenir une boule noire (avec probabilité (1 - p)). Par la suite la probabilité qu'en *h* + *x* sélections on obtienne *h* boules noires est égale à

$$\binom{h+x-1}{h-1} p^x (1-p)^{h-1}(1-p) = \binom{h+x-1}{x} p^x (1-p)^h,$$

où on a utilisé la formule $\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$.

On obtient la probabilité demandée en faisant $x = m$, donc

$$P = \binom{h+m-1}{m} p^m (1-p)^h.$$

51. Un point *M* se déplace dans les noeuds d'un réseau du plan de la façon suivante. Si le point *M* se trouve à un moment donné au noeud *(x, y),* alors dans la seconde suivante il peut passer au noeud (x + 1, y) avec probabilité *p* ou bien au noeud *(x,* y + 1) avec probabilité 1 - *p*. Le point *M* ne peut pas rester sur place, car $p + (1 - p) = 1$. Supposons que les coordonnées des noeuds sont des nombres entiers non négatifs, limitant le mouvement au premier cadran des axes de coordonnées du plan.

    i) Trouver la probabilité que le point *M* partant de l'origine *O*(0, 0) arrive au noeud *A*(*a, b).*

    ii) Trouver la probabilité que le point *M* partant de l'origine *O*(0, 0) atteigne le segment *C D où C(n,* 0*) et D(n, n).*

    Solution. i) On utilise le modèle de Bernoulli, car à chaque seconde il n'y a que deux événements qui peuvent se produire (le point *M* fait un pas horizontal vers la droite ou bien un pas vertical vers le haut), avec les probabilités p et 1 - *p* respectivement. Ces probabilités restent les mêmes à n'importe quel instant et les déplacements exécutés à des instants différents sont indépendants.

    Pour que le point *M* arrive au noeud *A(a, b)* il doit effectuer $a + b$ déplacements parmi lesquels *a* sont horizontaux et *b* sont verticaux, donc

$$P(a+b; a) = \binom{a+b}{a} p^a (1-p)^b.$$

ii) Soit A l'événement "le point mobile atteint le segment CD" et A_k l'événement "le point mobile atteint le segment CD pour la première fois au noeud $C_k(n,k)$", alors $A = \cup_{k=0}^{n} A_k$, car le segment CD peut être atteint à n'importe lequel des noeuds C_k, $k = 0, \ldots, n$. Alors $P(A) = \sum_{k=0}^{n} P(A_k)$, car les événements A_k, $k = 0, \ldots, n$ sont deux à deux incompatibles. Pour calculer la probabilité, notons que la réalisation de

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

l'événement A_k signifie la réalisation de deux événements indépendants, à savoir:

B_k – "à l'étape précédente, le point mobile M se trouve au noeud identifié par $C'_k(n-1,k)$",

D_k – "le point mobile M passe du noeud C'_k au noeud C_k", donc

$$A_k = B_k \cap D_k$$

et

$$P(A_k) = P(B_k)P(D_k) = \left(\binom{n+k-1}{k} p^{n-1}(1-p)^k\right) p,$$

(pour la probabilité $P(B_k)$ on a utilisé le résultat du point i)).

Donc la probabilité cherchée est

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n+k-1}{k} p^{n-1}(1-p)^k\right) p \\ &= p^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+k-1}{k} (1-p)^k. \end{aligned}$$

52. D'un sous-marin on lance 4 torpilles contre un destroyer. La probabilité qu'une torpille atteigne le destroyer est 0,3. Pour couler le destroyer il suffit que deux torpilles le touche, tandis que si une seule torpille atteint le destroyer, il coule avec probabilité 0,6. Calculer la probabilité de couler le destroyer.

Solution. Posons A_j l'événement "le destroyer est atteint par j torpilles", $0 \le j \le 4$ et B l'événement "le destroyer coule". Cherchons la probabilité de l'événement B^c que le destroyer ne coule pas. Alors $P(B^c) = P(A_0)P(B^c \mid A_0) + P(A_1)P(B^c \mid A_1)$. Pour trouver $P(A_j)$ on utilise le modèle de Bernoulli, car $P(A_j) = P(4; j)$. Comme

$P(B^c \mid A_0) = 1$, $P(B^c \mid A_1) = 1 - 0,6 = 0,4$, on obtient $P(B^c) = P(4;0) + P(4;1) \times 0,4$, donc $P(B^c) = (0,7)^4 + 4 \times 0,3 \times (0,7)^3 \times 0,4 = 0,404\ 740$, et $P(B) = 1 - P(B^c) = 0,595\ 260$.

53. Deux joueurs J_1 et J_2 ont parié un même montant d'argent. Ils répéteront plusieurs fois un jeu. Le joueur qui obtiendra un nombre fixé à l'avance de succès emportera la mise. Soit p la probabilité que J_1 ait

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

un succès à ce jeu et $q = 1 - p$ la probabilité que le succès aille à J_2. Or un événement impératif survient et les oblige à interrompre le jeu avant la fin.

i) On partage le montant proportionnellement à la probabilité de gagner si le jeu se poursuivent. Sachant qu'il reste m parties à J_1 pour gagner et n parties à J_2, calculer la probabilité que J_1 gagne.[10]

ii) Montrer les identités : pour $p, q > 0$, $p + q = 1$, m et n des nombres naturels[11]

$$1 = p^m \left(\sum_{h=0}^{n-1} \binom{m+h-1}{m-1} q^h \right) + q^n \left(\sum_{h=0}^{m-1} \binom{n+h-1}{n-1} p^h \right) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} p^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(m+k-1)!}{k!(m-1)!} q^k \right) &= \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} p^m q^{n-1} \\ &\times \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!m!}{(n-k-1)!(m+k)!} \left(\frac{p}{q} \right)^k \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} q^n \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} p^k \right) &= 1 - \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} p^m q^{n-1} \\ &\times \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!m!}{(n-k-1)!(m+k)!} \left(\frac{p}{q} \right)^k \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Solution. i) Au moment d'interrompre la partie, il manque à J_1 et à J_2 respectivement m et n succès pour gagner. Notons par P et $Q = 1 - P$ les probabilités que le jeu soit finalement gagné par J_1 ou par J_2

[10]Ce problème connu sous le nom du "Problème des parties" a une importance historique, étant un des premiers problèmes discutés et résolus dans la correspondance qu'échangèrent Blaise Pascal et Pierre Fermat.

[11]Soulignons le fait que certaines inégalités ou identités numériques dont les démonstrations directes sont assez difficiles, peuvent être établies très simplement par des considérations probabilistes (voir aussi problème 30 ii)).

respectivement, si on pouvait continuer à jouer. En bonne justice, on devra partager la mise M dans le rapport P / Q. Les joueurs J_1 et J_2 devraient donc se retirer avec les montants PM et QM respectivement.

Le problème consiste bien sûr à calculer la probabilité P et nous allons présenter trois méthodes différentes pour y arriver.

Méthode I

En combien de parties le joueur J_1 peut-il réaliser la victoire, c'est-à-dire remporter les m succès qui lui manque avant que J_2 remporte ses n succès ? La façon la plus simple et la plus chanceuse consiste à gagner m fois de suite. La plus longue consiste à prolonger le stress pendant $m + (n - 1)$ parties. Le nombre de parties possibles est donc : $m, m + 1, m + 2, \ldots, m + (n - 1)$. Pour que J_1 remporte la victoire finale, il doit bien sûr réaliser un succès à la dernière de ces parties.

Cherchons la probabilité que J_1 gagne en exactement $m + k$ parties, $k = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1)$. Pour cela, J_1 doit d'abord gagner $m - 1$ parties dans les $m + k - 1$ premières parties, puis il doit gagner la dernière. Considérons les événements :

V_{m+k} - "J_1 gagne en $m + k$ parties",

$V_{m+k-1;m-1}$ - "J_1 remporte $m - 1$ succès en $m + k - 1$ parties",

A - "J_1 remporte le dernier succès".

On peut alors écrire ainsi les diverses probabilités :

$$P(V_{m+k}) = P(V_{m+k-1;m-1} \cap A) = P(V_{m+k-1;m-1})P(A)$$

puisque les événements $V_{m+k-1;m-1}$ et A sont évidemment indépendants.

On sait que la probabilité que J_1 ait un succès à une partie quelconque est p. On a donc $P(A) = p$. D'autre part, pour calculer $P(V_{m+k-1;m-1})$ on utilise le modèle de Bernoulli. En effet, on a $m + k - 1$ répétitions indépendantes d'une même expérience ; chaque expérience se solde par un succès ou un échec pour J_1 ; à chaque fois, la probabilité du succès est p. Par suite

$$P(V_{m+k-1;m-1}) = \binom{m+k-1}{m-1} p^{m-1} q^k$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

et

$$\begin{aligned} P(V_{m+k}) &= P(V_{m+k-1;m-1}) \cdot P(A) \\ &= \left(\binom{m+k-1}{m-1} p^{m-1} q^k \right) p \\ &= \binom{m+k-1}{m-1} p^m q^k. \end{aligned}$$

La probabilité P que J_1 ait la victoire est donc:

$$\begin{aligned} P &= P(V_m) + P(V_{m+1}) + \cdots + P(V_{m+k}) + \cdots + P(V_{m+n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k-1}{m-1} p^m q^k. \end{aligned}$$

Ainsi

$$P = p^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+k-1}{m-1} q^k \right) \text{ si } n > 1. \tag{2.11}$$

D'une façon analogue, on peut montrer que

$$Q = q^n \left(\sum_{h=0}^{m-1} \binom{n+h-1}{n-1} p^h \right) \text{ si } m > 1. \tag{2.12}$$

Méthode II

On a vu que le maximum de parties à jouer pour que J_1 soit vainqueur est $m + n - 1$. Supposons que les deux joueurs s'entêtent à jouer toutes ces $m + n - 1$ parties, regardant ensuite les résultats et proclamant le vainqueur à la fin seulement. Le joueur J_1 aura la victoire s'il a gagné m ou $m + 1$ ou $m + 2$ ou ... ou $m + n - 1$ parties sur ce lot. En effet, s'il a eu par exemple m succès sur $m + n - 1$ parties, son adversaire n'en a ramassé que n - 1 ce qui est insuffisant pour lui donner la victoire. Avec la notation déjà utilisée, on peut écrire

$$P = P(V_{m+n-1;m} \cup V_{m+n-1;m+1} \cup V_{m+n-1;m+2} \cup \cdots \cup V_{m+n-1;m+n-1}).$$

Comme ces divers événements sont incompatibles deux à deux, on peut écrire

$$\begin{aligned} P &= P(V_{m+n-1;m}) + P(V_{m+n-1;m+1}) + \cdots + P(V_{m+n-1;m+n-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(V_{m+n-1;m+k}). \end{aligned}$$

Encore ici, en utilisant le modèle de Bernoulli, on trouve

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+n-1}{m+k} p^{m+k} q^{n-1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(m+n-1)!}{(m+k)!(n-1-k)!} p^{m+k} q^{n-1-k}$$

$$= \frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!} p^m q^{n-1} \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{m!}{(m+k)!} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!} \left(\frac{p}{q}\right)^k \right) \qquad (2.13)$$

Méthode III

Notons par $p_{m,n}$ la probabilité que J_1 remporte la victoire, quand il lui manque encore m succès et qu'il en manque encore n à son adversaire J_2. Supposons qu'ils jouent une partie de plus. J_1 peut remporter la victoire de l'une des deux façons suivantes qui sont incompatibles :

a) J_1 gagne cette partie (avec probabilité p). Il lui manque alors m - 1 succès et il en manque toujours n à J_2 pour gagner (probabilité $p_{m-1;n}$).

b) J_1 perd cette partie (probabilité q = 1 - p). Il lui manque alors toujours m succès et il n'en manque que n - 1 à J_2 pour gagner (probabilité $p_{m,n-1}$)

On obtient donc la relation de récurrence suivante :

$$p_{m,n} = p \cdot p_{m-1,n} + q \cdot p_{m,n-1}. \tag{2.14}$$

Puisque $P = p_{m,n}$, cette relation nous permet de calculer P par récurrence, il faut résoudre l'équation obtenu en (2.14) avec les conditions initiales suivantes :

$$p_{m,0} = 0 \text{ si } m > 0, \tag{2.15}$$

$$p_{0,n} = 1 \text{ si } n > 0. \tag{2.16}$$

En effet, (2.15) signifie que J_1 ne peut pas gagner s'il ne manque plus aucun succès à J_2 pour gagner la victoire. J_2 est déjà vainqueur. D'un autre coté, (2.16) signifie que J_1 est déjà vainqueur puisqu'il lui manque 0 succès. Le symbole $p_{0,0}$ n'a pas d'interprétation probabiliste et on pose $p_{0,0} = 0$.

ii) Puisque $P + Q = 1$ les formules (2.11) et (2.12) de la méthode I, donne l'identité (2.8).

En égalant les relations (2.11) et (2.13) obtenues pour P avec les méthode I et II, on obtient l'identité (2.9).

Puisque $Q = 1 - P$, en égalant la formule (2.12) pour Q obtenue par la méthode I avec $1 - P$ où P est donné par la formule (2.13) obtenue par la méthode II, on obtient l'identité (2.10).

54. D'une urne contenant 20 boules parmi lesquelles 8 sont blanches, 6 sont noires et 6 sont rouges, on extrait successivement 5 boules, retournant chaque fois la boule choisie dans l'urne. Trouver la probabilité que parmi les 5 boules il y ait 2 blanches, 1 noire et 2 rouges.

Solution. On applique le modèle multinomial (à plusieurs états), c'est-à-dire la formule

$$P(n; m_1, \dots, m_s) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_s!} p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}.$$

Dans notre cas, $s = 3$, $n = 5$, $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$, $p_1 = \frac{2}{5}$, $p_2 = \frac{3}{10}$, $p_3 = \frac{3}{10}$ et par suite

$$P(5; 2, 1, 2) = \frac{5!}{2!1!2!} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \frac{3}{10} \times \left(\frac{3}{10}\right)^2 = 0,129\ 600.$$

55. Les probabilités que le diamètre d'une pièce d'une machine soit plus petit (respectivement plus grand) que les limites admissibles sont 0,05 et 0,10 et la probabilité que le diamètre se trouve entre les limites fixées par les normes est 0,85. On extrait au hasard 100 pièces du lot. Trouver la probabilité que parmi ces pièces, 5 aient un diamètre plus petit que la norme et 5 aient un diamètre plus grand que la norme.

Solution On applique le modèle multinomial, c'est-à-dire la formule

$$P(n; m_1, \ldots, m_s) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_s!} p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s}.$$

Dans notre cas, $s = 3$, $n = 100$, $m_1 = 5$, $m_2 = 5$, $m_3 = 90$, $p_1 = 0,05$, $p_2 = 0,10$, $p_3 = 0,85$ et par suite

$$P(100; 5, 5, 90) = \frac{100!}{5!5!90!}(0,05)^5(0,10)^5(0,85)^{90}.$$

En prenant le logarithme on obtient

$$\begin{aligned} \log P(100; 5, 5, 90) &= \log 100! - 2\log 5! - \log 90! \\ &\quad + 5\log 0,05 + 5\log 0,10 + 90\log 0,85. \end{aligned}$$

En utilisant les tables des logarithmes, on trouve

$$\log P(100; 5, 5, 90) = \overline{3}, 7824$$

d'où

$$P(100; 5, 5, 90) \approx 0,006.$$

56. On considère trois urnes ayant les compositions suivantes:

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	10	4
U_2	5	3
U_3	2	6

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

On choisit au hasard une boule de chaque urne. Trouver la probabilité qu'on obtienne 2 boules blanches et une boule noire.

Solution. On applique le modèle de Poisson. On doit calculer le coefficient de x^2 du polynôme

$$P(x) = (p_1x + (1 - p_1))(p_2x + (1 - p_2))(p_3x + (1 - p_3)),$$

où

$$p_1 = \frac{5}{7},\ p_2 = \frac{5}{8},\ p_3 = \frac{1}{4};$$

donc la probabilité cherchée est

$$p = \frac{5}{7} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{7} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{25}{56}.$$

57. On expérimente quatre prototypes d'appareil, un appareil pour chaque prototype. Les probabilités qu'un prototype corresponde aux normes sont 0, 8; 0, 7; 0, 9 et respectivement 0,85. Trouver la probabilité que tous les prototypes expérimentés correspondent aux normes.

Solution. On applique le modèle de Poisson. La probabilité cherchée est le coefficient de x^4 du polynôme

$$P(x) = (0, 8x + 0, 2)\ (0, 7x + 0, 3)\ (0, 9x + 0{,}1)\ (0, 85x + 0{,}15),$$

donc la probabilité cherchée est

$$p = 0, 8 \text{ x } 0, 7 \text{ x } 0, 9 \text{ x } 0, 85 = 0, 428\ 400.$$

58. À un concours de mathématiques, 3 candidats reçoivent une enveloppe contenant n billets présentant des problèmes d'algèbre et de géométrie $(n > 3)$. Les trois enveloppes contiennent respectivement 1, 2 et 3 sujets d'algèbre. Pour l'examen, chaque candidat choisit au hasard un billet d'une enveloppe. Trouver les probabilités des événements suivants :

i) tous les candidats sont examinés sur la géométrie.

ii) aucun candidat n'est examiné sur la géométrie.

iii) au moins un candidat est examiné sur l'algèbre.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Solution. On applique le modèle de Poisson. On forme le polynôme

$$\begin{aligned}
P(x) &= \left(\frac{1}{n}x+\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{2}{n}x+\frac{n-2}{n}\right)\left(\frac{3}{n}x+\frac{n-3}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n^3}(6x^3+(11n-18)x^2+(6n^2-22n+18)x\\
&\quad +(n-1)(n-2)(n-3))\\
&= P_3x^3+P_2x^2+P_1x+P_0.
\end{aligned}$$

i) Le terme constant du polynôme $P(x)$ donne

$$P_0=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}.$$

ii) Le coefficient de x^3 du polynôme $P(x)$, donne

$$P_3=\frac{6}{n^3}.$$

iii) $p=1-P_0$.

59. 16 candidats se présentent à un concours de chant. Il y a 11 hommes et 5 femmes. Par tirage au sort, les 16 candidats sont divisés en groupes de 4, chaque groupe devant se présenter au concours le même jour. Trouver la probabilité que lors de la première journée de concours se présente un groupe qui compte 3 femmes.

Solution. On applique le modèle de l'échantillon sans remise,

$$P(5,11;3,1)=\frac{\binom{5}{3}\binom{11}{1}}{\binom{16}{4}}=\frac{10\times 11}{1\ 820}=\frac{11}{182}.$$

60. D'une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n, on extrait sans remise m boules $(m \leq n)$. Trouver la probabilité que i, $(1 \leq i \leq m)$ des boules extraites aient des numéros donnés d'avance.

Solution. On applique le modèle de l'échantillon sans remise,

$$P(\alpha,\beta;a,b)=\frac{\binom{\alpha}{a}\binom{\beta}{b}}{\binom{\alpha+\beta}{a+b}}$$

où, dans notre cas $\alpha = i$, $\beta = n - i$, $a = i$, $b = m - i$ et par la suite

$$P(i, n-i; i, m-i) = \frac{\binom{i}{i}\binom{n-i}{m-i}}{\binom{n}{m}} = \frac{m(m-1)\cdots(m-i+1)}{n(n-1)\cdots(n-i+1)}.$$

61. Il y a 24 étudiants et 2 étudiantes dans une classe, chaque étudiant ayant une fiche. Trouver le nombre maximal de fiches qu'on doive choisir pour que la probabilité que parmi les fiches choisies se trouve au moins la fiche d'une étudiante, soit plus petite que 0,6.

    Solution. On applique le modèle de l'échantillon sans remise. Que parmi k fiches extraites se trouve, au moins, la fiche d'une étudiante peut se réaliser de deux manières incompatibles :

    - parmi les k fiches se trouve la fiche d'une étudiante ;
    - parmi les k fiches se trouvent les fiches des deux étudiantes de la classe.

    Le nombre k est le plus grand nombre naturel qui satisfasse les conditions :

$$\frac{\binom{2}{1}\binom{24}{k-1}}{\binom{26}{k}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{24}{k-2}}{\binom{26}{k}} < 0,6$$
$$1 \leq k \leq 26.$$

    Effectuant les calculs, on obtient

$$k^2 - 51k + 390 > 0, \; 1 \leq k \leq 26.$$

    Le trinôme $k^2 - 51k + 390$ est positif dans l'intervalle $(-\infty, \; 9,4) \cup (41,6, \; \infty)$.[12] Les conditions k entier et $1 \leq k \leq 26$ nous donnent $k = 9$.

2.3 Problèmes proposés

1. On utilise les 20 premiers nombres naturels pour numéroter 20 cartes. On brasse les cartes et on les place l'une après l'autre. Trouver la probabilité que le nombre 18 apparaisse immédiatement après le nombre 6.

[12]Les racines sont calculées à une seule décimale près.

2. Chaque nombre premier plus petit que 20 est écrit sur une carte. On brasse les cartes et on les place l'une après l'autre. Trouver la probabilité que les nombres premiers 3 et 19 soient voisins (indifféremment de l'ordre).

3. Les 12 numéros d'une revue annuelle sont rangés au hasard sur une étagère. Trouver la probabilité que les revues soient rangées dans l'ordre de leur parution.

4. Les 24 numéros d'une revue bimensuelle sont rangés au hasard sur une étagère. Trouver la probabilité que les revues ne soient pas rangées dans l'ordre de leur parution.

5. On lance 4 fois une pièce de monnaie. Trouver la probabilité que

   i) face apparaisse 2 fois.

   ii) face apparaisse au moins une fois.

6. On lance trois dés. Sachant que les dés sont tombés sur des faces différentes, trouver la probabilité qu'apparaisse un deux.

7. On lance deux dés n fois. Pour quelles valeurs de n la probabilité qu'apparaisse au moins une fois le double six sera plus grande que 1/2 ?

8. Deux partenaires d'habilité égale jouent au échec. Notons par $p_{n,m}$ la probabilité que de n parties un des joueurs gagne m parties. Montrer que

$$P_{4,3} > P_{8,5}.$$

   Interpréter le résultat.

9. On lance deux dés. Trouver la probabilité :

   i) qu'on obtienne une paire.

   ii) que la somme des points obtenus soit divisible par 3.

   iii) que la somme des points obtenus soit un nombre pair.

   iv) que la somme des points obtenus soit un nombre plus grand que 10.

10. Chaque coefficient de l'équation trigonométrique $a \tan x = b$ est déterminé en lançant un dé et en prenant le nombre de points obtenus. Trouver la probabilité que l'équation donnée possède les solutions $x = \pi / 4 + k\pi$ *où* k est un nombre entier.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

11. Chaque coefficient de l'équation $ax - b = 0$ est déterminé en lançant un dé et en prenant le nombre de points obtenus. Trouver la probabilité que l'équation donnée ait comme racine un nombre entier.

12. Chaque coefficient de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est déterminé en lançant un dé et en prenant le nombre de points obtenus. Trouver la probabilité que l'équation donnée ait une racine double.

13. On range au hasard 20 livres sur trois tablettes. Trouver la probabilité que la première tablette reçoive 8 livres.

14. On range au hasard 18 crayons dans deux plumiers. Trouver la probabilité qu'un plumier fixé reçoive 6 crayons.

15. Neuf crayons à colorier parmi lesquels 3 sont rouges, 3 verts et 3 bleus sont rangés au hasard dans trois boîtes qui ne peuvent contenir plus que 3 crayons chacune. Trouver la probabilité que chaque boîte contienne un crayon de chaque couleur.

16. Quatre écoles inscrivent chacune 10 étudiants à un concours d'orientation touristique. Par tirage au sort, on forme des groupes de 4 étudiants. Trouver la probabilité que chaque groupe comprenne un représentant de chaque école.

17. Un paquet de 36 cartes à jouer, contenant 18 cartes rouges et 18 cartes noires, est divisé au hasard en deux parties égales.

    i) Trouver la probabilité que chaque partie contienne un nombre égal de cartes rouges et noires.

    ii) En utilisant la formule de Stirling, "approximer" la probabilité trouvée au point i). (Voir la Note du problème 17, Section 2.2).

18. D'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, on tire sans remise n boules. Soit $x_1 < ... < x_m < ... < x_n$ la suite croissante des numéros inscrits sur les boules pigées. Trouver la probabilité que $x_m = M$. Pour quelles valeurs de M, $P(x_m = M) \neq 0$?

19. D'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, on tire sans remise n boules. Trouver la probabilité que

    i) le plus petit nombre inscrit sur les boules pigées soit égal à M.

    ii) le plus grand nombre inscrit sur les boules pigées soit égal à M.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

20. Soit A et B deux événements compatibles. Montrer que les événements $A \cap B$, $A^c \cap B^c$ et $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ forment un système complet d'événements.

21. Une cible est constituée d'un disque et de trois couronnes concentriques. Un tireur atteint le disque et les couronnes avec les probabilités respectives 0, 20; 0, 15; 0, 12; 0, 10, lors d'un tir. Trouver la probabilité qu'en effectuant un seul tir on atteigne la cible.

22. À la suite d'une expérience, quatre événements incompatibles A_k, $k = 1, 2, 3, 4$ peuvent apparaître avec probabilités respectives 0, 02; 0, 07; 0, 08; 0, 05. Trouver la probabilité qu'en effectuant l'expérience, au moins un événement parmi les quatre apparaisse.

23. Dans les conditions du problème 18, trouver la probabilité des événements

    i) $x_m \geq M_1$

    ii) $x_m \leq M_2$

    iii) $M_1 < x_m \leq M_2$

24. Dans les conditions du problème 18, trouver la probabilité des événements

    i) $x_m < M_1$

    ii) $x_m > M_2$

25. D'une urne contenant N boules numérotées de 1 *à* N, on tire sans remise n boules. Trouver la probabilité que le plus petit nombre inscrit sur les boules choisies soit

    i) au moins égal à M_1.

    ii) au plus égal à M_2.

    iii) plus grand que M_1 et au plus égal à M_2.

26. D'une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, on tire sans remise n boules. Trouver la probabilité que le plus grand nombre inscrit sur les boules choisies soit

    i) au moins égal à M_1.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ii) au plus égal à M_2.

iii) plus grand que M_1 et au plus égal à M_2.

27. Dans une urne il y a 3 boules blanches et 5 noires. On extrait successivement sans remise deux boules. Trouver la probabilité que les deux boules choisies soient

i) blanches.

ii) noires.

iii) une blanche et une noire.

28. En utilisant un modèle probabiliste vérifier l'identité

$$1+\frac{n-a}{n-1}+\frac{(n-a)(n-a-1)}{(n-1)(n-2)}+\cdots+\frac{(n-a)\cdots 2\cdot 1}{(n-1)\cdots(a+1)a}=\frac{n}{a},$$

où a et n sont des nombres naturels et $n \geq a$.

29. D'une urne contenant a boules blanches et b boules noires, on extrait sans remise n boules $(n \leq b)$.

i) Trouver deux expressions pour exprimer la probabilité que parmi les boules pigées il y ait au moins une boule blanche.

ii) Montrer l'identité

$$1+\frac{b}{a+b-1}+\cdots+\frac{b(b-1)\cdots(b-n+2)}{(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-n+1)}$$

$$=\frac{a+b}{a}\left(1-\frac{b(b-1)\cdots(b-n+1)}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-n+1)}\right)$$

où a, b, n sont des nombres naturels et $n \leq b$.

30. On considère n urnes numérotées de 1 à n. Chaque urne contient a boules blanches et b boules noires. On transfert au hasard une boule de la première urne vers la deuxième, ensuite de la deuxième vers la troisième et ainsi de suite. On extrait une boule de la dernière urne. Trouver la probabilité que la boule sortie de la dernière urne soit blanche.

31. Dans chacune de n urnes on introduit N boules numérotées de 1 à N. On extrait une boule de chaque urne. Soit $M \leq N$. Trouver la probabilité que le plus grand nombre inscrit sur les boules choisies soit

    i) au plus égal à M.

    ii) plus grand que M.

    iii) égal à M.

32. Dans chacune de n urnes on introduit N boules numérotées de 1 à N. On extrait une boule de chaque urne. Soit $M \leq N$. Trouver la probabilité que le plus petit nombre inscrit sur les boules choisies soit

    i) au moins égal à M.

    ii) égal à M.

    iii) au plus égal à M.

33. Soit A et B deux événements aléatoires indépendants. Montrer que les événements A^c et B^c sont indépendants.

34. Un tireur peut atteindre une cible avec une probabilité de 4/5. S'il atteint la cible d'un seul tir, il a le droit à un autre tir sur une deuxième cible. La probabilité d'atteindre les deux cibles est 2/5. Trouver la probabilité d'atteindre la deuxième cible.

35. Le déclenchement d'un réseau électrique se produit quand le courant sort du circuit formé de trois éléments liés en série. Soit $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,4$ et $p_3 = 0,2$ les probabilités respectives de sortir des trois éléments, la sortie des éléments se faisant de façon indépendante. Trouver la probabilité que la réseau ne se déclenche pas.

36. Un appareil qui contient N lampes cesse de fonctionner quand une lampe devient défectueuse. La probabilité que n'importe quelle lampe devienne défectueuse est p et les lampes opèrent indépendamment. Lorsque l'appareil s'arrête il faut tester les lampes une à une jusqu'à ce qu'on trouve la lampe défectueuse. Quelle est la probabilité que la lampe défectueuse soit détectée au n-ième test.

37. Soit p_x la probabilité qu'une personne âgée de x ans soit encore en vie une année plus tard et ${}_tp_x$ la probabilité qu'une personne âgée de x ans soit encore en vie t années plus tard. Montrer que

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

i) ${}_{t+u}p_x = {}_t p_x \cdot {}_u p_{x+t}$

ii) ${}_t p_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdots p_{x+t-1}$

Remarque. $q_x = 1 - p_x$, c'est-à-dire la probabilité qu'une personne de x ans meure durant cette année s'appelle le *taux de mortalité* à l'âge x et est utilisée pour construire les tables des taux de mortalité utilisées en assurance.

38. Montrer que si $P(A \setminus B) > P(A)$ alors $P(B \setminus A) > P(B)$.

39. On extrait au hasard une pièce d'un lot de pièces parmi lesquelles 5% sont défectueuses et 68% des bonnes pièces sont de première qualité. Trouver la probabilité que la pièce pigée soit de première qualité.

40. Soit $P(A) = p_1$ et $P(B) = p_2 \neq 0$. Montrer que

$$P(A \mid B) \geq \frac{p_1 + p_2 - 1}{p_2}.$$

41. À l'aide des probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$, évaluer les probabilités suivantes:

i) $P(A^c \cup B^c)$,

ii) $P(A^c \cap B^c)$,

iii) $P(A^c \cap B)$,

iv) $P(A^c \cup B)$,

v) $P((A \cup B)^c)$,

vi) $P((A \cap B)^c)$,

vii) $P(A \cup (A^c \cap B))$,

viii) $P(A^c \cap (A \cup B))$,

ix) $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

42. Soit A, B et C trois événements aléatoires. Posons $D = A^c \cap B^c \cap C$ et $E = (A \cup B) \cap C$.

i) À l'aide des probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$, évaluer la probabilité $P(D \cup E)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ii) Supposons que $P(A) = 0,45$; $P(B) = 0,40$; $P(C) = 0,50$; $P(A \cap B) = P(A \cap C) = 0,20$; $P(B \cap C) = 0,10$; $P(A \cap B \cap C) = 0,04$. Calculer $P(D)$ et $P(E)$.

43. Deux tireurs tirent simultanément sur une cible. Trouver la probabilité que la cible soit atteinte par au moins un des tireurs, sachant que les probabilités d'atteindre la cible sont de 0,7 et 0,8 respectivement pour les deux tireurs.

44. On effectue trois tirs indépendants sur la même cible. Les probabilités d'atteindre la cible sont 0, 8; 0, 6 et 0,6 respectivement. Trouver la probabilité que la cible soit atteinte par au moins un des tirs.

45. Le déclenchement d'un circuit électrique se produit quand le courant sort du circuit de l'élément E_1 ou des deux éléments E_2 et E_3. Soit $p1 = 0, 3$, $p_2 = 0, 2$ et $p_3 = 0, 2$ les probabilités de sortir du circuit des trois éléments respectifs, la sortie des éléments se faisant de façon indépendante. Trouver la probabilité que le circuit se déclenche.

46. Quatre boules numérotées de 1 à 4 sont introduites au hasard dans quatre boîtes numérotées de 1 à 4, une boule par boîte. Trouver la probabilité que le nombre inscrit sur chaque boule diffère du nombre de la boîte dans laquelle elle se trouve.

47. On lance n dés. Trouver la probabilité que les faces 1, 2, 3, 4, 5 et 6 apparaissent au moins une fois.

48. Un lot de 100 pièces est soumis à un contrôle de qualité. Le lot est rejeté si on trouve au moins une pièce défectueuse parmi quatre pièces choisies au hasard dans le lot. Sachant que le lot contient 2% de pièces défectueuses, trouver la probabilité p que le lot soit rejeté.

49. Il y a M billets gagnants parmi les N billets d'une loterie. Une personne achète n billets, $n < N - M$. Trouver la probabilité qu'au moins un de ses n billets soit gagnant.

50. On considère deux urnes ayant les compositions suivantes :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	2	1
U_2	3	2

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Après avoir transféré une boule de l'urne U_1 à l'urne U_2, on extrait une boule de l'urne U_2. Trouver la probabilité que la boule sortie soit blanche.

51. On considère deux urnes ayant les compositions suivantes :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	a_1	b_1
U_2	a_2	b_2

où $a_1 + b_1 = n_i$ et $a_2 + \boldsymbol{b_2} = n_2$. Une boule est tranférée de l'urne U_2 à l'urne U_1 et après on extrait une boule de l'urne U_1. Trouver la probabilité que la boule pigée soit

i) blanche.

ii) noire.

52. Un joueur est en présence de 2 urnes, ayant les compositions suivantes :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	4	2
U_2	2	4

Le joueur choisit au hasard une des 2 urnes et décide d'effectuer par la suite tous ses tirages exclusivement dans l'urne choisie, en remettant la boule tirée après chaque tirage. Trouver

i) la probabilité que la troisième boule tirée soit blanche, sachant que les 2 premières l'ont été.

ii) la probabilité que la n-ième boule tirée soit blanche.

53. Soit trois urnes U_1, U_2 et U_3. Les probabilités de choisir au hasard une urne parmi les trois sont respectivement, $P(U_1) = \frac{1}{2}$, $P(U_2) = \frac{1}{3}$, $P(U_3) = \frac{1}{6}$.

Dans l'urne U_1 il y a deux boîtes, B_1 et B_2. Les probabilités de choisir dans U_1 une de ces boîtes sont respectivement $P(B_1) = \frac{2}{5}$, $P(B_2) = \frac{3}{5}$. Les urnes ont les compositions suivantes:

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Urne	No boules rouges	No boules bleus	No boules blanches	No boules vertes
$U_1; B_1$	4	2	0	0
$U_1; B_2$	2	1	8	0
U_2	4	*2*	1	0
U_3	5	0	0	2

i) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge de U_1 ?

ii) Une boule a été tirée, elle est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de U_2 ?

54. On considère trois urnes ayant les compositions suivantes :

Urne	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	2	0
U_2	1	1
U_3	0	2

Une urne a été choisie au hasard, et de cette urne on a tirée une boule, elle est noire. Quelle est la probabilité que l'autre boule de cette urne soit blanche ?

55. On considère cinq urnes ayant les compositions suivantes :

Urne	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	2	3
U_2	1	4
U_3	2	3
U_4	4	1
U_5	1	4

On extrait au hasard une boule d'une des urnes, elle même choisie au hasard, et on constate que la boule pigée est blanche. Trouver la probabilité que la boule ait été extraite de l'urne U_4.

56. On considère trois urnes ayant les compositions suivantes :

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Urne	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires	Nombre de boules rouges
U_1	1	3	3
U_2	2	1	1
U_3	4	3	3

On choisit une urne au hasard et on extrait deux boules. On constate qu'une des boules est blanche et l'autre est rouge. Trouver la probabilité que la sélection ait été faite de l'urne U_2 ou de l'urne U_3.

57. On considère deux lots de pièces parmi lesquels un lot contient 1/4 de pièces défectueuses et l'autre lot n'a que des pièces acceptables. On choisit au hasard un lot et on en tire une pièce qui s'avère acceptable. On remet la pièce dans le lot et on extrait ensuite une pièce de ce même lot. Trouver la probabilité que la deuxième pièce soit défectueuse.

58. La probabilité que la consommation d'électricité pendant une période de 24 heures ne dépasse pas les normes établies est 0,8. Trouver la probabilité que trois fois en cinq jours consécutifs la consommation en électricité ne dépasse pas les normes établies.

59. À la suite d'une expérience, l'événement A peut apparaître avec probabilité p. On répète n fois l'expérience de façon que les résultats soient indépendants. Trouver la probabilité que

   i) l'événement A apparaisse au moins une fois.

   ii) l'événement A apparaisse au moins deux fois.

   iii) l'événement A apparaisse au moins trois fois.

60. Un ouvrier s'occupe simultanément de 10 machines de même type. La probabilité qu'une machine nécessite une intervention dans un intervalle de temps t est égale à 1/3 et est la même pour toutes les machines. Trouver la probabilité que

   i) dans l'intervalle de temps donné, 4 parmi les 10 machines aient nécessité une intervention.

   ii) le nombre de machines qui ont nécessité une intervention dans le même intervalle de temps t soit au moins égal à trois et au plus égal à six.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

61. Huit tireurs visent simultanément une cible. La probabilité qu'un tireur atteigne la cible est $p = 0,4$ et est la même pour tous les tireurs. Trouver la probabilité que la cible soit atteinte par au moins 3 et au plus 5 tireurs.

62. Un lot de 20 colombes migratrices est expédié vers une destination. La probabilité qu'une colombe revienne est $p = 0,4$ et elle est la même pour toutes les colombes. Trouver la probabilité

    i) que 14 colombes reviennent.

    ii) qu'au moins 8 colombes reviennent.

    iii) qu'au plus 18 colombes reviennent.

    iv) que reviennent au moins 10 et au plus 16 colombes.

63. Soit $P(n\,;m) = (n / m)\, p^m (1 - p)^{n-m}$.

    i) Montrer que

    $P(n; m + 1) > P(n; m)$ si $(n + 1)p > m + 1$.

    $P(n; m+1) = P(n;m)$ si $(n + 1)p = m + 1$.

    $P(n; m + 1) < P(n; m)$ si $(n + 1)p < m + 1$.

    ii) Interpréter le résultat du point i).

    iii) Trouver le nombre le plus probable de succès, où par le nombre le plus probable de succès on comprend la valeur entière du nombre m tel que $P(n; m)$, considéré comme fonction de m, atteigne son maximum.

64. Trouver le nombre de succès le plus probable d'un modèle de Bernoulli pour $n = 20$ et $p = 1/6$.

65. Quel est le nombre le plus probable de colombes qui reviendraient quand on envoie un lot de 40 colombes et que la probabilité de retour pour n'importe quelle colombe est $p = 0,3$?

66. Trouver le nombre le plus probable de succès d'un modèle de Bernoulli pour $n = 50$ et $p = 1/3$.

67. La probabilité qu'un tireur atteigne une cible est $p = 0,8$. On effectue 10 tirs dans les mêmes conditions.

    i) Trouver la probabilité que la cible soit atteinte au moins 2 fois.

    ii) Quel est le nombre le plus probable de fois que la cible soit atteinte ?

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

68. La probabilité que le gardien de but d'une équipe de soccer attrape le ballon sur un coup franc de 11 mètres est $p = 0,3$. Trouver

    i) la probabilité qu'en 4 coups il attrape le ballon chaque fois.

    ii) la probabilité qu'en 3 coups francs, il permette au plus 2 buts.

    iii) le nombre le plus probable de buts quand on effectue 4 coups francs à 11 mètres.

69. La probabilité qu'on prenne au hasard une pièce défecteuse d'un lot est 0,005. On contrôle 100 pièces du lot. On les extrait du lot, successivement et avec remise. Trouver

    i) la probabilité que 4 pièces soient défectueuses.

    ii) la probabilité d'avoir au plus 6 pièces défectueuses.

    iii) le nombre le plus probable de pièces acceptables.

70. Une cible consiste en un disque et deux couronnes concentriques. Les probabilités que lors d'un tir, on atteigne le disque, respectivement les couronnes, sont 0, 2; 0, 32 et 0,4. Sachant qu'on a fait 10 tirs dans les mêmes conditions, trouver la probabilité que 5 tirs aient atteint le disque, 4 tirs aient atteint la première couronne et 1 tir la seconde couronne.

71. Une urne contient un même nombre de boules de quatre couleurs. On effectue avec remise 4 fois la sélection d'une boule. Trouver la probabilité de piger une boule de chaque couleur.

72. Un ouvrier produit avec probabilités 0, 96; 0, 03 et 0,01 une pièce acceptable, une pièce avec un défaut remédiable et une défectueuse, respectivement. L'ouvrier a produit 3 pièces. Trouver la probabilité que parmi les trois pièces produites, on ait au moins une pièce acceptable et au moins une défectueuse.

73. Trois classes de même niveau se présentent à un concours "Génies en herbe" et comprennent respectivement

Classes	Nombre de garçons	Nombre de filles
C_1	6	4
C_2	4	6
C_3	5	5

Pour la première question on choisit au hasard un étudiant de chaque classe. Trouver la probabilité que parmi les étudiants choisis il y ait deux garçons et une fille.

74. Une équipe de quatre sportifs jouent au golf. Les probabilités respectives de perdre une balle pour chaque joueur de l'équipe sont de 0, 05; 0, 04; 0, 06 et 0,03. Chaque joueur tire une balle. Trouver la probabilité que l'équipe perde une balle.

75. Une équipe de trois tireurs tirent sur une cible. Pour chaque succès on accorde à l'équipe un point. Les probabilités d'atteindre la cible sont 0, 7; 0,8 et 0,6 pour chaque tireur respectivement. Trouver la probabilité que l'équipe marque 2 points, alors que chaque tireurs tire une seule fois sur la cible.

76. Un tireur tire un seul coup de feu de chacun des 5 fusils dont il dispose. Les probabilités d'atteindre la cible sont respectivement 0, 8; 0, 7; 0, 4; 0, 9 et 0,5 pour les cinq fusils. Trouver la probabilité que

    i) la cible soit atteinte 3 fois.

    ii) la cible soit atteinte au moins 2 fois et au plus 4 fois.

77. À une loterie il y a 400 billets, dont 4 gagnants. Une personne achète 10 billets. Trouver la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant.

78. Dans un lot de N pièces, il y a M défectueuses. On choisit au hasard n pièces dû lot $(n < N)$. Trouver la probabilité que parmi les pièces choisies m soient défectueuses $(m \leq M)$.

79. Dans une urne, il y a 36 boules de couleur blanche et noire dans un rapport d'une boule blanche pour 8 boules noires. On extrait sans remise 3 boules. Trouver la probabilité que parmi les boules choisies il y ait une boule blanche.

80. Huit étudiants parmi lesquels il y a 4 filles et 4 garçons sont divisés au hasard en deux groupes égaux. Trouver la probabilité que dans chaque groupe il y ait le même nombre de garçons que de filles.

81. Dans une salle de spectacle disposant de N places, on occupe au hasard n places $(n < N)$. Trouver la probabilité que parmi les places occupées il y en ait m fixées d'avance $(m \leq n)$.

82. Dans une urne il y a 40 boules, 10 blanches, 10 noires, 10 rouges et 10 vertes. On extrait sans remise 2 boules. Trouver la probabilité que parmi les boules pigées il y ait au moins une boule blanche.

83. Une urne contient 2n boules blanches et noires et soit p la proportion de boules blanches dans l'urne. On tire les boules par couples, sans remettre les boules tirées. Un couple est homogène si les boules sont de même couleur. Calculer la probabilité que le premier couple soit homogène. Examiner ensuite le cas particulier $p = 1/2$.

84. Dans les conditions du problème 79, trouver la probabilité d'avoir au moins une boule blanche.

85. À une loterie, il y a 10 000 billets parmi lesquels 100 sont gagnants. Une personne achète m billets. Trouver la plus petite valeur m telle que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit plus grande que 0,5.

86. On propose à une personne de lancer une pièce de monnaie un certain nombre de fois et si elle obtient face exactement 5 fois, elle recevra un prix. Au début, elle doit décider elle-même du nombre de fois qu'elle lancera la pièce de monnaie. Quel nombre doit elle choisir afin de maximiser ses chances de gagner ? Quelle est alors la probabilité de gagner ?

87. Un événement A arrive avec une probabilité $p = 0,01$ lors d'une épreuve. Trouver le nombre n d'épreuves qu'on doit faire pour que la probabilité que A se réalise au moins une fois soit supérieure ou égale à 1/2.

2.4 Indications et réponses

1. $p = \frac{19\times 18!}{20!} = \frac{1}{20}$. (voir problème 3, Section 2.2)

2. $p = 2 \times \frac{7\times 6!}{8!} = \frac{1}{4}$. (voir problème 3, Section 2.2)

3. Cas favorables: 1; cas possibles: 12!, donc $p = \frac{1}{12!}$.

4. $p = 1 - \frac{1}{24!}$.

5. i) cas possibles: $2^4 = 16$; cas favorables: 6, donc $p = \frac{3}{8}$.
   ii) On calcule la probabilité de l'événement contraire:
   $q = \frac{1}{16}$ et $p = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

6. On calcule la probabilité de l'événement contraire: cas favorables: $5 \times 4 \times 3$ (les possibilités de choisir trois faces différentes, toutes différentes de 2); cas possibles: $6 \times 5 \times 4$, donc $p = 1 - \frac{5\times4\times3}{6\times5\times4} = \frac{1}{2}$.

7. On a $1 - (\frac{35}{36})^n > \frac{1}{2}$ (voir problème 4, Section 2.2), donc $(\frac{35}{36})^n < \frac{1}{2}$ et en prenant les logarithmes, on obtient $n > \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24,6$, donc $n \geq 25$. [13]

8. $p_{4,3} = \frac{4}{2^4} = \frac{1}{4}$, $p_{8,5} = \frac{56}{2^8} = \frac{7}{32}$, donc $p_{4,3} - p_{8,5} > 0$. Il est plus probable qu'un joueur gagne trois parties quand il en joue quatre face à un adversaire de même force que d'en gagner 5 de 8. Le résultat semble surprenant, car $\frac{5}{8} < \frac{3}{4}$; par la théorie des probabilités ce résultat peut être expliqué de la façon suivante. Quand le nombre total de parties jouées croît, alors en général la probabilité d'un certain résultat peut diminuer, car le nombre de cas possibles croît et pas toujours dans le même rapport que le nombre de cas favorables. (Voir aussi problème 5, Section 2.2).

9. i) $p = \frac{1}{6}$. ii) $p = \frac{12}{6^2} = \frac{1}{3}$. iii) $p = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. iv) $p = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{12}$.

10. Il faut que $a = b$, donc en lançant deux dés il faut obtenir une paire; $p = \frac{1}{6}$.[14]

11. Cas possibles: $6^2 = 36$; cas favorables: 14 c'est-à-dire le nombre de paires de nombres naturels (a, b) tel que $1 \leq a, b \leq 6$ et $a|b$ (a divise b), donc $p = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$.

12. Cas possibles: $6^3 = 216$; cas favorables: 5, c'est-à-dire le nombre de triplets (a, b, c) de nombres naturels où $1 \leq a, b, c \leq 6$, $b^2 - 4ac = 0$, donc $p = \frac{5}{216}$.[15]

13. $p = \frac{\binom{20}{8}\times 2^{12}}{3^{20}}$ (voir problème 11, Section 2.2).

[13]voir la note du problème 5, Section 2.2.
[14]Pour une autre méthode de résolution voir problème 30, Section 3.3.
[15]Pour une méthode plus simple de résolution voir problème 35, Section 3.2.

14. $p = \frac{\binom{18}{6}}{2^{18}}$ (voir problème 11, Section 2.2).

15. $p = \frac{(3!)^6}{9!}$ (voir problème 17, Section 2.2).

16. $p = \frac{(4!)^{10}(10!)^4}{40!}$ (voir problème 17, Section 2.2).

17. i) $p = \frac{\binom{18}{9}\binom{18}{9}}{\binom{36}{18}} = \frac{(18!)^4}{36!(9!)^4}$.

   ii) $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ donc $p \approx \frac{2}{3\sqrt{2\pi}}$.

18. $p = \frac{\binom{M-1}{m-1}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$. Il y a $\binom{N}{n}$ cas possibles. On trouve le nombre de cas favorables, $\binom{M-1}{m-1}\binom{N-M}{n-m}$ de la façon suivante. Il y a $\binom{M-1}{m-1}$ manières de choisir les $m-1$ boules numérotées par des nombres plus petits que M (on choisit $m-1$ boules parmi les boules numérotées $1, 2, \ldots, M-1$); ensuite une seule manière de choisir la boule numérotée M, et enfin $\binom{N-M}{n-m}$ manières de choisir $n-m$ boules numérotées par des nombres plus grands que M (on extrait $n-m$ boules parmi $N-M$ boules numérotées $M+1, M+2, \ldots, N$), au total $\binom{M-1}{m-1} \times 1 \times \binom{N-M}{n-m}$ cas favorables. $P(x_m = M) \neq 0$ pour $m \leq M \leq N-n+m$.

19. i) $p = \frac{\binom{N-M}{n-1}}{\binom{N}{n}}$, qu'on obtient du problème 18, avec $m = 1$.

   ii) $p = \frac{\binom{M-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$, qu'on obtient du problème 18, avec $m = n$.

20. On utilise le fait que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ et on constate que les événements sont deux à deux incompatibles. De plus,
$(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \cup ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \Omega$;
$P(A \cap B) + P(A^c \cap B^c) + P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = 1$.

21. $p = 0,20 + 0,15 + 0,12 + 0,10 = 0,57$.

22. $p = P(\cup_{k=1}^4 A_k) = \sum_{k=1}^4 P(A_k) = 0,22$.

23. i)

$$\begin{aligned} P(x_m \geq M_1) &= P(x_m = M_1) + P(x_m = M_1 + 1) \\ &\quad + \cdots + P(x_m = N) \end{aligned}$$

Or $P(x_m = k) \neq 0$ si $m \leq k \leq N - n + m$, donc

$$P(x_m \geq M_1) = \sum_{k=\alpha}^{N-n+m} \frac{\binom{k-1}{m-1}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

où $\alpha = \max\{m, M_1\}$.

ii)

$$\begin{aligned} P(x_m \leq M_2) &= P(x_m = 1) + P(x_m = 2) + \cdots + P(x_m = M_2) \\ &= \sum_{k=1}^{\beta} \frac{\binom{k-1}{m-1}\binom{N-k}{n-m}}{\binom{N}{n}} \end{aligned}$$

où $\beta = \min\{N - n + m, M_2\}$.

iii) $P(M_1 < x_m \leq M_2) = P(x_m \leq M_2) - P(x_m \leq M_1)$.

24. i) $P(x_m < M_1) = 1 - P(x_m \geq M_1)$.
    ii) $P(x_m > M_2) = 1 - P(x_m \leq M_2)$ (voir problème 23).

25. On obtient le résultat comme cas particulier du problème 23, avec $m = 1$.

26. On obtient le résultat comme cas particulier du problème 23, avec $m = n$.

27. i) $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$;
    ii) $\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$;
    iii) $2 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$.

28. On considère une urne ayant n boules parmi lesquelles a sont blanches. On extrait, sans remise, une boule à la fois. Soit A_k l'événement "la première boule blanche est pigée à la sélection de rang k". L'égalité $\sum_{k=1}^{n-a+1} P(A_k) = 1$ donne l'identité demandée.

29. i). La probabilité demandée peut être obtenue de deux façons. On calcule la probabilité de l'événement contraire. Dans ce cas la probabilité cherchée est

$$p = 1 - \frac{b(b-1)\cdots(b-n+1)}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-n+1)}.$$

On peut aussi calculer directement la probabilité demandée. Dans ce cas on obtient alors

$$p = \frac{a}{a+b}\left(1 + \frac{b}{a+b-1} + \cdots + \frac{b(b-1)\cdots(b-n+2)}{(a+b-1)(a+b-2)\cdots(a+b-n+1)}\right).$$

ii) On utilise les deux expressions de la probabilité obtenues au point précédent.

30. Notons p_k, la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne k. Alors

$$p_{k+1} = \frac{a+1}{a+b+1}p_k + \frac{a}{a+b+1}(1-p_k),\ k = 1, \ldots, n-1,$$

et parce que

$$p_1 = \frac{a}{a+b},$$

on obtient

$$p_n = \frac{a}{a+b}.$$

31. i) $p = \frac{M^n}{N^n}$. Pour la sélection d'une seule urne il y a M cas favorables (les boules $1, 2, \ldots, M$) et N cas possibles, donc la probabilité est $\frac{M}{N}$. Si on extrait maintenant une boule de chacune des n urnes, les sélections étant indépendantes, la probabilité cherchée est le produit des probabilités correspondant aux sélections de chaque urne, donc $\left(\frac{M}{N}\right)^n$.

ii) $q = 1 - p = 1 - \left(\frac{M}{N}\right)^n$.

iii) Soit p_k la probabilité que le plus grand nombre choisi soit égal à k. Alors, en utilisant le résultat du point i), on a

$$p = p_1 + p_2 + \cdots + p_M = \frac{M^n}{N^n},$$

mais

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{M-1} = \frac{(M-1)^n}{N^n},$$

d'où, par soustraction, on obtient

$$p_M = \frac{M^n}{N^n} - \frac{(M-1)^n}{N^n}.$$

32. i) $p = \frac{(N-M+1)^n}{N^n}$; les cas favorables pour la sélection d'une seule urne correspondent aux boules numérotées $M, M+1, \ldots, N$. Il y a donc $N-M+1$ cas favorables.

ii) Soit p_k la probabilité que le plus petit nombre choisi soit égal à k. Alors, en utilisant le résultat du point i), on a

$$p = p_M + p_{M+1} + \cdots + p_N = \frac{(N-M+1)^n}{N^n},$$

et

$$p_{M+1} + p_{M+2} + \cdots + p_N = \frac{(N-M)^n}{N^n},$$

d'où, par soustraction, on obtient

$$p_M = \frac{(N-M+1)^n}{N^n} - \frac{(N-M)^n}{N^n}.$$

iii) $p_1 + p_2 + \cdots + p_M = 1 - \left(\frac{N-M}{N}\right)^n$.

33.

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P((\Omega \setminus A) \cap B^c) \\ &= P(B^c \setminus (A \cap B^c)) \\ &= P(B^c) - P(A \cap B^c) \\ &= P(B^c) - P(A \cap (\Omega \setminus B)) \\ &= P(B^c) - P(A) + P(A \cap B) \\ &= P(B^c) - P(A) + P(A)P(B) \\ &= P(B^c) - P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(B^c) - P(A)P(B^c) \\ &= P(A^c)P(B^c). \end{aligned}$$

34. Soit A et B les événements "le tireur atteint la première cible au premier tir" et "le tireur atteint la deuxième cible au deuxième tir." A et B sont des événements indépendants. On a $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ d'où $\frac{2}{5} = \frac{4}{5}P(B)$ donc $P(B) = \frac{1}{2}$.

35. Soit A_k l'événement "le courant ne sorte pas de l'élément k", $k = 1, 2, 3$. $p = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0,336$.

36. Les n - 1 premières lampes testées doivent être bonnes et la n-ième lampe testée doit être défectueuse, donc $P = (1 - p)^{n-1}p$.

37. i) Pour qu'une personne de x ans soit en vie après $t + u$ années, il faut d'abord qu'elle soit en vie après t années et à partir de l'âge de $x + t$ ans, elle doit encore rester en vie pour u années, donc

$$_{t+u}p_x = {}_t p_x \cdot {}_u p_{x+t}.$$

ii)

$$\begin{array}{rcl} {}_tp_x & = & {}_{t-1}p_x \cdot p_{x+t-1} \\ {}_{t-1}p_x & = & {}_{t-2}p_x \cdot p_{x+t-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ {}_2p_x & = & p_x \cdot p_{x+1} \end{array}$$

et en multipliant membre à membre les égalités ci-haut, on obtient l'égalité désirée.

38. Cela découle de $P(A)P(B \mid A) = P(B)P(A \mid B)$.

39. Soit A et B les événements "la pièce est bonne" et "la pièce est de première qualité." Alors $P(A) = 0,95$, $P(B \mid A) = 0,68$ et $P(B) = P(B \mid A)P(A) = 0,95 \times 0,68 = 0,646$.

40. On utilise la relation $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et le fait que $P(A \cup B) \leq 1$. On obtient $P(B) - P(A \cap B) \leq P(A^c)$ et en tenant compte de $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, on obtient $P(A \mid B) \geq \frac{P(B) - P(A^c)}{P(B)}$.

41. i) $P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$.

ii) $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$.

iii) $P(B) - P(A \cap B)$, car $A^c \cap B = (\Omega \setminus A) \cap B = B \setminus (A \cap B)$.

iv) $1 - P(A) + P(A \cap B)$, en appliquant iii).

v) semblable à ii).

vi) semblable à i).

vii) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, car $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$.

viii) même chose que iii).

ix) $P((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

42. i) Comme $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, les événements D et E sont incompatibles, $D \cap E = \emptyset$ et $D \cup E = C$. Donc $P(D \cup E) = P(D) + P(E) = P(C)$.

ii) $E = (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, donc

$$P(E) = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = 0,26.$$

$P(D \cup E) = P(D) + P(E) = P(C)$, d'où $P(D) = 0,24$.

43. Soit A_1 et A_2 les événements "le premier tireur atteint la cible" et "le deuxième tireur atteint la cible". $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0,7 + 0,8 - 0,7 \times 0,8 = 0,94$, ou plus simplement, $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c) = 1 - 0,3 \times 0,2 = 0,94$.

44. On demande la probabilité p d'une réunion d'événements compatibles. Soit A_k l'événement "atteindre la cible au k-ième tir," $k = 1, 2, 3$; alors

$$\begin{aligned} p = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \sum_{k=1}^{3} P(A_k) - \sum_{j<k} P(A_j)P(A_k) \\ &\quad + P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= 0,968, \end{aligned}$$

ou plus simplement,

$$\begin{aligned} p &= 1 - q = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\ &= 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c) \\ &= 1 - 0,2 \times (0,4)^2 = 0,968. \end{aligned}$$

45. Soit A_k l'événement "sortir du circuit de l'élément E_k", $k = 1, 2, 3$. On calcule la probabilité de l'événement contraire: $q = P(A_1^c \cap (A_2^c \cup A_3^c)) = P((A_1^c \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_3^c)) = P(A_1^c \cap A_2^c) + P(A_1^c \cap A_3^c) - P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_1^c \cap A_3^c) = 0,7 \times 0,8 + 0,7 \times 0,8 - 0,7 \times 0,8 \times 0,8 = 0,672$ et $p = 1 - q = 0,328$.

46. $p = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} = \frac{3}{8}$ (voir problème 38, Section 2.2; ici on demande la probabilité de l'événement contraire).

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

47. $p = 1 - 6(\frac{5}{6})^n + 15(\frac{4}{6})^n - 20(\frac{3}{6})^n + 15(\frac{2}{6})^n - 6(\frac{1}{6})^n$. En effet, soit A_i l'événement "la face i apparaît au moins une fois", $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, alors on cherche

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^{6} A_i\right) &= 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{6} A_i^c\right) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{6} P(A_i^c) + \sum_{i<j} P(A_i^c \cap A_j^c) \\ &\quad - \sum_{i<j<k} P(A_i^c \cap A_j^c \cap A_k^c) \\ &\quad + \sum_{i<j<k<l} P(A_i^c \cap A_j^c \cap A_k^c \cap A_l^c) \\ &\quad - \sum_{i<j<k<l<m} P(A_i^c \cap A_j^c \cap A_k^c \cap A_l^c \cap A_m^c) \\ &\quad + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c \cap A_6^c). \end{aligned}$$

Notons que $P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c \cap A_6^c) = 0$.

48. On calcule la probabilité de l'événement contraire. Soit A_k l'événement "la k-ième pièce contrôlée est acceptable", $k = 1, 2, 3, 4$. Les événements A_k ne sont pas indépendants. Ainsi

$$\begin{aligned} q &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_3) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \cdot P(A_4 \mid A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= \frac{98}{100} \times \frac{97}{99} \times \frac{96}{98} \times \frac{95}{97} \\ &= \frac{152}{165}; \end{aligned}$$

$p = 1 - q = \frac{13}{165}$.

49. Numérotons les billets achetés et soit A_k l'événement "le k-ième billet est gagnant", $k = 1, \ldots, n$. Alors $p = P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$.

On calcule $q = 1 - p$ et on trouve

$$\begin{aligned} q &= P(A_1^c \cap \cdots \cap A_n^c) \\ &= P(A_1^c) \cdot P(A_2^c \mid A_1^c) \cdots P(A_n^c \mid A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c) \\ &= \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-M-1}{N-1} \cdots \frac{N-M-n+1}{N-n+1}, \end{aligned}$$

ou encore, $q = \dfrac{\binom{N-n}{M}}{\binom{N}{M}}$.

50. On applique la formule de la probabilité totale. Soit B_1 et B_2 les événements "transférer de l'urne U_1 dans l'urne U_2 une boule blanche", respectivement "une boule noire" et soit A l'événement "extraire ensuite une boule blanche de l'urne U_2". On a

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2) = \frac{11}{18}.$$

51. On applique la formule de la probabilité totale.

i)

$$p = \frac{a_2}{n_2} \cdot \frac{a_1+1}{n_1+1} + \frac{b_2}{n_2} \cdot \frac{a_1}{n_1+1} = \frac{a_1 n_2 + a_2}{(n_1+1)n_2}.$$

ii)

$$q = \frac{a_2}{n_2} \cdot \frac{b_1}{n_1+1} + \frac{b_2}{n_2} \cdot \frac{b_1+1}{n_1+1} = \frac{b_1 n_2 + b_2}{(n_1+1)n_2} = 1 - p.$$

52. Soit A_i l'événement "on a tiré de l'urne i", $i = 1, 2$. Soit B_j l'événement "la j-ième boule tirée est blanche", $j = 1, 2, \ldots$.

i) On cherche

$$P(B_3 \mid B_1 \cap B_2) = P(B_3 \mid B_1 \cap B_2 \cap A_1) P(A_1 \mid B_1 \cap B_2)$$
$$+ P(B_3 \mid B_1 \cap B_2 \cap A_2) P(A_2 \mid B_1 \cap B_2).$$

Or, par la formule de Bayes

$$P(A_1 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{(\frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{2}}{(\frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{2} + (\frac{1}{3})^2 \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$

et

$$P(A_2 \mid B_1 \cap B_2) = 1 - P(A_1 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{1}{5}.$$

Par conséquent

$$P(B_3 \mid B_1 \cap B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ii)

$$\begin{aligned} P(B_n) &= P(B_n \mid A_1)P(A_1) + P(B_n \mid A_2)P(A_2) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

53. Soit B_i l'événement "on a tirée de la boîte i", $i = 1, 2$, soit A_k l'événement "on a tirée de l'urne k", $k = 1, 2, 3$ et soit C l'événement "la première boule tirée est rouge".

i) Par la formule de la probabilité totale, on a

$$\begin{aligned} P(C \mid A_1) &= P(C \mid B_1)P(B_1 \mid A_1) + P(C \mid B_2)P(B_2 \mid A_1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{11} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{62}{165}. \end{aligned}$$

ii) Par la formule de Bayes

$$\begin{aligned} P(A_2 \mid C) &= \frac{P(C \mid A_2)P(A_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(C \mid A_k)P(A_k)} \\ &= \frac{\frac{4}{7} \times \frac{1}{3}}{\frac{62}{165} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{7} \times \frac{1}{6}} \\ &= \frac{440}{1\,149}. \end{aligned}$$

54. Soit B l'événement "la boule tirée est noire" et soit A_k l'événement "on a tirée de l'urne k", $k = 1, 2, 3$. On cherche $P(A_2 \mid B)$. D'abord $P(A_k) = \frac{1}{3}$, pour $k = 1, 2, 3$. On applique la formule de Bayes

$$\begin{aligned} P(A_2 \mid B) &= \frac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(B \mid A_k)P(A_k)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

55. On applique la formule de Bayes. Soit B l'événement "extraire une boule blanche" et A_k l'événement "la sélection provient de l'urne $U_{\mathbf{k}}$", $k = 1,...,5$. On a

$$P(A_k) = \frac{1}{5},\ k = 1,\dots,5;$$

$$\begin{aligned} P(B \mid A_1) &= P(B \mid A_3) = \frac{2}{5}; \\ P(B \mid A_2) &= P(B \mid A_5) = \frac{1}{5};\ P(B \mid A_4) = \frac{4}{5}; \end{aligned}$$

et

$$P(A_4 \mid B) = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}{2 \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}} = \frac{2}{5}.$$

56. On applique la formule de Bayes. Soit B l'événement "parmi les deux boules pigées il y a une boule blanche et une boule rouge" et A_k l'événement "la sélection provient de l'urne U_k", $k = 1, 2, 3$. D'abord

$$P(A_k) = \frac{1}{3},\ k = 1, 2, 3.$$

On a

$$P(B \mid A_1)P(A_1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{1}}{\binom{7}{2}} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{7}.$$

De la même façon on trouve $P(B \mid A_2)P(A_2) = \frac{1}{3}$ et $P(B \mid A_3) = \frac{4}{15}$. Par la formule de Bayes on obtient

$$\begin{aligned} P(A_2 \mid B) &= \frac{P(B \mid A_2)P(A_2)}{\sum_{k=1}^{3} P(B \mid A_k)P(A_k)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{73} + \frac{1}{3} + \frac{4}{15}} \\ &= \frac{35}{78}. \end{aligned}$$

On trouve de même $P(A_3 \mid B) = \frac{28}{78}$, donc la probabilité cherchée est $p = P(A_2 \mid B) + P(A_3 \mid B) = \frac{63}{78}$, ou encore, $p = 1 - P(A_1 \mid B) = 1 - \frac{15}{78} = \frac{63}{78}$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

57. Soit C l'événement "la deuxième pièce choisie est défectueuse" et B_1 et B_2 les événements "la deuxième pièce a été choisie du premier lot" , respectivement "du deuxième lot." En appliquant la formule de la probabilité totale, on obtient

$$P(C) = P(B_1)P(C \mid B_1) + P(B_2)P(C \mid B_2),$$

mais $P(C \mid B_2) = 0$ et $P(C \mid B_1) = \frac{1}{4}$. Il reste à trouver $P(B_1)$. Soit $A_1,\ A_2$ les événements "la première sélection provient du premier lot", respectivement "du deuxième lot" et soit D l'événement "la pièce est acceptable." Parce que $P(B_1) = P(A_1 \mid D)$, on obtient $P(B_1)$, en appliquant la formule de Bayes. Ainsi

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_2) = \frac{1}{2}, \\ P(D \mid A_1) &= \frac{3}{4},\ P(D \mid A_2) = 1, \end{aligned}$$

et par suite

$$P(B_1) = P(A_1 \mid D) = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{7}.$$

Donc $P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{28}$.

58. On applique le modèle de Bernoulli, $P(5;3) = \binom{5}{3}(0,8)^3(0,2)^2 = 0,204$.

59. On applique le modèle de Bernoulli:

i) $1 - (1-p)^n$.

ii) $1 - (1-p)^{n-1}(1 + (n-1)p)$.

iii) $1 - (1-p)^{n-2}(1 + (n-2)p + \frac{(n-1)(n-2)}{2}p^2)$.

60. i) $P(10;4) = \binom{10}{4}(\frac{1}{3})^4(\frac{2}{3})^6 = \frac{4\ 480}{19\ 683}$.

ii) $\sum_{k=3}^{6} P(10;k) = \frac{13\ 408}{19\ 683}$.

61. $p = \sum_{k=3}^{5} \binom{8}{k}(0,4)^k(0,6)^{8-k} = \frac{247\ 968}{390\ 625}$.

62. i) $P(20;14) = \binom{20}{14}(0,4)^{14}(0,6)^6 \approx 0,004\ 900$.

ii) $\sum_{k=8}^{20} P(20;k) = \sum_{k=8}^{20} \binom{20}{k}(0,4)^k(0,6)^{20-k} \approx 0,584\ 100$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

iii) $\sum_{k=0}^{18} P(20;k) = 1 - (0,4)^{20} - \binom{20}{19}(0,4)^{19}(0,6) \approx 0,999\ 999.$

iv) $\sum_{k=10}^{16} P(20;k) \approx 0,244\ 600.$

63. i) Notons d'abord que $\frac{P(n;m+1)}{P(n;m)} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q}$. Donc

$\frac{P(n;m+1)}{P(n;m)} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} > 1$ si $(n+1)p > m+1$.

$\frac{P(n;m+1)}{P(n;m)} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} = 1$ si $(n+1)p = m+1$.

$\frac{P(n;m+1)}{P(n;m)} = \frac{n-m}{m+1} \cdot \frac{p}{q} < 1$ si $(n+1)p < m+1$.

La probabilité *P(n; m)* considérée comme une fonction de *m* se comporte de la façon suivante : quand *m* croît *P(n; m)* croît aussi jusqu'à ce qu'elle atteigne un maximum et après elle décroît.

ii) Si *(n+1)p* est un nombre entier, alors *P(n; m)* atteint son maximum, pour deux valeurs de *m, à* savoir

$$m_0 = (n + 1)\,p-1 \text{ et } m_0 + 1 = (n + 1)\,p.$$

Si $(n + 1)$p n'est pas un nombre entier, alors *P(n; m)* atteint son maximum pour une seule valeur de *m,* à savoir $[m_0]$, *où* $[m_0]$ représente la partie entière du nombre $m_0 = (n + 1)p - 1$, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à ce nombre.

64. $m_0 = 21 \times \frac{1}{6} - 1$ et $[m_0] = [2,5] = 2.$

65. $[41 \times 0,3 - 1] = 11.$

66. $[51 \times \frac{1}{3} - 1] = 16$ et $[51 \times \frac{1}{3}] = 17.$

67. i) $p = \sum_{k=2}^{10} \binom{10}{k}(0,8)^k(0,2)^{10-k} = 1 - (0,2)^{10} - \binom{10}{1}0,8 \times (0,2)^9 \approx 0,999\ 996.$

ii) 7, car $(n+1)p - 1 = 11 \times 0,8 - 1 = 7,8$ et $[7,8] = 7.$

68. i) $(0,3)^4 = 0,008\ 100.$

ii) $1 - (0,7)^3 = 0,657.$

iii) $[5 \times 0,7 - 1] = 2.$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

69. i) $P(100;4) = \binom{100}{4}(0,005)^4(0,995)^{96} \approx 0,001\ 500.$

ii)

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=0}^{6} P(100;k) \\ &= \sum_{k=0}^{6} \binom{100}{k}(0,005)^k(0,995)^{100-k} \\ &\approx 0,999\ 999. \end{aligned}$$

iii) $[101 \times 0,995 - 1] = 99.$

70. On applique le modèle multinomial, avec $p_1 = 0,2,\ p_2 = 0,32,\ p_3 = 0,4,\ p_4 = 0,08.$

$$P(10;5,4,1,0) = \frac{10!}{5!4!1!}(0,2)^5(0,32)^4(0,4)^1(0,08)^0 \approx 0,001\ 700.$$

71. On applique le modèle multinomial, avec $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$.

$$P(4;1,1,1,1) = \frac{4!}{4^4} = \frac{3}{32}.$$

72. On applique le modèle multinomial,

$$\begin{aligned} p &= P(3;1,1,1) + P(3;2,0,1) + P(3;1,0,2) \\ &= \frac{3!}{1!1!1!}0,96 \times 0,03 \times 0,01 + \frac{3!}{2!1!}(0,96)^2 \times 0,01 \\ &\quad + \frac{3!}{1!2!}0,96 \times (0,01)^2 \\ &= 0,029\ 664. \end{aligned}$$

73. On applique le modèle de Poisson. La probabilité demandée est le coefficient de x^2 du polynôme

$$P(x) = \left(\frac{6}{10}x + \frac{4}{10}\right)\left(\frac{4}{10}x + \frac{6}{10}\right)\left(\frac{5}{10}x + \frac{5}{10}\right),$$

donc

$$p = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{19}{50}.$$

74. On applique le modèle de Poisson. La probabilité demandée est le coefficient de x du polynôme

$$P(x) = (0,05x + 0,95)(0,04x + 0,96)(0,06x + 0,94)(0,03x + 0,97),$$

donc $p = 0{,}157\ 211\ 600$.

75. On applique le modèle de Poisson. La probabilité demandée est le coefficient de x^2 du polynôme

$$P(x) = (0,7x + 0,3)(0,8x + 0,2)(0,6x + 0,4).$$

Donc $p = 0{,}452$.

76. On applique le modèle de Poisson. On forme le polynôme

$$P(x) = (0{,}8x + 0{,}2) \times (0{,}7x + 0{,}3) \times (0{,}4x + 0{,}6) \times (0{,}9x + 0{,}1) \times (0{,}5x + 0{,}5).$$

i) Le coefficient de x^3 de $P(x)$ est 0,368 600.

ii) La somme des coefficients de x^2, x^3 et x^4 du polynôme $P(x)$ est 0,166 600 + 0, 368 600 + 0,331 600 = 0, 866 800.

77. On applique le modèle de l'échantillon sans remise,

$$p = \sum_{k=1}^{4} \frac{\binom{4}{k}\binom{396}{10-k}}{\binom{400}{10}} = 1 - \frac{\binom{390}{4}}{\binom{400}{4}} = 0,096\ 660.$$

78. On applique le modèle de l'échantillon sans remise,

$$P(N-M, M; n-m, m) = \frac{\binom{N-M}{n-m}\binom{M}{m}}{\binom{N}{n}}.$$

79. On applique le modèle de l'échantillon sans remise. Il y a 4 boules blanches et 32 noires, $P(4,32;1,2) = \frac{\binom{4}{1}\binom{32}{2}}{\binom{36}{3}} = \frac{496}{1\ 785} \approx 0,277\ 900$.

80. Si dans un groupe le nombre de garçons est égal au nombre de filles, alors la même chose se passe dans l'autre groupe. Pour trouver la probabilité que dans un groupe de 4 étudiants formé au hasard, il y ait 2 filles et 2 garçons, on applique le modèle de l'échantillon sans remise, donc

$$p = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{8}{4}} = \frac{(4!)^4}{8!2^4} = \frac{18}{35}.$$

81. $p = \frac{\binom{N-m}{n-m}}{\binom{N}{n}}$ (voir problème 60, Section 2.2).

82. On applique le modèle de l'échantillon sans remise.

$$p = \frac{\binom{10}{1}\binom{30}{1}}{\binom{40}{2}} + \frac{\binom{10}{2}\binom{30}{0}}{\binom{40}{2}} = \frac{23}{52},$$

ou encore, $p = 1 - \frac{\binom{10}{0}\binom{30}{2}}{\binom{40}{2}} = \frac{23}{52}$.

83. On applique le modèle de l'échantillon sans remise. On trouve

$$\frac{\binom{2np}{2} + \binom{2nq}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{2n(1-2pq)-1}{2n-1},$$

où $p + q = 1$. Si $p = \frac{1}{2}$, alors on obtient

$$\frac{2\binom{n}{2}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n-1}{2n-1}.$$

84. On applique le modèle de l'échantillon sans remise.

$$\begin{aligned}
p &= P(4,32;1,2) + P(4,32;2,1) + P(4,32;3,0) \\
&= \frac{\binom{4}{1}\binom{32}{2}}{\binom{36}{3}} + \frac{\binom{4}{2}\binom{32}{1}}{\binom{36}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{32}{0}}{\binom{36}{3}} \\
&= 1 - \frac{\binom{32}{3}}{\binom{36}{3}} \\
&= \frac{109}{3 \times 119} \approx 0,305\ 300.
\end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

85. On trouve le nombre naturel *m* de l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\binom{100}{k}\binom{9\ 900}{m-k}}{\binom{10\ 000}{m}} > 0,5,$$

(où plus simplement de $1 - \frac{\binom{10\ 000-m}{100}}{\binom{10\ 000}{100}} > 0,5$). Le plus petit nombre naturel qui satisfait cette inégalité est $m = 69$.

86. Posons $p_{n,k}$ la probabilité d'obtenir face k fois sur n lancers. Alors

$$p_{n,k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}.$$

De plus $p_{n,k} < p_{n+1,k}$ si et seulement si $n < 2k - 1$. Donc

$$p_{k,k} < p_{k+1,k} < \cdots < p_{2k-1,k} = p_{2k,k}$$

et

$$p_{2k,k} > p_{2k+1,k} > \cdots .$$

Le n maximal est donc $2k - 1$ ou $2k$.

Pour $k = 5$, on trouve $n = 9$ ou 10, et la probabilité de gagner est $\frac{\binom{9}{5}}{2^9} = \frac{63}{256}$.

87. On doit avoir $1 - (0,99)^n \geq \frac{1}{2}$, ce qui implique que $(0,99)^n \leq \frac{1}{2}$. Donc

$$n \geq \frac{\log 0,5}{\log 0,99} \approx 68,97,$$

et par suite, $n \geq 69$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Chapitre 3

Variables aléatoires

3.1 Notions de base — Définitions et propriétés

3.1.1 Définition d'une variable aléatoire. Loi de probabilité

Soit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_8\}$ l'espace échantillonnai relié à une expérience aléatoire. On peut remplacer l'étude des probabilités relatives aux événements de Ω par l'étude d'un ensemble de nombres réels[1] de la manière suivante: à chaque épreuve ω_k de l'expérience on associe un nombre réel x_k. On met ainsi en correspondance l'ensemble des résultats possibles d'une expérience avec un ensemble de nombres réels, chaque nombre étant associé à une certaine probabilité, à savoir la probabilité de l'événement formé par les épreuves ayant x_k comme image.

Définition 1. La règle de correspondance entre l'ensemble des épreuves d'une expérience donnée et un ensemble de nombres réels s'appelle *variable aléatoire.*

En somme, on peut dire qu'une variable aléatoire X est une fonction de Ω vers $\mathbf{R}$ et on écrit

$$X : \Omega \to \mathbf{R}.$$

Parce qu'on considère ici seulement les expériences ayant un nombre fini

[1] un fait qui a beaucoup simplifié les raisonnements et qui a permis d'introduire, dans la théorie des probabilités, des méthodes et des résultats émanant d'autres disciplines des mathématiques.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

d'épreuves, les variables aléatoires pourront prendre seulement un ensemble fini de valeurs.

Remarque 2. Pour une même expérience aléatoire, on peut imaginer plusieurs variables aléatoires. Ainsi, par exemple, à l'expérience qui consiste à lancer un dé, on peut associer le nombre de points obtenus, ou associer encore par exemple, le nombre 0 si on obtient un nombre pair et le nombre 1 si on obtient un nombre impair, etc..

Nous noterons les variables aléatoires par des lettres majuscules comme X, Y, ... , X_1, ... Pour une variable aléatoire

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

on aura

$$\begin{array}{ccc} \omega_1 & \longmapsto & x_1 \\ \omega_2 & \longmapsto & x_2 \\ \omega_3 & \longmapsto & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_s & \longmapsto & x_n \end{array}$$

que l'on écrira aussi sous la forme

$$X(\omega_1) = x_1,\ X(\omega_2) = x_2,\ X(\omega_3) = x_3, \text{ etc..}$$

Une variable aléatoire génère un ensemble fini de nombres réels x_1, ..., x_n. À chaque nombre x_k on peut faire correspondre p_k, la probabilité, dans l'espace probabilisé (Ω, A, P), de l'événement formé par les épreuves qui sont en correspondance avec x_k, c'est-à-dire,

$$p_k = P(\{\omega;\ X(\omega) = x_k\}),\ k = 1, \ldots, n.$$

On dit aussi que p_k est la probabilité avec laquelle la variable aléatoire prend la valeur x_k et on écrit

$$p_k = P(X = x_k),\ k = 1, \ldots, n.$$

On a toujours $\sum_{k=1}^n p_k = 1$.

Définition 3. La donnée des couples $(x_k,\ p_k)$, $k = 1, \ldots, n$ définit *la loi de probabilité* de la variable aléatoire X.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Remarque 4. Habituellement, on représente la loi de probabilité d'une variable aléatoire X par un *tableau*,

$$X\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

et $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Dans ce tableau, l'ordre selon lequel on écrit les valeurs x1, ... , xn n'est pas essentiel; habituellement on écrit les valeurs dans l'ordre croissant, et sur la deuxième ligne, les probabilités correspondantes.

3.1.2 Fonction de masse et fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est

$$X\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1,$$

où on suppose que $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

On utilise aussi pour décrire cette même loi la notation fonctionnelle

$$f(x_i) = p_i, \quad i = 1, \dots, n \text{ où } \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

On arrive ainsi à la définition suivante :

Définition 1. La fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie pour chaque $x \in \mathbf{R}$ par

$$f(x) = P(X = x)$$

s'appelle *la fonction de masse* de la variable aléatoire X.

Parce que

$$f(x_i) = p_i, \quad i = 1, \dots, n \text{ où } \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

et $f(x) = 0$ si $x \neq x_1, x_2, \dots, x_n$ on a

$$f(x) = \begin{cases} p_1 & \text{si } x = x_1 \\ p_2 & \text{si } x = x_2 \\ \vdots & \vdots \\ p_n & \text{si } x = x_n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Remarque 2. La fonction de masse d'une variable aléatoire *X* peut être représentée graphiquement dans le plan, par un diagramme en bâtons, comme dans la figure 3.1.

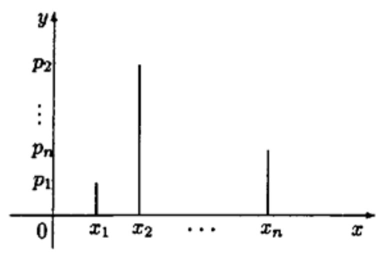

Figure 3.1.

Remarque 3. Une variable aléatoire *X* détermine de façon unique la fonction de masse et vice-versa, la fonction de masse détermine de façon unique la loi de probabilité de la variable aléatoire *X*.

Exemple 4. Soit *X* une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

alors la fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } x = 2 \\ 1/6 & \text{si } x = 3 \\ 1/2 & \text{si } x = 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

D'autre part, soit

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

une fonction de masse dont le diagramme en bâtons est donnée par la figure 3.2.

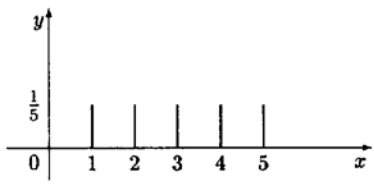

Figure 3.2.

La loi de probabilité correspondante est

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Définition 5. Soit X une variable aléatoire. La fonction $F : \mathbf{R} \to [0, 1]$ définie pour chaque $x \in \mathbf{R}$ par

$$Fax) = PaX \leq x) = Pa\{\omega \in \Omega \; ; Xa\omega) \leq x\})$$

s'appelle *la fonction de répartition ou la fonction de distribution* de la variable aléatoire X.

Remarque 6. En considérant la définition 5, on constate que la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X jouit des propriétés suivantes :

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

2. F est non-décroissante, c'est-à-dire si $x < y$, alors $F(x) \leq F(y)$;

3. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;

4. F est continue à droite, c'est-à-dire

$$\lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x).$$

Remarque 7. Notons que la loi de probabilité d'une variable aléatoire *X* détermine de façon unique la fonction de répartition.

En effet, on calcule $F(x)$ à partir de la loi de probabilité de la variable aléatoire *X*, en cumulant les probabilités :

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i.$$

Exemple 8. Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est

$$X \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1,$$

alors la fonction de répartition est déterminée de façon unique par la loi de probabilité, comme suit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_1 \\ p_1 & \text{si } x_1 \leq x < x_2 \\ p_1 + p_2 & \text{si } x_2 \leq x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} & \text{si } x_{n-1} \leq x < x_n \\ 1 & \text{si } x \geq x_n \end{cases}$$

Remarque 9. La fonction de répartition d'une variable aléatoire *X* peut être réprésentée graphiquement dans le plan, par une fonction en escalier. Ainsi en considérant la fonction de répartition donnée dans l'exemple 8, on obtient la figure 3.3.

Remarque 10. Pour tout a Є **R** on a

$$P(X = a) = F(a) - F(a-),$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

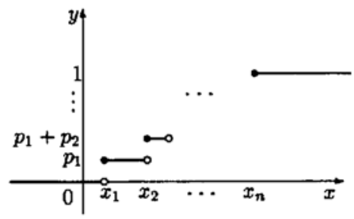

Figure 3.3.

où $F(a-)$ est la limite à gauche de la fonction F au point a, c'est-à-dire

$$\lim_{y \uparrow a} F(y) = F(a-).$$

Dans tout point a de continuité de la fonction de répartition F, on a $P(X = a) = 0$, car en un tel point $F(a-) = F(a)$.

Remarque 11. La fonction de répartition détermine uniquement la loi de probabilité d'une variable aléatoire, car la variable aléatoire prend pour valeurs les abscisses des points de saut de la fonction F avec des probabilités égales aux hauteurs des sauts.

Exemple 12. Soit X une variable aléatoire, et soit

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 3 \\ 1/3 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 2/3 & \text{si } 5 \leq x < 8 \\ 1 & \text{si } x \geq 8 \end{cases}$$

sa fonction de répartition, dont le graphique est donnée par la figure 3.4.

Alors la loi de probabilité de la variable aléatoire X est

$$X \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

et par suite, la fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/3 & \text{si } x = 3,\ 5,\ 8 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

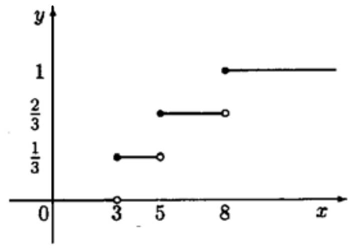

Figure 3.4.

Remarque 13. En somme, une variable aléatoire peut être donnée par un tableau qui représente sa loi de probabilité, par sa fonction de masse, ou encore, par sa fonction de répartition.

Remarque 14. Notons enfin, que la fonction de répartition permet de trouver les probabilités que la variable aléatoire prenne des valeurs dans un intervalle. D'abord

$$P(X < b) = P(X \leq b) - P(X = b) = F(b) - (F(b) - F(b-)) = F(b-),$$

et par suite

$$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b-) - F(a),$$

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F(b-) - F(a-),$$

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a),$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X < a) = F(b) - F(a-).$$

3.1.3 Quelques lois de probabilité classiques

On aborde maintenant quelques lois de probabilité de variables aléatoires ayant un nombre fini de valeurs, lois de probabilité associées aux modèles présentés dans 2.1.7, Section 2.1, Chap. 2. Ces lois de probabilité s'avèrent

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

souvent utiles dans les applications.

1) La distribution binomiale correspondant au modèle de Bernoulli On associe au modèle de Bernoulli la variable aléatoire *X* qui représente le nombre d'apparitions d'un événement *A* quand on effectue *n* expériences de Bernoulli. La fonction de masse de *X* est donnée par la formule

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \ x = 0, \ldots, n,$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

2) La distribution correspondant au modèle de Poisson

On associe au modèle de Poisson la variable aléatoire *X* qui représente le nombre d'apparitions d'un événement *A* quand on effectue *n* expériences de Poisson ; *X* a la loi de probabilité donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ P_0 & P_1 & \ldots & P_k & \ldots & P_n \end{pmatrix},$$

où P_k est le coefficient de x^k, $k = 0, 1, \ldots, n$ du polynôme

$$P(x) = (p_1 x + (1-p_1))\,(p_2 x + (1-p_2)) \cdots (p_n x + (1-p_n)), \sum_{k=0}^{n} P_k = 1.$$

3) La distribution correspondant au modèle de l'échantillon sans remise

On associe au schéma de l'échantillon sans remise la variable aléatoire *X* qui représente le nombre de boules blanches parmi les *n* boules extraites (sans remise) d'une urne contenant α boules blanches et β boules noires ; la fonction de masse de *X* est

$$f(x) = \frac{\binom{\alpha}{x}\binom{\beta}{n-x}}{\binom{\alpha+\beta}{n}},$$

où x prend des valeurs dépendant des constantes α, β et n. Par convention $\binom{n}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > n$. On a aussi

$$\sum_x f(x) = 1.$$

3.1.4 Variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y des variables aléatoires et leurs lois de probabilité

$$X\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

et

$$Y\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}.$$

Définition 1. Les *variables aléatoires X et Y sont indépendantes* si

$$P((X=x_i)\cap(Y=y_j)) = P(X=x_i)P(Y=y_j) = p_i q_j,$$

pour $i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m$.
Dorénavant nous noterons l'événement $(X=x_i)\cap(Y=y_j)$ simplement par $X=x_i,\ Y=y_j$.
Remarque 2. L'indépendance des variables aléatoires peut être étendue à un nombre fini quelconque de variables aléatoires. Ainsi, soit

$$X_k\begin{pmatrix} x_{k,1} & \dots & x_{k,n_k} \\ p_{k,1} & \dots & p_{k,n_k} \end{pmatrix} \quad k=1,\dots,s$$

des variables aléatoires. Leur indépendance revient à la réalisation de l'égalité

$$P\big(X_1 = x_{1,j_1},\ X_2 = x_{2,j_2},\ \dots, X_s = x_{s,j_s}\big)$$

$$= P(X_1 = x_{1,j_1})P(X_2 = x_{2,j_2})\cdots P(X_s = x_{s,j_s}),$$

où $j_k = 1,\dots,n_k;\ k=1,\dots,s$.

3.1.5 Opérations sur des variables aléatoires

Dans tous les cas où l'on effectue des opérations sur des variables aléatoires, on supposera que les variables aléatoires sont associées à la même expérience. Toutes les variables aléatoires seront ainsi définies sur le même espace échantillonnal.

Remarque 1. Une constante a peut être interprétée comme une variable aléatoire définie sur n'importe quel espace échantillonnal. C'est la variable aléatoire qui prend la valeur a pour toute épreuve de l'expérience, c'est-à-dire,

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

qui prend toujours la valeur a sur l'espace échantillonnal. Par suite, la loi de probabilité d'une constante a, interprétée comme une variable aléatoire, est

$$a\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut toujours effectuer des opérations avec des variables aléatoires et des constantes puisqu'on peut considérer que *X*, une variable aléatoire quelconque, et a, une variable aléatoire constante, opèrent sur le même espace échantillonnai. De plus, la variable aléatoire *X* et la constante *a* sont indépendantes pour toute variable aléatoire *X*.

Dans tout ce qui suit, on suposera que les variables aléatoires *X* et *Y* ont les lois de probabilité

$$X\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

et

$$Y\begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}.$$

1) L'addition de variables aléatoires

Définition 2. La loi de probabilité de la variable aléatoire $X+Y$ est donnée par le tableau

$$X+Y\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_j & \dots & z_l \\ r_1 & r_2 & \dots & r_j & \dots & r_l \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} r_k &= P(X+Y=z_k) \\ &= \sum_{x_i+y_j=z_k} P(X=x_i \mid Y=y_j)\cdot P(Y=y_j), \end{aligned} \tag{3.1}$$

pour $k=1,\dots,l$ et $\sum_{k=1}^{l} r_k = 1$.

La variable aléatoire $X+Y$ s'appelle *la somme des variables aléatoires* X et Y.

Remarque 3. Parce que $X+Y=Y+X$, l'expression (3.1) peut aussi s'écrire

$$r_k = P(X+Y=z_k) = \sum_{x_i+y_j=z_k} P(Y=y_j \mid X=x_i)\cdot P(X=x_i),$$

pour $k = 1,...,l$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors on a en particulier

$$r_k = P(X+Y=z_k) = \sum_{x_i+y_j=z_k} p_i q_j,$$

pour $k = 1, \ldots, l$.

Remarque 4. Dans le cas particulier où Y = a, une variable aléatoire constante, on obtient *la somme d'une constante et d'une variable aléatoire,* et on trouve

$$X+a\begin{pmatrix} x_1+a & \ldots & x_i+a & \ldots & x_n+a \\ p_1 & \ldots & p_i & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

car

$$\begin{aligned} P(X+a=x_i+a) &= P(X=x_i \mid a=a)P(a=a) \\ &= P(X=x_i)P(a=a) \\ &= p_i \times 1 = p_i, \end{aligned}$$

pour $i = 1, \ldots, n$.

2) La multiplication de variables aléatoires

Définition 5. La loi de probabilité de la variable aléatoire XY est donnée par le tableau

$$XY\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_j & \ldots & z_l \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_j & \ldots & r_l \end{pmatrix},$$

où

$$r_k = P(XY=z_k) = \sum_{x_i \cdot y_j = z_k} P(X=x_i \mid Y=y_j)\cdot P(Y=y_j),$$

pour $k = 1, \ldots, l$ et $\sum_{k=1}^{l} r_k = 1$.

La variable aléatoire XY s'appelle *le produit des variables aléatoires* X et Y.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Remarque 6. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors on a en particulier

$$r_k = P(XY = z_k) = \sum_{x_i \cdot y_j = z_k} p_i q_j,$$

pour $k = 1, \ldots, l$.

Dans le cas particulier où $Y = a$ est une variable aléatoire constante, on obtient *le produit entre une constante et une variable aléatoire* et si $a \neq 0$, alors on a

$$aX \begin{pmatrix} ax_1 & \ldots & ax_i & \ldots & ax_n \\ p_1 & \ldots & p_i & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

car

$$P(aX = ax_i) = P(a = a)P(X = x_i) = P(X = x_i) = p_i,$$

$i = 1, \ldots, n$. Si $a = 0$ alors on a

$$P(0X = 0) = 1.$$

Remarque 7. Les opérations de somme et de produit peuvent être étendues à un nombre fini de variables aléatoires, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ et on obtient $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ et respectivement $X_1 \cdot X_2 \cdots X_k$.

Dans le cas particulier où $X_1 = X_2 = \cdots = X_k = X$ le produit devient $X_1 \cdot X_2 \cdots X_k = X^k$, et on obtient *les puissances d'une variable aléatoire,* dont la loi de probabilité est

$$X^k \begin{pmatrix} x_1^k & \ldots & x_i^k & \ldots & x_n^k \\ p_1 & \ldots & p_i & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

car $P(X^k = x_i^k) = P(X = x_i) = p_i$, pour $i = 1, \ldots, n$.

3) L'inverse d'une variable aléatoire

Définition 8. Si la variable aléatoire prend seulement des valeurs différentes de zéro, c'est-à-dire $x_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$, alors *l'inverse de la variable aléatoire X* est la variable aléatoire X^{-1} dont la loi de probabilité est

$$X^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & \ldots & \frac{1}{x_i} & \ldots & \frac{1}{x_n} \\ p_1 & \ldots & p_i & \ldots & p_n \end{pmatrix}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Notons que la variable aléatoire X^{-1} s'obtient comme cas particulier de X^k avec $k = -1$.

Définition 9. Si la variable aléatoire Y possède un inverse, Y^{-1}, alors on définit *le quotient* par X / Y = $X \cdot Y^{-1}$, c'est-à-dire

$$\frac{X}{Y}\begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_j & \dots & z_l \\ r_1 & \dots & r_j & \dots & r_l \end{pmatrix},$$

où

$$r_k = P\left(\frac{X}{Y} = z_k\right) = \sum_{\frac{x_i}{y_j} = z_k} P(X = x_i \mid Y = y_j) \cdot P(Y = y_j),$$

pour $k = 1, \dots, l$.

Rappelons que le résultat de toute opération sur des variables aléatoires est toujours une variable aléatoire definie sur le même espace échantillonnal.

3.1.6 Valeurs typiques d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire et sa fonction de masse

$$f(x_i) = p_i, \quad i = 1, \dots, n \text{ où } \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

1) La valeur moyenne ou l'espérance d'une variable aléatoire

Définition 1. On appelle *E(X) l'espérance mathématique de la variable aléatoire X* ou plus simplement *la moyenne* de la variable aléatoire *X,* le nombre que l'on note aussi μ_X où

$$\mu_X = E(X) = x_1p_1 + \dots + x_np_n = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Remarque 2. En considérant la définition 1, on constate que l'espérance d'une variable aléatoire possède les propriétés suivantes :

1. $E(a) = a$, *où* a est une constante.
2. $E(aX) = aE(X)$, *où* a est une constante.
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

4. $E(X + a) = E(X) + a$, où a est une constante.
5. $E(XY) = E(X)E(Y)$, si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Les propriétés 3 et 5 peuvent être étendues à tout nombre fini de variables aléatoires.

La valeur moyenne d'une variable aléatoire X peut s'interpréter comme une valeur *autour de laquelle se groupent les valeurs de la variable aléatoire X.* On dit que $E(X)$ est un *paramètre de localisation.*

2) Moments d'une variable aléatoire

Définition 3. On appelle *moment d'ordre r* de la variable aléatoire X, le nombre

$$\mu_r(X) = E(X^r) = \sum_{k=1}^{n} x_k^r p_k.$$

En particulier

$$\mu_1 = \mu_X = E(X).$$

On appelle *moment centré d'ordre r* de la variable aléatoire X, le nombre

$$E\left((X - E(X))^r\right) = E((X - \mu_X)^r) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu_X)^r p_k.$$

Remarque 4. Le moment centré d'ordre r de la variable aléatoire X est le moment d'ordre r de la variable aléatoire $X - \mu_X$. Cette dernière variable s'appelle l'écart.

3) La variance d'une variable aléatoire

Définition 5. On appelle *variance d'une variable aléatoire X* le moment centré d'ordre deux. La variance est aussi appelé *l'écart quadratique moyen.* La variance de la variable aléatoire X est notée $Var(X)$ et

$$\begin{aligned} Var(X) &= E((X - E(X))^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - \mu_X)^2 p_k. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Remarque 6. En considérant la définition 5, on constate que la variance d'une variable aléatoire possède les propriétés suivantes :

1. $Var(a) = 0$ où a est une constante.
2. $Var(aX) = a^2Var(X)$ où a est une constante.
3. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$, si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
4. $Var(X + a) = Var(X)$ où a est une constante.
5. $Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y)$, si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et où $X - Y = X + (-1)Y$.

La propriété 3 peut être étendue à un nombre fini quelconque de variables aléatoires indépendantes.

Il est souvent commode d'utiliser dans le calcul de la variance la formule

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2,$$

qu'on obtient de la formule (3.2) en élevant au carré la variable aléatoire $X - E(X)$ et en utilisant les propriétés de l'espérance.

La variance d'une variable aléatoire X peut s'interpréter comme une *mesure du degré de dispersion des valeurs de la variable aléatoire X par rapport à sa valeur moyenne*. Si la variance est petite alors les valeurs de la variable aléatoire X sont groupées dans un petit intervalle autour de la valeur moyenne. Si par contre, la variance est grande, les valeurs de la variable aléatoire X sont fortement dispersées dans un grand intervalle autour de la valeur moyenne.

Dans les applications, comme mesure pour la dispersion des valeurs de la variable aléatoire X autour de sa valeur moyenne, il est plus commode (l'utiliser le nombre

$$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

appelé *l'écart type de la variable aléatoire X*.

Notons que pour toute variable aléatoire X la moyenne de l'écart est zéro, $E(X - E(X)) = 0$, et donc la moyenne de l'écart ne peut pas caractériser le degré de dispersion des valeurs de la variable aléatoire X par rapport à sa valeur moyenne. C'est pourquoi on prend plutôt la moyenne du carré de l'écart, c'est-à-dire la variance de la variable aléatoire X.

3.1.7 Couple de variables aléatoires

Soit Ω l'espace échantillonnal relié à une expérience aléatoire.

Définition 1. La règle de correspondance entre Ω, l'ensemble des épreuves d'une expérience et un ensemble de $\mathbf{R}^n$ s'appelle *vecteur aléatoire*.

En somme, on peut dire qu'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une fonction de Ω vers $\mathbf{R}^n$, et on écrit

$$\mathbf{X} : \Omega \to \mathbf{R}^n.$$

Ici, par la suite, nous ne traiterons que le cas $n = 2$, et nous parlerons du *couple aléatoire* plutôt que d'un vecteur aléatoire.

Parce qu'on considère ici seulement les expériences ayant un nombre fini d'épreuves, les couples aléatoires pourront prendre seulement un ensemble fini de valeurs.

Remarque 2. Les composantes X et Y d'un couple aléatoire (X, Y) sont des variables aléatoires définies sur Ω.

Une variable aléatoire génère un ensemble fini de nombres réels. Soit $x_1, \ldots, x_n$, et $y_1, \ldots, y_m$, les valeurs de la variable aléatoire X, respectivement Y. À chaque couple (x_i, y_j) on peut faire correspondre p_{ij}, la probabilité dans l'espace probabilisé (Ω, A, P) de l'événement formé par les épreuves tel que

$$p_{ij} = P(\{\omega;\ X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}),$$

pour $i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m$.

On peut ecrire

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j),$$

pour $i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m$.

Définition 3. La donnée des $((x_i, y_j), i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m$ définit la *loi de probabilité* du couple aléatoire (X, Y). On parle également de la *loi conjointe* du couple aléatoire (X, Y).

Remarque 4. Habituellement, on represente la loi de probabilité conjoint (d'un couple aléatoire par un *tableau à deux dimensions.*

On trouve les lois de probabilité des variables aléatoires X et Y, en faisant la somme des probabilités par ligne ou par colonne.

Posons

$$p_{i.} = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$$

et

$$p_{.j} = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$$

On reporte les probabilités p_{i}. et p_{j}. dans les marges du tableau rectangulaire où sont placées les probabilités p_{ij}. On obtient ainsi le tableau 3.1.

$x \backslash y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1m}	$p_{1.}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2m}	$p_{2.}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{im}	$p_{i.}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nj}	$\cdots$	p_{nm}	$p_{n.}$
	$p_{.1}$	$p_{.2}$	$\cdots$	$p_{.j}$	$\cdots$	$p_{.m}$	1

Tableau 3.1.

Dans ce tableau, l'ordre selon lequel on écrit les valeurs x_1, ..., x_n et y_1, ... , y_m n'est pas essentiel ; règle générale, on écrira les valeurs dans l'ordre croissant.

Définition 5. La donnée des couples (x_i, *pi*), $i = 1, \ldots, n$ définit la *loi marginale de probabilité* de la variable aléatoire X et la donnée des couples (y_j, p_{jj}), $j = 1, \ldots, m$ définit la *loi marginale de probabilité* de la variable aléatoire Y.

Exemple 6. Considerons le couple de variables aléatoires dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.2.

Alors la loi marginale de probabilité de la variable aléatoire X est

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$x \backslash y$	0	1	2	
0	5/15	6/15	1/15	4/5
1	2/15	1/15	0/15	1/5
	7/15	7/15	1/15	1

Tableau 3.2.

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

et la loi marginale de probabilité de la variable aléatoire Y est

$$Y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7/15 & 7/15 & 1/15 \end{pmatrix}.$$

3.1.8 Fonction de répartition d'un couple aléatoire

Soit *(X, Y)* un couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.1.

Définition 1. La fonction $F\ \mathbf{R}^2 \to [0, 1]$ définie pour chaque couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ par

$$F(x,y) = P(X \leq x,\ Y \leq y) = P(\{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\})$$

s'appelle *la fonction de répartition conjointe, ou la fonction de répartition* du couple aléatoire *(X, Y).*

On calcule *F(x, y)* à partir de la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire *(X, Y),* en cummulant les probabilités, ainsi

$$F(x,y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}.$$

En considérant, par exemple, le couple aléatoire dont la loi de probabilité conjointe est donnée par le tableau 3.1, avec $n = m = 3$, on trouve

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<x_1 \text{ ou } y<y_1 \\ p_{11} & \text{si } x_1\le x<x_2 \text{ et } y_1\le y<y_2 \\ \sum_{j=1}^{2} p_{1j} & \text{si } x_1\le x<x_2 \text{ et } y_2\le y<y_3 \\ \sum_{j=1}^{3} p_{1j} & \text{si } x_1\le x<x_2 \text{ et } y_3\le y \\ \sum_{j=1}^{3} p_{1j}+p_{21} & \text{si } x_2\le x<x_3 \text{ et } y_1\le y<y_2 \\ \sum_{j=1}^{3} p_{1j}+\sum_{k=1}^{2} p_{2k} & \text{si } x_2\le x<x_3 \text{ et } y_2\le y<y_3 \\ \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p_{ij} & \text{si } x_2\le x<x_3 \text{ et } y_3\le y \\ \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p_{ij}+p_{31} & \text{si } x_3\le x \text{ et } y_1\le y<y_2 \\ \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p_{ij}+\sum_{k=1}^{2} p_{3k} & \text{si } x_3\le x \text{ et } y_2\le y<y_3 \\ 1 & \text{si } x_3\le x \text{ et } y_3\le y \end{cases}$$

Définition 2. Soit *(X, Y)* un couple aléatoire. La fonction *Fx : R* **-3** [0, 1] définie pour chaque *x* Є **R** par

$$F_X(x)=P(X\le x)=P(\{\omega\in\Omega\ ;\ X(\omega)\le x\})$$

s'appelle *la fonction de répartition marginale* de la variable aléatoire *X* et la fonction F_Y : **R** → [0, 1] définie pour chaque *y* Є **R** par

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\{\omega\in\Omega\ ;\ Y(\omega)\le y\})$$

s'appelle *la fonction de répartition marginale* de la variable aléatoire *Y.*

On obtient les fonctions de répartition marginales des variables aléatoires *X* et *Y* à partir de la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire *(X, Y),* par

$$F_X(x)=P(X\le x,\ Y\le y_m)=F(x,y_m),$$

et

$$F_Y(y)=P(X\le x_n,\ Y\le y)=F(x_n,y).$$

Ainsi pour le couple aléatoire dont la loi de probabilité conjointe est donnée par le tableau 3.1, on obtient

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < x_1 \\ \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{i} p_{kj} & \text{si } \ x_i \leq x < x_{i+1};\ i = 1, \ldots, n-1 \\ 1 & \text{si } \ x \geq x_n \end{cases}$$

et

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y < y_1 \\ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} p_{ik} & \text{si } \ y_j \leq x < y_{j+1};\ j = 1, \ldots, m-1 \\ 1 & \text{si } \ y \geq y_m \end{cases}$$

On peut aussi écrire

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < x_1 \\ \sum_{k=1}^{i} p_{k.} & \text{si } \ x_i \leq x < x_{i+1};\ i = 1, \ldots, n-1 \\ 1 & \text{si } \ x \geq x_n \end{cases}$$

et

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ y < y_1 \\ \sum_{k=1}^{j} p_{.k} & \text{si } \ y_j \leq x < y_{j+1};\ j = 1, \ldots, m-1 \\ 1 & \text{si } \ y \geq y_m \end{cases}$$

Remarque 3. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors,

$$F(x, y) = Fx(x)Fy(y),$$

car dans ce cas,

$$p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$$

pour $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$.

Exemple 4. Considérons le couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.2. On trouve

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ 5/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 11/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } 1 \le y < 2 \\ 12/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } y \ge 2 \\ 14/15 & \text{si } x \ge 1 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 15/15 & \text{si } x \ge 1 \text{ et } 1 \le y < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \text{ et } y \ge 2 \end{cases}$$

et les fonctions de répartition marginales des variables aléatoires *X* et *Y,* sont respectivement

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 12/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

et

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 7/15 & \text{si } 0 \le y < 1 \\ 14/15 & \text{si } 1 \le y < 2 \\ 1 & \text{si } y \ge 2 \end{cases}$$

Remarque 5. Comme pour une variable aléatoire, la fonction de répartition conjointe d'un couple aléatoire (X, Y) détermine de façon unique sa loi de probabilité. Ainsi, le couple aléatoire (X, Y) prendra comme valeurs les couples (x_i, y_j) ; $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$, formés par les limites à gauches des intervalles de variations de x et de y ; la probabilité pour chaque couple étant égale à la valeur du saut de la fonction $F(x, y)$ en ce point.

Exemple 6. Soit

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ 3/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 9/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } 1 \le y < 2 \\ 10/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } y \ge 2 \\ 11/15 & \text{si } x \ge 1 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 13/15 & \text{si } x \ge 1 \text{ et } 1 \le y < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \text{ et } y \ge 2 \end{cases}$$

la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire *(X, Y)*. Alors les limites gauches des intervalles fermés à gauche, de variations de *x* sont 0 et 1, et les limites gauches des intervalles fermés à gauche, de variations de *y* sont 0, 1 et 2. Donc le couple aléatoire *(X, Y)* prendra comme valeurs les couples (0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2). Le saut de la fonction *F(x, y)* au point (0, 0) est 3/15 - 0 = 3/15, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (0, 0). Le saut de la fonction *F(x, y)* au point (0, 1) est 9/15 - 3/15 = 6/15, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (0, 1), et ainsi de suite. La loi de probabilité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par le tableau 3.3.

$x \backslash y$	0	1	2	
0	3/15	6/15	1/15	10/15
1	1/15	2/15	2/15	5/15
	4/15	8/15	3/15	1

Tableau 3.3.

3.1.9 Covariance et coefficient de corrélation

Soit *X* et *Y* deux variables aléatoires.

Définition 1. On appelle *Cov(X, Y) la covariance* des variables aléatoires *X* et *Y,* le nombre

$$Cov(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

Si *Cov(X, Y)* ≠ 0, les variables aléatoires *X* et *Y* sont dites *non-correllées.* Si par contre, *Cov(X, Y)* = 0, les variables aléatoires *X* et *Y* sont dites *correllées.*

Remarque 2. En considérant la définition 1, on constate que

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

formule qui nous permet parfois de calculer *Cov(X, Y)* plus rapidement.
Exemple 3. Considérons le couple aléatoire *(X, Y),* dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.4.

$x \backslash y$	0	1	2	
1	2/18	1/18	4/18	7/18
3	4/18	2/18	5/18	11/18
	6/18	3/18	9/18	1

Tableau 3.4.

Alors $E(XY) = (1 \times 0)\frac{2}{18} + (1 \times 1)\frac{1}{18} + (1 \times 2)\frac{4}{18} + (3 \times 0)\frac{4}{18} + (3 \times 1)\frac{2}{18} + (3 \times 2)\frac{5}{18} = \frac{45}{18} = \frac{5}{2}$. On trouve $E(X) = 1 \times \frac{7}{18} + 3 \times \frac{11}{18} = \frac{20}{9}$ et $E(Y) = 0 \times \frac{6}{18} + 1 \times \frac{3}{18} + 2 \times \frac{9}{18} = \frac{7}{6}$, et par suite $Cov(X,Y) = \frac{5}{2} - \frac{20}{9} \times \frac{7}{6} = -0,09$.
Remarque 4. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors on a nécessairement $Cov(X,Y) = 0$, donc les variables aléatoires X et Y sont aussi, dans ce cas particulier, non-correllées. L'exemple suivant montre que la réciproque de cette propriété n'est pas toujours valide.
Exemple 5. Considérons le couple de variables aléatoires (X,Y) dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.5.

Les variables aléatoires X et Y sont non-correlées. En effet, on trouve

$$E(X) = 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{9},$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$x \backslash y$	-1	0	1	
0	1/18	0/18	1/18	1/9
1	1/18	4/9	1/18	5/9
2	1/18	2/9	1/18	1/3
	1/6	2/3	1/6	1

Tableau 3.5.

$$E(Y) = -1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = 0,$$

et

$$E(XY) = (-1) \times \frac{1}{18} + 1 \times \frac{1}{18} + (-2) \times \frac{1}{18} + 2 \times \frac{1}{18} = 0.$$

Par suite $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$.
Par contre, les variables aléatoires X et Y sont dépendantes car

$$P(X = 0; Y = -1) = \frac{1}{18} \neq P(X = 0)P(Y = -1) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{6}.$$

Remarque 6. Notons que $Cov(X, X) = Var(X)$.

Remarque 7. En utilisant la covariance, on peut exprimer la variance de la somme de n variables aléatoires. Ainsi

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k) + 2 \sum_{\substack{k=1,j=1 \\ k<j}}^{n} Cov(X_k, X_j).$$

Si les variables aléatoires sont indépendantes, alors $Cov(X_k, X_j) = 0$, et on retrouve le résultat connu

$$Var\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} Var(X_k).$$

Définition 8. On appelle *coefficient de corrélation* entre les variables aléatoires X et Y, le nombre

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)},$$

où $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ sont les écarts types des variables aléatoires X et Y et $\sigma(X)\sigma(Y) \neq 0$.

Remarque 9. Le coefficient de corrélation possède les propriétés suivantes:

1. $-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1$.
2. $Corr(X,Y) = 0$, si et seulement si $Cov(X,Y) = 0$.
3. $Corr(X,X) = 1$.
4. $Corr(X,Y) = Corr(Y,X)$.
5. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors
$$Corr(X,Y) = 0.$$
6. Si $Corr(X,Y) = \pm 1$, alors $Y = aX + b$, donc il y a une dépendance linéaire entre les variables aléatoires X et Y.

Exemple 10. Soit le couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.4. Alors $\sigma(X) = 0,973$ et $\sigma(Y) = 0,897$, et par suite $Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{-0,09}{0,973 \times 0,897} = -0,103$.

3.1.10 Inégalité de Tchebychev

Soit X une variable aléatoire et ϵ un nombre positif quelconque, alors

$$P(|X - E(X)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{Var(X)}{\epsilon^2},$$

ou en prenant l'événement contraire,

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{Var(X)}{\epsilon^2}.$$

Si on prend en particulier $\epsilon = k\sqrt{Var(X)} = k\sigma$, on obtient

$$P(|X - E(X)| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2},$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ou encore de manière équivalente

$$P(E(X) - k\sigma < X < E(X) + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

L'inégalité de Tchebychev [2] donne une borne inférieure pour la probabilité $P(|X - E(X)| < \epsilon)$. Cette inégalité s'interprète de la façon suivante: avec une probabilité au moins égale à $1 - \frac{Var(X)}{\epsilon^2}$, respectivement $1 - \frac{1}{k^2}$, la variable aléatoire X prend ses valeurs dans l'intervalle $(E(X) - \epsilon, E(X) + \epsilon)$, respectivement $(E(X) - k\sigma, E(X) + k\sigma)$, ou ce qui revient à la même chose, la variable aléatoire $X - E(X)$, c'est-à-dire, l'écart de X de la valeur moyenne prend ses valeurs dans l'intervalle $(-\epsilon, \epsilon)$, respectivement $(-k\sigma, k\sigma)$.

Notons que $1 - \frac{1}{k^2}$ croit en même temps que k et que déjà pour la valeur $k = 6$, on obtient $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{35}{36}$, donc une valeur très près de 1.

Si la variable aléatoire X a une distribution binomiale, on a

$$E(X) = np, \ Var(X) = npq.$$

L'inégalité de Tchebychev prend alors la forme

$$P(|X - np| < \epsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\epsilon^2}.$$

Pour la variable aléatoire $Y = \frac{X}{n}$, appelée la *fréquence relative*, on obtient

$$P(|Y - p| < \epsilon) \geq 1 - \frac{pq}{n\epsilon^2},$$

car $E(Y) = p$ et $Var(Y) = \frac{pq}{n^2}$.

3.2 Problèmes et solutions

1. On considère une expérience où on lance un dé. Déterminer la loi de probabilité, ainsi que la fonction de masse de la variable aléatoire X qui, à chaque résultat possible, associe le nombre de points apparaissant sur le dé.

   Solution. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Chaque valeur apparaît avec probabilité donc la loi de probabilité est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

[2] Pafnouti Lvovitch Tchebychev (1821-1894), célèbre mathématicien russe.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

La fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{si } x = 1, \ldots, 6 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

2. On introduit au hasard 8 boules dans 3 boîtes numérotées de 1 à 3. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire *X* qui prend comme valeur le nombre de boules placées dans la première boîte.

   Solution. La variable aléatoire *X* peut prendre les valeurs 0,1, ..., 8. Pour trouver les probabilités respectives, on utilise le problème 11, Section 2.2 ; on obtient

$$P(X = k) = \frac{\binom{8}{k} 2^{8-k}}{3^8}, \; k = 0, \ldots, 8,$$

   et

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \frac{2^8}{3^8} & \frac{\binom{8}{1}2^7}{3^8} & \frac{\binom{8}{2}2^6}{3^8} & \frac{\binom{8}{3}2^5}{3^8} & \frac{\binom{8}{4}2^4}{3^8} & \frac{\binom{8}{5}2^3}{3^8} & \frac{\binom{8}{6}2^2}{3^8} & \frac{\binom{8}{7}2}{3^8} & \frac{1}{3^8} \end{pmatrix}.$$

3. On effectue un contrôle de qualité d'un lot de pièces de la manière suivante : on extrait du lot, au hasard, une pièce à la fois, et on détermine si elle est acceptable ou non. Le nombre maximum de pièces que l'on peut examiner est fixé à 5. Si la pièce choisie à la *k*-ième extraction pour *k* = 1, ... , 4 ne rencontre pas les normes, alors le lot est rejeté et on cesse la sélection. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de pièces examinées, en supposant que la probabilité qu'une pièce extraite du lot au hasard soit acceptée est 0,9.

   Solution. La variable aléatoire *X* peut prendre la valeur 1, si la première pièce examinée est rejetée, la valeur 2, si la première pièce extraite est bonne mais la deuxième est rejetée, la valeur 3, si les deux premières pièces sont bonnes, mais la troisième est rejetée, la valeur 4, si les trois premières pièces sont bonnes, mais la quatrième est rejetée et finalement la valeur 5, si les quatre premières pièces sont bonnes. De plus,

$$P(X = 1) = q; \; P(X = 2) = pq; \; P(X = 3) = p^2 q;$$
$$P(X = 4) = p^3 q; \; P(X = 5) = p^4,$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

où p = 0,9 et q = 1-p = 0,1.
On obtient donc

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0,1 & 0,09 & 0,081 & 0,072\ 900 & 0,656\ 100 \end{pmatrix}.$$

Si $X = k$, $k = 1, \dots, 4$ le lot est rejeté, si $X = 5$ le lot est rejeté ou non, selon que la cinquième pièce examinée est bonne ou défectueuse.

4. Le long d'une autoroute, il y a trois barrières automatiques à des passages à niveau. La probabilité qu'une voiture qui circule sur cette autoroute trouve n'importe laquelle de ces barrières ouverte est $p = 0,8$.

i) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de passages à niveau consécutifs franchis sans rencontrer une barrière fermée.

ii) Quel est le nombre le plus probable de barrières consécutives ouvertes ?

iii) Donner la fonction de masse de la variable aléatoire X.

iv) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Solution. i) La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, 2 selon que la première barrière fermée rencontrée par la voiture sur son parcours soit la première, la deuxième ou la troisième, et elle prend la valeur 3 si toutes les trois barrières rencontrées par la voiture sont ouvertes. De plus,

$$P(X=0) = q = 0,2;\ \ P(X=1) = pq = 0,8 \times 0,2 = 0,16;$$

$$P(X=2) = p^2 q = (0,8)^2 \times 0,2 = 0,128;$$

$$P(X=3) = (0,8)^3 = 0,512,$$

donc

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,16 & 0,128 & 0,512 \end{pmatrix}.$$

ii) Que la voiture rencontre toutes les trois barrières ouvertes représente la valeur la plus probable.

iii) On trouve

$$f(x) = \begin{cases} 0,200 & \text{si } x = 0 \\ 0,160 & \text{si } x = 1 \\ 0,128 & \text{si } x = 2 \\ 0,512 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

iv) On trouve

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,200 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,360 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,488 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

5. Soit X une variable aléatoire ayant la loi de probabilité donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire $2X$.

Solution. D'abord la loi de probabilité de la variable aléatoire $2X$ est donnée par le tableau

$$2X \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

et sa fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 4 \\ 1/3 & \text{si } 4 \leq x < 8 \\ 1 & \text{si } 8 \leq x \end{cases}$$

6. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de masse est donnée par la figure 3.5.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Solution. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 1, 2, 3, 4, et 5. Chaque valeur est prise avec probabilité 1 / 5, donc

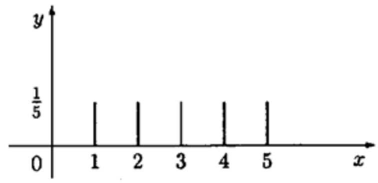

Figure 3.5.

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

7. Soit X une variable aléatoire, dont la fonction de répartition a le graphique donné par la figure 3.6.

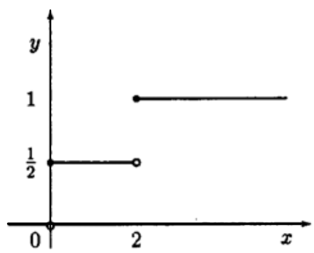

Figure 3.6.

Déterminer la loi de probabilité et la fonction de masse de la variable aléatoire X.

Solution. Il y a deux points de saut dont les abscisses sont 0 et respectivement 2, et le saut dans chaque point est 1/2. Donc on trouve

$$X\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

8. Soit *X* une variable aléatoire, dont la loi de probabilité est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

i) Déterminer la fonction de répartition.

ii) Calculer les quantités $F(4,5)$, $P(X \geq 2)$, $P(2 \leq X \leq 3)$.

Solution. i)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/10 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 3/10 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 7/10 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 8/10 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 9/10 & \text{si } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

ii) $F(4,5) = P(X \leq 4,5) = \frac{9}{10}$.

$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2-) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

$P(2 \leq X \leq 3) = F(3) - F(2-) = \frac{8}{10} - \frac{3}{10} = \frac{5}{10}$.

9. Un sac contient 6 jetons numérotés 2, 4, 6, 8, 10, 12. Au tirage d'un jeton on associe la variable aléatoire *X* qui prend comme valeur le nombre inscrit sur le jeton.

i) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

ii) Calculer $F(9)$.

iii) Calculer $F(13)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Solution. i)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1/6 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 2/6 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 3/6 & \text{si } 6 \leq x < 8 \\ 4/6 & \text{si } 8 \leq x < 10 \\ 5/6 & \text{si } 10 \leq x < 12 \\ 1 & \text{si } 12 \leq x \end{cases}$$

ii) $F(9) = \frac{4}{6}$.

iii) $F(13) = 1$.

10. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } x = 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver

i) $F(3)$.

ii) $P(X < 3 \mid X \leq 4)$.

Solution. i) $F(3) = P(X \leq 3) = P((X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 3)) = \sum_{i=1}^{3} P(X = i) = \frac{3}{5}$.

ii) $P(X < 3 \mid X \leq 4) = \frac{P((X<3)\cap(X\leq 4))}{P(X\leq 4)} = \frac{P(X<3)}{P(X\leq 4)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$.

11. Cent billets sont proposés à une loterie. Parmi ces billets 5 gagnent $10, 10 gagnent $5, 15 gagnent $2, 20 gagnent $1, les autres billets ne gagnent rien. Un joueur achète un billet. Soit X la variable aléatoire représentant le "gain du joueur". Trouver

i) la loi de probabilité, la fonction de masse et la fonction de répartition de la variable aléatoire *X*.

ii) $P(X \geq 1)$.

Solution. i) La loi de probabilité de la variable aléatoire *X* est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 10 \\ \frac{50}{100} & \frac{20}{100} & \frac{15}{100} & \frac{10}{100} & \frac{5}{100} \end{pmatrix}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

La fonction de masse de la variable aléatoire X est

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/5 & \text{si } x = 1 \\ 3/20 & \text{si } x = 2 \\ 1/10 & \text{si } x = 5 \\ 1/20 & \text{si } x = 10 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,50 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0,70 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0,85 & \text{si } 2 \leq x < 5 \\ 0,95 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ 1 & \text{si } 10 \leq x \end{cases}$$

ii) $P(X \geq 1) = P((X = 1) \cup (X = 2) \cup (X = 5) \cup (X = 10)) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, **ou encore** $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - F(1-) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

12. Soit X le nombre de points donnés par un dé mal équilibré dont la loi de probabilité est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & p \end{pmatrix}.$$

Quelle est la valeur de p ?

i) Calculer la probabilité $P(2 \leq X \leq 4)$.

ii) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X donnant le nombre de points.

Solution. i) $p = 1 - (\frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}) = \frac{2}{12}$.

ii) $P(2 \leq X \leq 4) = P((X = 2) \cup (X = 3) \cup (X = 4)) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

iii)

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<1\\ 1/12 & \text{si } 1\le x<2\\ 2/12 & \text{si } 2\le x<3\\ 5/12 & \text{si } 3\le x<4\\ 9/12 & \text{si } 4\le x<5\\ 10/12 & \text{si } 5\le x<6\\ 1 & \text{si } 6\le x\end{cases}$$

Notons que $P(2 \le X \le 4) = F(4) - F(2-) = \frac{9}{12} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}$.

13. Un article en stock fait l'objet d'une demande journalière X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 0,10 & 0,15 & 0,20 & 0,25 & 0,15 & 0,10 & 0,05\end{pmatrix}.$$

i) Déterminer la fonction de masse et représenter graphiquement cette fonction.

ii) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

iii) Trouver la probabilité qu'une demande dépasse 4.

iv) Trouver la probabilité qu'une demande soit inférieure à 2.

v) Pour quelles valeurs de x peut-on écrire $P(X \le x) = 0,85$?

vi) Pour quelles valeurs de x peut-on écrire $P(X > x) = 0,55$?

Solution. i) D'abord la fonction de masse est

$$f(x)=\begin{cases}0,10 & \text{si } x=0\\ 0,15 & \text{si } x=1\\ 0,20 & \text{si } x=2\\ 0,25 & \text{si } x=3\\ 0,15 & \text{si } x=4\\ 0,10 & \text{si } x=5\\ 0,05 & \text{si } x=6\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

et son graphique est représenté par la figure 3.7.

ii) La fonction de répartition est

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

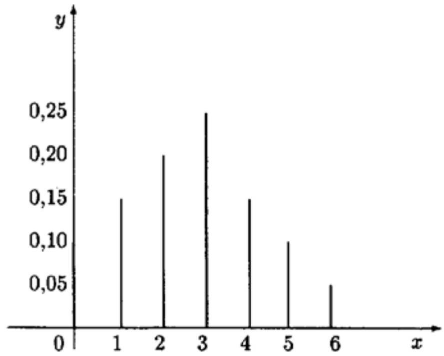

Figure 3.7.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,10 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0,25 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 0,45 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 0,70 & \text{si } 3 \le x < 4 \\ 0,85 & \text{si } 4 \le x < 5 \\ 0,95 & \text{si } 5 \le x < 6 \\ 1 & \text{si } 6 \le x \end{cases}$$

iii) $P(X > 4) = 1 - P(X \le 4) = 1 - F(4) = 1 - 0,85 = 0,15$.

iv) $P(X < 2) = P((X = 0) \cup (X = 1)) = F(2-) = 0,25$.

v) $P(X \le x) = 0,85$, donc $F(x) = 0,85$, d'où $x \in [4,\ 5)$.

vi) $P(X > x) = 0,55$ d'où $P(X \le x) = 0,45$, donc $F(x) = 0,45$ et $x \in [2,\ 3)$.

14. La variable aléatoire X possède la fonction de masse

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = 0 \\ 2k & \text{si } x = 1 \\ 3k & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

i) *k.*

ii) la fonction de répartition et représenter graphiquement cette fonction.

iii) *P(X < 2).*

iv) *P(X > 2).* v)

v) P(X > 1 \ X ≥ 1).

Solution. *i)* $k + 2k + 3k = 1$, donc $k = 1/6$. Par suite, la fonction de masse de la variable aléatoire X est

$$f(x) = \begin{cases} 1/6 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1/3 & \text{si} \quad x = 1 \\ 1/2 & \text{si} \quad x = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ii) La fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/6 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

et son graphique est donné par la figure 3.8.

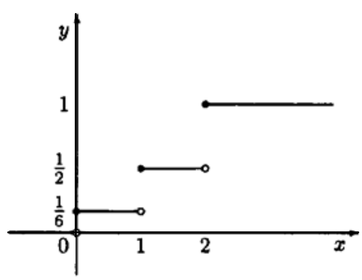

Figure 3.8.

iii) $P(X < 2) = P((X = 0) \cup (X = 1)) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

iv) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6}) = 0.$

v) $P(X > 1 \mid X \geq 1) = \frac{P((X>1)\cap(X\geq 1))}{P(X\geq 1)} = \frac{P(X>1)}{P(X\geq 1)} = \frac{P(X=2)}{P((X=1)\cup(X=2))} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{5}.$

15. On lance trois fois de suite une pièce de monnaie. Trouver l'espace probabilisé associé, ainsi que la loi de probabilité, la fonction de masse et la fonction de répartition de la variable aléatoire *X*, qui prend comme valeurs le nombre de Pile obtenus, dans les cas suivants

i) la pièce de monnaie est bonne, donc bien équilibrée.

ii) la pièce de monnaie est telle que Pile est deux fois plus probable que Face.

Solution. Posons F_i et P_i, la Face et respectivement la Pile pour le *i*-ième lancer. Alors l'espace échantillonnal est

$$\Omega = \{(F_1, F_2, F_3), (F_1, F_2, P_3), (F_1, P_2, F_3), (P_1, F_2, F_3), (F_1, P_2, P_3),$$
$$(P_1, F_2, P_3), (P_1, P_2, F_3), (P_1, P_2, P_3)\},$$

et l'espace probabilisable est (Ω, *P*(Ω)). Pour trouver l'espace probabilisé (Ω, *P*(Ω), *P*) il reste à trouver les probabilités des événements élémentaires, dans chaque cas.

i) De l'indépendance des lancers, et parce que la monnaie est bonne, il s'ensuit que tous les événements élémentaires sont équiprobables, et la probabilité de tout événement élémentaire est 1 / 8 .

La variable aléatoire *X*, prend les valeurs 0, 1, 2, 3, et les probabilités correspondantes sont :

$$P(X = 0) = P((F_1, F_2, F_3)) = \frac{1}{8},$$

$$P(X = 1) = P(\{(F_1, F_2, P_3), (F_1, P_2, F_3), (P_1, F_2, F_3)\}) = \frac{3}{8},$$

$$P(X = 2) = P(\{(F_1, P_2, P_3), (P_1, F_2, P_3), (P_1, P_2, F_3)\}) = \frac{3}{8},$$

$$P(X = 3) = P((P_1, P_2, P_3)) = \frac{1}{8}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

La fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } \ x = 0,\ 3 \\ 3/8 & \text{si } \ x = 1,\ 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Enfin la fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \ x < 0 \\ 1/8 & \text{si } \ 0 \leq x < 1 \\ 4/8 & \text{si } \ 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & \text{si } \ 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } \ x > 3 \end{cases}$$

ii) D'abord $P(\text{Pile}) = \frac{2}{3}$ et $P(\text{Face}) = \frac{1}{3}$. Les probabilités des événements élémentaires sont:

$$P((F_1, F_2, F_3)) = \frac{1}{27},$$

$$P((F_1, F_2, P_3)) = P((F_1, P_2, F_3)) = P((P_1, F_2, F_3)) = \frac{2}{27},$$

$$P((F_1, P_2, P_3)) = P((P_1, F_2, P_3)) = P((P_1, P_2, F_3)) = \frac{4}{27},$$

$$P((P_1, P_2, P_3)) = \frac{8}{27}.$$

La variable aléatoire X, prend les valeurs 0, 1, 2, 3, et les probabilités correspondantes sont

$$P(X = 0) = P((F_1, F_2, F_3)) = \frac{1}{27},$$

$$P(X = 1) = P(\{(F_1, F_2, P_3), (F_1, P_2, F_3), (P_1, F_2, F_3)\}) = \frac{6}{27},$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$P(X=2) = P(\{(F_1, P_2, P_3), (P_1, F_2, P_3), (P_1, P_2, F_3)\}) = \frac{12}{27},$$

$$P(X=3) = P((P_1, P_2, P_3)) = \frac{8}{27}.$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{27} & \frac{6}{27} & \frac{12}{27} & \frac{8}{27} \end{pmatrix}.$$

La fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 1/27 & \text{si } x=0 \\ 6/27 & \text{si } x=1 \\ 12/27 & \text{si } x=2 \\ 8/27 & \text{si } x=3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Enfin la fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1/27 & \text{si } 0\leq x<1 \\ 7/27 & \text{si } 1\leq x<2 \\ 19/27 & \text{si } 2\leq x<3 \\ 1 & \text{si } x>3 \end{cases}$$

16. On lance trois fois une pièce de monnaie. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui prend comme valeur le nombre de piles obtenues.

    Solution. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3. On trouve les probabilités en utilisant le modèle de Bernoulli,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On a $n=3,\ p=\frac{1}{2},\ (1-p)=\frac{1}{2}$ et par suite on trouve

$$P(X=k) = \frac{\binom{3}{k}}{2^3},\ k=0,1,2,3.$$

Donc

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,125 & 0,375 & 0,375 & 0,125 \end{pmatrix}.$$

La variable aléatoire X a une distribution binomiale.

17. Durant un entraînement, un joueur de basketball atteint le panier lors d'un lancer, avec une probabilité de 0,7. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre de fois que le joueur atteint le panier, quand il lance le ballon 10 fois.

Solution. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, ... ,10. On trouve les probabilités en utilisant le schéma de Bernoulli,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

On a $n=10,\ p=0,7,\ (1-p)=0,3$ et par suite on trouve

$$P(X=k)=\binom{10}{k}(0,7)^k(0,3)^{n-k},\ k=0,\ldots,10.$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 9 & 10 \\ (0,3)^{10} & \binom{10}{1}(0,7)(0,3)^9 & \ldots & \binom{10}{9}(0,7)^9(0,3) & (0,7)^{10} \end{pmatrix}.$$

La variable aléatoire X a une distribution binomiale.

18. On expérimente 3 prototypes d'appareils. Les probabilités que ces prototypes fonctionnent sont respectivement p_1 = 0,9, p_2 = 0,8, p_3 = 0, 85. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui prend comme valeur le nombre de prototypes qui fonctionnent.

Solution. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3. On trouve les probabilités en utilisant la schéma de Poisson; donc il faut calculer les coefficients de x^0, x^1, x^2, x^3 du polynôme

$$P(x) = (0,9x + 0,1)\ (0,8x+0,2)\ (0,85x + 0,15).$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,003 & 0,056 & 0,329 & 0,612 \end{pmatrix}.$$

19. Considérons trois urnes U_i, $i = 1, 2, 3$ ayant les caractéristiques suivantes :

Urnes	Nombre de boules blanches	Nombre de boules noires
U_1	2	3
U_2	3	2
U_3	2	2

On extrait une boule de chaque urne. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules blanches pigées. Donner aussi la fonction de masse et la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Solution. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3. On trouve les probabilités en utilisant le schéma de Poisson ; donc il faut calculer les coefficients de x^0, x^1, x^2, x^3 du polynôme

$$P(x) = \left(\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}\right)\left(\frac{3}{5}x + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right),$$

et l'on obtient

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{25} & \frac{19}{50} & \frac{19}{50} & \frac{3}{25} \end{pmatrix}.$$

La fonction de masse est

$$f(x) = \begin{cases} 3/25 & \text{si } x = 0 \\ 19/50 & \text{si } x = 1 \\ 19/50 & \text{si } x = 2 \\ 3/25 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3/25 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 25/50 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 44/50 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

20. Dans un lot de 100 pièces fabriquées à l'aide d'une tour, 10 sont inutilisables. Pour contrôler la qualité, on extrait au hasard, 5 pièces du lot. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire *X* qui prend comme valeur le nombre de pièces inutilisables parmi les 5 pièces examinées.

Solution. La variable aléatoire *X* peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5. On trouve les probabilités en utilisant le schéma de la sélection sans remise ;

$$P(X=k)=\frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}$$

et on obtient[3]

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \frac{\binom{10}{0}\binom{90}{5}}{\binom{100}{5}}=0,583,\\
P(X=1) &= \frac{\binom{10}{1}\binom{90}{4}}{\binom{100}{5}}=0,340,\\
P(X=2) &= \frac{\binom{10}{2}\binom{90}{3}}{\binom{100}{5}}=0,070,\\
P(X=3) &= \frac{\binom{10}{3}\binom{90}{2}}{\binom{100}{5}}=0,007,\\
P(X=4) &= \frac{\binom{10}{4}\binom{90}{1}}{\binom{100}{5}}\approx 0,\\
P(X=5) &= \frac{\binom{10}{5}\binom{90}{0}}{\binom{100}{5}}\approx 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0,583 & 0,340 & 0,070 & 0,007 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

21. Douze concurrents participent à un concours de piano, 7 hommes et 5 femmes. À la première étape, par tirage au sort, les concurrents sont divisés en 3 groupes égaux. Donner la loi de probabilité de la variable

[3]les probabilités sont calculées à trois décimales près.

aléatoire X qui représente le nombre d'hommes membres du premier groupe passant devant le jury.

Solution. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4. On trouve les probabilités en utilisant le schéma de la sélection sans remise; $P(X = k) = \frac{\binom{7}{k}\binom{5}{4-k}}{\binom{12}{4}}$, $k = 0, \ldots, 4$. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,010 & 0,141 & 0,424 & 0,354 & 0,071 \end{pmatrix}.$$

22. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X^2; $3X$; X^{-1}; X^{-2}; $(2X)^{-2}$; $(4X)^{-3}$.

Solution. On trouve respectivement

$$X^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$3X \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$X^{-2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix},$$

$$(2X)^{-2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{36} \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix},$$

et

$$(4X)^{-3} \begin{pmatrix} \frac{1}{4^3} & \frac{1}{8^3} & \frac{1}{12^3} \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

23. Deux variables aléatoires indépendantes ont les lois de probabilité données respectivement, par les tableaux

$$X\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

et

$$Y\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0,6 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

On demande

i) la loi de probabilité de la somme $X + Y$.

ii) la loi de probabilité du produit XY.

Solution. i) Les valeurs de la variables aléatoire $X + Y$ sont :

$$2 + 1 ; 2 + 4 ; 2 + 6 ; 3 + 1 ; 3 + 4 ; 3 + 6 ; 5 + 1 ; 5 + 4 ; 5 + 6,$$

c'est-à-dire

$$3; 6; 8; 4; 7; 9; 6; 9; 11.$$

Calculons maintenant une à une les probabilités d'obtenir chacune de ces valeurs. En tenant compte du fait que les variables aléatoires sont indépendantes, on obtient

$$\begin{aligned} &P(X+Y=3) \\ &= P(X=2,\ Y=1) = P(X=2)P(Y=1) \\ &= 0,2 \times 0,6 = 0,12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(X+Y=6) \\ &= P(X=2,\ Y=4) + P(X=5,\ Y=1) \\ &= P(X=2)P(Y=4) + P(X=5)P(Y=1) \\ &= 0,2 \times 0,2 + 0,3 \times 0,6 = 0,22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &P(X+Y=8) \\ &= P(X=2,\ Y=6) = P(X=2)P(Y=6) \\ &= 0,2 \times 0,2 = 0,04 \end{aligned}$$

$P(X+Y=4)$
$= P(X=3, Y=1) = P(X=3)P(Y=1)$
$= 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}30$

$P(X+Y=7)$
$= P(X=3, Y=4) = P(X=3)P(Y=4)$
$= 0{,}5 \times 0{,}2 = 0{,}10$

$P(X+Y=9)$
$= P(X=3, Y=6)+P(X=5, Y=4)$
$= P(X=3)P(Y=6) + P(X=5)P(Y=4)$
$= 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}16$

$P(X+Y=11)$
$= P(X=5, Y=6)) = P(X=5)P(Y=6)$
$= 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06.$

La loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$ est donnée par le tableau

$$X+Y\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ 0,12 & 0,30 & 0,22 & 0,10 & 0,04 & 0,16 & 0,06 \end{pmatrix}.$$

ii) Les valeurs de la variables aléatoire XY sont :

2×1; 2×4; 2×6; 3×1; 3×4; 3×6; 5×1; 5×4; 5×6,

c'est-à-dire

2; 8; 12; 3; 12; 18; 5; 20; 30.

Or

$$\begin{aligned}
P(XY=2) &= P(X=2,\ Y=1)=0,12\\
P(XY=8) &= P(X=2,\ Y=4)=0,04\\
P(XY=12) &= P(X=2,\ Y=6)+P(X=3,\ Y=4)=0,14\\
P(XY=3) &= P(X=3, Y=1)=0,30\\
P(XY=18) &= P(X=3,\ Y=6)=0,10\\
P(XY=5) &= P(X=5,\ Y=1)=0,18\\
P(XY=20) &= P(X=5,\ Y=4)=0,06\\
P(XY=30) &= P(X=5,\ Y=6)=0,06.
\end{aligned}$$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire XY est donnée par le tableau

$$XY\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 & 12 & 18 & 20 & 30\\ 0,12 & 0,30 & 0,18 & 0,04 & 0,14 & 0,10 & 0,06 & 0,06\end{pmatrix}.$$

24. On lance un dé trois fois et soit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires qui prennent comme valeurs le nombre de points obtenus lors du premier, deuxième et troisième lancer respectivement. Calculer

i) $P(X_1 + X_2 = X_3)$.

ii) $P(X_1 + X_2 + X_3 = 7)$.

iii) $P(X_1 + X_2 = 2X_3)$.

Solution. i) Tenant compte que les variables aléatoires sont indépendantes, on trouve

$$\begin{aligned}
P(X_1+X_2=X_3) &= \sum_{k=1}^{6} P(X_1+X_2=k,\ X_3=k)\\
&= \sum_{k=1}^{6} P(X_1+X_2=k)P(X_3=k).
\end{aligned}$$

Mais $P(X_3=k)=\frac{1}{6},\ k=1,\ldots,6$ et

$$\sum_{k=1}^{6} P(X_1+X_2=k)=P(X_1+X_2\leq 6)=\frac{15}{36},$$

étant la probabilité que la somme des points obtenus en lançant deux dés soit plus petite que 6, donc $P(X_1 + X_2 = X_3) = 5 / 72$

ii) Ce cas peut être réduit au cas précédent, considérant que

$$\begin{aligned} & P(X_1 + X_2 + X_3 = 7) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(X_3 = k)P(X_1 + X_2 = 7 - k) \\ &= \frac{1}{6}P(X_1 + X_2 \leq 6) \\ &= \frac{5}{72}. \end{aligned}$$

iii) On peut écrire

$$\begin{aligned} & P(X_1 + X_2 = 2X_3) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(X_3 = k)P(X_1 + X_2 = 2k) \\ &= \sum_{k=1}^{6} \sum_{j=max(1,2k-6)}^{min(6,2k-1)} P(X_3 = k)P(X_1 = j)P(X_2 = 2k - j) \\ &= \sum_{k=1}^{3} \frac{(2k-1)}{216} + \sum_{k=4}^{6} \frac{(13-2k)}{216} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Ici, dans la double somme, les indices k et j ne prennent pas indépendamment les valeurs de 1 à 6, mais seulement les paires de valeurs (k, j) telles que $1 \leq 2k - j \leq 6$, dans les autres cas, les probabilités étant zéro, on ne les prend pas en considération.

25. On considère l'équation $ax + by - c = 0$ où l'on détermine les coefficients a, b, c en lançant un dé et en prenant le nombre de points obtenus. Trouver la probabilité que la droite ainsi obtenue passe par le point de coordonnées (1, 1).

Solution. À l'expérience qui consiste à lancer un dé, on peut associer la variable aléatoire qui prend comme valeur le nombre de points obtenus sur le dé lors d'un lancer et sa loi de probabilité est donnée dans le problème 1.

Les trois coefficients de l'équation donnée sont des variables aléatoires indépendantes X_1, X_2, X_3 ayant la même loi de probabilité. La droite passe par le point (1, 1) si et seulement si $X_1 + X_2 - X_3 = 0$, donc on cherche la probabilité que

$$P(X_1 + X_2 - X_3 = 0) = P(X_1 + X_2 = X_3) = \frac{5}{72},$$

(voir problème 24 i)).

26. Chaque coefficient de l'équation $a \sin x - b = 0$ est obtenu en lançant un dé et en prenant le nombre de points obtenus. Trouver la probabilité que l'équation ainsi obtenue soit compatible, c'est-à-dire quelle ait une solution.

Solution. Les coefficients de l'équation sont des variables aléatoires associées à l'expérience du lancer d'un dé. Notons par X_1, X_2 ces deux variables respectivement. La condition de compatibilité revient à $\frac{b}{a} \leq 1$, car $\frac{b}{a} > 0$ et la fonction $\sin x$ prend ses valeurs dans l'intervalle [-1, 1]. Donc

$$\begin{aligned} P\left(\frac{X_2}{X_1} \leq 1\right) &= P(X_2 \leq X_1) \\ &= \sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k) P(X_2 \leq k) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} P(X_2 \leq k) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{5}{6} + \frac{6}{6}\right) \\ &= \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

27. Considérons l'équation $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ où les coefficients a et b

sont obtenus de manière indépendante du modèle probabiliste suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que l'équation ainsi obtenue soit réciproque ?

Une équation du troisième degré $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ est réciproque si $a_0 = \pm a_3$ et $a_1 = \pm a_2$. Dans notre cas, il suffit donc d'avoir $a = b$.

Solution. Notons X_1 et X_2 les variables aléatoires qui vont nous fournir a et b et déterminons $P(X_1 = X_2)$. Comme ces variables sont indépendantes on a :

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{j=1}^{n} P(X_1 = j)P(X_2 = j) = n \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Rappelons que si une équation réciproque possède une racine $r \neq 0$, alors elle admet aussi $\frac{1}{r}$ comme racine.

28. Les demi-axes a et b de l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont déterminés de la même manière qu'au problème précédent.

i) Trouver la probabilité que l'hyperbole soit équilatère.

ii) Trouver la probabilité que l'hyperbole obtenue passe par le point $(1, 0)$.

Solution. i) Une hyperbole est équilatère si ses demi-axes sont égaux, c'est-à-dire si $a = b$. Ce problème revient donc au problème précédent. La probabilité recherchée est donc $\frac{1}{n}$.

ii) L'hyperbole passe par le point $(1, 0)$ si et seulement si $\frac{1}{a^2} = 1$, donc $a^2 = 1$ et la probabilité cherchée est donc $\frac{1}{n}$.

29. Un mobile se déplace sur une ligne droite, en obéissant à la loi $x = at^2 + bt + c$, où x représente la distance parcourue et t le temps écoulé. Les coefficients a, b, c sont obtenus indépendamment à partir de la loi de probabilité suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+1} & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}.$$

i) Trouver la probabilité que le mobile ait une accélération non nulle.

ii) Trouver la probabilité que le mobile ait une vitesse constante non nulle.

iii) Trouver la probabilité que la vitesse soit constamment de 5m / sec.

Solution. Soit X_1, X_2 et X_3 les trois variables aléatoires qui nous fournirons a, b et c respectivement.

Rappelons que la vitesse $V(t)$ est la dérivée de la distance par rapport au temps: ainsi $V(t) = \frac{dx}{dt} = 2at + b$.

L'accélération $A(t)$ est la dérivé de la vitesse $V(t)$ par rapport au temps: ainsi $A(t) = \frac{dV}{dt} = 2a$.

i) L'accélération est non nulle si $a \neq 0$. On cherche donc

$$P(X_1 \neq 0) = 1 - P(X_1 = 0) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

ii) La vitesse est constante et non nulle si $a = 0, b \neq 0$. Donc

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0,\ X_2 \neq 0) &= P(X_1 = 0)P(X_2 \neq 0) \\ &= \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

iii)

$$P(X_1 = 0)P(X_2 = 5) = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

30. Considérons l'équation a cos x - b = 0 où a est obtenu en lançant un dé et b est obtenu indépendamment à partir du modèle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

où n > 6.

Quelle est la probabilité que l'équation soit compatible, c'est-à-dire qu'elle possède une solution ?

Solution. L'équation a une solution si a cos x = b et donc si cos x = b / a. Puisque cos x est dans l'intervalle [-1, 1], l'équation est compatible si

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$-1 \leq \frac{b}{a} \leq 1$. Puisque $\frac{b}{a}$ est de toute façon plus grand que 0, il faut donc que $\frac{b}{a} \leq 1$.

Soit X_1 et X_2 les deux variables aléatoires qui nous fourniront a et b respectivement. On cherche

$$P\left(\frac{X_2}{X_1} \leq 1\right) = P(X_2 \leq X_1).$$

Or

$$P(X_2 \leq X_1) = \sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k)P(X_2 \leq k).$$

On peut développer cette somme ainsi

$P(X_2 \leq X_1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(\cup_{k=1}^{2}(X_2 = k)) + \cdots + P(X_1 = 6)P(\cup_{k=1}^{6}(X_2 = k))$.

On trouve

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{n} \\ P(X_1 = 2)P(\cup_{k=1}^{2}(X_2 = k)) &= \frac{1}{6} \times \frac{2}{n} \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ P(X_1 = 6)P(\cup_{k=1}^{6}(X_2 = k)) &= \frac{1}{6} \times \frac{6}{n}, \end{aligned}$$

d'où

$$P(X_2 \leq X_1) = \frac{1}{6} \times \frac{1+2+3+4+5+6}{n} = \frac{21}{6n}.$$

31. Considérons le cercle $x^2 + y^2 = 8$ et la famille de droites $x + y = a$. Le paramètre a est obtenu en lançant un dé. Quelle est la probabilité que la droite soit tangente au cercle ?

Solution. Chaque droite satisfait l'équation $y = -x + a$. Remplaçons y par cette valeur dans $x^2 + y^2 = 8$ pour trouver les points qui sont à la fois sur le cercle et la droite. On trouve

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$x^2 + (a-x)^2 = 8,$$

donc

$$2x^2 - 2ax + (a^2 - 8) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

où $\alpha = 2, \beta = -2a, \gamma = a^2 - 8$.

Les solutions sont:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Il existe trois possibilités.

• Si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, alors il y a deux solutions complexes et la droite ne coupe pas le cercle.

• Si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, alors il y a deux solutions réelles distinctes et la droite coupe le cercle en deux points.

• Si $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$, alors il y a une seule solution réelle double et c'est dans ce cas que la droite est tangente au cercle.

Or

$$\begin{aligned} \beta^2 - 4\alpha\gamma &= 4a^2 - 4 \times 2(a^2 - 8) \\ &= 4a^2 - 8a^2 + 64 = 64 - 4a^2 \\ &= 4(16 - a^2) \\ &= 4(4-a)(4+a) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où $a = 4$, car $1 \le a \le 6$. La probabilité cherchée est donc $\frac{1}{6}$.

32. Les coefficients a et b de l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sont obtenus indépendamment à partir du modèle probabiliste suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Trouver la probabilité que l'ellipse obtenue contienne le point (1,1).

Solution. Pour qu'une ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ contiennent le point $(1, 1)$, il suffit que

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \leq 1.$$

Cela est impossible si l'un des deux coefficients *a* ou *b* est 1. En fait, si on enlève tous les cas où (a, *b)* contient 1, il ne reste que les cas suivants : (2, 2); (2, 3); (3, 2); (3, 3). Il y a donc 4 cas à considérer, chacun ayant une probabilité de 1/9 et par suite la probabilité cherchée est 4/9.

33. Un dé est ainsi construit : une face est marquée avec un point, deux faces avec 2 points et trois faces avec 3 points. Si on lance le dé on peut donc obtenir les résultats : 1, 2 ou 3. On lance le dé deux fois et on note les résultats obtenus.

i) Trouver la probabilité que les deux résultats soient égaux.

ii) Trouver la probabilité que la somme des deux résultats soit 4.

Solution. La variable aléatoire associée à l'expérience qui consiste à lancer un dé ainsi marqué a une loi de probabilité donnée par le tableau suivant

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Les lois de probabilité des deux variables aléatoires X_1, X_2, correspondant au résultat du premier et du second lancer, sont décrites par le même tableau que la loi de probabilité de la variable aléatoire *X*.

i)

$$\begin{aligned} P(X_1 = X_2) &= \sum_{k=1}^{3} P(X_1 = k)P(X_2 = k) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ii)

$$\begin{aligned}
P(X_1 + X_2 = 4) &= \sum_{k=1}^{3} P(X_1 = k)P(X_2 = 4 - k) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 3) \\
&\quad + P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) \\
&\quad\quad + P(X_1 = 3)P(X_2 = 1) \\
&= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \\
&= \frac{5}{18}.
\end{aligned}$$

34. Les chiffres a et b du nombre $10a + b$ sont obtenus indépendamment du modèle probabiliste suivant

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & 9 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \cdots & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Établir le tableau qui représente la loi de probabilité de la variable aléatoire $C = A + B$ *où* A et B représentent le résultat du premier et du second nombres obtenus du modèle.

i) Quelle est la probabilité que le nombre $10a + b$, ainsi obtenu soit divisible par 3 ?

ii) Quelle est la probabilité que le nombre $10a + b$, ainsi obtenu soit divisible par 5 ?

Solution. i) Soit donc A et B les deux variables aléatoires qui nous fourniront respectivement a et b. Puisque chaque variable varie de 0 à 9 et qu'elles sont indépendantes, on en déduit que $C = A + B$ variera de 0 à 18. On trouve ainsi la probabilité d'une valeur quelconque pour $k = 0, \ldots ,18$,

$$\begin{aligned}
P(C = k) &= P(A + B = k) = \sum_{j} P(A = j)P(B = k - j) \\
&= \frac{1}{10} \sum_{j} P(B = k - j),
\end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

la somme s'effectuant sur les j tels que $0 \leq j \leq 9$ et en plus, $0 \leq k - j \leq 9$. Ainsi, on a

$$
\begin{array}{ll}
k = 0, & j = 0 \\
k = 1, & j = 0, 1 \\
k = 2, & j = 0, 1, 2 \\
k = 3, & j = 0, 1, 2, 3 \\
k = 4, & j = 0, 1, 2, 3, 4 \\
k = 5, & j = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\
k = 6, & j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\
k = 7, & j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\
k = 8, & j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \\
k = 9, & j = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\
k = 10, & j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\
k = 11, & j = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\
k = 12, & j = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\
k = 13, & j = 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\
k = 14, & j = 5, 6, 7, 8, 9 \\
k = 15, & j = 6, 7, 8, 9 \\
k = 16, & j = 7, 8, 9 \\
k = 17, & j = 8, 9 \\
k = 18, & j = 9
\end{array}
$$

Donc on peut écrire

$$
\begin{aligned}
P(A + B = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(A = j) P(B = k - j) \\
&= \frac{1}{10} \sum_{j=0}^{k} P(B = k - j) \\
&= \frac{k+1}{10^2} \quad \text{si } k = 0, \ldots, 9,
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned} P(A+B=k) &= \sum_{j=k-9}^{9} P(A=j)P(B=k-j) \\ &= \frac{1}{10}\sum_{j=k-9}^{9} P(B=k-j) \\ &= \frac{18-k+1}{10^2} \quad \text{si } k=10,\ldots,18. \end{aligned}$$

On obtient le tableau qui représente la loi de probabilité

$$A+B\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \frac{1}{10^2} & \frac{2}{10^2} & \frac{3}{10^2} & \frac{4}{10^2} & \frac{5}{10^2} & \frac{6}{10^2} & \frac{7}{10^2} & \frac{8}{10^2} & \frac{9}{10^2} & \frac{10}{10^2} \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & \\ \frac{9}{10^2} & \frac{8}{10^2} & \frac{7}{10^2} & \frac{6}{10^2} & \frac{5}{10^2} & \frac{4}{10^2} & \frac{3}{10^2} & \frac{2}{10^2} & \frac{1}{10^2} & \end{pmatrix}.$$

ii) Un nombre $10a+b$ est divisible par 3 dès que la somme de ses chiffres $a+b$ est elle-même divisible par 3. On cherche donc

$$\begin{aligned} & P\left(\cup_{k=0}^{6}(A+B=3k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{6} P(A+B=3k) \\ &= \frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^2}+\frac{7}{10^2}+\frac{10}{10^2}+\frac{7}{10^2}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^2} \\ &= \frac{34}{10^2}. \end{aligned}$$

iii) Un nombre $10a+b$ est divisible par 5 si le chiffre b est un 0 ou un 5. Donc

$$\begin{aligned} P((B=0)\cup(B=5)) &= P(B=0)+P(B=5) \\ &= \frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

35. Chaque coefficient de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est obtenu en lançant un dé et en prenant le nombre de points résultant. Quelle est la probabilité que l'équation ainsi obtenue possède des racines identiques ? Des racines distinctes ?

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Solution. Les coefficients de l'équation sont des variables aléatoires associées à l'expérience qui consiste à lancer un dé. Notons par X_1, X_2, X_3 les trois variables aléatoires associées à la détermination des coefficients respectifs de l'équation. Ces variables aléatoires sont indépendantes et ont la même loi de probabilité. L'équation possède des racines identiques (donc une racine double) dès que son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. On cherche donc

$$\begin{aligned} p &= P(X_2^2 - 4X_1X_3 = 0) = P(X_2^2 = 4X_1X_3) \\ &= \sum_k P(X_2^2 = k)P\left(X_1X_3 = \frac{k}{4}\right) \\ &= \frac{1}{6}\sum_k P\left(X_1X_3 = \frac{k}{4}\right), \end{aligned}$$

où la somme s'effectue sur les valeurs k de la variable aléatoire *X2/2, à* savoir 1, 4, 9, 16, 25, 26 et qui sont en plus divisibles par 4, car la variable aléatoire X_1 X_3 prend des valeurs entières, il reste donc k = 4, 16, 36. On trouve (voir problème 27ii), Section 3.3)

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{6}\big(P(X_1X_3 = 1) + P(X_1X_3 = 4) + P(X_1X_3 = 9)\big) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6^2} + \frac{3}{6^2} + \frac{1}{6^2}\right) \\ &= \frac{5}{6^3} \\ &= \frac{5}{216}. \end{aligned}$$

Les racines de l'équation sont distinctes quand $\Delta \neq 0$, donc la probabilité est q *où* $q = 1 - p$ = 211/216.

Remarque. En comparant la solution de ce problème en utilisant d'une part la définition classique de probabilité (voir problème 12, Section 2.3) et d'autre part les variables aléatoires, on appréciera la simplification apportée dans les raisonnements par l'utilisation des variables aléatoires.

36. On considère le nombre complexe $a + bi$, où a et b sont déterminés en lançant un dé. Trouver la probabilité que le nombre complexe ainsi obtenu se trouve sur le cercle

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

i) $x^2 + y^2 = 10$.

ii) $x^2 + y^2 = 3$.

Solution. Aux deux expériences servant à déterminer les nombres a et b, on associe deux variables aléatoires indépendantes, X_1 et X_2, ayant les mêmes lois de probabilité.

Un nombre complexe $z = a + bi$ se trouve sur un cercle centré à l'origine et de rayon r (donc d'équation $x^2 + y^2 = r^2$) si et seulement si $|z|^2 = r^2$, donc si et seulement si $a^2 + b^2 = r^2$.

i)

$$P(X_1^2 + X_2^2 = 10) = \sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k)P(X_2^2 = 10 - k^2).$$

La somme s'effectue sur les indices k tels que $10 - k^2$ appartiennent à l'ensemble {11, 4, 9, 16, 25, 36}, c'est-à-dire à l'ensemble des valeurs que peut prendre le carré de la variable aléatoire associée à l'expérience qui consiste à lancer un dé. Donc

$$\begin{aligned} P(X_1^2 + X_2^2 = 10) &= P(X_1 = 1)P(X_2^2 = 9) \\ &\qquad + P(X_1 = 3)P(X_2^2 = 1) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{36} \\ &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

ii)

$$P(X_1^2 + X_2^2 = 3) = \sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k^2)P(X_2^2 = 3 - k^2) = 0,$$

car dans ce cas, il n'y a pas d'indice k tel que $3 - k'$ appartiennent à {1, 4, 9,16, 25, 36}.

37. Considérons la variable aléatoire X ayant la loi de probabilité donnée par le tableau suivant

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Calculer la valeur moyenne et la variance de la variable aléatoire *X*.

Solution. *E(X)* = 1 x 0,2 + 2 x 0, 4 + 3 x 0,4 = 2,2.

Pour calculer $Var(X) = E((X - E(X))^2)$ on peut trouver d'abord le tableau qui représente la loi de probabilité de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$, donc

$$(X - E(X))^2 \begin{pmatrix} (-1,2)^2 & (-0,2)^2 & (0,8)^2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix},$$

et ainsi on obtient

$$Var(X) = 1,44 \times 0,2 + 0,04 \times 0,4 + 0,64 \times 0,4 = 0,56.$$

On peut calculer la variance d'une autre façon, à savoir en utilisant la formule

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= 1 \times 0,2 + 4 \times 0,4 + 9 \times 0,4 - 4,84 = 0,56. \end{aligned}$$

38. On considère les variables aléatoires indépendantes dont les lois de probabilité sont données respectivement par les tableaux

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0,7 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

et

$$Y \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 0,2 & 0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Calculer

i) $E(2X + 4Y)$.

ii) $Var(2X + 4Y)$.

iii) L'écart type de la variable aléatoire $2X + 4Y$.

Solution. i) $E(2X+4Y) = 2E(X)+4E(Y) = 2(1\times 0,7+2\times 0,1+4\times 0,2)+4(1\times 0,2+4\times 0,4+6\times 0,1+7\times 0,3) = 2\times 1,7+4\times 4,5 = 21,4$.

ii) $Var(2X + 4Y) = 4Var(X) + 16Var(Y)$. Mais

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 1,41$$

Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

et
$$Var(Y) = 4,65,$$
donc
$$Var(2X + 4Y) = 80,04.$$
iii) $\sigma(2X + 4Y) = \sqrt{80,04} = 8,947.$

39. Calculer la valeur moyenne pour la variable aléatoire considérée dans le problème 20.

Solution. Dans le problème 20, on a considéré les probabilités à 3 décimales près. Pour calculer la valeur moyenne, on utilisera les probabilités exactes, donc $P(X = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}}$. On obtient

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{5} k \frac{\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}}{\binom{100}{5}} \\ &= \frac{1}{\binom{100}{5}} \sum_{k=0}^{5} k \binom{10}{k}\binom{90}{5-k}. \end{aligned}$$

Pour calculer la somme $\sum_{k=0}^{5} k\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$, notons que $\sum_{k=0}^{5} \binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$ est le coefficient de y^5 du produit

$$(1+y)^{10}(1+y)^{90},$$

et $\sum_{k=0}^{5} k\binom{10}{k}\binom{90}{5-k}$ est le coefficient de y^5 de l'expression

$$\frac{d}{dt}\,(1+ty)^{10}(1+y)^{90}\Big|_{t=1} = 10y(1+y)^{99}.$$

Par la suite
$$\sum_{k=0}^{5} k\binom{10}{k}\binom{90}{5-k} = 10\binom{99}{4}$$
et
$$E(X) = \frac{10\binom{99}{4}}{\binom{100}{5}} = 0,5.$$

40. Calculer le moment d'ordre k de la variable aléatoire X qui représente le nombre de points obtenus quand on lance un dé.

Solution. On a

$$E(X^k) = \frac{1}{6}(1^k + 2^k + 3^k + 4^k + 5^k + 6^k).$$

En particulier, pour $k = 1$, on obtient $E(X) = \frac{7}{2}$.

41. La variable aléatoire X possède la fonction de masse suivante

$$f(x) = \begin{cases} k^2 & \text{si } x = -2 \\ (1/2) - k & \text{si } x = -1 \\ k & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

i) Trouver la valeur de k et donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

ii) Calculer $E(X + 2)$.

iii) Calculer $Var(X + 1)$.

iv) Calculer $E(X^3)$.

Solution. i) De $k^2 + \frac{1}{2} - k + k + \frac{1}{4} = 1$ on trouve $k = \frac{1}{2}$ et par suite la fonction de masse de la variable aléatoire X est

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x = -2 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/4 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

ii) $E(X + 2) = 2 + E(X) = 2 + \frac{1}{4}(-2) + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

iii) $Var(X + 1) = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$. Parce que $E(X^2) = 4 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, on obtient $Var(X + 1) = \frac{5}{4} - \frac{1}{16} = \frac{19}{16}$.

iv) $E(X^3) = (-2)^3 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

42. La variable aléatoire X possède la fonction de masse

$$f(x) = \begin{cases} \frac{16}{15}(\frac{1}{2})^x & \text{si } x = 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver

i) $E(X)$.

ii) $E(X^2)$.

iii) $Var(X)$.

iv) $Var(X+2)$.

Solution. Notons d'abord que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

i) $E(X) = \frac{8}{15} + 2 \times \frac{4}{15} + 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{1}{15} = \frac{26}{15}$.

ii) $E(X^2) = \frac{8}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 9 \times \frac{2}{15} + 16 \times \frac{1}{15} = \frac{58}{15}$.

iii) $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{58}{15} - (\frac{26}{15})^2 = \frac{194}{225}$.

iv) $Var(X+2) = Var(X)$.

43. La variable aléatoire X possède la fonction de masse

$$f(x) = \begin{cases} 9/(25x) & \text{si } x = 1, 2, 3, 4 \\ 1/8 & \text{si } x = 5, 6 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver

i) $E(X)$.

ii) $E(X^2)$.

iii) $Var(X)$.

Solution. Notons d'abord que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{216}{600} & \frac{108}{600} & \frac{72}{600} & \frac{54}{600} & \frac{75}{600} & \frac{75}{600} \end{pmatrix}.$$

i) $E(X) = \frac{216}{600} + 2 \times \frac{108}{600} + 3 \times \frac{72}{600} + 4 \times \frac{54}{600} + 5 \times \frac{75}{600} + 6 \times \frac{75}{300} = \frac{563}{200}$.

ii) $E(X^2) = \frac{216}{600} + 4 \times \frac{108}{600} + 9 \times \frac{72}{600} + 16 \times \frac{54}{600} + 25 \times \frac{75}{600} + 36 \times \frac{75}{600} = \frac{2\ 245}{200}$.

iii) $Var(X) = E(X^2) - ((E(X))^2 = \frac{132\ 031}{40\ 000}$.

44. Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $E(X) = 1,\ E(Y) = 2$. Calculer l'espérance mathématique de $2X + 4Y$.

Solution. $E(2X + 4Y) = 2E(X) + 4E(Y) = 2 + 8 = 10$.

45. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $E(X^4) = 2,\ E(X^2) = 1,\ E(Y^2) = 1$ et $E(Y) = 0$. Calculer la variance de X^2Y.

Solution. On trouve

$$\begin{aligned} Var(X^2Y) &= E(X^4Y^2) - (E(X^2Y))^2 \\ &= E(X^4)E(Y^2) - (E(X^2)E(Y))^2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

46. Soit X une variable aléatoire avec $E(X) = 50$ et $Var(X) = 4$. Trouver

i) $E(X^2)$.

ii) $Var(2X + 4)$.

iii) l'écart-type de $2X + 4$.

iv) $Var(-X)$.

v) l'écart-type de $-X$.

Solution. i). $E(X^2) = Var(X) + (E(X))^2 = 4 + 2\ 500 = 2\ 504$.

ii) $Var(2X + 4) = 4Var(X) = 16$.

iii) $\sqrt{Var(2X + 4)} = 4$.

iv) $Var(-X) = Var(X) = 4$.

v) $\sqrt{Var(-X)} = 2$.

47. Soit X une variable aléatoire avec $E(X) = 25$ et $Var(X) = 25$. Soit $Y = \frac{X-25}{5}$. Trouver

i) $E(Y)$.

ii) $Var(Y)$.

Solution. i) $E(Y) = \frac{1}{5}(E(X) - 25) = 0$.

ii) $Var(Y) = \frac{1}{25}Var(X) = 1$.

48. Considérons l'expérience qui consiste à lancer deux dés. Notons X_1 la variable aléatoire qui prend les valeurs i, $i = 1, \ldots, 6$ selon le nombre de points donnés par le premier dé et X_2 la variable aléatoire qui prend les valeurs j, $j = 1, \ldots, 6$ selon le nombre de points donnés par le deuxième dé. Soit $Y = X_1 + X_2$.

i) Donner la fonction de masse $fy(x) = P(Y = x)$ et la fonction de répartition $Fy(x) = P(Y \leq x)$ de la variable aléatoire Y.

ii) Calculer $E(Y)$.

*iii)*Calculer $Var(Y)$.

Solution.

i) Tout d'abord, pour k tel que $2 \leq k \leq 12$,

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= \sum_{i=1}^{6} P(X_1 = i)P(X_2 = k - i) \\ &= \frac{1}{36} \sum_{i=max(1,k-6)}^{min(6,k-1)} 1, \end{aligned}$$

la somme s'effectuant sur les i tels que $1 \leq i \leq 6$, et en plus, $1 \leq k - i \leq 6$, donc

$$\begin{aligned} &k = 2, \quad i = 1 \\ &k = 3, \quad i = 1, 2 \\ &k = 4, \quad i = 1, 2, 3 \\ &k = 5, \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ &k = 6, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \\ &k = 7, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ &k = 8, \quad i = 2, 3, 4, 5, 6 \\ &k = 9, \quad i = 3, 4, 5, 6 \\ &k = 10, \quad i = 4, 5, 6 \\ &k = 11, \quad i = 5, 6 \\ &k = 12, \quad i = 6 \end{aligned}$$

La fonction de masse de la variable aléatoire Y est

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{36} & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \\ \frac{13-x}{36} & \text{si } 7 < x \leq 12 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire Y est

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{j(j-1)}{72} & \text{si } j \leq x < j+1,\ 2 \leq j \leq 7 \\ \frac{7}{12} + \frac{(j-7)(18-j)}{72} & \text{si } j \leq x < j+1,\ 7 < j \leq 11 \\ 1 & \text{si } x \geq 12 \end{cases}$$

On peut trouver la fonction de masse et la fonction de répartition de la variable aléatoire *Y*, en utilisent directement sa loi de probabilité (voir problème 27 i), Section 3.3).

ii) $E(Y) = \sum_{i,j=1}^{6} \frac{i+j}{36} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} (\sum_{j=1}^{6} (i+j)) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} (6i + 21) = \frac{252}{36} = 7$.

iii) $E(Y^2) = \sum_{i,j=1}^{6} \frac{(i+j)^2}{36} = \frac{1}{36} \sum_{i,j=1}^{6} (i^2 + 2ij + j^2) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} (6i^2 + 42i + 91) = \frac{329}{6}$ et par suite $Var(Y) = \frac{329}{6} - 7^2 = \frac{35}{6}$.

49. Dans une expérience, l'événement *A* peut survenir avec une probabilité p. On répète l'expérience *n* fois de manière indépendante. Trouver la valeur moyenne et la variance de la variable aléatoire *X* qui représente le nombre d'apparitions de *A*.

Solution.

Méthode I

La variable aléatoire *X* peut prendre les valeurs 0, 1, . . . , *n* et on obtient les probabilités en utilisant le schéma de Bernoulli,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ (1-p)^n & \binom{n}{1}p(1-p)^{n-1} & \dots & \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \dots & p^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} \\ &= np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}p^j(1-p)^{n-1-j} \\ &= np(p+(1-p))^{n-1} = np, \end{aligned}$$

où on a posé $j = k - 1$.

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} - (np)^2. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} ((k-1)+1) \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} j \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-j-1} \\
&\qquad + np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= np(n-1)p + np.
\end{aligned}$$

Donc

$$Var(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

Méthode II

On peut éviter les calculs fastidieux de la méthode I, en procédant comme suit : à la k-ième expérience on associe la variable aléatoire X_k qui peut prendre seulement les valeurs 1 ou 0, selon que l'événement A ou A^c est apparu dans cette expérience. La loi de probabilité de cette variable X_k est donnée par le tableau

$$X_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-p) & p \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 1, \ldots, n$, les variables aléatoires X_k sont indépendantes parce qu'elles correspondent à des expériences indépendantes, et

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

En effet, dans le membre gauche on a le nombre d'apparitions de l'événement A en n essais ; dans le membre de droite on a une somme de 1 et de 0 dont le total correspond au nombre d'apparitions de A. Comme

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

et que les variables aléatoires sont indépendantes,

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n).$$

Or

$$E(X_k) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$$

et

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

donc

$$E(X) = np \text{ et } Var(X) = np(1-p).$$

50. On réalise *n* expériences indépendantes. À la suite de la *k*-ième expérience, on peut avoir l'événement *A* avec probabilité p_k, $k = 1, \dots n$. (La probabilité d'apparition de l'événement A varie d'une expérience à l'autre). Trouver la valeur moyenne et la variance de la variable aléatoire *X* qui représente le nombre d'apparitions de l'événement *A* pour les *n* essais.

    Solution. Soit *X* la variable aléatoire qui représente le nombre d'apparitions de l'événement *A* et X_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 ou 0, selon que dans l'expérience de rang *k* on a ou non, l'événement *A*, $k = 1, \dots, n$, alors

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

On a

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

et parce que les variables aléatoires sont indépendantes,

$$Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n).$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X_k est donnée par le tableau

$$X_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_k & (1-p_k) \end{pmatrix},$$

où $k = 1, \dots, n$. Donc $E(X_k) = p_k$ et

$$\begin{aligned} Var(X_k) &= E(X_k^2) - (E(X_k))^2 \\ &= p_k - p_k^2 \\ &= p_k(1-p_k). \end{aligned}$$

Par la suite

$$E(X) = p_1 + \cdots + p_n$$

et

$$Var(X) = p_1 (1 - p1) + \cdots + p_n (1 - p_n).$$

Remarque. La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 0, 1, ... , n et on obtient les probabilités en utilisant le schéma de Poisson. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ P_0 & P_1 & \dots & P_k & \dots & P_n \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}(p_1x + (1-p_1))(p_2x &+ (1-p_2)) + \cdots + (p_nx + (1-p_n)) \\ &= P_nx^n + \cdots + P_1x + P_0.\end{aligned}$$

On propose au lecteur de calculer $E(X)$ et $Var(X)$ en utilisant les définitions de l'espérance et de la variance.

51. D'une urne contenant a boules blanches et b boules noires, on tire n boules sans remise ($n \leq a$ et $n \leq b$).

i) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules blanches choisies.

ii) Calculer la valeur moyenne de la variable aléatoire X.

iii) Calculer la variance de la variable aléatoire X.

iv) En utilisant les résultats de ce problème, solutionner le problème 39.

Solution. i) La variable aléatoire X prend les valeurs $0, 1, \dots, n$ et on trouve les probabilités en utilisant le schéma de l'échantillon sans remise. Ainsi $P(X = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$, et par suite la loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & k & \dots & n \\ \frac{\binom{a}{0}\binom{b}{n}}{\binom{a+b}{n}} & \frac{\binom{a}{1}\binom{b}{n-1}}{\binom{a+b}{n}} & \dots & \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} & \dots & \frac{\binom{a}{n}\binom{b}{0}}{\binom{a+b}{n}} \end{pmatrix},$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

et

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} = 1.$$

ii) Pour calculer $E(X)$ on procède de la façon suivante : à la sélection de rang k on associe la variable aléatoire X_k qui prend la valeur 1 ou 0 selon qu'à cette pige on obtienne une boule blanche ou bien une noire. Ainsi

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 est donnée par le tableau

$$X_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-p) & p \end{pmatrix},$$

où $p = \frac{a}{a+b}$, $1 - p = \frac{b}{a+b}$.

Montrons que toutes les variables aléatoires X_k, $k = 2, \ldots, n$, ont la même loi de probabilité que la variable X_1. Calculons la probabilité qu'à la sélection de rang k on obtienne une boule blanche. Si on suppose que de l'urne on extrait succesivement toutes les $a + b$ boules, alors le nombre de cas possibles est $(a + b)!$, et le nombre de cas favorables à savoir que la k sélection soit une boule blanche est a $(a + b - 1)!$. En effet, la boule blanche à la k-ième sélection peut-être n'importe laquelle des a boules blanches, tandis que les autres $a + b - 1$ boules peuvent prendre les places restantes de $(a + b - 1)!$ manières différentes. Ainsi

$$P(X_k = 1) = \frac{a(a+b-1)!}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b} = p.$$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X_k est donnée par le tableau

$$X_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-p) & p \end{pmatrix},$$

$k = 1, \ldots, n$. Parce que $E(X_k) = p$, on trouve

$$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = np.$$

iii) Les variables aléatoires X_k ne sont pas indépendantes puisque

$$\frac{a}{a+b} = P(X_2 = 1) \neq P(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \frac{a-1}{a+b-1}$$

et par suite

$$Var(X) \neq Var(X_1) + \cdots + Var(X_n).$$

Nous donnons trois méthodes pour calculer la variance de la variable aléatoire X.

Méthode I

Calculons la variance de la variable aléatoire X en utilisant malgré tout le fait que $X = X_1 + \cdots + X_n$. On procède de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Var(X) &= E((X - E(X))^2) = E((X_1 + \cdots + X_n - np)^2) \\ &= E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j - 2np\sum_{k=1}^{n} X_k + n^2p^2\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} E(X_k^2) + 2\sum_{i<j} E(X_iX_j) - 2np\sum_{k=1}^{n} E(X_k) + n^2p^2. \end{aligned}$$

Parce que $E(X_k^2) = E(X_k) = p$, $k = 1, \ldots, n$, il reste à calculer $E(X_iX_j)$, $i < j$, mais puisque les variables aléatoire X_i, X_j ne sont pas indépendantes, $E(X_iX_j) \neq E(X_i)E(X_j)$. Aussi trouvons d'abord la loi de probabilité de la variable aléatoire X_iX_j. Cette variable aléatoire prend les valeurs 0 et 1. Or

$$\begin{aligned} P(X_iX_j = 1) &= P(X_i = 1,\ X_j = 1) \\ &= P(X_i = 1)P(X_j = 1 | X_i = 1) \\ &= p \times \frac{a-1}{a+b-1}, \end{aligned}$$

Ainsi,

$$X_iX_j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - p\frac{a-1}{a+b-1} & p\frac{a-1}{a+b-1} \end{pmatrix}.$$

Donc $E(X_iX_j) = p\frac{a-1}{a+b-1}$. Dans la somme $\sum_{i<j} E(X_iX_j)$, on a $\binom{n}{2}$ termes égaux, ainsi

$$2\sum_{i<j} E(X_iX_j) = n(n-1)p\frac{a-1}{a+b-1}.$$

Par la suite

$$\begin{aligned} Var(X) &= np + n(n-1)p\frac{a-1}{a+b-1} - 2n^2p^2 + n^2p^2 \\ &= np\left(1 + (n-1)\frac{a-1}{a+b-1} - np\right) \\ &= \frac{np(1-p)}{a+b-1}\left(\frac{b}{(1-p)} + na - n - \frac{npb}{(1-p)}\right) \\ &= np(1-p)\frac{a+b-n}{a+b-1}. \end{aligned}$$

Méthode II

Utilisons la formule

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\sum_{\substack{i=1,j=1\\ i<j}}^{n} Cov(X_i, X_j).$$

D'abord $Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = p - p^2 = p(1-p)$,

et

$$\begin{aligned} Cov(X_i, X_j) &= E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) \\ &= \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1} - \frac{a^2}{(a+b)^2} \\ &= \frac{-ab}{(a+b)^2(a+b-1)} \\ &= \frac{-p(1-p)}{a+b-1}. \end{aligned}$$

Par suite

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= nVar(X_i) + 2\binom{n}{2}Cov(X_i, X_j) \\
&= np(1-p) + n(n-1)\left(\frac{-p(1-p)}{a+b-1}\right) \\
&= np(1-p)\left(1 - \frac{n-1}{a+b-1}\right) \\
&= np(1-p)\frac{a+b-n}{a+b-1}.
\end{aligned}
$$

Méthode III

D'abord

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a\binom{a-1}{k-1}\binom{b}{n-1-(k-1)}}{\frac{a+b}{n}\binom{a-1+b}{n-1}} \\
&= n\frac{a}{a+b}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\binom{a-1}{j}\binom{b}{n-1-j}}{\binom{a-1+b}{n-1}} \\
&= n\frac{a}{a+b},
\end{aligned}
$$

car

$$
\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\binom{a-1}{j}\binom{b}{n-1-j}}{\binom{a-1+b}{n-1}} = 1.
$$

De plus, on a (voir problème 3, Section 3.3)

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \frac{\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}} \\
&= \frac{\sum_{k=2}^{n} a(a-1)\binom{a-2}{k-2}\binom{b}{n-2-(k-2)}}{\frac{(a+b)(a+b-1)}{n(n-1)}\binom{a-2+b}{n-2}} \\
&= \frac{n(n-1)a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\
&= \frac{n(n-1)a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{na}{a+b} - \frac{n^2a^2}{(a+b)^2} \\
&= \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)} \\
&= np(1-p)\frac{a+b-n}{a+b-1}.
\end{aligned}$$

iv) Dans le problème 39 on a $a+b=100,\ a=10,\ b=90,\ n=5,\ p=\frac{1}{10},\ (1-p)=\frac{9}{10}$. Donc $E(X)=np=5\times\frac{1}{10}=0,5$.

52. Dans une urne il y a des boules numérotées de 1 à n. On extrait successivement toutes les boules et on les place selon l'ordre de sélection. Trouver la valeurs moyenne et la variance du nombre de concordances[4], une concordance à la k-ième sélection correspondant à la sélection de la boule numérotée k.

Solution. Soit X la variable aléatoire qui représente le nombre de concordances qu'on obtient lors des n sélections. On associe à la sélection de rang k la variable aléatoire X_k qui prend les valeurs 1 ou 0, selon que lors de ce choix on a une concordance ou pas. Ainsi

$$X = X_1 + \cdots + X_n$$

[4] Voir le problème des concordances, problème 38, Section 2.2

et donc

$$E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

Il nous faut donc calculer $E(X_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Trouvons d'abord la loi de probabilité de la variable aléatoire X_k. Toutes les variables aléatoires ont la même loi de probabilité. En effet, calculons $P(X_k = 1)$. Pour cela, on suppose qu'on extrait de l'urne successivement les n boules. Il y a $n!$ cas possibles, et $(n-1)!$ cas favorables (car la boule numérotée k doit être pigée au k-ième rang tandis que les autres $n-1$ boules peuvent être pigées de $(n-1)!$ manières différentes). Ainsi $P(X_k = 1) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ et $P(X_k = 0) = 1 - P(X_k = 1) = 1 - \frac{1}{n}$, $k = 1, \ldots, n$. La loi de probabilité de la variable aléatoire X_k est donc donnée par le tableau

$$X_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n} & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

De plus, on a

$$E(X_k) = \frac{1}{n} \text{ et ainsi } E(X) = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Remarquons que $Var(X) \neq Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)$, car les variables aléatoires X_k, $k = 1, \ldots, n$ ne sont pas indépendantes.

Si $i \neq j$, alors $P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$, et par suite la loi de probabilité de la variable aléatoire X_iX_j, $i \neq j$, est donnée par le tableau

$$X_iX_j \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - \frac{1}{n(n-1)} & \frac{1}{n(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$Cov(X_i, X_j) = \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} & \text{si } i = j \\ \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} & \text{si } i \neq j \end{cases} = \begin{cases} \frac{n-1}{n^2} & \text{si } i = j \\ \frac{1}{n^2(n-1)} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

car $Cov(X_i, X_i) = Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$.

Par conséquent

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} Cov(X_i, X_j) \\ &= n\frac{(n-1)}{n^2} + n(n-1)\frac{1}{n^2(n-1)} \\ &= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} \\ &= 1. \end{aligned}$$

53. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On extrait de l'urne une boule à la fois et par la suite, on introduit dans l'urne, après chaque extraction, la boule extraite ainsi que c boules de sa couleur. Soit X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ la variable aléatoire associée à la sélection de rang *n où* X_n prend la valeur 0 si la boule pigée est blanche et la valeur 1 si la boule pigée est noire.

   i) Montrer que toutes les variables aléatoires X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ont la même loi de probabilité.

   ii) Posons

$$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

   Calculer $E(Y_n)$ et $Var(Y_n)$. Que représente la variable aléatoire Y_n ?

   Solution. i) Parce que chaque variable aléatoire X_n ne prend que les valeurs 0 et 1, sa loi de probabilité sera déterminée par la probabilité $P(X_n = 1)$. De plus dans ce cas, $E(X_n) = 1P(X_n = 1) + 0P(X_n = 0)$, donc $E(X_n) = P(X_n = 1)$. Pour montrer que toutes les variables aléatoires X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ont la même loi de probabilité, utiliserons une preuve par récurrence. Notons

$$p = \frac{b}{a+b} \quad \text{alors} \quad 1-p = \frac{a}{a+b}.$$

   La loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 est donnée par le tableau

$$X_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (1-p) & p \end{pmatrix},$$

   et $E(X_1) = P(X_1 = 1) = p$. Supposons maintenant (l'hypothèse de la récurrence) que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ aient la même loi de probabilité et montrons que la variable aléatoire X_{n+1} a alors la même loi de probabilité. Pour calculer $P(X_{n+1} = 1)$ nous devons nous intéresser à la composition de l'urne après les n premières sélections. La composition de l'urne avant la sélection de rang $n + 1$ dépendra des valeurs que prend la variable aléatoire Y_n. Ainsi, si $Y_n = k$ (dans les premières n sélections on a pigé une boule noire k *fois),* l'urne aura $a + b + nc$ boules parmi lesquelles $a + (n - k)c$ blanches et $b + ck$ noires. Parce que Y_n peut prendre les valeurs 0, 1, ... , n et que les événements correspondants forment un système complet d'événements, il s'ensuit, d'après la formule de la probabilité totale, que

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)P(Y_n = k).$$

Il faut calculer d'abord $P(X_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)$ et $P(Y_n = k)$. Mais

$$P(X_{n+1} = 1 \mid Y_n = k) = \frac{b + ck}{a + b + nc}.$$

La loi de la variable aléatoire Y_n est facile à expliciter. En effet, il suffit de remarquer que toute suite de n tirages contenant exactement k boules noires a la même probabilité, à savoir

$$\frac{\prod_{j=0}^{n-k-1}(a + jc) \prod_{h=0}^{k-1}(b + hc)}{(a + b)(a + b + c) \cdots (a + b + (n - 1)c)}.$$

Comme dans n tirages il y a $\binom{n}{k}$ modalités différentes d'extraire k boules noires et $n - k$ boules blanches, on obtient

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} \frac{\prod_{j=0}^{n-k-1}(a + jc) \prod_{h=0}^{k-1}(b + hc)}{(a + b)(a + b + c) \cdots (a + b + (n - 1)c)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
P(X_{n+1}=1) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_{n+1}=1 \mid Y_n=k)P(Y_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{b+kc}{a+b+nc}P(Y_n=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}}P(Y_{n+1}=k+1)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{n+1}P(Y_{n+1}=k+1)\\
&= \frac{E(Y_{n+1})}{n+1}.
\end{aligned}$$

On obtient, en particulier

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= (n+1)\,P(X_{n+1}=1)\\
&= (n+1)\,E(X_{n+1}),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Parce que $Y_1 = X_1$ il s'ensuit que $E(Y_1) = E(X_1) = p$. De $Y_2 = X_1+X_2$ il s'ensuit que $E(Y_2) = p + E(X_2)$ et d'autre part, en utilisant la formule (3.3), pour $n = 1$, on trouve que $E(Y_2) = 2E(X_2)$, d'où $E(X_2) = p$, donc $P(X_2 = 1) = p$ et la loi de la variable aléatoire X_2 est la même que celle de X_1. Par l'hypothèse de la récurrence, $E(X_1) = \cdots = E(X_n) = p$, donc $E(Y_n) = np$, et $E(Y_{n+1}) = E(X_{n+1}) + E(Y_n) = E(X_n + 1) + np$. En utilisant la formule (3.3) on trouve $E(Y_{n+1}) = (n+1)\,E(X_{n+1}) = E(X_{n+1}) + np$, d'où on obtient $E(X_{n+1}) = p = P(X_{n+1} = 1)$, et par suite la loi de probabilité de la variable aléatoire X_{n+1} est la même que celle de la variable aléatoire X_1, ce qui complète la preuve.

ii) Notons d'abord que $E(Y_n) = np$. De plus, comme les variables aléatoires X_n pour $n \geq 1$ ont toutes la même loi de probabilité, on a $E(X_n) = p$, et $E(X\ 2/n) = p$. Trouvons maintenant $Var(Y_n)$. Parce que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas indépendantes, $Var(Y_n) \neq Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)$. Calculerons $Var(Y_k)$ de la façon suivante : si $n \geq 1$, alors

$$
\begin{aligned}
E(Y_{n+1}(Y_{n+1}-1)) &- E(Y_n(Y_n-1)) \\
&= E(Y_{n+1}^2 - Y_{n+1}) - E(Y_n^2 - Y_n) \\
&= E(Y_{n+1}^2) - (n+1)p - E(Y_n^2) + np \\
&= E(Y_{n+1}^2) - E(Y_n^2) - p \\
&= E((X_1 + \cdots + X_{n+1})^2 - (X_1 + \cdots + X_n)^2) - p \\
&= E(X_{n+1}^2) + 2E(X_{n+1}Y_n) - p \\
&= p + 2E(X_{n+1}Y_n) - p \\
&= 2E(X_{n+1}Y_n) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} kP(X_{n+1} = 1 \mid Y_n = k)P(Y_n = k) \\
&= 2\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{n+1} P(Y_{n+1} = k+1) \\
&= 2\frac{E(Y_{n+1}(Y_{n+1}-1))}{n+1},
\end{aligned}
$$

(voir le problème 3, Section 3.3). Donc

$$
\frac{E(Y_{n+1}(Y_n+1))}{n(n+1)} = \frac{E(Y_n(Y_n-1))}{n(n-1)}, \quad n > 1.
$$

Cela signifie que $\frac{E(Y_n(Y_n-1))}{n(n-1)}$ est constant pour $n > 1$. Par conséquent,

$$
\frac{E(Y_n(Y_n-1))}{n(n-1)} = \frac{E(Y_2(Y_2-1))}{2},
$$

ou

$$
\begin{aligned}
E(Y_n(Y_n-1)) &= \frac{n(n-1)}{2} E(Y_2(Y_2-1)) \\
&= n(n-1)E(X_1X_2) \\
&= n(n-1)P((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) \\
&= n(n-1)P(X_1 = 1)P(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) \\
&= n(n-1)p\frac{b+c}{a+b+c}.
\end{aligned}
$$

Comme

$$\begin{aligned} E(Y_n(Y_n-1)) &= E(Y_n^2) - E(Y_n) \\ &= Var(Y_n) + (E(Y_n))^2 - E(Y_n) \\ &= Var(Y_n) + n^2p^2 - np, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} Var(Y_n) &= n(n-1)p\frac{b+c}{a+b+c} - n^2p^2 + np \\ &= \frac{np}{a+b+c}((n-1)(b+c) - np(a+b+c) + a+b+c) \\ &= \frac{np}{a+b+c}(n(b+c) + a - np(a+b+c)) \\ &= \frac{np}{(a+b+c)(a+b)}(n(a+b)(b+c) + a(a+b) - nb(a+b+c)) \\ &= np(1-p)\frac{a+b+nc}{a+b+c}, \end{aligned}$$

en utilisant la fait que $p = \frac{b}{a+b}$ et que $1-p = \frac{a}{a+b}$.

La variable aléatoire Y_n représente le nombre obtenu de boules noires suite à n répétitions de ce procédé.

54. Montrer l'inégalité de Schwarz[5] pour les variables aléatoires X, Y,

$$(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Solution. Pour t *un* paramètre réel, la variable aléatoire $(X + tY)^2$ prend seulement des valeurs non négatives, donc $E((X + tY)^2) \geq 0$. En utilisant les propriétés de l'espérance (l'espérance d'une somme de variables aléatoires est la somme des espérances et une constante peut être factorisée), on trouve

$$\begin{aligned} 0 &\leq E((X+tY)^2) \\ &= E(X^2 + 2tXY + t^2Y^2) \\ &= E(X^2) + 2tE(XY) + t^2E(Y^2), \end{aligned}$$

donc

$$t^2E(Y^2) + 2tE(XY) + E(X^2) \geq 0.$$

[5]Karl Hermann Amandus Schwarz (1854-1928), mathématicien allemand.

Parce que le coefficient de t^2 est $E(Y^2) \geq 0$, le trinôme sera non négatif, pour tout t réel, si et seulement si son discriminant est non positif, c'est-à-dire

$$(E(XY))^2 - E(Y^2)E(X^2) \leq 0,$$

d'où l'inégalité désirée.

55. Si $x_i,\ i = 1, \ldots, n$ et $y_j,\ j = 1, \ldots, m$ sont des nombres réels quelconques et $p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^n p_i = 1$ et $q_j \geq 0, \sum_{j=1}^m q_j = 1$, alors montrer l'inégalité

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_i q_j\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 p_i\right)\left(\sum_{j=1}^m y_j^2 q_j\right).$$

Solution. On forme les variables aléatoires indépendantes dont les lois de probabilité sont données, respectivement par les tableaux

$$X\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

et

$$Y\begin{pmatrix} y_1 & \ldots & y_m \\ q_1 & \ldots & q_m \end{pmatrix}$$

et on applique l'inégalité du problème précédant. Parce que

$$E(XY) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j p_i q_j,$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i \quad \text{et} \quad E(Y^2) = \sum_{j=1}^m y_j^2 q_j$$

on obtient l'inégalité demandée.

56. Soit (X, Y) un couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.6.

Trouver

i) les lois marginales de probabilité des variables aléatoires X et Y.

ii) la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire (X, Y).

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$x \backslash y$	-1	0	1	
0	1/18	0/18	1/18	1/9
1	1/18	4/9	1/18	5/9
2	1/18	2/9	1/18	1/3
	1/6	2/3	1/6	1

Tableau 3.6.

Solution. i) On trouve

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix}.$$

et

$$Y\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

ii) La fonction de répartition conjointe du couple aléatoire (X, Y) est

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < -1 \\ 1/18 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } -1 \le y < 0 \\ 1/18 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 2/18 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } y \ge 1 \\ 3/18 & \text{si } 1 \le x < 2 \text{ et } -1 \le y < 0 \\ 11/18 & \text{si } 1 \le x < 2 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 12/18 & \text{si } 1 \le x < 2 \text{ et } y \ge 1 \\ 13/18 & \text{si } x \ge 2 \text{ et } -1 \le y < 0 \\ 17/18 & \text{si } x \ge 2 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \text{ et } y \ge 1 \end{cases}$$

57. On tire au hasard deux boules en même temps d'une urne qui contient une boule blanche, trois boules noires et six boules jaunes.

i) Donner la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)*, où *X* et *Y* représentent respectivement le nombre de boules blanches ou noires obtenues.

ii) Donner les lois marginales de probabilité des variables aléatoires *X* et *Y*.

iii) Donner la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire *(X, Y)*.

iv) Calculer *Cov(X, Y)* et *Corr(X, Y)*. Vérifier si les variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes.

Solution. i) Notons d'abord que l'ensemble des valeurs possibles pour le couple aléatoire *(X, Y)* est

$$\{(0, 0), (1,0), (0,1), (1,1), (0, 2)\}.$$

Parce que tous les ensembles de deux boules choisies parmi les dix boules de l'urne sont équiprobable, on obtient

$$p_{00} = P(X = 0, Y = 0) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = 5/15,$$

$$p_{10} = P(X = 1, Y = 0) = \frac{\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = 2/15,$$

$$p_{01} = P(X = 0, Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = 6/15,$$

$$p_{11} = P(X = 1, Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}} = 1/15,$$

$$p_{02} = P(X = 0, Y = 2) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = 1/15,$$

$$p_{12} = P(X = 1, Y = 2) = 0,$$

il s'ensuit que la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par le tableau 3.7.

$x \backslash y$	0	1	2	
0	5/15	6/15	1/15	12/15
1	2/15	1/15	0	3/15
	7/15	7/15	1/15	1

Tableau 3.7.

ii) On trouve

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

et

$$Y\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{15} & \frac{7}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}.$$

iii) La fonction de répartition conjointe du couple aléatoire (X, Y) est

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ 5/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 11/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } 1 \le y < 2 \\ 12/15 & \text{si } 0 \le x < 1 \text{ et } y \ge 2 \\ 14/15 & \text{si } x \ge 1 \text{ et } 0 \le y < 1 \\ 15/15 & \text{si } x \ge 1 \text{ et } 1 \le y < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \text{ et } y \ge 2 \end{cases}$$

iv) On doit calculer $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. D'abord d'après ii), on trouve $E(X) = 1/5 = E(X^2)$, et $E(Y) = 3/5$, $E(Y^2) = 11/15$. De plus,

$$XY\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{14}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix},$$

donc $E(XY) = 1/15$. Par suite, $Cov(X,Y) = \frac{1}{15} - \frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = -\frac{4}{75}$. Trouvons maintenant $Corr(X,Y)$. D'abord, $Var(X) = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} = \frac{4}{25}$ et $Var(Y) = \frac{11}{15} - \frac{9}{25} = \frac{28}{75}$. Par suite, $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \frac{2}{5}$ et $\sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \frac{2\sqrt{7}}{5\sqrt{3}}$, donc $Corr(X,Y) = -\frac{1}{\sqrt{21}} = -0,218$.

Parce que $Cov(X, Y) \neq 0$, les variables aléatoires X et Y sont dépendantes. On peut voir aussi que $\frac{5}{15} = P(X = 0,\ Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0) = \frac{12}{15} \times \frac{7}{15}$.

58. La loi de probabilité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est telle que

$$P(X = 1, Y = 0) = 1/4\ ;$$

$$P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1, Y = 2) = 1/8\ ;$$

$$P(X = 2, Y = 0) = P(X = 2, Y = 1) = P(X = 2, Y = 2) = 1/6.$$

i) Donner le tableau qui représente la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire *(X, Y).*

ii) Posons $Z = y/x$. En utilisant ce tableau calculer $E(Z)$.

iii) Donner la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire *(X, Y).*

iv) Donner les fonctions de répartiton marginales des variables aléatoires X et Y.

v) Calculer *Cov(X, Y)* et *Corr(X, Y).*

Solution. i) On trouve le tableau 3.8.

x \ y	0	1	2	
1	1/4	1/8	1/8	1/2
2	1/6	1/6	1/6	1/2
	5/12	7/24	7/24	1

Tableau 3.8.

ii) On trouve

$$E(Z) = E\left(\frac{Y}{X}\right) = \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{8}.$$

iii) On obtient

Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } y < 0 \\ 1/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 3/8 & \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ et } 1 \leq y < 2 \\ 1/2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ et } y \geq 2 \\ 2/3 & \text{si } x \geq 2 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 5/6 & \text{si } x \geq 2 \text{ et } 1 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \text{ et } y \geq 2 \end{cases}$$

iv) On trouve

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

et

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 5/12 & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 17/24 & \text{si } 1 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } y \geq 2 \end{cases}$$

v) D'abord $E(X) = 3/2$, $E(X^2) = 5/2$ et $E(Y) = 7/8$, $E(Y^2) = 35/24$. On trouve que $E(XY) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{11}{8}$. Par suite $Cov(X,Y) = \frac{11}{8} - \frac{3}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{1}{16} = 0,063$. Parce que $Var(X) = \frac{1}{4}$, on trouve $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)} = \frac{1}{2} = 0,5$ et parce que $Var(Y) = \frac{133}{192}$, on trouve $\sigma(Y) = \sqrt{Var(Y)} = 0,832$, par suite $Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 0,149$.

59. Considérons le couple de variables aléatoires *(X, Y)* dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.9.

Calculer *Cov(X, Y).* Est-ce que les variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes ?

Solution. On trouve

$$E(X) = -2 \times \frac{3}{18} + 2 \times \frac{3}{18} = 0,$$

et

$$E(XY) = (-2) \times \frac{1}{18} - 6 \times \frac{3}{18} + (2) \times \frac{1}{18} + 6 \times \frac{3}{18} = 0.$$

Par suite $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$ et les variables aléatoires X et Y sont non-correlées.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$x \backslash y$	0	1	3	
-2	1/18	1/18	1/18	3/18
0	0	8/18	4/18	12/18
2	1/18	1/18	1/18	3/18
	2/18	10/18	6/18	1

Tableau 3.9.

Par contre, les variables aléatoires X et Y sont dépendantes car

$$P(X = 2; Y = 1) = \neq P(X = 2)\, P(Y = 1) = 3/18 \text{ x } 10/18.$$

60. On lance deux fois de suite une pièce de monnaie et, pour $i = 1, 2$, on définit la variable aléatoire Xi = qui prend la valeur 1 ou -1 selon que l'on a obtenu Pile ou Face au i-ième lancer. En notant respectivement p, $(0 < p < 1)$ et $q = 1 - p$ la probabilité d'obtenir Pile ou Face avec cette pièce, peut-on trouver les valeurs de p telles que

i) les variables aléatoires X_1 et $X_1 + X_2$, soient indépendantes ?

ii) les variables aléatoires X_1 *et* X_1X_2, soient indépendantes ?

Solution. Remarquons d'abord que les variable aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes quelles que soient les valeurs de p, avec

$$P(X_1 = 1) = P(X_2 = 1) = p \text{ et } P(X_1 = -1) = P(X_2 = -1) = q.$$

i) La variable aléatoire $X_1 + X_2$ prend les valeurs -2, 0, 2. Parce que $P(X_1 = 1, X_1 + X_2 = -2) = 0$, les variables aléatoires X_1 et X_2 sont liées quel que soit p, car il y a une probabilité nulle dans le tableau de la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire $(X_1, X_1 + X_2)$, *et*

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1)P(X_1 + X_2 = -2) &= P(X_1 = 1)P(X_1 = -1, X_2 = -1) \\ &= pq^2 \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

par suite les variables aléatoires X_1 et $X_1 + X_2$ sont dépendantes quel que soit *p*, dans l'intervalle (0, 1). Notons que si $p = 0$ ou $p = 1$ les variables aléatoires sont indépendantes.

ii) La variable aléatoire X_1X_2 prend les valeurs -1 et 1. On trouve

$$P(X_1 = -1, X_1X_2 = -1) = P(X_1 = -1, X_2 = 1) = pq,$$

$$P(X_1 = -1, X_1X_2 = 1) = P(X_1 = -1, X_2 = -1) = q^2,$$

$$P(X_1 = 1, X_1X_2 = -1) = P(X_1 = 1, X_2 = -1) = pq,$$

$$P(X_1 = 1, X_1X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = p^2.$$

Donc la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire (X_1, X_1X_2) (avec $X_1 = x$ *et* $X_1X_2 = y$) est donné par le tableau 3.10.

$x \backslash y$	-1	1	
-1	pq	q^2	q
1	pq	p^2	p
	$2pq$	$p^2 + q^2$	1

Tableau 3.10.

Les variables aléatoires X_1 et X_1X_2 sont indépendantes si et seulement si $2pq^2 = pq$, $2p^2q = pq$, $(p^2+q^2)q = q^2$, et $(p^2+q^2)p = p^2$. Ces quatre égalités sont vérifiées si et seulement si $p = q = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire (X, Y) est donnée par le tableau 3.11.

Parce que pour tout $x, y \in \{-1, 1\}$ on a

$$P(X_1 = x, X_1X_2 = y) = P(X_1 = x)P(X_1X_2 = y),$$

les variables aléatoires X_1 et X_1X_2 sont indépendantes.

$x \backslash y$	-1	1	
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Tableau 3.11.

61. Trouver la covariance et le coefficient de corrélation pour le couple aléatoire *(X, Y)* dont la loi de probabilité est donnée dans le problème 56.

Vérifier si les variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes.

Solution. On trouve

$$E(X) = 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{3}{9} = \frac{11}{9},$$

$$E(Y) = -1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} = 0,$$

et

$$E(XY) = (-1) \times \frac{1}{18} + 1 \times \frac{1}{18} + (-2) \times \frac{1}{18} + 2 \times \frac{1}{18} = 0.$$

Par suite $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, et $Corr(X, Y) = 0$. Les variables alátoires X et Y sont non-correlées.

Les variables aléatoires X et Y sont dépendantes car

$$P(X = 0,\ Y = -1) = \frac{1}{18} \neq P(X = 0)P(Y = -1) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{6}.$$

62. Soit les variables aléatoires X et Y dont les lois de probabilité sont données par

$$X \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$Y \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

On suppose que $P(X = 3, Y = 2) = 2P(X = 0, Y = -1)$ et on pose $P(X = 0, Y = -1) = a$.

i) Donner la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire (X, Y) en fonction de a. Est-ce que a peut être quelconque ?

ii) Calculer $Cov(X, Y)$. Les variables aléatoires X et Y peuvent-elles être indépendantes ?

Solution. i) Comme chaque probabilité doit se situe dans l'intervalle [0, 1], on trouve que a doit être dans l'intervalle [0, 1/2].

On calcule les probabilités à partir des deux probabilités données et des probabilités marginales. On obtient le tableau 3.12.

$x \backslash y$	-1	0	2	
0	a	$1/6 + a$	$1/6 - 2a$	1/3
3	$1/3 - a$	$1/3 - a$	$2a$	2/3
	1/3	1/2	1/6	1

Tableau 3.12.

ii) On trouve $E(Y) = 0$. Parce que

$$E(XY) = -3\left(\frac{1}{3} - a\right) + 6 \times 2a = 15a - 1,$$

il s'en suit que $Cov(X, Y) = 15a - 1$. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$, donc $a = \frac{1}{15}$. Mais si, $a = \frac{1}{15}$, alors

$$P(X = 0, Y = -1) = \frac{1}{15} \neq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = P(X = 0)P(Y = -1).$$

Donc les variables aléatoires X et Y ne sont jamais indépendantes.

63. La fonction de répartition conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \text{ ou } y < 0 \\ 1/12 & \text{si } -2 \leq x < 2 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 3/12 & \text{si } -2 \leq x < 2 \text{ et } 1 \leq y < 2 \\ 4/12 & \text{si } -2 \leq x < 2 \text{ et } y \geq 2 \\ 7/12 & \text{si } x \geq 2 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 11/12 & \text{si } x \geq 2 \text{ et } 1 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \text{ et } y \geq 2 \end{cases}$$

Trouver la loi de probabilité du couple *(X, Y)*.

Solution. Les limites gauches des intervalles fermés à gauche, de variations de *x* sont -2, et 2, et les limites gauches des intervalles fermés à gauche, de variations de y sont 0, 1 et 2. Donc le couple aléatoire *(X, Y)* prendra comme valeurs les couples (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), et les couples (2, 0), (2, 1), (2, 2). Le saut de la fonction *F(x, y)* dans le point (-2, 0) est 1/12 - 0 = 1/12, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (-2, 0). Le saut de la fonction *F(x, y)* dans le point (-2, 1) est 3/12 - 1/12 = 2/12, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (-2, 1). Le saut de la fonction *F(x, y)* dans le point (-2, 2) est 4/12 - 3/12 = 1/12, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (-2, 2). Le saut de la fonction *F(x, y)* dans le point (2, 0) est 7/12 - 4/12 = 3/12, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (2, 0). Le saut de la fonction *F(x, y)* dans le point (2, 1) est 11/12 - 7/12 = 4/12, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (2, 1). Enfin le saut de la fonction *F(x, y)* dans le point (2, 2) est 1 - 11/12 = 1/12, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (2, 2). La loi de probabilité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par le tableau 3.13.

64. Soit *X* une variable aléatoire telle que *E(X)* = 3, 2 et *Var*(*X*) = 0, 64. Trouver une borne inférieure pour la probabilité

$$P(1{,}2 < X < 5,\ 2).$$

Solution. On applique l'inégalité de Tchebychev, avec $\epsilon = 2$, donc

$$P(1,2 < X < 5,2) = P(|X - 3,2| < 2) \geq 1 - \frac{0,64}{4} = 0,84.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$x \backslash y$	0	1	2	
-2	1/12	2/12	1/12	4/12
2	3/12	4/12	1/12	8/12
	4/12	6/12	2/12	1

Tableau 3.13.

65. Soit une variable aléatoire X telle que $E(X) = 2$ et $E(X^2) =$ Trouver une borne inférieure pour la probabilité

$$P(1 < X < 3).$$

Solution. On applique l'inégalité de Tchebychev, avec $\epsilon = 1$. On trouve $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{2}{3}$, donc

$$P(1 < X < 3) = P(|X-2| < 1) \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

66. L'inégalité de Tchebychev appliquée à la variable aléatoire X où $E(X) = 4$ donne $P(\backslash X - 4\backslash < 2) \geq 0, 54$. Déterminer la variance de la variable aléatoire X.

Solution. De var X) / $e^2 = 0, 46$ on obtient $Var(X) = 4 \text{ x } 0{,}46 = 1, 84$.

67. On lance une pièce de monnaie 100 fois. Montrer qu'avec une probabilité aussi grande que 3/4, le nombre de faces est contenu entre 40 et 60.

Solution. La variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de faces a une distribution binomiale avec $p = 1/2$ $E(X) = np = 50$ et $Var(X) = np(1 - p) = 25$. En appliquant l'inégalité de Tchebychev avec $\epsilon = 10$, on obtient

$$P(40 < X < 60) = P(|X - 50| < 10) \geq 1 - \frac{25}{100} = 0,75.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

68. On lance un dé 120 fois. Trouver une borne inférieure pour la probabilité $P(15 < X < 25)$ où X représente le nombre d'apparitions de la face avec 6 points.

Solution. La variable aléatoire X a une distribution binomiale avec $p = 1/6$, donc $E(X) = 20$ et $Var(X) = 50/3$. En appliquant l'inégalité de Tchebychev, on obtient

$$P(15 < X < 25) = P(|X - 20| < 5) \geq 1 - \frac{50}{25 \times 3} = \frac{1}{3}.$$

69. Soit X une variable aléatoire obéissant à une distribution binomiale. On réalise n épreuves indépendantes et soit $Y = x / n$.

i) Pour $p = 0,4$, $n = 1\ 000$, trouver une borne inférieure pour la probabilité $P(0,2 < Y < 0,6)$.

ii) Soit $p = 0,4$. Déterminer la plus petite valeur de n telle que

$$P(|Y - 0,4| < 0,2) \geq 0,997.$$

iii) Soit $p = 0,4$, $n = 100$. Déterminer le plus petit ϵ tel que

$$P(|Y - 0,4| < \epsilon) \geq 0,76.$$

iv) Soit $n = 100$. Trouver p tel que

$$P(|Y - p| < 0,1) \geq 0,75.$$

Solution. On applique l'inégalité de Tchebychev sous la forme

$$P(|Y - p| < \epsilon) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2},$$

car $E(Y) = p$ et $Var(Y) = \frac{p(1-p)}{n}$.

i) $P(0,2 < Y < 0,6) = P(|Y - 0,4| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,4\times 0,6}{1\ 000(0,2)^2} = 0,994$.

ii) De $1 - \frac{0,4\times 0,6}{n(0,2)^2} \geq 0,997$ on obtient $n = 2\ 000$.

iii) De $1 - \frac{0,4\times 0,6}{100\epsilon^2} \geq 0,76$ on obtient $\epsilon^2 = \frac{1}{100} = 0,01$ donc $\epsilon = 0,1$.

iv) De $1 - \frac{p(1-p)}{100\times 0,01} = 0,75$ on obtient $p^2 - p + 0,25 = 0$ donc $p = 0,5$.

3.3 Problèmes proposés

1. Douze crayons sont placés au hasard dans trois boîtes numérotées de 1 à 3. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui représente le nombre de crayons dans la première boîte.
2. Sur le chemin de la maison à l'école un étudiant passe par quatre intersections dotées de feux de circulation ayant deux couleurs : rouge et vert. En supposant que la probabilité de croiser un feu rouge soit 0,5 à chaque intersection, donner la loi de probabilité de la variable aléatoire *X* qui représente le nombre de feux verts croisés par l'étudiant jusqu'à ce qu'il rencontre un premier feu rouge, ou qu'il soit rendu à la maison.
3. Soit *X* une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$$

Trouver la loi de probabilité de la variable aléatoire $X(X-1)$.

4. La loi de probabilité de la variable aléatoire *X* est

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Représenter graphiquement la fonction de masse et la fonction de répartition de la variable aléatoire *X*.

5. La fonction de masse de la variable aléatoire *X* est donnée par la figure 3.9.

   Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire *X*.

6. On jette deux dés. On considère la variable aléatoire "nombre de un ou de deux marqués". Quelle est la fonction de masse de cette variable aléatoire ?
7. Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. Trouver la fonction de masse de chacune des variables aléatoires suivantes

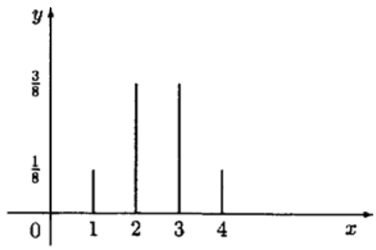

Figure 3.9.

i) le nombre de boules blanches obtenues au cours de 3 tirages successifs, sans remise.

ii) le nombre de boules tirées au hasard, sans remise, requis pour obtenir une boule noire.

8. Déterminer k de sorte que la fonction

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{si } x = 1, 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

soit une fonction de masse. Donner le graphique de cette fonction.

9. Soit X une variable aléatoire, dont la fonction de répartiton est donnée par la figure 3.10.

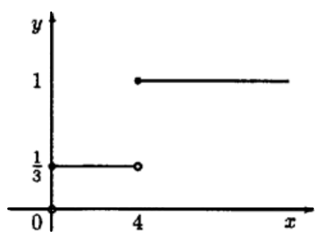

Figure 3.10.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

10. Une loterie est émise. Cent billets sont proposés. Parmi ces billets 5 gagnent chacun un lot de \$1 000 ; 10 gagnent un lot de \$500 ; 15 gagnent un lot de \$200 ; 20 gagnent un lot de \$100, les autres billets ne gagnent rien. Soit la variable aléatoire X "gain du joueur".

    i) Donner la fonction de masse de la variable aléatoire X.

    ii) Donner la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

    iii) Calculer $P(X \geq 100)$.

    iv) Calculer $P(X < 200)$.

11. Les quelles des fonctions suivantes sont des fonctions de répartition ?

i)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -5 \\ 1/2 & \text{si } -5 < x \leq 5 \\ 1 & \text{si } 5 < x \end{cases}$$

ii)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1/n & \text{si } n-1 \leq x < n; \quad n = 1,\ 2,\ \ldots\ ,10 \\ 1 & \text{si } 10 \leq x \end{cases}$$

iii)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -5 \\ 1/2 & \text{si } -5 \leq x < 5 \\ 1 & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$$

iv)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

v)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/4 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2/4 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 3/4 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

12. Un joueur de basketball atteint le panier lors d'un lancer avec une probabilité 0,7. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de succès quand le joueur effectue 5 lancers.

13. Deux joueurs d'égale habileté jouent aux échecs (la probabilité que n'importe lequel des joueurs gagne est 0,5). Donner la loi de probabilité, la fonction de masse et la fonction de répartition de la variable aléatoire X qui représente le nombre de parties gagnées par un des joueurs quand ils jouent 5 parties.

14. Un lot de 12 pigeons voyageurs est envoyé vers une destination. Sachant que la probabilité de retour est la même pour chaque pigeon et égale à 0,8, donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui prend comme valeur le nombre de pigeons qui rentrent au colombier.

15. À un concours de tir à l'arme lourde, la cible consiste d'un disque central et de neuf couronnes circulaires. La probabilité qu'un champion atteigne le disque en un seul tir est de 0,98. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de fois que le tireur fait mouche (atteint le disque) en dix tirs.

16. On contrôle la qualité d'un lot de 25 appareils. La probabilité qu'un appareil soit rejeté est 0,01. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre d'appareils acceptés.

17. On contrôle quatre lots de pièces faites sur quatre tours. Les probabilités qu'une pièce tirée d'un de ces quatre lots soit défectueuse sont respectivement 0,01; 0,02; 0,04; 0,05. On extrait au hasard une pièce de chaque lot. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de pièces défectueuse.

18. Trois tireurs visent une cible. Les probabilités d'atteindre la cible pour chaque tireur sont respectivement 0,50; 0,80; 0,40. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de succès lors d'un tir simultané de ces trois tireurs.

19. On convoque 4 personnes par téléphone à une réunion. Les probabilités que la ligne soit engagée lors des appels sont 0,1; 0,01; 0,03; 0,02 respectivement pour les quatre personnes. Donner la loi de probabilité de la

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

variable aléatoire X qui prend comme valeur le nombre de personnes rejointes si on fait un seul appel à chaque personne.

20. D'une urne contenant 15 boules blanches et 5 noires, on pige 4 fois sans remise une boule à la fois. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de boules blanches sélectionnées.

21. À un concours de musique vocale se présentent 36 concurrents, 16 hommes et 20 femmes. Par tirage au sort, ils sont répartis en groupes de 6, chaque groupe devant se présenter devant le jury à un jour fixé. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de femmes qui se présentent au jury, lors de la première journée d'audition.

22. Pour le contrôle de la qualité d'un lot de 100 pièces on extrait d'un seul coup 10 pièces. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente le nombre de pièces rejetées parmi les 10 choisies, si la proportion de pièce défectueuse du lot est 0,3.

23. La loi de probabilité d'une variable aléatoire est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Donner la loi de probabilité des variables aléatoires

$$X^2;\ X^3;\ X^{-1};\ 2X;\ X-1.$$

24. La loi de probabilité d'une variable aléatoire est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Donner la loi de probabilité des variables aléatoires X^n pour n = 1,2,3,...

25. Soit X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes ayant les lois de probabilité données par les tableaux

$$X_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

et

$$X_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Donner la loi de probabilité des variables aléatoires

$$X_1^2 + X_2^2;\ X_1 + X_2;\ (X_1 + X_2)^2;\ X_1^2 X_2^2.$$

26. À un concours de tir il faut atteindre une cible formée d'un disque central et de deux couronnes circulaires. Si un tireur atteint le disque, il reçoit 5 points. S'il atteint les couronnes, il reçoit 3 points et 2 points, respectivement. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui représente la somme des points obtenus par un tireur en 3 tirs, si les probabilités d'atteindre le disque et les deux couronnes sont respectivement, 0,5; 0,3 et 0,2.

27. On lance deux dés. On demande

    i) la loi de probabilité de la variable aléatoire qui représente la somme des points obtenus.

    ii) la loi de probabilité de la variable aléatoire qui représente le produit des points obtenus.

28. Chaque chiffre du nombre $10^2a + 10b + c$ est obtenu en extrayant une boule d'une urne contenant 10 boules numérotées de 0 à 9. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire qui représente la somme des chiffres du nombre ainsi obtenu.

29. On considère l'équation $2x - a = 0$ *où* le coefficient a est déterminé de la façon suivante : on extrait une boule de chacune de n urnes, chaque urne contenant n boules numérotées de 1 à n, et on prend pour a le plus grand nombre obtenu. Trouver la probabilité que l'équation ainsi obtenue ait comme racine $x = 4$.

30. Chaque coefficient de l'équation $a \tan x = b$ est obtenu en lançant un dé. Trouver la probabilité que l'équation ainsi obtenue ait comme racines $x = \pi / 4 + kir$ *où* $k\pi$ est un nombre entier.

31. Les coefficients a, b de l'équation $ax^2+by^2 = 10$ sont obtenus en lançant un dé. Trouver la probabilité que l'équation ainsi obtenue représente un cercle.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

32. On considère l'équation $ax^3 + 2x^2 + 2x + d = 0$ où les coefficients a et d sont obtenus en lançant un dé. Trouver la probabilité que l'équation ainsi obtenue soit réciproque. Une équation $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ est réciproque si $a_0 = \pm a_3$ et $a_1 = \pm a_2$

33. On considère l'équation $x^3 - ax^2 + bx - 1 = 0$ où les coefficients a et b sont obtenus en extrayant une boule d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Trouver la probabilité que l'équation ainsi obtenue soit réciproque.

34. Chaque coefficient du polynôme $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ est obtenu en lançant un dé. Trouver la probabilité que le polynôme ainsi obtenu soit un cube parfait. Déterminer effectivemment les cubes parfaits pour lesquels la probabilité est positive.

35. On détermine les nombres a, b, c en lançant un dé. Trouver la probabilité que les nombres complexes $a + ib$, $1 - ic$ soient conjugués.

36. On considère le cercle $x^2 + y^2 = 8$ et la famille de droites $x + y - \lambda = 0$. Trouver la probabilité que la droite obtenue soit tangente au cercle si on prend pour λ le nombre de points réalisés en lançant un dé.

37. Chaque coefficient de l'équation $ax - b = 0$ est obtenu en lançant un dé. Trouver la probabilité que l'équation obtenue ait une racine entière.

38. Les coefficients b et c de l'équation $x^2 - bx + c = 0$ sont déterminés en lançant un dé. Trouver la probabilité que l'équation obtenue ait comme racines les nombres $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

39. Chaque coefficient de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est déterminé en lançant un dé. Trouver la probabilité que l'équation obtenue ait comme racines les nombres

    i) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

    ii) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

    iii) $x_1 = -1$, $x_2 = -7$.

40. On considère le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 2 \\ a_2x + b_2y = 1 \end{cases}$$

où chaque coefficient est obtenu en lançant un dé et en prenant le nombre de points réalisés. Trouver la probabilité que le système ainsi obtenu ait une solution unique.

41. On considère la matrice

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

où les éléments a_1, a_2, a_3, a_4 sont obtenus en lançant un dé. Trouver la probabilité que la matrice ainsi obtenue soit singulière. Trouver la probabilité que la matrice ainsi obtenue soit non singulière.

42. Dans un plan, on considère deux droites données par les équations $a_1x + b_1y = 0$ et $a_2x + b_2y = 1$, où les coefficients a_1, b_1, a_2, b_2 sont obtenus en lançant un dé. Trouver la probabilité que les deux droites ainsi obtenues soient concourantes.

43. On considère la droite donnée par l'équation $ax + by + c = 0$ où les coefficients a, b, c sont déterminés en lançant un dé. Trouver la probabilité que la droite ainsi obtenue passe par le point (1, 1).

44. On donne l'équation $ax + by + c = 0$ où les coefficients a, b, c sont déterminés en lançant un dé. Déterminer les valeurs de m telles que la probabilité que la droite obtenue passe par le point (-m, 1) soit positive.

45. On considère l'équation $ax + by - c = 0$ où chaque coefficient est obtenu en extrayant une boule d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Trouver la probabilité que la droite ainsi obtenue passe par le point (1, 1).

46. On considère l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$. Trouver la probabilité qu'en lançant deux dés les nombres obtenus soient les racines de l'équation donnée.

47. Les coefficients de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont obtenus en lançant un dé. Trouver la probabilité que les racines de cette équation soient l'inverse l'une de l'autre.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

48. Chaque coefficient du trinôme $y = ax^2 + 2bx + c$ est obtenu en lançant un dé. Trouver la probabilité que le trinôme ainsi obtenu soit positif pour tout x réel.

49. Les coefficients de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont obtenus en lançant un dé. Trouver les probabilités que l'équation ainsi obtenue ait des racines complexes ; des racines réelles.

50. On place au hasard 6 balles dans 2 boîtes. Trouver la valeur moyenne de la variable aléatoire X qui représente le nombre de balles dans la deuxième boîte.

51. Pour la variable aléatoire du problème 12, trouver la valeur moyenne, la variance et l'écart-type.

52. Pour la variable aléatoire du problème 13, trouver la valeur moyenne et la variance.

53. Un joueur de basketball réussit un panier lors d'un lancer avec une probabilité 0,9. Trouver la valeur moyenne et la variance de la variable aléatoire qui représente le nombre de succès alors que le joueur lance 5 fois le ballon.

54. Un lot de 100 pigeons voyageurs sont envoyés vers une destination. Sachant que la probabilité de retour est la même pour chaque pigeon et égale 0,8, trouver

i) la valeur moyenne, la variance et l'écart-type pour le nombre de pigeons qui reviennent.

ii) la valeur moyenne, la variance et l'écart-type pour le nombre de pigeons qui ne reviennent pas.

55. On sélectionne avec remise k boules d'une urne contenant a boules blanches et b boules noires. Trouver

i) la valeur moyenne de la variable aléatoire X qui prend comme valeurs le nombre de boules blanches sélectionnées.

ii) la variance de la variable aléatoire X.

56. On contrôle 3 lots de pièces fabriquées à l'aide de trois tours. Les probabilités de choisir une pièce défectueuse de ces trois lots sont 0,05 ;

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

0,02 et 0,04 respectivement. On extrait au hasard une pièce de chaque lot. Trouver la valeur moyenne et la variance du nombre de pièces défectueuses.

57. Pour la variable aléatoire du problème 17, trouver la valeur moyenne et la variance.

58. On considère un appareil électrique formé de cinq éléments numérotés de 1 à 5 et qui peuvent tomber en panne indépendamment. Soit $p_k = 0,2 + 0,1(k-1)$ la probabilité que l'élément numéroté k tombe en panne pour $k = 1, \ldots, 5$. Trouver la valeur moyenne et la variance du nombre d'éléments défectueux sur un appareil.

59. Pour la variable aléatoire du problème 21, déterminer la valeur moyenne et la variance.

60. Pour la variable aléatoire du problème 22, déterminer la valeur moyenne et la variance.

61. Dans 10 boîtes numérotées de 1 à 10, on introduit au hasard 10 boules numérotées de 1 à 10, une boule dans chaque boîte. Trouver la valeur moyenne et la variance du nombre de concordances (on dit qu'il y a concordance si dans la boîte numérotée j on a introduit la boule numérotée j).

62. Six couples participent à un dîner. Supposant que pour une danse les couples se forment au hasard, trouver la valeur moyenne et la variance du nombre de couples qui dansent ensemble.

63. Une compétition sportive entre deux clubs se déroule en 10 étapes. À la première étape chaque club est représenté par le même nombre de joueurs, chacun ayant les mêmes chances pour la première place. Le club auquel appartient le joueur gagnant de l'étape k, $k = 1, \ldots, 9$ peut introduire 5 joueurs à la compétition qui participeront avec les autres à l'étape $k + 1$. Trouver la valeur moyenne du nombre d'étapes gagnées par chaque club séparément.

64. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Trouver $x_1,\ x_2$ sachant que $E(X) = 1,4$ et $x_2 = x_1 + 1$.

65. Déterminer $a,\ p_1,\ p_2$ de la loi de probabilité donnée par le tableau suivant
$$X\begin{pmatrix} 0 & a \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$
sachant que $E(X) = \frac{1}{2}$ et $E(X^2) = \frac{1}{2}$.

66. La variable aléatoire X a la loi de probabilité donnée par le tableau
$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Déterminer les nombres a et b pour que $E(Y) = 0, Var(Y) = 1$, où $Y = aX + b$.

67. Calculer le moment d'ordre 3 de la variable aléatoire X où
$$X\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

68. Soient les variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, dont les lois de probabilité sont données par les tableaux
$$X_1\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$
et
$$X_2\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Trouver

i) $E(X_1 + X_2);\ E(2X_1 + X_2);\ E(X_1X_2);\ E(X_1X_2 + 1);\ E(2X_1X_2)$.

ii) $Var(X_1 + X_2);\ Var(2(X_1 + X_2));\ Var(2X_1 + 4X_2);\ Var(2X_1 + 4X_2 + 6)$.

69. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau
$$X\begin{pmatrix} 1 & 2^2 & \dots & n^2 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$
Trouver la valeur moyenne de la variable aléatoire X.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Variables aléatoires 70. La loi de probabilité de la variable aléatoire *X* est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2^3 & \dots & n^3 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Trouver la valeur moyenne de la variable aléatoire *X*.

71. La loi de probabilité de la variable aléatoire *X* est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

i) Calculer la valeur moyenne de la variable aléatoire *X*.

ii) Calculer les moments d'ordre 2 et 3 de la variable aléatoire *X*.

72. On lance un dé et on considère la variable aléatoire *X* prenant la valeur 0 si le résultat est inférieur ou égal à 4 et la valeur 1 si le résultat est supérieur à 4.

i) Trouver la fonction de répartition de la variable aléatoire *X*. Donner le graphique de cette fonction.

ii) Calculer *E(X)* et *Var(X).*

73. Soit *X* une variable aléatoire dont la fonction de masse est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } x = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Calculer $E(X)$; $E(X^2 + 4)$; $E(X^3 - 2X + 6)$.

74. On considère une variable aléatoire X prenant toutes les valeurs entières allant de 1 à n avec la probabilité $P(X = i) = k(n)\left(\frac{i-1}{n}\right)$ pour $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$.

i) Quelle est la valeur de $k(n)$?

ii) Calculer $E(X)$.

75. Soit *X* et *Y* deux variables aléatoires indépendantes ayant des variances.

i) Exprimer la variance du produit *X Y* en fonction des valeurs moyennes et des variances de *X* et *Y*.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ii) Appliquer le résultat obtenu aux variables aléatoires *X* et *Y* dont les lois de probabilité sont données par les tableaux

$$X\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

et

$$Y\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Calculer directement la variance du produit *X Y* à partir de la définition.

76. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}k^2j^3\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}k^4\right)\left(\sum_{j=1}^{n}j^6\right).$$

77. Montrer que les variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes, si la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par le tableau 3.14.

$x \backslash y$	2	4	
1	3/24	15/24	3/4
3	1/24	5/24	1/4
	1/6	5/6	1

Tableau 3.14.

78. Soit *(X, Y)* un couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.15.

i) Trouver les lois marginales de probabilité des variables aléatoires X et Y.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$x \backslash y$	0	1	
1	1/6	1/6	1/3
2	1/6	1/2	2/3
	1/3	2/3	1

Tableau 3.15.

ii) Trouver la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire *(X, Y).*
iii) Trouver la covariance des variables aléatoires *X* et *Y.*
iv) Est-ce que les variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes ?

79. Trouver les lois marginales de probabilité des variables aléatoires *X* et *Y,* la covariance et le coefficient de correlation pour le couple aléatoire *(X, Y),* dont la loi de probabilité conjointe est donnée par le tableau 3.16.

$x \backslash y$	-1	0	1	
-1	1/6	1/9	1/6	8/18
1	2/9	1/9	2/9	5/9
	7/18	2/9	7/18	1

Tableau 3.16.

Est-ce que les variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes ?

80. Soit *(X, Y)* un couple aléatoire dont la loi de probabilité est donnée par le tableau 3.17.

i) Trouver la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire *(X, Y),* ainsi que les fonctions de répartition marginales des variables aléatoires

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$x \backslash y$	0	1	
0	0,29	0,29	0,58
1	0,29	0,13	0,42
	0,58	0,42	1

Tableau 3.17.

X et *Y*.

ii) Trouver la covariance et le coefficient de corrélation des variables aléatoires *X* et *Y*.

81. La fonction de répartition conjointe du couple aléatoire est

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \text{ ou } y < 0 \\ 4/15 & \text{si } -1 \leq x < 0 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 7/15 & \text{si } -1 \leq x < 0 \text{ et } 1 \leq y < 2 \\ 8/15 & \text{si } -1 \leq x < 0 \text{ et } y \geq 2 \\ 9/15 & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 10/15 & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ et } 1 \leq y < 2 \\ 11/15 & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ et } y \geq 2 \\ 13/15 & \text{si } x \geq 1 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 14/15 & \text{si } x \geq 1 \text{ et } 1 \leq y < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \text{ et } y \geq 2 \end{cases}$$

Trouver la loi de probabilité conjointe du couple aléatoire (X, Y).

82. Pour la variable aléatoire *X* on a $E(X) = 20$ et $Var(X) = 16$. Trouver une limite inférieure pour la probabilité $P(10 < X < 30)$.

83. Pour la variable aléatoire *X* on *a* $E(X) = 80$ et $E(X^2) = 6\,416$. Trouver une limite inférieure pour la probabilité $P(40 < X < 120)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

84. L'inégalité de Tchebychev appliquée à la variable aléatoire X où $E(X) = 3$ donne

$$P(\backslash X - 3\backslash < 2) > 0{,}86.$$

Trouver la variance de la variable aléatoire X.

85. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Trouver une borne inférieure pour la probabilité que la variable aléatoire $X - E(X)$ prenne ses valeurs dans l'intervalle (-3, 3).

86. La probabilité d'apparition de l'événement A est égale à 1/2. On réalise 10 000 épreuves indépendantes. Est-ce que l'on peut affirmer, avec une probabilité plus grande que 0,99, que le nombre d'apparitions de A se situera entre 4 000 et 6 000 ?

87. La probabilité d'apparition de l'événement A est égale à 0,25. On réalise 1 000 épreuves indépendantes. Trouver une borne inférieure pour la probabilité que le nombre d'apparitions de A soit situé entre 150 et 350.

88. On fait 200 extractions, avec remise, d'une urne ayant 60 boules blanches et 40 boules noires. Trouver une borne inférieure pour la probabilité que le nombre d'apparitions de la boule blanche soit contenu entre 100 et 140.

89. Dans les mêmes conditions que celles du problème précédent, trouver une borne inférieure pour la probabilité que le nombre d'apparitions de la boule noire soit contenu entre 60 et 100.

90. Pour contrôler la qualité d'un lot de pièces, on extrait au hasard, avec remise, 100 pièces du lot. Soit $p = 0, 90$ la probabilité qu'une pièce choisie au hasard est conforme aux normes. Trouver une borne inférieure pour la probabilité que le nombre de pièces correctes dénombrées parmi les pièces examinées soit contenu entre 80 et 100.

91. Soit X une variable aléatoire obéissant à une distribution binomiale où n est le nombre d'épreuves indépendantes et soit $Y = x / n$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

En posant $p = 0{,}6$, $n = 1\,000$, trouver une borne inférieure pour la probabilité $P(0{,}3 < Y < 0{,}9)$.

En posant $p = 0{,}6$, trouver la plus petite valeur de n telle que $P(|Y - 0{,}6| < 0{,}1) \geq 0{,}976$.

En posant $p = 0{,}5$, $n = 5\,000$, trouver le plus petit ϵ tel que $P(|Y - 0{,}5| < \epsilon) \geq 0{,}998\,750$.

En posant $n = 500$, trouver p tel que $P(|Y - p| < 0{,}4) > 0{,}997$.

3.4 Indications et réponses

1. $P(X = k) = \binom{12}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{12-k} = \binom{12}{k}\frac{2^{12-k}}{3^{12}}$, $k = 0, \ldots, 12$,

   (voir problème 2, Section 3.2.)

2. $$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

3. On trouve

   $$X(X-1)\begin{pmatrix} x_1(x_1-1) & \ldots & x_n(x_n-1) \\ p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

   car

   $$P(X = x_i,\ X - 1 = x_j - 1) = P(X = x_i,\ X = x_j) = \begin{cases} p_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

4. Le graphique de la fonction de masse est donnée par la figure 3.11.

   Le graphique de la fonction de répartition est donnée par la figure 3.12.

5. On trouve

   $$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

6. On trouve

   $$f(x) = \binom{2}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x},\ x = 0, 1, 2,$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

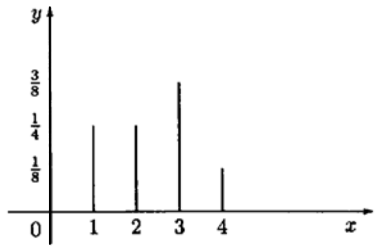

Figure 3.11.

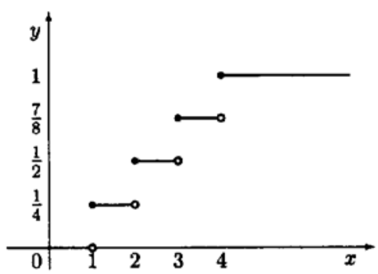

Figure 3.12.

donc

$$f(x) = \begin{cases} 4/9 & \text{si } x = 0 \\ 4/9 & \text{si } x = 1 \\ 1/9 & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

7. i) On trouve

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}}, \; x = 0, 1, 2, 3.$$

donc

$$f(x) = \begin{cases} 1/35 & \text{si } x = 0 \\ 12/35 & \text{si } x = 1 \\ 18/35 & \text{si } x = 2 \\ 4/35 & \text{si } x = 3 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ii)

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x-1}}{\binom{7}{x-1}} \times \frac{3}{8-x}, \; x = 1, 2, 3, 4, 5.$$

donc

$$f(x) = \begin{cases} 15/35 & \text{si } x = 1 \\ 10/35 & \text{si } x = 2 \\ 6/35 & \text{si } x = 3 \\ 3/35 & \text{si } x = 4 \\ 1/35 & \text{si } x = 5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

8. $k = \frac{1}{2}$.

Le graphique est donné par la figure 3.13.

9. On trouve

$$X \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

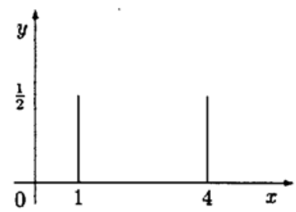

Figure 3.13.

10. i) On trouve

$$f(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1/5 & \text{si } x = 100 \\ 3/20 & \text{si } x = 200 \\ 1/10 & \text{si } x = 500 \\ 1/20 & \text{si } x = 1\ 000 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ii) On trouve

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,50 & \text{si } 0 \le x < 100 \\ 0,70 & \text{si } 100 \le x < 200 \\ 0,85 & \text{si } 200 \le x < 500 \\ 0,95 & \text{si } 500 \le x < 1\ 000 \\ 1 & \text{si } 1\ 000 \le x \end{cases}$$

iii) $P(X \ge 100) = 1 - P(X < 100) = 1 - F(100-) = 0,50$.

iv) $P(X < 200) = F(200-) = 0,70$.

11. i) non, car la fonction n'est pas continue à droite en $x = -5$ et en $x = 5$.

ii) oui.

iii) oui.

iv) non, car la fonction n'est pas continue à droite en $x = 1$.

v) oui.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

12. La variable aléatoire X a une distribution binomiale,

$$P(X=k)=\binom{5}{k}(0,7)^k(0,3)^{5-k};\ k=0,\ldots,5.$$

13. La variable aléatoire X a une distribution binomiale,

$$P(X=k)=\binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^5;\ k=0,\ldots,5.$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{32} & \frac{5}{32} & \frac{10}{32} & \frac{10}{32} & \frac{5}{32} & \frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

La fonction de masse de la variable aléatoire X est

$$f(x)=\begin{cases} 1/32 & \text{si } x=0 \\ 5/32 & \text{si } x=1 \\ 10/32 & \text{si } x=2 \\ 10/32 & \text{si } x=3 \\ 5/32 & \text{si } x=4 \\ 1/32 & \text{si } x=5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La fonction de répartition de la variable aléatoire X est

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1/32 & \text{si } 0\le x<1 \\ 6/32 & \text{si } 1\le x<2 \\ 16/32 & \text{si } 2\le x<3 \\ 26/32 & \text{si } 3\le x<4 \\ 31/32 & \text{si } 4\le x<5 \\ 1 & \text{si } 5\le x \end{cases}$$

14. La variable aléatoire X a une distribution binomiale,

$$P(X=k)=\binom{12}{k}(0,8)^k(0,2)^{12-k};\ k=0,\ldots,12.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

15. La variable aléatoire X a une distribution binomiale,

$$P(X=k)=\binom{10}{k}(0,98)^k(0,02)^{10-k};k=0,\ldots,10.$$

16. La variable aléatoire X a une distribution binomiale,

$$P(X=k)=\binom{25}{k}(0,99)^k(0,01)^{25-k};k=0,\ldots,25.$$

17. La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, et pour trouver les probabilités on utilise le schéma de Poisson. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,88482 & 0,11044 & 0,00466 & 0,00008 & 0 \end{pmatrix}.$$

18. La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2, 3. On trouve les probabilités en utilisant le schéma de Poisson. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,06 & 0,34 & 0,44 & 0,16 \end{pmatrix}.$$

19. La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4. On trouve les probabilités en utilisant le schéma de Poisson. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0,00012 & 0,00674 & 0,14616 & 0,84698 \end{pmatrix}.$$

20. On applique le schéma de l'échantillon sans remise,

$$X\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{\binom{15}{0}\binom{5}{4}}{\binom{20}{4}} & \frac{\binom{15}{1}\binom{5}{3}}{\binom{20}{4}} & \frac{\binom{15}{2}\binom{5}{2}}{\binom{20}{4}} & \frac{\binom{15}{3}\binom{5}{1}}{\binom{20}{4}} & \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{0}}{\binom{20}{4}} \end{pmatrix}.$$

21. La variable aléatoire X prend les valeurs 0,1, ... , 6. On trouve les probabilités en utilisant le schéma de la sélection sans remise.

$$P(X=k)=\frac{\binom{20}{k}\binom{16}{6-k}}{\binom{36}{6}},\ k=0,\ldots,6.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

22. La variable aléatoire X prend les valeurs 0,1, ... ,10. On trouve les probabilités en utilisant le schéma de la sélection sans remise. Dans le lot il y a 70 pièces correctes et 30 défectueuses.

$$P(X = k) = \frac{\binom{30}{k}\binom{70}{10-k}}{\binom{100}{10}},\ k = 0, \ldots, 10.$$

23.

$$X^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$X^3 \begin{pmatrix} 1 & 8 & 27 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$X^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$2X \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$X - 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

24.

$$X^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

si $n = 2k$ et

$$X^n \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$$

si $n = 2k + 1$.

25.

$$X_1^2 + X_2^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0,35 & 0,15 & 0,35 & 0,15 \end{pmatrix},$$

$$X_1 + X_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0,35 & 0,50 & 0,15 \end{pmatrix},$$

$$(X_1 + X_2)^2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 0,35 & 0,50 & 0,15 \end{pmatrix},$$

$$X_1^2 X_2^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0,70 & 0,15 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

26.

$$X \left(\begin{matrix} 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 0,008 & 0,036 & 0,054 & 0,087 & 0,180 & 0,135 & 0,15 \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 13 & 15 \\ 0,225 & 0,125 \end{matrix} \right).$$

27. i)

$$X_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{3}{6^2} & \frac{4}{6^2} & \frac{5}{6^2} & \frac{6}{6^2} & \frac{5}{6^2} & \frac{4}{6^2} & \frac{3}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} \end{pmatrix}.$$

ii)

$$X_2 \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 & 10 \\ \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{3}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{4}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} 12 & 15 & 16 & 18 & 20 & 24 & 25 & 30 & 36 \\ \frac{4}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} & \frac{2}{6^2} & \frac{1}{6^2} \end{matrix} \right).$$

28.

$$X \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{10^3} & \frac{3}{10^3} & \frac{6}{10^3} & \frac{10}{10^3} & \frac{15}{10^3} & \frac{21}{10^3} & \frac{28}{10^3} & \frac{36}{10^3} \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 \\ \frac{45}{10^3} & \frac{55}{10^3} & \frac{63}{10^3} & \frac{69}{10^3} & \frac{73}{10^3} & \frac{75}{10^3} & \frac{75}{10^3} & \frac{73}{10^3} & \frac{69}{10^3} & \frac{63}{10^3} & \frac{55}{10^3} & \frac{45}{10^3} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ \frac{36}{10^3} & \frac{28}{10^3} & \frac{21}{10^3} & \frac{15}{10^3} & \frac{10}{10^3} & \frac{6}{10^3} & \frac{3}{10^3} & \frac{1}{10^3} \end{matrix} \right)$$

$P(X_1 + X_2 + X_3 = k) = \sum_j P(X_1 = j)P(X_2 + X_3 = k - j) = \sum_j \sum_i P(X_1 = j)P(X_2 = i)P(X_3 = k - j - i) = \frac{1}{10^2} \sum_{j,i} P(X_3 = k - j - i)$, les indices j et i ne prennent pas indépendamment les valeurs de 1 à 9, mais seulement les valeurs telles que $0 \leq k - j - i \leq 9$.

29. Si $n \geq 8$, alors $P\left(\frac{X}{2} = 4\right) = P(X = 8) = \frac{8^n - 7^n}{n^n}$, (voir problème 31 iii) Section 2.3). Si $n < 8$, la probabilité cherchée est zéro.

30. $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k)P(X_2 = k) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

31. $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{6}$.

32. $P(X_1 = X_2) = \frac{1}{6}$.

33. $P(X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^{n} P(X_1 = k)P(X_2 = k) = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.

34. L'équation *p(x)* = 0 doit avoir une racine triple. Soit α cette racine, alors en utilisant les relations entre les racines et les coefficients d'une équation, on doit calculer

$$p = P(X_1 = -3\alpha)P(X_2 = 3\alpha^2)P(X_3 = -\alpha^3).$$

On a $p \neq 0$ seulement si $\alpha = -1; p = \frac{1}{6^3}$ et le cube parfait est $(x+1)^3$.

35. $P(X_1 = 1,\ X_2 = X_3) = P(X_1 = 1)P(X_2 = X_3) = \frac{1}{6^3}$.

36. On élimine y du système

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 8 \\ x + y &= \lambda \end{aligned}$$

et l'équation obtenue $2x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 8 = 0$ doit avoir une racine double, donc $\Delta = 16 - \lambda^2 = 0$ et $P(X^2 = 16) = \frac{1}{6}$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

37. [6]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{6} P\left(\frac{X_2}{X_1}=k\right) &= \sum_{k=1}^{6} P(X_2 = kX_1) \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k,j} P(X_2 = kj) \\
&= \frac{1}{6}\left(\sum_{j=1}^{6} P(X_2=j) + \sum_{j=1}^{3} P(X_2=j)\right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^{2} P(X_2=j) + 3P(X_2=1)\right) \\
&= \frac{14}{36}.
\end{aligned}$$

38. On utilise les relations entre les racines et les coefficients,

$$P(X_1=5,\ X_2=6) = P(X_1=5)P(X_2=6) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}.$$

39. i)

$$P\left(-\frac{X_2}{X_1}=5,\ \frac{X_3}{X_1}=4\right) = P\left(\frac{X_2}{X_1}=-5,\ \frac{X_3}{X_1}=4\right) = 0,$$

car les variables aléatoires X_1, X_2 peuvent prendre seulement des valeurs positives.

ii)

$$\begin{aligned}
P\left(-\frac{X_2}{X_1}=-4,\ \frac{X_3}{X_1}=3\right) &= P(X_2=4X_1)P(X_3=3X_1) \\
&= P(X_1=1)P(X_2=4)P(X_3=3) \\
&= \frac{1}{6^3}.
\end{aligned}$$

iii) $P\left(-\frac{X_2}{X_1}=-8,\ \frac{X_3}{X_1}=7\right)=0.$

[6] Comparer la solution de ce problème en utilisant les variables aléatoires et sa solution donnée dans le problème 11, section 2.3.

40. Le système a une solution unique si $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, donc on cherche $P(X_1X_4 \neq X_2X_3) = 1 - P(X_1X_4 = X_2X_3) = 1 - \frac{86}{6^4} = \frac{1\ 210}{1\ 296}$.

41. La matrice M est singulière quand $detM = 0$, donc $a_1a_4 - a_2a_3 = 0$, et donc on cherche $P(X_1X_4 - X_2X_3 = 0) = \frac{86}{6^4}$. La matrice M est non singulière quand $detM \neq 0$, donc on cherche $P(X_1X_4 - X_2X_3 \neq 0) = \frac{1\ 210}{1\ 296}$.

42. $p = \frac{1\ 210}{1\ 296}$.

43. $P(X_1+X_2+X_3 = 0) = 0$. Toutes les droites obtenues de cette façon ne passent par aucun point du premier cadran des axes de coordonnées.

44. On cherche les valeurs de m tel que $P(X_2 + X_3 = mX_i) > 0$; alors m doit être un nombre entier tel que $2 \leq m \leq 12$.

45. $P(X_1 + X_2 = X_3) = \frac{n-1}{2n^2}$, où

$$X_i \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

et $i = 1, 2, 3$.

46.

$$\begin{aligned} &P(X_1 + X_2 = 4,\ X_1X_2 = 3) \\ &\quad = P(X_1 = 1)P(X_2 = 3) + P(X_1 = 3)P(X_2 = 1) = \frac{2}{6^2} = \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

47. $P\left(\frac{X_3}{X_1} = 1\right) = P(X_3 = X_1) = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$.

48.

$$\begin{aligned}
P(X_2^2 - X_1X_3 < 0) &= \sum_k P(X_2^2 = k)P(X_1X_3 > k) \\
&= \frac{1}{6}(P(X_1X_3 > 1) + (P(X_1X_3 > 4) \\
&\quad + (P(X_1X_3 > 9) + (P(X_1X_3 > 16) \\
&\quad + (P(X_1X_3 > 25) + (P(X_1X_3 > 36)) \\
&= \frac{1}{6^3}(35 + 28 + 19 + 10 + 3 + 0) \\
&= \frac{95}{6^3}.
\end{aligned}$$

49.

$$\begin{aligned}
P(X_2^2 - 4X_1X_3 < 0) &= \sum_k P(X_2^2 = k)P(4X_1X_3 > k) \\
&= \frac{1}{6}(P(4X_1X_3 > 1) + (P(4X_1X_3 > 4) \\
&\quad + (P(4X_1X_3 > 9) + (P(4X_1X_3 > 16) \\
&\quad + (P(4X_1X_3 > 25) + (P(4X_1X_3 > 36)) \\
&= \frac{1}{6^3}(36 + 35 + 33 + 28 + 23 + 19) \\
&= \frac{174}{6^3}.
\end{aligned}$$

$q = 1 - p = \frac{42}{6^3}$.

50. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau

$$X \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{2^6} & \frac{6}{2^6} & \frac{15}{2^6} & \frac{20}{2^6} & \frac{15}{2^6} & \frac{6}{2^6} & \frac{1}{2^6} \end{pmatrix}$$

et $E(X) = 3$.

51. $E(X) = 5 \times 0,7 = 3,5$ et $Var(X) = 5 \times 0,7 \times 0,3 = 1,05$, et $\sigma(X) = \sqrt{1,05} = 1,025$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

52. $E(X) = 5 \times \frac{1}{2} = 2,5$ et $Var(X) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$.

53. La variable aléatoire a une distribution binomiale de paramétres $n = 5$ et $p = 0,9$. $E(X) = 4,5$ et $Var(X) = 0,45$.

54. Les variables aléatoires X_1, X_2 ont une distribution binomiale.

    i) $E(X_1) = 100 \times 0,8 = 80$, $Var(X_1) = 100 \times 0,8 \times 0,2 = 16$ et $\sigma(X_1) = 4$.

    ii) $E(X_2) = 100 \times 0,2 = 20$, $Var(X_2) = 16$ et $\sigma(X_2) = 4$.

55. La variable aléatoire X a une distribution binomiale.

    i) $E(X) = \frac{ka}{a+b}$.

    ii) $Var(X) = k\frac{ab}{(a+b)^2}$.

56. $E(X) = 0,05 + 0,02 + 0,04 = 0,11$ et $Var(X) = 0,05 \times 0,95 + 0,02 \times 0,98 + 0,04 \times 0,96 = 0,105\ 500$ (voir problème 50, Section 3.2.)

57. $E(X) = 0,12$ et $Var(X) = 0,01 \times 0,99 + 0,02 \times 0,98 + 0,04 \times 0,96 + 0,05 \times 0,95 = 0,115\ 400$.

58. À l'élément k, on associe la variable aléatoire X_k qui prend les valeurs 1 ou 0, selon que l'élément est défectueux ou non, donc sa loi de probabilité est donnée par le tableau

$$X_k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,2 + 0,1(k-1) & 0,8 - 0,1(k-1) \end{pmatrix}$$

où $k = 1, \ldots, 5$. La variable aléatoire qui donne le nombre de défectuosités est $X = X_1 + \cdots + X_5$, donc $E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_5)$ et parce que les variables aléatoires $X_k,\ k = 1, \ldots, 5$ sont indépendantes, $Var(X) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_5)$. Mais $E(X_k) = 0,2 + 0,1(k-1)$ et $Var(X_k) = (0,2 + 0,1(k-1)) \cdot (0,8 - 0,1(k-1))$, pour $k = 1, \ldots, 5$. On obtient $E(X) = 2,\ Var(X) = 1,10$.

On peut obtenir directement le résultat en utilisant le problème 50, Section 3.2.

59. $E(X) = 6 \times \frac{20}{36} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ et $Var(X) = 6 \times \frac{20}{36} \times \frac{16}{36} \times \frac{36-6}{36-1} = \frac{80}{63}$, (voir problème 51, Section 3.2).

60. $E(X) = 3$ et $Var(X) = 10 \times 0,3 \times 0,7 \times \frac{90}{99} = 1,909$, (voir problème 51, Section 3.2).

61. $E(X) = 1$ et $Var(X) = 1$, (voir problème 52, Section 3.2).

62. $E(X) = 1$ et $Var(X) = 1$, (voir problème 52, Section 3.2).

63. $E(X_1) = E(X_2) = 5$, (voir problème 53, Section 3.2 ; $p = q = \frac{1}{2}$, $n = 10$).

64. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

65. On obtient le système

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= 1 \\ ap_2 &= \frac{1}{2} \\ a^2 p_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d'où $a = 1$ et $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

66. On trouve a et b du système

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} + b &= 0 \\ \frac{a^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Donc les solutions possibles sont: $a = 2$, $b = -1$ et $a = -2$, $b = 1$.

67. $E(X^3) = -\frac{1}{4}$.

68. i) $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{11}{10} + \frac{1}{5} = \frac{13}{10}$,
$E(2X_1 + X_2) = 2E(X_1) + E(X_2) = \frac{12}{5}$,
$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = \frac{11}{50}$,
$E(X_1X_2 + 1) = E(X_1)E(X_2) + 1 = \frac{61}{50}$,
$E(2X_1X_2) = 2E(X_1X_2) = \frac{22}{50} = \frac{11}{25}$.
ii) $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) = \frac{189}{100} + \frac{19}{25} = \frac{53}{20}$,
$Var(2(X_1 + X_2)) = 4Var(X_1 + X_2) = \frac{53}{5}$,
$Var(2X_1 + 4X_2) = 4Var(X_1) + 16Var(X_2) = \frac{493}{25}$,
$Var(2X_1 + 4X_2 + 6) = Var(2X_1 + 4X_2) = \frac{493}{25}$.

69. $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$.

70. $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)^2}{4}$.

71. i) $E(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$.

ii) $\mu_2(X) = E(X^2) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$, (voir problème 69).

$\mu_3(X) = E(X^3) = n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, (voir problème 70).

72. i)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2/3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et son graphique est donnée par la figure 3.14.

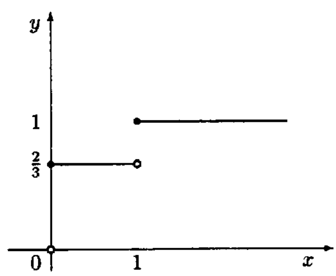

Figure 3.14.

ii) $E(X) = \frac{1}{3}, Var(X) = \frac{2}{9}$.

73. $E(X) = 3, E(X^2+4) = 15, E(X^3 - 2X + 6) = 45$.

74. i) $k(n) = \frac{2}{n-1}$.

ii) $E(X) = \frac{2(n+1)}{3}$.

75. i)

$$\begin{aligned} Var(XY) &= Var(X)Var(Y) \\ &\quad + (E(X))^2 Var(Y) + (E(Y))^2 Var(X). \end{aligned}$$

ii) $Var(XY) = 4$.

76. On applique l'inégalité de Schwarz aux variables aléatoires des problèmes 69 et 70.

77. On trouve

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{3}{24} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{6} = P(X = 1)P(Y = 2),$$

$$P(X = 3, Y = 2) = \frac{1}{24} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = P(X = 3)P(Y = 2),$$

$$P(X = 1, Y = 4) = \frac{15}{24} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = P(X = 1))P(Y = 4),$$

$$P(X = 3, Y = 4) = \frac{5}{24} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{6} = P(X = 3)P(Y = 4),$$

donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

78. i) On trouve

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

et

$$Y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

ii) La fonction de répartition conjointe du couple aléatoire (X, Y) est

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } y < 0 \\ 1/6 & \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 2/6 & \text{si } 1 \leq x < 2 \text{ et } 1 \leq y \\ 3/6 & \text{si } 2 \leq x \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \text{ et } y \geq 1 \end{cases}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

iii) D'abord la loi de probabilité de la variable aléatoire XY est

$$XY\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{6} \end{pmatrix}.$$

et par suite $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{7}{6} - \left(\frac{5}{3} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{18}$.

iv) Parce que $Cov(X,Y) \neq 0$, les variables aléatoires X et Y sont correllées et donc dépendantes. On peut voir aussi que

$$\begin{aligned} P(XY=2) &= P(X=2, Y=1) \\ &= \frac{1}{2} \\ &\neq P(X=2)P(Y=1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

79. On trouve

$$X\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix},$$

$$Y\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{18} & \frac{4}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix},$$

et

$$XY\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{18} & \frac{4}{18} & \frac{7}{18} \end{pmatrix},$$

par suite

$$E(X) = \frac{1}{9}, E(Y) = 0, E(XY) = 0,$$

et

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0.$$

Les variables aléatoires X et Y sont non-correllées. On a $Corr(X,Y) = 0$. Mais les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, car

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} &= P(X=-1,\ Y=-1) \\ &\neq P(X=-1)P(Y=-1) \\ &= \frac{8}{18} \cdot \frac{7}{18}. \end{aligned}$$

80. i) On trouve

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ 0,29 & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 0,58 & \text{si } 1 \leq x \text{ et } 1 \leq y \\ 0,87 & \text{si } 1 \leq x \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \text{ et } y \geq 1 \end{cases}$$

et les fonctions de répartition marginales des variables aléatoires X et Y, sont respectivement

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0,58 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ 0,58 & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

ii) On trouve $E(X) = E(Y) = 0,42$; $E(X^2) = E(Y^2) = 0,42$ et $E(XY) = 0,13$. Donc $Cov(X,Y) = -0,046\ 400$. Après, $Var(X) = 0,42 - 0,169 = 0,251 = Var(Y)$ et parce que $\sigma(X) = \sigma(Y) = 0,501$, on obtient $Corr(X,Y) = \frac{-0,046\ 400}{0,501 \times 0,501} = -0,184\ 900$.

81. Les limites gauches des intervalles fermés à gauche, de variations de x sont -1, 0 et 1, et les limites gauches des intervalles fermés à gauche, de variations de y sont 0, 1 et 2. Donc le couple aléatoire *(X, Y)* prendra comme valeurs les couples (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), après les couples (0, 0), (0, 1), (0, 2), et enfin les couples (1,0), (1,1), (1, 2). Le saut de la fonction *F(x, y)* dans le point (-1, 0) est 4/15 - 0 = 4/15, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (-1, 0). Le saut de la fonction *F(x, y)* dans le point (-1, 1) est 7/15 - 4/15 = 3/15, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (-1, 1). Le saut de la fonction *F(x, y)* dans le point (-1, 2) est 8/15 - 7/15 = 1/15, qui est la probabilité avec laquelle le couple aléatoire *(X, Y)* prendra la valeur (-1, 2), et ainsi de suite. La loi de probabilité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par le tableau 3.18.

$x \backslash y$	0	1	2	
-1	4/15	3/15	1/15	8/15
0	1/15	1/15	1/15	3/15
1	2/15	1/15	1/15	4/15
	7/15	5/15	3/15	1

Tableau 3.18.

82. On applique l'inégalité de Tchebychev,

$$P(10 < X < 30) = P(|X - 20| < 10) \geq 1 - \frac{16}{100} = 0,84.$$

83. On applique l'inégalité de Tchebychev,

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 16,$$

et

$$P(40 < X < 120) = P(|X - 80| < 40) \geq 1 - \frac{16}{1\ 600} = 0,99.$$

84. De $0,14 = \frac{Var(X)}{4}$ découle $Var(X) = 4 \times 0,14 = 0,56$.

85. On applique l'inégalité de Tchebychev, avec $\epsilon = 3$, $Var(X) = \frac{11}{16}$ donc

$$P(|X - E(X)| < 3) \geq 1 - \frac{11}{16 \times 9} = \frac{133}{144}.$$

86. Oui. La variable aléatoire X a une distribution binomiale, donc

$$P(|X - 5\ 000| < 1\ 000) \geq 1 - \frac{2\ 500}{1\ 000^2} = 0,997\ 500.$$

87. La variable aléatoire X a une distribution binomiale et

$$P(|X - 250| < 100) \geq 1 - \frac{3\ 000}{100^2 \times 16} = 0,981\ 250.$$

88. On applique l'inégalité de Tchebychev,

$$P(|X-120|<20) \geq 1-\frac{48}{400}=0,88.$$

89. 0,88.

90. 0,91.

91. Voir problème 69, Section 3.2.

   i) $\frac{374}{375} \approx 0,997\ 333$.

   ii) $n = 1\ 000$.

   iii) $\epsilon = 0,2$.

   iv) $p = 0,4$ et $1-p = 0,6$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Partie II

Modèles infinis

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Chapitre 4

Espace de probabilité

4.1 Notions de base — Définitions et propriétés

4.1.1 σ-algèbres et espaces probabilisables

Dans ce chapitre, nous considérons des cas où les expériences aléatoires ont une infinité de résultats possibles.

L'ensemble de tous les résultats possibles s'appelle *l'espace échantillonnal)* et on le représentera par Ω.

Définition 1. On appelle *σ-algèbre* sur Ω un ensemble non vide $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tel que

1. $\Omega \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F}$ implique $A^c \in \mathcal{F}$;
3. Si $\{A_i \; ; \; i \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Tout élément de *F* est appelé *un événement.*

Remarque 2. Une σ-algèbre possède les propriétés suivantes qui découlent de la définition 1.

1. ø Є.*F* ;

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

2. Si $\{A_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, alors

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F};$$

3. Si $A, B \in \mathcal{F}$ alors $A \setminus B \in \mathcal{F}$.

Les événements correspondent toujours à des sous-ensembles de Ω. En particulier, on a $\emptyset$, l'ensemble vide associé à l'événement impossible et Ω associé à l'événement certain.

Définition 3. Un *ensemble* S est *dénombrable* s'il existe une surjection $g : \mathbb{N} \longrightarrow S$, c'est-à-dire une fonction g telle que pour tout $s \in S$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $g(n) = s$.

Exemple 4.

1. Tout ensemble fini est dénombrable.
2. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.
3. Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, (théorème de Cantor[1]).
4. L'ensemble $\{0,\ 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable, (voir problème 13).
5. Les ensembles $[0, 1]$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables.

Remarque 5. Pour tout $A \subseteq \Omega$, la collection $\{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ forme toujours une σ-algèbre sur Ω. La situation extrême correspondant à la collection $\{\emptyset, \Omega\}$ est une σ-algèbre sur Ω appelée *la σ-algèbre triviale*. Pour tout Ω, l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω forme une σ-algèbre sur Ω. La σ-algèbre $\mathcal{P}(\Omega)$ est appelée *la σ-algèbre discrète*. Dans un sens, c'est la plus grande σ-algèbre sur Ω.

Si Ω est un ensemble dénombrable, on choisit habituellement la σ-algèbre discrète $\mathcal{P}(\Omega)$, comme σ-algèbre sur Ω.

Si Ω est un ensemble non dénombrable, alors on choisit habituellement des σ-algèbres sur Ω qui sont strictement contenues dans $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition 6. Soit $\mathcal{C}$ une collection non vide de sous-ensembles de Ω. *La σ-algèbre engendrée par $\mathcal{C}$* est la plus petite σ-algèbre contenant $\mathcal{C}$. Elle est dénotée par $\sigma(\mathcal{C})$.

[1]Georg Cantor (1845-1918), mathématicien allemand.

Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

La σ-algèbre $\sigma(C)$ est unique et est l'intersection de toutes les σ-algèbres contenant C, (voir problème 10).

Définition 7. La σ-algèbre sur **R** engendrée par

$$\mathcal{C} = \{(-\infty, x] \; ; \; x \in \mathbb{R}\}$$

est appelée *σ-algèbre de Borel* [2] *sur* $\mathbb{R}$. Elle est dénotée par $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ou plus simplement par $\mathcal{B}$. Tout élément de $\mathcal{B}$ s'appelle *ensemble de Borel.*

La σ-algèbre de Borel sur $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$ est la σ-algèbre engendrée par les intervalles de la forme $(c,\ d]$, où $c,\ d \in [a,\ b]$. Elle est dénotée par $\mathcal{B}_{[a,\ b]}$.

De même la σ-algèbre sur $\mathbb{R}^n$ engendrée par

$$\mathcal{C}^n = \{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n] \; ; \; x_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq n\}$$

est appelée *σ-algèbre de Borel sur* $\mathbf{R}^n$. Elle est dénotée par B^n .

Remarque 8. Notons que toute a-algèbre est une algèbre (voir Chap. 1, Section 1.1.5, définition 1). La réciproque n'est pas vraie en général.

Essentiellement, une algèbre se distingue d'une σ-algèbre par le fait que la première est fermée pour les réunions finies, alors que la seconde est fermée pour des réunions dénombrables.

Définition 9. Pour Ω un espace échantillonnal et F une σ-algèbre sur Ω, le couple *(9, F)* s'appelle *espace probabilisable.*

Remarque 10. Si l'ensemble Ω est dénombrable, alors le couple $(\Omega, P(\Omega))$ est l'espace probabilisable généralement utilisé.

4.1.2 Probabilités et espaces probabilisés

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable.

Définition 1. L'application $P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une *mesure de probabilité*, ou une *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{F})$ si

1. P est non négative, c'est-à-dire $P(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{F}$;
2. P est normée, c'est-à-dire $P(\Omega) = 1$;
3. P est *σ-additive*, c'est-à-dire pour $\{A_i \; ; \; i \in \mathbb{N}\}$, une suite d'événements disjoints deux à deux, donc $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i,\ j \in \mathbb{N}$ et $i \neq j$,

[2] Émile Borel (1871-1956), mathématicien français.

on a

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Définition 2. Le triplet $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ s'appelle *espace probabilisé.*

Remarque 3. Soit $\Omega = \{\omega_i\ ;\ i \in I\}$ un ensemble dénombrable, où I est nécessairement un ensemble fini ou dénombrable et soit $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ la σ-algèbre discrète. Alors P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ si et seulement si $p_i = P(\{\omega_i\}) \geq 0$ pour tout $i \in I$ et $\sum_{i\in I} p_i = 1$. Dans ce cas, pour tout $A \in \mathcal{F}$, on a

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\}) = \sum_{\{i\ ;\ \omega_i \in A\}} p_i.$$

Dans le cas particulier d'un ensemble fini, $\Omega = \{w_1, \ldots, w_n\}$, où $p_1 = \cdots = p_n = 1/n$ retrouve la définition classique de la probabilité (voir Chapitre 2, Section 2.1.1, définition 1). On obtient alors, pour tout $A \in F$,

$$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)},$$

et P est appelé *mesure de probabilité uniforme.*

Remarque 4. Désormais chaque fois qu'on établira une relation entre plusieurs événements, on supposera que les événements en question appartiennent tous à la même σ-algèbre.

Remarque 5. Une mesure de probabilité sur (Ω, F) possède les propriétés suivantes :

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, disjoints deux à deux, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i);$$

3. Pour tout $A \in \mathcal{F},\ P(A^c) = 1 - P(A)$;
4. Si $A, B \in \mathcal{F}$ et $A \subseteq B$ alors $P(A) \leq P(B)$;
5. Si $A \in \mathcal{F}$ alors $0 \leq P(A) \leq 1$;

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

6. Si $A, B \in \mathcal{F}$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

7. Si $\{A_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'événements de $\mathcal{F}$, alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

À cause de la propriété 7, on dit que la mesure de probabilité P est *sous-additive.*

Remarque 6. Soit $\{A_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$ une suite monotone croissante, qu'on dénote par $A_n \uparrow$, ou monotone décroissante, qu'on dénote par $A_n \downarrow$, d'événements de $\mathcal{F}$. Alors, on a

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right), \quad \text{si } A_n \uparrow,$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right), \quad \text{si} \quad A_n \downarrow .$$

On obtient comme cas particuliers les résultats suivants:
Soit $\{A_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$ une suite d'événements de $\mathcal{F}$. Si on pose

$$\overline{A} = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right)$$

et

$$\underline{A} = \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{m\geq n} A_m\right),$$

alors $\underline{A} \subseteq \overline{A}$ et on a

$$P(\overline{A}) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \quad \text{et} \quad P(\underline{A}) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{m\geq n} A_m\right).$$

Si $\underline{A} = \overline{A}$, on écrit simplement $\lim_{n\to\infty} A_n = A$, et alors on a

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Remarque 7. On écrit habituellement $\{A_n\ i.s.\}$ (infiniment souvent) au lieu de $\overline{A}$, car $\omega \in \overline{A}$ si et seulement si ω appartient à une infinité de A_n (voir problème 2).

Remarque 8. On peut montrer que les formules de calcul des probabilités du Chapitre 2, Section 2.1.6, restent valides pour une suite infinie d'événements. Par exemple, la formule de la probabilité totale devient

$$P(A) = \sum_{n\geq 1} P(A \mid E_n)P(E_n)$$

pour tout événement $A \in \mathcal{F}$ si la suite $\{E_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ forme une partition de Ω, c'est-à-dire si les événements E_n sont disjoints deux à deux, $P(E_n) > 0$ et

$$\Omega = \bigcup_{n\geq 1} E_n.$$

4.1.3 Mesures

Dans ce qui suit, $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre sur Ω et $\overline{\mathbb{R}}_+$ est l'ensemble des nombres réels non négatifs auxquels on ajoute le point ∞.

Définition 1. On dit que $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une *mesure* sur $(\Omega, \mathcal{F})$ si

1. $\mu(A) \in [0,\ \infty]$, pour tout $A \in \mathcal{F}$;
2. $\mu(\emptyset) = 0$;
3. Si $\{A_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'événements disjoints deux à deux, alors

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Définition 2. Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ s'appelle *espace mesuré.*

Exemple 3. *Mesure de dénombrement* – Pour $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{F}$ la σ-algèbre discrète, on définit μ par

$$\mu(\{n\}) = 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4. *Mesure de Lebesgue* [3] – Pour $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, on définit $\lambda : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ par

$$\lambda((a,\ b]) = b - a,$$

pour tout $a,\ b \in \mathbb{R}$.
Notons que si $A \in \mathcal{B}$ et $0 < \lambda(A) < \infty$, alors

$$P(B) = \frac{\lambda(B)}{\lambda(A)},\ B \subseteq A$$

défini une probabilité sur $(A, \mathcal{B}_A)$, où $\mathcal{B}_A = \{B \cap A\ ;\ B \in \mathcal{B}\}$. Cette probabilité est appelée *probabilité uniforme* sur $(A,\ \mathcal{B}_A)$.

Pour $\Omega = \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n$, on définit λ par

$$\lambda((a_1,\ b_1] \times \cdots \times (a_n,\ b_n]) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j),$$

pour tout $a_j,\ b_j \in \mathbb{R},\ 1 \leq j \leq n$.
Remarque 5. *Continuité des mesures* – Pour $\{A_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'événements convergente vers A, on a

1. si $A_n \uparrow A$, alors $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$;
2. si $A_n \downarrow A$ et $\mu(A_1) < \infty$, alors $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

Une conséquence de cette propriété de continuité est que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, où λ est la mesure de Lebesgue.

4.2 Problèmes et solutions

1. Soit Ω un ensemble non dénombrable. Décrire la plus petite σ-algèbre engendrée par la famille $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties dénombrable de Ω.

   Solution. Posons

$$\mathcal{F} = \{A \subset \Omega;\ A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}.$$

[3] Henri Lebesgue (1875-1941), mathématicien français.

Puisque Ω n'est pas dénombrable, on voit facilement que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{C})$. Montrons que $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre, ce qui prouvera que $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$. D'abord, $\Omega \in \mathcal{F}$, car $\emptyset = \Omega^c$ est dénombrable. Si $A \in \mathcal{F}$, alors A est dénombrable ou A^c est dénombrable. Donc A^c est dénombrable ou $(A^c)^c = A$ est dénombrable, ce qui prouve que $A^c \in \mathcal{F}$. Finalement si $\{A_i \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}$, alors il faut montrer que $A = \cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$. Or si tous les A_i sont dénombrables, A l'est aussi, étant une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables (théorème de Cantor).

2. Si $\{A_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de sous ensembles de Ω, montrer que

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\omega \ ; \ \omega \text{ appartient à une infinité de } A_n\}.$$

Solution. Puisque

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \left(\bigcup_{m\geq n} A_m \right),$$

on a $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ si et seulement si pour tout n, il existe $m(n) \geq n$ tel que $\omega \in A_{m(n)}$, ce qui est équivalent à dire que ω appartient à une infinité de A_n.

3. Si $\{A_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de sous ensembles de Ω, montrer que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n \quad = \quad & \{\omega \ ; \ \omega \text{ appartient à tous les } A_n \\ & \text{sauf peut-être à un nombre fini}\}.\end{aligned}$$

Solution. Puisque

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} \left(\bigcap_{m\geq n} A_m \right),$$

on a $\omega \in \liminf_{n\to\infty} A_n$ si et seulement si on peut trouver un n tel que $\omega \in A_m$, pour tout $m \geq n$, ce qui revient à dire que ω appartient à tous les A_n, sauf peut-être à un nombre fini.

4. Si $\{A_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ est une suite monotone strictement croissante de sous-ensembles de Ω, donc telle que $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n.$$

Solution. On a $\bigcap_{m\geq n} A_m = A_n$ et $\bigcup_{m\geq n} A_m = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Donc

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{m\geq n} A_m\right) = \bigcup_{n\geq 1} A_n,$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcup_{n\geq 1} A_n.$$

Par conséquent

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n,$$

ce qui prouve le résultat.

5. Si $\{A_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ est une suite monotone strictement décroissante de sous-ensembles de Ω, donc telle que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n.$$

Solution. On a $\bigcup_{m\geq n} A_m = A_n$ et $\bigcap_{m\geq n} A_m = \bigcap_{n\geq 1} A_n$. Donc

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{m\geq n} A_m\right) = \bigcup_{n\geq 1}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcap_{n\geq 1} A_n,$$

et

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) = \bigcap_{n\geq 1} A_n.$$

Par conséquent

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n,$$

ce qui prouve le résultat.

6. Si $A_n = \left(a,\ b - \frac{1}{n}\right]$, alors montrer que
$$\lim_{n\to\infty} A_n = (a,\ b).$$

Solution. Puisque $\{A_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite monotone strictement croissante , on a (voir problème 4), $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 1} A_n = (a,\ b)$. En effet, $x \in \bigcup_{n\geq 1} A_n$, si et seulement si $a < x \leq b - \frac{1}{n}$ pour un certain n, c'est-à-dire si et seulement si $x \in (a,\ b)$.

7. Si $A_n = \left(a - \frac{1}{n},\ a + \frac{1}{n}\right]$, alors montrer que
$$\lim_{n\to\infty} A_n = \{a\}.$$

Solution. Puisque $\{A_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite monotone strictement décroissante , on a (voir problème 5), $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 1} A_n = \{a\}$.

8. Si $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre et $B \in \mathcal{F}$, montrer que
$$\mathcal{F}_B = \{A \cap B\ ;\ A \in \mathcal{F}\}$$
est une σ-algèbre sur B.

Solution. Vérifions que $\mathcal{F}_B$ satisfait la définition d'une σ-algèbre. Premièrement $B \in \mathcal{F}_B$ car $B = \Omega \cap B$ et $\Omega \in \mathcal{F}$. Il faut maintenant montrer que si $A \in \mathcal{F}_B$, alors le complément de A dans B, c'est-à-dire $B \setminus A \in \mathcal{F}_B$. Or, si $A \in \mathcal{F}_B$ il existe $C \in \mathcal{F}$ tel que $A = C \cap B$, alors $B \setminus A = B \cap A^c = B \cap (C^c \cup B^c) = C^c \cap B \in \mathcal{F}_B$, car $C^c \in \mathcal{F}$. Finalement il faut montrer que si $\{A_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de sous-ensembles de $\mathcal{F}_B$, alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_B$. D'après la définition de $\mathcal{F}_B$, on voit que pour tout $n \geq 1$, il existe $C_n \in \mathcal{F}$ tel que $A_n = C_n \cap B$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (C_n \cap B) = (\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) \cap B \in \mathcal{F}_B$, car $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \in \mathcal{F}$.

9. Pour $\{\mathcal{F}_i\ ;\ i \in I\}$, une collection de σ-algèbres montrer que $\mathcal{F} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i$ est aussi une σ-algèbre.

Solution. On voit que $\Omega \in \mathcal{F}$ car $\Omega \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$. Ensuite si $A \in \mathcal{F}$, alors $A \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$, donc $A^c \in \mathcal{F}_i$ pour tout $i \in I$, ce qui implique que $A^c \in \mathcal{F}$. Finalement, si $\{A_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de sous-ensembles de $\mathcal{F}_i$, alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}_i$, pour tout $i \in I$, montrant que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

10. Si C est une collection non vide de sous-ensembles de Ω, montrer qu'il existe une σ-algèbre unique $\sigma(C)$ ayant la propriété d'être la plus petite σ-algèbre contenant C. On dit que $\sigma(C)$ est la σ-algèbre engendrée par la collection C.

    Solution. Notons par $\sigma(C)$ l'intersection de toutes les σ-algèbres contenant C. Alors $\sigma(C) \neq \emptyset$ puisque la σ-algèbre de tous les sous-ensembles de Ω contient C. D'après le problème 9, $\sigma(C)$ est une σ-algèbre qui contient C, et d'après sa définition elle est aussi la plus petite σ-algèbre contenant C. Elle est donc unique.

11. Soit

    $\mathcal{C}_1 = \{(a,b] \; ; \; a \leq b, \; a,b \in \mathbb{R}\}$,

    $\mathcal{C}_2 = \{(a,b) \; ; \; a \leq b, \; a,b \in \mathbb{R}\}$,

    $\mathcal{C}_3 = \{[a,b] \; ; \; a \leq b, \; a,b \in \mathbb{R}\}$,

    $\mathcal{C}_4 = \{[a,b) \; ; \; a \leq b, \; a,b \in \mathbb{R}\}$,

    $\mathcal{C}_5 = \{(-\infty,b] \; ; \; b \in \mathbb{R}\}$,

    $\mathcal{C}_6 = \{(-\infty,b) \; ; \; b \in \mathbb{R}\}$,

    $\mathcal{C}_7 = \{(a,\infty) \; ; \; a \in \mathbb{R}\}$,

    $\mathcal{C}_8 = \{[a,\infty) \; ; \; a \in \mathbb{R}\}$.

    Montrer que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}_i), \; i = 1,\ldots,8$ où $\mathcal{B}$ est l'algèbre de Borel.

    Solution. Notons d'abord que si $\mathcal{C}_i \subset \sigma(\mathcal{C}_j)$, alors $\sigma(\mathcal{C}_i) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_j)$, et de même si $\mathcal{C}_j \subset \sigma(\mathcal{C}_i)$, alors $\sigma(\mathcal{C}_j) \subseteq \sigma(\mathcal{C}_i)$, donc $\sigma(\mathcal{C}_i) = \sigma(\mathcal{C}_j)$. Pour prouver que $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C}_i), \; i = 1,\ldots,8$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_i \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ et $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_i)$, pour $i = 2,\ldots,8$. En effet, on aura alors $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_i)$, pour $i = 2,\ldots,8$ et comme $\sigma(\mathcal{C}_5) = \mathcal{B}$, (voir définition 7 dans 4.1.1), on obtiendra le résultat désiré.

    $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ car $(a,b) = \lim_{n\to\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right]$ et $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ car $(a,b] = \lim_{n\to\infty} \left(a, b + \frac{1}{n}\right)$.

    $\mathcal{C}_3 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ car $[a,b] = \lim_{n\to\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b\right]$ et $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_3)$ car $(a,b] = \lim_{n\to\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b\right]$.

    $\mathcal{C}_4 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ car $[a,b) = \lim_{n\to\infty} \left(a - \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$ et $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_4)$ car $(a,b] = \lim_{n\to\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$\mathcal{C}_5 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ car $(-\infty, b] = \lim_{n\to\infty} (b-n, b]$ et $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_5)$ car $(a, b] = (-\infty, b] \setminus (-\infty, a]$.

$\mathcal{C}_6 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ car $(-\infty, b) = \lim_{n\to\infty} \left(b-n, b-\frac{1}{n}\right]$ et $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_6)$ car $(a, b] = \lim_{n\to\infty} \left(\left(-\infty, b+\frac{1}{n}\right) \setminus \left(-\infty, a+\frac{1}{n}\right)\right)$.

$\mathcal{C}_7 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ car $(a, \infty) = \lim_{n\to\infty} (a, a+n]$ et $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_7)$ car $(a, b] = (a, \infty) \setminus (b, \infty)$.

$\mathcal{C}_8 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ car $[a, \infty) = \lim_{n\to\infty} \left(a-\frac{1}{n}, a+n\right]$ et $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_8)$ car $(a, b] = \lim_{n\to\infty} \left(\left[a+\frac{1}{n}, \infty\right) \setminus \left[b+\frac{1}{n}, \infty\right)\right)$.

12. Montrer que $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}$.

    Solution. D'après les problèmes 11 et 7, $\{x\} \in \mathcal{B}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, on a $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\} \in \mathcal{B}$.

13. Montrer que $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble de toutes les suites dont les éléments appartient à l'ensemble $\{0, 1\}$ n'est pas dénombrable.

    Solution. Supposons que Ω est dénombrable, donc $\Omega = \{\omega_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$, où $\omega_n = \{\omega_n(m) \; ; \; m \in \mathbb{N}\}$ et montrons qu'il existe une suite $\omega = \{\omega(n) \; ; \; n \in \mathbb{N}\} \in \Omega$, tel que $\omega(n) \neq \omega_n(n)$, pour tout $n \geq 1$, donc la suite ω est différente de toutes les suites de $\{\omega_n(m) \; ; \; m \in \mathbb{N}\}$. Il suffit de définir la suite ω de la façon suivante

$$\omega(n) = 1 - \omega_n(n) \; ; \; n \in \mathbb{N}.$$

    Notons d'abord que $\omega \in \Omega$, car $\omega(n) = 0$, ou $\omega(n) = 1$, pour tout $n \geq 1$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $\omega \neq \omega_n$, car $\omega(n) \neq \omega_n(n)$, pour tout $n \geq 1$.

14. *Ensemble de Cantor* – L'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$ est défini de la façon suivante:

$$\mathcal{C}_0 = [0, 1],$$

$$\mathcal{C}_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right],$$

$$\mathcal{C}_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right],$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

etc. ...

En fait, on commence avec l'intervalle [0, 1], on le partage en trois parties égales, et on enlève la partie située au milieu ; on retrouve alors deux intervalles fermés. On répète le même procédé sur les intervales restants, et ainsi de suite. Finalement

$$\mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

i) Montrer que $\mathcal{C}_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \left[x_k,\ x_k + \frac{1}{3^n}\right]$, où

$$x_k \in \left\{x\ ;\ x = \sum_{j=1}^{n} \frac{2a_j}{3^j}\ ;\ a_j \in \{0,1\}\right\}.$$

ii) Montrer que l'ensemble de Cantor est donné par

$$\mathcal{C} = \left\{x\ ;\ x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}\ ;\ a_n \in \{0,1\}\right\}.$$

En déduire que C est un ensemble non dénombrable.

Solution. i) La preuve se fera par récurrence sur n. Pour $n = 1$ et $n = 2$, le résultat est évident. Supposons que le résultat est vrai pour n et soit un intervalle de la forme $[x_k, x_k + 1 / 3^n]$ où

$$x_k = \sum_{j=1}^{n} \frac{2a_j}{3^j},\quad a_j \in \{0,1\}.$$

Après avoir enlevé la partie située au milieu de cet intervalle, on trouve

$$\left[x_k,\ x_k + \frac{1}{3^{n+1}}\right] \cup \left[x_k + \frac{2}{3^{n+1}},\ x_k + \frac{1}{3^n}\right].$$

Or les bornes inférieures de ces intervalles sont bien de la forme

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{2a_j}{3^j},\quad a_j \in \{0,1\}.$$

Notons que chaque ensemble $\mathcal{C}_n$ est la réunion de 2^n intervalles disjoints et fermés, chaque intervalle étant de longueur 3^{-n}.

ii) On a d'après i) que $x \in \mathcal{C}$ si et seulement si pour tout n, il existe une suite $\{a_k;\ k \in \mathbb{N}\ ;\ a_k \in \{0,1\}\}$ telle que si $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{2a_k}{3^k}$, alors

$$x \in \left[y_n,\ y_n + \frac{1}{3^n}\right] \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Par conséquent,

$$x = \lim_{n\to\infty} y_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a_k}{3^k}.$$

Finalement, on a l'ensemble $\mathcal{C}$ en bijection avec $\{0,\ 1\}^{\mathbb{N}}$ qui n'est pas dénombrable (voir problème 13). Donc $\mathcal{C}$ n'est pas dénombrable.

15. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et soit $M \subseteq \Omega$ tel que $C \subseteq M$ entraîne $P(C) = 0$ pour tout $C \subseteq \mathcal{F}$ et $D \supseteq M$ entraîne $P(D) = 1$ pour tout $D \in \mathcal{F}$.

i) Montrer que $M \notin \mathcal{F}$.

ii) Si $\mathcal{F}_M = \{B \cap M\ ;\ B \in \mathcal{F}\}$, montrer que $\mathcal{F}_M$ est une σ-algèbre sur M.

iii) Montrer que pour $A = B \cap M$, $P_M(A) = P_M(B \cap M) = P(B)$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_M)$.

Solution. i) Montrons que $M \notin \mathcal{F}$ en supposant le contraire, c'est-à-dire que $M \in \mathcal{F}$. Dans ce cas, en posant $C = M$ et $D = M$, on a $C \subseteq M \subseteq D$ et $C,\ D \in \mathcal{F}$. Donc $P(M) = P(C) = 0$ et $P(M) = P(D) = 1$, ce qui est absurde. Donc $M \notin \mathcal{F}$.

ii) Vérifions que la définition d'une σ-algèbre est satisfaite. D'abord $M \in \mathcal{F}_M$ car $M = M \cap \Omega$ et $\Omega \in \mathcal{F}$. De plus, si $A \in \mathcal{F}_M$, alors on peut trouver $B \in \mathcal{F}$ tel que $A = B \cap M$. Puisque $B \in \mathcal{F}$, on a aussi $B^c \in \mathcal{F}$. Donc

$$M \setminus A = M \cap A^c = M \cap (B^c \cup M^c) = B^c \cap M,$$

ce qui prouve que $M \setminus A \in \mathcal{F}_M$. Enfin, il faut montrer que si $\{A_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{F}_M$, alors $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}_M$. Puisque

$A_n \in \mathcal{F}_M$, il existe $B_n \in \mathcal{F}$ tel que $A_n = B_n \cap M$. Posons $B = \cup_{n\geq 1} B_n$. Comme $\mathcal{F}$ est une σ-algèbre, $B \in \mathcal{F}$. Donc

$$\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} (B_n \cap M) = B \cap M \in \mathcal{F}_M.$$

Par conséquent, on peut conclure que $\mathcal{F}_M$ est une σ-algèbre.

iii) Il faut montrer d'abord que P_M est bien définie, c'est-à-dire que si $A = B_1 \cap M = B_2 \cap M$, où $B_1,\ B_2 \in \mathcal{F}$, alors $P(B_1) = P(B_2)$. Posons $C = B_1 \cap B_2,\ C_1 = B_1 \setminus B_2$ et $C_2 = B_2 \setminus B_1$. Alors

$$\begin{aligned} C \cup C_1 &= (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2^c) \\ &= ((B_1 \cap B_2) \cup B_1) \cap ((B_1 \cap B_2) \cup B_2^c) \\ &= B_1 \cap ((B_1 \cap B_2) \cup B_2^c) \\ &= B_1 \cap ((B_1 \cup B_2^c) \cap (B_2 \cup B_2^c)) \\ &= B_1. \end{aligned}$$

De même $C \cup C_2 = B_2$. Alors

$$A = B_i \cap M = (C \cup C_i) \cap M = (C \cap M) \cup (C_i \cap M)\ ;\ i = 1, 2.$$

Mais $C_1 \cap M = B_1 \cap B_2^c \cap M = A \cap B_2^c = \emptyset$, car $A \subseteq B_2$. De même $C_2 \cap M = \emptyset$. On a donc $C_1 \cap M = C_2 \cap M = \emptyset$. On peut alors conclure que $C_i^c \supset M$, pour $i = 1, 2$. Par conséquent, d'après l'hypothèse, on doit avoir $P(C_i^c) = 1$, donc $P(C_i) = 0$. Comme $C \cap C_i = \emptyset$, pour $i = 1, 2$, on trouve que

$$P(B_i) = P(C \cup C_i) = P(C) + P(C_i) = P(C)\ ;\ i = 1, 2.$$

Donc la valeur de $P_M(A),\ A \in \mathcal{F}_M$, est indépendante de la représentation de A. Ayant montré que P_M est bien définie, il faut montrer que P_M est une probabilité sur $(M, \mathcal{F}_M)$. On a

$$P_M(M) = P_M(\Omega \cap M) = P(\Omega) = 1,$$

et si $A \in \mathcal{F}_M$, alors $P_M(A) \geq 0$. Il reste à montrer que si $\{A_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'éléments disjoints deux à deux de $\mathcal{F}_M$, alors

$$P_M\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} P_M(A_n).$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Pour une telle suite $\{A_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ il existe une autre suite $\{B_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{F}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B_n \in \mathcal{F}$ et $A_n = B_n \cap M$. Puisque $\emptyset = A_n \cap A_m = (B_n \cap B_m) \cap M$, pour tout $n \neq m$, on déduit que $(B_n \cap B_m)^c \supset M$. Par hypothèse, on a donc $P((B_n \cap B_m)^c) = 1$, ce qui revient à

$$P(B_n \cap B_m) = 0, \quad \text{si} \ \ n \neq m,$$

Notons que la condition $P(B_n \cap B_m) = 0$, si $n \neq m$, n'entraîne pas que les événements de cette suite sont disjoints deux à deux. Introduisons une autre suite, qui aura cette propriété.

Posons $C_1 = B_1$ et

$$C_{n+1} = B_{n+1} \ \setminus \ \left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m \right), \quad n \geq 1,$$

On a, pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= B_{n+1} \bigcap \left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m \right)^c \\ &= \bigcup_{m=1}^{n+1} \left(B_m \bigcap \left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m \right)^c \right) \\ &= \left(\bigcup_{m=1}^{n+1} B_m \right) \bigcap \left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m \right)^c \\ &= \bigcup_{m=1}^{n+1} B_m \ \setminus \ \bigcup_{m=1}^{n} B_m. \end{aligned}$$

Alors $C_n \in \mathcal{F}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $\{C_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite d'éléments disjoints deux à deux. En effet, pour tout $k, h \in \mathbb{N}$, soit $k \neq h$, et $k > h$, si $x \in C_h$ alors $x \notin C_k$ car $C_k = B_k \setminus (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_h \cup \cdots \cup B_{k-1})$, et donc

$$C_k \cap C_h = \emptyset, \quad \text{si} \quad k \neq h, \ \text{pour tout } h, \ k \in \mathbb{N}.$$

De plus, on a $P(B_n) = P(C_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, $B_1 = C_1$ et

$$\begin{aligned} B_{n+1} \setminus C_{n+1} &= B_{n+1} \cap C_{n+1}^c \\ &= B_{n+1} \bigcap \left(B_{n+1}^c \bigcup \left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m \right) \right) \\ &= B_{n+1} \bigcap \left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m \right). \end{aligned}$$

Or

$$0 \leq P(B_{n+1} \setminus C_{n+1}) \leq \sum_{m=1}^{n} P(B_m \cap B_{n+1}) = 0.$$

Comme $C_{n+1} \subset B_{n+1}$, on a $0 = P(B_{n+1} \setminus C_{n+1}) = P(B_{n+1}) - P(C_{n+1})$ et par conséquent $P(B_n) = P(C_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Finalement $\bigcup_{n\geq 1} C_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. En effet, supposons que $x \in \bigcup_{n\geq 1} B_n$ et soit k le plus petit indice tel que $x \in B_k$, alors $x \in C_k$ et par conséquent, $x \in \bigcup_{n\geq 1} C_n$. Clairement, si $x \in \bigcup_{n\geq 1} C_n$, alors $x \in B_k$ pour un certain k et donc $x \in \bigcup_{n\geq 1} B_n$. D'où $\bigcup_{n\geq 1} C_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$.

Combinant ces résultats, on trouve que

$$\begin{aligned} P_M\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) &= P_M\left(\bigcup_{n\geq 1} (B_n \cap M)\right) \\ &= P_M\left(\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) \cap M\right) \\ &= P\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) \\ &= P\left(\bigcup_{n\geq 1} C_n\right) \\ &= \sum_{n\geq 1} P(C_n) \\ &= \sum_{n\geq 1} P(B_n) \\ &= \sum_{n\geq 1} P_M(A_n) \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.

16. Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres naturels positifs et $n\mathbb{N}$ l'ensemble des multiples de $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il n'existe pas de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $P(\{n\mathbb{N}\}) = \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

    Solution. Posons $A_n = n\mathbb{N}$ et soit

$$\mathcal{P} = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots,\ p_k,\ \ldots\}$$

la suite des nombres premiers. Supposons qu'il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}$ telle que $P(A_n) = \frac{1}{n}$. Alors les événements A_p, $p \in \mathcal{P}$ sont indépendants. En effet, si $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ sont des nombres premiers et $m = p_1 \cdots p_k$, alors $\frac{1}{m} = P(A_m) = P\left(\bigcap_{i=1}^k A_{p_i}\right)$. De plus $P(A_{p_1}) \cdots P(A_{p_k}) = \frac{1}{p_1} \cdots \frac{1}{p_k} = \frac{1}{m}$. Donc

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{p_i}\right) = P(A_{p_1}) \cdots P(A_{p_k})$$

ce qui prouve l'indépendance.

Comme tout nombre entier positif, $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire sous la forme

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}\ ;\ p_i \in \mathcal{P},\ \ \alpha_i \geq 0,\ \ 1 \leq i \leq k,$$

il s'ensuit que

$$n \in A_{p_1 p_2 \ldots p_k} = A_{p_1} \cap A_{p_2} \cap \cdots \cap A_{p_k}.$$

D'où

$$\mathbb{N} = \lim_{k \to \infty} A_{p_1 p_2 \ldots p_k},$$

donc

$$\begin{aligned}
1 &= P(\mathbb{N}) \\
&= \lim_{k\to\infty} P\left(A_{p_1p_2\ldots p_k}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \prod_{j\leq k} P\left(A_{p_j}\right) \\
&= \lim_{k\to\infty} \prod_{j\leq k} \frac{1}{p_j} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cette contradiction montre qu'il n'existe pas une mesure de probabilité P sur **N** satisfaisant la condition demandée.

17. Prouver la véracité ou démontrer la fausseté de l'affirmation suivante :

$$P(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)},\ n \in \mathbb{N},$$

définit une mesure de probabilité sur les entiers positifs **N.**

Solution. Nous allons montrer que P définit bien une mesure de probabilité sur **N.** Comme

$$P(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0,\ n = 1, 2, \ldots,$$

il suffit de montrer que

$$\sum_{n\geq 1} P(\{n\}) = 1.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} P(\{k\}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$\sum_{n\geq 1} P(\{n\}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(\{k\}) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

18. Démontrer que la propriété de σ-additivité pour une probabilité P est équivalente à la condition suivante: pour toute suite monotone strictement décroissante d'événements $\{A_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ on a $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Solution. Supposons que P est σ-additive, et soit $\{A_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ une suite monotone strictement décroissante d'événements. On doit montrer que $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$. Posons $B_n = A_n \ \setminus \ A_{n+1}$, $n \geq 1$. Alors les événements B_n sont disjoints deux à deux, et

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1.$$

En effet, si $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, alors évidemment $x \in A_1$. Si $x \in A_1$, alors il existe un k tel que $x \in A_i$ pour $i \leq k$ et $x \notin A_i$ pour $i \geq k+1$. Par conséquent, $x \in B_k$ et donc $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. D'où $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A_1$.

De plus,

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k = A_1 \ \setminus \ A_{n+1}.$$

En effet, si $x \in \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, alors évidemment $x \in A_1 \setminus A_{n+1}$. Si $x \in A_1 \setminus A_{n+1}$, alors il existe un $k \leq n$ tel que $x \in A_i$ pour $i \leq k$ et $x \notin A_i$ pour $i \geq k+1$. Par conséquent, $x \in B_k$ et donc $x \in \bigcup_{k=1}^{n} B_k$. D'où l'égalité désirée.

Puisque la probabilité P est σ-additive, on a

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(A_1 \ \setminus \ A_{n+1}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (P(A_1) - P(A_{n+1})) \\
&= P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(A_{n+1}).
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

Il reste à montrer que si $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$ pour toute suite monotone strictement décroissante d'événements $\{A_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$, alors la probabilité P est σ-additive. Soit donc $\{E_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'événements disjoints deux à deux, et soit $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Il faut montrer que

$$P(E) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n).$$

Posons $A_n = E \setminus (\bigcup_{k=1}^{n} E_k)$. Alors la suite $\{A_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ est monotone strictement décroissante, donc

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} P\left(E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(P(E) - P\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) \\
&= P(E) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(E_k).
\end{aligned}$$

On peut conclure que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = P(E).$$

19. Soit $\{A_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'événements de Ω telle que $P(A_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = 1.$$

Solution. Utilisant la sous-additivité de P, on trouve que

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n^c) = 0,$$

car $P(A_n^c) = 1 - P(A_n) = 1 - 1 = 0$. Donc

$$P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = 1 - P\left(\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right) = 1 - 0 = 1.$$

20. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et soit $\{A_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ une suite d'événements. Montrer que

i) si $A_n \uparrow A$ alors $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

ii) si $A_n \downarrow A$ alors $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

iii) $\limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(\limsup_{n\to\infty} A_n)$.

iv) $\liminf_{n\to\infty} P(A_n) \geq P(\liminf_{n\to\infty} A_n)$.

v) si $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe, alors $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)$.

Solution. i) Posons $B_1 = A_1$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n > 1$. Alors les événements B_n sont disjoints deux à deux, $A = \bigcup_{n\geq 1} B_n$ et $A_n = \bigcup_{m=1}^n B_m$. D'après la propriété de σ-additivité de la probabilité P, on trouve

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) \\ &= \sum_{n\geq 1} P(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} P(B_m) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m=1}^{n} B_m\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

ii) Puisque $A_n \downarrow A$, on a $A_n^c \uparrow A^c$. On peut donc appliquer i) pour conclure que

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n)) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(A_n). \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

iii) – iv) Posons $B_n = \bigcap_{m\geq n} A_m$, $C_n = \bigcup_{m\geq n} A_m$, $\underline{A} = \liminf_{n\to\infty} A_n$, et $\overline{A} = \limsup_{n\to\infty} A_n$ (voir remarque 6 dans 4.1.2). Pour tout $n \geq 1$, on a $B_n \subset A_n \subset C_n$. Puisque $B_n \uparrow \underline{A}$, et $C_n \downarrow \overline{A}$, on a d'après i) et ii)

$$\begin{aligned} P(\underline{A}) &= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} P(C_n) \\ &= P(\overline{A}), \end{aligned}$$

ce qui prouve iii) et iv).

v) Si $\lim_{n\to\infty} A_n$ existe et est égale à A, cela veut dire que $A = \underline{A} = \overline{A}$. D'après les inégalités précédentes, on trouve

$$P(A) \leq \liminf_{n\to\infty} P(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} P(A_n) \leq P(A),$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$, ce qui prouve v).

21. *Théorème de Borel-Cantelli*[4] – Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et soit $\{A_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$ une suite d'événements. Si

$$\sum_{n\geq 1} P(A_n) < \infty,$$

montrer que $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

Solution. Posons $B_n = \bigcup_{m\geq n} A_m$. Alors $B_n \downarrow \limsup_{n\to\infty} A_n$. D'après ii) du problème précédent, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(B_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{m\geq n} A_m\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{m\geq n} P(A_m) \\ &= 0, \end{aligned}$$

[4]Francesco Paolo Cantelli (1875-1966), mathématicien italien.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

car $\sum_{m\geq n} P(A_m)$ est le reste de la série convergente $\sum_{n\geq 1} P(A_n) < \infty$. Donc $P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

22. *Probabilité uniforme sur* $[0,\ 1]$ – Soit P la mesure de probabilité sur $\big([0,1],\ \mathcal{B}_{[0,1]}\big)$ telle que

$$P((a,b]) = b - a \quad \text{si} \quad 0 \leq a \leq b \leq 1.$$

Pour des raisons évidentes, cette mesure de probabilité est dite *mesure de probabilité uniforme sur* $[0,\ 1]$. Montrer que

i) $P(\{x\}) = 0$, pour tout $x \in [0,\ 1]$.

ii) $P(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.

iii) l'ensemble de Cantor, $\mathcal{C}$ (voir problème 14) est un ensemble non dénombrable de probabilité nulle, c'est-à-dire $P(\mathcal{C}) = 0$.

Solution. i) Posons $A_n = \big(x - \frac{1}{n},\ x\big]$. Alors $A_n \downarrow$ et $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \{x\}$. Donc

$$P(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left(x - \frac{1}{n},\ x\right]\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

ii) L'ensemble $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, on a

$$P(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \sum_{x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]} P(\{x\}) = 0,$$

d'après i).

iii) Comme $\mathcal{C} = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_n \downarrow$, où $\mathcal{C}_n$ est la réunion de 2^n intervalles disjoints et fermés de longueur 3^{-n}, on a

$$P(\mathcal{C}) = \lim_{n\to\infty} P(\mathcal{C}_n) = \lim_{n\to\infty} \left(2^n \times \frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0,$$

montrant que $P(\mathcal{C}) = 0$.

23. *Probabilité uniforme sur* $[0,\ 1] \times [0,\ 1]$ – Soit $\mathcal{B}_{[0,\ 1]^2}$ la σ-algèbre de Borel sur $[0,\ 1]^2$, donc la σ-algèbre engendrée par les intervalles de la forme $(a,b] \times (c,d]$, où $a, b, c, d \in [0,\ 1]$ et soit P la mesure de probabilité sur $\big([0,\ 1]^2,\ \mathcal{B}_{[0,\ 1]^2}\big)$ telle que $P(A)$ soit l'aire de A, pour $A \in \mathcal{B}_{[0,\ 1]^2}$. En particulier

$$P((a,b] \times (c,d]) = (b-a) \cdot (d-c) \quad \text{si} \quad (a,b] \times (c,d] \subset [0,\ 1]^2.$$

Cette mesure de probabilité est dite *mesure de probabilité uniforme sur* $[0,\ 1]^2$.

i) Calculer $P(D_n)$, où $D_n = \left\{(x,y)\ ;\ |x-y| < \frac{1}{n}\right\}$.

ii) Montrer que $P(D) = 0$, où $D = \{(x,x)\ ;\ 0 \leq x \leq 1\}$. L'ensemble D est la diagonale de $[0,\ 1]^2$.

Solution. i) Notons que le domaine D_n se trouve dans le carré unité entre la droite $x - y = \frac{1}{n}$, qui passe par les points $\left(\frac{1}{n},\ 0\right)$ et $\left(1,\ 1-\frac{1}{n}\right)$, et la droite $y - x = \frac{1}{n}$, qui passe par les points $\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$ et $\left(1-\frac{1}{n},\ 1\right)$. Il est plus facile de calculer $P(D_n^c)$. On a $D_n^c = A_n \cup B_n$, où

$$A_n = \left\{(x,\ y) \in [0,\ 1]^2\ ;\ y \leq x - \frac{1}{n}\right\}$$

et

$$B_n = \left\{(x,\ y) \in [0,\ 1]^2\ ;\ y \geq x + \frac{1}{n}\right\}.$$

Notons que A_n est le triangle rectangle dont les sommets sont $\left(\frac{1}{n},\ 0\right)$, $(1,\ 0)$ et $\left(1,\ 1-\frac{1}{n}\right)$, alors que B_n est le triangle rectangle dont les sommets sont $\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$, $(0,\ 1)$ et $\left(1-\frac{1}{n},\ 1\right)$. On a $\text{aire}(A_n) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \text{aire}(B_n)$. Donc

$$P(D_n) = \text{aire}(D_n) = 1 - \left(1-\frac{1}{n}\right)^2.$$

ii) Puisque $D_n \downarrow D$, on a

$$P(D) = \lim_{n\to\infty} P(D_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right) = 0,$$

d'après i).

24. Soit $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ un espace mesuré, où $\mathbb{R}$ est la droite réelle, $\mathcal{B}$ est la σ-algèbre de Borel sur $\mathbb{R}$ et λ la mesure de Lebesgue. Montrer que

i) $\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = b - a, \quad \text{si} \quad a \leq b.$

ii) Si $O \neq \emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors $\lambda(O) > 0$.

iii) Si K est un compact de $\mathbb{R}$, alors $\lambda(K) < \infty$.

iv) Donner un exemple d'un ensemble de Borel non dénombrable E tel que $\lambda(E) = 0$.

Solution. i) Par définition, on a $\lambda((a, b]) = b-a$, si $a \leq b$ (voir exemple 4 dans 4.1.3). Pour montrer que $\lambda((a, b)) = \lambda([a, b]) = b - a$, si $a \leq b$, il suffit donc de montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lambda(\{a\}) = 0$. Or, si $\lambda(\{a\}) > \epsilon > 0$, pour un certain $\epsilon > 0$, on obtient

$$\frac{\epsilon}{2} = \lambda\left(\left(a - \frac{\epsilon}{2},\ a\right]\right) \geq \lambda(\{a\}) > \epsilon,$$

ce qui est une contradiction. Donc $\lambda(\{a\}) = 0$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

ii) Si $O \neq \emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors il existe un $a \in O$ et $\epsilon > 0$ tels que $(a-\epsilon,\ a+\epsilon) \subset O$. Donc $\lambda(O) \geq \lambda((a-\epsilon,\ a+\epsilon)) = 2\epsilon > 0$, d'après i).

iii) Puisque K est un compact, K est borné, et on peut trouver $a > 0$ tel que $K \subset [-a,\ a]$. Donc $\lambda(K) \leq \lambda([-a,\ a]) = 2a < \infty$, d'après i).

iv) Considérons l'ensemble de Cantor $\mathcal{C}$ (voir problème 14). On sait que $\mathcal{C}$ est un ensemble non dénombrable, que $\mathcal{C} = \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}_n$, où $\mathcal{C}_n \downarrow$, et où $\mathcal{C}_n$ est la réunion de 2^n intervalles disjoints et fermés de longueur 3^{-n}. D'après i), on a $\lambda(\mathcal{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Par conséquent,

$$\lambda(\mathcal{C}) \leq \liminf_{n\to\infty} \lambda(\mathcal{C}_n) = \liminf_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Chapitre 5

Variables aléatoires et lois de probabilités

5.1 Notions de base — Définitions et propriétés

5.1.1 Variables aléatoires

Dans ce chapitre, nous considérons des cas où les expériences aléatoires peuvent avoir une infinité de résultats possibles.

Définition 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $A \subseteq \mathbb{R}$. *L'image inverse* de A est

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \; ; \; X(\omega) \in A\}.$$

Remarque 2. Soit $\{A_n \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ une suite de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ et soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors

1. $X^{-1}\left(\bigcup_i A^i\right) = \bigcup_i X^{-1}(A_i)$;
2. $X^{-1}\left(\bigcap_i A_i\right) = \bigcap_i X^{-1}(A_i)$;
3. $X^{-1}(A^c) = (X^{-1}(A))^c$;
4. $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega$.

Définition 3. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable et $X : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que X est une *variable aléatoire par rapport à $\mathcal{F}$*, ou *sur $\mathcal{F}$*, ou en abrégé une *variable aléatoire* si

$$X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{B},$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

où $\mathcal{B}$ est l'algèbre de Borel sur $\mathbb{R}$.

Si X est une variable aléatoire alors pour tout $A \in \mathcal{B}$, l'image inverse $X^{-1}(A)$ est un événement de $\mathcal{F}$.

Remarque 4. Si $X : \Omega \to A \subset \mathbb{R}$ et A est dénombrable, alors X est une variable aléatoire si et seulement si $X^{-1}(a) \in \mathcal{F}$ pour tout $a \in A$.

Remarque 5. Si $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $k(X)$ est une variable aléatoire.

Exemple 6.

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires, alors

$$X_1 + \cdots + X_n$$

est une variable aléatoire.

Si X une variable aléatoire, alors $aX + b$ est une variable aléatoire, pour tout $a,\ b \in \mathbb{R}$. De même X^2 est une variable aléatoire.

Si $A \in \mathcal{F}$, alors $1_A(.)$, la *fonction indicatrice de l'événement* A, où

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

est une variable aléatoire.

Remarque 7. Parce que l'algèbre de Borel, $\mathcal{B}$ est la σ-algèbre engendrée par les intervalles de la forme $(-\infty, x]$, où $x \in \mathbb{R}$, il s'ensuit que l'application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire si et seulement si

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Notons que

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \leq x\}.$$

Définition 8. Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable et $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$. On dit que $\mathbf{X}$ est un *vecteur aléatoire par rapport à* $\mathcal{F}$, où en abrégé un *vecteur aléatoire* si

$$\mathbf{X}^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathcal{B}^n,$$

où $\mathcal{B}^n$ est l'algèbre de Borel sur $\mathbb{R}^n$, donc la σ-algèbre engendrée par

$$\{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]\ ;\ x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Remarque 9. L'application $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est un vecteur aléatoire si et seulement si

$$\mathbf{X}^{-1}((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) \in \mathcal{F},$$

pour tout $x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n$.

Remarque 10. $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur aléatoire, si et seulement si chaque composante X_i ; $1 \leq i \leq n$, est une variable aléatoire.

Ici, par la suite, nous ne traiterons que le cas $n = 2$ et nous parlerons du *couple aléatoire*, plutôt que d'un vecteur aléatoire.

Définition 11. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont *indépendantes* si

$$P(X_1 \in A_1, \ \ldots, \ X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n),$$

pour tous les $A_1, \ \ldots, \ A_n \in \mathcal{B}$.

5.1.2 Lois de probabilités

Dans ce qui suit, nous allons traiter principalement deux types de lois de probabilités pour les variables aléatoires, les lois discrètes et les lois continues.

Définition 1. On dit que la *loi de probabilité* de la variable aléatoire X est *discrète, où* encore que X est une *variable aléatoire discrète* s'il existe un ensemble dénombrable E tel que $P(X \in E) = 1$.

Dans ce cas, la loi de probabilité de X est uniquement déterminée par les probabilités $P(X = x),\ x \in E$.

Définition 2. On dit que la *loi de probabilité* de la variable aléatoire X est *continue*, où encore que X est une *variable aléatoire continue* s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non négative et telle que, pour tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$, on peut écrire

$$P(X \in A) = \int_A f(x)\,dx.$$

Du fait que la variable aléatoire X doit prendre une valeur, il résulte la contrainte suivante pour la fonction f,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1.$$

La fonction f est appelée *fonction de densité* de la loi de probabilité de la variable aléatoire X, ou en abrégé, *la densité* de la variable aléatoire X.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Remarque 3. Si on prend $A = [a, b]$, alors

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

et si on pose $a = b$, on obtient

$$P(X = a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Remarque 4. Soit X une variable aléatoire continue de densité f_X. Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction strictement monotone (croissante ou décroissante) et dérivable, donc continue. La densité f_Y de la variable aléatoire $Y = h(X)$ est donné par

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} h^{-1}(y) \right| & \text{si } y = h(x) \text{ pour un } x \text{ quelconque} \\ 0 & \text{si } y \neq h(x) \text{ pour tout } x \end{cases}$$

où $h^{-1}(y)$ est défini comme étant égal à la valeur x telle que $h(x) = y$.

Remarque 5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités f_x et f_y, respectivement. La densité de la variable aléatoire $X + Y$ est donnée par

$$f_{(X+Y)}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(a - y) f_Y(y)\,dy,$$

pour tout $a \in \mathbf{R}$. On dit que la fonction $f_{(X+Y)}$ est obtenue par la *convolution* des fonction f_X et f_Y.

Remarque 6. Les variables aléatoires discrètes et les variables aléatoires continues forment deux classes disjointes. Cependant, ces deux classes ne contiennent pas toutes les variables aléatoires, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 7. On s'intéresse à la durée de vie d'un nouvel appareil. La première fois qu'on le met en marche, il y a une chance sur 100 que l'appareil ne fonctionne pas. S'il fonctionne, sa durée de vie est représentée par une variable aléatoire continue, X dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Soit Y la variable aléatoire qui représente la durée de vie d'un appareil neuf. Alors la loi de probabilité de la variable aléatoire Y n'est ni discrète et ni continue. En effet, soit A l'événement "l'appareil ne fonctionne pas", alors

$$P(Y=0)=P(A)=\frac{1}{100},$$

et pour $y>0$,

$$\begin{aligned} P(Y=y) &= P((X=y)\cap A^c) \\ &= P(X=y)P(A^c) \\ &= 0\times\frac{99}{100} \\ &= 0, \end{aligned}$$

car X est une variable aléatoire continue. De même, pour tout $y<0$, on a évidemment $P(Y=y)=0$. Comme $P(Y=0)\neq 0$, la variable aléatoire Y n'est pas continue. Puisque l'ensemble des valeurs possibles de Y est $[0,\infty)$, une ensemble non-dénombrable, la variable aléatoire Y n'est pas discrète non plus. En fait, si $0<a<b<\infty$,

$$\begin{aligned} P(a<Y\leq b) &= P((a<Y\leq b)\cap A^c) \\ &= P(a<Y\leq b)P(A^c) \\ &= \frac{99}{100}\int_a^b e^{-x}\,dx \\ &= \frac{99}{100}\left(e^{-a}-e^{-b}\right). \end{aligned}$$

Remarque 8. Les définitions de lois discrètes et continues de variables aléatoires peuvent s'étendre aux vecteurs aléatoires.

On dit que la loi de probabilité du couple aléatoire $\mathbf{X}=(X,Y)$ est discrète s'il existe un ensemble dénombrable $E\subset\mathbb{R}^2$ tel que $P(\mathbf{X}\in E)=1$.
Dans ce cas, la loi de probabilité de $\mathbf{X}$ est uniquement déterminée par les probabilités $P((X,Y)=(x,y)),\ (x,y)\in E$.

Le couple aléatoire $\mathbf{X}=(X,Y)$ a une loi de probabilité continue si $\mathbf{X}$ possède une densité $f_{(X,Y)}(x,y)$ par rapport à une mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}^2$. On écrit alors

$$P(\mathbf{X}\in A)=\iint_A f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy,$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

pour $A \in B^2$. La fonction $f_{(X,Y)}$ s'appelle aussi *densité conjointe* de X et Y. Notons que

$$P(X \in A) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \right) dx,$$

donc la variable aléatoire X possède une densité et

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy,$$

qui s'appelle aussi *densité marginale* de X.
De façon analogue,

$$P(Y \in A) = \int_A \left(\int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \right) dy,$$

donc la variable aléatoire Y possède une densité et

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx,$$

qui s'appelle aussi *densité marginale* de Y.

Remarque 9. Les variables aléatoires X et Y, les composantes du couple aléatoire X = (X, Y) sont indépendantes si et seulement si

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) f_Y(y),$$

pour tous $x,\ y \in \mathbb{R}$.

5.1.3 Quelques lois de probabilités discrètes

Rappelons quelques lois de probabilités discrètes.

1. **Loi binomiale -** On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi binomiale* de paramètres n et p, où $n \in \mathbf{N}$ et $0 < p < 1$, si

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ 0 \le k \le n.$$

On écrira alors $X \sim B(n,p)$.

2. **Loi de Poisson -** On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi de Poisson* de paramètre λ, où $\lambda > 0$, si

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, \ldots$$

On écrira alors $X \sim P(\lambda)$.

3. **Loi hypergéométrique** - On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi hypergéométrique* de paramètres n, N, a, b, où $a + b = N$, et $n, N, a, b \in \mathbf{N}$, si

$$P(X = k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}},\ m \leq k \leq M,$$

où $m = max(0, n - b)$ et M $min(n, a)$.

On écrira alors $X \sim H(n, N, a, b)$.

On peut interpréter la variable aléatoire X comme étant le nombre de boules blanches obtenus dans une sélection sans remise de n boules d'une urne contenant N boules parmi lesquelles a sont blanches.

4. **Loi géométrique** - On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi géométrique* de paramètre p, *où* $0 < p < 1$, *si*

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1},\ k = 1, 2, \ldots$$

On écrira alors $X \sim G(p)$.

La loi géométrique représente le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p nécessaires à l'obtention d'un succès. Le nom de loi géométrique provienne du fait que les probabilités forment une progression géométrique.

5. **Loi binomiale négative** - On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi binomiale négative* de paramètres p et r, où $0 < p < 1$ et $r \in \mathbf{N}$, si

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r},\ k \geq r.$$

On écrira alors $X \sim BN(p,r)$.

La loi binomiale négative représente le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p nécessaires pour obtenir un nombre r de succès. Remarquons que, si $r=1$, on retrouve la loi géométrique de paramètre p, donc si $X \sim BN(1,p)$, alors $X \sim G(p)$. Dans ce dernier cas, la variable aléatoire X représente le nombre d'épreuves nécessaires jusqu'à l'obtention d'un succès.

La loi binomiale négative s'appelle aussi la *loi de Pascal.*[1]

5.1.4 Quelques lois de probabilités continues

Rappelons quelques lois de probabilités continues.

1. **Loi normale** - On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi normale* de paramètres μ et σ^2, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} 1_{(-\infty,\infty)}(x).$$

   On écrira alors $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

   Si $X \sim N(0,1)$, on dit que la loi de X est la *loi normale centrée réduite.* On note habituellement cette variable aléatoire par Z.

   La loi normale s'appelle aussi la *loi de Laplace*[2]*-Gauss.*[3]

2. **Loi gamma** - On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi gamma* de paramètres α et β où $\alpha,\ \beta > 0$, si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} 1_{(0,\infty)}(x).$$

   On écrira alors $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

   La fonction Γ est définie par

[1]Blaise Pascal (1623-1662), mathématicien, physicien, philosophe et écrivain français.
[2]Pierre Simon marquis De Laplace (1749-1827), astronome, mathématicien et physicien français.
[3]Carl Friederich Gauss (1777-1855), astronome, mathématicien et physicien allemand.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \quad \alpha > 0.$$

Rappelons les propriétés de la fonction Γ:

i) $\Gamma(1) = 1$;

ii) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$;

iii) $\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$, pour tout $\alpha > 0$;

iv) $\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}$.

3. Loi du khi-deux - On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi du khi-deux* avec r degrés de liberté, où $r \in \mathbf{N}$, si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{r}{2})2^{\frac{r}{2}}}x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}1_{(0,\infty)}(x).$$

On écrira alors X ~ $X^2(r)$.

Notons que si X ~ $X^2(r)$, alors X ~ Gamma (r/2,2).

Dans la pratique, on rencontre la distribution x^2 comme étant la répartition du carré de l'erreur obtenue lors d'un tir sur une cible à n dimensions, lorsque les erreurs le long de chaque axe sont de distribution normale centrée réduite, (voir problème 135). En plus, la distribution x^2 joue également un rôle important dans la statistique.

4. Loi exponentielle - On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi exponentielle* de paramètre λ, où $\lambda > 0$, si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}1_{(0,\infty)}(x).$$

On écrira alors $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Notons que si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $X \sim Gamma(1, \frac{1}{\lambda})$. Par conséquent, si $X \sim Gamma(1,2)$, alors $X \sim \chi^2(2)$, et $X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{2})$. La loi exponentielle sert souvent à modéliser le temps d'attente avant qu'un certain événement se produise, ce qui est analogue à la loi géométrique dans le cas discret.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

5. **Loi uniforme** - On dit que la variable aléatoire *X* obéit à une *loi uniforme* sur l'intervalle *(a, b),* si la densité de *X* est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x).$$

On écrira alors $X \sim U(a,b)$.

6. **Loi bêta** - On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi bêta* de paramètres α, λ, où $\alpha, \lambda > 0$, si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\lambda-1} 1_{(0,1)}(x),$$

ou, en introduisant la fonction $\beta(\alpha, \lambda)$ donnée par

$$\beta(\alpha, \lambda) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\lambda-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha+\lambda)},$$

on trouve

$$f(x) = \frac{1}{\beta(\alpha,\lambda)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\lambda-1} 1_{(0,1)}(x).$$

On écrira alors $X \sim Beta(\alpha, \lambda)$.

Notons que si $\alpha = \lambda = 1$, alors on retrouve la loi uniforme sur $(0, 1)$, donc si $X \sim Beta(1,1)$ alors $X \sim U(0,1)$, car dans ce cas

$$f(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} x^0(1-x)^0 1_{(0,1)}(x) = 1_{(0,1)}(x).$$

7. **Loi de Cauchy**[4] - On dit que la variable aléatoire X obéit à une *loi de Cauchy* de paramètres μ, σ, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, si la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{\sigma}{\pi(\sigma^2 + (x-\mu)^2)} 1_{(-\infty,\infty)}(x).$$

On écrira alors $X \sim C(\mu, \sigma)$.

[4]Augustin Cauchy (1789-1857), mathématicien français.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Notons que la densité peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{\sigma}f(\frac{x-\mu}{\sigma})$ où $f(\cdot)$ est la densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi de Cauchy de paramètres 0 et 1, donc $X \sim C(0,1)$. Dans ce dernier cas la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}1_{(-\infty,\infty)}(x).$$

5.1.5 Fonctions de répartition

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire sur $\mathcal{F}$.
Définition 1. La fonction $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie pour chaque $x \in \mathbb{R}$ par

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega \; ; \; X(\omega) \le x\})$$

s'appelle la *fonction de répartition* ou encore *la fonction de distribution* de la variable aléatoire X.

. En abrégé, on écrira

$$F_X(x) = F(x) = P(X \le x).$$

Puisque X est une variable aléatoire, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \; ; \; X(\omega) \le x\} \in F$, donc il est un événement et sa probabilité existe toujours.

Remarque 2. En considérant la définition 1, on constate que la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X jouit des propriétés suivantes :

1. $0 \le F(x) \le 1$;
2. F est non-décroissante, c'est-à-dire si $x < y$, alors $F(x) \le F(y)$;
3. $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$;
4. F est continue à droite, c'est-à-dire

$$\lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x).$$

Remarque 3. Notons que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X détermine uniquement la loi de probabilité de X, car si F est une fonction satisfaisant les propriétés de la remarque 2, alors il existe une unique probabilité Q sur ($\mathbf{R}$, B) telle que

$$F(x) = Q((-\infty, x]), \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Voici quelques propriétés supplémentaires utiles des fonctions de répartition.
Remarque 4. Soit X une variable aléatoire et soit F sa fonction de répartition. Alors

1. $P(X < x) = F(x-) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$.
2. $P(X = x) = F(x) - F(x-)$. Lorsque $P(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on dit que la loi de probabilité de X est *continue*. On voit donc que la loi de probabilité est continue si et seulement si la fonction de répartition est continue, c'est-à-dire $F(x-) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. $P(X > x) = 1 - F(x), \quad$ et $\quad P(X \geq x) = 1 - F(x-)$.
4. $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1), \quad$ pour tout $\quad x_1 \leq x_2$.
5. Si $X(\omega) \in \{0, 1, \ldots\}$, donc si la loi de probabilité de la variable aléatoire X est discrète, alors $F(x) = F(k)$, pour tout $x \in [k,\ k+1)$ et $F(k) = F((k+1)-)$. De plus, $P(X = 0) = F(0)$ et
$$P(X = k) = F(k) - F(k-1),\ k \geq 1.$$
6. Si la loi de probabilité de la variable aléatoire X est continue de densité f, alors
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}F(x) = f(x),$$
presque partout. Dans ce cas, pour tous $a,\ b \in \mathbb{R}$,
$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx,$$
donc la probabilité $P(a < X \leq b)$ est égale à l'aire comprise entre la courbe $f(x)$ et l'axe horizontal et limitée par les points a et b. Comme $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, l'aire en dessous de la courbe $f(x)$ est égale à 1.
7. L'ensemble D des points de discontinuité de la fonction de répartition F est dénombrable.
8. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X est toujours continue à droite et caractérise complètement la loi de probabilité de X, c'est-à-dire si X et Y ont la même fonction de répartition, X et Y ont la même loi de probabilité.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Exemple 5. Si $Z \sim N(0,1)$, alors la fonction de répartition de Z est dénotée d'habitude par Φ et

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Parce qu'on ne peut pas trouver la primitive de $e^{-t^2/2}$, il est impossible d'obtenir la fonction de répartition Φ de la variable aléatoire Z sous forme d'une fonction élémentaire.

La fonction Φ est tabulée pour les valeurs positives de Z. Pour les valeurs négatives, on utilise la parité de la densité f de Z, donc $f(x) = f(-x)$, et par conséquent

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\
&= \int_{-x}^{\infty} f(y)\, dy \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{-x} f(y)\, dy \\
&= 1 - \Phi(-x),
\end{aligned}$$

donc

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \quad \text{pour} \quad -\infty < x < \infty.$$

On peut encore écrire

$$P(Z \le -x) = P(Z > x), \quad \text{pour} \quad -\infty < x < \infty.$$

Même si la variable aléatoire Z peut prendre toutes les valeurs entre $-\infty$ et ∞, les valeurs sont fortement concentrées autour de la valeur moyenne, $E(Z) = 0$, dans un intervalle de longueur 6. On trouve que $P(|Z| > 3) < 0,01$. Ainsi dans les tables, d'habitude, les probabilités considérées sont pour des valeurs de Z entre 0 et $+3$. Dans la Table I, on donne $P(Z \le x) = \Phi(x)$ pour des valeurs de Z entre 0 et $+4$. Par symétrie on a $\Phi(0) = 0,5$. Pour des valeurs négatives de x on utilise l'égalité $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

La valeur $P(Z \le x, x_1 x_2)$ se trouve dans la table I, à l'intersection de la ligne x, x_1 et de la colonne $0, 0x_2$. Ainsi, par exemple, la valeur $P(Z \le 2,43)$ se trouve à l'intersection de la ligne $2,4$ et de la colonne $0,03$ et on lit directement dans la table $0,992\ 500$. Pour $P(Z \le -1,18)$ on cherche d'abord $P(Z \le 1,18)$ et à l'intersection de la ligne $1,1$ et de la colonne $0,08$ on lit 0,881. Par conséquence $\Phi(-1,18) = 1 - \Phi(1,18) = 1 - 0,881 = 0,119$.

Il existe aussi des tables des quantiles permettant de trouver x en fonction de $\Phi(x)$, (voir Table II). Les entrées dans la table II donnent la valeur de x telle que $\Phi(x) = P(Z \leq x) = p$. D'abord par symétrie, $\Phi(0) = 0,5$. Si $p = \Phi(x) \geq 0,5$, alors $x > 0$, et on lit directement x dans la table. Si $p < 0,5$, alors, par symétrie, il suffit d'utiliser le fait que $P(Z \leq -x) = 1 - p$. Par exemple, si $p = 0,613$, alors $x = 0,2872$ directement de la table. Par contre, si $p = 0,138$, alors $1 - p = 0,862$ et $x = -1,0894$.

Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors on utilise la transformation $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Exemple 6. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-\mu}{\sigma})^2}\, dt.$$

Exemple 7. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Exemple 8. Si $X \sim C(0,1)$, alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\, dt \\ &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\arctan x} \frac{1}{\pi}\, d\theta \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x, \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $t = \tan\theta$, donc $\theta = \arctan t$, et par conséquent $\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{1+\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = d\theta$.

Remarque 9. Si la fonction de répartition d'une variable aléatoire X comporte au moins une discontinuité, et elle n'est pas continue à droite partout, il y a des points de probabilité non nulle. On dit que X est une variable aléatoire *mixte*.

Exemple 10. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Notons que X n'est pas une variable aléatoire discrète, car $P(X = x) = 0$, pour tout $x \neq 0$, et $P(X = 0) = \frac{1}{2}$, par conséquent $\sum_x P(X = x) = \frac{1}{2} < 1$, donc il n'existe pas un ensemble dénombrable E tel que $P(X \in E) = 1$. La variable aléatoire est non plus continue, car $F(0) = \frac{1}{2}$.

Remarque 11. La définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire peuvent s'étendre aux vecteurs aléatoires.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé et soit $\mathbf{X} = (X, Y)$ un couple aléatoire sur $\mathcal{F}$.

Définition 12. La fonction $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1] \times [0,1]$ définie pour chaque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(\{\omega \in \Omega \; ; \; X(\omega) \leq x \; ; \; Y(\omega) \leq y\})$$

s'appelle la *fonction de répartition* du couple aléatoire X. On dit aussi qu'elle est la *répartition conjointe* de X et Y.
En abrégé, on écrira

$$F_{(X,Y)}(x, y) = P(X \leq x \; ; \; Y \leq y),$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Parce que

$$P(X \leq x) = P(X \leq x \; ; \; Y < \infty),$$

il s'ensuit que la variable aléatoire X possède une fonction de répartition, appelée aussi *répartition marginale* de X, et

$$F_X(x) = F_{(X,Y)}(x, \infty).$$

De façon analogue,

$$P(Y \leq y) = P(X < \infty \; ; \; Y \leq y),$$

donc la variable aléatoire Y possède une fonction de répartition, appelée aussi *répartition marginale* de Y, et

$$F_Y(y) = F_{(X,Y)}(\infty, y).$$

Remarque 13. Les variables aléatoires X et Y, les composantes du couple aléatoire X= *(X, Y),* sont indépendantes si et seulement si

$$F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x) F_Y(y),$$

pour tous $x, \; y \in \mathbb{R}$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

5.1.6 Espérance et moments

Rappelons qu'une fonction $h \in L_k$ si $\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^k \, dx < \infty$. On dit aussi que la fonction h est k-intégrable. En particulière, $h \in L_1$ si $\int_{\mathbb{R}} |h(x)| \, dx < \infty$, et on dit que la fonction h est intégrable.

Soit X une variable aléatoire telle que $X \in L_1$ et soit $f(x)$ sa densité.

Définition 1. *L'espérance* de la variable aléatoire X, ou encore la *valeur moyenne* de X qu'on la note par $E(X)$, ou par μ_X, est donnée par

$$\mu_X = E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) \, dx.$$

Si la variable aléatoire X est discrète et elle prend les valeurs x_k avec la probabilité p_k, $k \in E$, où E est un ensemble dénombrable, alors

$$E(X) = \sum_{k \in E} x_k p_k,$$

et la valeur moyenne existe si la série est absolument convergente.

Exemple 2. Soit X la variable aléatoire qui prend les valeurs $x_k = (-1)^k \frac{2^k}{k}$ avec les probabilités $p_k = \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Notons d'abord que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$. On a

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k} \times \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2.$$

On obtient ce résultat en faisant x = 1 dans le développement en série de Taylor[5]-MacLaurin de la fonction

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^{k+1}}{k}.$$

Mais la valeur moyenne $E(X)$ n'existe pas, car

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k |x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \to \infty.$$

Considérons la variable aléatoire *Y* = *\X*, alors il s'ensuit que la valeur moyenne *E(Y)* n'existe non plus.

[5]Brook Taylor (1685-1731), mathématicien anglais.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Exemple 3. Soit $A \in F$ et $1_A(.)$ la fonction indicatrice de l'événement A, donc

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

c'est-à-dire, la variable aléatoire $1_A(.)$ prend la valeur 1 avec la probabilité $P(A)$ et la valeur 0 avec la probabilité $P(A^c) = 1 - P(A)$. Par conséquent $E(1_A) = 1 \times P(A) + 0 \times P(A^c)$, donc

$$E(1_A) = P(A).$$

Remarque 4. Notons que $X \in L_1$ si $E(|X|) < \infty$. Aussi $X \in L_k$ si $E(|X|^k) < \infty$, et $k > 0$. On dit que $|X|$ est bornée si $X \in L_\infty$, c'est-à-dire s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(|X| \leq a) = 1$.

Exemple 5. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, alors $E(X) = \mu$. D'abord on voit facilement que $X \in L_1$. De plus, en faisant le changement de variable $x = \mu + \sigma y$, on trouve

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\mu + y\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-y^2}{2}} dy + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} y e^{\frac{-y^2}{2}} dy \\ &= \mu, \end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy = \sqrt{2\pi}$ et $\int_{\mathbb{R}} y e^{-y^2/2} dy = 0$.

Exemple 6. Si $X \sim C(0,1)$, alors $E(X)$ n'existe pas. En effet

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{2x}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\left|\frac{2x}{1+x^2}\right|dx\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{-2x}{1+x^2}\,dx+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{1+x^2}\,dx\\ &= \frac{1}{\pi}\log(1+x^2)\Big|_0^{\infty}\\ &\to \infty,\end{aligned}$$

la quantité $E(X)$ n'existe pas.

Définition 7. Soit X une variable aléatoire, telle que $X \in L_k$. Le *moment d'ordre k* de X est $E(X^k)$.

Notons que pour $k = 1$, on retrouve $E(X)$, l'espérance de X.

Soit $c \in \mathbb{R}$, alors $E((X-c)^k)$ s'appelle *moment d'ordre k par rapport à c*.

Définition 8. Soit X une variable aléatoire, telle que $X \in L_2$. La *variance* de X qu'on note par $Var(X)$ est

$$Var(X) = E((X - E(X))^2).$$

Notons que la variance de la variable aléatoire X est le moment d'ordre 2, par rapport à $E(X)$.

Si $X \sim C(0,1)$, alors comme $E(X)$ n'existe pas, les moments par rapport à $E(X)$ ne sont pas définis.

Remarque 9. Les moments d'une variable aléatoire jouissent des propriétés suivantes:

1. Si $X \in L_1$, alors $E(aX+b) = aE(X)+b$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$;
2. Si $P(X > Y) = 1$ et $X, Y \in L_1$, alors $E(X) \geq E(Y)$;
3. Si $\{X_k\ ;\ 1 \leq k \leq n\} \subset L_1$, alors $E(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n E(X_k)$;
4. Si $X \in L_m$, alors $X \in L_r$ pour $0 < r \leq m$, c'est-à-dire si $E(X^m)$ existe, alors $E(X^r)$ existe aussi pour tout $r \leq m$.
5. Si $X \in L_2$, alors

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2;$$

6. Si $X \in L_2$, alors $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$;

7. Si $X \in L_2$, alors $Var(X) \leq E((X-c)^2)$, pour tout $c \in \mathbb{R}$, avec égalité si et seulement si $c = E(X)$;

8. Si $\{X_k\ ;\ 1 \leq k \leq n\} \subset L_1$ et les variables aléatoires sont indépendantes, alors $E(\prod_{k=1}^n X_k) = \prod_{k=1}^n E(X_k)$;

9. Si $\{X_k\ ;\ 1 \leq k \leq n\} \subset L_2$ et les variables aléatoires sont indépendantes, alors $Var(\sum_{k=1}^n X_k) = \sum_{k=1}^n Var(X_k)$.

Remarque 10. Soit *X* une variable aléatoire non négative et soit F_x sa fonction de répartition. Alors *E(X)* est finie, donc elle existe, si et seulement si

$$\int_0^\infty (1 - F(x))\, dx < \infty.$$

et dans ce cas,

$$E(X) = \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx.$$

Dans certaines situations, il est plus facile d'utiliser cette formule, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 11. Soit *X* une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x}\, dx \\ &= -e^{-x}\Big|_0^\infty \\ &= 1. \end{aligned}$$

Pour trouver *E(X)* à partir de sa définition, il faut d'abord trouver la densité, donc

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

et après, en intégrant par parties, on trouve la valeur moyenne

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty x e^{-x}\, dx \\ &= -xe^{-x}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -e^{-x}\, dx \\ &= 0 - e^{-x}\Big|_0^\infty \\ &= 1. \end{aligned}$$

Remarque 12. Soit X une variable aléatoire telle que $X \in L_1$, et soit f_x sa densité. Si h est une fonction telle que $Y = h(X) \in L_1$, alors

$$E(Y) = E(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(u) f_X(u)\, du,$$

donc on peut trouver la valeur moyenne de la variable aléatoire Y sans utiliser sa densité.

Définition 13. Soit X et Y des variables aléatoires, telles que $X, Y \in L_2$. La *covariance* de X et Y qu'on note Dar $Cov(X, Y)$ est

$$Cov(X,Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

Notons que $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ et $Cov(X,X) = Var(X)$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X,Y) = 0$. L'exemple suivante montre que par contre, il y a des variables aléatoires X et Y dépendantes telles que $Cov(X,Y) = 0$.

Exemple 14. Soit $X \sim U(0,1)$ et soit f_X sa densité. Donc

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Soit les fonctions $h_1(x) = \sin \pi x$ et $h_2(x) = \cos \pi x$. Considérons les variables aléatoires $X_1 = h_1(X) = \sin \pi X$ et $X_2 = h_2(X) = \cos \pi X$. Calculons $Cov(X_1, X_2)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

D'abord

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \int_{\mathbf{R}} h_1(u) f_X(u)\, du \\ &= \int_0^1 \sin \pi u\, du \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \pi u \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

De façon analogue, on trouve

$$E(X_2) = \int_0^1 \cos \pi u\, du = \frac{1}{\pi} \sin \pi u \Big|_0^1 = 0.$$

Comme

$$E(X_1 X_2) = \int_0^1 \cos \pi u \sin \pi u\, du = \frac{1}{2} \int \sin 2\pi u\, du = -\frac{1}{4\pi} \cos 2\pi u \Big|_0^1 = 0,$$

on a

$$Cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1) E(X_2) = 0.$$

Les variables aléatoires X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes, car

$$X_1^2 + X_2^2 = 1.$$

Si $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, alors les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si $Cov(X, Y) = 0$.

Définition 15. Soit X et Y des variables aléatoires, telles que $X,\ Y \in L_2$ et soit $Var(X)Var(Y) \neq 0$. Le *coefficient de correlation* de X et Y qu'on note par $Corr(X, Y)$ est

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X) Var(Y)}}.$$

Définition 16. Soit X une variable aléatoire, dont la densité est *f* . Le *mode* de *X* qu'on note par mo_x est le point pour lequel la fonction *f* atteint, s'il existe, son maximum absolu.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Notons que mo_x est le point tel que la probabilité associée à un intervalle autour de ce point est supérieur à la probabilité associée à un intervalle similaire autour de tout autre point. Le mode n'est pas nécessairement unique, il peut même exister une infinité de modes, ou aucun mode.

Exemple 17. Soit $Z \sim N(0, 1)$ donc la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2}.$$

La dérivé $f'(x)$ a trois zéros, 0, ∞, $-\infty$. Parce que $f(\infty) = f(-\infty) = 0$ et $f(0) = 1/2\pi$, la fonction f a un seul point de maximum, et par conséquent la variable aléatoire Z a un seul mode, $mo_X = 0$.

Soit X la variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 8x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/4 \\ -8x+4 & \text{si } 1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 8x-4 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 3/4 \\ -8x+8 & \text{si } 3/4 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Dans les sous-intervalles $[0, 1/4]$, $[1/4, 1/2]$, $[1/2, 3/4]$, et $[3/4, 1]$ de $[0, 1]$, la densité représente une droite strictement croissante ou strictement décroissante. Dans les points 0, 1/4, 1/2, 3/4 et 1 on trouve

$$f(0) = 0,\ f(1/4) = 2,\ f(1/2) = 0,\ f(3/4) = 2,\ f(1) = 0,$$

donc la fonction f a deux points de maximum, et par conséquent 1/4 et 3/4 sont des modes de X.

Soit $X \sim U(0,1)$. Alors la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Tous les points dans l'intervalle $(0, 1)$ sont des modes pour la variable aléatoire X.

Enfin, si $X \sim \chi^2(1)$ alors sa densité est donnée par (voir 3, dans 5.1.4)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

et la variable aléatoire X n'a aucun mode, car sa densité n'a aucun point de maximum dans l'intervalle $(0, \infty)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Définition 18. Soit X une variable aléatoire. Une *médiane* de X qu'on note par me_x est tout nombre réel satisfaisant les inégalités suivantes :

$$P(\{X < me_X\}) \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(\{X > me_X\}) \leq \frac{1}{2}.$$

Exemple 19. Considérons la variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \\ 0 & \text{si } x > \pi/2 \end{cases}$$

On trouve la médiane me_X, de la variable aléatoire X de l'équation

$$\int_{-\infty}^{me_X} f(x)\,dx = \int_0^{me_X} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{me_X} = \sin me_X = \frac{1}{2},$$

donc $me_x = \pi/6$.

Notons que la médiane existe toujours et peut même être déterminée de façon non univoque, donc la médiane d'une variable aléatoire X n'est pas nécessairement unique. En effet, la fonction de répartition varie de façon monotone de 0 à 1. C'est pourquoi on peut toujours trouver un point *mex* où elle passe, soit continûment soit en réalisant un saut, par la valeur 1/2. S'il existe un intervalle (a, b) où $F(x) = 1/2$, alors tout point de cet intervalle peut servir de valeur pour la médiane, d'habitude on prend, comme médiane de la variable aléatoire, le point milieu de cet intervalle.

Définition 20. Soit (X, Y) un couple aléatoire, soit $f_{(X,Y)}$ sa densité, et $XY \in L_2$. Alors la valeur moyenne de la variable aléatoire XY est donnée par

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy.$$

Si h est une fonction de deux variables telle que $h(x,y) \in L_2$, alors

$$E(h(X,Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y) f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy.$$

5.1.7 Fonctions caractéristiques

Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé et soit X une variable aléatoire sur F.

Définition 1. La fonction $\phi_X : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ donnée par

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = E(\cos tX + i \sin tX)$$

s'appelle la *fonction caractéristique* de la variable aléatoire *X*.

Remarque 2. Si X est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs x_j avec les probabilités p_j, $j \in I$, alors

$$\phi_X(t) = \sum_{j \in I} e^{itx_j} p_j.$$

Si X est une variable aléatoire continue de densité f, alors

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx.$$

Remarque 3. Parce que $|e^{itx}| = 1$, la fonction caractéristique d'une variable aléatoire existe toujours.

Remarque 4. La fonction caractéristique d'une variable aléatoire jouit des propriétés suivantes :

1. ϕ est une fonction uniformément continue;
2. $\phi(0) = 1$, donc la fonction caractéristique ne s'annule pas dans un voisinage de 0;
3. $|\phi(t)| \leq 1$;
4. $\phi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\phi_X(at)$;
5. $\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$;
6. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t)\phi_Y(t)$;
7. Si $E(|X|^n) < \infty$, pour un $n \in \mathbb{N}$, alors la dérivée d'ordre n de ϕ existe et

$$\frac{d^m}{dt^m}\phi(t)\bigg|_{t=0} = i^m E(X^m), \ m \leq n.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Par exemple, si $E(X^2) < \infty$, alors $\phi'(0) = iE(X)$ et $E(X^2) = -\phi''(0)$.

Remarque 5. Soit X une variable aléatoire. Si $E(X^n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} E(X^n),$$

c'est-à-dire la fonction caractéristique ϕ_X est entièrement déterminée par la suite $\{E(X^n) \; ; \; n \in \mathbb{N}\}$ et $E(X^0) = 1$.

5.1.8 Formules d'inversion

La fonction caractéristique d'une variable aléatoire *X* détermine de façon unique la loi de probabilité de *X* car on a les formules d'inversion suivantes :

Soit ø la fonction caractéristique d'une variable aléatoire *X* et soit *F* sa fonction de répartition. Alors

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &+ \frac{1}{2}(P(X=a) - P(X=b)) \\ &= \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left(\frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \right) \phi(t)\, dt. \end{aligned}$$

$$P(X = x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{itx} \phi(t)\, dt.$$

Si $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|\, dt < \infty$, alors F possède une dérivée continue f donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \phi(t)\, dt.$$

La fonction f est la densité de la variable aléatoire X.

5.1.9 Fonctions génératrice des moments

Soit (Ω, F, P) un espace probabilisé et soit *X* une variable aléatoire sur *F*.

Définition 1. La fonction $gx : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par

$$gx(t) = g(t) = E(e^{tX})$$

s'appelle la *fonction génératrice des moments* de la variable aléatoire *X*.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Si X est une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs x avec les probabilités p_j, $j \in I$, alors

$$g_X(t) = \sum_{j \in I} e^{tx_j} p_j.$$

Si X est une variable aléatoire continue de densité f, alors

$$g_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(x)\, dx.$$

Remarque 2. Puisque, pour tout $t \in \mathbf{R}$

$$\phi_x(t / i) = g_x(t),$$

les fonctions ϕ_x et g_x ont des propriétés semblables. Mais tandis que la fonction caractéristique ϕ_x existe toujours et est bornée, la fonction génératrice des moments g_x peut-être non bornée, et peut même ne pas exister dans certains cas.

Exemple 3. Soit $X \sim \mathcal{E}(1)$, donc $P(X > x) = e^{-x}$, $x \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} g(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_0^\infty e^{tx} e^{-x}\, dx \\ &= \int_0^\infty e^{-x(1-t)}\, dx \\ &= \frac{1}{1-t} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

si $t < 1$, donc la fonction génératrice de la variable aléatoire X n'est pas bornée.

Soit $Z \sim N(0,1)$. Alors on dit que la variable aléatoire $X = e^Z$ obéit à la *loi de probabilité lognormale.* Notons que tous les moments de la variable

Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

aléatoire X existent. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} E(X^k) &= E(e^{kZ}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ku} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(u-k)^2 + \frac{k^2}{2}} \, du \\ &= e^{\frac{k^2}{2}}. \end{aligned}$$

La densité de la variable aléatoire X est

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} x} e^{-\frac{(\log x)^2}{2}}, \ x > 0.$$

Par contre, la fonction génératrice des moments

$$g_X(t) = E(e^{tX}) = E\left(e^{te^Z}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{te^x} e^{\frac{-x^2}{2}} \, dx,$$

n'existe pas.

En effet, nous allons utiliser, dans ce but, la règle de L'Hopital[6], que nous rappelons d'abord, si

$$\lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{k(x)} = \frac{\infty}{\infty}, \ \left(\text{où} \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{k(x)} = \frac{0}{0}\right), \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{k(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{h'(x)}{k'(x)}.$$

En appliquant deux fois cette règle, on trouve que si $t > 0$, alors

$$\lim_{x\to\infty} \frac{te^x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{te^x}{x} = \lim_{x\to\infty} te^x \to \infty.$$

Par conséquent, pour tout nombre réel A, il existe un nombre réel a tel que

$$\frac{te^x}{\frac{x^2}{2}} \geq A, \quad \text{pour tout} \quad x \geq a.$$

En choisissant $A > 1$, on a $te^x \geq A\frac{x^2}{2}$, ce qui implique que $te^x - \frac{x^2}{2} \geq (A-1)\frac{x^2}{2}$, et finalement que

$$e^{te^x - \frac{x^2}{2}} \geq e^{(A-1)\frac{x^2}{2}}, \quad \text{si} \quad x \geq a.$$

[6]Guillaume François Antoine marquis L'Hopital (1661-1704), mathématicien français.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Comme

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{te^x} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} e^{te^x} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} e^{(A-1)\frac{x^2}{2}}\, dx. \end{aligned}$$

Or cette dernière intégrale diverge, donc la fonction génératrice des moments n'existe pas.

Remarque 4. Soit X une variable aléatoire. Si la fonction génératrice des moments existe et le moment $E(X^k)$ existe, alors

$$\left.\frac{d^k}{dt^k} g_X(t)\right|_{t=0} = E(X^k),$$

ce qui justifie le nom de fonction génératrice de moments.

Remarque 5. Soit X une variable aléatoire. Si $E(X^n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$g_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E(X^n),$$

c'est-à-dire la fonction génératrice des moments g_X est entièrement déterminée par la suite $\{E(X^n)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ et $E(X^0) = 1$.

Définition 6. Soit (X, Y) un couple aléatoire. La fonction génératrice des moments est donnée par

$$g_{(X,Y)}(t, v) = E(e^{tX+vY}),$$

onction qui s'appelle aussi *fonction génératrice des moments conjointe.* Notons que les *fonctions génératrice des moments marginales* des variables aléatoires X et Y sont

$$g_X(t) = g_{(X,Y)}(t, 0) \quad \text{et} \quad g_Y(v) = g_{(X,Y)}(0, v).$$

La fonction génératrice des moments a été introduite par Laplace dans le cas de variables aléatoires prenant des valeurs dans **N.**

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

5.2 Problèmes et solutions

1. Si \X\ est une variable aléatoire, est-ce que X est nécessairement une variable aléatoire ?

   Solution. Non. Voici un exemple. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble qui n'est pas mesurable. Posons $X = 2 \times 1_E - 1$. Alors X n'est pas mesurable car $X^{-1}(\{1\}) = E$. Par contre $|X|$ est mesurable car $|X| \equiv 1$.

2. Soit X une variable aléatoire. Montrer que $X_+ = \max(0, X)$ et $X_- = \max(0, -X)$ sont des variables aléatoires.

   Solution. Soit X une variable aléatoire sur $\mathcal{F}$. Alors $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ pour tout $A \in \mathcal{B}$. Pour montrer que X_+ est aussi une variable aléatoire, il suffit de montrer que $X_+^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a

$$X_+^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0 \\ X^{-1}((-\infty, x]) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   donc $X_+^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$, et par suite X_+ est une variable aléatoire. De manière similaire

$$X_-^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x < 0 \\ X^{-1}([-x, \infty)) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

   donc $X_-^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}$, et par suite X_- est aussi une variable aléatoire.

3. Soit $f(x) = kx(1-x)^2 1_{(0,1)}(x)$. Trouver k pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

   Solution. Puisqu'on doit avoir $f \geq 0$, il s'ensuit qu'on doit avoir $k > 0$. Dans ce cas la fonction f est une densité si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. Or

$$1 = k \int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{k}{12}.$$

   Donc $k = 12$.

4. Soit $f(x) = \frac{2a-|x|}{4a^2} 1_{[-2a,2a]}(x)$. Est-ce que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$?

Solution. D'abord $f \geq 0$. Il reste à montrer que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. Or

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \int_{-2a}^{2a} \frac{2a-|x|}{4a^2}\,dx \\
&= \frac{1}{4a^2}\left(\int_{-2a}^{0}(2a+x)\,dx + \int_{0}^{2a}(2a-x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{4a^2}\left(-\int_{2a}^{0}(2a-x)\,dx + \int_{0}^{2a}(2a-x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2a^2}\int_{0}^{2a}(2a-x)\,dx \\
&= \frac{1}{2a^2}\left(\left.\frac{(2a-x)^2}{-2}\right|_0^{2a}\right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

ce qui prouve que la fonction f est une densité de probabilité.

5. Soit $f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}1_{(0,\infty)}(x)$. Est-ce que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$?

Solution. La fonction f est une densité de probabilité si $\lambda > 0$. En effet, $f \geq 0$ et

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}\,dx \\
&= \left.-e^{-\frac{x}{\lambda}}\right|_0^{\infty} \\
&= 0-(-1) = 1.
\end{aligned}$$

6. Soit $f(x) = \frac{k}{e^x+e^{-x}}$. Trouver k pour que f soit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Solution. Puisqu'on doit avoir $f \geq 0$, il s'ensuit qu'on doit avoir $k > 0$. Dans ce cas la fonction f est une densité si et seulement si

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. Or

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx &= k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} \\ &= k\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \\ &= k\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du \\ &= k\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= k\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

en faisant les changements de variables $u = e^x$ et après $\tan\theta = u$. Donc $k = 2/\pi$

7. Soit X la variable aléatoire associée à la durée de vie d'une lampe (en heures). On suppose que la densité de probabilité a pour expression

$$f(x) = \frac{a}{x^3} 1_{(1,2)}(x).$$

Quelle est la probabilité pour que la durée de vie d'une lampe soit inférieure à 1,5 heures ?

Solution. Il faut d'abord trouver a. Or

$$1 = \int_1^2 \frac{a}{x^3}\,dx = a\frac{3}{8}.$$

Donc $a = \frac{8}{3}$. Maintenant la probabilité de durer moins de 1,5 heures est

$$P(X < 1,5) = \frac{8}{3}\int_1^{1,5} x^{-3}\,dx = \frac{5}{6,75} = 0,740\ 700.$$

8. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

la densité de la variable aléatoire X. Trouver

i) $P(X > 1)$.

ii) $P(X < 1)$.

iii) $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.

Solution. i)

$$P(X > 1) = \int_1^2 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}.$$

ii)

$$P(X < 1) = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

iii)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x\, dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\, dx \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

9. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} a(4x - 2x^2) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

i) Quelle est la valeur de a?

ii) Trouver $P(X > 1)$.

Solution. i) Parce que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$, il s'ensuit que

$$a \int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx = 1,$$

ou

$$a\left(\left(2x^2 - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^2\right) = 1.$$

Donc $a = \frac{3}{8}$.

ii) On trouve

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= \int_1^{\infty} f(x)\,dx \\ &= \frac{3}{8}\int_1^2 (4x - 2x^2)\,dx \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

10. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver $E(X)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 2x^2\,dx \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

11. Trouver la valeur moyenne de la variable aléatoire X dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a^2} & \text{si } 0 \le x \le a \\ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Solution. On a

$$E(X) = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2\,dx, \quad \text{donc} \quad E(X) = \frac{2a}{3}.$$

12. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

i) Préciser k.

ii) Trouver $E(X)$ et $E(5X^2 - 3X + 1)$.

Solution. i) De $f(x) \geq 0$, il s'ensuit qu'on doit avoir $k > 0$. Puis,

$$1 = k \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2k\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2k,$$

donc $k = 1/2$.

ii) $E(X) = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{x} \, dx = 1/3$. D'abord, $E(X^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{3/2} \, dx = 1/5$. Donc $E(5X^2 - 3X + 1) = 5E(X^2) - 3E(X) + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$.

13. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Posons $k_1(X) = 2X^2 - 1$ et $k_2(X) = \frac{1}{X^5}$. Trouver $E(k_1(X))$ et $E(k_2(X))$.

Solution. On a

$$E(k_1(X)) = \int_{\mathbb{R}} k_1(x) f(x) \, dx = \int_0^1 (2x^2 - 1) 3x^2 \, dx = \frac{1}{5}.$$

Ensuite

$$E(k_2(X)) = \int_{\mathbb{R}} k_2(x) f(x) \, dx = \int_0^1 \frac{3}{x^3} \, dx$$

et parce que $\int_0^1 \frac{3}{x^3} \, dx$ diverge, $E(k_2(X))$ n'existe pas.

14. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver $E(X^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Solution. On a

$$E(X^n) = \int_{-1}^{1} x^n \frac{3}{2} x^2\, dx = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n+3} - \frac{(-1)^{n+3}}{n+3}\right).$$

Donc

$$E(X^n) = \begin{cases} \frac{3}{n+3} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi $E(X) = 0$, et par conséquent $Var(X) = E(X^2) = \frac{3}{5}$.

15. Soit $X_1 \sim B(n_1, p)$ et $X_2 \sim B(n_2, p)$. Si les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, c'est-à-dire

$$P(X_1 = x_1,\ X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2),$$

montrer que $X = X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 &= k) \\ &= \sum_{j=0}^{k} P(X_1 = j,\ X_2 = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} P(X_1 = j)P(X_2 = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n_1}{j} p^j (1-p)^{n_1 - j} \binom{n_2}{k-j} p^{k-j} (1-p)^{n_2 - k + j} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j} p^k (1-p)^{n_1 + n_2 - k} \end{aligned}$$

avec la convention que $\binom{n}{x} = 0$ si $x > n$. Comme (voir remarque A.9, Appendice A),

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j} = \binom{n_1 + n_2}{k},$$

il s'ensuit

$$P(X_1 + X_2 = k) = \binom{n_1 + n_2}{k} p^k (1-p)^{n_1+n_2-k},$$

ce qui termine la preuve.

16. Soit $X \sim B(n, p)$. Si n est grand et p assez petit pour rendre np moyen, montrer que la variable aléatoire X suit approximativement la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

    Solution. Posons $\lambda = np$. Alors

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k}. \end{aligned}$$

    Maintenant pour n grand et p modéré

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \approx e^{-\lambda}, \ \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \approx 1, \ \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k \approx 1.$$

    Donc pour n grand et p modéré on a

$$P(X = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

17. On admet que la probabilité de défaut d'un objet fabriqué à la machine est 0,1. Trouver la probabilité qu'un lot de 10 objets comprenne au plus un élément affecté d'un défaut.

    Solution. Notons par X la variable aléatoire qui donne le nombre d'éléments affectés d'un défaut parmi les 10 objets du lot. Alors $X \sim B(10, 0, 1)$. La probabilité cherchée est

$$\binom{10}{0}(0,1)^0(0,9)^0 + \binom{10}{1}(0,1)^1(0,9)^9 = 0,736\ 100,$$

    alors que l'approximation donnée par la loi de Poisson mène à $e^{-1} + e^{-1} \approx 0,735\ 800$, car $\lambda = 10 \times 0,1 = 1$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

18. On suppose que le nombre d'erreurs par page dans ce livre est une variable aléatoire $X \sim P(1/2)$. Trouver la probabilité qu'il y ait au moins une erreur sur cette page.

Solution. On a

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,393\ 470.$$

19. On considère l'expérience qui consiste à mesurer le nombre de particules a émises dans l'espace d'une seconde par un gramme de matière radioactive. Des expériences ont montré dans le passé qu'en moyenne le nombre de particules α émises est 3,2. Donner une bonne approximation pour la probabilité qu'au plus deux particules α seront enregistrées.

Solution. Représentons le gramme de matière radioactive comme une collection de n atomes (n est grand). Chaque atome peut se désintégrer, ceci avec une probabilité de $3,2 / n$ pour la durée de mesure, et donner une particule α. On peut alors dire que le nombre de particules α émises sera approximativement une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3,2$ et l'approximation est ici très bonne. La probabilité cherchée est

$$P(X \leq 2) = e^{-3,2} + 3,2e^{-3,2} + \frac{(3,2)^2}{2}e^{-3,2} \approx 0,379\ 900.$$

20. Le nombre X d'oeufs produits par un insecte suit une loi de Poisson de paramètre λ. La probabilité pour que l'oeuf se développe est p. Montrer que le nombre Y de survivants suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Solution. On peut supposer que chaque oeuf se développe indépendamment des autres. Ainsi on aura

$$P(Y = k \mid X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k = 0, \ldots, n,$$

c'est-à-dire sachant que le nombre d'oeufs produits est n, le nombre Y de survivants est distribué selon une loi binomiale de paramètres n et

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

p. Par conséquent, si $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n\geq k} P(Y=k \mid X=n)P(X=n) \\
&= \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n\geq k}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{j\geq 0}\frac{(\lambda(1-p))^{j}}{j!} \\
&= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} \\
&= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

Donc la loi de Y est bien une loi de Poisson de paramètre λp.

21. On admet que le nombre de clients d'un bureau de poste au cours d'une journée est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. On note par p la probabilité qu'une personne pénétrant dans ce bureau de poste soit un homme.

i) Montrer que le nombre des hommes et celui des femmes parmi les clients quotidiens sont des variables aléatoires $X \sim P(\lambda p)$ et respectivement $Y \sim P(\lambda(1 - p))$.

ii) Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Solution. i) Trouvons la probabilité $P(X + Y = i + j)$. D'abord, en utilisant la formule

$$P(A) = P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c),$$

on trouve

$$\begin{aligned}
P(X &= i,\ Y=j) \\
&= P(X=i,\ Y=j \mid X+Y=i+j)P(X+Y=i+j) \\
&\qquad + P(X=i,\ Y=j \mid X+Y\neq i+j)P(X+Y\neq i+j).
\end{aligned}$$

Comme $P(X=i,\ Y=j \mid X+Y \neq i+j)=0$, il reste

$$P(X=i,\ Y=j)=P(X=i,\ Y=j \mid X+Y=i+j)P(X+Y=i+j).$$

Maintenant, parce que $X+Y$ est le nombre total des clients, on a, par l'hypothèse

$$P(X+Y=i+j)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}.$$

Si l'on sait que $i + j$ personnes sont venues au bureau de poste, on trouve la probabilité que i d'entre elles soient des hommes et j des femmes, en utilisant la loi binomiale, donc

$$P(X=i,\ Y=j \mid X+Y=i+j)=\binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} P(X=i,\ Y=j) &= \binom{i+j}{i}p^i(1-p)^j e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^i}{i!j!}(\lambda(1-p))^j \\ &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!}, \end{aligned}$$

d'où on obtient

$$\begin{aligned} P(X=i) &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}\sum_j e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!} \\ &= e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^i}{i!}, \end{aligned}$$

et de façon analogue on trouve

$$P(Y=j)=e^{-\lambda(1-p)}\frac{(\lambda(1-p))^j}{j!},$$

ce qui montre que $X \sim P(\lambda p)$ et $Y \sim P(\lambda(1-p))$.

ii) Comme

$$P(X=i,\ Y=j)=P(X=i)P(Y=j),$$

les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

22. Soit $X_1 \sim P(\lambda_1)$ et $X_2 \sim P(\lambda_2)$. Si les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes alors montrer que $X = X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Solution. Il faut montrer que

$$P(X_1 + X_2 = k) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}.$$

Or

$$\begin{aligned}
P(X_1 \quad + \quad X_2 = k) &= \sum_{j=0}^{k} P(X_1 = j,\ X_2 = k - j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} P(X_1 = j)P(X_2 = k - j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^j}{j!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^j\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{k-j} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

23. Soit $X \sim H(n, N, a, b)$. Montrer que si N, a et b sont grands par rapport à n, alors X obéit approximativement à une loi $B(n,p)$, où $p = \frac{a}{N}$.

Solution. On trouve

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{a!}{(a-k)!k!} \times \frac{b!}{(b-n+k)!(n-k)!} \times \frac{(N-n)!n!}{N!} \\
&= \binom{n}{k}\frac{a}{N}\cdot\frac{a-1}{N-1}\cdots\frac{a-k+1}{N-k+1} \\
&\qquad \cdot\frac{b}{N-k}\cdot\frac{b-1}{N-k-1}\cdots\frac{b-(n-k-1)}{N-k-(n-k-1)} \\
&\approx \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},
\end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

lorsque $p = \frac{a}{N}$, $1 - p = \frac{b}{N}$ et a et N sont grands par rapport à n et k.

Remarque. Soit $X \sim H(n, N, a, b)$, et N, a et b grands par rapport à n, alors $X \sim B(n, p)$, où $p = a/N$. Maintenant si n est grand et p assez petit pour rendre np moyen, la variable aléatoire $X \sim P(\lambda)$ où $\lambda = np$. Donc, dans certaines conditions une variable aléatoire de distribution $H(n, N, a, b)$ obéit approximativement à une loi de Poisson.

24. Soit $X \sim H(n, N, a, b)$. Trouver $E(X)$ et $Var(X)$.

Solution. D'abord

$$\begin{aligned} E(X^i) &= \sum_{k=0}^{n} k^i P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^i \binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k} \Big/ \binom{N}{n} \\ &= \frac{na}{N} \sum_{k=0}^{n} k^{i-1} \binom{a-1}{k-1}\binom{N-a}{n-k} \Big/ \binom{N-1}{n-1} \\ &= \frac{na}{N} \sum_{h=0}^{n-1} (h+1)^{i-1} \binom{a-1}{h}\binom{N-a}{n-1-h} \Big/ \binom{N-1}{n-1} \\ &= \frac{na}{N} E((Y+1)^{i-1}), \end{aligned}$$

en utilisant les identités

$$k\binom{a}{k} = a\binom{a-1}{k-1}, \quad \text{et} \quad n\binom{N}{n} = N\binom{N-1}{n-1},$$

et où $Y \sim H(n-1, N-1, a-1, b)$. Donc, en posant $i = 1$, on obtient

$$E(X) = \frac{na}{N}.$$

En d'autres termes, si n balles sont choisies de façon aléatoire parmi un ensemble de *N* balles dont *a* sont blanches, le nombre espéré de balles blanches sélectionnées est *na / N.*

En posant *i = 2* dans l'équation de $E(X^4)$, on obtient

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{na}{N} E(Y+1) \\ &= \frac{na}{N}\left(\frac{(n-1)(a-1)}{N-1} + 1\right), \end{aligned}$$

où l'égalité finale utilise le résultat précédent pour calculer l'espérance de la variable aléatoire *Y*. Comme $E(X) = na / N$, on trouve

$$Var(X) = \frac{na}{N}\left(\frac{(n-1)(a-1)}{N-1} + 1 - \frac{na}{N}\right).$$

Si $p = a/N$ est la fraction de balles blanches, on trouve finalement

$$Var(X) = \frac{N-n}{N-1}np(1-p),$$

et avec la notation $p = a/N$, on trouve $E(X) = np$.

Remarque. Si n balles sont sélectionnées au hasard sans remise parmi un ensemble de N balles dont une fraction p est blanche, le nombre espéré de balles blanches choisies est np. De plus, si N est grand par rapport à n (et donc si $(N - n) / (N - 1)$ est approximativement égal à 1), alors

$$Var(X) \approx np(1-p).$$

En d'autres termes, $E(X)$ est la même que lorsque la sélection des balles se fait avec remise (le nombre de balles blanches est alors binomial de paramètres n et p) et si le nombre total de balles est grand, $Var(X)$ est approximativement égale à ce qu'elle vaudrait si la sélection était faite avec remise. Donc on retrouve le résultat que lorsque le nombre de balles dans l'urne est grand, le nombre de balles blanches choisies obéit approximativement à la distribution d'une variable aléatoire binomiale.

25. Si X $G(p)$, montrer que $P(X > n + k \setminus X > n) = P(X > k)$. Cette propriété est généralement appelée *propriété de perte de mémoire, ou* encore *propriété d'absence de mémoire.*

Solution. On a

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \sum_{i=n+1}^{\infty} p(1-p)^i \\ &= (1-p)^n p \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^i \\ &= (1-p)^n p \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^n. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X > n+k \mid X > n) &= \frac{P(\{X > n+k\} \cap \{X > n\})}{P(X > n)} \\ &= \frac{P(X > n+k)}{P(X > n)} \\ &= \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} \\ &= (1-p)^k \\ &= P(X > k). \end{aligned}$$

26. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $P(X > 0) = 1$ et $P(X > 1) = 1 - p > 0$. Si

$$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k),$$

montrer que $X \sim G(p)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} P(X > n+k \mid X > n) &= \frac{P(\{X > n+k\} \cap \{X > n\})}{P(X > n)} \\ &= \frac{P(X > n+k)}{P(X > n)}, \end{aligned}$$

et puisque $P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k)$, on trouve

$$P(X > n+k) = P(X > n)P(X > k), \quad n, k \geq 0,$$

et $P(X > 1) = 1 - p$. Par conséquent

$$P(X > 2) = P(X > 1+1) = P(X > 1)P(X > 1) = (1-p)^2,$$

et

$$P(X > 3) = (P(X > 2))P(X > 1) = (1-p)^3.$$

Par itération, on trouve

$$P(X > n) = (1-p)^n, \ n \geq 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P(X>k-1)-P(X>k) \\ &= (1-p)^{k-1}-(1-p)^k \\ &= p(1-p)^{k-1}, \end{aligned}$$

pour tout $k \geq 1$, ce qui prouve que $X \sim G(p)$.

27. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire des boules une par une avec remise jusqu'à l'apparition d'une boule noire.

    i) Quelle est la probabilité qu'il faille exactement n tirages ?

    ii) Quelle est la probabilité qu'il faille au moins k tirages ?

    Solution. Notons par X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'apparition de la première boule noire. Alors $X \sim G(p)$, où $p = \frac{b}{b+a}$.

    i) On a

    $$P(X=n) = \left(\frac{a}{b+a}\right)^{n-1} \times \frac{b}{b+a} = \frac{ba^{n-1}}{(b+a)^n}.$$

    ii) On trouve

    $$\begin{aligned} P(X \geq k) &= \frac{b}{b+a}\sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{a}{b+a}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{b}{b+a}\right)\left(\frac{a}{b+a}\right)^{k-1} \Big/ \left(1-\frac{a}{b+a}\right) \\ &= \left(\frac{a}{b+a}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

    Notons qu'on peut obtenir ce résultat plus directement puisque la probabilité qu'il faille au moins k essais pour obtenir un premier succès est égale à la probabilité de n'avoir que des échecs sur les $k - 1$ premières épreuves. Cette probabilité pour une variable $X \sim G(p)$, est donnée par $P(X \geq k) = (1 - p)^{k-1}$.

28. Le jeu de roulette comporte 38 cases, 18 noires, 18 rouges et 2 vertes. Une bille lancée sur la roulette termine toujours sa course dans une des

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

cases. Pour des essais indépendants entre eux, sur une roulette bien équilibrée, soit X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir une case verte.

i) Quelle est la probabilité qu'il faille au moins quatre essais pour obtenir une case verte ?

ii) Quelle est la probabilité que l'obtention d'une première case verte se produise sur un nombre impair de lancers ?

Solution.

i) La probabilité p d'obtenir un succès, c'est-à-dire une case verte lors d'un lancer quelconque est 2/38 = 1/19 et le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un première case verte est une variable aléatoire $X \sim G(1/19)$. Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X \leq 3) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{3} (1-p)^{k-1} p \\ &= 1 - p\left((1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2\right) \\ &= 1 - \frac{1}{19}\left(\left(\frac{18}{19}\right)^0 + \left(\frac{18}{19}\right)^1 + \left(\frac{18}{19}\right)^2\right) \\ &= 1 - \frac{1}{19}\left(\frac{1\ 027}{361}\right) = 0,850\ 269. \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir une case verte lors des 3 premiers lancers est faible (à peine 15%). On peut aboutir au même résultat plus simplement en remarquant que la probabilité d'obtenir une première case verte en au moins 4 essais équivaut à la probabilité de ne pas obtenir de case verte lors des 3 premiers lancers, ce qui correspond à

$$(1-p)^3 = \left(\frac{18}{19}\right)^3 = 0,850\ 269.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ii) On cherche

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} P(X=2k+1) &= \sum_{k\geq 0} p(1-p)^{2k}\\ &= p\frac{1}{1-(1-p)^2}\\ &= p\frac{1}{2p-p^2}\\ &= \frac{1}{2-p}\\ &= \frac{1}{2-\frac{1}{19}}\\ &= \frac{18}{37}.\end{aligned}$$

En conclusion, on remarquera que la probabilité d'obtenir une première case verte sur un lancer impair est plus faible que sur un lancer pair.

29. On exécute une série d'épreuves indépendantes, chacune aboutissant à un succès avec la même probabilité p. Trouver la probabilité que r succès apparaissent avant que le m-ième échec ne survienne.

Solution. Notons que r succès n'apparaissent avant le m-ième échec que si le r-ième succès survient au plus tard à la $(r + m - 1)$-ième épreuve. En effet, si le r-ième succès a lieu avant cette $(r + m - 1)$-ième épreuve ou au plus tard lors même de celle-ci, elle intervient avant le m-ième échec et l'implication inverse est vraie. Par conséquent, on trouve la probabilité cherchée en utilisant la loi $BN(p, r)$. Parce que les r succès peuvent apparaître en $r + j$ épreuves, ou $j = 0, 1, \ldots, m - 1$, la probabilité cherchée est

$$\sum_{n=r}^{r+m-1} \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}.$$

30. *Le problème des allumettes de Banach*[7] - Un mathématicien se trouve être également fumeur de pipe et il porte à tout moment deux boîtes

[7]Stefan Banach (1892-1945), mathématicien polonais.

d'allumettes, une dans chacune de ses poches gauche et droite. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumettes, il a une chance sur deux d'aller la chercher dans sa poche gauche et autant pour la poche droite. Il découvre subitement que la boîte tirée est vide. Les deux boîtes contenaient au départ N allumettes chacune. Trouver la probabilité qu'il lui reste encore k allumettes dans l'autre boîte, $k = 0, 1, \ldots, N$.

Solution. Notons par E l'événement "le mathématicien découvre que sa boîte droite est vide alors qu'il reste k allumettes dans sa boîte gauche" . Cet événement n'aura lieu que s'il choisit la boîte droite pour le $(N+1)$-ième fois lors du $(N+1+N-k)$-ième tirage. Donc on utilise la loi $BN(p, r)$, *où* $p = 1/2$, $r = N + 1$ *et* $n = 2N - k + 1$. Alors

$$P(E) = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1}.$$

Comme la probabilité est la même que ce soit la poche gauche qui se vide tandis qu'il reste k allumettes à droite, la probabilité cherchée est

$$2P(E) = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}.$$

31. Quelle est la probabilité qu'un frappeur ayant 300 de moyenne, c'est-à-dire un frappeur qui réussit un coup sûr 300 fois en 1000 essais, obtienne son troisième coup sûr à sa cinquième présence au bâton?

    Solution. Soit $p = 0,300$ la probabilité que le frappeur obtienne un coup sûr lors d'une présence au bâton. Supposons que cette probabilité reste constante et que les résultats soient indépendants d'un essai à l'autre, alors X le nombre d'essais nécessaires pour l'obtention d'un troisième coup sûr obéit à une loi binomiale négative. Ainsi,

$$\begin{aligned} P(X=5) &= \binom{4}{2} p^3(1-p)^2 \\ &= \binom{4}{2}(0,3)^3(0,7)^2 = 0,079\ 380. \end{aligned}$$

32. *Soit* $X \sim NB(p,r)$. Trouver $E(X)$ et $Var(X)$.

Solution. D'abord

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \sum_{k=r}^{\infty} k^n \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \\ &= \frac{r}{p} \sum_{k=r}^{\infty} k^{n-1} \binom{k}{r} p^{r+1} (1-p)^{k-r} \\ &= \frac{r}{p} \sum_{m=r+1}^{\infty} (m-1)^{n-1} \binom{m-1}{r} p^{r+1} (1-p)^{m-(r+1)} \\ &= \frac{r}{p} E((Y-1)^{n-1}). \end{aligned}$$

où $Y \sim BN(p, r+1)$. On a utilisé l'égalité $k\binom{k-1}{r-1} = r\binom{k}{r}$ et après on a mis $m = k+1$. En posant $n = 1$ dans l'équation précédente, on obtient

$$E(X) = \frac{r}{p}.$$

En posant $n = 2$ dans cette même équation et en utilisant la formule ci-dessus pour l'espérance d'une variable aléatoire binomiale négative, on obtient

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{r}{p} E(Y-1) \\ &= \frac{r}{p}\left(\frac{r+1}{p} - 1\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{r}{p}\left(\frac{r+1}{p} - 1\right) - \left(\frac{r}{p}\right)^2 \\ &= \frac{r(1-p)}{p^2}. \end{aligned}$$

33. Calculer l'espérance et la variance du nombre de jets d'un dé nécessaire pour obtenir 4 fois la valeur 1.

Solution. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de jets, alors $X \sim BN(1/6, 4)$. Donc, en utilisant le problème précédant, on obtient

$$E(X) = 24, \quad \text{et} \quad Var(X) = \frac{4 \times \frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 120.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

34. Une urne contient *a* boules blanches et *b* boules noires, et $a + b = N$. On extrait de l'urne une boule à la fois et par la suite, après chaque extraction, on introduit dans l'urne, la boule extraite ainsi que *c* boules de sa couleur. Soit Y_n la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de boules noires obtenu suite à *n* de ce genre d'extractions. Trouver la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_n, ainsi que $E(Y_n)$ et $Var(Y_n)$.

Solution. D'après le problème 53, Section 3.2, Chap.3, la variable aléatoire Y_n prend les valeurs 0, 1, . . . , *n* avec les probabilités

$$P(Y_n = k) = \binom{n}{k} \frac{\prod_{j=0}^{n-k-1}(a+jc)\prod_{h=0}^{k-1}(b+hc)}{(a+b)(a+b+c)\cdots(a+b+(n-1)c)}.$$

On a

$$\sum_{k=0}^{n} P(Y_n = k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\prod_{j=0}^{n-k-1}(a+jc)\prod_{h=0}^{k-1}(b+hc)}{(a+b)(a+b+c)\cdots(a+b+(n-1)c)} = 1.$$

En effet, on utilise l'egalité de Vandermonde [8]

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{j=0}^{n-k-1}(A+j)\prod_{h=0}^{k-1}(B+h) = \prod_{k=0}^{n-1}(A+B+k).$$

Dans notre cas, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \prod_{j=0}^{n-k-1}(a+jc)\prod_{h=0}^{k-1}(b+hc) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^n \prod_{j=0}^{n-k-1}\left(\frac{a}{c}+j\right)\prod_{h=0}^{k-1}\left(\frac{b}{c}+h\right) \\
&= c^n \prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+k\right) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(a+b+kc),
\end{aligned}$$

[8] Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 - 1796), mathématicien français.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

d'où le résultat cherché.

Du plus, on a trouvé $E(Y_n) = np$ et $Var(Y_n) = np(1-p)\frac{a+b+nc}{a+b+c}$, où $p = \frac{b}{N}$ et par conséquent $1 - p = \frac{a}{N}$.

Remarque. La loi de probabilité de la variable aléatoire du problème précédent est connue sous le nom de *la loi de Pólya.*[9] Elle s'applique surtout pour les phénomènes, comme les maladies infectieuses, où la réalisation d'un événement, l'apparition de la maladie, augmente la probabilité d'être infecté avec la même maladie.

Notons aussi que dans la loi de Pólya, c peut-être négatif. Parce que dans ce cas, les inégalités

$$b + (k-1)c \geq 1 \quad \text{et} \quad a + (n-k-1)c \geq 1,$$

doivent être satisfaites, il s'ensuit que k doit satisfaire la double inégalité

$$\max\left(0,\ n - 1 + \frac{a-1}{c}\right) \leq k \leq \min\left(n,\ \frac{1-b}{c} + 1\right).$$

Notons que si N, a et b tendent vers l'infini, tel que

$$p = \frac{b}{N} = \text{constant},$$

alors $1 - p$ reste aussi constant, et si $\lim_{N\to\infty} c/N = 0$, alors

$$\lim_{N\to\infty} P(Y_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

donc dans ce cas, la distribution de Pólya tend vers la distribution binomiale de paramètres p et n.

Notons enfin, que si c = -1, donc on ne remplace pas la balle choisie, avant la preuve suivante, on retrouve la distribution hypergéométrique. Notons cette variable aléatoire par X. Dans ce cas, c/N = -1/N et si k satisfait la double inégalité

$$\max(0, n - a) \leq k \leq \min(n, b),$$

[9]George Pólya (1887-1985), mathématicien américain d'origine hongroise.

on a

$$P(X=k)=\frac{\binom{b}{k}\binom{a}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On retrouve aussi $E(X)=np$ et $Var(X)=\frac{N-n}{N-1}np(1-p)$. (Voir problème 24).

35. Soit $Z \sim N(0,1)$. Calculer les probabilités suivantes

i) $P(Z \leq 2)$.

ii) $P(Z < -1)$.

iii) $P(|Z| < 1,96)$.

Solution. i) $P(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0,977\ 200$.

ii) $P(Z < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 0,158\ 700$.

iii) $P(|Z| < 1,96) = \Phi(1,96) - \Phi(-1,96) = 2\Phi(1,96) - 1 = 0,95$.

36. Soit $X \sim N(9,\ 25)$. Calculer $P(X \leq 10)$.

Solution. $Z = \frac{X-9}{5}$ et en utilisant les tables on obtient

$$\begin{aligned} P(X \leq 10) &= P\left(\frac{X-9}{5} \leq \frac{10-9}{5}\right) \\ &= \Phi(1/5) \\ &= 0,579\ 300. \end{aligned}$$

37. Soit $X \sim N(3,9)$. Calculer $P(X < 1)$.

Solution. $Z = \frac{X-3}{3}$ et en utilisant les tables on obtient

$$\begin{aligned} P(X < 1) &= P\left(\frac{X-3}{3} < \frac{1-3}{3}\right) \\ &= \Phi(-0,67) \\ &= 1-\Phi(0,67) \\ &= 1-0,748\ 600 \\ &= 0,251\ 400. \end{aligned}$$

Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

38. Soit $X \sim N(20, 49)$. Calculer $P(X > 13)$.

Solution. $Z = \frac{X-20}{7}$ et en utilisant les tables on obtient

$$\begin{aligned} P(X > 13) &= P\left(\frac{X-20}{7} > \frac{13-20}{7}\right) \\ &= 1 - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) \\ &= 0,841\ 300 \end{aligned}$$

39. Soit $X \sim N(2, 4)$. Calculer $P(1 \leq X \leq 4)$.

Solution. $Z = \frac{X-2}{2}$ et en utilisant les tables on obtient

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 4) &= P\left(\frac{1-2}{2} \leq \frac{X-2}{2} \leq \frac{4-2}{2}\right) \\ &= P(-0,5 \leq Z \leq 1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-0,5) \\ &= \Phi(1) - 1 + \Phi(0,5) \\ &= 0,841\ 300 - 1 + 0,691\ 500 \\ &= 0,532\ 800. \end{aligned}$$

40. Soit $X \sim N(120, 36)$. Calculer $P(108 < X \leq 126)$.

Solution. $Z = \frac{X-120}{6}$ et en utilisant les tables on obtient

$$\begin{aligned} P(108 < X \leq 126) &= P\left(\frac{108-120}{6} < \frac{X-120}{6} \leq \frac{126-120}{6}\right) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-2) \\ &= \Phi(1) + \Phi(2) - 1 \\ &= 0,841\ 300 + 0,977\ 200 - 1 \\ &= 0,818\ 500. \end{aligned}$$

41. Soit $X \sim N(3, 9)$. Calculer

i) $P(2 < X < 5)$.

ii)$P(X > 0)$.

iii) $P(|X - 3| > 6)$.

Solution. D'abord, $Z = \frac{X-3}{3}$ et en utilisant les tables on obtient

i)

$$\begin{aligned}
P(2 < X < 5) &= P\left(\frac{2-3}{3} < \frac{X-3}{3} < \frac{5-3}{3}\right) \\
&= P\left(-\frac{1}{3} < Z < \frac{2}{3}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{2}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{3}\right) \\
&= \Phi(0,67) - \Phi(-0,33) \\
&= 0,748\ 600 - 1 + 0,629\ 300 \\
&= 0,377\ 900.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
P(X > 0) &= P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{0-3}{3}\right) \\
&= P(Z > -1) \\
&= 1 - \Phi(-1) \\
&= 1 - (1 - \Phi(1)) \\
&= \Phi(1) \\
&= 0,841\ 300.
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
P(|X-3| > 6) &= P(-6 > X - 3 > 6) \\
&= P(X > 9) + P(X < -3) \\
&= P\left(\frac{X-3}{3} > \frac{9-3}{3}\right) + P\left(\frac{X-3}{3} < \frac{-3-3}{3}\right) \\
&= P(Z > 2) + P(Z < -2) \\
&= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) \\
&= 2(1 - \Phi(2)) \\
&= 0,045\ 600.
\end{aligned}$$

42. Soit $Z \sim N(0,1)$. Trouver a et b tels que $P(Z \leq a) = 0,582$ et $P(Z \leq b) = 0,326$.

Solution. En utilisant les tables, on obtient a = 0,207 et b = -0,451.

43. Soit $X \sim N(1,4)$. Trouver a tel que $P(X < a) = 0,95$.

Solution. $Z = \frac{X-1}{2}$ et en utilisant les tables on obtient

$$P(X < a) = P\left(Z < \frac{a-1}{2}\right) = \Phi((a-1)/2) = 0,95.$$

Donc $(a-1)/2 = 1,644\ 900$ et $a = 4,289\ 800$.

44. Soit $X \sim N(10, 25)$. Trouver a tel que $P(X \geq a) = 0,95$.

Solution. $Z = \frac{X-10}{5}$ et en utilisant les tables on obtient

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &= P\left(\frac{X-10}{5} \geq \frac{a-10}{5}\right) \\ &= P\left(Z \geq \frac{a-10}{5}\right) \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{a-10}{5}\right) \\ &= 0,95 \end{aligned}$$

d'où $P(Z \leq \frac{a-10}{5}) = 0,05$. En utilisant les tables on obtient

$$\frac{a-10}{5} = -1,644\ 900$$

donc

$$a = (-1,644\ 900) \times 5 + 10 = 1,775\ 500.$$

45. Soit $X \sim N(3, (12)^2)$.

i) Déterminer le nombre a tel que $P(X > a) = 0,\ 625\ 500$.

ii) Calculer la probabilité p définie par $p = P(3,\ 25 < X < 4,\ 75)$.

Solution. i) On a $P(X \leq a) = 1 - 0,\ 625\ 500 = 0,\ 374\ 500$. Donc

$$P\left(\frac{X-3}{12} \leq \frac{a-3}{12}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-3}{12}\right) = 0,374\ 500,$$

d'où $(a-3)/12 = -0,321\ 300$ et par conséquent $a = -0,855\ 600$.

ii) On trouve

$$\begin{aligned}
p &= P(3,25 < X < 4,75) \\
&= P\left(\frac{3,25-3}{12} < Z < \frac{4,75-3}{12}\right) \\
&= P(0,02 < Z < 0,15) \\
&= P(Z < 0,15) - P(Z < 0,02) \\
&= 0,559\ 600 - 0,508 \\
&= 0,051\ 600.
\end{aligned}$$

46. Soit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, telle que $P(X \geq 3) = 0,841\ 300$ et $P(X \geq 9) = 0,022\ 800$. Déterminer sa moyenne et son écart-type.

Solution. Posons $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Alors $Z \sim N(0,1)$. Donc

$$P(X \geq 3) = P(Z \geq (3-\mu)/\sigma) = 0,841\ 300,$$

et par conséquent $P(Z \leq (3-\mu)/\sigma) = 0,158\ 700$ et par les tables on trouve $\Phi(-1) = 0,158\ 700$. De même

$$P(X \geq 9) = P(Z \geq (9-\mu)/\sigma) = 0,022\ 800,$$

et par suite $P(Z \leq (9-\mu)/\sigma) = 0,977\ 200$ et par les tables on trouve $\Phi(2) = 0,977\ 200$. On obtient donc deux équations à deux inconnues, à savoir

$$\frac{3-\mu}{\sigma} = -1$$
$$\frac{9-\mu}{\sigma} = 2.$$

Résolvant, on trouve $\mu = 5$ et $\sigma = 2$.

47. Sachant que la longueur X d'une barre d'acier produite par un laminoir est une variable aléatoire normale, que sur 10 000 observations, il y en a 1 841 dont la longueur X est inférieure à 82 cm et 668 dont la longueur X est supérieure à 130 cm, déterminer la valeur moyenne et l'écart-type de la distribution.

Solution. On sait que $P(X < 82) = 0,184\ 100$ et que $P(X > 130) = 0,066\ 800$. De plus, si $Z \sim N(0,1)$, alors $P(Z < -0,9) = 0,184\ 100$ et $P(Z > 1,5) = 0,066\ 800$. Soit $\mu = E(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$. Comme $\frac{X-\mu}{\sigma}$ a la même loi que Z, on en déduit que $\frac{82-\mu}{\sigma} = -0,892\ 700 \approx -0,9$ et $\frac{130-\mu}{\sigma} = 1,499\ 500 \approx 1,5$. Donc $\mu = 100$ et $\sigma = 20$.

48. Soit $X \sim N(\mu, \sigma)$. Calculer $P(|X-\mu|) \leq \sigma)$.

Solution. Soit $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Alors $Z \sim N(0,1)$. Donc

$$\begin{aligned} P(|X-\mu|) \leq \sigma) &= P(|Z| \leq 1) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1) \\ &= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \\ &= 2\Phi(1) - 1 \\ &= 0,682\,600. \end{aligned}$$

49. Soit $X \sim N(\mu, \sigma)$. Calculer $E(|X-\mu|)$. À quoi pourrait servir cette quantité?

Solution. Par définition, on a, en faisant le changement de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$,

$$\begin{aligned} E(|X-\mu|) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} |x-\mu| e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sigma |z| e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \\ &= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} z e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \\ &= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(-e^{-\frac{1}{2}z^2} \Big|_0^{\infty} \right) \\ &= \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}. \end{aligned}$$

On pourra se servir de cette quantité pour mesurer l'écart-type (à une constante près) ou encore pour mesurer la dispersion autour de la valeur moyenne.

50. On désire envoyer par câble un signal électronique binaire, donc valant 0 ou 1, d'un point L_1 à un point L_2. On sait que la transmission est affectée par des perturbations, dites bruit. Aussi on émet un signal d'intensité 2 lorsqu'on veut indiquer 1 et d'intensité -2 lorsqu'on veut communiquer 0. Notons par x,où $x = \pm 2$, la valeur émise en L_1 et par y la valeur enregistrée en L_2. Alors $y = x + E$, où E représente

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

l'erreur due au bruit du canal de transmission. Le décodage du signal en L_2 obéit à la règle suivante : Si $y \geq 0,5$ alors il est interprété comme signifiant 1, et si $y < 0,5$ alors il est interprété comme signifiant 0. D'habitude le bruit E est de distribution normale. On supposera ici que $E \sim N(0, 1)$. Expliciter les deux types d'erreurs qui peuvent survenir et trouver leurs probabilités.

Solution. Deux types d'erreurs peuvent survenir, à savoir un signal 1 est faussement compris comme un 0, ou l'inverse. Notons par A l'événement "on a envoyé le signal 1", par B l'événement "on a envoyé le signal 0", et par C l'événement "il y a une erreur". Alors le premier type d'erreur sera observé si le signal envoyé est 1 et $2 + E < 0,5$. Le second type d'erreur sera observé si le signal envoyé est 0 et $-2 + E \geq 0,5$. Ainsi

$$\begin{aligned} P(C \mid A) &= P(E < -1,5) \\ &= 1 - \Phi(1,5) \\ &= 0,066\ 800 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(C \mid B) &= P(E \geq 2,5) \\ &= 1 - \Phi(2,5) \\ &= 0,006\ 200 \end{aligned}$$

51. Soit $X \sim Gamma(1,\ 1/2)$. Trouver $P(X \geq 2)$.

Solution. Notons d'abord que la densité de la variable aléatoire X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On a

$$P(X \geq 2) = 2\int_2^{\infty} e^{-2x}\,dx = -e^{2x}\Big|_2^{\infty} = e^{-4} \approx 0,018\ 300.$$

Notons que si $X \sim Gamma(1, 1/2)$, alors $X \sim \mathcal{E}(2)$.

52. Soit $X \sim Gamma(n, \beta)$, $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(X > t)$.

Solution. On a

$$P(X > t) = \int_t^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!\beta^n} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx.$$

En intégrant par partie, avec $u = -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!\beta^{n-1}}$ et $dv = -\frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}dx$, on trouve

$$P(X > t) = e^{-\frac{t}{\beta}} \frac{(\frac{t}{\beta})^{n-1}}{(n-1)!} + \int_t^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!\beta^{n-1}} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx.$$

Par itération, on a donc

$$P(X > t) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{t}{\beta}} \left(\frac{t}{\beta}\right)^k \frac{1}{k!}.$$

53. Si $X \sim \varepsilon(\lambda)$, montrer que $P(X > n + k \setminus X > n) = P(X > k)$. Cette propriété est généralement appelée *propriété de perte de mémoire, ou* encore *propriété d'absence de mémoire.*

Solution. Rappelons que la densité de la variable aléatoire X est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} P(X > n) &= \int_n^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= -e^{-\lambda x}\Big|_n^{\infty} \\ &= e^{-\lambda n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(X > n + k \mid X > n) &= \frac{P(\{X > n + k\} \cap \{X > n\})}{P(X > n)} \\ &= \frac{P(X > n + k)}{P(X > n)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(n+k)}}{e^{-\lambda n}} \\ &= e^{-\lambda k} \\ &= P(X > k). \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

54. Dans un bureau de poste, le service est assuré par deux employés. Lorsque le client Jean y entre l'un des employés sert la cliente Marie tandis que l'autre répond à la cliente Lise. On admettra que Jean sera à son tour servi dès le départ de Marie ou de Lise. Le temps passé par un employé de poste pour chaque client est distribué d'après la loi $\varepsilon(\lambda)$. Quelle est la probabilité que Jean soit le dernier des trois clients à sortir de ce bureau de poste ?

    Solution. On peut adopter l'approche suivante : au moment où Jean trouve un postier libre, l'un des deux autres clients vient de partir tandis que l'autre est encore au guichet. Mais ce dernier, en vertu de l'absence de mémoire des variables aléatoires de la distribution $\varepsilon(\lambda)$, va rester pendant un temps qui est toujours distribué $\varepsilon(\lambda)$. Tout ce passe comme si le client venait d'arriver au guichet. Par conséquent Jean a une chance sur deux de sortir le dernier, du fait de la symétrie des deux situations.

55. On suppose que la durée d'une conversation téléphonique, mesurée en minutes, est une variable aléatoire X $\varepsilon(1/10)$. Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un passe juste devant vous. Trouver la probabilité que vous devrez attendre

    i) plus de 10 minutes.

    ii) entre 10 et 20 minutes.

    Solution. i) On trouve

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-x/10}\, dx \\ &= -e^{-x/10}\Big|_{10}^{\infty} \\ &= e^{-1} \\ &\approx 0,368. \end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned} P(10 < X < 20) &= \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-x/10}\, dx \\ &= -e^{-x/10}\Big|_{10}^{20} \\ &= e^{-1} - e^{-2} \\ &\approx 0,368 - 0,135 \\ &= 0,233. \end{aligned}$$

56. La durée de vie, en heures, d'une ampoule est une variable aléatoire continue $X \sim \mathcal{E}(1/10)$. Trouver le nombre t d'heures tel que avec une probabilité 0,9 l'ampoule va brûler avant t heures.

Solution. De

$$\int_0^t \frac{1}{10} e^{-\frac{x}{10}}\, dx = 0,9$$

on trouve

$$-e^{-\frac{x}{10}}\Big|_0^t = 1 - e^{-\frac{t}{10}} = 0,9$$

donc $e^{-\frac{t}{10}} = 0,1$ et par conséquent $t = -10 \ln(0,1) \approx 23$.

57. La durée de fonctionnement d'un ordinateur avant sa première panne est une variable aléatoire continue X dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-x/100} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Trouver la probabilité que la durée de fonctionnement soit comprise entre 50 et 150 heures.

i) Trouver la probabilité que l'ordinateur fonctionne moins de 100 heures.

Solution. i) Comme

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-x/100}\, dx,$$

on trouve

$$1 = -100\lambda e^{-x/100}\Big|_0^{\infty} = 100\lambda,$$

donc $\lambda = \frac{1}{100}$ et $X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{100})$. Ainsi la probabilité que la durée de fonctionnement de l'ordinateur soit comprise entre 50 et 150 heures est donnée par

$$\begin{aligned} P(50 < X < 150) &= \int_{50}^{150} \frac{1}{100} e^{-x/100}\, dx \\ &= -e^{-x/100}\Big|_{50}^{150} \\ &= e^{-1/2} - e^{-3/2} \\ &\approx 0,383 \end{aligned}$$

ii) De façon analogue

$$\begin{aligned} P(X < 100) &= \int_0^{100} \frac{1}{100} e^{-x/100}\, dx \\ &= -e^{-x/100}\Big|_0^{100} \\ &= 1 - e^{-1} \\ &\approx 0,632 \end{aligned}$$

Donc l'ordinateur tombera en panne avant sa 100-ième heure de service approximativement 63 fois sur 100 en moyenne.

58. Soit $X \sim U(0, 10)$. Calculer les probabilités suivantes

i) $P(X < 3)$.

ii) $P(X > 6)$.

iii) $P(3 < X < 8)$.

Solution. On trouve

i)

$$P(X < 3) = \int_0^3 \frac{1}{10}\, dx = \frac{3}{10}.$$

ii)

$$P(X > 6) = \int_6^{10} \frac{1}{10}\, dx = \frac{4}{10}.$$

iii)

$$P(3 < X < 8) \int_3^8 \frac{1}{10}\, dx = \frac{1}{2}.$$

59. Soit $X \sim U(a, b)$. Trouver

i) la fonction de répartition de X.

ii) les moments $E(X^k)$, $k \in \mathbf{N}$.

Solution. i) Comme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

il s'ensuit que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

ii) On trouve

$$E(X^k) = \int_a^b \frac{x^k}{b-a}\, dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}.$$

En particulier

$$E(X) = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

et

$$E(X^2) = \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

par conséquent

$$Var(X) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

60. Soit $X \sim U(-1, 1)$. Calculer la fonction de répartition des variables aléatoires

i) $|X|$.

ii) $4 - X^2$.

Solution. Soit F la fonction de répartition de la variable aléatoire X, donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

i) Posons $H_1(x) = P(|X| \le x)$. On a tout d'abord $H_1(x) = 0$ si $x < 0$, et $H_1(x) = 1$ si $x \ge 1$. De plus, si $0 \le x < 1$, on a

$$H_1(x) = P(-x \le X \le x) = F(x) - F(-x) = \frac{2x}{2} = x.$$

Donc $|X| \sim U(0, 1)$.

ii) Posons $H_2(y) = P(Y \le y)$, où $Y = 4 - X^2$. Puisque $P(Y \in (3, 4)) = 1$, on aura $H_2(y) = 0$ si $y \le 3$, et $H_2(y) = 1$ si $y \ge 4$. Maintenant, si $y \in (3, 4)$, on a

$$\begin{aligned} H_2(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(4 - X^2 \le y) \\ &= P(X^2 \ge 4 - y) \\ &= P(|X| \ge \sqrt{4 - y}) \\ &= 1 - H_1(\sqrt{4 - y}) \\ &= 1 - \sqrt{4 - y}. \end{aligned}$$

61. Soit $X \sim U(0,1)$. Trouver les fonctions de répartition et de densité associées à la variable aléatoire X^n.

Solution. Posons $Y = X^n$. Soit $x < 0$, alors $P(Y \le x) = 0$, et donc

$F(x) = 0$. Soit maintenant $0 \leq x < 1$. On trouve

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(X^n \leq x) \\ &= P(X \leq x^{1/n}) \\ &= F_X(x^{1/n}) \\ &= x^{1/n}. \end{aligned}$$

Enfin, si $x \geq 1$, on a $F_Y(x) = F_X(x) = 1$. Par conséquent

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^{1/n} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La densité de la variable aléatoire Y, on l'obtient par la dérivation de la fonction de répartition. Donc

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} x^{1/(n-1)} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

62. Soit $X \sim U(0,1)$. Trouver les lois de probabilité associées aux variables aléatoires suivantes

i) $U = -\ln X$.

ii) $V = \tan \pi (X - 0,5)$.

Solution. i) Comme $P(0 < X < 1) = 1$, on a $P(U > 0) = 1$. De plus, si $u > 0$, on a

$$\begin{aligned} F_U(u) &= P(U \leq u) \\ &= P(-\ln X \leq u) \\ &= P(X \geq e^{-u}) \\ &= 1 - e^{-u}, \end{aligned}$$

qui est la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1, donc $U \sim \varepsilon(1)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ii) On a, voir l'exemple 8, dans 5.1.5,

$$\begin{aligned} F_V(v) &= P(V \leq v) \\ &= P(\tan \pi(X - 0,5) \leq v) \\ &= P(X \leq 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan v) \\ &= 0,5 + \frac{1}{\pi} \arctan v \\ &= \int_{-\infty}^{v} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\, dt, \end{aligned}$$

qui est la fonction de répartition d'une loi de Cauchy, de paramètres 0 et 1, donc $V \sim C(0,1)$.

63. Soit $X \sim U(0,1)$ et $Y \sim U(0,1)$ deux variables aléatoires indépendantes. Trouver la densité de la variables aléatoire $X + Y$.

Solution. Notons d'abord que

$$f_X(a) = f_Y(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < a < 1 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

La densité de la variable aléatoire $X + Y$ est obtenue par la convolution des fonctions f_X et f_Y, donc

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(a) &= \int_{\mathbf{R}} f_X(a-y) f_Y(y)\, dy \\ &= \int_0^1 f_X(a-y)\, dy. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq a \leq 1$, on obtient

$$f_{X+Y}(a) = \int_0^a dy = a,$$

tandis que pour $1 < a \leq 2$, on aura

$$f_{X+Y}(a) = \int_{a-1}^1 dy = 2 - a.$$

Ainsi

$$f_{X+Y}(a) = \begin{cases} a & \text{si } 0 \leq a \leq 1 \\ 2-a & \text{si } 1 < a \leq 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

64. Soit $X \sim U(-1, 1)$ et $Y = \max(0, X)$. Montrer que la loi de probabilité de la variable aléatoire Y n'est ni discrète et ni continue.

Solution. Notons d'abord que

$$P(Y = 0) = P(X \leq 0) = 1/2.$$

Si $x < 0$, alors
$$P(Y \leq x) = 0.$$

Si $0 \leq x < 1$, alors

$$P(Y \leq x) = P(X \leq x) = \frac{x+1}{2}.$$

Enfin si $x \geq 1$, on a

$$P(Y \leq x) = P(X \leq x) = 1.$$

On a donc obtenu

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La loi de probabilité de la variable aléatoire Y n'est pas discrète, car $P(Y = 0) = 1/2$ et $P(Y = y) = 0$, pour tout $y \neq 0$, par conséquent $\sum_y P(Y = y) = \frac{1}{2} < 1$. De plus la loi n'est pas continue, car $P(Y = 0) = \frac{1}{2}$.

65. Soit $X \sim Beta(2,\ 2)$. Calculer $P(X \leq 0,2)$.

Solution. Notons d'abord que si $0 < x < 1$, alors la densité de la variable aléatoire X est

$$f(x) = \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(2)\Gamma(2)} x(1-x) = 6x(1-x),$$

donc
$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

On a

$$P(X \leq 0,2) = 6\int_0^{0,2} x(1-x)\,dx = 6\left(\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{0,2}\right) = 0,104\ 400.$$

66. Soit $X \sim C(0,1)$. Trouver les fonctions de répartition et de densité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

Solution. Si $x \leq 0$, alors $F_Y(x) = 0$. Si $x > 0$, on trouve

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(X^2 \leq x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \\ &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}), \end{aligned}$$

où (voir problème 62 ii))

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.$$

Notons que

$$F_X(x) + F_X(-x) = \left(\frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{\pi}\arctan(-x) + \frac{1}{2}\right) = 1,$$

d'où

$$F_X(-x) = 1 - F_X(x).$$

Si $x > 0$, on trouve

$$F_Y(x) = 2F_X(\sqrt{x}) - 1 = \frac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{x}).$$

Par conséquent

$$F_Y(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\arctan(\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Enfin la densité est donnée par

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx}F_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}((1+x)\sqrt{x})^{-1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

67. Soit X une variable aléatoire de densité f_X. Trouver la densité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

Solution. Trouvons d'abord la fonction de répartition de Y,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

Une dérivation nous donne la densité, donc

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}(f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y}))$$

68. Soit X une variable aléatoire de densité f_X. Trouver la densité de la variable aléatoire $Y = |X|$.

Solution. Trouvons d'abord la fonction de répartition de Y. Soit $y \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \\ &= F_X(y) - F_X(-y). \end{aligned}$$

Une dérivation nous donne la densité, donc

$$f_Y(y) = f_X(y) + f_X(-y).$$

69. Soit X une variable aléatoire continue non-négative de densité f_X. Trouver la densité de la variable aléatoire $Y = X^n$.

Solution. Soit $h(x) = x^n$, alors $Y = h(X)$. La densité de la variable aléatoire Y est donnée par (voir remarque 4, en 5.1.2),

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \left|\frac{d}{dy}h^{-1}(y)\right| & \text{si } y = h(x) \text{ pour un } x \text{ quelconque} \\ 0 & \text{si } y \neq h(x) \text{ pour tout } x \end{cases}$$

ou $h^{-1}(y)$ est la valeur x telle que $h(x) = y$. On trouve

$$h^{-1}(y) = y^{1/n},$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

donc

$$\frac{d}{dy}\left(h^{-1}(y)\right) = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1},$$

et par conséquent

$$f_Y(y) = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}f_X(y^{1/n}).$$

En particulière, pour $n = 2$, on a

$$f_Y(y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y}),$$

et comme dans ce cas $f_X(-\sqrt{y}) = 0$ car la variable aléatoire X est non-négative, on obtient le résultat du problème 67.

70. Soit X une variable aléatoire continue ayant une densité de probabilité f_x symétrique par rapport à l'origine, et telle que X^2 possède une densité de probabilité exponentielle de paramètre λ. Déterminer la fonction de répartition F_x.

Solution. Puisque f_x est symétrique par rapport à l'origine $f(x) = f(-x)$, pour tout $x \in$ **R.** Comme X est aussi une variable aléatoire continue $P(X = x) = 0$ pour tout $x \in$ **R** et donc

$$P(X < -x) = F_X(-x) = 1 - F_X(x) = P(X > x).$$

Maintenant, en utilisant encore une fois que la fonction f_x est symétrique par rapport à l'origine, on obtient

$$\begin{aligned} P(X^2 > x^2) &= P(X > |x|) + P(X < -|x|) \\ &= 2P(X > |x|), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 1 - F_X(|x|) &= P(X > |x|) \\ &= \frac{1}{2}P(X^2 > x^2) \\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda x^2}. \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

D'où

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\lambda x^2} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x^2} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

71. Soit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Montrer que *f* (*x*) est une densité et trouver la fonction de répartition correspondante.

Solution. La fonction *f* est non-négative, continue sauf en *x* = -1 et *x* = 1. De plus,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}x^2\,dx \\ &= \left.\frac{x^3}{2}\right|_{-1}^{1} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc *f* est une fonction de densité. Trouvons la fonction de répartition correspondante. Pour *x* < -1,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0.$$

Si $-1 \leq x < 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{3}{2}t^2\,dt \\ &= 0 + \left.\frac{t^3}{2}\right|_{-1}^{x} \\ &= \frac{x^3+1}{2} \end{aligned}$$

et si $x \geq 1$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{-1} 0\, dt + \int_{-1}^{1} \frac{3}{2} t^2\, dt + \int_{1}^{x} 0\, dt \\ &= 0 + \left. \frac{x^3}{2} \right|_{-1}^{1} + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc, on a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^3+1}{2} & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On remarque que F est continue partout, dérivable sauf en -1 et en 1 et que $F^1(x) = f(x)$ pour $x \neq -1, 1$.

72. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où λ est un nombre réel positif. Trouver la fonction de répartition de X.

Solution. Pour $x < 0$ on a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0,$$

et pour $x \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t}\, dt \\ &= 0 + \left(-e^{-\lambda t} \Big|_{0}^{x} \right) \\ &= 1 - e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On remarque que F est continue partout, dérivable sauf en $x = 0$ et $F'(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$.

73. Soit X une variable aléatoire telle que $P(|X - 1| = 2) = 0$. Calculer $P(|X - 1| \geq 2)$ à l'aide de la fonction de répartition F_X.

Solution. On a

$$\begin{aligned} P(|X-1| \geq 2) &= P(X \geq 3) + P(X \leq -1) \\ &= P(X > 3) + P(X \leq -1) \\ &= 1 - F_X(3) + F_X(-1), \end{aligned}$$

car $P(X = 3) = 0$.

74. Considérons un point choisi au hasard à l'intérieur d'un disque de rayon *r* du plan et soit *X* la variable aléatoire qui représente le carré de la distance de ce point au centre du disque. Calculer la fonction de répartition de *X*.

Solution. Soit B_r la boule de rayon r centrée en 0. Alors l'aire de B_r, dénoté par $|B_r|$ est πr^2. Soit F la fonction de répartition de X. Il est clair que $F(x) = 0$, si $x < 0$ et $F(x) = 1$, si $x > r^2$. Si $0 \leq x \leq r^2$, on a

$$P(X \leq x) = \frac{|B_{\sqrt{x}}|}{|B_r|} = \frac{x}{r^2}.$$

D'où

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{r^2} & \text{si } 0 \leq x < r^2 \\ 1 & \text{si } x \geq r^2 \end{cases}$$

et donc $X \sim U(0, r^2)$.

75. Soit X une variable aléatoire continue à valeurs positives qui puisse représenter la durée de vie d'un certain composant. Soit F sa fonction de répartition et f sa densité. La fonction

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)},$$

s'appelle la fonction *taux de panne, ou* encore *taux de hasard, ou force de mortalité.* Montrer que

$$P(X \in (x,\ x + dx)|X > x) \approx \lambda(x)dx,$$

et donner une interprétation de ce résultat.

Solution. On a

$$\begin{aligned} P(X \in (x,\ x+dx)|X > x) &= \frac{P((X \in (x,\ x+dx)) \cap (X > x))}{P(X > x)} \\ &= \frac{P(X \in (x,\ x+dx))}{P(X > x)} \\ &= \frac{1}{P(X > x)} \cdot \frac{F(x+dx) - F(x)}{dx} dx \\ &\approx \frac{f(x)}{1 - F(x)} dx. \end{aligned}$$

On peut interpréter ce résultat comme suit : $\lambda(x)$ représente un taux de panne conditionnel instantané, la condition étant que le composant ait pu assurer déjà x heures de service.

76. Montrer que la fonction taux de panne d'une variable aléatoire continue à valeurs positives détermine entièrement sa fonction de répartition.

Solution. Soit $\lambda(x)$ la fonction taux de panne, alors par définition

$$\lambda(x) = \frac{\frac{d}{dx}F(x)}{1 - F(x)}.$$

L'intégration des deux membres donne

$$\ln(1 - F(x)) = -\int_0^x \lambda(t)\, dt + k,$$

ou

$$1 - F(x) = e^k e^{-\int_0^x \lambda(t)\,dt}.$$

Or $k = 0$, ce que l'on voit en posant $x = 0$, car $F(0) = P(X \leq 0) = 0$. Donc

$$F(x) = 1 - e^{-\int_0^x \lambda(t)\,dt}.$$

Remarque. Si $\lambda(x) = \alpha + \beta x$, on obtient

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x - \beta x^2/2},$$

et sa densité, par dérivation sera

$$f(x) = (\alpha + \beta x)e^{-(\alpha x + \beta x^2/2)},\ x \geq 0.$$

77. On dit que le taux de mortalité chez les fumeurs, à tout âge est le double de celui des non-fumeurs. Comparer leur probabilité de survie au-delà de *b* années sachant qu'ils ont survécu *a* années.

Solution. Notons par $\lambda f(x)$ le taux de mortalité pour un fumeur âgé de *x* années et par $\lambda_n(x)$ celui d'un non-fumeur du même âge. Comme le taux de mortalité des fumeurs est le double du taux de mortalité des non-fumeurs, on a

$$\lambda f(x) = 2\lambda_n(x).$$

Soit $a < b$ et considérons les événements :

B_n - "un non-fumeur survit au-delà de *b* années",

A_n - "un non-fumeur survit au-delà de *a* années" ,

B_f - "un fumeur survit au-delà de *b* années",

A_f - "un fumeur survit au-delà de *a* années".

Soit F_n la fonction de répartition pour X , la variable aléatoire représentant le temps de survie (en années) d'un non-fumeur. On veut comparer

$$P(B_n \backslash A_n) \text{ et } P(B_f \backslash A_f).$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

On a (voir problème 76)

$$\begin{aligned} P(B_n|A_n) &= \frac{P(B_n \cap A_n)}{P(A_n)} \\ &= \frac{1 - F_n(b)}{1 - F_n(a)} \\ &= \frac{e^{-\int_0^b \lambda_n(x)\,dx}}{e^{-\int_0^a \lambda_n(x)\,dx}} \\ &= e^{-\int_a^b \lambda_n(x)\,dx}, \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} P(B_f|A_f) &= e^{-\int_a^b \lambda_f(x)\,dx} \\ &= e^{-2\int_a^b \lambda_n(x)\,dx} \\ &= \left(e^{-\int_a^b \lambda_n(x)\,dx}\right)^2. \end{aligned}$$

Donc si l'on a deux individus du même âge, dont l'un est fumeur et l'autre pas, la probabilité que le fumeur survive à un âge donné est le *carré* (non la moitié) de celle du non-fumeur. Par exemple, si $\lambda_n(x) = \frac{1}{30}$, $50 \leq x \leq 60$, alors la probabilité qu'un non-fumeur âgé de 50 ans atteigne l'âge de 60 ans est $e^{-1/3} \approx 0,718\,920$ alors que pour un fumeur elle vaut $e^{-2/3} \approx 0,516\,850$.

78. Montrer que la fonction taux de panne d'une variable aléatoire $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ est égal au paramètre λ. Justifier le résultat.

Solution. On trouve

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{f(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} \\ &= \lambda. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une durée de vie exponentielle, l'absence de mémoire de cette distribution (voir problème 53), signifie que la durée de vie résiduelle d'un composant conditionnellement à une durée de service x jusque-là est de même distribution que la durée de vie initiale.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

79. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}} & \text{si } x \geq \nu \\ 0 & \text{si } x < \nu \end{cases}$$

où ν, α, et β sont des paramètres, et $\nu \in (-\infty, \infty)$, α, $\beta \in (0, \infty)$. On écrira alors $X \sim W(\alpha, \beta, \nu)$. Cette distribution s'appelle la *loi de Weibull.*[10]

i) Trouver la densité de X.

ii) Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

Solution. i) Par dérivation on obtient

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}} & \text{si } x \geq \nu \\ 0 & \text{si } x < \nu \end{cases}$$

ii) On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{\nu}^{\infty} x\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}} dx \\ &= \int_0^{\infty} (\alpha z^{\frac{1}{\beta}} + \nu)\frac{\beta}{\alpha} z^{\frac{\beta-1}{\beta}} e^{-z} \frac{\alpha}{\beta} z^{\frac{1-\beta}{\beta}} dz \\ &= \nu \int_0^{\infty} e^{-z} dz + \alpha \int_0^{\infty} z^{\frac{1}{\beta}} e^{-z} dz \\ &= \nu + \alpha\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right), \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $z = \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}$, donc $x = \alpha z^{1/\beta} + \nu$. De la même façon on trouve

$$E(X^2) = \nu^2 + 2\alpha\nu\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right) + \alpha^2\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right),$$

[10]Waloddi Weibull (1887-1979), physicien suédois.

et par conséquent

$$Var(X) = \alpha^2 \left(\Gamma\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right) - \left(\Gamma\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)\right)^2 \right).$$

Remarque. La loi de Weibull fut introduite comme modèle pour représenter la tension à laquelle un matériel se brise. Cette loi est aussi utilisée pour représenter la durée de vie d'un produit.

80. Calculer la fonction taux de panne d'une variable aléatoire de Weibull, $X \sim W(\alpha, \beta, 0)$ et montrer qu'elle est croissante quand $\beta > 1$ et décroissante quand $\beta < 1$.

Solution. D'abord, si $v = 0$ et $x \geq 0$,

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}.$$

Alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} dt \\ &= -e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta}\Big|_0^x \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}, \end{aligned}$$

d'où $1 - F(x) = e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}$ et par conséquent

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{f(x)}{1-F(x)} \\ &= \frac{\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}}{e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta}} \\ &= \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Donc la fonction taux de panne est constante si $\beta = 1$, et dans ce cas, $f(x)$ est la densité d'une variable aléatoire $X \sim \varepsilon(1/\alpha)$, et $\lambda(x) = 1/\alpha$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

(voir problème 78), tandis que $\lambda(x)$ est une fonction croissante de x si $\beta > 1$ et décroissante de x si $\beta < 1$.

Remarque. La loi exponentielle est un cas particulier de la loi de Weibull (lorsque $\nu = 0$ et $\beta = 1$), ainsi que de la loi *Gamma* (voir 4 dans 5.1.4).

Remarque. La distribution de Weibull est importante dans les applications, car par le choix approprié de β elle peut être utilisée pour modéliser les cas où la fonction taux de panne est croissante ou décroissante et aussi pour les cas où la fonction taux de panne est proportionnelle à une puissance de x.

81. Une compagnie demande à ses clients d'inspecter le produit qu'ils achètent dès qu'ils en prennent possession et, de retourner sans délai tout produit non satisfaisant. Supposons que le temps (en semaines) qui s'écoule entre la vente d'un produit non satisfaisant et son retour, est une variable aléatoire $X \sim W(1, 2, 0)$. Trouver la probabilité qu'un produit non satisfaisant revienne à la compagnie moins d'une semaine après avoir été livré ainsi que le temps moyen d'un retour.

Solution. On trouve

$$P(X < 1) = \int_0^1 2xe^{-x^2}\,dx = 1 - e^{-1} \approx 0,632,$$

et le temps moyen d'attente pour le retour d'un produit non satisfaisant est $E(X) = \Gamma(3/2) = 1/2\Gamma(1/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \approx 0,886$ semaines.

82. Soit

$$Y = \left(\frac{X-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}.$$

Montrer que si $X \sim W(\alpha,\ \beta,\ \nu)$ alors $Y \sim \mathcal{E}(1)$, et vice versa.

Solution. Rappelons d'abord que la densité de la variable aléatoire X est

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}} & \text{si } x \geq \nu \\ 0 & \text{si } x < \nu \end{cases}$$

Considérons la fonction $h(x) = \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}$. Alors $Y = h(X)$, et la densité de la variable aléatoire $Y = h(X) = \left(\frac{X-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}$ est donnée par (voir

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

remarque 4 dans 5.1.2),

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))\frac{d}{dy}h^{-1}(y).$$

On trouve

$$h^{-1}(y) = \alpha y^{1/\beta} + \nu,$$

et

$$\frac{d}{dy}h^{-1}(y) = \frac{\alpha}{\beta}y^{\frac{1}{\beta}-1}.$$

Par conséquent

$$f_X(h^{-1}(y))\frac{d}{dy}h^{-1}(y) = \frac{\beta}{\alpha}y^{1-\frac{1}{\beta}}e^{-y}\cdot\frac{\alpha}{\beta}y^{\frac{1}{\beta}-1} = e^{-y}.$$

Notons enfin, que si $x > \nu$, alors $y > 0$, et on trouve

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

donc $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

Montrons maintenant que si $Y \sim \mathcal{E}(1)$, alors $X \sim W(\alpha,\ \beta,\ \nu)$, où $X = \alpha Y^{1/\beta} + \nu$. Considérons la fonction $h(y) = \alpha y^{1/\beta} + \nu = x$. Alors $h^{-1}(x) = \left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}$, et si $y > 0$, alors $x > \nu$. Puis

$$\frac{d}{dx}h^{-1}(x) = \beta\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1}\frac{1}{\alpha},$$

et parce que $f_Y(y) = e^{-y}$, on obtient

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_Y(h^{-1}(x))\frac{d}{dx}h^{-1}(x) \\ &= e^{-\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta}}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x-\nu}{\alpha}\right)^{\beta-1} \end{aligned}$$

et donc le résultat désiré.

83. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|},$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

où $x \in \mathbf{R}$. On dit que la variable aléatoire suit une *loi de Laplace* de paramètre λ. Trouver la fonction de répartition de X.

Solution. On trouve

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \lambda e^{\lambda x}\, dx & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \lambda e^{\lambda x}\, dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x}\, dx & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Donc

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{\lambda x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

84. Dans les conditions du problème 50, on suppose maintenant que le bruit du canal de transmission est une variable aléatoire E de distribution laplacienne de paramètre $\lambda = 1$. Trouver les probabilités des types d'erreurs qui peuvent survenir.

Solution. Comme auparavant, deux types d'erreurs peuvent survenir, à savoir un signal 1 est faussement compris comme un 0, ou l'inverse. On note par A l'événement "on a envoyé le signal 0", par B l'événement "on a envoyé le signal 0", et par C l'événement "il y a une erreur". Alors le premier type d'erreur sera observé si le signal envoyé est 1 et $2 + E < 0,5$. Le second type d'erreur sera observé si le signal envoyé est 0 et $-2 + E \geq 0,5$. Ainsi

$$\begin{aligned} P(C \mid A) &= P(E < -1,5) \\ &= \frac{1}{2}e^{-1,5} \\ &\approx 0,111\ 600 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(C \mid B) &= P(E \geq 2,5) \\ &= 1 - P(E < 2,5) \\ &= 1 - 1 + \frac{1}{2}e^{-2,5} \\ &\approx 0,041. \end{aligned}$$

En comparant ces résultats avec ceux du problème 50, on constate que les probabilités d'erreur sont plus élevées si le bruit est laplacienne de paramètre $\lambda = 1$, que s'il est de distribution normale centrée réduite.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

85. Montrer que si F est la fonction de répartition de la variable aléatoire X, alors $1 - F((-x)-)$ est la fonction de répartition de la variable aléatoire $-X$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} P(-X \leq x) &= P(X \geq -x) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} P(X > -x - \epsilon) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} (1 - F(-x - \epsilon)) \\ &= 1 - F((-x)-). \end{aligned}$$

86. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } 1 < x < \infty \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

i) Trouver $E(X)$.

ii) Montrer que $E(X^n)$ n'existe pas, pour $n \geq 2$.

Solution. i) On trouve

$$E(X) = \int_1^\infty x \frac{2}{x^3}\, dx = -\frac{2}{x}\Big|_1^\infty = 2.$$

ii) Si $n \geq 2$, alors

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \int_1^\infty x^n f(x)\, dx \\ &\geq \int_1^\infty x^2 f(x)\, dx \\ &= E(X^2) \\ &= \int_1^\infty \frac{2x^2}{x^3}\, dx \\ &= 2 \ln x|_1^\infty \\ &\to \infty. \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

87. Soit $X \sim G(p)$. Trouver $E(X)$ et $Var(X)$.

Solution. Posons $q = 1 - p$. Alors

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p \\
&= p\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(q^n) \\
&= p\frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n\right) \\
&= p\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) \\
&= \frac{p}{(1-q)^2} \\
&= \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $E(X^2)$. On trouve

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2q^{n-1}p \\
&= p\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dq}(nq^n) \\
&= p\frac{d}{dq}\left(\sum_{n=1}^{\infty} nq^n\right) \\
&= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}p\right) \\
&= p\frac{d}{dq}\left(\frac{q}{1-q}E(X)\right) \\
&= p\frac{d}{dq}\left(q(1-q)^{-2}\right) \\
&= p\left(\frac{1}{p^2} + \frac{2(1-p)}{p^3}\right) \\
&= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Donc

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2} \end{aligned}$$

On peut obtenir ces résultats par une autre méthode, voir problème 141 iii).

88. Trouver les moments de la variable aléatoire $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \int_0^\infty x^n \frac{x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta}\, dx \\ &= \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+n-1}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-x/\beta}\, dx \\ &= \frac{\beta^n \Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+n-1}}{\beta^{\alpha+n}\Gamma(\alpha+n)} e^{-x/\beta}\, dx \\ &= \frac{\beta^n \Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}, \end{aligned}$$

car l'intégrant de la dernière intégrale est la densité d'une variable aléatoire $X \sim Gamma(\alpha + n, \beta)$, et donc la valeur de l'intégrale est 1.

Maintenant en prenant $n = 1$, on trouve

$$E(X) = \frac{\beta\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\beta\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta,$$

car $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

Pour $n = 2$, on obtient

$$E(X^2) = \frac{\beta^2\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} = (\alpha+1)\alpha\beta^2,$$

et par conséquent

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha\beta^2.$$

On peut obtenir ces résultats par une autre méthode, voir problème 141 vi).

89. Trouver les moments de la variable aléatoire $X \sim Beta(\alpha, \lambda)$.

Solution. Pour obtenir les moments d'une variable aléatoire $X \sim Beta(\alpha, \lambda)$, il n'est pas avantageux d'utiliser la fonction caractéristique ou la fonction génératrice des moments. En procédant directement, on a par définition,

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)} \int_0^1 x^n x^{\alpha-1}(1-x)^{\lambda-1}\,dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)} \int_0^1 x^{n+\alpha-1}(1-x)^{\lambda-1}\,dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)} \beta(\alpha+n,\lambda) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\lambda)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha+\lambda+n)} \end{aligned}$$

car $\beta(\alpha+n,\lambda) = \int_0^1 x^{\alpha+n-1}(1-x)^{\lambda-1}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(\alpha+\lambda+n)}$.
Maintenant en prenant $n = 1$, on trouve

$$E(X) = \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} = \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}.$$

Pour $n = 2$, on obtient

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+\lambda)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+\lambda+2)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\lambda)(\alpha+\lambda+1)},$$

et par conséquent

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha\lambda}{(\alpha+\lambda)^2(\alpha+\lambda+1)}.$$

90. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

où a est un réel positif.

i) Vérifier que *f* est une densité.

ii) Déterminer la fonction de répartition de *X*.

iii) Calculer *E(X)* et plus généralement $E(X^k)$, en déduire la valeur de *Var(X).*

Solution. i) La fonction *f(x)* est positive ou nulle pour tout $x \in$ **R,** et continue sauf pour $x = 0$. De plus

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x}\,dx\\ &= -e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Ainsi $f(x)$ est une densité.

ii) On a

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

Pour $x \geq 0$

$$F(x) = \int_0^{x} \alpha e^{-\alpha t}\,dt.$$

Donc

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0\\ 0 & \text{si } x < 0\end{cases}$$

iii) On a

$$E(X) = \int_0^{\infty} t\alpha e^{-\alpha t}\,dt.$$

Une intégration par parties avec $-\alpha e^{-\alpha t}dt = dv$ et $-t = u$, donc $v = e^{-\alpha t}$ et $du = -dt$, donne

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \alpha t e^{-\alpha t}\,dt &= -te^{-\alpha t}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}\,dt\\ &= -\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}\Big|_0^{\infty}\\ &= \frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Donc
$$E(X) = \frac{1}{\alpha}.$$
De même
$$E(X^k) = \int_0^\infty t^k \alpha e^{-\alpha t}\, dt.$$
En intégrant par parties, cela donne
$$\int_0^\infty \alpha t^k e^{-\alpha t}\, dt = -t^k\ e^{-\alpha t}\Big|_0^\infty + \frac{k}{\alpha}\int_0^\infty \alpha t^{k-1} e^{-\alpha t}\, dt.$$
Donc
$$E(X^k) = \frac{k}{\alpha} E(X^{k-1}).$$
Par conséquent
$$E(X^k) = \frac{k}{\alpha} \times \frac{k-1}{\alpha} \times \cdots \times \frac{2}{\alpha} E(X),$$
et donc
$$E(X^k) = \frac{k!}{\alpha^k}.$$
Comme $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, on obtient $Var(X) = \frac{2!}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2}$ et donc
$$Var(X) = \frac{1}{\alpha^2}.$$

91. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$
Trouver $E(e^X)$.

Solution. Soit $Y = e^X$. Déterminons d'abord la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y. Pour $1 \le y \le e$, on a
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(e^X \le y) \\ &= P(X \le \log y) \\ &= \int_0^{\log y} f(x)\, dx \\ &= \log y. \end{aligned}$$

En dérivant *Fy(y),* on obtient la densité de *Y,* donc

$$f_Y(y) = \frac{1}{y},\ 1 \le y \le e.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} E\left(e^X\right) &= E(Y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\, dy \\ &= \int_1^e dy \\ &= e - 1. \end{aligned}$$

92. Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $\{1, 2, \ldots\}$, avec les probabilités $p_n = P(X = n) = \frac{6}{n^2\pi^2}$. Montrer que $E(X)$ n'existe pas.

Solution. Notons d'abord que la loi de X est bien définie puisque $p_n \ge 0$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^2\pi^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1,$$

car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Alors

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty,$$

par conséquent la valeur moyenne de la variable aléatoire *X* n'existe pas.

93. Soit *X* une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs {0, 1, 2, ...}. Montrer que *E(X)* est finie si et seulement si

$$\sum_{n \ge 0} P(X > n) < \infty.$$

Dans ce cas,

$$E(X) = \sum_{n \ge 0} P(X > n) < \infty.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Solution. Pour $n > 0$, on a

$$\begin{aligned} E(X1_{\{X\leq n\}}) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} P(X=k) \\ &= \sum_{h=1}^{n}\sum_{k=h}^{n} P(X=k) \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} P(X>h). \end{aligned}$$

Donc

$$E(X) = \lim_{n\to\infty} E(X1_{\{X\leq n\}}) = \sum_{h\geq 0} P(X>h).$$

94. Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $\{1, 2, ...\}$, avec les probabilités $p_n = P(X = n) = 1/2^n$. Trouver $E(X)$.

Solution. Notons d'abord que la loi de X est bien définie puisque $p_n \geq 0$ et

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 1 \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Maintenant,

$$\begin{aligned} P(X > n) &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} + 1 \\ &= 1 - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 1 \\ &= \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n \geq 0} P(X > n) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2 < \infty.$$

Par conséquent (voir problème 93),

$$E(X) = \sum_{n > 0} P(X > n) = 2.$$

95. Soit X la variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $n \in \mathbf{N}$, avec les probabilités

$$p_n = P(X = n) = e^{-n} - e^{-(n+1)}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la variable aléatoire X admet des moments de tous ordres.

i) Trouver $E(X)$ et $Var(X)$.

Solution. i) On a

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^k (e^{-n} - e^{-(n+1)}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} n^k e^{-(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{e^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{e^{n+1}}. \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Montrons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{e^n}$ est convergente. En utilisant le critère du rapport, on trouve

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n^k} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{e} \\
&= \frac{1}{e} \\
&< 1,
\end{aligned}$$

donc la série est convergente. De la même façon on montre que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{e^{n+1}}$ est convergente, et donc $E(X^k)$ existe pour tout k étant la différence de deux séries convergentes.

ii) Si $|a| < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$. En dérivant terme à terme, si k est un entier positif, on trouve

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} = \frac{k!}{(1-a)^{k+1}},$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a^n = \frac{k!}{(1-a)^{k+1}}.$$

Pour $k = 0$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

Pour $k = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} a^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n a^n + \sum_{n=0}^{\infty} a^n \\
&= \frac{1}{(1-a)^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a^n = \frac{1}{(1-a)^2} - \frac{1}{1-a} = \frac{a}{(1-a)^2}.$$

Pour $k = 2$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} a^n = \frac{2!}{(1-a)^3}.$$

Mais

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} a^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+3n+2) a^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n + \frac{3a}{(1-a)^2} + 2\frac{1}{1-a},\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{2!}{(1-a)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n + \frac{3a}{(1-a)^2} + \frac{2}{1-a},$$

et finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n = \frac{a^2+a}{(1-a)^3}.$$

Donc pour $k = 1$, et en prenant $a = e^{-1} < 1$, on obtient

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n} - \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n} \\ &= \frac{e}{(e-1)^2} - \frac{1}{(e-1)^2} \\ &= \frac{1}{e-1}.\end{aligned}$$

De même, pour $k = 2$, et en prenant $a = e^{-1} < 1$, on obtient

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \frac{e(e+1)}{(e-1)^3} - \frac{e+1}{(e-1)^3} \\ &= \frac{e+1}{(e-1)^2},\end{aligned}$$

par conséquent

$$Var(X) = \frac{e+1}{(e-1)^2} - \frac{1}{(e-1)^2} = \frac{e}{(e-1)^2}.$$

96. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver le mode de X.

Solution. Rappelons que le mode mo_X est le point pour lequel la densité atteint, s'il existe, son maximum absolu. Comme $f'(x) = 6(1-2x)$, on trouve que $mo_X = \frac{1}{2}$.

97. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La distribution donnée s'appelle la *loi de Rayleigh*[11] de paramètre λ.
Trouver

i) la densité associée.

ii) la médiane.

iii) la valeur moyenne.

Solution. i) La fonction de densité associée est donnée par $f(x) = dF / dx\,(x)$ presque partout. Or F est partout dérivable, donc

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, 1_{[0,\infty)}(x).$$

ii) La médiane me_X doit satisfaire l'équation $F(me_X) = \frac{1}{2}$. Par conséquent

$$1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2},$$

d'où $e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}$, donc $-\frac{x^2}{2\sigma^2} = -\ln 2$. On obtient $x^2 = \sigma^2 \ln 4$, et finalement $me_X = \sigma\sqrt{\ln 4}$, et la médiane est unique.

[11] John William Strutt, lord Rayleigh (1848-1919), physicien anglais.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

iii) La valeur moyenne $\mu = E(X)$ est donnée par (voir remarque 10 en 5.1.6)

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1 - F(x))\,dx &= \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx \\ &= \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}},\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $y = x/\sigma$, et parce que $\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$.

Remarque. Si on prend $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{1}{\sigma^2}$ dans la densité $f(x) = (\alpha + \beta x)e^{-(\alpha x + \beta x^2/2)}$, $x \geq 0$, de la remarque du problème 76, on trouve la densité de Rayleigh. Par conséquent la fonction taux de panne dans ce cas, est $\lambda(x) = \frac{x}{\sigma^2}$.

98. Soit X une variable aléatoire continue dont la densité est symétrique par rapport à un nombre a. Montrer que si $E(X)$ existe, alors $E(X) = me_x$.

Solution. Rappelons qu'une densité f est symétrique par rapport à un nombre a si $f(a + x) = f(a - x)$, pour tout $x \in$ **R.**

Montrons d'abord que $me_x = a$. On a

$$P(X > a) = \int_a^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty f(a + y)\,dy,$$

où on a fait le changement de variable $y = x - a$. De la même façon on trouve

$$\begin{aligned}P(X < a) &= \int_{-\infty}^a f(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^0 f(y + a)\,dy \\ &= -\int_\infty^0 f(a - z)\,dz \\ &= \int_0^\infty f(a - z)\,dz.\end{aligned}$$

De la symétrie de la densité *f*, il s'ensuit que

$$P(X > a) = P(X < a).$$

Comme $P(X > a) + P(X < a) = 1$, on trouve $P(X > a) = P(X < a) = \frac{1}{2}$, et par conséquent $me_X = a$.

Montrons maintenant que $E(X) = a$. On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (y+a)f(a+y)\,dy \\
&= a + \int_{-\infty}^{\infty} yf(a+y)\,dy \\
&= a + \int_{0}^{\infty} yf(a+y)\,dy + \int_{-\infty}^{0} yf(a+y)\,dy \\
&= a + \int_{0}^{\infty} yf(a+y)\,dy - \int_{0}^{\infty} zf(a-z)\,dz \\
&= a,
\end{aligned}$$

donc $E(X) = me_X = a$.

Remarque. Parce que les densités des variables aléatoires $Z \sim N(0,1)$ et $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ sont symétriques par rapport à 0 et μ respectivement, on trouve $E(Z) = me_Z = 0$, et $E(X) = me_X = \mu$.

99. Soit X une variable aléatoire et k une fonction non décroissante positive. Montrer que si $E(k(X))$ existe et si $a \in \mathbb{R}$, alors

$$P(X > a) \leq \frac{E(k(X))}{k(a)}.$$

Solution. Rappelons d'abord que si on considère la variable aléatoire indicatrice $1_{\{k(X) \geq k(a)\}}$, alors (voir exemple 3, dans 5.1.6)

$$E(1_{\{k(X)\geq k(a)\}}) = P(k(X) \geq k(a)).$$

Puisque la fonction k est non décroissante, $\{X > a\} \subset \{k(X) \geq k(a)\}$. Donc

$$\begin{aligned}
P(X > a) &\leq P(k(X) \geq k(a)) \\
&= E(1_{\{k(X)\geq k(a)\}}) \\
&\leq E\left(\frac{k(X)}{k(a)} 1_{\{k(X)\geq k(a)\}}\right) \\
&\leq E\left(\frac{k(X)}{k(a)}\right) \\
&= \frac{E(k(X))}{k(a)}.
\end{aligned}$$

100. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que

i) $E(X^n) = n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) $P(X > a) \leq \frac{n!}{a^n}$, pour tout $a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution. i) Procédons par inductions. Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty xe^{-x}\,dx \\
&= -xe^{-x}|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}\,dx \\
&= 0 - e^{-x}|_0^\infty \\
&= 1 \\
&= 1!
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $E(X^n) = n!$ et montrons que $E(X^{n+1}) = (n+1)!$. On trouve

$$\begin{aligned}
E(X^{n+1}) &= \int_0^\infty x^{n+1}e^{-x}\,dx \\
&= -x^{n+1}e^{-x}|_0^\infty + (n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx \\
&= 0 + (n+1)E(X^n) \\
&= (n+1)!
\end{aligned}$$

ii) Utilisons la formule (voir problème 99),

$$P(X > a) \leq \frac{E(k(X))}{k(a)},$$

en prenant la fonction $k(x) = x^n$, si $x \geq 0$. Évidemment la fonction k est non décroissante positive et de plus $E(k(X)) = E(X^n) = n!$. Alors

$$P(X > a) \leq \frac{n!}{k(a)} = \frac{n!}{a^n}, \quad \text{pour tout} \quad a > 0.$$

Puisque, pour tout $a > 0$,

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \int_0^a e^{-x}\,dx = e^{-a},$$

on obtient, en particulier, l'inégalité

$$e^{-a} \leq \frac{n!}{a^n},$$

pour tout $a > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

101. Soit $X \in L_1$. Montrer que pour tout fonction non décroissante k telle que $E(k(X)) < \infty$, on a

$$Cov(X, k(X)) \geq 0.$$

Solution. Soit Y une autre variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X. Alors

$$E((X - Y)(k(X) - k(Y))) = 2Cov(X, k(X)).$$

Or la fonction $h(x,y) = (x - y)(k(x) - k(y))$ est non négative car si $x \leq y$, alors $k(x) \leq k(y)$ et si $x \geq y$, alors $k(x) \geq k(y)$. Donc $Cov(X, k(X)) \geq 0$.

102. Montrer que $Cov(aX, Y) = aCov(X, Y)$, où $a \in \mathbb{R}$.

Solution. On a

$$\begin{aligned} Cov(aX, Y) &= E(aXY) - E(aX)E(Y) \\ &= aE(XY) - aE(X)E(Y) \\ &= a(E(XY) - E(X)E(Y)) \\ &= aCov(X, Y). \end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

103. Soit X et Y deux variables aléatoires ayant des variances et supposons que

$$aX + bY = c,$$

où a, b, c sont des constantes et $ab \neq 0$. Calculer

i) le coefficient de corrélation de X et Y.

ii) le rapport entre les écarts-types de X et Y.

Solution. i) De $aX + bY = c$, on trouve $Y = \frac{c}{b} - \frac{a}{b}X$. Donc

$$Var(Y) = \left(\frac{a}{b}\right)^2 Var(X),$$

et

$$\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\ &= E\left(\frac{c}{b}X - \frac{a}{b}X^2\right) - E(X)\left(\frac{c}{b} - \frac{a}{b}E(X)\right) \\ &= -\frac{a}{b}\left((E(X^2) - (E(X))^2\right) \\ &= -\frac{a}{b}Var(X). \end{aligned}$$

Par conséquent le coefficient de corrélation de X et Y est donnée par

$$\begin{aligned} Corr(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \\ &= \frac{-\frac{a}{b}}{\left|\frac{a}{b}\right|} \end{aligned}$$

donc

$$Corr(X,Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{a}{b} < 0 \\ -1 & \text{si } \frac{a}{b} > 0 \end{cases}$$

ii) **Le rapport entre les écarts-types de X et Y est donc**

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(X)}{\sigma(Y)} &= \frac{\sqrt{Var(X)}}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 Var(X)}} \\ &= \left|\frac{b}{a}\right|. \end{aligned}$$

104. Soit X et Y deux variables aléatoires telles que $Var(X)\, Var(Y) \neq 0$. Montrer que

$$-1 \leq Corr(X,Y) \leq 1.$$

Solution. Posons $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ et $\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} + \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{Var(X)}{\sigma_X^2} + \frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2} + \frac{2Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= 2(1 + Corr(X,Y)) \end{aligned}$$

donc $-1 \leq Corr(X,Y)$. D'autre part

$$\begin{aligned} 0 &\leq Var\left(\frac{X}{\sigma_X} - \frac{Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{Var(X)}{\sigma_X^2} + \frac{Var(Y)}{\sigma_Y^2} - \frac{2Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= 2(1 - Corr(X,Y)) \end{aligned}$$

donc $Corr(X,Y) \leq 1$.

105. *Le problème de l'aiguille de Buffon*[12] - Sur une table sont tracées des lignes parallèles équidistantes. Notons par h la distance entre deux lignes voisines. Sur la table, on lance de façon aléatoire un aiguille dont la longueur est $\ell \leq h$. Trouver la probabilité que l'aiguille coupe l'une des droites parallèles.

Solution. On fixera la position de l'aiguille par le couple aléatoire (X, θ), où X est la distance entre le milieu de l'aiguille et la parallèle la plus proche, et où θ est l'angle aigu entre l'aiguille et une perpendiculaire du milieu de l'aiguille à la parallèle la plus proche. Cela implique que $0 \leq \theta \leq \pi/2$, et $0 \leq X \leq h/2$. Il est raisonnable d'admettre que, dans ces limites, X et θ sont de distributions indépendantes et uniforme, donc

$$f_X(x) = \frac{2}{h} 1_{(0,h/2)}(x) \quad \text{et} \quad f_\theta(y) = \frac{2}{\pi} 1_{(0,\pi/2)}(y).$$

[12] Louis Leclerc de Buffon (1701-1788), célèbre naturaliste français.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Notons que l'aiguille chevauchera une parallèle dès que $X < \frac{\ell}{2}\cos\theta$. On trouve

$$\begin{aligned}
P\left(X < \frac{\ell}{2}\cos\theta\right) &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\ell/2\cos y} f_X(x)f_\theta(y)\,dx\,dy \\
&= \frac{4}{\pi h}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\ell/2\cos y} dx\,dy \\
&= \frac{4}{\pi h}\int_0^{\pi/2}\frac{\ell}{2}\cos y\,dy \\
&= \frac{2\ell}{\pi h}.
\end{aligned}$$

Note. Le problème de Buffon semble bien être le plus vieux problème de probabilité géométrique. Il a été mentionné pour la première fois en 1733 par Buffon lui-même.

Au siècle dernier, ce problème de Buffon a permis d'obtenir deux applications intéressantes.

1) - On a pu vérifier expérimentalement le théorème de Bernoulli. Soit $X \sim B(n, p)$ et F_n la fréquence de succès. Alors F_n *converge en probabilité* vers la probabilité p, quand le nombre n d'expérience tend vers infini, c'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$ aussi petit qu'on veut,

$$\lim_{n\to\infty} P(|F_n - p| < \epsilon) = 1.$$

Ce théorème (un théorème de grands nombres) a une importance considérable tant au plan théorique que pour les applications. En effet il permet de remplacer la probabilité d'un événement (notion théorique) par la fréquence de cet événement qui peut être déterminée expérimentalement (notion pratique).

Notons par n le nombre de lancers de l'aiguille et par m le nombre de succès, c'est-à-dire les cas où l'aiguille coupe l'une des lignes parallèles. Alors la fréquence

$$F_n = \frac{n}{m}.$$

Plusieurs personnes se sont donné la peine de vérifier expérimentalement que

$$F_n \approx p = \frac{2\ell}{h\pi}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

À titre d'exemple, citons R. Wolf, un astronome de Zurich qui a fait $n = 5\ 000$ essais avec un aiguille de $\ell = 36$ mm et $h = 45$ mm, entre 1849 et 1853. Il a obtenu $m = 2\ 532$ succès, ce qui donne

$$F_n = \frac{2\ 532}{5\ 000} = 0,506\ 400 \quad \text{alors que} \quad p = \frac{72}{45\pi} \approx 0,509\ 300.$$

2) - La problème de Buffon a fourni une méthode pour obtenir une valeur approximative pour le nombre π. En effet, puisque

$$p = \frac{2\ell}{h\pi} \approx F_n = \frac{m}{n}, \quad \text{cela donne} \quad \pi \approx \frac{2\ell n}{hm}.$$

Ainsi, par exemple, l'expérience de R. Wolf donne $\pi \approx 3,159\ 600$.

De nos jours, la présence d'ordinateur et de méthodes numériques puissantes permet de calculer π avec une extrême précision. Aussi la méthode de Buffon a perdu un peu d'intérêt. Toutefois, l'idée fondamentale de cette méthode demeure très importante, à savoir qu'on peut évaluer une quantité de la façon suivante.

• Donner à cette quantité une interprétation précise dans le cadre d'un modèle probabiliste.

• Effectuer dans le cadre du modèle trouvé, un très grand nombre d'expériences et ainsi trouver la quantité cherchée avec une certaine approximation.

Cet idée est à la base de toutes *méthodes dites de Monte Carlo* (méthodes de calcul avec des nombres aléatoires). Aujourd'hui l'exécution d'un grand nombre d'essais est évitée par l'utilisation des tables de *nombres aléatoires* (les valeurs d'une variable aléatoire). De plus, les ordinateurs possèdent de bons générateurs de nombres aléatoires.

106. La densité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y} & \text{si } 0 < x < \infty \text{ et } 0 < y < \infty \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver

i) $P(X > 1,\ Y < 1)$.

ii) $P(X < Y)$.

Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

iii) $P(X < a)$, où a est une constante.

Solution. i) On trouve

$$\begin{aligned}
P(X>1,\ Y<1) &= \int_0^1 \int_1^\infty 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 2e^{-2y}\left(-e^{-x}\Big|_1^\infty\right)\,dy \\
&= e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}\,dy \\
&= e^{-1}(1-e^{-2}) \\
&\approx 0,369(1-0,135) \\
&= 0,318.
\end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned}
P(X<Y) &= \iint_{(x,y):x<y} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^y 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}(1-e^{-y})\,dy \\
&= \int_0^\infty 2e^{-2y}\,dy - \int_0^\infty 2e^{-3y}\,dy \\
&= 1-\frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

iii) On trouve

$$\begin{aligned}
P(X<a) &= \int_0^a \int_0^\infty 2e^{-2y}e^{-x}\,dy\,dx \\
&= \int_0^a e^{-x}\,dx \\
&= 1-e^{-a}.
\end{aligned}$$

107. La densité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y-3xy^2) & \text{si } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

i) Trouver les densités marginales des variables aléatoires *X* et *Y*.

ii) Est-ce que les variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes ?

Solution. i) En intégrant la densité conjointe par rapport à *y*, on trouve la densité marginale de *X*, donc

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \\ &= \int_0^1 2(x+y-3xy^2)\,dy \\ &= (2xy+y^2-2xy^3)\big|_0^1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pour la variable aléatoire Y, on trouve

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \\ &= \int_0^1 2(x+y-3xy^2)\,dx \\ &= (x^2+2xy-3x^2y^2)\big|_0^1 \\ &= 1+2y-3y^2. \end{aligned}$$

Donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1+2y-3y^2 & \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ii) Comme

$$f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y),$$

les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

108. La densité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver les densités marginales des variables aléatoires *X* et *Y*.

i) Est-ce que les variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes ?

Solution. i) En intégrant la densité conjointe par rapport à *y*, on trouve la densité marginale de *X*, donc

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \\ &= 1_{(0,\infty)}(x) \int_x^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda y}\,dy \\ &= \lambda e^{-\lambda x} 1_{(0,\infty)}(x). \end{aligned}$$

Procédant de la même manière pour Y, on trouve

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \\ &= 1_{(0,\infty)}(y) \int_0^{y} \lambda^2 e^{-\lambda y}\,dx \\ &= \lambda^2 y e^{-\lambda y} 1_{(0,\infty)}(y). \end{aligned}$$

ii) Comme

$$f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x) f_Y(y),$$

les variables aléatoires *X* et *Y* ne sont pas indépendantes.

109. La densité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2x} & \text{si } 0 < y < x \text{ et } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver les densités marginales des variables aléatoires *X* et *Y*.

i) Est-ce que les variables aléatoires *X* et *Y* sont indépendantes ?

ii) Trouver *Cov(X, Y)* et *Corr(X, Y)*.

Solution. i) En intégrant la densité conjointe par rapport à y, on trouve la densité marginale de X, donc

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{2x}\,dy \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donc

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Procédant de la même manière pour Y, on trouve

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^2 \frac{1}{2x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\ln x\Big|_y^2 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln y), \end{aligned}$$

donc

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln y) & \text{si } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ii) Comme

$$f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\ln 2 - \ln y) & \text{si } 0 < x < 2 \text{ et } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

on trouve

$$f_{(X,Y)}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y),$$

et les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

iii) On trouve

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$E(X) = \int_0^2 \frac{x}{2}\,dx = 1,$$

et

$$E(X^2) = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \frac{4}{3},$$

par conséquent, $Var(X) = \frac{1}{3}$.

De même

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^2 \frac{y}{2}(\ln 2 - \ln y)\,dy \\
&= \frac{\ln 2}{2} \times \frac{y^2}{2}\Big|_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 y \ln y\,dy \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\ln 2} z e^{2z}\,dz \\
&= \ln 2 - \ln 2 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $z = \ln y$ et après en intégrant par parties la dernière intégrale.

En procédant de la même manière, on trouve

$$E(Y^2) = \int_0^2 \frac{y^2}{2}(\ln 2 - \ln y)\,dy = \frac{4}{9}.$$

Par conséquent

$$Var(Y) = \frac{4}{9} - \frac{1}{4} = \frac{7}{36}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Comme

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_0^2 \int_0^x xy\frac{1}{2x}\,dy\,dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x \frac{y}{2}\,dy\,dx \\ &= \int_0^2 \frac{x^2}{4}\,dx \\ &= \left.\frac{x^3}{12}\right|_0^2 \\ &= \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

on trouve

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{2}{3} - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Enfin

$$\begin{aligned} Cor(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{7}{36}}} \\ &= 0,655. \end{aligned}$$

110. La densité conjointe du couple aléatoire (X, Y) est donnée par

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Solution. Trouvons d'abord les densités marginales des variables aléatoires X et Y. On a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^\infty f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \\ &= \int_0^\infty e^{-(x+y)}\,dy \\ &= e^{-x}\int_0^\infty e^{-y}\,dy \\ &= e^{-x}\left(-e^{-y}\Big|_0^\infty\right) \\ &= e^{-x}, \end{aligned}$$

donc

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

De même, on trouve que

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Donc

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y), \quad \text{pour} \quad x > 0,\ y > 0,$$

et les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

111. La densité conjointe du couple aléatoire (X, Y) est donnée par

$$f_{X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(1 + x^3y - xy^3\right) & \text{si } -1 \le x \le 1 \text{ et } -1 \le y \le 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver les densités marginales des variables aléatoires X et Y.

i) Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?

Solution. i) On a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{4}\left(1 + x^3y - xy^3\right)\,dy \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(y + \frac{1}{2}x^3y^2 - \frac{1}{4}xy^4\right)\Big|_{-1}^1\right) \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\left(1 + x^3 y - x y^3\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\left(\left(x + \frac{1}{4}x^4 y - \frac{1}{2}x^2 y^3\right)\Big|_{-1}^{1}\right) \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

ii) Comme $f_{(X,Y)}(x, y) \neq f_x(x) f_Y(y)$, les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

112. Soit

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{si } 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver

i) la valeur de c telle que $f_{(X,Y)}$ est la densité conjointe du couple aléatoire (X, Y).

ii) les densités marginales des variables aléatoires X et Y.

iii) la fonction de répartition conjointe du couple aléatoire (X, Y).

Solution. i) Il faut que $f \geq 0$ et $1 = \iint_{\mathbf{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\, dy$. Or

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y)\, dx\, dy &= c \int_0^1 \int_0^1 (x+y)\, dx\, dy \\ &= c \int_0^1 \left(y + \frac{1}{2}\right) 1_{(0,1)}(y)\, dy \\ &= c, \end{aligned}$$

donc $c = 1$. Puisque $c > 0$, il s'ensuit que $f_{(X,Y)} \geq 0$, ce qui montre que la fonction $f_{(X,Y)}$ est une densité.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ii) On a

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \\ &= 1_{(0,1)}(x) \int_0^1 (x+y)\,dy \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right) 1_{(0,1)}(x). \end{aligned}$$

De manière similaire, on trouve la densité marginale de Y,

$$f_Y(y) = \left(y+\frac{1}{2}\right) 1_{(0,1)}(y).$$

iii) Si $x < 0$ ou $y < 0$, on a

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u,v)\,dv\,du = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} 0\,dv\,du = 0.$$

Si $0 \leq x < 1$ et $0 \leq y < 1$, on a

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} 0\,dv\,du + \int_0^x \int_0^y (u+v)\,dv\,du \\ &= \frac{xy}{2}(x+y). \end{aligned}$$

De même, si $0 \leq x < 1$ et $y \geq 1$, on obtient

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} 0\,dv\,du + \int_0^x \int_0^1 (u+v)\,dv\,du \\ &\quad + \int_0^x \int_1^y 0\,dv\,du \\ &= \frac{1}{2}(x^2+x). \end{aligned}$$

Par symétrie, on déduit que si $x \geq 1$ et $0 \leq y < 1$,

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2}(y^2+y).$$

Enfin, si $x \geq 1$ et $y \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} F_{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} 0\,dv\,du + \int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(u+v)\,dv\,du \\ &\qquad + \int_{1}^{x}\int_{1}^{y} 0\,dv\,du \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ \frac{xy}{2}(x+y) & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ \frac{1}{2}(x^2+x) & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ et } y \geq 1 \\ \frac{1}{2}(y^2+y) & \text{si } x \geq 1 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \text{ et } y \geq 1 \end{cases}$$

113. Soit

$$f_{(X,Y)}(x,y) = ce^{-(x^2-xy+4y^2)/2}, \ -\infty < x, \ y < \infty.$$

Trouver

i) la valeur de c telle que $f_{(X,Y)}$ est la densité conjointe du couple aléatoire (X, Y).

ii) les densités marginales des variables aléatoires X et Y.

Solution. i) Il faut que $f \geq 0$ et $1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$. Or de l'identité

$$x^2 - xy + 4y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}y^2,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy \\
&= c\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{15}{8}y^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-\frac{y}{2})^2}\,dx\right)dy \\
&= c\sqrt{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{15}{8}y^2}\,dy \\
&= 2\pi c\sqrt{\frac{4}{15}} \\
&= 4\pi c\frac{1}{\sqrt{15}}.
\end{aligned}$$

donc $f_{(X,Y)}$ est une densité si $c = \frac{\sqrt{15}}{4\pi}$.

ii) La densité marginale $f_Y(y)$ de la variable aléatoire Y est donnée par

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx \\
&= \frac{\sqrt{15}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2-xy+4y^2)/2}\,dx \\
&= \frac{\sqrt{15}}{4\pi}\sqrt{2\pi}e^{-\frac{15}{8}y^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\times\frac{4}{15}}}e^{-\frac{15}{8}y^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent $Y \sim N(0, \frac{4}{15})$.

On a aussi

$$x^2 - xy + 4y^2 = \left(2y - \frac{x}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}x^2,$$

et en procédant de la même manière que précédemment, on trouve que la densité marginale $f_X(x)$ de X est donnée par

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2-xy+4y^2)/2}\,dy \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}\left(2y-\frac{x}{4}\right)^2-\frac{15}{32}x^2}\,dy \\ &= \frac{\sqrt{15}}{4\pi}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2\pi}e^{-\frac{15}{32}x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\times\frac{16}{15}}}e^{-\frac{15}{32}x^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent $X \sim N(0, \frac{16}{15})$.

114. Un point de coordonnées (X, Y) est choisi au hasard dans le rectangle borné par les abscisses $x = a$, $x = b$ et les ordonnées $y = c$, $y = d$, $(b > a, d > c)$. Trouver la densité et la fonction de répartition du couple aléatoire (X, Y).

Solution. Soit λ la mesure de Lebesque sur $\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} P(X \le x, Y \le y) &= \frac{\lambda((-\infty,x]\cap[a,b]\times(-\infty,y]\cap[c,d])}{(b-a)(d-c)} \\ &= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{(b-a)(d-c)}1_{[a,b]\times[c,d]}(u,v)\,dv\,du. \end{aligned}$$

Donc la densité du couple aléatoire (X, Y) est donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{si } a \le x \le b \text{ et } c \le y \le d \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

La fonction de répartition F du couple aléatoire (X, Y) est donnée par

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv.$$

Donc si $x < a$ ou $y < c$, $F(x,y) = 0$. Si $a \le x < b$ et $c \le y < d$,

$$F(x,y) = \int_a^x\int_c^y \frac{1}{(b-a)(d-c)}\,du\,dv = \frac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Si a $\leq x < b$ et $y \geq d$, on trouve

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{c} 0\,du\,dv + \int_{a}^{x}\int_{c}^{d} \frac{1}{(b-a)(d-c)}\,du\,dv \\ &\quad + \int_{a}^{x}\int_{d}^{y} 0\,du\,dv \\ &= \int_{a}^{x} \frac{d-c}{(b-a)(d-c)}\,du \\ &= \frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Si $x \geq b$ et $c \leq y < d$, par symétrie, on trouve

$$F(x,y) = \int_{a}^{b}\int_{c}^{y} \frac{1}{(b-a)(d-c)}\,du\,dv = \frac{y-c}{d-c}.$$

Enfin si $x \geq b$ et $y \geq d$, on a

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{c} 0\,du\,dv + \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} \frac{1}{(b-a)(d-c)}\,du\,dv \\ &\quad + \int_{b}^{\infty}\int_{d}^{\infty} 0\,du\,dv \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \text{ ou } y < c \\ \frac{(x-a)(y-c)}{(b-a)(d-c)} & \text{si } a \leq x < b \text{ et } c \leq y < d \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x < b \text{ et } y \geq d \\ \frac{y-c}{d-c} & \text{si } x \geq b \text{ et } c \leq y < d \\ 1 & \text{si } x \geq b \text{ et } y \geq d \end{cases}$$

115. La fonction de répartition conjointe du couple aléatoire (X,Y) est

donnée par

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ xy & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \text{ et } y \geq 1 \\ y & \text{si } x \geq 1 \text{ et } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \text{ et } y \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Solution. Trouvons d'abord les fonctions de répartition marginales de X et de Y. Rappelons que $F_X(x) = F_{(X,Y)}(x, \infty)$, donc on doit considérer $y \geq 1$. Si $x < 0$, et $y \geq 1$, on a $F_X(x) = 0$. Si $0 \leq x < 1$, et $y \geq 1$, alors $F_X(x) = x$. Enfin si $x \geq 1$ et $y \geq 1$, $F_X(x) = 1$, par conséquent

$$F_X(x) = F_{(X,Y)}(x, \infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

et donc $X \sim U(0,1)$.

De la même façon, on trouve que

$$F_Y(y) = F_{(X,Y)}(\infty, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y < 1 \\ 1 & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

et donc $Y \sim U(0,1)$.

Par conséquent, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$F_{(X,Y)}(x,y) = F_x(x)F_Y(y),$$

et les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Remarque. Le couple aléatoire de ce problème est un cas particulier du couple aléatoire du problème 114, correspondant à $a = c = 0$ et $b = d = 1$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

116. La densité conjointe du couple aléatoire *(X, Y)* est donnée par

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & \text{si } 0 < x < \infty \text{ et } 0 < y < \infty \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Trouver la densité de la variable aléatoire X / Y.

Solution. Posons $V = X / Y$ et cherchons d'abord la fonction de répartition de V. Pour $a > 0$,

$$\begin{aligned} F_V(a) &= P\left(\frac{X}{Y} \leq a\right) \\ &= \iint_{x/y \leq a} e^{-(x+y)}\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^{ay} e^{-(x+y)}\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty (1 - e^{-ay}) e^{-y}\, dy \\ &= -e^{-y}\Big|_0^\infty + \frac{e^{-y(a+1)}}{a+1}\Bigg|_0^\infty \\ &= 1 - \frac{1}{a+1}. \end{aligned}$$

On obtient la densité de V par dérivation de ce dernier résultat, ce qui donne

$$f_V(a) = \frac{1}{(a+1)^2}, \quad 0 < a < \infty.$$

117. Soit $a \in (0,1)$. Montrer que

$$\phi(t) = \frac{1-a}{1-ae^{it}}, \ t \in \mathbb{R},$$

est une fonction caractéristique.

Solution. Puisque $a \in (0,1)$, on a $|ae^{it}| < 1$. Donc

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \frac{1-a}{1-ae^{it}} \\
&= (1-a)\sum_{k\geq 0} a^k e^{itk} \\
&= \sum_{k\geq 0}(1-a)a^k e^{itk} \\
&= E(e^{itX}),
\end{aligned}$$

où X est une variable aléatoire telle que

$$P(X=k) = p_k = (1-a)a^k,\ k \geq 0.$$

La loi de X est bien définie puisque $p_k \geq 0$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0} p_k &= (1-a)\sum_{k\geq 0} a^k \\
&= (1-a)\frac{1}{1-a} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Donc ϕ est bien une fonction caractéristique.

118. Soit $X \sim U(-n, n)$. Trouver

i) la densité de la variable aléatoire X.

i) la fonction de répartition de X.

ii) la fonction caractéristique de X.

Solution. i) La densité de X est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{si } -n < x < n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ii) On a

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -n \\ \frac{x+n}{2n} & \text{si } -n \leq x < n \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$$

iii) On trouve

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} e^{itx}\,dx \\ &= \frac{1}{2int}e^{itx}\Big|_{-n}^{n} \\ &= \frac{1}{2int}\left(e^{itn}-e^{-itn}\right) \\ &= \frac{\cos tn + i\sin tn - (\cos tn - i\sin tn)}{2itn} \\ &= \frac{\sin tn}{tn}.\end{aligned}$$

119. Soit X une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|},\ -\infty < x < \infty.$$

Trouver sa fonction caractéristique.

Solution. La variable aléatoire X suit une loi de Laplace de paramètre $\lambda = 1$, (voir problème 83). Puisque $\phi(t) = E(e^{itX})$, on a

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E(e^{itX}) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-|x|}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+it)}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{x(-1+it)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it}+\frac{1}{1-it}\right) \\ &= \frac{1}{1+t^2}.\end{aligned}$$

120. Trouver la fonction caractéristique et les moments de la variable aléatoire X dont la densité est

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Solution. Puisque $\emptyset(t) = E(e^{itX})$, on a

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \int_0^\infty e^{itx}e^{-x}\,dx \\ &= \left.\frac{e^{x(it-1)}}{it-1}\right|_0^\infty \\ &= 0 - \frac{1}{it-1} \\ &= \frac{1}{1-it}.\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{1-it} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(it)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\frac{(it)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}E(X^n),\end{aligned}$$

donc

$$E(X^n) = n!, \quad n \geq 1.$$

121. Déterminer les moments d'une variable aléatoire X dont la fonction caractéristique est donnée par $\emptyset(t) = (1 + t^2)^{-1}$, $t \in \mathbf{R}$.

Solution. Notons d'abord que la variable aléatoire X obéit à une loi

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

de Laplace de paramètre $\lambda = 1$, (voir problème 119). On a

$$\begin{aligned}\phi(t) &= (1+t^2)^{-1}\\ &= \frac{1}{1-(it)^2}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(it)^{2k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(2k)!\frac{(it)^{2k}}{(2k)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^{2k}}{(2k)!}E(X^{2k})\end{aligned}$$

donc pour $n \geq 1$,

$$E(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k-1 \\ (2k)! & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

122. Soit ϕ une fonction caractéristique. Montrer que

i)

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\phi(t_j - t_k)a_j\overline{a_k} \;\; \geq \;\; 0, \tag{5.1}$$

pour tous nombres complexes, $a_1, \ldots, a_n$, pour tous nombres réels $t_1, \ldots, t_n$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\phi(0) \geq 0$.

iii) $\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$.

iv) $|\phi(t)| \leq \phi(0)$.

Solution. i) Posons $V = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{it_jX}$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq E(V\overline{V})\\ &= E\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_j\overline{a_k}e^{iX(t_j-t_k)}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\phi(t_j-t_k)a_j\overline{a_k}.\end{aligned}$$

On dit dans ce cas que la fonction ϕ est définie non négative.

ii) Prenons dans la formule (5.1) $n = 1$, $a_1 = 1$ et $t_1 = 0$. On trouve $\phi(0) \geq 0$.

iii) Prenons dans la formule (5.1) $n = 2$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$ et $a_1 = a_2 = 1$. On a

$$2\phi(0) + \phi(t) + \phi(-t) \geq 0.$$

Si on pose $\phi(t) = a + ib$ et $\phi(-t) = c + id$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on obtient $d = -b$, car $2\phi(0) + \phi(t) + \phi(-t) \in \mathbb{R}$. Choisissant maintenant $n = 2$, $t_1 = 0$, $t_2 = t$, $a_1 = 1$ et $a_2 = i$, on trouve

$$2\phi(0) + i(\phi(t) - \phi(-t)) \geq 0.$$

Donc $a = c$. Alors $\phi(-t) = a - ib = \overline{\phi(t)}$.

iv) Prenons dans la formule (5.1) $n = 2$, $a_1 = \phi(t)$, $a_2 = -|\phi(t)|$, $t_1 = 0$ et $t_2 = t$. On obtient

$$\phi(0)\phi(t)\overline{\phi(t)} - \phi(-t)\phi(t)|\phi(t)| - \phi(t)|\phi(t)|\overline{\phi(t)} + \phi(0)|\phi(t)|^2 \geq 0,$$

ou

$$2\phi(0)|\phi(t)|^2 - 2|\phi(t)|^3 = 2|\phi(t)|^2(\phi(0) - |\phi(t)|) \geq 0,$$

car d'après iii), $\phi(-t) = \overline{\phi(t)}$ et parce que $\phi(t)\overline{\phi(t)} = |\phi(t)|^2$. Si $|\phi(t)| \neq 0$, alors en simplifiant par $2|\phi(t)|^2$, on obtient

$$\phi(0) \geq |\phi(t)|.$$

Si $|\phi(t)| = 0$, alors parce que $\phi(0) \geq 0$, on a $\phi(0) \geq |\phi(t)|$, ce qui complète la preuve.

123. Soit $\phi(t)$ une fonction caractéristique. Est-ce que $|\phi(t)|^2$ est aussi une fonction caractéristique?

Solution. Oui. En effet, soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et telles que $\phi(t) = \phi_{X_1}(t) = \phi_{X_2}(t)$. Alors, tenant compte de l'indépendance,

$$\phi_{X_1 - X_2}(t) = \phi(t)\phi(-t) = \phi(t)\overline{\phi(t)} = |\phi(t)|^2,$$

voir problème 122 iii).

124. Trouver la densité de la variable aléatoire dont la fonction caractéristique est donnée par

$$\phi(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}$$

Solution. Puisque ϕ est intégrable, la densité f de la variable aléatoire associée est donnée par la formule d'inversion suivante

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi(t) e^{-itx}\, dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} (1 - |t|) e^{-itx}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-1}^{0} (1 + t) e^{-itx}\, dt + \int_{0}^{1} (1 - t) e^{-itx}\, dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{1}^{0} -(1 - t) e^{itx}\, dt + \int_{0}^{1} (1 - t) e^{-itx}\, dt \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{1} (1 - t) \left(e^{-itx} + e^{itx} \right)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} (1 - t) \cos tx\, dt, \end{aligned}$$

car $e^{itx} = \cos tx + i \sin tx$ et $e^{-itx} = \cos tx - i \sin tx$, donc $e^{-itx} + e^{itx} = 2 \cos tx$. Intégrons par parties la dernière intégrale, en prenant $u = 1 - t$ et $dv = \cos tx dt$. Alors $du = -dt$ et $v = \frac{\sin tx}{x}$ et on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{0}^{1} (1 - t) \cos tx\, dt &= \frac{1}{\pi} (1 - t) \frac{\sin tx}{x} \Big|_{0}^{1} + \frac{1}{\pi x} \int_{0}^{1} \sin tx\, dt \\ &= \frac{-\cos tx}{\pi x^2} \Big|_{0}^{1} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{1}{\pi x^2} (1 - \cos x) \quad \text{pour} \quad -\infty < x < \infty.$$

125. Trouver la densité de la variable aléatoire dont la fonction caractéristique est donnée par

$$\phi(t) = e^{-|t|}$$

Solution. Puisque ϕ est intégrable, la densité f de la variable aléatoire associée est donnée par la formule d'inversion suivante

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \phi(t)e^{-itx}\,dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx-|t|}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-t(1+ix)}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1-ix}+\frac{1}{1+ix}\right) \\ &= \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \text{pour} \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Par conséquent $\phi(t) = e^{-|t|}$ est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire $X \sim C(0,1)$.

126. Trouver la fonction caractéristique de la variable aléatoire

i) $X \sim B(n,p)$.

ii) $X \sim P(\lambda)$.

iii) $X \sim G(p)$.

iv) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

v) $X \sim Gamma(\alpha,\beta)$.

vi) $X \sim \chi^2(r)$.

vii) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

viii) $X \sim U(0,1)$.

ix) $X \sim C(\mu,\sigma)$.

Solution. i) On a

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{itk} \\ &= (pe^{it} + 1 - p)^n.\end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E(e^{itX}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k e^{itk}}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} \\ &= e^{\lambda(e^{it}-1)}.\end{aligned}$$

iii) On a

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} e^{itk} \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} p(1-p)^h e^{it(h+1)} \\ &= pe^{it} \sum_{h=0}^{\infty} ((1-p)e^{it})^h \\ &= pe^{it} \frac{1}{1-(1-p)e^{it}}.\end{aligned}$$

iv) On a

$$\phi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx.$$

Posons $u = \frac{x-\mu}{\sigma} - it\sigma$, $\sigma du = dx$, alors $u^2 = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - t^2\sigma^2 - 2i(x-\mu)t = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - 2itx + 2it\mu - t^2\sigma^2$. Par conséquent,

$$\frac{u^2}{2} = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - itx + i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Donc

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du \\ &= e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}},\end{aligned}$$

car $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du = \sqrt{2\pi}$.

Par conséquent

$$\phi(t) = e^{i\mu t - \frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

Dans le cas particulier de la variable aléatoire normale centrée réduite, $Z \sim N(0,1)$, c'est-à-dire, pour $\mu = 0,\ \sigma = 1$, on trouve

$$\phi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

v) Rappelons d'abord que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \quad \alpha > 0,$$

et en substituant $\beta y = x$, on obtient

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-\beta y}\, dy.$$

La dernière égalité reste vraie même si β est un nombre complexe $\beta = a + ib$, avec $b > 0$. On a

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} e^{itx}\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\frac{1}{\beta} - it)x}\, dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(\frac{1}{\beta} - it)^\alpha} e^{-y}\, dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{\left(\frac{1}{\beta} - it\right)^\alpha} \\ &= \frac{1}{(1 - i\beta t)^\alpha}.\end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

vi) Parce que si $X \sim \chi^2(r)$ alors $X \sim Gamma(\frac{r}{2}, 2)$, on trouve de v), en faisant $\alpha = \frac{r}{2}$ et $\beta = 2$,

$$\phi(t) = \frac{1}{(1-2it)^{r/2}} = (1-2it)^{-r/2}.$$

vii) On trouve

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} e^{itx}\, dx \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{x(it-\lambda)}\, dx \\
&= \left. \frac{\lambda}{it-\lambda} e^{x(it-\lambda)} \right|_0^\infty \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - it} \\
&= \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

viii) On a

$$\phi(t) = \int_0^1 e^{itx}\, dx = \left. \frac{1}{it} e^{itx} \right|_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it}.$$

ix) Trouvons d'abord la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Y \sim C(0,1)$. Alors la densité est

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+y^2},$$

et par conséquent la fonction caractéristique est donnée par

$$\phi_Y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} \frac{1}{1+y^2}\, dy.$$

Pour trouver $\phi_Y(t)$, considérons d'abord la densité

$$f_1(y) = \frac{1}{2} e^{-|y|}.$$

Il est facile à vérifier que $f_1(y)$ est une densité. La fonction caractéristique correspondante est

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ity}e^{-|y|}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\cos ty + i\sin ty)e^{-|y|}\,dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}(\cos ty + i\sin ty)e^{y}\,dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}(\cos ty + i\sin ty)e^{-y}\,dy \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\infty}^{0}(\cos ty - i\sin ty)e^{-y}\,dy \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}(\cos ty + i\sin ty)e^{-y}\,dy \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-y}\cos ty\,dy.
\end{aligned}$$

Une intégration par parties, nous donne

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-y}\cos ty\,dy &= -e^{-y}\cos ty\Big|_0^\infty - t\int_0^\infty e^{-y}\sin ty\,dy \\
&= 1 - t\int_0^\infty e^{-y}\sin ty\,dy.
\end{aligned}$$

De manière analogue, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-y}\sin ty\,dy &= -e^{-y}\sin ty\Big|_0^\infty + t\int_0^\infty e^{-y}\cos ty\,dy \\
&= t\int_0^\infty e^{-y}\cos ty\,dy.
\end{aligned}$$

On a obtenu

$$\int_0^\infty e^{-y}\cos ty\,dy = 1 - t^2\int_0^\infty e^{-y}\cos ty\,dy,$$

donc

$$\phi_1(t) = 1 - t^2\phi_1(t).$$

Par conséquent, on a

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$\phi_1(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Cette fonction caractéristique est absolument intégrable sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$, et on trouve la fonction de densité correspondante par la formule d'inversion, c'est-à-dire

$$f_2(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ity}}{1+t^2}\, dt.$$

Comme la fonction caractéristique détermine de façon unique la fonction de densité, on trouve

$$e^{-|y|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ity}}{1+t^2}\, dt.$$

En changeant t en $-t$, on obtient

$$e^{-|y|} = -\frac{1}{\pi} \int_{\infty}^{-\infty} \frac{e^{ity}}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ity}}{1+t^2}\, dt.$$

Maintenant en changeant les rôles de t et de y, on trouve

$$e^{-|t|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ity}}{1+y^2}\, dy,$$

et

$$\phi_Y(t) = e^{-|t|}.$$

Pour trouver la fonction caractéristique de la variable aléatoire $X \sim C(\mu, \sigma)$, il faut faire la transformation $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$, donc $X = \sigma Y + \mu$ et

$$\phi_X(t) = \phi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{it\mu}\phi_Y(\sigma t) = e^{it\mu - \sigma|t|}.$$

Notons que la fonction $\phi_X(t)$ n'est pas différentiable au point $t = 0$, donc tous les moments d'une distribution de Cauchy n'existent pas.

On peut trouver d'une autre manière la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Y \sim C(0,1)$. D'après le problème 125,

$$\phi_Y(t) = e^{-|t|},$$

car la fonction caractéristique détermine de façon unique la densité correspondante.

Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

127. Soit $X_1,\ X_2\ \ldots, X_k,\ k$ variables aléatoires indépendantes. Posons $X = X_1 + \cdots + X_k$. Montrer que

i) si $X_j \sim B(n_j, p),\ 1 \le j \le k$, alors $X \sim B(N, p)$, où $N = n_1 + \cdots + n_k$.

ii) si $X_j \sim P(\lambda_j),\ 1 \le j \le k$, alors $X \sim P(\lambda)$, où $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

iii) si $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2),\ 1 \le j \le k$, alors $X \sim N(\mu, \sigma)$, où $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k$ et $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_k^2$.

iv) si $X_j \sim N(\mu, \sigma),\ 1 \le j \le k$, alors $\overline{X} = \frac{X}{k} \sim N(\mu,\ \frac{\sigma^2}{k})$.

v) si $X_j \sim Gamma(\alpha_j, \beta),\ 1 \le j \le k$, alors $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$, où $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$.

vi) si $X_j \sim \chi^2(r_j),\ 1 \le j \le k$, alors $X \sim \chi^2(r)$, où $r = r_1 + \cdots + r_k$.

vii) si $X_j \sim \mathcal{E}(\lambda),\ 1 \le j \le k$, alors $X \sim Gamma(k, \frac{1}{\lambda})$.

viii) si $X_j \sim C(\mu_j, \sigma_j),\ 1 \le j \le k$, alors $X \sim C(\mu, \sigma)$, où $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_k$ et $\sigma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_k$.

Solution. i) On a

$$\phi_X(t) = \prod_{j=1}^{n} \phi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{k} (pe^{it} + 1 - p)^{n_j} = (pe^{it} + 1 - p)^N,$$

donc $X \sim B(n_1 + \cdots + n_k, p)$.

ii) On a

$$E(e^{itX}) = \prod_{j=1}^{k} E(e^{itX_j}) = \prod_{j=1}^{k} e^{\lambda_j(e^{it}-1)} = e^{\lambda(e^{it}-1)},$$

donc $X \sim P(\lambda_1 + \cdots + \lambda_k)$.

iii) On a

$$\begin{aligned} E(e^{itX}) &= \prod_{j=1}^{k} \left(e^{it\mu_j - \frac{t^2\sigma_j^2}{2}} \right) \\ &= e^{it(\mu_1+\cdots+\mu_k) - \frac{t^2}{2}(\sigma_1^2+\cdots+\sigma_k^2)}, \end{aligned}$$

donc $X \sim N(\mu_1 + \cdots + \mu_k,\ \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_k^2)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

iv) D'abord d'après iii) $X \sim N(k\mu, k\sigma^2)$, donc $\overline{X} = \frac{X}{k} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{k})$, car $E(X/k) = E(X)/k$ et $Var(X/k) = Var(X)/k^2$.

v) On a

$$\phi_X(t) = \prod_{j=1}^{k} \phi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha_j}} = \frac{1}{(1-\beta t)^{\alpha}},$$

donc $X \sim Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \beta)$.

vi) On a

$$\phi_X(t) = \prod_{j=1}^{k} \phi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{k} (1-2it)^{-\frac{r_j}{2}} = (1-2it)^{-\frac{r}{2}},$$

où $r = r_1 + \cdots + r_k$. Donc $X \sim \chi^2(r_1 + \cdots + r_k)$.

vii) On a

$$\phi_X(t) = \prod_{j=1}^{k} \phi_{X_j}(t) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-k},$$

donc $X \sim Gamma(k, \frac{1}{\lambda})$.

viii) On a

$$\begin{aligned} \phi_X(t) &= \prod_{j=1}^{k} \phi_{X_j}(t) \\ &= \prod_{j=1}^{k} e^{it\mu_j - |t|\sigma_j} \\ &= e^{it(\mu_1 + \cdots + \mu_k) - |t|(\sigma_1 + \cdots + \sigma_k)}, \end{aligned}$$

donc $X \sim C(\mu_1 + \cdots + \mu_k, \sigma_1 + \cdots + \sigma_k)$.

128. Soit $X_n \sim B(n,p)$. Posons

$$Y_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} Y_n \sim N(0,1).$$

Ce résultat est connu sous le nom du *Théorème de De Moivre-Laplace.* On dit aussi que la variable aléatoire Y_n est *asymptotiquement normale centrée réduite.*

Solution. Soit $\phi Y_n(t)$ la fonction caractéristique de la variable aléatoire Y_n. Comme la fonction caractéristique détermine de façon unique la loi de probabilité d'une variable aléatoire, il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{Y_n}(t) = e^{-t^2/2}.$$

D'abord, la fonction caractéristique de la variable aléatoire X_n est

$$\phi_{X_n}(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n.$$

Comme

$$Y_n = \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}} X_n - \frac{np}{\sqrt{np(1-p)}},$$

on a (voir remarque 4, dans 5.1.7)

$$\begin{aligned}\phi_{Y_n}(t) &= e^{-\frac{npit}{\sqrt{np(1-p)}}} \left(1 - p + pe^{\frac{it}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^n \\ &= \left((1-p)e^{-\frac{pit}{\sqrt{np(1-p)}}} + pe^{\frac{(1-p)it}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^n.\end{aligned}$$

Notons $L = \lim_{n\to\infty} \phi_{Y_n}(t)$, alors il faut montrer que

$$L = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Pour simplifier les calculs, posons $a = \frac{it}{\sqrt{p(1-p)}}$. Considérons

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left((1-p)e^{-\frac{ap}{\sqrt{n}}} + pe^{\frac{a(1-p)}{\sqrt{n}}}\right),$$

qui est de la forme $\infty \cdot 0$. Nous allons l'écrire sous la forme $\frac{0}{0}$ pour appliquer la règle de L'Hopital (voir exemple 3, dans 5.1.9). Notons qu'une fonction $h(n)$ définie seulement sur l'ensemble des nombres naturels ne peut évidemment être dérivée. Cependant, si on considère la fonction h définie sur un intervalle $[a,\ \infty)$, et si $\lim_{x\to\infty} h(x) = c$, alors $\lim_{n\to\infty} h(n) = c$. On doit donc considérer la limite

$$\lim_{x\to\infty} x \log\left((1-p)e^{-\frac{ap}{\sqrt{x}}} + pe^{\frac{a(1-p)}{\sqrt{x}}}\right).$$

Dans les égalités suivantes on applique deux fois la règle de L'Hopital. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \log L &= \lim_{x\to\infty} x \log\left((1-p)e^{-\frac{ap}{\sqrt{x}}} + pe^{\frac{a(1-p)}{\sqrt{x}}}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log\left((1-p)e^{-\frac{ap}{\sqrt{x}}} + pe^{\frac{a(1-p)}{\sqrt{x}}}\right)}{1/x}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} -x^2\left(\frac{(1-p)e^{-\frac{ap}{\sqrt{x}}}\left(\frac{ap}{2x^{3/2}}\right) + pe^{\frac{a(1-p)}{\sqrt{x}}}\left(-\frac{a(1-p)}{2x^{3/2}}\right)}{(1-p)e^{-\frac{ap}{\sqrt{x}}} + pe^{\frac{a(1-p)}{\sqrt{x}}}}\right) \\
&= \frac{ap(1-p)}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{-e^{-\frac{ap}{\sqrt{x}}} + e^{\frac{a(1-p)}{\sqrt{x}}}}{1/\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{ap(1-p)}{2} \\
&\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\left(\frac{-ape^{-\frac{ap}{\sqrt{x}}}}{2x^{3/2}} - \frac{a(1-p)e^{\frac{a(1-p)}{\sqrt{x}}}}{2x^{3/2}}\right)\left(-2n^{3/2}\right)\right) \\
&= \frac{a^2p(1-p)}{2}\lim_{x\to\infty}\left(pe^{-\frac{ap}{\sqrt{x}}} + (1-p)e^{\frac{a(1-p)}{\sqrt{x}}}\right) \\
&= \frac{a^2p(1-p)}{2} \\
&= \frac{\left(\frac{it}{\sqrt{p(1-p)}}\right)^2 p(1-p)}{2} \\
&= -\frac{t^2}{2},
\end{aligned}$$

et donc,

$$L = \lim_{n\to\infty} \phi_{Y_n}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Remarque. Comme la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine de façon unique sa fonction de répartition on obtient le résultat suivant. Soit $y_1, y_2 \in \mathbf{R}$, $y_1 < y_2$, alors

$$\begin{aligned} P(y_1 < Y_n < y_2) &= \left(y_1 < \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < y_2 \right) \\ &= P\left(y_1\sqrt{np(1-p)} + np < X_n < y_2\sqrt{np(1-p)} + np \right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P\left(y_1\sqrt{np(1-p)} + np < X_n < y_2\sqrt{np(1-p)} + np \right) \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy. \end{aligned}$$

Soit

$$x_1 = y_1\sqrt{np(1-p)} + np, \quad \text{et} \quad x_2 = y_2\sqrt{np(1-p)} + np,$$

alors on obtient

$$P(x_1 < X_n < x_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy,$$

où y_1 et y_2 sont déterminés par

$$x_1 = y_1\sqrt{np(1-p)} + np, \quad \text{et} \quad x_2 = y_2\sqrt{np(1-p)} + np.$$

On dit que la variable aléatoire X_n est asymptotiquement de distribution $N(np,\ np(1-p))$. En remplaçant y_1 et y_2 respectivement par

$$y_1 + \frac{1}{2\sqrt{np(1-p)}} \quad \text{et} \quad y_2 - \frac{1}{2\sqrt{np(1-p)}},$$

on obtient une meilleure approximation pour les applications. Comme X_n est une variable aléatoire discrète tandis qu'une variable aléatoire normale est continue, dans les applications pratiques on fait une *correction pour la continuité.* Donc on ne doit pas oublier d'étaler les probabilités attachées à des intervalles. Pour effectuer l'approximation, on

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

remplacera donc

$$
\begin{array}{rcl}
P(X_n = k) & \text{par} & P(k - 1/2 \leq X_n \leq k + 1/2) \\
P(h \leq X_n \leq k) & \text{par} & P(h - 1/2 \leq X_n \leq k + 1/2) \\
P(X_n \leq k) & \text{par} & P(X_n \leq k + 1/2) \\
P(X_n \geq k) & \text{par} & P(X_n \geq k - 1/2) \\
P(X_n > k) = P(X_n \geq k + 1) & \text{par} & P(X_n \geq k + 1/2) \\
P(X_n < k) = P(X_n \leq k - 1) & \text{par} & P(X_n \leq k - 1/2) \\
P(h < X_n < k) & \text{par} & P(h + 1/2 \leq X_n \leq k - 1/2)
\end{array}
$$

Les calculs de $P(X_n \leq k)$ et $P(X_n < k)$ se font à partir de la fonction de répartition $\Phi(x)$ de la loi $N(0,1)$. Ainsi, par exemple

$$P(X_n \leq k) = \Phi\left(\frac{k + 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

et

$$P(X_n < k) = \Phi\left(\frac{k - 1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Remarque. Notons que deux approximations de la répartition binomiale ont été proposées : l'approximation par la loi de Poisson, satisfaisante lorsque n est grand et lorsque p est assez petit, pour rendre np moyen (voir problème 16) et l'approximation par la loi normale, (voir problème 128, le théorème de De Moivre-Laplace) lorsque n est grand et lorsque p est moyen. On peut montrer que cette dernière approximation est bonne lorsque $np(1 - p)$ est grand. En règle générale cette approximation est tout à fait satisfaisante dès que $np(1 - p)$ dépasse 10.

129. Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de fois qu'on obtient la pile lors d'une série de 40 jets d'une pièce de monnaie. Trouver $P(X_n = 20)$ par l'approximation normale, puis comparer le résultat à la valeur exacte.

Solution. Notons d'abord que $X_n \sim B(40,p)$, où $p = 1/2$, et donc $E(X_n) = np = 20$ et $Var(X_n) = np(1 - p) = 10$. Comme X_n est une variable aléatoire discrète tandis qu'une variable aléatoire normale est continue, la meilleure approximation de la probabilité cherchée sera

$$\begin{aligned} P(X_n = 20) &= P(19,5 \leq X_n \leq 20,5) \\ &= P\left(\frac{19,5-20}{\sqrt{10}} \leq \frac{X_n - 20}{\sqrt{10}} \leq \frac{20,5-20}{\sqrt{10}}\right) \\ &= P\left(-0,16 \leq \frac{X_n - 20}{\sqrt{10}} \leq 0,16\right) \\ &\approx \Phi(0,16) - \Phi(-0,16) \\ &= 2\Phi(0,16) - 1 \\ &= 0,127\ 200. \end{aligned}$$

Le résultat exact est

$$P(X_n = 20) = \binom{40}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{40} \approx 0,125\ 400.$$

130. Soit X_n la variable aléatoire comptant le nombre de fois qu'on obtient la face lors d'une série de 100 jets d'une pièce de monnaie. Trouver la probabilité que la face apparaît plus que 50 fois et moins que 60 fois.

Solution. Notons d'abord que $X_n \sim B(100,p)$, où $p = 1/2$, donc la variable aléatoire peut prendre les valeurs de 0 à 100. De plus, $E(X_n) = 50$ et $Var(X_n) = 25$. Donc

$$\begin{aligned} P(50 < X_n < 60) &= P\left(\frac{50,5-50}{5} \leq \frac{X_n - 50}{5} \leq \frac{59,5-50}{5}\right) \\ &= P\left(0,1 \leq \frac{X_n - 50}{5} \leq 1,9\right) \\ &\approx \Phi(1,9) - \Phi(0,1) \\ &= 0,431\ 500. \end{aligned}$$

131. On impose à 100 personnes un régime alimentaire thérapeutique pour évaluer l'effet de ce régime sur la concentration en cholestérol du sang. Leur taux de cholestérol est mesuré après une période suffisante d'application du régime. Le spécialiste en nutrition qui réalise l'expérience a décidé de recommander ce régime si 65% au moins des sujets montrent

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

une baisse du taux de cholestérol. Trouver la probabilité qu'il prenne une décision erronée et recommande le régime alors que celui-ci est sans effet.

Solution. Admettons que dans le cas où le régime est sans effet, une personne donnée verra son taux de cholestérol baisser lors du régime sous le seul effet du hasard et avec une probabilité de 1/2. Notons par X la variable aléatoire qui prend comme valeurs le nombre de personnes dont le taux s'est abaissé. Alors $X \sim B(100,p)$, où $p = 1/2$. Donc $E(X) = 50$, et $Var(X) = 25$. La probabilité de recommander le régime qui n'a en réalité pas d'effet est alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=65}^{100} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} &= P(X \geq 64,5) \\
&= P\left(\frac{X-50}{5} \geq \frac{64,5-50}{5}\right) \\
&= P\left(\frac{X-50}{5} \geq 2,9\right) \\
&\approx 1 - \Phi(2,9) \\
&= 0,001\ 900.
\end{aligned}$$

132. Supposons que 25% des étudiants du niveau universitaire sont mariés. Trouver la probabilité que dans une université comptant 8 000 étudiants, il y a entre 1 995 et 2 100 étudiants qui sont mariés.

Solution. Notons par X la variable aléatoire qui représente le nombre d'étudiants mariés dans cette université, alors $X \sim B(8\ 000,p)$, où $p = 1/4$. Alors $E(X) = 2\ 000$ et $Var(X) = 1\ 500$. On doit calculer

$$P(1\ 995 \leq X \leq 2\ 100) = \sum_{k=1\ 995}^{2\ 100} \binom{8\ 000}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \left(\frac{3}{4}\right)^{8\ 000-k}.$$

On peut faire l'approximation de cette probabilité par la loi $N(0,1)$, et on obtient

$$\begin{aligned}
P(1\,995 &\leq X \leq 2\,100) \\
&= P\left(\frac{1\,995 - 1/2 - 2\,000}{\sqrt{1\,500}} \leq Z \leq \frac{2\,100 + 1/2 - 2\,000}{\sqrt{1\,500}}\right) \\
&= P(-0,142 \leq Z \leq 2,595) \\
&= \Phi(2,595) - \Phi(-0,142) \\
&= \Phi(2,595) - 1 + \Phi(0,142) \\
&= 0,550\,900
\end{aligned}$$

133. Soit $X_n \sim B(n,p)$. Posons

$$F_n = \frac{X_n}{n}.$$

La variable aléatoire F_n s'appelle la *proportion de* succès . Montrer que la variable aléatoire F_n est asymptotiquement de distribution

$$N(p,\ p(1-p)/n).$$

Solution. Notons d'abord que $E(F_n) = p$ et $Var(F_n) = p(1-p)/n$. De plus,

$$\frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}},$$

et par le théorème de De Moivre-Laplace, on obtient

$$P(z_1 < F_n < z_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y_1}^{y_2} e^{-y^2/2}\, dy,$$

où y_1 et y_2 sont déterminés par les formules

$$z_1 = y_1\sqrt{p(1-p)/n} + p, \quad \text{et} \quad z_2 = y_2\sqrt{p(1-p)/n} + p.$$

134. Une urne contient les fiches des élèves d'une école parmi lesquels 20 % sont des filles et 80 % sont des garçons. On choisi une fiche au hasard, et on note le sexe de la personne. On retourne la fiche dans l'urne et on continue de la même façon. On observe ainsi n fiches. Trouver la valeur de n telle qu'avec une probabilité de 0,95 la proportion des fiches correspondant aux filles se situe entre 0,18 et 0,22.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Solution. Soit F_n la proportion de fiches correspondant aux filles. Alors $F_n \sim B(n, 0, 2)$ et

$$E(F_n) = p = 0,2, \quad Var(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0,16}{n}, \quad \sqrt{Var(F_n)} = \frac{0,4}{\sqrt{n}}.$$

On a

$$P(0,18 < F_n < 0,22) = 0,95.$$

D'après le problème 133,

$$0,95 \approx \int_{y_1}^{y_2} e^{-y^2/2}\, dy,$$

où

$$y_1 = \frac{0,18 - 0,2}{0,4/\sqrt{n}} = -0,05\sqrt{n},$$

et

$$y_2 = \frac{0,22 - 0,2}{0,4/\sqrt{n}} = 0,05\sqrt{n},$$

par conséquent

$$\begin{aligned} 0,95 &\approx \int_{-0,05\sqrt{n}}^{0,05\sqrt{n}} e^{-y^2/2}\, dy \\ &= 2\Phi(0,05\sqrt{n}) - 1, \end{aligned}$$

et $\Phi(0,05\sqrt{n}) = 0,975$. Des tables pour la loi normale, on trouve $0,05\sqrt{n} \approx 1,96$ et donc $n \approx 1\ 537$.

135. Soit $Z_i \sim N(0,1)$, $i = 1, \ldots n$, des variables aléatoires indépendantes.

i) Montrer que $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$.

ii) Trouver la médiane de la variable aléatoire $Y \sim \chi^2(1)$.

Solution. i) Montrons d'abord que si $Z \sim N(0,1)$, alors $Z^2 \sim \chi^2(1)$. Posons $Y = Z^2$ et notons par F_Y la fonction de répartition de la variable aléatoire *Y*. On a (voir problème 67),

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(Z^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}) \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) \\ &= \Phi(\sqrt{y}) - (1 - \Phi(\sqrt{y})) \\ &= 2\Phi(\sqrt{y}) - 1. \end{aligned}$$

Une dérivation donne la densité, donc

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) \\ &= \frac{d}{dy}(\Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y})) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_Z(\sqrt{y}) + f_Z(-\sqrt{y})\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} e^{-y/2} \\ &= \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} y^{1/2-1} e^{-y/2} \end{aligned}$$

qui est la densité d'une variable aléatoire de distribution $\chi^2(1)$. D'après vi) du problème 127, la variable aléatoire $Z_1^2 + \cdots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$.

ii) De l'égalité $1/2 = F_X(me_X) = 2\Phi(\sqrt{me_Y}) - 1$, on trouve

$$\frac{1}{2} = 2\Phi(\sqrt{me_X}) - 1,$$

donc $\Phi(\sqrt{me_X}) = 0,75$ et par conséquent $\sqrt{me_X} \approx 0,675$ donc

$$me_X \approx (0,675)^2 \approx 0,456.$$

136. Trouver les moments de la variable aléatoire $Z \sim N(0, 1)$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Solution. En utilisant la définition des moments, on trouve

$$\begin{aligned}
E(Z^n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{0} (-1)^{n+1} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx,
\end{aligned}$$

donc

$$E(Z^{2k+1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{0} x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^{2k+1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0,$$

et

$$\begin{aligned}
E(Z^{2k}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{0} (-1)^{2k+1} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx.
\end{aligned}$$

Une intégration par parties, avec $u = -x^{2k-1}$ et $dv = -xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$, donne

$$E(Z^{2k}) = (2k-1)E(Z^{2k-2}).$$

Comme $E(Z^0) = 1$, on trouve

$$E(Z^{2k}) = 1 \times 3 \times \cdots \times (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k k!},$$

et par conséquent

$$E(Z^n) = \begin{cases} \frac{(2k)!}{2^k k!} & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

On peut trouver les moments de la variable aléatoire Z ~ $N(0,1)$, en utilisant la fonction caractéristique. Ainsi

$$\begin{aligned}
e^{\frac{-t^2}{2}} &= e^{\frac{(it)^2}{2}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{2^k k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} E(X^{2k}),
\end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

d'où on obtient encore une fois

$$E(Z^n) = \begin{cases} \frac{(2k)!}{2^k k!} & \text{si } n = 2k \\ \\ 0 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

137. On considère la variable aléatoire X qui prend les valeurs $k \in \mathbb{N}$ avec les probabilités $p_k = (X = k) = \frac{1}{2^k}$; $k \in \mathbb{N}$. Trouver la fonction génératrice des moments de X. En déduire $E(X)$ et $Var(X)$.

Solution. On trouve

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} e^{tk} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e^t}{2}\right)^k,$$

donc la fonction $g(t)$ est une série géométrique qui est convergente si $|\frac{e^t}{2}| < 1$, donc si $t < \ln 2$. Par conséquent $g(t) = \frac{2}{2-e^t}$. On trouve $g'(t) = \frac{2e^t}{(2-e^t)^2}$, et $g''(t) = \frac{2e^t(2+e^t)}{(2-e^t)^3}$. Alors $E(X) = g'(0) = 2$ et $E(X^2) = g''(0) = 6$. On déduit $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 6 - 4 = 2$.

138. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Trouver la fonction génératrice des moments de *X*.

En utilisant la fonction génératrice des moments, trouver $E(X^k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Solution. i) Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a

$$\begin{aligned} g(t) = E(e^{tX}) &= \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f(x)\, dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(t-1)x}\, dx \\ &= \left.\frac{e^{(t-1)x}}{(t-1)}\right|_0^{\infty} \end{aligned}$$

Ainsi la fonction *g(t)* existe seulement si *t* - 1 est négatif, donc pour *t* < 1, et on obtient

$$g(t) = \frac{1}{1-t},$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

pour tout $t \in (-\infty, 1)$.

ii) Le développement en série de MacLaurin de la fonction $g(t)$ nous donne

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} k! \frac{t^k}{k!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k).$$

Ainsi $E(X^k) = k!$, pour $k \in \mathbf{N}$. Remarquons que ce résultat aurait pu être obtenu en dérivant k fois la fonction $g(t)$ puis, en posant $t = 0$.

139. Utiliser la fonction génératrice des moments pour trouver les moments de la variable aléatoire de Laplace de paramètre $\lambda = 1$ dont la densité est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|},$$

où $x \in \mathbb{R}$.

Solution. On trouve

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{tx+x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx-x}\, dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{x(t+1)}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{x(t-1)}\, dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left.\frac{e^{x(t+1)}}{t+1}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{x(t-1)}}{t-1}\right|_{0}^{\infty}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) \\
&= \frac{1}{1-t^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $g(t)$ existe si et seulement si $t \in (-1, 1)$. Comme

$$\begin{aligned}
g(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (2k)! \frac{t^{2k}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} E(X^{2k}),
\end{aligned}$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

on obtient

$$E(X^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k-1 \\ (2k)! & \text{si } n = 2k \end{cases}$$

En particulier, $E(X) = 0$ et $Var(X) = 2$, (voir aussi problème 121).

140. Soit X une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}} & \text{si } x \geq \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On dit que la variable aléatoire *X* suit une *loi de Pareto*[13] de paramètres α et β.

i) Montrer que la fonction génératrice des moments n'existe pas.

ii) Trouver la condition sur β tel que le moment $E(X^k)$ existe.

Solution. i) Si $t > 0$,

$$g(t) = E(e^{tX}) = \beta\alpha^\beta \int_\alpha^\infty \frac{e^{tx}}{x^{\beta+1}}\, dx,$$

il s'ensuit que $g(t)$ n'existe pas, car e^{tx} croît plus vite que $x^{\beta+1}$, de telle sorte que $e^{tx}/x^{\beta+1} \to \infty$ lorsque $x \to \infty$.

ii) Si $k < \beta$, alors

$$\begin{aligned} E(X^k) &= \int_\alpha^\infty x^k \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}\, dx \\ &= \beta\alpha^\beta \int_\alpha^\infty x^{-\beta-1+k}\, dx \\ &= -\beta\alpha^\beta \frac{x^{-\beta+k}}{\beta-k}\Bigg|_\alpha^\infty \\ &= \frac{\beta\alpha^k}{\beta-k}, \end{aligned}$$

car l'intégrale converge pour $k < \beta$. En particulier, la valeur moyenne et la variance existent, si ,$\beta > 2$, et on trouve

[13]Vilfredo Pareto (1848-1923), sociologue et économiste italien.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\beta - 1},\ E(X^2) = \frac{\alpha^2\beta}{\beta - 2},$$

et par conséquent

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha^2\beta}{(\beta-1)^2(\beta-2)}.$$

Remarque. Pour les mêmes raisons qu'avant, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)}\,dx,$$

ne converge pas, donc la fonction génératrice de moments de la variable aléatoire $X \sim C(0,1)$ n'existe pas. Mais dans ce cas, les moments n'existent pas non plus, (voir exemple 6, dans 5.1.6).

141. Trouver la fonction génératrice des moments et déduire $E(X)$ et $Var(X)$ pour la variable aléatoire

i) $X \sim B(n,p)$.
ii) $X \sim P(\lambda)$.
iii) $X \sim G(p)$.
iv) $BN(p,r)$.
v) $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.
vi) $X \sim Gamma(\alpha,\beta)$.
vii) $X \sim \chi^2(r)$.
viii) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
ix) $X \sim U(a,b)$.
x) $X \sim C(\mu,\sigma)$.

Solution. i) On a

$$\begin{aligned} g(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k(1-p)^{n-k} \\ &= (pe^t + 1 - p)^n. \end{aligned}$$

Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

En dérivant,
$$g'(t) = n(pe^t + 1 - p)^{n-1}pe^t,$$
et par conséquent
$$E(X) = g'(0) = np.$$
Trouvons
$$g''(t) = n(n-1)(pe^t + 1 - p)^{n-2}(pe^t)^2 + n(pe^t + 1 - p)^{n-1}pe^t,$$
puis
$$E(X^2) = g''(0) = n(n-1)p^2 + np.$$
La variance de X est donc
$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\ &= np(1-p). \end{aligned}$$

ii) On a
$$\begin{aligned} g(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{tk}e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} \\ &= e^{\lambda(e^t-1)}. \end{aligned}$$
En dérivant,
$$g'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)},$$
et par conséquent
$$E(X) = g'(0) = \lambda.$$
Trouvons
$$g''(t) = (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)},$$
puis
$$E(X^2) = g''(0) = \lambda^2 + \lambda.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

La variance de X est donc

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

iii) On a

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} e^{tk} = pe^t \sum_{h=0}^{\infty} ((1-p)e^t)^h = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t},$$

qui converge pour $|(1-p)e^t| < 1$. En dérivant, on obtient

$$g'(t) = g(t) + \frac{p(1-p)e^{2t}}{(1-(1-p)e^t)^2},$$

et

$$g''(t) = g'(t) + \frac{2p(1-p)e^{2t}}{(1-(1-p)e^t)^3},$$

et par conséquent

$$E(X) = g'(0) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad E(X^2) = g''(0) = \frac{2-p}{p^2},$$

donc

$$Var(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

On peur trouver $E(X)$ et $Var(X)$, par une autre méthode, voir problème 87.

iv) Pour étudier la variable aléatoire $X \sim BN(p, r)$ on peut compter les épreuves au fur et à mesure de l'obtention des succès. Introduisons, pour $i = 1, 2, \ldots, r$, les variables aléatoires Y_i représentant le nombre d'épreuves de Bernoulli nécessaires, une fois le $(i - 1)$-ième succès obtenu, pour obtenir le i-ième succès. Ces variables aléatoires Y_i sont indépendantes et toutes de même loi géométrique de paramètre p. De plus

$$X = Y_1 + \cdots + Y_1.$$

Alors

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \prod_{i=1}^{r} g_{Y_i}(t) \\ &= \prod_{i=1}^{r} \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \\ &= \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r. \end{aligned}$$

On trouve

$$E(X) = \sum_{i=1}^{r} E(Y_i) = \frac{r}{p},$$

et

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{r} Var(Y_i) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

v) On détermine d'abord la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire Z ~ $N(0,1)$. On a

$$\begin{aligned} g_Z(t) &= E(e^{tZ}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x^2-2tx)}{2}}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}+\frac{t^2}{2}}\, dx \\ &= e^{\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}, \end{aligned}$$

en substituant $y = x - t$ et en tenant compte du fait que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = \sqrt{2\pi}$. La fonction génératrice des moments de la variable aléatoire $Z \sim N(0,1)$ est donc $g_Z(t) = e^{t^2/2}$. Pour obtenir la fonction génératrice

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

des moments de la variable aléatoire $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, il faut faire la substitution $X = \mu + \sigma Z$. Alors

$$\begin{aligned} g_X(t) &= E(e^{tX}) \\ &= E(e^{t(\mu+\sigma Z)}) \\ &= E(e^{t\mu}e^{t\sigma Z}) \\ &= e^{t\mu}E(e^{t\sigma Z}) \\ &= e^{t\mu}g_Z(t\sigma) \\ &= e^{t\mu}e^{\frac{(t\sigma)^2}{2}} \\ &= e^{\mu t+\frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \end{aligned}$$

En dérivant,

$$g'_X(t) = (\mu + t\sigma^2)g_X(t)$$

et

$$g''_X(t) = (\mu + t\sigma^2)^2 g_X(t) + \sigma^2 g_X(t),$$

donc

$$E(X) = g'(0) = \mu, \quad E(X^2) = g''(0) = \mu^2 + \sigma^2,$$

et finalement

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sigma^2.$$

En particulier $E(Z) = 0$ et $Var(Z) = 1$.

vi) On a

$$\begin{aligned} g(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x\left(\frac{1}{\beta}-t\right)}\, dx. \end{aligned}$$

En faisant maintenant le changement de variable $z = x\left(\frac{1}{\beta} - t\right)$, donc $dz = \left(\frac{1}{\beta} - t\right) dx$, on obtient si $t < 1/\beta$,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1} e^{-z}}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\beta} - t\right)} dz \\
&= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\beta^{\alpha-1} z^{\alpha-1}}{(1-\beta t)^{\alpha-1}} \cdot \frac{e^{-z}\beta}{1-\beta t} dz \\
&= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz \\
&= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha) \\
&= \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}.
\end{aligned}$$

On remarque ici que $g_X(t)$ n'est pas définie que pour les valeurs de $|t|$ inférieures à $1/\beta$, l'intégrale diverge si $t = 1/\beta$.

On trouve

$$g'(t) = \frac{\alpha\beta}{(1-\beta t)^{\alpha+1}},$$

et

$$g''(t) = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta^2}{(1-\beta t)^{\alpha+2}}.$$

Par conséquent

$$E(X) = g'(0) = \alpha\beta, \quad E(X^2) = g''(0) = \alpha(\alpha+1)\beta^2,$$

donc

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \alpha\beta^2.$$

On peut trouver $E(X)$ et $Var(X)$, par une autre méthode, voir problème 88.

vii) Si $X \sim Gamma(\frac{r}{2}, 2)$, alors $X \sim \chi^2(r)$, donc en faisant $\alpha = \frac{r}{2}$ et $\beta = 2$ dans les résultats de vi), on trouve

$$g(t) = \frac{1}{(1-2t)^{r/2}},$$

si $|t| < 1/2$, et par conséquent $E(X) = r$ et $Var(X) = 2r$.

viii) On a

$$\begin{aligned} g(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx \\ &= \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda-t)x}\,dx \\ &= -\frac{\lambda}{\lambda-t}e^{-(\lambda-t)x}\Big|_0^\infty \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t}, \end{aligned}$$

pour $t < \lambda$. On remarque ici que $g(t)$ n'est pas définie que pour les valeurs de t inférieures à λ. Deux dérivations nous donnent,

$$g'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2} \quad \text{et} \quad g''(t) = \frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}.$$

Par conséquent

$$E(X) = g'(0) = \frac{1}{\lambda}, \quad E(X^2) = g''(0) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

La variance de X est donc

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

On peut obtenir les résultats précédents en utilisant la distribution $Gamma(\alpha,\beta)$. En effet, si $\alpha = 1$ et on pose $\beta = 1/\lambda$, alors si $X \sim Gamma(1, 1/\lambda)$, on a $X \sim \varepsilon(\lambda)$. Donc on trouve,

$$g(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t},$$

pour $|t| < \lambda$, et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

ix) On a

$$\begin{aligned} g(t) &= E(e^{tX}) \\ &= \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a}\, dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx}\, dx \\ &= \frac{1}{b-a} \times \frac{1}{t} e^{tx}\Big|_a^b \\ &= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}. \end{aligned}$$

Une autre expression peut être obtenue en développant en série les fonctions e^{ta} et e^{tb},

$$g(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{n!} \left(\frac{b^n - a^n}{b-a} \right) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}.$$

Comme

$$g(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} E(X^n),$$

on trouve

$$E(X^n) = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)},$$

d'où, en particulier

$$E(X) = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}, \quad E(X^2) = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3},$$

donc, finalement,

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

x) La fonction génératrice des moments de la variable aléatoire $X \sim C(0,1)$ n'existe pas (voir la remarque du problème 140). Si $Y \sim C(\mu,\sigma)$, alors $X = Y\text{-}\mu/\sigma$ suit la loi $C(0,1)$ et comme la fonction génératrice des moments n'existe pas, elle n'existe pas non plus pour la variable aléatoire Y. Notons par contre que la fonction caractéristique existe (voir problème 126 ix)).

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Appendice A

Méthodes d'énumération

Un outil indispensable à la description d'une espace échantillonnal fini associé à une expérience aléatoire est la notion de n-tuplet.

Définition A.1. Un *n-tuplet* est une disposition ordonnée de n éléments, $(a_1, a_2, ..., a_n)$, dont le premier, a_1, est dit la première composante, le second, a_2, la deuxième composante, et ainsi de suite jusqu'au n-ième, a_n, la n-ième composante.

Définition A.2. Deux n-tuplets $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et $(b_1, b_2, ..., b_n)$, sont dits *identiques* si et seulement s'ils sont formés des mêmes composantes dans le même ordre, c'est-à-dire, si $a_j = b_j$ pour $j = 1, 2, ..., n$.

Remarque A.3. Les éléments du produit des ensembles $E_1, E_2, ..., E_n$, $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$, sont représentés par des n-tuplets, $(e_1, e_2, ..., e_n)$, où $e_i \in E_j$, pour $j = 1, 2, ..., n$.

Dans les applications pratiques, on utilise beaucoup le principe suivant :

Principe du dénombrement

Si un événement E peut être décomposé en k sous-événements E_i et que chaque événement E_i peut se réaliser de n_i façons, alors E peut se réaliser de $n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ façons.

Une autre façon d'énoncer ce principe est de se servir d'espaces produits. Soit $E_1, E_2, ..., E_k$ des ensembles finis. Alors si

$$E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_k = \{e = (e_1, e_2, ..., e_k) ; e_i \in E_i, i = 1, ..., k\},$$

on a

$$card(E) = \prod_{i=1}^{k} card(E_i).$$

Des applications de ce principe conduisent à des formules pour le nombre de permutations, d'arrangements et de combinaisons.

Permutations

Le nombre dé façons P_n d'ordonner n objets distincts est

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n.$$

P_n est appelé *nombre de permutations* de n objets. Par convention, $0! = 1$. Rappelons que $n!$ se lit *factoriel de n.*

Arrangements

Le nombre de façons $\mathcal{A}_k^n$ d'ordonner k objets distincts d'un ensemble qui en contient n est

$$\mathcal{A}_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

$\mathcal{A}_k^n$ est appelé *nombre d'arrangements* de k objets parmi n objets. Il correspond aussi au nombre de k-tuplets d'éléments distincts d'un ensemble de n éléments, dont la première composante peut être formée à partir de n éléments distincts, la seconde à partir de $n-1$ éléments distincts et ainsi de suite jusqu'à la k-ième à partir de $n-k$ éléments distincts.

En prenant $k = n$, on obtient

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{A}_n^n = n!.$$

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Combinaisons

Le nombre de façons $C_k^n = \binom{n}{k}$ de choisir k objets distincts d'un ensemble qui en contient n est

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\mathcal{A}_k^n}{k!}.$$

$\binom{n}{k}$ est appelé *nombre de combinaisons* de k objets parmi n objets. Il correspond aussi au nombre de sous-ensembles de k éléments d'un ensemble de n éléments. Par convention $\binom{n}{k} = 0$, lorsque $k < 0$, ou $n < k$.

Notons que l'égalité $\binom{n}{k} = \mathcal{A}_k^n/k!$ vient du fait que l'ordre ne compte pas pour les combinaisons. Il faut donc diviser $\mathcal{A}_k^n$ par le nombre de permutations des k éléments du k-tuplet.

Remarque A.4. Comme $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de k éléments d'un ensemble de n éléments, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$$

qui sont des cas particuliers du binôme de Newton[1]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

en prenant $a = b = 1$ et $a = 1, b = -1$, respectivement.

Pour cette raison, les coefficients $\binom{n}{k}$ sont aussi appelés *coefficients binomiaux*. Par extension, on obtient aussi les *coefficients multinomiaux*

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!},$$

où $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Ces coefficients représentent le nombre de façons de choisir n objets provenant de k classes ayant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ objets. Une généralisation du binôme de Newton est donnée par

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{n=\sum_{i=1}^{k} n_i, n_i \geq 0,} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}.$$

[1]Isaac sir Newton (1642-1727), physicien, mathématicien et astronome anglais.

Rappelons d'autres propriétés utiles des coefficients binomiaux.
Remarque A.5. On vérifie aisément que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \text{et} \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n.$$

Remarque A.6. On a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\
&= \binom{n}{n-k}.
\end{aligned}$$

Donc le nombre de façons de choisir k objets distincts parmi n est égal au nombre de façons de choisir n - k objets distincts parmi n car lorsqu'on choisit les k objets à inclure, cela est équivalent à choisir les n - k objets à exclure et vice-versa.

Remarque A.7. On a

$$k\binom{k-1}{r-1} = r\binom{k}{r}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
k\binom{k-1}{r-1} &= k\frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-1-(r-1))!} \\
&= \frac{k!}{(r-1)!(k-r)!} \\
&= r\frac{k!}{r!(k-r)!} \\
&= r\binom{k}{r}.
\end{aligned}$$

Remarque A.8. On a

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

En effet,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{(n-k)n! + (k+1)n!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Remarque A.9. On a

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j} = \binom{n_1+n_2}{k}.$$

En effet, pour $i = 1, 2$, posons

$$p_i(x) = \sum_{k=0}^{n_i} \binom{n_i}{k} x^k = (1+x)^{n_i}.$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n_1+n_2}\binom{n_1+n_2}{k}x^k &= (1+x)^{n_1+n_2}\\
&= p_1(x)p_2(x)\\
&= \left(\sum_{j=0}^{n_1}\binom{n_1}{j}x^j\right)\left(\sum_{l=0}^{n_2}\binom{n_2}{l}x^l\right)\\
&= \sum_{j=0}^{n_1}\sum_{l=0}^{n_2}\binom{n_1}{j}\binom{n_2}{l}x^{j+l}\\
&= \sum_{k=0}^{n_1+n_2}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j}\right)x^k,
\end{aligned}$$

on doit donc avoir

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j} = \binom{n_1+n_2}{k},$$

puisque ce sont deux expressions des coefficients de x^k dans cette égalité valide pour tout x.

On peut également donner une preuve combinatoire de ce résultat. Le nombre $\binom{n_1+n_2}{k}$ représente le nombre de façons de choisir k objets distincts parmi n_1+n_2. Une autre manière de calculer ce nombre consiste à séparer les n_1+n_2 objets en deux groupes de n_1 et de n_2 objets. Le produit $\binom{n_1}{j}\binom{n_2}{k-j}$ représente le nombre de façons de choisir k objets distincts lorsqu'on en choisit j dans le premier groupe et $k-j$ dans le second groupe. En additionnant ces nombres pour j allant de 0 à k, on retrouve le nombre de façons de choisir k objets distincts parmi n_1+n_2, c'est-à-dire $\binom{n_1+n_2}{k}$ et cela démontre le résultat.

Tables de la loi normale N(0, 1)

TABLE I : Table de la fonction de répartition

Les entrées dans la table donnent $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ où Z est une variable aléatoire de loi $N(0,1)$, pour $x \in (0,\ 4)$.

Note : si $-0,4 < x < 0$, alors on utilise l'égalité $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$. Par exemple, si $x = 2,5$ alors $P(Z \leq x) = 0,983\ 800$ directement de la table. Par contre, si $x = -1,51$, alors $P(Z \leq -1,51) = 1 - P(Z \leq 1,51) = 1 - 0,934\ 500 = 0,065\ 500$.

TABLE II : Table des quantiles

Les entrées dans la table donnent la valeur de x telle que $P(Z \leq x) = p$ où Z est une variable aléatoire de loi $N(0,1)$.

Note : si $p < 0,5$, alors, par symétrie, il suffit d'utiliser le fait que $P(Z \leq -x) = 1 - p$. Par exemple, si $p = 0,531$, alors $x = 0,077\ 800$ directement de la table. Par contre, si $p = 0,237$, alors $1 - p = 0,763$ et $x = -0,716$.

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Table I

x(	0,00	1 0,01	1 0,02	1 0,03	0,04	1 0,05	1 0,06	0,07	1 0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	**0,5199**	0,5239	0,5279	**0,5319**	**0,5359**
0,1	**0,5398**	**0,5438**	**0,5478**	0,5517	**0,5557**	**0,5596**	**0,5636**	**0,5675**	0,5714	**0,5753**
0,2	**0,5793**	**0,5832**	0,5871	0,5910	**0,5948**	0,5987	0,6026	**0,6064**	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	**0,6255**	**0,6293**	**0,6331**	**0,6368**	**0,6406**	**0,6443**	**0,6480**	0,6517
0,4	**0,6554**	**0,6591**	**0,6628**	**0,6664**	0,6700	**0,6736**	0,6772	**0,6808**	**0,6844**	**0,6879**
0,5	0,6915	**0,6950**	**0,6985**	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	**0,7224**
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	**0,7389**	0,7422	**0,7454**	**0,7486**	0,7517	**0,7549**
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	**0,7852**
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	**0,7995**	**0,8023**	0,8051	0,8079	0,8106	**0,8133**
0,9	**0,8159**	**0,8186**	0,8212	**0,8238**	**0,8264**	**0,8289**	**0,8315**	**0,8340**	**0,8365**	**0,8389**
1,0	**0,8413**	**0,8438**	**0,8461**	**0,8485**	**0,8508**	**0,8531**	**0,8554**	0,8577	**0,8599**	**0,8621**
1,1	**0,8643**	**0,8665**	**0,8686**	**0,8708**	0,8729	**0,8749**	0,8770	0,8790	**0,8810**	**0,8830**
1,2	**0,8849**	**0,8869**	**0,8888**	0,8907	**0,8925**	**0,8944**	**0,8962**	**0,8980**	**0,8997**	**0,9015**
1,3	**0,9032**	**0,9049**	**0,9066**	**0,9082**	**0,9099**	**0,9115**	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	**0,9192**	0,9207	0,9222	**0,9236**	0,9251	**0,9265**	0,9279	**0,9292**	**0,9306**	**0,9319**
1,5	**0,9332**	0,9345	0,9357	0,9370	**0,9382**	**0,9394**	**0,9406**	**0,9418**	0,9429	**0,9441**
1,6	**0,9452**	0,9463	**0,9474**	**0,9484**	**0,9495**	**0,9505**	**0,9515**	**0,9525**	**0,9535**	**0,9545**
1,7	**0,9554**	0,9564	0,9573	0,9582	**0,9591**	**0,9599**	0,9608	**0,9616**	**0,9625**	**0,9633**
1,8	**0,9641**	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	**0,9678**	**0,9686**	0,9693	**0,9699**	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	**0,9738**	**0,9744**	0,9750	**0,9756**	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	**0,9834**	**0,9838**	0,9842	**0,9846**	**0,9850**	**0,9854**	**0,9857**
2,2	0,9861	0,9864	**0,9868**	0,9871	0,9875	**0,9878**	**0,9881**	**0,9884**	**0,9887**	**0,9890**
2,3	**0,9893**	0,9896	**0,9898**	0,9901	0,9904	**0,9906**	**0,9909**	0,9911	**0,9913**	**0,9916**
2,4	**0,9918**	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	**0,9929**	0,9931	**0,9932**	**0,9934**	**0,9936**
2,5	**0,9938**	0,9940	**0,9941**	0,9943	**0,9945**	**0,9946**	0,9948	0,9949	**0,9951**	**0,9952**
2,6	**0,9953**	**0,9955**	**0,9956**	0,9957	0,9959	**0,9960**	0,9961	**0,9962**	**0,9963**	**0,9964**
2,7	**0,9965**	0,9966	0,9967	**0,9968**	**0,9969**	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	**0,9974**
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	**0,9977**	0,9977	**0,9978**	0,9979	0,9979	**0,9980**	**0,9981**
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	**0,9983**	0,9984	**0,9984**	0,9985	**0,9985**	**0,9986**	**0,9986**
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	**0,9988**	0,9988	**0,9989**	0,9989	0,9989	0,9990	**0,9990**
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	**0,9992**	0,9992	0,9992	0,9992	**0,9993**	**0,9993**
3,2	0,9993	0,9993	**0,9994**	**0,9994**	0,9994	**0,9994**	0,9994	0,9995	0,9995	**0,9995**
3,3	**0,9995**	**0,9995**	0,9996	**0,9996**	**0,9996**	**0,9996**	0,9996	0,9996	**0,9996**	**0,9997**
3,4	**0,9997**	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	**0,9997**	0,9997	0,9997	**0,9997**	**0,9998**
3,5	**0,9998**	**0,9998**	0,9998 `	**0,9998**	**0,9998**	**0,9998**	0,9998	0,9998	**0,9998**	**0,9998**
3,6	**0,9998**	**0,9998**	**0,9999**	**0,9999**	0,9999	**0,9999**	0,9999	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**
3,7	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**
3,8	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**0,9999**	**1,0000**
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	**1,0000**

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Table II

p	0	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,0071	0,008	0,009
0,50	0,0000	0,0025	0,0050	0,0075	0,0100	0,0125	0,0150	0,0175	0,0201	0,0226
0,51	0,0251	0,0276	0,0301	0,0326	0,0351	0,0376	0,0401	0,0426	0,0451	**0,0476**
0,52	0,0501	0,0527	**0,0552**	0,0577	0,0602	0,0627	**0,0652**	0,0677	0,0702	**0,0728**
0,53	0,0753	0,0778	0,0803	0,0828	**0,0853**	0,0878	0,0904	**0,0929**	**0,0954**	0,0979
0,54	0,1004	0,1029	0,1055	0,1080	0,1105	0,1130	0,1156	0,1181	0,1206	0,1231
0,55	0,1257	0,1282	0,1307	0,1332	**0,1358**	**0,1383**	0,1408	**0,1434**	0,1459	**0,1484**
0,56	0,1510	**0,1535**	0,1560	0,1586	0,1611	**0,1637**	0,1662	0,1687	0,1713	**0,1738**
0,57	0,1764	0,1789	0,1815	0,1840	**0,1866**	**0,1891**	0,1917	**0,1942**	**0,1968**	**0,1993**
0,58	0,2019	0,2045	0,2070	0,2096	0,2121	0,2147	0,2173	**0,2198**	0,2224	**0,2250**
0,59	0,2275	0,2301	0,2327	**0,2353**	0,2379	**0,2404**	**0,2430**	**0,2456**	**0,2482**	**0,2508**
0,60	**0,2534**	**0,2559**	**0,2585**	0,2611	0,2637	**0,2663**	**0,2689**	0,2715	0,2741	0,2767
0,61	**0,2793**	0,2819	**0,2845**	0,2872	**0,2898**	**0,2924**	**0,2950**	0,2976	**0,3002**	**0,3029**
0,62	**0,3055**	0,3081	0,3107	**0,3134**	**0,3160**	**0,3186**	**0,3213**	**0,3239**	**0,3266**	**0,3292**
0,63	**0,3319**	**0,3345**	**0,3372**	**0,3398**	**0,3425**	**0,3451**	**0,3478**	**0,3504**	**0,3531**	**0,3558**
0,64	**0,3585**	0,3611	**0,3638**	**0,3665**	**0,3692**	**0,3719**	**0,3745**	0,3772	**0,3799**	**0,3826**
0,65	**0,3853**	**0,3880**	0,3907	**0,3934**	0,3961	**0,3989**	0,4016	**0,4043**	**0,4070**	0,4097
0,66	**0,4125**	**0,4152**	0,4179	0,4207	**0,4234**	**0,4262**	**0,4289**	**0,4316**	**0,4344**	**0,4372**
0,67	**0,4399**	0,4427	**0,4454**	**0,4482**	**0,4510**	**0,4538**	**0,4565**	**0,4593**	**0,4621**	**0,4649**
0,68	**0,4677**	0,4705	**0,4733**	0,4761	**0,4789**	**0,4817**	**0,4845**	**0,4874**	**0,4902**	**0,4930**
0,69	**0,4959**	**0,4987**	0,5015	**0,5044**	0,5072	0,5101	0,5129	**0,5158**	**0,5187**	**0,5215**
0,70	0,5244	0,5273	0,5302	**0,5330**	**0,5359**	**0,5388**	0,5417	**0,5446**	**0,5476**	**0,5505**
0,71	**0,5534**	**0,5563**	**0,5592**	0,5622	**0,5651**	**0,5680**	0,5710	**0,5739**	**0,5769**	**0,5799**
0,72	**0,5828**	**0,5858**	**0,5888**	0,5918	**0,5948**	**0,5978**	0,6008	**0,6038**	**0,6068**	**0,6098**
0,73	0,6128	**0,6158**	0,6189	0,6219	**0,6250**	**0,6280**	0,6311	**0,6341**	**0,6372**	**0,6403**
0,74	**0,6434**	**0,6464**	0,6495	**0,6526**	**0,6557**	**0,6588**	**0,6620**	**0,6651**	**0,6682**	0,6714
0,75	**0,6745**	0,6776	0,6808	**0,6840**	0,6871	**0,6903**	**0,6935**	**0,6967**	**0,6999**	0,7031
0,76	0,7063	**0,7095**	0,7127	0,7160	0,7192	0,7225	0,7257	0,7290	**0,7323**	**0,7356**
0,77	**0,7389**	0,7421	**0,7454**	**0,7488**	0,7521	**0,7554**	0,7587	0,7621	**0,7655**	**0,7688**
0,78	0,7722	0,7756	0,7790	0,7824	0,7858	0,7892	0,7926	0,7961	**0,7995**	**0,8030**
0,79	0,8064	0,8099	0,8134	**0,8169**	0,8204	**0,8239**	0,8274	0,8309	**0,8345**	**0,8381**
0,80	0,8416	0,8452	**0,8488**	**0,8524**	0,8560	0,8596	0,8632	**0,8669**	0,8706	0,8742
0,81	0,8779	**0,8816**	**0,8853**	0,8890	0,8927	**0,8965**	0,9002	0,9040	0,9078	**0,9116**
0,82	0,9154	0,9192	0,9230	0,9269	0,9307	**0,9346**	0,9385	0,9424	**0,9463**	**0,9502**
0,83	0,9542	**0,9581**	0,9621	0,9661	0,9701	0,9741	0,9782	0,9822	**0,9863**	**0,9904**
0,84	0,9945	**0,9986**	1,0027	1,0069	1,0110	1,0152	1,0194	1,0236	1,0279	**1,0322**
0,85	**1,0364**	1,0407	1,0451	1,0494	1,0537	1,0581	1,0625	**1,0669**	1,0714	**1,0758**
0,86	1,0803	**1,0848**	**1,0894**	1,0939	1,0985	1,1031	1,1077	1,1123	1,1170	1,1217
0,87	1,1264	1,1311	**1,1359**	1,1407	**1,1455**	1,1504	1,1552	1,1601	1,1651	1,1700
0,88	1,1750	1,1800	**1,1850**	1,1901	1,1952	1,2004	1,2055	1,2107	1,2160	**1,2212**
0,89	**1,2265**	1,2319	1,2372	1,2426	1,2481	**1,2536**	1,2591	**1,2646**	1,2702	**1,2759**
0,90	1,2816	1,2873	**1,2930**	**1,2988**	1,3047	1,3106	**1,3165**	**1,3225**	**1,3285**	**1,3346**
0,91	**1,3408**	**1,3469**	**1,3532**	**1,3595**	**1,3658**	1,3722	1,3787	**1,3852**	1,3917	**1,3984**
0,92	1,4051	1,4118	1,4187	**1,4255**	**1,4325**	**1,4395**	**1,4466**	**1,4538**	1,4611	**1,4684**
0,93	**1,4758**	**1,4833**	**1,4909**	**1,4985**	**1,5063**	1,5141	1,5220	**1,5301**	**1,5382**	**1,5464**
0,94	**1,5548**	**1,5632**	1,5718	1,5805	**1,5893**	**1,5982**	1,6073	**1,6164**	**1,6258**	**1,6352**
0,95	**1,6449**	**1,6546**	**1,6646**	1,6747	**1,6850**	**1,6954**	1,7060	1,7169	1,7279	**1,7392**
0,96	1,7507	1,7624	1,7744	**1,7866**	1,7991	1,8119	**1,8250**	**1,8384**	**1,8522**	**1,8663**
0,97	1,8808	**1,8957**	1,9110	1,9268	1,9431	1,9600	1,9774	**1,9954**	2,0141	**2,0335**
0,98	2,0537	2,0749	**2,0969**	2,1201	**2,1444**	2,1701	2,1973	**2,2262**	2,2571	**2,2904**
0,99	**2,3264**	**2,3656**	**2,4089**	2,4573	2,5121	**2,5758**	2,6521	2,7478	**2,8782**	**3,0902**

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités,* C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N

AGMV Marquis
MEMBRE DE SCABRINI MEDIA
Québec, Canada
2002

Édifice Le Delta I, 2875, boul. Laurier, bureau 450, Québec, Québec G1V 2M2 • Tél. : (418) 657-4399 – www.puq.ca
Tiré : *Théorie des probabilités*, C. Reischer, R. Leblanc, B. Rémillard et D. Larocque, ISBN 2-7605-1197-9 • D1197N