Lecture Notes in Mathematics

A collection of informal reports and seminars
Edited by A. Dold, Heidelberg and B. Eckmann, Zürich

Series: Institut de Mathématique, Université de Strasbourg · Adviser: P. A. Meyer

51

Séminaire de Probabilités II
Université de Strasbourg

Mars 1967 – Octobre 1967

1968

Springer-Verlag · Berlin · Heidelberg · New York

Library of Congress Catalog Card Number 67-29618 Printed in Germany. Title No. 7371

SEMINAIRE DE PROBABILITES 1966-67

Ce volume fait suite au " Séminaire de Probabilités I", paru précédemment dans cette collection (Lecture Notes in Mathematics, vol. 39). Il contient les exposés faits pendant la seconde moitié de l'année universitaire 1966-67, au séminaire de probabilités de l'Université de Strasbourg.

L'exposé de M. K. KRICKEBERG sur les " isomorphismes d'espaces mesurés topologiques et applications" ne figure pas dans ce volume. On en trouvera la substance dans les articles suivants :

K.KRICKEBERG : Strong mixing properties of Markov chains with infinite invariant measure (Proc. Fifth Berkeley Symposium)

K.KRICKEBERG : Mischende Transformationen auf Mannigfaltigkeiten unendlichen Maßes . Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 7, 1967, 235-247.

W.BÖGE, K.KRICKEBERG et F.PAPANGELOU : Über die dem Lebesgueschen Maß isomorphen topologischen Maßräume (à paraître).

Table des matières

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités — Année 1966-67

CLASSES RECURRENTES D'UN PROCESSUS DE MARKOV

(J. Azéma, M. Kaplan-Duflo, D. Revuz)

Cet exposé reprend pour l'essentiel les idées introduites dans [1]. On définit la notion de récurrence dans les ouverts de la topologie fine associée au processus.

Cette notion permet d'avoir une "loi de 0-1" et d'introduire des classes récurrentes jouissant de propriétés analogues à celles des chaînes.

Les démonstrations ont cependant été simplifiées et dans certains cas précisées.

Les résultats nouveaux ont trait à la mesurabilité des classes récurrentes et aux rapports entre ces classes et les supports fins des mesures déterminées par les potentiels.

Ces résultats rendent en partie inutile l'introduction des classes (D) considérées dans [1]. Il n'en sera donc pas fait mention ici.

Les notations utilisées sont celles de [3] et [4]. Dans toute la suite nous considérons un processus de Hunt markovien.

I. RECURRENCE : DEFINITION ET PROPRIETES GENERALES.

Proposition 1 - Soit T un temps d'arrêt vérifiant la propriété suivante :

$$(*) \qquad \forall_\mu,\ P_\mu - \text{presque sûrement} : \begin{cases} t + T\circ\theta_t \geq T \\ \lim\limits_{t\to 0} t + T\circ\theta_t = T \end{cases}$$

Alors pour tout temps d'arrêt S,

$$\forall_\mu,\ P_\mu\text{-presque sûrement } S+T\circ\theta_S \geq T$$

Démonstration : L'on a $s + T\circ\theta_s - T \geq 0$ $P_{\mu P_t}$-presque sûrement

ce qui s'écrit encore $s + (T\circ\theta_s - T)\circ\theta_t \geq 0$ P_μ -presque sûrement.

Donc :

$$\forall_\mu,\ P_\mu - \text{presque sûrement} ;\quad t + s + T\circ\theta_{t+s} \geq t + T\circ\theta_t$$

Soit maintenant S_n une suite de temps d'arrêt décroissant vers S, chacun des S_n ne prenant qu'une infinité dénombrable de valeurs.

Il est clair que :

$$S_n + T\circ\theta_{S_n} \geq T. \qquad P_\mu \text{ -presque sûrement;}$$

et que :

$$S_{n+1} + T\circ\theta_{S_{n+1}} \geq S_n + T\circ\theta_{S_n} \qquad P_\mu - \text{presque sûrement.}$$

Mais d'autre part, quel que soit λ positif la fonction

$$\phi_\lambda : x \to E_x\, e^{-\lambda T}$$

est λ-excessive.

Il en résulte d'après la continuité à droite des fonctions : $t \to E_{X_t}\, e^{-\lambda T}$

que :

$$\lim_{n\to\infty} \uparrow P^\lambda_{S_n} \phi_\lambda(x) = P^\lambda_S\ \phi_\lambda(x)$$

et donc que :

$$\lim_{n \to \infty} \uparrow E_x\, e^{-\lambda(S_n + T \circ \theta_{S_n})} = E_x\, e^{-\lambda(S + T \circ \theta_S)}$$

On a donc :

$$\forall x,\ P_x \text{-presque sûrement,} \quad \lim_{n \to \infty} \downarrow S_n + T \circ \theta_{S_n} = S + T \circ \theta_S \ ;$$

l'inégalité cherchée en découle immédiatement.

Proposition 2 - Soit T un temps d'arrêt vérifiant la propriété (*).

Posons :

$$\underline{\underline{R}}_T = \bigcap_{n=o}^{\infty} \{T \circ \theta_n < \infty\}$$

$$\underline{\underline{T}}_T = \bigcup_{n=o}^{\infty} \{T \circ \theta_n = \infty\}$$

Alors quelle que soit la mesure bornée μ , P_μ-presque sûrement,

$$1_{\underline{\underline{R}}_T} = \lim_{t \to \infty} P_{X_t}(T < \infty) = \lim_{t \to \infty} P_{X_t}(\underline{\underline{R}}_T)$$

Démonstration : La fonction

$$\phi(x) = P_x(T < \infty) \quad \text{étant 0-excessive,}$$

$$\forall_\mu \quad Z = \lim_{t \to \infty} \phi(X_t)$$

existe P_μ-presque sûrement en vertu du théorème de convergence des surmartingales positives.

Considérons :

$$P_\mu(T < \infty \,|\, \underline{\underline{F}}_{T \wedge t}) = 1_{(T > t)} P_\mu(T < \infty \,|\, \underline{\underline{F}}_{T \wedge t}) + 1_{(T \leq t)}$$

D'après la proposition 1, P_μ-presque sûrement,

$$(T < \infty) \supset (T \wedge t + T \circ \theta_{T \wedge t} < \infty)$$

Donc :

$$P_\mu(T < \infty \mid \underline{\underline{F}}_{T\wedge t}) \geqq 1_{(T>t)} P_\mu(T \circ \theta_{T\wedge t} < \infty \mid \underline{\underline{F}}_{T\wedge t}) + 1_{(T\leq t)}$$
$$\geqq 1_{(T>t)} \phi(X_{T\wedge t}) + 1_{(T\leq t)}$$
$$\geqq 1_{(T>t)} \phi(X_t) + 1_{(T\leq t)}$$

Si t tend vers l'infini cette inégalité devient

$$1_{(T<\infty)} \geqq 1_{(T=\infty)} Z + 1_{(T<\infty)} \qquad P_\mu\text{-presque sûrement } \forall_\mu.$$

L'on a donc :

$$Z.\ 1_{(T=\infty)} = 0 \qquad P_\mu\text{-presque sûrement } \forall_\mu.$$

En particulier l'on peut prendre pour loi initiale la mesure μP_n.

$P_{\mu P_n}$ est la mesure image de la mesure P_μ par l'application θ_n.

L'on a donc :

$$Z\ 1_{(T = \infty)} = 0 \qquad P_{\mu P_n}\text{-presque sûrement}$$

c'est-à-dire :

$$0 = Z \circ \theta_n .\ 1_{(T=\infty)} \circ \theta_n = Z.1_{(T \circ \theta_n = \infty)} \quad P_\mu\text{-presque sûrement}$$

$$0 = \sup_n Z.\ 1_{(T \circ \theta_n = \infty)} = Z\ 1_{\underline{\underline{I}}_T} \qquad P_\mu\text{-presque sûrement.}$$

D'autre part, de la relation :

$$E_x\ \phi(X_t) = P_x\ (T \circ \theta_t < \infty)$$

on déduit que :

$$E_x\ Z = P_x\ \underline{\underline{R}}_T$$

Comme Z est inférieure ou égale à 1 et qu'elle est nulle sur $\underline{\underline{R}}_T^c$, on a :

$$\forall \mu,\ P_\mu\ \text{-presque sûrement} \quad Z = 1_{\underline{\underline{R}}_T}$$

<u>Notation</u> Si T_A est le temps d'entrée dans un ensemble presque borélien A, les ensembles $\underline{\underline{R}}_{T_A}$, $\underline{\underline{T}}_{T_A}$ seront notés respectivement $\underline{\underline{R}}_A$ et $\underline{\underline{T}}_A$.

<u>Définition</u> Soit $\underline{\underline{V}}_f(x)$ la base de filtre formée des voisinages fins presque boréliens de x.

Un point x sera dit finement récurrent (ou plus brièvement récurrent si aucune confusion n'est à craindre) si

$$\forall V \in \underline{\underline{V}}_f(x) \qquad P_x\, \underline{\underline{R}}_V > 0$$

Il sera dit finement transient dans le cas contraire, i.e.

$$\exists\, V \in \underline{\underline{V}}_f(x) \qquad P_x\, \underline{\underline{R}}_V = 0$$

<u>Proposition 3</u> (Loi du 0-1)

x est finement récurrent si et seulement si :

$$\forall V \in \underline{\underline{V}}_f(x) \qquad P_x\, \underline{\underline{R}}_V = 1$$

<u>Démonstration</u> : Raisonnons par l'absurde et supposons que :

$$V \in \underline{\underline{V}}_f(x) \qquad 0 < P_x\, \underline{\underline{R}}_V < 1$$

La fonction :

$$x \to P_x\, (\underline{\underline{T}}_V) = 1 - P_x\, (\underline{\underline{R}}_V)$$

étant invariante est finement continue et il existe un voisinage fin de x, W, finement fermé presque borélien inclus dans V tel que :

$$a = \inf_{y \in W} P_y\, \underline{\underline{T}}_V > 0$$

Pour P_x-presque tout ω de $\underline{\underline{R}}_W$ on aurait alors d'une part

$$\underline{\lim}\; P_{X_t}\, \underline{\underline{T}}_V \geq a$$

et d'autre part, d'après la proposition 2,

$$\lim_{t \to \infty} P_{X_t}\, \underline{\underline{T}}_V = 1 - \lim_{t \to \infty} P_{X_t}\, \underline{\underline{R}}_V = 1 - 1_{\underline{\underline{R}}_V} \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

Il y a une contradiction puisque $\underline{\underline{R}}_W \subset \underline{\underline{R}}_V$.

Proposition 4 - Soit x un point finement récurrent et (A_t) une fonctionnelle additive. Alors l'on a soit $P_x \left(A_\infty = 0\right) = 1$

soit $P_x \left(A_\infty = \infty\right) = 1$

Démonstration : Remarquons tout d'abord que si x est finement récurrent et si T est un temps d'arrêt vérifiant la propriété (*)

$$P_x \left(T<\infty\right) > 0 \Leftrightarrow P_x \left(T < \infty\right) = 1 \Leftrightarrow P_x \underline{\underline{R}}_T = 1 .$$

En effet la fonction $y \to P_y \left(T<\infty\right)$ étant 0-excessive, il existe un voisinage fin, finement fermé de x, V, tel que :

$$\inf_{y \in V} P_y \left(T < \infty\right) \geq a > 0 .$$

La trajectoires récurrant P_x-presque sûrement dans V, il en résulte que

$$\lim_{t \to \infty} P_{X_t} \left(T < \infty\right) \geq a \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

soit :

$$Z = \lim_{t \to \infty} P_{X_t} \left(T < \infty\right) = 1 \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

et :

$$P_x \left(T < \infty\right) \geq P_x \left(\underline{\underline{R}}_T\right) = E_x Z = 1$$

De plus

$$P_x \left(T < \infty\right) \geq E_x P_{X_t} \left(T < \infty\right) \geq E_x Z$$

Il en résulte que :

$$P_{X_t} \left(T < \infty\right) = 1 \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

et compte tenu de la continuité à droite des fonctions

$$t \to P_{X_t} \left(T < \infty\right) ,$$

on a

$$P_x\left(\forall t \quad P_{X_t}\left(T < \infty\right) = 1\right) = 1$$

Considérons alors le temps d'arrêt

$$\tau_a = \inf\{ t \; ; A_t > a \}$$

τ_a vérifie la propriété (*) car les trajectoires de (A_t) sont continues à droite.

Si quel que soit a :

$$P_x\left(\tau_a < \infty\right) = 0$$

Alors ;

$$A_\infty = 0 \qquad P_x\text{-presque sûrement ;}$$

sinon il existe a tel que :

$$P_x\left(\tau_a < \infty\right) > 0,$$

ce qui entraîne

$$P_x\left(\tau_a < \infty\right) = 1 \; .$$

Définissons par récurrence la suite de temps d'arrêt

$$\tau_a^{(1)} = \tau_a$$

$$\tau_a^{(n)} = \tau_a^{(n-1)} + \tau_a \circ \theta_{\tau_a^{(n-1)}}$$

$$P_x\left(\tau_a^{(n)} < \infty\right) = P_x\left(\tau_a^{(n-1)} < \infty \; ; \tau_a \circ \theta_{\tau_a^{(n-1)}} < \infty\right)$$

$$= E_x\left[1_{\left(\tau_a^{(n-1)} < \infty\right)} \; P_{X_{\tau_a^{(n-1)}}}\left(\tau_a < \infty\right)\right] = P_x\left(\tau_a^{(n-1)} < \infty\right)$$

Il en résulte que :

$$\forall n, \; P_x\left(\tau_a^{(n)} < \infty\right) = 1$$

Mais P_x-presque sûrement, d'après la propriété forte des fonctionnelles additives,

$$A_{\tau_a(n)} = A_{\tau_a(n-1)+\tau_a \circ \theta_{\tau_a(n-1)}} = A_{\tau_a(n-1)} + A_{\tau_a} \circ \theta_{\tau_a(n-1)} (\theta_{\tau_a(n-1)}(\omega)) =$$

$$= A_{\tau_a(n-1)} + (A_{\tau_a}) \circ \theta_{\tau_a(n-1)}$$

Donc :

$$A_{\tau_a(n)} \geqq a + A_{\tau_a(n-1)}$$

Il en résulte que :

$$A_{\tau_a(n)} \geqq na \qquad P_x\text{-presque sûrement.}$$

L'on a donc :

$$P_x \left(A_\infty = \infty \right) = 1.$$

Corollaire des propositions 3 et 4 -

a) Si x est finement récurrent et si A est un ensemble presque analytique tel que :

$$P_x \left(T_A < \infty \right) > 0$$

Alors

$$P_x \left(\underline{R}_A \right) = 1$$

En particulier une condition nécessaire et suffisante pour que x soit ponctuellement récurrent est que x soit finement récurrent et que :

$$P_x \left(T_{\{x\}} < \infty \right) > 0$$

b) Si $U^\circ(x,A) > 0$ alors P_x-presque toutes les trajectoires séjournent un temps de mesure de Lebesgue infinie dans A. On a donc bien évidemment la condition plus faible :

$$U^\circ(x,A) = \infty$$

On peut montrer une réciproque à ce dernier point c'est l'objet de la

Proposition 5 - Un point x est finement transient si et si seulement il existe une fonction f positive universellement mesurable bornée vérifiant

$$0 < U^0 f(x) < \infty$$

Démonstration : Il résulte de la proposition 4 que si x est finement récurrent :

$$U^0 f(x) > 0 \Rightarrow U^0 f(x) = \infty$$

La condition est donc suffisante.

Réciproquement si x est transient il existe un voisinage fin presque borélien de x tel que :

$$P_x \left(\underline{\underline{R}}_V\right) = 0$$

Considérons alors la fonction $u(x) = P_x \left(T_V < \infty \right)$

La fonction u est excessive et l'on sait d'après la proposition 2 que :

$$\lim_{t \to \infty} P_t \, u(x) = o$$

Il en résulte que :

$$\lambda U^\lambda u \leqq u$$

$$\lambda U^\lambda u(x) < u(x)$$

Dans l'équation résolvante :

$$U^\lambda u = U^\varepsilon u + (\varepsilon - \lambda) U^\varepsilon U^\lambda u = U^\varepsilon (u - \lambda U^\lambda u) + \varepsilon U^\varepsilon U^\lambda u$$

faisons tendre ε vers 0.
Il vient :

$$\infty > U^\lambda u(x) \geqq U^0 (u - \lambda U^\lambda u) (x)$$

La fonction $U - \lambda U^\lambda u$ est positive, strictement positive en x et finement continue.
Son 0-potentiel est strictement positif en x; elle vérifie donc la propriété demandée.

II . CLASSES D'UN PROCESSUS DE MARKOV.

Définitions - Nous dirons que x conduit à y, ce que nous noterons :

$$x \to y$$

si

$$\forall V \in \mathcal{V}_f(y) \qquad P_x\left(T_V < \infty\right) > 0 .$$

Nous dirons que x communique avec y ce que nous noterons :

$$x \leftrightarrow y$$

si

$$x \to y \quad \text{et} \quad y \to x.$$

Proposition 6 - La relation $x \leftrightarrow y$ est une relation d'équivalence.

Démonstration : Supposons que $x \to y$ et $y \to z$.
Soit :

$$V \in \mathcal{V}_f(z).$$

L'on a :

$$E_y\, e^{-\lambda T_V} > 0$$

Donc il existe un voisinage fin presque borélien finement fermé de y, W tel que :

$$\inf_{u \in W} E_u\, e^{-\lambda T_V} \geqq a > 0$$

L'on a alors :

$$E_x\, e^{-\lambda T_V} \geqq E_x\, e^{-\lambda (T_W + T_V \circ \theta_{T_W})}$$

$$\geqq E_x\, e^{-\lambda T_W} \left(E_{X_{T_W}}\, e^{-\lambda T_V}\right) \geqq a\, E_x\, e^{-\lambda T_W} > 0$$

ce qui montre que :

$$x \to z .$$

Définition

Les classes déquivalence de cette relation seront appelées classes du processus.

<u>Proposition 7</u> - Si x est finement récurrent et si x conduit à y alors y est finement récurrent et y conduit à x.

Une classe contenant un point récurrent sera dite classe récurrente. Il est clair alors que tous les points d'une classe récurrente sont récurrents et que la classe C contenant un point x_o récurrent est :

$$C = \{x \mid x_o \to x\} .$$

<u>Démonstration</u> : Supposons qu'il existe V appartenant à $\mathcal{V}_f(y)$ tel que :

$$P_y (\underline{\underline{R}}_V) = 0$$

Alors il existe $W \in \mathcal{V}_f(y)$ tel que :

$$\sup_{z \in W} P_z(\underline{\underline{R}}_V) \leqq \frac{1}{2}$$

Mais puisque $P_x(\underline{\underline{R}}_W) = 1$, on a :

$$\lim_{t \to \infty} P_{X_t} \underline{\underline{R}}_V = o \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

et d'autre part :

$$\lim_{t \to \infty} P_{X_t} \underline{\underline{R}}_V = 1 \qquad P_x\text{-presque sûrement.}$$

Il reste à montrer que y conduit à x.

Supposons qu'il existe $V \in \mathcal{V}_f(x)$ tel que :

$$P_y \left(T_V < \infty\right) < 1$$

Alors il existe $W \in \mathcal{V}_f(y)$ tel que :

$$\sup_{z \in W} P_z \left(T_V < \infty\right) \leqq a < 1$$

Puisque $P_x \left(\underline{\underline{R}}_W\right) = 1$ on aurait :

$$\lim_{t \to \infty} P_{X_t} \left(T_V < \infty\right) = 0 \qquad P_x\text{-presque sûrement}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que x est finement récurrent.

Remarque :

- Il est clair d'après le théorème de convergence des surmartingales positives que toute fonction 0-excessive est constante sur C.

- Réciproquement, si toute fonction excessive est constante, tout point est récurrent et l'espace E est formé d'une classe récurrente (nous dirons alors que le processus est finement récurrent).

- En effet, si O est un ouvert fin presque borélien, la fonction

$$y \to P_y \left(T_O < \infty \right)$$

est égale à 1 sur O donc partout.

Il résulte alors trivialement de la proposition 2 que le processus est récurrent.

- Il en résulte que le mouvement brownien Plan est récurrent.

Note : On peut démontrer les résultats plus précis suivants : cf (1)

Soient x et y deux points de E et supposons que pour toute fonction excessive f :

$$f(x) = f(y)$$

Alors x et y sont récurrents et appartiennent à la même classe.

- Soit $V_0(x)$ le filtre des voisinages de x dans la topologie engendrée par les fonctions 0-excessives.

En général $V_f(x)$ est strictement plus fin que $V_0(x)$, et l'on démontre que :

$$V_f(x) = V_0(x)$$

si et seulement si x est finement transient ou est une trappe.

En particulier la topologie fine est engendrée par les fonctions 0-excessives si et seulement si les seuls points finement récurrents sont des trappes.

Proposition 8 - Les classes récurrentes sont finement fermées et boréliennes.

Démonstration : Soit $x_o \in C$

$x \in \tilde{C}$ où $\tilde{C}$ est l'adhérence fine de C.

Tout voisinage fin de x rencontrant C il est clair que $x_o \to x$ donc que $x \in C$.

Pour démontrer le deuxième point, donnons une autre caractérisation de C.

$$C = \{x \mid U^\lambda (x\ .) \ll U^\lambda (x_o\ .)\}$$

Montrons tout d'abord que si y et y' sont deux points de C les mesures $U^\lambda (y\ .)$ et $U^\lambda (y'.)$ sont équivalentes. Soit en effet A un borélien vérifiant $U^\lambda (y,A) > o$. Considérons la fonctionnelle additive :

$$\int_o^t 1_A (X_s)\, ds$$

et le changement associé τ_t. Il existe un nombre réel a tel que :

$$P_y \left(\tau_a < \infty\right) = 1.$$

La fonction :

$$z \to P_z \left(\tau_a < \infty\right)$$

étant 0-excessive donc constante sur C, l'on a aussi :

$$P_{y'} \left(\tau_a < \infty\right) = 1,$$

ce qui suffit à démontrer que :

$$U^\lambda (y', A) > 0.$$

Si maintenant $x_o \in C$ et $x \notin C$, il existe un voisinage fin presque borélien de x, V, tel que :

$$U^\lambda (x_o, V) = 0.$$

Sinon en effet, l'on aurait $x_o \to x$ donc $x \in C$.

Cet ensemble V étant un voisinage fin de x, il satisfait à $U^\lambda (x,V) > 0$.

Ce qui montre que la mesure $U^\lambda (x.)$ n'est pas absolument continue par rapport à la mesure $U^\lambda (x_o\ .)$.

Pour simplifier les notations appelons m la mesure $U^\lambda (x_o\ .)$. Effectuons la décomposition de Lebesgue de $U^\lambda (x\ .)$ par rapport à m

$$U^\lambda (x\ .) = U_1^\lambda (x\ .) + U_2^\lambda (x\ .)$$

où $U_1^\lambda (x\ .)$ est absolument continue par rapport à m et $U_2^\lambda (x\ .)$ est étrangère à m

En appliquant un procédé classique utilisant la convergence des surmartingales on peut trouver une densité

$$U_1^\lambda (x,y) \quad \text{de} \quad U_1^\lambda (x\ .)$$

par rapport à V. Plus précisément considérons les fonctions boréliennes.

$$\phi_n (x,y) \begin{cases} = \sum\limits_{A \in \mathcal{P}_n} \dfrac{U^\lambda (x,A)}{m(A)} 1_A (y) & \text{si } m(A) > 0 \\ = 0 & \text{si } m(A) = 0 \end{cases}$$

où $(\mathcal{P}_n)$ est une suite croissante de partitions de E, choisies de manière que la σ-algèbre engendrée par $\cup_n \mathcal{P}_n$ soit la tribu borélienne de E.

Alors on sait que, quel que soit x, les fonctions ϕ_n convergent sauf sur un ensemble de m-mesure nulle en y, vers une fonction $\tilde{\phi}(x,y)$ vérifiant :

$$\int_A \tilde{\phi}(x,y)\, m(dy) = U_1^\lambda (x, A)$$

quel que soit l'ensemble borélien A.
Dans l'espace $E \times E$ considérons l'ensemble B biborélien de convergence de la suite ϕ_n.

Posons : $\quad \phi = \lim\limits_n \phi_n$ sur B

$\phi = 0$ sur B^c

$$\forall x \qquad \{y, \phi (x,y) \neq \tilde{\phi}(x,y)\} \quad \text{est de m-mesure nulle.}$$

Et l'on a donc encore :

$$\int_A \phi(x,y)\, m(dy) = U_1^\lambda(x,A)$$

quel que soit le borélien A, ce qui montre que la fonction :

$x \to U_1^\lambda (x,A)$ est borélienne quel que soit A borélien.

Il en est alors de même de la fonction :

$$x \to U_2^\lambda (x,A) = U^\lambda (x,A) - U_1^\lambda (x,A)$$

Il en résulte que C qui est égal à l'ensemble $\{x\ ;\ U_2^\lambda (x,E) = 0\}$ est borélien.

Sous l'hypothèse (L) de Meyer, cf. [3] , on a la :

Proposition 9 - Soit m une mesure positive ne chargeant pas les semi-polaires. Il existe alors un support fin de m, c'est-à-dire un plus petit fermé fin presque borélien portant m.

Démonstration : Soit $\mathcal{F}$ la famille filtrante décroissante des fermés fins presque boréliens F vérifiant $m(F^c) = 0$.

Considérons la fonction :

$$\phi = \inf_{F \in \mathcal{F}} E.\ e^{-\lambda T_F}$$

Sous l'hypothèse (L) il existe une suite F_n de $\mathcal{F}$ tels que :

$$\text{reg}\left(\inf_n E.\ e^{-\lambda T_{F_n}}\right) \leqq \phi$$

Soit $A = \bigcap_n F_n$, $A \in \mathcal{F}$; l'on a les inégalités :

$$\phi(.) \leqq E.\ e^{-\lambda T_A} \leqq \text{reg}\left(\inf_n E.\ e^{-\lambda T_{F_n}}\right) \leqq \phi(.)$$

ce qui prouve que $\phi = E.\ e^{-\lambda T_A}$.

Soit A_r l'ensemble des points réguliers pour A ; puisque m ne charge pas les semi-polaires, $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A_r \in \mathcal{F}$ car $A - A_r$ est semi-polaire. Il en résulte que :

$$\forall x \qquad E_x\ e^{-\lambda T_{A_r}} = E_x\ e^{-\lambda T_A} \quad \text{donc} \quad (A_r)_r = A_r \ .$$

Montrons que (A_r) est le support fin de m. Pour cela il reste à montrer que si B est un fermé fin presque borélien de $\mathcal{F}$ inclus dans A_r alors $B = A_r$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soit $x \in A_r - B$. On aurait alors :

$$E_x\ e^{-\lambda T_{A_r}} = 1 \qquad \text{car} \qquad x \in A_r$$

et $\qquad E_x e^{-\lambda T_B} < 1 \qquad$ car B est un fermé fin

contredisant ainsi l'hypothèse

$$E_x e^{-\lambda T_{A_r}} = \inf_{F \in \mathcal{F}} E_x e^{-\lambda T_F}$$

$U^\lambda(x_o, .)$ étant une mesure ne changeant pas les semi-polaires on peut montrer la

<u>Proposition 10</u> - Soit x_0 un point récurrent. La classe récurrente déterminée par x_o est le support fin de la mesure $U^\lambda(x_o .)$.

Il en résulte que C est un ensemble absorbant, i.e:

$$\forall x \in C \quad P_x \left(\forall t \; X_t \in C \right) = 1$$

<u>Démonstration</u> : Soit S le support de $U^\lambda(x_o .)$. Soit F un fermé fin universellement mesurable contenu dans C. Si $F \neq C$, F^c est un ouvert fin rencontrant C. L'on a donc $U^\lambda(x_o, F^c) > 0$. Il en résulte que $S \supset C$.

D'autre part, quel que soit x n'appartenant pas à C il existe un ouvert fin presque borélien G(x) vérifiant $U^\lambda(x_o, G(x)) = 0$ d'après la remarque suivant la proposition 4 il en résulte que :

$$S \subset G(x)^c \qquad \forall x \in C^c$$

Donc $S \subset C$

C est alors absorbant. Si en effet l'on avait $P_x\left(T_{C^c} < \infty \right) > 0$ pour un x de C alors l'on aurait $P_x\left(\underline{R}_{C^c} \right) = 1$ et puisque C^c est un ouvert fin $U^\lambda(x, C^c) > 0$ ce qui n'est pas possible puisque C porte $U^\lambda(x,.)$.

<u>Remarque</u> : La proposition 10 est inexacte si l'on ne se place pas sous l'hypothèse (L) comme le montre l'exemple de [1] page 203.

CAS DE PROCESSUS A RESOLVANTE FORTEMENT FELLERIENNE.

Dans tout ce paragraphe on dira qu'un point est récurrent si
$P_x(\underline{\underline{R}}_V) = 1 \quad \forall V$ voisinage ouvert de x,
la notion de voisinage étant alors relative à la topologie initiale de E.

Compte tenu de la continuité des fonctions invariantes bornées et de la semi-continuité inférieure des fonctions excessives les démonstrations des propositions 3 - 4 - 5 s'étendent immédiatement aux ouverts de la topologie initiale et l'on a la

Proposition 11 - x est transient si et seulement si il existe une fonction positive continue bornée vérifiant

$$0 < U^0 f(x) < \infty$$

Proposition 12 - x est récurrent si et seulement si il est finement récurrent. De plus si quel que soit l'ouvert G contenant y,

$$P_x\left(T_G < \infty\right) > 0 \qquad \text{alors} \qquad x \to y.$$

Soit en effet g borélienne bornée. $U^\lambda g$ est alors une fonction continue bornée et l'on a si $\varepsilon < \lambda$

$$\forall \mu > 0 \qquad U^\varepsilon g \geq \mu \; U^{\lambda+\mu} \; U^\varepsilon g.$$

Il résulte alors de la proposition 11 que :

$$U^\lambda g(x) > 0 \Longrightarrow U^0 g(x) = \infty$$

ce qui est le critère analytique de récurrence fine.

Supposons maintenant que pour tout ouvert G contenant y

$$P_x\left(T_G < \infty\right) > 0 .$$

On a alors pour toute fonction continue positive, non nulle en x,

$$U^\lambda f(x) > 0$$

Soit V un voisinage fin presque borélien de y.

$$U^{\varepsilon}(x,V) \geq \mu \, U^{\lambda+\mu} \, U^{\varepsilon}(x,V)$$

or $U^{\lambda+\mu} \, 1_V$ est une fonction strictement positive en y et continue

donc $$U^{\varepsilon}(x,V) > 0$$

Il résulte clairement des propositions 11 et 12 la

Proposition 13 - Pour un processus à résolvante fortement Fellérienne

a) Les classes récurrentes sont fermées ;

b) la classe récurrente contenant un point x_o est le support (au sens des mesures de Radon) de la mesure $U^{\lambda}(x_o .)$.

Corollaires :

- Le processus de Cauchy sur la droite est finement récurrent.
- Les fonctions excessives du processus de Cauchy sont constantes.

APPENDICE

Deux contre exemples - Considérons un processus de Poisson X_P, symétrique, de pas P et de paramètre 1. Soient p_P^{*t} son semi-groupe de convolution et $e^{t\,\phi_P(\lambda)}$ sa fonction caractéristique :

$$e^{t\phi_P(\lambda)} = e^{t(\cos \lambda P - 1)}$$

D'après un théorème limite local ((Gnedenko-Kolmogoroff)) $p_P^{*t}(o)$ est équivalent à $t^{-1/2}$ pour t infiniment grand.

Soit maintenant le processus :

$$Y_t = (X_{\sqrt{3}})_t + (X_{\sqrt{5}})_t + (X_{\sqrt{7}})_t$$

où les trois processus de Poisson considérés sont indépendants.

D'après le critère de Kingman (5) ce processus est récurrent dans les ouverts, car :

$$\frac{1}{\psi_{\sqrt{3}}(\lambda) + \psi_{\sqrt{5}}(\lambda) + \psi_{\sqrt{7}}(\lambda)} \sim \frac{1}{\lambda^2} \quad \frac{2}{3 + 5 + 7}$$

pour λ infiniment petit.

Par contre ce processus est finement et ponctuellement transient. En effet, $\{0\}$ est un ouvert fin et comme $p_y^{*t}(0)$ est équivalent à : $t^{-3/2}$

$$\int_0^\infty p_y^{*t}(0)\, dt < \infty$$

Ce processus peut également servir à montrer que l'on n'a pas en général une loi du tout ou rien pour la récurrence dans les ouverts.

Soit $\sigma_{\{0\}}$ le temps de sortie de $\{0\}$. $X_{\sigma_{\{0\}}} \in \{-\sqrt{7}, -\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\}$ supposons que pour ces six points on ait :

$$P_x\left(T_{\{0\}} < \infty\right) = 1$$

et considérons la suite de temps d'arrêt

$$T_1 = \sigma_{\{0\}}$$

$$T_2 = \sigma_{\{0\}} + T_{\{0\}} \circ \theta\sigma_{\{0\}}$$

$$T_{2n} = T_{2n-1} + T_{\{0\}} \circ \theta\, T_{2n-1}$$

on a $$P_0\left(T_{2n} < \infty \right) = E\left(P_0\left(T_{2_n} < \infty \mid \mathcal{F}_{T_{2n-1}}\right)\right)$$

$$= E\left(P_{X_{T_{2n-1}}}\left(T_{\{0\}} < \infty \right)\right) = 1$$

Le point 0 serait donc récurrent. Il existe donc un des six points, Soit x, tel que :

$$P_x\left(T_{\{0\}} < \infty\right) < 1$$

et l'on a d'autre part :

$$P_x\left(T_{\{0\}} < \infty\right) > o$$

Le processus tué à l'instant $T_{\{0\}}$ n'admet pas de loi du tout ou rien pour la récurrence dans les ouverts.

B I B L I O G R A P H I E

(1) J. AZEMA, M. KAPLAN-DUFLO, D. REVUZ : Récurrence fine des processus de Markov. Ann. Inst. Henri Poincaré. Vol. II n° 3 - 1966.

(2) GNEDENKO - KOLMOGOROFF : Limit distributions for sums of independent Random variables. Addison - Wesley - 1954.

(3) P.A. MEYER : Fonctionnelles Multiplicatives et Additives de Markov. Ann. Inst. Fourier 12 - (1962).

(4) P.A. MEYER : Processus de Markov 1967. Springer-Verlag

(5) J.F.C. KINGMAN : Recurrence properties of processes with stationnary independant increments. J. Austral. Math. Soc. t 4 - 1964 - pp. 223-228.

° °
°

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

LE RETOURNEMENT DU TEMPS : COMPLÉMENTS À L'EXPOSÉ DE M.WEIL

(P.Cartier, P.A.Meyer, M.Weil)

Nous reprenons la question du retournement du temps, exposée au séminaire par WEIL en Novembre 1966 d'après les travaux de NAGASAWA, KUNITA-WATANABE. Une partie des résultats ci-dessous a fait l'objet d'un exposé de CARTIER au Printemps de 1967.

Les contributions des trois auteurs se répartissent à peu près de la manière suivante : la présentation des temps de retour et des familles de tribus $\hat{\underline{\underline{F}}}_t$ au paragraphe 1 est due pour l'essentiel à CARTIER ; il en est de même pour le §2 (forme améliorée du lemme principal de NAGASAWA). Le théorème de retournement du temps sans hypothèse fellérienne est l'apport de MEYER. Enfin, l'étude du comportement des fonctions coexcessives sur les trajectoires est due à WEIL.

§ 1. TEMPS DE RETOUR

HYPOTHÈSES .- $(P_t)_{t>0}$ est un semi-groupe de transition sous-markovien sur un espace localement compact à base dénombrable E. **On notera que le temps t est supposé <u>strictement</u> >0.**

Pour tout $x \in E$, il existe un processus markovien $(X_t)_{t>0}$, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition et $(\varepsilon_x P_t)_{t>0}$ comme loi d'entrée, et dont presque toutes les trajectoires possèdent les propriétés suivantes :

a) Continuité à droite sur $]0,\infty[$ (et donc existence d'une durée de vie ζ)

b) Existence de limites à gauche sur $]0,\zeta[$ (dans E) .

On peut alors construire de la manière habituelle une réalisation canonique du semi-groupe : les notations $\Omega, \underline{\underline{F}}, P^\mu, \underline{\underline{F}}_t, X_t, \theta_t$ auront leurs significations usuelles : les seules différences tiennent au fait que X_t et $\underline{\underline{F}}_t$ ne sont pas définis pour t=0, et que l'existence de $X_{\zeta-}$ n'est pas exigée.

DÉFINITION.- Une variable aléatoire positive L sur Ω est un temps de retour si

1) $L(\omega)<\infty \Rightarrow L(\omega)\leqq \zeta(\omega)$

2) Pour tout $t\geqq 0$, on a $L\circ\Theta_t = (L-t)^+$

Des exemples classiques de temps de retour sont : la durée de vie ζ ; le dernier instant où l'on passe dans un ensemble presque-borélien G donné ($G\subset E$)

$$L(\omega) = \sup \{ t : X_t(\omega)\in G \} \quad (0 \text{ par convention si } \{\ldots\}=\emptyset)$$

DÉFINITION.- Soit L un temps de retour. On définit le processus retourné gauche $(\tilde{X}_t)$ de X à l'instant L par la formule

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \partial & \text{si } L(\omega)=\infty \text{ ou } t\geqq L(\omega) \quad (t>0) \\ X_{L(\omega)-t}(\omega) & \text{si } t<L(\omega)<\infty \end{cases}$$

et on définit le processus retourné $\hat{X}$ par la formule

$$\hat{X}_t = (\tilde{X}_t)_+ (= (X_{L-t})_- \text{ si } t<L(\omega)<\infty) \qquad (t>0)$$

Si X_{L-} existe p.s. sur $\{0<L<\infty\}$ (en particulier si $L<\zeta$ sur cet ensemble), on pose $\hat{X}_0 = X_{L-}$ sur $\{0<L<\infty\}$, $\hat{X}_0 = \partial$ sur $\{L=0\}$ et sur $\{L=\infty\}$.

LEMME 1.- Si L est un temps de retour, et si $s\geqq 0$, la variable aléatoire $L'=(L-s)^+$ est un temps de retour et on a (les ' servant à indiquer le retournement à L')

$$\tilde{X}'_t = \tilde{X}_{s+t} \qquad \hat{X}'_t = \hat{X}_{s+t}$$

DÉMONSTRATION.- Nous prouverons seulement la première assertion, la seconde étant triviale (la première aussi, d'ailleurs). La propriété 1) de la définition des temps de retour est évidemment satisfaite, et pour la seconde on a

$$(L-s)^+\circ\Theta_t = (L\circ\Theta_t-s)^+=((L-t)^+-s)^+= [(L-t-s)\vee(-s)]\vee 0 =(L-t-s)^+$$

d'où le résultat.

LEMME 2.- Soient $s>0$, $u\geqq 0$. On a $\tilde{X}_s\circ\Theta_u = \tilde{X}_s$ sur $\{s+u\leqq L\}$, $\tilde{X}_s\circ\Theta_u = \partial$ sur $\{s+u>L\}$. On a $\hat{X}_s\circ\Theta_u = \hat{X}_s$ sur $\{s+u<L\}$.

DÉMONSTRATION.- Il suffira de traiter le cas de $\tilde{X}_s$, en supposant $u>0$ (le cas $u=0$ est trivial).

1) Si $s+u>L$, $u\geqq L$, on a $L\circ\theta_u=0$, donc $\tilde{X}_s\circ\theta_u = \partial$

2) Si $s+u>L$, $u<L$, on a $L\circ\theta_u=L-u$, donc $s>L\circ\theta_u$ et $\tilde{X}_s\circ\theta_u = \partial$

3) Si $s+u \leqq L$, on a $u<L$, donc $L\circ\theta_u = L-u$ et $s<L\circ\theta_u$. Alors ou bien $L=\infty$ (et alors $L\circ\theta_u=L-u=\infty$), et dans ce cas $\tilde{X}_s\circ\theta_u = \tilde{X}_s = \partial$, ou bien $L<\infty$ (et alors $L\circ\theta_u<\infty$) et on a dans ce cas
$\tilde{X}_s\circ\theta_u(\omega) = X_{L(\theta_u\omega)-s}(\theta_u\omega) = X_{L(\theta_u\omega)-s+u}(\omega) = X_{L(\omega)-s}(\omega)=\tilde{X}_s(\omega)$.
Cela amène à poser la définition suivante

DÉFINITION.- <u>Pour tout</u> $s\geqq 0$ <u>on désigne par</u> $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$ <u>la tribu constituée par les</u> $A\in\underline{\underline{F}}$ <u>tels que</u>

$$\forall\ u\geqq 0 \qquad \theta_u^{-1}(A)\cap\{s+u<L\} = A\cap\{s+u<L\}$$

LEMME 3.- a) <u>La famille de tribus</u> $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$ <u>est croissante et continue à droite</u> ; $\hat{X}_s$ <u>est</u> $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$<u>-mesurable</u>.

b) <u>Si</u> $t\geqq 0$, <u>la variable aléatoire</u> $X_{(L-s)^+ +t}$ <u>est</u> $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$<u>-mesurable</u>(*).

c) <u>Si</u> T <u>est un temps d'arrêt de la famille</u> $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, $(L-T)^+$ <u>est un temps de retour</u> .(**)

DÉMONSTRATION.- a) Supposons $s<t$, et soit $A\in\hat{\underline{\underline{F}}}_s$. Pour $u\geqq 0$, A et $\theta_u^{-1}(A)$ ont même intersection avec $\{s+u<L\}$, donc a fortiori avec $\{t+u<L\}$. Si $A\in\hat{\underline{\underline{F}}}_{s+}$, A et $\theta_u^{-1}(A)$ ont même intersection avec $\{s+u+\varepsilon<L\}$ pour tout $\varepsilon>0$, donc aussi avec $\{s+u<L\}$. Le fait que $\hat{X}_s$ est $\hat{\underline{\underline{F}}}_s$-mesurable est la seconde assertion du lemme 2.

b)Nous avons sur $\{s+u<L\}$ $X_{(L-s)^+ +t}\circ\theta_u = X_{(L\circ\theta_u-s)^+ +t+u} =$
$X_{(L-u-s)^+ +t+u} = X_{(L-u-s)+t+u} = X_{L-s+t} = X_{(L-s)^+ +t}$, d'où le résultat.

c) La première propriété de la définition des temps de retour est évidente, vérifions la seconde. Le fait que T est un temps d'arrêt s'énonce :

(*) D'une manière plus intuitive : tout événement " postérieur à L-s " pour le processus X est "antérieur à s" pour le processus retourné $\hat{X}$. (**) Variante d'un résultat de NAGASAWA .

quels que soient $s>0$, $u\geqq 0$, $\{T\leqq s\}\cap\{s+u<L\}=\{T\circ\theta_u\leqq s\}\cap\{s+u<L\}$

Plaçons nous sur $\{T+u<L\}$, et prenons s à peine plus grand que T : il vient que $T\circ\theta_u \leqq T$ sur $\{T+u<L\}$. Mais alors on a aussi $T\circ\theta_u+u<L$, et en prenant s à peine plus grand que $T\circ\theta_u$, on trouve que $T\leqq T\circ\theta_u$ sur $\{T+u<L\}$, d'où

$$T=T\circ\theta_u \quad \text{sur } \{T+u<L\}, \text{ et de même sur } \{T\circ\theta_u+u<L\}$$

Mais alors, sur $\{T+u<L\}\cup\{T\circ\theta_u+u<L\}$, on a

$$(L-T)^+\circ\theta_u = (L\circ\theta_u-T\circ\theta_u)^+=(L-u-T\circ\theta_u)^+=(L-u-T)^+ = ((L-T)^+-u)^+$$

et la seconde propriété de la définition des temps de retour est satisfaite sur cette réunion. Sur le complémentaire de la réunion, on a

$$T+u\geqq L, \text{ donc } ((L-T)^+-u)^+ = 0$$
$$T\circ\theta_u+u \geqq L \text{ , donc } T\circ\theta_u\geqq L\circ\theta_u \text{ et } (L-T)^+\circ\theta_u=0$$

L'égalité est encore vraie, et le lemme est établi.

REMARQUE.- Le caractère canonique des processus n'a pas vraiment été utilisé, et il ne le sera pas davantage dans la suite : ce qui compte, c'est le caractère markovien du processus (X_t) - qui n'est d'ailleurs pas encore intervenu - et l'identité $X_s\circ\theta_t = X_{s+t}$.
Par exemple, posons $W=\mathbb{R}_+\times\Omega$ et , si $w=(t,\omega)$:

$$X_s(w) = \begin{cases} X_s(\omega) & \text{si } s<t \\ \partial & \text{si } s\geqq t \end{cases} \quad ; \quad \theta_u w = ((t-u)^+,\ \theta_u\omega)$$

On vérifie alors aussitôt que $X_s\circ\theta_u=X_{s+u}$. On sait que si l'on munit W de la famille de tribus $\underline{\underline{F}}_t\times\underline{\underline{B}}_t$ (*), des mesures $P^\mu\times\eta$ (où η est exponentielle de paramètre p) on obtient un processus de Markov admettant comme semi-groupe de transition le semi-groupe $(e^{-pt}P_t)$
Soit L la projection de W sur $\mathbb{R}_+$: la définition même de θ_u sur Ω exprime que L est un temps de retour. La remarque que l'on peut retourner le temps à partir de L est très utile : elle est due à J.WALSH, et nous a été communiquée par M.CHUNG.

(*) $\underline{\underline{B}}_t$ est la tribu sur $\mathbb{R}_+$ engendrée par les boréliens de $[0,t]$.

§2 .- LE LEMME DE NAGASAWA

Soit ϕ une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}_+$; nous poserons, si f est universellement mesurable positive sur E , nulle en ∂

$$P_\phi f(x) = \int_0^\infty \phi(t)P_t f(x)dt$$

D'autre part, nous désignerons par μ une loi de probabilité sur E, par ν la mesure μU [mais tout ce qui suit s'étend aussitôt au cas où l'on désigne par (μ_t) une loi d'entrée, par ν la mesure $\int_0^\infty \mu_t dt$, à condition de remplacer le symbole E^μ par l'espérance relative au processus qui admet (μ_t) comme loi d'entrée].

LEMME 4.- f <u>et</u> ϕ <u>ayant les significations indiquées ci-dessus, soit</u> H <u>une variable aléatoire positive</u> $\hat{\underline{\underline{F}}}_r$<u>-mesurable</u> $(r \geqq 0)$. <u>Posons</u>

$$h_\phi = E^\cdot[\phi\circ(L-r).H.I_{\{r<L<\infty\}}]$$

<u>On a alors</u>

$$\int_0^\infty \phi(t)E^\mu[f\circ\tilde{X}_{r+t}.H]dt = \int_E \nu(dy)f(y)h_\phi(y) = \langle f,h_\phi\rangle_\nu \ .$$

<u>On peut remplacer dans cette formule</u> $\tilde{X}$ <u>par</u> $\hat{X}$.

DÉMONSTRATION.- **La dernière** assertion est évidente (le remplacement de $\tilde{X}$ par $\hat{X}$ ne modifie l'espérance sous le signe $\int$ que pour un **ensemble** dénombrable de valeurs de t). D'autre part, nous pouvons nous borner au cas où r=0 : le cas général s'y ramène en considérant le temps de retour $(L-r)^+$. Le premier membre vaut alors

$$\int_0^\infty \phi(t)dt\int f\circ X_{L-t}I_{\{t<L<\infty\}}H\, dP^\mu =$$

$$\int_{\{L<\infty\}} H\, dP^\mu \int_0^L f\circ X_{L-t}\phi(t)dt = \int_{\{L<\infty\}} H\, dP^\mu \int_0^L f\circ X_v\ \phi(L-v)dv$$

où L peut être considéré comme exclu de l'intervalle d'intégration

$$= \int_0^\infty dv \int_\Omega H.f\circ X_v.\phi(L-v).I_{\{v<L<\infty\}}dP^\mu$$

mais l'expression sous le signe $\int_\Omega$ est égale à $[H.\phi(L).I_{\{0<L<\infty\}}]\circ\Theta_v f\circ X_v$, de sorte que cette intégrale est égale à $E^\mu[f\circ X_v.h_\phi\circ X_v]$ (propriété de Markov simple) ; d'où aussitôt le résultat.

LEMME 5.- a) <u>Avec les notations du lemme</u> 4 <u>on a si</u> $s>r$

$$\int_0^\infty \phi(t)E^\mu[f\circ\tilde{X}_{s+t}.H]dt = \langle f, P_{s-r}h_\phi \rangle_\nu$$

<u>où l'on peut remplacer</u> $\tilde{X}$ <u>par</u> $\hat{X}$.

b) <u>Soit</u> η <u>une seconde fonction borélienne positive sur</u> $\overline{\mathbb{R}}_+$; <u>on a</u> $P_\eta h_\phi = h_{\phi*\eta} = P_\phi h_\eta$.

DÉMONSTRATION.- Posons $s=r+u$; comme $H\in\hat{\underline{\underline{F}}}_s$, nous avons le droit de remplacer r par s dans la formule précédente, et il vient

$$\int_0^\infty \phi(t)E^\mu[f\circ\tilde{X}_{s+t}.H] = \int\nu(dx)f(x)E^x[\phi\circ(L-s).H.I_{\{s<L<\infty\}}]$$

Mais $I_{\{r<L<\infty\}}\circ\Theta_u = I_{\{s<L<\infty\}}$, et comme $H\in\hat{\underline{\underline{F}}}_r$ il en résulte que l'expression sous le symbole E^x est égale à $[\phi\circ(L-r).H.I_{\{r<L<\infty\}}]\circ\Theta_u$ L'assertion a) découle alors de la propriété de Markov.

Nous venons de voir que $P_{s-r}h_\phi = E^\cdot[\phi\circ(L-s).H.I_{\{s<L<\infty\}}]$. Par conséquent, si η est borélienne positive

$$P_\eta h_\phi = \int_r^\infty \eta(s-r)P_{s-r}h_\phi ds = E^\cdot[\int_r^\infty \eta(s-r)\phi(L-s)HI_{\{s<L<\infty\}}ds]$$

$$= E^\cdot[I_{\{r<L<\infty\}}H \cdot \int_r^L \eta(s-r)\phi(L-s)ds] = h_{\eta*\phi}$$

(où η et ϕ sont identifiées à des fonctions sur $\mathbb{R}$ nulles sur la demi-droite négative) . La dernière relation résulte de la symétrie du produit de convolution.

§3.- LE RETOURNEMENT DU TEMPS

HYPOTHÈSE .- (P_t) satisfaisant à l'hypothèse du §1, on considère une loi μ, on pose $\nu=\mu U$, et on suppose que ν <u>est une mesure de Radon</u>(*). On introduit un second semi-groupe $(\hat{P}_t)$ - où le ^ indique que l'on utilise la notation des conoyaux - <u>satisfaisant également à l'hypothèse du</u> §1 . On désigne par (U_p) et $(\hat{U}_p)$ les deux résolvantes, et on suppose que l'on a dualité par rapport à ν :

$\langle f,U_pg\rangle_\nu = \langle f\hat{U}_p,g\rangle_\nu$ si f et g sont universellement mesurables positives .

(*) Autrement dit, $\nu(K)<\infty$ pour tout compact K.

REMARQUES.- a) Soit ϕ une fonction borélienne positive sur $\overline{\mathbb{R}}_+$. Il est facile de vérifier que, si f et g sont boréliennes positives sur E (nulles en ∂)

$$< f, P_\phi g >_\nu' = < f\hat{P}_\phi , g>_\nu .$$

b) Si f est continue bornée, et $x \in E$, la fonction $t \mapsto f\hat{P}_t(x)$ ($= \hat{E}^x[f \circ \hat{Y}_t]$, en notant $\hat{Y}$ le processus canonique associé à $(\hat{P}_t)$ (*)) est continue à droite.

c) ν étant une mesure de Radon, soit f une fonction positive, continue à support compact sur E : on a $<f,\nu> = <\mu,Uf> < \infty$. Il est alors facile de trouver une fonction g continue, partout strictement positive, telle que $< \mu,Ug> <\infty$. Soit $h=Ug$: h est strictement positive en tout point, et $< \mu,P_t h> \to 0$ lorsque $t \to \infty$, de sorte que $h \circ X_t \to 0$ p.s. lorsque $t \to \infty$. Mais alors soit $H_n = \{h \geq 1/n\}$; les trajectoires du processus (X_t) restent p.s. hors de H_n pour t assez grand , et le temps de retour $L_n = \sup \{t: X_t \in H_n\}$ est donc P^μ-p.s. fini. Autrement dit, les théorèmes de retournement que nous allons établir ne sont pas vides !

Voici le théorème principal relatif au retournement :

THÉORÈME.- Si l'on munit Ω de la loi P^μ, le processus (continu à droite) $(\hat{X}_t)_{t>0}$ obtenu par retournement de (X_t) à L est markovien par rapport à la famille $(\hat{\underline{F}}_t)$, et admet $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition. Cela s'étend à la valeur 0 du temps si X_{L-} existe p.s. (dans E) sur $\{0<L<\infty\}$).

DÉMONSTRATION.- Nous allons commencer par quelques calculs : soient $0<r<s$, $H \in \hat{\underline{F}}_r$; ϕ et η ayant la même signification que dans les lemmes 4 et 5, f étant borélienne bornée sur E, nulle en ∂ , nous avons

(1) $\int_0^\infty \phi(t) E^\mu[f \circ \hat{X}_{s+t} . H]\, dt = < f, P_{s-r} h_\phi >_\nu$ (lemme 5)

(1') $\int_0^\infty \phi(t) E^\mu[\hat{P}_t(f,\hat{X}_s).H]\, dt = E^\mu[\hat{P}_\phi(f,\hat{X}_s).H]$ (Fubini)

(2) $\int_r^\infty \eta(s-r) < f, P_{s-r} h_\phi >_\nu\, ds = < f, P_\eta h_\phi >_\nu$ (Fubini)

(2') $\int_r^\infty \eta(s-r) E^\mu[f\hat{P}_\phi \circ \hat{X}_s . H] ds = < f\hat{P}_\phi, h_\eta >_\nu$ (lemme 4)

(*) La notation correcte pour cette espérance est $\hat{E}^x[f \circ X_t]$! **En effet, dans la construction des processus canoniques, seule la mesure dépend du semi-groupe de transition.**

Mais $< f\hat{P}_\phi, h_\eta > = < f, P_\phi h_\eta >$ (dualité) $= < f, P_\eta h_\phi >$ (lemme 5). Par conséquent, les seconds membres de (2) et (2') sont égaux , donc aussi les premiers membres ! Comme η est arbitraire, nous obtenons le résultat intermédiaire suivant :

<u>Il existe un ensemble</u> $N_{H\phi rf} \subset \underline{\underline{R}}_+$, <u>négligeable pour la mesure de Lebesgue, tel que l'on ait pour</u> $s>r$, $s \notin N_{H\phi rf}$

(3) $$< f, P_{s-r} h_\phi >_\nu = E^\mu[f\hat{P}_\phi \circ \hat{X}_s . H]$$

Désignons par N la réunion des $N_{H\phi rf}$, où

f parcourt une suite dense dans $\underline{\underline{C}}_c(E)$,

ϕ parcourt une suite dense dans $\underline{\underline{C}}_c(\underline{\underline{R}}_+)$,

r parcourt l'ensemble des rationnels > 0,

pour chaque r (rationnel > 0) H parcourt une algèbre sur les rationnels de fonctions $\hat{\underline{\underline{F}}}_r$-mesurables bornées, dénombrable, engendrant la tribu séparable $\underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq r)$. Alors :

<u>Si</u> $s>0$ <u>n'appartient pas à l'ensemble négligeable</u> N, <u>on a</u>

(4) $$< f, P_{s-r} h_\phi >_\nu = E^\mu[f\hat{P}_\phi \circ \hat{X}_s . H]$$

<u>Pour toute</u> $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$, <u>toute</u> $\phi \in \underline{\underline{C}}_c(\underline{\underline{R}}_+)$, <u>tout</u> r <u>rationnel</u> < s, <u>et toute</u> H <u>bornée</u> , $\underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq r)$-<u>mesurable</u>.

Mais alors on a avec les mêmes notations,et pour <u>tout</u> $t \geq 0$:

(5) $$E^\mu[f \circ \hat{X}_{s+t} . H] = E^\mu[f\hat{P}_t \circ \hat{X}_s \ . \ H]$$

En effet, ϕ étant arbitraire, l'égalité (4) (égalité des seconds membres de (1) et (1'))entraîne (5) pour presque tout t ; d'autre part les deux membres sont des fonctions continues à droite de t si $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$ (ce §, remarque b)).

Choisissons un ensemble dénombrable dense $D \subset \mathbb{R}$, tel que l'on ait P^μ-p.s. $\hat{X}_s = \tilde{X}_s$ si $s \in D$. Alors la réunion des tribus $\underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq r)$ pour r rationnel < s engendre $\underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq s)$ aux ensembles de mesure nulle près, et la relation (5) entraîne :

(6) si $s \in D$, $s+t \in D$, $E^\mu[f \circ \hat{X}_{s+t} | \underline{\underline{T}}(\hat{X}_u, u \leq s, u \in D)] = f\hat{P}_t \circ \hat{X}_s$ p.s.

Autrement dit, le processus $(\hat{X}_s)_{s \in D}$ est un processus de Markov qui admet $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition. Pour tout $t \in]0, \infty[$, choisissons un $s \in D \cap]0, t[$ et posons $\lambda_t = \hat{P}_{t-s} \lambda_s$, où λ_s est la loi de

$\hat{X}_s$: λ_t ne dépend pas du choix de s, et les λ_t forment une loi d'entrée pour $(\hat{P}_t)$. Il existe donc un processus markovien continu à droite admettant $(\hat{P}_t)$ comme semi-groupe de transition et $(\hat{P}_t)$ comme loi d'entrée (*). Mais alors le processus continu à droite $(\hat{X}_t)_{t>0}$ est équivalent à ce processus markovien : il est donc lui même markovien, avec le semi-groupe de transition désiré. L'adjonction de 0 à l'ensemble des temps, si $\hat{X}_0$ existe p.s., ne pose aucun problème.

Il reste à montrer que le processus est markovien par rapport à la famille $\hat{\underline{\underline{F}}}_t$. Pour cela, nous remarquerons que le raisonnement précédent s'applique à un temps de retour quelconque. Soit $H\in\hat{\underline{\underline{F}}}_r$, et soit $T=r$ sur H, $T=\infty$ sur H^c : T est un temps d'arrêt de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, et donc $L'=(L-T)^+$ est un temps de retour. En outre, on a $L<\zeta$ sur $\{L<\infty\}$ si $r>0$, de sorte que $\hat{X}_{L-}$ existe p.s. sur $\{0<L<\infty\}$ (on a le même résultat pour r=0 si $\hat{X}_0$ existe p.s.). On a donc, en désignant par $\hat{X}'$ le processus retourné à L'

$$E^{\mu}[f\circ X'_{t-r}] = E^{\mu}[f\hat{P}_{t-r}\circ\hat{X}'_0]$$

ou encore

$$E^{\mu}[f\circ\hat{X}_t.I_H] = E^{\mu}[f\hat{P}_{t-r}\circ\hat{X}_r.I_H]$$

ce qui est l'égalité cherchée.

On notera que le même raisonnement, appliqué à $(L-T)^+$, où T est un temps d'arrêt quelconque de la famille $(\hat{\underline{\underline{F}}}_t)$, montre (sans aucune hypothèse supplémentaire) que le processus $(\hat{X}_t)$ est fortement markovien .

(*)Notre hypothèse sur $(\hat{P}_t)$ a consisté à supposer cela pour les lois d'entrée de la forme $(\hat{P}_t\varepsilon_x)$: mais cela vaut alors pour des lois d'entrée quelconques (KUNITA-WATANABE). Nous laissons cela au lecteur.

§4.- COMPORTEMENT DES FONCTIONS COEXCESSIVES SUR LES TRAJECTOIRES

Nous n'avons utilisé jusqu'à maintenant que la dualité par rapport à une mesure de la forme $\nu=\mu U$. La méthode de ce paragraphe indique une manière de traiter des situations plus générales. Comme les résultats que nous exposons sont encore incomplets, nous n'avons pas cherché à rendre les hypothèses aussi faibles que possible.

HYPOTHÈSES.- λ est une mesure de Radon ($\geqq 0$) ; (P_t) et $(\hat{P}_t)$ sont deux semi-groupes standard, dont les résolvantes (U_p) et $(\hat{U}_p)$ transforment les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes, sont en dualité par rapport à λ

$$<f,U_p g>_\lambda = <f\hat{U}_p,g> \text{ si } f \text{ et } g \text{ sont boréliennes positives,}$$

et sont telles en outre que les mesures $\varepsilon_x U_p$, $\hat{U}_p \varepsilon_x$ sont absolument continues par rapport à λ.

Cette situation a été étudiée par KUNITA-WATANABE , qui ont montré l'existence de bonnes densités pour les résolvantes : voir à ce sujet l'exposé de WEIL "résolvantes en dualité" , qui présente les travaux de KUNITA-WATANABE.

Nous allons établir le résultat suivant , qui ne peut pas se déduire directement du théorème de retournement . Nous désignons ci-dessous par $(\Omega,\dots,X_t,P^\mu)$ la réalisation canonique du semi-groupe (P_t).

THÉORÈME.- Soit g une fonction p-coexcessive ($p\geqq 0$), et soit μ une loi initiale . Pour P^μ-presque tout $\omega\in\Omega$ l'application $t\mapsto g\circ X_{t-}(\omega)$ est continue à gauche sur $]0,\zeta[$, pourvue de limites à droite sur $]0,\zeta[$.(*)

DÉMONSTRATION.- Quitte à remplacer (P_t) et $(\hat{P}_t)$ par des semi-groupes de la forme $(e^{-qt}P_t)$, $(e^{-qt}\hat{P}_t)$ avec $q>0$, nous pouvons supposer a) que les noyaux potentiels U et $\hat{U}$ sont bornés , b) que g est coexcessive . Nous laisserons au lecteur le retour du semi-groupe $(e^{-qt}P_t)$ au semi-groupe (P_t).

(*) Si $X_{\zeta-}$ existe p.s., on peut remplacer $]0,\zeta[$ par $]0,\zeta]$, donc par $]0,\infty[$.

Soit ϕ une fonction continue bornée, λ-intégrable et strictement positive en tout point, et soit μ' une loi proportionnelle à la mesure bornée $\mu+\phi.\lambda$; soit ν' la mesure excessive $\mu'U$ (qui est bornée - et donc une mesure de Radon - du fait que le noyau U est borné). D'après un théorème de KUNITA-WATANABE , rappelé dans l'exposé de WEIL sur les résolvantes en dualité, il existe une fonction coexcessive unique v telle que $\nu'=v.\lambda$. Comme ν' est bornée, v est finie pp. ; comme ϕ est partout >0, un ensemble A est ν'-négligeable si et seulement s'il est de potentiel nul, c'est à dire λ-négligeable. Autrement dit, ν' et λ sont équivalentes, et l'ensemble $\{v=0\}$ est λ-négligeable. Mais v est coexcessive, donc cet ensemble est cofinement ouvert : s'il est λ-négligeable, c'est qu'il est vide.

Posons $$\hat{Q}_t(dx,y) = \frac{v(x)\hat{P}_t(dx,y)}{v(y)} \quad \text{si } v(y)<\infty$$
$$= \varepsilon_y(dx) \quad \text{si } v(y)=\infty$$

Il est bien connu depuis DOOB que l'on obtient ainsi un semi-groupe sous-markovien, et KUNITA-WATANABE ont montré que ce semi-groupe est standard. D'autre part, les résolvantes de (P_t) et $(\hat{Q}_t)$ <u>sont en dualité par rapport à</u> $\nu'=\mu'U = v.\lambda$. Enfin, la fonction égale à $\frac{g}{v}$ sur $\{v<\infty\}$, à 0 sur $\{v=\infty\}$ est excessive par rapport au semi-groupe $(\hat{Q}_t)$.

Munissons Ω de la mesure $P^{\mu'}$, et notons que la durée de vie du processus (X_t) est p.s. finie , du fait que le noyau U est borné. Nous pouvons donc utiliser la durée de vie comme temps de retour, ce qui nous définit un processus $(\hat{X}_t)$ admettant $(\hat{Q}_t)$ comme semi-groupe de transition . D'après le théorème de HUNT sur le comportement des fonctions excessives sur les trajectoires,

$t \mapsto \frac{g}{v}\circ\hat{X}_t$ est continue à droite sur $]0,\infty[$, avec des limites à gauche sur $]0,\infty[$, $P^{\mu'}$-p.s.(*)

et par conséquent, en retournant le temps :

$t \mapsto \frac{g}{v}\circ X_{t-}$ est continue à gauche sur $]0,\zeta[$, avec des limites à droite sur $[0,\zeta[$

(*) Il est d'ailleurs facile d'éviter la difficulté relative à $\{v=\infty\}$ en se ramenant, par troncation à un entier k, au cas où g est finie, puis en faisant tendre k vers ∞. Nous supposerons g finie dans la suite de la démonstration.

Maintenant, nous ferons deux remarques :

- ce qui vient d'être dit s'applique à une fonction coexcessive (finie) quelconque , en particulier à la fonction 1 .

- l'ensemble $\{v=\infty\}$ est négligeable, donc polaire , pour le semi-groupe $(\hat{P}_t)$ (voir MEYER : processus de Markov, chap.XV, th. 27) . Il en résulte qu'il est aussi polaire pour le semi-groupe $(\hat{Q}_t)$: $P^{\mu'}\{\exists t\in]0,\infty[: v\circ\hat{X}_t=\infty\}=0$. En retournant, on voit que l'on a $P^{\mu'}$-p.s. $\frac{1}{v}\circ X_{t-} \neq 0$ sur l'intervalle $]0,\infty[$. D'où l'assertion relative à $g\circ X_{t-}$ en divisant g/v par $1/v$. Bien entendu, une assertion vraie $P^{\mu'}$-p.s. est vraie P^{μ}-p.s., puisque μ est majorée par un multiple de μ'.

Nous laisserons de côté les résultats plus fins relatifs au cas où $(\hat{P}_t)$ est un semi-groupe de HUNT, et où g est coexcessive régulière. Ces résultats seront publiés ailleurs.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités 1966-67

FONCTIONNELLES ADDITIVES PARFAITES

(par Catherine DOLEANS)

Nous montrons dans cet exposé comment les résultats de Blumenthal et Getoor sur la représentation des fonctions p-excessives régulières et ceux de S. Watanabe sur la structure des fonctionnelles additives, positives, purement discontinues et quasi continues à gauche d'un processus de Hunt permettent de prouver que toute fonctionnelle additive positive est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

E est un espace localement compact à base dénombrable et (P_t) un semi-groupe de transition markovien sur E satisfaisant à l'hypothèse (A) de Hunt (on suppose pour simplifier que les noyaux P_t transforment les fonctions boréliennes en fonctions boréliennes). On suppose de plus qu'il existe une mesure positive θ sur E telle que la seule fonction p-excessive nulle θ - presque partout soit la fonction identiquement nulle (Hypothèse L) . Les notations Ω, (X_t), θ_t, $\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{F}}_t$, $\underset{\sim}{P}^{\mu}$ seront celles de [3] (processus canoniques).

<u>Théorème</u> : Sous ces hypothèses toute fonctionnelle additive positive est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

<u>Démonstration</u>. - Remarquons tout d'abord que, toute fonctionnelle additive

positive (A_t) étant fortement markovienne, on a pour tout temps d'arrêt T

$$(*) \quad A_{T+s} = A_T + A_s \circ \theta_T \qquad \forall s$$

et

$$(**) \quad A_{(T+s)-} = A_T + A_{s-} \circ \theta_T \qquad \forall s > 0$$

sauf sur un ensemble H_T négligeable pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$. (A_t) se décompose donc en la somme des trois fonctionnelles additives positives $B_t = \sum_{s\leq t} (A_s - A_{s-}) I_{\{X_s = X_{s-}\}}$, $C_t = \sum_{s\leq t} (A_s - A_{s-}) I_{\{X_s \neq X_{s-}\}}$ et $D_t = A_t - B_t - C_t$. On est donc ramené à étudier séparément les cas : d'une fonctionnelle purement discontinue naturelle, d'une fonctionnelle purement discontinue quasicontinue à gauche, d'une fonctionnelle continue.

1 . ÉTUDE D'UNE FONCTIONNELLE PUREMENT DISCONTINUE, QUASI CONTINUE A GAUCHE.

Si une fonctionnelle additive positive (C_t) est purement discontinue et quasi-continue à gauche, il existe une fonction f borélienne positive sur $E \times E$, nulle sur la diagonale, telle que (C_t) soit indistinguable de la fonctionnelle

$$S f_t = \sum_{s\leq t} f(X_{s-}, X_s) I_{\{X_s \neq X_{s-}\}} \ .$$

(Ce résultat est dû à S. Watanabe [6] , et a été exposé au théorème 6 de [4]). La fonctionnelle Sf_t étant parfaite le théorème est établi dans ce cas.

2 . ÉTUDE D'UNE FONCTIONNELLE PUREMENT DISCONTINUE NATURELLE.

Nous commençons par le cas où la fonctionnelle possède un p-potentiel borné.

Lemme 1. - Soit (B_t) une fonctionnelle additive positive, naturelle, purement discontinue. S'il existe un nombre $p \geq 0$ tel que le p-potentiel $U_B^p = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-pt} \, d B_t]$ soit borné, alors (B_t) est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

Démonstration :

1) Soit $\epsilon > 0$ et posons $T^\epsilon = \inf(t \,;\, B_t - B_{t-} > \epsilon)$. D'après [2], T^ϵ est un temps d'arrêt accessible (ce qui entraîne que pour chaque mesure $\underset{\sim}{P}^x$ il existe une suite S_k^x de temps d'arrêt telle que l'on ait $\underset{\sim}{P}^x$-p. s. $\lim_k S_k^x = T^\epsilon$, $S_k^x < T^\epsilon \; \forall k$) et le processus $B_t - \Delta B_{T^\epsilon} \, I_{\{t \leq T^\epsilon\}}$ est encore naturel. En itérant ce procédé et en faisant varier ϵ on voit que l'ensemble des points de discontinuité de B_t est la réunion des graphes d'une suite de temps d'arrêt accessibles T_n.

2) Considérons maintenant la fonction $f = U_B^p$; f étant p-excessive on a $(f \circ X_t)_-^{(1)} \geq f \circ X_{t-}$ p. s. , et une construction analogue à celle faite pour (B_t) montre que $\{(t, \omega) \,;\, (f \circ X_t)_- \neq f \circ X_{t-}\}$ est la réunion des graphes d'une suite de temps d'arrêt accessibles S_n.

3) Soit maintenant T un temps d'arrêt accessible ; si $x \in E$, T_n^x désigne une suite de temps d'arrêt telle que l'on ait $\underset{\sim}{P}^x$-p. s. $\lim_n T_n^x = T$, $T_n^x < T \; \forall n$; le processus croissant naturel associé à la surmartingale $\xi_t = e^{-pt} f \circ X_t$ est $C_t = \int_0^{t]} e^{-ps} \, d B_s$ et l'on a si $m \geq n$:

$$\underset{\sim}{E}^x [-\xi_T + \xi_{T_m^x} \mid \underline{\underline{F}}_{T_n^x}] = \underset{\sim}{E}^x [C_T - C_{T_m^x} \mid \underline{\underline{F}}_{T_n^x}]$$

ce qui donne en passant à la limite en m puis en n (on remarquera que $\underline{\underline{F}}_T = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{T_n^x}$) :

$$\underset{\sim}{E}^x [-\xi_T + \xi_{T-} \mid \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}^x [C_T - C_{T-} \mid \underline{\underline{F}}_T]$$

ou encore

$$\xi_T - \xi_{T-} = C_{T-} - C_T \quad \underset{\sim}{P}^x\text{-p. s.}$$

---

(1) $(f \circ X_t)_- = \lim_{\substack{s<t \\ s \to t}} f \circ X_s$; cette limite existe sauf sur un ensemble négligeable, ne dépendant pas de t .

4) La fonctionnelle p-additive (C_t) $(C_{t+s} = C_t + e^{-pt} C_s \circ \theta_t$ p. s.$)$, est donc indistinguable de la fonctionnelle p-additive parfaite $C'_t = \sum_{s \leq t} e^{-ps} [(f \circ X_s)_- - f \circ X_{s-}) I_{\{X_s = X_{s-}\}}$ et la fonctionnelle $B_t = \int_0^{t]} e^{ps} d C_s$ est indistinguable de la fonctionnelle $\sum_{s \leq t} [(f \circ X_s)_- - f \circ X_{s-}] I_{\{X_s = X_{s-}\}}$ qui est parfaite.

c. q. f. d.

Passons maintenant au cas général ; considérons une fonctionnelle additive (B_t) positive naturelle et purement discontinue ; le temps d'arrêt $T^k = \inf \{t \, ; B_t - B_{t-} \in] \frac{1}{k+1} , \frac{1}{k}] \}$ est un temps d'arrêt terminal sans points permanents. Les relations (*) et (**) ainsi que la proposition 2 de [4] montrent que, si T_n^k sont les itérés de T^k, la fonctionnelle $B_t^k = \sum_{t \geq T_n^k} \Delta B_{T_n^k}$ est une fonctionnelle additive positive dont les sauts sont compris entre $\frac{1}{k+1}$ et $\frac{1}{k}$. La fonctionnelle (B_t) étant une somme dénombrable de telles fonctionnelles, il suffit de montrer que chacune des fonctionnelles B_t^k est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite. Mais d'après la proposition 3 de [4] , B_t^k est somme d'une suite de fonctionnelles additives positives naturelles purement discontinues ayant un p-potentiel borné. Celles - ci sont indistinguables d'une fonctionnelle parfaite ,d'après le lemme 1, il en est donc de même de leur somme (B_t^k) , et enfin de (B_t) .

c. q. f. d.

3 . ÉTUDE DES FONCTIONNELLES CONTINUES

La "perfection" de la fonctionnelle additive positive et continue (D_t) va résulter des lemmes 2, 3, 4. Nous rappelons tout d'abord la définition suivante:

Définition : Une fonction p-excessive f est dite uniformément p-excessive si elle est bornée et si les fonctions $f_n = n \int_0^{1/n} e^{-ps} P_s f \, ds$ tendent uniformément (en croissant) vers la fonction f lorsque n tend vers l'infini.

Les lemmes 2 et 3 suivants sont dûs à Blumenthal et Getoor ([1]) .

Lemme 2. - Soit (A_t) une fonctionnelle additive positive continue ; si pour un $p \geq 0$, le p-potentiel f de (A_t) est une fonction uniformément p-excessive, la fonctionnelle (A_t) est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite.

Démonstration : Pour montrer que (A_t) est indistinguable d'une fonctionnelle parfaite nous montrerons que la fonctionnelle $B_t = \int_0^t e^{ps}\, d A_s$ est indistinguable d'une fonctionnelle p-additive parfaite (si ξ_t désigne la surmartingale $\xi_t = e^{-pt} f \circ X_t$, B_t est, pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$, le processus croissant continu associé à la surmartingale ξ_t).

Posons pour tout n entier :

$$f_n = n \int_0^{1/n} e^{-ps}\, P_s f\, ds$$

$$g_n = n(f - e^{-p/n} P_{1/n} f) \quad (\text{on a } f_n = U^p g_n),$$

$$\xi_t^n = e^{-pt} f_n \circ X_t$$

$$B_t^n = \int_0^t e^{-ps} g_n \circ X_s\, ds \quad (\text{on a } f_n = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [B_\infty^n])$$

$T_n^\epsilon = \inf \{t \,;\, \xi_t - \xi_t^n > \epsilon\}$ (T_n^ϵ est un temps d'arrêt et l'on a $T_n^\epsilon = \infty$ pour n assez grand).

Pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^{\mu}$, (B_t^n) est le processus croissant continu associé au potentiel ξ_t^n et l'on a, si $c = \sup_x f(x)$:

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot} [(B_\infty^n)^2] = 2\, \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty \xi_t^n\, d B_t^n] \leq 2c\, \underset{\sim}{E}^{\cdot} [B_\infty^n] \leq 2 c^2 < +\infty$$

et

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot} [(B_\infty^n - B_\infty^m)^2] = 2\, \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty (\xi_t^n - \xi_t^m)\, d(B_t^n - B_t^m)]$$

(on applique T. 15 chap. VII de [5] d'abord au processus (B_t^n), puis au processus $B_t^n - B_t^m$ lorsqu'on est sûr que les quantités $E^{\cdot} [(B_\infty^n)^2]$ sont finies). Si m et n sont supérieurs à q on a donc :

$$\underset{\sim}{E}^{\cdot} [(B_\infty^n - B_\infty^m)^2] \leq 2\, \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^{T_q^\epsilon} |\xi_t^n - \xi_t^m|\, d(B_t^n + B_t^m) + 4c \int_{T_q^\epsilon}^{+\infty} d(B_t^n + B_t^m)]$$

$$\leq 2\epsilon \, \underset{\sim}{E}^{\bullet} [B^n_\infty + B^m_\infty] + 8\, c \, P^p_{T^\epsilon_q} f$$

$$\leq 4\,\epsilon\, c + 8\, c\, P^p_{T^\epsilon_q} f$$

(On a utilisé la relation $P^p_T f_n = \underset{\sim}{E}^{\bullet}[\int_T^{+\infty} d\, B^n_s]$).

Comme les temps d'arrêts T^c_q sont identiquement égaux à $+\infty$ lorsque q est assez grand, les fonctions $x \to P^p_{T^\epsilon_q} f(x)$ tendent uniformément vers 0 avec $\frac{1}{q}$ et l'on peut construire une sous-suite n_i telle que l'on ait pour tout $x \in E$

$$\sqrt{\underset{\sim}{E}^x[(B^{n_i}_\infty - B^{n_{i+1}}_\infty)^2]} \leq 2^{-i} .$$

L'inégalité de Doob appliquée aux martingales $\xi^{n_i}_t + B^{n_i}_t$ de variables aléatoires terminales $B^{n_i}_\infty$ donne alors :

$$\sqrt{\underset{\sim}{E}^x[\sup_s | \xi^{n_i}_s + B^{n_i}_s - \xi^{n_{i+1}}_s - B^{n_{i+1}}_s |]} \leq \alpha\, 2^{-i} \ (\alpha = \text{constante}) ;$$

et les fonctions $s \mapsto \xi^{n_i}_s + B^{n_i}_s$ forment $\underset{\sim}{P}^x$ - p. s. une suite de Cauchy pour la convergence uniforme. Les fonctions $s \mapsto \xi^{n_i}_s$ étant uniformément convergentes vers ξ_s (f est uniformément p-excessive), l'ensemble $\Lambda = \{\omega ; B^n_s(\omega)$ ne converge pas uniformément sur $(0, +\infty)$ quand $i \to +\infty \}$ est de $\underset{\sim}{P}^x$- mesure nulle pour tout $x \in E$. D'autre part si $\complement\Lambda$ contient ω , il contient $\theta_s\,\omega$ (car $e^{-ps}\, B^{n_i}_t(\theta_s\omega) = B^{n_i}_{s+t}(\omega) - B^{n_i}_s(\omega)$).

Posons :

$$B'_s(\omega) = \begin{cases} \lim_i B^{n_i}_s(\omega) & \text{sur } \complement\Lambda \\ 0 & \text{sur } \Lambda \end{cases} ;$$

(B'_s) est une fonctionnelle p-additive continue parfaite ; on vérifie facilement que pour toute mesure $\underset{\sim}{P}^x$ $B'_t + \xi_t$ est une martingale ; d'après T 21 chap. VII de [5] , (B'_t) est donc $\underset{\sim}{P}^x$-p. s. indistinguable de (B_t) et les fonctionnelles (B_t) et (B'_t) sont indistinguables .

c. q. f. d.

Lemme 3. - Soit A une fonctionnelle additive continue positive, il existe une fonction φ partout > 0 telle que la fonctionnelle additive continue $A'_t = \int_0^t \varphi \circ X_s \, d A_s$ soit de 1-potentiel borné.

Démonstration : Soit $\varphi = E^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-t} e^{-A_t} dt]$ et $A'_t = \int_0^t \varphi \circ X_s \, d A_s$.

Pour tout temps d'arrêt T on a :

$$\varphi \circ X_T = E^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-t} e^{-A_t \circ \theta_T} dt \mid \underline{F}_T] = E^{\cdot} [e^T e^{A_T} \int_T^\infty e^{-s} e^{-A_s} ds \mid \underline{F}_T]$$

et donc en utilisant T. 15 chap VII de [5] :

$$U^1_{A'} = E^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-u} \varphi \circ X_u \, d A_u] = E^{\cdot} [\int_0^\infty e^{A_u} d A_u \int_u^\infty e^{-s} e^{-A_s} ds]$$

$$= E^{\cdot} [\int_0^\infty ds \, e^{-s} e^{-A_s} \int_0^s e^{A_u} d A_u] = E^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-s}(1-e^{-A_s}) ds] \leq 1$$

c. q. f. d.

Il nous suffira donc de traiter le cas où A a un 1-potentiel borné, cas qui résulte du lemme suivant et du lemme 2.

Lemme 4. - Soit (A_t) une fonctionnelle additive positive continue dont le p-potentiel f est borné, il existe alors des fonctionnelles additives continues positives A^n_t telles que les fonctions $f_n = U^p_{A_n}$ soient uniformément p-excessives et que $A_t = \sum_n A^n_t$.

Démonstration : Choisissons une mesure θ bornée telle que la seule fonction p-excessive nulle θ - p.p. soit la fonction zéro, et considérons le noyau W défini par :

$$W g^x = E^x [\int_0^\infty e^{-pt} g \circ X_t \, d A_t]$$

La mesure $\eta = \theta W$ est une mesure bornée ($< \eta , 1> = < \theta, W 1 > = < \theta, f > <+ \infty$) et les fonctions $e^{-pt} P_t f$ tendent vers la fonction f lorsque $t \to 0$; il existe donc, d'après le théorème d'Egorov, une suite croissante de compacts K_n tels que $e^{-pt} P_t f$ tende uniformément vers f sur K_n et que $\eta(E \setminus \bigcup_n K_n) = 0$

Posons $g_n = W(I_{K_n})$ et $\Gamma = E \setminus \bigcup_n K_n$; la fonction $W\, I_\Gamma$ étant p-excessive, et nulle θ-p.p. est identiquement nulle et les fonctions g_n et $f_n = g_n - g_{n-1}$ sont p-excessives et bornées. De plus pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $h > 0$ tel que l'on ait ; si $t < h$.

$$e^{-pt} P_t f + \varepsilon \geq f \qquad \text{sur } K_n$$

on a donc sur K_n

$$W(I_{K_n}) + e^{-pt} W(1 - I_{K_n}) \leq f \leq e^{-pt} P_t f + \varepsilon = e^{-pt} P_t\, W\, I_{K_n} + e^{-pt} P_t (W(1 - I_{K_n})) + \varepsilon$$

c. à. d.

$$g_n = W\, I_{K_n} \leq e^{-pt} P_t\, g_n + \varepsilon \qquad \text{sur } K_n .$$

D'après le principe du maximum cette inégalité a lieu partout sur E et les fonctions g_n (et donc les fonctions f_n) sont uniformément p-excessives. Pour chaque fonction f_n on peut construire une fonctionnelle p-additive continue parfaite A_t^n telle que $f_n = \underset{\sim}{E}^{\cdot} [\int_0^\infty e^{-pt}\, d\, A_t^n]$ (cette construction est contenue dans la démonstration du lemme 2). La fonctionnelle additive naturelle $A_t' = \sum_n A_t^n$ a pour p-potentiel la fonction $\sum_n f_n = f - W\, I_\Gamma = f$, elle est donc indistinguable de la fonctionnelle additive continue A_t (voir l'argument utilisé à la fin du lemme 2).

c. q. f. d.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL et GETOOR, livre à paraître

[2] C. DOLÉANS, Processus croissants naturels et processus croissants très bien mesurables, C.R.A.S. (voir aussi dans ce fascicule le "Guide des processus").

[3] P.A. MEYER, Intégrales Stochastiques III, Séminaire de Probabilités I, Strasbourg, 1966-67.

[4] P.A. MEYER, Intégrales Stochastiques IV, Séminaire de Probabilités I, Strasbourg, 1966-67.

[5] P.A. MEYER, Probabilités et potentiel, Hermann Paris 1966.

[6] S. WATANABE, On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, Jap. J. of math. (1964) p. 53-70.

-=-=-=-=-

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités 1966/67

ESPACES H^m SUR LES VARIETES, ET APPLICATIONS AUX EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES SUR UNE VARIETE COMPACTE.

(par Catherine DOLÉANS)

On reprend ici les méthodes données par Shmuel Agmon (Lectures on Elliptic Boundary value Problems , Princeton, Van Nostrand 1965), pour l'étude dans les espaces H^m des équations elliptiques. Pour simplifier, on se place ici sur une variété compacte sans bord, et on ne considère que des équations elliptiques d'ordre 2.

0. 1 . NOTATIONS

a) x est un point de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, et $|x - y|$ est la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, est un multi-indice ; on munit l'ensemble des multi-indices de la relation d'ordre : "$\alpha \leq \beta$" si et seulement si "$\alpha_i \leq \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$". Et l'on pose :

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$
$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$$

(D_i est l'opérateur différentiel associant à une fonction sa dérivée dans la direction x_i).

$$\alpha ! = \alpha_1 ! \ldots \alpha_n !$$

b) Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $C^m_{loc}(\Omega)$ (resp. $C^\infty_{loc}(\Omega)$) est l'espace des fonctions à valeurs réelles, m-fois continument différentiables (resp. indéfiniment différentiables) sur Ω[1]. $C^m_c(\Omega)$ (resp. $C^\infty_c(\Omega)$) est l'espace des fonctions de $C^m_{loc}(\Omega)$ (resp. $C^\infty_{loc}(\Omega)$ à support compact dans Ω.

c) La notation $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$ signifie : Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega}_1$ est compact et $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$.

0. 2 . REGULARISEES D'UNE FONCTION INTEGRABLE.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, u une fonction intégrable sur tout ouvert borné de Ω ; on désigne par $j(x)$ une fonction de $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ nulle hors de la boule unité de $\mathbb{R}^n$, satisfaisant à $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)\,dx = 1$, et par $j_\varepsilon(x)$ les fonctions $j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\, j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. On a facilement les résultats suivants :

1. - $J_\varepsilon u = j_\varepsilon * u = \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$ est dans $C^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$

   (u est prolongée par zéro hors de Ω).

2. - Si u est à support compact K, $J_\varepsilon u$ est à support dans $K + \mathrm{supp}(j_\varepsilon)$.

3. - Si $u \in L^2(\Omega)$, $J_\varepsilon u \underset{\varepsilon \to 0}{\to} u$ dans $L^2(\Omega)$.

---

(1) $C^m_{loc}(\Omega)$ est plus habituellement noté $C^m(\Omega)$. Nous préférons employer la notation $C^m_{loc}(\Omega)$ pour montrer que l'appartenance à cet espace est une propriété locale.

0. 3 . PARTITION DE L'UNITE SUBORDONNEE A UN RECOUVREMENT LOCALEMENT FINI.

Soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert, localement fini, d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$; on suppose que chaque ouvert $\mathcal{O}_i$ est relativement compact dans Ω. Il existe alors une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée au recouvrement $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$; c'est à dire, une famille de fonctions $(a_i)_{i\in I}$ telles que

1) $0 \leq a_i \leq 1$, $a_i \in C_c^\infty(\mathcal{O}_i)$

2) $\sum_{i\in I} a_i(x) = 1 \qquad x \in \Omega$

Remarque : Si les $\mathcal{O}_i$ ne sont pas relativement compacts dans Ω, on peut seulement affirmer que les supports des a_i (dans Ω) sont dans $\mathcal{O}_i$.

On trouvera une démonstration de ce résultat dans L. Schwartz, Théorie des distributions, T. I. pages 22 et 23.

1 . ESPACES $H^m(\Omega)$.

On définit ici les espaces $H^m(\Omega)$ et $H^m_{loc}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$; on montre que $C^\infty_{loc}(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$, puis on étudie la régularité des fonctions de $H^m_{loc}(\Omega)$. On termine par le théorème de Rellich (compacité de l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$) dont on ne démontre qu'une variante plus faible. Le paragraphe (1.4) est d'ordre technique et nous servira dans l'étude de la régularité des solutions de certaines équations différentielles.

1 . 1 . ESPACES $H^m(\Omega)$ ET $H^m_{loc}(\Omega)$

Ω désigne toujours un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définitions . -

a) Une fonction $u \in L^2(\Omega)$ appartient a $H^m(\Omega)$ ($m \in \mathbb{N}$) si et seulement si, pour tout α , $|\alpha| \leq m$, les dérivées $D^\alpha u$ de u au sens des distributions sont elles-mêmes des fonctions de $L^2(\Omega)$.

b) Une fonction u appartient à $H^m_{loc}(\Omega)$ si et seulement si $\varphi u \in H^m(\Omega)$ pour toute fonction φ de $C^\infty_c(\Omega)$.

Remarque : $H^m_{loc}(\Omega)$ est aussi évidemment l'ensemble des fonctions u telles que $u \in H^m(\Omega_1)$ pour tout $\Omega_1 \subset\subset \Omega$.

Théorème 1. - $H^m(\Omega)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et le produit hilbertien

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha u \cdot D^\alpha v \, dx$$

fait de $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert.

Démonstration Nous montrerons seulement que $H^m(\Omega)$ est complet : si $\{u_k\}$ est une suite de Cauchy dans $H^m(\Omega)$, les suites $\{D^\alpha u_k\}$ sont des suites de Cauchy dans $L^2(\Omega)$ ($|\alpha| \leq m$) ; soient u_α leurs limites dans $L^2(\Omega)$. La relation

$$\int_\Omega \varphi \, D^\alpha u_k \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_k \, D^\alpha \varphi \, dx \qquad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega)$$

passe alors à la limite quand k tend vers $+\infty$, ce qui montre que : $u_\alpha = D^\alpha u$, u est dans $H^m(\Omega)$ et $u_k \to u$ dans $H^m(\Omega)$.

Notations : On notera

$$\|u\|_{m,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \Big)^{1/2}$$

et

$$|u|_{m,\Omega} = \Big(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \Big)^{1/2}$$

Théorème 2. - $C^\infty_{loc}(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

Démonstration Considérons un recouvrement dénombrable, localement fini de Ω par des ouverts U_n relativement compacts dans Ω. On peut alors construire un recouvrement ouvert (V_n) de Ω, tel que $V_n \subset\subset U_n$, et une partition de l'unité (a_n) de classe C^∞, subordonnée à (V_n) ; posons si $u \in H^m(\Omega)$, $u_n = a_n u$; les fonctions u_n sont dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ et à support dans $\overline{V}_n$, on peut alors choisir des ϵ_n tels que

$$\overline{V}_n + \operatorname{supp}(j_{\epsilon_n}) \subset\subset U_n$$

et

$$\|u_n - j_{\epsilon_n} * u_n\|_{m,\Omega} \leq \frac{\epsilon}{2^n} \qquad (\epsilon > 0)$$

(en effet u_n est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ donc $D^\alpha(j_\eta * u_n) = j_\eta * D^\alpha u_n$, et la propriété 3 de (0.2) donne
$$\|D^\alpha u_n - j_\eta * D^\alpha u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[\eta \to 0]{} 0 \text{).}$$
La fonction $v = \sum_n j_{\epsilon_n} * u_n$ est alors dans $C^\infty_{loc}(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ et on a $\|v-u\|_{m,\Omega} \leq \epsilon$.

Remarques :

1) Si la fonction u est à support compact dans Ω, la fonction v construite ci-dessus est dans $C_c^\infty(\Omega)$. Toute fonction de $H^m(\Omega)$ à support compact dans Ω est donc limite de fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. Mais $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^m(\Omega)$, sa fermeture $H_o^m(\Omega)$ est l'espace des fonctions nulles ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre m sur le bord de Ω (si l'ouvert Ω est assez régulier).

2) Si l'ouvert Ω a une frontière de classe C^o on peut montrer que les restrictions à Ω des fonctions de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont denses dans $H^m(\Omega)$.

Nous énonçons maintenant deux conséquences immédiates du théorème 2.

Théorème 3. - (Règle de Leibniz). Si $u \in H^m(\Omega)$, et si $v \in C_b^m(\Omega)$ (c. a. d. v est dans $C^m_{loc}(\Omega)$, et ses dérivées jusqu'à l'ordre m sont bornées dans Ω), alors :

1) $u\,v \in H^m(\Omega)$

2) $D^\alpha (u\,v) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u \quad D^{\alpha-\beta} v.$

Ce résultat est immédiat si $u \in C^\infty_{loc}(\Omega) \cap H^m(\Omega)$ et on achève la démonstration en utilisant le théorème 2.

Théorème 4 : (invariance des espaces H^m_{loc} par difféomorphismes). Ω_1 et Ω_2 désignent deux ouverts de $\mathbb{R}^n$, on suppose qu'il existe un difféomorphisme φ de classe C^∞ de Ω_1 sur Ω_2, alors

1) $f \in H^m_{loc}(\Omega_2)$ est équivalent à $f \circ \varphi \in H^m_{loc}(\Omega_1)$

2) si $\Omega'_1 \subset\subset \Omega_1$ et $\Omega'_2 = \varphi(\Omega'_1)$, il existe une constante c ne dépendant que de (Ω'_1, φ) telle que

$$\|f\circ\varphi\|_{m,\Omega'_1} \leq c\,\|f\|_{m,\Omega'_2} \qquad \text{pour tout } f \in H^m(\Omega'_2).$$

Démonstration Il est immédiat qu'il existe une constante c telle que

$$\|f\circ\varphi\|_{m,\Omega'_1} \leq c\,\|f\|_{m,\Omega'_2} \qquad \text{pour tout } f \in C^m_{loc}(\Omega'_2),$$

on achève la démonstration en utilisant le théorème 2.

I . 2 . REGULARITE DES FONCTIONS DE $H^m_{loc}(\Omega)$.

Théorème 5 : Supposons $m > \frac{n}{2}$, et soit $j = m - [\frac{n}{2}] - 1$ le plus grand entier majoré par $m - \frac{n}{2}$, alors $H^m_{loc}(\Omega)$ est contenu dans $C^j_{loc}(\Omega)$.

Démonstration Il suffit de montrer que $H^m(\mathbb{R}^n)$ est contenu dans $C^j_{loc}(\mathbb{R}^n)$: si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si u est dans $H^m_{loc}(\Omega)$, φu est dans $H^m(\mathbb{R}^n)$ donc dans $C^j_{loc}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\varphi \in C^\infty_c(\Omega)$, et donc $u \in C^j_{loc}(\Omega)$.

Nous commençons par donner une caractérisation de $H^m(\mathbb{R}^n)$: Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\hat{u}$ sa transformée de Fourier ; la fonction u appartient à $H^m(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si on a $\int_{\mathbb{R}^n}(1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$; et les normes $u \to \|u\|_{m,\mathbb{R}^n}$ et $u \to \int_{\mathbb{R}^n}(1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$ sont équivalentes. En effet, soit u une fonction de $L^2(\mathbb{R}^n)$, u est en particulier une distribution tempérée, et ses dérivées $D^\alpha u$ ont pour transformées de Fourier les fonctions $\widehat{D^\alpha u} = \xi^\alpha \hat{u}$. La relation $\int_{\mathbb{R}^n}(1+|\xi|^2)^m |\hat{u}|(\xi)|^2 d\xi < +\infty$ est donc équivalente à $\widehat{D^\alpha u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\forall\alpha, |\alpha| \leq m)$, c'est à dire $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $(\forall \alpha, |\alpha| \leq m)$; et les deux normes considérées sont évidemment équivalentes sur $H^m(\mathbb{R}^n)$.

Considérons maintenant une fonction u appartenant à $H^m(\mathbb{R}^n)$ et soit $j = m - [\frac{n}{2}] - 1 \geq 0$; la fonction $\xi^\alpha \hat{u}(\xi) = \frac{\xi^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{m/2}}(1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{u}(\xi)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout α, $|\alpha| \leq j$ et la transformation de Fourier inverse donne pour $D^\alpha u$:

$$D^\alpha u(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{i<x,\xi>}\xi^\alpha \hat{u}(\xi)\, d\xi, \quad |\alpha| \leq j ;$$

u est donc dans $C^j_{loc}(\mathbb{R}^n)$

c. q. f. d.

1. 3. THEOREMES DE RELLICH

Le théorème de Rellich proprement dit est le théorème suivant relatif à l'injection de $H^m(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$.

Théorème 6. - Soit Ω un ouvert borné dont la frontière est de classe C^{o}. Alors l'injection de $H^{m}(\Omega)$ dans $H^{m-1}(\Omega)$ est compacte (on suppose $m \geq 1$).

Nous nous contenterons d'une variante plus faible et beaucoup plus facile à démontrer :

Théorème 7. - Soit Ω un ouvert borné, et $H_{o}^{m}(\Omega)$ la fermeture de $C_{c}^{\infty}(\Omega)$ dans $H^{m}(\Omega)$; l'injection de $H_{o}^{m}(\Omega)$ dans $H_{o}^{m-1}(\Omega)$ est compacte ($m \geq 1$).

Démonstration : Plongeons l'ouvert Ω dans un cube Q que l'on supposera être d'arête unité ($\Omega \subset\subset Q$). Toute fonction u de $C_{c}^{\infty}(\Omega)$ se prolonge en une fonction de $C_{c}^{\infty}(Q)$ (en prenant $u = o$ sur $Q \setminus \Omega$) puis en une fonction périodique de période 1. Si $\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} b_{\xi} \, e^{2\pi i < x, \xi >}$ est le développement de u en série de Fourier, on a :

$$\int_{Q} |D^{\alpha} u|^2 \, dx = \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 \, dx = (2\pi)^{2|\alpha|} \sum_{\xi} |b_{\xi}|^2 \, \xi^{2\alpha}$$

et

$$\|u\|^2_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} (2\pi)^{2|\alpha|} \sum_{\xi} |b_{\xi}|^2 \, \xi^{2\alpha} \quad (u \in C_{c}^{\infty}(\Omega)).$$

Les normes $\|u\|_{m,\Omega}$ et $\|u\|^{\#}_{m} = [\, |b_{o,\ldots,o}|^2 + \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |b_{\xi}|^2 \, |\xi|^{2m}]^{1/2}$

sont donc équivalentes sur $C_{c}^{\infty}(\Omega)$.

Prenons maintenant une suite bornée (u_j) dans $H_{o}^{m}(\Omega)$, et montrons que l'on peut extraire de cette suite une sous-suite convergente dans $H_{o}^{m-1}(\Omega)$. $C_{c}^{\infty}(\Omega)$ étant dense dans $H_{o}^{m}(\Omega)$, on peut toujours se ramener au cas où les u_j sont dans $C_{c}^{\infty}(\Omega)$; soient $(b_{j\xi})_{\xi \in \mathbb{Z}^n}$ les coefficients de la série de Fourier associée à u_j. Pour chaque ξ, la suite $(b_{j\,\xi})_{j \in \mathbb{N}}$ est bornée (car $\sup_j \|u_j\|^{\#}_m \leq A < +\infty$) , et on peut par un procédé de diagonalisation extraire une sous-suite notée encore $(b_{j\,\xi})$ telle que pout tout ξ la suite $(b_{j\,\xi})_{j \in \mathbb{N}}$ converge. On a alors pout tout r

$$\|u_i - u_j\|^{\#2}_{m-1} = |b_{j,o} - b_{i,o}|^2 + \sum_{|\xi| \leq r} |b_{j\,\xi} - b_{i\,\xi}|^2 |\xi|^{2m-2}$$

$$+ \sum_{|\xi|>r} |b_{j\,\xi} - b_{i\,\xi}|^2 |\xi|^{2m-2}$$

où le premier terme tend vers o lorsque i et j tendent vers o , et le second terme est majoré par $\frac{1}{r^2} [\|u_j\|^{\#2}_m + \|u_i\|^{\#2}_m] \leq \frac{2\,A^2}{r^2}$.

Et la suite (u_j) est une suite de Cauchy dans $H^{m-1}_o(\Omega)$, donc une suite convergente.

c. q. f. d.

1 . 4 . INEGALITES RELATIVES AUX DIFFERENCES FINIES, CONSEQUENCES. (Méthode de Niremberg)

Ce qui suit prépare l'étude de la régularité des solutions des équations différentielles (voir le paragraphe (3.4.)).

Soit $\vec{e}$ un vecteur unitaire, et h un nombre réel. Si $u \in L^2(\Omega)$ on pose

$$\delta_{\vec{e},h} = \frac{u(x+h\vec{e}) - u(x)}{h} \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } d(x, \complement\,\Omega) > h .$$

Si $\vec{e_i}$ est le vecteur unitaire dirigé dans la direction des x_i , on note

$$\delta^i_h\, u = \delta_{\vec{e}_i, h}\, u$$

Lemme 1 : Soient $u \in H^m(\Omega)$ $(m \geq 1)$ et Ω' un ouvert $(\Omega' \subset\subset \Omega)$, on a alors pour tout $h < d(\overline{\Omega}', \complement\Omega)$

$$\|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'} \leq \|u\|_{m,\Omega} \qquad i = 1, \ldots, n$$

Démonstration : Il suffit de montrer cette inégalité pour les fonctions $u \in C^\infty(\Omega) \cap H^m(\Omega)$.

1) Commençons par les fonctions d'une seule variable : soit $f \in C^1(]a, b+h[)$, on a pour $x \in]a, b[$

$$f(x+h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(\xi)\, d\xi$$

$$|f(x+h) - f(x)|^2 \leq h \int_x^{x+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi$$

et

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)|^2\, dx \leq h \int_a^b dx \int_x^{x+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi =$$

$$h \int_a^{a+h} d\xi\, |f'(\xi)|^2 \int_a^\xi dx + h \int_{a+h}^b d\xi\, |f'(\xi)|^2 \int_{\xi-h}^\xi dx + h \int_b^{b+h} d\xi\, |f'(\xi)|^2 \int_{\xi-h}^b dx$$

$$= h^2 \int_a^{b+h} |f'(\xi)|^2\, d\xi\ .$$

2) Plaçons nous maintenant dans $\mathbb{R}^n$, on a pour tout α , $|\alpha| \leq m-1$:

$$\int_{\Omega'} |D^\alpha \delta_h^i u|^2\, dx = \int_{\Omega'} |\delta_h^i D^\alpha u|^2\, dx \leq \int_\Omega |D_i D^\alpha u|^2\, dx$$

et donc $\|\delta_h^i u\|_{m-1,\Omega'} \leq \|u\|_{m,\Omega}$.

c. q. f. d.

Lemme 2 : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\{u_k\}$ une suite bornée de fonctions de $H^m(\Omega)$. Si u est valeur d'adhérence faible de $\{u_k\}$ dans $L^2(\Omega)$ u est dans $H^m(\Omega)$, et pour tout α , $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ est limite faible dans $L^2(\Omega)$ des $D^\alpha u_{k_i}$ ($\{u_{k_i}\}$ désigne une sous suite de $\{u_k\}$ convergent faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$).

Démonstration : Soit α un multi-indice satisfaisant à $|\alpha| \leq m$, la suite $D^{\alpha} u_{k_i}$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et admet donc une valeur d'adhérence faible u_{α}. Il est alors immédiat que $u_{\alpha} = D^{\alpha} u$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Théorème 8. - Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Si $u \in H^m(\Omega)$ et s'il existe une constante C telle que pour tout Ω', $\Omega' \subset\subset \Omega$ on ait $\|\delta_h^i u\|_{m,\Omega'} \leq C$ pour h assez petit et $i = 1, \ldots, n$ alors $u \in H^{m+1}(\Omega)$ et $\|D_i u\|_{m,\Omega} \leq C$ $\quad i = 1, \ldots, n$.

Démonstration. - Le lemme 2 assure l'existence d'une suite h_k $(h_k \to 0)$ et de fonctions $u_i \in H^m(\Omega')$ telles que $\delta^1_{h_k} u \underset{k\to+\infty}{\to} u_i$ faiblement dans $L^2(\Omega')$ $i=1,\ldots,n$.

On a alors pour toute fonction $\varphi \in C_c^{\infty}(\Omega')$.

$$\int_{\Omega'} u_i \varphi \, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\Omega'} \delta^i_{h_k} u \varphi \, dx = -\lim_{k\to+\infty} \int u \, \delta^i_{-h_k} \varphi \, dx = -\int_{\Omega'} u D_i \varphi \, dx$$

la fonction u est donc dans $H^{m+1}(\Omega')$ pour tout ouvert Ω', $\Omega' \subset\subset \Omega$. On a de plus $\|D_i u\|_{m,\Omega'} = \|u_i\|_{m,\Omega'} \leq C$ pour tout $\Omega' \subset\subset \Omega$; on a donc $\|D_i u\|_{m,\Omega} \leq C$ et u est dans $H^{m+1}(\Omega)$.

ESPACES H^m_{loc} SUR UNE VARIETE COMPACTE

On définit les espaces H^m_{loc} sur une variété compacte M, et on étudie, comme dans le cas d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, la régularité des fonctions de $H^m_{loc}(M)$ et la compacité de l'injection de $H^m_{loc}(M)$ dans $H^{m-1}_{loc}(M)$.

1. VARIETE DE CLASSE C^{∞}

On renvoie pour la définition des variétés sans bord de classe C^{∞} et des fonctions de classe C^p sur une variété à l'appendice dans lequel on trouvera aussi le théorème d'existence de partitions de l'unité subordonnée à un recouvrement ouvert ; dans la suite toutes les notations employées seront celles de l'appendice et on supposera toujours que la variété M est compacte.

2 . 2 . ESPACE $L^2_{loc}(M)$.

Définitions :

1) $L^2_{loc}(M)$ est l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des fonctions u définies sur M et à valeurs réelles, telles que

$$u \circ \chi^{-1} \in L^2_{loc}(\chi(U)) \text{ pour toute carte locale } (U, \chi)$$

2) On munit $L^2_{loc}(M)$ de la topologie définie par les semi-normes $u \to \|\varphi u \circ \chi^{-1}\|_{L^2_{loc}(\chi(U))}$ où (U, χ) parcourt l'ensemble des cartes locales et φ parcourt $C_c^\infty(U)$.

On a facilement en utilisant le théorème 4 de (1. 1) avec $m = o$:

1) Pour que $u \in L^2_{loc}(M)$, il suffit que la relation $u \circ \chi^{-1} \in L^2_{loc}(\chi(U))$ soit satisfaite pour une famille de cartes locales dont les ouverts de définition recouvrent M.

2) Pour définir la topologie de $L^2_{loc}(M)$ il suffit de considérer les semi-normes

$$u \to \|\varphi u \circ \chi^{-1}\|_{L^2(\chi(U))} \qquad \varphi \in C_c^\infty(\chi(U))$$

pour une famille (U, χ, φ) telle que les ensembles $\Omega_\varphi = \{\varphi \circ \chi \neq o\}$ recouvrent M.

Comme la variété M est supposée compacte, on a en fait $u \circ \chi^{-1} \in L^2(\chi(U))$ pour toute fonction $u \in L^2_{loc}(M)$ et toute carte locale (U, χ), de plus $L^2_{loc}(M)$ est topologiquement identique a l'espace de Hilbert $L^2(M, \tau_g)$ où g est une métrique Riemannienne quelconque et τ_g la mesure de Radon sur M associée (mais il n'y a pas de norme hilbertienne privilégiée sur $L^2_{loc}(M)$

2 . 3 . ESPACES H^m_{loc} (M)

Définitions :

1) On désigne par $H^m_{loc}(M)$ l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des fonctions $u \in L^2_{loc}(M)$ telles que, pour toute carte locale (U,χ) on ait $u \circ \overset{-1}{\chi} \in H^m_{loc}(\chi(U))$.

2) On munit $H^m(M)$ de la topologie définie par les semi-normes $u \to \|\varphi\, u \circ \overset{-1}{\chi}\|_{m,\chi(U)}$ où (U,χ) parcourt l'ensemble des cartes locales et φ parcourt $C^\infty_c(U)$.

Le théorème 4 de (1 . 1) nous donne immédiatement :

1) Pour que $u \in H^m_{loc}(M)$ il suffit que la relation $u \circ \overset{-1}{\chi} \in H^m_{loc}(\chi(U))$ soit valable pour une famille de cartes locales dont les ouverts de définition recouvrent M .

2) De même pour définir la topologie de $H^m_{loc}(M)$ il suffit de considérer les semi-normes $u \to \|\varphi\, u \circ \overset{-1}{\chi}\|_{m,\chi(U)}$, $\varphi \in C^\infty_c(U)$ pour une famille (U,χ,φ) telle que les ensembles $\Omega_\varphi = \{\varphi \circ \chi \neq 0\}$ recouvrent M .

On a convenu de ne considérer que les variétés M compactes. Pour une telle variété on a $u \circ \overset{-1}{\chi} \in H^m(\chi(U))$ pour toute carte locale (U,χ) et toute fonction $u \in H^m_{loc}(M)$. D'autre part si $(U_j)_{j=1,\dots,k}$ est un recouvrement fini de M par des ouverts de définition de cartes locales et $(\varphi_j)_{j=1,\dots,k}$ une partition de l'unité de classe C^∞ subordonnée à $(U_j)_{j=1,\dots,k}$, la topologie de $H^m_{loc}(M)$ est définie par l'une quelconque des normes équivalentes

$$u \to \left(\sum_{j=1}^{k} \|(\varphi_j u) \circ \overset{-1}{\chi}_j\|^2_{m,\chi_j(U_j)} \right)^{1/2}$$

$$u \to \left(\sum_{j=1}^{k} \|u \circ \overset{-1}{\chi}_j\|^2_{m,\chi_j(U_j)} \right)^{1/2}$$

Dans la suite on emploiera, selon les situations, l'une ou l'autre de ces normes.

Théorème 9. - $H^m_{loc}(M)$ est un espace hilbertisable et $C^\infty(M)$ est dense dans $H^m_{loc}(M)$.

Démonstration :

1) Pour tout choix d'un recouvrement $(U_j)_{j=1,\dots,k}$ de M par des ouverts de définition de cartes locales on peut définir un produit préhilbertier

$$(u,v)_{m,M} = \sum_{j=1}^{k} (u \circ \chi_j^{-1}, v \circ \chi_j^{-1})_{m,\ \chi_j(U_j)}$$

compatible avec la topologie de $H^m_{loc}(M)$. Si u_n est une suite de Cauchy dans $H^m_{loc}(M)$, chaque suite $(u_n \circ \chi_j^{-1})$ est de Cauchy dans $H^m(\chi_j(U_j))$ et converge donc vers un élément $u_j \in H^m(\chi_j(U_j))$. La relation

$$(u_n \circ \chi_j^{-1}) \circ \chi_j \circ \chi_i^{-1} = u_n \circ \chi_i^{-1} \qquad \text{(presque sûrement sur } \chi_i(U_i \cap U_j))$$

passe à la limite et les $(u_j)_{j=1,\dots,k}$ définissent bien un élément de $H^m_{loc}(M)$ qui est la limite de la suite u_n dans $H^m_{loc}(M)$. Toutefois $H^m_{loc}(M)$ n'est pas un espace de Hilbert car il ne possède pas de produit hilbertien intrinsèque.

2) Soient $u \in H^m_{loc}(M)$ et $u_j = (\varphi_j u) \circ \chi_j^{-1}$, $j=1,\dots,k$ ((φ_j) est une partition de l'unité subordonnée aux (U_j)) ; u_j est à support compact dans $\chi_j(U_j)$ et donc approchable par des fonctions $v_{j,n} \in C_c^\infty(\chi_j(U_j))$ ($\|u_j - v_{j,n}\|_{m,\chi_j(U_j)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) ; $v_{j,n}$ se transporte sur M en une fonction $v'_{j,n} \in C_c^\infty(U_j)$ et la suite $v_n = \sum_{j=1}^{k} v'_{j,n}$ tend vers u dans $H^m_{loc}(M)$.

c.q.f.d.

Théorème 10. - Si M est une variété compacte de classe C^∞, de dimension n, si m est un entier $> \frac{n}{2}$ et si $j = m - [\frac{n}{2}] - 1$, on a $H^m_{loc}(M) \subset C^j_{loc}(M)$.

Ce théorème se déduit immédiatement du théorème analogue démontré pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$.

<u>Théorème 11.</u> - L'injection de $H^m_{loc}(M)$ dans $H^{m-1}_{loc}(M)$ est compacte.

<u>Démonstration</u> : Soit B un ensemble borné de $H^m_{loc}(M)$ et $B_j = \{(\varphi_j u) \circ \chi_j^{-1}$; $u \in B\}$ $j = 1, \ldots, k$ (les triplets (U_j, χ_j, φ_j) sont choisis comme dans (2.3)). Chaque ensemble B_j est un sous-ensemble borné de $H^m_o(\chi_j(U_j))$ et est donc relativement compact dans $H^{m-1}_o(\chi_j(U_j))$. Les ensembles $B'_j = \{\varphi_j u,\ u \in B\}$ sont alors relativement compact dans $H^m_{loc}(M)$, ainsi que

$$B = B'_1 + \ldots + B'_k$$

c. q. f. d.

3 . <u>EQUATION DIFFERENTIELLE ELLIPTIQUE D'ORDRE 2 SUR UNE VARIETE COMPACTE.</u>

On définit une classe d'opérateurs différentiels linéaires elliptiques d'ordre 2 sur une variété (opérateurs de type (A)) et on étudie l'équation différentielle

$$Pu = f$$

où P est un opérateur de type (A), f une fonction donnée de $L^2_{loc}(M)$ et u une fonction inconnue de $H^2_{loc}(M)$.

3 . 1.<u>OPERATEURS DIFFERENTIELS LINEAIRES SUR UNE VARIETE.</u>

<u>Définitions</u> :

1) Un opérateur différentiel linéaire d'ordre ℓ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est un opérateur

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq \ell} a_\alpha(x)\ D^\alpha$$

où les $a_\alpha(x)$ sont des fonctions à valeurs réelles définies sur Ω, mesurables et bornées.

2) On appellera ici opérateur différentiel linéaire d'ordre ℓ sur une variété M une application linéaire de $H^{\ell}_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$, telle que pour toute carte locale (U, χ) de M il existe un opérateur différentiel d'ordre ℓ P^{χ} sur U tel que

$$Pu(x) = P^{\chi}(u \circ \chi^{-1})(\chi(x)) \qquad \text{sur } U$$

3 . 2 . PARTIE PRINCIPALE D'UN OPERATEUR D'ORDRE ℓ ; OPERATEURS ELLIPTIQUES

Nous introduisons la partie principale d'un opérateur, qui rend intrinsèque la notion de terme de plus haut degré.

Théorème 12. - Si P est un opérateur différentiel d'ordre $\ell \geq 1$ sur M, il existe un champ de ℓ - tenseurs contravariants symétriques π et un seul tel que, $\forall u \in C^{\ell}_{loc}(M)$ et $\forall v \in C^{\ell}_{loc}(M)$ la fonction

$$(*) \qquad \alpha \to e^{-\alpha\, v(x)}\, P(u\, e^{\alpha\, v})(x) - \alpha^{\ell}\, u(x)\, \pi_x(dx\, v, \dots, dx\, v)$$

soit un polynôme de degré ℓ-1 . π s'appelle la partie principale de l'opérateur P . Pour que π soit nulle, il faut et il suffit que P soit d'ordre ℓ-1 .

Démonstration : Nous ne démontrons ce théorème que dans le cas particulier où $\ell = 2$. Considérons donc un opérateur différentiel linéaire P d'ordre 2 sur la variété M . Si (U,χ) est une carte locale de M, nous écrirons toujours les coefficients de P (relativement à (U, χ)) sous la forme "avec répétition et symétrie" en posant

$$Pu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{\chi}^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial\chi^i\, \partial\chi^j} + \sum_{i=1}^{n} a_{\chi}^{i} \frac{\partial u}{\partial \chi^i} + au \qquad u \in H^2_{loc}(M) \quad x \in U$$

où

$$a_{\chi}^{ij}(x) = a_{\chi}^{ji}(x) = \frac{1}{2}\, P\left[(\chi^i - \chi^i(x))(\chi^j - \chi^j(x)) \right](x) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

$$a^i_\chi(x) = P[(\chi^i - \chi^i(x)](x) \qquad 1 \le i \le n .$$

$$a(x=) = P\,1\,(x)$$

On vérifie facilement que, si $(\hat{U}, \hat{\chi})$ est une autre carte locale de M, et si $x \in U \cap \hat{U}$, on a

$$a^{k\ell}_{\hat{\chi}}(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_\chi(x) \frac{\partial \hat{\chi}^k}{\partial \chi^i}(x) \frac{\partial \hat{\chi}^\ell}{\partial \chi^j}(x) \qquad 1 \le k, \ell \le n$$

Donc si α et β sont deux éléments de $T^*_x(M)$ $(x \in U)$, la quantité $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}_\chi(x)\, \alpha_i \beta_j$ (où $\alpha_i = < \alpha, (\frac{\partial}{\partial \chi^i})_x >$, $\beta_j = < \beta, (\frac{\partial}{\partial \chi^j})_x >$ sont les composantes de α et β relativement à la carte locale (U, χ)) est indépendante de la carte locale (U, χ) au voisinage de x. Il existe donc un champ de 2 - tenseurs contravariants symétriques π sur M dont les composantes par rapport à la carte locale (U, χ) sont les coefficients a^{ij}_χ.

$$\pi_x(d_x \chi^i, dx\, \chi^j) = a^{ij}_\chi(x) \qquad , 1 \le i, j \le n, \quad x \in U .$$

Une simple vérification montre que π satisfait à la relation (✱) , et que tout champ π satisfaisant à (✱) satisfait aussi a :

$$u(x)\, \pi_x(d_x v, \dots, d_x v) = \lim_{\substack{\lambda \to +\infty \\ \lambda > o}} - \lambda^{-2} e^{-i\lambda\, v(x)} P(ue^{i\lambda v})(x) \quad .$$

D'où l'unicité de π . Il est enfin clair que $\pi = o$ si et seulement si P est d'ordre 1 .

<u>Définitions</u> :

1) Un opérateur du second ordre P sur la variété M est dit elliptique si sa partie principale π vérifie

$$\pi_x(\omega, \omega) > o \qquad \forall x \in M , \quad \forall \omega \in T^*_x(M) , \ \omega \ne o$$

2) On appellera ici opérateur de type $(A)^{(1)}$, tout opérateur P donné sous la forme

$$Pu = \Delta_g u + < du , X > + c u \qquad u \in H^2_{loc}(M)$$

où g est une métrique Riemannienne de classe C^1, X un champ de vecteur de classe C^1, et c une fonction mesurable bornée sur M. Tout opérateur de type (A) est elliptique (voir la forme de Δ_g en (4. 12) appendice).

On se propose d'étudier le problème suivant

(1) Soit P un opérateur de type (A), et f une fonction donnée de $L^2_{loc}(M)$, existe-t-il une fonction $u \in H^2_{loc}(M)$ telle que

$$Pu = \Delta_g u + < du, X > + c u = f$$

et cette solution est-elle unique ?

Nous allons poser ce problème d'une manière différente :

3 . 3 . FORME BILINEAIRE ASSOCIEE A L'OPERATEUR P

Considérons pour $u \in H^2_{loc}(M)$ et $v \in C^\infty_{loc}(M)$ l'expression

$$a(u, v) = -\int_M Pu \,.\, v d\tau_g = -\int_M (\Delta_g u + < du, X > + c u) v d\tau_g$$

$$= \int_M g(\mathrm{grad}_g u, \mathrm{grad}_g v) d\tau_g - \int_M (< du, X > + c u) v d\tau_g$$

Sous cette dernière forme a (u, v) se prolonge en une forme bilinéaire sur $H^1_{loc}(M) \times H^1_{loc}(M)$. Et pour une fonction $u \in H^2_{loc}(M)$ les relations

---

(1)
(A) Parce que de tels opérateurs admettent un opérateur adjoint pour le produit $\int_M u v d\tau_g$, $P^* u = \Delta_g u - < du, X > + (c - \mathrm{div}_g X) u$.

"Pu = f" et "a(u, v) = (f, v) $\forall v \in H^1_{loc}(M)$" sont équivalentes. Considérons le problème suivant :

(2) Etant donné une fonction $f \in L^2_{loc}(M)$ existe-t-il une fonction $u \in H^1_{loc}(M)$ telle que $a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1_{loc}(M)$.

Si nous montrons que toute solution u de (2) est en réalité dans $H^2_{loc}(M)$, nous saurons que les problèmes (1) et (2) sont équivalents. C'est ce que nous ferons au paragraphe (3.4) .

Voici maintenant une remarque qui nous servira en (3.4) et (3.5) :

Si (U, χ) est une carte locale de M , il existe, puisque g est une métrique Riemannienne de classe C^1 , et que M est compacte , une constante $K_U > 0$ telle que l'on ait

$$g(\text{grad}_g u, \text{grad}_g u) \geq K_U \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial \chi^i}\right)^2 \quad \text{p.p. sur } U, \quad u \in H^2_{loc}(M)$$

Et si $(U_j)_{j=1,\dots,k}$ est le recouvrement ouvert de M considéré en (2.6) on a :

$$\int_M g(\text{grad}_g u, \text{grad}_g u)\, d\tau_g \geq K \left(\sum_{i=1}^{k} |u \circ \chi_j^{-1}|^2_{1, \chi_j(U_j)} \right)$$

où K est une constante > o .

3 . 4 . <u>REGULARITE DES SOLUTIONS DU PROBLEME (2)</u>

<u>Théorème 12</u>. - Soit a (u, v) la forme bilinéaire sur $H^1_{loc}(M) \times H^1_{loc}(M)$ associée comme en (3.3) à un opérateur de type (A) . Si une fonction $u_o \in H^1_{loc}(M)$ vérifie l'équation

$$a(u_o, v) = (f, v) \quad \forall v \in H^1_{loc}(M) \quad (f \text{ est une fonction donnée de } L^2_{loc}(M))$$

alors u_o est dans $H^2_{loc}(M)$.

Démonstration : Pour montrer que u_o appartient à $H^2_{loc}(M)$, il suffit d'étudier les restrictions de u_o aux ouverts U de définition des cartes locales et de montrer que

$$u'_o = u_o \circ \overset{-1}{\chi} \in H^2_{loc}(\chi(U)) \ .$$

Posons $\Omega = \chi(U)$ et considérons sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ la forme bilinéaire

$$B(u', v') = \sum_{i,j} \int_\Omega g^{ij}(x) \sqrt{g^\chi(\overset{-1}{\chi}(z))} \quad \frac{\partial u'}{\partial z^i} \ \frac{\partial v'}{\partial z^j} \ dz$$

(les fonctions g^{ij} et g^χ ont le sens donné au n° 4.8 de l'appendice). On a pour B les inégalités suivantes

$$- \qquad B(u', u') \geq K_U \, |u'|^2_{1,\Omega} \qquad\qquad \forall u' \in H^1(\Omega)$$

$$- \qquad |B(u'_o, v')| = \Big| \int_U g(\operatorname{grad}_g u_o, \operatorname{grad}_g v' \circ \chi) \, d\tau_g \Big|$$

$$= \Big| \int_U \langle du_o, X\rangle \, V' \circ \chi \, d\tau_g + \int_U (c+f) \, u \, v' \circ \chi \, d\tau_g \Big)$$

$$\leq D \, \|v'\|_{o,\Omega} \qquad , \forall v' \in C^\infty_c(\Omega)$$

où D est une constante dépendant de $g, X, c, f,$ U et $\|u_o\|_{1,M}$; le fait que u'_o soit dans $H^2_{loc}(\Omega)$ résulte alors du théorème suivant .

Théorème 13.- Soit Ω un ouvert de R^n et

$$B(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} \ \frac{\partial u}{\partial x^i} \ \frac{\partial v}{\partial x^j} \ dx$$

une forme bilinéaire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. On suppose

1) il existe des constantes E et $\lambda (E > o)$ telles que

$$|B(u, u)| \geq E \, \|u\|^2_{1,\Omega} - \lambda \, \|u\|^2_{o,\Omega} \quad \text{(Inégalité de Garding)}$$

2) Les coefficients a^{ij} sont de classe C^1 dans Ω .

Alors, si une fonction $u_o \in H^1(\Omega)$ satisfait à $|B(u_o, v)| \leq D \|v\|_{o,\Omega}$ pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$ (D est une constante) elle est dans $H^2_{loc}(\Omega)$.

Démonstration :

1) Considérons deux ouverts Ω' et Ω'' de Ω tels que $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega$, et une fonction $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, égale à 1 dans Ω' et à zéro hors de Ω'' ; on veut montrer que $u_o \in H^2_{loc}(\Omega)$ ou encore que $\varphi u_o \in H^2(\Omega)$. D'après le théorème 7 de (1.4) , il suffit de montrer que les fonctions $\delta_h^\ell(\varphi u_o)$ ($\ell = 1, \ldots, n$) sont pour h assez petit dans $H^1(\Omega)$ et que les quantités $\|\delta_h^\ell(\varphi u_o)\|_{1,\Omega}$ sont uniformément bornées en h .

2) Dans la suite de cette démonstration l'indice ℓ sera fixe, et on posera, pour $h < d(\overline{\Omega}', \complement\Omega)$ $u_h = \delta_h^\ell(\varphi u_o)$. L'expression " ste" désignera une constante quelconque ne dépendant que de Ω, Ω', φ, a^{ij}, et qui pourra varier d'une ligne à l'autre.

Pour tout $v \in C_c^\infty(\Omega)$ on a

$$B(v, u_h) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} \frac{\partial v}{\partial z^i} \delta_h^\ell \left(\frac{\partial(\varphi u_o)}{\partial z^j}\right) dz$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} \frac{\partial v}{\partial z^i} \left[\delta_h^\ell \left(\varphi \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\right) + \delta_h^\ell \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z^j} u_o\right)\right] dz$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial z^i} \delta_h^\ell \left(a^{ij} \varphi \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\right) dz + \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \delta_h^\ell \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z^j} u_o\right) a^{ij} \frac{\partial v}{\partial z^i} dz$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial z^i} \varphi(z + h e_i) \frac{\partial u_o}{\partial z^j}(z + h e_i) \delta_h^\ell(a^{ij}) dz$$

Toutes les intégrations ont en réalité lieu dans un voisinage Ω''_h d'ordre h de Ω'' ; choisissons un $h_o > o$ tel que $\Omega''_{2h_o} \subset\subset \Omega$, l'on a :

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial z^i}\ \delta_h^\ell \left(a^{ij}\varphi \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\right) dz = - \int_\Omega \delta_{-h}^\ell \left(\frac{\partial v}{\partial z^i}\right) a^{ij}\varphi \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\ dz$$

$$= \int_\Omega \delta^\ell_{-h}(v) \frac{\partial \varphi}{\partial z^i}\ a^{ij} \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\ dz - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial z^i}\left(\varphi \delta^\ell_{-h} v\right) a^{ij} \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\ dz$$

Comme les fonctions a^{ij} sont dans $C^1(\Omega)$, les fonctions $a^{ij}(z)$, et $\delta^h_\ell\ a^{ij}(z)$ sont uniformément bornées en z et en h pour $z \in \Omega''_{h_o}$ et $h < h_o$, ce qui entraine les inégalités suivantes :

1) $\left| \int_\Omega \delta^\ell_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z^j} u_o\right) a^{ij} \frac{\partial v}{\partial z^i}\ dz \right| \leq \text{cste}\ \|v\|_{1,\Omega}\ \left\|\delta^\ell_h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_j}\ u_o\right)\right\|_{o,\Omega'_h}$

$\leq \text{cste}\ \|v\|_{1,\Omega}\ \|u_o\|_{1,\Omega}$ (d'après le lemme 2 de (1.4)).

2) $\left| \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial z^i}\ \varphi(z+h e_i) \frac{\partial u_o}{\partial z^j}(z+h e_i)\ \delta^\ell_h (a^{ij})\ dz \right| \leq \text{cste}\ \|v\|_{1,\Omega}\ \|u_o\|_{1,\Omega}$

3) $\left| \int_\Omega \delta^\ell_{-h}(v) \frac{\partial \varphi}{\partial z^i}\ a^{ij} \frac{\partial u_o}{\partial z^j}\ dz \right| \leq \text{cste}\ \|\delta^\ell_{-h} v\|_{o,\Omega''}\ \|u_o\|_{1,\Omega}$

$\leq \text{cste}\ \|v\|_{1,\Omega}\ \|u_o\|_{1,\Omega}$

et finalement on obtient :

$$|B(v, u_h)| \leq |B(\varphi\ \delta^\ell_{-h} v,\ u_o)| + \text{cste}\ \|v\|_{1,\Omega}\ \|u_o\|_{1,\Omega}$$

$$\leq \text{cste}\ \|v\|_{1,\Omega}(D + \|u_o\|_{1,\Omega})\ .$$

3) La fonction u_h nulle hors d'un compact de Ω est limite dans $H^1(\Omega)$ de fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$ (voir la remarque suivant le théorème 2 de (1. 1)), l'inégalité ci-dessus est donc encore valable pour $v = u_h$. Et l'on a :

$$E\ \|u_h\|^2_{1,\Omega} - \lambda\ \|u_h\|^2_{o,\Omega} \leq |B(u_h, u_h)| \leq \text{cste}\ (D + \|u_o\|_{1,\Omega})\ \|u_h\|_{1,\Omega}\ .$$

ou encore :

$$E\ \|u_h\|^2_{1,\Omega} \leq \text{cste}\ (D + \|u_o\|_{1,\Omega})\ \|u_h\|_{1,\Omega} + \lambda\ \|u_h\|_{1,\Omega}\|u_h\|_{o,\Omega}$$

$$\leq \text{cste}\ (D + \|u_o\|_{1,\Omega} + \lambda\ \|u_h\|_{o,\Omega})\ \|u_h\|_{1,\Omega}$$

$$\leq \text{cste}\ (D + \|u_o\|_{1,\Omega})\ \|u_h\|_{1,\Omega}$$

(car $\|u_h\|'_{o,\Omega} = \|u_h\|_{o,\Omega'} \leq \|u_o\|_{1,\Omega}$)

et donc

$$\|u_h\|_{1,\Omega} \leq \text{cste}\ (D + \|u_o\|_{1,\Omega})$$

c. q. f. d.

3 . 5 . EXISTENCE DES SOLUTIONS POUR LE PROBLEME (2)

Nous commençons par un théorème élémentaire.

Théorème 14. - (Théorème de Lax Milgram) Soit H un espace de Hilbert et a(u, v) une forme bilinéaire continue sur H de norme M telle que

$$|\ a(u,u)\ | \geq \alpha\ \|\ u\ \|^2 \qquad (\alpha > o) \qquad \forall u \in H$$

Il existe alors un opérateur continu A unique de H sur H tel que

$$a(Au,\ v) = \langle u, v\rangle \qquad \forall\ u, v \in H$$

Démonstration : Pour tout $u \in H$, il existe un élément $A'u$ unique tel que $a(u,v) = \langle A'u, v\rangle$; l'application $u \to A'u$ est linéaire et de norme plus petite que M ($|\langle A'u, v\rangle| = |a(u,v)| \leq M\ \|u\|.\|v\|$). Elle est de plus injective ($\alpha\ \|u\|^2 \leq |a(u,u)| \leq M\ \|A'u\|\ .\ \|u\|$) . A' est donc une bijection continue de H sur A' (H). Soit A l'application inverse de A' sur A'(H) . On a si $w \in A'(H)$ et $u = A\,w$

$$\alpha \|u\|^2 \leq |a(u,u)| = |\langle A\,w, u\rangle| = \langle w, u\rangle \leq \|w\|\,\|u\| \;.$$

A est donc continue de norme $\leq \frac{1}{\alpha}$ et se prolonge en une application continue de $\overline{A'}(H)$ sur H . Mais $H = \overline{A'}(H)$ (car $\langle A'u, v\rangle = o \;\forall u \in H \Rightarrow \alpha \|v\|^2 \leq |\langle A'v, v\rangle| = o$)

c. q. f. d.

<u>Théorème 14.</u> - Considérons sur une variété M compacte un opérateur différentiel elliptique P de type (A)

$$Pu = \Delta_g u + \langle du, X\rangle + cu$$

On suppose qu'il existe une constante $\lambda_o > o$ telle que $\frac{1}{2}\operatorname{div}_g X - c > \lambda_o > o$. Alors pour toute fonction $f \in L^2_{loc}(M)$ l'équation $Pu = f$ a une et une seule solution $u \in H^2_{loc}(M)$.

<u>Démonstration</u> : La forme bilinéaire $a(u,v)$ définie sur $H^1_{loc}(M)$ en (3. 3) satisfait évidemment à la condition

$$|a(u,v)| \leq \text{cste}\; \|u\|_{1,M}\, \|v\|_{1,M}$$

On a d'autre part

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_M g(\operatorname{grad}_g u, \operatorname{grad}_g u)\, d\tau_g - \int_M u\langle du, X\rangle\, d\tau_g - \int_M cu^2\, d\tau_g \\ &= \int_M g(\operatorname{grad}_g u, \operatorname{grad}_g u)\, d\tau_g - \frac{1}{2}\int_M \langle du^2, X\rangle\, d\tau_g - \int_M cu^2\, d\tau_g \\ &= \int_M g(\operatorname{grad}_g u, \operatorname{grad}_g u)\, d\tau_g + \int_M \left(\frac{1}{2}\operatorname{div}_g X - c\right) u^2\, d\tau_g \end{aligned}$$

(utiliser la relation $\operatorname{div}_g(u^2 X) = \langle X, du^2\rangle + u^2 \operatorname{div}_g X$)

et

$$a(u,u) \geq K \sum_{j=1}^{k} |u \circ \chi_j^{-1}|^2_{1,\chi_j(U_j)} + \frac{\lambda_o}{k} \sum_{j=1}^{k} |u \circ \chi_j^{-1}|^2_{o,\chi_j(U_j)} \geq \alpha \|u\|^2_{1,M}$$

($K > 0$ et $\alpha > 0$)

Et il suffit d'utiliser le théorème de Lax Milgram pour conclure.

3 . 6 . INDICE D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL DE TYPE (A)

Définitions; Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, et A une application linéaire de E dans F ; l'opérateur A admet un indice si Ker A et Coker A sont de dimensions finies ; l'indice de A est alors

$$i(A) = \dim \operatorname{Ker} A - \dim \operatorname{Coker} A .$$

Propriété :[1] Soient E et F deux espaces de Banach, si A est un opérateur à indice, et J un opérateur compact de E dans F , $A + J$ est un opérateur à indice et $i(A + J) = i(A)$.

On a alors pour les opérateurs différentiels de type (A) le théorème suivant:

Théorème 15. - Tout opérateur différentiel de type (A) est un opérateur à indice, et son indice est nul, (en tant qu'application de $H^2_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$).

Démonstration : On peut toujours trouver une constante λ telle que l'opérateur $P - \lambda I$ [2] satisfasse aux hypothèses du théorème 14 , et donc telle que

---

(1) On trouvera la démonstration, par exemple dans l'exposé n° 12 du Séminaire Henri Cartan, Ecole Normale Supérieure, 16° année 1963/64.

(2) I est l'injection canonique de $H^2_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$.

$P - \lambda I$ soit une bijection de $H^2_{loc}(M)$ sur $L^2_{loc}(M)$. L'opérateur I étant compact on a $i(P) = o$.

Tout opérateur de type (A) injectif (resp. surjectif) de $H^2_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$ est donc bijectif.

Remarque :

1) Soit $o < \lambda \leq 1$, et $C^{p,\lambda}(M)$ les espaces de fonctions höldériennes sur M. Un opérateur P de type (A) est dit de classe $C^{o,\lambda}$ s'il applique $C^{2,\lambda}(M)$ dans $C^{o,\lambda}(M)$.

2) On peut établir que si P est un opérateur de type (A) et de classe $C^{o,\lambda}$ son indice par rapport aux espaces $C^{2,\lambda}$ et $C^{o,\lambda}$ est nul. De plus si M est connexe et si $C = P\,1$ est $\leq o$, et strictement négative en un point $x_o \in M$, P est une bijection de $C^{2,\lambda}$ sur $C^{o,\lambda}$.

3) Considérons donc une variété M connexe, compacte et P un opérateur de type (A). De la relation

$$\int Pu \,.\, v \, d\tau_g = \int u \,.\, P^* v \, d\tau_g \qquad \forall u, v \in H^2_{loc}(M)$$

on déduit facilement que si P et P^* sont de classe $C^{o,\lambda}$ et si $P\,1 \leq o$ et $< o$ en un point, P est une bijection de $H^2_{loc}(M)$ sur $L^2_{loc}(M)$ (on établit d'abord que P^* est une injection donc une bijection de $C^{2,\lambda}$ dans $C^{o,\lambda}$ puis que P est une injection de $H^2_{loc}(M)$ dans $L^2_{loc}(M)$).
Le résultat obtenu au théorème 14 est donc loin d'être satisfaisant.

4 . APPENDICE

On rappelle ici certaines notions fondamentales sur les variétés.

4 . 1. VARIETES DE CLASSE C^∞

Soit M un espace topologique séparé ; une carte locale de variété de dimension n est un couple (U , χ) où U est un ouvert de M et χ un homéomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque $x \in U$ on note par $(\chi^i(x))_{i=1,\ldots,n}$ les coordonnées de $\chi(x)$ dans $\mathbb{R}^n$.

Un atlas de variété de classe C^∞ et de dimension n sur M, est un ensemble $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ de cartes locales sur M tel que :

a) les cartes locales de $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ recouvrent M,

b) pour tout couple (U,χ) , $(\hat{U},\hat{\chi})$ d'éléments de $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ tels que $U \cap \hat{U} \neq \emptyset$ l'application $\hat{\chi} \circ \chi^{-1}$ de $\chi(U \cap \hat{U})$ sur $\hat{\chi}(U \cap \hat{U})$ est un C^∞ - difféomorphisme.

Deux atlas $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ et $\mathcal{O}\!\mathcal{L}'$ de classe C^∞ sur M sont dits C^∞ - équivalents si $\mathcal{O}\!\mathcal{L} \cup \mathcal{O}\!\mathcal{L}'$ est un atlas de classe C^∞ sur M. Un atlas de classe C^∞ sur M est dit complet s'il contient tout atlas de classe C^∞ qui lui est C^∞ - équivalent.

Une variété de classe C^∞ et de dimension n est un couple $(M, \mathcal{O}\!\mathcal{L})$ où M est un espace topologique à base dénombrable d'ouverts et $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ un atlas complet de classe C^∞ sur M.

4 . 2. ESPACES $C^p_{loc}(M)$ (ou encore $C^p(M)$)

On désigne par $C^p_{loc}(M)$ (ou $C^p(M)$) l'espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) des fonctions f à valeurs réelles, définies sur M et telles que pour toute carte locale (U,χ) de M on ait

$$f \circ \chi^{-1} \in C^p_{loc}(\chi(U))\ ^{(1)}$$

Pour qu'une fonction f appartienne à $C^p_{loc}(M)$ il suffit que cette relation ait lieu pour un ensemble de cartes locales dont les ouverts recouvrent M.

4 . 3. PARTITION DE L' UNITE SUR LA VARIETE M.

Soit $\mathcal{R}$ un recouvrement localement fini de M par des ensembles ouverts. Il existe une famille $(\varphi_U)_{U \in \mathcal{R}}$ de fonctions de $C^\infty(M)$ telles que :

(i) pour chaque $U \in \mathcal{R}$ φ_U est positive, et nulle en dehors d'un sous ensemble fermé de M contenu dans U,

(ii) $\sum\limits_{U \in \mathcal{R}} \varphi_U(x) = 1$ pour tout $x \in M$.

La famille (φ_U) est appelée partition de l'unité sur M subordonnée au recouvrement $\mathcal{R}$.

Si la variété M est un espace compact la condition (i) entraine $\varphi_U \in C^\infty_c(U)$.

4 . 4. ESPACES TANGENTS A M.

On désigne, pour chaque $x \in M$, par $G_x(M)$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des germes de fonctions numériques de classe C^1 au voisinage de x ; l'espace tangent $T_x(M)$ à la variété M au point x est le sous-espace du dual (algébrique) de $G_x(M)$ engendré par les formes $f \to \frac{\partial f}{\partial \chi_i}(x)$ $(f \in G_x(M))$, où $i = 1, \dots, n$ et où (U, χ) décrit l'ensemble des cartes locales de M au voisinage de x $(x \in U)$. L'espace vectoriel $T_x(M)$ est de dimension n (sur $\mathbb{R}$), et, pour chaque carte locale (U, χ) de M au voisinage de $x (x \in U)$, les formes linéaires

$$f \to \frac{\partial f}{\partial \chi^i}(x) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

(1) On devrait écrire $f_U \circ \chi^{-1}$, où f_U est la restriction de f à U

constituent une base de $T_x(M)$; ces formes sont notées $(\frac{\partial}{\partial \chi^i})_x$, $1 \leq i \leq n$.
Tout élément ξ de $T_x(M)$ peut donc être exprimé de façon unique sous la forme

$$f \to \xi f = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial f}{\partial \chi^i}(x)$$

(les ξ^i $(1 \leq i \leq n)$ sont les composantes de ξ relativement à la carte locale (U, χ)).

L'espace vectoriel $T_x^*(M)$, dual de l'espace $T_x(M)$ est appelé l'espace cotangent en x à M ; on désigne par $(d_x \chi_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale de $(\frac{\partial}{\partial \chi_i})_x$ $1 \leq i \leq n$.

4 . 5. DIFFERENTIELLE .

Soit f une fonction dans $C^1(M)$, on appelle différentielle de f en x, la forme linéaire sur $T_x(M)$ suivante :

$$d_x f = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f}{\partial \chi^i})_x \, d_x \chi_i .$$

On montre facilement que cette définition ne dépend pas de la carte locale choisie et qu'elle s'étend à $H^1_{loc}(M)$.

4 . 6. CHAMP DE VECTEUR .

Un champ de vecteur X sur M est une famille $(X_x)_{x \in M}$ où $X_x \in T_x(M)$ pour chaque $x \in M$.

Le champ de vecteur X est dit de classe $C^p(o \leq p \leq \infty)$ si ses composantes

$$X^i(x) = [d_x \chi^i, X_x]$$

par rapport à toutes les cartes locales (U, χ) de classe C^∞ , sont de classe C^p .

4 . 7. UN CHAMP DE r TENSEURS COVARIANT (resp. CONTRAVARIANT)

sur M est une famille $\sigma = (\sigma_x)_{x \in M}$ où pour chaque $x \in M$ σ_x est une forme r - linéaire sur $[T_x(M)]^r$ (resp. $[T_x^*(M)]^r$). Les composantes du r-tenseurs σ par rapport à la carte locale (U, χ) de M sont les fonctions numériques (définies sur U)

$$\sigma_{i_1, \dots, i_r} = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial \chi^{i_1}}, \quad , \frac{\partial}{\partial \chi^{i_r}}\right) \text{ si } \sigma \text{ est covariant}$$

et

$$\sigma^{i_1, \dots, i_r} = \sigma\left(d\chi^{i_1}, \quad , d\chi^{i_r}\right) \text{ si } \sigma \text{ est contravariant.}$$

Le r - tenseur σ est de classe C^p si pour toute carte locale (U, χ) de M les composantes de σ sont des fonctions de $C^p(U)$.

4 . 8. UNE METRIQUE RIEMANNIENNE

sur M est un champ de 2-tenseur covariant g sur M de classe C^o, telle que, pour tout $x \in M$, la forme bilinéaire $(\xi, \eta) \to g_x(\xi, \eta)$ sur $T_x(M)$ soit symétrique et définie positive :

$$g_x(\xi, \eta) = g_x(\eta, \xi) \qquad \xi, \eta \in T_x(M)$$

$$\xi \neq o \Rightarrow g_x(\xi, \xi) > o \qquad \xi \in T_x(M)$$

Si (U, χ) est une carte locale de M , on note

$$g^{\chi}_{ij}(x) = g_{ij}(x) = g_x\left(\left(\frac{\partial}{\partial \chi^i}\right)_x, \left(\frac{\partial}{\partial \chi^j}\right)_x\right) \quad x \in U .$$

$$g^{\chi}(x) = \det\left[g^{\chi}_{ij}(x) \right],$$

et on désigne par $(g^{ij}(x))$ la matrice inverse de $(g_{ij}(x))$.

Si g et $\hat{g}$ sont deux métriques Riemanniennes, il existe une fonction d partout > 0, $d \in C^0(M)$, telle que pour tout $x \in M$ et toute suite $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ de vecteurs de $T_x(M)$ on ait :

$$\det [\hat{g}_x(\xi_i, \xi_j)] = d(x) \det [g_x(\xi_i, \xi_j)].$$

4 . 9 . Si g est une métrique Riemannienne sur M, il existe une mesure de Radon positive τ_g sur M, èt une seule, telle que pour toute carte locale (U, χ) de M et toute fonction $f \in C^0(M)$ à support contenu dans U on ait

$$\int_M f d\tau_g = \int_{\chi(U)} f(\chi^{-1}(z)) \sqrt{g^\chi(\chi^{-1}(z))}\, dz$$

Les mesures Riemanniennes associées aux différentes métriques Riemanniennes sont toutes équivalentes.

4 . 10 . Soit g une métrique Riemannienne sur M. Il existe une application $f \to \mathrm{grad}_g f$ de $C^1(M)$ dans l'espace des champs de vecteurs, et une seule, telle que :

$$g(\mathrm{grad}_g f, X) = \langle df, X \rangle, \quad f \in C^1(M), \ X \text{ champ de vecteur de classe } C^0.$$

Si (U, χ) est une carte locale de M et si $f \in C^1(M)$, les composantes de $\mathrm{grad}_g f$ sont données par :

$$\langle d\chi^i, \mathrm{grad}_g f \rangle = \sum_{k=1}^n g^{ki} \frac{\partial f}{\partial \chi^k}$$

Cette définition s'étend facilement à $H^1_{loc}(M)$

4 . 11 . Soit g une métrique Riemannienne de classe C^1 sur M, il existe une application linéaire $X \to \mathrm{div}_g$ et une seule de l'ensemble des champs de vecteurs de classe C^1 dans $C^0(M)$ telle que :

1) $\mathrm{div}_g(fX) = f\,\mathrm{div}_g X + \langle df, X \rangle$, $f \in H^1_{loc}(M)$, X de classe C^1

2) $\int_M \mathrm{div}_g X \, d\tau_g = o$ pour tout champ X de classe C^1.

3) $\mathrm{supp}\,(\mathrm{div}_g X) \subset \mathrm{supp}\,(X)$.

Si (U, χ) est une carte locale de M, on a

$$\mathrm{div}_g X(x) = \frac{1}{\sqrt{g^\chi(x)}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \chi^i} \left(\sqrt{g^\chi}\, X^i\right)(x)$$

(où $X_i = \langle d\chi^i, X \rangle$)

12. g est toujours une métrique Riemannienne de classe C^1, pour tout $f \in C^2(M)$, on pose :

$$\Delta_g f = \mathrm{div}_g (\mathrm{grad}_g f)$$

Δ_g (opérateur de Laplace Beltrami de g) est une application linéaire de $C^2(M)$ dans $C^o(M)$. Si (U, χ) est une carte locale de M on a sur U

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{g^\chi}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \chi^i} \left(\sqrt{g^\chi}\; g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \chi^j}\right) \quad , \; f \in C^2(M)$$

Δ_g est continu lorsqu'on munit $C^2(M)$ (resp. $C^o(M)$) des topologies induites par $H^2_{loc}(M)$ (resp. $L^2_{loc}(M)$). Δ_g se prolonge donc par continuité à $H^2_{loc}(M)$.

4 . 13 . FORMULE DE GREEN

On a pout toute $f_1 \in C^2(M)$, $f_2 \in C^2(M)$

$$\int_M f_1 \Delta_g f_2 \, d\tau_g = - \int_M g(\mathrm{grad}_g f_1, \mathrm{grad}_g f_2) \, d\tau_g$$

et cette égalité se prolonge aux fonctions $f_2 \in H^2_{loc}(M)$.

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE

STRASBOURG

Séminaire de Probabilités

Théorie des frontières dans les chaînes de Markov

(par G. Giroux)

Cet exposé a pour but de donner une introduction à l'étude des solutions de l'équation: $P'_t = QP_t$, où (P_t) est un semi-groupe sous-markovien sur un espace dénombrable d'états, et Q est une matrice générateur infinitésimal.

Nous donnerons tout d'abord un aperçu sur les chaînes de Markov à temps continu , ayant un semi-groupe régulier pour fonction de transition; puis une brève introduction à la théorie des frontières, telle que développée par Doob[2] et Hunt[1] .

Nous pourrons alors par la suite traiter de la décomposition des solutions.

Nous énoncerons le théorème qui permet la décomposition en lois de sortie par rapport à la solution minimale et en lois d'entrée par rapport à la solution donnée, tel que démontré dans Chung[2] . C'est-à-dire que les lois de sortie sont obtenues comme dérivées de certaines probabilités dépendant du temps, et les lois d'entrée par un passage à la limite sur des espérances conditionnelles dépendant du début du processus.

Notons cependant que sous des hypothèses plus fortes, K.L.Chung a démontré un théorème de décomposition en lois de sortie et d'entrée par rapport à la solution minimale.

Les premiers résultats remontent à Feller[1] . La décomposition a été donnée, à l'aide de méthodes analytiques, par Reuter[1,2,3] , et Williams[1] .

Nous nous sommes servis de l'article de Neveu[1] , pour énoncer les résultats relatifs aux lois de sortie et d'entrée.

§1. Semi-groupes, lois d'entrée et de sortie

Définition 1.: Semi-groupe sous-markovien régulier

Un semi-groupe sous-markovien (P_t) sur E, un ensemble dénombrable, est dit régulier si pour tout $i \in E$: $\lim\limits_{t \downarrow 0} p_t(i,i) = 1$

Par la suite, tous les semi-groupes seront réguliers.

Un semi-groupe sous-markovien régulier possède des propriétés en apparence plus fortes; en voici quelques-unes:

Théorème 1.1

1) pour tout $i \in E$, $p_t(i,j)$ est uniformément continue sur R_+, uniformément en j.

2) pour tout $i,j \in E$, les limites

$$q_i = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1 - p_t(i,i)}{t}$$

$$q_{ij} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} \qquad j \neq i$$

existent et satisfont:

a) $0 \leq q_i \leq \infty$

b) $0 \leq q_{ij} < \infty$

c) $\sum\limits_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$

Démonstration

On a: $p_{t+h}(i,j) - p_t(i,j) = \sum\limits_{k \neq i} p_h(i,k) p_t(k,j) - (1 - p_h(i,i)) p_t(i,j)$

d'où: $-(1 - p_h(i,i)) \leq p_{t+h}(i,j) - p_t(i,j) \leq \sum\limits_{k \neq i} p_h(i,k) \leq 1 - p_h(i,i)$

et on a alors l'inégalité: $|p_t(i,j) - p_s(i,j)| \leq 1 - p_{|t-s|}(i,i)$

ce qui implique 1)

on a $p_t(i,i) \geq [p_{t/n}(i,i)]^n > 0$, pour n assez grand

de même $p_{t+s}(i,i) \geq p_t(i,i)p_s(i,i)$

alors $u(t) = -\log p_t(i,i)$ est une fonction sous-additive à valeurs dans R_+

et $\lim\limits_{t\downarrow 0} u(t) = 0$

d'où $0 \leq \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{u(t)}{t} = \sup\limits_{t>0} \frac{u(t)}{t} \leq \infty$

et $q_i = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1 - p_t(i,i)}{t} = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1 - e^{-u(t)}}{u(t)} \frac{u(t)}{t} = \lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{u(t)}{t}$ existe

pour j fixé on pose:

$$f_t^{(0)}(i,k) = \delta_{ik}$$

$$f_t^{(1)}(j,k) = 0 \quad , \quad f_t^{(1)}(i,k) = p_t(i,k) \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$f_t^{(n)}(i,k) = \sum_h f_t^{(n-1)}(i,h) f_t^{(1)}(h,k) \quad , \quad n \geq 1$$

on a alors pour $i \neq j$:

$$\text{(A)} \quad p_{mt}(i,j) = \sum_{n=0}^{m-1} f_t^{(n)}(i,i)p_t(i,j)p_{(m-n-1)t}(j,j) + f_t^{(m)}(i,j)$$

$$\text{(B)} \quad p_{mt}(i,i) = \sum_{n=1}^{m-1} f_t^{(n)}(i,j)p_{(m-n)t}(j,i) + f_t^{(m)}(i,i)$$

$$\text{(C)} \quad p_{mt}(i,j) = \sum_{n=1}^{m} f_t^{(n)}(i,j)p_{(m-n)t}(j,j)$$

mais on sait, par la régularité de P_t, que pour $i \neq j$ et $\varepsilon > 0$, il existe u

tel que: $p_s(i,j) < \varepsilon$, $p_s(j,i) < \varepsilon$, $p_s(i,i) > 1-\varepsilon$, $p_s(j,j) > 1-\varepsilon$, pour $s < u$

alors pour $mt < u$ on a par (C):

$$\sum_{n=1}^{m} f_t^{(n)}(i,j)(1 - \varepsilon) < \varepsilon$$

donc en prenant $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on a pour $mt < u$:

$$\sum_{n=1}^{m} f_t^{(n)}(i,j) < 1$$

alors par (B), on a pour $mt < u$

$$f_t^{(m)}(i,i) \geq p_{mt}(i,i) - \max_{1 \leq n \leq m} p_{(m-n)t}(j,i) > 1 - 2\varepsilon$$

d'où par (A), pour $mt < u$

$$p_{mt}(i,j) \geq \sum_{n=0}^{m-1} f_t^{(n)}(i,i) p_t(i,j) p_{(m-n-1)t}(j,j) \geq (1 - 3\varepsilon) \sum_{n=0}^{m-1} p_t(i,j)$$

et alors: $\dfrac{p_{mt}(i,j)}{mt} > (1 - 3\varepsilon) \dfrac{p_t(i,j)}{t}$

ce qui implique, en gardant mt fixe, que: $\varlimsup_{t \downarrow 0} \dfrac{p_t(i,j)}{t} < \infty$

il existe donc v tel que:

$$0 < v < u/2 \quad \text{et} \quad \frac{p_v(i,j)}{v} \leq \varliminf_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} + \varepsilon$$

alors par 1) il existe δ satisfaisant $0 < \delta < v$ tel que:

$$\frac{p_t(i,j)}{t} < \varliminf_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} + 2\varepsilon \quad , \quad \text{pour} \quad |t-v| < \delta$$

mais pour $0 < t < \delta$, il existe un entier m tel que: $v \leq mt < v+t < u$

alors on a:

$$(1 - 3\varepsilon) \frac{p_t(i,j)}{t} < \varliminf_{t \downarrow 0} \frac{p_t(i,j)}{t} + 2\varepsilon \quad , \quad \text{pour} \quad 0 < t < \delta$$

d'où $q_{ij} = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{p_t(i,j)}{t}$ existe et est finie

finalement par le lemme de Fatou on a: $\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq q_i$

Définition 2.: Loi de sortie

Une famille $\{g_t\ ,\ t>0\}$ de fonctions positives sur E est appelée loi de sortie par rapport au semi-groupe P_t , si:

a) $P_t g_s = g_{t+s}$

b) il existe $T>0$ tel que: $\sup_i \int_0^T g_t(i)dt < \infty$

Remarques

1)l'inégalité de b) est vérifiée pour tout T, car

$$\int_0^{nT} g_t(i)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T g_{t+(k-1)T}dt = \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \sum_j p_{(k-1)T}(i,j)g_t(j)dt \leq n\sup_i \int_0^T g_t(i)dt$$

2)on a: $0 \leq g_t(i) < \infty$, car par b) c'est vérifié pour tout i sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle, mais comme par a) $g_{t+s}(i) \geq p_s(i,i)g_t(i)$, alors par la régularité de P_t , cet ensemble doit être vide.

Voici maintenant quelques propriétés utiles des lois de sortie:

Lemme 1.2

Si $\{g_t,\ t>0\}$ est une loi de sortie par rapport à P_t , alors pour tout $i \in E$ $g_t(i)$ est continue sur R_+ , et $g_o = \lim_{t\downarrow 0} g_t$ satisfait $0 \leq P_t g_o \leq g_t$ (*)

Démonstration

On a: $\underline{\lim}_{s\to t}\, g_{t+s}(i) = \underline{\lim}_{s\to t} \sum_j p_s(i,j)g_t(j)$

$$\geq g_{2t}(i) = \lim_{u\downarrow 0} \sum_j p_u(i,j)g_{2t-u}(j) \geq \overline{\lim}_{s\uparrow t}\, g_{t+s}(i) \geq \underline{\lim}_{s\to t}\, g_{t+s}(i)$$

d'où: (1) $g_t(i) = \lim_{u\to t} g_u(i)$ pour $t>0$ et $i \in E$

(*) a(t) définie pour $t>0$, est dite continue sur R_+
si: 1) a(t) est continue sur R_+^*
2) $\lim_{t\downarrow 0} a(t)$ existe et est finie

d'autre part comme :

$g_{t+s}(i) = p_{s-u}(i,i)g_{t+u}(i)$, pour $-t < u < s$, $s > 0$, $t \geqslant 0$

on a: $g_{t+s}(i) \geqslant \overline{\lim_{u\to t}}\, p_s(i,i)g_u(i)$

donc $\underline{\lim_{u\downarrow t}}\, g_u(i) \geqslant \overline{\lim_{u\to t}}\, g_u(i) \geqslant \overline{\lim_{u\downarrow t}}\, g_u(i) \geqslant \underline{\lim_{u\to t}}\, g_u(i) = g_t(i)$

c'est-à-dire que la limite à droite g_t^+ existe pour $t \geqslant 0$ et satisfait:

(2) $g_t^+(i) = \overline{\lim_{u\to t}}\, g_u(i) \geqslant g_t(i)$, $t > 0$

mais comme pour $t > 0$ et $s > 0$ $P_s g_t = P_{s-u} g_{t+u}$, on a $P_s g_t \geqslant P_s g_t^+$

alors $0 \leqslant p_s(i,i)\left[g_t^+(i) - g_t(i)\right] \leqslant P_s\left[g_t^+ - g_t\right](i) \leqslant 0$

et par la régularité de P_t , $g_t^+(i) = g_t(i)$ pour tout $i \in E$ et pour tout $t > 0$

alors par (1) et (2), $g_t(i)$ est continue sur R_+ et g_0 existe

et de plus $0 \leqslant P_t g_0 \leqslant \lim_{u\downarrow 0} P_t g_u = \lim_{u\downarrow 0} g_{t+u} = g_t$

Lemme 1.3

Si $\{G_t \text{ , } t > 0\}$ est une famille de fonction positives sur E, telle que

$$G_{t+s} - G_t = P_t G_s$$

Alors pour tout $i \in E$, $G_t(i)$ possède une dérivée $g_t(i)$

et $\{g_t \text{ , } t > 0\}$ satisfait: $g_{t+s} = P_t g_s$ et $0 \leqslant g_t(i) < \infty$

Démonstration

Soit $g_t(i) = t^{-1}\sum_j \int_{\{s<t\}} p_{t-s}(i,j)dG_s(j)$, $t > 0$, $i \in E$

on a $g_t(i)\inf_{s<t} p_s(i,i) \leqslant t^{-1}\sum_j \int_{\{s<t\}} p_t(i,j)dG_s(j) = t^{-1}\int_{\{s<t\}} dG_{t+s}(i) < \infty$

alors par la régularité de P_t , $0 \leqslant g_t(i) < \infty$

d'autre part pour B borélien contenu dans $(0,t-u)$, on a:

$$\sum_j \int_{B+u} p_{t-s}(i,j)dG_s(j) = \sum_j \int_B p_{t-(s+u)}(i,j)dG_{s+u}(j)$$

$$= \sum_j \sum_k \int_B p_{t-(s+u)}(i,j)p_u(j,k)dG_s(k)$$

$$= \sum_j \int_B p_{t-s}(i,j)dG_s(j)$$

alors par l'unicité de la mesure invariante on a:

$$\sum_j \int_B p_{t-s}(i,j)dG_s(j) = g_t(i)\int_B ds$$

ce qui donne en particulier $g_{t+s} = P_t g_s$

soit $B = (t-u,t]$, alors intégrant sur $(u,u+v]$ on a:

$$u\int_{(u,u+v]} g_t(i)dt = \sum_j \int_{(u,u+v]} \int_{(0,u]} p_{u-s}(i,j)dG_{t-u+s}(j)dt$$

$$= \sum_j \int_{(0,u]} \int_{(0,v]} p_{u-s}(i,j)dG_{t+s}(j)dt$$

$$= \sum_j \int_{(0,u]} p_{u-s}(i,j)\left[\int_{(s,s+v]} dG_t(j)\right]ds$$

$$= \int_{(0,u]} ds \int_{(u,u+v]} dG_t(i) = u\int_{(u,u+v]} dG_t(i)$$

donc $g_t(i)$ est la dérivée de $G_t(i)$

de plus $g_t(i)$ est continue, puisque dans la démonstration du lemme 1.2 on ne se sert pas de la propriété b) des lois de sortie, sauf pour affirmer que $g_t < \infty$

On peut trouver d'autres démonstrations de ces deux lemmes dans Chung[4]

Proposition 1.4

La transformée de Laplace: $\hat{g}_x = \int_0^\infty e^{-xt} g_t dt$, d'une loi de sortie, définit une famille $\{\hat{g}_x \text{ , } x > 0\}$ de fonctions positives bornées sur Ξ, jouissant des propriétés suivantes:

a) $\hat{g}_y = [I + (x-y)\hat{P}_y]\hat{g}_x$

b) $e^{-xs}P_s\hat{g}_x \leq \hat{g}_x$

Réciproquement:

1) toute famille $\{\hat{g}_x \text{ ,} x > 0\}$ de fonctions positives bornées sur Ξ vérifiant a), est la transformée de Laplace d'une loi de sortie unique.

2) à toute fonction positive bornée h sur Ξ qui vérifie: $e^{-xs}P_s h \leq h$ pour un $x > 0$ et pour tout $s > 0$, correspond une loi de sortie unique $\{g_t \text{ , } t > 0\}$ telle que: $h = \int_0^\infty e^{-xt} g_t dt$

Démonstration

$$\hat{g}_x(i) = \int_0^\infty e^{-xt} g_t(i)dt = \sum_{n\geq 0}\int_{nT}^{(n+1)T} e^{-xt} g_t(i)dt = \sum_{n\geq 0}\int_0^T e^{-x(t+nT)} g_{t+nT}(i)dt$$

$$= \sum_{n\geq 0}\int_0^T e^{-x(t+nT)} P_{nT} g_t(i)dt$$

$$\leq (\sup_j \int_0^T g_t(j)dt) \sum_{n\geq 0} e^{-xnT}$$

donc: $\sup_i \hat{g}_x(i) \leq (\sup_i \int_0^T g_t(i)dt)(1 - e^{-xT})^{-1}$

d'où pour $x > 0$, $\hat{g}_x$ est bornée

a) résulte de:

$$\hat{P}_y\hat{g}_x = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-yt} e^{-xs} P_t g_s dsdt = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-yt} e^{-xs} g_{s+t} dsdt$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-y(t-s)} e^{-xs} g_t dsdt$$

$$= (x-y)^{-1}\int_0^\infty (e^{-yt} - e^{-xt}) g_t dt = (x-y)^{-1}(\hat{g}_y - \hat{g}_x)$$

b) résulte de $e^{-xs}P_s\hat{g}_x = \int_s^\infty e^{-xt} g_t \leq \hat{g}_x$

réciproquement on a par a): $(-\frac{d}{dx})^n \hat{g}_x = \hat{P}_x^n \hat{g}_x \geq 0$

alors par le théorème de Bernstein sur les fonctions complètement monotones (c.f. Meyer[1, XI-T40]), il existe une famille $\{\mu(\cdot;i),\ i\in E\}$ de mesures positives sur R_+ telles que:

$$\hat{g}_x(i) = \int_0^\infty e^{-xt}\mu(dt;i) \qquad x>0\ ,\ \ i\in E$$

mais $\hat{P}_y\hat{g}_x(i) = (x-y)^{-1}(\hat{g}_y(i) - \hat{g}_x(i)) = (x-y)^{-1}\int_0^\infty (e^{-yt} - e^{-xt})\mu(dt;i)$

$$= \int_0^\infty e^{-yt}\int_t^\infty e^{-x(s-t)}\mu(ds;i)dt$$

d'où par la continuité à droite des fonctions:

$$P_t\hat{g}_x(i) = \int_t^\infty e^{-x(s-t)}\mu(ds;i) = \int_0^\infty e^{-xs}\ (t+ds;i)$$

en posant $G_t(i)=\mu((0,t];i)$, on a alors:

$$\sum_j P_t(i,j)G_s(j) = \mu(t+(0,s];i) = G_{t+s}(i) - G_t(i)$$

donc par le lemme 1.3, $\{g_t = G_t'\ ,\ t>0\}$ satisfait $P_tg_s = g_{s+t}$

et $\displaystyle\int_0^T g_t dt \leq e^T\int_0^T e^{-t}g_t dt \leq e^T\hat{g}_1$

c'est-à-dire que $\{g_t\ ,\ t>0\}$ est une loi de sortie de P_t

finalement 2) résulte de 1) en posant:

$$\hat{g}_y = [I - (x-y)\hat{P}_y]h$$

en effet pour $y\geq x$, on a:

$$(y-x)\hat{P}_yh = (y-x)\int_0^\infty e^{-(y-x)t}e^{-xt}P_th\,dt \leq h$$

donc $\hat{g}_y \geq 0$ pour tout $y>0$

et d'autre part: $\hat{P}_yh(i) = \int_0^\infty e^{-yt}P_th(i)dt \leq y^{-1}\sup_i h(i)$

Définition 3

Une famille $\{f_t \ , t > 0\}$ de mesures positives sur E est appelée loi d'entrée par rapport au semi-groupe P_t si:

a) $f_s P_t = f_{s+t}$

b) $\sup_t \|f_t\| < \infty$

où $\|f_t\| = \sum_i f_t(i)\hat{P}_1 e(i)$

on a pour les lois d'entrée des résultats analogues aux lemmes 1.2, 1.3, et à la proposition 1.4

§2. Etude des trajectoires

Soit $\hat{E}$ un espace métrique compact contenant E comme ensemble ouvert dense, et tel que la topologie induite sur E soit la topologie discrète; soit $\mathcal{E}$ la tribu de Borel de $\hat{E}$. Une fonction mesurable f: $(\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\hat{E}, \mathcal{E})$ est dite sur E si $P\{f \in E\} = 1$; $c \in E$ est dite une valeur possible de f si $P\{f > c\} > 0$.
Un processus stochastique à temps continu sur E est une famille $(X_t)_{t>0}$ de fonctions mesurables $X_t : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow (\hat{E}, \mathcal{E})$ sur E, telle que l'ensemble de toutes les valeurs possibles de toutes les X_t est E.

Définition: Chaîne de Markov homogène à temps continu sur E

Un processus stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t>0})$ à temps continu sur E est dit une chaîne de Markov homogène si:

1) $P\{f \circ X_{t_n} | X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}\} = P\{f \circ X_{t_n} | X_{t_{n-1}}\}$; $0 < t_1 < \ldots < t_n$ et $f: (\hat{E}, \mathcal{E}) \to (R_+, \mathcal{B})$

2) Soit $S_i = \{ s > 0 : i$ est une valeur possible de $X_s \}$, $i \in E$

$P\{X_{t+s} = j \mid X_s = i\} = P\{X_{t+s'} = j \mid X_{s'} = i\}$, pour tout s, $s' \in S_i$ et pour tout $i, j \in E$

On dit que la chaîne a pour fonction de transition le semi-groupe P_t, et $\{f_t,\ t > 0\}$ pour loi d'entrée si: $P_t(i,j) = P\{X_{t+s} = j \mid X_s = i\}$, $s \in S_i$, et $f_t(i) = P\{X_t = i\}$, $i, j \in E$
Etant donné un semi-groupe sous-markovien régulier P_t et une loi d'entrée f_t, telle que $\sum_j f_t(j) = 1$ pour tout $t > 0$, on peut toujours construire une chaîne de Markov homogène sur E : $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_{t>0})$ ayant P_t pour fonction de transition et f_t pour loi d'entrée.
Nous allons montrer dans cette section, à l'aide de Chung [1, II-4 à II-9] qu'il existe une modification assez régulière pour permettre, par exemple, la propriété de Markov forte. Cette modification permettra d'énoncer aussi d'autres résultats intéressants.
On supposera dans toute la suite les tribus sur Ω complètes.

Définition: Processus séparable

Un processus (X_t) sur E est dit séparable s'il existe un ensemble dénombrable $S \subseteq R_+$ et un ensemble négligeable N, tels que pour tout fermé $A \subseteq \hat{E}$ et tout intervalle ouvert $G \subseteq R$: $\{X_t \in A,\ t \in G \cap S\} - \{X_t \in A,\ t \in G \cap R_+\} \subseteq N$

Remarque

Si (X_t) est une chaîne de Markov homogène de semi-groupe régulier P_t et de loi d'entrée f_t, alors grâce au th.II-4.1 de Chung[1] , S est un ensemble séparant universel, au sens de Meyer[1,D.IV-16], tel que pour tout $\omega \notin N$ et tout intervalle ouvert G : $\overline{X_{R_+ \cap G}(\omega)} = \overline{X_{S \cap G}(\omega)}$; alors par Meyer[1,T.IV-18] la chaîne est séparable au sens de D-13. Inversement grâce aux th.17 et 18 de Meyer[1], si (X_t) est séparable au sens de D-13, elle est séparable.

Cette équivalence s'appuie sur le lemme suivant:

Lemme 2.1

$(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t), P_t, f_t)$ est continue en probabilité.

Démonstration

Pour $s < t$ on a $P\{X_s = X_t\} = \sum_j f_s(j) p_{t-s}(j,j)$

alors par les résultats de la section 1 on a:

$$\varliminf_{s \uparrow t} P\{X_s = X_t\} \geq \sum_j f_t(j) = 1$$

d'où la limite existe et égale 1

Pour $s > t$ on a $P\{X_s = X_t\} = \sum_j f_t(j) p_{s-t}(j,j)$

alors par la convergence uniforme: $\lim_{s \downarrow t} P\{X_s = X_t\} = \sum_j f_t(j) = 1$.

Lemme 2.2

Il existe une modification séparable de (X_t)

Démonstration

par la remarque c'est le th.19 de Meyer[1]

Définition: Processus bien-séparable

Un processus est dit bien-séparable si on peut prendre pour S n'importe lequel des ensembles dénombrables denses.

(Dorénavant (X_t) désignera toujours une chaîne de Markov homogène sur E, de semi-groupe régulier P_t et de loi d'entrée f_t)

Lemme 1.3

(X_t) possède une modification séparable et $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$-mesurable

Démonstration

On peut consulter Doob [1, II-2.6] ; on se sert des lemmes 1.1 et 1.2

Lemme 1.4

Si (X_t) est séparable, alors pour tout $i \in E$, $t \in S_i$ et $s > 0$ on a:

$$P[X_u = i,\ t < u < t+s \mid X_t = i] = e^{-q_i s}$$

Démonstration

Il existe S dénombrable dense et N de mesure nulle, tels que:

$$\{X_u = i,\ u \in S \cap (t,t+s)\} - \{X_u = i,\ t < u < t+s\} \subseteq N$$

(ce qui montre en particulier que $P\{X_u = i,\ t < u < t+s \mid X_t = i\}$ est définie)

soit $\{s_n\}_{n\geq 1} = S \cap (t,t+s)$, en ordonnant $\{s_n,\ 1 \leq n \leq m\}$ on obtient $\{s_{n,m},\ 1 \leq n \leq m\}$ une suite finie croissante, soient $d_{1,m} = s_{1,m} - t$, $d_{n,m} = s_{n,m} - s_{n-1,m}$ $\quad 2 \leq n \leq m$

alors: $P[X_u = i,\ t < u < t+s \mid X_t = i] = \lim_{m\to\infty} P[X_{s_{n,m}} = i,\ 1 \leq n \leq m \mid X_t = i] =$

$$= \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} p_{d_{n,m}}(i,i) = \lim_{m\to\infty} \prod_{n=1}^{m} [1 - q_i d_{n,m} + o(d_{n,m})] = \lim_{m\to\infty} \exp(-q_i \sum_{n=1}^{m} d_{n,m})$$

$$= e^{-q_i s}\ ,\quad \text{si } q_i < \infty$$

si $q_i = \infty$, alors pour tout $M > 0$ $\ p_d(i,i) \leq 1 - Md$ pour d assez petit

d'où $P[X_u = i,\ t < u < t+s \mid X_t = i] \leq \lim_{M\to\infty} e^{-Ms} = 0$.

Nous supposerons dès maintenant l'hypothèse suivante:

HYPOTHESE A

$$0 < q_i < \infty\ ,\quad \sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i \quad ;\ \text{pour tout } i \in E$$

Lemme 2.5

Si (X_t) est séparable, alors pour tout t fixé:

$$P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = X_t\right] = 1$$

Démonstration

Pour i tel que $t \in S_i$ et pour $0<\varepsilon<t$, on a par le lemme 3.4 :

$$P\left[X_s = i,\ t-\varepsilon<s<t+\varepsilon \mid X_t = i\right] = P\left[X_s = i,\ t-\varepsilon<s<t \mid X_t = i\right]P\left[X_s = i,\ t<s<t+\varepsilon \mid X_t = i\right]$$

$$= f_t(i)^{-1}P\left[X_s = i,\ t-\varepsilon<s\leq t\right]e^{-q_i}$$

$$= f_t(i)^{-1}P\left[X_s = i,\ t-\varepsilon\leq s<t\right]e^{-q_i}$$

$$= f_t(i)^{-1}f_{t-\varepsilon}(i)e^{-2q_i} \longrightarrow 1 \qquad (\varepsilon\to 0)$$

alors soient $S_i(\omega) = \{t : X_t(\omega) = i\}$, $\Lambda^t_{n,i} = \{\omega : (t-n^{-1}, t+n^{-1}) \subseteq S_i(\omega)\}$

on a: $P\{\bigcup_n \Lambda^t_{n,i} \mid X_t = i\} = \lim_{n\to\infty} P[X_s = i,\ t-n^{-1}< s < t+n^{-1} \mid X_t = i\} = 1$

donc " a fortiori": $P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = i \mid X_t = i\right] = 1$

$P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = X_t\right] = \sum_i P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = i \mid X_t = i\right]P\left[X_t = i\right] = \sum_i f_t(i) = 1$.

Théorème 2.6

Soit (X_t) un processus séparable avec S, satisfaisant pour chaque t fixé:

$$P\left[\lim_{s\downarrow t} X_s = X_t\right] = 1$$

Alors il existe une modification séparable avec S, $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$-mesurable, et dont toutes les trajectoires sont semi-continues inférieurement à droite. (*)

Démonstration

C'est essentiellement la même que celle du th.7-1 de Chung [1, II]

(*) f: $R \to \hat{E}$ est dite semi-continue inférieurement à droite si $\{f(s): s>t\}$ a au plus une valeur limite appartenant à E lorsque $s\downarrow t$, et si elle existe f(t) est dans E et est cette valeur limite; et si f(t) est dans E, cette valeur limite existe et est f(t).

Nous supposerons à partir de maintenant que (X_t) est séparable, Borel-mesurable et semi-continue inférieurement à droite.

<u>Définition</u>: <u>Famille admissible</u>

Une famille $\{\mathcal{F}_t,\ t>0\}$ de tribus est dite admissible par rapport à la chaîne de Markov (X_t), si:

1) $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, pour $s \leq t$

2) $\mathcal{C}(X_s,\ 0<s\leq t) \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$, pour tout $t>0$

3) $P[X_t = j \mid \mathcal{F}_s] = p_{t-s}(X_s, j)$, pour tout $j \in E$ et $0<s<t$

4) la famille est continue à droite.

Nous ne considérons que des familles admissibles.

Soient T un temps d'arrêt par rapport à $(X_t, \mathcal{F}_t)$, L sa fonction de distribution on pose $T_j = \inf\{t>T:\ X_t = j\}$; par la séparabilité de (X_t), T_j est un temps d'arrêt

Pour tout $B_2 \in \mathcal{B}$ la tribu de Borel de R_+, on sait qu'il existe une fonction $C_j(\cdot, B_2)$: $R_+ \to R_+$ mesurable, telle que pour tout $B_1 \in \mathcal{B}$:

$$\int_{B_1} C_j(s,B_2)L(ds) = \int_{T\in B_1} E[T_j \in B_2 \mid T]dP = P[T\in B_1,\ T_j \in B_2]$$

Lorsque $B_2 = [0,u]$, on note $C_j(s,B_2)$ par $C_j(s,u)$

Pour $B_2 = [0,u]$, u rationnel, on choisit $C_j(\cdot,u)$ de telle façon que $C_j(\cdot,u) \leq C_j(\cdot,v)$, $u \leq v$

Pour s fixé, on sait qu'il existe une mesure $C_j(s,\cdot)$ telle que $C_j(s,[0,u]) = C_j(s,u)$, u rat

Par la construction de cette mésure (on peut consulter par exemple Neveu [2, I-6])

il est facile de voir que $C_j(\cdot,B_2)$ est mesurable pour tout $B_2 \in \mathcal{B}$ et satisfait

$$\int_{B_1} C_j(s,B_2)L(ds) = \int_{T\in B_1} E[T_j \in B_2 \mid T]dP$$

Nous allons maintenant "à l'aide" d'un lemme, qu'on peut trouver dans Chung [1,II-8.1] démontrer un théorème sur les trajectoires d'une chaîne séparable. La démonstration que nous donnons, simplifie un peu celle de Chung [1,II-6.1]

Lemme 2.7

Si (X_t) est séparable, alors les tribus complètes $\mathcal{F}^{\circ}_t = \overline{\mathcal{T}(X_s,\ 0 < s \leq t)}$ sont continues à droite.

Théorème 2.8

Si (X_t) est séparable, alors P-presque toutes les trajectoires ont la propriété suivante: pour tout $t > 0$, lorsque $s \downarrow t$, $\{X_s(\omega):\ s > t\}$ a au plus une valeur limite dans E

Démonstration

Soient $M > 0$ et $j \in E$; on pose $\Lambda^j_M = \{X_M = j\}$, χ sa fonction indicatrice.

comme: $E[\chi \mid X_s,\ 0 < s \leq t] = P[X_M = j \mid X_t] = p_{M-t}(X_t, j)$, $0 < t < M$

alors $(p_{M-t}(X_t, j))_{0<t<M}$ est une martingale et $E[p_{M-t}(X_t, j)] = P[X_M = j]$, $0 < t < M$

d'où il existe, par Meyer [1,VI-T4], une modification continue à droite $(Y_{t,M})_{0<t<M}$

soient donc S un ensemble dénombrable dense et Ω_0 tel que $P(\Omega_0) = 1$, satisfaisant: 1) $Y_{s,M}(\omega) = p_{M-s}(X_s(\omega), j)$; $s \in S$, M rationnel, $\omega \in \Omega_0$

2) (X_t) est séparable avec S

soient $\omega_0 \in \Omega_0$ et $t > 0$ tels que $\{X_s(\omega_0):\ s \in S \cap (t, \infty)\}$ a deux valeurs limites $i, i' \in E$, lorsque $s \downarrow t$; alors il existe deux suites dans S tendant vers t, soit $\{s_n\}$ et $\{s'_n\}$, telles que: $\lim\limits_{n\to\infty} X_{s_n}(\omega_0) = i$, $\lim\limits_{n\to\infty} X_{s'_n}(\omega_0) = i'$

d'où pour tout M rationnel > t, on a:

$$\lim_{n\to\infty} Y_{s_n,M}(\omega_0) = \lim_{n\to\infty} p_{M-s_n}(X_{s_n}, j) = p_{M-t}(i, j)$$

$$\lim_{n\to\infty} Y_{s'_n,M}(\omega_0) = \lim_{n\to\infty} p_{M-s'_n}(X_{s'_n}, j) = p_{M-t}(i', j)$$

donc $p_{M-t}(i,j) = p_{M-t}(i',j)$

et alors en faisant tendre M vers t on a $\delta_{ij} = \delta_{i'j}$, donc $i = i'$

Remarque

Soient $S_i^-(\omega) = \{t : S_i(\omega) \cap (t-\varepsilon, t) \neq \emptyset$, pour tout $\varepsilon > 0\}$

$S_i^+(\omega) = \{t : S_i(\omega) \cap (t, t+\varepsilon) \neq \emptyset$, pour tout $\varepsilon > 0\}$

$\overline{S_i(\omega)} = \{t : S_i(\omega) \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon) \neq \emptyset$, pour tout $\varepsilon > 0\}$

On a pour tout t fixé et $i \in \Xi$:

$$\{\omega : t \in S_i(\omega)\} \doteq \{\omega : t \in \overline{S_i(\omega)}\} \doteq \{\omega : t \in S_i^-(\omega)\} \doteq \{\omega : t \in S_i^+(\omega)\}$$

en effet ceci résulte du lemme 2.5

Lemme 2.9

Soient $j, k \in \Xi$ et $t > 0$, alors P-p.p. sur $\{T_j \leq t\}$ on a:

$$P\{X_t = k \mid T, T_j\} = p_{t-T_j}(j,k)$$

Démonstration

Par la remarque $\{T_j = t\} \subseteq \{X_t = j\}$

alors pour $s \leq t$ et $s' \leq t$ on a:

$$P[T \leq s, T_j \leq s', T_j = t, X_t = k] = \delta_{jk} P[T \leq s, T_j \leq s', T_j = t] = \int_{\Lambda_1} p_{t-T_j}(j,k) dP$$

où $\Lambda_1 = \{T \leq s, T_j \leq s', T_j = t\}$

d'autre part soit: $T_{j,n} = \min_m \{m2^{-n} : m2^{-n} > T_j$ et $X_{m2^{-n}} = j\}$

on a: $T_{j,n} \downarrow T_j$ P-p.p.; soit donc $\Lambda_2 = \{T \leq s, T_j \leq s', T_j < t\}$, $\Lambda_2^n = \{T \leq s, T_j \leq s', T_{j,n} < t$

alors:

$$\begin{aligned} P[T \leq s, T_j \leq s', T_j < t, X_t = k] &= \lim_{n\to\infty} P[T \leq s, T_j \leq s', T_{j,n} < t, X_t = k] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{m2^{-n} < t} P[T \leq s, T_j \leq s', T_{j,n} = m2^{-n}, X_t = k] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum P[T \leq s, T_j \leq s', T_{j,n} = m2^{-n}] p_{t-m2^{-n}}(j,k) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda_2^n} p_{t-T_{j,n}}(j,k) dP = \int_{\Lambda_2} p_{t-T_j}(j,k) dP \end{aligned}$$

donc: $$\int_{T \leq s, T_j \leq s'} P[X_t = k \mid T, T_j] dP = \int_{T \leq s, T_j \leq s'} p_{t-T_j}(j,k) dP .$$

Lemme 2.10

Soit $r_j(s,t) = \int_{[s,t]} p_{t-u}(j,j)C_j(s,du)$, $j \in E$, $s \leq t$

alors $\int_{T\in B_1} P[X_t = j \mid T]dP = \int_{B_1} r_j(s,t)L(ds)$, pour tout $B_1 \subseteq [0,t]$

$r_j(s,\cdot)$ est continue à droite sur $[s,\infty)$ et $r_j(\cdot,\cdot)$ est $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$-mesurable sur $\{$des couples (s,t): $s \leq t\}$

Démonstration

Par le lemme 2.9, on a pour tout $B_1 \subseteq (0,t]$:

$$\int_{T\in B_1} P[X_t = j \mid T]dP = \int_{T\in B_1} E[P[X_t = j \mid T, T_j] \mid T]dP = \int_{T\in B_1} E[p_{t-T_j}(j,j) \mid T]dP$$

$$= \int_{B_1} C_j(s,p_{t-\bullet}(j,j))A(ds) = \int_{B_1} \int_{[0,t]} p_{t-u}(j,j)C_j(s,du)L(ds)$$

$$= \int_{B_1} \int_{[s,t]} p_{t-u}(j,j)C_j(s,du)L(ds) \qquad \text{car } T_j \geq T$$

le reste du lemme est trivial.

Lemme 2.11

On a pour tout $k \in E$:

1) $r_k(s,t+t') = \sum_j r_j(s,t)p_{t'}(j,k)$, pour L-presque tout s et pour tout $t > s$, $t' \geq 0$

2) $\sum_j r_j(s,t) = 1$, pour L-presque tout s et pour tout $t > s$

3) $r_k(s,\cdot)$ est continue sur $[s,\infty)$ pour L-presque tout s

Démonstration

Pour $s \leq t$ et $t' > 0$, on a:

$$P[T \leq s,\ X_{t+t'} = k] = \sum_j P[T \leq s,\ X_t = j]p_{t'}(j,k)$$

alors P-p.p.: $P[X_{t+t'} = k \mid T] = \sum_j P[X_t = j \mid T]p_{t'}(j,k)$

et par le lemme 2.10, on a

$$r_k(s,t+t') = \sum_j r_j(s,t)p_{t'}(j,k) \quad , \quad \text{pour } t,t' > 0 \text{ et L-p.t. } s \leq t$$

alors par le théorème de Fubini, on a égalité pour L-p.t. s et L×L-p.t. (t,t'): $t \geq s$, $t' > 0$

alors par la continuité à droite et le lemme de Fatou

(1) $r_k(s,t+t') \geq \sum_j r_j(s,t)p_{t'}(j,k)$, pour L-p.t. s , $t \geq s$, $t' > 0$

et alors

(2) $\sum_j r_j(s,t-t') \geq \sum_j r_j(s,t)$, pour L-p.t. s , $t \geq s$, $t' > 0$ (*)

mais par le lemme 2.10 et le théorème de Fubini, on a:

(3) $\sum_j r_j(s,t) = 1$, pour L-p.t. s et L-p.t. $t \geq s$

et alors par la continuité à droite et le lemme de Fatou:

(4) $\sum_j r_j(s,t) \leq 1$, pour L-p.t. s ; $t \geq s$

soit $s \in N$, où N est l'ensemble de L-mesure nulle de (1) et (4)

si (3) est vérifiée pour un certain t, par (2) et (4) elle est vérifiée pour toute valeur plus grande que t, on a donc 2) du lemme

alors on a l'égalité pour (2), donc pour (1), et on a 1) du lemme

3) du lemme découle du lemme 1.2 sur les lois d'entrée.

<u>Lemme 2.12</u>

Soit: $r_t(j) = \int_0^\infty r_j(s,s+t)L(ds)$, $j \in E$ et $t > 0$; alors

1) $r_t(j) \geq 0$, $j \in E$ et $t > 0$

2) $\sum_j r_t(j) = 1$, $t > 0$

3) $\sum_j r_t(j)p_{t'}(j,k) = r_{t+t'}(k)$, $k \in E$ et $t > 0$, $t' \geq 0$

4) $r_{\cdot}(j)$ est continue sur R_+ , $j \in E$

<u>Démonstration</u>

1), 2), 3) découlent du lemme 2.11

4) découle du lemme 1.2 sur les lois d'entrée

(*) Il faut supposer P_t markovien, mais on peut toujours le faire en ajoutant un état.

Lemme 2.13

Soit T un temps d'arrêt fini, alors on a:

1) $P[X_T = j] = r_0(j)$, $j \in E$ $\qquad (r_0(j) = \lim_{t \downarrow 0} r_t(j))$

2) $P[X_{T+t_\nu} = j_\nu,\ 0 \leq \nu \leq N] = r_{t_0}(j_0) \prod_{\nu=0}^{N-1} p_{t_{\nu+1}-t_\nu}(j_\nu, j_{\nu+1})$, pour $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_N$ et $j_0, \dots, j_N \in E$

Démonstration

Par le théorème 2.8, $\{X_T = j\} \doteq \{T = T_j\}$, alors on a:

$$P[X_T = j] = P[T = T_j] = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{[mn^{-1},(m+1)n^{-1})} C_j(s,(m+1)n^{-1}) L(ds)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty C_j(s,[ns+1]n^{-1}) L(ds)$$

$$= \int_0^\infty C_j(s,s) L(ds) = \int_0^\infty r_j(s,s) L(ds) = r_0(j) \quad \text{, donc 1)}$$

Soit $B_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} \{mn^{-1} \leq T < (m+1)n^{-1},\ X_{(m+1)n^{-1}+t_\nu} = j_\nu,\ 0 \leq \nu \leq N\}$

Si $\omega \in \limsup_n B_n$, alors il existe une suite de nombres rationnels $\{s_k\}$ telle

que $s_k \downarrow T$ et $X_{s_k+t_\nu} = j_\nu$, $0 \leq \nu \leq N$; alors par le théorème 2.8 on a pour

P-p.t. $\omega \in \limsup_n B_n$: $\quad X_{T+t_\nu}(\omega) = \lim_{t \downarrow T+t_\nu} X_t(\omega) = j_\nu$, $0 \leq \nu \leq N$

donc $\limsup_n B_n \mathrel{\dot{\subseteq}} \{X_{T+t_\nu} = j_\nu\ ,\ 0 \leq \nu \leq N\}$

d'autre part par le lemme 2.10, on a en posant $Q = \prod_{\nu=0}^{N-1} p_{t_{\nu+1}-t_\nu}(j_\nu, j_{\nu+1})$:

$$P(B_n) = \sum_{m=0}^{\infty} P[mn^{-1} \leq T < (m+1)n^{-1},\ X_{(m+1)n^{-1}+t_0} = j_0] P[X_{(m+1)n^{-1}+t_\nu} = j_\nu, 1 \leq \nu \leq N \mid X_{(m+1)n^{-1}+t_0} = j_0]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{[mn^{-1},(m+1)n^{-1})} r_{j_0}(s,(m+1)n^{-1}+t_0) L(ds) Q = \int_0^\infty r_{j_0}(s,[ns+1]n^{-1}+t_0) L(ds) Q$$

alors par le lemme 2.11, on a:

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = \int_0^\infty r_{j_0}(s,s+t_0) L(ds) Q = r_{t_0}(j_0) Q$$

donc $\quad P[X_{T+t_\nu} = j_\nu,\ 0 \leq \nu \leq N] \geq r_{t_0}(j_0) Q$

en sommant sur tous les $j_1, \dots, j_N$, on a:

$$P[X_{T+t_0} = j_0] \geq r_{t_0}(j_0)$$

pour $t_0 = 0$ on a l'égalité par 1), d'où l'égalité pour 2)

pour $t_0 > 0$, $1 \geq \sum_{j_0} P[X_{T+t_0} = j_0] \geq \sum_{j_0} r_{t_0}(j_0) = 1$, ce qui implique 2) .

On note $\mathcal{F}^{\circ}_{T}$ la tribu des ensembles $\Lambda \in \mathcal{F}$ tels que $\Lambda \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$,

$\mathcal{F}'_T$ la complétion de la tribu $\bigcap_{t>0} \mathcal{F}^{\circ}_{T+t}$, $\mathcal{F}'_T = \overline{\mathcal{C}(X_{T+t},\ t > 0)}$

Corollaire

1) pour tout $t \geq 0$, X_{T+t} est $\mathcal{F}'_{T+t}$-mesurable

2) pour tout $t > 0$, X_{T+t} est une variable aléatoire sur (un sous-ensemble de) E

Démonstration

$B_n \in \mathcal{F}'_{T+t_0+n^{-1}}$, donc par la continuité à droite de la famille de tribus $\limsup_n B_n \in \mathcal{F}'_{T+t_0}$, mais la démonstration du lemme précédent montre en particulier que $\{X_{T+t_0} = j_0\} \doteq \limsup_n B_n$, on a donc 1)

la dernière série d'inégalités du lemme précédent nous donne pour $t > 0$

$$\sum_j P[X_{T+t} = j] = 1$$

ce qui implique 2)

Voici comment se généralisent les résultats précédents

Soit T un temps d'arrêt quelconque, $\mathcal{F}_T^o$ est maintenant définie comme étant la complétion de la tribu des ensembles $\Lambda \in \Delta\mathcal{F}$ tels que $\Lambda \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, où $\Delta = \{T < \infty\}$. Pour $\Lambda \in \mathcal{F}_T$ tel que $P[\Lambda] > 0$, on considère l'espace $(\Delta, \Delta\mathcal{F}, P(\cdot|\Lambda))$

Prenant maintenant $L(s) = P[T \leq s | \Lambda]$; il existe pour tout $j \in E$, une fonction $H: R_+ \times \mathcal{B} \longrightarrow R_+$ notée $C_j(\cdot,\cdot|\Lambda)$ telle que :

1) $C_j(\cdot, B|\Lambda)$ est $\mathcal{B}$-mesurable, pour tout $B \in \mathcal{B}$

2) $C_j(s,\cdot|\Lambda)$ est une mesure positive sur $\mathcal{B}$, pour tout $s \in R_+$

3) $\int_{B_1} C_j(s, B_2|\Lambda) L(ds) = \int_{T \in B_1} E[T_j \in B_2 | \Lambda, T] P(d\omega|\Lambda)$

mais $L(s) = P[\Lambda]^{-1} P[\Lambda, T \leq s]$ et $P(\cdot|\Lambda) = P[\Lambda]^{-1} P(\cdot)$, donc en posant $L(\Lambda, s) = P[\Lambda, T \leq s]$, on a : $\int_{B_1} C_j(s, B_2|\Lambda) L(\Lambda, ds) = \int_{T \in B_1} E[T_j \in B_2 | \Lambda, T] dP$

On obtient alors $r_j(\cdot,\cdot|\Lambda)$ et $r_t(\Lambda, j)$ satisfaisant aux résultats précédents; mais maintenant $r_j(\cdot, t|\Lambda)$ est une modification de $P[X_t = j | \Lambda, T]$ sur $\{T \leq t\}$, au lemme 2.13 il faut considérer $P[\Lambda, X_{T+t_\nu} = j_\nu, 0 \leq \nu \leq N]$

Théorème 2.14

Soit T un temps d'arrêt

Alors $(\Delta, \Delta\mathcal{F}, P(\cdot|\Delta), (X_{T+t})_{t>0}, (\mathcal{F}_{T+t})_{t>0})$ est une chaîne de Markov homogène sur E', un sous-ensemble de E, de fonction de transition P_t et de loi d'entrée $r_t(\Delta, \cdot)$

De plus pour tout $t > 0$, si $M \in \mathcal{F}_{T+t}$ et $M' \in \mathcal{F}'_{T+t}$, on a :

$$P[M \cap M' | X_{T+t}] = P[M | X_{T+t}] P[M' | X_{T+t}] \text{ , P-p.p. sur } \Delta$$

Démonstration

Appliquant la généralisation du lemme 2.13 au temps d'arrêt T+t , on a sur Δ $P[M \cap M' | X_{T+t}] = P[M | X_{T+t}] P[M' | X_{T+t}]$, pour $M' = \{X_{T+t+t_\nu} = j_\nu, 0 \leq \nu \leq N\}$ mais ces M' engendrent $\mathcal{F}'_{T+t}$. En divisant par $P[M | X_{T+t}]$ on a la première partie.

Théorème 2.15

Pour tout $0<t_0<\dots<t_n$ et $j_0,\dots,j_n \in E$, on a P-p.p. sur Δ

$$P[X_{T+t_\nu}=j_\nu,\ 0\leq\nu\leq n \mid \Lambda,\ T] = r_{j_0}(T,T+t_0 \mid \Lambda)\prod_{\nu=0}^{n-1} p_{t_{\nu+1}+t_\nu}(j_\nu,j_{\nu+1})$$

Démonstration

On applique la généralisation de 2) du lemme 2.13 aux ensembles $\Lambda\cap\{T\leq s\}$ en remarquant que :

$$r_{t_0}(\Lambda\cap\{T\leq s\},j_0) = \int_0^\infty r_{j_0}(u,u+t_0 \mid \Lambda\cap\{T\leq s\})L(\Lambda\cap\{T\leq s\},du)$$

$$= \int_{\Lambda\cap\{T\leq s\}} r_{j_0}(T,T+t_0 \mid \Lambda)dP$$

Remarque

On résume les derniers résultats en disant que la chaîne (X_t) satisfait la propriété de Markov forte ; on verra à la section 4 une autre propriété, dite propriété de Markov Forte.

Nous supposerons dans toute la suite la loi d'entrée f_t, donnée par une mesure initiale μ sur E . (par exemple $(X_t)_{t\geq s}$, $s>0$, où (X_t) est donnée par la situation précédente). On a dans ce cas une chaîne $(X_t)_{t\geq 0}$, qu'on peut supposer, et qu'on supposera dans toute la suite, $\mathcal{B}\times\mathcal{F}$-mesurable et semi-continue inférieurement à droite sur R_+. P est alors notée P^μ.

Pour simplifier un peu, on suppose μ strictement positive.

<u>Théorème 2.16</u>

Il existe une suite strictement croissante $(T_n)_{n\geq 0}$, $T_0 \equiv 0$, de temps d'arrêt finis, telle que P^μ-presque partout

1) $X_t(\omega) = X_{T_n(\omega)}(\omega)$, $t \in [T_n(\omega), T_{n+1}(\omega))$

2) $P^\mu\left[T_{n+1} - T_n > t \mid X_{T_0}, \dots, X_{T_n}\right] = \exp(-q_{X_{T_n}}\, t)$

<u>Démonstration</u>

Soit $T_1 = \inf\{t : X_t \neq X_0\}$, T_1 est un temps d'arrêt

et $P^\mu[T_1 > t \mid X_0 = i] = P^\mu[X_s = i \;,\; 0 \leq s \leq t \mid X_0 = i] = e^{-q_i t}$

alors $P^\mu[T_1 = 0,\, X_0 = i] = \lim\limits_{t\downarrow 0} P^\mu[T_1 \leq t \mid X_0 = i]P[X_0 = i] = 0$

donc $P^\mu[T_1 = 0] = 0$, et $X_t = X_0$ pour $t \in [0, T_1)$

de même $P^\mu[T_1 = \infty] = \sum\limits_i \lim\limits_{t\to\infty} P^\mu[T_1 > t \mid X_0 = i]P^\mu[X_0 = i] = 0$

d'autre part on peut montrer que $P^\mu[X_{T_1} = j \mid X_0 = i] = (1-\delta_{ij})q_{ij}q_i^{-1}$, Chung [1,II-15.6]

alors $P^\mu[X_{T_1} \in E] = 1$

donc presque partout: $T_1 < \infty$ et $X_{T_1} \in E$

le reste du théorème suit par induction.

Théorème 1.17

Soit $T = \lim\limits_{n \to \infty} T_n$

$\overline{X}_t = X_t$ si $t \in [0,T)$, ∂ autrement

$\phi_t(i,j) = P^{\mu}[X_{t+s} = j$, et il y a un nombre fini de sauts sur $(s,t+s) \mid X_s = i]$

alors 1) $\overline{X}_t$ est une chaîne de Markov de fonction de transition Φ_t

2) Φ_t est la solution minimale de $P_t' = QP_t$

3) $\phi_t(i,j) = \sum\limits_{n \geq 0} p_t^{<n>}(i,j)$, où $p_t^{<0>}(i,j) = \delta_{ij} e^{-q_i t}$

$$p_t^{<n+1>}(i,j) = \sum_{k \neq i} \int_0^t e^{-q_i(t-s)} q_{ik} p_s^{<n>}(k,j) ds$$

Théorème 1.18

Soit $x_n = X_{T_n}$

Alors (x_n) est une chaîne de Markov discrète de matrice de transition A

donnée par : $A(i,j) = (1 - \delta_{ij}) q_{ij} q_i^{-1}$

§3. Frontières de Martin

Rappelons-nous que :

1) X_t est bien-séparable, semi-continue inférieurement à droite et Borel-mesurable.

2) $0 < q_i < \infty$, $\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i$

3) $A(i,j) = \dfrac{(1 - \delta_{ij})q_{ij}}{q_i}$

Remarquons qu'être transient pour A est équivalent à être transient pour Φ_t

Supposons donc E formé d'éléments transients pour A

On définit alors la frontière de la façon suivante :

Soient : μ une mesure de probabilité strictement positive sur E

$$K(\cdot,j) = \frac{1}{\mu G(j)} G(\cdot,j)$$

δ une fonction strictement positive sur E telle que $\sum_{i \in E} \delta(i) < +\infty$

on définit alors une métrique en posant :

$$d_1(i,j) = \sum_{k \in E} |K(k,i) - K(k,j)| \delta(k) \mu(k)$$

on note $\hat{E}$ la complétion de E sous la métrique $d = d_1 + d_2$, où d_2 est une métrique discrète par rapport à laquelle la complétion de E est le compactifié d'Alexandroff.

Définition. Frontière de sortie de Martin

$B_s = \hat{E} - E$ est dit (d'après Hunt) la frontière de sortie de Martin de A

Remarques

1) K est bien définie, en effet : $0 < G(j,j)\mu(j) \leq \mu G(j) \leq G(j,j)\mu(E) < \infty$

2) $\mu(K(\cdot,j)) = \mu K(j) = 1$

3) pour tout $j \in E$, $K(i,j) \leq \mu(i)^{-1}$

4) $\hat{E}$ est compact et sa topologie induit la topologie discrète sur E qui est ouvert dans $\hat{E}$

Lemme 3.1

Pour P^{μ}-presque tout ω, $x_n(\omega)$ converge dans $\hat{E}$ vers un point de B_s

Démonstration

$K(i,X_t(\omega))$ est une surmartingale bornée sur $[0,T(\omega))$

alors par un théorème classique (Meyer [1 , VI-T6])

$$\lim_{t\uparrow T(\omega)} K(i,X_t(\omega)) \quad \text{existe} \quad P^{\mu}\text{-presque partout}$$

donc $\lim_{n\to\infty} K(i,x_n(\omega))$ existe P^{μ}-presque partout

alors $x_n(\omega)$ converge dans $\hat{E}$ vers un point de B_s , puisque les états sont transients.

Définition: Ensemble invariant pour (x_n).

$\Lambda \in \mathcal{C}(x_n\ ,\ n \geq 0)$ est dit invariant pour (x_n), s'il existe une fonction

$f: E \to R$ telle que pour tout n:

$$I_{\Lambda} = f(x_0,x_1,\dots) = f(x_n,x_{n-1},\dots)$$

On a le théorème suivant dû à Hunt:

Théorème

Soit $x_\infty = \lim_n x_n$, alors la P^{μ}-complétion de la tribu $\mathcal{C}(x_\infty)$ est égale à la P^{μ}-complétion de la tribu des ensembles invariants pour (x_n)

Une démonstration de ce théorème se trouve dans Hunt [1] , mais il serait trop long de la donner ici.

§4. Décomposition

Rappelons l'hypothèse A : $0 < q_i < \infty$, $\sum_{j\neq i} q_{ij} = q_i$, pour tout $i \in E$

Une des conséquences de cette hypothèse est la proposition suivante:

Proposition 4.1

P_t est solution de: $P'_t = QP_t$

Démonstration

Pour i fixé, soit (J_n) une suite croissante de sous-ensembles finie de $J = E - \{i\}$ telle que $J = \bigcup_n J_n$; on peut supposer de plus que J_n contient exactement n éléments. Posons $J'_n = J - J_n$

alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$:

$$q_i - \sum_{k\in J_n} q_{ik} = \sum_{k\in J'_n} q_{ik}$$

d'autre part il existe $\delta > 0$ tel que pour $h < \delta$:

$$\left|\frac{p_h(i,k)}{h} - q_{ik}\right| < \frac{\varepsilon}{N} \ , \quad k \in J_N \quad ; \text{ et } \left|\frac{1 - p_h(i,i)}{h} - q_i\right| < \varepsilon$$

alors pour $h < \delta$:

$$\left|\frac{p_{t+h}(i,j) - p_t(i,j)}{h} - \sum_k q_{ik} p_t(k,j)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{k\neq i} h^{-1} p_h(i,k) p_t(k,j) - \sum_{k\neq i} q_{ik} p_t(k,j)\right| + \left|q_i p_t(i,j) - \frac{1-p_h(i,i)}{h} p_t(i,j)\right|$$

$$\leq \sum_{k\in J_N} \left|\frac{p_h(i,k)}{h} - q_{ik}\right| + \sum_{k\in J'_N} h^{-1} p_h(i,k) + \sum_{k\in J'_N} q_{ik} + \varepsilon$$

$$\leq 3\varepsilon + \frac{1 - p_h(i,i)}{h} - \sum_{k\in J_N} h^{-1} p_h(i,k)$$

$$\leq 3\varepsilon + q_i + \varepsilon + \varepsilon - \sum_{k\in J_N} q_{ik} \leq 6\varepsilon$$

d'où $P_t'^{+}(i,j) = QP_t(i,j)$, où $P_t'^{+}(i,j)$ désigne la dérivée à droite

mais $QP_t(i,j)$ est continue, il suffit d'appliquer le théorème de Lebesgue,

et puisqu'une fonction qui possède une dérivée à droite continue est dérivable,

alors P_t' existe et $P_t' = QP_t$

Proposition 4.2

Soit T le premier instant d'accumulation de sauts

Alors $P^{\mu}\left[\{T<\infty\}\Delta\{\sum_n q_{x_n}^{-1}<\infty\}\right]=0$

Démonstration

Soit $S_n = T_{n+1} - T_n$, on a $T = \sum_n S_n$

comme $E^{\mu}\left[S_n \mid S_0,\dots,S_{n-1}\right] = E^{\mu}\left[S_n \mid T_1,\dots,T_n\right] = E^{\mu}\left[S_n \mid x_n\right]$

et $\int_{x_n=i} E^{\mu}\left[S_n \mid x_n\right] dP^{\mu} = \int_{x_n=i} S_n \, dP^{\mu} = P^{\mu}\{x_n=i\}\int_0^{\infty} t q_i e^{-q_i t} dt$

$$= P^{\mu}\{x_n=i\}\int_0^{\infty} e^{-q_i t} dt = \int_{x_n=i} q_{x_n}^{-1} dP^{\mu}$$

alors $E^{\mu}\left[S_n \mid S_0,\dots,S_{n-1}\right] = q_{x_n}^{-1}$, P^{μ}-p.p.

soit $S_n' = \min(S_n,1)$, alors par la théorie des martingales (cf Neveu [,p.142])

P^{μ}-p.p.: $\sum S_n'$ converge si et seulement si $\sum E^{\mu}\left[S_n' \mid S_0,\dots,S_{n-1}\right]$ converge

mais $\sum S_n'$ converge si et seulement si $\sum S_n$ converge

d'autre part:

$$\int_{x_n=i} E^{\mu}\left[S_n' \mid x_n\right] dP^{\mu} = \int_{x_n=i,S_n\le 1} S_n \, dP^{\mu} + \int_{x_n=i,S_n>1} dP^{\mu}$$

$$= P^{\mu}\{x_n=i\}\left[\int_0^1 t q_i e^{-q_i t} dt + e^{-q_i t}\right] = \int_{x_n=i} q_{x_n}^{-1}\left[1 - e^{-q_{x_n}}\right] dP^{\mu}$$

alors $E^{\mu}\left[S_n' \mid S_0,\dots,S_{n-1}\right] = E^{\mu}\left[S_n' \mid x_n\right] = q_{x_n}^{-1}\left[1 - e^{-q_{x_n}}\right]$, P^{μ}-p.p.

mais $\sum q_{x_n}^{-1}\left[1 - e^{-q_{x_n}}\right]$ converge si et seulement si $\sum q_{x_n}^{-1}$ converge

donc $\{T<\infty\} \doteq \{\sum q_{x_n}^{-1} < \infty\}$

Corollaire

$\{T<\infty\}$ est dans la P^{μ}-complétion de $\mathcal{C}(x_{\infty})$

Soit $\mathcal{E}$ la tribu de Borel de $\hat{E}$

soit ν la mesure sur $(\hat{E},\mathcal{E})$ définie par: $\nu(C) = P^{\mu}\{x_{\infty} \in C\}$, $C \in \mathcal{E}$

un ensemble $C \in \mathcal{E}$ est dit complètement atomique si $\nu(c) > 0$, pour tout $c \in C$

Hypothèse B

Il existe un ensemble complètement atomique $A \subseteq B_s$ tel que:

$$\{T<\infty\} = \{x_{\infty} \in A\}$$

Remarques

1) A est dénombrable

2) étant donné $a \in A$, il existe $i \in E$ tel que: $P^i\{x_{\infty} = a\} > 0$

Notations

Pour $a \in A$ on pose: $\Delta^a = \{x_{\infty} = a\} \cap \{T<\infty\}$, $T^a = T$ sur Δ^a, $=\infty$ ailleurs,

$L_t(i,a) = P^i\{T^a < t\}$, $L_t(i) = P^i\{T<t\} = \sum_{a\in A} L_t(i,a) = 1 - \sum_j \phi_s(i,j)$

Lemme 4.3

$$L_{t+s}(\cdot,a) - L_s(\cdot,a) = \Phi_s L_t(\cdot,a)$$

Démonstration

$$L_{t+s}(i,a) - L_s(i,a) = P^i\{s < T^a \leq t+s\} = P^i\{s < T \leq t+s;\Delta^a\}$$

$$= \sum_j P^i\{\bar{X}_s=j;\ s<T\leq t+s;\Delta^a\} = \sum_j P^{\mu}\{s<T\leq t+s;\Delta^a \mid \bar{X}_s=j\}P^i\{\bar{X}_s=j\}$$

$$= \sum_j \phi_s(i,j)P^{\mu}\{s<T\leq t+s;\Delta^a \mid X_s=j;\ T>s\} = \sum_j \phi_s(i,j)P^{\mu}\{T\leq t;\Delta^a \mid X_0=j\}$$

$$= \sum_j \phi_s(i,j)L_t(j,a)$$

Théorème 4.4

Les $l_t(\cdot,a) = L'_t(\cdot,a)$, $a \in A$, sont des lois de sortie pour Φ_t , telles que $l_0(\cdot,a) = 0$

Démonstration

Par les lemmes 1.3 et 4.3 les $l_t(\cdot,a)$ sont des lois de sortie, la propriété b) des lois de sortie est ici évidente puisque: $\int_0^\infty l_t(i,a)dt = L_\infty(i,a) \leq 1$

d'autre part comme $L_t(i) = 1 - \sum_j \Phi_t(i,j)$

on a $l_t(i) = \sum_k q_{ik} L_t(k)$

alors $l_0(i) = 0$, donc $l_0(i,a) = 0$ puisque $l_t(i,a) \leq l_t(i)$

Théorème 4.5

Toute loi de sortie pour Φ_t satisfaisant $\sup_i \int_0^\infty g_t(i)dt \leq 1$, s'écrit d'une et d'une seule façon sous la forme:

$$g_t = \Phi_t g_0 + \sum_{a \in A} c^a l_t(\cdot,a) , \qquad 0 \leq c^a \leq 1$$

Démonstration

On peut supposer $g_0 = 0$, puisque $g_t - \Phi_t g_0$ est une loi de sortie ayant cette propriété.

Comme $\Phi'_t = Q\Phi_t$, on a: $\phi_s(i,j) = \sum_{k \neq i} \int_0^s e^{-q_i(s-v)} q_{ik} \phi_v(k,j)dv + \delta_{ij} e^{-q_i s}$

alors comme g_t est une loi de sortie pour Φ_t , on a:

$$g_{s+t}(i) = \sum_{k \neq i} \int_0^s e^{-q_i(s-v)} q_{ik} g_{v+t}(k)dv + e^{-q_i s} g_t(i)$$

d'où: $g_s(i) = \sum_{k \neq i} \int_0^s e^{-q_i(s-v)} q_{ik} g_v(k)dv$

alors: $G(i) = \int_0^\infty g_s(i)ds = \sum_{k \neq i} q_i^{-1} q_{ik} \int_0^\infty g_v(k)dv = AG(i)$

comme $G(x_n)$ est une martingale bornée, par un théorème de convergence de la théorie des martingales (c.f. Meyer[1,V-T17]), il existe une fonction φ, évidemment invariante, telle que:

$$E^i(\varphi) = G(i)$$

mais $\varphi = \sum c^a I_{\Lambda^a} + \varphi_0$, où la somme est sur les ensembles P^μ-atomiques invariants et φ_0 est une fonction invariante qui s'annule sur les ensembles P^μ-atomiques invariants.

On a alors $G(i) = \sum c^a P^i[\Lambda^a] + E^i(\varphi_0)$

par l'hypothèse B, à tout point de A correspond un Λ^a

d'autre part si Λ^a ne correspond pas à un point de A, alors

$$P^i[\Lambda^a] - \sum_j \phi_t(i,j)P^j[\Lambda^a] = P^i[\Lambda^a\ ,\ T \leq t] = 0$$

de même $E^i(\varphi_0) - \sum_j \phi_t(i,j)E^j(\varphi_0) = 0$

alors si on pose $G_t(i) = G(i) - \sum_j \phi_t(i,j)G(j)$, on a:

$$G_t(i) = \sum_{a\in A} c^a L_t(i,a) = \int_0^t \sum_{a\in A} c^a l_s(i,a)ds$$

mais $$G(i) - \sum_j \phi_t(i,j)G(j) = \int_0^\infty g_s(i)ds - \int_0^\infty \sum_j \phi_t(i,j)g_s(j)ds$$

$$= \int_0^\infty g_s(i)ds - \int_0^\infty g_{s+t}(i)ds = \int_0^t g_s(i)ds$$

d'où $g_s(i) = \sum_{a\in A} c^a l_s(i,a)$ ds-p.p.

mais $\sum_{a\in A} l_s(i,a) = l_s(i)$ qui est continue

alors $\sum_{a\in A} c^a l_s(i,a)$ converge uniformément sur tout intervalle compact de R_+

donc est continue ; et alors pour tout $s > 0$:

$$g_s(i) = \sum_{a\in A} c^a l_s(i,a)$$

l'unicité de la représentation résulte du lemme suivant

<u>Lemme</u>

Pour tout $t > 0$, on a P^μ-p.p. : $\lim_{n\to\infty} L_t(x_n,a) = I_{\Delta^a}$

Théorème 4.6

Pour tout $a \in A$, $j \in E$ et $t > 0$, il existe un nombre $\xi_t(a,j)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a\ ,\ X_{T^a+t} = j \mid x_n] = \xi_t(a,j) I_{\Delta^a}\ ,\quad P^\mu\text{-p.p.}$$

Démonstration

X_{T^a+t} est $\bigcap_n \mathcal{F}'_{T_n}$ -masurable, alors par la propriété de Markov forte :

$\lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a,\ X_{T^a+t} = j \mid x_n] = \lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a,\ X_{T^a+t} = j \mid \mathcal{F}_{T_n}]$, et cette dernière

exite par un théorème de convergence des martingales (cf. Meyer [1,IV-T18])

et la limite définit une fonction φ, invariante pour (x_n)

par le même théorème sur les martingales, on a $\lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a \mid x_n] = I_{\Delta^a}$

et comme $P^\mu[\Delta^a,\ X_{T^a+t} = j \mid x_n] \leq P^\mu[\Delta^a \mid x_n]$

alors $\lim_{n\to\infty} P^\mu[\Delta^a,\ X_{T^a+t} = j \mid x_n] = 0$, P^μ-p.p. sur le complémentaire de Δ^a

et évidemment φ est constante sur tout ensemble atomique invariant,

on note cette constante sur Δ^a par $\xi_t(a,j)$

Corollaire

Pour tout $a \in A$, $\xi_t(a,\cdot)$ est une loi de sortie pour P_t

et pour tout $j \in E$, on a: $P^\mu[X_{T^a+t} = j \mid \Delta^a] = \xi_t(a,j)$, $t > 0$

On note $\mathcal{F}^-_T = \bigvee_n \mathcal{F}'_{T_n}$, et $\mathcal{T}$ la tribu complétée des ensembles invariants

On a alors la propriété suivante, dite la propriété de Markov Forte

Théorème 4.7

Soit $M \in \mathcal{F}^-_T$ et $M' \in \mathcal{F}'_T$, on a alors:

$$P^\mu[M \cap M' \mid \Delta^a] = P^\mu[M \mid \Delta^a] P^\mu[M' \mid \Delta^a]$$

Démonstration

Soit $M \in \mathcal{F}_{T_n}$, comme $\mathcal{F}_{T_n} \subseteq \mathcal{F}_{T_m}$ si $n \leq m$, on a $M \in \mathcal{F}_{T_m}$ pour tout $m \geq n$

d'autre part $\{X_{T^a+t} = j\} \in \mathcal{F}'_{T_m}$

alors par la propriété de Markov forte, on a pour $m > n$

$$P^\mu[M, \Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_m] = P^\mu[M \mid x_m] P^\mu[\Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_m]$$

mais par le propriété de Markov et la convergence des martingales de T-18 de Meyer[1]:

$$\lim_{m\to\infty} P^\mu[M \mid x_m] = \lim_{m\to\infty} P^\mu[M \mid \mathcal{C}(x_k, k \geq m)] = P^\mu[M \mid \mathcal{T}]$$

alors par le théorème précédent on a:

$$P^\mu[M, \Delta^a, X_{T^a+t} = j] = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega P^\mu[M, \Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_m] dP^\mu$$

$$= \int_\Omega \lim_{m\to\infty} P^\mu[M \mid x_m] P^\mu[\Delta^a, X_{T^a+t} = j \mid x_m] dP^\mu$$

$$= \int_\Omega P^\mu[M \mid \mathcal{T}]\, \xi_t(a,j) I_{\Delta^a} dP^\mu = \xi_t(a,j) P^\mu[M, \Delta^a]$$

d'où $P^\mu[M, X_{T^a+t} = j \mid \Delta^a] = \xi_t(a,j) P^\mu[M \mid \Delta^a]$, $t > 0$

et alors plus généralement pour $0 < t_1 < \dots < t_n$ on a:

$$P^\mu[M, X_{T^a+t_\nu} = j_\nu, 1 \leq \nu \leq n \mid \Delta^a] = P^\mu[X_{T^a+t_\nu} = j_\nu, 2 \leq \nu \leq n \mid M, \Delta^a, X_{T^a+t_1} = j_1]\, \xi_{t_1}(a, j_1) P^\mu[M \mid \Delta^a]$$

$$= \xi_{t_1}(a, j_1) \prod_{\nu=1}^{n-1} p_{t_{\nu+1}-t_\nu}(j_\nu, j_{\nu+1}) P^\mu[M \mid \Delta^a]$$

$$= P^\mu[X_{T^a+t_\nu} = j_\nu, 1 \leq \nu \leq n \mid \Delta^a] P^\mu[M \mid \Delta^a]$$

donc pour $M \in \mathcal{F}_{T_n}$ et $M' \in \mathcal{F}'_T$ on a:

$$P^\mu[M \cap M' \mid \Delta^a] = P^\mu[M \mid \Delta^a] P^\mu[M' \mid \Delta^a]$$

et alors aussi pour $M \in \mathcal{F}^-_T$ et $M' \in \mathcal{F}'_T$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de décomposition suivant:

Théorème 4.8

Soit P_t une solution de $P_t' = QP_t$, alors:

$$P_t = \Phi_t + \sum_{a\in A}(l_\cdot(\cdot,a) * \xi_\cdot(a,\cdot))(t)$$

Démonstration

$$p_t(i,j) = P^\mu[X_t = j \mid X_0 = i] = P^\mu[X_t = j,\ t < T \mid X_0 = i] + \sum_a P^\mu[X_t = j,\ T^a \leq t \mid X_0 = i]$$

$$= \phi_t(i,j) + \sum_a P^\mu[X_t = j,\ T^a \leq t \mid X_0 = i]$$

$$= \phi_t(i,j) + \sum_a P^\mu[X_0 = i]^{-1}\int_0^t r_j(s,t \mid X_0 = i)L^a(X_0 = i, ds)$$

$$= \phi_t(i,j) + \sum_a \int_0^t r_j(s,t \mid X_0 = i)dL_s(i,a)$$

mais par le théorème 1.15, on a:

$$P^i[X_{T^a+t} = j,\ T^a \leq u] = P^\mu[X_0 = i]^{-1}\int_0^u r_j(s,s+t \mid X_0 = i)L^a(X_0 = i, ds)$$

$$= \int_0^u r_j(s,s+t \mid X_0 = i)dL_s(i,a)$$

d'autre part par la propriété de Markov Forte

$$P^i[X_{T^a+t} = j,\ T^a \leq u] = P^i[T^a \leq u]P^\mu[X_{T^a+t} = j \mid \Delta^a] = \int_0^u \xi_t(a,j)dL_s(i,a)$$

donc $r_j(s,s+t \mid X_0 = i) = \xi_t(a,j)$, pour $t > 0$ et $s \notin N_t'$ de $dL_s(i,a)$-mesure nulle

mais par le théorème de Fubini, l'égalité est vérifiée pour $s \notin N$ et $t \notin N_s$,

où N est de $dL_s(i,a)$-mesure nulle et N_s est de mesure de Lebesgue nulle.

alors $r_j(s,t \mid X_0 = i) = \xi_{t-s}(a,j)$, $s \notin N$ et $t-s \notin N_s$

mais ces fonctions sont continues en t sur (s,∞) pour $s \notin N'$ de $dL_s(i,a)$-mesure nulle

alors $r_j(s,t \mid X_0 = i) = \xi_{t-s}(a,j)$, pour $dL_s(i,a)$-p.t. s et $t > s$

ce qui nous donne: $\quad p_t(i,j) = \phi_t(i,j) + \sum_a \int_0^t \xi_{t-s}(a,j)l_s(i,a)ds$

BIBLIOGRAPHIE

Chung, K.L. 1. Markov chains with stationnary transition probabilities
Springer Verlag, Berlin, 1960

2. On the boundary theory for Markov chains
Acta Mathematica, 110 (1963), 19-77

3. On the boundary theory for Markov chains II
Acta Mathematica, 115 (1966), 111-163

4. Probabilistic methods in Markov chains
Fourth Berkeley Symposium Vol II, (1961), 35-56

Doob, J.L. 1. Stochastic Processes. John Wiley and Sons, New-York, 1953

2. Discrete potential theory and boundaries
Journal of Math. and Mech. 8 (1959), 433-458

Feller, W. 1. On boundaries and lateral conditions for Kolmogorov differential equations. Annals of Mathematics, 65 (1957), 527-570

Hunt, G.A. 1. Markoff chains and Martin boundaries
Illinois Journal of Mathematics, 4 (1960), 313-340

Meyer, P.A. 1. Probabilités et potentiel. Hermann, Paris 1966

Neveu, J. 1. Lattice methods and submarkovian processes
Fourth Berkeley Symposium, Vol II (1961), 347-391

2. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson et Cie. 1964

Reuter, G.E.H.
1. Denumerable Markov processes and the associated contraction semi-groups on 1 . Acta Mathematica, 97 (1957), 1-46

2. Denumerable Markov processes (II)
Journal of London Math. Soc. 34 (1959), 81-91

3. Denumerable Markov processes (III)
Journal of London Math. Soc. 37 (1962), 63-73

Williams, D. 1. On the construction problem for Markov chains
Z.Wahrscheinlichkeitstheorie 3 (1964), 227-246

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilités — Février 1967

UN THÉORÈME DE LINNIK

(par J.P. Igot)

Yu V. LINNIK a démontré, entre 1956 et 1960, plusieurs théorèmes concernant la décomposition des fonctions caractéristiques indéfiniment divisibles. Cependant les démonstrations sont souvent longues et délicates (1).

Récemment I.V. OSTROVSKIY a repris la question et montré que ces théorèmes étaient vrais pour une classe plus vaste de fonctions : celle des fonctions entières à crête , ce qui a permis d'obtenir des démonstrations plus simples.

Le théorème proposé ici traite de la factorisation de la composition d'une loi de Laplace-Gauss et d'une loi de Poisson (2).

1 . RAPPELS ET DEFINITIONS .

Soit X une variable aléatoire (v.a.) et φ sa fonction caractéristique (f.c.); φ est la transformée de Fourier de la loi de probabilité de $\mathfrak{X}$.

1.1.- Une f.c. est dite indéfiniment divisible (f.c.i.d.) si, pour tout nombre réel positif d, $\varphi^d(t)$ est une f.c. . La loi associée est dite indéfiniment divisible (l.i.d.).

On a une représentation canonique de telles f. c., due à Lévy et Khintchine :

$$(1) \quad \mathrm{Log}\ \varphi(t) = i\gamma t - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\, d\mu(u)$$

(γ, σ réels, μ mesure positive bornée sur $\mathbb{R}$, ne chargeant pas l'origine).

1.2. - Si I désigne la classe des l. i. d., on désigne par I_o celle des l. i. d. qui n'ont que des composantes elles-mêmes indéfiniment divisibles.

Si φ est la f. c. d'une telle loi, et si l'on a $\varphi(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t)$ où φ_1, φ_2 sont des f. c., alors φ_1 et φ_2 sont des f. c. i. d. .

On a le

1.3. - Théorème de Cramer (3).

Les lois normales sont dans I_o

et

1.4. - Théorème de Raïkov (3).

Les lois de Poisson sont dans I_o

Linnik a établi le théorème suivant, qui contient les deux précédents :

1.5. - Théorème de Linnik (1).

La composition d'une loi normale et d'une loi de Poisson est dans I_o.

C'est un théorème un peu plus général, démontré par Ostrovskiy (2), qui fait l'objet du présent exposé.

2 . INTRODUCTION DES FONCTIONS DE LA VARIABLE COMPLEXE .

2.1. - Une f. c. φ dont la série de Taylor au voisinage de l'origine admet un rayon de convergence R strictement positif, peut se prolonger analytiquement dans une bande $\mathcal{B} = \mathbb{R} + i\,\Gamma$ (Γ voisinage réel de l'origine), du plan complexe, son expression dans $\mathcal{B}$ s'obtenant en remplaçant t réel par t complexe dans l'intégrale de transformation de Fourier.

2.2. - φ satisfait dans $\mathcal{B}$ à la propriété de crête :

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant \varphi(iy) \qquad \begin{array}{l} x+iy \in \mathcal{B} \\ y \in \mathbb{R} \end{array}$$

2.3. - Si, de plus $\mathcal{B} = \mathbb{C}$, la f. c. est entière et l'on pourra utiliser les propriétés des fonctions entières à crête pour démontrer des théorèmes sur les f. c.

2.4. - Comme enfin les f. c. entières se factorisent en f. c. également entières (théorème de Raïkov) Ostrovskiy établit le théorème suivant, qui contient le théorème de Linnik.

2.5. - Théorème :

Soient φ_1 et φ_2 deux fonctions entières, à crête, telles que $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 1$ et vérifiant :

$$(1)\ \varphi_1(t)\,\varphi_2(t) = \varphi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1) + i\beta t - \gamma t^2} \qquad \begin{array}{l} \lambda, \gamma \text{ positifs} \\ \beta \text{ réel} \end{array}$$

alors

$$\varphi_m(t) = e^{\lambda_m(e^{it}-1) + i\beta_m t - \gamma_m t^2} \qquad \begin{array}{l} \lambda_m, \gamma_m \text{ positifs} \\ \beta_m \text{ réel} \end{array}$$

$$m = 1, 2$$

Pour la démonstration de ce théorème, nous utiliserons deux lemmes sur les fonctions entières, qui ont leur intérêt propre.

2.6. - Lemme

Soit f une fonction holomorphe de z pour $\alpha \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta$ telle que

1) $|f(z)| \leq K e^{|z|^{\rho}}$ pour $\alpha \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta$

2) $|f(x e^{i\alpha})| \leq K$ où $\begin{cases} \rho < \dfrac{\pi}{\beta - \alpha} \\ K \text{ est une constante positive} \end{cases}$

3) $|f(x e^{i\beta})| \leq K$

alors f(z) est bornée pour tout z : $\alpha \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta$

Démonstration :

a) Soit D le domaine défini par $\alpha \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta$, $|z| \leq R$

et $\omega(z, \overset{\frown}{AB}, D)$ la solution du problème de Dirichlet dans D avec les conditions limites

$$\omega = \begin{cases} 1 & \text{sur l'arc } \overset{\frown}{AB} \\ 0 & \text{sur } \partial D - \overset{\frown}{AB} \end{cases}$$

$\omega(z, \overset{\frown}{AB}, D)$ est la mesure harmonique, en z, de $\overset{\frown}{AB}$ par rapport à D.

On a :

$$\omega(z, \overset{\frown}{AB}, D) = \frac{2}{\pi}\,\theta \qquad \theta = \operatorname{Arg} \frac{(e^{i\alpha}R)^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} - z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}{(e^{i\alpha}R)^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}} + z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}$$

(le résultat est immédiat sur le demi-cercle correspondant à $\alpha = 0$, $\beta = \pi$ et l'on utilise l' application : $z \longrightarrow Z = z^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}\, e^{-\frac{i\alpha\pi}{\beta-\alpha}}$

qui transforme le domaine D en un demi-cercle.

b) La fonction sousharmonique $\operatorname{Log}|f(z)|$ est, par hypothèse, majorée par $m = \operatorname{Log} K$ sur $\{\partial D - \overset{\frown}{AB}\}$ et par $M = \operatorname{Log} K + R^{\rho}$ sur $\overset{\frown}{AB}$.

c) La fonction harmonique $M\omega + m(1-\omega)$ est égale à m sur $\partial D - \widehat{AB}$ et M sur $\widehat{AB}$, donc majore $\operatorname{Log}|f(z)|$ sur la frontière de D. D'après le principe du maximum, elle majore $\operatorname{Log}|f(z)|$ dans tout le domaine D.

d) On voit immédiatement que, pour R tendant vers l'infini,

$$\theta = 0\left(\frac{1}{R^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}\right)$$

il résulte alors de c) que

$$\operatorname{Log}|f(z)| = 0\left(\frac{R^{\rho}}{R^{\frac{\pi}{\beta-\alpha}}}\right) \qquad R \longrightarrow \infty \qquad z \in D$$

par suite f (z) est bornée pour tout z :

$$\alpha \leq \operatorname{Arg} z \leq \beta$$

Corollaire 2.7. -

Soit f (z) une fonction entière, bornée sur l'axe réel et à croissance lente, c.à.d. $|f(z)| = 0(|z|^n)$ $|z| \longrightarrow \infty$ pour un certain n, alors f est constante.

Démonstration :

On applique

1) la propriété 2.6. - pour $\alpha = 0$ et $\beta = \pi$ puis pour $\alpha = \pi$ et $\beta = 2\pi$ en prenant $\rho < 1$.

2) le Théorème de Liouville

2.8. - Lemme

Soit f (z) une fonction entière, périodique de z, de période T et satisfaisant à :

(2) $|f(z)| = 0(e^{L|z|})$ L positif
$|z| \longrightarrow \infty$

alors le développement de Fourier de f ne comprend qu'un nombre fini de termes et l'on a :

$$f(z) = \sum_{k=-\omega}^{k=\omega} c_k \, e^{\frac{2\pi i z k}{T}} \qquad \text{avec} \qquad \omega = \left[\frac{|T|\,L}{2\pi}\right]$$

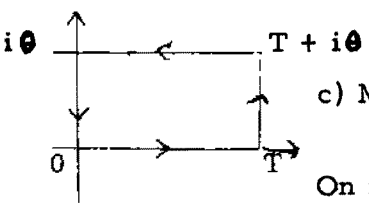
Démonstration :

a) La période T est complexe, mais on se ramène à T positif en prenant $f_1(z) = f(z\,e^{i\alpha})$ avec $T = |T|\,e^{i\alpha}$. f_1 est alors entière périodique de période $|T|$ et vérifie (2).

b) Pour $T > 0$ et x réel, on a

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \, e^{\frac{2\pi i x k}{T}} \qquad \text{et} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\, e^{-\frac{2\pi i x k}{T}}\, dx$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots.$$



c) Montrons que c_k est nul pour $|k| > \omega$

On intègre la fonction entière $f(z)\, e^{-\frac{2\pi i z k}{T}}$ pour k fixé sur le contour D ci-contre ($\theta \neq 0$) et, en tenant compte de la périodicité de f, on obtient

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(x + i\theta)\, e^{-\frac{2\pi i x k}{T}} \; e^{\frac{2\pi k \theta}{T}} \; dx$$

et en vertu de (2)

$$|c_k| \leq K\, e^{L(T + |\theta|)} \; e^{\frac{2\pi k \theta}{T}} \qquad \text{pour } |\theta| \text{ grand}$$

soit alors $\quad k > \omega$

$$\frac{2\pi k}{T} = L + \eta \qquad\qquad \eta > 0$$

faisons tendre θ vers $-\infty$

$$|c_k| \leq K\, e^{L(T+|\theta|)_e - L|\theta|_e - \eta|\theta|}$$

d'où

$$c_k = 0$$

De même, supposons $k < -\omega$, et posons

$$\frac{2\pi k}{T} = -L - \eta$$

faisons tendre θ vers $+\infty$, il vient

$$c_k = 0$$

d) les fonctions $f(z)$ et $\sum_{k=-\omega}^{+\omega} c_k \, e^{\frac{2\pi z k}{T}}$ sont entières et coïncident sur l'axe réel, donc

$$f(z) = \sum_{-\omega}^{+\omega} c_k \, e^{\frac{2\pi i z k}{T}} \qquad z \in \mathbb{C}$$

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.5. -

a) Il résulte de (1) que φ_1 et φ_2 n'ont pas de zéros.

$$\text{Soit } \varphi_1(t) = e^{\psi_1(t)} \qquad t \in \mathbb{C}, \ \psi_1(0) = 0$$

$$\text{Posons} \qquad g(z) = \psi_1(-i z) \quad z \in \mathbb{C}$$

nous allons établir que :

$$g(z) = \lambda_1 (e^z - 1) + \gamma_1 z^2 + \beta_1 z$$

λ_1, γ_1 positifs

β_1 réel

b) soit $u(x,y) = \operatorname{Re}\{g(x+iy)\}$ $\quad x, y$ réels

$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[g(x+iy) + g(x-iy)\right]$ puisque g est réel pour z réel

On a

$$(3) \quad 0 \leqslant u(x,0) - u(x,y) \leqslant 2\lambda \, e^x \sin^2 \frac{y}{2} + \gamma \, y^2$$

en effet, la propriété de crête permet d'écrire :

$$\frac{\varphi_1(i\tau)}{\varphi_1(\sigma+i\tau)} = \frac{\varphi_2(\sigma+i\tau)}{\varphi_2(i\tau)} \cdot \frac{\varphi(i\tau)}{\varphi(\sigma+i\tau)}$$

$$1 \leqslant \left| \frac{\varphi_1(i\tau)}{\varphi_1(\sigma+i\tau)} \right| \leqslant e^{2\lambda e^{-\tau} \sin^2 \frac{\sigma}{2} + \gamma\sigma^2}$$

$$0 \leqslant \Psi_1(i\tau) - \operatorname{Re} \Psi_1(\sigma+i\tau) \leqslant 2\lambda e^{-\tau} \sin^2 \frac{\sigma}{2} + \gamma\sigma^2$$

On pose alors :
$$\sigma = y$$
$$\tau = -x$$

c) $|u(x,0)| \leqslant \lambda e^x + \gamma x^2 + K|x|$

En effet φ_2 étant une fonction entière à crête, $b(\tau) = \Psi_2(i\tau)\,(\tau \in \mathbb{R})$ est une fonction convexe de τ (th. de Dugué) et b (0) = 0 ; par suite, si α désigne la dérivée de $b(\tau)$ à l'origine, on a

$$b(\tau) \geqslant -|\alpha|\,|\tau|$$

mais $\Psi_1(i\tau) + \Psi_2(i\tau) = \lambda(e^{-\tau} - 1) + \gamma\tau^2 - \beta\tau$

d'où $|\Psi_1(i\tau)| \leqslant \lambda e^{-\tau} + \gamma\tau^2 + |\beta|\,|\tau| + |\alpha|\,|\tau|$

et l'on pose $\tau = -x$

d) Il résulte de b) et c) que

(4) $|u(x,y)| \leqslant 3\lambda e^x + \gamma(x^2+y^2) + K|x|$

e) Montrons alors que :

(5) $|g(z)| = 0\,(|z|\,e^{\operatorname{Re} z} + |z|^3) \qquad |z| \longrightarrow \infty$

En effet, la formule de Schwartz (où $|\xi|<1$)

$$g(z+\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\,(g(z+e^{i\varphi}))\,\frac{e^{i\varphi}+\xi}{e^{i\varphi}-\xi}\,d\varphi + i\,\mathrm{Im}[g(z)]$$

donne, en dérivant par rapport à ξ au point $\xi = 0$,

$$g'(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(x+\cos\varphi\ ,\ y+\sin\varphi)\,e^{-i\varphi}\,d\varphi \quad \begin{pmatrix} z = x+iy \\ x,\ y \in \mathbb{R} \end{pmatrix}$$

$$|g'(z)| = 0\,(e^{\mathrm{Re}\,z} + |z|^2) \qquad |z| \longrightarrow \infty \text{ d'après (4)}$$

mais $\qquad g(z) = z\displaystyle\int_0^1 g'(zt)\,dt$

donc $\qquad |g(z)| \leq 0\,(|z|\,e^{\mathrm{Re}\,z} + |z|^3 \qquad |z| \longrightarrow \infty$

f) Posons, pour x complexe, et y réel

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\,(g(x+iy) + g(x-iy))$$

il résulte alors de (5) que

$$(6) \qquad u(x,y) = 0\,(\,|x|\,e^{\mathrm{Re}\,x} + |x|^3\,) \qquad \begin{matrix} |x| \longrightarrow \infty \\ y \text{ fixé} \end{matrix}$$

montrons alors que $\chi(x) = u(x,0) - u(x,2\pi)$ $(x \in \mathbb{C})$ est constante

on a $\qquad \chi(x)$ bornée pour x réel d'après (3)

$|\chi(x)| = 0\,(\,|x|^3\,)$ pour x imaginaire pur, $|x| \longrightarrow \infty$

$|\chi(x)| = 0\,\left(e^{\frac{3}{2}|x|}\right)$ $(|x| \to \infty)$ d'après (6)

Considérons alors, pour $\mathrm{Re}\,x \geqslant 0$, la fonction

$$V(x) = \frac{\chi(x)}{(x+1)^3}$$

Dans chacun des domaines $0 \leqslant \mathrm{Arg}\,x \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Arg}\,x \leqslant 0$, V (x) satisfait aux conditions du lemme 2.6. -

V (x) est donc bornée pour Re x $\geqslant$ 0

on applique le même raisonnement, pour Re x $\leqslant$ 0, à la fonction

$$W(x) = \frac{\chi(x)}{(x-1)^3}$$

par suite

$$|\chi(x)| = 0(|x|^3) \qquad |x| \longrightarrow \infty$$

mais

$$\chi(x) \quad \text{bornée pour } x \text{ réel}$$

χ est donc constante d'après le corollaire 2.7.-

$$g) \; -2\chi(z) = g(z+2\pi i) + g(z-2\pi i) - 2g(z) = C$$

donc la fonction $g_1(z) = g(z) - g(z-2\pi i) - \dfrac{Cz}{2\pi i}$

est entière, périodique de période $2\pi i$, et satisfait à :

$$|g_1(z)| = 0(e^{3|z|/2}) \qquad |z| \longrightarrow \infty$$

on peut lui appliquer le lemme 2.8. :

$$g_1(z) = A_o + A_1 e^z + A_2 e^{-z}$$

mais pour x réel, tendant vers $-\infty$, on a $|g(x)| = 0(|x|^3)$ d'après (6), il en sera de même pour g_1, donc $A_2 = 0$ et

$$g(z) - g(z-2\pi i) = B_o + B_1 z + B_2 e^z$$

h) la fonction

$$g_2(z) = g(z) - \left(\frac{B_o + i\pi B_1}{2\pi i}\right) z - \frac{B_1 z^2}{4\pi i} - \frac{B_2}{2\pi i} \cdot z e^z$$

est alors également entière, périodique, de période $2\pi i$ et satisfait à

$$|g_2(z)| = 0(e^{3|z|/2}) \quad |z| \longrightarrow \infty$$

le lemme 2.8. - permet donc encore d'écrire

$$g_2(z) = C_o + C_1 \; e^{z}$$

et

$$g(z) = D_o + D_1 z + D_2 z^2 + D_3 e^{z} + D_4 z e^{z}$$

i) α) $g(z)$ est réel pour z réel, donc D_o, D_1, D_2, D_3, D_4 sont réels

β) $g(0) = 0$ donc $D_3 = -D_o$

γ) $u(x, 0) = D_o + D_1 x + D_2 x^2 - D_o e^x + D_4 x e^x$

donc $D_4 = 0$ d'après c)

δ) $u(x,0) - u(x,y) = D_2 y^2 - 2 D_o e^{x} \sin^2 \frac{y}{2}$

alors, pour $y = 2\pi$ on déduit de (3) que $D_2 \geqslant 0$

pour $y = \pi$, $x \to \infty$ on déduit de (3) que $D_o \leqslant 0$

soit alors $\lambda_1 = - D_o$

$\beta_1 = D_1$

$\gamma_1 = D_2$

BIBLIOGRAPHIE

(1) Y. V. LINNIK — Décomposition des lois de Probabilités
Edition française (Gauthier - Villars)

(2) I. V. OSTROVSKIY — Uspeki Math. Nauk
(20) 1965

(3) E. LUKACS — Fonctions caractéristiques
(Dunod éditeur).

---oo0oo---

DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE
STRASBOURG

Séminaire de Probabilité Année 1966-67

SUR LES MOMENTS SPECTRAUX D'ORDRE SUPERIEUR

(José de Sam Lazaro)

I. INTRODUCTION :

Les processus du second ordre (X_t) admettant une représentation spectrale $X_t = \int e^{it\lambda}\, dZ(\lambda)$, où Z est une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}$, dénombrablement additive en moyenne quadratique, ont été étudiés par M. Loève [4]. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus du second ordre admette une représentation spectrale est que la fonction de covariance soit harmonisable :

$$E X_t \overline{X}_{t'} = \int e^{i(t\lambda - t'\lambda')}\, dM(\lambda, \lambda')$$

où M est une mesure bornée sur $\mathbb{R}^2$. La notion de covariance harmonisable a été généralisée par A. Blanc - Lapierre et R. Fortet [1] qui ont introduit les processus de la classe $\Phi^{(p)}$, et ont étudié le comportement spectral de processus strictement stationnaires appartenant à cette classe. A. N. Shiryaev [5] a ensuite défini une intégrale stochastique multiple par rapport à la mesure spectrale Z d'un processus de la classe $\Phi^{(p)}$ et Ya. G. Sinaï [6] a étudié le comportement de la mesure définie par les moments spectraux d'ordre supérieur à 2 dans le cas des processus strictement stationnaires ergodiques.

Le présent article comprend en grande partie des résultats de Shiryaev et de Sinaï. Le résultat central des paragraphes 3 et 4 est la définition de l'intégrale stochastique multiple dans la proposition 4. 1. La présentation et la démonstration des résultats de Shiryaev seront mis sous une forme modifiée qui permettra d'étudier de manière plus naturelle les résultats du paragraphe 5.

Il n'est pas difficile de voir que les méthodes permettant de définir l'intégrale stochastique multiple peuvent s'étendre au cas de mesures spectrales non bornées dans le cas où leurs projections sur les espaces facteurs sont des mesures σ - finies. On vérifie alors qu'elles coïncident avec les intégrales multiples de Wiener définies par K. Itô [2],[3] dans le cas du mouvement brownien, réel ou complexe.

2 . PROCESSUS DE LA CLASSE $\Phi^{(p)}$

Définition 2. 1. Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ appartient à la classe $\Phi^{(p)}$, $(p \in N)$ si $E|X_t|^p < +\infty$ pour tout t et si, pour tout couple (k, m) d'entiers avec $k+m \leq p$, il existe une mesure bornée complexe $M_{k,m}$ sur $\mathbb{R}^{k+m}$ telle que :

$$(2.1) \qquad E\{X_{t_1} \dots X_{t_k} \overline{X}_{t'_1} \dots \overline{X}_{t'_m}\} = \int_{\mathbb{R}^{k+m}} e^{i(t_1\lambda_1 + \dots + t_k\lambda_k - t'_1\lambda'_1 \dots t'_m\lambda'_m)} dM_{k,m}(\lambda, \lambda')$$

(où $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_k)$, $\lambda' = (\lambda'_1, \dots \lambda'_m)$) pour tout point $(t_1, \dots, t_k, t'_1, \dots, t'_m) \in \mathbb{R}^{k+m}$. Il en résulte en particulier, en posant $k = m$ et $t_1 = \dots = t_k = t'_1 = \dots = t'_k = 0$ que $M_{k,k}(\mathbb{R}^{2k}) \geqq 0 \; \forall k \in N$.

Définition 2 . 2. On dit qu'un processus (X_t) appartient à la classe $\Phi^{(\infty)}$ si $X_t \in \Phi^{(p)}$ $\forall p \in N$.

Dans la suite, on supposera toujours $p \geqq 2$.

Si $(X_t) \in \Phi^{(2)}$, sa covariance est harmonisable, suivant la terminologie de Loève [4].

Exemples :

1) Tout processus réel stationnaire d'ordre 2, de moyenne nulle appartient à la classe $\Phi^{(2)}$.

2) Soit (X_t) un processus gaussien complexe, de moyenne nulle et de covariance $\Gamma(t,t')$. On démontre alors la :

Proposition 2.1. S'il existe une mesure M sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\Gamma(t,t') = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(t\lambda - t'\lambda')}\, dM(\lambda,\lambda') \tag{2.2}$$

alors $(X_t) \in \Phi^{(\infty)}$.

Démonstration : Puisque, par une propriété de familles de variables aléatoires gaussiennes complexes, on a :

$$E\{X_{t_1}\dots X_{t_k}\,\overline{X}_{t'_1}\dots\overline{X}_{t'_m}\} = 0 \qquad \text{si } k \neq m \tag{2.3}$$

il suffit de considérer le cas où $k = m$.

Posons $X_t = Y_t + i Z_t$ et notons tout d'abord que :

$$\begin{aligned} &E\{Y_t Y_s\} = E\{Z_t Z_s\} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\Gamma(s,t) \\ &E\{Y_s Z_t\} = -E\{Z_s Y_t\} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,\Gamma(s,t) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Les variables aléatoires $(Y_{t_1},\dots,Y_{t_k},Y_{t'_1},\dots,Y_{t'_k},Z_{t_1},\dots,Z_{t_k}Z_{t'_1}\dots Z_{t'_k})$ forment une famille de variables aléatoires gaussiennes réelles. Calculons :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1,\dots,\lambda_k,\mu_1,\dots,\mu_k) &= E\{\exp(\lambda_1 X_{t_1}+\dots+\lambda_k X_{t_k}+\mu_1\overline{X}_{t'_1}+\dots+\mu_k\overline{X}_{t'_k})\} \\ &= E\{\exp[(\lambda_1 Y_{t_1}+\dots+\lambda_k Y_{t_k}+\mu_1 Y_{t'_1}+\dots+\mu_k Y_{t'_k})+i(\lambda_1 Z_{t_1}+\dots+\lambda_k Z_{t_k}-\mu_1 Z_{t'_1}\dots\mu_k Z_{t'_k})]\} \\ &= E\exp\{\xi+i\zeta\} = \exp -\frac{1}{2}\,[\sigma^2_\zeta - \sigma^2_\xi - 2i\,\mathrm{cov}(\xi,\zeta)] = \exp \sum_{i,j=1}^{k} \lambda_i\mu_j\,\Gamma(t_i,t'_j) \end{aligned} \tag{2.5}$$

compte tenu de (2.4).

En calculant, à présent $E\{X_{t_1}..X_{t_k}\overline{X}_{t'_1}..\overline{X}_{t'_k}\} = \left.\dfrac{\partial^{2k}\Phi}{\partial\lambda_1..\partial\lambda_k\partial\mu_1..\partial\mu_k}\right|_{\lambda_1=\lambda_2=..=\mu_1=..\mu_k=o}$

il n'est pas difficile de voir que :

$E\{X_{t_1}...X_{t_k}\overline{X}_{t'_1}...\overline{X}_{t'_k}\} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \Gamma(t_1, t'_{\sigma(1)}) ... \Gamma(t_k, t'_{\sigma(k)})$.

où $\mathfrak{S}_k$ désigne le groupe des permutations des k premiers entiers.

On a ainsi montré que $X_t \in \Phi^{(\infty)}$, avec $M_{k,m} \equiv o$ si $k \neq m$ et

$M_{k,k}(\Lambda_1 \times ... \times \Lambda_k \times \Lambda'_1 \times ... \times \Lambda'_m) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} M_{11}(\Lambda_1 \times \Lambda'_{\sigma(1)}) ... M_{11}(\Lambda_k \times \Lambda'_{\sigma(k)})$.

Notations : K_b désignera l'ensemble des fonctions sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui sont bornées, mesurables et à support compact. $\mathcal{S}$ désignera l'ensemble des fonctions complexes sur $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables "à décroissance rapide". Si $\Phi \in L^1(-\infty, +\infty)$, on désignera par $\hat{\Phi}$ la transformée de Fourier de Φ :

$$\hat{\Phi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, \Phi(\lambda)\, d\lambda$$

Il est bien connu que l'application $\Phi \rightsquigarrow \hat{\Phi}$ est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$

$\forall n$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ désignera la tribu des ensembles mesurables de $\mathbb{R}^n$, et λ^n la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

3 . REPRESENTATION SPECTRALE DES PROCESSUS DE LA CLASSE $\Phi^{(2)}$.

Soit (X_t) un processus appartenant à la classe $\Phi^{(2)}$, défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Dans ce cas, en vertu de la continuité de sa fonction de covariance, (X_t) admet une version mesurable dont presque toutes les trajectoires sont dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}, \lambda)$.

Considérons l'application linéaire suivante de K_b dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$\varphi \rightsquigarrow \int X_t\, \varphi(t)\, dt$$

où l'intégrale est définie pour presque tout $\omega\in\Omega$. Cette application est continue lorsqu'on munit K_b de la norme $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$. En effet :

$$\| \int X_t \varphi(t)\, dt \|_{L^2(\Omega)} = (E[\int X_t \varphi(t)\, dt \int \bar{X}_{t'} \bar{\varphi}(t')\, dt'])^{1/2}$$
$$= (\iint \varphi(t) \bar{\varphi}(t')\, dt\, dt' \iint e^{i(t\lambda - t\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda'))^{1/2}$$
$$= (\iint \hat{\varphi}(\lambda) \overline{\hat{\varphi}(\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda'))^{1/2} \leq \|\varphi\|_{L^1} \|M_{11}\|$$

K_b étant dense dans $L^1(\mathbb{R},\lambda)$, cette application se prolonge en une application, encore notée $\varphi \rightsquigarrow \int X_t \varphi(t)\, dt$, de $L^1(\mathbb{R},\lambda)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui est linéaire, continue et qui satisfait à la relation :

$$(3.1) \quad < \int X_t \varphi(t)\, dt, \int X_t \psi(t)\, dt >_{L^2(\Omega)} = \iint \hat{\varphi}(\lambda) \overline{\hat{\psi}(\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda')$$
$$\forall \varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R},\lambda) .$$

<u>Notation</u> : $\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R},\lambda)$, on pose $\int X_t \varphi(t)\, dt = X_\varphi$.

<u>Construction de la mesure spectrale associée à</u> (X_t). Pour toute $\varphi \in \mathcal{S}$, on a aussi $\hat{\varphi} \in L^1$; nous poserons $X_\varphi = Z_{\hat{\varphi}}$.

L'application $\varphi \rightsquigarrow \hat{\varphi}$ étant une application bijective de $\mathcal{S}$ sur $\mathcal{S}$, Z_ψ est définie $\forall \psi \in \mathcal{S}$ et on a, compte tenu de la formule (3.1)

$$(3.2) \quad < Z_\varphi, Z_\psi >_{L^2(\Omega)} = \iint \varphi(\lambda) \overline{\psi(\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda') \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S} .$$

Posons σ_1 = 1ère projection de $|M_{11}|$, σ_2 = 2ème projection de $|M_{11}|$, $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$;
On va définir Z_φ pour $\varphi \in L^2(\mathbb{R},\sigma)$.
L'application $\varphi \rightsquigarrow Z_\varphi$ de $\mathcal{S}$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{A},P)$ est une application linéaire continue lorsqu'on munit $\mathcal{S}$ de la norme $L^2(\mathbb{R},\sigma)$. En effet, d'après (3.2)

$$\|Z_\varphi\|^2 = \int \varphi(\lambda) \overline{\varphi(\lambda')}\, dM_{11}(\lambda,\lambda') \leq \int |\varphi(\lambda) \overline{\varphi(\lambda')}|\, d|M_{11}(\lambda,\lambda')|$$

$$= \int |\varphi(\lambda) \otimes 1| \, |1 \otimes \varphi(\lambda')| \, d|M_{11}(\lambda,\lambda')|$$

$$\leq \sqrt{\int |\varphi(\lambda)|^2\, d\sigma_1(\lambda)} \sqrt{\int |\varphi(\lambda')|^2\, d\sigma_2(\lambda')} \leq \int |\varphi(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda) .$$

Par conséquent, cette application se prolonge en une application linéaire continue, encore notée $\varphi \rightsquigarrow Z\varphi$, de $L^2(\mathbb{R},\sigma)$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$. Notons que σ étant une mesure bornée, on a $1_\Lambda \in L^2(\mathbb{R},\sigma)$ $\forall \Lambda \in \mathcal{B}_R$.

Notation : Si $\varphi \in L^2(\mathbb{R},\sigma)$ on pose $Z\varphi = \int \varphi(\lambda)\, dZ(\lambda)$, et si $\Lambda \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, on écrit $Z_{1_\Lambda} = Z(\Lambda)$. Il résulte immédiatement de la construction de Z que si $\Lambda = \sum_1^\infty \Lambda_i$, on a $Z(\Lambda) = \sum_1^\infty Z(\Lambda_i)$ (série convergente en m. q). On a aussi la :

Proposition 3 . 1 : $\forall \varphi \in L^1(-\infty, \infty)$, $X_\varphi = \int \hat{\varphi}(\lambda)\, dZ(\lambda)$ (noter que $\hat{\varphi} \in L^2(\sigma)$).

Démonstration : Si $\varphi \in L^1(-\infty,\infty)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}$ d'éléments de $\mathcal{S}$ qui converge vers φ dans $L^1(-\infty,\infty)$. Par conséquent, $\hat{\varphi}_n(\lambda) \to \widehat{\varphi(\lambda)}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, en restant uniformément bornée par une constante. Il s'ensuit, par le théorème de Lebesgue, que $\hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi}$ dans $L^2(\mathbb{R},\sigma)$, d'où le résultat.

La formule (3. 2) reste donc valable pour $\varphi, \psi \in L^2(\sigma)$.

Proposition 3 . 2 . : $\forall t \in \mathbb{R}$, $X_t = \int e^{it\lambda}\, dZ(\lambda)$. (noter que $e^{it\cdot} \in L^2(\sigma)$).

Démonstration ; La fonction $\lambda \rightsquigarrow e^{it\lambda}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est limite dans $L^2(\mathbb{R},\sigma)$, lorsque $h \to 0$, des fonctions $\lambda \rightsquigarrow \frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{iu\lambda}\, du$, Par conséquent :

$$\int e^{it\lambda}\, dZ(\lambda) = \lim_{h\to 0} \text{m. q.} \int \left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} e^{iu\lambda}\, du\right) dZ(\lambda) = \lim_{h \to 0} \text{m. q.}\; X_{\frac{1}{h} 1_{[t,t+h]}} = X_t$$

par la proposition 3 . 1 . et la continuité en moyenne quadratique de X_t.

Proposition 3 . 3 : Pour toute fonction complexe continue bornée f, $\int f(\lambda)\, dZ(\lambda)$ coïncide avec la définition ordinaire de l'intégrale comme limite en moyenne quadratique de sommes de Riemann.

Démonstration : Si les λ_j forment une subdivision de $\mathbb{R}$ et $x_j \in [\lambda_j, \lambda_{j+1}]$ alors :

$$E \mid \Sigma f(x_j)\, Z[\lambda_j, \lambda_{j+1}) - \int f(\lambda)\, dZ(\lambda) \mid^2$$

$$= \int (\Sigma f(x_j)\, 1_{[\lambda_j, \lambda_{j+1})}(\lambda) - f(\lambda))\, \overline{(\Sigma f(x_j) 1_{[\lambda_j, \lambda_{j+1})}(\lambda') - f(\lambda'))}\, dM_{11}(\lambda, \lambda')$$

$\to 0$ lorsque $\sup_j (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \to 0$ par le théorème de Lebesgue.

4. MOMENTS SPECTRAUX D'ORDRE SUPÉRIEUR :

Supposons à présent que $(X_t) \in \Phi^{(2p)}$ avec $p > 1$. Dans ce cas, $\forall \varphi \in L^1(-\infty, \infty)$ on a $X_\varphi \in L^{2p}(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

En effet, l'application $\varphi \rightsquigarrow X_\varphi$ de K_b (muni de la norme $L^1(-\infty, \infty)$) dans $L^{2p}(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est continue (ceci se montre comme dans le cas L^2). Elle se prolonge donc en une application linéaire continue de $L^1(-\infty, \infty)$ dans $L^{2p}(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La topologie de L^{2p} étant plus forte que celle de L^2, cette application coïncide avec l'application $\varphi \rightsquigarrow X_\varphi$ définie précédemment.
On a aussi, si $k+m = 2p$:

$$(4.1) \quad E\{X_{\varphi_1} \ldots X_{\varphi_k} \overline{X}_{\varphi'_1} \ldots \overline{X}_{\varphi'_m}\} = \int \hat{\varphi}_1(\lambda_1) \ldots \hat{\varphi}_k(\lambda_k)\, \overline{\hat{\varphi}'_1(\lambda_{k+1})} \ldots \overline{\hat{\varphi}'_m}(\lambda_{2p})\, dM_{k,m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{2p})$$

si $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_m \in L^1(-\infty, +\infty)$.

En effet, (4.1) est vérifié si $\varphi_1, \ldots \varphi_k, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_m \in K_b$ et par conséquent si les φ sont des combinaisons linéaires finies d'éléments de K_b. Le résultat s'ensuit en appliquant le théorème de Lebesgue.

Pour tout $k \leq p$, considérons la mesure $M_{k,k}$ sur $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$. On désignera par $\sigma_k^{(1)}$ et $\sigma_k^{(2)}$ les projections de $| M_{k,k} |$ sur les deux espaces facteurs et on posera $\sigma_k = \sigma_k^{(1)} + \sigma_k^{(2)}$. On a alors le théorème suivant :

<u>Proposition 4.1</u>. Avec les notations précédentes, si $(X_t) \in \Phi^{(p)}$ avec $p > 1$, alors quels que soient les entiers non négatifs k, m avec $k+m \leq p$, il existe une

application linéaire continue et une seule de $L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, notée $f \rightsquigarrow Z_f^{k,m}$, ou de manière plus explicite :

$f \rightsquigarrow \int f(\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\lambda'_1,\ldots,\lambda'_m)\, dZ(\lambda_1)\ldots dZ(\lambda_k)\, d\overline{Z}(\lambda'_1)\ldots d\overline{Z}(\lambda'_m)$ (intégrale stochastique multiple), qui est telle que, si $f = f_1 \otimes\ldots\otimes f_k \otimes f'_1 \otimes\ldots\otimes f'_m$, où $f_1,\ldots f_k$, $f'_1,\ldots f'_m$ sont des éléments de K_b à valeurs réelles, on ait :

(4 . 2) $Z_f^{k,m} = Z_{f_1}\ldots Z_{f_k}\, \overline{Z}_{f'_1}\ldots \overline{Z}_{f'_m}$

On a, en outre, $\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$:

(4 . 3) $< Z_f^{k,m}, Z_g^{k,m} > = \int f(\lambda_1,\ldots,\lambda_{k+m})\, g(\lambda'_1,\ldots\lambda'_{k+m})\, dM_{k+m,k+m}(\lambda_1\ldots\lambda_{k+m}, \lambda'_1,\ldots\lambda'_{k+m})$.

Démonstration : Désignons par $\mathcal{S}_R$ (resp. $\overset{k+m}{\otimes}\mathcal{S}_R$) les éléments de $\mathcal{S}$ (resp $\overset{k+m}{\otimes}$) à valeurs réelles et, si $f_1,\ldots f_k$, $f'_1,\ldots f'_m$ sont des éléments de $\mathcal{S}_R$ et $f = f_1 \otimes\ldots\otimes f_k \otimes f'_1 \otimes\ldots\otimes f'_m$ définissons $Z_f^{k,m}$ par la formule (4 . 2) et, pour tout $f \in \overset{k+m}{\otimes}\mathcal{S}_R$ de la forme $f = \sum_j \lambda_j\, \varphi_1^{(j)} \otimes\ldots\otimes \varphi_k^{(j)}\, \varphi_1'^{(j)} \otimes\ldots\otimes \varphi_m'^{(j)}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, posons :

$$Z_f^{k,m} = \sum_j \lambda_j\, Z_{\varphi_1^{(j)} \otimes\ldots\otimes \varphi_k^{(j)}\ \varphi_1'^{(j)} \otimes\ldots\otimes \varphi_m'^{(j)}}$$

Montrons tout d'abord que, $\forall f \in \overset{k+m}{\otimes}\mathcal{S}_R$, $Z_f^{k,m}$ est définie de façon unique. Supposons que $\sum_j \lambda_j\, \varphi_1^{(j)} \otimes\ldots\otimes \varphi_k^{(j)} \otimes \varphi_1'^{(j)} \otimes\ldots\otimes \varphi_m'^{(j)} = 0$. Alors on a :

$$\| Z^{k,m}_{\sum_j \lambda_j \varphi_1^{(j)} \otimes\ldots\otimes\varphi_k^{(j)} \otimes \varphi_1'^{(j)} \otimes\ldots\otimes \varphi_m'^{(j)}} \|^2 = \sum E\{\lambda_i\, Z_{\varphi_1^{(i)}}\ldots Z_{\varphi_k^{(i)}}\, \overline{Z}_{\varphi_1'^{(i)}}\ldots \overline{Z}_{\varphi_m'^{(i)}}\ \lambda_j\, \overline{Z}_{\varphi_1^{(j)}}\ldots \overline{Z}_{\varphi_k^{(j)}}\, Z_{\varphi_1'^{(j)}}\ldots Z_{\varphi_m'^{(j)}}\}$$

$$= \sum_{ij} \lambda_i \lambda_j \int \varphi_1^{(i)} \otimes\ldots\otimes \varphi_k^{(i)} \otimes \varphi_1'^{(i)} \otimes\ldots\otimes \varphi_m'^{(i)} \otimes \varphi_1^{(j)} \otimes\ldots\otimes \varphi_k^{(j)} \otimes \varphi_1'^{(j)} \otimes\ldots\otimes \varphi_1'^{(j)}\, dM_{k+m,k+m}$$

(en vertu de 4 . 1).

$= \int (\sum_i \lambda_i \, \varphi_1^{(i)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(i)} \otimes \varphi_1'^{(i)} \otimes \ldots \varphi_m'^{(i)}) \, (\sum_j \lambda_j \, \varphi_1^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_k^{(j)} \, \varphi_1'^{(j)} \otimes \ldots \otimes \varphi_m'^{(j)}) \, dM_{k+m,\,k+m}$

$= 0$

La vérification de (4 . 3) est immédiate si $f, g \in \overset{k+m}{\otimes} \mathcal{S}_R$.
L'application $f \rightsquigarrow Z_f^{k,m}$ de $\overset{k+m}{\otimes} \mathcal{S}_R$ dans $L^2(\Omega)$ est continue si on munit $\otimes \mathcal{S}_R$ de la norme $L^2(R^{k+m}, \sigma_{k+m})$. Elle se prolonge donc en une application linéaire continue de $L^2_R(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$ (sous-ensemble de L^2 à valeurs réelles) dans $L^2(\Omega)$. Finalement si $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$, $f = f_1 + i f_2$ avec $f_1, f_2 \in L^2_{\mathbb{R}}(\sigma_{k+m})$, on pose $Z_f^{k,m} = Z_{f_1}^{k,m} + i Z_{f_2}^{k,m}$, on définit ainsi une application de $L^2(\mathbb{R}^{k+m} \sigma_{k+m})$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$, notée encore $f \rightsquigarrow Z_f^{k,m}$, qui satisfait (4 . 2) et (4 . 3), (Les calculs semblables à ceux du paragraphe précédent, sont omis).

Un calcul immédiat nous donne la formule :

(4 . 4) $Z^{k,m}_{\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_k \otimes \varphi_1' \otimes \ldots \varphi_m'} = Z_{\varphi_1} \ldots Z_{\varphi_k} \bar{Z}_{\bar{\varphi}_1'} \ldots \bar{Z}_{\bar{\varphi}_m'}$, si $\varphi_1 \ldots \varphi_k, \varphi_1', \ldots \varphi_m' \in \mathcal{S}$,

<u>Notation</u> : Dans la suite, on trouvera souvent plus commode de poser :

$Z_f^{k,m} = \int f(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_1', \ldots \lambda_m') \, dZ^{k,m}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_1', \ldots \lambda_m')$ ou $\int f(\lambda, \lambda') dZ^{k,m}(\lambda, \lambda')$

ou tout simplement $\int f dZ^{k,m}$.

<u>Proposition 4 . 2</u> : $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{k,m}, \sigma_{k+m}), \forall k, m \quad 0 \leq k, m \quad k+m \leq p$.

(4 . 5) $\quad E\{Z_f^{k,m}\} = \int f \, dM_{k,m}$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de démontrer la proposition pour f réelle.
En vertu de (4 . 1) , (4 . 5) est vérifiée si $f = \varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_{k+m}$, où $\varphi_i, i \leq k+m$ est la transformée de Fourier <u>réelle</u> d'un élément de $L^1(-\infty, \infty)$, et par conséquent si f appartient à l'espace vectoriel réel F engendré par de telles fonctions. F est une algèbre de fonctions continues sur $\mathbb{R}^{k+m}$ qui s'annulent à l'infini et qui sépare les points de $\mathbb{R}^{k+m}$. Il en résulte par le théorème de

Stone-Weierstrass que (4 . 5) est vérifiée si f est une fonction continue réelle qui s'annule à l'infini, et par conséquent, par le théorème de Lebesgue, si f est l'indicatrice d'une somme finie de produits d'intervalles. Soit $\mathfrak{A}$ la classe des ensembles A tels que 1_A vérifie (4 . 5) . Il est clair que $\mathfrak{A}$ est une classe monotone qui contient l'algèbre des sommes finies de produits d'intervalles . Par conséquent $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{k+\ell}} \subset \mathfrak{A}$. On a alors, $\forall A \in \mathcal{B}_{R^{k+m}}$

$$|M_{k,m}(A)|^2 = |E\{Z^{k,m}(A)\}| \leq \| Z^{k,m}(A) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq |\sigma_{k+m}(A)|^2 .$$

ce qui montre que si $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$,elle est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R}^{k+m}, |M_{k,m}|)$ et (4 . 6) est donc vérifiée $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$.

On considère à présent un processus (X_t) qui admet la représentation spectrale :

$$(4 . 6) \qquad X_t = \int e^{it\lambda} \, d\, Z(\lambda)$$

Z étant une mesure aléatoire bornée dénombrablement additive en m. q. et l'intégrale étant prise comme limite dans $L^2(\Omega)$ de sommes de Riemann.

Il est clair que cette représentation est unique. En effet, si Z' est une autre mesure spectrale satisfaisant (4 . 6) , un calcul immédiat montre que $\int \varphi(\lambda)\, dZ(\lambda) = \int \varphi(\lambda)\, dZ'(\lambda) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$. On vérifie aisément que les fonctions suivantes, définies sur les rectangles de $\mathbb{R}^2$:

$$\Lambda \times \Lambda' \rightsquigarrow E\ \{Z(\Lambda)\ \overline{Z(\Lambda')}\} = M_{1,1}(\Lambda, \Lambda')$$
$$\Lambda \times \Lambda' \rightsquigarrow E\ \{Z(\Lambda)\ Z(\Lambda')\} = M_{2,0}(\Lambda, \Lambda')$$
$$\Lambda \times \Lambda' \rightsquigarrow E\ \{\overline{Z}(\Lambda)\ \overline{Z(\Lambda')}\} = M_{0,2}(\Lambda, \Lambda')$$

peuvent être prolongées par additivité à l'algèbre $\mathcal{A}$ des réunions finies de rectangles et qu'elles sont définies de façon unique sur $\mathcal{A}$. Puisqu'elles sont dénombrablement additives sur $\mathcal{A}$ en vertu de l'additivité en m. q. de Z, et bornées, elles se prolongent en des mesures (complexes) sur $\mathbb{R}^2$.

La proposition suivante nous permet de définir de façon équivalente un processus de la classe $\Phi^{(p)}$, si p est pair.

Proposition 4 . 3 : Supposons que p soit pair. Un processus stochastique (X_t), $t \in \mathbb{R}$, satisfaisant à l'équation (4 . 6) appartient à la classe $\Phi^{(p)}$ si et seulement si $\forall k, m$, $0 \leq k, m$ $k+m \leq \frac{p}{2}$, la fonction suivante, définie sur la classe des pavés de $\mathbb{R}^{k+m}$:

$$M_{k,m}(\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_k \times \Lambda_1' \times \ldots \times \Lambda_m') = E\{Z(\Lambda_1) \ldots Z(\Lambda_k)\, \overline{Z(\Lambda_1')} \ldots \overline{Z(\Lambda_m')}\}$$

est finie pour tout choix de boréliens $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots \Lambda_1', \ldots \Lambda_m'$, et peut être prolongée en une mesure sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{k+m}}$.

Il en résulte, en particulier, que tout processus satisfaisant (4 . 6) appartient à la classe $\Phi^{(2)}$.

Démonstration : La nécessité de la condition résulte directement de la proposition précédente et du fait que $Z^{k,m}(\Sigma A_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \text{m. q} \sum\limits_1^n Z^{k,m}(A_i)$.
Réciproquement, supposons la condition vérifiée et désignons par μ la somme des projections de $|M_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}|$ sur les espaces facteurs. Considérons l'application linéaire $\Sigma \alpha_i 1_{\Lambda_i} \mapsto \Sigma \alpha_i Z(\Lambda_i)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$ des combinaisons linéaires finies d'indicatrices d'éléments de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, dans $L^p(\Omega)$. Cette application est continue lorsqu'on munit $\mathcal{V}$ de la norme $L^p(\mu)$. En effet, soit $v \in \mathcal{V}$; v peut s'écrire $\sum\limits_i \alpha_i 1_{\Lambda_i}$, $(\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset)$ et on a :

$$(\| \Sigma\alpha_i Z(\Lambda_i)\|_{L^p})^p = \int (\Sigma\alpha_i 1_{\Lambda_i}) \otimes \ldots \otimes (\Sigma\bar{\alpha}_i 1_{\Lambda_i}) \ldots \otimes (\Sigma\bar{\alpha}_i 1_{\Lambda_i})\, dM_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}$$
$$\leq \int |\Sigma\alpha_i 1_{\Lambda_i}| \otimes \ldots \otimes |\Sigma\alpha_i 1_{\Lambda_i}|\ d|M_{\frac{p}{2},\frac{p}{2}}| \leq (\| \Sigma\alpha_i 1_{\Lambda_i}\|_{L^p(\mu)})^p$$

Cette application se prolonge donc en une application linéaire continue de $L^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R},\mu)$ dans $L^p(\Omega)$. On vérifie alors que l'intégrale $\int e^{it\lambda}\,dZ(\lambda)$ est une intégrale dans $L^p(\Omega)$. et par conséquent dans $L^{p'}(\Omega)$ $\forall p' < p$. Considérons une suite $\{x_j^{(n)}\}$, $j \in Z$, de subdivisions de $\mathbb{R}$ devenant arbitrairement fines lorsque $n \to \infty$.

$$\int e^{i(t_1\lambda_1+\dots+t_k\lambda_k-t'_1\lambda'_1\dots t'_m\lambda'_m)}\,dM_{k,m} = \lim_{n\to\infty}\int (\sum_1 e^{it_1x_j^{(n)}}\,1_{[x_j,x_{j+1}]}(\lambda_1))\dots$$

$$(\sum_1 e^{-it'_mx_j^{(n)}}\,1_{[x_j,x_j+1)}(\lambda'_m))\,dM_{k,m}$$

$$= \lim_{n\to\infty} E\,\{(\sum_1^n e^{it_1x_j^{(n)}}\,Z[x_j^{(n)},x_{j+1}^{(n)}))\dots(\sum_1^n e^{-it'_mx_j^{(n)}}\,\overline{Z}\,[x_j^{(n)},x_{j+1}^{(n)}))\}$$

$$= E\{X_{t_1}\dots X_{t_k}\,\overline{X}_{t'_1}\dots\overline{X}_{t'_m}\}$$

puisque chaque somme converge dans L^{k+m} d'après ce qui précède.

<u>Proposition 4 . 4</u> : Si $(X_t) \in \Phi^{(2p)}$, $p \geq 1$, si k, m sont des entiers non-négatifs tels que $k+m \leq p$ et si $\varphi_1,\dots,\varphi_k$, $\varphi'_1,\dots,\varphi'_m$ sont des fonctions mesurables bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, alors :

$$(4\,.\,7)\quad \int \varphi_1\otimes\dots\otimes\varphi_k\otimes\varphi'_1\otimes\dots\otimes\varphi'_m\,dZ^{k,m} = \int\varphi_1\,dZ\dots\int\varphi_k\,dZ\,\overline{\int\varphi'_1\,dZ}\dots\overline{\int\varphi'_m\,dZ}$$

<u>Démonstration</u> : (4 . 7) est vérifiée pour les $\varphi \in \mathcal{S}$ d'après (4 . 4) . On vérifie que les intégrales figurant au deuxième membre sont des intégrales dans L^{2p}. (4 . 7) est donc vérifiée pour les fonctions continues s'annulant à l'infini, et par suite pour les indicatrices d'intervalles, bornées ou non. L'extension aux indicatrices de boréliens et par suite aux fonctions mesurables bornées se fait aisément. La généralisation suivante sera utile dans la suite.

<u>Proposition 4 . 5</u>. Soient $(X_t) \in \Phi^{(2p)}$, $p \geq 1$, k, m des entiers non négatifs tels

que $k+m \leq p$, k_i, m_i , $1 \leq i \leq s$ des entiers non négatifs tels que $\Sigma k_i = k$, $\Sigma m_i = m$ et $\forall i$, $1 \leq i \leq s$, φ_i une application de $\mathbb{R}^{k_i+m_i}$ dans $\mathbb{C}$, mesurable bornée. Alors :

$$(4.8.)\quad \int \prod_i \varphi_i (\lambda_{k_1+\ldots+k_{i-1}+1}, \ldots \lambda_{k_1+\ldots+k_i}, \lambda_{m_1+\ldots+m_{i-1}+1}, \ldots, \lambda_{m_1+\ldots+m_i}) \, dZ^{k,m}(\lambda_1, . . \lambda_k, \lambda'_1 . . \lambda'_m)$$

$$= \prod_i \int \varphi_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_i}, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_{m_i}) \, dZ^{k_i, m_i}(\lambda_1, . . \lambda_{k_i}, \lambda'_1, . . \lambda'_{m_i}) .$$

Démonstration : D'après (4 . 7), (4 . 8) est vraie si les φ_i sont des indicatrices de produits de boréliens et par suite si les φ_i sont des combinaisons linéaires finies de telles indicatrices. On montre alors, par passage à la limite classique, qu'elle reste valable pour φ_1 , mesurable bornée et de proche en proche, pour $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ mesurables bornées.

5 . PROCESSUS STRICTEMENT STATIONNAIRES DANS $\Phi^{(\infty)}$

Dans ce paragraphe on considère des processus strictement stationnaires tels que :

1) $(X_t) \in \Phi^{(\infty)}$

2) Le flot V_t défini par (X_t) est fortement continu.

Proposition 5 . 1 : $\forall k, m$, la mesure $M_{k,m}$ est concentrée sur l'hyperplan $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k - \lambda'_1 \ldots \lambda'_m = 0$.

Démonstration : On a, $\forall u \in \mathbb{R}$, par la stationnarité stricte de X_t :

$$E\,\{X_{t_1} \ldots X_{t_k} \; X_{t'_1} \ldots X_{t'_k}\} = \int e^{i(t_1\lambda_1 + \ldots + t_k\lambda_k - t'_1 \lambda'_1 \ldots t'_m \lambda'_m)} \, dM_{k,m}(\lambda, \lambda')$$

$$= E\{X_{t_1+h} \; X_{t_k+h} \; \bar{X}_{t'_1+h} \ldots \bar{X}_{t'_m+h}\} = \int e^{i(t_1\lambda_1 + \ldots + t_k\lambda_k - t'_1\lambda'_1 \ldots - t'_m\lambda'_m)} \, e^{ih(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k - \lambda'_1 \ldots \lambda'_m)} \, dM_{k,m}(\lambda, \lambda')$$

ce qui, par l'unicité de la transformée de Fourier montre que $M_{k,m}$ est bien concentrée sur l'hyperplan $\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\lambda'_1\ldots-\lambda'_m = 0$.

Désignons par T_t le groupe de transformations unitaires de $L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ correspondant au flot V_t. On a, par le théorème de Stone :

(5 . 1) $$T_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} \, dE(\lambda)$$

E étant la décomposition de l'identité associée à T_t.

Si $f_1, f_2, \ldots f_n \in L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$ sont telles que $f_1 \cdot f_2 \ldots f_n \in L^2(\Omega, \mathcal{Q}, P)$, alors :

(5 . 2) $$T_t(f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n) = T_t f_1 \cdot T_t f_2 \ldots T_t f_n$$

<u>Proposition 5 . 2</u> : $\forall k, m \quad 0 \leq k, m \quad \forall h \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$ on a :

(5 . 3) $$T_t \int h(\lambda_1 \ldots \lambda_k, \lambda'_1 \ldots \lambda'_k) \, dZ^{k,m}(\lambda, \lambda') = \int e^{it(\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\lambda'_1\ldots-\lambda'_m)} h(\lambda, \lambda') \, dZ^{k,m}(\lambda, \lambda').$$

<u>Démonstration</u> : La proposition se vérifie immédiatement, compte tenu de (5 . 1), (5 . 2) et de la proposition (4 . 4) pour les fonctions h de la forme $1_{\Lambda_1}(\lambda_1) \times \ldots \times 1_{\Lambda_m}(\lambda'_m)$ et s'étend par conséquent à l'espace $\mathcal{E}$ des combinaisons linéaires complexes de telles fonctions.

$\forall h \in L^2(\mathbb{R}^{k+m}, \sigma_{k+m})$ il existe une suite h_n d'éléments de $\mathcal{E}$ telle que $h_n \to h$ dans $L^2(\sigma_{k+m})$ et par conséquent telle que $e^{it(\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\lambda'_1\ldots-\lambda'_m)}(h_n - h) \to 0$ en norme dans $L^2(\sigma_{k+m})$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Puisque $\int h_n dZ^{k,m} \xrightarrow{\| \|_{L^2(\Omega)}} \int h dZ^{k,m}$, le résultat s'ensuit d'après la continuité forte de T_t.

<u>Proposition 5 . 3</u> : Si (X_t) est un processus ergodique, alors quel que soit B, ensemble mesurable de l'hyperplan $\lambda_1+\ldots+\lambda_k-\lambda'_1\ldots-\lambda'_m = 0$, on a :

$$Z^{k,m}(B) = M_{k,m}(B)$$

Démonstration : En appliquant la proposition précédente, on obtient :

$$T_t\, Z^{k,m}(B) = Z^{k,m}(B) = E\{ Z^{k,m}(B) \} = M_{k,m}(B)$$

en vertu de l'ergodicité du processus et de la proposition 4 . 1 .

Proposition 5 . 4 : Soient k_i , m_i , $1 \leq i \leq s$ des entiers non négatifs tels que $\sum_1^s k_i = k$, $\sum_1 m_i = m$.

Soit $\mathbb{R}'$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{k+m}$ défini par les relations suivantes :

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_{k_1} = \lambda'_1 + \ldots + \lambda'_{m_1}$$

$$\lambda_{k_1+1} + \ldots + \lambda_{k_1+k_2} = \lambda'_{m_1+1} + \ldots + \lambda'_{m_1+m_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{k_1+\ldots+k_{s-1}+1} + \ldots + \lambda_k = \lambda'_{m_1+\ldots+m_{s-1}+1} + \ldots + \lambda'_m$$

Alors si (X_t) est ergodique, la restriction de $M_{k,m}$ à $\mathbb{R}'$ est le produit des M_{k_i,m_i} . Plus précisément , si Λ_i , $1 \leq i \leq s$ est un sous ensemble mesurable de l'hyperplan $\lambda_{k_1+\ldots+k_{i-1}+1} + \ldots + \lambda_{k_1+\ldots+k_i} = \lambda_{m_1+\ldots+m_{i-1}+1} + \ldots + \lambda_{m_1+\ldots+m_i}$ de la forme :

$$\{(\lambda_{k_1+\ldots+k_{i-1}+1}, \ldots \lambda_{k_1+\ldots+k_i}, \lambda'_{m_1+\ldots+m_{i-1}+1}, \ldots \lambda_{m_1+\ldots+m_i}) \in B_i \} \text{ où}$$

$B_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{k_i+m_i}}$ alors $M_{k,m}(\Lambda_1 \cap \ldots \cap \Lambda_s) = \prod_i M_{k_i,m_i}(B_i)$.

Démonstration : D'après la proposition (5 . 3), appliquée à chacun des espaces

$R^{k_i+m_i}$, il suffit de montrer que :

$$Z^{k,m}(\Lambda_1 \cap \ldots \cap \Lambda_s) = \pi Z^{k_i, m_i}(B_i)$$

or $Z^{k,m}(\Lambda_1 \cap \ldots \cap \Lambda_s) = \int 1_{\Lambda_1 \cap \ldots \cap \Lambda_s} dZ^{k,m} = \int 1_{\Lambda_1} 1_{\Lambda_2} \ldots 1_{\Lambda_s} dZ^{k,m}$

$$= \int \pi_i 1_{\{(\lambda_{k_1+\ldots+\lambda_{k_{i-1}+1}} \ldots \lambda_{k_1+\ldots+k_i}, \lambda_{m_1+\ldots+m_{i-1}+1} \ldots \lambda_{m_1+\ldots+m_i}) \in B_i\}} dZ^{k,m}$$

$= \pi_i Z^{k_i, m_i}(B_i)$ d'après la proposition (4 . 4) .

Le résultat suivant est une application de la proposition précédente aux processus gaussiens.

Soit (X_t) un processus gaussien complexe stationnaire, continu en m. q, de moyenne nulle. La proposition (2 . 1) montre que $(X_t) \in \Phi^{(\infty)}$, et on sait que $M^{k,m} = 0$ si $k \neq m$. Considérons maintenant $M_{k,k}$, mesure sur $\mathbb{R}^{k+k}$, et posons dans la proposition (5. 3) $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = m_1 = \ldots = m_k = 1$, c'est à dire considérons le sous espace $\lambda_1 = \lambda'_1$, $\lambda_2 = \lambda'_2$, $\lambda_k = \lambda'_k$. La restriction de $M_{k,k}$ à ce sous espace est égale au produit de la mesure $M_{1,1}$ avec elle même k fois. En permutant les λ', on trouve k ! sous espaces de ce type, soient H_1 , $H_2 \ldots H_{k!}$.

Proposition 5 . 4 : Si X_t a un spectre continu, alors $M_{k,k}$ = somme des $M^{k,k}$ sur les k ! sous espaces définis ici dessus.

Démonstration : Le fait que (X_t) a un spectre continu montre que l'intersection de deux de ces sous espaces est de $M_{k,k}$-mesure nulle . D'autre part, on remarque aisément que $M_{k,k}$ est une mesure positive. Puisque les valeurs $M_{k,k}(H_i)$, $1 \leq i \leq k!$ sont toutes égales par symétrie, il suffit de montrer que $M_{k,k}(\mathbb{R}^{k+k}) = k!\ M_{k,k}(H_i)$.

Posons $Z = Z(-\infty, \infty)$, $E\,|Z|^2 = s^2$

On a $M_{k,k}(H_i) = \{M_{1,1}(\mathbb{R}^2)\}^k$ (d'après la proposition 5 . 3) $= s^{2k}$

$M_{k,k}(\mathbb{R}^{k+k}) = E\,|Z|^{2k}$

Or, $E\,|Z|^{2k} = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[E \quad e^{\lambda|Z|^2}\right]_{\lambda=0} = \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\frac{1}{1-\lambda s^2}\right]_{\lambda=0} = k!\, s^{2k}$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET : Théorie des fonctions aléatoires, Masson, Paris, 1953.

[2] K. ITÔ : Multiple Wiener Integral. J. Math. Soc. Japan, 3, 1, 1951

[3] " " Complex Multiple Wiener Integral. Jap. J. Math. 22, 1952

[4] M. LOEVE : Fonctions aléatoires du second ordre. Suppl. à P. Lévy Processus stochastiques et mouvement brownien, Gauthier-Villars, Paris, 1948 .

[5] A. N. SHIRYAEV : Some Problems in the spectral Theory of Higher Moments I - Th. Prob. Appl. V, 3, 1960 .

[6] Ya. G. SINAÏ : Spectral Measures of Ergodic Processes. Th. Prob. Appl. VIII, 4, 1963 .

--ooOoo--

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences

51 - REIMS

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

GUIDE DÉTAILLÉ DE LA THÉORIE "GÉNÉRALE" DES PROCESSUS

(P.A.Meyer)

La théorie " générale" ou " abstraite" des processus stochastiques prend sa source dans le livre de DOOB [2] (1953). Elle s'est considérablement développée depuis lors, grâce à diverses méthodes : théorie des martingales, ensembles analytiques abstraits, capacités... qui ont fait d'une théorie déjà austère à ses débuts l'une des branches les plus rébarbatives du Calcul des Probabilités. Le dernier exposé d'ensemble de la question figure dans le livre [3] ; datant de 1965, il est déjà démodé, et l'exposé qui suit a pour objet de présenter le squelette de la théorie sous sa forme actuelle (Mai 1967).

Les références renvoient au livre [3] (chapitre et n°). On n'a pas rappelé les définitions des notions les plus connues (temps d'arrêt...), mais on a essayé d'être aussi explicite que possible lorsqu'il y avait ambiguïté. Les résultats qui ne figurent pas dans [3] sont prouvés dans les appendices.

Le guide est divisé en quatre sections (0,1,2,3) à l'intérieur desquelles définitions et résultats sont numérotés à la suite les une des autres (la section 2, par ex., commence par 201,202,...)

Un bon guide touristique doit donner des indications sur le réseau routier, sur les bons repas, et aussi sur leurs prix. On a fait de même ici :

A) L'intérêt d'une définition ou d'un résultat est indiqué par un certain nombre d'étoiles dans la marge (jusqu'à xxx).

B) La difficulté d'un résultat est indiquée par l'une des lettres <u>t</u> (trivial), <u>m</u> (moyen), <u>p</u> (pénible : long ou difficile). La notation t/215 signifie " trivial modulo le résultat 15 de la section 2" , mais bien entendu 215 peut être difficile.

C) Il est intéressant dans certains cas de connaître la méthode qui permet de démontrer un théorème. On l'a indiquée de la manière suivante :

el : démonstration élémentaire à partir des définitions - élémentaire signifiant que seuls les outils classiques de la théorie de la mesure sont utilisés (théorème des classes monotones, th. de Lebesgue, etc).

mar : la démonstration utilise en plus la théorie classique des martingales, telle qu'elle figure dans le chapitre VII de [2], ou le chap. VI de [3] : régularité des trajectoires, théorème d'arrêt, théorème de convergence...

dec : la démonstration repose sur la théorie de la décomposition des surmartingales (existence et unicité de la décomposition de DOOB).

cap : la démonstration utilise le théorème de capacitabilité de CHOQUET (abstrait)

Les appréciations d'intérêt et de difficulté sont bien entendu subjectives.

Remarques sur la seconde édition du Guide Gris (Octobre 1967)

CONFUCIUS dit : il faut rectifier les noms (Analectes, livre XIII, 3). La terminologie de la première édition a donc été rectifiée dans celle-ci . Voici un tableau de concordance entre les noms employés dans [3] et dans la première édition du Guide, et ceux de cette édition.

Anciens noms	Nouveaux noms
Processus, ensemble progressivement mesurable	Processus, ensemble progressif
Processus, ensemble bien-mesurable	pas de changement
Temps d'arrêt	pas de changement
Processus, ensemble $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{I}}')$-mesurable	processus, ensemble accessible
Temps d'arrêt accessible	temps d'arrêt (ou simplement var. aléatoire) accessible
Processus, ensemble très-bien-mesurable	Processus, ensemble prévisible
Temps d'arrêt approchable	temps d'arrêt (ou simplement var. aléatoire) prévisible

On remarquera (les adjectifs <u>très-bien-mesurable</u> et <u>approchable</u> ne figurant pas dans [3]) que la terminologie de [3] n'est pratiquement pas modifiée. Le mot <u>temps d'arrêt</u> se disant <u>optional random variable</u> en anglais, il est recommandé de traduire"processus bien-mesurable" par " optional process". Nous ne chercherons pas ici à rectifier les noms dans les autres langages.

Je remercie vivement M. CHUNG, qui m'a communiqué plusieurs remarques utiles (que j'ai ajoutées à cette édition du Guide), ainsi que la citation des Analectes de CONFUCIUS.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHUNG (K.L.) et DOOB (J.L.).- Fields, optionality and measurability. Amer.J. of M., 87, 1965, 397-424.

[2] DOOB (J.L.).- <u>Stochastic processes</u>. New York, Wiley, 1953.

[3] MEYER (P.A.).- <u>Probabilités et Potentiel</u> . Paris, Hermann ; Boston, Blaisdell, 1966.

Un article récent de C.DOLÉANS (à paraître dans le Z. für Warscheinlichkeitstheorie) permet de ramener la théorie de la décomposition des surmartingales, de manière très simple, à la théorie générale des processus telle qu'elle est exposée ici. Bien entendu, cela modifie profondément le " réseau routier". Nous n'avons pas tenu compte de cet article dans le Guide, bien que la méthode de Mlle DOLÉANS soit évidemment la " bonne " méthode pour traiter de la décomposition des surmartingales.

On peut encore ajouter que CORNEA et LICEA viennent de simplifier très considérablement la démonstration du théorème de section pour les ensembles accessibles ou bien-mesurables (ils donnent en fait une démonstration unifiée des trois théorèmes de section). Ainsi, la théorie exposée ci-dessous semble avoir atteint une forme presque définitive (l'article de CORNEA et LICEA doit paraître dans le Z. für W.).

0.- GÉNÉRALITES

1. <u>Notations générales</u>. $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbf{P})$ est un espace probabilisé complet. $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbf{R}_+}$ est une famille croissante de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$ (IV.30), continue à droite, telle que chaque tribu $\underline{\underline{F}}_t$ contienne tous les ensembles $\mathbf{P}$-négligeables (voir IV.30 pour ces définitions, ainsi que pour la notation $\underline{\underline{F}}_{t-} = \bigvee_{s<t} \underline{\underline{F}}_s$; on pose par convention $\underline{\underline{F}}_{0-} = \underline{\underline{F}}_0$).

Un <u>processus</u> est une fonction X définie sur $\mathbf{R}_+ \times \Omega$, telle que pour chaque $t\in\mathbf{R}_+$ la fonction $\omega \mapsto X(t,\omega)$ [toujours notée X_t : on dira le processus (X_t), ou le processus X] soit $\underline{\underline{F}}$-mesurable. Si la fonction X est elle même mesurable sur $\mathbf{R}_+ \times \Omega$ pour la tribu produit naturelle $\underline{\underline{B}}(\mathbf{R}_+) \times \underline{\underline{F}}$, on dira que le processus est mesurable (IV.45) . Si X_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable pour chaque t, on dira que le processus X est <u>adapté</u> (à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$) (IV.31).

xx 2. Deux processus X et Y à valeurs dans le même espace d'états sont dits <u>indiscernables</u> si pour presque tout $\omega\in\Omega$ on a $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ pour tout t.

> Cette définition indispensable ne figure pas explicitement dans [3]. Dans toute la suite, chaque fois que l'on trouvera l'expression " il existe <u>un seul</u> processus possédant la propriété $\underline{\underline{P}}$" , cela signifiera que tous les processus possédant $\underline{\underline{P}}$ sont indiscernables les uns des autres.

x 3. Processus progressivement mesurable ou <u>progressif</u> (IV.50)

> Cette définition a été très largement utilisée au début de la théorie. Son principal intérêt vient du théorème 9 ci-dessous. En pratique, on peut toujours la remplacer par la notion de processus bien-mesurable (201) qui est à la fois plus simple et plus intéressante. On sait cependant qu'il existe des ensembles progressifs non bien-mesurables (cf. 211 et 216)

xxx 4. Temps d'arrêt (IV.33)

xxx 5. Tribu $\underline{\underline{F}}_T$ des événements antérieurs à un t.d'a. T (IV.35) xx 6. Si T est un t.d'a. , on note $\underline{\underline{F}}_{T-}$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_0$ et par les événements de la forme $A\cap\{t<T\}$ ($t\in\mathbb{R}_+$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$).

Cette notion a été introduite par CHUNG et DOOB dans [1]. Elle est très intéressante, mais a peu servi jusqu'à présent . Un petit sommaire (avec démonstrations) des résultats connus sur cette tribu figure à l'appendice 1.

Nous ne reviendrons pas ici sur les résultats élémentaires concernant les temps d'arrêt (IV.33-44), sauf :

7. Si T est un t.d'a., et si $A\in\underline{\underline{F}}_T$, la variable aléatoire égale à T sur A, à $+\infty$ sur A^c, est notée T_A ; c'est aussi un t.d'a..

× 8. <u>Début</u> D_C d'une partie C de $\mathbb{R}_+\times\Omega$ (IV.51) :

$$D_C(\omega) = \inf \{ t : (t,\omega) \in C \}$$

xxx cap m 9. Le début d'un ensemble progressif est un temps d'arrêt (IV.52).

Les xxx de ce résultat tiennent plutôt à ses applications à la théorie des processus de Markov. La plupart des applications à la théorie générale des processus, ci-dessous, se ramènent en effet à des cas particuliers tout à fait élémentaires de ce théorème.

1.–CLASSIFICATION DES TEMPS D'ARRÊT

101. *Notations générales* .- Si T est un temps d'arrêt, $\underline{\underline{S}}(T)$ désigne l'ensemble des suites croissantes (R_n) de temps d'arrêt telles que $R_n \leq T$ pour tout n, et $K[(R_n)]$ désigne alors l'événement $\{ \lim_n R_n = T < \infty ,\ R_n < T$ pour tout n $\}$ (VII.44).

Si (R_n) est une suite croissante de temps d'arrêt, la tribu engendrée par la réunion des $\underline{\underline{F}}_{R_n}$ est notée $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$ (VII.38).

Classification des temps d'arrêt

xxx 102. T est *totalement inaccessible* (VII.42)

Avec les notations précédentes : T est totalement inaccessibles si et seulement si $T>0$ p.s., $P\{T<\infty\}>0$, et $P(K[(R_n)])=0$ pour toute suite $(R_n) \in \underline{\underline{S}}(T)$.

103. T est *inaccessible* (VII.42).

xxx 104. T est *accessible* (VII.42) si $P\{T=S<\infty\}=0$ pour tout temps d'arrêt totalement inaccessible S.

xxx 105. T est *prévisible* s'il existe une suite croissante (R_n) de temps d'arrêt qui converge vers T p.s., telle que $R_n<T$ p.s. sur $\{T>0\}$ pour tout n.

> Cette définition, dont toute la suite va montrer l'importance, ne figure pas explicitement dans [3]. En revanche, on trouvera dans [3] d'autres définitions qui ne servent pas à grand chose, et ne seront pas étudiées ici (VII.45).

106. T est un *temps de discontinuité* (VII.40)

> Cette définition est technique, et assez peu intéressante. En revanche, la notion suivante est à la fois simple et utile :

xx 107. La famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est dépourvue de temps de discontinuité (VII.39).

> Par exemple, la famille de tribus canonique d'un processus de HUNT est dépourvue de temps de discontinuité.

Premières propriétés et critères élémentaires

el,t 108. Si T est accessible (resp. totalement inaccessible) et si $A \in \underline{\underline{F}}_T$ (resp. $A \in \underline{\underline{F}}_T$ et $P\{T_A<\infty\}>0$), T_A est accessible (resp. tot. inaccessible). (VII.43)

el,m 109. Si T est prévisible et si $A \in \underline{\underline{F}}_{T-}$, T_A est prévisible

> Ce résultat ne figure pas dans [3]. Voir l'appendice 2

el,t 110. Si S et T sont deux temps d'arrêt tot. inacc. (resp. accessibles, prévisibles), $S \vee T$ et $S \wedge T$ sont tot.inacc (resp. accessibles, prévisibles). (VII.43)

el,m 111. Si (S_n) est une suite croissante de temps d'arrêt accessibles (resp. prévisibles), $\lim_n S_n$ est accessible (resp. prévisible.

> Voir VII.43 pour le cas accessible, l'appendice 2 pour le cas prévisible.

x
el,t 112. Pour qu'un t.d'a. T soit accessible, il faut et il suffit qu'il existe une suite $(R_n^p)_{p \in \underset{\sim}{N}}$ d'éléments de $\underline{\underline{S}}(T)$, telle que $\{0<T<\infty\} = \bigcup_p K[(R_n^p)]$ p.s.

xx
el,m 113. Pour que T soit prévisible, il faut et il suffit que T soit accessible et que, pour toute suite croissante (R_n) de t.d'a., l'événement $\{\lim_n R_n=T\}$ appartienne à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$.

> Ce résultat ne figure pas explicitement dans [3], mais a) c'est le point crucial de la démonstration de VII.45, b) il est en fait équivalent à VII.52, compte tenu du critère VII.49 pour qu'un processus croissant soit naturel.

xxx
t/113 114. Si la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est dépourvue de temps de discontinuité, tout temps d'a. accessible est prévisible.

el,m 115. Soit T un t.d'a. ; l'ensemble des $A \in \underline{\underline{F}}_T$ tels que T_A soit prévisible est stable pour les réunions et intersections dénombrables.

> Ce résultat ne figure pas dans [3] explicitement, mais c'est en fait la première partie de la démonstration de VII.45. Voir l'appendice 2 pour plus de détails. Dans l'ordre logique des démonstrations, 115 doit

<u>précéder</u> 109 et 113. Voir aussi app.2, propriété 6.
On notera que 115 entraîne l'existence d'un plus grand $A\in\underline{\underline{F}}_T$ (aux ensembles négligeables près) tel que T_A soit prévisible. Si $A=\emptyset$ p.s., on peut donc dire que T est <u>totalement imprévisible</u>. Mais il ne faudrait pas croire que si S est prévisible, T totalement imprévisible,l'on ait nécessairement $P\{S=T<\infty\}=0$! Il se peut que S soit prévisible, et S_A totalement imprévisible pour un $A\in\underline{\underline{F}}_S$ (comparer à 109).

xx t/112 116. Soit T un t.d'a. ; il existe une partition essentiellement unique de $\{T<\infty\}$ en deux éléments A et I de $\underline{\underline{F}}_T$, telle que T_A soit accessible, T_I tot. inacc. ou p.s. égal à $+\infty$ (VII.44)

<u>Critères utilisant les martingales</u>.

xxx dec,m 117. Si T est totalement inaccessible, il existe une martingale uniformément intégrable continue à droite Y dont la seule discontinuité est un saut unité à l'instant T. Inversement, si la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est dépourvue de temps de discontinuité, et s'il existe une martingale Y continue à droite uniformément intégrable telle que $Y_T\neq Y_{T-}$ p.s. sur $\{T<\infty\}$, et si $P\{T<\infty\}>0$, alors T est totalement inaccessible.

L'appréciation <u>dec,m</u> se rapporte à la première phrase. La seconde résulte facilement de la théorie classique des martingales.

x dec,m 118. Si T est prévisible, et si Y est une martingale uniformément intégrable continue à droite, on a p.s. $Y_{T-}=E[Y_\infty|\underline{\underline{F}}_{T-}]$. Inversement, si cette relation est satisfaite pour toute martingale Y unif. intégrable continue à droite (ou même seulement la relation plus faible $E[Y_{T-}]=E[Y_\infty]$), alors T est prévisible.

Ne figure pas explicitement dans [3]. La seconde phrase est la remarque VII.53 . Pour la première, voir l'appendice 2.

119. T est prévisible si et seulement si le processus croissant intégrable $(I_{\{t\geq T\}})$ est naturel . (VII.53) .

xxx 120. Soit X un processus de HUNT canonique, et soit T un t.d'a. de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ canonique. T est accessible (cela équivaut ici à prévisible) si et seulement si $P\{X_T\neq X_{T-}\}=0$.

2.-LES TROIS PRINCIPALES TRIBUS SUR $\underline{\underline{R}}_+ \times \Omega$

Définitions

xxx 201. Tribu $\underline{\underline{BM}}$ des ensembles bien-mesurables (VIII.14).

Elle est engendrée par les processus (réels) adaptés dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche, ou par les intégrales stochastiques de la forme $[S,T[$ (VIII.16). Un processus adapté continu à droite, sans hypothèse sur l'existence de limites à gauche, est indiscernable d'un processus b-m (VIII.16, c)). Tout processus bien-mesurable est progressif (IV.47).

xxx 202. Tribu $\underline{\underline{A}}$ des ensembles accessibles : c'est la tribu engendrée par les intervalles stochastiques de la forme $[S,T]$, où S est un temps d'arrêt accessible.

> Cette tribu est identique à la tribu $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{I}}')$ engendrée par le pavage $\underline{\underline{I}}'$ du n°VII.13 de [3] - pavage dont il est inutile de rappeler ici la définition.

xxx 203. Tribu $\underline{\underline{P}}$ des ensembles prévisibles : c'est la tribu engendrée par les processus (réels) adaptés à trajectoires continues à gauche (tout processus est continu à gauche par convention à l'instant 0). Elle est aussi engendrée par les intervalles $[S,T]$, où le temps d'arrêt S est prévisible , ou par les ensembles $\{0\}\times A$ ($A\in\underline{\underline{F}}_0$) et $]s,t]\times A$ ($0<s\leq t$, $A\in\bigcup_{r<s}\underline{\underline{F}}_r$). Pour tout cela, voir l'appendice 3.

> Les tribus $\underline{\underline{BM}}$, $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{P}}$ sont toutes trois engendrées par les intervalles stochastiques fermés $[S,T]$, où le temps d'arrêt S est supposé quelconque dans le premier cas, accessible dans le second, prévisible dans le troisième. Voir l'appendice 3.

204. On a $\underline{\underline{P}}\subset\underline{\underline{A}}\subset\underline{\underline{BM}}$; si la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité, on a $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{A}}$.

> Pour le premier résultat, voir VIII.19 ; pour le second, qui n'est pas explicité dans [3], voir l'appendice 3.

Théorèmes d'existence de sections

Notation .- Si T est un t.d'a., nous désignons par $[T]$ l'ensemble $\{(T(\omega),\omega) : T(\omega)<\infty\}$ (le graphe de T, encore égal à l'intervalle stochastique $[T,T]$). Si H est une partie de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, nous désignons par p(H) sa projection sur Ω, qui est mesurable si H est mesurable (cf.IV.52).

xxx
cap,p

205. Soit A un ensemble bien-mesurable, et soit $\varepsilon>0$. Il existe un temps d'arrêt T tel que $[T]\subset A$ et que $P(p([T]))\geq P(p(A))-\varepsilon$.

> C'est le plus difficile des trois théorèmes de section. On le déduit en fait de 206 et de 213 ci-dessous. Voir VIII.21.

xxx
cap,p

206. Si A est accessible, il existe un temps d'arrêt accessible T tel que $[T]\subset A$ et que $P(p([T])) \geq P(p(A))-\varepsilon$. (VIII.21)

xxx
cap,m

207. Si A est prévisible, il existe un temps d'arrêt prévisible T tel que $[T]\subset A$ et que $P(p([T])) \geq P(p(A))-\varepsilon$.

> Ce théorème de section (plus facile que les deux autres) ne figure pas dans [3]. Voir l'appendice 3.

Voici des corollaires de ces théorèmes

xxx
t/205-07

208. Soient X et Y deux processus ; supposons que X et Y soient tous deux bien-mesurables (resp. accessibles, prévisibles) et que l'on ait pour chaque temps d'arrêt T (resp. chaque temps d'arrêt accessible, prévisible) $X_T=Y_T$ p.s. . Alors X et Y sont indiscernables.

209. Soit V une variable aléatoire positive. Pour que V soit un temps d'arrêt (resp. accessible, prévisible) il faut et il suffit que le graphe de V soit un ensemble bien-mesurable (resp. accessible, prévisible).

209. bis Soit A un ensemble accessible (prévisible) fermé à droite (cf.216 ci-dessous). Le début de A est alors accessible (prévisible).

> Aucun de ces théorèmes ne figure explicitement dans [3] ; 208 est vraiment trivial modulo les théorèmes de sections. Pour les autres, voir l'appendice 3.

Théorèmes de projection et de modification

On donne ici un théorème de projection, suivi d'un théorème de modification, pour chacune des trois tribus $\underline{\underline{BM}}$, $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{P}}$. Cet ordre n'est pas l'ordre logique des démonstrations. Les résultats d'unicité annoncés sont des conséquences triviales de 208.

Tribu $\underline{\underline{BM}}$

xxx
mar,m

210. Soit X un processus (réel) mesurable et borné. Il existe un processus bien-mesurable Y unique tel que $Y_T I_{\{T<\infty\}}$ = $\underline{\underline{E}}[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T]$ p.s. pour chaque temps d'arrêt T. (VIII.17)

Nous dirons que Y est la projection de X sur $\underline{\underline{BM}}$, et nous écrirons $Y=p_1(X)$. Voici un corollaire :

x
t/210

211. Soit X un processus progressif (réel, ou à valeurs dans un espace LCD). Il existe un processus bien-mesurable Y unique tel que $X_T=Y_T$ p.s. pour chaque temps d'arrêt fini T (VIII.17)

> C'est ce théorème qui permet en pratique de se borner à considérer des processus bien-mesurables. Si X est une indicatrice d'ensemble, on a $X^2=X$, donc Y^2 et Y sont indiscernables et Y est (indiscernable d')une indicatrice d'ensemble.

Tribu $\underline{\underline{A}}$

x
t/210
et 213

212. Soit X un processus (réel) mesurable borné. Il existe un processus accessible Y unique tel que $Y_T I_{\{T<\infty\}}$ = $\underline{\underline{E}}[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T]$ p.s. pour chaque t.d'a. <u>accessible</u> T .

Nous dirons que Y est la projection de X sur $\underline{\underline{A}}$, et nous écrirons $Y=p_2(X)$.

xxx
mar,m

213. Soit X un processus bien-mesurable (réel, ou à valeurs dans un espace LCD). Il existe un processus accessible Y, unique, tel que $X_T=Y_T$ p.s. pour chaque t.d'a. accessible T. Plus précisément, l'ensemble $\{X\neq Y\}$ est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt totalement inaccessibles (VIII.20)

> Ici encore, si X est une indicatrice, Y est indiscernable d'une indicatrice.

Tribu $\underline{\underline{P}}$

x mar,m 214. Soit X un processus mesurable borné ; il existe un processus prévisible Y, unique, tel que l'on ait $Y_T I_{\{T<\infty\}} = \underset{\sim}{E}[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ p.s. pour chaque temps d'arrêt <u>prévisible</u> T. L'ensemble $\{Y \neq p_1(X)\}$ (resp. $\{Y \neq p_2(X)\}$ est alors la réunion d'une suite de graphes de t.d'a. (resp. de t.d'a. accessibles).

> Ce résultat ne figure pas dans [3] : voir l'appendice 3 ; par exemple, si (X_t) est une martingale bornée continue à droite, Y est le processus (X_{t-}).

Nous dirons que Y est la projection de X sur $\underline{\underline{P}}$, et nous écrirons $Y = p_3(X)$.

xx el,t 215. Soit X un processus bien-mesurable (réel ou à valeurs dans un espace LCD). Il existe un processus prévisible Y tel que l'ensemble $\{X \neq Y\}$ soit la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt (et en particulier que $\{ t : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ soit dénombrables pour tout ω). Si X est une indicatrice, on peut choisir pour Y une indicatrice.

> A la terminologie près, c'est la première partie de la démonstration de VIII.20. Voir l'appendice 3. On notera que ce théorème de modification est incomplet (il n'y a pas d'assertion d'unicité)

Fermés aléatoires

Soit A une partie de $\underset{\sim}{R}$: on dit que A est fermée à droite * si A est fermée pour la topologie droite de $\underset{\sim}{R}$, i.e. si la limite de toute suite décroissante d'éléments de A appartient à A. Si maintenant A est une partie de $\underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$, on dit que A est fermée (resp. fermée à droite) si pour tout $\omega \in \Omega$ la coupe A_ω est fermée (resp. fermée à droite). On définit alors aussitôt l'adhérence $\overline{A}$ et l'adhérence à droite $\overline{A}^d$ de $A \subset \underset{\sim}{R}_+ \times \Omega$.

m 216. Soit A un ensemble progressif ; $\overline{A}$ est alors bien-mesurable, ainsi que l'ensemble des extrémités droites des intervalles contigus à $\overline{A}$; $\overline{A}^d$ est progressif, ainsi que l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à $\overline{A}$.

* On notera qu'avec cette convention un intervalle de la forme $[a,b[$ est fermé à droite!

Ce théorème n'est établi ni dans [3], ni dans l'appendice : voir Invent.Math. 1, 1966, p.114. Si l'on désigne par X un mouvement brownien issu de 0, par A l'ensemble prévisible $\{(t,\omega) : X_t(\omega)=0\}$, par H l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à A, H est progressif, la mesure de la projection de H sur Ω est 1, et il ne passe dans H aucun graphe de temps d'arrêt (propriété de Markov forte). H est donc progressif et non bien-mesurable.

3.-PROCESSUS CROISSANTS

xxx 301. Processus croissant (p.c.) ; processus croissant intégrable (pci) (VII.3)

Dans ce qui suit, et pour simplifier, nous ne nous occuperons que de p.c. intégrables.

302. Partie continue et partie discontinue d'un pci : VIII.10.

xxx 303. Processus croissant intégrable naturel : VII.19, a).

Rappelons cette définition, qui est la plus commode lorsqu'on on se borne aux p.c. intégrables : A est naturel si et seulement si, pour toute martingale Y continue à droite et bornée, on a

$$\underset{\sim}{E}[\int_0^\infty Y_s dA_s] = \underset{\sim}{E}[\int_0^\infty Y_{s-} dA_s]$$

On a alors avec les mêmes notations, pour tout temps d'arrêt T

$$\underset{\sim}{E}[\int_T^\infty Y_s dA_s | \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}[\int_T^\infty Y_{s-} dA_s | \underline{\underline{F}}_T] \quad \text{p.s.}$$

xxx dec,m 304. Pour qu'un p.c.i. A soit naturel, il faut et il suffit : a), que A ne charge aucun temps d'arrêt T totalement inaccessible (i.e., $A_T - A_{T-}=0$) et b) que pour toute suite croissante (S_n) de temps d'arrêt, la variable aléatoire A_S ($S=\lim_n S_n$) soit mesurable par rapport à la tribu $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{S_n}$. (VII.49)

L'appréciation dec,m se rapporte à la démonstration de [3]. Il en existe une autre démonstration, due à C.DOLÉANS, qui n'utilise plus la décomposition.

x t/304 et 113 305. Soit T un temps d'arrêt. Pour que le p.c. $(I_{\{t\geq T\}})$ soit naturel, il faut et il suffit que T soit prévisible (VII.52-53).

306. Tout processus croissant intégrable naturel s'écrit

$$A_t = A_t^c + \sum \lambda_n I_{\{t \geq T_n\}}$$

où A^c est la partie continue de A, où les λ_n sont des constantes, et les T_n des temps d'arrêt prévisibles.

> Ce théorème ne figure pas explicitement dans [3]. Voir l'appendice 4.

307. Deux p.c. intégrables A et B sont dits <u>associés</u> ($A \sim B$) si le processus A-B est une martingale.

> Cette définition commode n'est pas donnée dans [3]. Voici une conséquence immédiate du théorème de décomposition des surmartingales.

xx dec 308. Tout p.c. intégrable A est associé à un p.c.i. naturel unique, noté $\tilde{A}$; $\tilde{A}$ est continu si et seulement si A ne charge aucun temps d'arrêt accessible.

> Pour la seconde assertion, voir l'appendice 4.

<u>Intégration par rapport à un processus croissant</u>

xxx el,m 309. Soient X et Y deux processus mesurables, bornés ou positifs, tels qu'on ait pour temps d'arrêt T

$$\underset{\sim}{E}[X_T I_{\{T<\infty\}}] = \underset{\sim}{E}[Y_T I_{\{T<\infty\}}]$$

On a alors pour tout p.c. intégrable A et tout temps d'arrêt T

$$\underset{\sim}{E}[\int_T^\infty X_s dA_s | \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}[\int_T^\infty Y_s dA_s | \underline{\underline{F}}_T] \text{ p.s.} \qquad \text{(VII.15)}$$

> L'hypothèse ci-dessus entraîne en fait $\underset{\sim}{E}[X_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}[Y_T I_{\{T<\infty\}} | \underline{\underline{F}}_T]$ p.s. ; pour le voir, appliquer l'hypothèse aux t.d'a. T_H , H parcourant $\underline{\underline{F}}_T$.

xx el,t 310. Soient A et B deux p.c. intégrables associés, X un processus prévisible ≥ 0 ou borné. On a alors pour tout temps d'arrêt T

$$\underset{\sim}{E}[\int_T^\infty X_s dA_s \mid \underline{\underline{F}}_T] = \underset{\sim}{E}[\int_T^\infty X_s dB_s \mid \underline{\underline{F}}_T] \quad \text{p.s.} \qquad \text{(VII.17)}$$

> Ce résultat est en fait un peu plus précis que VII.17 : voir l'appendice 4. On consultera aussi l'appendice 4 pour l'énoncé suivant :

× 311. Soit X un processus mesurable borné, et soient X^1, X^2 et X^3 respectivement les projections de X sur $\underline{\underline{BM}}$, $\underline{\underline{A}}$ et $\underline{\underline{P}}$.

Soit A un processus croissant intégrable

a) On a $E[\int_0^\infty X_s dA_s] = E[\int_0^\infty X_s^1 dA_s]$ (309)

b) Si A ne charge aucun t.d'a. totalement inaccessible (i.e. soit $\underline{\underline{A}}$-mesurable ; cf ci-dessous) on a
$$E[\int_0^\infty X_s dA_s] = E[\int_0^\infty X_s^2 dA_s]$$

c) Si A est naturel (i.e., $\underline{\underline{P}}$-mesurable ; cf ci-dessous) on a
$$E[\int_0^\infty X_s dA_s] = E[\int_0^\infty X_s^3 dA_s]$$

312. Soit A un processus croissant intégrable

a) A est un processus accessible si et seulement si A ne charge aucun temps d'arrêt totalement inaccessible.

×× b) A est un processus prévisible si et seulement s'il est naturel.

Ce dernier résultat est dû à Mlle DOLÉANS. Voir l'appendice 4.

APPENDICE 1 : TRIBU $\underline{\underline{F}}_{T-}$

Rappelons la définition de CHUNG et DOOB : $\underline{\underline{F}}_{T-}$ est engendrée par $\underline{\underline{F}}_0$ et par les ensembles de la forme $A\cap\{t<T\}$ $(t>0,\ A\in\underline{\underline{F}}_t)$.

Si T est une constante s, on retrouve bien $\underline{\underline{F}}_{s-}$. On peut remplacer dans cette définition $A\in\underline{\underline{F}}_t$ par $A\in\bigcup_{r<t}\underline{\underline{F}}_r$; en effet, $A\cap\{t<T\}$ est la réunion des $A\cap\{s<T\}$ pour s rationnel $>t$, et on a $A\in\bigcup_{r<s}\underline{\underline{F}}_r$.

Les propriétés suivantes, à l'exception de la dernière, sont dues à CHUNG et DOOB.

<u>Propriété</u> 1.- <u>On a $\underline{\underline{F}}_{T-}\subset\underline{\underline{F}}_T$; T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable.</u>

La première assertion est évidente, la seconde résulte de ce que $\{t<T\}\in\underline{\underline{F}}_{T-}$.

<u>Propriété</u> 2.- <u>Soient</u> S <u>et</u> T <u>deux temps d'arrêt tels que</u> $S\leq T$. <u>On a</u> $\underline{\underline{F}}_{S-}\subset\underline{\underline{F}}_{T-}$.

En effet, soient $t>0$, $A\in\underline{\underline{F}}_t$; on a $A\ \{t<S\} = (A\cap\{t<S\})\cap\{t<T\}$, et la parenthèse appartient à $\underline{\underline{F}}_t$, donc $A\cap\{t<S\}\in\underline{\underline{F}}_{T-}$.

<u>Propriété</u> 3.- <u>Si</u> S <u>et</u> T <u>sont deux temps d'arrêt et</u> $A\in\underline{\underline{F}}_S$, <u>on a</u> $A\cap\{S<T\}\in\underline{\underline{F}}_{T-}$. <u>De même, si</u> $A\in\underline{\underline{F}}_\infty$, <u>on a</u> $A\cap\{T=\infty\}\in\underline{\underline{F}}_{T-}$.

<u>Si</u> S <u>est un temps d'arrêt, si</u> $S\leq T$ <u>et</u> $S<T$ <u>p.s. sur</u> $\{0<T<\infty\}$, <u>on a</u> $\underline{\underline{F}}_S\subset\underline{\underline{F}}_{T-}$.

Pour établir la première assertion, il suffit de remarquer que $\{S<T\}$ est la réunion, pour r rationnel, des ensembles $\{S<r<T\}$. Alors $A\cap\{S<r<T\} = (A\cap\{S<r\})\cap\{r<T\}$, et la parenthèse appartient à $\underline{\underline{F}}_r$, d'où le résultat.

L'ensemble des A tels que $A\cap\{T=\infty\}\in\underline{\underline{F}}_{T-}$ est une tribu , et il suffit donc, pour établir la seconde assertion, de montrer que $A\cap\{T=\infty\}\in\underline{\underline{F}}_{T-}$ si $A\in\underline{\underline{F}}_n$ ($n\in\mathbb{N}$) ; mais cet ensemble est l'intersection des $A\cap\{m<T\}$ (m entier $\geq$ n), qui appartiennent à $\underline{\underline{F}}_{T-}$.

La dernière affirmation de l'énoncé est alors évidente.

<u>Propriété</u> 4.- <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt</u> ; <u>on a</u> $\underline{\underline{F}}_T=\bigcap_n\underline{\underline{F}}_{(T+\frac{1}{n})-}$.

Cette tribu contient $\underline{\underline{F}}_T$ d'après la propriété 3, et elle est contenue dans $\bigcap_n\underline{\underline{F}}_{(T+\frac{1}{n})}=\underline{\underline{F}}_T$.

<u>Propriété</u> 5.- <u>Soit</u> (T_n) <u>une suite croissante de temps d'arrêt,</u> <u>et soit</u> $T = \lim_n T_n$; <u>alors</u> $\underline{\underline{F}}_{T-} = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{T_n-}$.

En effet, cette tribu est contenue dans $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (propriété 2). D'autre part, si $A \in \underline{\underline{F}}_T$, $A \cap \{t<T\}$ est la réunion des $A \cap \{t<T_n\} \in \underline{\underline{F}}_{T_n-}$.

<u>Propriété</u> 6.- <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt prévisible</u>, <u>limite d'une suite croissante</u> (T_n) <u>de temps d'arrêt telle que</u> $T_n<T$ <u>p.s. sur</u> $\{0<T<\infty\}$; <u>alors</u> $\underline{\underline{F}}_{T-} = \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{T_n}$.

En effet cette tribu contient $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (propriétés 1 et 5) et elle est contenue dans $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (propriété 3).

<u>Propriété</u> 7.- <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt</u> ; <u>pour qu'une variable aléatoire</u> $\underline{\underline{F}}_{\infty}$ <u>-mesurable</u> Z <u>soit</u> $\underline{\underline{F}}_{T-}$<u>-mesurable</u>, <u>il faut et il suffit qu'il existe un processus prévisible</u> X <u>tel que</u> $X_T=Z$ <u>sur</u> $\{T<\infty\}$.

1) La tribu $\underline{\underline{P}}$ est engendrée par les processus de la forme $X_t(\omega) = Y_s(\omega)I_{\{s<t\leq u\}}$, où Y_s est $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable, ou de la forme $X_t(\omega)=Y_0(\omega)I_{\{t=0\}}$ où Y_0 est $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable (voir l'appendice 3). Montrons que si Z ($\underline{\underline{F}}_{\infty}$ -mesurable) est telle que $Z=X_T$ sur $\{T<\infty\}$, Z est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable. En effet, $Z=Y_sI_{\{s<t\}}I_{\{T<\infty\}} - Y_sI_{\{s<u\}}I_{\{T<\infty\}}$ $+ZI_{\{T=\infty\}}$; les deux premiers termes sont $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurables d'après la propriété 1, et le dernier d'après la propriété 3.

2) Il suffit de vérifier l'existence du processus X lorsque Z est l'indicatrice d'un élément de $\underline{\underline{F}}_0$, ou de $A\cap\{t<T\}$ $(t>0, A\in\underline{\underline{F}}_t)$. Mais il suffit de poser alors $X_s(\omega) = I_A(\omega)I_{\{s>t\}}$: c'est un processus adapté continu à gauche, donc prévisible, et on a $Z=X_T$.

APPENDICE 2 : TEMPS D'ARRÊT PRÉVISIBLES

Nous reprenons ici les propriétés des temps d'arrêt prévisibles citées dans la section 1, en suivant l'ordre de démonstration naturel.

110 <u>Propriété</u> 1.- <u>Si</u> S <u>et</u> T <u>sont prévisibles</u>, $S\wedge T$ <u>et</u> $S\vee T$ <u>le sont aussi</u> : c'est évident à partir de la définition.

111 <u>Propriété</u> 2.- <u>Soit</u> (S_n) <u>une suite croissante de temps d'arrêt prévisibles, et soit</u> $S=\lim_n S_n$; S <u>est alors prévisible</u>.

DÉMONSTRATION.- Il est commode de se ramener au cas où S est fini, au moyen d'une bijection monotone de $[0,\infty]$ sur $[0,1]$. Pour chaque n, soit $(S^n_k)_{k\in\underline{\underline{N}}}$ une suite de t.d'a. approchant S_n, et satisfaisant à la définition des t.d'a. prévisibles. Choisissons

k_1 assez grand pour que $\underline{P}\{S^1_{k_1} < S_1 - \frac{1}{2}\} < \frac{1}{2}$

k_2 assez grand pour que $\underline{P}\{S^2_{k_2} < S^1_{k_1}$ ou $S^2_{k_2} < S_2 - \frac{1}{4}\} < \frac{1}{4}$

$k_3 \dots$ pour que $\underline{P}\{S^3_{k_3} < S^2_{k_2}$ ou $S^3_{k_3} < S^1_{k_1}$ ou $S^3_{k_3} < S_3 - \frac{1}{8}\} < \frac{1}{8}$

etc. On a $S^i_{k_i} < S^i$ sur $\{S_i > 0\}$, donc $S^i_{k_i} < S$ sur $\{S>0\}$. Posons $T_n = \inf_{j\geqq n} S^j_{k_j}$; ces temps d'arrêt croissent et sont $<$ S sur $\{S>0\}$. On a $\underline{P}\{T_n < S^n_{k_n}\} \leqq \sum_{j>n} \underline{P}\{S^k_{k_j} < S^n_{k_n}\} \leqq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots = \frac{1}{2^n}$. Comme cette série converge, le lemme de Borel-Cantelli entraîne que p.s. $T_n = S^n_{k_n}$ pour n assez grand. Il reste donc seulement à prouver que $S^n_{k_n} \to S$ p.s. ; mais $\sum_n \underline{P}\{S^n_{k_n} < S_n - \frac{1}{2^n}\}$ converge, donc $S^n_{k_n} \geqq S_n - \frac{1}{2^n}$ p.s. pour n assez grand, d'où le résultat.

115 Propriété 3.- Soit T un temps d'arrêt ; l'ensemble des $A\in\underline{\underline{F}}_T$ tels que T_A soit prévisible est stable pour les réunions et intersections dénombrables.

En effet, il est stable pour les réunions et intersections finies (mais attention à l'intersection de la famille vide !) d'après la propriété 1. Restent à étudier les suites croissantes et décroissantes . Le cas d'une suite décroissante (A_n) résulte de la propriété 2 , car les T_{A_n} croissent. Le cas des suites croissantes est traité dans [3] : début de la démonstration de VII.45.

113 Propriété 4 .- T prévisible <=> T accessible et, pour toute suite croissante (R_n) de temps d'arrêt, on a $\{\lim_n R_n = T\} \in \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$

L'événement $\{\lim_n R_n > T\}$ appartient évidemment à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$. Quitte à remplacer R_n par $R_n \wedge T$, on peut donc supposer les R_n majorés par T. Si T est prévisible, soit (S_n) une suite croissante de temps d'arrêt, telle que $\lim_n S_n = T$ et que $S_n<T$ p.s. sur $\{T>0\}$. Alors l'événement $\{\lim_n R_n=T\}$ est la réunion des événements $\{T=0\}$ et $\{T>0, \lim_n R_n > S_m\}$, qui appartiennent à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{R_n}$. Inversement, supposons que la condition de l'énoncé soit satisfaite ; T est alors prévisible d'après la <u>démonstration</u> de VII.45.

109 <u>Propriété</u> 5.- <u>Supposons</u> T <u>prévisible. Alors</u> $A\in\underline{\underline{F}}_{T-}$ <=> $A\in\underline{\underline{F}}_T$ <u>et</u> T_A <u>est prévisible</u>.

DÉMONSTRATION.- Soit (S_n) une suite de temps d'arrêt approchant T comme plus haut. D'après la propriété 3, l'ensemble des $A\in\underline{\underline{F}}_T$ tels que T_A et T_{A^c} soient prévisibles est une tribu $\underline{\underline{G}}$. Soit $A\in\underline{\underline{F}}_{S_n}$: $(S_m)_A$ est un temps d'arrêt pour $m\geq n$, et il en résulte que T_A (et de même T_{A^c}) est prévisible ; $\underline{\underline{G}}$ contient donc $\bigcup_n \underline{\underline{F}}_{S_n}$, et donc aussi $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (appendice 1, pr. 5). Ainsi $A\in\underline{\underline{F}}_{T-}$ => T_A est prévisible. Inversement, supposons que T_A soit prévisible ; l'événement $\{\lim_n S_n = T_A\} = \{T=T_A\}$ appartient à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}_{S_n} = \underline{\underline{F}}_{T-}$ (propriété 4) . Comme on a $A = \{T=T_A\}\setminus(\{T=\infty\}\cap A^c)$, et comme le second ensemble appartient aussi à $\underline{\underline{F}}_{T-}$ (appendice 1, pr.3) on a bien $A\in\underline{\underline{F}}_{T-}$.

La propriété suivante (que nous n'avons pas explicitée dans le guide) est une extension facile de la partie de 115 relative aux suites croissantes d'événements.

<u>Propriété</u> 6.- <u>Soit</u> (T_n) <u>une suite décroissante de temps d'arrêt prévisibles, telle que, si l'on pose</u> $T= \lim_n T_n$, <u>on ait p.s.</u> $T=T_n$ <u>pour</u> n <u>assez grand</u> . <u>Alors</u> T <u>est prévisible</u>.

En effet, soit $A_n = \{T_n=T\}$; $A_n=\{T<T_n\}^c$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{Tn-}$ (app.1 , pr.3) , donc $(T_n)_{A_n} = T_{A_n}$ est prévisible (propriété 5). Comme Ω est la réunion des A_n p.s., T est prévisible (propr.3).

118 <u>Propriété</u> 7 .- <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt prévisible, et soit</u> (Y_t) <u>une martingale continue à droite uniformément intégrable ; alors</u> $Y_{T-} = \mathbb{E}[Y_\infty | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ <u>p.s.</u> . En effet, soit (S_n) une suite croissante de temps d'arrêt approchant T par valeurs strictement inférieures. On a $Y_{T-} = \lim_n Y_{S_n} = \lim_n \mathbb{E}[Y_\infty | \underline{\underline{F}}_{S_n}] = \mathbb{E}[Y_\infty | \bigvee_n \underline{\underline{F}}_{S_n}] = \mathbb{E}[Y_\infty | \underline{\underline{F}}_{T-}]$ (appendice 1, propriété 6).

APPENDICE 3 : LES TRIBUS $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{A}}$.

Générateurs de la tribu $\underline{\underline{P}}$

203 Considérons le pavage $\underline{\underline{J}}$ constitué par les ensembles de la forme $[S,T]$, où S est prévisible, et le pavage $\underline{\underline{J}}'$ constitué par les ensembles de la forme $\{0\}\times A$ ($A\in\underline{\underline{F}}_0$) ou $[s,t]\times A$ ($0<s\leq t$, $A \in \bigcup_{r<s} \underline{\underline{F}}_r$) . On a $\underline{\underline{J}}' \subset \underline{\underline{J}}$, et $\underline{\underline{J}} \subset \underline{\underline{P}}$. En effet, choisissons une suite croissante (S_n) de temps d'arrêt, telle que $\lim_n S_n = S$ et que $S_n < S$ sur $\{S>0\}$; $[S,T]$ est la réunion de $\{0\}\times\{S=0\}$ (dont l'indicatrice est continue à gauche par convention) et de $\bigcap_n]S_n,T]$ (ensembles dont l'indicatrice est un processus adapté continu à gauche). Nous allons montrer que $\underline{\underline{P}}$ est contenue dans la tribu engendrée par $\underline{\underline{J}}'$, ce qui prouvera que $\underline{\underline{J}}$ et $\underline{\underline{J}}'$engendrent $\underline{\underline{P}}$. Soit Y un processus adapté continu à gauche. Le processus Z^n défini par

$$Z^n(t,\omega)= Y_0(\omega)I_{\{0\}}(t)+ \sum_{k\in\mathbb{N}} Y_{\frac{k}{n}}(\omega)I_{]\frac{k}{n},\ \frac{k+1}{n}]}(t)$$

converge vers Y lorsque $n\to\infty$. Comme $Y_{k/n}$ est $\underline{\underline{F}}_{k/n}$-mesurable, il suffit de montrer qu'un ensemble de la forme $]s,t]\times A$ $(A\in\underline{\underline{F}}_s)$ appartient à la tribu $\underline{\underline{T}}(\underline{\underline{J}}')$; or c'est évident, car un tel ensemble est réunion des $[s+\frac{1}{n}]\times A$, qui appartiennent à $\underline{\underline{J}}'$.

203 Nous venons de voir que $\underline{\underline{P}}$ est engendrée par les intervalles $[S,T]$, où S est prévisible ; $\underline{\underline{A}}$ est engendrée, par définition, par les intervalles $[S,T]$, où S est accessible. Enfin, la tribu $\underline{\underline{BM}}$ est engendrée par les intervalles $[S,T[$, où S est un temps d'arrêt quelconque : en effet, ces intervalles stochastiques sont des ensembles bien-mesurables, et on a $]S,T] = [S,T]\setminus[S]$, de sorte que la tribu engendrée par les $[S,T]$ contient les $]S,T]$, et donc aussi la tribu $\underline{\underline{BM}}$ (VIII.14-16).

204 La relation $\underline{\underline{P}} \subset \underline{\underline{A}}$ est maintenant évidente, car tout temps d'arrêt prévisible est accessible ; si la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ n'a pas de temps de discontinuité, tout temps d'arrêt accessible est prévisible (114), donc $\underline{\underline{P}}=\underline{\underline{A}}$.

Sections des ensembles prévisibles

207 Si A est un ensemble prévisible, il existe un t.d'a. prévisible T tel que $[T] \subset A$ et que $P\{T<\infty\} > P(p(A))-\varepsilon$

DÉMONSTRATION.- Reprenons le pavage $\underline{\underline{J}}'$ considéré au début de l'appendice, et désignons par $\underline{\underline{J}}'_f$ le pavage constitué par les reunions finies d'éléments de $\underline{\underline{J}}'$. Comme $\underline{\underline{J}}'$est stable pour les intersections finies, $\underline{\underline{J}}'_f$ est stable pour les réunions et intersections finies.

Considérons la fonction d'ensemble $H \mapsto P^*(p(H))$ (probabilité extérieure de la projection) sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. La coupe de tout $H \in \underline{\underline{J}}'_f$ suivant tout $\omega \in \Omega$ étant compacte, cette fonction est une capacité relativement au pavage $\underline{\underline{J}}'_f$. Tout $H \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$, $\underline{\underline{J}}'$-analytique, contient donc un ensemble $L \in \underline{\underline{J}}'_{f\delta}$ tel que $P(p(L)) \geq P(p(H)) - \varepsilon$; soit T le début de L . La coupe de L suivant tout $\omega \in \Omega$ étant fermée, on a $[T] \subset H$, $P\{T<\infty\} = P(p(L))$. D'où le théorème si nous prouvons :

a) que T est prévisible,

b) que tout H prévisible est $\underline{\underline{J}}'$-analytique

a) L est l'intersection d'une suite décroissante (L_n) d'éléments de $\underline{\underline{J}}'_f$; en vertu de 111, on est ramené à vérifier que le début d'un élément de $\underline{\underline{J}}'_f$ est prévisible ; d'après 110, on peut se borner à un élément de $\underline{\underline{J}}'$, de la forme $[s,t] \times A$ (où $0 \leq r < s \leq t$, $A \in \underline{\underline{F}}_r$) . C'est alors évident.

b) D'après III.12, il suffit de montrer que le complémentaire d'un élément de $\underline{\underline{J}}'$ est $\underline{\underline{J}}'$-analytique. Si cet élément est de la forme $\{0\} \times A$, $A \in \underline{\underline{F}}_0$, le complémentaire est la réunion de $]0,\infty] \times \Omega$ et de $\{0\} \times A^c$, d'où aussitôt le résultat. De même, s'il est de la forme $[s,t] \times A$ $(A \in \underline{\underline{F}}_s)$, le complémentaire est réunion de $[0,s[\times \Omega$, de $]t,\infty[\times A$, de $[s,t] \times A^c$, et c'est encore trivial.

209 Pour qu'une variable aléatoire T soit un temps d'arrêt (resp. accessible, prévisible) il faut et il suffit que son graphe $[T]$ soit bien-mesurable (resp. accessible, prévisible).

DÉMONSTRATION.- Si T est un temps d'arrêt, $[T]$ est un intervalle stochastique, donc bien-mesurable. Inversement, si $[T]$ est bien-mesurable, T (début de $[T]$) est un temps d'arrêt (201 et 9).

Si T est un temps d'arrêt accessible, $[T]$ appartient à $\underline{\underline{A}}$ (c'est la définition même de $\underline{\underline{A}}$: voir 202). Inversement, si $[T]$ est accessible, T est un temps d'arrêt, et pour tout $\varepsilon>0$ il existe un temps d'arrêt S tel que $[S]\subset[T]$ (donc S est de la forme T_A, $A\in\underline{\underline{F}}_T$) et que $\underset{\sim}{P}\{S<\infty\}>\underset{\sim}{P}\{T<\infty\}-\varepsilon$ (206) ; il en résulte aussitôt que T est accessible (112).

Si T est prévisible, $[T]$ appartient à $\underline{\underline{P}}$ (voir la démonstration du n°203 au début de cet appendice) . Inversement, si $[T]$ est prévisible, T est un temps d'arrêt prévisible : même démonstration que pour $\underline{\underline{A}}$, en utilisant 207 au lieu de 206.

209 bis Soit A un élément de $\underline{\underline{A}}$ (resp. de $\underline{\underline{P}}$) fermé à droite. Le début T de A est alors un temps d'arrêt accessible (resp. prévisible)

En effet, $]T,\infty[$ est un ensemble prévisible, donc $B=A\cap]T=\infty[$ est accessible (prévisible), et donc $[T]=A\setminus B$ est accessible (prévisible).

Théorème de projection sur la tribu $\underline{\underline{P}}$

214 Soit X un processus mesurable borné ; il existe un processus prévisible $Y=p_3(X)$, unique, tel que l'on ait $Y_T I_{\{T<\infty\}} = \underset{\sim}{E}[X_T I_{\{T<\infty\}}|\underline{\underline{F}}_{T-}]$ pour chaque temps d'arrêt prévisible T (p.s.). L'ensemble $\{Y\neq p_1(X)\}$ (resp. $\{Y\neq p_2(X)\}$) est réunion d'une suite de graphes de t.d'a. (resp. de t.d'a. accessibles).

DÉMONSTRATION.- Nous ne nous occuperons ici que de p_3 et de ses rapport avec p_1, en laissant de côté ce qui touche p_2.

a) Si X est de la forme

(1) $\quad X_t(\omega)= I_{[r,s]}(t)Y(\omega)\quad$ ($r\leq s$, Y $\underline{\underline{F}}$-mesurable bornée)

et si (Y_t) est une version continue à droite de la martingale $(\underset{\sim}{E}[Y|\underline{\underline{F}}_t])$, les projections $p_1(X)$ et $p_3(X)$ sont respectivement les processus

$$I_{[r,s]}(t)Y_t(\omega) \text{ et } I_{[r,s]}(t)Y_{t-}(\omega)$$

(la projection $p_2(X)$ est plus difficile à expliciter : elle s'obtient en appliquant à $p_1(X)$ le procédé de VIII.20 : remplacement de Y_t par Y_{t-} sur les parties accessibles des sauts de (Y_t)) . Ces projections satisfont à l'énoncé.

b) Considérons l'ensemble $\underline{\underline{H}}$ des processus mesurables bornés admettant une projection p_3 qui satisfait à l'énoncé. Comme $\underline{\underline{H}}$ contient les processus de la forme (1), le théorème des classes monotones nous ramène à montrer que $\underline{\underline{H}}$ est un espace vectoriel, fermé pour la convergence uniforme, et que si (X_n) est une suite croissante uniformément bornée d'éléments de $\underline{\underline{H}}$ on a $\lim_n X_n \in \underline{\underline{H}}$. Montrons que $p_3(X_n)$ croît (à un processus indiscernable de 0 près). En effet, soit $Z = p_3(X_{n+1})-p_3(X_n)$; Z est prévisible, et on a $\underline{\underline{E}}[Z_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] \geq 0$ pour tout temps d'arrêt prévisible **fini** T ; mais Z_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable (appendice 1, propriété 7) et on a donc $Z_T \geq 0$ p.s. ; cela entraîne que Z est indiscernable d'un processus positif . Soit alors $X' = \underline{\lim}_n\, p_3(X_n)$ là où cette limite existe, 0 là où elle n'existe pas : on vérifie aussitôt que X' est une projection de $\lim_n X_n$. Raisonnements analogues pour la somme , la limite uniforme d'une suite d'éléments de $\underline{\underline{H}}$.

Il reste encore à vérifier que la relation "$\{p_1(X) \neq p_3(X)\}$ est réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt" passe à la somme, à la limite uniforme, à la limite croissante... tout cela est presque évident à partir du lemme suivant :

<u>Soit</u> A <u>la réunion d'une suite</u> $([T_n])$ <u>de graphes de temps d'arrêt, et soit</u> B <u>une partie bien-mesurable de</u> A. <u>Alors</u> B <u>est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt</u>.

En effet, l'ensemble $B \cap [T_n]$ est évidemment le graphe de son début ; comme cet ensemble est bien-mesurable, son début est un temps d'arrêt.

<u>Théorème de modification pour la tribu</u> $\underline{\underline{P}}$

<u>Soit</u> X <u>un processus bien-mesurable</u> ; <u>il existe alors un processus prévisible</u> Y <u>tel que</u> $\{X \neq Y\}$ <u>soit réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt</u>.

En effet, X est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les processus adaptés continus à droite, dont les trajectoires admettent des limites à gauche. Il existe donc un processus Z à valeurs dans $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, dont les trajectoires possèdent les propriétés ci-dessus, et une fonction borélienne f sur $\underset{\sim}{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$, tels que l'on ait $X_t = f\circ Z_t$. Le processus $(f\circ Z_{t-})$ est alors la modification cherchée.

Enfin, nous laisserons au lecteur la démonstration facile de la propriété suivante (non citée dans le Guide) :

<u>Soient</u> X <u>un processus mesurable borné</u>, Y <u>un processus borné bien-mesurable</u> (<u>resp. accessible</u>, <u>prévisible</u>). <u>On a alors</u> $p_1(XY) = Y.p_1(X)$ (<u>resp.</u> $p_2(XY)=Y.p_2(X)$, $p_3(XY)=Y.p_3(X)$).

APPENDICE 4 : PROCESSUS CROISSANTS

<u>Structure des p.c. naturels</u>

306 <u>Tout p.c. intégrable naturel</u> A <u>s'écrit</u>

$$A_t = A_t^c + \sum_n \lambda_n I_{\{t \geq T_n\}}$$

<u>où</u> (A_t^c) <u>est continu, où les</u> T_n <u>sont des temps d'arrêt prévisibles, et où les</u> λ_n <u>sont des constantes positives.</u>

DÉMONSTRATION.- La construction de VII.49 montre que tout p.c. naturel est somme de sa partie continue, et d'une série de processus croissants naturels purement discontinus, dont les trajectoires ont au plus un saut. Soit A un tel processus, soit $T = \inf \{ t : A_t > 0 \}$ (l'instant du saut) et soit $U = A_T - A_{T-}$ (la valeur du saut). Il résulte aussitôt de 304,b) et de 113 que T est prévisible. En utilisant à nouveau 304,b), on voit alors que U est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable. D'après un théorème bien connu, on peut donc écrire $U = \lim_n U_n$, où U_n est une combinaison linéaire finie d'indicatrices d'éléments de $\underline{\underline{F}}_{T-}$, et croît avec n. Posons $V_n = U_{n+1} - U_n$; V_n est positive, et c'est une combinaison linéaire finie d'indicatrices : c'est donc aussi une combinaison linéaire finie d'indicatrices d'ensembles disjoints, avec des coefficients positifs . Comme $U = \sum_n V_n$, on voit que U s'écrit $\sum_n \lambda_n I_{A_n}$ ($\lambda_n > 0$, $A_n \in \underline{\underline{F}}_{T-}$) . Posons alors $T_n = T_{A_n}$: on a $A_t = \sum \lambda_n I_{\{t \geq T_n\}}$, et le théorème en résulte.

308 <u>Soit</u> A <u>un p.c. intégrable</u> , <u>et soit</u> $\tilde{A}$ <u>le p.c. naturel associé à</u> A ; $\tilde{A}$ <u>est continu si et seulement si</u> A <u>ne charge aucun temps d'arrêt accessible</u>.

DÉMONSTRATION.- Soit A un p.c.i. qui ne charge aucun temps d'arrêt accessible ; le potentiel engendré par A est régulier, et il est donc engendré par un p.c.i. <u>continu</u> B ; B est alors naturel, donc $B=\tilde{A}$, et $\tilde{A}$ est continu.

Inversement, supposons que A charge un temps d'arrêt accessible S, et montrons que $\tilde{A}$ **ne peut être** continu . Soit (S_n) une suite croissante de temps d'arrêt majorés par S, telle que $\underset{\sim}{P}\{ \lim_n S_n = S, A_S > \lim_n A_{S_n} \} >0$ (112) . Mais alors $\underset{\sim}{E}[\tilde{A}_S - \lim\limits_n \tilde{A}_{S_n}]$ $= \underset{\sim}{E}[A_S - \lim_n A_{S_n}] > 0$, et A ne peut être continu.

310 Ce résultat est donné dans [3] seulement pour X continu à gauche, pour T=0, et sans espérances conditionnelles. Pour en déduire 310, on procède ainsi : on étend d'abord ce résultat au cas où X est prévisible, grâce au théorème des classes monotones. Puis on l'applique au processus prévisible $Z_t(\omega)=X_t(\omega)I_{]S(\omega),\infty[}(t)$ S désignant le t.d'a. T_H ($H\in\underline{\underline{F}}_T$). Il vient

$$\int_H d\underset{\sim}{P} \int_T^{\infty} X_s dA_s = \int_H d\underset{\sim}{P} \int_T^{\infty} X_s \, dB_s$$

d'où le résultat, H étant arbitraire.

311 <u>Intégration par rapport à un processus croissant</u> .- a) est un cas particulier de 309 ; b) en résulte aussitôt, car l'ensemble $\{X_2\neq X_1\}$ est réunion d'une suite de graphes de t.d'a. totalement inaccessibles (212-213), et A ne charge pas un tel ensemble. Pour c), on remarque que cette égalité a lieu lorsque X est de la forme $X_t(\omega) = X(\omega)I_{[u,v]}(t)$ (compte tenu de a), c'est la définition même des processus croissants naturels : expliciter les projections $p_1(X)$ et $p_3(X)$) . On étend cela à tout X mesurable borné au moyen du théorème des classes monotones

312 a) <u>Soit</u> A <u>un p.c.i.</u> ; A <u>est accessible si et seulement s'il ne charge aucun t.d'a. totalement inaccessible</u>.
b) A <u>est prévisible si et seulement s'il est naturel</u>.

DÉMONSTRATION.- Supposons A accessible . Le processus (A_{t-}) étant continu à gauche, donc prévisible, l'ensemble $\{A_t - A_{t-} > \frac{1}{n}\}$ est accessible ; notons le B_n . Il est clair que B_n est réunion d'une suite de temps d'arrêt $T_1, T_2 \ldots$ tels que $T_i < T_{i+1}$ sur $\{T_i < \infty\}$. Il en résulte que $[T_1] = B_n \setminus]T_1, \infty[$ est accessible, donc T_1 est accessible (209) ; $B_n \setminus [T_1]$ est alors accessible, donc T_2 est accessible, etc. Il en résulte que T ne charge aucun t.d'a. totalement inaccessible.

Supposons que A ne charge aucun t.d'a. totalement inaccessible. Décomposons la partie purement discontinue de A en une combinaison linéaire à coefficients positifs de processus de la forme $(I_{\{t \geqq T\}})$, à la façon de la démonstration de 306 ; on a alors $\underset{\sim}{P}\{T = I < \infty\} = 0$ pour tout t.d'a. totalement inaccessible I ; T est alors accessible (104), et le processus croissant $(I_{\{t \geqq T\}})$ est donc accessible, d'où le résultat par combinaison linéaire.

Supposons A naturel . D'après 306, A est somme d'un processus continu et d'une combinaison linéaire à coefficients positifs de processus de la forme $(I_{\{t \geqq T\}})$, où T est prévisible. Un processus croissant de cette forme est prévisible, ainsi qu'un p.c. continu, et A est donc prévisible.

Supposons A prévisible, et montrons que A est naturel. Posons comme au début de la démonstration $B_n = \{(t,\omega) : A_t(\omega) - A_{t-}(\omega) > \frac{1}{n}\}$; B_n est cette fois prévisible, et on voit comme plus haut que B_n est la réunion d'une suite de graphes de temps d'arrêt T_i, mais cette fois-ci les T_i sont prévisibles. Soit $c_i = A_{T_i} - A_{T_i -}$; c_i est $\underline{\underline{F}}_{T_i -}$-mesurable (appendice 1, propriété 7) , donc le processus croissant $(c_i I_{\{t \geqq T_i\}})$ est naturel. Par conséquent, quel que soit n, la somme $(\sum_{s \leqq t} (A_s - A_{s-}) I_{\{A_s - A_{s-} > 1/n\}})$ est un processus croissant naturel . En faisant tendre n vers $+\infty$, on voit que la partie discontinue de A est naturelle, d'où le résultat.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

UNE MAJORATION DU PROCESSUS CROISSANT NATUREL ASSOCIÉ À UNE SURMARTINGALE

(P.A.Meyer)

Tous les processus considérés ci-dessous sont continus à droite, et adaptés à une famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$, croissante et continue à droite. L'espace probabilisé sous-jacent est supposé complet, et la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ contient tous les ensembles négligeables.

Si $H=(H_t)$ est un processus, nous désignerons par $H^{\times}$ la variable aléatoire $\sup_t |H_t|$. Notre objet principal est la démonstration du théorème suivant :

THÉORÈME 1.- <u>Soit</u> $X=(X_t)$ <u>un potentiel de la classe</u> (D), <u>et soit</u> $A=(A_t)$ <u>le processus croissant intégrable qui engendre</u> X. <u>Si</u> p <u>est un nombre</u> >1 (<u>fini</u>) , <u>il existe deux constantes</u> C <u>et</u> C' <u>telles que l'on ait</u>

$$0<C,C'<\infty \qquad CN_p(X^{\times}) \leqq N_p(A_{\infty}) \leqq C'N_p(X^{\times})$$

N_p <u>désignant la norme dans</u> L^p.

Nous déduirons ensuite du théorème 1 une partie d'un résultat récent de BURKHOLDER sur les martingales.

Voici encore quelques notations : k sera l'unique entier tel que $k<p\leqq k+1$ (on a donc $k\geqq 1$) ; C sera une constante positive, dont la valeur pourra varier d'une formule à l'autre. Enfin, la notation $\underset{\sim}{E}[\cdot|\underline{\underline{F}}_t]$ pour l'opérateur d'espérance conditionnelle sera abrégée en $\underset{\sim}{E}_t[\cdot]$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

1. La première des deux inégalités du théorème 1 est bien connue. En effet, on a $X^{\times} \leqq \sup_t X_t+A_t$, et $N_p[\sup_t(X_t+A_t)] \leqq qN_p(A_{\infty})$, q désignant l'exposant conjugué de p , en vertu d'une célèbre inégalité due à DOOB. Ainsi, il suffira de prouver la seconde inégalité.

Il suffira pour cela de traiter le cas où le processus A est continu et borné. En effet, supposons le théorème établi dans ces conditions. Soit A un processus croissant continu, mais non nécessairement borné, soit A^n le processus croissant $A\wedge n$, et soit X^n le potentiel engendré par A^n ; on a $N_p(A_{\infty}\wedge n) \leqq C'N_p((X^n)^{\times}) \leqq C'N_p(X^{\times})$, d'où le résultat en faisant tendre n vers $+\infty$.

Ensuite, désignons par A un processus croissant intégrable naturel, par X le potentiel qu'il engendre, par A^n le " laplacien approché" de

X d'ordre $\frac{1}{n}$ ([2], chap.VII, th.28), par X^n le potentiel engendré par A^n ; comme A^n est continu, on a $N_p(A^n_\infty) \leq C'N_p((X^n)^\times) \leq C'N_p(X^\times)$. Si ce dernier nombre est $+\infty$, il n'y a rien à démontrer ; sinon, les variables aléatoires A^n_∞ forment un ensemble borné (donc faiblement compact) dans L^p ; comme elles convergent vers A_∞ faiblement dans L^1, elles convergent alors vers A_∞ faiblement dans L^p , et on a $N_p(A_\infty) \leq \liminf_n N_p(A^n_\infty)$, d'où le résultat.

Nous supposerons donc, dans toute la suite, que A est borné et continu

2. Posons, j désignant un nombre ≥ 1

$$X^{(j)}_t = \underset{\sim}{E}_t[(A_\infty - A_t)^j]$$

On a si s<t $\underset{\sim}{E}_s[X^{(j)}_s] = \underset{\sim}{E}_s[(A_\infty - A_t)^j] \leq \underset{\sim}{E}_s[(A_\infty - A_s)^j] = X^{(j)}_s$. Ce processus est donc une surmartingale (bornée), et on vérifie aussitôt que $\underset{\sim}{E}[X^{(j)}_\cdot]$ est une fonction continue à droite ; il existe donc une version continue à droite de cette surmartingale - c'est celle-ci que nous désignerons dans la suite par la notation $(X^{(j)}_t)$. Il s'agit évidemment d'un potentiel de la classe (D) (borné). Le processus croissant naturel qui engendre $(X^{(j)}_t)$ sera noté $(A^{(j)}_t)$. Nous écrirons $X^\times_{(j)}$ au lieu de $(X^{(j)})^\times$.

LEMME 1.- On a $dA^{(j)}_s = jX^{(j-1)}_s\, dA_s$, et donc $A^{(j)}_\infty \leq X^\times_{(j-1)}A_\infty$.

Soit d'abord T un temps d'arrêt étagé, et soit $B \in \underline{\underline{F}}_T$. On a

$$\int_B X^{(j)}_T d\underset{\sim}{P} = \sum_t \int_{B\cap\{T=t\}} X^{(j)}_t d\underset{\sim}{P} = \sum_t \int_{B\cap\{T=t\}} (A_\infty - A_t)^j d\underset{\sim}{P} = \int_B (A_\infty - A_T)^j d\underset{\sim}{P}$$

On étend aussitôt cette relation à un temps d'arrêt T quelconque, au moyen d'une approximation par des temps d'arrêt étagés. Les processus $(X^{(j)}_t)$ et $((A_\infty - A_t)^j)$ satisfont donc aux hypothèses du th. 15, chap.VII de [2]. Par conséquent , en remplaçant j par j-1

$$\underset{\sim}{E}_t[\int_t^\infty jX^{(j-1)}_s dA_s] = \underset{\sim}{E}_t[\int_t^\infty j(A_\infty - A_s)^{j-1}dA_s] = \underset{\sim}{E}_t[(A_\infty - A_t)^j] = X^{(j)}_t$$

(on a utilisé la continuité de A). D'où le résultat.

LEMME 2.- On a $N_{\frac{p}{k}}[X^\times_{(k)}] \leq C[N_p(A_\infty)]^{k-1}N_p(X^\times)$.

Il suffit évidemment de démontrer la formule suivante, pour j<p

$$N_{\frac{p}{j}}[X^\times_{(j)}] \leq CN_p(A_\infty)N_{\frac{p}{j-1}}(X^\times_{(j-1)})$$

Utilisons successivement l'inégalité de DOOB rappelée plus haut, le lemme 1, l'inégalité de HÖLDER pour les exposants conjugués j et j/(j-1). Il vient

$$N_{\frac{p}{j}}(X^{\times}_{(j)}) \leq CN_{\frac{p}{j}}(A^{(j)}_{\infty}) \leq CN_{\frac{p}{j}}(X^{\times}_{(j-1)}A_{\infty}) = C\{\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(j-1)})^{\frac{p}{j}} \cdot A_{\infty}^{\frac{p}{j}}]\}^{\frac{j}{p}}$$

$$\leq C\{ N_j(A_{\infty}^{\frac{p}{j}})N_{\frac{j}{j-1}}[(X^{\times}_{(j-1)})^{\frac{p}{j}}]\}^{\frac{j}{p}}$$

$$= C\{(\underset{\sim}{E}[A^p_{\infty}])^{\frac{1}{j}} \cdot (\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(j-1)})^{\frac{p}{j-1}}])^{\frac{j-1}{j}}\}^{\frac{j}{p}}$$

$$= CN_p(A_{\infty})N_{\frac{p}{j-1}}(X^{\times}_{(j-1)}) \;. \qquad \text{CQFD}$$

3. Passons à la démonstration du théorème proprement dit . Calculons $(N_p(A_{\infty}))^p$; cela vaut

$$\underset{\sim}{E}[A^p_{\infty}] = \underset{\sim}{E}[-\int_0^{\infty} d((A_{\infty}-A_t)^p)] = \underset{\sim}{E}[p\int_0^{\infty}(A_{\infty}-A_t)^{p-1}dA_t]$$

$$= \underset{\sim}{E}[p\int_0^{\infty} X_t^{(p-1)}dA_t] \leq \underset{\sim}{E}[p\int_0^{\infty}(X_t^{(k)})^{\frac{p-1}{k}}\, dA_t]$$

En effet, posons $V=(A_{\infty}-A_t)^k$, $\eta = (p-1)/k$; comme on a $0<\eta<1$, la fonction $x \mapsto x^{\eta}$ est concave, et on a

$$X_t^{(p-1)} = \underset{\sim}{E}_t[V^{\eta}] \leq (\underset{\sim}{E}_t[V])^{\eta} = (X_t^{(k)})^{\eta} \;.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de HÖLDER, puis le lemme 2

$$(N_p(A_{\infty}))^p \leq C\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(k)})^{\frac{p-1}{k}} \cdot A_{\infty}] \leq CN_p(A_{\infty})N_{\frac{p}{p-1}}[(X^{\times}_{(k)})^{\frac{p-1}{k}}]$$

$$= CN_p(A_{\infty})\{\underset{\sim}{E}[(X^{\times}_{(k)})^{\frac{p}{k}}]\}^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= CN_p(A_{\infty})\{N_{\frac{p}{k}}(X^{\times}_{(k)})\}^{\frac{p-1}{k}} \leq CN_p(A_{\infty})\,\{N_p(X^{\times})\}^{\frac{p-1}{k}}\{N_p(A_{\infty})\}^{\frac{(k-1)(p-1)}{k}}$$

ou enfin

$$[N_p(A_{\infty})]^{\frac{p-1}{k}} \leq C[N_p(X^{\times})]^{\frac{p-1}{k}}$$

d'où le théorème suit aussitôt.

APPLICATIONS À LA THÉORIE DES MARTINGALES

4. Soit (X_n) une surmartingale positive à temps discret ; en la considérant comme restriction d'une surmartingale continue, constante sur chaque intervalle $[n,n+1[$, et en appliquant le résultat précédent à la partie potentiel de celle-ci, on obtient la majoration suivante :

<u>Soit</u> S <u>la variable aléatoire positive</u>

$$(X_0-\underset{\sim}{E}[X_1|\underline{\underline{F}}_0]) + (X_1-\underset{\sim}{E}[X_2|\underline{\underline{F}}_1])+\dots+(X_i-\underset{\sim}{E}[X_{i+1}|\underline{\underline{F}}_i])+\dots$$

<u>Il existe une constante</u> C_p <u>telle que l'on ait</u> $N_p(S) \leqq C_pN_p(X^{\times})$.

En particulier, considérons des variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ qui forment une surmartingale positive à temps fini ; nous pouvons alors appliquer le résultat précédent à la surmartingale obtenue en posant $X_i=0$ pour $i>n$. La variable aléatoire S est alors égale à

$$X_0 +(X_1-\underset{\sim}{E}[X_1|\underline{\underline{F}}_0]) +\dots+(X_n-\underset{\sim}{E}[X_n|\underline{\underline{F}}_{n-1}])$$

5. Considérons maintenant une martingale continue à droite, à temps continu, (M_t), et supposons que l'on ait $M_t \in L^2$ pour tout t. Soit une subdivision $0<t_1<t_2\dots<t_n=t$, et considérons la surmartingale positive discrète (à temps fini) $X_0,\dots,X_n$ définie de la manière suivante (par rapport à la famille de tribus $\underline{\underline{F}}_0,\underline{\underline{F}}_{t_1},\dots,\underline{\underline{F}}_{t_n}$)

$$X_0 = \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_0]$$
$$X_1 = \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_1}] - M_{t_1}^2 + (M_{t_1}-M_0)^2$$
$$X_2 = \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_2}] -M_{t_2}^2 + (M_{t_2}-M_{t_1})^2$$
$$\dots\dots$$
$$X_n = \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_n}] -M_{t_n}^2 + (M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2 = (M_t-M_{t_{n-1}})^2$$

La positivité résulte de l'inégalité $\underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_{t_i}]-(\underset{\sim}{E}[M_t|\underline{\underline{F}}_{t_i}])^2 \geqq 0$ (convexité de $x \mapsto x^2$), et le fait que X est une surmartingale résulte de la relation

$$X_i-E[X_{i+1}|\underline{\underline{F}}_i] = (M_{t_i}-M_{t_{i-1}})^2 \text{ pour } 0<i\leqq n \quad (M_0^2 \text{ pour } i=0).$$

Cela donne la valeur de S : $M_0^2 + (M_{t_1}-M_0)^2+\dots+(M_t-M_{t_{n-1}})^2$. D'autre part, on a $X^{\times} \leqq \sup_s \underset{\sim}{E}[M_t^2|\underline{\underline{F}}_s] + 4 \sup_s M_s^2$. En utilisant l'inégalité de DOOB rappelée au début, on trouve que $N_p(X^{\times}) \leqq CN_{2p}(M_t)$, et finalement on a trouvé le résultat suivant :

THÉORÈME 2.- <u>Soit</u> $1<p<\infty$, <u>et soit</u> (M_s) <u>une martingale continue à droite</u>. <u>On a pour toute subdivision</u> $0<t_1\ldots<t_n=t$ <u>l'inégalité</u>

$$N_p[M_0^2 + (M_{t_1}-M_0)^2+\ldots+(M_{t_n}-M_{t_{n-1}})^2] \leqq CN_{2p}(M_t)$$ (2)

<u>où</u> C <u>ne dépend que de</u> p.

En particulier, faisons tendre le pas des subdivisions vers 0 ; la somme au premier membre converge dans L^1 vers $[M,M]_t$ (voir [3]). Le théorème 2 tel qu'il est énoncé équivaut au résultat de BURKHOLDER dont il a été question plus haut, et la relation

$$N_p([M,M]_t) \leqq CN_{2p}(M_t)$$

qui s'en déduit par passage à la limite (grâce au lemme de FATOU) est un résultat dû à P.W.MILLAR , communiqué dans une correspondance privée, et que nous déduisons ainsi du théorème 1.(2)

BIBLIOGRAPHIE

[1] D.L. BURKHOLDER . Martingale transforms. Ann.Math.Stat. 37, 1966, 1494-1505

[2] P.A.MEYER . Probabilités et Potentiels , 1966.

[3] P.A. MEYER . Intégrales stochastiques I, Séminaire de Probabilités de l'Université de Strasbourg, 1967.

(2) Les résultats de BURKHOLDER et de MILLAR valent aussi pour p compris entre $\frac{1}{2}$ (exclu) et 1, et c'est là évidemment le cas le plus intéressant, puisqu'il concerne des martingales qui ne sont pas de carré intégrable. Bien que le théorème 1 soit trivial pour ces valeurs de p, on ne peut plus en déduire le théorème 2.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1966/67

LES RÉSOLVANTES FORTEMENT FELLÉRIENNES D'APRÈS MOKOBODZKI

INTRODUCTION.- MOKOBODZKI a remarqué récemment qu'un théorème de GROTHENDIECK* suivant lequel <u>le produit de deux opérateurs faiblement compacts d'un espace $\underline{\underline{C}}(K)$ est fortement compact</u>, entraîne que le produit de deux noyaux fortement fellériens est " fortement fellérien au sens strict" . On en déduit que les noyaux d'une résolvante ou d'un semi-groupe fortement fellérien sont fortement fellériens au sens strict, ce qui permet de simplifier beaucoup de démonstrations. MOKOBODZKI en déduit d'autre part d'importantes conséquences pour les noyaux " mesures harmoniques" en théorie du potentiel.

Nous allons donner ici une démonstration de ces propriétés, indépendante du théorème de GROTHENDIECK cité plus haut - et moins générale à certains égards, car nous allons utiliser la <u>positivité</u> des noyaux. Nous commencerons par traiter le cas métrisable, qui est de beaucoup le plus intéressant en pratique, et nous nous bornerons à quelques indications sur le cas non métrisable.

NOTATIONS.- Si E est un espace séparé, nous noterons $\underline{\underline{C}}(E)$ l'espace des fonctions réelles continues <u>bornées</u> sur E, $\underline{\underline{B}}(E)$ l'espace des fonctions réelles boréliennes bornées sur E ; ces deux espaces seront munis de la norme de la convergence uniforme. Nous noterons $\underline{\underline{M}}(E)$ l'espace des mesures (abstraites !) bornées, sur E muni de sa tribu borélienne.

Soient E et F deux espaces séparés, V un noyau sousmarkovien de E dans F (le mot noyau est pris au sens abstrait). On sait qu'il est intéressant de définir diverses "propriétés de FELLER" pour V :

<u>Propriété F_1</u>.- L'application $x \mapsto \varepsilon_x V$ de E dans $\underline{\underline{M}}(F)$ est continue pour la topologie étroite sur $\underline{\underline{M}}(V)$. Autrement dit, $f \in \underline{\underline{C}}(F) \Rightarrow Vf \in \underline{\underline{C}}(E)$.

<u>Propriété</u> F_2.- L'application $x \mapsto \varepsilon_x V$ est continue pour la topologie faible $\sigma(\underline{\underline{M}}(F),\underline{\underline{B}}(F))$. Autrement dit, $f \in \underline{\underline{B}}(F) \Rightarrow Vf \in \underline{\underline{C}}(E)$.

<u>Propriété</u> F_3.- $x \mapsto \varepsilon_x V$ est continue pour la <u>norme</u> des mesures.

---

* GROTHENDIECK : sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $\underline{\underline{C}}(K)$. Canadian J.Math. 5, 1953. Voir surtout DUNFORD-SCHWARTZ , Linear Operators I, p.493-494.

Ces trois propriétés s'énoncent habituellement : V est fellérien, V est fortement fellérien, V est fortement fellérien au sens strict. Cette terminologie est lourde, et nous dirons simplement $V\epsilon F_i$, i=1,2,3.

Voici le théorème de MOKOBODZKI

THÉORÈME 1.- Soient E,F,G trois espaces métriques séparables , V un noyau sousmarkovien de E dans F, W un noyau sousmarkovien de F dans G. Supposons que l'on ait $V\epsilon F_2$, $W\epsilon F_2$; alors on a $VW\epsilon F_3$.

La démonstration résulte de deux lemmes, intéressants par eux mêmes :

LEMME 1.- Soit (g_n) une suite d'éléments de la boule unité B_1 de $\underline{\underline{B}}(G)$. Il existe une suite (g_n') extraite de (g_n), et une fonction $g\epsilon B_1$, telles que Wg_n' converge simplement vers Wg.

DÉMONSTRATION.- Soit (y_m) une suite dense dans F , et soit $\lambda=\sum_m 2^{-m}\varepsilon_{y_m}W$. Toutes les mesures $\varepsilon_y W$ $(y\epsilon F)$ sont absolument continues par rapport à la mesure positive bornée λ : en effet, soit f une fonction positive bornée λ-négligeable ; la fonction continue Wf est nulle aux points y_n, et donc partout. Extrayons alors de la suite (g_n) une suite (g_n') , telle que les g_n' convergent vers une fonction borélienne $g\epsilon B_1$ pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(\lambda),L^1(\lambda))$, ce qui est possible du fait que $L^\infty(\lambda)$ est le dual de l'espace de Banach séparable $L^1(\lambda)$. Les mesures $\varepsilon_y W$ admettant des densités par rapport à λ, qui appartiennent à $L^1(\lambda)$; on a $<\varepsilon_y W,g> = \lim_n <\varepsilon_y W,g_n'>$, et le lemme est établi.

LEMME 2.- Soit (f_n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{B}}(F)$ qui converge simplement, en restant bornée, vers une fonction $f\epsilon B(F)$. Alors Vf_n converge uniformément vers Vf sur tout compact de E.

DÉMONSTRATION.- Il suffit de traiter le cas où f=0. Posons $h_n = \sup_{m\geq n} |f_m|$; comme $|Vf_n| \leqq Vh_n$, il suffit de montrer que $Vh_n \to 0$ uniformément. Mais $h_n\to 0$ en décroissant, donc $Vh_n \to 0$ en décroissant ; comme $Vh_n\epsilon\underline{\underline{C}}(E)$ d'après F_2, le lemme de DINI donne le résultat cherché.

Prouvons le théorème 1. Désignons par B_1 la boule unité de $\underline{\underline{B}}(G)$, par U le noyau VW , par K un compact de E, et par C_1 l'ensemble des restrictions à K des fonctions Uf $(f\epsilon B_1)$; C_1 est une partie de la boule unité de $\underline{\underline{C}}(K)$, et les lemmes 1 et 2 combinés montrent que de toute suite

(h_n) d'éléments de C_1, on peut extraire une suite qui converge uniformément sur K vers un élément de C_1. Par conséquent, d'après le théorème d'ASCOLI , C_1 est une partie équicontinue de $\underline{\underline{C}}(K)$. Autrement dit, d désignant la distance sur E

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta>0\ :\ x\in K,\ y\in K,\ d(x,y)\leqq\eta \Longrightarrow \sup_{f\in B_1} |Uf^x-Uf^y| \leqq \varepsilon$$

Ceci équivaut à $\|\varepsilon_x U - \varepsilon_y U\| \leqq \varepsilon$. Pour obtenir l'énoncé, il suffit maintenant de choisir pour K l'ensemble des points d'une suite convergente.

Voici une application du théorème 1 (il est sans doute inutile de détailler l'énoncé analogue, relatif à un semi-groupe sousmarkovien).

THÉORÈME 2.- Soit (V_p) une résolvante sousmarkovienne sur un espace métrique séparable E ; si les noyaux V_p possèdent la propriété F_2, ils possèdent aussi la propriété F_3.

DÉMONSTRATION.- Soient p>0, q>p ; nous avons $V_p = (q-p)V_qV_p + V_q$. L'application $x\mapsto \varepsilon_xV_qV_p$ est continue pour la topologie de la norme des mesures, d'après le th.1 et la définition de la propriété F_3 ; l'application $x\mapsto \varepsilon_xV_q$ converge uniformément vers 0 sur E lorsque $q\to\infty$, car $\|\varepsilon_xV_q\| \leqq 1/q$; d'où aussitôt l'énoncé.

LE CAS NON MÉTRISABLE

Nous recommandons vivement d'omettre ce qui suit. **Nous allons** traiter le cas où E,F,G sont trois compacts non nécessairement métrisables.

Montrons que le lemme 1 reste vrai dans ces conditions . A tout ensemble borélien A de G, associons la fonction $W(I_A)\in\underline{\underline{C}}(F)$; pour toute mesure bornée μ sur F (i.e. tout élément du dual de $\underline{\underline{C}}(F)$), l'application $A\mapsto \langle\mu,W(I_A)\rangle$ est une mesure réelle sur F . L'application $A\mapsto W(I_A)$ est donc une mesure vectorielle à valeurs dans $\underline{\underline{C}}(F)$, au sens de DUNFORD-SCHWARTZ , loc.cit. p. 318, et les théorèmes classiques sur les mesures vectorielles (D-S , lemme 5, p.321) entraînent l'existence d'une mesure positive bornée λ sur G, telle que $\lambda(A)=0 \Longrightarrow W(I_A)=0$ - autrement dit, que toutes les mesures ε_yW soient absolument continues par rapport à λ.

Soit (g_n) une suite d'éléments de B_1 , et soit $\underline{\underline{T}}$ la tribu engendrée par les fonctions g_n : $\underline{\underline{T}}$ est une tribu séparable, et l'espace $L^1(\underline{\underline{T}},\lambda)$ est donc séparable. Extrayons donc de la suite (g_n) une suite (g'_n) qui converge faiblement vers une fonction $\underline{\underline{T}}$-mesurable g, pour la topologie faible $\sigma(L^\infty(\underline{\underline{T}},\lambda), L^1(\underline{\underline{T}},\lambda))$; mais les mesures $\varepsilon_y W$ ont des densités par rapport à λ <u>sur la tribu</u> $\underline{\underline{T}}$, et il en résulte comme plus haut que Wg'_n converge vers Wg' simplement.

Il n'y a rien à modifier au lemme 1, et presque rien à changer à la démonstration du théorème - seulement le remplacement d'une <u>distance</u> d par un <u>écart</u> d compatible avec la topologie de E.

Compactifications associées à une résolvante (P.A.Meyer)

Les résultats présentés ci-dessous sont une mise en forme " axiomatique" de théorèmes relatifs à la compactification de MARTIN (telle qu'elle est traitée dans l'article [4] de KUNITA-WATANABE). Nous ne donnons aucun procédé de compactification nouveau , mais nous montrons que beaucoup de propriétés qui étaient bien connues dans des cas particuliers (RAY, KNIGHT, KUNITA-WATANABE...) sont vraies en fait pour toutes les compactifications raisonnables. Nous terminons par une application aux chaînes de Markov à temps continu, qui n'apporte aucun théorème nouveau, mais qui donne une interprétation simple de la topologie fine de CHUNG, et de la version " semi-continue inférieurement " d'une chaîne*.

§ 1. Compactifications générales

HYPOTHÈSES ET NOTATIONS.- E est un espace localement compact à base dénombrable.

(U_p) est une résolvante sousmarkovienne sur E. Le noyau $U_0=U$ applique $\underline{\underline{C}}_c(E)$ [fonctions continues à support compact] dans $\underline{\underline{C}}_b(E)$ [fonctions continues bornées](1).

E est un sous-ensemble borélien d'un espace compact métrisable F, dense dans F . Nous n'exigeons pas que la topologie induite par F sur E soit la topologie précédente (que nous appellerons topologie " initiale" de E), mais seulement qu'elle soit moins fine , i.e. que l'injection i de E dans F soit continue. La notation $\underline{\underline{C}}_c(E)$ se rapportera toujours à la topologie initiale de E. S'il est nécessaire, nous dirons qu'une fonction f définie dans E est continue/E, sci/E (resp. continue/F, sci/F) pour marquer qu'elle est continue ou semi-continue

---

(1) Cette hypothèse peut être remplacée par des hypothèses analogues sur les U_p, p>0. Nous verrons cela plus loin.

* **Au sujet de ces résultats, voir la dernière page de l'exposé.**

inférieurement pour la topologie initiale de E (resp, la topologie sur E induite par F)[2].

Voici maintenant les deux hypothèses cruciales :

(H) a) Si $f\in \underline{\underline{C}}_c(E)$, la fonction Uf sur E se prolonge en une fonction continue sur F (de manière unique puisque E est dense).

b) Soit $\underline{\underline{S}}$ le cône des fonctions continues g sur F, telles que $g|E$ (la restriction de g à E) soit surmédiane ; alors $\underline{\underline{S}}$ sépare les points de F.

Comme $\underline{\underline{S}}$ contient les constantes positives , est stable pour l'opération inf et sépare F, $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$ est dense dans $\underline{\underline{C}}(F)$.

L'injection i de E dans F étant continue, la trace sur E d'un ensemble borélien B de F (égale à $i^{-1}(B)$) est un ensemble borélien/E. Inversement, tout compact de E étant compact/F, et la tribu borélienne de E étant engendrée par les compacts, on vérifie aussitôt que tout borélien/E est borélien/F . Il n'y a donc pas lieu de distinguer entre les deux structures boréliennes sur E, et nous parlerons simplement de parties boréliennes de E sans autre spécification.

CONSTRUCTION D'UN NOYAU POTENTIEL SUR F

Soient $x\in F$, et $f\in \underline{\underline{C}}_c(E)$; la fonction Uf admet un prolongement par continuité (unique) à F, que l'on notera encore Uf. L'application $f \mapsto Uf^x$ est alors une mesure sur E, que l'on notera U(x,dy). La tribu borélienne/E et la tribu borélienne/F étant identiques, nous pouvons considérer aussi U(x,dy) comme une mesure (non bornée) sur F, portée par E ; U apparaît alors, soit comme un noyau de E dans F, soit comme un noyau

---

[2] Un exemple typique de cette situation est donné par le cas des chaînes : E est alors un espace dénombrable discret , F est le complété de E pour une structure uniforme liée à la résolvante, et n'induit plus sur E la topologie discrète.

sur F. Remarquons que ce noyau est propre sur F ([2], chap.IX, n°1) : en effet, soit (K_n) une suite de compacts dont la réunion et E ; F est réunion des K_n et de $F\setminus E$, et chacune des fonctions $U(I_{K_n})$, $U(I_{F\setminus E})$ est bornée (la dernière est nulle).

PROPOSITION 1.- Le noyau U sur F satisfait au principe complet du maximum .

DÉMONSTRATION.- Les mesures $U(x,dy)$ étant portées par E, tout revient à montrer que si f et g sont des fonctions universellement mesurables positives sur E , si a est une constante $\geqq 0$, et si l'on a

$$a + Uf \geqq Ug \quad \text{sur } \{g>0\} \quad ,$$

alors la même inégalité est vraie partout sur F . Il suffit pour cela de montrer que si h (définie dans E) est sci/E et majore f, si j (définie dans E) est scs/E, à support compact J contenu dans $\{g>0\}$, et telle que $0\leqq j\leqq g$, et si enfin ε est une constante >0, on a

$$a + \varepsilon + Uh \geqq Uj \quad \text{partout sur } F .$$

Mais on a $a+\varepsilon+Uh > Uj$ en tout point de J ; soient A_h l'ensemble des fonctions $s\in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$ majorées par h, et A'_h l'ensemble des fonctions $a+\varepsilon+Us$ pour $s\in A_h$. A'_h est un ensemble filtrant croissant de fonctions continues/F dont l'enveloppe supérieure est $a+\varepsilon+Uh$. Le lemme de Dini entraîne alors l'existence d'une fonction $s\in A_h$ telle que $a+\varepsilon+Us > Uj$ sur J. Cette inégalité vaut alors sur un voisinage compact L de J dans E, et le lemme de Dini montre à nouveau qu'il existe une fonction $t\in\underline{\underline{C}}_c^+(E)$ à support dans L, majorant j et telle que $a+\varepsilon+Us>Ut$ sur L. Mais alors cette inégalité a lieu sur tout E, car U satisfait au principe complet du maximum sur E ([2], chap.IX, T.69); elle se prolonge alors à F par continuité, puisque Us et Ut sont continues sur F. On a à plus forte raison $a+\varepsilon+Uh \geqq Uj$ sur F, et la proposition est établie.

CONSTRUCTION D'UNE RÉSOLVANTE SUR F

Soit $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$; $U_p f$ est définie dans E, de sorte que $UU_p f$ est définie dans F, et nous pouvons poser

$$U_p f = Uf - pUU_p f \text{ (3)}$$

Supposons que la fonction $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$ soit $\leqq 0$. Alors la fonction $U_p f$ est $\leqq 0$ sur E . Mais cette fonction est égale sur E à $U(f-pU_p f)$, et on a par conséquent

$$U((f-pU_p f)^-) \geqq U((f-pU_p f)^+) \quad \text{sur } \{(f-pU_p f)^+ > 0\} \cap E$$

Cette relation vaut alors sur F (prop.1). Mais $(f-pU_p f)^-|E$ est bornée à support compact dans E , car $f-pU_p f$ est positive dans E hors du support de f. Par conséquent , $U((f-pU_p f)^-)$ est une fonction finie dans F et nous pouvons écrire cette inégalité

$$0 \geqq U(f-pU_p f)$$

ou $U_p f \leqq 0$. L'application $f \mapsto U_p f^x$ est donc une mesure positive sur E pour tout $x \in F$. Comme plus haut, nous considérerons aussi cette mesure $U_p(x,dy)$ comme une mesure sur F portée par E, et U_p comme un noyau sur F (ou un noyau de E dans F). La relation $(I+pU)U_p = U$ est alors une identité entre noyaux sur F.

PROPOSITION 2.- <u>Les noyaux</u> U_p <u>forment une résolvante sousmarkovienne sur</u> F (<u>noter que l'on n'a pas nécessairement</u> $U = \lim_{p \to 0} U_p$ <u>sur</u> F).

DÉMONSTRATION.- Montrons d'abord que le noyau pU_p est sous-markovien sur F. Cela revient à montrer que si $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$ est comprise entre 0 et 1 , on a $pU_p f \leqq 1$. Mais on a

$$1 \geqq pU_p f = U[p(f-pU_p f)]$$

sur l'ensemble des points de E où le crochet est >0 , et donc

---

(3) On ne sait pas encore que cette fonction est <u>finie</u> ; de là les précautions plus loin.

partout sur F d'après la prop.1.

Montrons ensuite que les noyaux U_p forment une résolvante sur F . Nous allons vérifier que si l'on prend $p>0, q>0$, $f \in \underline{\underline{C}}_c(E)$, les fonctions $UU_p f$, $UU_q f$, $UU_p U_q f$ sont finies et que

$$(I+pU)[U_p+(p-q)U_p U_q]f = (I+pU)U_q f$$

Cela entraînera le résultat cherché d'après [2], X.T7, car U satisfait au principe complet du maximum sur F. Preuve : dans la relation $U_p g+pUU_p g = Ug$ remplaçons g par $U_q f$, il vient

$$U_p U_q f + pUU_p U_q f = UU_q f \leqq \frac{1}{q} f < +\infty \text{ partout .}$$

Les trois fonctions envisagées sont donc bien finies, et on a

$$(I+pU)U_p f = Uf$$
$$(I+pU)[(p-q)U_p U_q f] = (p-q)UU_q f$$

d'où par addition $(I+pU)[U_p f+(p-q)U_p U_q f] = Uf+(p-q)UU_q f =$ $(U_q f+qUU_q f)+(p-q)UU_q f = (I+pU)U_q f$. cqfd

PROPOSITION 3.- <u>Soit</u> g <u>une fonction borélienne positive sur</u> F, <u>telle que</u> $g|E$ <u>soit surmédiane et sci</u>/E, <u>et que l'on ait pour tout</u> $x \in F \setminus E$

$$g(x) \geqq \liminf_{\substack{y \to x \\ y \in E}} g(y)$$

<u>Alors</u> g <u>est surmédiane par rapport à la résolvante</u> (U_p) <u>sur</u> F.

DÉMONSTRATION.- Nous allons prouver que si f et f' sont universellement mesurables positives sur E, et si l'on a $g+Uf \geqq Uf'$ sur $\{f'>0\}$, alors la même inégalité est vraie sur F. L'argument de [2], chap.IX,T70 - qui repose uniquement sur la relation $(I+pU)U_p=U$ - entraînera alors que g est surmédiane sur F.

Comme dans la démonstration de la prop.1, il nous suffit de prouver que si ε est une constante positive, si h est une fonction sci/E majorant f , si j est une fonction scs/E dont le support compact J est contenu dans $\{f'>0\}$, et telle que $0 \leqq j \leqq f'$, on a partout sur F

$$g+\varepsilon+Uh \geqq Uj$$

Or on a $g+\varepsilon+Uh > Uj$ en tout point de J. D'après le lemme de DINI, il existe une fonction $s \in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$, majorée par h telle que

$$g+\varepsilon+Us > Uj \quad \text{sur } J$$

Cette relation a alors lieu sur tout un voisinage compact L de J dans E, et le lemme de DINI entraîne à nouveau l'existence d'une fonction $t \in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$ à support dans L, majorant j et telle que

$$g+\varepsilon+Us \geqq Ut \quad \text{sur } L$$

Mais alors, g étant surmédiane sur E, cette relation a lieu sur tout E ; comme Us et Ut sont continues sur F, l'hypothèse faite sur g entraîne que cette inégalité vaut aussi sur $F \setminus E$, et la proposition est établie.

COROLLAIRE.- Toute fonction $g \in \underline{\underline{S}}$ est surmédiane par rapport à la résolvante (U_p) sur F .

CONSTRUCTION D'UN SEMI-GROUPE

Dans ce qui suit , nous notons $\hat{g}$ la régularisée excessive d'une fonction g, surmédiane par rapport à la résolvante (U_p).

PROPOSITION 4.- Soit D l'ensemble des points $x \in F$ tels que $\varepsilon_x pU_p \underset{p \to \infty}{\to} \varepsilon_x$ au sens vague. Alors D est borélien.

Il existe un semi-groupe $(P_t)_{t \geq 0}$ de noyaux sousmarkoviens sur F, unique, possédant les propriétés suivantes :

1) Si $f \in \underline{\underline{C}}(F)$, et si $x \in F$, la fonction $t \mapsto P_t f^x$ est continue à droite.

2) $U_p = \int_0^\infty e^{-pt} P_t dt$ pour tout $p>0$

On a $\varepsilon_x P_0 = \varepsilon_x$ si et seulement si $x \in D$. Pour tout $x \in F$ la mesure $\varepsilon_x P_0$ est portée par D . Enfin, soit $L = \lim_{p \to 0} U_p$ le noyau terminal de la résolvante (U_p) ; on a $\varepsilon_x L = \varepsilon_x U$ pour tout $x \in D$.

DÉMONSTRATION.- Nous allons commencer par transformer la définition de D. Si $x \in D$, on a $\lim_{p \to \infty} pU_p g^x = g(x)$ pour tout $g \in \underline{\underline{S}}$, ou encore $g(x)=\hat{g}(x)$ pour tout $g\in\underline{\underline{S}}$. Inversement, soit (g_n) une suite dense dans $\underline{\underline{S}}$ [une telle suite existe, car $\underline{\underline{S}}$ est une partie de l'espace métrique séparable $\underline{\underline{C}}(F)$] , et soit un $x\in F$ tel que $g_n(x)=\hat{g}_n(x)$ pour tout n ; montrons que x appartient alors à D. En effet, l'ensemble des fonctions $f\in\underline{\underline{C}}(F)$ telles que $f(x) = \lim_{p\to\infty} pU_pf^x$ est évidemment un sous-espace fermé de $\underline{\underline{C}}(F)$; comme il contient les g_n, il contient $\underline{\underline{S}}$, puis $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$, et enfin l'adhérence de $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$, et cette adhérence est égale à $\underline{\underline{C}}(F)$ d'après le théorème de STONE-WEIERSTRASS. Il en résulte aussitôt que D est un ensemble borélien. D'autre part, soit $f\in\underline{\underline{C}}_c^+(E)$, et soit $x\in D$; Lf est une fonction excessive par rapport à la résolvante (U_p), égale à $\widehat{Uf}$ sur E. Nous avons donc $\widehat{Lf} = \lim_p pU_pLf = \lim_p pU_pUf = \widehat{Uf}$. Comme $Uf\in\underline{\underline{S}}$, nous avons $\widehat{Uf}^x=Uf^x$ du fait que $x\in D$, et par conséquent $Lf^x=Uf^x$. La mesure $L(x,.)$ étant portée par E, on a $\varepsilon_xL=\varepsilon_xU$, ce qui établit la dernière phrase de l'énoncé.

Passons maintenant à la construction des noyaux P_t .

1) Soit $f\in\underline{\underline{S}}$; la formule ([2], IX.T52)

$$\frac{d^n}{dp^n}(pU_pf) = n!(-1)^{n+1}(U_p)^n(I-pU_p)f$$

montre que la fonction $\hat{f}(x)-pU_pf^x$ de la variable p est complètement monotone bornée sur $\underset{\sim}{R}_+$ pour tout $x\in F$; elle tend vers $\hat{f}(x)-h(x)$ lorsque $p\to 0$, h désignant la partie invariante de la fonction excessive $\hat{f}$. Le théorème bien connu de S.BERNSTEIN nous permet d'écrire

$$\hat{f}(x) - pU_pf^x = \int_0^\infty e^{-pt}\lambda_x(dt)$$

où λ_x est une mesure positive sur $\underset{\sim}{R}_+$, de masse égale à $\hat{f}(x)$ $-h(x)$. Posons maintenant

$$P_tf^x = h(x)+ \lambda_x(]t,\infty[)$$

C'est une fonction de t décroissante et continue à droite, qui tend vers $\hat{f}(x)$ lorsque $t\to 0$. On a

$$\int_0^\infty e^{-pt}P_tf^x\,dt = \frac{h(x)}{p} + \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_t^\infty \lambda_x(ds)$$

$$= \frac{h(x)}{p} + \int_0^\infty \lambda_x(ds)\,\frac{1-e^{-ps}}{p}$$

$$= \frac{h(x)}{p} + \frac{1}{p}(\hat{f}(x)-h(x) - (\hat{f}(x)-pU_pf^x)) = U_pf^x .$$

2) Etudions la forme linéaire $f \mapsto P_tf^x$ sur $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$

a) Si f est surmédiane continue, la fonction $\frac{f^x}{p} - U_pf^x$ (*) de la variable p est complètement monotone. Cette fonction étant la transformée de Laplace de la fonction continue à droite $t \mapsto f^x-P_tf^x$, on a $P_tf^x \leqq f^x$ pour tout t. En particulier, $P_t1 \leqq 1$.

b) Si $f\in\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$ est $\geqq 0$, $p \mapsto U_pf^x$ est complètement monotone (*); Cette fonction étant la transformée de Laplace de $t \mapsto P_tf^x$, on a $P_tf^x \geqq 0$ pour presque tout t, donc pour tout t en vertu de la continuité à droite.

On déduit aussitôt de a) et b) que la forme linéaire $f \mapsto P_tf^x$ sur $\underline{\underline{S}}-\underline{\underline{S}}$ est bornée (de norme ≤ 1). Elle se prolonge donc par continuité en une forme linéaire bornée sur $\underline{\underline{C}}(F)$, c'est à dire une mesure, et on vérifie aussitôt que cette mesure est positive. On voit aussitôt par un argument de convergence uniforme, que la fonction $t \mapsto P_tf^x$ est encore continue à droite si $f\in\underline{\underline{C}}(F)$. Nous noterons $P_t(x,dy)$ la mesure qui vient d'être définie.

c) Montrons ensuite que (P_t) est un <u>noyau sousmarkovien</u>, autrement dit, que P_tf est une fonction borélienne si $f\in\underline{\underline{C}}(F)$. Or la fonction $x \mapsto \int\phi(t)e^{-t}P_tf^x dt$ est borélienne pour toute fonction ϕ continue sur $\underline{R}_+$, tendant vers une limite à l'infini, et bornée [cette propriété est vraie en effet si ϕ est une constante ou une exponentielle e^{-pt}, et on applique le th. de STONE-WEIERSTRASS sur $[0,\infty]$]. Donc $x \mapsto \int\phi(x)P_tf^x dt$

(*) Utiliser la formule

$$\frac{d^n}{dp^n}(U_pf^x) = n!(-1)^n(U_p)^{n+1}f^x \quad ([2], \text{IX.T52}) .$$

est borélienne si ϕ est continue à support compact, et donc $x \mapsto P_t f^x$ est borélienne [passage à la limite justifié par la continuité à droite].

3) Nous allons vérifier la relation $P_s P_t = P_{s+t}$ $(s \geqq 0, t \geqq 0)$.

a) Montrons d'abord que , pour toute fonction borélienne positive h, Uh est une fonction surmédiane. Cette propriété est vraie en effet si $h \in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$ (prop.3) , donc aussi, par passage à l'enveloppe inférieure, pour toute fonction h semi-continue supérieurement positive à support compact dans E. Soit alors h une fonction borélienne positive sur F ; on a pour toute fonction j, scs à support compact positive dans E, et majorée par $h|E$

$$pU_p Uj \leqq Uj \leqq Uh$$

d'où en passant à l'enveloppe supérieure $pU_p Uh \leqq Uh$, qui est le résultat cherché.

Il résulte alors du raisonnement du début de la démonstration que la fonction $p \mapsto U_p Uh^x$ est transformée de Laplace d'une fonction décroissante.

b) Prenons $g \in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$, et désignons par $\underline{\underline{H}}$ l'ensemble des fonctions boréliennes bornées h telles que $t \mapsto P_t U(hg)^x$ soit continue à droite pour tout $x \in F$. Il est clair que $\underline{\underline{H}}$ est un espace vectoriel fermé pour la convergence uniforme, qui contient $\underline{\underline{C}}(F)$. D'autre part, soit (h_n) une suite croissante et uniformément bornée d'éléments positifs de $\underline{\underline{H}}$, et soit $h = \lim_n h_n$; la fonction $t \mapsto P_t U(h_n g)^x$ admet comme transformée de Laplace $p \mapsto U_p U(h_n g)^x$, qui est d'après a) la transformée de Laplace d'une fonction décroissante. Autrement dit, $t \mapsto P_t U(h_n g)^x$ est continue à droite et décroissante, et par conséquent $t \mapsto P_t U(hg)$ est continue à droite , par passage à l'enveloppe supérieure. Il résulte alors du théorème des classes monotones ([2], chap.I, T20) que $\underline{\underline{H}}$ contient toutes les fonctions boréliennes bornées. Un second passage à l'enveloppe supérieure montre alors que $t \mapsto P_t Uh$ est décroissante et continue à droite pour toute fonction borélienne positive h sur F.

c) Prenons $g \in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$; $U_p g$ est différence de deux fonctions de la forme Uh ; la fonction $t \mapsto P_t U_p g^x$ est donc continue à droite. D'autre part, $U_p g$ est p-surmédiane , donc 0-surmédiane par rapport à la résolvante $(V_q)=(U_{p+q})$. Le raisonnement du début de la démonstration montre alors que $q \mapsto V_q U_p g^x$ est transformée de Laplace d'une fonction décroissante ; comme elle est transformée de Laplace de la fonction continue à droite $t \mapsto e^{-pt} P_t U_p g^x$, celle ci est décroissante. Le même raisonnement qu'en b) montre alors que $t \mapsto e^{-pt} P_t U_p h^x$ est décroissante et continue à droite pour toute fonction borélienne positive h sur F.

d) Pour vérifier que $P_t P_s f^x = P_{s+t} f^x$, il suffit de traiter le cas où $f \in \underline{\underline{C}}(F)$. Les deux membres étant des fonctions continues à droite en s, il suffit de vérifier l'égalité de leurs transformées de Laplace en s, soit

$$P_t U_p f^x = \int_0^\infty e^{-ps} P_{s+t} f^x ds$$

Mais les deux membres sont des fonctions continues à droite en t d'après c), et il suffit encore une fois de vérifier l'égalité de leurs transformées de Laplace en t, ce qui revient à vérifier l'équation résolvante.

4) Si $f \in \underline{\underline{S}}$, on a $P_0 f = \lim_{t \to 0} P_t f = \lim_{p \to \infty} p U_p f = \hat{f}$. Par conséquent, $\varepsilon_x P_0 = \varepsilon_x$ si et seulement si $f(x)=\hat{f}(x)$ pour tout $f \in \underline{\underline{S}}$, autrement dit si $x \in D$. D'autre part, la relation $P_0 P_0 f = P_0 f$ s'écrit $P_0(f-\hat{f})=0$. Comme on a $f \geq \hat{f}$, cela entraîne que toute mesure $\varepsilon_x P_0$ est portée par $\{f=\hat{f}\}$; en faisant parcourir à f une suite dense dans $\underline{\underline{S}}$, on voit que $\varepsilon_x P_0$ est portée par D.

CONSTRUCTION DE PROCESSUS DE MARKOV

PROPOSITION 5.- <u>Soit</u> μ <u>une loi de probabilité sur</u> F. <u>Il existe un processus de Markov</u> (X_t) <u>à valeurs dans</u> F_∂ (*), <u>admettant</u> (P_t) <u>comme semi-groupe de transition et</u> μ <u>comme loi initiale, et dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche sur l'intervalle</u> $]0,+\infty[$, <u>et admettent en</u> 0 <u>une limite à droite</u> X_{0+}. <u>On a</u> $X_0 = X_{0+}$ <u>p.s. si et seulement</u>

*) ∂ est un point isolé adjoint à F, et $F_\partial = F \cup \{\partial\}$

si μ est portée par D.

DÉMONSTRATION.- Construisons, sur un espace probabilisé complet Ω, un processus de Markov (Y_t) admettant (P_t) comme semi-groupe de transition(*) et μ comme loi initiale. Si $g \in \underline{\underline{S}}$, g est surmédiane par rapport au semi-groupe (P_t) [en effet, la fonction $t \mapsto P_t g$ est décroissante par construction, et tend vers $\hat{g} \leq g$ lorsque $t \to 0$] ; le processus $(g \circ Y_t)$ est donc une surmartingale, et admet par conséquent des limites à droite et des limites à gauche le long des rationnels, si l'on excepte des $\omega \in \Omega$ qui forment un ensemble négligeable. En utilisant une suite d'éléments de $\underline{\underline{S}}$ qui sépare les points de F, on obtient le résultat suivant :

il existe un ensemble négligeable $H \subset \Omega$ tel que, pour tout $\omega \notin H$, l'application $t \mapsto Y_t(\omega)$ admette une limite à droite $Y_{t+}(\omega)$ le long des rationnels en tout point $t \in [0,+\infty[$, une limite à gauche le long des rationnels en tout point $t \in]0,+\infty[$.

Une modification triviale des variables aléatoires Y_t sur H permet alors de supposer ces propriétés vraies pour tout $\omega \in \Omega$.

Soient maintenant f et g deux éléments de $\underline{\underline{S}}$. On a

$$E[f \circ Y_t \cdot g \circ Y_{t+}] = \lim_{\varepsilon \to 0} E[f \circ Y_t \cdot g \circ Y_{t+\varepsilon}] = \lim_{\varepsilon} E[f \circ Y_t \cdot P_\varepsilon g \circ Y_t]$$

$$= E[f \circ Y_t \cdot \hat{g} \circ Y_t]$$

Supposons d'abord $t>0$. La relation $P_t g = P_t P_0 g$ s'écrit $P_t(g-\hat{g})=0$, ou $E[(g-\hat{g}) \circ Y_t]=0$, ou finalement (comme $g \geq \hat{g}$) $g \circ Y_t = \hat{g} \circ Y_t$ p.s. La relation ci-dessus s'écrit donc dans ce cas $E[f \circ Y_t \cdot g \circ Y_{t+}] = E[f \circ Y_t \cdot g \circ Y_t]$. Par linéarité, puis convergence uniforme, on étend ce résultat au cas où f et g sont deux éléments de $\underline{\underline{C}}(F)$, et il en résulte enfin que $Y_t = Y_{t+}$ p.s. pour chaque $t>0$ ([2], chap.II, n°32).

Supposons que μ soit portée par D ; alors $g=\hat{g}$ μ-pp, et le même raisonnement que ci-dessus montre que $Y_0 = Y_{0+}$ p.s.. Inversement, si $Y_0 = Y_{0+}$ p.s., les égalités précédentes (avec f=1) donnent $E[g \circ Y_0] = E[\hat{g} \circ Y_0]$, ou $\langle \mu, g-\hat{g} \rangle = 0$, et enfin le fait que

(*) Comme d'habitude, on rend le semi-groupe markovien au moyen du point ∂.

μ est portée par D.

Il ne reste plus qu'à poser

$$X_0 = Y_0 \quad , \qquad X_t = Y_{t+} \text{ pour } t>0 \quad ,$$

pour obtenir le processus (X_t) cherché.

Dans la proposition suivante, nous supposons pour simplifier que μ est portée par D ; nous pouvons alors supposer que $X_0=X_{0+}$ identiquement (il suffit de définir $X_0=Y_{0+}$ ci-dessus).

PROPOSITION 5.- *Supposons que* μ *soit portée par* D.

1) *Si* f *est p-excessive par rapport au semi-groupe* (P_t), *le processus* $(f\circ X_t)$ *est p.s. continu à droite*.

2) *Le processus* (X_t) *est fortement markovien, et l'ensemble des* $\omega\in\Omega$ *tels que la trajectoire de* ω *rencontre* $E_\partial \setminus D$ *est négligeable*.(*)

DÉMONSTRATION.- a) Soit $g\in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$; on a $Ug\in\underline{\underline{C}}(F)$, et le processus $(Ug\circ X_t)$ est donc une surmartingale continue à droite. Désignons par $\underline{\underline{H}}$ l'espace des fonctions boréliennes bornées h sur F telles que le processus $(U(hg)\circ X_t)$ soit p.s. continu à droite ; $\underline{\underline{H}}$ est fermé pour la convergence uniforme, et contient $\underline{\underline{C}}(F)$. Soit (h_n) une suite croissante , uniformément bornée, d'éléments positifs de $\underline{\underline{H}}$, et soit $h=\lim_n h_n$. Les processus $(U(h_n g)\circ X_t)$ sont des surmartingales (début de 3), dans la démonstration de la prop.4), p.s. continues à droite par hypothèse, qui convergent en croissant vers le processus $(U(hg)\circ X_t)$. Celui-ci est donc p.s. continu à droite, d'après [2], chap.VI, T16.

Soit alors h une fonction borélienne positive sur F, et soit $h_n=h\wedge n$; soit (g_n) une suite croissante d'éléments de $\underline{\underline{C}}_c^+(E)$, dont l'enveloppe supérieure est l'indicatrice de E. Les surmartingales p.s. continues à droite $((U(h_n g_n)\circ X_t)$ tendent en croissant vers le processus $(Uh\circ X_t)$, et une nouvelle

---

(*) Noter toutefois que le processus (X_{t-}) peut rencontrer $E_\partial \setminus D$.

application de VI.T16 montre que le processus $(Uh\circ X_t)$ est p.s. continu à droite.

b) Prenons $p>0$, et $g\in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$; $U_p g$ est la différence de deux fonctions de la forme Uh (h borélienne ≥ 0), toutes deux finies, donc le processus $(U_p g\circ X_t)$ et le processus $(e^{-pt}U_p g\circ X_t)$ sont p.s. continus à droite. Le même raisonnement que ci-dessus montre alors que, si h est borélienne positive, le processus $(U_p h\circ X_t)$ est p.s. continu à droite.

Une nouvelle application de VI.T16 montre que si f est une fonction p-excessive , le processus $(f\circ X_t)$ est p.s. continu à droite (car f est l'enveloppe supérieure d'une suite de p-potentiels). Cela s'applique aussi à une fonction 0-excessive, car une telle fonction est p-excessive pour tout $p>0$.

c) Montrons que les trajectoires de (X_t) ne rencontrent p.s. pas $F\setminus D$. Il suffit de montrer qu'elles ne rencontrent p.s. pas $\{g\neq\hat{g}\}$,si g appartient à $\underline{\underline{S}}$. Mais les processus $(g\circ X_t)$ et $(\hat{g}\circ X_t)$ sont tous deux p.s. continus à droite ; d'autre part, la relation $U_p(g-\hat{g})=0$ et le théorème de Fubini entraînent que pour presque tout ω on a $g\circ X_t(\omega)=\hat{g}\circ X_t(\omega)$ pour presque tout t. La continuité à droite entraîne alors que pour un tel ω on a $g\circ X_t(\omega)=\hat{g}\circ X_t(\omega)$ pour <u>tout</u> t.

d) Au sujet de la propriété de Markov forte, nous nous bornerons à rappeler un résultat facile : si (X_t) est un processus de Markov continu à droite par rapport à une famille croisante de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$, admettant (P_t) comme semi-groupe de transition, et tel que pour tout $p>0$ toute fonction p-excessive (ou seulement toute fonction $U_p f$, $f\in\underline{\underline{C}}^+(F)$) soit p.s. continue à droite sur les trajectoires de (X_t), alors (X_t) est fortement markovien par rapport à la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_{t+})$ (voir par exemple [3]). Cela achève la démonstration.

CHANGEMENT DE RÉSOLVANTE

Nous avons supposé dans notre hypothèse (H) du début que U appliquait $\underline{\underline{C}}_c(E)$ dans $\underline{\underline{C}}(F)$: le fait d'exiger cela pour $U_0=U$ exprime une propriété de "transience" de la résolvante (U_p) sur E, qui n'est pas toujours satisfaite en pratique. Il est plus naturel de faire l'hypothèse suivante, pour un $p>0$:

(H_p) a) Pour toute fonction $f\in\underline{\underline{C}}_c(E)$, U_pf se prolonge (de manière unique) en une fonction continue sur F.

b) Le cône $\underline{\underline{S}}_p$ des fonctions continues g sur E, telles que $g|E$ soit p-surmédiane, sépare les points de F.

Posons alors $V=U_p$, et désignons encore par V le noyau <u>sur F</u> défini grâce au prolongement par continuité des fonctions Vf ($f\in\underline{\underline{C}}_c(E)$). La famille $(V_q) = (U_{p+q})$ est une résolvante qui satisfait à l'hypothèse $\bar{H}$ du début, ce qui nous permet de définir

- des noyaux V_q <u>sur F</u> , satisfaisant à $(I+qV)V_q=V$

- l'ensemble D_p des $x\in F$ tels que $\varepsilon_x qV_q \to \varepsilon_x$ vaguement lorsque $q\to\infty$

- un semigroupe sousmarkovien (Q_t), admettant (V_q) comme résolvante , tel que la fonction $t\mapsto Q_tf^x$ soit continue à droite pour tout $x\in F$ et toute $f\in\underline{\underline{C}}(F)$.

La proposition suivante montre, d'abord que l'on sait construire un bon semi-groupe sous l'hypothèse H_p, et ensuite que si l'on peut faire cette construction pour deux valeurs de p (nous traitons le cas où l'une de ces valeurs est 0, mais l'extension est triviale), les deux semi-groupes ainsi construits sont essentiellement les mêmes (*).

PROPOSITION 6.- a) <u>Le semi-groupe</u> (Q_t) <u>associé à la résolvante</u> (V_q) <u>satisfait à</u> $e^{pt}Q_t1 \leqq 1$ <u>pour tout</u> t. <u>Si</u> $x\in E$, <u>on a</u>

$$\int_0^\infty e^{-rt}\, e^{pt}Q_t(x,.)dt = U_r(x,.) \text{ pour tout } r>0$$

b) <u>Supposons que la résolvante</u> (U_q) <u>sur</u> E <u>satisfasse à la fois à l'hypothèse</u> (H) <u>du début et à l'hypothèse</u> (H_p). <u>Alors on a</u> $D_p=D$, <u>et</u> $\varepsilon_xP_t = e^{pt}\varepsilon_xQ_t$ <u>pour tout</u> $x\in D$ <u>et tout</u> t.

DÉMONSTRATION.- a) Soit $f\in\underline{\underline{C}}_c(E)$, comprise entre 0 et 1 ; nous avons sur E $1\geqq (p+q)U_{p+q}1 \geqq (p+q)U_{p+q}f$, ou encore $1+q(p+q)U_pU_{p+q}f \geqq (p+q)U_pf$ sur E. En introduisant la résolvante

(*) Nous ne traiterons pas ici de la construction des processus sous l'hypothèse (H_p). Il n'y a aucune difficulté spéciale.

(V_q), cela s'écrit

$$1 + q(p+q)VV_q f \geqq (p+q)Vf \text{ sur } E, \text{ et donc sur } \{f>0\}.$$

Le noyau V satisfaisant au principe du maximum sur F (prop. 1), cette inégalité a lieu partout, ce qui s'écrit $1 \geqq (p+q)V_q f$, puis $1 \geqq (p+q)V_q 1$ en passant à l'enveloppe supérieure.

Montrons alors que la fonction $q \mapsto \frac{1}{p+q} - V_q 1$ est complètement monotone : sa dérivée n-ième est en effet égale, d'après [2], chap.IX, T.52, à

$$n!(-1)^n \left[\frac{1}{(p+q)^{n+1}} - (V_q)^{n+1} 1 \right]$$

qui a bien le signe de $(-1)^n$ d'après ce qui précède. Par conséquent, la fonction continue à droite et bornée $e^{-pt} - Q_t 1^x$ ($x \in F$) de la variable t a une transformée de Laplace complètement monotone ; elle est donc positive, et la première inégalité est prouvée.

La résolvante du semi-groupe sous-markovien (Q_t) est égale à (V_q) ; si $x \in E$, on a donc

$$\int_0^\infty e^{-qt} Q_t(x,.)dt = U_{p+q}(x,.)$$

Soit (P'_t) le semi-groupe sous-markovien $(e^{pt}Q_t)$; si f est borélienne bornée, si $x \in E$, la fonction

$$r \mapsto \int e^{-rt} P_t(x,f)dt$$

est analytique, et coïncide avec $U_r(x,f)$ sur $]p,\infty[$, donc pour tout $r>0$. Cela achève la démonstration de a).

b) Soit $x \in D$, et soit $f \in \underline{\underline{C}}^+_c(E)$. Les fonctions $U_p f$ et Vf étant égales sur E, on a $qU_{p+q}Vf = qU_{p+q}U_p f$. D'autre part

$qU_{p+q}U_p f^x \underset{q \to \infty}{\to} U_p f^x$ (car $U_p f$ est p-excessive par rapport à la résolvante $U_\cdot$)

$qU_{p+q}Vf^x \to Vf^x$ (car $Vf \in \underline{\underline{C}}(F)$, et $x \in D$)

Par conséquent , $V(x,.)=U_p(x,.)$. Nous avons alors

$$V_q f^x = Vf^x - qVV_q f^x = U_p f^x - qU_p V_q f^x = U_p f^x - qU_p U_{p+q} f^x = U_{p+q} f^x$$

(on a utilisé le fait que $V(x,.)=U_p(x,.)$ sur E).

Mais alors la relation $\varepsilon_x qU_q \to \varepsilon_x$ vaguement ($q\to\infty$) qui exprime que $x\in D$, et qui est évidemment équivalente à $\varepsilon_x qU_{p+q} \to \varepsilon_x$, entraîne $\varepsilon_x qV_q \to \varepsilon_x$, et par conséquent $x\in D_p$.

Inversement, supposons $x\in D_p$. Soit $f\in \underline{\underline{C}}_c^+(E)$; la fonction Uf appartient à $\underline{\underline{S}}$, donc à $\underline{\underline{S}}_p$, et par conséquent elle est surmédiane par rapport à la résolvante (V_q) (prop.3). D'autre part , elle est continue et la relation $x\in D_p$ entraîne que $rV_rUf^x \to Uf^x$. Ainsi les mesures $\varepsilon_x rV_rU$, qui sont portées par E, croissent avec r et admettent $\varepsilon_x U$ comme limite vague sur E. Il est bien connu que dans ces conditions on a $\lim_{r\to\infty} \langle\varepsilon_x rV_rU,h\rangle = \langle\varepsilon_x U,h\rangle$ pour toute fonction borélienne positive h sur E (ou sur F). Comme $U_{p+q}f$ est différence de deux fonctions de la forme Uh, il en résulte que

$$rV_rU_{p+q}f^x \to U_{p+q}f^x \quad (r\to\infty)$$

Mais d'autre part $U_{p+q}f = V_qf$ sur E, donc le premier membre est aussi égal à $rV_rV_qf^x$, qui tend vers V_qf^x (pour $q=0$, cela résulte du fait que $x\in D_p$: en un point $x\in D_p$, V coïncide avec l'opérateur V_0 de la résolvante) . Par conséquent, $V_q(x,.) = U_{p+q}(x,.)$ pour tout $q\geq 0$. Alors la relation $\varepsilon_x rV_r \to \varepsilon_x$ vaguement entraîne $\varepsilon_x rU_{p+r} \to \varepsilon_x$, donc $\varepsilon_x rU_r \to \varepsilon_x$, et finalement $x\in D$.

§2 .- Applications aux chaînes de Markov

CONSTRUCTION D'UN COMPLÉTÉ ET D'UNE VERSION

Nous utilisons la terminologie du livre [1] de CHUNG (nouvelle édition).

E désigne un ensemble dénombrable, et ∞ un point adjoint à E (rien n'empêche de prendre $I=\underset{\sim}{N}$, et $\infty=+\infty$!) ; on désigne par $(p_t(.,.))$ une matrice de transition standard markovienne sur E - rappelons que le remplacement de " markovienne" par " sousmarkovienne" n'augmente pas la généralité. Il est bien connu que les fonctions $p_.(i,j)$ sont continues sur $\underset{\sim}{R}_+$;

nous poserons, pour tout $p \geq 0$

$$u_p(i,j) = \int_0^\infty p_t(i,j)e^{-pt}dt .$$

Nous utiliserons les notations des noyaux : E étant muni de la topologie discrète, et de la tribu associée (celle de toutes les parties de E), nous désignerons par P_t (resp.U_p) le noyau sur E défini par $P_t(i,\{j\}) = p_t(i,j)$ $(U_p(i,\{j\})= u_p(i,j))$.

Fixons un $p>0$, et montrons que les fonctions $u_p(\cdot,j)$, j parcourant E, séparent E. En effet, si h et k sont deux points qui ne sont pas séparés par ces fonctions, on a $U_p(h,\cdot)=U_p(k,\cdot)$, donc $U_r(h,\cdot)=U_r(k,\cdot)$ pour tout r d'après l'équation résolvante, et enfin $P_t(h,\cdot)=P_t(k,\cdot)$ en vertu de l'unicité de la transformation de Laplace ; en faisant tendre t vers 0, on en déduit que h=k.

Posons alors pour tout $j\in E$ $d_j(h,k) = |u_p(h,j)-u_p(k,j)|$; d_j est un écart borné sur E, complétons E pour la structure uniforme définie par la famille d'écarts d_j $(j\in E)$, et désignons par F le complété de E. Cela revient encore à appliquer E dans $\underset{\sim}{R}^E$ par $i \mapsto (u_p(i,j))_{j\in E}$ - application continue et injective - à identifier E à son image, et à prendre pour F l'adhérence de E. F est un espace compact métrisable, et l'injection de E (discret) dans F est continue. D'autre part, E est dense dans F . Enfin, toute fonction $u_p(\cdot,j)$ se prolonge évidemment en une fonction uniformément continue sur F, et ces prolongements séparent F par construction ; comme une fonction f appartient à $\underline{\underline{C}}_c(E)$ si et seulement si elle a un support <u>fini</u> , U_pf se prolonge en une fonction de $\underline{\underline{C}}(F)$, et ces prolongements séparent F . Autrement dit, l'hypothèse (H_p) est satisfaite par le couple (E,F).

Si le semi-groupe est transient, ce qui revient à dire que les fonctions $u(\cdot,j)=u_0(\cdot,j)$ sont bornées, on peut faire cette construction pour $p=0$.

Comme à la fin du §1, construisons une résolvante (V_q) sur F , coïncidant avec (U_{p+q}) sur E ; l'ensemble D_p des $x \in F$ tels que $\varepsilon_x r V_r \underset{r\to\infty}{\to} \varepsilon_x$ vaguement ; le semi-groupe (Q_t) tel que $t \mapsto Q_t f$ soit continue à droite pour $f \in \underline{\underline{C}}(F)$, et qui admet (V_q) comme résolvante. La matrice de transition étant standard, nous avons $E \subset D_p$ D'autre part, nous savons que le semi-groupe $P_t = e^{pt} Q_t^p$ est sousmarkovien, et que sa résolvante (U'_q) coïncide avec (U_q) sur E.

PROPOSITION 7.- <u>Si</u> $i \in E$, <u>la mesure</u> $\varepsilon_i P_t$ <u>est portée par</u> E <u>pour tout</u> $t \geqq 0$, <u>et on a</u> $P_t(i,\{j\}) = p_t(i,j)$ <u>pour tout</u> $j \in E$.

DÉMONSTRATION.- Nous avons

$$\int e^{-qt} p_t(i,j)dt = u_q(i,j) = \int e^{-qt} P_t(i,\{j\})dt$$

L'unicité de la transformation de Laplace entraîne que $p_t(i,j) = P_t(i,\{j\})$ pour presque tout t. D'autre part, l'indicatrice de $\{j\}$ est une fonction scs dans F, et par conséquent $t \mapsto P_t(i,\{j\})$ est scs à droite :

$$P_t(i,\{j\}) \geqq \limsup_{s\to 0+} P_{t+s}(i,\{j\})$$

Comme $p_.(i,j)$ est continue, et égale à $P_.(i,\{j\})$ sur un ensemble dense, cela entraîne $P_t(i,\{j\}) \geqq p_t(i,j)$. Mais cette inégalité ne peut être stricte, car sinon on aurait

$$1 \geqq \sum_{k \in E} P_t(i,\{k\}) > \sum_{k \in E} p_t(i,k)$$

en contradiction avec le caractère markovien de la matrice (p_t).

COROLLAIRE.- <u>Soit</u> μ <u>une loi sur</u> F ; <u>la loi</u> μP_t <u>est alors portée par</u> E <u>pour tout</u> $t>0$.

DÉMONSTRATION.- Comme μU_p est portée par E, μP_s est portée par E pour presque tout s ; choisissons un tel $s<t$. Nous avons

$$\mu P_t(F \setminus E) = \sum_{i \in E} \mu P_s(\{i\}) P_{t-s}(i, F \setminus E) = 0$$

d'après la proposition précédente. Noter que $P_t 1 = 1$ sur E ; donc $\mu P_{s+t} 1 = \mu P_s 1$, et la masse de μP_u est constante. Si μ est portée par D_p, on a $\lim_{u\to 0} \mu P_u 1 = 1$, donc $\mu P_u 1 = 1$ pour tout $u \geqq 0$.

Ceci étant, donnons nous une loi initiale μ portée par E (donc par D_p), et construisons un espace probabilisé complet $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, une famille croissante $(\underline{\underline{F}}_t)$ de tribus, dont chacune contient les ensembles négligeables ; un processus (X_t) à valeurs dans F, dont les trajectoires sont continues à droite et pourvues de limites à gauche, adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, markovien , admettant (P_t) comme semi-groupe de transition et μ comme loi initiale - la possibilité d'une telle construction résulte de la prop.5. Nous avons

vu en outre que les fonctions excessives sont continues à droite sur les trajectoires d'un tel processus, et que (X_t) est fortement markovien - ce qui nous permet en particulier de rendre la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ continue à droite. Nous savons donc construire des versions raisonnables de la chaîne, <u>à valeurs dans F</u> .

Cependant, la théorie des frontières n'utilise pas le compactifié F, mais le compactifié de MARTIN de E, qui est essentiellement un compactifié du type envisagé dans la première partie, mais relativement à une résolvante <u>duale</u> . Il nous faut donc construire des versions de la chaîne <u>à valeurs dans</u> $\underline{E\cup\{\infty\}}$ douées de propriétés raisonnables (à partir desquelles la théorie des frontières construira les versions à valeurs dans l'espace de Martin).

Nous allons décrire deux telles versions - pour la seconde, on identifie E à $\underline{\underline{N}}$, ∞ à $+\infty$.

PREMIÈRE VERSION.- On pose $Y_t(\omega)=X_t(\omega)$ si $X_t(\omega)\in E$, $Y_t(\omega)=\infty$ si $X_t(\omega)\notin E$.

SECONDE VERSION.- On choisit un ensemble dénombrable S dense dans $\underline{\underline{R}}_+$, et on pose $Z_t(\omega) = \liminf_{\substack{s\to t+0\\ s\in S}} X_s(\omega)$

Cette seconde version est la "version semi-continue inférieurement" de CHUNG. Elle peut être décrite sans intervention du symbole lim inf, de la manière suivante. L'application

$t \mapsto X_t(\omega)$ à valeurs dans F étant continue à droite, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence à droite dans le compactifié d'Alexandrov de E , à l'instant t et le long de S, ne peut être égal qu'à un ensemble de la forme $\{a\}$, ou $\{a,\infty\}$, ou $\{\infty\}$ $(a \in E)$. De plus on a alors $a = X_t(\omega)$ dans les deux premiers cas. On pose alors $Z_t(\omega) = a$ dans les deux premiers cas, $Z_t(\omega) = \infty$ dans le dernier.

Nous conviendrons de poser $p_t(i,\infty)=0$ pour tout t et tout $i \in E$, et de même $p_t(\infty,i)=0$, $p_t(\infty,\infty)=1$. La matrice de transition se trouve ainsi prolongée à $E \cup \{\infty\}$. Nous conviendrons de poser $Y_\infty = Z_\infty = \infty$.

PROPOSITION 8.- a) Les processus (Y_t) et (Z_t) sont des chaînes de Markov à valeurs dans $E\cup\{\infty\}$, admettant (p_t) comme matrice de transition et μ comme loi initiale. Le processus (Y_t) est bien-mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, et le processus (Z_t) est progressivement mesurable.

b) Si T est un temps d'arrêt, on a $Y_T = Z_T$ p.s.

c) Si T est un temps d'arrêt, les processus $(Y_{T+t})_{t>0}$ et $(Z_{T+t})_{t>0}$ sont des chaînes admettant (p_t) comme matrice de transition.

DÉMONSTRATION.- Le processus (X_t) étant bien-mesurable (en vertu de la continuité à droite des trajectoires) il est immédiat que (Y_t) est bien-mesurable. Nous n'insisterons pas sur le fait que (Z_t) est progressivement mesurable, dont nous ne nous servirons pas, et qui est établi dans les travaux de CHUNG.

Nous avons $P\{X_t \in E\} = \mu P_t(E) = 1$ pour tout $t>0$ (prop.7), donc $Y_t = X_t$ p.s. pour tout $t>0$ (et évidemment aussi pour $t=0$ puisque μ est portée par E). Par conséquent, (Y_t) est bien une chaîne admettant (p_t) comme matrice de transition et μ comme loi initiale. De même, si T est un temps d'arrêt, le processus (X_{T+t}) est un processus de Markov qui admet (P_t) comme semi-groupe de transition d'après la propriété de Markov forte, et le même raisonnement montre que $X_{T+t}=Y_{T+t}$ p.s. pour chaque t, sur $\{T<\infty\}$, d'où il résulte que $(Y_{T+t})_{t>0}$ est une chaîne admettant (p_t) comme semi-groupe de transition.

La démonstration de la prop.8 sera achevée si nous montrons que $Y_T=Z_T$ p.s. pour chaque temps d'arrêt T . La relation est évidente sur $\{T=\infty\}$. Sur $\{T<\infty\}$, la relation $Z_T(\omega)\in E$ entraîne $X_T(\omega)=Z_T(\omega)$, donc $Y_T(\omega)=Z_T(\omega)$. Tout revient donc à montrer que la relation $T<\infty$, $Z_T=\infty$ entraîne p.s. $Y_T=\infty$ - ou encore, que les relations $T<\infty$. $Y_T=i\in E$ entraînent p.s. $Z_T=i$.

Nous nous bornerons à traiter le cas simple où l'ensemble dénombrable S est l'ensemble des nombres dyadiques. Soit alors T^n la n-ième approximation dyadique de T ($T^n=(k+1)2^{-n}$ si $k2^{-n}\leqq T<(k+1)2^{-n}$) ; d'après la propriété de Markov forte, $P\{X_{T^n}\neq i \mid X_T=i\}= 1 - p_{T^n-T}(i,i)$. Comme $T^n-T \leqq 2^{-n}$, X_{T^n} tend en probabilité vers i sur l'ensemble où $X_T=i$, et Y_{T^n} possède donc la même propriété. On peut alors trouver une suite n_k d'entiers telle que $Y_{T^{n_k}}$ converge p.s. vers i (c'est à dire soit p.s. égal à i pour tout k assez grand), et cela entraîne que $Z_T=i$ p.s. sur $\{Y_T=i\}$.

Nous venons donc d'établir le théorème de CHUNG, suivant lequel il existe une version semi-continue inférieurement de la chaîne, satisfaisant à la propriété de Markov forte ([1], chap.II, §9, th.3). Nous allons maintenant interpréter la topologie induite par F sur E.

LA TOPOLOGIE FINE DE CHUNG

Posons pour tout h>0 , i et j désignant deux éléments de E

$$d_h(i,j) = -\log \sup_{0\leqq s\leqq h} p_s(i,j)$$

Il est clair que si h diminue $d_h(i,j)$ augmente , que $d_h(j,j)=0$ et que d'autre part, si $i\neq j$, $p_s(i,j)\leqq 1-p_s(i,i)$ tend vers 0 avec s, de sorte que $d_h(i,j) \xrightarrow[h\to 0]{} \infty$. La relation $p_{u+v}(i,k) \geqq p_u(i,j)p_v(j,k)$ entraîne $d_{h+h'}(i,k) \leqq d_h(i,j)+d_{h'}(j,k)$

Posons maintenant, pour tout $j \in E$ et tout $u>0$

$$V_u(j) = \{ i \in E : d_u(i,j)<u \}$$

On a $V_u \cap V_{u'} = V_{u \wedge u'}$. D'autre part, on a $j \in V_u(j)$ pour tout u, et la relation $k \in V_{u/2}(j)$ entraîne $V_{u/2}(k) \subset V_u(j)$. Par conséquent, il existe une topologie sur E pour laquelle les voisinages de $j \in E$ sont les ensembles qui contiennent $V_u(j)$ pour u assez petit. Cette topologie est la topologie fine de CHUNG ([1], p.190)

E étant dénombrable, et tout point de E admettant un système fondamental dénombrable de voisinages, la topologie fine sur E admet une base dénombrable d'ouverts. On peut donc étudier la continuité, la semi-continuité... des fonctions réelles sur E au moyen de suites convergentes dans E.

Montrons (toujours d'après CHUNG) que la topologie fine est séparée. Soient j et j' deux points distincts de E, η un nombre compris entre $\frac{1}{2}$ et 1. Choisissons h assez petit pour que $p_{.}(j,j)$ et $p_{.}(j',j')$ soient au moins égales à η sur l'intervalle $[0,h]$. On a alors pour tout i $p_h(i,j) \geqq p_s(i,j)$. $p_{h-s}(j,j) \geqq \eta p_s(i,j)$ pour tout $s<h$, et par conséquent

$$p_h(i,j) \geqq \eta.\exp[-d_h(i,j)]$$

de même $\quad p_h(i,j') \geqq \eta.\exp[-d_h(i,j')]$

Comme $\eta > \frac{1}{2}$, on a $\exp[-d_h(i,j)]+\exp[-d_h(i,j')] \leqq \frac{1}{\eta} < 2$, ce qui entraîne que i ne peut pas être voisin simultanément de j et de j'.

PROPOSITION 9.- a) Si $t>0$, $j \in E$, la fonction $p_t(.,j)$ est continue pour la topologie fine. La topologie fine est définie par la famille dénombrable d'écarts

$$(x,y) \mapsto |p_t(x,j)-p_t(y,j)| \qquad \begin{matrix} j \in E \\ t \text{ rationnel } >0 \end{matrix}$$

b) Si $q>0$, et si h est une fonction bornée sur E, la fonction $U_q h$ est continue pour la topologie fine(*). La

(*) La fonction $P_t h$ est aussi continue ($t>0$)

<u>topologie fine est définie par la famille dénombrable d' écarts</u> (<u>où</u> $p>0$ <u>est fixé</u>)

$$(x,y) \longmapsto |u_p(x,j)-u_p(y,j)| \qquad (j\in E)$$

DÉMONSTRATION.- a) Soit (x_n) une suite qui converge vers $i\in I$ au sens de la topologie fine. Alors pour tout h $\sup_{0\leqq s\leqq h} p_s(x_n,i)$ tend vers 1 lorsque $n\to\infty$. Soient $t>0$, $s<t$; nous avons

$$p_t(x_n,j) \geqq p_s(x_n,i)p_{t-s}(i,j)$$

La fonction $p_{\bullet}(i,j)$ étant continue, choisissons h assez petit pour que $s\leqq h$ entraîne $|p_{t-s}(i,j) - p_t(i,j)|\leqq\varepsilon$, puis n assez grand pour qu'il existe $s_n<h$ tel que $p_{s_n}(x_n,i) > 1-\varepsilon$. Alors

$$p_t(x_n,j) \geqq (1-\varepsilon)(p_t(i,j)-\varepsilon)$$

Autrement dit, les fonctions $p_t(\cdot,j)$ sont semi-continues inférieurement pour la topologie fine. Comme leur somme sur j est la fonction 1, qui est continue, chacune d'elles est continue.

Il en résulte que si h est une fonction comprise entre 0 et 1 la fonction $P_t h$ est semi-continue inférieurement pour la topologie fine ; mais il en est de même pour $P_t(1-h)$, et la somme de ces deux fonctions est la fonction continue $P_t 1=1$. Par conséquent $P_t h$ est continue.

Considérons maintenant une suite (x_n) d'éléments de F possédant la propriété suivante

pour tout t rationnel >0, tout $j\in E$, $p_t(x_n,j)\to p_t(i,j)$

et montrons que la suite x_n converge finement vers i. Cela entraînera que la topologie fine est déterminée par la famille d'écarts indiquée. Or soient h un nombre >0, $\varepsilon>0$, choisissons t rationnel tel que $t<h$, et que $p_t(i,i)>1-\varepsilon$; on a alors $p_t(x_n,i) > 1-\varepsilon$ pour n assez grand, et par conséquent

$$\sup_{0\leqq s\leqq h} p_s(x_n,i) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

ce qui exprime que $x_n \to i$ finement.

Les fonctions $p_t(.,j)$ $(t>0)$ étant continues pour la topologie fine, le théorème de Lebesgue entraîne aussitôt que les fonctions $u_q(.,j)$ sont finement continues, et la relation $U_q 1 = 1/q$ entraîne (comme dans la démonstration faite plus haut) que $U_q h$ est finement continue.

Fixons maintenant p, et considérons la topologie $\underline{\underline{T}}$ définie par la famille d'écarts $|u_p(x,j)-u_p(y,j)|$; $\underline{\underline{T}}$ est métrisable, moins fine que la topologie fine, et il nous reste à montrer que toute suite (x_n) qui converge/$\underline{\underline{T}}$ vers $i \in E$ converge finement vers i, ce qui entraînera l'identité des deux topologies. Le même argument que ci-dessus montre que toute fonction $U_p h$ (h bornée) est continue/$\underline{\underline{T}}$. L'équation résolvante entraîne alors le même résultat pour toute fonction $U_q f$ (f bornée), car une telle fonction est combinaison linéaire de deux fonctions du type précédent. En particulier, $U_q P_t h$ est continue/$\underline{\underline{T}}$ pour toute fonction bornée h.

Supposons alors que la suite (x_n) ne converge pas finement vers i ; quitte à extraire une suite partielle, nous pouvons supposer l'existence d'un $h>0$, d'un $\varepsilon>0$ tels que l'on ait pour tout n

$$\sup_{0 \leq s \leq h} p_s(x_n,i) \leq 1-\varepsilon$$

Mais alors on a pour tout n et tout $h' \leq h$

$$\frac{1}{h'} \int_0^{h'} e^{-ps} p_s(x_n,i)\, ds \leq 1-\varepsilon$$

Mais ceci est la valeur au point x_n de la fonction continue/$\underline{\underline{T}}$ $\frac{1}{h'}[U_p I_{\{i\}} - e^{-ph'} U_p P_{h'} I_{\{i\}}]$, et il en résulte que l'on a pour tout $h' \leq h$

$$\frac{1}{h'} \int_0^{h'} e^{-ps} p_s(i,i) ds \leq 1-\varepsilon$$

en contradiction avec le fait que $p_s(i,i) \underset{s \to 0}{\to} 1$. Cela achève la démonstration.

COROLLAIRE.- a) La topologie fine est identique à la topologie induite par F sur E.

b) Pour presque tout $\omega\epsilon\Omega$, l'application $Z.(\omega)$ possède la propriété suivante

$$\text{pour tout } t \text{ tel que } Z_t(\omega)\epsilon E, \text{ on a } Z_t(\omega) = \lim_{\substack{s\to t+0 \\ s\epsilon S}} \text{fine } Z_s(\omega)$$

DEMONSTRATION.- a) est évidente. Pour établir b), désignons par H l'ensemble des $\omega\epsilon\Omega$ tels que $Z_s(\omega)\epsilon I$ (donc $Z_s(\omega)=X_s(\omega)$)* pour tout $s\epsilon S$; on a $P(H)=1$ d'après la prop.8, et l'assertion b) se réduit pour $\omega\epsilon H$ à la continuité à droite dans F du processus (X_t). On a bien entendu un résultat analogue pour la version (Y_t). Nous avons retrouvé ainsi le th.4 du chap.II,§ 11 de CHUNG [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHUNG (K.L.).- Markov Chains with Stationary Transition Probabilities, 2e édition, Springer, 1967.

[2] MEYER (P.A.).- Probabilités et Potentiel, Hermann, Paris ; Blaisdell, Boston, 1966.

[3] MEYER (P.A.).- Processus de Markov. Lecture Notes in Mathematics, n°26 ; Springer, 1967.

[4] WATANABE (T) et KUNITA (H).- Markov processes and Martin boundaries, Illinois J. of M., t.9, 1965, p.485-526.

D'autre part, des travaux récents et non publiés de DOOB contiennent les applications à la théorie des chaînes de Markov qui ont été données ci-dessus. Bien que la compactification utilisée par DOOB soit la même que celle qui est utilisée ici, DOOB emploie des méthodes différentes, et développe beaucoup plus les applications de la compactification dans la direction de la " théorie des frontières".

* d'aprés la remarque du haut de la page 194.

Offsetdruck Julius Beltz, Weinheim/Bergstr