

FORMALISATION DE QUELQUES STRUCTURES INITIALES DE LA PSYCHOGENÈSE

Henri Wermus, EPSE Genève

1. INTRODUCTION

Un des problèmes majeurs de la psychogenèse est de décrire les modalités du passage d'un palier d'équilibre (d'une structure) au suivant.

Nous nous proposons ici d'exposer une certaine filiation des structures logico-mathématiques, en partant de la relation de « successeur immédiat » que nous croyons génétiquement très élémentaire: la démarche « pas à pas ». La filiation des théories T_1 , T_2 , etc. consistera ici principalement dans l'extension progressive de cette relation aux comparaisons et opérations entre éléments de plus en plus « distants », accompagnée de l'enrichissement progressif du langage formel utilisé. Nous pensons en particulier que les divers groupements décrits par Piaget (voir bibliographie) constituent des modèles des théories T_2 , T_3 , T_4 qui formalisent ainsi ces structures. Nous avons cherché à marquer surtout par un symbolisme adéquat la distinction entre les relations et opérations sur éléments dits « contigus » et l'accroissement de la mobilité permettant les activités cognitives et formation des relations nouvelles entre éléments quelconques d'une structure donnée. Les techniques de la logique mathématique, que nous avons essayé d'employer ici (sans rigueur excessive, en vue d'être accessibles, croyons-nous, aux non-mathématiciens) permettent de décrire ces faits initiaux de la psychogenèse dans une terminologie quelque peu spécifique. Cet apport introduit des distinctions et des faits que l'on peut retrouver sous d'autres classifications dans le langage familier aux psychogénétiens. Il ne nous a pas été possible dans ce cadre restreint de contribuer beaucoup à ce "dictionnaire" très utile. Nous demandons donc l'indulgence des spécialistes de mathématique et de ceux de psychologie pour cette entreprise « interdisciplinaire ». En effet l'étude de logico-mathématique des diverses sortes d'extension des théories, les transformations et les combinaisons multiples de structures entre elles, les interprétations d'une théorie dans une autre, le rôle des axiomes, du langage etc. font aujourd'hui objet de plusieurs chapitres de fondements des mathématiques, très spéciaux et très avancés, mais hermétiques par leur symbolisme très raffiné 1). Il ne faut pas se faire d'illusions sur les efforts qu'il faut faire actuellement pour rendre ces résultats lisibles et utilisables eux tenants des sciences voisines.

En particulier nous avons tenté d'exposer sommairement l'interaction entre le système formel et les structures « concrètes » qui le réalisent : elle nous paraît fort éclairante en elle-même pour la psychogenèse.

Dans l'introduction au volume consacré à la « filiation des structures » (voir bibliographie) Piaget lui-même écrivait il y a déjà fort longtemps : « ...cette convergence entre les prévisions

algébriques et les résultats de l'expérimentation psychologique nous a... renforcés dans l'idée... que, à la filiation réelle ou naturelle des structures on pourrait peut-être faire correspondre une filiation abstraite ou théorique, fournissant un modèle algébrique d'un tel développement ». Et il poursuivait : « ...il n'y a pas de raison... pour que la psychologie génétique de l'intelligence ne songe pas dès maintenant à poursuivre l'idéal tracé par les sciences physiques, dans lesquelles l'union de la déduction et de l'expérience se révèle se féconde ».

L'approfondissement des recherches en logique mathématique a non seulement permis de remplir ce rôle de description ou de « modèle » (voir discussion de ce terme plus loin) du développement cognitif, mais en plus lui a conféré une dimension nouvelle. En effet e.a. la distinction soulignée avant entre « forme » et contenu « concret » permet de considérer à plus forte raison les systèmes logico-mathématiques en tant que parties constitutives elles-mêmes de « schèmes opératoires » du sujet. Une théorie procure une organisation cohérente d'un domaine de faits, la déduction des théorèmes, « prise de conscience » de démarches implicites non aperçues autrement, élucidation des principes et du langage nécessaire etc. Mais par-delà et ainsi qu'il en est arrivé maintes fois p.ex. entre la physique théorique et la physique expérimentale, si la théorie est générée pour résoudre certains problèmes concrets, une fois constituée, elle propose une méthode pour la recherche dans la « nature » des interprétations aux expressions nouvelles qu'elle permet d'exprimer ou de déduire. Mentionnons, sans le discuter ici, que l'approche formelle a permis de préciser et dans de nombreux cas d'élucider des problèmes tels que : en quoi consistent ces « nouveautés », dans quelle mesure les axiomes prédéterminent-ils une théorie, la nature des limites de méthodes strictement « combinatoires » etc.

2. DESCRIPTION DES CONCEPTS : THEORIE FORMELLE (TF) ET MODELE (M)

Une théorie formalisée comporte sommairement décrite les parties suivantes (voir plus loin commentaire cité de Kleene).

I Un symbolisme (alphabet) initial contenant en tout cas :

a) des symboles logiques tels que : « $\Rightarrow$ » (implication), négation, quantificateurs, parenthèses etc., lettres pour variables des objets, lettres pour prédicats etc., aussi un symbole « = » pour égalité.

b) symboles particuliers de la théorie à formaliser : lettres pour ses constantes spéciales et pour prédicats et fonctions auxquels on attribue une signification dans la « réalité » que formalise la TF.

II Règles constitutives décrivant comment former les expressions : les termes et les formules (énoncés) de TF. On a avantage à choisir ces règles de manière à ce qu'autant que possible la « structure syntactique » d'une expression reflète sa signification (cf. le « programme » de

FORMALISATION DES STRUCTURES INITIALES

Leibniz). C'est le cas p.ex. de la notation décimale et d'un grand nombre d'autres expressions mathématiques.

La partie I et II est appelée le langage $L(T)$ de la théorie. Certains auteurs y incluent encore, selon les circonstances, des dispositions d'interprétation permettant de conférer des significations aux expressions de T dans une structure donnée. Nous allons cependant utiliser ici $L(T)$ pour I et II seuls.

IIa Remarquons encore que II contient des règles syntactiques qui concernent seulement les symboles de la logique pure (Ia).

IIb Si les symboles (Ib) interviennent, les règles II permettent des « combinaisons » logiques plus ou moins élémentaires entre prédicats. Ces diverses combinaisons formelles permettent d'exprimer la formation des relations nouvelles à partir des relations données : les compositions, multiplications ou « additions » souvent décrits en psychogenèse. Il est donc important de retenir que ces combinaisons requièrent la présence ou l'apprentissage des schèmes logiques indispensables.

III Certaines formules comportant exclusivement des symboles logiques sont admises en tant qu'axiomes (schèmes) logiques, qui sont en principe les mêmes pour toutes les théories particulières (voir p.ex. Mendelsohn pour les détails).

IV Les règles logiques d'inférence (p.ex. le modus ponens, diverses règles de substitution et règles de généralisation).

Les parties Ia, IIa, III et IV concernent la formalisation de la logique elle-même. Cette partie logique est pour ainsi dire à disposition pour la formalisation des théories particulières et en constitue, suivant l'étendue utilisé, le fond commun.

Cela ne veut évidemment pas dire qu'un sujet doit disposer déjà de cette partie toute faite pour constituer une théorie.

La logique nécessaire semble être générée souvent en même temps et par interaction avec une théorie particulière que se constitue. Ce sujet important a été traité d'une manière approfondie par de nombreux auteurs, Piaget, Inhelder et Grize (entre autres). Il ne peut être que mentionné ici, pour rappeler tout ce qu'un sujet doit générer pour constituer une théorie. Indiquons cependant que la logique effectivement employée par le sujet dans les théories du successeur, des groupements, etc. décrites ici est très restreinte. En effet ces théories « partent » des structures finies et sont aussi appliquées aux modèles finis (ces théories ne sont pas d'emblée appliquées aux ensemble infinis des mathématiques), les déductions (emploi des règles IV) sont très restreintes et le nombre des relations engagées est fort petit. Les diverses compositions de relations sont justement introduites ici par des définitions appropriées pour mettre en évidence la logique employée.

V Cette partie est réservée aux axiomes extralogiques, spécifiques de la théorie particulière à formaliser ; elle est donc variable suivant les théories considérées. On placera ici p.ex. les axiomes d'une théorie d'ordre, d'une théorie des groupes, d'une théorie d'un chapitre formalisé de la physique etc.

On démontre qu'il n'est pas nécessaire d'inclure des règles d'inférence propres d'une théorie particulière. Les règles logiques (IV) pourvoient en principe aux déductions et aux raisonnements à l'intérieur d'une théorie donnée T .

On dit souvent que (I) à (V) constituent le système formel (SF) d'une théorie T . La théorie formelle (TF) est alors son (SF) plus l'ensemble de conséquences logiques que l'on peut déduire des axiomes (les théorèmes). Nous disons ici simplement T au lieu de (TF).

Citons le grand logicien Kleene : « la signification des termes primitifs (d'une T) est laissée vacante. ...les propriétés des termes primitifs doivent être traitées dans une TF comme n'ayant pas de signification, dans le but d'être accessibles à des déductions purement logiques. Les significations n'interviennent pas dans les démonstrations. Si au contraire elles interviennent, ...alors les diverses propriétés qui dépendent des significations doivent être formulées en tant qu'axiomes additionnels ... Cela n'est p.ex. pas le cas de (la théorie) d'Eléments d'Euclide.

Une TF cohérente (nous allons admettre cela en parlant d'une théorie T) peut avoir plusieurs modèles différents, non isomorphes. Pour mieux décrire ce concept nous rappelons en bref la définition d'une structure S au sens logico-mathématique.

Une structure $S = \langle E, R_1 \dots, R_m, f_1 \dots, f_k, c_1 \dots, c_n \rangle$

Est composée d'un ensemble E (non vide) de certains objets (dit souvent le domaine de S), des relations R entre ces objets, d'un certain nombre (≥ 0) des fonctions f et de constances c , qui jouent un rôle particulier dans cette structure (s'il y en a). P.ex. le 0 dans une structure additive, l'élément initial d'un ordre, le majorant universel d'un treillis (s'il y en a) etc. (Ajoutons que les fonctions et constantes peuvent être traitées en principe comme certains cas particuliers des relations).

Une structure S est censée représenter une certaine « réalité » sans doute fort élaborée, mais caractérisée essentiellement par la présence des objets de E et de leurs diverses combinaisons. En interprétant convenablement le langage d'une TF , celle-ci se charge pour ainsi dire d'exprimer les propriétés de la structure en question. Si les axiomes non-logiques dans cette interprétation sont reconnus vrais dans S , alors S est dite un modèle de T (dans l'interprétation donnée). Un métathéorème de logique nous garantit alors que tous les théorèmes déduits dans T doivent également être vrais dans S . On dit aussi que S « réalise » T .

Il faut faire attention au fait que le concept de « modèle » est utilisé ici dans un sens très souvent opposé à l'usage courant. « Modèle » dans ce deuxième sens est une certaine structure qui représente d'une manière schématique une réalité complexe, en ne retenant que les données et

FORMALISATION DES STRUCTURES INITIALES

relations pertinentes en vue d'une certaine intention. Parfois il veut dire aussi dispositif de simulation (même très abstrait) d'un certain ensemble de faits, dont on ne retient qu'une petite partie bien définie pour l'examen. On peut y assimiler aussi grosso modo les jeux des blocs logiques à caractéristiques bien délimités, des puzzles, des jeux de mécanos etc. avec lesquels jouent (qu'expérimentent) les enfants.

Les pièces manipulées constituent l'ensemble E , les caractéristiques (prédicats) vont définir les relations etc. du « modèle » qui est censé « idéaliser » une réalité plus complexe (deuxième sens), et dont on va chercher parfois à constituer la théorie (premier sens). Ce double usage peut d'ailleurs lui-même revêtir une certaine signification si l'on admet que « modèle » se trouve en quelque sorte à mi-chemin entre une théorie formelle « sans objets » à laquelle il confère un contenu et d'autre part une réalité complexe dont ni le langage ni les opérations ne sont clairement définis.

L'interaction permanente déjà mentionnée entre l'activité formalisant qui va des structures « concrètes » vers la constitution des théories et les interprétations allant dans le sens contraire nous paraissent fondamentales dans la psychogenèse.

3. QUELQUES FAITS CONCERNANT L'EXTENSION DES THEORIES FORMELLES

Nous nous bornons ici à décrire l'extension d'une théorie T_1 en une autre T_2 seulement dans des cas simples qui intéressent la « filière » des théories exposée dans ce travail.

Définition : Une théorie T_2 est dite extension de T_1 si :

1° Le langage (non logique) de T_1 est contenu dans $L(T_2)$, mais en général pas réciproquement. On admet donc, voir plus loin, le cas $L(T_1) = L(T_2)$,

2° Chaque théorème déduit dans T_1 est aussi théorème de T_2 , sans (nécessairement) la réciproque.

Disons familièrement que la théorie T_2 est donc plus « forte » dans ce sens que le « volume » des faits déductibles et des problèmes pouvant être résolus est « plus grand » dans T_2 que dans T_1 . L'une des motivations importantes d'une extension est justement le fait que T_1 est trop « pauvre » soit pour exprimer des relations qui apparaissent dans un modèle, soit pour déduire un fait des autres faits déjà établis ou résoudre un problème qui surgit : dans les cas élémentaires cela provient de la pauvreté du langage $L(T)$ ou d'un manque d'axiomes adéquats. L'extension décrite ici se fait donc par l'adjonction des symboles nouveaux à $L(T_1)$ et des règles de formation (IIB) qui les concernent et/ou le plus souvent par l'adjonction d'un (ou plusieurs) axiome(s) nouveaux qui bien sûr ne doivent pas détruire la cohérence de T_1 (il ne faut pas que la négation d'un axiome nouveau soit déductible dans T_1). Une extension dans laquelle on ajoute des axiomes à ceux de T_1 est dite « extension par complétion axiomatique ». (Car on

obtient aussi des extensions en remplaçant une partie ou même tous les axiomes de T_1 par d'autres plus « forts » qui amènent en tout cas l'effet 2°).

Si en particulier $L(T_1) = L(T_2)$, on n'enrichit donc pas le langage de T_1 , on parle d'une « complétion axiomatique simple ». On démontre en logique que dans ce cas l'ensemble des modèles de T_2 $M(T_2)$ est contenu dans l'ensemble $M(T_1)$. On a dans le cas de ces extensions une double variation : l'ensemble des théorèmes « augmente », mais en même temps celui des modèles « diminue ». Les exemples bien connus du passage de la théorie T_1 des groupoïdes, au semigroupes (T_2), puis de T_2 à la théorie T_3 des monoïdes de T_3 au groupes T_4 fournit un bon exemple d'une série de ces extensions-là.

Un cas important et qui nous intéresse ici est celui où $L(T_1)$ est complété par de nouveaux symboles et devient donc un partie de $L(T_2)$. En principe tout symbole nouveau, en plus de règles (IIb), doit figurer dans un axiome de T_2 pour pouvoir participer formellement aux déductions et opérations de T_2 .

Il arrive que dans une T_2 ainsi complétée par des axiomes et symboles nouveaux ajoutés à T_1 , certains faits formulés dans $L(T_1)$ et qui n'y étaient pas démontrables, le deviennent dans T_2 . P.ex. certains théorèmes concernant les nombres réels (T_1) ne peuvent y être démontrés que si on l'étend à une théorie des nombres complexes (T_2). Certains théorèmes concernant la géométrie plane (T_1) deviennent démontrables si l'on « plonge » le plan dans l'espace (T_2). Par contre si une telle situation ne se présente pas, autrement dit, si les théorèmes de T_2 formulables dans le langage de T_1 sont déjà également démontrables dans T_1 elle-même, alors on parle d'une extension conservatrice ou plus exactement d'une « extension conservatrice par complétion axiomatique ». Si nous en parlons, c'est que ce cas se trouve réalisé dans de nombreuses extensions par définitions, en particulier l'extension de groupement T_2 à T_3 . Un symbole nouveau est introduit dans $L(T_1)$ par une définition, le définiens étant bien sûr, entièrement conçu dans $L(T_1)$ et doit remplir encore quelques conditions (preuve d'unicité s'il s'agit d'un terme etc.). Ainsi qu'il vient d'être dit, il faudrait en principe un axiome, dit axiome de définition (AD) pour introduire formellement tout symbole nouveau dans le ST de la théorie T_2 . Cependant on démontre que ces extensions par axiomes de définition n'augmentent pas essentiellement l'ensemble des théorèmes de T_1 ; on peut les « retraduire » dans T_1 . On peut donc poser la question de savoir de quelle nature est le gain du sujet ayant « enrichi » (par définitions) son langage formel. Tentons une esquisse de réponse en disant que si une expression nouvellement définie est incorporée opératoirement et d'une façon « autonome » par le sujet, alors il y a lieu de « marquer l'événement » en formulant l'AD de l'expression dans la théorie. Si par contre la nouvelle expression ne reste qu'au stade d'abréviation verbale du définiens, (ou le sujet se rapporte constamment au définiens pour « opérer » avec l'expression définie) alors nous la laissons sous forme de définition tout court qui en principe peut servir à éliminer ce concept de la théorie. Une marge d'appréciation est donc laissée dans la manière de traiter formellement les définitions dans les théories qui suivent. Remarquons que toutes ces définitions et les (AD) ont la forme d'une équivalence ou d'une égalité.

FORMALISATION DES STRUCTURES INITIALES

Nous Ne pouvons pas ici nous engager dans la description d'autres types d'extensions et de leur signification dans les théories du développement. Il y aurait lieu d'étudier aussi les « expansions » correspondantes sur le « versant » des structures. En effet plusieurs types de filiation ou des combinaisons des structures entre elles peuvent avoir un intérêt pour un psychologue. Mentionnons simplement le produit (cartésien) $S_1 \times S_2$ de deux structures, formation d'une structure quotient S/R par rapport à une relation d'équivalence R , passage d'une structure S_1 à la structure de ses morphismes ou à une structure S_2 dont les « objets » sont un certain ensemble d'opérations dans S_1 etc. Un cas particulièrement instructif est l'expansion « réglée » des structures du bon ordre car la succession de ces expansions de plus en plus « englobantes » est elle-même transfinie, mais se laisse décrire formellement en bonne partie par de moyens « constructifs » (finis).

Ces précisions sur la formalisation étant faites, nous n'allons pas nous tenir dans l'exposé qui suit d'une manière trop pédante à ces distinctions. Le lecteur remarquera de lui-même que telle ou telle définition entraîne l'enrichissement du langage $L(T)$ et que l'extension produite par un AD est conservatrice, etc.

4. THEORIE FORMELLE DU « SUCCESSEUR IMMEDIAT » : T_1

Pour toute la suite des théories formelles envisagées nous admettrons l'inclusion de la partie logique¹ (avec égalité) adéquate (langage, axiomes et règles). Nous ne discuterons que les éléments spécifiques non logiques de chaque théorie. Le prédicat de base au départ de notre filiation des théories formelles est celui de « x a pour successeur immédiat y » symboliquement Sxy (immédiat dans le sens : pas d'intermédiaire entre x et y dans les interprétations envisagées). On peut admettre que ce prédicat correspond p.ex. à l'expérience élémentaire des activités « discrètes » et « pas à pas ». Nous formulons d'emblée les deux axiomes spécifiques de T_1 :

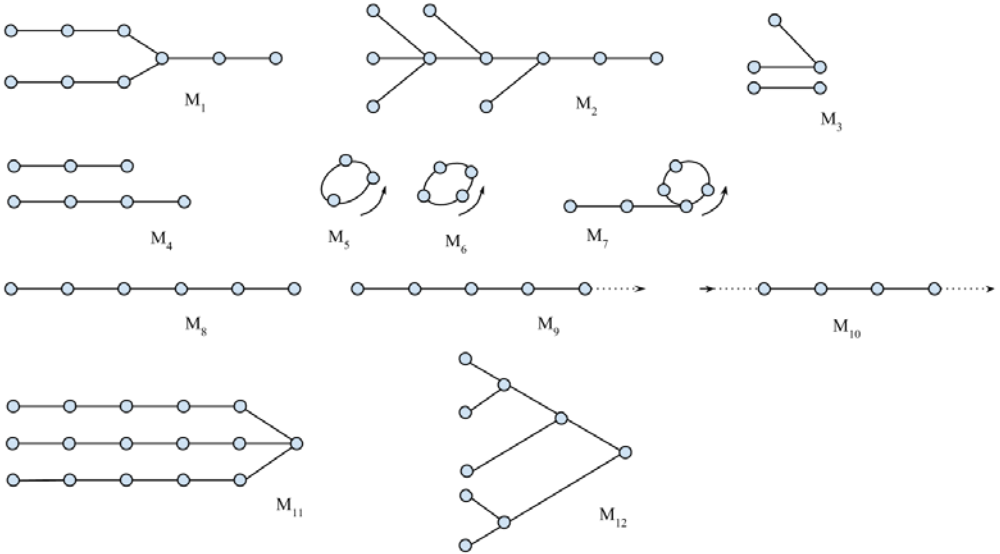
Ax 1 Asymétrie de Sxy : $\forall x \forall y (Sxy \Rightarrow \text{non} Syx)$

Ax 2 Unicité du successeur pour tout x qui en possède un : $\forall x \forall y \forall z (Sxy \text{ et } Sxz \Rightarrow (y = z))$

L'axiome 1 entraîne l'irréflexivité : aucun x n'est son propre successeur : $\forall x \text{ non } Sxx$.

Voici quelques modèles de T_1 où Sxy est interprété par : « y est le point à droite le plus proche qui est relié à x , resp. le plus proche dans le sens de la flèche. »

¹ En fait le langage de la logique de 1er ordre suffit très largement pour exposer ces formalisations. Cela ne veut pas dire, bien sûr, que le sujet l'utilise dans toute son étendue (c.f. les remarques sur la génération de la logique dans la partie introductive).



Les points dans ces M_i représentent certaines situations ou faits et les traits qui unissent deux points voisins, l'activité qui fait passer d'une situation à la suivante ou une comparaison (relation) entre deux situations contiguës.

Tous ces modèles sont non-isomorphes entre eux car ils diffèrent déjà par le nombre d'éléments, sauf les modèles « infinis » M_9 et M_{10} non-isomorphes pour d'autres raisons (M_9 a un élément « initial » qui n'est pas successeur, dans M_{10} chaque élément est précédé et suivi par un autre). L'unicité exigée par Ax 2 élimine tous les modèles dont le graphe comporte une « bifurcation à droite ». Par contre les graphes « déconnectés » tels que M_3 ou M_4 , ou comportant des cycles (M_5 , M_6 , M_7) ou infinis M_9 , M_{10} sont modèles de T_1 . Si nous voulons étendre T_1 par itérations de Sxy à une théorie qui formalisera les sériations ou l'ordre partiel, il faudrait que les modèles avec cycles soient éliminés car dans un tel modèle tout élément serait à la fois plus grand et plus petit que tout autre.

Plusieurs cas peuvent être discutés pour étendre T_1 à des TF de groupements de telle sorte que les modèles maintenant en dehors de notre intérêt principal soient éliminés (Cycles, modèles déconnectés et infinis). On pourrait aussi se demander à quelles opérations de l'enfant correspondrait un affaiblissement de T_1 à T_1' que l'on obtiendrait en remplaçant Ax 2 par Ax 2' qui au lieu de l'unicité stipulerait seulement l'antitransitivité de Sxy (voir usage de Ax 2' dans la constitution du treillis).

Ax 2' « si y est successeur de x et z celui de y alors z n'est pas successeur de x ». Nous utiliserons cet axiome à la place de Ax 2 dans T_4 pour formaliser les groupements de « multiplication des relations ». Avec de légères modifications il serait aisé de refaire nos

FORMALISATION DES STRUCTURES INITIALES

développements en partant de Ax 1 et Ax 2'. Il nous a paru cependant plus instructif (et plus simple) de commencer la construction de nos « théories » avec Ax 2.

Avant de formuler la *TF* de contiguïté, introduisons encore quelques prédicats et fonctions définis à l'aide de *Sxy*. Du fait de l'unicité par rapport à *y* de *Sxy* on peut définir une « lettre » fonctionnelle *S* par

(D) $Sx = y \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} Sxy$: *Sx* est donc l'opération qui fait « passer » de *x* à son successeur *y* (s'il existe). Nous introduisons aussi des prédicats binaires $S^n xz$ et la fonction correspondante S^n exprimant le fait que *x* est relié à *z* par une « chaîne des itérations de succession ». Nous disons que *z* est « majorant strict » de *x*. Formellement :

$$(D2) S^n xz \Leftrightarrow \exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_{n-1} Sxx_1 \text{ et } Sx_1x_2 \text{ et } \dots \text{ et } Sx_{n-1}z, n > 1$$

$$(D3) S^n x \triangleq S(\dots (Sx) \dots) = z \text{ (avec } S^0 x = x)$$

On a, bien sûr, $S^n x = z \Leftrightarrow S^n xz$

La relation réciproque à *Sxy* : le prédécesseur se définit naturellement par

$$(D4) Pyx \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} S^{-1}yx \Leftrightarrow Sxy \text{ (} x \text{ est prédécesseur de } y, \text{ si } y \text{ est successeur de } x)$$

$$(D4') P^n yx \Leftrightarrow (S^n)^{-1} yx \Leftrightarrow S^n xy$$

Il faut remarque que l'unicité de prédécesseur n'étant pas postulée on ne peut pas encore introduire dans T_1 de fonction P_x formalisant le passage (univoque) du successeur au prédécesseur. Le prédicat d'être « un majorant strict » étant transitif (par opposition à *Sxy*) il sera possible de l'utiliser par la suite pour introduire (dans une théorie sans modèles cycliques) une relation d'ordre.

Toutes ces définitions peuvent être considérées, sinon en tant qu'abréviations, comme axiomes d'introduction de nouveaux symboles dans le langage $L(T_1)$ de T_1 . L'extension de T_1 ainsi obtenue n'est pas « essentielle », car elle est du type d'extension par complétion (axiomatique) conservatrice (voir N° 3).

5. T_2 : THEORIE FORMELLE DE CONTIGUÏTÉ

Complétons T_1 tout de suite par un axiome très fort qui élimine d'emblée les modèles « indésirables » :

² $\stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow}$ ou $\triangleq$ veut dire équivalent ou égal par définition.

Ax 3. Il existe exactement un élément qui majore (strictement) tous les autres : le majorant universel U .

Il est clair que les structures représentées par les graphes tels que M_3 à M_7 , M_9 et M_{10} ne sont plus modèles (nous n'allons pas en faire la preuve formelle ici). Par contre restent comme modèles « les arbres généalogiques », les classifications dichotomiques ou autres, divers types de sériations simples ou à critères multiples ; en bref ce que l'on obtient (sauf erreur) d'un graphe complet d'un « demi-treillis arborescent gradué avec majorant universel » (DTAGU) par la restriction importante suivante : on efface tous les traits reliant un élément à tous ces majorants en laissant subsister seule la liaison de chaque élément à son successeur immédiat (relations de proche en proche et non pas à distance). Nous attirons l'attention sur le fait que les graphes de ces types de treillis sont dessinés habituellement en indiquant seulement les traits reliant les éléments consécutifs et non pas tous les traits allant d'un élément à tous ses majorants ainsi qu'il le faudrait pour représenter fidèlement la relation d'ordre du (demi)-treillis. Ce souci de ne pas surcharger la figure représentant le DTAGU le limite justement à un modèle de T_2 . Le qualificatif « gradué » veut dire pour nous qu'à tout élément x on peut attacher un nombre naturel $n = g(x)$ unique que donne la « longueur » de la chaîne des successeurs menant de x à U . Dans un « arbre généalogique » la classe de tous les x avec le même n forme la n -ème génération de U .

Remarquons que nous sommes à ce stade intéressés exclusivement par des modèles de T_2 avec un nombre fini d'éléments. Les modèles (e.a. mathématiques) présentant des « filaments » infinis vers la gauche : sériations sans éléments initial ou formation sans fin des sous-classes emboîtées n'entrent pas en ligne de compte dans la pratique. On pourrait formuler cette exigence dans un axiome particulier de finitude (F) mais nous ne pensons pas indispensable de le faire maintenant.

Reste à introduire encore formellement dans le groupement l'opération qui représentera p.ex. la jonction de deux sous-classes dans la classe immédiatement englobante. Nous disons jonction et non réunion, car ce « coiffe » p.ex. administrativement d'une manière la plus proche deux cantons suisses c'est la Confédération et non la réunion de ces deux cantons. La « jonction contiguë » de roses et de marguerites dans une classification botanique sera (sauf erreur) la classe des fleurs etc... Si en particulier le modèle représente une classification dichotomique alors les deux sous-classes d'une classe x et x' sont complémentaires l'une de l'autre et la jonction coïncide avec la réunion. Nous dirons que x et y sont contigus si, et seulement si $x = y$ et s'ils ont le même successeur. Introduisons donc par un axiome de définition l'opération « $\vee$ » de jonction contiguë :

$$(AD5) x \vee y = z \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} x \neq y \text{ et } Sxz \text{ et } Syz$$

Cette opération n'est donc effectuable qu'entre deux éléments contigus et fait « passer » de ceux-ci à leur successeur commun z . On voit aisément la commutativité de $\vee$; elle n'est cependant pas associative ; on en construira une, le sup (x, y) , dans l'extension de T_2 à T_3 .

FORMALISATION DES STRUCTURES INITIALES

Remarquons que retrancher x de z ne donne une opération inverse (univoque) à la jonction contiguë que si le successeur z a exactement deux prédécesseurs x et y . C'est le cas des classifications dichotomiques. Dans ce cas et dans ce cas seulement nous pouvons introduire la « soustraction contiguë »

$$(D7) (z \searrow x = y) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (x \swarrow y = z) \text{ et } \forall u (Suz \text{ et } u \neq x \Rightarrow u = y)$$

La parenthèse quantifiée du définiens stipules justement cette dichotomie. Nous pouvons dans ce cas utiliser également, au lieu de $x \swarrow y$, la notation $x \cup y$. On démontre alors aisément p.ex.

$$z \searrow (z \searrow x) = x ; (z \searrow x) \cup x = z ; (x \cup y) \searrow x = y \text{ etc.}$$

En notant (l'unique) complément de x sous z par x' on peut représenter commodément une itération des jonctions contiguës qui en partant d'un élément x peuvent parvenir à la classe totale U .

$$[(x \cup x') \cup (x \cup x')'] \cup [...] \cup \dots = U$$

De même en combinant convenablement les itérations de la jonction contiguë avec les itérations de la soustraction on peut « passer » pas à pas de n'importe quel élément du groupement dichotomique à n'importe quel autre.

Nous pouvons légèrement généraliser l'opération $\swarrow$ pour inclure la possibilité de l'effectuer quand l'un des termes est le successeur z lui-même : jonction « absorbante » ou faible qui peut être utile dans les cas d'addition « tautologique » (dans la terminologie de Piaget).

$$(AD5) (x \swarrow y = z) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (Sxz \text{ ou } x = z) \text{ et } (Syz \text{ ou } y = z)$$

Rappelons que la TFT_2 que l'on pourrait appeler théorie du « groupement des opérations contiguës » a donc des axiomes spécifiques : Ax 1, Ax 2, Ax 3 et (AD5), (resp. (AD5')) ; $L(T_2)$ comporte des symboles Sxy , $\swarrow$ (resp. $\searrow$), U , les autres étant introduits par des définitions « abrégées ». Remarquons que (D2), (D3), (D4') ne sont pas utilisés en principe dans T_2 .

Nous allons maintenant étendre T_2 par une extension conservatrice par définitions à une TFT_3 qui généralise d'une façon naturelle le passage du « groupement de contiguïté » aux groupements dans lesquels on a des relations et des opérations avec des éléments « distants ».

6. TFT_3 du (DTAGU) ou des RELATIONS « A DISTANCE »

Il va de soi qu'il ne peut s'agir ici de donner d'emblée une des formalisations bien connues de ce demi-treillis, mais de l'obtenir essentiellement par l'enrichissement du langage $L(T_2)$. Cela permettra d'analyser en quoi consiste formellement le gain de mobilité opérationnelle du sujet qui atteint ce palier.

On ajoute au $L(T_2)$ les prédicats $S^n xz, S^n x, P^n yx$ (voir définitions correspondantes), ainsi que les prédicats binaires Mxy, Dxy et une opération binaire $x \cup y$ (ou $\sup. (x, y)$) que nous définissons par la suite :

$$(AD8) Mxy \Leftrightarrow (x = y) \text{ ou } \exists (S^n) S^n xy$$

On peut traduire cet axiome de définition par : « soit $x = y$, soit il existe une chaîne de successeurs menant de x à y ». En utilisant une terminologie habituelle nous disons pour Mxy : « y est un majorant (au sens faible) de x ». Il est clair que Mxy possède les propriétés d'un prédicat d'ordre (partiel) non strict. En effet on peut facilement prouver la transitivité de Mxy (de l'associativité des S^n) ainsi que son antisymétrie (par opposition à $S^n xy$, Mxy est réflexive). Introduisons « le minorant » en tant que prédicat réciproque à Mxy :

$$(D9) Dxy \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} M^{-1}xy \Leftrightarrow Myx$$

On peut sans autre écrire pour Mxy : $x \leq y$.

Ax 3 que nous conservons bien entendu de T_2 assure que deux éléments quelconques ont au moins un majorant commun U . Introduisons le terme du « plus petit majorant commun » ou supremum, noté $\sup. (x, y)$ ou $x \cup y$ (en cohérence avec l'écriture habituelle)

$$(AD10) (x \cup y = z) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} Mxz \text{ et } Myz \text{ et } \forall u (Mxu \text{ et } Myu \Rightarrow z \leq u)$$

(la partie quantifiée du définiens stipule que tout majorant commun n'est pas plus petit que $x \cup y$).

Le langage $L(T_3)$ est donc constitué par tous les symboles primitifs de T_2 : Sxy, U et en plus de ceux introduits par les définitions (D1) à (D10) dont quelques-unes (AD) élevées au rang d'axiomes. On obtient ainsi en tant qu'ensemble d'axiomes pour T_3 : Ax 1, Ax 2, Ax 3, (AD5), (AD8) et (AD10).

(cf. remarques sur (D) et (AD) au numéro 3 plus haut). T_3 est donc bien une extension conservatrice à l'aide des définitions de T_2 .

Notons encore que la jonction contiguë, si elle est effectuable, constitue un cas (très) particulier du supremum, étant donné que le successeur est aussi un majorant (particulier), en formules :

$$(1) Sxy \Rightarrow Mxy \text{ (} x \sim y \text{)} = z \Rightarrow (x \cup y = z)$$

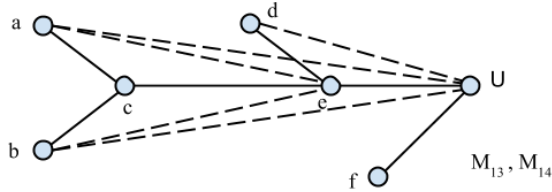
Les propriétés de ce demi-treillis étant bien connues nous nous bornerons ici à en citer les plus importantes (toutes déductibles dans T_3) de manière à voir l'accroissement de mobilité par rapport à T_2 . L'opération « $\cup$ » est commutative et associative et effectuable sur une paire quelconque d'éléments. Il existe une relation d'ordre partiel Mxy et l'on a p.ex. les théorèmes usuels :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} x \cup x = x \text{ idempotence} \\ x \leq z \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \cup y \leq z \\ x \leq z \Leftrightarrow x \cup z = z \text{ (Absorption)} \end{array} \right.$$

FORMALISATION DES STRUCTURES INITIALES

Cette dernière équivalence permet de passer de la relation à l'opération ce qui e.a. indique la possibilité d'interpréter T_3 dans des modèles de sériations ou dans des modèles « d'emboîtement » des classes. Cela révèle aussi l'existence d'une grande variété des modèles intéressants de la théorie T_3 .

Dessignons de petits modèles de T_2 et de T_3 pour illustrer ce rapport d'extension, les éléments (points) $a, b, \dots, U$ de ces modèles étant communs.



Dessignons comme avant Sxy de M_{13} pour T_2 en traits pleins et Mxy de T_3 en pointillés pour M_{14} . Les traits pleins vont se superposer bien sûr sur un sous-ensemble de traits représentant Mxy .

Prenons encore un autre exemple (traité par Piaget) pour T_3 pour illustrer la formation de relations nouvelles. Soit un DTAGU représentant un arbre généalogique des « descendants » masculins de U (moyennant quelques complications du langage tels que frère ou sœur au lieu de frères, parents stricts au lieu de père ou mère, etc., on pourrait aussi y faire figurer l'autre (meilleure) moitié). Sxy y sera interprété en tant que « y père de x », Mxy « y ancêtre de x » (ou x lui-même), $x \cup y$ ancêtre commun le plus proche de x et de y , etc. On peut alors définir entre deux éléments x, y quelconques de ce modèle la relation de « degré de parenté » $dp(x, y)$ p.ex. par la définition explicite suivante où (m, k) est un couple (ordonné) des nombres naturels :

$$dp(x, y) = (m, k) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (S^m x = S^k y = x \cup y) \text{ et } (x \neq y)$$

m est donc la longueur de la chaîne des successeurs de x à l'ancêtre commun $x \cup y$ (de même pour k relativement à y). Ainsi la relation « cousins germains » :

$$Cxy \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \exists z \quad S^2 xz \text{ et } S^2 yz \text{ et } x \neq y$$

x et y ont (au plus près) un grand-père commun aurait un $dp = (2, 2)$.

La relation Gxy : « y est le grand-oncle de x » qui peut être composée de Sxy par :

$$Gxy \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} \exists z (S^3 xz \text{ et } Syz) : (\text{l'arrière-grand-père de } x \text{ est le père de } y) \text{ aurait un } dp = d(3, 1), \text{ etc.}$$

Il est même possible d'introduire un ordre total de ces degrés p.ex. :

$$(m_1, k_1) < (m_2, k_2) \stackrel{\Delta}{\Leftrightarrow} (m_1 + k_1 < m_2 + k_2) \text{ ou si}$$

$$m_1 + k_1 = m_2 + k_2, \text{ alors } m_1 < m_2.$$

De là p.ex. $(2,2) < (3,1)$ ce qui veut dire pour cette relation d'ordre de degrés de parenté (entre éléments de ce demi-treillis) que les cousins germains sont plus « proches » que le grand-oncle à petit-neveu.

Les définitions de C_{xy} et de G_{xy} font apparaître clairement le rôle de la logique dans cette composition des relations construites à partir de S_{xy} . Si cette logique est acquise on peut même introduire le concept d'ensemble (classe) d'éléments qui ont avec un x_0 fixe un dp donné.

7. PASSAGE AU TREILLIS BOOLEEN T_4 . ESQUISSE DU « GROUPEMENT DE LA MULTIPLICATION DES RELATIONS »

En modifiant légèrement T_3 et en la complétant convenablement on peut obtenir de la manière bien connue en algèbre la théorie du treillis booléen. Mentionnons ici brièvement ce treillis car le groupement dit de la multiplication des relations ou « table à double entrée » (TDE) en est un modèle particulier. Formons à partir de T_3 une théorie duale T_3^d en remplaçant le successeur par prédécesseur, $x \cup y$ par $x \cap y$, U par le minorant universel $\emptyset$, etc. Bref, de tout modèle de T_3 on peut construire un modèle de T_3^d en plaçant convenablement un miroir. Il faut faire attention de ne pas réunir simplement les SF du T_3 et du T_3^d car (mise à part leur surabondance) les axiomes d'unicité du successeur et son dual (unicité de prédécesseur) donnerait une théorie d'un intervalle linéairement ordonné (voir dans numéro 8 la filière conduisant à la théorie T_N des nombres).

Pour obtenir des modèles (TDE) p.ex. il faut faire remplacer AX 2 par un axiome plus faible p.ex. Ax 2' (voir numéro 4) (ou dans le cas de (TDE) aussi par AX 2'' : « tout élément a au plus deux successeurs »). Il est possible, avec de légères complications techniques pour certaines définitions d'obtenir une théorie assez analogue à T_3 ; appelons-la T'_3 . Soit T_4 la théorie obtenue par la réunion de $L(T'_3)$ et $L(T_3^d)$ et de leurs axiomes respectifs. Il s'agira d'une extension mais qui n'est plus simple. Il est possible de redéfinir pour le modèle de (TDE) la « jonction contiguë à droite » et la « jonction contiguë à gauche », du fait de l'existence dans ce groupement de deux successeurs. En plus de deux relations qui définissent ce modèle on peut y définir aussi par des techniques logiques habituelles un certain nombre de « relation de parenté » entre éléments non seulement contigus mais « distants ». Il nous faut cependant remarquer que, par opposition au modèle M_{11} , ce modèle nous paraît formellement plus riche. C'est l'extension croissante des théories qui a servi ici de critère de classement pour divers modèles de groupements de Piaget qui se répartissent ainsi « sur » les théories T_2, T_3 et T_4 . Bien entendu la plus grande richesse de $L(T_4)$ permet une « organisation » formelle différente et peut être plus « économique » en postulant d'emblée les axiomes bien connus de ces treillis particuliers. Ici ils apparaissent en tant que théories où l'unicité du successeur a été élargie à deux successeurs au plus pour chaque élément ($= U$).

8. REMARQUE SUR LA FORMATION DE LA THÉORIE DES NOMBRES T_N

On a déjà fait allusion ici à la filière conduisant à la théorie T_N des nombres (de Peano). Faisons encore cette digression pour indiquer l'insertion de T_N dans la filière des théories partant de T_1 et illustrer aussi l'énoncé de Piaget : « le nombre naturel est une synthèse des emboîtements des classes et de la relation asymétrique ».

Reprenons les Ax 1, Ax 2 et complétons par un axiome Ax N3 :

« il y a un élément (unique) $\emptyset$ qui est un minorant universel ». La théorie T_N ainsi obtenue a un même langage que celle de Peano (sans son axiome d'induction, bien sûr) et lui est équivalente. Il est bien connu que l'on obtient un modèle « standard » de T_N par la construction suivante (utilisant des rudiments de la « théorie des ensembles »).

On part de l'ensemble vide $\emptyset$ et on forme par l'opération $Sx = x \cup \{x\}$ (interprétation de « successeur » (D1) dans ce modèle) l'ensemble qui suit immédiatement l'ensemble déjà construit x . La suite d'ensembles ainsi formés

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = x_2, \quad x_2 \cup \{x_2\} = x_3, \quad \dots$$

Forme un modèle de T_N .

On démontre dans ce modèle

(1) Si $x \in y$ alors $y \notin x$ (asymétrie de « $\in$ »)

(2) Si $x \in y$ et $y \in z$ alors $x \in z$

Les éléments des éléments de z sont des éléments de z :

Transitivité de « $\in$ » dans ce modèle.

(3) Si $x \in y$ alors $x \subset y$, les éléments sont des « sous-classes ».

(4) Si $x \subset y$ alors ($x \in y$ ou $x = y$)

(si x est un sous-ensemble strict (classe « emboîtée ») de y alors x est aussi un élément de y).

(5) Si $x \subset y$ et $y \subset x$ alors $x = y$

La relation « $\in$ » est donc une relation d'inégalité (de sériation) d'après (1) et (2).

Nous voyons que cette structure est un modèle du groupement de sériation (avec l'interprétation indiquée de Sx).

(3), (4) et (5) expriment que ce modèle est en même temps une groupement d'emboîtement des classes avec la même interprétation de Sx .

La construction de ce modèle illustre ainsi la synthèse citée de Piaget.

9. DEVELOPPEMENTS POSSIBLES

On peut dégager de la théorie T_3 des semi-groupes, des monoïdes et certaines autres structures que l'on pourrait appeler des groupes partiels. Ces structures peuvent être définies en particulier sur tout « intervalle » $I_n(x_0)$, qui est un ensemble ordonné (fini) de tous les majorants d'un élément $x_0 (\neq U)$ jusqu'à y compris $x_n (\leq U_n)$.

En particulier soit cet intervalle = $(0, 1, 2, \dots, n)$.

Il est possible en partant de ce « groupement » où $Sxy \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} (y = x + 1)$ de définir une addition et soustraction « absorbantes » dont le domaine et co-domaine seraient l'intervalle donné. Pensons à un jeu d'allumettes avec une réserve fixe N et les opérations : ajouter ou enlever des allumettes à des tas déjà posés. Ces opérations requièrent déjà des axiomes de définition du type récursif.

Nous pensons que le lecteur pourra voir la grande variété d'extensions et de combinaisons des théories qui se rattachent à la filière indiquée ici. Si les filiations théoriques reflètent le développement psychogénétique réel, alors les méthodes logico-mathématiques contiennent aussi une méthodologie pour la recherche des filiations des stades ultérieurs. Si tel est le cas, il sera sans doute possible d'en dégager aussi de précieuses indications pédagogiques.

RESUME

Cette communication débute par une description de quelques principes d'extension des théories formelles en particulier par l'enrichissement du langage. On indique les rapports entre une théorie formelle, ses modèles et la « réalité » qu'ils cherchent à représenter. On admet que ces rapports reflètent e.a. l'activité de formalisation et d'interprétation en psychogenèse. On décrit une filière T_1 , T_2 , etc. des théories qui formalisent à l'aide du concept de successeur les opérations du « pas à pas » qui se composent ensuite en relations ou opérations « à distance ». On peut formaliser ainsi les divers groupements décrits par Piaget et divers autres structures intéressant la psychogenèse.

ZUSAMMENFASSUNG

Im ersten Teil dieser Arbeit werden gewisse Arten von Erweiterungen von formalen Theorien angedeutet. Es werden einige für die Psychogenetik wichtige Zusammenhänge zwischen einer formalen Theorie und ihren Modellen aufgeführt. Anschliessend wird eine Folge $T_2, T_3, \dots$ von Theorien konstruiert, die von Nachbarschaftsoperation ausgehend, die Entwicklungsstadien von mehr zusammengesetzten und autonomen Operationen beschreibt. Dabei werden die von Piaget beschriebenen verschiedenen Gruppierungen formalisiert. Es wird zudem die Möglichkeit erwähnt, in diesem Rahmen weitere der Psychogenetik interessierende Strukturen anzuschliessen.

SUMMARY

In the first part of the paper there is a description of logical principles of extension of formal theories (in particular of conservative extensions and extensions through definitions). The correspondence of a certain formal theory to some initial structures of Psychogenetics is discussed. There is a formalization of a sequence of theories which represents the development starting with elementary "step by step" operations and going on to more complicated structures. It was possible i.e. to formalize within this sequence the "groupements" of Piaget. Possibilities of adding further interesting structures are indicated.

BIBLIOGRAPHIE

- 1) L'introduction par Jean Piaget et l'article de J.B. Grize in « Problèmes de la construction du nombre » vol. XI d'Etudes d'Epistémologie Génétique, PUF Paris, 1960.
 - 2) Jean Piaget : « Essai de logique opératoire » 2^{ème} édition établie par J.B. Grize, Dunod Paris, 1972
 - 3) S.C. Kleene : « Mathematical Logic », John Wiley & Co., 1967
 - 4) E. Mendelsohn : « introduction to Mathematical Logic » Van Nostrand, 1964
- 3) et 4) contiennent de vastes indications bibliographiques des questions logico-mathématiques.