BIBLIOTHÈQUE DE PHILOSOPHIE CONTEMPORAINE
FONDÉE PAR FÉLIX ALCAN

INTRODUCTION
A
L'ÉPISTÉMOLOGIE GÉNÉTIQUE

1 / *La pensée mathématique*

PAR

JEAN PIAGET
Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE
108, BOULEVARD SAINT-GERMAIN, PARIS
1973

Préface de la première édition

Le fait qu'un psychologue ayant consacré une quinzaine d'ouvrages au développement de l'intelligence chez l'enfant en vienne à écrire une Epistémologie nécessite quelques explications, auxquelles il est d'ailleurs difficile de donner une autre forme que celle d'une confession.

Au temps de nos études en zoologie, un double intérêt pour les problèmes de variation et d'adaptation et pour les questions logiques et épistémologiques nous a fait rêver de construire une épistémologie biologique fondée exclusivement sur la notion de développement. Un recours à la psychologie concrète s'imposait alors, et avant tout à cette embryologie de la raison qu'est l'étude de l'intelligence enfantine. Nous nous sommes donc mis à quelques recherches préalables sur la logique de l'enfant, auxquelles nous pensions consacrer quatre ou cinq années au plus. Ces travaux préliminaires nous ont pris près de trente ans et ne sont pas terminés…

Mais si nous nous sommes gardé des généralisations trop rapides, quant à la constitution de cette épistémologie génétique dont nous essayons aujourd'hui de fixer les linéaments, nous n'avons jamais perdu un tel but de vue. Nous nous sommes efforcé, en particulier, de conserver un contact suffisant avec l'histoire des sciences elles-mêmes. Comme le disait P. Janet, les cours sont faits pour dire les choses dont on n'est pas encore sûr : le libéralisme intellectuel de la Faculté des Sciences de Genève, et d'Ed. Claparède qui y enseignait alors la psychologie expérimentale, nous a permis d'occuper pendant plus de dix ans une chaire d'histoire de la pensée scientifique. Le présent ouvrage est le résultat de cette comparaison, à laquelle nous nous sommes constamment voué, entre la psychogenèse des opérations intellectuelles et leur déroulement historique.

C'est avant tout à nos collègues de la Faculté que va notre reconnaissance au terme de cet effort. Sans les conversations que nous avons eues sans cesse avec des représentants des sciences exactes qui comprenaient le point de vue du psychologue, nous

aurions eu peine à persévérer. Nous pensons en particulier à Ch.-Eug. Guye, jadis, puis à R. Wavre, J. Weiglé et E. Stuckelberg, E. Guyénot, L. Féraud, A. Ammann, ainsi qu'à M. Chavannes, assistant de mathématiques.

Un mot encore quant à la composition de cet ouvrage. Nous nous sommes trouvé constamment pris entre deux écueils. Ecrivant pour des épistémologistes, il n'était pas question de supposer qu'ils aient lu le détail de nos recherches sur la psychologie de l'intelligence enfantine : il fallait donc en résumer sur chaque point l'essentiel pour assurer la liaison avec la discussion proprement épistémologique. Mais, d'autre part, destinant également cet ouvrage aux psychologues eux-mêmes, qu'une épistémologie purement génétique concerne assurément aussi, il s'agissait de ne point trop se répéter quant aux données de faits. Nous avons donc cherché à conserver un juste milieu, comme lorsqu'on navigue entre Charybde et Scylla, usant en particulier du petit texte et de renvois divers. Le même problème s'est posé quant aux régions limitrophes entre le présent ouvrage et le Traité de Logique *que nous publions ailleurs*[1] *et qui contient les développements logistiques impossibles à fournir ici.*

Quant au plan de cet essai, le présent tome I, réservé à la pensée mathématique, sera suivi d'un tome II, portant sur la pensée physique, et d'un tome III au cours duquel seront examinées les principales formes de la pensée scientifique en biologie, en psychologie et en sociologie.

J.P.

1. A. Colin, 1949.

Préface de la seconde édition

C'est naturellement presque toujours un plaisir pour un auteur de voir que lecteurs et éditeurs demandent une nouvelle édition de l'un de ses ouvrages lorsqu'il est épuisé. Malheureusement, en mon cas, je ne parviens à être satisfait que de mes publications les plus récentes et surtout de celles que je suis en train ou que je projette de rédiger, étant toujours profondément convaincu de l'insuffisance de mes explications ou démonstrations antérieures donc de la nécessité de reprendre les problèmes en m'appuyant sur de nouveaux faits et en réorganisant les bases théoriques de départ. C'est là, bien sûr, une attitude très fâcheuse à l'égard des lecteurs, quoique subjectivement assez stimulante puisqu'elle recule indéfiniment la mise au point finale en cherchant à l'améliorer.

Je vais donc essayer de me libérer de cette perspective ambivalente pour me placer au point de vue du lecteur et pour chercher les raisons de cette sorte d'obligation que l'on me présente de rééditer les deux premiers volumes et la conclusion de cette Introduction à l'épistémologie génétique*. Le motif principal en est, il va de soi, qu'il s'agissait précisément d'une* Introduction *et que si celle-ci a pu jouer son rôle, c'est-à-dire d'* « *introduire* » *à de nouvelles recherches, il peut être utile, au vu de celles-ci, de reconstituer les principes généraux qui en ont nécessité le déroulement. Or ces nouvelles recherches ont été l'œuvre d'une équipe et même d'une suite ininterrompue d'équipes : celles des membres et collaborateurs du* « *Centre international d'Epistémologie génétique* », *qui ont élaboré et publié en commun les volumes I à XXIX des* Etudes d'épistémologie génétique *(plusieurs autres sont presque achevés). Rééditer mon* Introduction *et en rappeler les lignes directrices, c'est donc, en fait, réanimer et expliciter les croyances collectives qui nous ont inspirés et, vu sous cet angle, j'aperçois mieux l'utilité de cette résurrection d'un passé qui, grâce au travail de chercheurs de valeur exceptionnelle, est bien davantage qu'un passé puisqu'il s'agit d'un effort toujours actuel et de l'effort de tout un groupe.*

Les deux idées centrales de cette Introduction *sont que la nature et la validité des connaissances dépendent étroitement de leur mode de formation et que pour atteindre celui-ci il est nécessaire de recourir aux méthodes éprouvées des analyses historico-critiques, sociogénétiques et surtout psychogénétiques (pour ce qui est des stades élémentaires), combinées dans la mesure du possible avec les exigences de la formalisation. L'objection couramment présentée à de tels principes directeurs consiste naturellement à dire que la validité d'une connaissance est une chose, ne dépendant que de considérations normatives, et que le processus formateur en est une autre, ne dépendant que de conditions de fait et donc sans relation avec l'évaluation. Or il y a là un malentendu fondamental que la réédition de cette* Introduction *pourrait aider à dissiper si on la relit à la lumière de ce qui a été produit depuis. L'objection en question suppose, en effet, l'existence de trois rouages ou de trois personnages distincts dans l'analyse de tout acte de connaissance : (1) Le sujet de cette connaissance, qui raisonne à sa manière selon son niveau, son degré d'information, etc. ; (2) L'historien, le sociologue ou le psychologue, qui étudie le processus ayant conduit le sujet à son état de connaissance actuel ; et (3) L'épistémologiste qui évalue cette connaissance des sujets, à la lumière de normes que ce troisième personnage se charge de fournir au nom d'une philosophie déterminée. Or ce que l'on n'arrive pas à faire comprendre à certains philosophes adversaires de l'épistémologie génétique est que l'acteur n° 2 (le psychologue, etc.) ne songe pas le moins du monde à jouer le rôle de l'acteur n° 3 (le normativiste), mais seulement à rendre sa valeur à l'acteur n° 1 (le sujet de connaissance). Cela conduit évidemment à cette conséquence fâcheuse de rendre inutile l'acteur du n° 3, mais au profit du sujet lui-même et non pas de l'acteur n° 2 qui se borne en fait à décrire comment ce sujet actif et responsable en est venu par ses propres moyens à résoudre ses propres problèmes.*

En effet, lorsqu'on nous dit que le processus formateur n'est pas explicatif ni ne saurait constituer une source suffisante d'évaluation normative, on oublie délibérément trois faits essentiels. On oublie d'abord que le processus n'est pas autre chose que le déroulement des activités d'un « sujet », c'est-à-dire d'activités créatrices de normes, et qu'il ne s'agit donc pas d'une succession psychologique quelconque de simples états de conscience. On néglige en second lieu ce fait fondamental que le sujet se suffit à lui-même dans l'élaboration de ses normes : qu'il s'agisse d'un bébé de dix mois découvrant la permanence des objets ou d'Einstein en personne construisant ses théories, le sujet n'a besoin ni du philosophe

(personnage n° 3) ni du psychologue (acteur n° 2) pour l'aider à raisonner, car il se suffit à lui-même (en tant qu'individu ou que sujet plus ou moins socialisé ou encore collectif) et corrige tout seul ses erreurs. Mais, troisièmement, on oublie aussi que, si le sujet est normativement autonome, il a eu besoin d'un développement pour en arriver là, car il n'a cessé de modifier ses propres normes et il constitue donc la résultante d'un tel processus : or il n'en connaît lui-même qu'une infime partie et c'est pourquoi il faut une analyse extérieure à lui pour le reconstituer. Il s'ensuit alors que l'acteur n° 2 est nécessaire, non pas, insistons-y, en tant que prescrivant des normes, mais exclusivement en tant que cherchant à décrire et à expliquer ce qu'ont fait les sujets en leur autonomie normative radicale de constructeurs aux prises avec les objets et avec la réalité tout entière.

Tel est donc le sens de l'épistémologie génétique, et l'on voit que, si elle tend à contester l'impérialisme des philosophies, qui tendent à déposséder le sujet de sa liberté créatrice en voulant le subordonner aux normes d'une classe privilégiée de sujets extérieurs à lui, comme si la science ne se suffisait pas à elle-même, elle ne vise nullement à y substituer un nouvel impérialisme : tout au contraire, elle ne cherche qu'à analyser le travail réel de la pensée en marche, qu'il s'agisse de celle des travailleurs scientifiques comme de cette immense masse d'activités cognitives préscientifiques débutant dès le passage de la vie organique aux comportements élémentaires. L'épistémologie génétique s'est donc assigné une tâche immense, quoique essentiellement limitée et même modeste quant aux pouvoirs qu'elle s'attribue. Elle ne se demande pas avec l'épistémologie philosophique « Comment la connaissance est-elle possible? » et cela dans l'absolu. Elle pose simplement la question sous la forme : « Comment les connaissances se sont-elles rendues possibles? » ou « sont-elles devenues réelles? ». Or, comme toute connaissance même scientifique est perpétuellement en devenir, ainsi qu'y ont insisté les néo-kantiens (H. Cohen, etc.), ce problème revient finalement à s'énoncer sous la forme : « Comment les connaissances parviennent-elles à s'accroître, en compréhension ainsi qu'en extension? », donc en qualité ainsi qu'en quantité, mais en insistant à nouveau sur le fait que cette qualité et cette quantité sont évaluées normativement par les sujets eux-mêmes, niveau par niveau et non pas par le généticien. L'œuvre propre à ce dernier est donc comparable (nous l'avons dit ailleurs) à celle des « arts poétiques » lorsque leurs auteurs ont eu la sagesse de se borner à chercher comment a procédé le poète, au lieu de vouloir le précéder et lui faire la leçon, tandis que les épistémologies philosophiques souhai-

teraient se substituer au travail du sujet, c'est-à-dire en fait, écrire elles-mêmes la poésie au lieu de laisser faire le poète.

Ainsi conçue l'épistémologie génétique comporte des recherches essentiellement interdisciplinaires. L'analyse de toute forme particulière de connaissance suppose, en effet, la collaboration de spécialistes de la discipline en question, d'historiens à même d'en retracer la sociogenèse, de psychologues pour étudier la formation des notions élémentaires de départ, de logiciens et de cybernéticiens pour élaborer les modèles formels [1] *ou « artificiels », etc. A vrai dire, tout ce monde serait évidemment inutile si chaque sujet de connaissance était en possession d'une mémoire complète et infaillible lui permettant de retracer la genèse de ses propres idées jusqu'aux premières semaines de son existence et surtout d'un pouvoir d'introspection non moins perfectionné lui révélant les structures profondes et le fonctionnement caché de sa pensée. Mais comme l'activité cognitive est orientée vers la solution des problèmes nouveaux que soulève la réalité et non pas vers la conservation ou la reconstitution d'un passé interne et révolu, aucun créateur scientifique, si puissant que soit son génie, n'est à même de dominer les questions dont relève la formation presque totalement inconsciente de sa propre intelligence : d'où le travail considérable qu'exige l'étude des processus génétiques, qui cherche à retracer niveau par niveau ce que le sujet parvient à « faire » et non pas simplement ce dont il prend conscience.*

Cette exigence interdisciplinaire explique les lacunes de cette Introduction *puisque nous étions alors seul à tenter de l'écrire. D'où le nombre de recherches qui sont venues la compléter depuis. En ce qui concerne la pensée logico-mathématique, nous pouvons signaler les volumes IV, IX, XI, XIII, XVI-XIX, XXIII-XXIV des* Etudes d'épistémologie génétique *et pour les problèmes généraux le volume XIV que nous avons eu le privilège d'écrire avec le logicien E. W. Beth :* Epistémologie mathématique et psychologie. *Pour ce qui est de la pensée physique, le Centre d'Epistémologie a consacré quelques années, avec l'aide de physiciens tels que L. Rosenfeld, F. Souriau, F. Halbwachs, R. Garcia et de théoriciens ou historiens tels que M. Bunge et Th. S. Kuhn, à un réexamen systématique des problèmes de la causalité. Plus d'une centaine de recherches expérimentales ont été conduites sur les situations les plus variées (transmissions de mouvements, compositions vectorielles, actions et réactions, etc.) et les volumes XXV*

1. Il convient de préciser que ces modèles formels ne sont nullement des normes imposées au sujet, mais seulement des schémas aidant à comprendre ses propres normes.

à XXIX des Etudes *y ont déjà été consacrés, en particulier le volume XXV sur* Les théories de la causalité *où quatre des auteurs précédents ainsi que le signataire de ces lignes ont discuté les principales interprétations possibles de ce qu'est l'explication causale.*

*Sur ces différents terrains il existe une continuité assez grande entre ce que suggérait l'*Introduction *que nous rééditons aujourd'hui et les travaux qui en sont issus. En revanche, il nous paraît inutile de reproduire les chapitres concernant la pensée biologique et les sciences humaines, car nous venons de retravailler entièrement ces sujets, d'une part, en un ouvrage sur* Biologie et connaissance *pour la collection de J. Rostand (« L'avenir de la science ») [1] et, d'autre part, à l'occasion d'une grande publication de l'Unesco sur les* Tendances actuelles des sciences de l'homme. *Les trois chapitres que nous avons été chargé d'écrire pour ce gros ouvrage, l'un sur la situation de ces disciplines dans le système des sciences, le second sur la psychologie et le troisième sur les mécanismes communs se retrouvant dans les différentes branches sociales et humaines, ont été réunis par l'Unesco en un petit volume de la collection « Idées » (Gallimard) sous le titre de* Epistémologie des sciences de l'homme.

Mais il va de soi que c'est l'interprétation de la pensée logico-mathématique et de la pensée physique qui posait les plus grands problèmes à l'épistémologie génétique, car, si tout ce qui est vivant en général, et humain en particulier, est soumis au devenir et demeure donc solidaire de genèses, la pensée logico-mathématique vise l'intemporel et les lois ou les causes physiques demeurent permanentes dans le temps. Les solutions que proposait la présente Introduction, *et que les recherches ultérieures semblent avoir confirmées, consistent, d'une part, à lever l'antinomie de l'intemporel et de la genèse en s'appuyant sur la réversibilité progressive des structures opératoires, solidaire de leur équilibration graduelle, et, d'autre part, à invoquer un mode d'abstraction distinct de celui de l'abstraction aristotélicienne : tandis que celle-ci procède à partir des objets, l'abstraction réfléchissante tire ses informations des actions que le sujet exerce sur les objets, ce qui n'est nullement pareil, et surtout de la coordination entre de telles actions, fournissant ainsi aux paliers supérieurs la raison des liaisons extraites des paliers inférieurs. C'est ce processus fondamental qui paraît constituer le foyer des créations continuelles de normes, dont les remarques précédentes faisaient la caractéristique cognitive essentielle des activités du sujet.*

J. P.

Mars 1972.

1. Cet essai vient d'être réédité dans la collection « Idées ».

Introduction

OBJET ET MÉTHODES DE L'ÉPISTÉMOLOGIE GÉNÉTIQUE

Il y a longtemps déjà que la psychologie expérimentale, la sociologie et la logistique, ou logique algébrique, pour ne parler que des disciplines qui ont fourni le plus de travaux collectifs, se sont constituées à titre de sciences distinctes, indépendantes des discussions d'ensemble de la philosophie. Nous voudrions examiner à quelles conditions il pourrait en être ainsi de l'épistémologie génétique, ou théorie de la connaissance scientifique fondée sur l'analyse du développement même de cette connaissance. Il s'agit donc de chercher s'il est possible d'isoler l'objet d'une telle discipline et de constituer des méthodes spécifiques, propres à trouver la solution de ses problèmes particuliers.

§ 1. L'ÉPISTÉMOLOGIE GÉNÉTIQUE CONSIDÉRÉE COMME UNE SCIENCE. — La philosophie a pour objet la totalité du réel, de la réalité extérieure comme de l'esprit et des relations entre eux. Embrassant tout, elle ne dispose à titre de méthode propre que de l'analyse réflexive. En outre, ne devant rien négliger de la réalité, les systèmes qu'elle construit englobent nécessairement l'évaluation comme la constatation, et révèlent ainsi tôt ou tard d'irréductibles oppositions, tenant à la diversité des valeurs qui se proposent à la conscience humaine. D'où l'hétérogénéité des grands points de vue traditionnels qui réapparaissent périodiquement au cours de l'histoire de la métaphysique.

Une science se donne, au contraire, un objet limité, et ne débute même, à titre de discipline scientifique, qu'avec la réussite d'une telle délimitation. Poursuivant la solution de questions particulières, elle se construit une ou plusieurs méthodes spécifiques, permettant de réunir de nouveaux faits et de coordonner les interprétations dans le secteur de recherche qu'elle a préalablement circonscrit. Tandis que les philosophies se

heurtent aux divergences inévitables d'évaluation qui séparent les unes des autres les conceptions d'ensemble portant simultanément sur la vie intérieure et sur l'univers, une science atteint un accord relatif des esprits : mais c'est dans la mesure où elle ne sollicite cet accord que pour la solution de problèmes restreints et dans l'emploi de méthodes également bien définies.

S'il n'existe pas de frontière absolue entre la philosophie et les sciences, leur esprit est cependant bien différent. Il n'y a pas de frontière absolue entre elles, puisque l'une porte sur le tout et l'autre sur les aspects particuliers du réel. On ne peut donc jamais décider *a priori* si un problème est de nature scientifique ou philosophique. En pratique, et *a posteriori*, on constate que sur certains points l'accord des esprits est possible (p. ex. le calcul de la probabilité d'un phénomène, les lois de l'hérédité ou la structure d'une perception) tandis que sur d'autres il s'avère difficile (p. ex. la liberté humaine, etc.). On dira donc que les premiers sont de caractère scientifique et les seconds d'ordre philosophique, mais cela signifie simplement que l'on a réussi à isoler les premiers problèmes de manière à ce que leur solution ne mette pas tout en question, tandis que les seconds demeurent solidaires d'une suite indéfinie de questions préalables nécessitant une prise de position quant à la totalité du réel. Seulement c'est là un simple état de fait et il arrive fréquemment qu'un problème considéré traditionnellement comme philosophique puisse devenir scientifique grâce à une nouvelle délimitation. C'est ce qui s'est produit précisément pour la plupart des problèmes psychologiques : on peut aujourd'hui étudier les lois de la perception et le développement de l'intelligence, sans être obligé de prendre parti quant à la nature de l' « âme ».

Mais, s'il n'y a pas de frontière fixe entre les questions philosophiques et scientifiques, l'esprit dans lequel on les traite demeure essentiellement distinct, du fait même que, dans le second cas, on s'efforce de faire abstraction de l'ensemble des autres problèmes, tandis que dans le premier, il s'agit au contraire de relier tout à tout, sans que l'on ait le désir, ni même le droit, de pratiquer de telles coupures. On pourrait presque dire, sans y mettre de malice, que le philosophe est un théoricien qui se trouve obligé de s'occuper et de parler de tout à la fois, tandis que l'homme de science s'astreint à sérier les questions et se donne ainsi le temps de trouver une méthode particulière pour chacune.

Là est donc le noeud du problème. Lorsqu'une discipline, telle que la psychologie expérimentale, se sépare de la philo-

sophie pour s'ériger en science autonome, cette décision de ses représentants ne revient pas à s'attribuer, à un moment donné, un brevet de sérieux ou de valeur supérieure. Elle consiste simplement à renoncer à certaines discussions qui divisent les esprits et à s'engager, par convention ou *gentleman's agreement*, de ne parler que des questions abordables par l'emploi exclusif de certaines méthodes communes ou communicables. II y a donc, dans la constitution d'une science, un renoncement nécessaire, une détermination de ne plus mêler, à l'exposé aussi objectif que possible des résultats que l'on atteint ou des explications que l'on poursuit, les préoccupations auxquelles on tient peut-être bien davantage par-devers soi, mais que l'on s'oblige à laisser en dehors des frontières tracées. C'est pourquoi l'accord des esprits est réalisable, même en psychologie expérimentale, p. ex., où un problème de perception comportera des solutions semblables à Moscou, à Louvain ou à Chicago, indépendamment des philosophies les plus différentes de chercheurs qui appliquent des méthodes analogues de laboratoire.

Seulement, si de tels renoncements peuvent apparaître, lors de la constitution d'une science, comme des appauvrissements, c'est en fait toujours grâce à ces délimitations qu'a progressé le savoir humain. Toute l'histoire de la pensée scientifique, des mathématiques, de l'astronomie et de la physique expérimentale jusqu'à la psychologie moderne, est celle d'une scission progressive des sciences particulières et de la philosophie. Mais, en retour, c'est dans la réflexion sur les progrès accomplis par les sciences devenues indépendantes que la philosophie a trouvé ses renouvellements les plus féconds : Platon, Descartes, Leibniz et Kant en sont les illustres témoins.

Or, la question, de la délimitation se pose aujourd'hui à l'épistémologie elle-même, eu égard aux synthèses philosophiques totales, et cela, d'une part, en fonction du progrès de certaines de ses méthodes particulières, et, d'autre part, en fonction de la crise actuelle des rapports entre les sciences et la philosophie.

Si la différenciation croissante des disciplines particulières a eu pour la science les résultats heureux que l'on sait, elle a momentanément abouti, en effet, à cette conséquence catastrophique pour la philosophie de laisser croire à un grand nombre d'esprits éminents, ne parvenant plus à suivre le détail des travaux spécialisés, que la réflexion philosophique constituait une spécialité comme une autre. Alors qu'aux grandes époques, c'étaient les mêmes hommes qui œuvraient dans la recherche quotidienne de leur science et qui, par intervalles, livraient les

synthèses qui ont marqué les étapes essentielles de l'histoire de la philosophie, on croit pouvoir aujourd'hui, en des facultés universitaires dépourvues de laboratoires et d'enseignement mathématique, se préparer à devenir philosophe, c'est-à-dire faire de la synthèse sans travail spécialisé préalable, ou plus précisément faire de la synthèse comme s'il s'agissait d'une spécialisation légitime. Descartes, dont le nom évoque cependant la philosophie autant que la géométrie analytique, conseillait de s'adonner à la réflexion philosophique un seul jour par mois, les autres devant être consacrés à l'expérience ou au calcul. Or, il est aujourd'hui toléré d'écrire des livres de philosophie sans avoir soi-même contribué à l'avancement des sciences, ne fût-ce que par les modestes découvertes demandées pour une thèse de doctorat, dans l'une quelconque des disciplines scientifiques.

Le résultat courant d'une telle répartition du travail, entre ceux qui font profession de s'occuper des questions particulières et ceux qui croient pouvoir se consacrer d'emblée à la méditation sur l'ensemble du réel, est alors conforme à la logique des choses. D'une part, on voit des philosophes parler *de omni re scibili* comme s'il était possible d'atteindre toute vérité par simple « réflexion » : p. ex. juger de la perception sans avoir jamais mesuré un seuil différentiel en laboratoire ou discuter les résultats des sciences exactes sans connaître par expérience personnelle aucune technique de précision. Cependant l'histoire montre assez que la discussion du travail des autres n'est féconde qu'à la condition d'avoir fourni soi-même, sur un point si restreint soit-il, un effort effectif analogue. Et, à voir le talent dépensé trop souvent en vain par tant d'esprits profonds et ingénieux, on se désole d'autant plus que les énergies ne soient pas mieux distribuées entre la recherche des faits et l'analyse proprement réflexive, par l'organisation universitaire issue du divorce des sciences et de la philosophie. En particulier, si les philosophes avaient davantage contribué au développement de la psychologie expérimentale, sous ses aspects les plus larges et les plus divers, la connaissance de l'esprit humain en eût été décuplée : or, la perte du contact avec les laboratoires scientifiques conduit les analystes les mieux doués à l'idée que les faits mentaux peuvent être étudiés sans quitter sa bibliothèque ou sa table de travail.

Mais, d'autre part, et en accord avec la tradition séculaire de la philosophie issue de la réflexion sur les sciences, un nombre toujours plus grand de savants spécialisés fournissent eux-mêmes les matériaux de l'épistémologie contemporaine. A part une élite de philosophes qui ont réagi avec la vigueur que l'on sait contre

la simple spéculation, en s'initiant eux-mêmes aux sciences, ce sont, en effet, les mathématiciens, les physiciens, les biologistes qui alimentent souvent aujourd'hui les discussions les plus fécondes sur la nature de la pensée scientifique et de la pensée tout court. Bien plus, incertains du secours qu'ils pourront tirer de la philosophie d'école, il leur arrive de délimiter, à l'intérieur d'un champ jusque-là commun à l'épistémologie philosophique et aux parties les plus générales des sciences, des terrains spéciaux de discussions et de recherche : tel le problème dit du fondement des mathématiques.

D'où la question aujourd'hui soulevée en bien des milieux : l'épistémologie est-elle nécessairement solidaire d'une philosophie d'ensemble, ou peut-on parvenir, pour autant que l'avantage s'en fasse sentir, à isoler les problèmes épistémologiques sous une forme telle que chacun contribue à leur solution indépendamment des positions métaphysiques classiques ?

Toute philosophie suppose une épistémologie, cela s'entend de soi-même : pour embrasser simultanément l'esprit et l'univers, il s'agit au préalable de fixer comment l'un des deux termes est relié à l'autre et ce problème constitue l'objet traditionnel de la théorie de la connaissance. Mais la réciproque n'est vraie qu'au cas où l'on décide de s'installer d'emblée dans la connaissance en général ou la connaissance en soi, position du problème qui, nous l'accordons sans peine, implique à la fois une philosophie de l'esprit connaissant et une philosophie de la réalité à connaître.

Seulement, le propre des sciences particulières consiste précisément à n'aborder jamais de front les questions trop riches en implications, et à dissocier les difficultés de manière à les sérier. Une épistémologie soucieuse d'être elle-même scientifique se gardera donc de se demander d'emblée ce qu'est la connaissance, autant que la géométrie évite de décider au préalable ce qu'est l'espace, que la physique se refuse à chercher dès l'abord ce qu'est la matière, ou même que la psychologie renonce à prendre parti, au départ, sur la nature de l’esprit.

Il n'y a pas, en effet, pour les sciences, une connaissance en général ni même une connaissance scientifique tout court. Il existe de multiples formes de connaissance, dont chacune soulève un nombre indéfini de questions particulières. Et, même en ce qui concerne les grands types de connaissances scientifiques spécialisées, il serait encore bien chimérique aujourd'hui de prétendre rallier une opinion commune sur ce qu'est la connaissance mathématique, p. ex., ou physique, ou biologique, prises chacune en bloc.

Par contre, à analyser une découverte circonscrite dont on peut retracer l'histoire, ou une notion distincte, dont il est possible de reconstituer le développement, il n'est pas exclu que l'on parvienne à une convergence suffisante des esprits dans la discussion de problèmes posés de la façon suivante : comment la pensée scientifique en jeu dans les cas envisagés (et considérés avec une délimitation déterminée) a-t-elle procédé d'un état de moindre connaissance à un état de connaissance jugé supérieur ?

Autrement dit, si la nature de la connaissance scientifique en général est un problème encore philosophique, parce que nécessairement lié à toutes les questions d'ensemble, il est sans doute possible, en se situant *in medias res*, de délimiter une série de questions concrètes et particulières, s'énonçant sous la forme plurale : comment s'accroissent les connaissances ? En ce cas la théorie des mécanismes communs à ces divers accroissements, étudiés inductivement à titre de faits s'ajoutant à d'autres faits, constituerait une discipline s'efforçant, par différenciations successives, de devenir scientifique.

Or, si tel est l'objet de l'épistémologie génétique, il est facile de constater, à la fois, combien une telle recherche est déjà avancée, grâce à un nombre considérable de travaux spécialisés, mais aussi combien il est fréquent, dans la discussion des questions ainsi posées, de revenir, par une sorte de glissement involontaire, aux thèses trop générales de l'épistémologie classique. Ou bien une série de monographies historiques et psychologiques, sans lien suffisant entre elles, ou un retour à la philosophie même de la connaissance, tels sont les deux dangers à éviter, et seule une méthode stricte peut sans doute y parer.

§ 2. LA MÉTHODE GÉNÉTIQUE EN ÉPISTÉMOLOGIE. — Déterminer comment s'accroissent les connaissances implique que l'on considère, par méthode, toute connaissance sous l'angle de son développement dans le temps, c'est-à-dire comme un processus continu dont on ne saurait jamais atteindre ni le commencement premier ni la fin. Toute connaissance, autrement dit, est à envisager toujours, méthodologiquement, comme relative à un certain état antérieur de moindre connaissance, et comme susceptible de constituer elle-même un tel état antérieur par rapport à une connaissance plus poussée. Même une vérité dite éternelle, telle que 2 + 2 = 4 peut être interprétée comme une telle étape génétique car, d'une part, il s'agit d'une connaissance que tout sujet pensant ne possède pas, et dont

il convient par conséquent d'étudier la formation à partir de connaissances moindres ; d'autre part, même si elle est définitive (et indépendamment de sa nature de connaissance « réelle » ou de « syntaxe logique », de convention, etc.), une telle connaissance est susceptible d'accroissements ultérieurs, en s'insérant dans des systèmes opératoires toujours plus riches et mieux formalisés : un développement extrêmement complexe s'intercale ainsi entre la constatation empirique, faite sur un abaque, que 2 + 2 = 4, ou encore entre la conception pythagoricienne de la même vérité, et ce qu'elle est devenue p. ex. dans les *Principia mathematica* de Russell et Whitehead.

En d'autres termes, la méthode génétique revient à étudier les connaissances en fonction de leur construction réelle, ou psychologique, et à considérer toute connaissance comme relative à un certain niveau du mécanisme de cette construction. Or, contrairement à une opinion répandue, nous allons chercher à montrer qu'une telle méthode ne préjuge en rien des résultats auxquels son emploi aboutit et qu'elle est même la seule à présenter cette garantie, mais la condition de pousser le point de vue génétique jusqu'en ses conséquences extrêmes. L'opinion contraire prévaut il est vrai généralement, c'est-à-dire que les considérations psychogénétiques sont souvent soupçonnées par les épistémologistes de conduire nécessairement à une sorte d'empirisme, tandis qu'elles pourraient aussi bien aboutir à des conclusions aprioristes ou mêmes platoniciennes, si les faits en décidaient ainsi. Mais la raison de ce préjugé contre la méthode génétique tient simplement à cette circonstance que certaines théories célèbres dans l'histoire des idées, de l'évolutionnisme de Spencer aux théories plus récentes de F. Enriques, p. ex., sont en réalité demeurées à mi-chemin de l'application de la méthode génétique.

Avant d'examiner les conditions d'objectivité de la méthode, cherchons donc à la décrire. Si les connaissances multiples correspondant aux diverses branches de l'activité scientifique sont relatives à des constructions vivantes, à étudier séparément dans leur diversité même, puis à comparer entre elles après analyse, il faut conduire cette double recherche en s'habituant à penser, non pas seulement psychologiquement, mais en quelque sorte biologiquement.

De ce point de vue, toute connaissance implique une structure et un fonctionnement. L'étude d'une structure mentale constitue une manière d'anatomie et la comparaison des structures diverses est assimilable à une sorte d'anatomie comparée.

L'analyse du fonctionnement correspond, d'autre part, à une manière de physiologie et, en cas de fonctionnements communs, de physiologie générale. Mais, avant d'en venir à la physiologie générale de l'esprit, l'anatomie comparée des structures mentales est la tâche immédiate.

Or, comment procède l'anatomie comparé dans ses déterminations des plans communs d'organisation, des « homologies » ou parentés génétiques de structure, etc. ? Deux méthodes distinctes, mais combinables entre elles, l'orientent constamment. La première consiste à suivre la filiation des structures, lorsque sa continuité ressort de façon visible des types adultes eux-mêmes : c'est ainsi que les membres antérieurs des vertébrés peuvent être comparés d'une classe à l'autre, des nageoires antérieures des Poissons aux ailes des Oiseaux et aux pattes de devant des Mammifères. En cas de discontinuité relative, le « principe des connexions » de Geoffroy Saint-Hilaire permet de déterminer les organes homologues par leurs rapports avec les organes voisins. Mais de telles méthodes, fondées sur l'examen des types de structures achevées, sont loin de suffire aux besoins de la comparaison systématique, car il est des filiations qui échappent complètement à l'analyse par un défaut trop grand de continuité visible. En un tel cas, une seconde méthode s'impose avec nécessité : c'est la méthode « embryologique » consistant à étendre la comparaison aux stades les plus élémentaires du développement ontogénétique. C'est ainsi que certains Crustacés cirripèdes fixes, tels que les Anatifes et les Balanes, ont été longtemps pris pour des Mollusques, ce qui rendait erronée toute détermination des homologies : il a suffi de découvrir qu'ils passent à l'état larvaire par la forme « nauplius », semblable à un petit Crustacé libre, pour les rattacher à leur vrai embranchement et rétablir les filiations et homologies naturelles. Seul l'examen du développement embryonnaire permet, d'autre part, de déterminer l'origine mésodermique ou endodermique, etc., d'un organe. Quant à certaines parentés peu visibles comme celle qui rattache plusieurs osselets de l'oreille des Mammifères à l'arc hyoïdien des Poissons, c'est l'examen du développement qui en a permis peu à peu la détermination.

Or, pour comparer entre elles des structures mentales diverses, telles que celles des multiples notions utilisées par la pensée scientifique, force est bien de songer à des méthodes analogues, quelque éminente que soit la dignité des structures intellectuelles par opposition aux formes anatomiques des Crustacés et des Mollusques il s'agit, en effet, dans l'un et l'autre cas d'organisations vivantes en évolution.

D'une part, à suivre le développement des notions dont a usé une science au cours de son histoire, il est facile d'établir certaines filiations par continuité directe ou par la détermination du système des « connexions » en jeu. C'est ainsi que l'on peut reconstituer aisément l'histoire de la notion de nombre,

à partir des entiers positifs, puis des nombres de fractionnaires, des nombres négatifs, et jusqu'aux généralisations toujours plus poussées dues aux opérations initiales. Il sera relativement aisé, en outre, de comparer entre elles les diverses formes de mesure — de l'espace, du temps, des multiples quantités physiques, etc. — et de retrouver dans leurs déroulements historiques respectifs certaines connexions relativement stables, telles que la mise en relation d'objets ou de mouvements postulés invariants et de schémas numériques ou apparentés au nombre. Ces multiples comparaisons, élargies à des échelles diverses, caractérisent une première méthode propre à l'épistémologie génétique, laquelle est bien connue sous une forme d'ailleurs un peu large et qui demanderait peut-être encore quelque systématisation : c'est la méthode « historico-critique », employée avec l'éclat que l'on sait par toute une pléiade d'historiens de la pensée scientifique et d'épistémologistes fameux.

Mais la méthode historico-critique ne suffit pas à tout. Limitée au champ de l'histoire même des sciences, elle porte sur les notions construites et employées par une pensée déjà constituée : celle des savants eux-mêmes considérés sous l'angle de leur filiation sociale. Les formes de pensée accessibles à la méthode historico-critique sont déjà extrêmement élaborées et plus ou moins profondément insérées dans le jeu des interactions propres à la coopération scientifique. L'immense service que rend une telle méthode est de relier le présent à un passé gonflé de richesses souvent oubliées, qui l'éclaire et l'explique en partie par l'examen des stades successifs du développement d'une pensée collective. Mais il s'agit toujours de l'action de pensées évoluées sur d'autres en évolution et non pas encore de la genèse comme telle de la connaissance.

C'est pourquoi, à cette première méthode, qui correspond à celle des filiations directes et des connexions, propre à l'anatomie comparée, il est nécessaire d'en adjoindre une seconde, dont la fonction serait de constituer une embryologie mentale. Reprenons à cet égard l'histoire de la notion de nombre. Cette histoire est à elle seule déjà grosse d'enseignements singulièrement révélateurs : comment le nombre irrationnel a été introduit pour imiter le continu spatial, comment les imaginaires sont nés d'une extension généralisatrice des opérations, comment le transfini révèle certains types de correspondance « réflexive »[1] voisins des correspondances logiques, etc. Mais, de cette histoire

1. C'est-à-dire tels que le tout corresponde à la partie.

seule, on tirera difficilement une réponse univoque à la question épistémologique centrale de savoir s'il existe une intuition primitive du nombre entier, irréductible à la logique, ou si le nombre dérive d'opérations plus simples. Et la raison de cet échec de l'investigation historico-critique est assurément que la structure mentale des théoriciens du nombre est une structure adulte, que l'on remonte de Cantor ou de Kronecker à Pythagore lui-même, alors que la notion de nombre est apparue en ces esprits avant toute réflexion scientifique de leur part : c'est donc bien l'état larvaire du nombre qu'il faudrait connaître, c'est-à-dire le stade « nauplius » qui explique l'Anatife adulte, et l'on voit qu'il n'est pas si irrévérencieux de réclamer ici l'intervention d'une embryologie intellectuelle par analogie avec les méthodes de l'anatomie comparée.

Or, cette embryologie mentale existe, et ce sont précisément les mathématiciens eux-mêmes qui en ont le mieux deviné et presque anticipé l'emploi possible, lorsqu'ils ont jeté les bases de l'épistémologie génétique en géométrie, p. ex. Chacun se rappelle comment Poincaré cherchait la genèse de l'espace dans la coordination des mouvements du corps, dans la distinction des changements de position et des changements d'états, etc., c'est-à-dire en autant d'hypothèses qui ne peuvent être vérifiées que par l'analyse du développement mental de l'enfant, et encore à l'âge le plus tendre. Or, la méthode peut être généralisée et c'est la construction de toutes les notions essentielles ou catégories de la pensée dont on peut chercher à retracer la genèse au cours de l'évolution intellectuelle de l'individu, entre la naissance et l'arrivée à l'âge adulte cette embryologie de la raison peut alors jouer, à l'égard d'une épistémologie génétique, le même rôle que l'embryologie de l'organisme à l'égard de l'anatomie comparée ou des théories de l'évolution.

Il est vrai que le développement de l'enfant est toujours influencé par le milieu social, lequel joue non seulement un rôle d'accélérateur, mais encore transmet une foule de notions qui ont elles-mêmes une histoire collective. Dans la mesure où l'individu en formation reçoit ainsi l'héritage social d'un passé formé par les générations adultes antérieures, il va de soi que c'est alors la méthode historico-critique, prolongée en méthode sociologico-critique, qui reprend alors le contrôle de la méthode psychogénétique. Mais il est non moins clair que, même lorsqu'il reçoit des notions déjà toutes préparées par le milieu social le jeune enfant les transforme et les assimile à ses structures mentales successives, de la même manière qu'il assimile le milieu

formé par les choses qui l'entourent : ces formes d'assimilation et leur succession constituent alors un donné que la sociologie et l'histoire ne suffisent point à expliquer, et c'est dans son étude que la méthode psychogénétique contrôle à son tour la méthode historico-critique.

Au total, la méthode complète de l'épistémologie génétique est constituée par une collaboration intime des méthodes historico-critique et psychogénétique et cela en vertu du principe suivant, sans doute commun à l'étude de tous les développements organiques : que la nature d'une réalité vivante n'est révélée ni par ses seuls stades initiaux, ni par ses stades terminaux, mais par le processus même de ses transformations. Les stades initiaux ne prennent, en effet, de signification qu'en fonction de l'état d'équilibre vers lequel ils tendent, mais, en retour, l'équilibre atteint ne peut être compris qu'en fonction des constructions successives qui y ont abouti. Dans le cas d'une notion ou d'un ensemble d'opérations intellectuelles, ce n'est donc pas seulement le point de départ qui importe, d'ailleurs toujours inaccessible à titre de premier départ, ni l'équilibre final, dont on ne sait non plus jamais s'il est effectivement final : c'est la loi de construction, c'est-à-dire le système opératoire en sa constitution progressive. Or, de cette constitution progressive, la méthode psychogénétique fournit seule la connaissance des paliers élémentaires, même si elle n'atteint jamais le premier, tandis que la méthode historico-critique fournit seule la connaissance des paliers, parfois intermédiaires mais en tout cas supérieurs, même si elle n'est jamais en possession du dernier : c'est donc uniquement par une sorte de jeu de navette entre la genèse et l'équilibre final (les termes de genèse et de fin étant simplement relatifs, l'un à l'autre et ne présentant aucun sens absolu) que l'on peut espérer atteindre le secret de la construction des connaissances, c'est-à-dire de l'élaboration de la pensée scientifique.

Mais une telle méthode ne préjuge-t-elle pas des résultats épistémologiques auxquels elle conduit ? C'est ce qu'il convient d'examiner maintenant, par la discussion d'une épistémologie récente fondée elle aussi sur la psychologie (§ 3) puis en abordant de front le problème dans sa généralité (§ 4).

§ 3. L'ÉPISTÉMOLOGIE PSYCHOLOGIQUE DE F. ENRIQUES. — Des tentatives analogues à celle dont nous venons de formuler le programme ne manquent, il va de soi, nullement et permettent par conséquent déjà de se former quelque idée des succès et aussi

des difficultés d'une telle entreprise. Les uns et les autres sont réels, mais, parmi ces difficultés, il en est une que nous voudrions d'emblée discuter : c'est que, maniée d'une certaine façon, la méthode psychogénétique paraît aboutir fatalement, sinon à des conséquences empiristes, du moins à un certain réalisme de l'expérience ou à un positivisme fermé sur lui-même. Or, l'exemple d'une théorie élaborée par un mathématicien de grand renom, F. Enriques, montre que ces limitations sont dues exclusivement à une psychologie trop étroite et sans doute en partie influencée, elle-même, par une épistémologie préalable.

Comme l'écrivait Enriques en 1914 : « On voit se développer une théorie de la connaissance scientifique qui tend à se constituer sur une base solide, comme une partie de la science elle-même » (*Concepts* [1], p. 3), et c'est effectivement le but essentiel que cet auteur se propose d'atteindre que de construire une épistémologie intérieure aux sciences comme telles et n'empruntant aucune proposition ni aucun moyen d'investigation en dehors des sciences particulières. Une telle méthode le conduit par conséquent à partir de la genèse psychologique : « l'arbitraire dans la construction scientifique semble s'éliminer de plus en plus dans la genèse des concepts scientifiques, considérés non pas dans leur possibilité logique, mais dans leur développement réel » (*ibid*., p. 4). Or, l'étude de ce développement réel permet d'écarter « une conception aujourd'hui démodée, d'après laquelle le savant se bornerait à enregistrer passivement les données de l'expérience » (p. 4). Au contraire, « je me suis attaché essentiellement à reconnaître la fonction propre de l'esprit qui crée la science » (p. 3). Il y a donc à envisager l'expérience, d'une part, mais aussi l'activité du sujet : « La poussée de l'expérience combinée à la nature de l'esprit humain semble devoir expliquer, dans ses traits généraux, le devenir de la science » (p. 4) ; « l'analyse que j'ai entreprise me persuade qu'il y a partout un développement psychologique dont les raisons intimes se rattachent à la structure même de l'esprit humain » (p. 4).

On voit que le programme de F. Enriques est identiquement celui dont nous nous inspirons ici. Et pourtant ce programme, que le célèbre mathématicien avait cru remplir au début de ce siècle par les consciencieuses applications qu'il en a fournies dans tous les domaines essentiels, de la logique

1. F. ENRIQUES, *Les concepts fondamentaux de la science*, trad. ROUGIER, Paris, Flammarion.

et de l'analyse à la géométrie, la mécanique, la thermodynamique, l'optique, l'électromagnétisme et jusqu'à la biologie, est presque tout entier à reprendre aujourd'hui. Est-ce donc la faillite de l'épistémologie génétique ? C'est au contraire le signe d'un effort proprement scientifique, puisque les conclusions obtenues sont sans cesse à réviser, tout en bénéficiant des recherches précédentes, et que les analyses nouvelles peuvent s'incorporer un certain acquis par réinterprétation des résultats antérieurs.

Or, la nécessité de cette révision tient, non seulement aux développements imprévus de la science elle-même (avec la microphysique, p. ex.), mais aussi, et essentiellement, aux progrès de la psychologie expérimentale. Fondé presque en entier sur les notions de sensation, d'association d'idées et d'abstraction à partir des qualités sensibles, le système d'Enriques aboutit fatalement à une vision des choses en quelque sorte statique et fermée sur elle-même, d'où cette impression d'une méthode qui préjuge en partie de ses propres résultats. Mais que l'on replace ces mêmes notions de sensation et d'association dans le cadre de la psychologie contemporaine, qui nie l'existence mentale des sensations pour ne connaître que des perceptions organisées, qui met en doute celle des associations simples et surtout qui réduit les états de conscience à leur situation relative par rapport aux actions et aux conduites d'ensemble : à reprendre sur ces nouvelles bases le problème de l'abstraction, la psychogenèse des notions scientifiques apparaîtra sous un jour bien différent.

Donnons un premier exemple, sur lequel nous reviendrons plus longuement à propos des notions mécaniques (chap. IV). On sait que la force est souvent définie comme «la cause de l'accélération », d'où une tendance de certains physiciens à concevoir l'accélération comme constituant à elle seule le fait positif, et la notion de force comme superfétatoire et confuse. A quoi Enriques répond (*Concepts*, p. 114) que cette notion, reposant sur des « sensations musculaires d'effort et de pression », représente au contraire un fait « physique » authentique : « la force n'a rien de mystérieux ou de métaphysique, pas plus que le mouvement ou tout autre phénomène quelconque, dont la définition réelle se réduit toujours, en dernière analyse, à un groupe de sensations qui se produisent dans certaines conditions volontairement provoquées ». Malheureusement la « sensation de l'effort » est aujourd'hui considérée par bien des psychologues (P. Janet à la suite de Baldwin, etc.) comme le simple indice d'une action, laquelle constitue précisément une conduite (ou régulation) d'accélération des mouvements propres ! La cause physique de l'accélération est ainsi conçue au moyen d'une notion, dont la principale justification serait de correspondre à une « sensation », laquelle ne constitue elle-même que le signal d'une accélération intentionnelle…

On voit où risque de conduire un système d'interprétation qui prend comme point de départ la « sensation », conçue comme le fondement de la connaissance. Dans son beau livre *La sensation, guide de la vie* (1945), qui résume toute son œuvre abondante et précise, H. Piéron conclut que la sensation n'est en tous les domaines qu'un indice ou un signal : « Les sensations constituent des symboles biologiques des forces extérieures agissant sur l'organisme, mais qui ne peuvent avoir avec ces forces plus de ressemblance qu'il n'y en a entre ces sensations mêmes et les mots qui les désignent dans le système symbolique du langage » (p. 412-413). « Les équations relativistes qui, dans des espaces à *n* dimensions où le temps se trouve intégré, symbolisent des chaînes d'événements, sont plus vraies que nos perceptions directes… » (p. 413).

Le point de départ d'une épistémologie génétique adaptée aux connaissances psychologiques actuelles ne sera donc plus la sensation ni l'abstraction schématisante à partir des qualités sensibles, mais consistera à procéder à l'action tout entière, dont les indices sensoriels ne sont qu'un aspect : c'est de l'action que procède la pensée en son mécanisme essentiel, qui est le système des opérations logiques et mathématiques, et c'est donc à l'analyse des actions élémentaires et de leur intériorisation ou mentalisation progressives à nous révéler le secret de la genèse de ces notions.

Autre exemple : dans le domaine de l'espace, Enriques s'en prend, à propos de la coordination entre les sensations et les mouvements conditionnée par les conditions anatomo-physiologiques, à « la prétention de certains philosophes néo-kantiens de voir le reflet de ces conditions structurales… dans certains aspects *a priori* de l'intuition spatiale, de manière à conférer à la géométrie ses postulats dès que les concepts fondamentaux ont été fournis par les sensations » (p. 44). Mais, si simplistes que paraissent avec le recul les explications visées de W. Wundt et de E. G. Heymans, il n'en reste pas moins que l'idée de Enriques de considérer les sensations générales de caractère tactilo-musculaire comme la source des notions topologiques, les sensations visuelles comme celle des notions projectives et les sensations tactiles comme celle des notions euclidiennes, appelle elle aussi un complément dans le sens des conditions mêmes de coordination : comment la notion fondamentale de l'ordre, p. ex., surgirait-elle de la seule sensation, sans la possibilité de coordonner nos mouvements, ne fût-ce qu'en percevant successivement les éléments d'une suite linéaire selon un même sens de parcours ? D'autre part, une succession de perceptions n'équivaut nullement à la perception d'une succession, car celle-ci suppose un acte proprement dit. Ici encore, la sensation est donc toujours l'indice d'une assimilation mentale de l'objet à un schéma d'action, et c'est par conséquent à cette assimilation et à ce schématisme de l'action qu'il convient de remonter si l'on veut saisir le mécanisme psychogénétique sans le déformer par un réalisme imposé pour ainsi dire d'avance.

On voit en quoi une psychologie, plus fonctionnelle que celle d'Enriques, peut conduire à une épistémologie dont les résultats ne sont pas impliqués dans la méthode génétique elle-même. C'est en particulier sur le terrain de l'abstraction et de la logique en général que se marque cette différence entre la position psychologique des problèmes épistémologiques au début de ce siècle et aujourd'hui. Dans la première partie de son grand ouvrage, paru en français sous le titre *Les problèmes de la science et de la logique*, Enriques montre en quel sens « la logique peut être regardée comme faisant partie de la psychologie » (p. 159) : « Les définitions et déductions, qui forment le développement de toute théorie doivent être regardées, selon notre point de vue, comme des *opérations psychologiques* ; nous désignerons ces dernières dans leur ensemble du nom de processus logique. Alors se pose le problème d'*expliquer psychologiquement* le processus logique » (p. 177). On ne saurait mieux énoncer la question qui demeure, nous semble-t-il, au centre de l'épistémologie génétique actuelle. Mais pourquoi Enriques ne l'a-t-il pas résolue ? C'est que sa solution, tout en côtoyant sans cesse des notions retrouvées depuis, demeure en réalité encore éloignée d'une genèse réelle.

En quoi consistent, en effet, pour lui les opérations psychologiques formatrices de la logique ? « Les *associations* et *dissociations* psychologiques qui tombent dans le domaine de la conscience claire et de la volonté forment les *opérations logiques fondamentales* et permettent de créer de nouveaux objets de la pensée distincts de ceux qui sont donnés » (p. 178). Sans doute, mais avant de parvenir à associer et dissocier clairement et volontairement, il s'agit précisément de construire ce pouvoir : or Enriques semble croire que, les objets une fois donnés grâce à la sensation, les « associations » et « dissociations » psychologiques vont s'ensuivre sans plus, permettant de les ordonner en séries, de les réunir en classes, de construire des correspondances, d'inverser l'ordre, etc. (p. 178). A une condition cependant : c'est que ces objets satisfassent « à certaines *conditions d'invariabilités* que nous verrons ensuite exprimées par les principes logiques » (p. 179). En effet : « Dans leur ensemble les principes confèrent aux objets de la pensée une réalité psychologique indépendante du temps, et ils forment ainsi les prémisses d'une Logique symbolique qui aurait pour but de représenter comme un ensemble de *rapports actuels* le processus *génétique* des opérations logiques » (p. 188). Mais pour que la représentation soit adéquate, il faudra que les axiomes exprimant les lois des associations logiques trouvent leur équivalent dans la réalité » (p. 211). Or, « sous la condition d'invariabilité exprimée par les principes logiques, les ensembles d'objets satisfont aux propriétés énoncées par les axiomes » (p. 212), la logique constituant ainsi, en plus du système des associations et dissociations psychologiques, ce que Gonseth appellera plus tard une « physique de l'objet quelconque ».

De même, « la supposition fondamentale de l'Arithmétique, avant de recourir à une réalité physique, peut s'appuyer sur une réalité psychologique, c'est-à-dire sur le fait que certains actes de la pensée peuvent se répéter indéfiniment en se subordonnant à des déterminations générales, de manière à construire des séries qui satisfassent aux conditions [exprimées par les axiomes de Peano sur la numérotation, y compris]… par le *principe d'induction mathématique* entendu comme une *propriété fondamentale des séries psychologiquement construites* » (p. 196).)

Notons pour terminer que Enriques a bien vu également le problème biologique que soulève l'existence de la logique et des mathématiques, l'empirisme correspondant aux théories « épigénétiques » (lamarckisme, etc.) et l'apriorisme au préformisme. Enriques s'oriente lui-même vers l'épigénétisme et explique les associations et dissociations psychologiques fondamentales, sources de la logique et de l'arithmétique, par les processus de frayage nerveux et par la constance des voies d'association (p. 248).

Sans entrer dans le détail de ces thèses, il importe néanmoins de montrer en quoi elles ne lient en rien l'avenir de l'épistémologie génétique, ni ne suffisent à solidariser une fois pour toutes l'explication psychologique ou biologique avec les interprétations empiristes de la connaissance. Le grand problème de toute épistémologie, mais principalement de toute épistémologie génétique, est en effet de comprendre comment l'esprit parvient à construire des liaisons nécessaires, apparaissant comme « indépendantes du temps », si les instruments de la pensée ne sont que des opérations psychologiques sujettes à évolution et se constituant dans le temps. Or, une simple psychologie des sensations et des associations est si incapable de rendre compte d'un tel passage, qu'Enriques est obligé, pour stabiliser les « associations » et « dissociations » destinées cependant à tout expliquer, de recourir au coup de pouce d'un appel aux principes de la logique, seuls capables de rendre les objets de la pensée « invariables ». Mais, dans une interprétation psychologique, les principes logiques devraient eux-mêmes être objets d'explication, au lieu de surgir brusquement *ex machina,* et leur action stabilisatrice constitue comme telle un problème essentiel de fonctionnement mental, que l'on ne saurait résoudre par la simple constatation du fait. C'est précisément sur ce point qu'une psychologie de l'action marque tous ses avantages sur celle de la sensation : la loi fondamentale qui paraît régir la mentalisation progressive de l'action est, en effet, celle du passage de l'irréversibilité à la réversibilité, autrement dit de la marche vers un équilibre progressif défini par cette dernière. Tandis que les habitudes et les perceptions élémentaires sont essentiellement à sens

unique, l'intelligence sensori-motrice (ou préverbale) découvre déjà les conduites de détour et de retour, qui annoncent en partie l'associativité et la réversibilité des opérations. Sur le plan des actions intériorisées en représentations intuitives, l'enfant commence à nouveau par ne pas savoir inverser les compositions imagées, au moyen desquelles il pense, les articulations progressives de l'intuition engendrant par contre, dans la suite, une réversibilité croissante qui, vers 7-8 ans, aboutit aux premières opérations logiques concrètes : celles-ci consistent, en effet, en actions de réunir, de sérier, etc., devenues ainsi réversibles au cours d'une longue évolution. Mais cette dernière s'achèvera seulement vers 11-12 ans, lorsque les actions rendues réversibles pourront elles-mêmes être traduites sous forme de propositions, c'est-à-dire d'opérations purement symboliques. C'est alors, et alors seulement, que grâce à la réversibilité opératoire enfin généralisée, la pensée se libérera de l'irréversibilité des événements temporels. Mais la chose n'est explicable qu'à la condition de remplacer le langage des associations entre sensations par celui des actions et des opérations réversibles.

Cela dit, la question épistémologique centrale que soulève l'appel à la psychologie est assurément celle de la genèse des opérations elles-mêmes, y compris leur stabilisation logique, source et non pas effet, des principes formels. Mais cette genèse, qui est à la fois fonction de l'activité du sujet et de l'expérience, soulève des problèmes autrement complexes que s'il s'agissait de simples associations d'idées, précisément parce que la réversibilité opératoire ne saurait être abstraite sans plus des données sensibles ou expérimentales, rarement « renversables » et toujours irréversibles à parler strictement (selon le vocabulaire utilisé par P. Duhem). Le résultat des recherches psychologiques demeure à cet égard entièrement « ouvert » et peut aboutir, selon que prédomineront les faits de maturation endogène, d'acquisition en fonction du milieu ou de construction réglée par des lois d'équilibre, à des solutions aprioristes aussi bien qu'empiristes, ou à un relativisme rendant indissociables la part du sujet et celle de l'objet dans l'élaboration des connaissances.

Bien plus, le problème psychologique ainsi soulevé par le développement opératoire de la pensée repose, en définitive, sur un ensemble de questions biologiques sans doute plus complexes que celles dont F. Enriques a eu le mérite d'entrevoir la portée. Il est clair, en effet, que si ce n'est pas exclusivement par abstraction à partir des données extérieures que s'accroît la connaissance, en particulier dans le domaine des opérations logiques et

mathématiques, il faut alors prévoir l'existence d'une abstraction à partir des coordinations internes cela ne signifie pas nécessairement que les opérations soient préformées sous une forme innée, mais cela peut être interprété dans le sens d'une abstraction progressive d'éléments empruntés en partie à un fonctionnement héréditaire et regroupés grâce à des compositions constructives nouvelles. Quoi qu'il en soit de la diversité possible de ces solutions, le problème psychogénétique de la connaissance plonge alors jusque dans les mécanismes de l'adaptation biologique ; or, l'on sait combien cette question demeure également « ouverte », toutes les interprétations étant aujourd'hui représentées entre le préformisme, le mutationnisme, l'émergence, le néo-lamarckisme, etc. Bref, que l'on pose le problème de la connaissance en termes biologiques de relations entre l'organisme et le milieu, ou en termes psychologiques de rapports entre l'activité opératoire du sujet et l'expérience, les solutions semblent moins proches en 1949 qu'en 1906 et cela montre assez combien peu les méthodes génétiques préjugent de leurs propres résultats.

§ 4. LES DIVERSES INTERPRÉTATIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES ET L'ANALYSE GÉNÉTIQUE. — Il semble cependant que la méthode génétique préjuge au moins sur un point des solutions épistémologiques qu'elle est censée pouvoir découvrir c'est en présupposant qu'il existe une genèse. Or, pour le platonisme, l'idéalisme aprioriste et la phénoménologie, il n'existe pas de genèse réelle, en ce sens que la nature des instruments de connaissance demeure étrangère à leur développement psychologique. Mais nous allons au contraire chercher à montrer que, même à l'égard des solutions les plus radicalement antigénétiques, la méthode génétique en tant que méthode ne présuppose en rien leur bien ou mal fondé, et pourrait au contraire servir à les vérifier, en admettant qu'elles soient conformes aux faits.

Cherchons, à cet effet, à classer les solutions épistémologiques possibles, de manière à faire apercevoir que chacune d'entre elles, non seulement n'est pas contradictoire avec l'emploi d'une méthode génétique d'investigation, mais encore pourrait être démontrée par cette méthode même, dans la mesure où celle-ci se propose exclusivement d'établir la manière dont s'accroissent les connaissances.

Il faut, en premier lieu, distinguer les hypothèses qui considèrent les connaissances comme atteignant des vérités permanentes, indépendantes de toute construction, et celles qui font

de la connaissance une construction progressive du vrai. Parmi les premières, l'accent peut être mis sur l'objet, que le sujet saisirait comme de l'extérieur, sans activité propre de sa part : les idées existent ainsi en elles-mêmes, sous forme d'universaux subsistant de façon transcendante ou immanente aux choses (platonisme ou réalisme aristotélicien). L'accent peut au contraire être mis sur le sujet, qui projette alors ses cadres *a priori* sur la réalité : celle-ci ne serait donc jamais entièrement extérieure à l'activité subjective, d'où les formes diverses d'idéalisme en fonction des multiples dosages possibles de cette intériorité et de cette extériorité. En troisième lieu, sujet et objet peuvent être conçus comme indissociables, le vrai étant appréhendé directement par une intuition (rationnelle ou non, à des degrés divers) portant sur ces structures immédiates et indifférenciées : tel est le principe de la phénoménologie. Quant aux conceptions selon lesquelles la connaissance se construit effectivement, on retrouve également le primat de l'objet s'imprimant sur un sujet passif (empirisme), le primat du sujet modelant le réel en fonction de son activité (pragmatisme ou conventionnalisme selon que cette activité englobe des besoins variés ou se borne à la pure construction intellectuelle) et la relation indissociable entre les deux (relativisme) :

	Solution non génétiques	*Solution génétiques*
Primat de l'objet	Réalisme	Empirisme
Primat du sujet.....	Apriorisme	Pragmatisme et conventionnalisme
Indissociation du sujet et de l'objet	Phénoménologie	Relativisme

Notons maintenant que chacune de ces six solutions, prises en bloc, y compris celles que nous appelons génétiques, ne peut prétendre constituer autre chose qu'une solution limite, légitime au terme (peut-être inaccessible) des recherches, mais nécessitant un certain tempérament pour ce qui est des questions particulières. C'est lorsque l'on se demande, avec l'épistémologie métaphysique, ce qu'est la connaissance en soi, ou rapport entre un sujet donné une fois pour toutes et un objet (réel ou représenté) également posé définitivement que l'apriorisme, l'empirisme, etc., prennent une signification arrêtée et massive. Si le problème est de savoir comment s'accroissent les connaissances, il faut au contraire distinguer les interprétations relatives aux acquisitions noétiques particulières et les mêmes interprétations généralisées à l'accroissement de toutes les connaissances. Du premier de ces deux points de vue, qui est celui de l'épistémologie génétique en ses recherches successives et en sa méthode même, les solutions appelées génétiques ne s'imposent pas davantage d'avance que les autres : en tant qu'elles

impliquent un passage à la limite elles sont en effet aussi prématurées que les solutions non génétiques ; d'autre part, en ce qui concerne l'acquisition ou l'accroissement des connaissances particulières, chacune des six solutions pourrait être vraie en tel ou tel secteur délimité (p. ex. le platonisme pour la connaissance mathématique, l'empirisme pour la connaissance biologique, etc.). Du second point de vue, qui est celui des conclusions générales de l'épistémologie génétique (à supposer qu'elle parvienne à un accord suffisant sur l'ensemble des connaissances étudiées), les hypothèses non génétiques demeurent *a fortiori* légitimes comme les autres et ne sont nullement à éliminer au préalable en tant que contradictoires avec la méthode génétique de recherche.

Nous prétendons ainsi que la méthode génétique d'investigation propre à une épistémologie qui voudrait demeurer scientifique peut conduire à l'une quelconque de ces six solutions sans préjuger d'aucune aux dépens des autres. Le développement mental de l'individu et le développement historique des sciences constituent, en effet, des données réelles dont chacune des grandes solutions de l'épistémologie philosophique est bien obligée de s'accommoder et qu'elle ne saurait par conséquent considérer d'avance comme contradictoires avec elle. Or, la méthode génétique se borne à étudier ces données de fait, en tant que processus, d'accroissement des connaissances. Les deux seules questions en cause sont de savoir en quoi consiste cet accroissement d'une connaissance, et ce qu'on en peut tirer quant à la nature même de cette connaissance. Sur le premier point, on ne saurait donc mettre en doute l'existence d'un développement des connaissances, lequel est reconnu par tous, mais le problème reste entier de savoir en quoi consiste le mécanisme intime de ce développement ou de cet accroissement. Quant au second point, c'est sur lui que convergent toutes les objections possibles : ce mécanisme d'accroissement est-il révélateur de la nature des connaissances elles-mêmes ? Le double postulat de la méthode génétique est, à cet égard, d'une part, que le mécanisme du développement nous renseigne, en tant que passage d'une moindre à une plus grande connaissance, sur la structure des connaissances successives, et, d'autre part, que cet enseignement, sans préjuger de la nature ultime de la Connaissance en général, prépare cependant la solution de cette question limite (même si cette solution consiste à reconnaître en cours de route qu'une telle limite ne saurait être atteinte). Or, le seul moyen de justifier ces deux postulats est précisément de montrer comment chacune des six solutions précédentes pourrait se trouver confirmée ou infirmée par les faits de développement.

Rien n'exclut *a priori*, tout d'abord, une solution telle que le platonisme ou le réalisme des universaux : on peut même dire, sans paradoxe, que c'est uniquement en fonction d'un développement qu'une idée peut se révéler subsistant en elle-même, indépendamment de ce développement. Lorsqu'un mathématicien affirme à la manière de Hermite l'existence, extérieure à lui, d'êtres abstraits tels que des fonctions ou des nombres, il est facile de répondre que cette croyance à l'autonomie de tels êtres ne leur ajoute aucun caractère nouveau, sinon à titre subjectif, et qu'ils conserveraient toutes leurs propriétés mathématiques si leur existence était interprétée autrement. Mais que, en étudiant le problème de la découverte ou de l'invention [1], on parvienne à montrer qu'après une suite d'approximations témoignant de l'activité inventive du sujet, celui-ci se trouve conduit à découvrir, par une intuition directe et indépendante des constructions antérieures, une réalité sans histoire, il est clair que la croyance aux idées « subsistantes » en trouverait une confirmation singulière. Seulement, on voit d'emblée qu'une telle vérification devrait être à la fois psychologique et historique : psychologique, en démontrant l'existence d'une intuition rationnelle qui parvienne à contempler sans construire, et historique en vérifiant le succès croissant de cette contemplation, et non pas son affaiblissement à partir d'un stade déterminé de croyance commune. Or, nous retrouverons précisément ces deux problèmes, l'un à propos des rapports entre l' « intuition rationnelle » et l'intelligence opératoire, l'autre à propos des travaux de P. Boutroux sur l'histoire des attitudes intellectuelles successives des mathématiciens (attitudes dont nous verrons la relation avec la conscience des opérations).

Quant à l'apriorisme, il est évident que s'il était vrai, l'étude génétique en découvrirait le bien-fondé sans sortir du développement comme tel. Un cadre *a priori* se reconnaîtrait, en effet, sans difficulté au fait qu'il ne se construirait pas en relation avec l'expérience, mais s'imposerait en fonction d'une maturation interne progressive. De plus, à cette maturation psychobiologique révélée par l'analyse du comportement correspondrait, du point de vue mental, une prise de conscience brusque ou graduelle, procédant par réflexion de la pensée sur son propre mécanisme.

La phénoménologie semble, par contre, devoir opposer à l'épistémologie génétique une série d'objections plus radicales,

1. Voir R. WAVRE, *L'imagination du réel*, Neuchâtel (coll. « Etre et penser »), 1948.

car si l'apriorisme kantien ignore la construction psychologique, il admet une construction préalable à toute expérience (et nous venons de voir qu'une telle construction manifesterait clairement son existence au cours du développement). Or, c'est cette construction *a priori* elle-même que la phénoménologie met en doute en la remplaçant par une intuition rationnelle des essences, sans dualisme entre le sujet qui contemple et l'objet extérieur, mais avec indifférenciation radicale entre les deux termes fondus dans la même prise de possession immédiate. Il importe donc de montrer plus en détail, en ce qui concerne ce troisième groupe de solutions, que l'emploi de la méthode génétique n'implique en rien leur réfutation préalable et les confirmerait au contraire si elles s'avéraient nécessaires.

La première thèse essentielle de la phénoménologie est celle que Husserl a développée en ses *Logische Untersuchungen* : la vérité est d'ordre normatif et ne relève pas de la simple constatation de fait. L'erreur du « psychologisme » consiste au contraire à procéder indûment du fait à la norme, tandis que la norme, en tant qu'obligation indépendante de ses réalisations, ne saurait relever que d'elle-même. Une telle affirmation n'est d'ailleurs pas spéciale à la phénoménologie elle se retrouve dans tous les cas où un « normativisme » s'oppose à une science « naturelle », et les conflits de la logique et de la psychologie sont, à cet égard, parallèles à ceux du « droit pur » et de la sociologie, etc. Mais, loin de constituer un obstacle à l'emploi des méthodes de l'épistémologie génétique, l'existence des normes soulève au contraire des problèmes de la plus grande importance au point de vue du développement. Il faut ici distinguer deux questions : celle des rapports entre la norme et le fait, et celle de la genèse des normes. Sur le premier point, il est facile de s'entendre. Une norme est une obligation, et on ne tire pas une obligation d'une constatation, cela est clair. Seulement, tandis que la conscience incarnant la norme (la conscience du logicien, la conscience du savant, etc.) légifère ou applique la norme, et ne parle donc pas le langage des faits mais de la vérité normative, le généticien, qui, s'en tient aux faits d'expérience contrôlables pour chacun, constate, sans prendre parti pour ou contre cette norme, son emprise sur la conscience qui l'incarne. De ce point de vue, la norme aussi est un fait, c'est-à-dire que son caractère normatif se traduit par l'existence, expérimentalement constatable, de certains sentiments d'obligation ou d'autres états de conscience *sui generis* : implications senties comme nécessaires, etc. Un grand juriste, Pétrajitsky, a proposé le terme excellent de « faits nor-

matifs » pour désigner précisément ces faits d'expérience permettant de constater que tel sujet se considère comme obligé par une norme (quelle que soit la validité de celle-ci du point de vue de l'observateur). On peut donc décrire en termes de faits normatifs tout le système des normes, et si la thèse des *Logische Untersuchungen* est vraie, elle est assurée d'être vérifiée par une investigation génétique honnête : cela ne signifie pas que le généticien va légiférer à la place du logicien ou des consciences incarnant les normes, mais qu'il décrira dans le langage des faits ce qu'il constate du comportement (interne ou extérieur) inspiré par là croyance à ces normes. Vient alors le second point : la genèse des normes. Mais, ici encore, si la thèse phénoménologique est vraie, elle ne saurait être contredite par l'étude du développement. Or, celui-ci, sans jamais montrer, en effet, qu'une obligation dérive d'une constatation, nous met cependant en présence d'une évolution des normes : celles de l'enfant ne sont pas identifiables sans examen à celles de l'adulte, pas plus que celles du « primitif » ne se réduisent *a priori* à celles du logicien phénoménologiste. Le devenir des normes soulève donc un problème qui plonge ses racines jusqu'aux sources de l'action et aux relations élémentaires entre la conscience et l'organisme. Ce n'est donc pas exclure d'avance la solution phénoménologique que de placer l'étude des faits normatifs sur le terrain du développement des opérations, et l'analyse des rapports entre la conscience et l'organisme nous conduira précisément à reconnaître que, dissociée de ses concomitants physiologiques, la conscience constitue tôt ou tard des systèmes d'implications dont la nécessité se distingue essentiellement des relations de causalité propres à l'explication des faits matériels.

Mais il y a plus dans la phénoménologie et dans les « existentialismes » engendrés par elle que cette simple affirmation normativiste. Il y a la notion d'une connaissance à la fois aprioriste et intuitive (par opposition à la construction kantienne) de structures pures destinées à caractériser les divers types d'êtres possibles. L'objet propre de l'épistémologie phénoménologique est, selon Husserl, de saisir « où la pensée veut en venir », c'est-à-dire quelles sont ses « intentions » indépendantes de là réalisation. C'est sur ce second point que les données génétiques paraissent le plus irréductibles à la réalité existentielle, dont la « réduction » phénoménologique se fait fort d'appréhender les caractères par l'intermédiaire de la seule intuition réflexive. Seulement, ici encore, il importe d'introduire des distinctions de point de vue. En tant que philosophie systématique et fermée, prétendant

atteindre la connaissance en soi, la phénoménologie demeure bien entendu en dehors des cadres d'une épistémologie génétique consistant avant tout en une méthode de recherche. Mais l'étude psychogénétique et historique de la manière dont les connaissances s'accroissent n'exclut en rien l'aboutissement éventuel à une solution phénoménologique. C'est ainsi que l'essentiel de bien des processus génétiques consiste en une orientation dirigée vers certains états d'équilibre : il n'est donc pas exclu au préalable que l' « intention » de Husserl puisse trouver quelque confirmation dans l'étude de ces directions génétiques, quand bien même ces deux sortes de notions ne présentent en leur point de départ aucune sorte de rapport. Ce point de jonction pourrait, à cet égard, être le suivant. Husserl conçoit les « structures » comme des systèmes de possibilités pures, antérieures à toute réalisation et découvertes par la conscience grâce à des sortes d' « actes » ou intuitions vécues au cours de la réflexion. Mais si métaphysique que soit une telle conception, elle n'est pas dénuée de toute relation avec les problèmes que l'analyse génétique rencontre au sujet du développement ni surtout avec ceux que l'analyse historique rencontre au sujet des rapports entre les mathématiques et la physique. Husserl a rêvé, en effet, après Descartes, d'une *mathesis universalis*, qui porterait sur toutes les « structures » possibles et non pas seulement sur les mathématiques. Or, le problème des rapports entre le possible et le réel ne se réduit pas seulement, du point de vue génétique, à la question des relations entre la déduction et l'expérience, question qui commande déjà à elle seule une grande partie de l'histoire de la pensée scientifique. Il se retrouve partout où se pose un problème d'équilibre, l'équilibre impliquant la considération de l'ensemble des transformations possibles (tels les « travaux virtuels » du fameux principe mécanique) et non pas seulement des conditions réalisées. C'est ainsi que le développement embryologique apparaît aujourd'hui comme un choix parmi un ensemble de formes potentielles infiniment plus riches que les formes effectivement produites. De même tout équilibre mental (perceptif, opératoire, etc.) repose sur un jeu de possibilités qui dépassent de plus en plus largement, au cours du développement intellectuel, les actions ou mouvements réels. Il n'est donc pas exclu qu'un jour les problèmes génétiques d'équilibre rejoignent les intuitions de Husserl, ce qui ne signifie naturellement pas que ce soit à coup sûr le cas.

Au reste, la phénoménologie a engendré, en psychologie expérimentale, une interprétation bien connue du développe-

ment : celle de la « théorie de Gestalt », qui remplace la notion de la construction des structures par le concept d'une abstraction progressive de « formes » conçues comme données à la fois dans l'esprit et dans le réel. Une telle conception est susceptible d'un élargissement à l'épistémologie entière et prouve ainsi à elle seule que la phénoménologie, si elle est vraie, doit pouvoir être reconnue telle par l'examen de la genèse elle-même.

Quant aux interprétations de la connaissance qui consistent à faire de celle-ci une construction progressive du vrai, il va de soi que l'étude génétique peut leur servir de pierre de touche : effectivement l'empirisme, le pragmatisme ou le relativisme (le relativisme brunschvicgien, p. ex.) se sont toujours appuyés sur l'étude psychogénétique ou historico-critique pour justifier leurs thèses. Il n'empêche que, dans ces cas encore, il s'agit de doctrines limites au sujet desquelles l'épistémologie génétique ne saurait se prononcer d'avance, quelles que soient les convergences obtenues sur certains points. C'est ce que nous avons vu en détail au § 3 à propos de l'empirisme mitigé de F. Enriques.

En effet, tout autant que les solutions non génétiques, les interprétations de la connaissance fondées sur son devenir soulèvent, mais de façon beaucoup plus aiguë, le problème des rapports entre les normes et le développement. Les solutions non génétiques partent de l'hypothèse que la vérité s'appuie sur des normes permanentes, situées dans la réalité, dans les structures *a priori* du sujet ou dans ses intuitions immédiates et vécues. Le développement mental ou historique, tel que le décrira l'épistémologie génétique, sera donc conçu, par les théories non génétiques, comme l'actualisation d'un virtuel déterminé d'avance par ces normes elles-mêmes ; si l'hypothèse est exacte, c'est bien ce que l'analyse des transformations mentales ou historiques du savoir finira par établir, ainsi que nous venons de le constater. Mais, dans le cas où l'étude de l'accroissement des connaissances confirmerait l'une des trois solutions génétiques, c'est-à-dire attribuerait cet accroissement à la pression des choses, aux conventions heureuses du sujet ou aux interactions du sujet et de l'objet, comment l'analyse du développement parviendra-t-elle à procéder du fait à la norme et plus précisément du devenir caractérisant la construction des notions à l'immutabilité des connexions logiques ? Le problème ne sera plus alors de retrouver la norme fixe au sein de l'évolution, mais bien d'engendrer la norme elle-même au moyen des données mobiles du développement. Or, une telle position du problème, si chimérique puisse-t-elle paraître, n'en correspond pas moins à l'aspect quotidien de

la science contemporaine : jamais le contenu des notions n'a été plus mobile qu'aujourd'hui et cependant jamais on n'a moins renoncé à un fondement logique et déductif de ces mêmes notions. Le problème de la jonction entre le devenir mental et la norme permanente, ou entre l'exigence de révision continuelle et le besoin — artificiel ou réellement fondé — de s'appuyer sur quelque stabilité normative, est donc bien au centre de la méthode propre à l'épistémologie génétique.

§ 5. DEVENIR MENTAL ET PERMANENCE NORMATIVE. — Les rapports entre le fait psychologique du développement et la norme logique intemporelle sont dominés par deux questions que les théories non génétiques et génétiques précédemment énumérées résolvent en sens opposés celle de l'action et de la pensée et celle du réel et du possible.

Toutes les théories non génétiques (et d'ailleurs chose curieuse, quelques théories génétiques aussi, telles les formes classiques de l'empirisme, etc.), conçoivent la pensée comme antérieure à l'action et celle-ci comme une application de celle-là. Il en résulte, dans la plupart des théories métaphysiques de la connaissance, une conception purement contemplative des normes, appuyées sur une vérité divine, transcendantale ou immédiatement intuitive. Cette interprétation contemplative de la norme se retrouve d'ailleurs en bien des courants épistémologiques qui, substituant le nominalisme syntactique aux diverses formes de réalisme, ne prennent pas garde à la nature active du langage, lequel consiste à mettre en correspondance les opérations des divers sujets avant d'être en état d'énoncer des vérités inconditionnellement valables. Du point de vue de l'analyse génétique, au contraire, l'action précède la pensée et celle-ci consiste en une composition toujours plus riche et cohérente des opérations qui prolongent les actions en les intériorisant. D'un tel point de vue, les normes de vérité expriment donc d'abord l'efficacité des actions, individuelles et socialisées, pour traduire ensuite celle des opérations et enfin seulement la cohérence de la pensée formelle. Sans préjuger de la nature, contemplative ou opératoire, des normes parvenues à leurs formes supérieures d'équilibre, la méthode génétique échappe ainsi dès le départ au reproche d'ignorer le normatif, puisque, de l'action effective aux opérations les plus formalisées, elle suit pas à pas la constitution de normes sans cesse renouvelées.

Mais le rapport de l'action et de la pensée n'est que l'un des aspects d'un conflit bien plus profond qui oppose le gé-

nétique au non-génétique et qui intéresse plus directement encore les relations du développement temporel avec la logique intemporelle. Le caractère essentiel des théories non génétiques est sans doute, en effet, d'expliquer le réel — la connaissance ou l'opération réelles — par un possible qui lui serait antérieur. C'est ainsi que le réalisme des universaux est solidaire, chez Aristote, de la conception fondamentale du passage de la puissance à l'acte. L'apriorisme suppose, de son côté, la préformation de la connaissance réelle en un système prédéterminé de schémas virtuels. La phénoménologie de Husserl subordonne cette même connaissance actuelle à l'intuition des « intentions » possibles. Bref, l'attitude antigénétique revient toujours à situer un virtuel préformant au point de départ de la connaissance actuelle. Or, le propre de la méthode génétique consiste au contraire à ne considérer le virtuel ou le possible que comme une création sans cesse poursuivie par l'action actuelle et réelle : chaque action nouvelle, tout en réalisant l'une des possibilités engendrées par les actions précédentes, ouvre elle-même un ensemble de possibilités, jusque-là inconcevables. C'est alors dans la relation du réel causal avec les possibilités ouvertes par lui, mais liées entre elles par un lien de virtualité toujours plus proche de l'implication logique, qu'est à chercher la solution du problème central de la norme intemporelle et du devenir génétique.

En effet, toute action formatrice d'une opération engendre, par son exécution même, deux sortes de virtualités, c'est-à-dire que, en « engageant » l'activité du sujet, elle ouvre deux catégories de possibilités nouvelles : d'une part une possibilité de répétition effective, ou de reproduction en pensée, s'accompagnant alors d'une détermination des caractères jusque-là implicites de l'action ; d'autre part, une possibilité de compositions nouvelles, virtuellement entraînées par l'exécution de l'action initiale. Supposons p. ex. une action consistant en un déplacement de A en B simplement conçue, sous sa forme primitive, comme un mouvement orienté vers B. Cette action entraîne, en premier lieu, la possibilité d'une reproduction matérielle ou mentale ; il s'y ajoutera, tôt ou tard en ce cas, la découverte du fait qu'en se dirigeant vers B le mobile s'éloigne de A ; etc. D'où un second ensemble de virtualités : le déplacement AB peut être inversé en un déplacement BA, qui se rapproche de A et s'éloigne de B ; de même les déplacements AB et BA sont virtuellement composables en un déplacement nul consistant à rester en A etc. Bref, l'action initiale engendre, du seul fait

de sa réalisation, deux sortes de possibilités, c'est-à-dire d'opérations virtuelles : les unes consistent à pouvoir répéter l'action exécutée, en dégageant ce qu'elle entraînait dès l'abord ; les autres consistent à la prolonger en actions nouvelles nées de son inversion ou de sa composition avec d'autres.

Chaque action réelle, tout en constituant l'actualisation de possibilités ouvertes par des actions antérieures, ouvre donc elle-même des possibilités plus larges. Il en résulte que, par méthode, l'analyse génétique doit subordonner le possible au réel et non pas l'inverse. Elle n'a pas le droit de postuler le virtuel pour expliquer le réel avant d'y être contrainte par la découverte dans la pensée du sujet lui-même, de quelque démarche réflexive situant effectivement le réel actuel dans un système de possibilités reconstituées. Elle a par contre l'obligation d'expliquer le virtuel par le réel toutes les fois qu'une action ouvre, par son exécution, même, de nouvelles possibilités et engendre ainsi un système d'opérations virtuelles.

Or, si l'action effective est une réalité en devenir et constitue donc un processus génétique ou causal, le monde des possibilités sans cesse ouvertes par l'action offre par contre ce caractère remarquable d'être intemporel et de relever essentiellement de l'implication logique. Plus généralement dit, la différence entre le possible et le réel rejoint celle qui sépare les relations logico-mathématiques du devenir psychologique et physique : le problème des rapports entre la genèse historique ou mentale et la vérité logique, en sa permanence normative, tient donc essentiellement aux connexions que l'on établira entre le virtuel et l'actuel. L'univers logique constituant le domaine du possible, tandis que la genèse exprime le devenir réel, toute la question de savoir si le processus génétique reflète des normes préalables, ou s'il est de nature à expliquer la constitution des normes, se réduit dès lors au problème de l'actualisation du virtuel ou de la création des possibilités ouvertes par l'action réelle.

C'est ici que réapparaissent nécessairement les notions de l'équilibre, lieu de jonction spécifique entre le possible et le réel, et de la réversibilité, ou passage *sui generis* du devenir physique ou mental à l'intemporel logique.

Un système mécanique, déjà, est dit en équilibre lorsque l'ensemble des travaux virtuels compatibles avec les liaisons en jeu (donc tels que les déplacements des forces sont déterminés par la structure du système considéré) constitue un produit de composition de valeur nulle, c'est-à-dire avec compensation exacte des + et des –. Dire qu'un système réel est en équilibre revient ainsi à évoquer une composition entre des mou-

vements ou des travaux virtuels : parler d'équilibre c'est donc insérer le réel dans un ensemble de transformations, simplement possibles. Mais, réciproquement, ces possibilités sont elles-mêmes déterminées par les « liaisons » du système, c'est-à-dire par le réel. Or, la situation est semblable en tout processus génétique intéressant la constitution d'un système d'opérations intellectuelles. Toute action ouvre, nous venons de le voir, une série de possibilités nouvelles. L'action aboutira donc à constituer un état d'équilibre, c'est-à-dire qu'elle engendrera un système de relations stables, lorsque l'ensemble des opérations virtuelles se compenseront exactement : l'équilibre se définira ainsi par la réversibilité, dont la signification psychologique est la possibilité d'inverser les actions exécutées. Ici à nouveau le réel et le possible sont donc interdépendants en chaque état d'équilibre.

Toute l'étude du développement mental montre l'importance d'un tel mécanisme d'équilibration, caractérisé par la réversibilité croissante des actions. Tant qu'une action est accomplie à l'état isolé et sans réversibilité entière, les relations qu'elle construit ne sont pas équilibrées, ce qui se reconnaît à l'absence de conservation rationnelle. Par exemple en réunissant un ensemble d'objets A à un autre ensemble A' pour constituer le tout B, un jeune enfant commencera par ne comprendre ni la conservation des parties A et A' ni celle du tout B (il s'imaginera ainsi qu'il y a plus, ou moins, dans le tout que dans la somme des parties séparées, etc.). Lorsqu'au contraire l'action exécutée (A + A' = B) s'accompagnera de la conscience de toutes les opérations virtuelles (p. ex. en réunissant A à A', on détache A d'un autre tout : Z – A, etc.), et essentiellement des opérations inverses possibles (B – A = A' ; B – A' = A; – A – A' = – B), le système des compositions virtuelles aboutira à un état d'équilibre, reconnaissable au fait de la conservation nécessaire des parties et des totalités hiérarchiques (nécessité logique). Le passage de l'action réelle à la conscience des actions possibles constitue donc la condition nécessaire de la construction d'un système opératoire et celui-ci est achevé lorsqu'est atteinte la composition réversible. Tout processus génétique tend ainsi vers un état d'équilibre mobile dans lequel interfèrent les liaisons réelles et les opérations possibles en un tout indissociable.

Or, cette interdépendance du réel et du possible caractérisant chaque état d'équilibre suffit à rendre compte de la jonction du devenir mental avec la permanence logique et normative. Il est clair, en effet, que si les actions réelles sont reliées entre elles par un déterminisme causal et temporel, les transformations simplement possibles ou les opérations virtuelles sont intemporelles et ne relèvent plus que de l'implication logique. Réunir A à A' sous la forme A + A' = B ou dissocier A de B sous la forme B – A = A' sont deux actions exécutables réellement à condition d'être successives, mais composer + A – A = 0, c'est réunir en un seul tout virtuel ces opérations successives et par

conséquent entrer dans l'intemporel. La réversibilité, qui transforme les actions en opérations, présente ainsi ce caractère propre à l'intelligence et ignoré de l'action réelle, de remonter le cours du temps et de s'affranchir de celui-ci pour atteindre l'implication logique pure. Il en résulte que, plus l'action réelle élargit le cercle des opérations possibles, et plus est dense le réseau des relations virtuelles, c'est-à-dire logiques, qu'elle tisse pour s'y insérer toujours plus profondément.

Tant l'étude des rapports entre l'action et la pensée que celle des connexions entre le réel et le possible conduisent donc à cette conclusion qu'il est vain d'opposer *a priori* le génétique et le logique (en tant que normatif). Tout processus génétique aboutit à un équilibre qui rejoint le normatif, par le fait que la réversibilité croissante des actions temporelles correspond aux opérations directes et inverses caractérisant les liaisons logiques fondamentales (affirmation et négation, etc.). Que, en fin de compte, le logique fonde le génétique parce que le possible précéderait le réel ou que le génétique s'épanouisse en logique parce que l'équilibration des actions réelles constituerait une organisation des opérations virtuelles, dans les deux cas l'analyse génétique rencontre tôt ou tard l'intemporel logique et normatif, sans préjuger de sa position effective dans la constitution et la connaissance. En un mot, il y a toujours, génétiquement, tendance à l'équilibre, lequel introduit le possible au sein du réel : les normes sont alors liées à l'efficacité des systèmes d'ensemble embrassant le possible, bien que de tels systèmes soient nés de l'action concrète sur le réel (ou parce qu'ils sont tels).

§ 6. EQUILIBRE ET « LIMITE ». LE CERCLE DES SCIENCES ET LES DEUX DIRECTIONS DE LA PENSÉE SCIENTIFIQUE. — A supposer, comme nous venons de l'admettre, que toute série génétique tende vers certains états d'équilibre opérant la jonction entre le réel temporel et le logique intemporel, un nouveau problème se pose à la méthode génétique : peut-on considérer tout accroissement des connaissances, dans l'histoire des sciences ou dans le développement psychologique, comme tendant vers une « limite» ? Et, à admettre que ce soit le cas en ce qui concerne certaines séries particulières et bien circonscrites, est-il possible de concevoir, en partant de la confrontation d'un nombre suffisant de telles séries, la vérification d'une hypothèse épistémologique générale concernant la connaissance dans son ensemble (ou, bien entendu, de plusieurs hypothèses complémentaires en cas de pluralisme des structures) ?

Le problème est donc le suivant : comment intégrer en une ou plusieurs grandes séries l'étude des accroissements particuliers de connaissances, analysés d'abord isolément, et comment, surtout, concevoir une étude de la convergence de ces séries jusqu'à pouvoir parler d'un passage à la limite ? Tant qu'il s'agit d'un secteur partiel de connaissances, tel qu'une notion ou un système circonscrit d'opérations, on admettra sans peine qu'il soit possible de déterminer ce qui revient à la déduction logique, aux diverses formes de représentation intuitive, à l'expérience sous ses différents aspects, à l'action et à la perception, etc. Mais, même en accumulant un grand nombre de telles analyses, comment en tirer un enseignement général sans retomber dans une simple spéculation philosophique, d'autant plus tentante qu'elle prétend s'installer directement dans la connaissance en soi et faire l'économie d'une étude préalable et inductive des accroissements particuliers de toutes les connaissances distinctes ?

L'analyse du développement d'une notion permet en général la détermination de paliers successifs de construction et la succession même de ces stades constitue un premier type de séries, dont on peut déterminer la loi de formation. C'est ainsi que pour un grand nombre de notions mathématiques et physiques on entrevoit un processus psychogénétique de développement, se retrouvant dans les grandes lignes sur le plan historique, qui s'étage par étapes entre l'action élémentaire puis l'intuition perceptive ou imagée, au point de départ, et un système défini d'opérations concrètes susceptibles après coup d'axiomatisations diverses : la loi de succession est caractérisée alors, nous venons de le voir, par une marche vers un état d'équilibre réversible à partir d'un état initial d'irréversibilité et de non-composition. On peut, en ce cas, parler sans métaphore d'une série génétique et de sa convergence vers une certaine limite, définie par une forme d'équilibre, c'est-à-dire par un certain mode de composition d'ensemble.

Seulement il s'agit toujours, en ce cas, d'une limite partielle, et par conséquent provisoire, ou relative au découpage momentané d'un secteur spécial de connaissance. Sans doute l'évolution ainsi atteinte par l'analyse génétique, à l'intérieur de ce secteur, révèle-t-elle une transformation des instruments intellectuels du sujet et, en corrélation avec cette construction d'instruments nouveaux, une transformation de l'expérience elle-même, c'est-à-dire de la réalité telle qu'elle apparaît au sujet. Mais il va de soi que ces transformations solidaires de la pensée et du réel apparent (c'est-à-dire relatif à un niveau déterminé de cette pensée),

quelque intéressantes qu'elles se révèlent quant au mécanisme de l'accroissement des connaissances, ne saurait donner lieu à une formule généralisable sans plus, pour cette raison que la formule chargée de les exprimer sera elle-même relative au système de référence adopté par l'observateur, c'est-à-dire par le psychologue ou l'historien qui étudie ces transformations du dehors en s'appuyant sur ses connaissances à lui.

C'est là qu'est le noeud de toute la question du passage entre les limites partielles propres aux processus évolutifs particuliers des connaissances respectives, et la limite générale que constituerait la détermination de la connaissance en sa totalité avec choix de l'une ou de plusieurs des hypothèses d'ensemble classées au § 4. En effet, le généticien ou l'historien étudie une série de stades A, B, C, ..., X, dont il établit la loi d'évolution et la limite éventuelle. Mais, pour ce faire, il est obligé de choisir un système de référence, qui sera constitué par le réel, tel qu'il est donné dans l'état des connaissances scientifiques considérées au moment de son analyse, et par les instruments rationnels tels qu'ils sont donnés dans l'état d'élaboration de la logique et des mathématiques à ce même moment de l'histoire. Or ce système de référence est lui-même mobile…

C'est ainsi que le psychologue peut bien étudier la formation de certaines notions et tirer de cette étude des lois de construction nous renseignant sur le mécanisme de l'accroissement de ce genre de connaissances. Mais la psychologie elle-même est une connaissance en évolution et, pour établir les lois de formation des connaissances particulières, elle s'appuie sur un système de référence constitué par l'ensemble des autres sciences, des mathématiques à la biologie. C'est pourquoi, si elle parvient à suivre certains processus épistémologiques restreints jusqu'à leurs limites respectives, elle ne saurait atteindre sans plus cette limite générale que serait la connaissance dans son ensemble, puisqu'elle est une partie intégrante de cette dernière et ne constitue pas un poste d'observation extérieure. Et elle y saurait d'autant moins prétendre qu'elle admet par méthode l'évolution possible de toutes les connaissances, donc la mobilité indéfinie du système de référence sur lequel elle s'appuie.

Comment dépasser les frontières ainsi imposées à l'analyse génétique par les systèmes de référence dont elle a nécessairement besoin et comment parvenir à des lois de construction, non pas spéciales à certains secteurs délimités, mais qui seraient peu à peu généralisables à toutes les connaissances, et qui auraient ainsi pour limite la Connaissance scientifique en elle-même ?

Si l'analyse génétique s'appuie nécessairement sur un système de référence formé par les sciences constituées au moment considéré, c'est naturellement ce système de référence qu'il s'agirait d'expliquer à son tour pour généraliser l'explication génétique à la connaissance entière. Mais on se trouve alors en présence de l'alternative suivante : ou bien l'analyse génétique ne parviendra pas à rendre compte de son propre système de référence, et elle échouera donc à constituer une épistémologie générale, ou bien elle y arrivera, mais au prix d'un cercle évident, l'analyse génétique reposant, en ce second cas, sur un système de référence qui dépendra lui-même d'elle !

Or, fidèles aux enseignements que comporte le développement de la pensée scientifique, c'est cette seconde solution que nous devons adopter, du seul fait que l'ensemble des recherches contemporaines sont précisément en voie de s'engager dans un tel cercle. Seulement ce cercle, si effectif soit-il, n'est pas vicieux, ou, du moins, est imposé par la nature des choses. Il ne constitue, en effet, qu'un cas particulier du cercle du sujet et de l'objet, cercle inévitable non seulement pour toute connaissance, mais même pour toute théorie de la connaissance. La connaissance s'appuie sur un objet en dehors duquel le sujet ne serait pas affecté (du dedans ou du dehors), et ne se connaîtra donc pas lui-même, faute d'activité de sa part ; mais cet objet n'est à son tour connu qu'au travers du sujet, sans quoi il resterait inexistant pour lui. Hœffding a insisté avec clarté sur ce cercle initial, tel que le sujet ne se connaît que par l'intermédiaire de l'objet et ne connaît ce dernier que relativement à son activité de sujet. De même, toute théorie de la connaissance, pour expliquer comment le sujet est affecté par l'objet (que celui-ci soit conçu à titre de réalité extérieure, ou de pure représentation ou « présentation » tout court), doit de son côté poser ce sujet et cet objet réunis à titre d'objet de sa propre recherche, le nouveau sujet étant alors le théoricien de la connaissance : mais ce dernier ne parvient naturellement à connaître son objet (donc le rapport constitué par la connaissance) qu'au travers de sa propre pensée (c'est-à-dire de sa propre connaissance), laquelle ne lui est connaissable en retour que par réflexion sur cet objet. Que, pour échapper à cette difficulté, il se place *in medias res* et fasse ainsi appel à certains renseignements préalables sur les sujets et objets réunis qu'il étudie à titre d'objet, il devra tôt ou tard réintégrer ces présuppositions dans sa propre explication, et le cercle réapparaît.

Seulement, s'il est inéluctable, un tel cercle est susceptible d'élargissements successifs, comparable en cela à certains cercles bien connus en science, tels que celui de la mesure du temps. Pour mesurer le temps il faut, en effet, disposer d'horloges utilisant des mouvements isochrones qui serviront d'étalon, mais la mesure de cet isochronisme suppose elle-même celle des autres mouvements de l'univers qu'ils serviront à chronométrer, etc. On peut alors étendre sans fin la chaîne sans sortir du cercle, mais plus celui-ci s'élargit et plus les convergences observées permettent de trouver dans cette cohérence croissante l'assurance que le cercle n'est pas vicieux. Si toute épistémologie suppose à son tour un cercle, il est donc à présumer qu'en s'étendant jusqu'à embrasser l'ensemble des disciplines servant de référence à l'analyse génétique, et cette analyse elle-même, l'extension de ce cercle sera gage d'une plus grande cohérence interne que ce ne peut être le cas pour les systèmes philosophiques particuliers.

Il est clair, en effet, qu'à poser le problème de l'épistémologie sur le terrain du développement de la pensée et des sciences particulières, le cercle de la connaissance ou du sujet et de l'objet est alors à concevoir comme la structure fondamentale du système des sciences elles-mêmes. On a coutume, il est vrai, de concevoir les rapports des sciences entre elles comme caractérisés par une suite rectiligne : les mathématiques, la physique (au sens large), la biologie et les sciences psycho-sociologiques se succéderaient ainsi conformément à un principe de hiérarchie tel que la fameuse série de complexité croissante et de généralité décroissante conçue par Aug. Comte. Seulement il se pose alors deux questions. En premier lieu, sur quoi se fondent les mathématiques ? Sur rien d'autre que sur elles-mêmes, c'est entendu, ou sur la logique qui ne s'appuie elle aussi que sur elle-même. Mais si cela peut paraître clair d'un point de vue, soit métaphysique, soit étroitement axiomatique, cela cesse d'être satisfaisant dès que l'on recherche les conditions rendant une axiomatique possible. On en vient alors nécessairement à recourir aux lois de l'esprit humain, ce qui est un appel explicite (H. Poincaré, L. Brunschvicg, etc.) ou implicite à la psychologie. En second lieu, et à l'autre extrémité de la série, à quoi aboutissent les recherches de la psychologie génétique ? Précisément à nous expliquer comment se construisent les intuitions et les notions de l'espace, de nombre, d'ordre etc., c'est-à-dire les opérations logiques et mathématiques. Dès que l'on cesse de se placer à un point de vue normativiste ou axiomatique pur, la série linéaire des connaissances devient donc en réalité circulaire, parce que la

ligne suivie, initialement droite, se referme lentement sur elle-même.

Or, le cercle épistémologique exposé précédemment n'est pas autre chose que l'expression de ce cercle des sciences, et c'est en quoi il est non seulement conforme à la nature des choses, mais encore fort intéressant à étudier en lui-même. Pour expliquer la formation des connaissances, la psychosociologie est obligée de s'appuyer sur un système de référence, constitué par les connaissances actuelles propres aux autres sciences, mais elle prétend par ailleurs rendre compte tôt ou tard de ce système de référence comme tel, puisqu'il est formé de connaissances comme les autres, simplement situées à l'avant-garde de la recherche scientifique au lieu de l'être dans le passé ou à la racine de cette même recherche. On voit donc que ce cercle génétique traduit précisément le cercle constitué par la filiation effective des catégories de la pensée scientifique : les explications de la psychologie se réfèrent tôt ou tard à celles de la biologie ; celles-ci reposent à leur tour sur celles de la physicochimie ; les explications physiques s'appuient elles-mêmes sur les mathématiques ; quant aux mathématiques et à la logique, elles ne sauraient se fonder que sur les lois de l'esprit, qui sont l'objet de la psychologie. De plus, on aperçoit que cette fermeture du cercle implique le prolongement de la psychologie ou de la psychosociologie en épistémologie génétique : les mathématiques ne s'appuient pas, en effet, directement sur la psychologie comme telle, affirmation qui serait absurde et reviendrait à faire reposer la validité des axiomes sur la description empirique des états mentaux, c'est-à-dire à fonder la nécessité opératoire sur des constatations de faits. Les mathématiques reposent sur un ensemble d'opérations constitutives, dont la conscience naïve prend simplement acte, tandis que la réflexion critique, dite « théorie du fondement des mathématiques », en poursuit systématiquement l'analyse. Or, c'est cette dernière, dont la nature est déjà épistémologique, tout en restant intégrée dans les cadres de la science, qui s'appuie sur la psychologie. Il reste que l'on peut axiomatiser directement les opérations constitutives de la pensée sous une forme logistique, ce qui donne l'illusion d'un commencement premier, mais cela revient en fin de compte à axiomatiser un des objets de la psychologie, c'est-à-dire les opérations intellectuelles elles-mêmes, ce qui ne rompt donc pas non plus le cercle génétique. Dès lors, si, pour expliquer la genèse des connaissances, la psychologie est obligée de se référer à la réalité extérieure, telle qu'elle est connue par les sciences biologiques et physiques, ainsi qu'aux règles de la logique

et des mathématiques, ce double système de référence s'appuie en définitive à son tour sur les réalités intellectuelles qui servent à le construire et que la psychologie prétend étudier génétiquement : il constitue donc lui aussi le produit d'une genèse ou d'une construction continuelle et mobile, dont le caractère propre est de former un cercle s'élargissant sans cesse en englobant parmi ses éléments la psychologie elle-même.

L'hypothèse de travail à tirer de ces réflexions préalables dépasse donc une simple méthodologie de l'analyse génétique et historique, et elle peut servir de point de départ à l'épistémologie génétique dans son ensemble. Cette hypothèse revient à supposer que la pensée scientifique est constamment engagée en deux directions simultanées et complémentaires, qui tiennent au cercle fondamental du sujet et de l'objet. Par les mathématiques et la psychologie, la science assimile le réel aux cadres de l'esprit humain et suit ainsi une direction idéaliste. D'une part, en effet, les mathématiques assimilent les données sensibles à des schémas spatiaux et numériques et soumettent ainsi la matière à un système d'opérations toujours plus complexes et plus cohérentes, qui permettent à la déduction de dominer l'expérience et même de l'expliquer. D'autre part, la psychologie analyse les opérations et dégage, à leur propos, l'activité du sujet, qui reste irréductible à une simple soumission aux données de la réalité extérieure. Mais si c'est là l'une des deux directions constantes de la pensée scientifique, l'autre n'en est pas moins nette : par la physique et la biologie, la science obéit à une tendance réaliste, qui subordonne à son tour l'esprit à la réalité. La biologie montre ainsi les connexions de la perception, de la motricité et de l'intelligence elle-même avec les structures de l'organisme, tandis que la physico-chimie insère cet organisme dans un monde de réalités matérielles toujours plus éloigné des états de conscience immédiats et centrant de son côté la connaissance sur l'objet.

Selon que l'on parcourt le cercle des sciences dans un sens ou dans un autre, l'objet est donc réduit au sujet ou le sujet à l'objet. La science n'est ainsi ni purement réaliste ni purement idéaliste, mais orientée dans les deux directions à la fois, sans qu'il soit légitimement possible d'anticiper l'état final d'un tel processus. Or, cet état final serait nécessaire à connaître pour donner lieu à une épistémologie définitive ou close et non pas limitée aux acquisitions restreintes et progressives, comme l'épistémologie génétique, qui demeure donc essentiellement « ouverte ». Mais il supposerait précisément que soit fermé le cercle des disciplines scientifiques. Or, ce cercle ne boucle en réalité jamais

complètement car chacun des systèmes de connaissances dont il se compose étant lui-même en mouvement, il y a constamment décalage entre un progrès effectué dans l'une des directions et un progrès dans l'autre, de telle sorte que le processus entier pourrait être imaginé comme une sorte de spirale. Ce sont alors les lois de cette construction circulaire d'ensemble qui constituent la « limite » générale des développements particuliers étudiés par l'épistémologie génétique.

On voit, en résumé, la double tâche de l'épistémologie génétique. Au point de départ, elle se confond avec un certain aspect de la psychologie du développement intellectuel : elle cherche à expliquer la formation des connaissances particulières, et à résoudre ainsi le problème de savoir comment s'accroissent les connaissances délimitées. Tant qu'elle demeure sur ce terrain psychogénétique elle a besoin, comme la psychologie elle-même, d'un système de référence constitué par les connaissances scientifiques admises au moment considéré. Mais, dans la mesure ou l'analyse psychogénétique se prolonge en analyse historico-critique, le système de référence, jusque-là regardé comme fixe, se met à son tour en mouvement et la recherche psychogénétique apparaît alors comme un simple anneau dans une chaîne tendant à se refermer sur elle-même. L'étude des premiers tours de spirale décrits par ce processus relève encore de l'analyse historico-critique, mais, au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'état actuel des connaissances, la recherche épistémologique, toujours entendue sous son aspect strictement génétique, tend à se confondre avec l'analyse des rapports qui se tissent peu à peu entre les sciences comme telles : en dégageant le caractère cyclique de ces rapports, l'épistémologie génétique contribue ainsi, en fin de compte, à mettre en évidence les raisons profondes du cercle du sujet et de l'objet, cercle indéfiniment étendu par la recherche scientifique elle-même et qui, une fois fermé à la limite — mais à une limite peut-être impossible à atteindre — livrerait le secret de la connaissance humaine.

§ 7. Epistémologie génétique restreinte et généralisée. — Nous appellerons épistémologie génétique restreinte toute recherche psychogénétique ou historico-critique sur les modes d'accroissement des connaissances, pour autant qu'elle s'appuie sur un système de référence constitué par l'état du savoir admis au moment considéré. Nous parlerons au contraire d'épistémologie génétique généralisée lorsque le système de référence est englobé lui-même dans le processus génétique ou histo-

rique qu'il s'agit d'étudier. Le problème est alors de trouver une méthode qui demeure génétique et historico-critique, c'est-à-dire qui fournisse encore à la recherche des critères objectifs permettant de résister avec quelque efficacité au danger de construire simplement de nouvelles métaphysiques de la connaissance parmi d'autres.

Or, englober les connaissances actuelles de la science dans le processus génétique revient, non seulement à considérer toute vérité, même celles que l'on admet aujourd'hui, comme relative à un niveau déterminé de la pensée en développement (y compris les vérités logiques fondamentales), mais encore à ne préjuger en rien des rapports entre le sujet et l'objet. Du point de vue de l'épistémologie restreinte, le problème n'est pas aussi aigu, puisque l'activité du sujet et la construction de sa représentation des choses sont étudiées en se référant à une réalité supposée extérieure, objective et stable, qui est le réel tel que la science actuelle l'envisage. Mais, du point de vue d'une épistémologie génétique généralisée, il n'existe plus de réalité douée de ces attributs. De même que la structure du sujet connaissant a constamment évolué au cours de sa construction psychologique, de même la question reste ouverte de savoir si elle continuera de se développer sans limite ; d'autre part, la réalité supposée extérieure ayant constamment changé d'aspect au cours de cette évolution, ce qui signifie donc que certains de ses caractères soi-disant objectifs étaient de fait subjectifs, le réel peut continuer à se transformer pour les formes de pensée ultérieures, et la question doit ainsi rester également ouverte. Il n'est donc aucun moyen de résoudre avec sécurité le problème des frontières entre le sujet et l'objet sitôt que l'on abandonne le système de référence sur lequel s'appuie l'épistémologie génétique restreinte.

Cependant une recherche épistémologique aussi radicalement relativiste par méthode que cette analyse génétique généralisée se voit bien forcée de parler encore de sujet et d'objet, car ces deux pôles de la connaissance se retrouvent jusque dans les positions idéalistes ou réalistes les plus extrêmes qui puissent rentrer dans le tableau des possibilités prévues au § 4 : pour l'apriorisme poussé jusqu'à l'idéalisme le plus radical, il reste toujours des objets en tant que données de conscience imprévisibles, constatées intérieurement mais ne pouvant être déduites comme d'autres contenus représentatifs ; et, pour l'empirisme le plus matérialiste, l'organisme continue de réagir de façon toujours plus complexe aux excitants extérieurs, ce qui constitue proprement l'activité d'un sujet. Le problème subsiste donc, dans

toutes les conceptions, de déterminer les relations entre le sujet et l'objet. Mais comment procéder génétiquement en l'absence de tout système de référence, c'est-à-dire en une méthode astreinte à demeurer entièrement « ouverte »

Or, de même que les lois de construction, particulières aux diverses connaissances, constituent l'objet d'étude propre à l'épistémologie génétique restreinte, de même les directions ou « vections » inhérentes à la marche même des sciences, considérées chacune en son ensemble, fournissent à l'épistémologie génétique généralisée son domaine de recherches. Si, p. ex. le progrès des connaissances scientifiques peut être conçu à titre d'hypothèse comme décrivant une sorte de spirale ou de processus cyclique, dont l'une des directions serait caractérisée par une réduction graduelle de l'objet au sujet et l'autre par la réduction inverse ou complémentaire, il reste à vérifier l'existence de ces directions par l'analyse d'ensemble du mouvement cognitif.

Si provisoires, et relatives à notre structure mentale actuelle, que l'on considère les vérités forçant aujourd'hui notre adhésion, il demeure en effet toujours que, à défaut d'anticipation ou d'assurance prise sur l'avenir, nous pouvons comparer ce niveau présent aux précédents et dégager l'orientation qui caractérise l'ensemble du développement connu. Cette détermination des lois générales d'évolution ne constitue même qu'une généralisation de la méthode propre à l'épistémologie génétique restreinte, mais cette généralisation fournit le point d'appui qui semblait faire défaut avec l'abandon du système de référence dont usait la méthode restreinte. C'est donc une telle généralisation, ou recherche des lois de construction d'ensemble, qui permet d'entrevoir le passage à la limite dont l'épistémologie génétique fait son but final, et cela sans infidélité aux méthodes psychogénétique et historico-critique, puisque ce dernier problème prolonge sans plus les questions « restreintes ».

Mais la question des directions d'ensemble ou des vections est néanmoins pleine d'embûches et son étude suppose au moins deux sortes de précautions, relatives d'ailleurs à un seul et même écueil constant. André Lalande, dont on sait la profondeur avec laquelle il a caractérisé l'utilité de cette recherche des vections, procédant historiquement et débutant *in medias res* par opposition aux reconstructions *ab initio*, atténuait cependant le relativisme génétique que semble impliquer une telle investigation, en distinguant une « raison constituée » toujours en évolution et une « raison constituante » qui dirigerait le mouvement évolutif.

Dans sa pensée, la raison constituante se réduisait, d'ailleurs, à l'identification graduelle du divers, la raison constituée étant alors formée par les principes multiples qui ont marqué, au cours de l'histoire, les progrès de l'identification même. Il va naturellement de soi que tel pourrait être le résultat des analyses génétiques, d'autant plus que Emile Meyerson a retrouvé, pour son compte, la même identification à chaque palier de la connaissance scientifique. Seulement il serait dangereux, pour des raisons de méthode, de distinguer par principe une raison constituée, soumise à l'évolution dirigée dont on se propose d'étudier la vection, et une raison constituante soustraite pour ainsi dire d'avance à toute transformation.

La première précaution à prendre, du point de vue d'une épistémologie génétique généralisée, consiste donc à ne pas limiter au préalable l'évolution possible en présentant la direction propre à l'évolution intellectuelle comme due à la présence, dès le départ, d'un facteur *a priori* qui la lui imprimerait. Répétons-le, l'existence d'un tel facteur peut fort bien être confirmée par la recherche génétique, et n'est nullement à exclure à titre d'hypothèse ou de possibilité, bien au contraire. Mais elle n'est pas impliquée dans la méthode comme telle, et même si un dualisme relatif semble être imposé par un certain nombre de faits entre une raison constituée et une raison constituante (p. ex. entre les principes particuliers des sciences et ceux de la logique en général, etc.), il se pourrait fort bien aussi que toutes deux soient entraînées, mais à des vitesses différentes, dans le courant de la construction continue du savoir.

D'où la seconde précaution. La découverte éventuelle d'une loi d'évolution dans le domaine de la pensée scientifique ne peut naturellement valoir que jusqu'au niveau atteint par celle-ci actuellement. L'interpolation rétrospective est dangereuse, mais l'extrapolation à l'égard de l'avenir est résolument illégitime, sinon sous forme de simple probabilité inassignable. De ce point de vue, la théorie de la connaissance de Léon Brunschvicg, qui fut un modèle d'épistémologie « ouverte », poussait la prudence jusqu'à ne pas parler d'évolution dirigée et à constater simplement les crises et les changements d'orientation au cours de leur succession historique. Nous avions jadis, en une étude critique de l'un des beaux ouvrages de ce maître [1], énoncé la possibilité de concilier sa méthode avec la recherche d'une direction,

1. L'expérience humaine et la causalité physique selon L. Brunschvicg, *Journ. de Psychol.*, 1923.

ou d'une « orthogenèse » comme disent les biologistes. A quoi il répondit : « Orthogenèse si l'on veut, mais à condition de ne la connaître qu'après coup. » Nous ne pouvons que nous rallier à ce conseil, mais il ne nous en faut pas plus.

Ni *a priori* de méthode, ni anticipation, telles seront donc nos deux règles. Mais, dans l'hypothèse d'un cercle des disciplines positives, c'est-à-dire de deux directions au moins de la pensée scientifique, la tentation d'une anticipation arbitraire est peut-être plus faible, puisque les interprétations réalistes et idéalistes de la science apparaîtront ainsi davantage comme complémentaires que comme devant donner lieu à la suprématie graduelle de l'une des tendances sur l'autre. En quoi consiste alors la fécondité d'une telle hypothèse et à quoi revient, surtout, l'essai de déterminer les « limites » propres aux séries convergentes que l'on étudiera ainsi ?

L'hypothèse contraire à celle de l'ordre cyclique des sciences est représentée avant tout, en l'état actuel des travaux épistémologiques, par les idées issues de la logistique telle qu'elle a été comprise par le « Cercle de Vienne », et qui ont donné lieu à un courant connaissant un succès réel sous le nom de mouvement pour l' « Unité de la Science ». Il s'agit essentiellement d'un effort pour l'axiomatisation systématique des sciences, portant aussi bien sur les principes des sciences expérimentales que sur les théories propres aux sciences déductives. L'image des sciences qui en résulte est naturellement celle d'un ordre linéaire, suivant les étapes de cette logicisation : logique, mathématiques, physique, chimie, biologie, psychologie et sociologie. La structure des sciences échapperait, d'autre part, à toute tentative d'explication génétique, un système de propositions intemporelles se substituant ainsi nécessairement au système des idées en évolution. Or, si intéressante que soit une telle tentative, avec laquelle nous nous rencontrerons sur de nombreux points, à commencer par la méthode étrangère à toute métaphysique, une difficulté importante nous paraît subsister, qui tient d'ailleurs peut-être plus à la notion « tautologique » que les partisans de ce mouvement se font des vérités logiques et mathématiques qu'à l'ensemble de leurs autres hypothèses. C'est que cet effort pour aboutir à l' « Unité de la Science » a conduit en fin de compte, à une dualité fondamentale : d'une part, sont reconnues les vérités de faits, dont la constatation relève toujours tôt ou tard d'un contrôle actif et perceptif de la part du sujet ; mais d'autre part, les propositions logico-mathématiques, conçues comme un simple langage avec sa « syntaxe logique » subsistent indépen-

damment de toute expérience et constituent ainsi comme un monde à part. Le premier problème soulevé par ce dualisme radical propre à l'épistémologie « unitaire » est alors de savoir comment les vérités de faits vont se raccorder ou, comme dit Ph. Frank, se « coordonner » aux propositions syntactiques destinées à les exprimer, et ce problème a été abordé avec une grande subtilité par les auteurs unitaristes. Mais il demeure un second problème : c'est de « coordonner » également les connexions logistiques ou logico-mathématiques avec les opérations mentales effectives du sujet qui les emploie, car enfin une « syntaxe », même « logique », suppose un sujet capable de l'employer, et tout langage même mathématique implique, non seulement des individus en chair et en os aptes à parler, mais encore une société qui l'a engendré. II est alors clair que le cercle des sciences réapparaît, quoique légèrement transformé : les vérités de faits sont peu à peu assimilées aux propositions syntactiques, mais celles-ci reposent sur des opérations intellectuelles émanant d'un sujet qui fait partie de la réalité de fait.

Or, si tel est le cas, on aperçoit les tâches immédiates d'une épistémologie génétique et la fécondité possible de ses hypothèses de départ : la première de ces tâches consiste à réconcilier si l'on peut dire la logistique et la psychologie, celle-là conduisant aux axiomatisations intemporelles dont le courant d'idées rappelé à l'instant montre bien l'importance, et celle-ci conduisant à l'étude des opérations effectives qui constituent la science et la logique elle-même en leur développement. Les deux pôles de la connaissance sont assurément (et cela reste vrai quelles que soient les interprétations, y compris celles de l'épistémologie « unitaire ») la nécessité propre aux implications, qui tendent à se soustraire au temps, et la succession régulière des faits dans le temps. Or, nous sommes aujourd'hui fortement outillés quant à l'analyse des implications logico-mathématiques, et toute l'axiomatique contemporaine constitue à cet égard un instrument déjà très efficace. Nous sommes, d'autre part, assez avancés sur la voie de la mise en connexion entre les faits physiques et les implications logico-mathématiques. En comparaison avec ces deux ensembles imposants d'acquisitions, deux immenses lacunes nous empêchent de progresser dans la constitution d'une épistémologie scientifique ralliant tous les suffrages : le passage du physique au biologique, passage sur lequel nombre de physiciens et les plus grands biologistes concentrent actuellement leurs efforts sans réussir encore à dissiper les obscurités liées à cette question capitale, et la liaison entre les domaines psychophysio-

logique ou mental et logico-mathématique, sur laquelle nous entrevoyons les rapports possibles entre l'action temporelle ou irréversible et les opérations réversibles, sources d'implications intemporelles mais nous ne dépassons pas encore sur ce point le niveau des aperçus préliminaires et globaux. Cette double lacune de notre savoir n'exclut cependant nullement que l'on poursuive le grand oeuvre collectif de l'épistémologie scientifique en se plaçant résolument sur le terrain génétique : c'est au contraire sur ce terrain seul que l'on évitera les surprises réservées à ceux qui oublient l'importance épistémologique fondamentale des facteurs biologiques et psychologiques, et que l'on contribuera au contraire tout à la fois à la compréhension de ces facteurs et à leur insertion dans le système d'ensemble constitué par la théorie de la connaissance scientifique.

PREMIERE PARTIE

LA PENSÉE MATHÉMATIQUE

La possibilité d'une science mathématique à la fois rigoureusement déductive et s'adaptant exactement à l'expérience a constitué de tout temps le problème central de l'épistémologie. La question est plus troublante encore du point de vue génétique.

D'une part, en effet, les mathématiques s'accordent avec la réalité physique de la manière la plus détaillée. Il n'arrive jamais au physicien, quelque multiples et diverses que soient les structures ou les relations qu'il découvre dans le monde matériel, d'en trouver une qui ne puisse être exprimée avec précision dans le langage mathématique, comme s'il y avait harmonie préétablie entre tous les aspects de l'univers physique et les cadres abstraits de la géométrie et de l'analyse. Mais il y a bien plus encore : il arrive que cet accord se réalise non pas seulement au moment de la découverte d'une loi physique ou après coup, mais que les schémas mathématiques anticipent, à des années de distance, sur le contenu expérimental qui viendra s'insérer en eux. Les formes géométriques et analytiques peuvent, cela va de soi, être élaborées sans aucun souci de la réalité. Cependant, dans la mesure où elles sont déductivement cohérentes, on est assuré, non seulement que l'expérience ne les mettra jamais en défaut, mais encore, et c'est là le point paradoxal, que l'expérience les remplira en partie tôt ou tard et s'adaptera exactement à elles. L'exemple le plus beau de cette insertion du réel dans les cadres préparés par la déduction mathématique est sans doute celui de la géométrie riemanienne. Voilà une construction libre et audacieuse, poursuivie en marge de la géométrie classique, contredisant même ce fameux postulat d'Euclide que, à défaut de démonstration, l'on considérait comme imposé par l'observation directe. Voilà donc le type de ces libres créations de l'esprit mathématique insouciant du réel. Or, plus d'un demi-siècle après ce défi à la réalité physique, il se trouve que la physique elle-

même en vient à considérer la géométrie riemanienne comme plus apte à rendre compte des phénomènes gravifiques que la géométrie euclidienne : la théorie de la relativité utilise sans plus le cadre ainsi préparé et l'expérience donne raison à ce coup de génie. Autre exemple, lié à la même période de renouvellement de la physique : en 1900, Ricci et Lévi-Civita, désireux de dégager la forme des équations différentielles indépendamment des systèmes de coordonnées, fondent un « calcul différentiel absolu » ; or, ce schéma, pur travail de luxe de mathématiciens épris de rigueur, devient quelques années plus tard l'instrument essentiel dont se sert A. Einstein, car, sans le calcul tensoriel, la relativité eût été privée de sa technique spécifique. Un exemple classique des mêmes anticipations est celui des nombres « imaginaires » : nés d'une simple généralisation des opérations arithmétiques (leur nom seul suffit à indiquer l' « intention du législateur » à leur endroit !) ils ont cependant joué un rôle de plus en plus important en géométrie, en mécanique et dans la théorie des variables complexes, par conséquent dans toute l'analyse avec ses applications innombrables. Il serait enfin facile d'accumuler les exemples dans le domaine de la microphysique actuelle, qui emploie les schémas mathématiques préexistants les plus divers, depuis le calcul des matrices (où l'on retrouve le rôle des imaginaires) jusqu'aux « espaces abstraits », dont la prise de contact avec le réel expérimental constitue peut-être l'un des plus curieux paradoxes de la recherche contemporaine.

Or, tout en correspondant ainsi toujours à quelque secteur de la réalité physique, les mathématiques la dépassent sans cesse par leurs généralisations. Et surtout elles ne se fondent plus aucunement, à partir d'un certain degré de leur développement, sur l'expérience elle-même. Sans doute, au point de départ, l'enfant a-t-il besoin d'un contrôle empirique pour être certain que 1 + 4 = 2 + 3, de même que les Egyptiens découvraient, par la mesure, les linéaments de la géométrie euclidienne. Mais, à partir de 11 à 12 ans chez l'enfant et à partir des Grecs dans l'histoire, la rigueur de la déduction mathématique s'est élevée au-dessus de la constatation expérimentale. L'expérience peut être occasion à des problèmes nouveaux, et elle l'est effectivement sans cesse, orientant ainsi parfois le mathématicien dans des directions où ses intérêts ne l'auraient porté d'emblée. Mais jamais les mathématiciens n'invoquent l'expérience à la manière de la physique, comme un critère de vérité. Une proposition mathématique est vraie dans la mesure où elle est ration-

nellement démontrée, et non pas dans la mesure où elle s'accorde avec la réalité extérieure : là-dessus, tout le monde est du même avis.

Comment donc expliquer ce pouvoir mystérieux d'opérations, qui semblent être nées d'actions portant sur l'expérience la plus proche mais qui, en se coordonnant les unes aux autres, s'éloignent de la réalité empirique d'un mouvement sans cesse accéléré jusqu'à pouvoir la dominer, la devancer et même se désintéresser superbement des confirmations qu'elle leur offre sur les terrains limités de l'actuel et du fini ? D'un côté, en effet, les mathématiques élémentaires paraissent résulter d'actions parmi les autres : déplacements, réunions ou dissociations, superpositions, correspondances. Au contraire, le règne des mathématiques supérieures constitue un monde de transformations opératoires débordant de toute part les frontières de l'expérience réelle ou effectivement réalisable. Au début, par conséquent, l'univers réel paraît infiniment plus riche que celui des opérations naissantes, tandis qu'au cours du développement les positions sont renversées et ce sont les opérations déductives qui dépassent les transformations réellement observables. D'où les deux problèmes fondamentaux que soulève le développement des opérations mathématiques. Le premier est donc celui de l'accord permanent des opérations déductives et de la réalité physique : ces opérations étant à leur source des actions qui réussissent, l'accord semble alors ne point faire de mystère (apparence à discuter d'ailleurs de plus près) ; mais les mêmes opérations devenant, à leur terme, des actions symboliques, intérieures et plus riches que les transformations expérimentales comment s'accordent-elles encore avec ces dernières ? Or, ce premier problème en implique un second : celui de la fécondité du raisonnement mathématique. Dans la mesure, en effet, où le monde des constructions géométriques et analytiques dépasse le monde réel, tout en lui correspondant dans une partie commune, il s'agit de comprendre, non pas seulement cette correspondance, mais encore ce dépassement. De ce point de vue, le raisonnement mathématique apparaît comme une sorte de création (sauf naturellement à admettre d'autres solutions, telles que platoniciennes, etc., si l'étude du développement conduisait à ce résultat). Partant de quelques axiomes aussi peu nombreux et aussi pauvres que possible de contenu, et de quelques définitions, le mathématicien élabore, au moyen d'opérations constructives, cet univers immense de relations que constituent les êtres dits abstraits. Le raisonnement mathématique semble donc

constructif, que cette apparence se révèle fausse ou exacte au cours de l'analyse génétique : alors qu'en tous les autres domaines de la science, la déduction pure n'engendre que chimères, et que le progrès des connaissances suppose un appel continu à l'observation et à l'expérience, la déduction mathématique est, au contraire, indéfiniment productive. Comment expliquer cette construction elle-même, qu'elle s'avère logiquement réelle ou ne corresponde qu'à une illusion psychologique ?

Ce sont ces deux problèmes classiques que nous aimerions examiner en cette première partie, mais exclusivement sous l'angle génétique et historico-critique. Notons, en effet, qu'indépendamment de toute philosophie et du fait que ces grandes questions ont inspiré les épistémologies métaphysiques de Platon à Descartes et de Kant à Husserl, les deux problèmes de l'accord des mathématiques avec l'expérience et de la construction des opérations mathématiques s'imposent à l'épistémologie génétique, même la plus restreinte, parce qu'ils s'imposent déjà à la psychologie de l'intelligence et jusqu'à la physiologie de la perception. On ne saurait comprendre ni le développement de l'intelligence chez l'enfant ni l'organisation des structures perceptives sans prendre position à l'égard de la formation du nombre et de l'espace. Or, l'analyse de cette formation conduit nécessairement, soit à situer le nombre et l'espace dans les choses elles-mêmes, où les retrouverait la perception et d'où les extrairait l'intelligence, soit à chercher leur secret dans un certain rapport entre les choses et l'action, ou dans la structure du sujet pensant et percevant. Dans tous ces cas, le problème de l'accord des mathématiques et du réel est ainsi posé, et il serait aussi imprudent de le résoudre sur le terrain de l'opération naissante, sans regarder d'un peu près ce que deviennent les opérations une fois constituées, que de se borner à cet examen des paliers supérieurs sans s'occuper du point de départ.

CHAPITRE PREMIER

LA CONSTRUCTION OPÉRATOIRE DU NOMBRE

Il est peu de notions plus claires et plus distinctes que celles du nombre entier, et peu d'opérations à résultat plus évident que celles de l'arithmétique élémentaire : science à portée des enfants, science dont la validité n'est disputée par personne et dont les vérités initiales se sont enrichies de façon continue, sans jamais en être ébranlées elles-mêmes... Et pourtant, si nous comparons la proposition « 1 + 1 = 2 », dont tous les termes sont transparents, à cette autre proposition « les organismes dérivent d'un œuf, croissent, vieillissent et meurent », dont chaque terme comporte un monde d'obscurités, nous constatons que la simplicité du problème épistémologique soulevé par ces deux sortes de vérités est pour ainsi dire inversement proportionnelle à la clarté des notions elles-mêmes. Chacun s'accordera, en effet, à considérer la seconde proposition comme d'origine empirique, et même si un philosophe prétendait déduire *a priori* les concepts d'œuf, do croissance, de vieillissement et de mort de celui d'organisme vivant, il aurait commencé par apprendre l'existence de ces phénomènes en partant de la simple observation (ce à quoi le biologiste en est toujours réduit, avec quelques expériences en plus). Au contraire, la signification épistémologique du nombre a donné lieu aux hypothèses les plus diverses et les plus contradictoires entre elles, au point qu'il est déjà d'une grande difficulté de distinguer et de sérier les problèmes. La proposition « 1 + 1 = 2 » est-elle une vérité, une convention ou un énoncé tautologique ? Ce rapport s'impose-t-il d'abord à nous en fonction d'expériences, et desquelles ? Ou est-il construit *a priori*, ou encore objet d'une intuition immédiate, et de quelle sorte ? Le nombre constitue-t-il une notion première, ou une synthèse d'opérations simplement logiques ? Autant la vérité technique de l'arithmétique est

demeurée indiscutable, autant la question de savoir ce qu'est le nombre révèle donc la surprenante incapacité de la pensée à saisir sans plus la nature d'instruments qu'elle croit cependant comprendre entièrement et dont elle fait usage en presque chacun de ses actes.

Un tel contraste entre l'évidence instrumentale du nombre et le chaos des théories épistémologiques construites à son sujet par les mathématiciens eux-mêmes démontre à lui seul la nécessité d'une recherche génétique : l'inconscience de la pensée à l'égard des rouages essentiels de son propre mécanisme est, en effet, l'indice psychologique de leur caractère élémentaire, et par conséquent de l'ancienneté du niveau de formation auquel il faut remonter pour pouvoir les atteindre.

§ 1. LES THÉORIES EMPIRISTES DU NOMBRE. A) L'EXPLICATION DU NOMBRE CARDINAL PAR L' « EXPÉRIENCE MENTALE ». — On sait que Kronecker et Helmholtz ont attaché leurs grands noms à une interprétation psychologique du nombre. En particulier Helmholtz, en ses multiples qualités de physiologiste et de psychologue des perceptions, d'une part, de physicien et de mathématicien, d'autre part, n'a pas hésité à soutenir que la construction du nombre pur (par opposition aux nombres appliqués à la mesure) repose sur des « réalités purement psychologiques ». Nous reviendrons au § 2 sur sa conception du nombre ordinal fondé sur la succession des états de conscience. Insistant davantage sur l'expérience externe que sur l'expérience intérieure, Mach et Rignano ont, d'autre part, interprété la formation du nombre en fonction d'une expérimentation appliquée mentalement à la réalité. L' « expérience mentale », nous dit Mach[1], consiste à « imaginer » par la pensée « la variations des faits » (p. 200). On peut donc presque dire, avec son traducteur, qu'elle est l' « imitation mentale d'un fait » (p. 3). Du moins, « c'est la nature de l'expérience antérieurement acquise qui fait le succès d'une expérimentation mentale » (p. 206). Dès lors, si le concept de nombre se construit grâce aux expériences réelles de réunion et de distinction, d'arrangements et de correspondance (p. 317), il suffira ensuite d'évoquer par expérience mentale les collections de divers ordres ainsi formées et de les manipuler en imagination pour engendrer les opérations de l'arithmétique. Le calcul n'est lui-même qu'un prolongement, par la pensée, du dénombrement

1. E. MACH, *La connaissance et l'erreur*, trad. DUFOUR, Paris, Flammarion, 1917.

effectif, un « moyen indirect de compter » (p. 320). Cette explication des opérations mathématiques par l'expérience mentale a été reprise et longuement développée par E. Rignano[1], puis par le psychiatre Ph. Chaslin[2]. Le raisonnement, dit ainsi E. Rignano, « n'est pas autre chose qu'une suite d'opérations ou d'expériences pensées », ce qui semble souligner davantage l'aspect d'activité propre à la construction opératoire, mais tout l'accent ensuite est mis à nouveau sur l'expérience antérieure des choses elles-mêmes, ravivée par le souvenir et contrôlée par la simple attention. Seul Chaslin semble s'orienter vers l'interprétation proprement opératoire, en caractérisant les propriétés de l'objet arithmétique par les opérations que l'on peut effectuer sur lui.

Il n'est donc pas inutile d'aborder l'examen de la genèse du nombre par la discussion de cette notion d'expérience mentale, de manière à dissiper l'équivoque fondamentale qui s'est attachée à son interprétation. Du point de vue de la description même des faits, il n'y a rien à objecter à l'emploi d'un tel concept : il exprime au contraire fort bien cette observation générale que toute expérience matériellement exécutée est susceptible de s'intérioriser ensuite en une expérience imaginée, et ce qui est plus important encore, que toute pensée, si abstraite soit-elle, repose sur une telle mentalisation d'actions et d'expériences possibles. Mais cette constatation psychologique ne conduit pas nécessairement à l'empirisme épistémologique, pas plus (ni moins) que la constatation du rôle historique de l'expérience dans le développement des sciences n'y aboutit de son côté : en effet de même qu'il faut se demander, en chaque domaine délimité, en quoi consiste l'expérience, et quelles sont, dans sa constitution, les parts respectives de l'activité du sujet et des données objectives elles-mêmes, de même toute « expérience mentale » soulève l'ensemble des problèmes épistémologiques au lieu de les résoudre par sa seule existence.

De ce point de vue, une première distinction s'impose. Epistémologiquement, certaines expériences mentales (I) consistent simplement à imaginer une réalité extérieure au sujet, comme lorsque Galilée cherchait à se représenter l'accroissement des vitesses avant toute expérimentation effective[3]. D'autres expériences mentales (II) reviennent au contraire à imaginer, non

1. E. RIGNANO, *La psychologie* du *raisonnement,* Paris, Alcan et *Scientia XIII-XX* (1913-1916).

2. Ph. CHASLIN, *Essai sur le mécanisme psychologique des opérations de la mathématique pure,* Paris, *1926.*

3. Voir KOYRÉ, *Eludes galiléennes,* Hermann, 1939 (p. ex. p. 242).

pas simplement « les variations des faits » comme dit Mach, mais les actions comme telles du sujet faisant varier les faits ce qui n'est pas la même chose. Dans le cas de l'action du sujet, en effet, peu importe que la transformation ait lieu matériellement ou « en pensée » : il s'agit toujours d'une activité inhérente au sujet ; inversement, dans le cas des modifications des choses elles-mêmes, il s'agit d'une variation extérieure, même imaginée intérieurement. Que l'addition 1 + 1 = 2 soit effectuée au moyen d'actions matérielles ou symboliquement, avec intervention d'objets physiques ou de façon toute « abstraite », le fait essentiel est que le sujet réunisse deux unités, c'est-à-dire qu'il agisse : même si cette action est extérieure, elle est déterminée par un mécanisme interne propre à l'activité du sujet. C'est donc jouer sur les mots que de confondre les « variations des faits » extérieurs représentés intérieurement et l'imagination d'actions possibles qui, déjà sous leur forme extérieure, manifestent l'activité intérieure du sujet. Or, Mach et Rignano passent sans cesse de l'un de ces sens à l'autre, et c'est ce qui leur permet de conclure sans plus de l'existence psychologique des expériences mentales à l'empirisme épistémologique.

Une seconde distinction intervient ensuite, d'un point de vue surtout psychologique, mais qui a son importance épistémologique. On pourrait objecter à ce qui précède qu'en agissant sur le réel le sujet se borne à y insérer une variation parmi les autres, dont il lira les résultats du dehors (même s'il les imagine par « constatation mentale ») : ce serait alors la justification de l'hypothèse empiriste. Or la distinction que nous allons proposer maintenant semble au premier abord conduire à cette conclusion. Dans le cas où l' « expérience mentale » revient à imaginer les actions mêmes du sujet (II), il faut, en effet, distinguer encore, entre l'imagination d'actions mal différenciées, insuffisamment coordonnées entre elles et obligées par conséquent de s'appuyer sur la réalité extérieure pour aboutir à la prévision de leurs résultats (II A) et l'imagination d'opérations proprement dites, c'est-à-dire (selon la définition que nous adopterons), d'actions devenues réversibles et suffisamment coordonnées pour donner lieu à des compositions susceptibles d'anticipations précises (II B). Ceci nous rapproche de la genèse du nombre, car les actions constitutives des opérations numériques commencent par présenter le premier de ces deux types, sous forme d'expériences matérielles puis d'expériences mentales (II A) avant d'atteindre le second (II B).

Prenons comme exemple les expériences, effectives ou men-

tales, de mise en correspondance, sur lesquelles insistent Mach et Rignano, et cherchons à les analyser en leur racine infantile, du point de vue des deux distinctions introduites à l'instant.

Supposons que l'on donne à un enfant six jetons rouges alignés, en lui demandant d'en trouver autant de bleus, qu'il puisera dans une collection plus nombreuse mise à sa disposition[1]. Il en aligne alors six bleus, en les prenant un à un pour placer chacun en face de son correspondant rouge ; mais, si l'on écarte un peu les éléments de l'une des deux rangées, l'enfant de 5 à 6 ans estime alors fréquemment qu'il n'y a plus équivalence entre les deux collections (« il y a davantage de rouges », etc.) parce qu'il n'y a plus, en ce cas, correspondance visuelle régulière et que l'espace occupé par l'une des rangées est plus grand que l'autre. Est-il au moins certain que les jetons, une fois replacés, correspondront à nouveau un à un à autant d'éléments situés en regard ? Les plus jeunes en doutent même (p. ex. six œufs sortis de leur coquetier et mis en tas ne sont pas assurés de retrouver chacun leur récipient si on les replace, comme si leur quantité avait varié du seul fait des changements de disposition spatiale), tandis que d'autres tiennent pour probable le retour à la correspondance terme à terme, sans pour autant en conclure que les jetons écartés continuent de correspondre biunivoquement aux jetons serrés.

Il y a dans ces premiers exemples toute une gamme d'expériences, effectives ou « en pensée », dont la variété confirme d'emblée la complexité du problème de l'expérimentation mentale et la nécessité des distinctions introduites à l'instant. Tout d'abord, lorsque pour obtenir deux collections équivalentes, le sujet imagine deux séries se correspondant optiquement (chaque terme étant en regard de son correspondant), ne peut-on pas dire que le raisonnement imite simplement le réel, l'expérience mentale consistant bien alors à « imaginer la variation des faits » (type I) ? Répondons d'abord que, si c'était le cas, ce serait déjà une preuve que l'imitation des faits extérieurs ne suffit point à engendrer le nombre, puisque la configuration perceptive de deux rangées se correspondant optiquement ne donne lieu ni à une équivalence durable entre les deux ensembles ni à une conservation de chaque ensemble en cas de changement de la figure intuitive. A cet égard, le cas des enfants qui croient à un retour possible à la configuration initiale est particulièrement significatif : ils imaginent mentalement ce retour sans en conclure à l'équivalence de la rangée espacée et de la rangée serrée !

1. Pour le détail de l'expérience et des résultats, voir PIAGET et SZEMINSKA, *La genèse du nombre chez l'enfant,* Delachaux & Niestlé, 1940 (chap. III).

Il y a donc plus, dans une mise en correspondance, que l'imagination ou que la perception directe de cette correspondance toute construite : il y a une suite d'actions inhérentes au sujet. Nous pouvons ainsi constater que ces expériences de l'enfant appartiennent à la deuxième des catégories distinguées au début (type II) : leur expérimentation réelle ou mentale consiste à lire le résultat des actions du sujet, et non pas directement la variation des faits.

Mais alors intervient la seconde distinction : ces actions, matérielles ou imaginées, ne donnent pas encore lieu à une composition déductive exacte, puisqu'elles n'aboutissent pas à la conservation des ensembles manipulés. L'enfant a donc effectivement besoin de l'expérience pour s'assurer de la possibilité d'un retour à la configuration initiale, ou pour comprendre le passage d'une configuration à une autre. Il en demeure ainsi au premier des deux types distingués dans la seconde catégorie d'expériences mentales (II A). Comment passera-t-il donc de là au second type (II B) et en quoi consiste le genre d'expériences auxquelles il se livre ? Voici d'abord les faits : à un niveau supérieur au précédent, c'est-à-dire vers 7 ans, l'enfant saura imaginer, sans avoir besoin d'aucune expérience réelle, que toute modification spatiale ou perceptive de l'une des deux rangées de jetons laissera invariante l'équivalence 6 = 6 celle-ci sera donc fondée sur une correspondance bi-univoque dorénavant conçue comme indépendante de la correspondance optique ; de plus, il considérera comme évidente et reposant sur une nécessité rationnelle la conservation de chaque ensemble au cours des déplacements possibles de ses éléments. Il fera même de cette équivalence durable et de cette conservation une sorte de vérité *a priori*, mais cet *a priori*, comme tous ceux que nous rencontrerons encore, apparaît au terme et non pas au point de départ du processus génétique, et caractérise donc sa phase d'équilibre final et non point de formation. Faut-il alors admettre simplement qu'ayant appris, par une suite d'expériences, la possibilité de retrouver toujours la même correspondance, le sujet se borne à imaginer mentalement de telles expériences jusqu'à en considérer le résultat comme nécessaire ? De l'expérience mentale de Mach et Rignano, ces faits nous feront-ils ainsi remonter jusqu'à l'empirisme de Hume et à son assimilation de la nécessité aux seuls produits de l'Habitude ?

Le développement de l'action caractérisé par la succession des deux phases (II A et II B) que nous venons de rappeler est plus complexe qu'un simple passage d'expériences matérielles

et tâtonnantes à une expérience intériorisée en imagination. Si la notion d'expérience mentale garde toute sa valeur pour les phases initiales II A, c'est-à-dire lorsque le sujet se borne à se représenter intuitivement certaines actions possibles, elle devient simpliste et inefficace lorsqu'elle exprime la capacité d'exécuter mentalement un ensemble défini d'opérations (II B) : en ce dernier cas, en effet, l'expérience mentale découle de ces opérations, ou s'appuie sur elles, mais elle ne les explique pas. Une différence bien plus importante que l'imagination des actions possibles oppose, en effet, la phase de 5-6 ans et la phase de 6-7 ans dans les expériences précédentes : les actions propres à la première phase (II A) sont encore insuffisamment coordonnées entre elles, et c'est faute de cette coordination complète que le sujet est obligé de s'appuyer sans cesse sur l'imagination de leur résultat ou même sur la perception. En particulier, elles ne sont point encore réversibles, et lorsque le sujet admet un retour à la configuration initiale, il ne s'agit que d'un retour empirique possible au point de départ et non pas encore d'une opération inverse conçue comme nécessaire. Au contraire, dans la seconde phase (II B), chaque action est considérée comme pouvant être inversée, et c'est cette réversibilité qui entraîne le sentiment de la nécessité de la conservation des ensembles et leurs équivalences. Or, il serait absurde de voir dans la réversibilité un produit de l'imagination, de la perception et plus encore de l'habitude : une image succède à une autre ou une perception à une autre selon un flux irréversible, encore bien visible précisément au cours de la première de nos deux phases, et inverser une habitude consiste à acquérir une nouvelle habitude. En effet, même en percevant ou en imaginant les configurations successives dans un ordre inversé ou dans leur retour, l'enfant n'en conclut nullement, durant cette première phase II A, à une réversibilité des rapports eux-mêmes, faute précisément de mise en relations réversible, c'est-à-dire d'inversion des actions comme telles. C'est donc dans la coordination même des actions, c'est-à-dire dans leur composition progressive qu'est à chercher le passage de l'action empirique à l'opération réversible, et non pas dans la simple intériorisation de la première sous forme d' « expérience mentale ».

Si tel est le cas, nous apercevons alors en quoi consiste l'expérience propre à la première phase (II A) et précédant la coordination opératoire. Comme nous le reverrons en toutes les situations où une notion mathématique est préparée par un système d'actions, il s'agit bien davantage d'expériences que le sujet fait

sur ses propres actes que d'expérimentation portant sur les objets comme tels. Lorsqu'il met en correspondance des jetons bleus et rouges, ces corps physiques ne jouent, en effet, pas de rôle en tant que physiques, sinon à titre d'instruments — et l'on pourrait presque dire d'aliments — pour l'action elle-même : ils sont assimilés au schème de cette action, bien plus que celle-ci ne s'accommode à eux comme s'il s'agissait d'étudier leur couleur, leur résistance ou leur poids. Ils remplissent donc une fonction appréciable tant que les actions sont relativement incoordonnées, mais, avec les progrès de cette coordination, leur importance s'efface et ils pourront être remplacés par des éléments de plus en plus symboliques. Il faut par conséquent distinguer soigneusement cette sorte d'expérience fonctionnelle portant sur des « objets quelconques » (dans le sens où Gonseth a caractérisé l'un des aspects de la logique) de l'expérience matérielle qui porte sur les propriétés physiques d'objets particuliers.

La conclusion de ces quelques remarques préliminaires est donc que le nombre ne saurait être expliqué par la simple notion d' « expériences mentales » en général. Si l'on distingue parmi elles celles qui retracent les « variations des faits » (I) et celles qui reproduisent en pensée les actions comme telles (II), le nombre dérive de ces dernières, mais le vrai problème est alors de comprendre le passage de l'action à l'opération. Le fait premier, du point de vue génétique (et cela est vrai de l'espace et même en partie du temps, comme du nombre) n'est, en effet, pas la prise de conscience de l'activité propre, mais bien cette activité elle-même en tant qu'organisation progressive et que modification de l'objet par le sujet. Dans le cas du nombre comme des notions logiques et de l'espace, qui se constituent en relation étroite avec lui, ces actions élémentaires consistent d'abord à réunir ou à séparer, à ranger ou à changer d'ordre, etc., bref à construire ou à défaire des assemblages déterminés. Il s'agit donc de dégager les caractères épistémologiques de ces actions initiales qui sont encore fort éloignées de l'opération rationnelle et de saisir le processus conduisant à ces dernières :

1° Une action est toujours solidaire d'actions antérieures et cela de proche en proche jusqu'aux réflexes de départ et aux montages héréditaires (qui sont eux-mêmes une histoire biologique régressant sans fin). Toute action revient donc d'abord à assimiler l'objet, sur lequel elle porte, à un *schème d'assimilation* constitué par les actions antérieures dans leur continuité avec l'acte actuel [1]. Il existe ainsi un schème de réunir, de

1. Voir pour le détail notre ouvrage sur *La naissance de l'intelligence chez l'enfant,* Delachaux & Niestlé, 1945.

séparer, etc., et l'action est d'abord assimilation de l'objet à ces schèmes, d'une manière comparable au jugement qui assimile l'objet à des concepts, c'est-à-dire à des schèmes opératoires. L'action est donc nécessairement relative à un sujet agissant comme la pensée à un sujet pensant. Mais d'autre part, l'action est aussi relative à son objet, c'est-à-dire qu'en chaque situation nouvelle, le schéma de l'action est différencié par l'objet auquel il s'applique, cette modification pouvant être momentanée et occasionnelle ou durable. Nous dirons ainsi que l'action est, en second lieu, *accommodation* à l'objet, c'est-à-dire relative à son objet et non pas seulement au sujet. Or, cette assimilation et cette accommodation sont indissociables l'une de l'autre, et l'on ne saurait concevoir une action sans chacun de ces deux pôles ; mais il peut exister entre les deux tendances ainsi polarisées diverses formes d'équilibre. Au point de départ, cet équilibre est instable, car l'assimilation est conservatrice, tandis que l'accommodation exprime les modifications dont le sujet doit subir le renouvellement continuel de la part des objets.

2° Lorsque l'on passe ensuite de l'action sensori-motrice à l'action intériorisée constituée par la représentation intuitive, l'équilibre entre l'assimilation et l'accommodation tend à se stabiliser sous l'effet des facteurs suivants. Grâce au jeu des significations évoquées mentalement, l'assimilation cesse d'être immédiate et dépasse l'action du moment en portant sur de plus grandes distances spatiotemporelles, c'est-à-dire qu'elle se prolonge en jugements. Si complexe que soit la filiation psychologique de l'assimilation représentative par rapport à celle de l'action, la continuité épistémologique est ainsi évidente. Quant à l'accommodation, elle s'intériorise également, mais sous forme de signifiants imaginés : l'image mentale, symbole de l'objet, résulte d'une sorte d'imitation intérieure qui, comme l'imitation elle-même, prolonge l'accommodation[1]. Cette double intériorisation rend donc possible un équilibre plus large et plus durable entre l'assimilation et l'accommodation, mais imparfait encore, puisque ces deux tendances demeurent orientées en deux directions divergentes, l'une de conservation et l'autre de changement. La pensée intuitive et les expériences mentales élémentaires n'en constituent pas moins des systèmes toujours mieux articulés d'actions effectuées en pensée, imaginant, d'une part, la réalité perçue (accommodation imitative) et l'assimilant, d'autre part, à ses schémas intériorisés. Mais Mach et Rignano n'ont insisté que sur l'élément d'accommodation au réel, d'où leur empirisme, sans voir qu'il s'accompagne nécessairement d'une assimilation aux schèmes d'action, c'est-à-dire à une activité de la part du sujet (bien qu'elle ne soit pas encore de nature opératoire).

3° En troisième lieu vient l'opération concrète. L'opération est encore et toujours une action, que celle-ci soit effective comme en (1), ou mentale comme en (2). Mais elle présente deux sortes de nouveautés, d'ailleurs solidaires, par rapport aux actions précédentes. En premier

1. Voir notre ouvrage sur *La formation du symbole chez l'enfant,* Delachaux & Niestlé, 1945.

lieu, elle est réversible, tandis que l'action initiale est irréversible, et toute la psychologie de l'enfant montre combien est lente cette conquête de la réversibilité, jusqu'au moment où l'action inverse est conçue comme attachée nécessairement à l'action directe : inverser un ordre, séparer par opposition à réunir, etc. D'où le second caractère de l'opération : il ne s'agit jamais d'une action unique, mais bien d'actions coordonnées à d'autres, cette composition entre actions successives étant rendue cohérente par leur réversibilité même. En effet, cette réversibilité et cette coordination ne sont pas autre chose que l'expression de l'équilibre enfin atteint entre l'assimilation et l'accommodation : coordonner les actions de façon réversible, c'est pouvoir simultanément accommoder les schèmes à toutes les transformations et assimiler chaque transformation à chaque autre par l'intermédiaire du schème des actions qui les provoquent. — Mais les premières opérations demeurent concrètes parce qu'encore liées à des manipulations effectives ou mentales.

4° Enfin, au terme de l'organisation des opérations concrètes, deviennent possibles les opérations abstraites ou formelles, dont le caractère est de reposer sur de pures assomptions et non plus sur des réalités manipulables : ces nouvelles opérations portent, en effet, sur les propositions qui décrivent les opérations concrètes et non plus sur les objets de celles-ci. Ainsi se constitue finalement une logique des propositions, susceptible de porter sur plusieurs systèmes opératoires à la fois. Seulement il est clair que, psychologiquement, chaque proposition constitue encore une action, coordonnable et réversible, mais purement symbolique et hypothétique. De l'action initiale au système des propositions hypothético-déductives, la continuité est ainsi complète.

Pour en revenir au nombre entier, il est donc illusoire de vouloir l'expliquer par des expériences, même mentales, interprétées empiriquement. Sans doute est-il l'expression d'actions, mais ces actions sont, dès le départ, assimilation de l'objet au sujet autant qu'accommodation de celui-ci à celui-là. Dès lors on ne parviendra pas à expliquer les opérations finales, qui constituent le nombre, sans faire appel à cette activité assimilatrice, et l'on devra même, pour restituer aux opérations numériques leur nature de composition réversible, suivre palier par palier l'équilibre progressif qui s'établit entre l'assimilation et l'accommodation toujours mieux différenciées. L'expérience qui intervient au cours des premiers stades de ce développement ne parle donc pas, interprétée psychologiquement, en faveur de l'empirisme, mais d'une activité opératoire (ce qui n'est nullement la même chose) ; celle-ci s'annonce dès les formes actives et intuitives les plus primitives du nombre et ne se réalise pleinement que dans les systèmes d'opérations d'abord concrètes, puis formelles et axiomatisables.

§ 2. LES THÉORIES EMPIRISTES DU NOMBRE. B) L'EXPLICATION DU NOMBRE ORDINAL PAR L'EXPÉRIENCE INTÉRIEURE DES ÉTATS DE CONSCIENCE (HELMHOLTZ). — La critique que nous venons de faire de l'explication du nombre par l'expérience mentale aboutit au résultat suivant : le nombre n'est pas abstrait des objets ou de la réalité sur laquelle porte l'expérience, mais bien des actions elles-mêmes, qui interviennent dans l'expérience (effective ou mentale) et qui la rendent possible. N'est-ce pas alors soutenir par cela même que le nombre a une origine empirique, mais interne et non plus externe ? Et l'abstraction à partir des actions n'est-elle pas de la même nature que l'abstraction à partir des objets, à cette seule différence près que l'objet d'expérience à partir duquel sont tirés par abstraction les éléments du nombre serait le sujet lui-même, directement conscient de sa propre réalité empirique ? La discussion de la théorie de Helmholtz va nous fournir la double occasion d'examiner la notion épistémologique d'expérience intérieure, dans ses relations avec le point de vue des opérations et de distinguer les deux types d'abstractions par leur mécanisme opératoire.

On sait que dans son petit écrit *Zählen und Messen,* Helmholtz a cherché à montrer que le point de départ du nombre est situé dans l'intuition mnésique de l'ordre de succession temporelle de nos états de conscience : « Compter est un procédé qui repose sur notre faculté de nous rappeler l'ordre de succession de nos états de conscience »[1]. Autrement dit, les états de conscience se succédant dans le temps, selon un déroulement irréversible, constituent d'eux-mêmes une série dont l' « intuition interne » est fournie par la mémoire. Il suffit alors de « numéroter », par un procédé verbal conventionnel, les termes de cette série pour obtenir une suite de « numéros d'ordre » permettant de définir l'addition ordinale par leur simple succession et l'égalité des deux nombres ordinaux. Fondée sur l'empirisme de l'expérience interne la conception de Helmholtz se double donc d'une sorte de conventionnalisme quant à la manière dont la série temporelle se traduit par une suite de « signes » reliés au moyen d'une opération leur conférant la valeur d'unités (ordinales) homogènes.

Trois aspects de la théorie de Helmholtz sont donc à discuter : l'hypothèse selon laquelle la forme initiale du nombre est ordinale, le conventionnalisme de la numérotation et l'empirisme des sources.

Il est inutile d'insister dès maintenant sur l'insuffisance des

1. Traduit et cité par A. SPAIER, *La pensée et la quantité*, p. 84.

théories ordinales. D'une part, L. Brunschvicg a montré de façon décisive [1] que, dans le fini, l'ordination suppose la cardination et *vice versa* : si des unités successives sont rigoureusement homogènes, on ne peut distinguer leur ordre de succession qu'en se référant aux collections formées par cette succession même (1 + 1 + 1 ne diffère, p. ex., de 1 + 1 que parce qu'il y a deux numéros d'énumérés avant le dernier au lieu d'un seul) ; inversement les collections cardinales ne peuvent être évaluées qu'à la condition d'être ordonnées si l'on veut être certain de n'avoir pas compté deux fois le même terme. D'autre part, la genèse psychologique du nombre, chez l'enfant, confirme de manière frappante cette indépendance des deux aspects ordinal et cardinal en montrant que le nombre suppose la fusion des opérations d'emboîtement de classes (aspect cardinal) avec la sériation (aspect ordinal). C'est ce que nous verrons au § 6. C'est donc faute d'une analyse génétique des opérations spontanées que Helmholtz s'est borné à insister sur l'aspect ordinal, par une reconstitution psychologique artificielle.

Quant au conventionnalisme de Helmholtz, comme on l'a parfois appelé, il tient à la même raison. Pour combler l'abîme qui sépare la suite qualitative des états de conscience, avec ou sans mémoire, de la suite des nombres entiers, il fallait bien, en effet, intercaler un ensemble d'opérations : Helmholtz n'ayant pas recherché génétiquement celles qui se développent chez l'enfant construisant sa notion de nombre, il a suppléé à ces opérations spontanées par un ensemble d'opérations conventionnelles portant sur les signes de la numérotation.

Les difficultés de la théorie de Helmholtz tiennent donc, en fin de compte, à son point de départ, c'est-à-dire à l'hypothèse que le nombre peut être tiré de l'expérience intérieure. Or, cette erreur est d'autant plus significative qu'elle est ainsi associée à un très grand nom et que l'illusion d'une parenté génétique directe entre le nombre et le temps a été partagée par un certain nombre d'autres grands esprits, à commencer par Kant et à finir par Brouwer.

L'hypothèse, suggérée par le fait que le temps comme le nombre constitue une série linéaire, a sans doute séduit de tels auteurs parce qu'en appuyant le nombre sur le temps on croit lui assurer un fondement plus solide, la durée intérieure semblant être l'objet d'une intuition bien plus directe que la connaissance de l'espace ou d'un ordre de succession

1. L. BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, P.U.F.

simplement spatial. Or, d'une part, rien ne prouve que l'intuition de la durée interne soit plus primitive que celle du temps physique, car le bébé remarque très probablement l'antériorité des moyens sur les fins (p. ex. tirer une couverture pour atteindre l'objectif posé dessus) bien avant la succession de ses états de conscience, faute de toute mémoire d'évocation. D'autre part, la mémoire elle-même est beaucoup plus une reconstruction active et en partie opératoire qu'un enregistrement automatique et surtout automatiquement ordonné : pour ordonner nos souvenirs nous sommes obligés d'y mettre nous-même cet ordre. L'intuition de la durée ne conduit donc à une notion distincte de l'ordre temporel que dans la mesure où, à cette intuition, se superposent des opérations proprement dites de sériation (voir chap. IV, § 3). La construction de la succession temporelle ne s'achève même chez l'enfant qu'après celle des opérations numériques, ou en tout cas de façon synchrone et nullement antérieure [1].

Bref, à vouloir tirer de l'expérience intérieure le nombre ordinal, ou même simplement l'idée de suite ordonnée, on se heurte exactement à la même difficulté qu'à les vouloir tirer de l'expérience externe : ni l'opération de la sériation qualitative, ni *a fortiori* celle de la numérotation ordinale ne sont données dans l'expérience, interne pas plus qu'extérieure. Ces opérations se surajoutent à l'expérience, à la manière dont une action s'applique à des objets, ces objets fussent-ils ceux du souvenir ou de la conscience actuelle, mais, structurant l'expérience directe, elles n'en dérivent pas sans plus.

D'où provient alors une opération comme celle qui consiste à sérier des objets matériels ou des événements remémorés, si ce n'est d'une certaine forme d'expérience intérieure ? Mais c'est précisément ici que la psychologie de la conduite ou de l'action a renouvelé celle de la conscience. L'opération dérive de l'action, mais l'action elle-même est une réalité plus profonde que l'expérience intérieure qu'elle est susceptible d'engendrer, car cette expérience n'est jamais qu'une prise de conscience plus ou moins inadéquate de l'action comme telle. Ce n'est donc pas à l'expérience intérieure qu'il faut recourir et cela à aucun stade du développement, mais c'est à ce développement même des actions et notamment au passage graduel de l'action mentalisée aux opérations.

Or, pour reprendre l'exemple de Helmholtz, il est parfaitement légitime de rapprocher la construction d'une suite ordonnée (une fois reconnu le caractère opératoire de cette construction par opposition aux caractères vécu ou simplement représenté), des

1. Voir, pour la démonstration, notre ouvrage sur *Le développement de la notion de temps chez l'enfant*, Paris, P.U.F., 1946.

conduites par lesquelles nous ordonnons nos souvenirs (une fois reconnu également le caractère actif de la mémoire, qui s'apparente à la reconstitution du passé par l'historien ou à ce que P. Janet appelle la « conduite du récit »). Mais, pour tirer une opération de caractère relativement supérieur (la sériation opératoire n'apparaît chez l'enfant que vers 7 ans) d'une conduite un peu inférieure (la mémoire d'évocation débute sans doute avec le langage), il faut faire appel à une abstraction *sui generis*, qui est précisément l'abstraction à partir des actions, opposée à l'abstraction à partir des objets, selon la distinction que nous annoncions au début de ce § 3. C'est ainsi que la construction d'une suite ordonnée est une opération qui peut abstraire ses composantes, non seulement de la mémoire, mais aussi de l'ordre des mouvements dans une suite de gestes, etc., bref de tout ordre intervenant en des conduites inférieures, mais selon une abstraction dont il s'agit de préciser le mécanisme.

Le tort des explications par l'expérience intérieure consiste à croire que l'on peut abstraire un caractère emprunté à une intuition ou à une perception interne (p. ex. une intuition de durée ou une sensation kinesthésique) pour l'insérer directement en une conduite supérieure, telle qu'une opération, à la manière dont on abstrait de l'expérience extérieure une qualité quelconque, p. ex. la blancheur de différents objets, pour en construire une classe générale, celle des objets blancs. Or, il s'agit en réalité de deux formes d'abstraction fort différentes et il est important d'y insister dès le début de cet ouvrage, car ce problème se retrouve dans toutes les questions épistémologiques particulières (celles de l'espace, du temps, de la force, etc.) et c'est sa méconnaissance qui paraît avoir faussé un certain nombre de théories fondées sur des considérations psychogénétiques, comme celle de F. Enriques, p. ex. (*Introduction*, § 3).

Rappelons les principales étapes distinguées au § 1 et conduisant de l'action à l'opération : action sensori-motrices, pensée intuitive, opérations concrètes et opérations formelles. Dans le cas de la construction d'une suite ordonnée, on peut désigner sur chacun de ces paliers des conduites qui préparent ou qui achèvent une telle construction. Au niveau sensori-moteur il existe ainsi déjà certains schèmes de succession pratique (p. ex. exécuter un mouvement avant un autre et toujours dans le même ordre). Sur le plan de l'intuition imagée on en retrouve d'autres (p. ex. l'ordre de certains souvenirs), sur le plan des opérations concrètes également (p. ex. ordonner des objets selon leurs hauteurs ou leurs poids). Il existe enfin des schèmes de succession formels (p. ex. ordonner une suite d'éléments abstraits). Chacun de ces paliers est caractérisé en outre, comme nous l'avons entrevu au § 1, par un équilibre supérieur à celui du précé-

dent, se marquant par une réversibilité plus grande et des compositions plus générales. Il est donc évident que chaque type de schème emprunte au type antérieur certains éléments, ainsi généralisés, p. ex. précisément une certaine forme de succession. C'est cet emprunt qui constitue l'abstraction à partir de l'action, et on voit qu'il est réel si l'on a soin de le suivre de proche en proche et non pas en sautant directement de conduites élémentaires aux niveaux supérieurs. En quoi cette abstraction diffère-t-elle alors de l'abstraction des qualités des objets, intervenant dans la construction d'un concept à partir de l'expérience externe ?

La différence essentielle est que, dans le cas de l'expérience extérieure, la qualité abstraite de l'objet est déjà reconnue dans l'objet, sous la même forme, avant son abstraction : l'abstraction de la blancheur, p. ex., aboutit à ce résultat nouveau de permettre la comparaison entre plusieurs objets différents (p. ex. dans la constitution d'une espèce chimique ou biologique), mais cette blancheur était reconnue telle quelle en chacun de ces objets avant cette abstraction. Nous parlons naturellement d'une qualité physique, c'est-à-dire imposée au sujet par la perception des objets eux-mêmes, et non pas d'un caractère ajouté aux objets par l'action qui porte sur elle, p. ex. de constituer tel nombre. Or, en opposition avec cette abstraction des qualités physiques, l'abstraction d'un caractère mental qualifiant tel schème d'action et destinée à faire entrer ce caractère dans un schème plus complexe (et non en un simple concept descriptif de l'expérience intérieure) est une *abstraction réfléchissante*, c'est-à-dire qui transforme la conduite même en la différenciant et par conséquent qui ajoute quelque chose à la qualité ainsi isolée par l'abstraction. Par exemple, la succession pratique, en jeu dans une conduite sensori-motrice, n'est pas nécessairement l'objet d'une prise de conscience de la part du sujet au niveau considéré : l'abstraire de son contexte d'action la transformera par conséquent en une succession représentée, et non plus simplement vécue, ce qui suppose la construction d'un nouveau schème appartenant à un niveau supérieur (au niveau de la pensée intuitive s'il s'agit, p. ex., d'une reconstruction mnésique de cette succession). Une nouvelle abstraction la transformera en opération proprement dite, s'il s'agit d'une succession pouvant être inversée ou reproduite à volonté (et non pas seulement en certains contextes représentatifs d'ensemble), etc. De même l'abstraction d'une suite construite par opérations concrètes en une suite formelle suppose une reconstruction de cette suite sous forme de propositions. C'est pourquoi cette succession d'abstractions (avec

passage du sensori-moteur à l'intuitif et de là aux opérations concrètes plus formelles) s'étage entre 1 et 12 ans, soit pendant toute la durée du développement mental.

Bref, l'abstraction à partir de l'action est nécessairement constructive parce que réfléchissante. Elle ne conduit pas à une généralisation simple comme l'abstraction des qualités physiques lorsqu'elle est destinée seulement à la construction d'une classe générale ou d'un rapport généralisé (d'une loi constatée) : elle est constructive en tant que liée à l'élaboration d'une nouvelle action, de type supérieur à celle dont le caractère considéré a été abstrait. Elle est donc essentiellement *différenciation* et aboutit à une généralisation qui est une composition nouvelle, préopératoire ou opératoire, puisqu'il s'agit d'un nouveau schème élaboré au moyen des éléments emprunté aux schèmes antérieurs par différenciation, et d'un schème plus mobile et plus réversible, par conséquent plus équilibré [1].

On voit assez, par ces remarques, en quoi une explication psychogénétique ne peut se réduire à un simple appel à l'expérience intérieure. Faute d'avoir aperçu le rôle des opérations réelles menant à la sériation, et de là à la construction effective du nombre, Helmholtz a dû remédier aux lacunes de son empirisme interne par le recours à des opérations hypothétiques, intéressantes du point de vue axiomatique mais étrangères à l'explication génétique, car une reconstitution véritable du nombre supposerait que les opérations invoquées fussent celles du sujet agissant lui-même. Or, celles-ci existent et suffisent à montrer que les notions sont construites activement par le sujet et non pas données toutes faites dans sa conscience. L'expérience intérieure ne serait source réelle de connaissances que dans l'hypothèse de notions préformées, données de façon innée et dont le sujet prendrait directement conscience à un moment déterminé de son développement. Or, nous venons de constater que lorsque le sujet abstrait, par une prise de conscience réfléchissante, quelque élément de ses conduites antérieures (y compris de ses réflexes héréditaires), cette réflexion est constructrice et ne se contente pas de transposer d'un plan à l'autre des schèmes tout élaborés, mais les élargir en les reconstruisant par leur découverte réflexive elle-même. L'abstraction à partir de l'action est

1. Bien entendu, il peut exister également de telles abstractions dans le domaine physique, mais portant sur les transformations des objets et non pas sur leurs seules qualités. Seulement il s'agit alors de généralisations par composition mathématique, c'est-à-dire précisément par assimilation aux généralisations opératoires issues des actions mentales du sujet.

donc source d'actions nouvelles, dont l'aboutissement est constitué par les opérations elles-mêmes. C'est ce passage de l'action à l'opération qu'il nous faut étudier maintenant.

§ 3. QUALITÉ ET QUANTITÉ ; LES « GROUPEMENTS » PROPRES AUX OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES. — Dans sa trop brève étude sur « la fabrication du nombre »[1], H. Delacroix a écrit, sans toutefois soutenir que le nombre était qualité pure : « Le nombre est formé d'éléments exclusivement qualitatifs, dont toute la matière est qualité » (p. 141). Alb. Spaier est allé, par contre, jusqu'à dire[2] que « le nombre est un concept qualitatif » (p. 125) et à concevoir la quantité elle-même comme « le résultat de la mesure » (p. 33), c'est-à-dire comme la « qualité mesurée » (p. 33), la mesure étant, d'autre part, l'application du nombre à la qualité… On tourne ainsi dans un cercle, la quantité étant la qualité mesurée grâce à la qualité elle-même Quant aux mathématiciens, ils opposent, comme on le sait, les notions numériques et métriques aux notions qualitatives, distinguant en particulier la géométrie qualitative de la géométrie métrique. Mais le problème se pose de savoir si ce qualitatif mathématique est de même nature que le qualitatif simplement logique.

Rien n'est donc plus équivoque, dans la terminologie courante, que les termes de qualité et de quantité, et les exagérations de Spaier montrent jusqu'où peuvent conduire ces amphibologies, puisque le nombre lui-même, dont on s'accordera cependant à considérer qu'il constitue la quantité par excellence, finit par être conçu comme qualité pure. C'est pourquoi il nous semble indispensable, pour analyser la signification épistémologique du nombre, de commencer par trouver des critères de délimitation.

En réalité, la qualité et la quantité sont inséparables, et cela aussi bien génétiquement que du point de vue d'une analyse logistique ou axiomatique. Les mêmes arguments qui aboutissent à supposer que tout est qualité pourraient, par ailleurs, conduire à affirmer la généralité de la quantité, car si l'on réussit à extraire sans plus la quantité de la qualité, c'est évidemment qu'elle y était contenue dès le départ. Seule l'imprécision d'un langage philosophique insuffisamment formalisé parvient à obscurcir une telle évidence, alors que les méthodes soit génétiques soit logistiques doivent pouvoir permettre les caractérisations nécessaires.

1. *Traité de psychologie* de DUMAS, 20 éd., t. V, 1936.
2. A. SPAIER, *La pensée et la quantité*, Paris, P.U.F.

Mais dire que la qualité et la quantité sont indissociables ne signifie nullement qu'elles soient identiques : elles sont simplement aussi primitives l'une que l'autre, au point de vue génétique, et aboutissent, en leur état d'équilibre opératoire, à une forme de solidarité telle que l'on ne saurait définir l'une sans faire appel à l'autre.

Génétiquement, elles sont primitives l'une et l'autre, parce que, dès l'action sensori-motrice, elles se présentent de façon interdépendante. P. ex., réunir des objets semblables est une action consistant à introduire une certaine qualification (assimilation par ressemblance), mais en réunir davantage ou moins est une quantification de cette action : en un schème d'assimilation sensori-moteur déjà on peut donc distinguer une extension impliquant la quantité et une compréhension reposant sur la qualité. De même secouer un objet est une action caractérisée par une certaine qualité, mais on peut le secouer plus ou moins (plus ou moins vite, plus ou moins fortement, etc., ces diverses intensités de l'action constituant des quantités inhérentes aux rapports asymétriques). On répondra que deux actions distinctes par leurs intensités sont de qualités différentes : soit, mais le rapport de ces qualités entre elles est précisément une quantité !

On peut donc supposer qu'il existe, entre la qualité et la quantité, un rapport de dépendance mutuelle tel que celui dont relèvent la compréhension et l'extension des concepts logiques. II est impossible, en effet, de concevoir la compréhension d'un concept sans se référer aux termes qui constituent le support des caractères définissant cette compréhension ; or, ces termes ne sont autres que l'extension du concept considéré. Mais, inversement, il est impossible de délimiter une telle extension sans se référer aux caractères des termes qu'elle englobe, c'est-à-dire sans s'appuyer sur la compréhension. Or, cette indissociable solidarité de la compréhension et de l'extension des concepts intéresse d'autant plus directement les rapports entre le qualitatif et le quantitatif, que les formes les plus élémentaires de la qualité et de la quantité se confondent précisément avec la compréhension et l'extension logiques.

En effet, on peut caractériser comme suit la qualité et la quantité, selon que l'on se place au point de vue des classes ou des relations. Pour ce qui est des classes, il va de soi que la qualité correspond à la compréhension du concept et la quantité à son extension. Le système des emboîtements qui déterminent les classes en extension constitue donc essentiellement un système quantitatif par opposition aux attributs ou prédicats (c'est-à-dire

aux propriétés ne faisant pas mention de « tout » ou de « quelque » objet), qui énoncent les qualités ainsi quantifiées. Quant aux relations (et nous avons montré ailleurs [1] que tous les prédicats en compréhension constituaient sans doute des relations, même lorsqu'ils sont énoncés sous une forme absolue et sont attribués à un seul objet (x est « blanc » signifie p. ex. qu'il a « la même couleur que » les objets y et z)), il faut distinguer également leur extension et leur compréhension. Or, l'extension d'une relation, c'est-à-dire les termes reliés par elle (domaine, codomaine ou champ) n'est pas autre chose qu'une classe, ordonnée ou non ; indépendamment de son ordre éventuel, qui relève (en tant qu'ordre) de la compréhension, cette classe caractérise donc à nouveau une quantité définissable au moyen de son extension. Quant à la compréhension de la relation, il faut distinguer deux cas, celui des relations symétriques et celui des relations asymétriques. Les relations symétriques expriment une équivalence (p. ex. A est « aussi blanc que » B), une ressemblance (p. ex. A est « analogue » à B) ou une différence non ordonnée (p. ex. A « diffère » de B). Les relations symétriques traduisent donc soit la commune appartenance à une même classe (de termes ressemblants), soit une « altérité » ou non-appartenance à la même classe (A est d'une autre classe que B). Dans les deux cas, les extensions de ces classes déterminent des quantités, tandis que la qualité correspond à la compréhension de la relation comme telle (ressemblance ou différence symétrique). Quant aux relations asymétriques, elles expriment les différences ordonnées, bivalentes (A mange B), trivalentes (extérieur, intérieur ou sur la frontière) ou plurivalentes (A est plus petit que B, B plus petit que C, etc.). Leur qualité est donc à nouveau constituée par la compréhension de la relation (p. ex. large, rouge, vertueux, etc.) et leur quantité par l'extension de la classe correspondante ordonnée. Cependant, dans le cas des relations multivalentes, on pourrait dire que la quantité est aussi déterminée par la différence elle-même, puisque ces relations comportent le « plus » et le « moins » (« plus » ou « moins » large, rouge, vertueux, etc.). Mais il faut distinguer deux choses. Dire que A est « plus » (large, rouge, etc.) que B c'est encore exprimer une différence de qualité, dans la mesure où le « plus » et le « moins » portent sur un attribut en compréhension. C'est seulement si l'on se réfère à la suite (ou sériation) en extension, qu'intervient la quantité, en tant qu'intervalle (ou segment) plus ou moins grand entre 0 et A,

1. *Traité de logique*, § 45.

0 et B, 0 et C, ou entre A et B, A et C, etc. Ainsi la quantité exprimée par les différences ordonnées des relations asymétriques multivalentes rejoint celle que traduit l'extension des classes.

D'une part, en effet, les inégalités d'extension entre classes (telles que les rapports d'inclusion dans le cas des classes emboîtées) sont des relations asymétriques parmi les autres et les différences d'extension sont ainsi comprises dans les rapports de différence ordonnée en général d'autre part, si l'on série des éléments selon une suite de mêmes relations asymétriques multivalentes, il y aura d'autant plus de termes intercalaires entre deux éléments donnés que la différence sera plus grande entre ces derniers, ce qui réduit réciproquement les intervalles ou segments, exprimant les différences, à des rapports d'extension (c'est-à-dire le cas particulier au « champ » plus ou moins étendu des relations considérées)[1].

Nous constatons maintenant que les rapports d'extension (ou différence ordonnée) peuvent se présenter sous trois formes distinctes, dont l'une caractérise la simple logique des classes et des relations, et les deux autres les mathématiques. Ce sont ces trois formes qui correspondent à ce que l'on désigne habituellement sous les vocables imprécis de rapports « qualitatifs » ou « quantitatif », alors qu'il s'agit de trois formes distinctes de quantité, mais consistant toutes trois en rapports d'extension entre ensembles de termes qualifiés.

I. Supposons, pour préciser les idées, deux classes A et B, définies par la seule qualité des éléments qu'elles réunissent et telles que tous les individus de *A* fassent également partie de *B,* mais sans que la réciproque soit vraie (p. ex. tous les mammifères *A* sont des vertébrés *B,* mais tous les vertébrés *B* ne sont pas des mammifères *A*). C'est cette relation d'inclusion ou de partie à tout, qui, par sa transitivité, constitue le fondement du syllogisme qualitatif, car si tous les *B* sont des C, alors tous les *A* sont également des C. Constatons en outre que tous les *B* n'étant pas des *A* et tous les *C* n'étant pas des *B*, il existe alors une classe *A′,* complémentaire de *A,* sous *B,* telle que $A' = B - A$ (p. ex. A' = les vertébrés *B* non-mammifères *A*) et une classe *B′,* complémentaire de *B* sous C, telle que

$$B' = C - B$$

1. Par exemple si A est moins rouge que *B si B* est moins rouge que C et si C l'est moins que *D, il* y a alors plus de différence entre *A* et *D* qu'entre *A* et C ; ou entre *A* et *C* qu'entre *A* et *B* par conséquent, la classe *ABCD* a plus d'extension que la classe *ABC,* et celle-ci a plus d'extension que la classe *AB.*

(p. ex. si *C* = les Animaux, alors *B'* = les Animaux non Vertébrés) ; etc.

Cela posé, nous pouvons définir, grâce à ces simples rapports d'extension, une première forme de quantité ou de grandeur, que nous appellerons selon la terminologie kantienne la *quantité intensive* [1]. Nous dirons qu'un rapport quantitatif est d'ordre intensif si l'on sait seulement que le tout est plus grand que la partie *B* > *A* ou *C* > *B*, etc., mais sans pouvoir déterminer si l'une des parties du tout, p. ex. *A*, est plus grande, plus petite ou égale par rapport à la partie complémentaire *A*'. En effet, les jugements « tous les *A* sont des *B* » mais « tous les *B* ne sont pas des *A* » restent vrais quels que soient les nombres des individus de *A* et de *A*' : qu'il n'existe qu'un seul *A* et un nombre si grand que l'on voudra de *A*' ou l'inverse, on a toujours *A* < *B*, indépendamment des rapports entre A et A'. Il en est de même entre *B* et *B*' par rapport à *B* < *C*. C'est pourquoi la logique des classes ne connaît que les quantités : un[2], tous, quelques et aucun (« un *A* est quelque *B* », « tous les *A* sont quelques *B* » et « aucun *A* n'est quelque *A*' »).

Il en va exactement de même des relations asymétriques, lorsqu'elles sont définies par les seules qualités des termes sériés et expriment ainsi, comme on a vu, leur différence de qualité. Soit, p. ex., la relation *a* = « *A* est plus léger que *B* », et la relation *a'* définie par « *B* est plus léger que *C* ». De ces deux relations *a* et *a',* on peut tirer la relation *b* (= *A* est plus léger que *C*) en réunissant *a* et *a'* sous la forme sériale *a* + *a'* = *b* (de même que l'on peut poursuivre la série au moyen de la relation *b'* = « *C* est plus léger que *D* », d'où *b* + *b'* = *c,* la relation *c* signifiant alors « *A* est plus léger que *D* », etc.). Mais alors, on sait simplement qu'il existe une plus grande différence de poids entre *A* et *C* qu'entre *A* et *B* ou qu'entre *B* et *C*, soit *b* > *a* et *b* > *a'.* Par contre, on ne peut déterminer s'il existe une plus grande différence entre A et *B* qu'entre *B* et *C* : on ne sait donc rien des rapports entre les relations partielles *a* et *a'* et l'on ne connaît que celui d'une relation partielle *a* ou *a'* et de la relation totale *b* (ou *c*, etc.) dans laquelle elle est emboîtée[3].

1. Notion que SPAIER déclare « confuse » (loc. cit., p. 15), parce qu'il confond lui-même toutes les formes de quantité et qu'il se fait fort de « mesurer » toutes les qualités, y compris les sensations dont il reproche à Fechner de n'avoir osé les mesurer qu'indirectement (p. 15) !

2. « Un » dans le sens de l'identité, c'est-à-dire de la classe dont tous les éléments sont identiques (= classe singulière).

3. Or, comme la relation « *A* est plus léger que *B* » pourrait elle-même être subdivisée, par l'introduction de nouveaux termes entre *A* et *B,* en

II. Supposons maintenant que l'on introduise un rapport quantitatif nouveau entre les parties complémentaires d'un même tout, soit entre les classes A et A' pour la classe B, ou entre les relations a et a' pour la relation b. C'est cette spécification des rapports d'extension entre les parties elles-mêmes qui marque le passage de la quantité intensive à la *quantité extensive,* c'est-à-dire de la logique des classes et des relations quantitatives à la mathématique proprement dite. Mais cette quantité extensive elle-même peut se présenter sous deux aspects, l'un métrique et l'autre non métrique. Il faut bien comprendre la présence de ces deux possibilités, car elles correspondent précisément à la distinction des mathématiciens entre ce qu'ils appellent le domaine numérique ou « métrique » et le domaine « qualitatif », la géométrie dite « qualitative » étant en réalité de caractère « extensif » et non pas simplement « intensif », mais demeurant étrangère à la métrique, c'est-à-dire à l'introduction du nombre.

Soit une suite d'intervalles emboîtés convergeant vers un point limite, chacun de ces intervalles étant donc plus petit que le précédent. En langage de théorie des ensembles, on dira qu'un intervalle contient « presque tous » les éléments d'un ensemble lorsqu'il les comprend « tous à l'exception d'un ensemble faiblement représenté » (ou encore « tous à l'exception d'un nombre fini »). La suite des intervalles convergents constitue donc une suite de relations « presque tous ». Or, on voit immédiatement que la relation « presque tous », qui ne nécessite pas l'intervention du dénombrement, est cependant irréductible à la simple quantité intensive : si A contient « presque tous » les éléments de B, on sait alors, non seulement que $A < B$ mais encore que $A > A'$ (si $B = A + A'$). Même dans le langage courant, si nous disons p. ex. que « presque tous les Mammifères (A) sont terrestres (B) », nous introduisons plus qu'un rapport logique et faisons appel à une quantification déjà mathématique : la logique pure se borne à décider entre « tous » et « quelques », mais n'a que faire de ce rapport intermédiaire, lequel constitue en réalité une fraction, mais demeurant indéterminée (comprise entre $> 1/2$ et $< 1/1$), donc extensive.

De même, les relations dites qualitatives que l'on emploie en géométrie projective, en géométrie affine et dans celle des similitudes (lorsque les rapports anharmoniques, les affinités,

relations d'ordre inférieur présentant les mêmes caractères de composition, elle est elle-même de caractère intensif : le « plus » intervenant dans le rapport « plus léger » est donc une quantité qui demeure intensive en l'absence de nouvelles spécifications.

les proportions, etc., sont construits selon des méthodes purement graphiques sans être exprimés métriquement) relèvent de la quantité extensive, quoique non métrique, car les parties d'un même tout y sont toujours comparées entre elles et non pas simplement mises en relation avec ce tout, comme en logique. Par exemple la décroissance de l'écart séparant deux fuyantes en une perspective est régulière et non pas quelconque : si nous désignons par les symboles A, B, C, etc., les parallèles marquant l'écart croissant entre les fuyantes à partir du point où elles se rejoignent à l'horizon, nous n'avons donc pas simplement une sériation intensive A < B < C < D..., etc., mais aussi une mise en relation entre les différences elles-mêmes : A' (= B – A), B' (= C – B), C' (= D – C), etc., telle que les rapports entre A', B', C', etc., et A, B, C, etc., demeurent constants. Cette invariance, qui est impliquée dans la construction graphique indépendamment de toute métrique, apparaît p. ex. à un certain âge dans le dessin en perspective des enfants qui témoigne déjà à lui seul de l'apparition d'une certaine quantification extensive[1].

III. Enfin, nous parlerons de *quantité numérique* ou *métrique* lorsqu'en un tout *B,* les parties complémentaires *A* et *A'* peuvent être réduites à une unité commune. Si p. ex. *A* peut être considéré comme équivalent à A' à la suite d'une opération de correspondance bi-univoque, de substitution, de congruence, etc., alors, de ce nouveau rapport, que nous écrivons pour simplifier *A = A'*, on peut tirer l'égalité *B = 2A*, ce qui revient à composer le tout *B* par l'addition d'unités d'ordre *A*. La quantité numérique ou métrique est donc à concevoir comme un cas particulier de la quantité extensive, mais ce sont ces deux sous-espèces que l'on oppose l'une à l'autre en mathématique sous le nom de qualitatif et de métrique.

Cela dit, nous pouvons donc admettre que la qualité est toujours inséparable de la quantité et réciproquement : en logique les qualités sont reliées par des rapports de quantité intensive tandis qu'en mathématique ces rapports sont extensifs, soit non métriques, soit métriques.

Or, ces distinctions élémentaires ont une grande importance quant au mécanisme des opérations réelles de la pensée et surtout quant à leur déroulement génétique. Il est bien clair, en effet, que les quantités intensives corrélatives de la qualité logique sont plus simples que les rapports de caractère extensif et métrique, puisqu'elles ne connaissent que les relations quantitatives de

1. Voir pour le détail PIAGET et INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris, P.U.F., 1947, chap. VI.

partie à tout et non pas encore des parties entre elles. C'est donc naturellement sur la construction de ces premières relations que portera tout l'effort de la pensée en formation, tandis que, une fois élaborées, ces mêmes relations se prolongeront sans peine par une généralisation des schémas constitués. De même, du point de vue de la hiérarchie des sciences, il est des domaines qui ne dépassent pas le niveau de la quantification intensive : p. ex. les classification botaniques et zoologiques. Il est donc essentiel, pour situer la genèse du nombre par rapport aux opérations logiques effectives, de conserver présentes à l'esprit ces distinctions qui correspondent à des paliers génétiques différents.

Quelles sont, en effet, les opérations élémentaires de réunion et de séparation compatibles avec une quantification simplement intensive ? Elles présentent deux caractères limitatifs, remarquables au point de vue de la psychologie de la pensée, mais bien faits pour surprendre les mathématiciens habitués à une mobilité généralisatrice infiniment plus grande :

1° Les compositions opératoires propres à la quantité intensive ne peuvent être que dichotomiques : si l'on sait seulement que tous les *A* sont des *B* sans que la réciproque soit vraie, alors les *B* sont ou bien des *A* ou bien des non-*A* (des *A'*) ce qui est une première dichotomie ; si l'on sait seulement que tous les *B* sont des *C*, sans que la réciproque soit vraie, alors les *C* sont des *B* ou des non-*B* (des *B'*) ; etc. D'où les emboîtements de classes $A + A' = B$; $B + B' = C$; $C + C' = D$; etc., qui procèdent d'une succession de distinctions dichotomiques, telles que p. ex. celles des tableaux synoptiques au moyen desquels on détermine une plante dans une classification botanique.

Or, c'est bien ainsi que fonctionne la logique naissante : elle ne construit les classes (ou les relations symétriques) que grâce à la présence ou à l'absence d'une qualité et n'élabore les relations asymétriques qu'en langage de plus et de moins, sans unités ni mise en rapport des parties comme telles. Qu'il s'agisse de ressemblances (classes ou relations symétriques) ou de différences (relations asymétriques), la logique élémentaire procède donc par distinctions dichotomiques, expressions des simples comparaisons quantitatives de partie à tout et non pas de parties à parties.

2° Quant aux réunions mêmes des classes entre elles

$$(A + A' = B)$$

ou des relations entre elles ($a + a' = b$), elles ne peuvent s'effectuer ainsi que de proche en proche, ou de façon contiguë, puisque chaque classe ou chaque relation est emboîtée dans celles qui

l'incluent sans que l'on puisse la combiner librement avec d'autres en négligeant ces emboîtements. C'est ainsi que pour établir la relation de parenté entre un individu et un autre dans un système de rapports généalogiques, on est obligé de remonter à leurs aïeux communs et de combiner toutes les relations qui en résultent. De même, en un système de classes botaniques ou zoologiques telles que $A + A' = B$ et $B + B' = C$ on ne peut réunir A et B' que sous la forme $A + B' = C - A'$, tandis que l'on peut additionner n'importe quel nombre à n'importe quel autre sans s'occuper de leurs emboîtements[1].

Néanmoins, une fois admises ces deux limitations constituées par la partition dichotomique et par les contiguïtés, les opérations de la logique qualitative, à quantification uniquement intensive, peuvent donner lieu à des compositions précises, selon des structures dont il est relativement aisé de suivre le développement génétique chez l'enfant, à partir des actions intériorisées par la pensée intuitive. Nous avons donné à ces structures le nom de *groupements* [2] parce qu'elles sont à la fois parentes des « groupes » mathématiques élémentaires (qui en dérivent psychologiquement) et bien différentes à cause même de ces limitations dues à la dichotomie et à la contiguïté. Un « groupement » est caractérisé par les cinq propriétés suivantes :

1° Deux opérations de l'ensemble constituent par leur réunion une nouvelle opération de l'ensemble. P. ex.

$$(A + A' = B) + (B + B' = C) = (A + A' + B' = C).$$

Cette fusion de deux opérations en une seule, qui paraît au premier abord ne rien nous apprendre, constitue cependant le fondement de la transitivité propre aux inclusions :

$$(A = B - A') + (B = C - B') = (A = C - B' - A'),$$

ou, par abréviation « Tous les A sont des B ; tous les B sont des C, donc tous les A sont des C », c'est-à-dire $A < B$; $B < C$ donc $A < C$. Cette transitivité est elle-même l'expression de la coordination psychologique des opérations.

2° Chaque opération peut être inversée. P. ex. $(A + A' = B)$ correspond à une inverse et une seule : $(- A - A' = - B)$, d'où l'on peut tirer $B - A' = A$ *ou* $B - A = A'$. C'est là l'expression de cette réalité psychologique fondamentale qu'est la réversibilité des opérations, qui s'oppose à l'irréversibilité de l'action immédiate.

1. Sur ces limitations de la composition des classes, voir F. GONSETH et J. PIAGET, Groupements, groupes et lattices, *Arch. de Psychol.*, XXXI (1946) et PIAGET, *Traité de logique* (Colin), § 10, n° III.

2. Voir notre *Traité de logique* (Colin), chap. II, III et VI, et l'axiomatisation que vient d'en donner H. WERMUS en partant de la notion de « successeur immédiat » (*Archives de Psychologie,* n° 143 (1972)).

3° Trois opérations distinctes[1], composées entre elles, sont associatives : $(A + A') + B' = A + (A' + B')$. Cette associativité exprime la possibilité psychologique de parvenir au même résultat par deux chemins différents (dans le cas particulier la classe C résulte de l'une comme de l'autre de ces deux suites).

4° La composition de toute opération avec son inverse aboutit à une « opération identique générale », qui équivaut à l'absence d'opération : $(A + A') + (- A - A') = O$ d'où $X + O = X$.

5° Enfin toute opération composée avec elle-même ou avec celles qui la comprennent déjà laisse ces dernières inchangées (« opérations identiques spéciales ») : $A + A = A$ d'où $A + B = B$. C'est ce que les logisticiens appellent la tautologie, opposée à l'itération des unités numériques : $A + A = 2A$.

On constate ainsi qu'un « groupement » constitue l'ensemble des rapports « intensifs » de partie à tout (par emboîtements contigus des parties complémentaires en totalités successives de divers ordres) : les emboîtements de partie à tout constituent en ce cas les compositions progressives du système, tandis que les complémentarités dichotomiques (et la contiguïté qui en résulte) assurent sa réversibilité. Or, le « groupement » s'apparente en premier lieu à une autre structure : celle des « réseaux » ou « lattices » qui constitue l'une des seules formes d'ensemble employées en mathématiques qui soit susceptible de s'appliquer à des quantités exclusivement intensives[2]. Mais les lattices ne suffisent pas à exprimer en un seul système toutes les opérations de la logique, car ils ne comportent qu'une réversibilité affaiblie. Les limitations propres à la dichotomie et à la contiguïté assurent au contraire au groupement la réversibilité entière, qui traduit les opérations logiques fondamentales[3] :

$$A + A' = B \text{ et } B - A' = A$$

(ou $p \vee p' = q$ et $q \,.\, \bar{p}' = p$). D'autre part, il suffit de renoncer aux tautifications A + A = A ou A + B = B pour ne plus être en présence que d'opérations portant sur des parties disjointes : on retrouve alors le groupe des additions disjonctives propre

1. Distinctes, par opposition à celles qui se répètent, c'est-à-dire aux tautologies (voir 5), dont la composition associative suppose qu'elles soient de même valeur dans les deux membres de l'équation.

2. Un réseau est un système semi-ordonné tel que deux quelconques de ses éléments aient une borne supérieure et une borne inférieure univoquement déterminées. La borne supérieure est le plus petit des majorants, p. ex. la plus petite classe commune comprenant les classes envisagées. La borne inférieure est le plus grand des minorants, p. ex. la partie commune aux deux classes en question.

3. Voir notre *Traité de logique*, § 39.

à l'algèbre de Boole[1]. Le « groupement » constitue par conséquent une structure intermédiaire entre les réseaux et les groupes : il est un réseau réversible.

Le passage du « groupement », qui est de caractère simplement logique, à ceux des « groupes » qui relèvent de la quantification mathématique, marque donc une étape décisive dans la constitution de la quantité : or c'est bien en procédant des seuls rapports de partie à tout à une mise en relation générale des parties entre elles, qu'une telle généralisation s'effectue de l'intensif à l'extensif et au métrique.

On peut dire ainsi que le « groupement » constitue la première étape sur la voie qui conduit aux groupes et en particulier à celui des nombres entiers (étape à laquelle en demeurent d'ailleurs des disciplines entières, comme les parties de la zoologie et de la botanique affectées à la classification systématique). Mais, si élémentaire que soit la structure du « groupement », expression de la quantité intensive et des compositions fondamentales de la logique qualitative, il ne faudrait pas croire qu'elle soit pour autant donnée dès le départ de l'évolution mentale. Il est au contraire très significatif, du point de vue de l'épistémologie génétique, de constater que les plus simples des rapports de partie à tout s'acquièrent chez l'enfant au cours d'une construction laborieuse, qui débute par des actions irréversibles, avec tâtonnements et avec expériences du sujet sur ses propres actes, pour n'aboutir que tard au rang d'opérations réversibles.

Une expérience typique à cet égard consiste à présenter aux enfants une collection *B* (p. ex. de perles en bois) formée de deux parties complémentaires, l'une *A* caractérisée par une couleur (p. ex. des perles brunes) et constituant la presque totalité de l'ensemble *B*, et l'autre *A'* caractérisée par une autre couleur et constituée par deux ou trois individus seulement (p. ex. deux perles blanches). La question est simplement de savoir s'il y a davantage de *A* ou de *B* dans la collection (donc s'il y a plus de perles brunes *A* ou de perles en bois *B,* toutes les perles étant visibles simultanément et l'enfant sachant contrôler et formuler que toutes ces perles, *A* et *A'*, sont « en bois », donc *B*). Or, les sujets de 5 à 6 ans encore témoignent des réactions suivantes : ils savent fort bien décrire à part, les qualités du tout *B* (« elles sont toutes en bois ») ainsi que, à part également celles des parties *A* et *A'* (« il y a beaucoup de brunes et seulement deux blanches »), mais ils sont incapables de penser simultanément au tout *B* et à la partie *A* pour conclure $A < B$. La raison en est que la pensée intuitive s'appuyant sur la perception demeure irréversible : si l'attention est centrée sur les qualités communes

1. *Ibid.*, § 10, n° I.

à *A* et à *A',* le tout *B* demeure indivisé, et le sujet oublie les parties ; si au contraire le sujet pense à la partie *A* et à ses qualités propres, le tout *B* est ainsi rompu et il ne reste, en présence de la partie *A,* que l'autre partie *A*'. L'enfant conclura alors à cette absurdité $A > B$ parce qu'il délègue à la partie *A*' les qualités du tout détruit *B* (« il y a plus de perles brunes que de perles en bois, dira p. ex. l'enfant, parce qu'il y a seulement deux blanches »). Il ne parvient donc pas au rapport intensif $A < B$ faute de dominer les opérations inverses

$$A = B - A' \text{ et } A' = B - A,$$

qui seules conduisent à la conservation du tout *B.* Au contraire, les sujets de 7-8 ans concluent sans difficulté à $B > A$ parce qu'ils conçoivent le tout *B* comme invariant quelles que soient les compositions directes ou inverses, et qu'il ne pensent plus par images ou configurations semi-perceptives, mais par opérations réversibles [1].

D'une manière générale, le critère psychologique de la constitution d'un « groupement » est la découverte de la conservation des totalités, indépendamment de l'arrangement des parties. P. ex., dans les expériences de correspondance bi-univoque (entre des jetons rouges et bleus) décrites au § 1, les petits n'ont même pas la notion de la conservation de chaque collection prise à part (ce qui est d'ailleurs l'équivalent de ce que nous venons de rappeler à propos de la non-conservation de l'ensemble des perles *B),* tandis que les sujets de 7 ans parviennent à cette conservation : or, ils arrivent précisément à ce résultat grâce aux compositions à la fois réversibles et associatives qui entraînent l'identité de chaque élément et de la totalité comme telle. Le sentiment de la nécessité de cette invariance du tout constitue, en ce cas comme en quantité d'autres semblables, l'indice psychologique de l'achèvement d'un groupement opératoire à partir d'actions initialement irréversibles et incomposables entre elles [2].

§ 4. LA RÉDUCTION DU NOMBRE CARDINAL AUX CLASSES LOGIQUES ET DU NOMBRE ORDINAL AUX RELATIONS ASYMÉTRIQUES. — Les distinctions introduites au paragraphe précédent vont faciliter l'examen génétique des célèbres tentatives de Frege, puis de Russell et de Whitehead de réduire le nombre aux opérations simplement logiques. Ces essais ont été approuvés par la plupart des logisticiens et un grand nombre de mathématiciens, parce que la réduction du nombre à la logique paraît au premier

1. Pour le détail, voir PIAGET et SZEMINSKA, *La genèse du nombre chez l'enfant,* Delachaux & Niestlé, 1940, chap. VII. Il est à noter que le rapport entre les parties A > A' intervenant en cette expérience est donné perceptivement et ne constitue pas une quantification extensive de caractère opératoire.

2. Pour les relations entre les notions de conservation et le groupement, voir PIAGET et INHELDER, *Le développement des quantités chez l'enfant,* Delachaux & Niestlé, 1941, chap. I-III et PIAGET et SZEMINSKA, *loc. cit.*, chap. I-IV.

abord la solution la plus naturelle, une fois reconnues inopérantes les explications empiristes du nombre. Une telle réduction a cependant provoqué la méfiance d'un certain nombre de mathématiciens illustres, au premier rang desquels il faut citer Poincaré, et d'épistémologistes en tête desquels s'est placé L. Brunschvicg. Le problème est donc maintenant de déterminer si les processus formateurs du nombre sont ou non les mêmes que ceux dont dérivent les classes et les relations. C'est à ce propos que les différents types de totalités opératoires examinés au § 3 devaient être distingués, car seul l'examen de leur déroulement génétique est de nature à permettre de trancher par l'expérience la question soulevée par les logisticiens cités.

Il est vrai que la vérité logistique est de caractère axiomatique, et non pas expérimental, et que l'on pourrait donc concevoir une filiation déductive entre le nombre et la logique, même si l'expérience démentait la filiation réelle. Seulement, si les opérations réelles demeuraient réfractaires à une telle réduction, il serait intéressant de traduire en un schéma logistique ces opérations une fois parvenues à l'état d'équilibre, et de le confronter avec le schéma russellien. Or, l'expérience que nous avons tentée[1] nous a conduit à reconnaître un parallélisme entre les questions génétiques et les questions logistiques bien plus qu'à un conflit entre les deux méthodes. C'est donc ce double aspect du problème que nous aimerions brièvement exposer ici.

Chacun connaît la théorie de Russell : deux classes, considérées en extension, engendrent une même « classe de classes » si les individus qui les composent peuvent être mis en correspondance bi-univoque, et cette classe de classes constitue précisément un nombre cardinal ; le nombre 1 est ainsi la classe des classes singulières, le nombre 2 la classe des duos, le nombre 3 celle des trios, etc. Or, la correspondance bi-univoque ne repose elle-même que sur l'identité logique : « x correspond bi-univoquement à y » signifie que, si x correspond aussi à y', alors y' est identique à y, et que, si y correspond aussi à x', alors x' est identique à x. Dès lors, la construction de la classe de classes équivalentes, en quoi consiste le nombre, ne requiert que des opérations purement logiques. Quant au nombre ordinal, il consiste de son côté en une classe de relations asymétriques « semblables », c'est-à-dire à nouveau comme le produit d'une correspondance bi-univoque, mais entre relations.

Une telle conception a soulevé deux sortes d'objections, les

1. Voir notre *Traité de logique* (Colin), chap. II-IV.

unes revenant à l'accuser de cercle vicieux parce que le nombre interviendrait déjà dans l'idée des objets singuliers mis en correspondance d'une classe à l'autre, et les secondes insistant sur les différences fonctionnelles de la classe logique et du nombre.

H. Poincaré (suivi par P. Boutroux, etc.) a particulièrement insisté sur le premier point, admettant que, dans l'expression « un » homme, etc., l'objet individuel ou la classe singulière comportent déjà la présence du nombre 1. A quoi Couturat a répondu que le « un » logique n'implique pas ce nombre 1 mais simplement l'identité : une classe A est singulière si dans les proposition « *x* est un *A* », « *y* est un *A* », etc., il y a identité entre *x* et *y*. De même les termes « quelques », « tous » et « aucun » n'impliquent pas l'intervention des nombres, mais simplement l'appartenance ou la non-appartenance des individus à la classe.

Cette première discussion est sans issue, tant que l'on se place au point de vue atomistique de la logique classique, laquelle croit pouvoir considérer une proposition à part une classe ou une relation isolées, etc. Pour un tel atomisme, il est clair que l'expression « un homme » peut signifier à tour de rôle une unité numérique ou quelque objet qualifié dont les propriétés l'empêchent d'être identique à aucun autre, ce qui lui, confère la valeur logique de seul élément d'une classe singulière. Tant Russell, en raisonnant sur des identités et des classes isolées, que ses adversaires en le suivant sur ce terrain pour y retrouver le rappel implicite de nombres isolés, s'engagent donc dans la direction d'un atomisme artificiel permettant de justifier tour à tour les thèses contraires, sans critère définitif, car l'identité appartient aussi bien aux mathématiques qu'à la logique « intensive ». Il est même à tel point de l'essence de l'explication russellienne de s'en tenir à cet atomisme, que les nombres y sont engendrés chacun pour soi, grâce à l'intervention de classes indépendantes les unes des autres (en tant que classes de classes), et non pas selon une loi de construction impliquant la progression 0, 1, 2, 3…

Or, seule la structure d'ensemble de la totalité opératoire dans laquelle sont insérés les éléments permet de distinguer leur nature, soit logique (quantité intensive), soit mathématique (quantité extensive ou numérique). Le terme « un homme » se réfère au nombre 1 s'il est élément d'opérations qui le comparent à « deux hommes » ou à « *n* hommes », parce qu'alors « un » joue le rôle d'unité itérable ; mais le même terme est indépendant du nombre s'il appartient à un système opératoire qui ne porte que sur les rapports d'individu à classe ou de classes partielles à classes totales. Il est donc évident que c'est le « grou-

pement » ou le groupe des opérations en jeu qui est déterminant et non pas la nature des éléments comme tels, laquelle, s'ils sont isolés, reste indéterminable, à parler rigoureusement.

D'où le second type d'objections adressées à la théorie de Russell : celles qui opposent le rôle fonctionnel des classes à celui des nombres. La fonction de la classe revient à identifier, comme dit L. Brunschvicg, et celle du nombre à diversifier, d'où leur hétérogénéité foncière. Mais, en ce qui concerne cette argumentation tout autant que pour la précédente, ce sera naturellement le système opératoire d'ensemble qui déterminera les significations fonctionnelles, et non pas les éléments comme tels.

La question est donc la suivante : lorsque Russell nous parle de « classe de classes équivalentes », l'opération de correspondance bi-univoque au moyen de laquelle il construit cette équivalence est-elle encore de nature simplement logique, c'est-à-dire, ne relève-t-elle que de la quantité intensive qui intervient dans la formation des classes qualitativement définies, ou bien introduit-elle implicitement le nombre, non pas sous la forme de nombre isolé accolé à la classe considérée, mais dans la mesure où cette opération de mise en correspondance serait elle-même déjà de nature extensive et dépasserait *ipso facto* le domaine de la logique des classes qualifiées ?

C'est ici qu'il ne sert de rien, nous semble-t-il, de démontrer que la correspondance bi-univoque repose sur l'identité pure. Même si cela était vrai (mais il resterait à montrer que le rapport comme tel de mise en correspondance ne dépasse pas le cadre des équivalences logiques), la question n'est pas là, car une identité peut résulter soit des opérations propres à un « groupe » mathématique (p. ex. 1 x 1 = 1 ou 1 : 1 = 1, et de façon générale toute « opération identique ») soit de celles qui caractérisent un « groupement » logique (intensif). La vraie question est donc de savoir si la correspondance bi-univoque comme telle, c'est-à-dire en tant qu'ensemble d'opérations, caractérise un groupement ou un groupe. Dans le premier cas, la réduction de Russell serait efficace, puisque le nombre serait alors engendré par de pures classes reliées par la seule voie d'un « groupement » de classes. Dans le second cas, elle se révélerait vicieuse, parce qu'introduisant dans les classes un système opératoire déjà numérique pour en extraire ensuite trop facilement le nombre.

Or, tant l'examen génétique du développement que celui de la pensée scientifique en ses manifestations diverses et de niveaux différents fournissent ici une réponse décisive. Il existe en réalité

deux types bien distincts de correspondance bi-univoques, l'une « qualifiée » ou logique (donc de caractère « intensif » pur), l'autre « quelconque » ou mathématique. Mais ce n'est pas la première de ces deux opérations que Russell applique à sa démonstration : c'est bel et bien la seconde, d'où le malaise produit par sa réduction. Celle-ci contient alors un cercle, puisque ce n'est pas, en ce cas, à la classe comme telle qu'il parvient à réduire le nombre cardinal, mais bien à la classe quantifiée au préalable par une opération de caractère déjà numérique.

En effet, il existe une correspondance bi-univoque de caractère simplement logique, c'est-à-dire telle que les éléments se correspondent un à un en vertu de leurs qualités différencielles et non pas en tant qu'unités quelconques. C'est cette opération de correspondance qualifiée qui caractérise les « homologies » de l'anatomie comparée, p. ex. lorsqu'une pièce du squelette d'une classe zoologique est mise en correspondance avec la pièce homologue du squelette d'une autre classe. Mais l'emploi d'une telle opération est beaucoup plus générale : c'est elle qui intervient, p. ex., lorsqu'on analyse les ressemblances entre deux objets en faisant correspondre une partie de l'un à une partie semblable de l'autre. Du point de vue génétique, la correspondance bi-univoque qualifiée est donc précoce : elle se prépare intuitivement dès le dessin et même dès l'apparition de l'imitation et devient opératoire vers 7 ans avec les comparaisons systématiques (fondées sur les opérations de multiplication logique).

Tout autre est la correspondance bi-univoque « quelconque » puisqu'elle n'est pas astreinte à déterminer les correspondances en fonction des ressemblances qualitatives mais qu'un élément quelconque de l'un des ensembles est associé à l'un des éléments également quelconque de l'autre ensemble (à la seule condition que cet élément ne soit compté qu'une fois). C'est ainsi que quand Russell construit le nombre 12 en faisant correspondre un à un les apôtres du Christ aux maréchaux de Napoléon, l'apôtre Pierre n'est pas associé au maréchal Ney en vertu de leurs qualités communes (comme lorsqu'un biologiste fait correspondre les poils des Mammifères aux plumes des Oiseaux), mais simplement en tant que l'un constitue une unité quelconque du premier ensemble et l'autre une unité, également quelconque, du second.

On voit donc que la correspondance bi-univoque qualifiée ne sort pas du domaine de la logique des classes et de la quantité intensive. Elle constitue même en « groupement » bien déterminé, celui de la multiplication bi-univoque des classes, dont voici un exemple :

Si $B_1 = A_1 + A'_1$ et si $B_2 = A_2 + A'_2$ la multiplication $B_1 \times B_2$ donne :

$$B_1 \times B_2 = (A_1 + A'_1) \times (A_2 + A'_2) = \left\{ \begin{array}{c} A_1 A_2 + A_1 A'_2 \\ A'_1 A_2 + A'_1 A'_2 \end{array} \right\} = B_1 B_2$$

c'est-à-dire une table à double entrée dans laquelle il y a correspondance terme à terme entre les éléments des deux rangées soit horizontales soit verticales[1] : $A_1 A_2$ correspond ainsi à $A'_1 A_2$ par l'intermédiaire de la qualité commune A_2 et $A_1 A'_2$ à $A'_1 A'_2$ par l'intermédiaire de A'_2 ; ou encore $A_1 A_2$ correspond à $A_1 A'_2$ par l'intermédiaire de A_1 et $A'_1 A_2$ à $A'_1 A'_2$ par l'intermédiaire de A'_1.

La correspondance qualifiée n'implique donc en rien l'intervention du nombre entier, mais simplement celle de qualités communes et de classes définies au moyen de ces dernières (les classes singulières elles-mêmes ne supposant pas autre chose que le « un » logique, c'est-à-dire la singularité qualitative). Au contraire, la correspondance bi-univoque quelconque est une opération extensive : du seul fait qu'elle élimine par abstraction les qualités propres aux éléments considérés, elle les transforme en unités numériques.

Dès lors, si Russell avait pu employer la correspondance bi-univoque qualifiée pour construire ses classes de classes, il aurait évité tout cercle vicieux. Mais les classes de classes reposant sur la correspondance qualifiée ne sont précisément pas des nombres. Ce sont des classes de classes purement logiques, à caractère multiplicatif (p. ex., la classe de tous les squelettes des vertébrés, ou la classe $B_1 B_2$). En utilisant la correspondance bi-univoque quelconque pour opérer sa réduction, Russell introduit au contraire, par le fait même, la notion d'unité dans les classes qu'il met en correspondance, et il n'est pas surprenant que les classes ainsi construites constituent des nombres : elles ne sont plus, en effet, de simples classes logiques, sitôt leurs éléments mis en correspondance quelconque, mais des ensembles d'unités, c'est-à-dire des classes numériques.

Quant au nombre ordinal conçu comme une classe de relations « semblables », la difficulté est la même, mais transposée en termes de relations. Qu'est-ce que la « similitude » qui intervient ici ? Est-ce une similitude simplement qualitative, telle que les relations asymétriques reliant le objets sériés soient les mêmes dans les deux séries correspondantes, sans que chaque relation partielle compte comme une unité ni par conséquent que les objets sériés se distinguent seulement par leur numéro

1. Voir notre *Traité de logique*, § 15.

d'ordre ? Ou bien est-ce une similitude généralisée, et par conséquent à nouveau « quelconque », faisant abstraction du contenu qualitatif des relations et ne retenant que la succession comme telle, c'est-à-dire les numéros d'ordre des objets et ceux des relations qui les unissent successivement ? Dans le premier cas, la similitude constitue un « groupement » intensif (celui des multiplications bi-univoques de relations asymétriques)[1]. Dans le second cas, elle engendre au contraire une succession mathématique d'ordre pur, qui implique par conséquent déjà la notion du nombre ordinal.

Faute de ces distinctions génétiques, qui conduisent à une distinction corrélative dans la logistique des opérations comme telles, et non pas seulement des classes et des relations isolées, la double réduction de Russell s'enferme ainsi dans deux cercles vicieux.

§ 5. L'INTUITION RATIONNELLE DU NOMBRE. — Le nombre n'étant pas réductible sans plus à la logique des classes ou à celle des relations, faut-il le concevoir comme le produit d'une intuition rationnelle, irréductible aux opérations logiques ? C'est le point de vue soutenu par un grand nombre de mathématiciens, d'ailleurs selon des sens assez divers s'étendant entre l'intuition de l'essence statique du nombre et l'intuition opératoire. Bornons-nous à cette dernière. Ainsi, H. Poincaré, tout conventionnaliste qu'il ait été dans le détail de la construction des diverses formes de nombre (de même que dans la question des rapports entre les divers espaces), admet que le nombre entier repose sur une sorte d'intuition, à la fois *opératoire* et *a priori*, de la raison (comme la notion du groupe des déplacements par rapport à l'espace) ; cette intuition se traduit elle-même dans le raisonnement mathématique par excellence : le raisonnement par récurrence. Pour Brouwer, qui a renouvelé l'intuitionnisme de Poincaré en l'opposant au formalisme logique dans le détail des raisonnements constructifs eux-mêmes (négation du principe du tiers exclut pour les collections infinies), le caractère essentiel d'une entité mathématique est, non pas simplement d'être exempte de contradiction (ce qui ne suffit plus, selon cet auteur, à lui assurer l'existence), mais bien de pouvoir être construite effectivement. Le domaine de l'intuition rationnelle s'étendra ainsi de l'*a priori* à la libre construction opératoire, mais le caractère commun de ses

1. Voir *Traité de logique*, § 21.

diverses interprétations reste la discontinuité entre l'intuitif et la simple logique.

Or, malgré l'autorité de ces grands esprits, il nous est difficile de les suivre sur le terrain de l'intuition du nombre, faute de pouvoir concilier avec les faits génétiques, c'est-à-dire avec ce que nous savons de la formation des opérations elles-mêmes, l'hypothèse de l'irréductibilité du nombre par rapport aux opérations logiques. Entre la réduction insuffisamment opératoire de Russell et l'intuition directe de Poincaré et de Brouwer, il peut exister un *tertium*.

Comment Poincaré caractérise-t-il, en effet, l'intuition du nombre pur ? Ce n'est pas par l'intuition de nombres donnés, mais bien par celle d'un nombre « quelconque » : c'est la « faculté de concevoir qu'une unité peut être ajoutée à une collection d'unités[1] ». C'est donc l'intuition, non pas d'une forme achevée, mais d'un pouvoirs de l'esprit, de ce pouvoir qui est à la base de la récurrence. Mais alors, de deux choses l'une. Ou bien le terme d'intuition n'ajoute rien à l'opération elle-même : de ce point de vue, toute opération qui se répète n'implique pas l'intuition de l'unité, et il s'agit d'expliquer la construction de cette unité dans le cas des opérations numériques. Ou bien les opérations numériques procèdent d'une intuition qui les oppose dès le départ aux opérations logiques, précisément en ce qu'elle contient d'avance la notion d'unité, mais c'est en cette seconde interprétation que réside la difficulté génétique.

Il est à cet égard un résultat extrêmement frappant des recherches sur la genèse des notions mathématiques chez l'enfant et qui nous paraît de nature à nécessiter une révision des rapports établis habituellement entre la logique et l'intuition : c'est que toutes les notions de caractère extensif et métrique (au sens défini au § 3), telles que la mesure, les proportions, etc., en géométrie, et le nombre lui-même, ne se constituent sous leur, forme opératoire que lorsqu'elles peuvent s'appuyer sur des « groupements » logiques de caractère intensif. Ces groupements intensifs ne précèdent pas nécessairement dans le temps leur quantification extensive, en ce sens que celle-ci peut s'effectuer immédiatement après la constitution de ceux-là ou que les deux constructions, intensive et extensive, peuvent même s'appuyer l'une sur l'autre. Dans le cas de la mesure, en géométrie, la transitivité intensive précède il est vrai nettement la quantification extensive et métrique : il faut que le sujet ait compris que B peut servir de commune mesure à A et à C selon le schéma ($A = B$; $B = C$ donc $A = C$) pour qu'il devienne capable de réduire les termes comparés à des unités communes. Mais, dans le cas du nombre,

1. *Science et hypothèse*, p. 37

il n'existe pas d'abord un stade prénumérique déjà caractérisé par des structures logiques, puis un stade numérique. Seulement la construction de la suite des nombres n'est possible à un certain niveau (vers 6-7 ans) qu'étayée par la compréhension des structures logiques, dont l'élaboration insuffisante aux niveaux précédents retardait l'itération de l'unité.

La raison de cette interdépendance entre la logique et le numérique tient à un facteur auquel les partisans de l'intuition d'un nombre pur n'ont sans doute pas suffisamment songé : c'est que la notion de la conservation des ensembles eux-mêmes, en tant que totalités soit logiques soit numériques, n'apparaît nullement comme nécessaire au point de départ de la pensée intuitive et que cette conservation doit donc être construite opératoirement. Or, c'est précisément dans cette construction que le « groupement » joue un rôle indispensable. Il se trouve, en effet, qu'avant 6-7 ans, c'est-à-dire à l'âge où l'enfant connaît déjà par le langage une série de concepts, mais sans savoir les grouper logiquement, par compositions réversibles, et où il connaît aussi les premiers noms de nombre, mais en les affectant simplement à des figures perceptives (un objet, deux objets, trois objets, etc.), il n'est encore capable de conservation des classes logiques (du type $A > B$) ni des ensembles numériques, même lorsqu'il a réussi à effectuer spontanément une correspondance terme à terme de caractère visuel entre les éléments de ces ensembles. Nous avons cité de tels faits au § 1 (pour le défaut d'équivalence durable entre les collections correspondantes) et en fin du § 3 (pour l'emboîtement de la partie A dans le tout B) il est donc inutile d'y revenir ici. Mais la question qui se pose maintenant est de savoir comment le sujet procède de la non-conservation à la conservation de la collection totale.

Or, l'analyse génétique fournit sur ce point une réponse décisive : le passage des configurations perceptives ou imagées, dépourvues de conservation, aux collections logico-arithmétiques douées de conservation nécessaire résulte de la réversibilité progressive des actions de réunir et de sérier, et aboutit simultanément aux « groupements » de l'emboîtement des classes et de la sériation des relations asymétriques, ainsi qu'au « groupe » caractérisant la suite des nombres entiers. La « faculté de concevoir qu'une unité peut être ajoutée à une collection d'unités », dont Poincaré fait le propre de l'intuition du nombre pur, suppose donc elle-même la « faculté » de concevoir des collections invariantes emboîtées les unes dans les autres et la « faculté » d'ordonner dès le départ les éléments « ajoutés » : indissociable du « groupement » des classes et de celui des relations asymétriques, la suite des nombres ne saurait donc bénéficier du privilège d'une intuition première, et la construction de la notion de l'unité elle-même soulève un problème que l'on ne saurait par conséquent résoudre par le simple appel à cette intuition.

Qu'une fois construite, la suite des nombres donne lieu à

une intuition rationnelle en quelque sorte terminale, et non plus préalable, en ce sens que le nombre serait appréhendé directement par l'esprit sans passer par l'intermédiaire de raisonnements discursifs ou « logiques », c'est là une autre question. Cette intuition finale ne saurait laisser de doute, mais au sens où l'on parlera, avec Poincaré, de l'intuition du joueur d'échec qui conduit sa partie : concentré instantané d'innombrables raisonnements antérieurs (et oubliés), cette intuition terminale n'est que l'expression de la compréhension intelligente elle-même, comme remarquait L. Brunschvicg, et ne nous renseigne en aucune manière au sujet de sa propre construction.

En bref, on ne saurait opposer une intuition du nombre pur, qui caractériserait la suite des entiers, à la construction artificielle ou conventionnelle des nombres généralisés (fractionnaires, etc.). La construction de l'unité à elle seule est exactement de même nature, à une différence de complexité près, que celle des nombres n'appartenant pas à la suite des entiers (fractionnaires, imaginaires, etc.), ce qui supposerait, ou bien l'extension de la notion de l'intuition rationnelle à ces produits dérivés, ou bien l'extension de l'idée de convention à l'explication de l'unité elle-même. C'est donc au pouvoir opératoire en général de l'esprit, sous ses formes logiques comme arithmétiques, que s'attache le mystère, et où le conventionnalisme ne saurait l'éluder en ce qui concerne ses constructions les plus éloignées de l'action concrète, ni l'intuitionnisme aprioriste ne saurait l'expliquer, en découpant dans l'ensemble des opérations logico-arithmétiques, celles qui ont trait au nombre entier lui-même, par opposition aux classes et aux relations logiques. Quant à faire avec Brouwer de la construction opératoire une réalité dépassant le non-contradictoire de caractère logique, c'est oublier que, à côté du jeu formel des propositions combinées en une axiomatique, la logique vivante elle-même requiert déjà ce caractère opératoire et que la non-contradiction effective se fonde elle-même sur la réversibilité inhérente aux opérations constructrices des classes et des relations en même temps que des nombres.

§ 6. CLASSES, RELATIONS ET NOMBRES. — Le processus génétique au cours duquel s'élaborent les groupements de classes et de relations asymétriques, ainsi que le groupe des nombres entiers, témoigne d'une étroite interdépendance entre ces trois constructions. Tel est donc le fait dont il s'agit d'analyser la signification épistémologique. D'un certain point de vue, on pourrait aussi bien exprimer la chose en disant que les classes

logiques et les relations asymétriques résultent d'une dissociation des opérations impliquées dans le nombre qu'en présentant celui-ci comme une synthèse des classes et des relations logiques réunies en un seul tout opératoire. Dans la mesure où il y a réduction, elle est donc réciproque, et cela en vertu d'un mécanisme génétique dont nous retrouverons bien d'autres exemples.

Dès les actions les plus élémentaires exercées sur la réalité, la perception distingue une pluralité indéterminée d'éléments reliés par des ressemblances et des différences. Autrement dit, dès le départ, qualité et quantité sont indissociablement unies, celle-ci exprimant simplement les rapports d'extension entre les termes qualifiés par leurs ressemblances ou leurs différences. C'est par la combinaison de ces actions initiales de réunion et de séparation que les opérations intellectuelles construiront simultanément les classes en groupant les objets selon leurs ressemblances plus ou moins générales ou spéciales, les relations asymétriques en groupant les mêmes objets selon leurs différences ordonnées, et les nombres en les groupant en tant qu'à la fois équivalents et distincts. Mais il faut bien comprendre que, au début de cette évolution, il ne saurait y avoir encore ni classes proprement dites, ni relations asymétriques transitives ni nombres : les groupements logiques et les groupes numériques apparaissent au contraire comme la forme d'équilibre finale d'un processus continu caractérisé par ses coordinations et sa réversibilité progressives. Au point de départ ne sont donnés que les rapports perceptifs liés à l'activité motrice, c'est-à-dire des rapports incomposables entre eux, du point de vue logique autant qu'arithmétique, parce qu'intransitifs, irréversibles, non associatifs et même dépourvus de cette identité élémentaire qui seule assurerait leur invariance au sein des compositions possibles[1]. Quant à leur extension, c'est-à-dire aux ensembles formés par les éléments qualifiés, en opposition avec les qualités elles-mêmes, ils ne sont distincts qu'à l'intérieur du champ perceptif momentané mais ne constituent même pas d'emblée des « objets », au sens d'éléments se conservant en dehors de ce champ. Bien plus, la relation fondamentale qui définit la quantité intensive propre aux coordinations logiques, à savoir que la partie est moins grande que le tout, n'est même pas constante sur le plan perceptif. P. ex., dans l'étude des illusions de poids, on peut présenter au sujet une barre de métal A que l'on pose ensuite sur une boîte vide de bois A' de mêmes dimensions : le tout B formé de la réunion de $A + A'$ paraît alors plus léger que la partie A isolée (et cela même chez l'adulte et chez les professeurs de psychologie connaissant la théorie de cette illusion!).

La première étape de la construction qui, à partir de ce flux irréversible de qualités et de quantités non encore travaillées conceptuelle-

1. Voir plus loin chap. II, § 4. Voir aussi notre *Psychologie de l'intelligence*, A. Colin, chap. III.

ment[1] va conduire simultanément aux classes, aux relations et aux nombres, consiste à coordonner les actions entre elles sous forme de « schèmes » pratiques, sortes de préconcepts sensori-moteurs, caractérisés par la possibilité de répéter la même action en présence des mêmes objets ou de la généraliser en présence d'autres analogues. Ce sont ces schèmes élémentaires qui, en entraînant la solidification des objets physiques, constituent les rapports de ressemblance, de différence et la quantification initiale, dans lesquels on peut chercher la source des futures structures logiques et numériques. Mais il faut bien comprendre que, si les actions ainsi schématisées reviennent déjà, sous leur forme la plus générale, à réunir ou à séparer les objets distingués et conservés grâce à elles selon les divers buts qualitatifs envisagés, ces réunions et dissociations ainsi que les figures prénumériques qu'elles constituent reposent elles-mêmes sur un pouvoir coordinateur, dont les schèmes manifestent les structures successives, mais dont le fonctionnement remonte jusqu'aux montages héréditaires en leur racine inconnue. Il n'y a donc jamais de fait premier, du point de vue génétique, mais une suite d'étapes dont seuls la loi de succession et le mécanisme de passage de l'une à l'autre sont accessibles à l'analyse. Seulement, tant cette succession que ces passages suffisent à nous renseigner sur l'interdépendance finale des classes, des relations et des nombres puisque le processus entier tend vers un état d'équilibre atteint vers la septième année du développement.

Avec la représentation verbale et imagée, les mêmes actions s'intériorisent en concepts intuitifs, d'abord préopératoires mais que leurs réunions et séparations dorénavant effectuées et coordonnées par la pensée autant et plus que par les mouvements matériels, conduiront au cours de nouvelles étapes aux groupements et aux groupes proprement opératoires. Mais quelques années d'élaboration demeurent nécessaires entre ce début de mentalisation de l'action et l'arrivée au niveau des opérations concrètes, parce que l'action intériorisée en pensée commence, comme les actions matérielles du niveau précédent, par demeurer longtemps irréversible avant de se prêter à toutes les compositions. Sur le plan sensori-moteur, seul le système privilégié des déplacements était parvenu à un début de réversibilité, aboutissant à la permanence de l'objet pratique, c'est-à-dire à la possibilité de retours empiriques, tandis que les autres formes d'action demeuraient polarisées selon le sens unique de leur finalité. Lors de l'intériorisation des actions en représentations, cette irréversibilité relative domine encore longtemps toutes les coordinations mentales surajoutées aux coordinations pratiques, parce que les objets de la pensée sont toujours plus nombreux et que les distances spatio-temporelles les séparant du sujet

1. SPAIER, dans la *Pensée concrète*, attribue, il est vrai, une structure conceptuelle aux données perceptives elles-mêmes. Mais les critères employés pour savoir s'il y a ou non concept (dénotation, etc.) ne peuvent que manquer de précision tant que l'on ne se réfère pas à un système défini d'ensemble, tel que les différents « groupements ».

augmentent en proportion. Le résultat de cette irréversibilité est le phénomène très général qui caractérise la pensée prélogique de *2* à 7 ans, de la non-conservation des ensembles due aux difficultés de la réunion et de la séparation mentales des objets sous forme réversible. Cette non-conservation, que nous avons déjà mentionnée au § 5, constitue ainsi l'analogue, avec un décalage de l'action à la pensée, et par conséquent des mises en relations pratiques aux mises en relations mentales, de ce qui était sur le plan de l'action initiale la non-conservation des objets eux-mêmes. Ce n'est que lorsque les réunions et séparations seront étendues à tous les objets de la pensée, à titre de formes les plus générales de l'assimilation et de l'accommodation mentales, que l'équilibre atteint par ces deux fonctions assurera la réversibilité : les opérations réversibles constituent ainsi l'état d'équilibre mobile vers lequel tendent toutes les coordinations de la pensée, dans la mesure où celles-ci dépassent la simple intuition imagée pour s'organiser en articulations toujours plus souples. La pensée intuitive qui marque les débuts de la représentation n'est donc pas autre chose que l'évocation par le mot et l'image des diverses actions réelles, mais sous leur forme encore quasi matérielle et par conséquent irréversible. Les opérations, ce sont au contraire les mêmes actions, mais coordonnées entre elles par la pensée, déroulées dans les deux sens et combinées selon toutes les compositions possibles parce que généralisées à tous les objets, et non pas seulement, comme dans l'intuition imagée, à ceux sur lesquels pourrait porter l'action matérielle.

Cela rappelé, on comprend comment les réunions et séparations mentales des objets, dans la mesure de leur accession à l'état d'opérations réversibles et composables entre elles, engendreront de façon nécessairement interdépendante les classes, les relations asymétriques et les nombres, en portant simultanément sur les qualités comme telles et sur leurs rapports quantitatifs[1] :

1° On peut d'abord réunir les objets selon leurs ressemblances, ou les séparer selon l'absence de ces mêmes ressemblances, d'où la formation des classes emboîtées A, B, C, etc., selon des ressemblances de plus en plus générales, ou des classes

$$B - A = A' \; ; \; C - B = B' \; ; \text{ etc.},$$

selon l'absence des ressemblances spéciales. C'est là le principe du « groupement » additif de l'emboîtement des classes que nous avons pris comme exemple au § 3. En poussant la classification à l'extrême, on aura une classe singulière *A,* dont le seul individu possède le caractère (*A*) et une classe singulière A', dont le seul

1. Pour ce qui suit, voir notre *Traité de logique*, § 26 ; et notre ouvrage, *La genèse du nombre chez l'enfant* (Delachaux & Niestlé), 1940.

individu ne possède pas le caractère (A), mais possède avec A le caractère commun (B) : d'où la classe $B = A + A'$. *Si* ce caractère (B) manque à l'individu de la classe singulière B', mais que les B et B' aient en commun le caractère (C), on aura la classe $C = B$ + B' ou $C = A + A' + B'$. Et ainsi de suite. De ce point de vue tout qualitatif, A et A' sont donc équivalents (c'est-à-dire réciproquement substituables) l'un à l'autre en B ; A, A' et B' sont équivalents ou substituables en C ; etc. Mais A n'est pas équivalent à A' en A, ni en A' ; et B' n'est pas équivalent ou substituable à A, ni à A' en B ; etc. Ce sont donc bien ces équivalences qualitatives, ou ressemblances de plus en plus générales, qui constituent le principe de la réunion, et l'absence de qualités communes de divers ordres de plus en plus spéciaux qui constitue le principe de la séparation des classes.

Le propre du niveau intuitif préopératoire est que l'enfant n'est capable que de certaines de ces réunions, et encore sans réversibilité (voir fin du § 3), tandis que les opérations concrètes marquent la généralisation de ces emboîtements simples.

2° Soit maintenant une collection d'individus A, A', B', etc. (que nous ne distinguerons pas pour l'instant de leurs classes singulières) présentant une même qualité, mais selon des différences d'intensité croissantes (de plus en plus lourds, ou grands, etc.). On peut alors les sérier selon ces différences. On a alors une première différence a entre O et A, une différence a' entre A et A', une différence b' entre A' et B', etc. D'où le groupement (additif) de la sériation des relations asymétriques : $a + a' = b$; $b + b' = c$; etc., dont l'opération inverse est l'addition d'une relation converse, + ($-a$) ce qui équivaut à la soustraction $-a$.

Ce groupement, qui se traduit en opérations concrètes par la conduite élémentaire de la construction d'une rangée d'éléments ordonnés, n'est pas accessible avant celui de l'emboîtement des classes : les petits ne parviennent ainsi à ordonner des grandeurs croissantes que par couples ou par petites séries empiriques, sans composition transitive ni réversible.

Mais, lorsque ce groupement est achevé (soit entre 6 et 7 ans comme celui de l'emboîtement des classes), on constate que, s'il est analogue au précédent, il ne lui est cependant pas identique du point de vue des opérations en jeu. En effet, si A et A' sont sériés selon l'ordre $A \rightarrow A'$, c'est en tant que différents l'un de l'autre, tandis que s'ils sont réunis en une même classe

$$A + A' = B,$$

c'est en tant que ressemblants. L'addition $a + a' = b$ n'est donc pas commutative, tandis que l'addition $A + A' = B$ peut se faire aussi dans l'ordre $A' + A = B$[1]. Bref, le groupement des classes, étant fondé sur la ressemblance des éléments, ne comporte pas d'ordre quant à la classification des classes singulières *A*, *A'*, *B'*, etc., en chacune des totalités *B*, *C*, *D*, etc., mais seulement quant à l'emboîtement des classes d'extension croissante *A*, *B*, *C*, *D*, etc. Le groupement des relations asymétriques, étant fondé sur la différence progressive des éléments, comporte au contraire un ordre nécessaire, une fois choisie la qualité servant de principe de sériation (poids, etc.).

De ce point de vue, les deux groupements ne peuvent fonctionner simultanément avec les mêmes objets : ou bien les objets sont classés selon leurs diverses ressemblances partielles, ou bien ils sont sériés selon une seule qualité à la fois, mais ils ne peuvent être simultanément groupés selon leurs ressemblances et selon leurs différences croissantes. Les deux groupements sont donc « complémentaires » : si l'on groupe les objets selon leurs qualités, ou bien on en choisit une selon laquelle ils seront tous différents les uns des autres (relations asymétriques et sériation), ou bien on se fonde sur la hiérarchie des équivalences de plus en plus générales (relations symétriques et emboîtement des classes), mais on ne peut réaliser les deux groupements au moyen des mêmes opérations.

3° En quoi consiste alors le nombre ? A transformer les éléments en unités, c'est-à-dire à ne pas emboîter simplement les termes *A* et *A'* en *B*, etc., ou les relations *a* et *a'* en *b*, etc., en vertu des ressemblances ou différences qualitatives perçues, mais à se donner le droit de substituer *A* à *A'*, *B'*, etc., ou *a* à *a'*, *b'*, etc., au sein de n'importe quelle classe ou relation, partielles ou totales. Or, cette mise en relation des parties elles-mêmes entre elles revient précisément à fondre en un seul tout le principe de la sériation des différences et celui de la hiérarchie des équivalences, puisque alors les éléments *A*, *A'*, *B'*, etc., deviennent simultanément substituables sans restriction et sériables sans restriction, c'est-à-dire qu'ils sont transformés en unités à la fois équivalentes et distinctes. Mais cette fusion opératoire n'est réalisable qu'au prix d'une abstraction fondamentale, qui n'est pas possible sur le terrain des groupements qualitatifs (sur

1. Ce qui revient à dire que a n'est pas équivalent ou substituable à a' en b, tandis que *A* est substituable à *A'* et réciproquement en tant que tous deux sont équivalents en *B*.

lequel les éléments sont emboîtés et sériés une fois pour toutes selon leurs qualités) : c'est en faisant abstraction des qualités différentielles elles-mêmes. Supprimons, en effet, ces dernières, ce qui revient à dire que nous généraliserons l'équivalence entre les éléments singuliers désormais privés de leurs qualités : les éléments *A*, *A*', *B*', etc., deviendront ainsi substituables entre eux au sein de n'importe quelle classe, même de rang *A*, *A*', etc., et non plus seulement au sein des classes générales. Mais, en même temps conservons le droit de sérier ces éléments, ce qui est (puisqu'ils sont devenus équivalents) le seul moyen de les distinguer encore. Seulement, à défaut de qualités distinctives, sérions-les selon l'ordre le plus général, en généralisant ainsi le principe de la différence comme nous venons de généraliser celui de la ressemblance (ou équivalence) : il s'ensuivra que tous les ordres possibles deviendront semblables entre eux, parce que, dans les suites *A*, *A*', *B*'... ou *A*', *A*, *B'*... ou *B*', *A*, *A*'..., etc., il y a toujours un terme sans antécédent, un terme qui succède à celui que nous venons de définir, etc. C'est ce que nous appellerons un ordre « vicariant ». Cela admis, le nombre n'est pas autre chose qu'une collection d'éléments ainsi rendus tous équivalents par ressemblance généralisée, et cependant maintenus tous distincts grâce à un ordre vicariant ou différence généralisée. Chacun de ces éléments constitue, en effet, une unité à la fois cardinale (puisque $A = 1$; $A + A' = 2\ A$; $A + A' + B' = 3\ A$, etc.) et ordinale (puisqu'il y a toujours un premier élément quel que soit l'ordre choisi, ce premier rang étant celui qui n'a pas de précédent, puis un second élément, qui est le successeur du premier, etc.).

Le groupe additif des nombres entiers est donc le produit d'une fusion opératoire entre les groupements qualitatifs des classes et des relations asymétriques, mais par abstraction des qualités différentielles sur lesquelles sont fondés ces derniers. Le nombre est ainsi complémentaire par rapport aux classes et aux relations asymétriques, à elles deux, comme les classes et les relations asymétriques le sont entre elles : ou bien, en effet, on tient compte des qualités différentielles et l'on ne peut que classer selon les équivalences qualitatives de plus en plus générales, ou sérier selon les différences qualitatives ou bien l'on fait abstraction des qualités différentielles, et l'on ne peut alors que classer et sérier à la fois, car, si l'on ne les série pas, il n'y a plus d'éléments distincts, et si l'on ne les classe pas, ils ne peuvent plus être réunis en tant qu'équivalents : or classer et sérier à la fois, c'est précisément dénombrer.

En fait, c'est ainsi que les choses se passent à tous les niveaux dans la genèse réelle des nombres. C'est dans la mesure où les correspondances qualitatives intuitives sont transformées en correspondances bi-univoques « quelconques » (voir § 4) que le nombre prend en général naissance ; or cette transformation suppose à la fois l'emboîtement des collections d'extension croissante, c'est-à-dire le groupement additif des classes, et la sériation des éléments, c'est-à-dire le groupement additif des relations asymétriques.

D'autre part, cette construction explique par le fait même pourquoi les notions ordinales et cardinales du nombre sont nécessairement solidaires dans le fini, comme l'a montré de façon décisive L. Brunschvicg. La raison en est, génétiquement, que si le nombre est fait à la fois de classes et de relations asymétriques, chacune de ces deux composantes ne saurait engendrer la forme correspondante de nombre (cardinal pour la classe et ordinal pour la sériation) qu'en s'appuyant sur l'autre. Nous retrouverons d'ailleurs à l'instant cette question (§ 7).

En conclusion, le nombre ne se réduit pas aux êtres logiques, considérés en tant que « groupements » isolables, puisqu'il leur est complémentaire et exprime leur fusion opératoire en une seule totalité non réalisable sur le plan qualitatif. Les êtres logiques ne se réduisent pas non plus au nombre, puisqu'ils résultent de la dissociation de ses composantes cardinales (emboîtement) et ordinale (sériation), avec recours aux qualités différentielles. Mais, les classes, les relations asymétriques et les nombres forment à eux trois un système opératoire cohérent, à la fois unique par ses mécaniques et différencié selon les trois possibilités d'une coordination des ressemblances, des différences ou des deux à la fois. Le processus de construction ainsi décrit représente donc une troisième solution, à la fois distincte de la réduction russellienne et de l'irréductibilité postulée par l'intuitionnisme du nombre entier. Cette troisième solution présente l'intérêt d'être simultanément une réduction du nombre aux opérations logiques envisagées à titre de totalités complémentaires (puisque le nombre est fait exclusivement de classes et de relations asymétriques simplement groupées de façon nouvelle, par fusion de leurs « groupements » respectifs), et une réduction de la logique au nombre (puisque les « groupements » des classes et de relations sont assimilables à des « groupes » dont on limiterait la mobilité au profit de la contiguïté et de la dichotomie : voir § 3). Or une telle réduction mutuelle, par assimilation réciproque, est précisément conforme au modèle de toutes les réductions

connues entre domaines voisins. C'est ce que nous aurons l'occasion de voir bien souvent dans la suite.

§ 7. L'AXIOMATIQUE DU NOMBRE ENTIER. — Nous avons constaté jusqu'ici l'existence de deux sortes de cercles génétiques. D'une part, le nombre entier suppose les opérations logiques portant sur les classes et les relations asymétriques qualitatives, mais ces opérations logiques elles-mêmes supposent à leur tour une quantification prénumérique, sous la forme des quantités intensives « un », « aucun », « quelques » et « tous », lesquelles deviendront numériques sitôt écartées les qualités différentielles. D'autre part, le nombre cardinal suppose une ordination des unités, nécessaire à leur différenciation, tandis que le nombre ordinal suppose la colligation des termes ordonnés, sans quoi $n + 1$ ne saurait être distingué de n. Or, ces cercles ne gênent nullement les axiomaticiens, qui parviennent à reconstruire sous forme de théories cohérentes et linéaires, c'est-à-dire exemptes de contradictions et de cercles vicieux, les diverses structures numériques, comme si elles subsistaient en une sorte d'absolu une fois posés les axiomes, les définitions et les notions indéfinissables de départ. Il nous paraît donc essentiel d'examiner, sur un exemple particulier, comment peut s'effectuer le raccord de l'analyse axiomatique et de l'analyse génétique, problème qui se retrouve sans cesse et sous les aspects les plus variés en une épistémologie psychologique.

A nous borner au nombre entier, il existe à son seul sujet un grand nombre d'axiomatiques : celles de Hilbert, de Padoa, de Landau, etc. Rappelons simplement les cinq célèbres axiomes de Peano, qui suffisent à engendrer toute la numération une fois admis les trois concepts fondamentaux de zéro, de n (un nombre quelconque) et de successeur (la loi fondamentale + permettant de passer d'un nombre à son successeur) : (1) 0 est un nombre (2) le successeur d'un nombre est également un nombre ; (3) deux nombres n'ont jamais le même successeur (ou : si les successeurs de deux nombres sont identiques, ces nombres le sont aussi) ; (4) le successeur d'un nombre ne peut être 0 ; (5) si une classe contient 0 et un nombre quelconque n, et si le successeur de n en fait également partie cette classe contient tous les nombres (principe d'induction complète).

Le problème qu'il convient de nous poser est alors de déterminer les rapports entre une telle axiomatique et les analyses génétiques qui précèdent, tant en ce qui concerne les ressem-

blances que les oppositions, et tant en ce qui concerne la méthode elle-même que ses résultats.

Il est une première ressemblance qui s'impose, quelles que soient les différences de méthodes : pas plus l'analyse axiomatique que l'analyse génétique ne sauraient remonter à un point de départ absolu, toutes deux étant condamnées à une *regressio ad infinitum* si elles veulent se passer de données — données indémontrables ou indéfinissables dans le cas des axiomes et des notions axiomatiques de départ, et données inexplicables dans le cas de la psychogenèse. En effet, en ce qui concerne la régression génétique, il est possible de montrer comment les opérations numériques sont préparées par les opérations de classes et de relations, et comment celles-ci constituent le « groupement », par composition réversible, d'actions prenant racine dans les coordinations sensori-motrices. Mais dire que ces dernières tiennent à des coordinations organiques, ce n'est déjà plus rien dire de précis eu égard à l'explication du nombre, et remonter au-delà conduit en plein inconnu : c'est donc sur les stades supérieurs que portera l'explication, et une fois donnés les éléments qui la rendent possible. Or, en parallélisme avec cet arrêt forcé de l'analyse régressive, l'axiomatique se donne au départ des définitions et des axiomes, mais sans jamais pouvoir tout définir ni être assuré d'avoir atteint les axiomes les plus simples, envisagés isolément, ni les plus cohérents. C'est donc sur le terrain, non pas seulement de départ, mais de l'organisation préalable des notions utilisées pour la mise en marche de la construction axiomatique, que les cercles pourraient se retrouver.

En ce qui concerne d'abord les définitions, chacun sait que l'on ne saurait définir toutes les notions intervenant en un système abstrait, puisque l'on ne définit une notion qu'au moyen d'autres notions. Les notions utilisées constituent donc bien un cercle, et l'on n'évite ce cercle, du point de vue formel, qu'en répartissant toujours les concepts en définissables et en indéfinissables. Or, il va de soi qu'un concept n'est jamais en lui-même définissable ou indéfinissable, mais seulement eu égard au système adopté. On est donc toujours libre de choisir ses indéfinissables et ses définitions (c'est-à-dire les notions que l'on décide de définir et la manière dont on les définit), mais il y a toujours des concepts indéfinissables et ils sont aussi importants que les notions définies, car ils peuvent contenir une suite inépuisable d'implications opératoires. Seulement, la règle du jeu (en même temps que l'art de l'axiomaticien) consiste précisément à n'utiliser dans la construction formelle les notions définies qu'en s'en tenant

à la manière dont elles ont été définies et à réduire les indéfinissables au *minimum,* sans avoir par conséquent à chercher ce qu'elles recouvrent. C'est ce qui permettra, en particulier, de s'en tenir aux notions ordinales (ou cardinales) que l'on désire introduire explicitement, en faisant abstraction des autres aspects du nombre, et il est évidemment interdit par la règle du jeu de réintroduire en cours de route ce qui a été écarté au départ. Mais d'un point de vue épistémologique, et non pas seulement de celui de la seule technique formelle, la question est naturellement alors de savoir si ces notions écartées ont pu l'être réellement, ou si elles sont toujours présentes (et par conséquent à l'œuvre) dans les indéfinissables. En d'autres termes, l'axiomatique s'en tient, et doit s'en tenir, à ses « définitions nominales », mais l'épistémologie est obligée de dégager les notions ou opérations réelles qui ont permis de les poser.

A cet égard, l'axiomatique du nombre entier de Peano est extrêmement instructive par le choix de ses trois concepts fondamentaux. Qu'est-ce, en effet, que la notion de successeur ? On peut la ramener au *minimum,* comme exprimant simplement la loi qui « crée les numéros les uns après les autres » et dont l'application sera symbolisée par le signe +. Mais, même en admettant que la construction portera sur de simples numéros et que le signe + conservera un sens purement ordinal, nous demanderons, pour autant qu'il s'agit de dégager la signification épistémologique d'une telle construction, en quoi consiste la succession de deux numéros et comment on distinguera le numéro $n + 1$ du numéro n ? Or, définir la notion de succession (même dans le cas de deux numéros) engagera évidemment toute la logique des relations asymétriques et fera rapidement intervenir des indéfinissables de caractère proprement opératoire, qui tiendront au pouvoir de l'intelligence (ou de l'action) de constituer un ordre. Quant à l'opération +, qui engendre la suite (1 numéro) + (1 numéro) + (1 numéro) + . . ., son emploi, qui traduira précisément les indéfinissables en jeu dans la notion de « successeur », sera toujours soumis à la condition suivante : ou bien un numéro quelconque ne se distingue du précédent que parce qu'il existe un nombre cardinal de numéros déjà écrits avant lui, ou bien chaque numéro est affecté d'un signe distinctif (nom, etc.) particulier. Mais ces signes distinctifs ne peuvent eux-mêmes être définis qu'en distinguant le numéro $n + 1$ du numéro n par le fait que $n + 1$ comporte déjà un

1. F. GONSETH, *Fondement des mathématiques*, p. 206.

nombre cardinal *n* de numéros avant lui, tandis que le numéro *n* n'en comporte que *n* – *1*. Dira-t-on qu'il est inutile de compter (cardinalement) les numéros puisque leur succession ordinale se suffit à elle seule et ne repose que sur l'absence d'antécédent pour le premier numéro et la suite des antécédents pour les suivants ? Mais précisément l'absence d'antécédent ordinal signifie une classe nulle ou un nombre cardinal nul d'antécédents et la suite ordinale des antécédents ultérieurs suppose un nombre cardinal d'actes, nécessaire à invoquer pour les distinguer les uns des autres : contrairement à une sériation simplement logique, dans laquelle les termes se distinguent par leurs qualités intrinsèques (par exemple A < B < C, etc.) sans qu'il soit besoin de les compter pour les différencier, de purs numéros d'ordre ne peuvent, en effet, différer les uns des autres que par le nombre cardinal des antécédents de chacun. Si l'on veut tout expliciter, l'opération numérique + implique donc un arrière-plan de cardination derrière l'ordination : cette cardination intervient d'ailleurs explicitement dans la proposition (5), dans laquelle il est question de la « classe » des numéros. Donc, à vouloir tout expliciter, le nombre se réduira à une synthèse de classes et de relations asymétriques axiomatiquement comme génétiquement. Mais l'axiomaticien se réserve précisément le droit de ne pas tout expliciter, en ce qui concerne les indéfinissables et l'utilisation délimitée des opérations introduites, quitte à n'en être que plus exigeant dans le corps même de la construction formelle élaborée grâce à eux.

Venons-en maintenant aux axiomes eux-mêmes. La question, pour l'axiomatique, est de savoir s'ils sont simples et cohérents, c'est-à-dire, d'une part, indépendants les uns des autres et, d'autre part, non contradictoires entre eux. Gonseth a fort clairement montré[1] comment l'axiomaticien s'y prend pour remplir ces deux exigences, solidairement car « l'indépendance et la cohérence d'un système ne peuvent être traitées que simultanément » (p. 207). C'est en « construisant » successivement des axiomatiques négligeant l'un des axiomes en jeu que l'on voit si celui-ci est indépendant, car ces constructions peuvent alors aboutir à des résultats contraires à l'axiome négligé (p. 37). Mais c'est seulement de cette même manière indirecte que l'on s'assure de la cohérence, car on ne peut démontrer directement la non-contradiction d'un axiome ni celle de deux axiomes l'un par rapport à l'autre. Pour démontrer la non-contradiction d'un

1. F. GONSETH, *Les fondements des mathématiques*, Paris, 1926.

axiome isolé, il faudrait démontrer auparavant la non-contradiction de la logique elle-même : on voit alors réapparaître le cercle fondamental commun aux analyses génétiques et axiomatiques puisque, pour démontrer la non-contradiction de la logique il faut nécessairement employer cette dernière. Quant à la non-contradiction des axiomes entre eux, elle ne se vérifie que par l'examen de leurs résultats, car, à vouloir la démontrer directement il faudrait remonter à toutes les vérités préalables qu'ils impliquent, ce qui nous ramène à la non-contradiction de la logique elle-même. Les innombrables éléments implicites d'une axiomatique s'appuient donc les uns sur les autres en un cercle sans fin, que seul l'emploi d'axiomes choisis à titre de point de départ conventionnel de la construction peut transformer en une suite linéaire.

La conclusion à laquelle nous conduisent ces remarques est donc que la construction axiomatique est plus parallèle qu'il ne semble à la construction génétique, quoique la seconde soit librement remaniée par l'axiomatisation. La raison en est que si les différentes axiomatiques possibles sont élaborées de façon autonome, certaines connexions fondamentales demeurent communes à toutes parce qu'elles traduisent précisément les cercles génétiques. En quoi consistent ces connexions ? Il convient ici d'introduire une distinction essentielle. Il intervient, d'une part, en une axiomatique, un ensemble d'implications explicites, qui sont les implications entre propositions, déterminées par les définitions de départ. Mais d'autre part, il intervient comme nous venons de le voir, des liaisons implicites notamment entre les opérations et les notions indéfinissables. Or, au lieu de constituer simplement des implications entre propositions, ces liaisons représentent des implications entre opérations : p. ex. l'opération + implique à la fois les opérations d'ordre et de colligation, s'il s'agit d'additionner des unités homogènes ; etc. Par conséquent, ces implications entre opérations constituent le corrélatif de ce qu'est génétiquement cette abstraction *sui generis* à partir des actions ou opérations antérieures, décrite au § 2, et reposent ainsi sur la généralisation par composition opératoire et non pas par simple emboîtement des propositions particulières dans celles qu'elles impliquent. C'est pour cette raison que les analyses axiomatiques et génétiques sont en réalité complémentaires et non pas divergentes. En effet, une axiomatique ne porte pas directement sur les opérations elles-mêmes, mais sur des propositions qui expriment leurs résultats. Ce sont donc les implications entre ces propositions seules qu'envisage l'axiomaticien, et non

pas les connexions préalables entre les opérations, connexions dont il retient uniquement le *minimum* dont il a besoin pour chaque construction particulière. Ce sont au contraire ces implications entre opérations elles-mêmes qui intéressent le généticien, et c'est en quoi les deux sortes de recherches sont complémentaires, l'une portant sur les liaisons préalables ou implicites, sans doute inépuisables, l'autre sur leur explicitation formelle, sans doute toujours partielle. Qu'il y ait entre ces deux attitudes, opérative ou formalisatrice, convergence possible, c'est ce que l'histoire atteste sans cesse ; mais qu'il y ait divergence apparente, c'est ce qu'elle ne montre pas moins, comme nous allons en voir maintenant des exemples avec les nombres dérivés des entiers positifs, à commencer par le nombre négatif.

§ 8. LE NOMBRE NÉGATIF ET LE ZÉRO. — La comparaison de l'histoire des nombres négatifs avec celle des entiers positifs est singulièrement instructive. Du point de vue opératoire, rien ne paraîtrait plus simple que d'ajouter ou d'enlever en pensée une première collection à une seconde, celle-ci fût-elle la plus petite des deux, momentanément ou définitivement ; le caractère réversible des opérations d'addition et de soustraction semblerait donc devoir entraîner sans plus la nécessité de compléter la suite directe des nombres entiers positifs par la suite inverse des entiers négatifs, ceux-ci résultant de la soustraction $n_2 - n_1$ *si* $n_1 > n_2$. La signification de telles opérations est même si générale qu'elle n'a rien de spéciale au nombre et se trouve déjà en jeu dans les réunions et séparations de classes qualitatives. Lorsque le langage courant dit « Tous les Mammifères, sauf (à l'exception de, hormis, etc.) les Cétacés, ont des pattes », il exprime l'opération B (= les Mammifères) – A (= les Cétacés) = A' (= les Mammifères autres que les Cétacés). La classe des Cétacés sera donc affectée d'un signe de soustraction (– A) dans la transcription algébrique de cette phrase. Si maintenant l'on construit la classe des Vertébrés sans pattes, on dira inversement « Tous les Mammifères en sont exclus, sauf les Cétacés », ce qui s'écrira $-(B - A) = -A'$ ou encore $+A - B = A'$, c'est-à-dire que le renversement des signes de l'équation logique $B - A = A'$ aboutira à la notion d'une classe négative $-A'$ résultant de l'exclusion (soustraction) d'un tout $-B$ plus grand que la partie retenue $+A$. Quant aux opérations numériques spontanées, chacun a toujours compris, dès leur application aux échanges économiques ou aux chemins parcourus, qu'en achetant davantage que ce qu'on a payé on

contracte une dette et qu'en reculant plus qu'on a avancé on fait au total une marche arrière, ce qui constitue proprement un emploi, dans l'action même, du nombre négatif.

Comment donc expliquer ce fait extraordinaire que les nombres négatifs n'aient été reconnus en mathématiques qu'avec l'arithmétique de Diophante, et surtout avec les débuts de l'algèbre, et soient restés étrangers à la pensée commune des Grecs ? C'est que, indépendamment de toute axiomatique, les deux attitudes opératoire et formalisatrice correspondent déjà à deux paliers bien distincts de la construction opératoire elle-même : celui des opérations concrètes, qui consistent à coordonner entre elles les actions mentalisées, et celui des opérations formelles, qui consistent à les réfléchir sous forme d'opérations symboliques ou hypothético-déductives et à les traduire en propositions. Que le nombre négatif prolonge directement le nombre positif sur le premier palier n'entraîne donc pas forcément cette conséquence que le mathématicien cherchant à formaliser les propriétés du nombre prenne conscience aussi rapidement des nombres négatifs que des nombres positifs, car la réflexion sur les opérations concrètes en renversera le sens d'orientation et partira de leur résultat avant d'atteindre leur mécanisme (ce que nous avons précisément vu au § 7 à propos de l'axiomatique du nombre entier lui-même). C'est pourquoi le résultat le plus simple des opérations concrètes, c'est-à-dire le nombre positif, donne lieu à une prise de conscience bien avant le nombre négatif, lié au développement du mécanisme opératoire comme tel.

Mais il y a plus. Par suite de cette même difficulté à la prise de conscience des opérations dans leur mécanisme intime (sur laquelle nous reviendrons sous sa forme générale au chap. III), le nombre négatif une fois formé a pu donner lieu à des doutes quant à sa valeur de connaissance, et ceci à cause du réalisme du nombre entier et faute de concevoir le nombre positif lui-même comme étant de nature opératoire.

C'est ainsi que J. d'Alembert, dont M. Muller a retracé la philosophie en un livre attachant[1], en est venu à trouver obscure la notion de quantité négative, malgré les modèles économiques (dettes) ou géométriques (inversion de direction, etc.) qui en justifient pratiquement l'emploi. Il vaut la peine de peser les arguments de l'auteur du célèbre principe mécanique qui perpétue son nom. L'algèbre, a-t-il soutenu, est évidente ou du moins devrait l'être, en tant que généralisant des idées premières

1. M. MÜLLER, *Essai sur la philosophie de Jean d'Alembert*, Payot, 1926.

fondées sur la sensation. De ce point de vue, l'idée de nombre positif doit sa valeur au fait qu'il est abstrait des collections concrètes elles-mêmes et qu'il s'y rattache par le seul intermédiaire d'une désignation symbolique. Or, le nombre négatif ne saurait s'abstraire de rien de sensible, puisqu'il correspond à quelque chose d'inexistant ; s'il se réfère à une telle absence, ce n'est donc plus à la manière dont le nombre positif réunit les termes d'une telle collection présente : c'est relativement à une attente du sujet lui-même. En d'autres remarques, citées par M. Müller, et où d'Alembert semble avoir changé de point de vue, les quantités négatives sont dites « tout aussi réelles que les positives ; elles n'en diffèrent que par le signe qui les précède », mais « ce signe ne sert qu'à modifier et à corriger une fausse supposition » (p. 83). Cela revient encore à dire que la quantité négative diffère des positives relativement à l'attente du sujet (découverte d'une absence à la place d'une présence), sans pour autant correspondre comme elles à une réalité sensible désignée par la langue mathématique.

Ces hésitations du grand d'Alembert sont singulièrement instructives quant à la nature active et non point statique du nombre négatif et du nombre entier en général. Il est clair, en effet, que si l'on conçoit toute notion mathématique comme devant être dérivée de la perception, le nombre négatif ne saurait se justifier puisqu'il correspondrait à une absence de perception, ou moins encore, et qu'il n'y a pas de degrés dans les perceptions nulles. Mais l'étonnant est que cette contradiction entre l'interprétation sensualiste de la connaissance et la réalité mathématique, n'ait pas conduit un esprit aussi porté au concret et rompu aux considérations mécaniques que d'Alembert à comprendre que la nature essentielle du nombre n'est ni statique ni perceptive, mais bien dynamique et liée à l'action elle-même, intériorisée en opérations. De ce point de vue, le nombre négatif est entièrement comparable au nombre positif : il est dû à la même action, au sens le plus strict du terme, mais simplement orientée en sens inverse. Ajouter une unité constitue ainsi le nombre positif + 1 de la même manière que l'enlever constitue le nombre négatif – 1. Il est vrai que d'enlever 1 à une collection déjà formée (p. ex. 5 – 1) semble ne pas conférer à – 1 la qualité de nombre négatif, mais appliquer seulement au nombre 1 l'opération de la soustraction, tandis que d'enlever –1 à une collection nulle paraît constituer une action impossible ou purement imaginative (comme on dira plus tard « nombre imaginaire » pour l'extraction de la racine $\sqrt{-1}$). Mais c'est

justement le propre des opérations mentales que de prolonger l'action réelle, c'est-à-dire actuelle et matérielle, en actions futures ou passées, simplement possibles ou même impossibles à réaliser en fait : de telles opérations n'en demeurent pas moins des actions, puisque d'enlever – 1 à 0, ce qui constitue le début des nombres négatifs au sens strict du terme, consiste à s'engager à enlever – 1 sitôt que la collection actuellement nulle, c'est-à-dire donnée à l'état de cadre sans contenu, se remplira d'un contenu positif. C'est p. ex. ce que le calcul des valeurs économiques fait chaque jour en présence d'une bourse ou d'un coffre vides.

Bien plus : du fait que le nombre négatif résulte des mêmes actions que le nombre positif, mais orientées en sens inverse, il s'ensuit que le passage de ces actes (ajouter ou enlever) aux aspects spatiaux et cinématiques de l'action s'effectue sans intervention de conventions nouvelles, conférant ainsi un aspect positif et négatif non pas seulement aux nombres comme tels mais aux unités de la métrique linéaire. Rien n'est plus simple p. ex. que de composer des distances selon que les mouvements sont orientés en sens direct ou inverse. Et, avant même la compréhension de ces notions, l'enfant parvient à inverser un ordre linéaire *ABC* en une suite *CBA,* ce qui correspond à nouveau aux opérations + et –.

Mais la meilleure preuve du caractère spontané de la construction qui est à la source des nombres négatifs et du fait que cette construction soit liée à l'action même, par opposition à la perception, est l'intervention nécessaire de la « règle des signes » (–) par (–) donne (+), au moment déjà où s'équilibrent les opérations concrètes (7-8 ans), puis dans la logique courante des propositions, c'est-à-dire dans les deux cas, bien avant qu'elle ne soit formulée par l'algèbre des nombres négatifs. Pour ce qui est des opérations concrètes, il suffit p. ex. de présenter aux enfants trois éléments *ABC* fixés sur une tige rigide pour que, une fois compris que la rotation de 180° de cette tige (derrière un écran) inverse l'ordre en *CBA,* les sujets en arrivent, vers 7-8 ans, à prévoir que deux rotations successives de 180° rétabliront l'ordre direct *ABC.* L'inversion de l'ordre étant l'opération négative, l'enfant comprend donc de lui-même que deux inversions ramènent l'ordre positif, ce qui est proprement l'opération (–) x (–) = (+)[1]. Or, sur le plan de la logique des propositions, cette règle se retrouve sous sa forme prénumérique dans le calcul de la double négation (règle de Morgan) : « il est faux qu'il soit faux = il est vrai », ou « le contraire du contraire » sont p. ex. des rapports que tout sujet normal comprend dès le niveau des opérations formelles.

1. Voir PIAGET, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Paris, P.U.F., 1946, chap. I.

Or, non seulement de tels faits prouvent à l'évidence le caractère actif et non pas perceptif du nombre négatif, mais encore ils vérifient par cela même l'hypothèse de la nature également opératoire du nombre positif lui-même. Il serait, en effet, inadmissible d'attribuer à la perception des collections d'objets l'origine des nombres positifs, c'est-à-dire de considérer ceux-ci comme « abstraits » à partir de ces objets, quand l'absence de cette perception n'empêche pas la formation des nombres négatifs. Sans doute cette perception des collections dénombrées joue-t-elle un rôle dans les facilités intuitives de l'action et, par conséquent, dans la prise de conscience du nombre positif, et c'est ce que l'on peut accorder à d' Alembert, mais les facilités intuitives ne se confondent pas avec les coordinations comme telles de l'action et la prise de conscience n'est pas la construction, puisqu'elle renverse même parfois l'ordre génétique de celle-ci. La découverte historique tardive du nombre négatif par rapport à l'emploi si primitif, non seulement du nombre positif, mais encore des opérations inverses constituant, dans l'action même, l'équivalent anticipé des nombres négatifs, ne confirme donc en rien l'empirisme ou le « sensualisme » : elle conduit simplement à dissocier, du point de vue du déroulement de l'histoire des idées autant qu'à celui de la construction psychogénétique, le rôle respectif des facteurs de représentation et de coordination en jeu dans l'action opérative ainsi que dans sa prise de conscience ou sa formulation réfléchie. On pourrait sans doute soutenir simplement que le nombre positif est apparu bien avant le nombre négatif parce qu'une opération directe est plus facile à généraliser que son inverse. Mais cette explication demeure équivoque, parce qu'aucune opération n'est inverse en elle-même : il serait p. ex. légitime de considérer la séparation ou soustraction comme l'opération directe et la réunion ou addition comme son inverse, et c'est bien ainsi que l'on s'exprimerait dans un univers rigoureusement continu. Si l'on emploie le langage contraire et si la succession historique des découvertes réflexives a débuté par celle du nombre positif, c'est que la prise de conscience du mécanisme des actions procède de la périphérie au centre et commence par s'attacher aux objets sur lesquels porte l'action plus qu'aux phases de celle-ci : il est donc plus facile, dans le domaine du discontinu, de raisonner sur les objets réunis que sur l'acte même de la réunion, et c'est ce qui explique le primat du nombre positif puisque cette représentation périphérique facilitant la prise de conscience fait défaut aux collections séparées ou négatives.

En bref, plus encore que le nombre positif, le nombre négatif atteste la nature opératoire du nombre : on ne saurait abstraire des objets leur propre exclusion, comme on imagine, à s'en tenir au seul résultat extérieur de l'action de réunir, que l'on puisse extraire des collections déjà constituées leur pluralité positive. Le nombre négatif apparaît donc comme le modèle de l'abstraction à partir de l'action et non pas de l'objet, et cette conclusion confirme ce que nous ont déjà enseigné les entiers positifs eux-mêmes. Mais, plus encore que le nombre négatif, il est un nombre qui, à lui seul, aurait pu nous servir de critère décisif : c'est le nombre zéro, qui fournit le prototype à la fois d'une prise de conscience tardive et d'une impossible abstraction à partir de l'objet. C'est, en effet, l'une des grandes découvertes de l'histoire des mathématiques que d'avoir fait du zéro un nombre, car si le zéro logique (« aucun ») est sans doute aussi ancien que le langage (et peut-être même le « non » a-t-il toujours précédé le « oui »), il a fallu vaincre les mêmes difficultés pour prendre conscience du zéro arithmétique que du nombre négatif. Or, la raison de ces difficultés apparaît ici en plein jour : si la prise de conscience remonte de la périphérie au centre, la dernière de ses étapes consistera assurément à remarquer qu'une absence d'opération est encore une opération. Tant que l'on a cherché le nombre dans l'objet, la suite des nombres a commencé par conséquent à 1. Faire du zéro le premier des nombres, c'est au contraire renoncer à abstraire ceux-ci de l'objet (le zéro logique suffisant à exprimer son absence) et à les tirer des opérations seules, toute opération additive composée avec son inverse aboutissant alors à cette opération fondamentale qu'est l'absence d'opération, c'est-à-dire l' « opération identique » 0.

§ 9. LE NOMBRE FRACTIONNAIRE ET LE NOMBRE IRRATIONNEL. — Le nombre fractionnaire soulève, comme le nombre négatif, la question des rapports entre l'action opératoire et la représentation perceptive, et par conséquent entre les deux sortes d'abstractions, à partir de l'action ou à partir de l'objet lui-même. Bien qu'apparu plus tard que le nombre entier positif, le nombre fractionnaire a vu également sa formation favorisée par des considérations perceptives, fondées en l'espèce sur le fractionnement des objets continus autant que des ensembles discontinus. L'importance du partage a été, en effet, décisive dans sa découverte et la prépondérance attribuée souvent à la partition des objets continus, comme un champ ou un gâteau a conduit certains auteurs à attribuer au nombre fractionnaire une origine

plus spatiale qu'arithmétique pure, et (ce qui ne revient d'ailleurs nullement au même) plus perceptive qu'opératoire. Il s'agit donc d'examiner comment la considération du rapport entre les parties au sein d'un même tout a imposé la notion de nombre fractionnaire : est-ce en vertu de coordinations opératoires analogues à celles que nous venons de voir à l'œuvre dans la construction du nombre entier positif ou négatif, ou l'intervention de la perception et de la représentation intuitive apparaît-elle ici comme nécessaire en un sens impliquant l'abstraction à partir de l'objet lui-même ?

Dans un intéressant passage de ses *Etapes*, L. Brunschvicg s'oppose à l'effort de Riquier pour justifier l'indépendance des fondements arithmétiques du nombre fractionnaire à l'égard des considérations physico-arithmétiques : « Pour nous, l'arithmétique des nombres entiers est déjà une discipline physico-arithmétique, et c'est ce qui en fait la valeur de science. Dès lors, si nous voulons conserver cette valeur, nous devons maintenir dans le domaine des fractions le même ordre de connexion que dans le domaine des nombres entiers, et concevoir qu'aux transformations mentales effectuées sur les expressions fractionnaires correspondent les transformations effectuées sur les choses elles-même »[1]. Il va de soi que si l'on entend par « physico-arithmétiques » les opérations susceptibles d' « effectuer des transformations sur les choses elles-mêmes », nous nous rallions à la double thèse de Brunschvicg d'une continuité entre le nombre entier et le nombre fractionnaire et de la nature opératoire de ces sortes de nombres. Mais il ne faudrait conclure de là, ni que les nombres fractionnaires soient abstraits des objets physiques — puisqu'ils consistent en actions ou opérations exercées sur ces objets, et sont donc extraits du mécanisme de l'action elle-même — ni que l'expérience physique soit de même nature que l'opération mathématique. Si insensibles que demeurent les transitions entre les deux sortes de connaissances, l'expérience physique débute lorsque, en plus des opérations tirées de la coordination générale des actions, intervient une abstraction à partir de l'objet lui-même : la connaissance physique suppose en effet un ensemble d'actions spéciales, ne se bornant plus à réunir ou à séparer, à faire correspondre par associations ou à diviser, etc., c'est-à-dire à utiliser les aspects les plus généraux et la coordination même des actions, mais portant sur des qualités parti-

1. L. BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, 2e éd., p. 492.

culières (vitesse, temps, force, etc.) qui différencient les objets comme tels. De ce point de vue, il est évident que le nombre fractionnaire demeure, comme le nombre entier, relatif à la coordination opératoire elle-même et ne fait point intervenir ces actions spéciales.

Il n'en demeure pas moins que, dans le cas des nombres fractionnaires comme dans celui des entiers positifs et négatifs, la prise de conscience qui a conditionné l'évolution historique de la notion s'est attachée d'abord aux représentations perceptives ou imagées avant de dégager l'élément proprement actif ou opératoire qui constitue le vrai moteur de cette généralisation du nombre. C'est pourquoi on a attribué si souvent l'origine des nombres fractionnaires à l'expérience physique du fractionnement, d'une part (opposée à l'action même de partager), ou à des considérations métriques, d'autre part : d'où l'hypothèse que le nombre fractionnaire est dû à des préoccupations spatiales plus que numériques.

L'argument le plus fréquemment employé, en faveur de l'origine spatiale des fractions, est que l'unité numérique est indivisible, seules les unités métriques étant divisibles en tant que la mesure s'applique au continu spatial et à celui des objets physiques. Or, cette question de la divisibilité de l'unité soulève précisément un problème génétique intéressant les rapports de la mesure spatiale et du nombre et dominant, par conséquent, la question de l'origine du nombre fractionnaire. Il se trouve, en effet, comme nous y reviendrons au chap. II, que la mesure elle-même présente un mode de formation exactement comparable à celui du nombre, ce parallélisme constituant d'ailleurs à lui seul un argument de poids en faveur de l'interprétation défendue au § 6. Chacun accordera que la constitution de l'unité métrique résulte d'une synthèse opératoire entre la partition et le déplacement : mesurer un tout au moyen de l'une de ses parties consiste à déplacer successivement sur les autres, la partie choisie comme unité, de manière à assurer une suite d'égalisations par congruence, et à réduire ainsi le tout mesuré à un multiple de l'unité itérée. Or, on aperçoit immédiatement que la partition représente, sur le terrain des quantités continues, l'équivalent de ce qu'est l'addition des éléments dans le domaine des classes emboîtées et que le déplacement successif équivaut de son côté à ce qu'est la sériation dans le domaine des relations asymétriques. En effet, de même que l'on peut réunir de façon contiguë et dichotomique des objets discontinus en classes, et ces classes élémentaires en classes d'ordre supérieur, etc., selon la structure des « groupements » qualitatifs (ou « intensifs ») décrits aux § 3 et 6, de même on peut additionner les uns aux autres les éléments finis d'un continu, obtenus par simple partition (les segments d'une droite, p. ex.), et constituer des couples contigus s'emboîtant qualitativement selon la même structure

$$(A + A' = B ; B + B' = C ; \text{etc.}).$$

Qu'il s'agisse d'emboîtements de classes élémentaires en classes de rang progressif ou de réunion de parties contiguës en totalités d'ordre croissant, ces deux sortes d'opérations sont semblables et apparaissent au même niveau génétique chez l'enfant. La seule différence est que le produit de la première de ces deux opérations est une classe d'éléments discontinus et que le produit de la seconde est un objet d'un seul tenant, la ressemblance qui constitue le principe de formation des classes étant alors remplacée par le voisinage : on peut donc appeler « logique » le premier ensemble d'opérations, qui prennent l'objet comme point de départ et aboutissent à la classe, et « infralogique » le second type, qui aboutit à la construction de l'objet comme point d'arrivée et procède de ses éléments ou parties. De même, la sériation des relations asymétriques constitue un « groupement » d'opérations logiques, qui conserve l'ordre (direct ou inverse) entre les éléments sériés, tandis que le déplacement apparaît génétiquement comme étant d'abord (c'est-à-dire avant toute métrique) un changement d'ordre ou de placement, c'est-à-dire comme une opération infralogique constitutive d'un nouvel ordre. Envisagé sous cet aspect qualitatif, le système des déplacements tel que le construit l'enfant non encore capable de mesure, constitue donc lui aussi d'abord un simple groupement qualitatif. Or, en utilisant simultanément la partition et le déplacement, le sujet parviendra à égaliser (par congruences concrètes) une partie donnée avec les autres parties d'un même tout et à réduire ainsi celui-ci à un multiple de l'unité choisie exactement comme il parvient au nombre par fusion de l'emboîtement des classes avec la sériation des relations asymétriques : la mesure naît donc génétiquement de la même manière que le nombre, et les deux constructions sont semblables en tout sauf que l'une est de caractère logico-arithmétique et l'autre infralogique.

Que deviennent alors les questions de la divisibilité de l'unité et de l'origine des nombres fractionnaires ? L'analyse génétique fournit à cet égard trois sortes de résultats. En premier lieu, il n'est pas certain que la notion de fraction soit découverte sur le terrain infralogique des objets continus avant de l'être sur celui des ensembles discontinus de caractère logico-arithmétique, ces deux sortes de fractions se construisant sans doute simultanément. En effet, au niveau des opérations concrètes, l'unité reste relative à la réalité dénombrée ou mesurée, de telle sorte qu'en présence de quelques billes ou jetons, l'unité peut être conçue aussi bien comme étant la collection elle-même (le « tas », etc.) que l'objet individuel : l'enfant concevra donc aussi facilement les fractions simples de la moitié (1/2), du quart ou même du tiers s'il décide de répartir la collection en deux moitiés ou quatre quarts, etc., que s'il s'agit des deux moitiés ou des quatre quarts d'un gâteau. Et s'il parvient de lui-même facilement à comprendre ces fractions dans les deux cas, à un certain niveau

de développement, les difficultés seront les mêmes aux niveaux antérieurs et tiendront (dans les deux cas également) à une incompréhension des relations entre la partie fractionnée et les autres, ainsi qu'entre elle et le tout : « la moitié de la moitié » donnera p. ex. lieu aux mêmes tâtonnements initiaux dans le cas du gâteau que dans celui de la collection à répartir, faute d'un schéma d'emboîtement et de comparaisons entre les parties elles-mêmes.

En second lieu, même dans les cas où la notion de fraction apparaît sur le terrain des objets continus et de l'espace avant de s'appliquer aux collections numériques, l'isomorphisme étroit entre les opérations infralogiques et les opérations logico-arithmétiques, donc entre la formation de la mesure et celle du nombre, supprime toute opposition épistémologique entre la fraction métrique et la fraction numérique : l'une et l'autre supposent le même passage entre l'action, accompagnée d'intuition perceptive, et l'opération réversible concrète et, dans l'un et l'autre cas, le rapport exprimé par le fractionnement n'est qu'une généralisation des opérations formatrices du nombre lui-même (qu'il se présente sous la forme d'unités métriques ou d'unités simples).

En troisième lieu, toute différence entre les opérations infralogiques et logico-arithmétiques disparaît sur le plan formel, les deux sortes d'opérations étant alors traduites sous forme de propositions et les rapports de partition, de déplacement et de mesure se réduisant par le fait même à des rapports logiques ou logico-arithmétiques comme les autres. De fait, l'homogénéité complète du nombre fractionnaire et du nombre entier a été mise en évidence, sur le terrain formel, par la théorie des couples développée par Weierstrass et étendue aux nombres complexes eux-mêmes par Hankel : tout nombre étant, en ce schéma, représentable par un couple il n'existe plus de distinction entre les nombres fractionnaires et les autres catégories de nombres.

La découverte du nombre irrationnel a soulevé sous une nouvelle forme ce problème de l'opposition apparente et de l'isomorphisme réel entre les opérations arithmétiques et les opérations géométriques. Que la découverte de ces nombres ait été due au développement, en général attribué à Théodore de Cyrène, des racines d'entiers qui ne sont pas des puissances parfaites, ou à la constatation de l'incommensurabilité du rapport du côté et de la diagonale des carrés (en un carré de côté 1, p. ex., la diagonale est, en vertu du théorème de Pythagore, de $\sqrt{2}$ qui est incommensurable), elle a été, comme chacun le sait, au point de départ de la crise du pythagorisme. Le divorce a dû être proclamé entre

les rapports numériques simples et les relations spatiales élémentaires : la continuité de celles-ci semblait demeurer irréductible aux nombres entiers ainsi qu'aux fractions « rationnelles », ce vocable indiquant assez le jugement de valeur au nom duquel seuls certains rapports étaient censés épuiser la nature du nombre. La crise n'a pris fin, en fait, qu'avec l'analyse infinitésimale, d'abord, et surtout avec la double construction, géométrique et arithmétique, du continu. D'une part, Weierstrass a fourni simultanément l'expression du continu géométrique et la démonstration que les nombres rationnels ne peuvent correspondre terme à terme à l'ensemble des nombres réels, les premiers étant insuffisants pour combler l'intervalle entre deux nombres quelconques. D'autre part, Dedekind et Cantor ont analysé le continu géométrique par la méthode des coupures et des emboîtements convergents, tandis qu'ils définissaient parallèlement les nombres irrationnels, le premier par des coupures analogues et le second par les séries mêmes dont ils sont les limites. On sait d'ailleurs que les nombres irrationnels sont de multiples natures : les uns sont « algébriques », tandis que d'autres sont « transcendants », comme les nombres π et *e*, à signification géométrique bien connue et qui ne sont les racines d'aucune équation algébrique finie (rentrant ainsi dans les cas prévus par Abel et Galois où les racines d'une équation entière ne résultent pas de simples combinaisons algébriques). On s'accorde par conséquent à conclure que même si les nombres irrationnels ont pu être suggérés par des considérations géométriques et en particulier si le continu arithmétique, rendu possible grâce à eux, a été construit pour rejoindre le continu spatial, les nombres irrationnels relèvent d'une construction autonome. Ils constituent donc le point de jonction entre les opérations qui, génétiquement, sont issues des deux domaines parallèles de l'infralogique et du logico-arithmétique, et attestent jusque dans cette fonction même l'isomorphisme des constructions numériques et des constructions spatiales.

Bref, comme les nombres fractionnaires, les nombres irrationnels vérifient en réalité à la fois l'indépendance et le parallélisme entre les opérations arithmétiques et géométriques, bien que ce parallélisme ait d'abord paru en défaut dans le cas des seconds, tandis qu'il a d'emblée éclaté aux yeux dans le cas des premiers (et bien que cette indépendance ait pu être contestée dans les deux cas). Du point de vue génétique, ce même équilibre atteint par deux systèmes opératoires, indépendamment des circonstances ayant provoqué les découvertes ou motivé les prises

de conscience montre assez combien la coordination opératoire se libère des objets auxquels elle s'applique au point de départ, parce que résultant des actions du sujet par opposition aux données perceptives ou aux intuitions imagées.

§ 10. LES NOMBRES COMPLEXES, LES QUATERNIONS ET LES OPÉRATEURS. — Avec la construction des nombres imaginaires ou complexes, contrairement au cas des nombres négatifs, fractionnaires et irrationnels, déjà connus de l'antiquité, nous abordons une généralisation du nombre qui a d'emblée pris une forme opératoire, sans intervention initiale des contingences sensibles ou même géométriques. Le problème est alors de préciser le sens de ces opérations pures : sont-elles demeurées à l'état de simple symbolisme formel, ou bien ont-elles rejoint, mais cette fois après coup et de façon par conséquent imprévisible au départ, les considérations géométriques ou même physiques ?

Application de l'opération de l'extraction de la racine carrée aux nombres négatifs (cette généralisation étant imposée entre autres par la solution des équations du deuxième degré), la notion du nombre imaginaire $\sqrt{-1}$ fournit le modèle d'une « expérience mentale » qui n'aurait point d'objet, puisqu'il n'existe pas de carré négatif ou qu'une quantité négative est un objet exclu ou soustrait du domaine d'expérience considéré ! L'expérience mentale, invoquée par les empiristes comme une preuve de la soumission de l'esprit au réel, est donc bien ici ce que nous avons vu qu'elle était déjà dans la construction du nombre entier : la reproduction mentale d'une action ou d'une opération, indépendantes des caractères de l'objet sur lequel elles portent, et non pas la reproduction d'une réalité indépendante de l'acte, puisque précisément le nombre imaginaire a commencé par ne constituer que le schème d'une opération sans objet. Certes, ce schème constitue le prolongement, dans le virtuel, d'opérations réelles en leur source, mais comment une action, réelle en son point de départ, telle que l'extraction de la racine (cas particulier de la division), pourrait-elle se prolonger sans objet d'application, si, dès ce départ, l'opération ne consistait en quelque chose de surajouté à l'objet et non point en quelque chose d'extrait ou d'abstrait des objets ? Donc si le schème opératoire ne consistait en un schème d'assimilation (celle-ci étant par définition une adjonction à l'objet) et non pas en une simple accommodation ? Lorsque la physique applique à une autre échelle (plus grande, ou plus petite), les notions dues à une abstraction des qualités observées à notre échelle, cette extrapolation illégitime

conduit à toutes sortes de difficultés (temps absolu inapplicable aux grandes vitesses, notion de corpuscules permanentes inapplicable à l'échelle micro-physique, etc.) : c'est précisément qu'il s'agit alors d'abstractions à partir de l'objet inutilisables en dehors de leur contexte d'observation. Si l'extraction de la racine carrée était due à une abstraction du même genre que celle d'une qualité physique tirée de l'expérience, son emploi deviendrait simplement absurde, passées les limites du réel. A titre de généralisation d'une action qui ajoute ses effets à l'objet et qui peut, par conséquent, se passer de lui, le symbole $\sqrt{-1}$ est au contraire entièrement intelligible, au même titre que le symbole + 1. Tout « imaginaire » que soit le nombre $i = \sqrt{-1}$, qui ne fournit effectivement aucune solution réelle à titre de racine d'une équation, il signifie, en effet, que $i^2 = -1$. « Sans doute, il n'est pas contradictoire de faire reposer cette proposition sur une convention arbitraire. Mais, ce qui resterait à expliquer, comme le dit profondément L. Brunschvicg, c'est que la quantité – 1 issue du produit des deux symboles ($i \times i$) ait pu être identifiée avec la quantité – 1 qui pour nous est le résultat naturel et vrai d'une opération telle que 1 – 2, sans que cette identification ait compromis l'équilibre et l'homogénéité du système de la science » (*Etapes*, p. 543). Or, Weierstrass et Dedekind ont montré que l'existence des nombres complexes est nécessaire pour donner à l'algèbre toute son extension, tandis que Gauss les introduisait dans la théorie des nombres elle-même. On a ainsi constitué une algèbre des nombres complexes, de forme ($a + bi$) conservant les lois de commutativité et complétant nécessairement l'algèbre ordinaire.

Or, chose remarquable, cette opération sans objet qu'est, au point de départ, le nombre imaginaire, non seulement s'est donc incorporée de la façon la plus intime au système des opérations arithmétiques et algébriques portant sur les ensembles d'objets, mais encore a acquis une signification géométrique, intervenant donc au sein des opérations formatrices de l'objet lui-même puisque la structure de l'objet est d'abord spatiale. Par-delà la géométrie, il est même intervenu, grâce au calcul des vecteurs et des quaternions, jusque dans la construction des « opérateurs », dont l'emploi s'est généralisé ensuite et s'est révélé fondamental dans la physique moderne. On peut donc dire que l' « imaginaire » a rejoint le réel, comme si un système d'opérations effectuées sans objets avait constitué un schème opératoire susceptible de s'appliquer ultérieurement aux particularités des objets ignorées des opérations réelles initiales.

Le principe de la géométrie analytique consiste, chacun l'a appris sur les bancs de l'école, à exprimer par des nombres positifs les distances portées le long d'une droite fixe selon l'un des deux sens d'orientation et à exprimer par des nombres négatifs les distances portées en sens contraire. L'essentiel de la représentation géométrique du caractère positif ou négatif des nombres consiste donc à le traduire sous forme de *directions,* les nombres eux-mêmes, indépendamment de leurs signes, figurant des *longueurs.* Or, Wallis, à la fin du XVII^e^ siècle déjà, proposa de représenter les racines impossibles ou « feintes », comme on disait alors, d'une équation quadratique en allant *au-dehors* de la droite sur laquelle on aurait porté les valeurs de ces racines si elles avaient été réelles. Il s'ensuit que, pour deux axes rectangulaires, les quantités se succéderont au cours d'une rotation dans le sens positif (opposé à celui des aiguilles d'une montre) selon la série : + 1; $\sqrt{-1}$; – 1 ; – $\sqrt{-1}$. « Dans cette série, dit P. G. Tait[1] (un élève de Hamilton), chacun des termes se déduit du précédent par la multiplication de ce dernier par le facteur $\sqrt{-1}$. Nous sommes ainsi en droit de conclure que $\sqrt{-1}$ est un *opérateur,* dont l'application agit d'une manière analogue à celle d'une manivelle qui ferait tourner d'un angle de 90°, et dans le sens positif, toute ligne droite passant par l'origine et assujettie à se mouvoir dans le plan *xy* » (p. 2). On constate avec surprise que l'opération sans objet, en quoi consistait le symbole des racines imaginaires, devient, une fois représenté en termes de quantités situées « en dehors » d'une droite donnée, assimilable à l'action d'une manivelle qui ferait tourner cette droite ! Du point de vue génétique, l'opération initiale, vide de tout contenu, pourrait presque être comparée à ces ébauches embryonnaires qui aboutissent avant terme à la formation d'un organe, lequel n'entrera en fonctionnement que bien plus tard, au cours de la vie d'un être organisé.

Mais il y a plus. A la suite des travaux de Moivre, d'Argand, de Warren et de Servois, W. Hamilton est parvenu à généraliser l'usage géométrique de l'expression $\sqrt{-1}$. Tandis que ses prédécesseurs choisissent une direction particulière de l'espace pour représenter les quantités réelles et appellent imaginaires les directions orientées en dehors de la première, Hamilton parvient à rendre imaginaires « toutes les directions sans aucune exception » (Tait, *loc. cit.*, p. 7), ce qui revient à rendre géométriquement homogènes ces directions et permet de constituer une méthode de calcul indépendante des axes de coordonnées. Tel est le calcul des quaternions, qui revient à multiplier deux biradiales (ou rapports entre deux vecteurs ayant une origine commune), et porte ainsi sur un ensemble de quatre termes dont un réel et trois imaginaires ($Q = Q_0 + Q_1 i_1 + Q_2 i_2 + Q_3 i_3$). En effet, un vecteur étant le symbole représentant une droite d'une certaine longueur et d'une certaine

1. P. G. TAIT, *Traité élémentaire des quaternions*, trad. PLARR, Paris, Gauthier-Villars, 1882.

direction (ce qui impliquera donc trois nombres), l'un des deux vecteurs parallèles peut être considéré comme un multiple de l'autre par un facteur numérique (le rapport de leurs longueurs avec signe + ou – selon qu'ils sont de même sens ou non) s'ils ne sont pas parallèles, le multiplicateur nécessaire pour opérer le changement de l'un dans l'autre dépend alors de quatre nombres. Ce calcul des quaternions, suivi du calcul de l'extension de Grassmann, présente comme ce dernier le caractère remarquable qu'ils s'affranchissent de la règle de commutativité propre à la multiplication ordinaire (car l'addition sphérique n'étant pas commutative, la multiplication des biradiales ne peut l'être non plus). Ils constituent ainsi une algèbre nouvelle plus compliquée que celle des nombres complexes.

Or, tant cette circonstance de la non-commutativité de telles formes de calcul que le caractère d'opérateurs propre aux quaternions et à bien d'autres structures dont la construction a suivi la leur ont eu sur le développement de la physique une influence importante, puisque aujourd'hui les algèbres non commutatives sont employées en micro-physique et que les opérateurs et matrices jouent un rôle considérable dans l'expression des lois quantiques (voir chap. VII, § 4). La microphysique contemporaine a ainsi été conduite à puiser dans les structures opératoires construites depuis fort longtemps un ensemble de notions préparées par les mathématiciens, et dont la genèse, contemporaine de la théorie des groupes, a dû beaucoup aux algèbres généralisées sous l'influence des nombres complexes. Mais ce n'est naturellement pas seulement dans les opérateurs microphysiques que peut intervenir le nombre imaginaire : c'est en n'importe quelle transformation impliquant un jeu de vecteurs. P. ex. la description d'un courant alternatif par projection des phases successives requiert habituellement l'emploi des nombres complexes. D'une manière générale, ces derniers sont utilisés sitôt qu'il s'agit de marquer la liaison entre éléments dont l'un est censé demeurer à l'extérieur du système formé par les autres tout en agissant sur lui.

Cette destinée géométrique, puis proprement physique d'une opération primitivement sans objet mais acquérant dans la suite le sens d'un opérateur lié aux directions de l'espace et aux rotations, puis intervenant enfin au sein des opérateurs les plus essentiels employés par la physique contemporaine, éclaire de la façon la plus significative le rôle des opérations dans la construction du nombre en général. Contrairement au cas des nombres entiers positifs et des nombres fractionnaires, dans lequel l'action de réunir ou de diviser semble suggérée par la réalité sensible elle-même, qui imite sans cesse, par ses agrégats ou ses fractionne-

ments, l'opération humaine correspondante, le nombre imaginaire est né sans aucune suggestion due à l'expérience perceptive. Cependant, tandis que la succession des nombres entiers de plus en plus grands ou des fractions de plus en plus petites s'éloigne toujours davantage du réel immédiat dans les directions ∞ ou 0, ce qui ne les empêche d'ailleurs nullement de servir d'instruments d'adaptation à l'expérience physique elle-même, le nombre imaginaire a acquis ce rôle d'instrument adaptatif sans aucune connexion apparente avec les circonstances qui ont motivé sa construction. Quelle est donc la connexion véritable entre cette opération $\sqrt{-1}$ et le réel, dissimulée sous cette absence apparente de rapport ?

Il va de soi que l'opération de l'extraction de la racine carrée d'une unité négative serait incompréhensible à titre d'action isolée, puisqu'il s'agit en l'espèce d'une action impossible à exécuter matériellement : une telle opération n'a donc de signification qu'en fonction de la totalité des opérations numériques, ce qui revient à dire qu'elle tient à la coordination des actions entre elles et ne constitue pas une action isolable. Or, c'est précisément en cette coordination qu'est à chercher le secret de l'adaptation des opérations mathématiques au réel. Comment expliquer qu'une opération inventée en quelque sorte pour la symétrie (à la manière des fausses fenêtres ajoutées aux endroits où l'on en attend de vraies) rejoigne à un moment donné le calcul géométrique et même physique ? Si cette rencontre intervenue après coup devait être expliquée par le fait que la division, dont l'extraction de la racine carrée n'est qu'un cas particulier, est née de l'expérience physique, cela reviendrait à dire que l'adaptation acquise lors du partage d'un champ ou d'un gâteau s'est révélée assez précise pour que les règles tirées de cette action s'en soient trouvées préadaptées au calcul des vecteurs et des opérateurs, même dans les cas où il n'y a plus de trajectoires assignables ni d'objets permanents comme en microphysique. Au contraire, dire que la rencontre entre le réel et les nombres imaginaires, rencontre se produisant bien après la construction de ceux-ci, est de la même nature que la convergence immédiate des nombres entiers positifs avec les réalités élémentaires, parce que toutes deux tiennent à l'accord entre la coordination d'ensemble des opérations et les transformations physiques fondamentales, c'est simplement supposer que les structures de composition réversible atteintes par les groupements et les groupes d'opération expriment à la fois les lois les plus générales de la coordination des actions du sujet et les interactions les plus directes entre le

sujet et le réel. Tant cette coordination que ces interactions, tout en se différenciant au cours de l'expérience, sont alors à concevoir comme ne dérivant pas de l'expérience extérieure, parce qu'étant seules à la rendre possible, mais comme émanant des conditions mêmes de l'organisation psycho-biologique.

La réflexion sur les imaginaires conduit donc à une vérification privilégiée de l'interprétation opératoire du nombre, non seulement parce que ce type de nombres est lié à la coordination d'ensemble du système, mais encore parce qu'il aboutit à dégager la nature propre aux schèmes d'opérations éloignés de la réalité concrète : une nature d' « opérateurs ». A cet égard, on est nécessairement conduit à se demander à partir de quel moment les nombres constituent des opérateurs. Il est clair que ce n'est pas au-delà seulement d'une capacité à exprimer certaines transformations géométriques ou physiques, car le calcul des opérateurs et des matrices est d'un emploi dont la généralité dépasse la géométrie et surtout la physique. On peut même soutenir que si, techniquement, le terme d'opérateur doit être réservé aux systèmes d'opérations de degrés supérieurs, c'est-à-dire aux schèmes permettant d'opérer abstraitement sur un ensemble d'opérations subordonnées, en réalité le rôle d'opérateur peut être attribué aux opérations numériques les plus élémentaires. Plus précisément tout nombre peut être considéré soit comme le résultat statique d'une opération, soit comme l'opérateur lui-même en son dynamisme formateur : p. ex. dans l'expression $n + 1$ on peut déjà considérer n comme un nombre statiquement donné et $+ 1$ comme l'opérateur qui transforme n en son successeur. D'une manière générale il n'existe donc qu'une différence de degré ou de complexité entre les opérations élémentaires et les opérateurs, mais les premières sont devenues si automatiques qu'elles ont perdu leur apparence active. Ce n'est donc que dans le cas des opérateurs d'ordre supérieur, c'est-à-dire suffisamment abstraits pour que la différence du donné et de la transformation opératoire soit à chaque instant sensible, que cette notion centrale prend sa vraie signification. Mais, génétiquement, elle ne fait que de confirmer la nature essentiellement opératoire du nombre, nature qui se manifeste dès la fusion des emboîtements de classes et des suites de relations asymétriques qui, par leur synthèse, engendrent le nombre entier.

§ 11. L'INFINI ET LA NATURE OPÉRATOIRE DU NOMBRE. — Le problème de l'infini actuel est celui qui a toujours opposé de la manière la plus radicale les interprétations réalistes et les

interprétations opératoires du nombre. Ce n'est pas qu'il soit contradictoire de concevoir un réalisme du fini, comme on l'a vu de Pythagore à Renouvier ; mais, de vouloir situer un infini actuel dans le monde, soit du réel soit des Idées, à la manière dont le réalisme conçoit les nombres finis, a soulevé une série de difficultés toujours pareilles, toutes les fois que le problème s'est posé au cours de l'histoire. Or, elles n'ont pu être évitées que par un appel, implicite ou explicite, au dynamisme intellectuel des opérations, seul support légitime des diverses formes d'infini, parce que substituant à la réalisation actuelle la virtualité d'un déroulement illimité.

On sait assez de quelle manière l'utilisation des séries indéfiniment décroissantes par le calcul infinitésimal a soulevé le problème de l'infini, au cours du XVIIe et du XVIIIe siècles. Une série telle que 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... qui tend à égaler l'unité, parvient-elle jamais à cette égalité ... = 1, puisque, étant infinie, elle est proprement inépuisable ? En raisonnant sur le réel « opéré » et non pas sur les opérations, Zénon était fondé à déclarer que la flèche n'atteindrait jamais son but, car à vouloir découper effectivement une distance selon cette série il faudrait disposer de toute l'éternité. Mais le propre d'une opération intellectuelle, telle que la dimidiation, est de pouvoir prolonger les opérations réelles initiales par des opérations virtuelles, dont la validité tient à leur composition possible et ne tient qu'à elle : il est donc légitime de réunir en un seul acte total la composition de l'ensemble de ces opérations, répétées indéfiniment, et de conclure à l'égalité 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 1. Seulement où l'infiniment petit est-il alors à situer ? Peut-on assigner à la fraction x/n une certaine valeur statique telle qu'elle constitue le dernier élément avant 0, c'est-à-dire le plus petit de ceux qu'il faut ajouter à la série pour que celle-ci égale 1 ? Autrement dit, existe-t-il un infiniment petit actuel ? Il est clair qu'une telle hypothèse est contradictoire, dans la conception opératoire du nombre, car s'il s'agit de construire cet infiniment petit actuel au moyen d'une opération également actuelle, donc effectuée à titre d'opération distincte des précédentes, on ne parviendra jamais à l'atteindre, et s'il s'agit de se contenter d'une opération virtuelle, c'est-à-dire précisément de celles qu'il est légitime de réunir en un tout pour égaler la série à 1, l'infiniment petit demeure lui aussi virtuel : or cela signifie, à proprement parler, qu'il est illégitime d'extraire de la suite 1/2 + 1/4 + 1/8 + ... = 1 cette opération virtuelle, puisque sa validité ne tient qu'à la composition comme telle de la suite et qu'à vouloir actualiser l'un des éléments sériés on

s'oblige à en faire autant des autres, ce qui nous ramène à une suite sans fin. L'infiniment petit ne peut donc être isolé sous une forme actuelle qu'en s'appuyant sur une croyance réaliste ou extra-opératoire, astreinte par surcroît à compléter la réalité physique, toujours finie, par celle de nombres idéaux subsistant en eux-mêmes. L'arbitraire d'une telle hypothèse a d'abord conduit les esprits à justifier le calcul infinitésimal par l'argument pragmatiste de sa réussite, mais le besoin d'une telle justification révèle assurément un réalisme déçu, comparable à celui de d'Alembert à la recherche d'une réalité pouvant correspondre au nombre négatif. En fait, la notion de différentielle, en substituant au rapport des quantités finies Dx/Dy le rapport dx/dy ne fait jamais intervenir l'infiniment petit à titre de valeur statique ou actuelle, mais uniquement le rapport entre deux quantités décroissant indéfiniment. Il n'est donc qu'une manière d'éviter les impasses où s'engage le réalisme de l'infiniment petit : c'est de considérer avec Leibniz, magnifiquement interprété par L. Brunschvicg, l'infini comme l'expression du dynamisme même de la construction opératoire.

Le problème s'est retrouvé avec l'analyse des fonctions indéfiniment croissantes, c'est-à-dire sur le terrain de l'infiniment grand. Dans ses recherches sur la « théorie générale » des fonctions, qui s'opposent à la réduction de l'analyse au schème du nombre entier, Dubois-Reymond a cherché à dégager les conditions communes de convergence et de divergences de diverses opérations infinies. En étudiant les différentes rapidités d'accroissement, il aboutit ainsi à un « calcul infinitaire » définissant des séries de types croissants ou ordres progressifs d'infini. Mais ici à nouveau se pose le problème opératoire : l'échelle des fonctions atteint-elle un ou plusieurs infinis actuels, qui transcenderaient les opérations mêmes permettant de les atteindre, ou l'échelle ne porte-t-elle que sur les types d'opérations comme telles ?

Procédant précisément de l'opération à ses résultats, G. Cantor a fondé un calcul du « transfini » sur la considération des relations de correspondance entre ensembles. C'est ainsi que l'ensemble des nombres entiers correspond de façon bi-univoque à celui de leurs carrés, ou à l'ensemble des nombres pairs, etc. L'ensemble de tous ces ensembles sera donc la classe des ensembles dénombrables. Or, cette classe ne correspond pas à l'ensemble des nombres réels (rationnels et irrationnels), qui est donc d'une puissance supérieure, ou puissance du continu. Cela admis, la suite des nombres entiers est infinie, c'est-à-dire qu'il est impos-

sible de lui assigner une fin et absurde de chercher, à l'intérieur même de cet ensemble, un nombre infini actuel qui constituerait le dernier de la série. Par contre, on peut assigner à cette suite une limite qui sera par définition extérieure à la série et à partir de laquelle commencera une nouvelle suite : ce premier « ordinal transfini » ω sera donc le premier nombre qui suivra la série des nombres entiers sans lui appartenir. Grâce à la répétition même de ce procédé, on obtiendra alors les transfinis

$$\omega + 1 ; \omega + 2 \ldots ; \omega + n ; 2\omega + 1 ; 2\omega + 2 \ldots ; 3\omega \ldots ;$$
$$n\omega ; \omega^{\omega} ; \omega^{\omega^{\omega}} ; \text{etc.}$$

Ces ordinaux transfinis constituent ainsi des types d'ordre. Quant aux cardinaux transfinis, le premier en est la classe des ensembles dénombrables. Un autre cardinal transfini remarquable est la classe de toutes les classes que l'on peut extraire de $\aleph_0$ par combinaison de ses éléments, etc.

Mais le grand intérêt de cette réalisation de l'infini, laquelle transcende ainsi sans cesse les opérations constructives pour atteindre une suite d'infinis actuels emboîtés les uns dans les autres, est d'aboutir en fait à un affaiblissement du caractère spécifiquement numérique de la construction et de marquer un retour partiel aux composantes logiques du nombre. En effet, les cardinaux transfinis n'obéissent plus à la loi arithmétique d'itération mais aux règles de tautologie et d'absorption : $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ et $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Et cela se comprend de soi-même, puisque ces nombres ne sont plus à la fois cardinaux et ordinaux, comme les nombres finis, mais que la cardination y est dissociée de l'ordination : l'ensemble de tous les ensembles dénombrables est en réalité une classe logique formée de « toutes » les sous-classes dénombrables, donc une classe qualifiée née d'une simple réunion logique des sous-classes présentant la propriété commune d'être dénombrables. Il n'est donc pas un nombre engendré par une loi de formation analogue à celle qui permet de construire par exemple la suite des nombres entiers. En effet, la correspondance bi-univoque qui relie chaque élément individuel des sous-classes composantes à un élément déterminé de l'une des autres sous-classes (par exemple chaque entier a son carré, etc.) est une correspondance « réflective », c'est-à-dire qui permet d'égaler le tout à la partie (par exemple l'ensemble des nombres entiers à l'ensemble de leurs carrés, lesquels ne constituent cependant qu'une partie du premier ensemble) : or, cette correspondance n'aboutit pas à une équivalence additive entre le tout et la partie, mais bien à une équivalence multiplicative, compa-

rable à celles des classes multipliées entre elles selon le schéma logique d'un tableau à double entrée. Soit p. ex. les deux suites :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100...

Il va de soi que pour un nombre fini *n* d'éléments, la seconde suite ne peut être considérée comme une partie de la première, car les carrés dépassent la suite des entiers qui leur correspondent : ainsi parmi les dix premiers carrés, seuls les trois plus petits (1, 4 et 9) font partie des dix premiers nombres entiers, les autres carrés dépassant cet ensemble (1, ..., 10). Dire que l'ensemble des carrés est une partie de celui des nombres entiers, c'est donc se placer au point de vue de l'infini, car dans le fini, plus grand est le nombre *n* plus le carré n^2 débordera la suite 1, ..., *n*. Mais alors, en cette proposition que l'ensemble des carrés est à la fois une partie (un sous-ensemble) de celui des entiers, et une partie équivalente au tout, le sens des mots « équivalent « et « partie » est à préciser comme suit. En premier lieu, il ne s'agit plus d'une équivalence analogue à celle de deux ensembles finis présentant le même nombre d'éléments, puisqu'il ne peut plus intervenir de même « nombre » appartenant à la suite 1, ..., n : il s'agit de » tous « les entiers et de « tous » les carrés, c'est-à-dire de deux classes inépuisables, dénombrables mais jamais dénombrées : leur équivalence signifie donc simplement que ces deux classes se correspondent terme à terme parce que leurs éléments présentent la même qualité d'être « dénombrables », c'est-à-dire de constituer deux séries de forme 1, ..., *n* (chaque carré étant compté pour une unité) ; en second lieu, la relation de partie à tout entre la série des carrés et celle des nombres entiers signifie que la série des carrés 1^2, 2^2, ..., n^2 n'est pas seule à jouir de cette propriété et que bien d'autres séries sont aussi dénombrables sous une forme 1, ..., n. Il se trouve ainsi que la série des entiers figure deux fois dans le raisonnement, une fois comme étant l'une des séries ou sous-classes comparées aux autres (à celle des carrés, à celle des nombres pairs, etc., bref à toutes les sous-classes dénombrables) et l'autre fois comme exprimant le caractère commun à l'ensemble de toutes ces séries, c'est-à-dire le caractère de la classe totale de toutes ces sous-classes. Tant l'équivalence entre la partie et le tout que ce rapport même de partie et de tout sont donc de caractère multiplicatif (au sens de la multiplication logique) et sont par conséquent comparables aux correspondances et partitions intervenant dans le schéma multiplicatif des tables logiques à double entrée (p. ex. les classes formées respectivement par les pièces du squelette des Mammifères correspondent terme à terme aux classes formées respectivement par les pièces du squelette des Ruminants, etc., cette correspondance logique étant elle aussi « réflective » parce que multiplicative)[1]. Quant aux ordinaux transfinis, ce ne sont que des types « d'ordres », c'est-à-dire

1. Voir notre *Traité de logique*, § 21.

des systèmes multiplicatifs de relations asymétriques, comme les cardinaux transfinis sont des classes : d'où le fait qu'à un même cardinal transfini correspond une infinité d'ordinaux, car on peut ordonner d'une infinité de manières les éléments d'une même classe infinie.

Bref, les nombres transfinis de Cantor dissocient l'une de l'autre les deux structures fondamentales de la classe logique et de la relation asymétrique, qui fusionnent en un seul tout dans la construction des nombres entiers finis. C'est pourquoi, si la série des ordinaux finis correspond bi-uniquement à celle des cardinaux finis, tout nombre entier étant nécessairement à la fois cardinal et ordinal sur le terrain du fini, cette correspondance prend fin dans le domaine du transfini. Or, cette dissociation transfinie entre les deux aspects ordinal et cardinal du nombre entier, aboutissant à un retour aux schémas opératoires séparés de la relation asymétrique et de la classe logique, constitue la meilleure des confirmations de l'interprétation opératoire défendue au § 6 quant à la genèse du nombre entier fini. Il suffit, en effet, que l'on passe de la loi de formation des nombres finis constituant la série illimitée 1 ... *n*, à la considération transfinie de leur ensemble total, pour que la classe ainsi construite au moyen de « tous » ces nombres se dissocie *ipso facto* des relations asymétriques ayant servi à leur construction successive : l'itération de l'unité + 1 est donc bien un produit combiné de l'emboîtement des classes et de la sériation des relations asymétriques puisque, si l'une de ces deux composantes est séparée de l'autre, les cardinaux ne s'itèrent plus et cessent de correspondre bi-univoquement aux ordinaux.

§ 12. CONCLUSION : LE PROBLÈME ÉPISTÉMOLOGIQUE DU NOMBRE. — Des actions les plus élémentaires, permettant à l'enfant ou au primitif de dénombrer les petites collections, jusqu'aux généralisations négatives, complexes et transfinies du nombre, qui semblent ne plus présenter aucun rapport avec ces actions concrètes, on retrouve en fait un même mécanisme opératoire se développant selon sa logique interne de la façon la plus continue et la mieux équilibrée, malgré son apparence souvent irrégulière, due aux difficultés de la prise de conscience.

C'est que, dès les actions initiales, le rapport entre le sujet et les objets se trouve témoigner d'enchevêtrements bien plus compliqués que ne le supposent les interprétations empiristes, aprioristes ou conventionnalistes courantes. Repartons donc de la source pour la relier ensuite aux orientations observables dans l'équilibre mobile final.

L'action de nombrer ne saurait assurément être déterminée par les objets seuls, puisqu'elle les structure selon un schème opératoire, qui est assimilation des choses à un double acte de réunir et d'ordonner et qu'assimiler signifie ajouter des caractères nouveaux aux objets qui n'y étaient point compris avant l'action du sujet : c'est ainsi que la réunion élémentaire 1 + 1 = 2 ajoute à chacun des objets comptés comme unités 1, 1, cette propriété nouvelle de constituer un tout 2. Mais de telles actions émanent-elles du sujet seul ou supposent-elles une accommodation aux objets et quelle sorte d'accommodation ? C'est pour résoudre ce problème épistémologique des rapports entre la construction assimilatrice et l'expérience possible qu'il convenait de pousser à la fois l'analyse psychologique des racines et l'examen du déroulement historique des généralisations du nombre.

Du point de vue psychologique, deux questions bien différentes sont à distinguer, que l'on confond trop souvent : celle de savoir si l'expérience est nécessaire pour que s'organisent les actions ou opérations de classes, de sérier et de nombrer, et celle de déterminer quel est le rôle de l'objet dans cette expérience éventuelle.

Que l'expérience soit indispensable à l'enfant (et au primitif) pour découvrir les rapports arithmétiques élémentaires, c'est ce qu'il nous paraît conforme à toutes les données connues. Le fait que 2 + 2 aboutissent toujours à 4 (et jamais à 3 ou à 5) n'est pas évident pour un enfant, indépendamment de toute définition nominale et conventionnelle, avant qu'il ait compris que 4 - 2 = 2 et que 4/2 = 2, c'est-à-dire avant que ses actions se soient organisées en opérations réversibles. La découverte empirique que 10 cailloux, comptés dans un certain ordre, donnent encore 10, comptés dans un ordre différent, a stupéfié comme enfant un mathématicien de nos amis, bien connu pour ses travaux épistémologiques, et il fait même remonter à cette expérience précoce son intérêt pour le nombre. Or cette vérité de la similitude des divers ordres possibles dans la numérotation des éléments d'une collection ne devient, elle aussi, déductive qu'en fonction de la réversibilité (réversibilité de la sériation logique ou de l'ordination elle-même). Il existe donc une phase intuitive et préopératoire de la pensée, au cours de laquelle l'expérience est nécessaire à la découverte et à la vérification des vérités arithmétiques et une phase opératoire à partir de laquelle la déduction commence à se suffire à elle-même.

Mais que l'expérience soit psychologiquement indispensable à la construction du nombre ne prouve nullement que celui-ci

soit extrait des objets, sous une forme ou sous une autre, car autre chose est d'agir empiriquement et autre chose est d'abstraire un rapport des objets comme tels : le rapport établi entre ceux-ci peut leur avoir été ajouté par l'action, même si celle-ci débute par une phase de tâtonnement expérimental. En d'autres termes, un sujet agissant de façon empirique peut utiliser les objets à titre de simples supports ou d'occasions de l'action, mais expérimenter en réalité sur lui-même, c'est-à-dire sur la coordination de ses propres actions plus que sur les objets sur lesquels elles s'appuient.

Or, quel est le rôle des objets A, B, C, ..., J, lorsque le sujet, après avoir dénombré A, B, ..., J = 10, découvre que, dans un autre ordre tel que J, I, H, G, ..., A, la suite est encore égale à 10 ? Il est d'abord évident que ce rôle serait tout différent s'il s'agissait de sérier dix couleurs ou dix poids, car, en ce cas, ce seraient les qualités mêmes des objets qui interviendraient dans la sériation. Pour ce qui est du simple dénombrement, l'objet est au contraire absolument quelconque en ce sens que ses qualités particulières n'entrent pas en jeu puisque le seul ordre entrant en cause est l'ordre même d'énumération. Il est vrai que, s'il s'agit de solides discrets, le dénombrement est plus facile, mais on pourrait concevoir dix éléments découpés dans un solide continu ou même dans un liquide ou un gaz : le repérage serait alors plus difficile et l'expérience n'en viendrait à bout que bien plus tardivement, mais l'action de dénombrer resterait possible, au moins à l'intérieur de certains champs perceptifs momentanés. Bref, l'objet ne joue en ce genre d'expériences que le rôle d'un support de l'action. Il n'est même à proprement parler qu'un indicateur : alors que l'expérience pourrait être faite sur des numéros, c'est-à-dire sur de purs signes, ou sur des symboles d'objets, elle est exécutée sur des objets réels, mais dont la valeur pour le sujet est celle d'indices perceptifs de ses propres actions de compter et non pas d'éléments du nombre lui-même.

Quoique expérimental en sa source intuitive, le nombre est donc ajouté aux objets et non point extrait d'eux. Il est tout entier dans le schème d'assimilation opératoire. Quant à l'accommodation, elle n'en est pas moins réelle, mais elle n'est pas spécifique par rapport aux qualités distinctives des objets considérés : elle revient simplement à ceci que pour toute collection d'objets discrets ou d'objets quelconques séparés artificiellement (en acte ou en pensée), l'action empirique ou l'opération réversible aboutira à des combinaisons s'accordant avec les objets

eux-mêmes. C'est ainsi que, dans l'exemple discuté, dix objets comptés dans un certain ordre se retrouveront dix dans un ordre différent, les objets comme tels n'infirmant donc pas la coordination des actions. Il y a donc équilibre permanent entre l'assimilation des objets au schème opératoire et l'accommodation de celui-ci à des objets quelconques, mais rien, dans la structure définitive du schème considéré n'a été « abstrait » de l'objet ; en effet, pour pouvoir abstraire le nombre des collections d'objets il faudrait savoir les classer et les ordonner, ce qui constitue des actions du sujet exercées sur ces collections : or, le schème du nombre se réduit précisément à ces seules actions de classes et d'ordonner, simplement groupées de façon nouvelle.

Quant à l' « expérience intérieure » nous avons vu (§ 2) que le nombre ne saurait non plus en être tiré, à la manière dont Maine de Biran croyait pouvoir extraire une causalité toute faite de la lecture des états de conscience liés à l'action propre. Car, ni la sériation, ni le classement ni le nombre, ne sont donnés sans plus dans la conscience interne : ils résultent de la coordination des actions successives, c'est-à-dire de leur groupement, et de tels groupements s'appliquent aux données de l'expérience intérieure comme à celles de l'expérience externe, sans résulter davantage des premières que ces secondes, puisqu'il s'agit d'actions exercées sur elles et non pas d'intuitions premières. Bref, que l'on remplace la coordination des actions par celle des pensées, cette coordination est toujours une activité et ce qui importe n'est pas le retentissement de celle-ci sur la conscience : c'est le caractère actif de cette coordination, condition préalable de toute expérience et source de transformations enrichissant les objets de l'expérience interne comme de la réalité extérieure.

C'est cette nature particulière des actions ou opérations intervenant en mathématique (empiriques d'abord puis déductives mais dans les deux cas indépendantes des objets) qui explique le fait que de tels actes et leurs compositions peuvent être répétés et généralisés indéfiniment. Psychologiquement déjà, nous constatons que, sitôt dépassé le niveau des opérations concrètes et dès que les mécanismes formels prolongent l'action possible, la série des nombres accessibles à l'enfant de 11-12 ans déborde toute perception et même toute représentation particulières pour s'engager dans la direction de la construction pure. Dire, p. ex. que « l'on arrivera jamais au bout des nombres », selon l'expression de l'un de nos sujets de 11 ans, c'est découvrir le pouvoir indéfini d'itération de l'opération + 1, comparé à

un schème fini et représentable tel que celui d'un nombre donné, susceptible de réunir effectivement les termes d'une collection concrète d'objets. Autrement dit, le nombre consistant exclusivement en un système d'actions ou opérations exercées sur les objets, mais sans dépendre des propriétés particulières de ceux-ci, la construction du nombre peut se continuer de façon indéfinie au-delà des limites de la perception et même de la représentation imagée des collections formées par ces objets, donc bien au-delà des frontières de l'objet. L'emploi des diverses formes d'infini, indispensables au théoricien du nombre comme à l'analyste et au géomètre, n'est pas autre chose que le témoignage quotidien de cet affranchissement des êtres numériques à l'égard de l'objet, puisque l'objet d'expérience est nécessairement fini.

Quant aux généralisations du nombre dans la direction du négatif, de l'imaginaire, etc., nous avons vu combien plus paradoxale encore est leur nature psychologique d'opérations exercées avec une précision toujours mieux différenciée sur les objets, mais sans que l'on conçoive comment ils eussent pu jamais être extraits de ceux-ci. Or, les solutions habituelles de la question de leur adéquation à la réalité physique expliquent difficilement cette double nature. Les solutions aprioristes, selon lesquelles le nombre est une structure d'origine intérieure à l'esprit (ou un langage conventionnel élaboré par lui) et imposée à la réalité extérieure, n'expliquent pas pourquoi le nombre converge avec cette réalité. Quant aux solutions empiriques, qui prétendent malgré tout tirer directement le nombre de l'expérience, elles expliquent ni sa fécondité, ni sa nécessité. Dire que le nombre dérive des opérations ou des actions exercées par le sujet sur les objets sans émaner de ceux-ci, c'est au contraire permettre de concevoir les différents types de nombre comme le résultat de coordinations progressives en évitant de se donner d'avance le nombre tout fait dans l'esprit ou dans les choses. Bien que la source des coordinations soit à chercher dans l'activité du sujet, les diverses formes de nombre ne sont pas préformées en ce dernier, mais constituent les états finaux et nécessaires d'équilibre de coordinations débutant dès l'organisation des schèmes sensori-moteurs et perceptifs. Or, par-delà le fonctionnement de ces schèmes psychologiques initiaux, de telles coordinations remontent jusqu'aux coordinations biologiques élémentaires. En un tel cas, l'adéquation du nombre au réel ne serait à expliquer ni par la pression extérieure de la réalité sur un esprit achevé, ni par une préformation intérieure à ce même esprit considéré en « acte » ou en « puissance », mais précisément par le fait que

les mécanismes constructifs présidant au développement de l'esprit plongent leurs racines dans l'organisation vitale et par conséquent dans la réalité physique elle-même. C'est donc seulement par l'intermédiaire de l'organisme et de ses mécanismes intimes, et non pas sous l'influence des pressions directes du milieu extérieur, que se comprend l'accord des opérations logico-arithmétiques et des choses. Autrement dit, c'est dans les coordinations psychobiologiques rendant l'action possible, par opposition à ce que les philosophes considèrent comme les structures *a priori* de la pensée, qu'il faudrait chercher le secret de l'union des constructions intellectuelles fondamentales (groupements logiques et groupes arithmétiques) avec le réel, et non pas dans l'expérience extérieure ni même intérieure actuelle[1].

Seulement, les deux difficultés principales d'une telle solution consistent à expliquer comment la construction graduelle due à l'activité du sujet, aboutit à des organisations finales nécessaires sans que celles-ci soient préformées dans l'esprit ou dans l'organisme, et comment cette même construction se différencie en structures multiples, en quelque sorte préadaptées à l'objet tout en émanant de coordinations initiales très simples et peu nombreuses. On ne saurait à cet égard désolidariser les formes supérieures du nombre de ses formes élémentaires. Kronecker attribuait à Dieu la création des entiers positifs, tout le reste étant dû à la fabrication humaine. C'est ce que le langage traditionnel exprime également en appelant nombres « naturels » la suite des entiers positifs, comme si les autres nombres étaient artificiels. En réalité il n'existe aucune opposition entre les procédés opératoires engendrant le nombre entier et les opérations généralisées engendrant les structures numériques ultérieures. Au contraire, seules ces formes généralisées du nombre rendent explicites les particularités mentales demeu-

1. Notons d'emblée qu'une telle solution n'a rien de « réaliste » ni surtout de matérialiste, au sens dogmatique du terme car, dans le même temps que la psychologie s'efforce de réduire le nombre aux coordinations de l'intelligence, et que la biologie cherche à réduire celles-ci aux coordinations organiques ainsi que l'organisation vitale elle-même aux lois physicochimiques, la mathématique ramène les réalités physiques aux cadres de l'esprit. II y a donc toujours cercle entre le sujet et l'objet, mais, dans le cas des mathématiques, ce cercle, au lieu de n'intéresser que l'expérience extérieure elle-même, se dilate jusqu'à embrasser celui des sciences en leur ensemble. Ce cercle des sciences étant l'objet d'études de cet ouvrage entier, ce n'est pas le lieu de le développer ici. Il convenait seulement de marquer que l'union de l'esprit avec le réel assuré per l'intermédiaire des coordinations psycho biologiques ne décrit que la moitié de ce cercle et que l'autre moitié du chemin consiste à relier inversement le réel à l'esprit par l'intermédiaire de la physique et des mathématiques.

rant implicites dans la construction des nombres initiaux : tant ceux-ci que les nombres supérieurs dérivent d'un seul et même mécanisme opératoire, dont les manifestations successives ne sont que les phases d'une coordination graduelle. D'où les deux problèmes énoncés à l'instant : pourquoi cette coordination aboutit-elle à des structures nécessaires et comment expliquer sa fécondité, si ses racines ne plongent que dans les coordinations psychobiologiques élémentaires ? Autrement dit encore, comment concilier la nécessité finale des constructions numériques avec l'absence de préformation, et leur multiplicité à la fois créatrice et préadaptative avec la pauvreté de leurs sources

La question de la nécessité finale des structures numériques est la plus simple résoudre des deux. A la nécessité donnée d'avance sous forme de structures *a priori*, le point de vue génétique permet, en effet, d'opposer la nécessité terminale caractéristique des états d'équilibre opératoire, mobile et réversible, vers lesquels tend le développement des actions considérées, et cela sans que la forme de cet équilibre intervienne dès le départ. A cet égard, l'interprétation selon laquelle le nombre entier est le produit d'une fusion entre les opérations que la logique qualitative utilise à l'état de groupements isolés (emboîtement des classes et sériation des relations asymétriques) permet à la fois de concevoir le caractère de nécessité rationnelle, revêtu par la synthèse finale, et la continuité reliant cette synthèse terminale aux coordinations les plus élémentaires et les moins formelles. En effet, d'une part les groupements logiques ne sont que le résultat intériorisé et équilibré des coordinations entre actions, coordinations qui, dès leurs formes les plus humbles, présentent des mises en relation entre mouvements successifs, des retours et des détours qui conduiront à la composition, à la réversibilité et à l'associativité opératoires. La logique est donc en germe dès les schèmes de l'activité sensorimotrice et perceptive tout en ne constituant que la forme finale d'équilibre de ces coordinations de départ[1]. D'autre part, dès les formes les plus basses d'activité mentale, on observe une sorte de dénombrement intuitif et perceptif qui annonce les coordinations ultérieures entre le classement et la sériation et résulte déjà de coordinations élémentaires entre de simples schèmes classificateurs et ordinateurs de caractère moteur. C'est ainsi que Otto Köhler a pu démontrer la discrimination d'ensembles de 2 à 6 objets chez les oiseaux et que l'on peut dresser des poules

1. Voir notre ouvrage sur *L a psychologie de l'intelligence,* Colin, 1946.

à piquer chaque second grain le long d'une rangée d'une dizaine d'éléments. Ces nombres intuitifs ou figuraux sont ceux que l'on retrouve chez le petit enfant avant la construction de la suite opératoire des entiers. Ici encore, par conséquent, il est facile d'expliquer le passage entre les coordinations élémentaires non rationnelles et les formes nécessaires finales, par un processus d'équilibration progressive, qui situe la nécessité au terme, sans qu'il soit besoin d'invoquer une préformation structurale : l'articulation progressive des configurations actives et intuitives et la réversibilité qui en résulte en fin de compte suffisent à cette explication sans intervention de l'*a priori*.

Quant à la fécondité croissante de la notion de nombre, comparée à la pauvreté de ses sources, le caractère frappant de cette évolution est que, procédant des actions de réunir et d'ordonner simultanément, qu'exerce directement le sujet sur les objets, le nombre s'oriente à la fois en deux directions divergentes et complémentaires : d'une part, il s'éloigne toujours davantage de l'action expérimentale du sujet pour s'engager en des compositions opératoires sans rapports avec cette action immédiate (l'infini, l'imaginaire, etc.) ; mais, d'autre part, il ne s'éloigne de l'apparence empirique des objets que pour mieux atteindre, en fin de compte, le mécanisme de leurs transformations intimes (p. ex. l'application de l'infini au calcul des variations continues ou de l'imaginaire à celui des vecteurs).

Or, cette double évolution, par intériorisation des actions du sujet, d'une part, et par pénétration au sein des modifications possibles de l'objet, d'autre part, ne s'est produite de façon régulière ni sous l'un ni sous l'autre de ces deux aspects. Pour ce qui est de l'intériorisation des opérations, ce n'est pas par le moyen d'une déduction simple et rectiligne que les progrès ont été accomplis dans la construction et la théorie des nombres : c'est bien souvent à coups de découvertes fortuites et par tâtonnements, comme si un système de lois objectives s'imposait peu à peu à l'esprit, mais découvertes du dedans et non pas à titre de réalités extérieures. Bien des mystères échappent d'ailleurs encore à cette investigation à la fois tâtonnante et constructive, tels que la loi de succession des nombres premiers. — Pour ce qui est de l'adaptation du nombre à l'objet, d'autre part, nous avons vu combien peu elle ressemble à une soumission graduelle de l'esprit à l'expérience physique, puisqu'au contraire il s'agit constamment de la rencontre après coup entre des schèmes préparés longtemps d'avance et les situations permettant leur utilisation imprévue. Si donc la construction du nombre marque

un double affranchissement par rapport à l'action directe du sujet et par rapport aux structures immédiates des objets, et un double développement dans la direction des coordinations internes de l'un et des transformations intimes des autres, cette double évolution se révèle tout à la fois tâtonnante dans le premier cas, et anticipatrice dans le second, c'est-à-dire que, dans les deux cas, le sujet prend peu à peu conscience d'un élément, soit de coordination propre, soit de convergence avec le réel, qui dépasse son activité constructive actuelle parce que la conditionnant.

Autrement dit, ce double affranchissement s'effectue au profit d'un sujet universalisé comme d'un objet généralisé : le miracle du nombre est en effet, que, s'éloignant ainsi toujours davantage de l'action élémentaire qui l'engendre, il ne s'engage pas dans le monde de chimères comme cela a été le cas de toutes les notions physiques sorties de leur contexte initial d'action expérimentale et généralisées sans restriction, mais qu'il s'accorde toujours plus avec les opérations de l'esprit, au fur et à mesure de leur développement, et s'adapte toujours mieux à l'univers au fur et à mesure de ses changements de visage apparent. Or, l'intérêt épistémologique exceptionnel de cet accord interne et de cette adéquation extérieure tient à ce qu'ils semblent néanmoins procéder l'un et l'autre intégralement, malgré les heurts et les à-coups du déroulement psychologique et historique, d'une interaction donnée tout entière dans l'action élémentaire du sujet sur les objets.

Comment donc expliquer que de simples actions telles que de sérier et de classer à la fois puissent aboutir à ce prodige de construction cohérente et d'adéquation précise sans leur attribuer d'avance, par un préformisme analogue à celui de l'embryologie des « ovistes » et des « spermatistes », tout ce que le développement ultérieur du monde révèle peu à peu, ou sans attribuer ce développement à des facteurs extérieurs par rapport à ces actions initiales ?

La clef du mystère nous paraît tenir en premier lieu au fait que le nombre ne procède pas d'actions particulières, c'est-à-dire d'un type spécial d'actions parmi d'autres, mais qu'il exprime, sous une certaine forme à la fois mentalisée (c'est-à-dire intériorisée) et parvenue à l'état d'équilibre mobile, la coordination même des actions. Réunir et ordonner ne sont pas, en effet, des actions particulières comparables à celles de peser, de pousser, de soulever, etc. : ce sont des actions qui se coordonnent elles-mêmes entre elles parce que traduisant dès le départ une exigence de

coordination, c'est-à-dire parce que résultant de la coordination de toutes les autres actions. Que ces coordinations aient d'abord besoin d'objets pour s'exercer et s'appliquer ne suppose donc nullement qu'elles extraient leur structure de l'objet comme tel : elles construisent au contraire ces structures au fur et à mesure de leur fonctionnement, à commencer par les rythmes organiques et psychobiologiques, à continuer par les régulations perceptives puis intuitives et à terminer par les opérations logico-arithmétiques, terme concret final de ce processus d'équilibration (et point de départ des formalisations ultérieures), mais aboutissement d'un processus de coordination qui débute avec l'organisation et l'assimilation psychobiologique elles-mêmes. Le nombre est donc, avec les opérations logiques qu'il suppose et dont il réalise la synthèse, la forme la plus essentielle et la plus centrale de l'assimilation intellectuelle, en tant que celle-ci prolonge, par l'intermédiaire des formes intuitives et sensori-motrices, l'assimilation psychobiologique. D'où la possibilité de son affranchissement par rapport à l'action directe et au réel immédiat, sans cependant ébranler la permanence de son accord avec toutes les opérations de l'esprit ni avec toutes les transformations du réel. C'est que l'accommodation propre à une telle forme générale d'assimilation ne peut être qu'une accommodation à la fois anticipatrice, en tant que ne résultant pas des qualités différenciées des objets, et permanente une fois réalisée, puisque les coordinations des actions s'accorderont toujours avec le réel si ces coordinations n'expriment pas le résultat d'expériences particulières, mais la possibilité même de l'expérience, c'est-à-dire de l'action sur un objet quelconque. La construction du nombre marque ainsi, au total, le prototype de cette assimilation du réel à l'esprit qu'effectuent toutes les mathématiques et qui consiste à insérer les transformations du réel dans les coordinations des actions, effectives ou possibles, du sujet agissant sur ce réel.

En second lieu, si les opérations logico-arithmétiques tiennent à la coordination même des actions et non pas au détail spécialisé de celles-ci, la multiplicité croissante des structures numériques, conçues à titre de structures mentales tardives et non pas *a priori*, relève alors d'un mode de construction, dont l'explication génétique dispose à titre de *tertium*, aussi éloigné du préformisme que de l'appel aux facteurs empiriques : la coordination des actions ne contient pas d'avance la logique ni le nombre, mais, les opérations logico-arithmétiques étant le produit d'abstractions à partir de l'action et non pas de l'objet, cette coordination fournit les éléments de telles différenciations possibles. En effet, l'abstrac-

tion et la généralisation par rapport aux actions sont, nous l'avons vu (2) à la fois constructives et réflexives, en opposition avec l'abstraction et la généralisation par rapport aux objets. Autrement dit, en abstrayant et en généralisant des caractères de l'objet, on n'obtient en fin de compte que ce qu'on a emprunté au départ, sauf à y ajouter des caractères opératoires tirés de l'activité du sujet. Si le nombre et la logique n'étaient que des schématisations de l'objet, on comprendrait donc mal comment ils le dépassent aussi librement que le font les schèmes logico-arithmétiques. Au contraire, une fois admise cette sorte d'*a priori* fonctionnel (fonctionnel et non pas structural, c'est-à-dire ne contenant aucune structure *a priori*) qu'est la coordination des actions du sujet (mais supprimer cette coordination reviendrait à faire de l'organisme une table rase à l'égard des actions du milieu, ce qui est contraire à tout ce que nous a appris la biologie), les opérations logiques et numériques se construisent à la fois par abstraction à partir de l'organisation sensori-motrice et par positions toujours plus mobiles et plus réversibles parce que mieux équilibrées.

En effet, les schèmes sensori-moteurs nés de la répétition active des conduites et constituant, sur le terrain de la perception et de l'habitude motrice, les plus simples assimilations mentales du réel par le sujet, sont eux-mêmes issus d'une première abstraction à partir des cycles réflexes ou organiques, laquelle consiste à leur emprunter leur capacité de répétition et d'extension généralisatrice. Les schèmes sensori-moteurs aboutissent pour leur part à une sorte de logique de l'action, dont la cohérence particulière consiste p. ex. à ne pas accomplir, en même temps que lui, un acte contraire au but poursuivi par un autre, à appliquer le même schème d'action à des circonstances analogues quoique nouvelles, à ordonner les moyens et les buts, etc. Or la construction de cette logique sensori-motrice repose sur les coordinations précédentes par abstraction de leur pouvoir de mise en succession ou de classement pratiques (discriminations récognitives et généralisations par transfert). La pensée intuitive emprunte ensuite aux schèmes sensori-moteurs, grâce à de nouvelles abstractions, leur pouvoir d'assimiler le réel selon le double mécanisme de la succession et du classement, mais en traduisant ceux-ci sous la forme de représentations, c'est-à-dire d'actions intériorisées susceptibles d'anticipations et de reconstitutions plus poussées et mieux articulées. Les opérations concrètes abstraient de la pensée intuitive ces articulations, mais en les généralisant sous forme mobile et réversible. Enfin les opérations formelles abstraient ces

opérations de leur contexte limité pour les traduire en propositions indépendantes de toute action concrète. Ainsi les opérations logiques et numériques se construisent par étapes tout en s'appuyant à chaque niveau sur des éléments abstraits des coordinations du niveau précédent. C'est de cette manière que les structures logico-arithmétiques plongent leurs racines dans les coordinations les plus élémentaires sans être pourtant préformées, et s'élaborent par un double processus d'abstraction réflexive (différenciations) et de généralisations consistant en compositions nouvelles s'intégrant les éléments des structures précédentes.

En troisième lieu, le propre de cette structuration par paliers, avec différenciations et intégrations corrélatives sur chacun d'entre eux, est de constituer, non seulement un enrichissement et un assouplissement graduels des formes successives de coordination, mais encore, jusqu'à un certain point, une répétition élargie des mêmes processus formateurs d'un palier à l'autre, avec décalage dans le temps. En effet, sur le palier sensori-moteur déjà, on voit se dessiner, mais à l'état d'esquisses peu différenciées les mêmes formes d'organisation qui se déploieront plus tard en grand sur le palier opératoire. Les schèmes sensori-moteurs comportent ainsi l'équivalent fonctionnel des classes (application d'un même schème à des situations multiples), des relations (rapports de différences ou de ressemblances utilisés dans l'action) et même d'une certaine quantification prénumérique par action combinée de la ressemblance et de l'ordre (répétitions cumulatives, avec p. ex. imitations distinctes selon qu'il s'agit de reproduire 1-2 fois ou 4-5 fois le même mouvement). En descendant du palier sensori-moteur au palier instinctif on retrouve, sous des formes plus élémentaires encore et plus rigides, des processus analogues, et ainsi de suite, selon une continuité fonctionnelle complète entre l'organique et le mental.

C'est pourquoi le nombre, produit de la coordination des actions et non pas d'actions particulières, produit d'abstractions réflexives sur lesquelles s'appuient les compositions sur chaque nouveau palier sans discontinuité fonctionnelle avec les plus lointains d'entre eux, est tout à la fois lié aux activité les plus fondamentales du sujet sans être contenu d'avance dans les coordinations de départ et rattaché sans cesse au réel par ces coordinations mêmes sans être abstrait des objets comme tels.

CHAPITRE II.

LA CONSTRUCTION OPÉRATOIRE DE L'ESPACE

Plus a été poussée en ces dernières années l'analyse mathématique des rapports entre le nombre et l'espace, plus est apparu le parallélisme de ces deux sortes de réalités. Cette convergence est d'autant plus frappante qu'il fut longtemps de mode de considérer le nombre comme représentatif des mathématiques pures, parce qu'exclusivement intellectuel, et l'espace comme le premier domaine relevant des mathématiques appliquées, parce que de nature sensible ou perceptive. Il ne reste rien de cette opposition, mais les raisons de son élimination sont particulièrement instructives pour l'épistémologie génétique.

Avec les travaux de Weierstrass, de G. Cantor et de Dedekind déjà, une traduction s'est révélée possible entre le continu géométrique et ce qu'on a appelé le continu analytique ou ensemble des nombres réels (rationnels et irrationnels). La « puissance du continu » est, en langage de théorie des ensembles, la caractéristique numérique équivalente aux propriétés du continu spatial. C'est, p. ex., par une même construction de séries convergentes que Cantor détermine les points d'accumulation dont est composé le continu géométrique (chacun de ces points étant conçu comme la limite d'une série d'intervalles emboîtés) et qu'il définit les nombres irrationnels comblant les lacunes entre les nombres rationnels.

Les progrès de la topologie, d'autre part, sont allés sur de nombreux points à la rencontre du nombre. C'est ainsi que l'étude topologique des polyèdres aboutit à une topologie combinatoire et algébrique, qui ne diffère plus guère d'une algèbre pure ; certains groupes discrets et commutatifs développés récemment par Pontrjagin réalisent une synthèse si étroite du topologique et de l'algébrique que leurs éléments peuvent être envisagés soit comme matière à calcul algébrique, soit comme des points reliés

par un principe de voisinage. La théorie des espaces abstraits permet de son côté de parler en langage spatial d'ensembles quelconques à la condition de déterminer une loi de voisinage, mais celle-ci peut s'éloigner grandement des notions ordinaires attachées à ce vocable : tel l' « espace des nombres rationnels » [1], etc. Réciproquement la théorie des ensembles parle d'ensembles ouverts et fermés, de frontières, d'extériorité ou d'intériorité, etc., en des sens indifféremment géométriques ou abstraits. C'est finalement par un choix conventionnel que l'on décide, en certaines régions limitrophes, si l'on adopte le point de vue du voisinage spatial ou le langage analytique des ensembles et des nombres.

Aussi bien un jeune mathématicien, B. Eckmann, a-t-il récemment considéré le dualisme du nombre et de l'espace comme un exemple, non pas de dualité statique opposant deux natures qualitativement distinctes, mais bien de « complémentarité » au sens de la microphysique, c'est-à-dire précisément de dualité de points de vue, eu égard à deux aspects également nécessaires de la même réalité [2].

Or, psychologiquement, on pourrait s'imaginer à première vue une opposition essentielle entre l'espace fondé sur les perceptions et la motricité les plus élémentaires et le nombre, produit d'opérations tardives et rapidement formalisables. Ce contraste apparent est même si trompeur que Kant, p. ex., faisait de l'espace et du temps des formes *a priori* de la sensibilité, tandis qu'il réservait au nombre le rôle de schème de liaison entre le temps et l'entendement.

Mais, en confirmation de ce que nous venons d'entrevoir des opérations logico-arithmétiques, qui plongent leurs racines dans les coordinations les plus primitives de l'action, nous allons constater que la construction génétique de l'espace est, en réalité, exactement parallèle à celle du nombre, sur les différents plans perceptif, sensori-moteur, intuitif et opératoire, à la seule différence que le schématisme logico-arithmétique procède de l'action sur les éléments discontinus du réel et le schématisme spatial de l'action exercée sur les éléments continus (les deux schématismes se rejoignant ensuite toujours plus étroitement). En effet, si l'on a soin d'étudier la perception chez l'enfant, et non pas seulement chez l'adulte (où elle subit par choc en retour toutes sortes d'influences émanant de l'intelligence opératoire elle-

1. Voir KURATOWSKI, *Topologie.*

2. B. ECKMANN, *Topologie und Algebra,* Zürich, Vierteljahrschrift d. Naturf., ges., 1944, p. 26.

même), on s'aperçoit que les mécanismes perceptifs ne réussissent pas davantage à construire, par leurs seuls moyens, un espace cohérent qu'ils n'aboutissent à la construction des classes, des relations logiques et des nombres. Et si l'on suit la construction de l'espace dans la pensée intuitive et sur le plan des opérations concrètes avant le développement de la pensée formelle, on s'aperçoit que cette construction correspond pas à pas à celle des opérations logico-arithmétiques, à cette seule différence près qu'il s'agit d'opérations infralogiques portant sur l'élaboration de l'objet lui-même, ou des objets de divers ordres, et non pas d'opérations logiques ou numériques portant sur les divers modes de réunion d'objets discontinus (en classes, relations sériées ou nombres).

Les données de la construction génétique convergent donc, au lieu d'en diverger, avec les résultats de la construction théorique, et la correspondance est même si grande que, contrairement aux opinions courantes sur la structure métrique euclidienne de l'espace originel, ce sont au contraire les rapports topologiques qui sont les premiers à s'organiser, d'où le parallélisme entre les emboîtements spatiaux (ainsi que les relations d'ordre ou de placement), et les classements (ainsi que les sériations) logiques.

§. 1. CLASSIFICATION DES INTERPRÉTATIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES DE L'ESPACE. — La construction de l'espace est solidaire, non seulement de tout le développement mental à chacun de ses paliers, mais encore sans doute de toute l'évolution biologique jusques et y compris, aux processus élémentaires de la morphogenèse vitale. Au sommet de ce développement l'espace est engendré par les opérations déductives de la géométrie. Mais ces opérations formalisées sont précédées par des opérations concrètes qui plongent leur racine en des intuitions diversement articulées. Celles-ci procèdent d'un espace sensori-moteur et perceptif qui s'appuie lui-même sur un espace postural et réflexe, « agi » avant d'être perçu ou conçu. Mais tout instinct animal suppose déjà une géométrie (cf. les figures régulières des cellules d'une ruche ou d'une toile d'araignée), et toute la morphogenèse elle-même (que l'instinct prolonge en partie) est une création continue de « formes » élaborées en connexion avec le milieu. Il est donc évident que les mêmes problèmes épistémologiques peuvent être posés à propos de chacun de ces paliers, avec, d'ailleurs, la même diversité possible dans les solutions. Il existe, en particulier, autant de différences entre les diverses interpréta-

tions de la perception spatiale — donc entre les épistémologies considérant l'espace comme une « forme de la sensibilité » — qu'entre les multiples théories de la déduction géométrique, envisagée à titre d'activité de l'intellect.

L'histoire même des explications de l'espace est, à elle seule, extrêmement significative de ce point de vue. On peut dire, en effet, que l'interprétation de la géométrie moderne a évolué, dans les grandes lignes, d'une conception mettant tout l'accent sur la nature perceptive ou « sensible » de l'espace, à une conception réduisant la géométrie à une sorte de logique : or, à chacun de ces extrêmes, on retrouve les mêmes oscillations entre les formes innéistes et les formes empiristes, avec le même effort pour échapper à ces deux exagérations contraires et pour trouver des rapports d'interdépendance entre le sujet et l'objet.

Sans doute Descartes, s'appuyant sur sa découverte de la géométrie analytique, admettait-il une sorte de parallélisme entre l'algèbre et la géométrie, tel qu'aux figures constituées par les courbes correspondent les équations du calcul algébrique et réciproquement ; mais ce parallèle, appuyé sur le dualisme métaphysique de l'étendue et de la pensée, n'a point abouti, dans son système, à une unité réelle de la construction opératoire et de l'intuition spatiale. Avec Kant, le dualisme s'accentue entre l'espace conçu (comme le temps) à titre de forme *a priori* de la « sensibilité » et l'entendement logique, avec, entre deux le schématisme du nombre, fondé d'ailleurs sur le déroulement temporel et non pas sur l'étendue. Pendant presque tout le XIX^e^ siècle, l'interprétation de l'espace demeure ainsi centrée sur le contact perceptif du sujet avec l'objet physique, oscillant entre le « nativisme » ou l'apriorisme d'une part, et diverses formes d' « empirisme » ou de génétisme, d'autre part, mais avec toujours, à l'arrière plan, cette notion d'une opposition entre le caractère sensible ou intuitif de l'étendue et l'aspect logique ou combinatoire de l'analyse et de l'algèbre. Par contre, au cours du XIX^e^ siècle également, se préparait déjà la crise de la géométrie d'où sont issues, dans la période contemporaine, les interprétations de l'espace tendant à détacher celui-ci de l'intuition perceptive ou imagée, pour le concevoir en fonction d'une construction déductive ne s'appliquant plus simplement, et après coup, à des formes données au préalable par la sensibilité, mais les engendrant réellement (de toutes pièces ou grâce à une généralisation intervenant dès le contact sensori-moteur avec l'objet physique).

Cette crise a été due, comme chacun le sait, à l'élaboration

graduelle des géométries non euclidiennes, lesquelles mettaient en évidence l'existence d'une pluralité de modèles dont un seul correspond directement à notre manière de percevoir l'espace proche et pratique. Et l'aboutissement des controverses nées de cette découverte fondamentale a été marqué par deux événements décisifs, qui ont solidairement libéré l'interprétation de l'espace de l'intuition sensible : la théorie de la relativité et l'emploi de la méthode axiomatique. D'une part, en effet, la mécanique einsteinienne a montré que l'espace du monde physique cesse d'être euclidien à une certaine échelle et passées certaines vitesses, preuve que l'espace de notre perception est lié à des conditions limitatives qui lui enlèvent sa valeur de cadre *a priori* ou d'expression adéquate de l'objet en général. D'autre part, la libre construction déductive d'un ensemble indéfini de modèles spatiaux a prouvé symétriquement que l'espace intuitif est aussi impropre à épuiser l'activité opératoire spatialisante du sujet que les caractères de l'objet spatialisé.

A vouloir classer les différentes interprétations possibles de l'espace, nous nous trouvons donc d'abord en présence d'une hétérogénéité de plans, selon que tout l'accent est mis sur l'explication de l'espace perceptif ou sur celle de l'espace construit déductivement. Mais le rôle attribué à l'intuition sensible ou à la déduction variant lui-même, de façon considérable, selon la période envisagée de l'histoire dont nous venons de rappeler le schéma, le problème intéressant n'est pas de dégager l'opposition entre une théorie de la perception spatiale et une théorie de la déduction géométrique, mais de retrouver, sur chacun des plans que les diverses épistémologies ont explorés tour à tour, au cours des temps, les mêmes divergences ou les mêmes convergences, exprimées tantôt en termes de sensibilité, tantôt en termes de construction logique. Or, ces comparaisons sont d'autant plus suggestives que les paliers, étudiés respectivement dans la succession historique des doctrines, correspondent à des étages, tous réels et tous actuels, du développement psychologique de l'espace. Il n'est pas faux, en effet, de dire avec Kant, que l'espace est une forme de la sensibilité : il existe, chacun en conviendra, un espace perceptif et il soulève, en lui-même, toutes les questions épistémologiques ; le problème est seulement de savoir s'il explique l'espace de la géométrie moderne et, sur ce point, l'histoire elle-même suffit déjà à rétablir les justes perspectives. Il existe, également, un espace organique, un espace postural, un espace sensori-moteur, un espace de l'intuition imagée, un espace des opérations concrètes, un espace des opérations

formelles et un espace axiomatique. L'essentiel est donc non pas de confronter pêle-mêle les théories se référant à l'un quelconque de ces niveaux, mais de mettre en évidence, sur chacun d'eux ou sur les principaux d'entre eux, les variations possibles de l'interprétation épistémologique.

A cet égard, les principales doctrines, historiques ou actuelles, se réfèrent, soit aux sources intuitives, soit à l'élaboration déductive, soit aux deux à la fois. C'est donc essentiellement en fonction de ces états extrêmes qu'il convient d'orienter notre classification. Or, qu'il s'agisse de perception ou de motricité élémentaires, ou de construction intellectuelle, en ces deux cas on retrouve le même tableau de combinaisons possibles entre les recours aux facteurs internes et les facteurs externes, combinaisons en nombre limité, mais susceptibles de présenter tous les intermédiaires entre elles.

Une opposition essentielle sépare d'abord, sur chaque plan, les théories qui conçoivent l'espace perceptif ou notionnel, comme une réalité toute faite, sans devenir ni construction, et celles qui l'interprètent comme un système de rapports progressivement élaborés : nous appellerons ces deux classes les théories non génétiques et les interprétations génétiques. C'est ainsi que l'espace absolu de Newton et de Clarke, conçu comme un *sensorium Dei* ou l'espace de Kant, forme *a priori* de la sensibilité transcendantale de l'homme (c'est-à-dire *sensorium hominis)* sont des modèles de conception non génétiques, tandis que l'espace conçu par Poincaré, Brunschvicg ou Enriques comme une coordination progressive des mouvements et des actions, puis des relations intellectuelles, qualitatives ou métriques, est une réalité essentiellement génétique.

Mais une autre opposition interfère avec la précédente : on peut considérer l'espace de la géométrie comme imposé par la réalité extérieure, c'est-à-dire par un espace physique existant indépendamment de nous dans un monde d'objets dont il constitue le réseau ou le contenant, ou on peut l'interpréter comme une forme des perceptions ou de l'intellect du sujet, imposée aux phénomènes objectifs dès le contact perceptif le plus élémentaire ou au fur et à mesure de leur interprétation rationnelle. C'est ainsi que, parmi les points de vue non génétiques, celui de Newton est essentiellement réaliste, tandis que celui de Kant se fonde sur une élaboration endogène ; de même, parmi les points de vue génétiques, celui d'Enriques s'appuie sur le donné physique interprété de façon empiriste et celui de Brunschvicg sur l'activité du sujet.

Il résulte de ce qui précède une table à double entrée dont l'une des dimensions est occupée par la distinction dichotomique des théories non génétiques et génétiques. Ces dernières sont susceptibles de degrés divers, mais on ne saurait concevoir de point de vue qui nie l'opposition du génétique et du non-génétique, car, à vouloir la supprimer, on retombera dans la négation de la genèse elle-même. L'autre dimension du tableau comprend au contraire trois possibilités : les interprétations fondées sur l'objet, sur le sujet ou, entre deux, celles qui se refusent à tout dualisme radical entre les facteurs endogènes et exogènes, et se les représentent soit comme fondus en un seul tout dès le départ (points de vue non génétiques) soit comme liés par un système d'interactions indissociables (points de vue génétiques). On aboutit ainsi à six possibilités principales, dans lesquelles on reconnaît les six positions épistémologiques générales, décrites au § 4 de l'Introduction, mais appliquées au problème spécial de l'espace.

Sur le plan de l'espace perceptif et sensori-moteur, les solutions non génétiques, et les solutions génétiques ont longtemps porté le nom d'apriorisme et de « nativisme », d'une part, et d' « empirisme », d'autre part, mais de nombreuses nuances sont à distinguer dans chacune de ces deux classes, et de nouvelles attitudes irréductibles à ce cadre classique ont été adoptées en ces dernières décades. Le terme de « nativisme », notamment, recouvre en réalité (du moins au point de vue épistémologique) deux solutions distinctes : celle qui fait de la perception spatiale une « faculté » innée, appréhendant directement du dehors un espace tout construit dans le monde extérieur, et celle qui réduit la perception de l'espace à une conscience de notre propre organisation, cette dernière assimilant à sa structure interne les données externes. Seule cette dernière forme de nativisme peut être comparée à l'apriorisme kantien, dont il est la traduction psychologique et physiologique, tandis que la première forme de nativisme aboutit à un réalisme épistémologique. En troisième lieu, une théorie non génétique de l'espace perceptif a vu le jour en ces dernières années sous le nom de « théorie de la Forme » (en liaison avec l'épistémologie phénoménologique) et admettant une organisation spatiale embrassant en une seule totalité les facteurs internes et les facteurs externes. Quant aux théories dites longtemps « empiristes », il faut également distinguer à leur sujet deux types bien différents, si distincts même l'un de l'autre qu'ils conduisent à une nette opposition épistémologique : en effet, si elles sont l'une et l'autre génétiques, la première seule est « empi-

riste » du point de vue de la connaissance, tandis que la seconde aboutit à reconnaître l'existence d'une interaction relativiste entre le sujet et l'objet. La première est celle qui fonde l'espace sur les « sensations » associées entre elles, tandis que la seconde l'appuie sur l'action (dès la motricité et l'activité sensori-motrice et perceptive). En outre, entre deux s'intercale le point de vue, inconnu au XIX^e^ siècle, du conventionnalisme, dont on sait que Poincaré a cherché à le fonder sur une analyse remontant jusqu'à la coordination sensori-motrice également.

Bref, les théories génétiques de l'espace perceptif conduisent soit à un primat de l'objet (empirisme proprement dit), soit à un primat du sujet (conventionnalisme), soit à une interaction entre eux (relativisme de l'action). Ces trois points de vue correspondent ainsi terme à terme aux solutions non génétiques : primat de l'objet (nativisme réaliste), primat du sujet (apriorisme) et interaction (phénoménologie de la « Forme »), Cette correspondance est même si évidente qu'on trouve de nombreux intermédiaires entre les deux termes de chaque couple : p. ex. la théorie de Wundt est à mi-chemin du nativisme de Hering et de l'empirisme de Helmholtz ; le conventionnalisme de Poincaré s'appuie sur une interprétation sensori-motrice des « groupes de déplacements » qui n'est pas éloignée du nativisme aprioriste ; de la « théorie de la Forme » enfin, à celle de l'espace actif et moteur on peut concevoir toutes les transitions reliant une interprétation statique au dynamisme de l'action.

Quant aux interprétations de l'espace déductif et notamment des diverses formes de la géométrie axiomatique, on retrouve les mêmes six possibilités, mais avec une transposition importante des termes en présence. Tandis que, dans le cas de l'espace perceptif, le sujet est le moi percevant et que l'objet est constitué par les formes ou les figures des corps eux-mêmes, dans le cas de l'espace déductif, et surtout de cette déduction épurée caractérisant l'axiomatique contemporaine, le sujet est représenté par l'activité déductive formalisée : l'objet est alors tout ce qui est jugé extérieur à cette activité formelle (ou, selon les points de vue, en interaction avec elle), c'est-à-dire qu'il est l'espace dit « intuitif » par le géomètre, que cette réalité intuitive soit conçue comme l'expression d'une expérience physique possible, ou simplement d'un donné extérieur à la déduction axiomatisée. D'où les six combinaisons suivantes.

Il faut, en premier lieu, distinguer les conceptions non génétiques de l'axiomatique géométrique, c'est-à-dire celles qui considèrent les propositions de la géométrie déductive comme attei-

gnant une consistance permanente, indépendante de leur découverte historique et des opérations psychologiques en jeu dans leur élaboration ; et les conceptions génétiques, selon lesquelles l'axiomatique elle-même est en devenir et ne saurait être rendue indépendante de sa propre construction mentale.

Parmi les conceptions non génétiques, on retrouve le primat de l'objet, celui du sujet et l'interaction des deux, l'objet et le sujet étant définis comme on vient de le voir. Le réalisme de l'objet consistera donc, dans le cas de la pensée axiomatique, à considérer les principes admis à titre d'axiomes ou les propositions construites grâce à eux, comme l'expression d'une faculté appréhendant directement des êtres (de raison, ou expérimentaux) extérieurs à elle. C'est ainsi que pour les Grecs, les axiomes, considérés en tant que vérités évidentes, traduisaient l'existence de formes extérieures à nous. Selon Russell ils expriment *a priori*, mais analytiquement (et sans construction synthétique inhérente au sujet), la possibilité de l'expérience, et sont ainsi dans une situation comparable à celle des concepts logiques en tant que connaissance immédiate des universaux [1], etc. Les conceptions caractérisées par le primat du sujet consisteront au contraire à admettre une construction axiomatique (donc épurée de toute intuition), se suffisant à elle-même et ne correspondant au réel (intuitif ou expérimental) qu'à titre de cadre nécessaire, commun à l'esprit et aux choses. C'est ainsi que D. Hilbert, dans un article intéressant sur les rapports de la logique et de la réalité, considère les axiomes d'ordre et de congruence comme s'appliquant au réel (p. ex. aux lois de l'hérédité en[*] biologie), non pas parce qu'extraits des choses, mais parce que découlant de ce qu'il appelle une sorte d' « harmonie préétablie », c'est-à-dire d'une préformation synthétique a *priori* conditionnant à la fois l'esprit qui pense et le réel pensé par lui [2]. Enfin le point de vue de l'indissociation entre l'esprit et les choses est représenté par les interprétations phénoménologiques, qui voient dans la construction géométrique l'expression d'intuitions rationnelles de divers ordres, échelonnées entre l'intuition vulgaire et ce que M. Winther a dénommé si heureusement la connaissance « transintuitive ».

1. B. RUSSELL, *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge, 1897 et Sur les axiomes de la géométrie, *Rev. Mét. Mor.*, 1899, p. 687 : « Ce qu'on peut découvrir au moyen d'une opération doit exister indépendamment de cette opération : l'Amérique existait avant Christophe Colomb ».

2. D. HILBERT, *La connaissance de la nature et la logique*, (trad. MÜLLER), *Enseignement math.*, t. 30, p. 22-33, notamment p. 27-30.

[*Note FJP : nous avons substitué « en » à « ou ».]

Quant aux interprétations génétiques, on retrouve les trois possibilités du primat de l'objet, du primat du sujet et de l'interaction entre les deux. Le premier de ces trois points de vue est représenté par les auteurs qui expliquent la construction des axiomatiques par une abstraction progressive à partir des données sensibles et de l'expérience physique. Enriques a ouvert cette voie en philosophie géométrique et Gonseth a développé une théorie du schématisme que nous examinerons plus loin (§ 11), le « schéma » qui caractérise l'ossature des axiomatiques étant, selon lui, simultanément l'expression des comportements du sujet et la vision simplifiée ou « sommaire » des caractères de l'objet, mais avec une tendance à accentuer ce second aspect. Le primat du, sujet s'affirme au contraire dans les théories conventionnalistes, dont la plus décisive a été celle d'H. Poincaré et qui se retrouvent en partie dans certaines des conceptions de l'épistémologie nominaliste du cercle de Vienne, la notion de convention prenant alors la forme du « langage » logique ou « tautologique ». Enfin, l'interaction entre le sujet et l'objet constitue la notion centrale des interprétations opératoires de la déduction spatiale ou géométrique, interprétations que l'on trouve en partie chez Enriques et surtout chez Gonseth (malgré l'accent mis par ces deux auteurs sur l'objet plus que sur l'action), et que nous développerons dans la seconde partie de ce chapitre.

Il importe maintenant, ces divers points de vue une fois classés, d'examiner successivement (et sans les confondre) les problèmes de l'espace perceptif ou sensori-moteur et ceux de ce que nous appellerons l'espace opératoire, en confrontant avec les données psychogénétiques actuellement connues les principaux types d'hypothèses distingués à l'instant.

§ 2. L'ESPACE PERCEPTIF. A) LE « NATIVISME » ET L' « EMPIRISME ». HÉRÉDITÉ ET SENSATION. — Nous percevons dans le monde extérieur des formes, des successions ordonnées, des projections, des similitudes, des distances (notamment en profondeur), des grandeurs bi- ou tri-dimensionnelles, etc. L'espace semble donc donné dans la perception ou dans l'objet perçu, et rien ne paraît au premier abord plus clair que la thèse empiriste selon laquelle il suffit de dissocier ces caractères spatiaux des autres qualités de la réalité sensible pour obtenir par abstraction un espace à la fois expérimental et intuitif (en tant que l'image prolonge la sensation). Et pourtant sur le terrain même de la critique philosophique l'analyse réflexive de Berkeley, en son fameux *Essai d'une théorie nouvelle de la vision*, aboutissait

déjà à montrer qu'on ne « voit » directement ni l'espace ni les objets dans l'espace. Après que le phénoménisme de Hume ait achevé de dissoudre le support substantiel de l'espace extérieur, Kant a renversé le rapport initial établi par l'empirisme, entre le sujet percevant et les choses, en situant l'espace dans la sensibilité *a priori* du sujet lui-même.

Ce conflit entre l'empirisme et l'apriorisme philosophique est-il susceptible d'être résolu sur le terrain de la psychologie génétique ? Certes celle-ci n'atteint les perceptions spatiales qu'en des situations où le sujet est en rapport avec une expérience et l'examen de ces perceptions ne saurait se faire que selon un ordre quelconque de succession, d'où l'apparence d'un préjugé en faveur de l'expérience et de la genèse progressive. Mais ce n'est qu'une apparence, et si l'espace constituait une forme *a priori* préexistant à l'exercice de nos organes des sens et à tout contact moteur, perceptif ou intellectuel entre le sujet et les choses, cela se reconnaîtrait néanmoins au moment de cet exercice et de ce contact. Les biologistes sont habitués à raisonner sur certaines variations ne se produisant qu'en un milieu déterminé mais ayant cependant pour cause l'actualisation d'un caractère endogène latent, et rien n'empêcherait de donner une explication analogue sur un plan purement mental pour rendre compte d'organisations perceptives non imposées par l'expérience au sujet, mais émanant au contraire de celui-ci seul. Il est vrai que tout appel à l'hérédité recule simplement le problème épistémologique, et que celui-ci serait à poser lors du premier contact perceptif entre les organismes ancestraux et le milieu perçu. Mais, à défaut de certitude, l'analyse psychobiologique pourrait cependant fournir une preuve inductive d'un haut degré de probabilité en faveur de l'apriorisme, s'il était vrai. Que si, au contraire, les mêmes expériences répétées déclenchent chez des sujets d'âge mental différent (ou mieux encore aux stades successifs de développement du même sujet), des réactions perceptives témoignant d'organisations spatiales bien distinctes, l'apriorisme en sortirait affaibli. Et, même à faire, alors, l'hypothèse d'une maturation endogène des structures *a priori*, la dissociation des facteurs internes et externes, ainsi que de la maturation et de l'exercice, demeurerait concevable puisqu'elle correspond à l'une des tâches actuelles de la psychologie génétique.

C'est donc à bon droit que Johannes Müller, Helmholtz, Hering, Kundt, Panum, Wundt et tant d'autres, ont porté la question de l'empirisme et de l'apriorisme sur le terrain de la psycho-physiologie et que certaines variétés du « nativisme » ont été considérées comme des traductions physiologiques ou psychologiques de la thèse kantienne affirmant l'existence d'une « forme » de sensibilité transcendantale. Kant n'a jamais nié, en effet, que l'espace donne lieu à une prise de conscience seulement à l'occasion de l'expérience : il a simplement affirmé que cette expérience n'explique pas l'espace, mais provoque une actualisation de formes virtuelles antérieures à elle (le raisonnement étant susceptible de

se répéter sur le plan du *sensorium* ancestral). Certains types de théorie nativistes ne disent pas autre chose, mais, comme nous l'avons vu au § 1, elles ne sont pas toutes identiques entre elles de ce point de vue, puisque d'attribuer à la rétine, avec Joh. Müller et avec Hering, un pouvoir inné de percevoir les distances et les dimensions peut être pris dans un sens kantien ou, au contraire, peut se référer à l'hypothèse d'une faculté héréditaire permettant de lire de façon immédiate (sans exercice ni expérience) les données du monde physique extérieur. Le grand adversaire des théories nativistes, Helmholtz dit, en effet, « qu'elles attribuent la localisation des impressions dans le champ visuel à une disposition innée, soit que l'âme ait une connaissance directe des dimensions de la rétine, soit que l'excitation de fibres nerveuses déterminées donne lieu à certaines représentations d'espace par un mécanisme préétabli » [1]. Et il considère comme « une extension de l'opinion de Kant » la théorie de Joh. Müller, dont il cite ce texte frappant : « aucune sensation ne peut exister en dehors de la notion d'espace et de temps. Mais quant à ce qui remplit l'espace, nous ne *sentons* rien autre que nous-mêmes dans l'espace, quand nous parlons de sensation ou de sens ; le jugement ne nous fait distinguer, dans l'espace rempli objectivement, que les parties de nous-mêmes qui sont dans l'état d'affection, sensation qui est accompagnée de la conscience de cause extérieure de l'excitation. Dans chaque champ visuel, la rétine voit sa propre étendue à l'état d'affection », etc. [2]. Mais, chez d'autres physiologistes, et notamment chez Hering, lorsqu'il substitue à la thèse globale de son devancier une analyse détaillée des régulations physiologiques en jeu dans ces mécanismes « innés », la perception de l'espace devient simplement une faculté d'appréhender directement les données extérieures.

Or, et indépendamment de ces diverses nuances a prioristes ou réalistes, la nativisme s'est heurté à un retour offensif de l'empirisme, soutenant la nécessité de l'expérience et notamment de l'exercice moteur (mouvements des yeux pour les perceptions visuelles, etc.) dans la construction de l'espace perceptif. Mais l' « empirisme » lui-même s'est présenté sous les formes les plus diverses, du point de vue épistémologique, et souvent fort éloignées de celles qui correspondent à ce terme en théorie de la connaissance proprement dite. Faire appel à l'expérience et à la motricité peut, en effet, conduire à une interprétation fondée exclusivement sur les sensations (visuelles, tactiles, etc. ou motrices c'est-à-dire kinesthésiques) ainsi qu'à leurs associations, passivement subies, et nous sommes alors bien dans la ligne classique de l'empirisme. Mais avec les « signes locaux » de Lotze, les « signes locaux complexes » de Wundt et surtout avec les signes locaux interprétés d'emblée par des raisonnements inconscients, comme chez Helmholtz, nous nous éloignons de plus en plus de l'empirisme épistémologique.

1. H. HELMHOLTZ, *Optique physiologique*, trad. JAVAL et KLEIN, Paris, Masson, 1867, p. 1010.

2. Trad. de Joh. MÜLLER, *Zur vergleichenden Physiologie des Gesichtssinns*, p. 54.

Lorsque Helmholtz écrit que « les sensations sont, pour notre conscience, des signes dont l'interprétation est livrée à notre intelligence » [1] et qu'il considère chaque perception spatiale comme solidaire de toute l'expérience antérieure de l'individu, constamment interprétée en s'appuyant sur la motricité, « la répétition régulière de l'association de deux représentations » s'imposant à nous « avec d'autant plus de force et de nécessité qu'elle s'est offerte à nous plus souvent » [2] devient une formule qui, tout en conservant sa forme classiquement associationniste, laisse entrevoir bien d'autres développements que ceux de l'empirisme. Quant à Wundt, qui se dit lui-même en marge à la fois de l'apriorisme et de l'empirisme, mais que Helmholtz classe dans les empiristes, on sait qu'il invoque, en lieu et place des « raisonnements inconscients » du grand physiologiste, une synthèse ou fusion *(Verschmelzung)* des sensations, dont les unes sont rétiniennes (mais sans localisation innée et indiquant simplement l'existence de positions distinctes) et les autres relatives à la rotation de l'œil [3]. Cette fusion, antérieure à la prise de conscience, est considérée par Wundt comme impliquant une « genèse » de l'espace, appuyée sur des processus sensori-moteurs complexes : une base héréditaire sensorielle, mais sans signification spatiale des éléments comme tels, et une synthèse construite en relation avec l'exercice moteur, mais préconsciente. On voit que l' « empirisme » de Wundt, comme celui de Helmholtz, laisse une marge assez large d'interprétations épistémologiques possibles.

Les deux problèmes fondamentaux que nous paraissent soulever ces conflits historiques entre le « nativisme » et l' « empirisme » sont celui de l'hérédité des cadres spatiaux perceptifs et celui de la signification épistémologique de la « sensation », Ces deux problèmes sont d'ailleurs solidaires. Sur le premier point, il faut, en effet, distinguer encore deux questions : celle de la genèse biologique des formes héréditaires et celle des rapports entre les structures innées éventuelles et la connaissance actuelle du sujet individuel (connaissance telle qu'elle se manifeste au cours de la psychogenèse). C'est la discussion de cette seconde question qui conduit au problème du rôle épistémologique de la sensation.

L'appel à l'hérédité soulève donc deux sortes de questions très différentes. Or, pour ce qui est de la formation des structures héréditaires, ce n'est rien dire de décisif, du point de vue épistémologique, que d'attribuer à certaines structures la qualité de se transmettre héréditairement : la question est simplement

1. *Optique physiol*, (trad. citée), p. 1001.
2. *Ibid.*, p. 1002.
3. W. WUNDT, *Grundzüge der Physiologischen Psychologie*, Leipzig (Kröner).

déplacée et tous les problèmes se retrouvent alors sur le terrain biologique. Que la rétine ait le pouvoir inné, comme le voulait Joh. Müller, de percevoir les distances par une sorte de prise de conscience directe des images déposées sur elles[1] et que toute impression rétinienne comporte, comme l'ajoutait Hering, une sensation de hauteur, de largeur et même de profondeur (par une combinaison de points correspondants d'une rétine à l'autre, donnant deux à deux la même localisation et appelés « identiques ») le problème devient alors, pour décider de la signification épistémologique de ces facultés innées, de savoir comment s'est formée la rétine au cours de la série animale aboutissant à l'homme. Si, par hasard, la solution lamarckienne d'une lente acquisition des organes en fonction de l'habitude et des pressions du milieu se trouvait être la vraie, la conjonction de l'hypothèse de l'hérédité de l'acquis avec le nativisme spatial aboutirait en définitive à une justification de l'empirisme épistémologique, même si l'espace devenu inné chez l'homme s'imposait *a priori* à l'individu. Ce n'est qu'en appuyant le nativisme sur un préformisme biologique ou sur un mutationnisme à explications purement endogènes des variations héréditaires, que l'appel à l'innéité entraînerait la négation des interprétations empiristes au sens épistémologique. — Ce que nous venons de dire de la rétine s'applique naturellement aussi bien à tout autre organe intervenant dans la construction de l'espace, qu'il s'agisse des muscles de l'œil, dont les mouvements interviennent, selon Lotze, Helmholtz et Wundt, dans l'estimation des distances (et qui sont commandés par des réflexes liés héréditairement aux signes locaux, selon Lotze) ou des organes d'équilibre invoqués dans la suite par de Cyon, etc.

Bref, eût-on lié la genèse de l'espace à la structure innée d'un organe quel qu'il soit, ou de l'organisme entier, le problème épistémologique, au lieu de se poser en termes de relations entre l'activité du sujet et les objets donnés dans l'expérience, serait alors à situer sur le terrain des rapports entre l'activité organique ou morphogénétique et le milieu ambiant. Or, comme nous le verrons en détail à propos de l'épistémologie biologique, ce déplacement des questions ne les supprime ni ne les atténue en rien, et les mêmes sortes de solutions (selon les six combinaisons énumérées au § 1 de ce chap. II ou au § 4 du chap. I)

1. « H. Hering et A. Kundt ont été jusqu'à admettre que l'âme voyait directement les distances de deux points rétiniens, non pas suivant l'arc rétinien, mais suivant la corde », HELMHOLTZ, *Loc. cit.* p. 1011.

se retrouvent dans le domaine des interprétations de l'évolution et de la variation organiques. Si haut que l'on remonte, et en se plaçant même au point de vue tout hypothétique du premier corps vivant microscopique différencié de la réalité physico-chimique lui servant alors de milieu, on peut déjà concevoir ce milieu s'imprimant sur lui selon les pressions extérieures invoquées par l'empirisme ; mais on peut concevoir aussi cet être vivant comme imposant aux autres corps les structures endogènes engendrées par le mécanisme qui aurait présidé à sa formation (et qui tiendraient en ce cas à des relations nécessaires, jouant un rôle *d'a priori* par rapport aux échanges ultérieurs) ; on peut enfin réunir cet organisme naissant et son milieu en un seul système d'interactions expliquant son évolution après avoir rendu compte de sa genèse même. L'appel à l'hérédité est donc purement et simplement un renvoi du problème épistémologique à la biologie et non pas une solution de ce problème.

Par contre, si le recours à l'hérédité recule les solutions plus qu'elle ne les avance, il est une seconde question sur laquelle la psychologie génétique est susceptible de fournir d'ores et déjà certains enseignements, sans attendre que le problème biologique de l'évolution et de l'organogenèse soit résolu : c'est de savoir comment une structure spatiale héréditaire s'impose à la perception ou à l'intelligence du sujet. Cette seconde question, que nous avons distinguée plus haut de celle de l'hérédité elle-même, est, en effet, fort différente et, à certains égards, aussi importante pour l'épistémologie que ne le serait la solution du problème de l'hérédité biologique : c'est la question de l'ontogenèse, opposée à celle de la phylogenèse, tout en étant, comme on le sait, en partie solidaire de cette dernière.

C'est sur ce second point que le conflit du « nativisme » et de l' « empirisme » est le plus instructif à examiner rétrospectivement et à comparer à la position actuelle des problèmes. A lire Joh. Müller, Hering, ou des nativistes plus récents comme Stumpf ou Dunan, il semblerait que le secteur héréditaire de la perception spatiale fût de nature à expliquer l'espace tout entier, comme si ce palier des structures innées constituait la base, large et solide, d'une sorte de pyramide dont les étages diminueraient en dimensions et en importance, au fur et à mesure que l'on s'élève, jusqu'à un sommet exigu et fragile qui serait l'espace notionnel ou déductif. C'est ainsi que les distances, données d'après Joh. Müller et Hering, à titre de rapports rétiniens héréditaires, et déjà organisées selon les trois axes de coordonnées de l'espace euclidien, formeraient le fondement

de toute perception ultérieure et de toute construction rationnelle des longueurs, etc. Or, le tableau que nous suggérerait l'état actuel des connaissances psychogénétiques, dans le domaine de l'espace, est exactement l'inverse. A supposer que l'on puisse admettre une perception héréditaire des distances selon les trois dimensions (faisons-en l'hypothèse pour un instant), il ne saurait s'agir que d'un secteur limité de l'espace proche : sur ce petit palier initial, il faudrait alors placer un palier déjà plus large des distances conquises au cours de l'activité sensori-motrice, puis après ce palier viendrait un étage encore plus important constitué par la représentation intuitive des distances, etc. Bref, on aboutirait ainsi à une pyramide renversée, reposant sur son sommet et s'élargissant au fur et à mesure de la hauteur, c'est-à-dire des niveaux de développement de plus en plus éloignés du donné héréditaire. Plus précisément il faudrait invoquer une sorte de spiraloïde à tours toujours plus vastes, s'intégrant les précédents, et dont le point de départ seul maintiendrait le contact avec les structures organiques innées.

Prenons un exemple en un domaine où le rôle de l'hérédité est beaucoup plus certain que dans celui des distances entre signes locaux rétiniens. II existe une organisation posturale commandant aux positions du corps propre : quel qu'en soit le mécanisme héréditaire, nous sommes capables, et même précocement, de nous mettre en station droite ou verticale, et en station couchée ou horizontale. Bien avant de savoir marcher, le bébé sait tenir son buste ou sa tête dressés et cette posture équilibrée se distingue d'une série d'autres possibles. On peut donc, à bon droit, parler d'un espace postural pour désigner l'ensemble des coordinations entre mouvements et positions, caractérisant cette forme d'activité organique (laquelle joue même, comme l'a montré Wallon, un rôle important dans les débuts de la vie mentale), et, de ce point de vue, la connaissance pratique de la verticale et de l'horizontale peut être considérée comme héréditaire. Mais, du fait que l'on admettra un comportement inné impliquant ces deux rapports, faudra-t-il en conclure qu'ils se retrouveront sur tous les autres paliers de la conduite, et qu'un jeune enfant saura percevoir les objets, puis les imaginer par représentation intuitive, puis enfin combiner des opérations, selon ces mêmes relations de verticalité et d'horizontalité ? Autrement dit, la posture droite héréditaire entraîne-t-elle l'existence d'une perception innée de la verticale, puis d'une intuition innée et enfin d'une « idée innée » de cette verticale ? L'observation montre qu'il n'en est rien. L'enfant a beau savoir se tenir debout dès la seconde moitié de la première année, et couché dès sa naissance, il faudra attendre jusque vers sept à huit ans et davantage pour qu'il soit capable de se représenter intuitivement les verticales et les horizontales et surtout de les coordonner les unes aux autres en un système opératoire de références :

lorsqu'on lui demandera, p. ex., de dessiner des cheminées verticales sur un toit, des poteaux verticaux sur un versant de colline, le niveau horizontal de l'eau dans un bocal incliné, etc. (ou de placer simplement des cartons figurant ces objets, sans avoir à les dessiner), on s'aperçoit qu'il est incapable de mettre en relation les objets en fonction des éléments de référence donnés perceptivement (la table, le support du bocal, les parois de la chambre, etc.). Son espace intuitif n'est donc pas encore structuré selon les axes de coordonnées fournis par les objets verticaux et horizontaux[1]. Bien plus, si l'on examine la perception elle-même des inclinaisons, entre 5 et 7 ans, on retrouve un défaut analogue de structuration d'ensemble (voir plus loin § 3). La connaissance pratique de ses propres postures verticales ou horizontales n'engendre donc nullement d'emblée, chez l'enfant, les structures perceptives, intuitives ou opératoires auxquelles on pourrait s'attendre.

Tout se passe ainsi comme s'il existait de nombreux paliers successifs d'activité, relativement indépendants en ce sens que, sur chacun, une reconstruction nouvelle est nécessaire, empruntant des éléments aux paliers précédents, mais en les intégrant en une totalité non déterminée par eux : les éléments héréditaires de départ sont donc loin de constituer des intuitions ou des notions innées valables pour tous les niveaux ; ils n'aboutissent au contraire à des structures déjà montées que sur le palier spécial et limité qui sert, non pas de base statique, mais pour ainsi dire de tremplin ou de plate-forme de lancement à l'ensemble des constructions ultérieures. Si donc, pour en revenir aux hypothèses nativistes concernant les distances selon les trois dimensions, la rétine était le siège d'une estimation innée des longueurs, cela ne signifierait nullement que ce noyau perceptif héréditaire fût capable de déterminer à lui seul la construction de toutes les perceptions et de toutes les intuitions ultérieures de la distance. Cela signifierait tout au plus que le nouveau-né parviendrait d'emblée à distinguer certaines grandeurs notablement différentes, mais sans préjuger d'un développement ultérieur des perceptions ni surtout de la construction intuitive, puis opératoire des notions de grandeurs élaborées beaucoup plus tard : celles-ci ne pourraient donc en aucune manière être considérées comme un système de notions innées, du seul fait que l'on établirait l'existence d'un noyau perceptif héréditaire, relatif à une certaine échelle d'espace proche.

Quant à admettre que chacun des paliers du développement compris entre les premières perceptions postnatales et les cons-

1. Voir J. PIAGET et B. INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, chap. XIII.

tructions formelles débutant vers 11-12 ans est, successivement et à son tour, déclenché par la mise en activation de quelque fonction héréditaire, c'est naturellement là une toute autre question, car il va de soi que si la capacité de former des intuitions ou des notions formelles, etc. est liée à certains fonctionnements nerveux hérités, cela ne signifie en rien que le détail de ces images ou de ces notions soit inné. L'hypothèse de l'innéité ne saurait être défendue qu'en ce qui concerne les perceptions et les mouvements élémentaires, mais nous venons de le voir, ces éléments initiaux ne peuvent, à eux seuls, supporter tout le poids des constructions ultérieures : ils constituent un tremplin de départ et non pas le palier dont la structure déterminerait d'avance celle de tous les suivants.

Ceci nous conduit au second grand problème épistémologique que soulève le conflit historique de l'empirisme et du nativisme : celui de la signification de la « sensation ». A relire aujourd'hui les discussions fameuses de Helmholtz et de Hering, etc., on ne peut qu'être frappé du rôle attribué par ces auteurs aux sensations élémentaires, qu'il s'agisse de sensations visuelles considérées comme purement rétiniennes, ou de leur combinaison avec des sensations kinesthésiques variées. Si, pour les partisans de l'innéité, les sensations à structure héréditaire commandent toute la constitution de l'espace, pour les « empiristes » l'espace sensori-moteur semble, lui aussi, contenir en son sein (une fois construit avec le secours de l'expérience), tout l'espace notionnel ultérieur, considéré comme un simple « abstrait » tiré de l'espace sensible. Autrement dit, même les auteurs qui, comme Lotze, Helmholtz et Wundt, réagissent contre le primat attribué illégitimement à la sensation visuelle et font une part à l'activité dans la construction de l'espace, limitent cette activité à un domaine encore extrêmement restreint (celui des mouvements oculaires pour l'espace visuel, etc.), comme si les actions et les déplacements du corps entier n'étaient pas à considérer dans leur totalité, ainsi que le supposera plus tard H. Poincaré.

Le nativisme pur est lié, chez Hering, à ce que l'on pourrait appeler une théorie de la sensation-copie, les sensations éprouvées sur la rétine ayant le pouvoir, grâce à leur organisation innée, de traduire directement les diverses sortes d'étendues externes (les sensations correspondantes des deux rétines se confondant alors en une seule). L'innéité de la faculté que posséderait la rétine de donner lieu à une prise de conscience directe de sa propre étendue se double ainsi d'une sorte de réalisme de la sensation, ne différant de celui qui caractérise le sensualisme

que par l'adjonction d'une notion d'harmonie préétablie entre la faculté héréditaire de percevoir l'espace et la réalité perçue.

C'est à ce réalisme de la sensation-copie que Helmholtz a eu le mérite d'opposer une conception des sensations-signes (« signes dont l'interprétation est livrée à notre intelligence »). Mais signes de quoi et signes utilisés en vue de quoi ? Qui dit signe dit que la chose signifiée est assimilée à un schème d'action quelconque : de quelle activité s'agit-il alors, en ce qui concerne les « signes locaux » ou, de façon générale, les sensations spatiales considérées comme signes ?

En un texte extrêmement suggestif, J. J. Ampère prête à son père, le grand physicien A. M. Ampère, l'opinion que voici :

> « Par partie représentative d'une sensation [opposée à la « partie affective »], il ne faut pas entendre la représentation d'un objet extérieur, ni même de ses qualités ; car la sensation, à parler vrai, ne représente rien ; elle naît en nous à l'occasion d'une cause extérieure à nous ; mais cette cause, qui est une certaine disposition des molécules matérielles, ne peut ressembler à une impression reçue par notre âme, pas plus qu'une cloche ne ressemble à un son. La philosophie moderne a rejeté avec raison ces prétendues images des choses, qui s'en détacheraient pour venir frapper nos sens et apporter à notre âme ces ressemblances des objets que Lucrèce appelait des simulacres ou des « membranes », Nos sensations ne représentent donc point les causes de nos sensations comme images de ces causes ; mais elles les représentent comme signes de leur action. »
>
> « Confondre le signe et la chose signifiée est une des erreurs les plus fréquentes à l'homme qui ne réfléchit pas. Comme disait mon père : « Le paysan ne peut concevoir que le nom qui est un signe ne soit pas inhérent à la chose signifiée, et que du fer ne s'appelle pas nécessairement du fer. » Ainsi faisons-nous pour nos sensations, signes de la présence des êtres qui les produisent, et que souvent nous ne distinguons pas de ces êtres » [1].

Mais, pour Ampère comme pour Maine de Biran, toute activité, susceptible d'utiliser ces signes, se réduisait à un effort volontaire du « moi », avec le double réalisme du sujet senti comme cause immédiate et de l'objet résistant. D'où les notions d'un « transfert » de la « causalité intérieure » sur les choses et d'un « transfert analogue » de la « juxtaposition continue » de nos sensations visuelles ou tactiles sur les corps, engendrant ainsi l' « espace réel » par analogie à l' « étendue phénoménale » [2] ?

1. *Philosophie des deux Ampère*, publié par J. BARTHELEMY SAINT-HILAIRE, 2e éd., Paris, Didier, 1866, p. 34.

2. *Ibid.*, p. 82.

Bien plus profonde est, nous semble-t-il, l'activité qui est à la source de la construction de l'espace : elle consiste en mouvements dont les coordinations, inconscientes et automatiques d'abord, puis intentionnelles, s'appuient certes sur les « signes » constitués par le donné sensible, mais de façon à incorporer les objets signifiés dans un réseau toujours plus complexe, permettant de les suivre et de les retrouver.

Or, c'est ici que se manifeste l'insuffisance des premières théories « empiristes », si exacts qu'aient pu être les faits sur lesquels elles se fondaient, dans le domaine trop restreint de motricité qu'elles ont envisagé. Selon Lotze l'impression sur un point donné de la rétine provoque un mouvement réflexe de direction déterminée, destiné à centrer l'image dans la zone centrale de vision nette : ce seraient ces mouvements élémentaires qui, associés aux divers points de la rétine, conduiraient à leur attribuer une fonction de « signe local », d'où la construction d'une intuition générale de l'espace. De même, selon Helmholtz, les « sentiments d'innervation » liés au fonctionnement des nerfs oculaires permettraient d'établir les positions des objets par rapport au corps, d'après les déplacements que les innervations impriment aux images [1]. Selon Wundt, nous l'avons vu, il y aurait « fusion » antérieure à la conscience, entre les sensations rétiniennes et celles liées à la rotation de l'œil, et ce seraient les perceptions élémentaires issues de cette synthèse qui constitueraient les « signes locaux complexes » auxquels croit cet auteur. Ebbinghaus, qui est nativiste quant aux dimensions de hauteur et de largeur, fait appel à des constructions analogues en ce qui concerne la profondeur, etc.

Mais, si exacte que soit la notion d'une connexion nécessaire entre les données rétiniennes et les mouvements de l'œil, deux réserves fondamentales sont à faire quant à une explication de la genèse de l'espace fondée essentiellement sur de tels mécanismes partiels et ce sont ces réserves qui conduisent à préciser le problème épistémologique soulevé par cette genèse.

La première est que, durant la période où se construit le plus activement l'espace sensori-moteur, c'est-à-dire durant la première année de l'existence, la vision est solidaire d'une activité d'ensemble dont elle ne constitue qu'un élément restreint. Un citadin, n'ayant jamais vu les Alpes de près, demandait un jour, en regardant une montagne en forme de pyramide assez régulière et vraiment peu pointue, comment les touristes qui en redescendaient avaient pu trouver place sur le

1. *Optique physiol*., p, 1005.

sommet, et même comment un seul individu arrivait à s'y asseoir sans se piquer fâcheusement l'arrière-train. Toute personne ayant grimpé tant soit peu, perçoit, au contraire, les montagnes autrement que le sujet pour lequel ces objets ne correspondent à aucun schème de conduite particulier. Il est évident que dans le cas du bébé il en est *a fortiori* de même : les tableaux visuels qui l'entourent ne constituent en rien un espace avant que les figures perçues aient été transformées en objets d'actions et qu'il se soit constitué entre ces objets un système de coordinations pratiques. La raison en est qu'un seul champ perceptif ne saurait suffire à déterminer un espace, l'espace étant le passage possible d'un champ à l'autre. Quant aux perceptions visuelles particulières, comme celles d'un jouet, d'une lampe ou d'un visage, ce n'est qu'une suite d'actions de manipulation, de déplacement, etc., qui leur permettront de s'organiser spatialement : ici encore l'espace ne résulte pas seulement de perceptions momentanées, mais surtout de la coordination possible des perceptions successives, et cette coordination n'est pas assurée par les seuls mouvements des muscles de l'œil, mais par l'activité tout entière. Certes, il existe, déjà sur le plan de la perception, une activité perceptive consistant à diriger les regards, à comparer, à analyser, etc. (et nous y reviendrons au § 4), mais la constitution de l'espace est loin de dépendre d'elle seule et suppose sa mise en relation avec l'ensemble des autres actions.

D'où le second point. Si le retournement d'un objet est nécessaire pour lui assurer une forme constante à trois dimensions, si les déplacements autour d'un objet fixe sont indispensables pour parvenir à une coordination des perspectives auxquelles il donne lieu, si les mouvements du regard sont la condition de l'évaluation d'une longueur, etc., comment faut-il caractériser la fonction épistémique essentielle du mouvement ou, plus précisément, de l'action sensori-motrice. Est-ce la « sensation » kinesthésique, l'impression musculaire, le « sentiment d'innervation » (s'il existe !), etc., qui constituent l'instrument de connaissance important à cet égard ? Il est évident que non, si la sensation est un « signe ». La « sensation » motrice n'est qu'un indice au même titre que la « sensation » visuelle, etc., et de ramener le mouvement à ses indices sensoriels revient à lui enlever sa vraie valeur de connaissance, au profit du signal par lequel il manifeste sa présence ou sa production.

L'essentiel de l'activité sensori-motrice est donc à chercher dans les « schèmes » d'ensemble, qui constituent l'annonce de ce que seront plus tard les opérations de la pensée, par opposition aux représentations imagées ou symboliques. Même si la prise de conscience de l'action ne procède qu'à partir de son résultat, pour remonter ensuite à contresens son cours naturel, c'est cependant le schème de cette action qui explique ce résultat et qui constitue ainsi l'élément opérant du savoir, par opposition aux points de repère signalétiques. II s'agit donc, en bref, de trouver une théorie de la perception et de l'activité perceptive

qui évite à la fois de réduire l'objet sur lequel porte l'action à ses indices sensoriels, et l'activité sensori-motrice qui s'exerce sur lui aux seules sensations internes qui en manifestent l'existence.

§ 3. L'ESPACE PERCEPTIF. B) L'INTERPRÉTATION « GESTALTISTE » DES FORMES GÉOMÉTRIQUES. — Au cours de tout le XIX[e] siècle, les auteurs de travaux expérimentaux dont nous venons de discuter les thèses ont cru à l'existence de « sensations » isolables (au moins théoriquement), qu'ils aient été « nativistes » ou « empiristes ». De plus, tous se sont accordés, dans l'interprétation de l'espace visuel, à conférer une importance privilégiée aux images rétiniennes ; les nativistes purs, comme Joh. Müller et Hering, sont même allés jusqu'à prêter à la rétine une conscience de sa propre étendue, comme si la perception de l'espace consistait à lire directement, sur l'image rétinienne, les distances, les directions et les formes. C'est par une double négation de l'existence des sensations isolées et du privilège attribué à la rétine, que débute au contraire la théorie des perceptions spatiales développée par la psychologie de la forme (ou de la *Gestalt).* Cette psychologie a, d'autre part, renouvelé le problème de la perception en le posant en des termes qui comportent une épistémologie implicite, d'un intérêt évident. Il vaut donc la peine de s'y arrêter spécialement et de préciser, à l'occasion de son examen critique, les positions de l'épistémologie génétique eu égard à la perception spatiale en générale.

On sait assez que, du point de vue de la psychologie de la forme, une perception n'est pas un composé d'éléments donnés au préalable (qui seraient les « sensations » de l'associationnisme atomistique), mais qu'elle constitue d'emblée une structure totale, parce que solidaire de l'équilibre du champ perceptif envisagé dans son ensemble. Même la perception d'un seul point isolé constitue une telle structure d'ensemble, car ce point est une « figure » qui se détache sur un « fond », perçu comme un espace à trois dimensions. Or, ces structures totales ou *Gestalten,* qui caractérisent donc la totalité de chaque champ perceptif comme toute figure particulière perçue à l'intérieur d'un champ, sont organisées selon des lois d'essence géométrique : ordre, symétrie, régularité, proportions, etc. La théorie de la Forme fournit ainsi la conception nouvelle d'une géométrie perceptive donnée dès le départ de la vie mentale, sans être liée à une hypothèse nativiste, et englobant la motricité sans recourir à l'expérience empiriste. En effet, les structures spatiales d'ensemble commandant à toute perception visuelle seraient dues à un équilibre, s'établissant en chaque cas, presque instantanément, entre les objets perçus, les rayons lumineux émanant d'eux, puis

frappant la rétine, et les courants nerveux déclenchés par son intermédiaire : la rétine n'est plus alors que l'un des chaînons de ce circuit total, et les « formes » perçues, loin de se confondre avec les images rétiniennes, résulteraient de la structure de ce tout indissociable, une fois l'équilibre atteint. Echappant simultanément à l'apriorisme et à l'empirisme, la théorie de la forme aboutit de la sorte à une phénoménologie de l'espace, appuyée sur un ensemble impressionnant de travaux expérimentaux.

Il faut, à cet égard, distinguer soigneusement les faits invoqués et les interprétations. Du point de vue des faits, la découverte essentielle des psychologues « gestaltistes » est celle d'une loi de « prégnance », exprimant que toute structuration s'effectue selon les formes les « meilleures », c'est-à-dire les mieux équilibrées et les plus simples possibles. Or, ces « bonnes formes », dont l'étude a été poussée très loin dans le domaine des structurations perceptives se trouvent déterminées par un ensemble de critères spatiaux, essentiellement euclidiens. C'est ainsi que parmi les différentes manières, logiquement équivalentes, de relier entre eux, au moyen de lignes virtuelles, des éléments discontinus présentés simultanément, la perception construit ses figures en fonction de la « proximité » des points considérés (cette notion de proximité, qui est fondamentale dans l'espace perceptif, étant pris par la plupart des Gestaltistes dans le sens des distances euclidiennes relatives et non pas du « voisinage » topologique). De même les figures symétriques s'imposeront plus facilement que les asymétriques, les figures à rapports métriques simples, que les irrégulières, les proportionnées plus que les disproportionnées, etc. Il s'ensuit que les perceptions les plus primitives seraient susceptibles d'appréhender les figures euclidiennes élémentaires, telles que les cercles, carrés, triangles, etc., perçues directement à titre de formes d'ensembles et non pas composées progressivement à partir de sensations isolées préalables. Un point important à noter, à cet égard, est l'existence, chez des animaux de niveaux variés (mammifères, oiseaux et jusque chez les insectes), d'une récognition de ces figures géométriques, avec « abstraction », plus ou moins poussée des formes dans un ensemble donné, selon le degré de développement de l'espèce animale considérée.

D'autre part, tout objet vu en perspective ou en profondeur serait d'emblée perçu selon certaines structurations générales, telles que la constance des formes (p. ex., une roue de voiture perçue projectivement comme une ellipse est cependant reconnue d'emblée comme circulaire) et la constance des grandeurs (l'objet éloigné est vu selon sa grandeur réelle jusqu'à une certaine distance). Il existerait ainsi à tous les niveaux une certaine coordination des perspectives et une certaine métrique perceptive. Tout objet étant, d'autre part, perçu en référence avec d'autres ou avec son fond, la perception comporterait également un système élémentaire de coordonnées, fourni par les verticales et les horizontales (en largeur et en profondeur). Enfin, la « transposition » des formes (récognition des figures rapetissées ou agrandies), et la

perception des proportions constitueraient un principe de similitude. Bref, la perception comporterait dès le départ une certaine géométrie, à la fois euclidienne et projective.

Si une telle description des faits était exacte sans retouches ni atténuations, il existerait donc à tous les niveaux de développements un espace perceptif déjà organisé, analogue à celui qu'admettaient Kant et les nativistes les plus résolus, mais non inné et déterminé seulement par les lois d'équilibres régissant le circuit total des influences externes et des courants nerveux. En quoi consistent alors ces lois d'équilibre ? C'est ici que débute l'interprétation.

Etant donné le fait (d'observation et d'expérience) que toute perception constitue toujours une totalité, et non pas une association entre éléments donnés isolément au préalable, la théorie de la forme en conclut que cette totalité est irréductible à la somme de ses éléments et qu'elle est par conséquent réfractaire à toute composition additive. Or, si un cercle, un carré, un système de coordonnées, un ensemble de rapports proportionnels, etc., paraissent relever tous de ce modèle de composition additive que constituent les groupes géométriques (groupe des déplacements et sous-groupe des rotations, mesures, groupe des similitudes, etc.), c'est que les structures, correspondant aux êtres rationnels envisagés par le géomètre, sont loin d'épuiser l'espace perceptif et ne constituent même, à proprement parler, que des cas exceptionnels dans l'ensemble des « formes » ou « Gestalten » ordinairement perçues. La règle, dans le domaine de l'organisation perceptive, c'est au contraire la déformation des parties en fonction de la totalité : c'est donc le règne de ce que la psychologie classique appelait faussement les « illusions » de la perception, c'est-à-dire précisément la manifestation des contraintes exercées par la totalité de la figure sur certaines de ses parties. Et alors, par un paradoxe sur lequel il conviendra d'insister, il se trouve que, si les « bonnes formes » se confondent, dans les grandes lignes, avec les figures simples et régulières de l'espace euclidien, l'immense majorité des « formes » perçues habituellement se trouvent être des formes dont la composition est irréductible aux lois de la géométrie. C'est ainsi que les théoriciens de la *Gestalt* ont été unanimes à incorporer à leur tableau des faits, et à utiliser dans leur argumentation en faveur du primat des « totalités », les phénomènes bien connus d' « illusions » ou de déformations spatiales perceptives : une droite entrecoupée de hachures paraît plus longue que la même droite sans hachures (illusion d'Oppel-Kundt), une droite prolongée de

pennures paraît plus longue si celles-ci sont orientées vers l'extérieur (Müller-Lyer), un cercle inscrit concentriquement dans un autre un peu plus grand paraît de plus long diamètre qu'un même cercle contenant un cercle plus petit concentrique (Delbœuf) ; les angles aigus sont surestimés par la perception, et les angles obtus sous-estimés ; le petit côté d'un trapézoïde est surévalué ; etc. Et surtout deux grandeurs voisines ne sont distinguées qu'à partir d'un certain seuil d'égalité, lequel est lui-même proportionnel aux grandeurs comparées en jeu (loi de Weber) : en ce cas, la transposition et la proportionnalité perceptives jouent dans le sens de l'erreur et non pas de la relativité objective. De même toute différence notable de grandeurs est accentuée par effet de « contraste », etc.

S'il existe un espace perceptif organisé d'emblée, il comporte donc cette première grande différence avec l'espace de la géométrie qu'il est, à tout le moins, sujet à un ensemble considérable de déformations systématiques. Or, répétons-le, l'ambition paradoxale de la théorie de la Forme consiste à vouloir expliquer, selon le même principe des totalités à composition non additive, les formes géométriques comme telles et les déformations de l'espace perceptif, tandis que l'opposition de ces deux sortes de réalités constitue peut-être le fait le plus significatif à considérer par une épistémologie de la perception.

Mais, avant d'entreprendre une telle discussion, encore convient-il de faire une réserve au sujet des données expérimentales elles-mêmes, sur lesquelles se fonde la théorie de la Forme : sans être contestables à ce niveau achevé de l'évolution des perceptions qu'est celui de l'homme adulte, elles sont cependant incomplètes et même souvent inexactes en ce qui concerne cette évolution chez l'enfant. Pour ce qui est, en effet, du problème capital des constances perceptives, lequel commande toute l'interprétation à donner des structures de la perception spatiale, il n'est pas avéré que la constance des grandeurs soit donnée indépendamment du développement [1]. De même la constance des formes s'élabore durant la première année en fonction des progrès de la manipulation (renversement de l'objet, etc.) [2] Le schème de l'objet permanent se construit lui-même et c'est en fonction de cette construction que les constances de la forme et de la grandeur sont attachées à l'objet, ce qui montre assez le rôle de l'action dans ces constructions [3]. Pour ce qui est de l'organisation générale du champ perceptif, il existe une

1. Voir PIAGET et LAMBERCIER, *Arch. de Psychol.*, XXIX (1943), p. 255- 308 et LAMBERCIER, *ibid.*, XXXI (1946).

2. PIAGET, *La construction du réel chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé, chap. I et II.

3. PIAGET, *La psychologie de l'intelligence* (coll. A. Colin), p. 130-140.

grande différence entre l'enfant et l'adulte eu égard au système des coordonnées : s'il est sans doute exact que toute perception suppose des éléments de référence, ceux-ci ne sont nullement organisés d'emblée selon des axes généraux et on assiste à une généralisation graduelle, jusque vers 9-10 ans, dans ce domaine comme dans les autres secteurs de l'activité perceptive » [1]. Quant aux « bonnes formes » elles-mêmes, le caractère progressif de leur « abstraction », chez l'animal et chez le bébé, ainsi que l'évolution très lente de leur récognition au sein de figures enchevêtrées ou incomplètes [2] montrent assez qu'ici encore, il y a développement.

Si de la description des faits, ainsi rectifiée, nous passons maintenant à leur interprétation, nous nous trouvons en présence d'un problème qui dépasse de beaucoup les questions précédentes et qui rejoint, mais sans quitter le terrain précis de la perception spatiale, celui de l'épistémologie de la perception en général.

Pour la théorie de la forme, dont les analyses proprement psychologiques se sont prolongées très rapidement en une conception épistémologique d'ensemble, les lois d'organisation de la perception traduisent une géométrie qui est simultanément celle du monde physique du moins en certains de ses aspects, et celle de l'organisme lui-même : les *Gestalten* exprimeraient, en effet, les lois d'équilibre régissant tous les systèmes à composition non additive (c'est-à-dire tels que les parties dépendent de la structure du tout) comme les champs électromagnétiques, ou les « champs » de courants nerveux » [3], etc. Il existerait ainsi des « formes physiques » [4] autant que des « formes » physiologiques et psychologiques, et c'est dans la conformité générale de ces « formes » que se trouverait le secret de l'objectivité de notre géométrie perceptive ; ses déformations traduiraient alors les caractères effectifs de l'espace réel, dans les domaines où la nature des champs de force entraîne l'existence de compositions non additives, par opposition aux relations simples données entre objets juxtaposés.

Une telle solution serait donc de caractère essentiellement phénoménologique, les formes d'équilibre en jeu étant censées demeurer indépendantes de toute construction et régir à la fois les objets et le sujet, quel que soit le niveau d'évolution de celui-ci.

1. H. WURSTEN, L'évolution des comparaisons de longueurs de l'enfant à l'adulte, *Arch. Psychol.*, XXXII (1947), p. 1-144.

2. P. A. OSTERRIETH, Le test de copie d'une figure complexe, *Arch. Psychol.*, XXX (1945), p. 205-353.

3. P. ex. les champs polysynaptiques, voir SEGAL, *Journ. de Psych.*, t. 36 (1939), p. 21-35.

4. W. KŒHLER, *Die physischen Gestalten*, Erlangen, 1920.

Mais cette interprétation soulève deux sortes d'objections, les unes du point de vue de ce que nous appelions *(Introd.*, § 7) l'épistémologie génétique « restreinte », et les autres du point de vue de l'épistémologie génétique « généralisée ».

Du point de vue « restreint », d'abord, il est évident que la réduction des formes géométriques perceptives à des formes d'équilibre de caractère universel ne conserve sa valeur que dans la mesure où de telles « formes » psychologiques s'imposent indépendamment du développement. Dans la mesure, au contraire, où intervient une construction génétique, l'activité du sujet, rendue inutile dans l'interprétation « gestaltiste », reprend sa valeur, ce qui conduit à une autre conception des rapports entre le sujet et l'objet que celle d'une indifférenciation radicale. Réciproquement, le rôle des « formes physiques » perd d'autant en importance que les formes perceptives correspondantes sont élaborées par l'activité du sujet.

Mais c'est du point de vue « généralisé » que la notion de « formes physiques » est le plus discutable. Soutenir que les droites, les cercles, les carrés, etc., perçus par le sujet, lui sont imposés par les lois d'équilibre qui régissent tous les phénomènes à composition non additive, c'est en effet admettre : 1° Le primat, dans la réalité physique des systèmes à composition non additives (p. ex., selon Kœhler, la répartition des charges électriques dans un conducteur homogène et isolé), par opposition aux systèmes additifs (p. ex., selon Kœhler, la composition mécanique des forces) ; 2° L'existence des « formes physiques » dans la réalité elle-même, indépendamment de l'esprit du physicien.

Or, sur le premier point, on peut se demander si la distinction des deux types de composition, additive et non additive, sur laquelle se fonde la théorie de la « Gestalt », ne repose pas sur une confusion entre deux sortes de critères. L'un serait la solidarité entre les parties et le tout, c'est-à-dire le fait que l'élément ne saurait exister sans la totalité, et réciproquement ; mais une telle notion de la totalité peut aussi s'appliquer à des systèmes à composition additive, comme les « groupes » : dans le « groupe » des déplacements, p. ex., un déplacement particulier ne saurait être défini qu'en fonction de l'ensemble (c'est-à-dire des dix paramètres qui le déterminent), sans exclure pour autant que deux déplacements puissent être additionnés l'un à l'autre en un déplacement total, ou soustraits l'un de l'autre [1]. Le second critère

1. La chose est encore plus claire dans le « groupe » additif des nombres entiers positifs et négatifs : un nombre n'existe pas indépendamment des autres et cependant les nombres s'additionnent entre eux.

serait la déformation des parties en fonction du tout. Or cette seconde notion de la totalité, qui correspond bien aux totalités perceptives, par opposition aux « groupes » et aux « groupements » opératoires, s'applique effectivement à certains systèmes physiques, mais essentiellement à ceux dans lesquels intervient un mélange, c'est-à-dire le hasard. En effet, c'est lorsque se produit un brassage entre les différentes composantes d'une totalité que celle-ci n'apparaît plus comme une simple résultante des parties, mais comme une réalité propre susceptible d'altérer ces dernières (cf. les énergies d'échange, etc.). La réalité propre du tout est alors liée à un système de compensations probables, telles qu'aucune des composantes partielles ne se présenterait de la même manière indépendamment du système total. Au contraire, en une totalité par composition additive, telle qu'un groupe géométrique, les éléments sont également solidaires du tout, mais ils ne sont plus déformés par lui comme ils le sont en cas de brassage.

C'est la confusion entre les deux sortes de critères qui permet à la théorie de la Forme d'expliquer simultanément, et au nom des mêmes principes, les « bonnes formes » de la géométrie, qui sont en fait des produits de composition additive, et les déformations propres aux illusions perceptives : celles-ci résultent, comme les « formes physiques » auxquelles on les compare, de compositions non additives, mais (nous le verrons au § 4) par intervention du hasard. Du fait qu'il y a, dans tous ces cas (c'est-à-dire que la composition soit additive ou non), solidarité des parties et du tout, la théorie de la Forme en conclut que cette solidarité entraîne *ipso facto* la possibilité de déformations : d'où sa facilité à passer de l'espace perceptif à l'espace géométrique ou l'inverse. En réalité, le problème subsiste entier, et nous le reprendrons au § 4.

Quant aux structures physiques, telles qu'elles sont actuellement connues, le fait général est la solidarité des éléments et des totalités, mais cette solidarité ne détermine donc pas à elle seule l'existence de « Gestalt physiques », puisqu'elle s'applique aussi bien aux compositions additives que non additives. Tandis que les systèmes additifs sont représentés par la mécanique, les systèmes non additifs impliquent un facteur de brassage, donc d'irréversibilité, et de déformation, manifesté par des « transformations non compensées » comme on dit en thermodynamique. La grande coupure à introduire au sein du monde physique est ainsi à chercher entre les phénomènes réversibles et les processus irréversibles, et ces derniers, qui correspondent aux « Gestalt

physiques » de Kœhler, ne constituent donc pas nécessairement un fait premier, comme le voudrait la théorie de la Forme, mais soulèvent toute la question des rapports entre le hasard et la causalité mécanique [1]. Or, quelle que soit la solution que l'on donne à ce dernier problème, on ne voit guère comment les compositions non additives expliqueraient la genèse des « bonnes formes » de la géométrie : lorsqu'une forme simple et régulière finit par résulter d'un jeu de brassages fortuits, c'est en vertu d'un jeu de compensations entre les déformations, lequel imite, mais n'engendre pas l'ordre géométrique.

Mais, quoi qu'il en soit de cette discussion (que nous retrouverons au § 4 à propos de la perception en général), le grand problème épistémologique que soulève l'interprétation propre à la théorie de la Forme est de savoir si les « formes physiques » existent dans la réalité objective indépendamment de l'esprit du physicien. Il faut, à cet égard, distinguer deux questions, correspondant à nouveau aux compositions additives et non additives. Dans le cas des totalités résultant d'un mélange, pourquoi le tout ne peut-il être calculé par additions des parties ? C'est ou bien que le hasard existe objectivement ou bien qu'il est l'expression de notre ignorance du détail des causes. Mais, dans l'un et l'autre cas, il n'est assurément conçu que relativement à nos opérations de composition combinatoire. Il est donc difficile d'admettre qu'il faille tout d'abord réifier les structures physiques non additives pour en tirer ensuite l'explication de notre esprit, au lieu d'expliquer simultanément, et les unes par les autres, ces formes physiques et celles de notre structure mentale. Mais ce qui nous intéresse pour le moment est de savoir s'il est légitime de réifier les formes géométriques elles-mêmes à titre de formes générales d'équilibre des choses pour en tirer l'explication des *Gestalten* propres à nos perceptions. Or, c'est ici que le cercle paraît manifestement vicieux. Que veut-on dire, en effet, en attribuant à la nature la possession de droites, de cercles ou d'autres formes géométriques particulières ? Il est assuré qu'elles n'y existent pas à l'état de réalisation entière, puisque tant les émissions d'énergies que les structures de la matière sont discontinues : l'horizontale caractérisant le niveau d'une eau tranquille n'a plus rien d'un plan ou d'une droite à l'échelle microscopique, etc. Les droites ou les ellipses ; etc., seront-elles alors constituées par des lignes de force, ou par les

1. Nous consacrerons un chapitre spécial à ce problème, à propos de l'épistémologie physique (voir chap. VI).

trajets des corpuscules dépourvus eux-mêmes de structure géométrique simple ? Mais précisément, plus avance l'analyse microphysique de l'espace et plus se complique la géométrie des éléments de la réalité : cette géométrie n'est, p. ex., pas archimédienne, c'est-à-dire que les formes métriques élémentaires n'y sont justement pas représentées. Bref, les formes géométriques « simples » que nous découvrons dans la nature, telles que le plan, ou la sphère réalisée par une bulle de savon, les divers polyèdres constitués par les cristaux, etc., sont toujours relatives à une certaine échelle d'observation et traduisent la géométrie de l'observateur autant que les propriétés de la matière observée. Si l'explication des formes perceptives par l'hypothèse des « formes physiques » soulève déjà des difficultés considérables du point de vue d'une épistémologie génétique « restreinte », elle s'enferme donc dans un véritable cercle vicieux du point de vue de l'épistémologie génétique « généralisée ».

§ 4. L'ESPACE PERCEPTIF. C) L' « ACTIVITE PERCEPTIVE » ET L'ÉPISTÉMOLOGIE GÉNÉTIQUE DE LA PERCEPTION. — Les recherches que nous avons pu faire sur le développement des perceptions chez l'enfant nous ont conduit à opposer à l'interprétation « gestaltiste » un autre système de notions explicatives, dont nous voudrions dégager ici leur signification épistémologique en ce qui concerne l'espace perceptif, d'une part, et la valeur de connaissance de la perception en général, d'autre part.

Toute perception est un système de rapports, aucun élément n'étant jamais perçu à l'état isolé : tel est le fait fondamental sur lequel a insisté la théorie de la Forme, et que nous pouvons retenir comme point de départ de ce qui suit, indépendamment des interprétations rejetées au paragraphe précédent.

Mais en quoi consiste cette relativité première, inhérente à la perception ? Elle est à la fois très proche et très différente de celle qui caractérise l'intelligence. Très proche parce qu'elle constitue aussi un principe de composition. Mais très différente, parce que, contrairement à une relation logique telle que $A < B$, qui ne déforme pas les valeurs de A et de B par le seul fait de les comparer l'une à l'autre, un rapport perceptif déforme, dans la règle, les valeurs mises en relation : la perception du rapport $A < B$ [1] aura pour effet ordinaire de surévaluer légèrement B et de dévaluer légèrement A, autrement dit d'accentuer la différence

1. P. ex. sous la forme d'une comparaison de deux lignes ou de deux tiges A et B.

A < B, sauf si cette différence est objectivement très petite ; en ce dernier cas elle sera alors sous-estimée et le rapport sera perçu sous la forme d'une égalité illusoire A = B (conformément à la loi de Weber). Seul le terme de passage entre le rapport perceptif accentuant la différence A < B et le rapport illusoire A = B donnera alors une perception exacte de A < B, sans surévaluation ni dévaluation de l'inégalité, mais cette perception correcte demeurera donc l'exception, parce que constituant le point de transition ou de compensation entre deux déformations contraires.

Les deux problèmes préalables de la connaissance perceptive sont donc de comprendre, d'une part, la raison de ces déformations systématiques, et, d'autre part, la nature des compositions perceptives fondées sur de tels rapports.

Or, la raison des déformations systématiques de la perception est, à elle seule, d'un grand intérêt épistémologique. La connaissance opératoire ou rationnelle cherche à fournir une description complète des objets analysés, du point de vue auquel ils sont envisagés par l'opération en jeu, ce qui aboutit à une compréhension simplifiée, puisque relative à un certain système opératoire, mais exacte. Au contraire la perception est essentiellement probabiliste et procède par une sorte de tirage au sort (d'où l'importance de la comparaison avec les phénomènes de mélange, sur laquelle nous insistions au § 3). En effet, lorsque deux lignes A et B sont comparées perceptivement l'une à l'autre, leur estimation respective n'est pas la même selon le point ou le segment centré par le regard (extrémité, milieu, etc.), parce que les éléments centrés sont relativement dilatés et les éléments non fixés relativement contractés. Or, tous les points (ou segments égaux) de l'une des deux lignes A et B pourraient être choisis comme centre de fixation du regard, et associés à tous les points (ou segments égaux) de l'autre. Si cette comparaison se faisait selon toutes les associations possibles, et encore simultanément, elle aboutirait à une relation objective entre les deux lignes. Mais il se trouve que certains points seulement sont fixés sur l'une et l'autre ligne et que la comparaison procède ainsi par tirage au sort parmi les points de fixation possibles, ce qui provoque les déformations si les lignes comparées sont inégales (et cela même si les points centrés sur chacune des deux se trouvent dans des positions relatives équivalentes : milieu, etc.).

Un tel tirage au sort obéit alors à des lois de probabilité dont les principes sont, dans les grandes lignes, les suivants. D'une part, toute centration [1] entraîne donc la surestimation de la zone centrée et la dépréciation des éléments périphériques : c'est ainsi qu'il suffit, lors de la comparaison d'un étalon fixe avec des grandeurs variables, que l'étalon

1. Tactile aussi bien que visuelle, etc.

soit plus souvent ou mieux regardé, en tant même qu'étalon, pour être surévalué de ce seul fait[1]. Mais, d'autre part, il va de soi que ces dilatations et contractions respectives des zones centrales et périphériques alternent sans cesse entre elles, puisque ce qui est central peut devenir périphérique et réciproquement au fur et à mesure des déplacements du regard : la décentration, c'est-à-dire la mise en relation des centrations différentes et successives est donc facteur de correction et de régulation, selon une loi générale que nous retrouverons sous d'autres formes et en bien d'autres domaines que la perception. Il s'ensuit que si les lignes comparées A et B sont égales, chacune est surévaluée à tour de rôle par la centration et que, si aucune cause ne détermine un regard préférentiel sur l'une des deux (p. ex. en tant que choisie comme étalon), les déformations alternatives se compenseront par décentration. Si, au contraire, les lignes sont inégales, A > B, et assez différentes l'une de l'autre, les points fixés avec le plus de probabilité seront ceux de la partie de B qui dépasse A, d'où un renforcement de la différence A > B [2]. Si, au contraire, la différence est minime entre A et B, dans le rapport objectif A > B (et qu'elle est inférieure au coefficient de dilatation de la ligne A lorsque cette ligne est centrée, d'où les visions successives contradictoires A > B et A < B), les points différentiels sont d'autant moins probablement fixés que cette différence est plus petite, d'où une égalité illusoire (A = B, résultant de l'équilibre entre les visions successives A > B et A < B), qui caractérise ce que l'on appelle le seuil différentiel. Or, comme ces probabilités sont fonction du rapport entre les grandeurs considérées, le seuil différentiel présente une étendue proportionnelle à ces grandeurs : cette proportionnalité constante est exprimée par ce qu'on appelle la loi de Weber-Fechner, qui constitue donc un cas particulier de la loi des centrations relatives et comporte, comme cette dernière, une explication probabiliste fondée sur le calcul des combinaisons entre les points (ou les segments) possibles de centrations [3].

Cela dit, il est clair que si, dans la règle, les rapports perceptifs sont ainsi déformants en vertu de leur nature statistique, et non pas adéquats, avec rigueur, aux données objectives qu'ils traduisent, ils ne sauraient être composés entre eux selon des lois logiques : leur composition résultera elle-même de combinaisons probables et non pas opératoires. Examinons d'abord en quoi consiste cette composition, puis nous chercherons à dégager la nature de l'activité combinatoire d'ordre perceptif qui en assure la réalisation.

Si nous nous référons, pour caractériser la structure des opé-

1. Voir PIAGET et LAMBERCIER, *Arch. de Psychol.*, XXIX (1943), p. 173.

2. Ce renforcement peut être calculé en fonction de ce mécanisme des « centrations relatives ».

3. Voir J. PIAGET, Essai d'interprétation probabiliste de la loi de Weber et de celle des centrations relatives, *Arch. de Psychol.*, XXX (1944), p. 95-138.

rations de la logique qualitative, aux « groupements » décrits au § 3 du chap. I, nous constatons, en effet, qu'aucun des critères du groupement ne s'applique aux compositions des rapports perceptifs, ce qui revient précisément à dire ce qu'a sans cesse soutenu la théorie de la Forme : à savoir que les compositions perceptives ne sont pas « additives ». Les rapports perceptifs ne sont, en effet, pas transitifs, c'est-à-dire que la composition de deux d'entre eux n'en détermine pas un troisième univoquement : si p. ex. A et B puis B et C sont confondus en vertu de la loi de Weber, on peut avoir la succession A = B ; B = C et A < C. Les rapports perceptifs ne sont pas réversibles, puisque leurs déformations mêmes impliquent sans cesse des « transformations non compensées » [1] : c'est ainsi qu'une suite d'éléments gradués ne donnent pas lieu aux mêmes estimations perceptives selon qu'ils sont comparés en ordre ascendant ou descendant. Les rapports perceptifs ne sont donc pas non plus associatifs, puisque la perception finale d'une suite de perceptions successives dépend du chemin parcouru. Ils ignorent toute identité générale puisqu'on ne saurait retrouver inchangée une perception de départ : p. ex. la température d'une chambre paraît plus élevée, ou moins, si l'on rentre après être sorti un instant au froid, etc. Enfin la perception ignore toute distinction tranchée entre la tautologie et l'itération, puisque la répétition d'une même perception la déforme, mais sans rapports numériques simples.

De façon générale, on voit ainsi que la connaissance perceptive, même limitée à son domaine propre qui est celui du contact direct avec l'objet, est, non seulement déformante, mais encore foncièrement irrationnelle en ses compositions les plus élémentaires. Il est clair, en ces conditions, que la perception des « bonnes formes » géométriques, telles qu'un cercle, un carré, etc., ne constitue pas un fait premier, mais un cas particulier dans lequel les mécanismes perceptifs aboutissent à des rapports adéquats à l'objet à cause des relations objectives privilégiées qui se trouvent en jeu dans ces figures : l'égalité des rayons du cercle, celle des côtés du carré ou des angles droits, etc. sont l'occasion de décentrations ou compensations complètes, tandis que dans la perception d'un rectangle ou d'une ellipse, la longueur peut dévaluer la largeur, etc.

Mais il reste la question de comprendre comment, malgré ses déformations et l'illogisme de ses compositions, la perception parvient à appréhender des formes bien structurées. Or, sur ce

1. Voir *La psychologie de l'intelligence* (coll. A. Colin), p. 83-86.

point, l'analyse génétique met en évidence une dualité remarquable de plans, dans les mécanismes de la perception, dualité qui échappe lorsqu'on se borne à expérimenter sur l'adulte. Lorsque l'on compare les perceptions propres aux divers âges successifs, on constate que certains effets évoluent simplement dans le sens d'une atténuation progressive avec le développement, tandis que d'autres se renforcent de façon constante ou se constituent même en cours de route, en opposition qualitative avec les précédents.

Les facteurs dont l'importance diminue avec l'âge sont précisément ceux que nous venons de rapporter aux centrations simples ou relatives. Les déformations dues à la centration sont en principe les mêmes à tout âge, mais elles s'atténuent avec le développement, comme si la décentration gagnait en importance. Cela revient à dire (puisque les effets de centration se traduisent sous forme de transformation non compensées) que les compensations dues aux décentrations augmentent avec l'âge, et que la perception s'engage quelque peu dans la direction de la réversibilité opératoire.

Mais, en opposition avec les facteurs primaires de centration, il est un grand nombre d'effets dont l'importance s'accroît avec l'âge et qui sont tous caractéristiques d'une activité proprement dite, par opposition au caractère réceptif de la perception initiale. Le terme de réceptif doit d'ailleurs être pris en un sens relatif puisque la centration (visuelle, tactile, etc.) est déjà elle-même une action, tenant de l'exploration et impliquant le choix des points permettant d'embrasser le plus grand nombre de rapports possibles à la fois. Mais, si elle est déjà active, elle l'est moins que les activités perceptives débutant avec la décentration et consistant en analyses, transports (spatiaux ou temporels), comparaisons (doubles transports appliquant, sur chacun des deux termes à comparer, les caractères perçus sur l'autre) transpositions (= transports de rapports), anticipations, etc., c'est-à-dire en activités sensori-motrices toujours plus intégrables dans les mécanismes de l'intelligence elle-même. Or, ce sont ces actions proprement dites de la perception qui constituent l'activité combinatoire d'ordre perceptif conduisant aux compositions de formes, c'est-à-dire aux structurations des rapports selon des ensembles plus ou moins cohérents [1].

Bref, en plus de chaque perception actuelle, il est nécessaire de distinguer l'action des perceptions successives les unes sur les autres : c'est cet ensemble d'actions que nous réunissons sous le nom d' « activité perceptive ». Si nous appliquons maintenant à la construction de l'espace perceptif cette distinction entre

1. Pour le détail de cette « activité perceptive » voir PIAGET, *La psychologie de l'intelligence chez l'enfant*, chap. III ; PIAGET et INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, chap. 1 ; PIAGET et LAMBERCIER, *Arch. de Psychol.*, XXX (1944), p. 139.

la perception en tant que relativement réceptive et l'activité perceptive elle-même, il est clair que c'est de cette dernière que relève la structuration progressive de l'espace par opposition aux rapports élémentaires donnés dès la centration immédiate. En effet, si l'on distingue, dans l'espace perceptif comme dans l'espace opératoire, les rapports de caractère topologique (continu, voisinage et séparation, enveloppements avec rapports d'extériorité, d'intériorité et de frontière, et enfin ordre linéaire ou cyclique), les rapports projectifs (perspectives, etc.) et les rapports euclidiens (similitudes, distances ou longueurs, coordonnées et mesure), il apparaît ce qui suit : 1° Seuls les plus simples des rapports topologiques sont donnés dès la centration perceptive, parce que ces rapports demeurent intérieurs aux éléments centrés et qu'ils sont perçus de proche en proche en vertu des facteurs les plus primitifs de la perception (« proximité » engendrant le voisinage, etc.) ; 2° les rapports projectifs relèvent au contraire d'une coordination de points de vue successifs qui supposent une activité perceptive étroitement liée aux actions en général et à la motricité du sujet ; 3° les rapports euclidiens, enfin, impliquent une coordination des figures ou des objets eux-mêmes, qui suppose les activités combinatoires de transports, transpositions, etc., liées à leur tour aux manipulations et aux déplacements du sujet.

A commencer par la fin, il est facile de montrer que les coordonnées perceptives (horizontale et verticale), dont nous avons déjà vu que, loin d'être données dès le départ, elles se construisent peu à peu jusque vers 8-9 ans, dépendent de toute une activité de comparaison et de mise en relations (entre les objets considérés et les éléments de référence), qui dépasse de beaucoup la perception simplement réceptive. Toute perception d'un élément quelconque suppose, il est vrai, à tous les niveaux, un système de référence fourni par les autres objets du « champ », ne serait-ce que par le « fond » lui-même. Mais, de ces systèmes momentanés de référence à un système stable, impliquant la permanence des axes horizontaux et verticaux, il y a toute une série de paliers à franchir, qui relèvent précisément d'une activité perceptive toujours plus riche, finissant par s'intégrer dans l'intelligence elle-même (voir § 5). De même, la constance des grandeurs, qui constitue sans doute le plus typique des rapports euclidiens de caractère perceptif, n'est acquise définitivement que vers 9-10 ans, et suppose dès le départ une activité perceptive caractérisée par certaines régulations et décentrations. Si les jeunes sujets sous-estiment les grandeurs en profondeurs, la plupart des adultes les surestiment par surcompensation ! C'est bien là la preuve qu'il intervient ici une activité régulatrice, par opposition à la passivité relative de la perception pure. La constance des formes elles-mêmes, comme d'ailleurs celle des grandeurs, s'élabore sous ses formes frustres au cours de la

première année, en fonction de la construction du schème des objets permanents, c'est-à-dire de l'intelligence sensori-motrice entière, dont l'activité perceptive n'est qu'un cas particulier.

Quant aux rapports projectifs construits par la perception, il va de soi qu'ils dépendent eux aussi d'une activité perceptive complexe, puisqu'ils sont solidaires des précédents : tant l'estimation des grandeurs à distance malgré la vision projective rapetissée que la constance des formes au sein de déformations perspectives variées supposent, en effet, une structuration simultanément euclidienne et projective, qui est liée à l'ensemble des actions du sujet (déplacements et manipulations), c'est-à-dire de son intelligence sensori-motrice autant que de son activité perceptive.

Seuls, par conséquent, certains rapports topologiques élémentaires sont donnés dans la perception immédiate, indépendamment d'une activité plus complexe. Le « voisinage » correspond ainsi à la « proximité », l'un des facteurs les plus primitifs de la perception ; la « séparation » correspond aux distinctions sensorielles et le continu à l'absence de distinction de proche en proche ($A = B$; $B = C$ mais $A < C$). Cela ne revient pas à dire, cependant que ces rapports spatiaux essentiels soient donnés indépendamment de toute activité, c'est-à-dire que les perceptions les plus réceptives qui les fournissent soient elles-mêmes absolument passives : elles ne le sont que relativement aux activités plus poussées qui engendrent les rapports projectifs et euclidiens. Les proximités, distinctions et continuités, qui fondent les rapports spatiaux fondamentaux dépendent, en effet, eux-mêmes de ces actions initiales que sont les centrations du regard, du toucher, etc., et par conséquent de l'échelle des phénomènes relativement aux organes sensoriels. Les rapports spatiaux les plus primitifs témoignent donc déjà d'une interaction indissociable entre le sujet et les objets, et non pas d'une réception pure du sujet par rapport aux objets.

Ceci nous conduit à l'épistémologie de la perception en général. A considérer les relations entre la perception sous son aspect le plus réceptif et l'activité perceptive sous son aspect sensori-moteur, nous sommes obligés de conclure que la perception ne constitue point une connaissance qui se suffise à elle-même. Deux cas sont d'ailleurs à distinguer : la perception d'objets dits « significatifs » (dans le vocabulaire gestaltiste), c'est-à-dire à signification extrinsèque et dont la signification est donc relative à une action quelconque (p. ex. un marteau ou un bâton) et la perception des figures ou des formes à signification intrinsèque, c'est-à-dire ne dépassant pas le domaine des rapports simplement spatiaux.

Dans le premier cas, il va de soi que la perception ne dépasse pas le niveau, d'un simple indice : la connaissance du marteau ou du bâton n'est pas donnée dans la simple figure perceptive ou

sensible de ces objets, mais bien dans l'action qui les utilise d'une manière ou d'une autre, et la perception ne remplit que la fonction d'un indice par rapport à ces actions. L'élément perceptif joue alors, à l'égard de l'action, le même rôle que l'image à l'égard du concept, c'est-à-dire celui d'un signifiant par rapport à son signifié (à sa signification). Mais, dans le cas de l'image, le signifiant est différencié en tant que tel, et constitue ainsi un symbole, tandis que, dans le cas de la perception, l'élément perceptif est moins différencié de l'élément moteur et appartient au même schème de l'objet perceptible et utilisable : la perception n'est donc qu'un indice, et non pas un symbole, l'indice étant justement à définir comme un signifiant relativement indifférencié, parce que correspondant à un simple aspect de l'objet signifié et constituant sans plus une partie du schème de cet objet.

Or, dans le cas des « formes » à signification intrinsèque et non plus extrinsèque, il en va exactement de même comme l'avaient déjà vu Ampère et Helmholtz (voir § 3), lorsqu'ils considéraient la sensation comme un « signe », sans peut-être en tirer toutes les conséquences que cette affirmation comporte. La seule différence est que l'action significative n'est plus ici une action quelconque d'utilisation, mais une activité perceptive ou sensori-motrice. Mais si l'on admet ce qui précède quant aux différences entre la perception simple, liée à chaque centration, et l'activité perceptive consistant en décentrations, transports, comparaisons, transpositions et anticipations, il est clair que cette activité consiste essentiellement à assurer le passage des perceptions les unes aux autres, autrement dit à établir les ressemblances et les différences entre les rapports successivement perçus. Elle aboutit donc à autre chose qu'à de la simple perception : à la constitution de « schèmes perceptifs », qui sont déjà des schèmes de transformation et non plus seulement des lectures de rapports statiques. Or, il est évident que ces schèmes rejaillissent sur la perception elle-même, en ce sens que toute perception qui dépasse le contact le plus primitif avec l'objet [1] comporte des rapports virtuels complétant les rapports actuels ou réels : la perception habituelle est donc une perception de schèmes et non pas seulement d'objets, ces schèmes constituant précisément l'ensemble des rapports virtuels que l'activité perceptive pourrait retrouver dans l'objet perçu ou actualiser à son

1. Et encore le contact sensoriel primitif est-il lié dès le départ à des réflexes, c'est-à-dire de nouveau à la motricité (voir V. WEIZSÄCKER, *Der Gestaltkreis*, 1941).

occasion. On comprend alors en quoi la perception constitue essentiellement un indice : elle est le signifiant d'un schème perceptif, celui-ci constituant la signification de l'objet perçu, et une signification débordant les éléments sensoriels puisqu'elle se rapporte aux relations virtuelles que l'activité perceptive pourrait construire à propos de la perception considérée.

En percevant, p. ex., un cube en perspective (et l'on ne saurait le percevoir qu'en perspective), nous n'avons pas besoin, pour « voir » l'égalité des faces, celle des arêtes rectilignes ou celle des angles, de les « transporter » respectivement les uns sur les autres, ou de « transposer » leur égalité couple à couple, ni même de déplacer le cube (ou de nous déplacer nous-mêmes autour de lui pour centrer chaque face l'une après l'autre), etc. La perception directe du cube fournit d'emblée l'ensemble des rapports virtuels que l'on pourrait actualiser en détaillant l'objet, par fixations successives : elle est donc un indice évoquant (à la manière dont la partie évoque le tout, puisque l'indice est un aspect de son propre signifié) le schème du cube, et ce schème n'est autre chose que l'ensemble des perceptions possibles à son sujet, c'est-à-dire des rapports d'égalité, etc. pouvant être perçu successivement. Or ce schème est indépendant du langage, de l'image et de la représentation proprement dite : il se construit en fonction de la seule activité perceptive et constitue sans plus la totalité des décentrations, transports, transpositions, récognitions, etc., possibles. C'est pourquoi ce schème se transforme en fonction du développement mental par opposition aux perceptions simples, c'est-à-dire données sous forme actuelle en chaque centration.

Ce caractère d'indice de la perception par rapport au schème perceptif est d'autant plus évident que la perception comme telle consiste, ainsi que nous l'avons vu, en un simple tirage au sort, certains points parmi l'ensemble des fixations possibles étant seuls centrés par opposition à tous ceux qui donneraient lieu à des rapports différents. Epistémologiquement, la perception est donc loin d'être cette copie photographique des objets qu'imaginait l'empirisme ; elle demeure même éloignée de cette « forme » commune aux réalités physiques, physiologiques et psychologiques qu'imagine la phénoménologie gestaltiste : elle n'est qu'un point de repère par rapport à l'action réelle de relier les formes perçues les unes aux autres, c'est-à-dire par rapport à l'activité perceptive. Quant à celle-ci, le seul fait qu'elle procède par schèmes montre assez qu'elle est assimilation (des objets à ces schèmes) autant qu'accommodation, ainsi que toute action : les schèmes perceptifs ne sont d'ailleurs que des cas particuliers des schèmes d'assimilation sensori-motrice, sur lesquels nous reviendrons au § 5 et supposent donc comme eux une interaction du sujet et de l'objet et non pas une copie simple de celui-ci par celui-là.

Bref, du point de vue épistémologique, la perception constitue un système d'indices obtenus par une sorte de tirage au sort se référant à des rapports construits grâce à une activité sensori-motrice qui relie ces indices en leur attribuant des significations déjà schématiques. C'est donc la motricité qui est l'essentiel, dans la prise de contact avec le réel, l'élément sensoriel n'étant que le signifiant par rapport aux significations actives et motrices, c'est-à-dire l'indice statique des transformations réelles ou possibles, assurées par l'activité sensori-motrice.

On comprend alors la vraie signification de l'espace perceptif, au sujet duquel le sens commun est victime de tant d'illusions, parfois partagées par certains mathématiciens : loin d'être plus réel que l'espace intellectuel, l'espace sensible ne repose que sur des indices de la réalité et non pas sur son expression immédiate, et ces indices ne se traduisent en connaissance, — même en connaissance simplement perceptive, — que par l'intermédiaire d'une activité sensori-motrice dépassant d'emblée le sensible et recourant à la motricité, c'est-à-dire s'engageant dans une direction qui est précisément celle de l'intelligence elle-même.

En effet, et c'est là sans doute la leçon la plus importante que comporte l'examen de l'espace perceptif, cet espace se construit de façon déjà analogue à l'espace intellectuel lui-même ; mais à deux différences près, tenant toutes deux au fait que la perception est la connaissance de l'objet présent et que l'intelligence fonctionne à des distances spatio-temporelles variées entre le sujet et les objets. La première différence est que l'indice sensible et la signification motrice tiennent lieu, de façon plus indifférenciée entre elles sur le plan perceptif qu'intellectuel, de ce que seront à des niveaux plus élevés l'image spatiale intuitive servant de symbole concret au raisonnement et les rapports conceptuels prolongeant les rapports moteurs. La seconde est que l'espace perceptif est essentiellement incomplet et déformé, par opposition à l'espace intellectuel toujours plus complet et dû à une connaissance toujours moins déformante.

L'espace perceptif est essentiellement incomplet et déformé (c'est-à-dire, comme on l'a souvent remarqué, hétérogène, non isotrope, lié à de faux-absolus au lieu d'être relatif, etc.) pour cette raison bien simple qu'il ne se suffit jamais à lui-même. En présence d'un objet ou d'un tableau complexes, la perception se fixe sur un point, puis sur un second, un troisième, etc. Or, chacune de ces centrations constitue un morcellement du réel, d'une part, et une déformation de celui-ci en fonction des lois statistiques inhérentes au mécanisme des centrations relatives.

Mais il y a plus : pour relier les unes aux autres ces diverses centrations, il est indispensable de dépasser les perceptions elles-mêmes puisqu'elles ne sont pas simultanées, mais successives, et que l'action, dans le temps, des perceptions les unes sur les autres n'est déjà plus de la perception simple et suppose une activité de mise en relation. L'existence d'une activité perceptive marque donc, à elle seule, l'obligation où se trouvent les perceptions de se dépasser comme telles pour se relier entre elles. Mais l'activité perceptive est courte et insuffisante, faute de symbolisme différencié et de mécanisme proprement opératoire. Elle s'engage, il est vrai, dans la direction où se constitueront l'intuition représentative et l'intelligence opératoire. Dès le plan sensori-moteur, elle s'intègre en une intelligence pratique ou sensori-motrice dont nous allons nous occuper maintenant. Puis, lorsque le système d'actions, avec l'espace élargi et assoupli qui le caractérise (son expression la plus caractéristique étant le « groupe » pratique des déplacements), sera complété par l'apparition du pouvoir représentatif, l'espace perceptif s'intégrera finalement en un espace intellectuel, qui ne se superposera pas à lui comme une image du réel se surajoute à la réalité elle-même, mais bien comme un organisme achevé succède à l'organisation embryonnaire qui le prépare sans encore l'égaler.

§ 5. L'ESPACE SENSORI-MOTEUR. LES INTERPRÉTATIONS d'H. POINCARÉ SUR LE CARACTÈRE « A PRIORI » DE LA NOTION DE GROUPE ET LA NATURE CONVENTIONNELLE DE L'ESPACE EUCLIDIEN À TROIS DIMENSIONS. — Entre l'espace perceptif, dont nous venons de voir pourquoi il ne se suffit pas à lui-même, et l'espace représentatif qui aboutira à une organisation proprement opératoire, vient s'insérer une forme d'espace plus générale que les structures perceptives et dont celles-ci ne constituent qu'un cas particulier : c'est l'espace sensori-moteur, essentiellement constitué par les manipulations et les déplacements du sujet lui-même. Ces actions élémentaires, dont l'organisation remonte aux deux premières années de l'existence, sont bien orientées par les perceptions, mais fournissent de l'espace une connaissance pratique qui les dépasse et qui forme la substructure des opérations futures.

Nous avons déjà constaté (§ 3) comment la construction des constances perceptives de la grandeur et de la forme supposait l'élaboration d'un schème d'action qui dépasse la perception : celui des objets permanents, susceptibles d'être retrouvés en dehors du champ perceptif actuel et conservant, à l'intérieur de celui-ci, leurs propres dimensions et leurs

formes propres. Or, l'objet permanent, lequel fournit le premier exemple de ces « solides invariables » dont tous les géomètres ont vu l'importance quant à la formation de notre géométrie, constitue le produit le plus authentique d'une intelligence sensori-motrice, antérieure au langage et aux représentations, que l'on a étudiée chez les singes anthropoïdes et le bébé [1]. D'autre part, il est clair que l'activité perceptive, dont nous venons de montrer qu'elle est la source des constructions mêmes de la perception, déborde les cadres de cette dernière et relève de cette même intelligence sensori-motrice, qui oriente les mouvements comme les perceptions et règle ainsi l'activité entière, avant le développement de l'intelligence représentative, pour se conserver ensuite sur le plan spécialisé de la vie perceptive et motrice de l'enfant plus âgé et de l'adulte lui-même.

Si l'espace perceptif est essentiellement incomplet à lui seul, parce qu'immanent à chaque champ successif de perceptions, sans coordination générale entre ces champs, l'intelligence sensori-motrice a donc pour fonction de relier ces champs successifs entre eux, non pas encore par une représentation d'ensemble (qui ne débutera qu'avec l'apparition de la fonction symbolique), mais par un mécanisme moteur réglant le passage d'un champ à l'autre et assurant la continuité de l'action. Dans la mesure où les schèmes perceptifs (dont aucun ne constitue ainsi à lui seul un espace d'ensemble, milieu commun à tous les phénomènes perçus) sont, en effet, reliés par les déplacements du sujet, c'est-à-dire où ils sont complétés par des schèmes sensori-moteurs n'englobant pas seulement les mouvements des organes de la perception (mouvements de l'œil et de la tête, ou de la main et du bras, etc.), mais ceux de la totalité du corps propre par rapport aux objets perçus, alors se constitue un espace pratique plus général appuyé sur l'ensemble des schèmes sensori-moteurs et perceptifs du sujet. Il existe évidemment une même continuité entre cet espace sensori-moteur et celui des schèmes perceptifs, qu'entre ces derniers et la perception comme telle, mais l'espace sensori-moteur n'en constitue pas moins une réalité d'ensemble, dont l'équilibre final demeure inexplicable par les seules lois de la perception et même de l'activité perceptive.

Or, la leçon épistémologique que comporte la nécessité de ce système des schèmes sensori-moteurs pour coordonner l'espace en seul tout — encore qu'il s'agisse d'une totalité d'actions successives et non pas de représentations simultanées — est que l'espace, en tant que milieu commun aux objets d'action et de perception, ne se perçoit pas en lui-même : il intègre les perceptions en un système qu'elles ne suffisent pas à construire, et ne donne pas lieu lui-même à une perception proprement dite.

1. Voir KŒHLER, *L'intelligence des singes supérieurs* (trad. GUILLAUME), Alcan ; et PIAGET, *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé.

Il est une « forme » du comportement et non point de la sensibilité. C'est le grand mérite d'H. Poincaré d'avoir montré d'avance ce que la psychologie génétique est ainsi en état de vérifier : que les sens ni l'expérience ne suffisent à constituer un espace sans l'existence d'un schème qui les oriente, en leur permettant de choisir entre diverses interprétations possibles (ce choix n'étant pas imposé une fois pour toutes par les données perçues ou expérimentées en elles-mêmes).

En quoi consiste ce schéma ? Il convient ici de distinguer dans l'ensemble des conceptions si profondes et si décisives de Poincaré, ce qui demeure essentiel et incontestable, une fois traduit en termes de genèse réelle de la conduite ou de l'esprit, et ce qui est solidaire d'une psychologie dépassée par les études ultérieures, ou d'un conventionnalisme contredit par les progrès de la physique. Rien n'est d'ailleurs plus souple, plus nuancé et plus riche en implications souvent malaisées à dégager que les exposés successifs de Poincaré en ce qui concerne l'espace, et les retouches multiples qu'il a sans cesse introduites lui-même montrent assez qu'on ne saurait enfermer sa philosophie géométrique dans les formules définitives d'un nominalisme pragmatiste, comme on a parfois voulu le faire [1]. Il est clair, en particulier, qu'il existe un certain parallélisme entre ses idées concernant le nombre ou le raisonnement mathématique en général, et ses idées proprement géométriques. Dans les deux cas, il a pris une position complexe, dont l'un des pôles n'est pas éloigné de l'apriorisme lui-même et dont l'autre seulement s'oriente vers le conventionnalisme. C'est ainsi que, pour lui, « le concept général de groupe préexiste dans notre esprit, au moins en puissance » *(Sc. et hypoth.*, p. 90), cette affirmation correspondant évidemment, sur le terrain géométrique, à ses hypothèses arithmologiques concernant l'intuition rationnelle du « nombre pur » (voir chap. I, § 5) : cela va d'autant plus de soi que, comme on le sait, l'ensemble des nombres entiers positifs et négatifs constitue un groupe dont l'élément est l'opération + 1. Entre le raisonnement par récurrence, fondé sur cette intuition *a priori* (et dans lequel Poincaré voyait le raisonnement mathématique par excellence), et le rôle que le célèbre géomètre attribuait à la notion de groupe dans la structuration spatiale progressive, il existe donc un lien étroit. Mais, dans les deux cas du nombre et de l'espace, l'intuition, conçue comme plongeant ses racines en

1. Cf. L. ROUGIER, *La philosophie géométrique de Henri Poincaré*, Alcan, 1920 et Ph. FRANK, *La causalité*, Flammarion.

des cadres préformés, est également dotée ensuite du pouvoir de se prolonger en combinaisons opératoires toujours plus libres : c'est dans cette autre direction que se manifeste le conventionnalisme de Poincaré, plus souvent cité à propos de sa philosophie géométrique, quoique appuyé sur le même apriorisme que dans sa théorie du nombre.

Or, tant en ce qui concerne ses hypothèses sur l'innéité de la notion de groupe que pour ce qui est de la construction du schéma euclidien à trois dimensions, c'est à l'analyse de l'espace sensori-moteur que recourt toujours, en fin de compte, Poincaré dans le développement de ses conceptions. C'est donc sur ce terrain, dont il a eu le grand mérite d'apercevoir l'importance dès la fin du siècle dernier, par opposition au champ trop étroit de la perception pure (sur lequel s'étaient combattus les nativistes et les empiristes durant presque tout le XIX^e^ siècle), qu'il nous faut discuter le problème de la signification épistémologique de la notion de « groupe » ainsi que du rôle de l'expérience ou de la convention dans l'élaboration de l'espace euclidien.

C'est, en effet, à l'organisation sensori-motrice des déplacements et non pas à la perception de l'étendue ou des formes que Poincaré fait remonter la découverte mentale de l'espace. A tout changement se produisant dans le milieu extérieur peut correspondre une réaction du sujet tendant à remettre ou à retrouver les choses dans la situation antérieure à cette modification. Or, il existe un ensemble de changements tels qu'on peut les corriger par un simple déplacement du corps propre : ainsi un mobile sortant latéralement du champ visuel peut être retrouvé tel quel par une simple rotation de la tête, et un mobile changeant de dimensions apparentes au fur et à mesure qu'il s'éloigne récupère sa grandeur lorsqu'on s'approche à nouveau de lui. De tels changements constituent les « changements de position ». Il est au contraire des transformations qui ne peuvent être annulées par un mouvement corrélatif du corps propre : ainsi la combustion d'un morceau de bois ou la dissolution du sucre dans l'eau. Ce sont alors des « changements d'état ». C'est à cette distinction, considérée comme une sorte de fait premier, que Poincaré fait remonter le début de la construction de l'espace : celui-ci, en tant que système des changements de position, tiendrait donc aux comportements sensori-moteurs les plus élémentaires. Or, malgré les difficultés psychologiques que cette thèse comporte, verrons-nous, en dépit de sa simplicité, elle présente le grand intérêt de situer d'emblée le problème sur le plan de l'action ou du mouvement, et non plus de la perception. « Pour un être complètement immobile, dit avec vigueur Poincaré, il n'y aurait ni espace, ni géométrie » *(Val. sc.*, p. 82).

Mais il y a plus. Comment le sujet parvient-il à organiser ses mouvements de manière à corriger ceux des objets comme tels ? Indépendamment de la manière un peu étroite dont Poincaré se représente le rôle

de la motricité dans la connaissance, il introduit ici une hypothèse fondamentale : c'est que ces déplacements du corps propre forment eux-mêmes un « groupe ». En effet, deux « déplacements du corps en bloc » peuvent être coordonnés en un seul ; chacun d'entre eux peut être annulé par un déplacement inverse ; le produit d'un déplacement direct avec son inverse est un déplacement nul et ces déplacements sont associatifs. D'où dérive alors cette notion de groupe ? Assurément pas de l'expérience externe, puisque pour découvrir que les mouvements des solides constituent un groupe, il s'agit précisément de coordonner les mouvements propres selon une telle structure : c'est à la corrélation de ces deux sortes de déplacements que nous distinguons les changements de position des changements d'état. Le même raisonnement vaudrait contre une interprétation fondée sur l'expérience intérieure, puisque les éléments du groupe en question sont justement les « déplacements du corps en bloc », c'est-à-dire ceux qui se reconnaissent au fait qu'ils corrélatent avec les mouvements des corps extérieurs. Le groupe des déplacements auquel Poincaré fait remonter l'organisation de l'espace est donc à considérer comme une sorte de loi ou de cadre de notre activité même, comme « préexistant au moins en puissance » selon la formule citée plus haut. En un mot, pour pouvoir suivre les mouvements du monde extérieur, le sujet est bien obligé de coordonner les siens, et cette coordination même implique la structure de « groupe ».

Cela admis, trois conséquences fondamentales s'ensuivent : le groupe des déplacements du corps propre entraîne la structuration des mouvements extérieurs selon un modèle corrélatif, par un mélange de conventions et d'utilisation de l'expérience, puis il permet, selon le même processus, l'attribution à cet espace externe de trois dimensions et d'une structure euclidienne.

Que le groupe des mouvements propres entraîne la construction d'un groupe des déplacements de l'objet lui-même, cela va de soi puisque les deux structures s'organisent en même temps. Mais dès la distinction des changements de position et des changements d'état, et dès la structuration du groupe constitué par les premiers de ces changements extérieurs, intervient, selon Poincaré, ce mélange de formes « préexistantes », de convention et d'expérience, dont l'union caractérise sa doctrine si subtile. Le rôle de l'expérience se manifeste par la présence, que nous découvrons dans la nature, de ces « corps remarquables » appelés solides et susceptibles de se déplacer par translations, rotations, etc., en conservant leurs formes et dimensions. Mais cette constatation expérimentale n'est pas pure. Il n'existe, en effet, jamais dans le réel, de déplacement sans déformation aucune, tel qu'il aurait lieu pour un solide euclidien idéal : la chaleur ou la pesanteur peuvent altérer le mobile et nous convenons alors, par une première dissociation conventionnelle, de considérer à part les purs déplacements, qui constituent un groupe, et les altérations physiques de l'objet. Mais si cette convention est possible c'est, nous l'avons vu à l'instant, que nous possédons nous-mêmes le pouvoir préétabli de construire la notion de groupe.

Après quoi vient la structuration de cet espace réel selon trois dimensions. On sait combien Poincaré est revenu fréquemment sur cette question, en retouchant sans cesse son exposé, tant est délicate la délimitation qu'il a tentée des rôles respectifs de l'expérience, de la convention et, sur ce point particulier, de deux sortes de notions préexistantes : le rôle de nos organes héréditaires et les intuitions *a priori* de notre esprit. La notion de dimensions est d'abord introduite par la considération topologique du continu et des coupures : un continu n'a qu'une dimension s'il est divisé par des coupures elles-mêmes discontinues (p. ex. une ligne, coupée par des points) ; il en a deux s'il peut être divisé par des coupures formant un continu à une dimension (p. ex. une surface coupée par une ligne) ; etc. Cela admis, combien de dimensions comporte l'espace de nos activités pratiques ? Il faut d'abord noter que le continu perceptif ou physique est contradictoire (voir § 4, la formule de la loi Weber : A = B ; B = C mais A < C) et que, pour lever la contradiction, les mathématiques le remplacent par une échelle comportant une infinité non commensurable d'échelons. Mais ce continu mathématique est irreprésentable : « nous ne pouvons nous représenter que des continus physiques et des objets finis » *(Val. sc.,* p. 98). D'autre part, « l'espace absolu est un non-sens et il nous faut commencer par le rapporter à un système d'axes invariablement liés à notre corps » *(ibid.,* p. 99). Localiser un objet revient donc à « se représenter les mouvements qu'il faudrait faire pour l'atteindre » (p. 80), car « la seule chose que nous connaissions directement, c'est la position relative des objets par rapport à notre corps » *(ibid.,* p. 79). Dès lors, pour déterminer le nombre des dimensions de l'espace caractérisant les objets qui nous entourent, il devrait suffire, semble-t-il, de lire les données de l'expérience physique ainsi que d'analyser nos procédés de localisation visuelle, tactile, etc., et nos propres déplacements, en appliquant à chacun de ces cas le critère topologique cité à l'instant servant à déterminer le nombre des dimensions. Mais alors, on s'aperçoit de deux sortes de circonstances essentielles : c'est que ni nos organes, ni l'expérience ne nous imposent de réponse décisive. P. ex., si nos sensations de convergence et d'accommodation n'étaient pas toujours d'accord, l'espace visuel aurait quatre dimensions. Quant à l'expérience, elle ne donne que des indications et s'accommoderait de bien d'autres modèles que ceux que nous lui appliquons. En bref, l'esprit construit le continu mathématique à trois dimensions « mais il ne le construit pas avec rien, il lui faut des matériaux et des modèles. Ces matériaux comme ces modèles préexistent en lui. Mais il n'y a pas un modèle unique qui s'impose à lui, il a *du choix ;* il peut choisir, p. ex., entre l'espace à trois et l'espace à quatre dimensions. Quel est alors le rôle de l'expérience ? C'est elle qui donne les indications d'après lesquelles il fait son choix » *(Val. SC.,* p. 132).

La structure euclidienne de l'espace pratique comporte une explication analogue. Tout d'abord l'espace sensori-moteur est déjà de « caractère quantitatif » à cause « du rôle que jouent dans sa genèse les séries de sensations musculaires. Ce sont des séries qui peuvent *se répéter,* et

c'est de leur répétition que vient le nombre ; c'est parce qu'elles peuvent se répéter indéfiniment que l'espace est infini » *(ibid.,* p. 133). Cette répétition est à la fois source de la « relativité essentielle de l'espace » (p. 118) et de la métrique. Mais pourquoi notre métrique spontanée est-elle euclidienne ? Ici encore notre esprit comporte plusieurs modèles : ils sont même équivalents, et tels qu'ils puissent se traduire les uns dans les autres, puisque l'on sait exprimer les rapports non euclidiens au moyen de figures euclidiennes et réciproquement. Mais, ici encore, l'expérience, d'une part, et nos organes, de l'autre, présentent leurs suggestions : les déplacements des solides naturels se composent à la manière des substitutions du groupe euclidien et nos actions les plus simples présentent la même structure. Choisissant alors le modèle le plus commode nous appliquons au réel le schéma euclidien, tandis que rien ne nous empêcherait d'utiliser un autre langage.

On voit donc comment c'est dès l'élaboration de l'espace sensori-moteur qu'interviendrait, selon Poincaré, la série des choix et des « coups de pouce », dont il invoque ensuite la nécessité pour justifier son conventionnalisme, alors que, par ailleurs, l'organisation sensori-motrice du groupe des déplacements atteste l'intervention, à ce niveau élémentaire déjà, des notions préformées « préexistant » à la fois dans nos organes et en notre esprit. Le triple problème que soulève ainsi l'épistémologie géométrique de Poincaré est celui de l'innéité de la notion de groupe, de la nature des conventions pratiques et des rapports entre l'activité, héréditaire ou individuelle, du sujet et l'expérience physique.

Pour ce qui est du premier point, les résultats de l'analyse psychogénétique fournissent une réponse détaillée. En étudiant l'espace sensori-moteur durant toute la période s'étendant de la naissance à l'apparition de la représentation (langage et intuition imagée), nous avons pu confirmer le rôle essentiel attribué par Poincaré à la structure de groupe [1] : il est parfaitement exact que les déplacements du sujet (et non pas seulement les « déplacements du corps en bloc », mais aussi les mouvements de manipulation, tels que les rotations ou les translations successives imprimées à l'objet, etc.) finissent par acquérir une structure de groupe. On peut p. ex., observer vers le milieu de la seconde année la manière dont l'enfant se déplacera d'une chambre à l'autre de son appartement et d'un point à l'autre de son jardin en coordonnant ses mouvements successifs selon un système de compositions réversibles, ou la façon dont il retrouve un objet caché en composant selon la même structure les déplacements antérieurs de cet objet. On s'aperçoit alors que la notion de « groupe » ne constitue nullement un mode de description artificiel dont le mathématicien se servirait pour analyser du dehors le comporte-

1. Voir *La construction du réel chez l'enfant,* Delachaux & Niestlé, chap. II.

ment du sujet, mais qu'elle exprime réellement la forme d'équilibre atteinte par ses déplacements, ou par ses actions sur l'objet, une fois achevées les coordinations sensori-motrices. C'est ainsi que la composition de deux déplacements en un seul exprime la capacité même de coordination, que l'opération inverse exprime cette conduite fondamentale qu'est la possibilité du retour, que l'associativité traduit cette autre conduite essentielle qu'est la capacité de détour et que l'opération identique traduit la conservation du point de départ lors de la composition d'un aller et d'un retour. Bref, le groupe exprime la nature même des compositions réversibles et associatives auxquelles le sujet parvient une fois achevée la coordination de ses déplacements.

Seulement si Poincaré a ainsi dégagé avec une grande profondeur la structure formatrice la plus importante de l'espace, aussi bien du point de vue génétique réel que du point de vue mathématique abstrait, il nous semble s'être mépris en situant cette structure de groupe au point de départ des comportements sensori-moteurs, alors qu'elle en constitue seulement le point d'arrivée et la forme d'équilibre finale. Il va de soi que l'on ne saurait demander à un mathématicien de génie de trouver le temps de soumettre ses hypothèses psychologiques au contrôle expérimental ; aussi Poincaré s'est-il borné à reconstituer logiquement, si l'on peut dire (ou introspectivement, ce qui revient au même) un développement conjectural, au lieu de décrire le développement réel : il a donc supposé, comme allant de soi, l'existence d'une distinction élémentaire entre les changements de position et les changements d'état, puis a construit sa théorie sur cette donnée hypothétique. Or, les actions de l'enfant (et spécialement du bébé) sont toujours plus riches et plus imprévues que les reconstitutions génétiques abstraites. Il se trouve donc que, loin de distinguer d'emblée les changements de position et d'état, le nourrisson a besoin de quelques bons mois, et presque d'une année, pour parvenir à cette dissociation, et cela pour une raison qui est fondamentale au point de vue géométrique autant que physique : son univers initial n'est point formé d'objets permanents et tout déplacement lui apparaît ainsi d'abord comme un changement d'état. Il est clair, en effet, que le groupe des déplacements est corrélatif de la notion d'objet : non pas seulement parce que le groupe euclidien se traduit physiquement dans le mouvement des solides invariables, mais parce que l'objet permanent, c'est-à-dire susceptible d'être retrouvé, est seul à garantir le bien-fondé de la réversibilité. La construction du groupe des déplacements est donc solidaire de celle de l'objet lui-même, et, sans objets, il ne saurait y avoir que coordinations égocentriques et déformantes, c'est-à-dire des systèmes d'actions sans retour.

Mais comment le nourrisson parvient-il à construire simultanément le groupe pratique des déplacements (des siens et de ceux des objets manipulés) et le schème sensori-moteur de l'objet permanent, apte à être retrouvé « derrière » des écrans, « sous » d'autres objets, etc. (sans revenir sur les schèmes per-

ceptifs de la constance des formes et des dimensions de cet objet) ? C'est ici que se posent toutes les questions du rôle des notions « préexistantes » éventuelles, du rôle de l'expérience, de celui des « coups de pouces » ou conventions pratiques et de l'intervention des deux sortes d'abstraction distinguées précédemment : à partir de l'objet, et à partir de l'action ou de ses coordinations comme telles.

Or, de même que nous n'avons pu suivre Poincaré dans son hypothèse d'une « intuition du nombre pur », parce que les données génétiques nous paraissent montrer l'existence d'une construction active des classes, des relations et des nombres, de même il nous est difficile d'admettre une préformation de la notion de groupe. « Cette notion préexiste, ou plutôt ce qui préexiste dans l'esprit, c'est la puissance de former cette notion. L'expérience n'est pour nous qu'une occasion d'exercer cette puissance », affirme Poincaré » [1]. S'il ne s'agit que de la puissance de former la notion, cela est trop dire que de la qualifier de préexistante, car elle pourrait alors ne connaître qu'une nécessité terminale, et non point initiale (ainsi que nous le montrions plus haut). S'il s'agit par contre d'opposer « préexistant » à empirique ou expérimental, qu'entend-on par là ? Ou bien la notion de groupe est regardée comme *a priori*, mais ceci est contredit par le seul fait de son développement génétique ; ce développement est même fort loin d'être achevé vers 1-2 ans, car, une fois acquises les compositions réversibles sur le plan de l'action pratique il faudra les reconstruire sur le plan des opérations concrètes (7-8 ans) et formelles (11-12 ans) ; la réversibilité opératoire est ainsi le produit d'une lente évolution, dont elle ne constitue que la forme d'équilibre finale. Ou bien, on entend que la structure de groupe, au lieu d'être tirée de l'expérience, par une abstraction simple à partir de l'objet, est découverte au cours des expériences, c'est-à-dire des actions exercées sur l'objet, mais par abstraction constructive à partir des coordinations mêmes de l'action.

Or, c'est bien cette dernière solution que l'analyse génétique nous paraît suggérer, en parallèle complet avec ce que nous avons vu à propos des classes, des relations et des nombres. Il faut bien comprendre, en effet, que sur le terrain des comportements sensori-moteurs, dont Poincaré a vu avec tant de profondeur qu'il comportait une organisation spatiale annonçant, grâce au rôle des mouvements, l'espace opératoire et proprement intellectuel, le schématisme du groupe se présente sous une forme encore singulièrement limitée, et ne dépassant pas le niveau

1. *Revue de Métaph. et de Morale*, 1917, p. 647.

de ce que sont, sur ce même palier, les schèmes purement pratiques tenant lieu de classes, de relations et de quantités numériques. Poincaré aperçoit la quantité et même « le nombre » dans « les séries de sensations musculaires » issues de la répétition d'un mouvement, autrement dit dans l'itération des actions. Il a psychologiquement raison, mais il est clair que cette quantification motrice est du même ordre que, p. ex., la conduite, déjà susceptible d'une acquisition par dressage chez la poule, consistant à ne piquer que les grains pairs, ou impairs, d'une rangée de vingt éléments espacés : le « nombre » est alors lié à un certain rythme moteur. Or, ce nombre sensori-moteur ne contient assurément pas, à l'état préformé, la série illimitée des nombres entiers (ici Poincaré exagère tant soit peu en évoquant l'infini à propos des sensations musculaires !), pas plus que les schèmes sensori-moteurs ne contiennent d'avance la logique des classes ou celle des relations. Mais, comme nous y avons insisté au cours de tout le chap. I, les classes, les relations asymétriques et leurs synthèses numériques, tout en se construisant progressivement et au cours des actions exercées sur l'objet, ne sont pas extraites de l'objet par abstraction de ses qualités, et tiennent au contraire à la coordination même des actions : c'est donc par une abstraction à partir des actions coordonnées propres aux paliers antérieurs, que les classes, les relations et les nombres s'élaborent, au travers d'une série de constructions propres à chaque palier nouveau, et cela dès les coordinations organiques élémentaires et jusqu'aux coordinations opératoires les plus élevées et les plus formelles. Sans être ni préformées ni d'origine empirique, les classes, les relations et les nombres sont ainsi le produit de coordinations successives, dont les matériaux sont tirés des coordinations précédentes, mais qui donnent lieu à de nouvel1es compositions lors des coordinations suivantes.

La construction simultanée du schème de l'objet permanent et du « groupe » pratique des déplacements est due à un processus exactement semblable, et la situation de ce groupe pratique à l'égard des coordinations organiques antérieures ou des coordinations opératoires ultérieures est exactement la même que celle des classes, relations et nombres. D'une part, en effet, la coordination des mouvements propres ne suffit pas à el1e seule, malgré Poincaré, à constituer un « groupe », car c'est en agissant sur les objets que le sujet construit à la fois la notion d'objet et les groupes complémentaires des déplacements de l'objet et des déplacements propres : une longue suite de décentrations à partir de l'action immédiate est ainsi nécessaire pour situer le corps propre dans un monde d'objets et de déplacements objectifs par rapport auxquels les mouvements de ce corps seront eux-mêmes groupés. Mais, d'autre part, ce ou ces groupes ne sont pas extraits de l'objet, malgré la confirmation que leur offre l'expérience : ils sont abstraits de la coordination même des actions, malgré le fait que ces coordinations s'effectuent nécessairement au cours d'actions appliquées au réel. Ainsi, le schème de l'objet permanent, quoique s'appliquant aux objets physiques, résulte de l'organisation des déplacements réalisés par le sujet, et cette organi-

sation, quoique s'appliquant aussi aux mouvements physiques, constitue la forme d'équilibre de coordinations dont les matériaux sont empruntés à l'action propre. Il s'ensuit que le groupe pratique des déplacements, sans être préformé par les coordinations organiques antérieures, constitue une synthèse (ou forme d'équilibre) nouvelle d'éléments tirés d'elles par abstraction à partir de l'action [1] ; et que, sans préformer les groupes opératoires ultérieurs, il leur fournira les éléments qu'ils réorganiseront sur le plan de la représentation et des opérations conceptuelles, et en les empruntant à ce groupe sensori-moteur par une nouvelle abstraction à partir de l'action.

Ceci nous conduit au problème de la « convention », car c'est dès la construction du groupe pratique des déplacements que Poincaré fait intervenir les « coups de pouce » permettant de dissocier les changements de position des changements d'état, et par conséquent d'attribuer aux objets en mouvement le schème du déplacement des « solides invariables », alors qu'en fait les mobiles varient toujours quelque peu. En quoi consiste donc une telle « convention » ? Elle se confond précisément avec le processus de l'assimilation du réel aux schèmes de l'action. Agir sur l'objet, c'est, en effet, lui attribuer des caractères nouveaux. Mais Poincaré ajoute que le choix des conventions est toujours dicté par la « commodité ». Or, il est clair qu'une convention n'est commode que dans la mesure où elle facilite la réussite de l'action. Il est ainsi permis de traduire la notion de convention commode en cette autre notion : celle de l'action efficace. Le déplacement des solides invariables est p. ex. un schème auquel nous assimilons les mouvements réels, schème qui est tiré de la coordination des actions exercées sur ces solides et non pas d'eux-mêmes ; ce schème s'applique aux objets en les enrichissant alors de caractères nouveaux, dont le plus remarquable est la réversibilité : cet apport du sujet à l'objet peut, si l'on veut, être qualifié de convention commode, mais il est d'abord la manifestation d'une action qui réussit. En son point de départ, la « convention » se réduit en bref à l'abstraction à partir de l'action.

Mais le terme de convention acquiert des significations nouvelles en ce qui concerne les trois dimensions de l'espace pratique et surtout son caractère euclidien, dont Poincaré tend à faire une simple forme de langage, équivalent en droit aux « langages » non euclidiens mais plus « commode » qu'eux.

En ce qui concerne les trois dimensions, il est bien difficile, malgré toute la subtilité de Poincaré, de nier le rôle prépondérant

1. Voir pour le détail de cette évolution, *La construction du réel chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé, chap. I et II.

de l'expérience extérieure. Si nous pouvions transformer un gant gauche en un gant droit, sortir un objet d'une boîte sans lever le couvercle et enfiler un anneau fermé autour d'une tige sans passer l'extrémité de celle-ci par l'ouverture intérieure de l'anneau, l'expérience nous imposerait la quatrième dimension. C'est par l'expérience que l'enfant apprend qu'un objet dans sa boîte ne peut s'en échapper et qu'un anneau ne peut passer au travers d'une tige rigide (nous avons vu un bébé essayer d'entourer la tige avec l'anneau en appliquant simplement celui-ci contre celle-là ou des enfants de 4-6 ans s'imaginer que, de trois objets traversés dans l'ordre ABC par un fil de fer, l'objet B pourra se trouver en tête, soit BAC ou ACB, par une simple rotation du fil) [1]. Il nous semble donc psychologiquement évident que l'expérience impose les trois dimensions, tandis qu'elle n'engendre pas sans plus le groupe des déplacements. Mais en quoi consiste cette contrainte de l'expérience ? En une simple limitation ; c'est la coordination des actions qui engendre les dimensions, et cette coordination pourrait conduire à 1, 2…, *n* dimensions. L'expérience nous arrête à trois et c'est à ce seul rôle limitatif que se borne son pouvoir sur un tel terrain. Quant à l'influence éventuelle des organes héréditaires, elle est du même ordre.

Un peu différente est la question du caractère euclidien de notre espace pratique et du groupe des déplacements physiques, car ici intervient une collaboration plus intime de l'expérience et de l'action. Nous vivons dans un milieu macroscopique d'échelle intermédiaire entre l'échelle microphysique et l'échelle astronomique, et nos actions habituelles portent sur des objets de petite vitesse relativement à la terre conçue comme référence immobile. S'il existait un « observateur intra-atomique » ainsi que l'a supposé L. de Broglie ou des organismes à activité interstellaire, leurs actions devraient compter avec des vitesses voisines de celle de la lumière. Nous pouvons admettre que les coordinations communes à toutes ces actions diverses suffisent à engendrer une métrique générale. Mais celle-ci se différenciera selon les cas en métriques euclidiennes ou non euclidiennes. L'échelle de notre action nous suggère la métrique euclidienne, ce qui ne signifie pas qu'elle soit conventionnelle, mais, à nouveau, qu'elle est adaptée et efficace. L'échelle de la mécanique einsteinnienne impose une métrique riemanienne : cela n'est pas non plus dû à une convention, et l'on sait même que c'est son conventiona-

1. PIAGET, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Paris, P.U.F., chap. 1.

lisme qui a sans doute empêché Poincaré de découvrir pour son compte la théorie de la relativité, dont il était si proche. Ici à nouveau, l'expérience dicte donc un choix, mais au lieu de procéder par exclusion limitative, comme c'est le cas à propos du nombre des dimensions, il s'agit davantage d'une considération d'échelle par rapport à notre activité courante : cette activité serait capable de construire n'importe quelle métrique, mais elle procède par approximations successives en fonction des besoins de l'action, et si la métrique euclidienne a suffi aux activités comprises entre l'âge de la pierre taillée, ou des flèches à pointe de silex, et l'âge de l'automobile, l'ère atomique en nécessitera peut-être d'autres.

Nous voici parvenus au terme des quelques remarques génétiques qu'il s'agissait de présenter à propos de l'espace perceptif et de l'espace sensori-moteur. Pour introduire à l'analyse de l'espace représentatif, nous allons commencer par poser le problème de l' « intuition », en prenant comme base de discussion le point de vue de Hilbert.

§ 6. LE POINT DE VUE DE D. HILBERT ET LE PROBLÈME DE L' « INTUITION » GÉOMÉTRIQUE. — Nous avons déjà rappelé comment, suivant en cela le sens commun lui-même, la plupart des auteurs ont opposé longtemps aux opérations logico-arithmétiques, conçues comme l'expression la plus authentique de l'activité de l'esprit, la connaissance perceptive et intuitive de l'espace, considérée comme liée à l'expérience ou à la « sensibilité ». Mais la réflexion sur les géométries non euclidiennes, d'abord, puis la double conquête que représentent la géométrisation de la gravitation due à la théorie de la relativité et la découverte de la méthode axiomatique, ont conduit à scinder l'espace en deux réalités distinctes : l'espace physique, indissociable des « champs » énergétiques, dont il exprime la contexture et l'espace intellectuel, système de coordinations logiques comparable à tout autre système abstrait, tel que le système des êtres numériques ou analytiques. Mais alors se posent les trois questions de savoir comment relier l'espace physique et l'espace axiomatique, quels rapports établir entre cet espace intellectuel et l'espace perceptif ou sensori-moteur, et enfin quelles relations déterminer entre l'espace et les opérations logico-arithmétiques.

C'est à ces trois questions qu'à répondu à sa manière H. Poincaré : l'espace déductif ou axiomatique, comme les constructions formelles numériques ou analytiques, est une libre construction « conventionnelle », qui s'appuie en son point de départ, sur

l'activité pratique et sensori-motrice pour s'en libérer ensuite ; quant à son accord avec l'espace physique, il est dû à un ajustement progressif entre les intuitions de notre esprit et les données de l'expérience. L'unité est ainsi rétablie entre les espaces intellectuel et sensible, ainsi qu'entre tous deux et l'espace physique. De plus, le parallèle est assuré entre les constructions géométriques et les constructions numériques, puisque le nombre dérive aussi d'activités élémentaires pour se déployer aussi en élaborations conventionnelles.

Or, il se trouve que l'un des mathématiciens qui ont le plus profondément fondé la géométrie axiomatique, David Hilbert, a pris lui-même position à l'égard de ces problèmes, mais de manière sensiblement différente [1]. Par un curieux renversement des points de vue, eu égard aux auteurs qui opposaient l'espace, donnée intuitive, au nombre et à la logique, Hilbert conçoit la géométrie axiomatique comme une pure construction logique et *a priori*, mais pour rejeter la géométrie non axiomatique dans la physique elle-même. Autrement dit, la dissociation que cherchait à éviter Poincaré est entièrement maintenue par D. Hilbert.

L'interaction entre l'esprit et le réel est tout d'abord remplacée par une « harmonie préétablie ». C'est ainsi que le réel semble obéir aux mêmes lois que la construction axiomatique. Jusqu'en biologie, dans les études mendéliennes, « les nombres trouvés expérimentalement vérifient les axiomes euclidiens de la congruence et les axiomes relatifs au concept géométrique « situé entre » ; ainsi la loi de l'hérédité paraît être une application des axiomes de la congruence linéaire, c'est-à-dire des théorèmes élémentaires sur le transport des segments » [2]. De même les problèmes du fini et de l'infini se posent, selon Hilbert, en termes analogues pour l'univers et pour la pensée. La théorie de la relativité montre l'adéquation entre la géométrie riemanienne et l'expérience, etc.

D'où vient alors cette « harmonie préétablie » ? C'est qu'il existe, « en dehors de l'expérience et de la déduction, une troisième source de connaissances » : *l'a priori* kantien. « J'accorde volontiers que certaines vues *a priori* sont nécessaires à la construction des ensembles théoriques et sont à la base de toute connaissance. Je crois que les connaissances mathématiques sont aussi, en dernière analyse, fondées sur de telles vues intuitives *(anschaulich)*, qu'un certain résidu intuitif *a priori* est une base nécessaire à la théorie des nombres ... Je pense qu'il en a été ainsi, quant à l'essentiel, dans mes recherches sur les principes des mathématiques. L'*a priori* n'y est ni plus ni moins qu'une manière de

1. D. HILBERT, *La connaissance de la nature et la logique* (trad. MÜLLER), *Enseignement math*. t. 30 (1931).

2. *Ibid*., p. 24.

voir fondamentale ou l'expression de certaines conditions préliminaires indispensables de la connaissance et de l'expérience » [1].

Seulement, Hilbert délimite autrement que Kant les frontières entre l'*a priori* et l'expérimental : c'est à tort que Kant a inclu l'espace et le temps dans les cadres *a priori.* « La géométrie n'est en effet que cette partie de la physique qui décrit les relations de position des corps solides les uns avec les autres dans le monde des choses réelles. L'expérience seule nous assure cependant qu'il y a des corps solides en mouvement ; la proposition qui affirme que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits et l'axiome des parallèles sont, ainsi que Gauss le reconnut, à vérifier ou à démentir par le secours de l'expérience » [2]. « Nous pouvons dire … que les vues de Gauss et de Helmholtz concernant la nature empirique de la géométrie sont devenues un résultat certain de la science. Elles doivent servir aujourd'hui de point d'appui à toute spéculation philosophique concernant l'espace et le temps » [3].

On voit donc l'un des principaux créateurs de l'axiomatique géométrique adhérer à l'empirisme spatial de Gauss, pour appuyer au contraire le nombre et la logique sur un *a priori* excluant l'espace ! Ainsi l'axiomatique géométrique se transforme, d'une part, en une pure logique, tandis que, d'autre part, l'espace intuitif et pratique est relié à la seule expérience. II en résulte que l'espace axiomatique est bien rattaché aux opérations logico-arithmétiques, mais c'est au prix d'une élimination de l'espace réel, renvoyé à la physique, et d'une rupture de tout contact entre l'espace axiomatique et l'espace perceptif, sensori-moteur ou même intuitif. Sans doute subsiste-t-il un lien entre la pensée et la nature : « Nous ne pouvons comprendre cet accord entre la nature et la pensée, entre l'expérience et la théorie qu'en considérant l'élément formel, et le mécanisme qui lui est attaché, aussi bien du côté de la nature que du côté de l'intelligence » [4], mais, cet élément formel étant fondé sur un *a priori*, le lien est « préétabli » sous la forme d'une « harmonie » donnée, et il n'est plus dû à notre activité.

Les problèmes dont nous avons à chercher la solution génétique sont donc clairement posés et la divergence des opinions soutenues par les mathématiciens eux-mêmes montre assez que les trois questions des rapports entre l'espace intuitif et l'espace intellectuel, entre tous deux et l'espace physique ainsi qu'entre tous deux et les opérations logico-arithmétiques ne relèvent pas

1. *Ibid.*, p. 28-29.
2. *Ibid.*, p. 29.
3. *Ibid.*, p. 30.
4. *Ibid.*, p. 27.

de la seule logique ou de sa mise en relation avec les lois de la physique, mais supposent une analyse précise du développement mental lui-même.

Il importe de refaire ici deux remarques préalables, au sujet de l'intuition géométrique, et d'y insister même avec une certaine vigueur, sous peine de retomber dans les difficultés inextricables qui pèsent sur la plupart des discussions concernant les rapports de l'axiomatique et de l'espace « intuitif ».

Le premier point à relever est que la notion d' « intuition » spatiale ou géométrique, telle qu'elle est employée par les mathématiciens (en particulier lorsqu'ils l'opposent aux notions formelles et axiomatisées), ne correspond à rien de définissable et recouvre au contraire un champ essentiellement hétérogène, tant et si bien que l'emploi du mot « intuitif » devient fréquemment contradictoire. La chose est d'ailleurs aisément explicable : les mathématiciens, qui définissent tout avec précision, considèrent avec raison que l'intuitif est le domaine où fait défaut la rigueur formelle ; mais de cette supposition légitime, ils tirent cette conclusion illégitime que le règne de l'intuition constitue une entité positive, comme si l'on pouvait délimiter ou même caractériser une réalité positive avec des caractères négatifs. Il s'ensuit cette conséquence grave que l'on croit dire quelque chose en opposant les notions d'intuitif et d'axiomatique, alors que cette dichotomie revient simplement à distinguer les notions d'axiomatique et de non-axiomatique, et que cette seconde notion recouvre en fait une série de réalités génétiquement distinctes et souvent même qualitativement opposées. Même Gonseth qui a bien vu la gradation des niveaux possibles à intercaler entre les formes intuitives inférieures de l'espace et le schéma axiomatique, donne de l'intuition une définition tellement « sommaire » (selon un terme qu'il affectionne) qu'elle est d'un faible secours (voir § 11). Il est donc indispensable, si l'on veut traiter des rapports entre l'espace perceptif ou sensori-moteur et l'espace axiomatique, d'avoir à disposition une classification et une sériation précises des stades successifs du développement réel, historique ou génétique. C'est l'absence d'un tel tableau des structures psychologiques effectives de l'espace, qui permet à Hilbert de maintenir les antithèses que l'on a vues, tandis que tout le problème des rapports entre l'espace concret et l'axiomatique est à reprendre en termes d'évolution. A cet égard nous distinguerons trois paliers entre l'espace sensori-moteur et l'espace axiomatique : 1° Un espace intuitif au sens limité, caractérisé par la représentation imagée et statique,

apparaissant au niveau préopératoire compris entre 2 et 7 ans et subsistant jusque chez l'adulte, p. ex. dans la représentation des points et des lignes à titre de petites surfaces circulaires ou de bandes étroites ; 2° L'espace des opérations concrètes, susceptible de compositions réversibles et cohérentes, mais à propos seulement des objets manipulables. Cette forme de représentation portant sur les transformations dues à l'action, apparaît au niveau mental compris entre 7-8 et 11-12 ans ; 3° L'espace des opérations formelles, correspondant à une géométrie déjà exprimable en propositions déductibles, mais dont le contenu reste imaginé (c'est l'espace caractéristique du niveau mental ultérieur à 11-12 ans et qui correspond au mode de pensée utilisé dans les *Eléments d'Euclide).* Ce sont ces trois niveaux distincts qui, réunis à l'espace sensori-moteur, correspondent à ce que les mathématiciens appellent « intuitif », lorsqu'ils opposent l' « intuition » à l'axiomatique. Par contre, lorsque l'on distingue simplement l'intuition de la déduction, on appelle intuitif les deux premiers de ces niveaux, joints à l'espace sensori-moteur. Pour notre part, nous appellerons intuition imagée le premier seul de ces trois niveaux, en le distinguant à la fois de l'espace sensori-moteur (§ 5) et de l'espace opératoire (niveaux 2 et 3).

La seconde remarque indispensable à faire, préalablement à toute analyse de l' « intuition » géométrique, est que les mêmes niveaux génétiques dits « intuitifs », compris entre l'espace sensori-moteur et l'espace axiomatique, correspondent à des formes logico-arithmétiques successives d'intuitions imagées, puis d'opérations. Or, ce point est aussi important à noter que le précédent. C'est, en effet, fausser complètement les perspectives sous lesquelles on envisage les différentes formes de l' « intuition » spatiale que de les considérer comme spéciales au domaine géométrique ; on en vient à opposer ainsi une « intuition » de l'espace, qui serait par essence sensible ou imagée (sauf à devenir « transintuitive » lorsque l'on considère ses formes supérieures et rationnelles) à l' « intuition pure » du nombre ou des mécanismes logiques, laquelle serait au contraire d'emblée intellectuelle ou opératoire. En fait, il n'est pas de plus grande erreur psychologique que cette antithèse, qui a vicié presque toute la philosophie géométrique du XIX^e^ siècle. L'observation un peu précise du développement mental fournit au contraire trois enseignements complémentaires, et aussi significatifs les uns que les autres quant à l'analyse épistémologique de l'espace :

1° Les opérations concrètes, qui s'intercalent entre la simple intuition imagée et les opérations formelles (donc les opérations du deuxième des

trois niveaux distingués à l'instant) ne sont pas des opérations portant sur un espace donné indépendamment d'elles mais bien des opérations engendrant l'espace (sous sa forme connue de l'intuition adulte). Chacun (sauf les platoniciens) admet que les opérations logiques et numériques ne sont pas des opérations portant sur des êtres logiques, ou sur des nombres, donnés au préalable, mais qu'elles constituent la source même de ces êtres (classes ou relations) et de ces nombres. Au contraire, lorsqu'il s'agit des opérations spatiales, telles que les réunions et partitions, les placements et déplacements, les mesures, etc., on raisonne comme si ces opérations s'appliquaient à un espace donné antérieurement à elles : or, c'est là une simple illusion due au fait que l'espace « intuitif » adulte étant achevé, nous opérons sur lui comme du dehors ; chez l'enfant au contraire ce sont ces opérations qui engendrent l'espace « intuitif » (au sens des mathématiciens), de la même manière que les opérations de classement engendrent les classifications logiques et que l'opération + 1 engendre la suite des nombres entiers.

2° Ces opérations concrètes, véritables racines de l'espace dit « intuitif » par les mathématiciens sont isomorphes, et de développement parallèle (avec correspondance synchronique), aux opérations logico-arithmétiques. C'est ainsi qu'à l'emboîtement des classes correspond la partition, à la sériation correspond le placement et le déplacement, ces opérations de partition et d'ordre commençant par demeurer qualitatives (au sens d'intensif) sur le plan spatial comme sur le plan logique. De même, d'autre part, que la synthèse de l'emboîtement des classes et de la sériation engendre le nombre, de même la partition et le déplacement fusionnent en opérations de mesure, etc.

3° Enfin, en parallèle exact avec l'intuition spatiale préopératoire (niveau 1) il existe une intuition prélogique et prénumérique avant que se constituent les opérations logico-arithmétiques. Ce qui fait croire que les opérations spatiales concrètes portent sur un espace donné antérieurement à leur constitution, c'est l'existence des espaces perceptifs, sensori-moteurs et surtout de l'intuition imagée, génératrice de certaines figures simples et statiques (non encore susceptibles de transformations) : les opérations concrètes s'appliquent, si l'on veut, à ces formes perceptives et imagées, mais cette « application » consiste en réalité à les transformer en structures nouvelles, présentant de nouveaux caractères, qualitativement irréductibles aux précédents. Or, il en est exactement de même des opérations logico-arithmétiques : celles-ci sont précédées, d'abord (nous l'avons déjà vu) par les schèmes sensori-moteurs tenant lieu de concepts pratiques ou de quantités motrices, puis par de véritables « intuitions » préopératoires, au sens même où l'on parle de l'intuition spatiale imagée. C'est ainsi qu'avant de savoir construire des nombres au moyen de l'opération + 1 l'enfant procède par configuration d'ensemble (voir chap. I, § 1), donnant lieu à des correspondances bi-univoques optiques, mais non intellectuelles, c'est-à-dire sans équivalence durable une fois rompus les contacts visuels. De même, avant de savoir raisonner sur des classes logiques susceptibles d'emboî-

tements et de déboîtements réversibles, il intuitionne des collections d'objets, sans parvenir à conserver les totalités, mais en les dotant de rapports intuitifs élémentaires (analogies, etc.). Bref, toute la pensée prélogique et prénumérique est « intuitive » sur le plan logico-arithmétique comme sur le plan spatial, avant que les opérations concrètes ne transforment ces deux domaines à la fois. Or, de même que les opérations logico-arithmétiques ne se bornent pas à une simple « application » à ces données intuitives, mais les reconstruisent totalement en leur imposant de nouvelles structures, de même les opérations spatiales concrètes, se constituant vers 7-8 ans, élaborent un espace nouveau au moyen des données perceptives et intuitives (imagées) antérieures, et un espace que l'adulte interprète ensuite faussement comme dû à la perception elle-même ; c'est ainsi que la structuration de l'espace selon des axes de coordonnées verticaux et horizontaux est l'œuvre des opérations concrètes et nullement de la perception seule ni des intuitions imagées, et n'est même terminée que vers 9-10 ans seulement ! C'est après coup que de tels systèmes opératoires de coordonnées naturelles sont fusionnés avec l'espace perceptif, alors qu'ils n'en dérivent nullement en fait.

L'analyse génétique conduit donc à remettre en question la description tout entière que propose D. Hilbert des rapports entre le formel et l'intuitif. A l'encontre de l'apriorisme de Hilbert qui met en correspondance le formel et l'expérimental par le moyen d'une harmonie préétablie, l'étude du développement montre toutes les transitions entre l'espace intuitif et l'espace formalisé : il est donc inutile d'invoquer une préformation ou une raison innée, pour rendre compte du formel, car l'accord des formes rationnelles et de l'expérience s'explique alors par l'accord entre les coordinations générales de l'action — source de la nécessité formelle, qui apparaît au terme de la composition tirant d'elles ses matériaux — et les actions particulières constituant l'expérience comme telle. Ce passage graduel de l'intuitif au formel a été bien aperçu par Gonseth, mais, au lieu de considérer en ce cas l' « intuition » comme un ensemble complexe de transitions entre le sensori-moteur et le « théorique », cet auteur maintient l'intuitif sur le même plan que l'expérimental et le formel. En l'une de ses dernières publications [1], en effet, ces « trois aspects de la géométrie » sont mis en exact parallèle entre eux : « l'équivalence de vérité des trois aspects est l'idée dominante de la doctrine préalable de la géométrie élémentaire » [2]. Or, si au lieu de mêler les niveaux hétérogènes de l'évolution ou de la hiérarchie des mécanismes mentaux, on se

1. F. GONSETH, *La géométrie el le problème de l'espace* ; II. *Les trois aspects de la géométrie*, Neuchâtel, Le Griffon, 1946.

2. *Ibid*., p. 84.

place au point de vue du développement psychologique et de l'histoire, et par conséquent de la construction effective de l'espace, il n'y a pas de doute que le domaine de l' « intuitif » se rétrécit au fur et à mesure des progrès de cette construction, tandis que les domaines de l' « expérimental » (l'espace physique) et du « formel » (l'axiomatique) se partagent toujours plus complètement les dépouilles du premier : c'est bien la meilleure preuve que l' « intuition » n'est qu'un ensemble de termes de passage, un complexe indifférencié initial, dont la différenciation conduit, d'une part, à la composition réflexive des structures formelles, appuyées sur la coordination des actions ou opérations, et d'autre part, à la mise en relation des objets physiques eux-mêmes, grâce aux actions particulières qui en fournissent l'expérience.

§ 7. L'INTUITION IMAGÉE ET LES OPÉRATIONS SPATIALES CONCRÈTES DE CARACTÈRE « INTENSIF ». — Pour comprendre ce qu'est la vérité géométrique, même sous la forme purement axiomatique, il ne suffit donc pas de sauter de l'espace perceptif ou de l' « intuition » aux constructions formalisées : il importe de suivre palier par palier les étapes de la formation réelle. Nous allons ainsi, dans ces § 7 et 8, décrire les élaborations propres aux trois niveaux distingués au § 6 : celui de l'intuition imagée, celui des opérations concrètes et enfin celui des opérations formelles.

Nous avons insisté (§ 4 et 5) sur le fait que l'espace perceptif est essentiellement incomplet, parce que toujours lié au champ présent et proche du sujet, sans possibilité de relier ces divers champs en un espace unique et général. L'espace sensori-moteur fournit ensuite en partie cette possibilité, mais de façon purement pratique et motrice, c'est-à-dire grâce à des anticipations courtes, et sans représentation d'ensemble de la totalité des déplacements ou des chemins parcourus. L' « espace » en tant que milieu unifié, commun à tous les phénomènes, est donc une conquête de l'intelligence représentative, et demeure étranger à la perception ou au mouvement comme tels. Il s'agit alors de comprendre le mécanisme de sa construction.

Pour l'empirisme, qui croit à la perception-copie, simple reproduction du monde extérieur, et qui voit dans l'image un prolongement direct des perceptions, l'espace intuitif n'est pas autre chose que la réunion des diverses images, conservées à titre de souvenirs des perceptions successives. Mais, de même que les éléments sensoriels de la perception comme telle ne constituent qu'un système d'indices servant de signifiants aux

diverses activités perceptives et motrices, de même les images spatiales (images de formes, de longueurs, etc.) constituent des symboles ayant pour signification, non plus simplement des activités perceptives ou des mouvements effectifs, mais des actions possibles sur les objets. La nature propre de l'intuition spatiale imagée est donc d'emblée complexe : elle est à la fois symbolique en son expression et active en son contenu, mais se référant, au début, à des actions courtes, isolées et non encore groupées en opérations composables entre elles de façon cohérente.

Qu'est-ce d'abord qu'une image mentale ? C'est une imitation intériorisée, servant de simple signifiant symbolique aux actions portant sur les objets ou à ceux-ci en tant qu'objectifs des actions. Une image auditive, telle qu'un mot ou qu'une mélodie, entendus intérieurement, n'est pas autre chose qu'une imitation intériorisée (c'est le cas du « langage intérieur » en général) ou qu'une esquisse d'imitation, non encore extériorisée, de parole ou de chant. Une image visuelle est de nature semblable ; imaginer une forme consiste à pouvoir la reproduire, non pas seulement parce que cette reproduction s'appuiera sur l'évocation imagée, mais parce que cette évocation à elle seule est déjà un début de reproduction motrice [1]. Or, l'imitation étant elle-même, en ses racines, le prolongement de l'accommodation des schèmes sensori-moteurs, on voit comment les images visuelles peuvent être conçues comme issues, non pas de la perception proprement dite, mais bien de l'activité perceptive ou sensori-motrice en tant que source de l'imitation. Bien plus, c'est parce qu'elle est due à l'accommodation des schèmes sensori-moteurs (imitation), et non pas à leur activité entière, que l'image joue un rôle de signifiant symbolique, tandis que l'assimilation sensori-motrice, qui caractérise l'essentiel de cette activité, est au point de départ de l'assimilation conceptuelle, lorsqu'elle peut s'appuyer à la fois sur les symboles imagés et sur les signes verbaux.

Cela dit, il est incontestable que l'intuition spatiale élémentaire s'appuie sur des images, comme toute pensée intuitive et préopératoire, mais il est non moins clair que ces images ne signifient rien à elles seules, sinon en se référant à des actions possibles, auxquelles les objets sont assimilés et qui leur confèrent alors leurs déterminations spatiales. Demandons, p. ex., à des enfants de 4 à 6 ans d'imaginer la section d'un volume en pâte à modeler (tel qu'un cylindre à couper transversalement ou longitudinalement), ou la surface obtenue par rabattement des côtés d'un cube, etc. ou encore, simplement, la forme que prendra un nœud en le serrant ou en le desserrant quelque peu, etc. Il se trouve alors que les petits demeurent incapables de la moindre anticipation par l'image avant que l'action réelle ait été esquissée ou commencée, mais lorsque le cylindre est entamé, que le volume commence à être déplié ou le

1. Voir PIAGET, *La formation du symbole chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé.

nœud en voie d'être serré ou desserré, alors le mouvement déjà esquissé peut être prolongé en imagination. En d'autres termes, l'image ne précède pas l'action, mais l'action réelle, une fois ébauchée, peut se prolonger en image [1].

L'intuition géométrique à ses débuts est donc un ensemble d'actions intériorisées, dont l'image n'est que le symbole constitué par leur accommodation imitatrice. Mais comme les actions mises en œuvre mentalement par l'intuition naissante sont plus riches que les activités sensori-motrices (dont elles procèdent en leur source), par le fait même qu'elles peuvent se compléter symboliquement, elles vont rapidement donner lieu à des coordinations dépassant l'espace proche, et fourniront ainsi le point de départ de l'espace représentatif en tant que milieu commun aux divers phénomènes. Or, chose intéressante, ces coordinations parcourent, à nouveau, mais sur ce nouveau plan élargi constitué par la pensée, les étapes déjà franchies en petit, et dans le champ proche seulement, par l'espace perceptif. En d'autres termes, les premières intuitions spatiales seront d'ordre topologique, comme l'étaient les premières perceptions de l'espace, puis, ensuite seulement se construiront simultanément les intuitions projectives et euclidiennes, de même que les perceptions spatiales développées par l'activité perceptive sont devenues, elles aussi, après coup, projectives et euclidiennes.

C'est ainsi que, si l'on examine l'évolution du dessin (dans lequel L. Brunschvicg voit le début de la construction des formes géométriques), on s'aperçoit que les premiers rapports accessibles aux petits sont les rapports topologiques de voisinage et d'enveloppement (avec.la distinction des formes ouvertes et fermées et des éléments intérieurs, extérieurs ou même à cheval sur la frontière) ; p. ex. à un âge où l'enfant ne copiera les carrés et les triangles qu'en leur donnant une forme de cercles (c'est-à-dire de simples courbes fermées) il saura fort bien situer un petit rond soit sur la frontière, soit à l'extérieur ou à l'intérieur d'une autre figuré. Les rapports intuitifs d'ordre sont également précoces (mais sous une forme encore non opératoire, c'est-à-dire sans inversion possible, ni compréhension de la symétrie de la relation « situé entre » en cas de renversement), etc. [2]. Au contraire les rapports euclidiens (grandeurs, proportions, et surtout structuration selon un axe de coordonnées) et projectifs (choix et coordination des perspectives, par opposition au mélange des points de vue) n'apparaissent que plus tard et en corrélation les uns avec les autres [3] : en effet, dans le domaine de l'intuition imagée

1. Voir PIAGET et INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant,* chap. IV, IX et X.

2. Voir PIAGET et INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant,* Paris, P.U.F., chap. III.

3. *Ibid.,* chap. VI-XIV.

comme dans celui de la perception, les rapports topologiques ne supposent qu'une mise en relation de proche en proche, et demeurant intérieure aux figures ou aux configurations données, tandis que les coordinations projectives et euclidiennes supposent une mise en place de chaque figure par rapport à toutes les autres et par conséquent une structuration d'ensemble de l'espace. Or, si les rapports euclidiens les plus simples intervenant dans le dessin (d'un carré ou d'un triangle, p. ex.) sont accessibles à l'intuition imagée (encore que la copie d'un losange, p. ex. présente déjà des difficultés bien supérieures, à cause de la mise en relation des inclinaisons), les constructions d'ensemble que supposent un système de coordonnées ou une coordination de perspectives dépassent les possibilités de la simple image intuitive.

Bref, l'intuition spatiale propre au niveau s'insérant entre l'espace sensori-moteur et les premières opérations concrètes (soit de 2 à 7 ans en moyenne) consiste en actions imaginées dans leur résultat, mais courtes et, au début, peu composables entre elles. Aussi ne suffit-elle pas, pendant longtemps, à la construction d'un espace d'ensemble, pour les mêmes raisons que les perceptions successives n'y parvenaient pas non plus, sans intervention d'une activité perceptive et sensori-motrice. Le même phénomène se reproduit ainsi sur un palier supérieur et à cette autre échelle qu'est celle de la représentation, par opposition à l'action effective : mais ce sont les opérations concrètes qui joueront cette fois le rôle coordinateur et structurateur. En quoi consistent alors ces opérations ?

Les actions, effectives ou mentales, qui sont à la racine de l'intuition de l'espace, demeurent, au niveau de l'intuition imagée initiale, orientées à sens unique vers leur objectif et non susceptibles encore de composition réversible. Mais le progrès même de ces actions conduit à une articulation graduelle des intuitions et s'engage ainsi dans la direction de la réversibilité. Les actions mentalisées se constituent alors en opérations sitôt que leur coordination atteint le niveau de la composition réversible : les opérations spatiales concrètes représentent donc la forme d'équilibre mobile vers laquelle tendent les actions intériorisées (intuitions) initiales, mais qu'elles atteignent seulement après avoir conquis la mobilité nécessaire et la capacité de se coordonner selon les deux sens de parcours. Or, sitôt atteint ce niveau de composition réversible, terme de l'articulation des actions courtes et rigides du début, un ensemble de caractères qualitativement nouveaux oppose les opérations aux actions à sens unique du niveau précédent : une certaine logique de l'espace est par le fait même fondée, ou, plus précisément, l'espace devient une logique de l'objet, après en avoir été simplement une repré-

sentation statique ; il cesse d'être une simple description d'états pour être promu au rang de système de transformations.

Un bon exemple montrant à la fois la filiation des opérations spatiales, par rapport aux actions intuitives, et le caractère qualitativement nouveau du groupement de ces opérations, est le développement spontané des conduites annonçant la mesure. Lorsqu'on demande à des enfants de différents âges de construire une tour aussi haute qu'un modèle séparé par une certaine distance et situé à un niveau différent, on constate que les plus jeunes se contentent de comparaisons perceptives, à vue, ou en s'aidant de bâtons pour relier les sommets (sans tenir compte du décalage des bases) ; et ensuite que, après avoir cherché à rapprocher matériellement les objets à comparer, ils se servent de mouvements imitatifs pour reporter la hauteur (gestes des bras, points de repères sur le corps propre, etc.). Après quoi ils ont l'idée de construire une troisième tour, servant de moyen terme mobile, et, enfin (seulement vers 7 ans) ils parviennent à se servir de bâtons ou de règles à titre de communes mesures. Or, ce dernier comportement transforme les actions précédentes en opérations, du fait même qu'elles deviennent susceptibles de compositions transitives, associatives et réversibles, de type A = B ; B = C donc A = C. On voit ainsi en quoi ce groupement opératoire se distingue qualitativement des simples comparaisons perceptives et intuitives, tout en constituant la forme d'équilibre mobile atteinte au terme de l'articulation des intuitions antérieures [1].

Or, du point de vue épistémologique, ce sont ces premières structures proprement opératoires de l'espace qui sont les plus instructives quant aux relations de l'espace intuitif avec l'espace formalisé, parce que ce sont ces premiers groupements d'opérations qui complètent et tentent de remplacer l'espace perçu ou imaginé par un système de transformations intellectuelles, et cela en coordonnant les intuitions statiques particulières jusqu'à les englober dans une structure d'ensemble (de façon analogue à celle dont les schèmes sensori-moteurs ont déjà élaboré un système pratique en s'intégrant les simples schèmes perceptifs : cf. § 4).

Une double constatation nous paraît dominer à cet égard l'ensemble de la question. D'une part, l'espace n'apparaît nullement dès le début comme une structure mathématique, car il est d'abord construit au moyen d'opérations qualitatives de caractère « intensif » (voir chap. I, § 3), avant de donner lieu à une quantification mathématique, c'est-à-dire « extensive » ou « métrique ». De ce point de vue, la construction de l'espace est exacte-

1. Voir PIAGET, INHELDER et SZEMINSKA, *La géométrie spontanée de l'enfant*, chap. II.

ment parallèle à celle du nombre : de même que l'élaboration du nombre est préparé par des opérations logiques, non encore numériques, dont la fusion seule, en synthèses nouvelles, constitue les opérations arithmétiques, de même l'espace mathématique, de caractère extensif ou métrique, procède d'un espace « intensif » dont les transformations qualitatives fusionnent ensuite seulement, en opérations mathématisées. Mais, d'autre part, les opérations intensives qui constituent d'abord l'espace opératoire ne sont pas identiques aux opérations logiques de classes et de relations asymétriques, dont la synthèse aboutit à la formation du nombre, mais, tout en leur étant isomorphes, elles demeurent, sur le plan concret, d'un caractère distinct, que nous appellerons « infralogique ». C'est seulement à partir du moment où elles sont formalisables, c'est-à-dire où elles sont exprimées par de simples propositions hypothético-déductives et soumises comme telles au système des opérations formelles, et non plus concrètes, qu'elles deviennent assimilables aux opérations logiques. Sur le plan concret, au contraire, elles s'en distinguent et l'importance de cette distinction entre les opérations infralogiques et les opérations logico-arithmétiques est attestée par le fait qu'un espace concret constitue un schème unique, c'est-à-dire d'un seul tenant ou continu, par opposition à une suite de nombres entiers ou rationnels, et à un système de classes ou de relations, dont les totalités ne sont pas astreintes à remplir cette condition. C'est même ce caractère qui a longtemps donné lieu à l'illusion que l'espace est plus « sensible » que le nombre, alors qu'il est d'une nature intellectuelle et opératoire exactement comparable à la sienne (avec, auparavant, des stades intuitifs préopératoires exactement semblables), à cette seule différence, précisément, que ses opérations constitutives sont de nature « infralogique » et non pas « logique ».

En quoi consistent donc ces opérations infralogiques, constitutives de l'espace intellectuel ainsi que, nous le verrons, du temps et des notions physiques élémentaires ? Elles sont isomorphes aux opérations logiques mais, alors que celles-ci partent des objets à titre de données invariantes pour se borner à les réunir (groupements additifs et multiplicatifs de classes) ou à les sérier (groupements additifs et multiplicatifs de relations), les opérations infralogiques portent sur la construction même de l'objet et ont pour rôle de réunir et de sérier les éléments de cet objet et non plus les objets comme tels : c'est pourquoi, un objet se distinguant d'un ensemble d'objets précisément parce qu'il constitue un système d'un seul tenant, les opérations infralogiques ne

reposent pas sur les ressemblances (comme les classes et les relations symétriques de nature « logiques ») ou sur les différences (comme les relations asymétriques « logiques »), mais sur les rapports de voisinage ou sur les différences de position. Ce sont donc ces actions ou opérations formatrices des objets qui constituent l'espace (et le temps, etc.) : l'espace n'est pas autre chose que l'ensemble des rapports déterminés par les transformations de positions des éléments de l'objet considéré (abstraction faite de la vitesse des déplacements, qui détermine le temps), tandis que les classes et relations logiques consistent à relier les objets entre eux indépendamment de telles transformations. Mais répétons-le, il va de soi que cette distinction est limitée au domaine des opérations concrètes : sur le plan formel, rien n'empêche de traiter un « ensemble de points » comme une classe logique, un ordre de succession comme un système de relations asymétriques, etc.

Il est clair, d'autre part, que nous n'entendons nullement, en opposant ainsi les opérations concrètes infralogiques aux opérations concrètes logico-arithmétiques, engendrer déductivement l'espace, car il y aurait un cercle vicieux évident à vouloir expliquer toutes les structures spatiales par les transformations internes de l'objet quand celui-ci implique déjà l'étendue. Nous voulons simplement décrire comment les choses se passent dans la réalité du développement psychologique, et insister à cet égard sur deux aspects de cette genèse réelle : 1° que les opérations infralogiques prolongent, en tant qu'elles portent sur les transformations de l'objet, la construction même de l'objet déjà amorcée par la perception et l'intelligence sensori-motrice (voir § 4) ; 2° que la construction opératoire de l'espace, au sein même de ce que les mathématiciens appellent, de manière globale, l' « intuition » géométrique et de ce qu'ils considèrent ainsi comme une donnée préalable à l'axiomatisation, annonce en réalité cette formalisation elle-même, et procède de lois d'organisation intellectuelle et d'équilibration graduelle, semblables aux lois qui président à la formation du nombre.

Cela dit, l'analyse génétique montre que, au niveau où les intuitions spatiales imagées progressivement articulées (entre 4 et 6-7 ans) se constituent en opérations proprement dites, c'est-à-dire en groupements caractérisés par leurs compositions réversibles, il faut distinguer trois grands systèmes d'opérations spatiales : le premier à se constituer (6-8 ans) porte sur les transformations de proche en proche des figures (rapports topologiques) ; le second (achevé vers 8-9 ans seulement) intéresse la coordination des points de vue selon lesquels les figures sont transformées

(rapports projectifs) ; le troisième (corrélatif du second et ne s'achevant qu'avec lui) porte sur les transformations dues aux déplacements et se référant à des axes de coordonnées (rapports euclidiens, y compris les similitudes). Or, chacun de ces trois systèmes consiste d'abord en opérations exclusivement « intensives » au sens défini chap. I § 3), avant de donner lieu à des quantifications extensives ou métriques.

Nous n'allons pas refaire ici la description détaillée de ces diverses opérations infralogiques, dont l'intérêt est seulement génétique et non pas mathématique, puisque nous l'avons donnée ailleurs [1]. Contentons-nous donc de quelques exemples, destinés à faire apercevoir à la fois le caractère « intensif » de ces groupements et leur isomorphisme par rapport aux groupements de classes et relations logiques.

Les deux groupements fondamentaux d'opérations topologiques élémentaires portent sur la partition et l'ordre. La partition implique deux opérations, inverses l'une de l'autre, l'une consistant à séparer par des coupures quelconques les éléments d'un continu perceptif (p. ex. une ligne ou une surface), l'autre à réunir en fonction de leurs voisinages les parties ainsi séparées. Or, ces deux opérations, si simples soient-elles, ne sont nullement données avec leur réversibilité, dans les intuitions imagées préopératoires : au contraire, les petits s'imaginent qu'un carré ou un triangle ne sauraient être débités en parties toujours plus petites, leurs éléments ultimes demeurant toujours carrés ou triangulaires ; et que si, d'aventure, on dépassait ces éléments ultimes pour aboutir à des « points » (au sens de petites surfaces perceptibles), la réunion de ces derniers n'aboutirait plus à une figure continue. Lorsque ces opérations de décomposition et recomposition se constituent vers 7 ans sous leur forme réversible et aboutissent à ce résultat fondamental qu'est la conservation des totalités spatiales (voir plus loin), il va de soi, d'autre part, qu'il ne saurait s'agir de transformations infinies comportant une quantification extensive (comme les notions mathématiques de limite, de point d'accumulation, de coupure, etc.) ni métrique (par correspondance des segments avec les nombres rationnels et irrationnels : la partition et l'addition partitive demeurent donc longtemps à l'état d'opérations « intensives » finies dont le « groupement » est isomorphe à celui de l'emboîtement des classes :

$$A + A' = B \; ; \; B + B' = C, \text{ etc.}$$

(voir chap. I, § 3) ; la seule différence est que les éléments A, A', B', etc. ne sont plus alors des objets réunis en classes en fonction de leurs ressemblances qualitatives, mais des « parties » finies d'objets, réunies en « parties » d'ordre supérieur (jusqu'à l'objet total) en fonction de leurs voisinages [2]. — Quant aux opérations d'ordre, que nous appellerons « placements » [3], elles correspondent aussi à des intuitions élémentaires,

1. PIAGET et INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris, P.U.F., 1947.

2. Voir PIAGET et INHELDER, *Loc. cit.*, chap. V.

3. Voir PIAGET, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Paris, P.U.F., 1946, chap. I-II et PIAGET et INHELDER, *Loc. cit.*, chap, III.

mais qui ne sont groupées que vers 6-7 ans : procéder de l'ordre direct à l'ordre inverse, et comprendre que la relation « placé entre » se conserve indépendamment des inversions, suppose le même mécanisme de composition réversible que la partition, mais est isomorphe au groupement logique de la sériation des relations asymétriques (avec addition non commutative des relations, par opposition à l'addition partitive ou à celle des classes, qui sont toutes deux commutatives). Les opérations de placement ne sont d'ailleurs pas seulement appliquées aux éléments des suites linéaires mais aussi à des enveloppements successifs (courbes fermées s'enveloppant dans le plan, ou boîtes s'enveloppant les unes les autres dans l'espace). Notons à cet égard que c'est la notion d'enveloppement qui fournit l'intuition psychologiquement la plus simple des dimensions de l'espace, antérieurement à toute structuration euclidienne des coordonnées [1].

De telles opérations intensives portant sur les rapports topologiques, le sujet passe à la construction de l'espace projectif dès qu'elles sont effectuées en fonction d'un « point de vue » considéré comme tel, c'est-à-dire en fonction de la coordination des « points de vue » possibles. Rien n'est plus instructif, à cet égard, que la construction opératoire concrète de la droite projective ou ponctuelle. Il est clair que, dans l'espace de la perception, la droite est l'une des premières formes reconnaissables, sitôt dépassé le niveau des premières perceptions syncrétiques ne portant que sur les rapports de voisinage et de séparation. Mais, si la droite perceptive est ainsi fort précoce, il s'en faut de beaucoup que l'enfant sache d'emblée construire une droite entre deux points, en l'absence d'un système perceptif de référence ou surtout en opposition avec lui. Si l'on place, p. ex., deux jalons aux extrémités d'une table rectangulaire, en demandant d'en situer d'autres en ligne droite entre deux, l'enfant y réussit facilement si cette droite est parallèle au bord de la table, mais il éprouve les plus grandes difficultés à 4-6 ans encore, si la droite à construire est oblique par rapport à ce bord. On voit ici de la façon la plus claire la carence de l'intuition imagée préopératoire : cette forme de représentation spatiale est donc incapable à elle seule d'anticiper une ligne droite, lorsque celle-ci se trouve en conflit avec la configuration perceptive ! Le problème est résolu opératoirement (vers 7 ans seulement) lorsque les jalons sont « placés » par le sujet entre les termes limites de manière à ce que, situé à l'une des extrémités, il ne voit plus, en visant correctement, qu'un seul jalon cachant tous les autres. Cette opération spontanée de la visée, qui engendre la droite projective, correspond ainsi à la célèbre définition de Platon, dans le *Parménide* (137 E) : « On appelle droite la ligne dont le milieu se trouve sur le trajet entre les deux extrémités » [2]. La droite projective est donc une ligne, ordonnée topologiquement, mais telle que les éléments se trouvent tous les uns

1. PIAGET et INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant,* Paris, P.U.F., chap. IV.

2. Cité par BRUNSCHVICG *(Etapes,* 2e éd., p. 504) à titre précisément d'opération tirée de la pratique journalière.

derrière les autres, considérés d'un certain « point de vue » (du point de vue dit « de bout »). Or cette intervention des « points de vue » caractérise chacune des opérations projectives concrètes, entre autres celles qui aboutissent à la mise en perceptive correcte dans les dessins spontanés. La plus importante de ces opérations est sans doute celle qui coordonne les points de vue selon leurs réciprocités (d'où la notion des symétries entre points de vue opposés) et engendre ainsi une coordination qualitative d'ensemble de l'espace projectif prémathématique.

En corrélation étroite avec cet espace projectif, ainsi caractérisé par la décentration des intuitions initiales égocentriques (cet égocentrisme initial étant dû à l'ignorance des différences entre le point de vue propre et celui des autres observateurs) et par la mise en correspondance des relations inhérentes aux divers points de vue, se constitue l'espace euclidien ; celui-ci est dû, non plus à la coordination des points de vue, mais à celle des objets eux-mêmes, considérés comme les parties d'un seul objet total, qui est le système des éléments rapportés à des axes de coordonnées.

L'espace euclidien marque donc l'achèvement de l'espace opératoire, sur le plan des opérations concrètes, et non pas son point de départ. Une telle assertion peut paraître curieuse, tant est ancrée l'habitude de considérer les relations élémentaires de la métrique euclidienne comme primitives génétiquement. Cette illusion tient à deux raisons dont il est facile d'apercevoir le caractère erroné. La première est qu'on s'imagine la genèse réelle comme devant être conforme à la succession historique des découvertes réflexives, alors que cette genèse en inverse souvent l'ordre et se trouve ainsi bien plus proche qu'il ne semblerait de la reconstruction théorique et même axiomatique de l'espace. De même que la notion de correspondance bi-univoque est apparue tard dans la science (avec la définition cantorienne de la puissance en théorie des ensembles) alors que, comme l'a montré L. Brunschvicg, elle intervient déjà dans l'échange un contre un qui constitue le nombre pratique, de même les notions topologiques précèdent les opérations euclidiennes génétiquement comme axiomatiquement. La seconde raison qui explique le primat attribué à l'espace euclidien tient à la confusion de l'espace perceptif et de l'espace représentatif sous le même vocable imprécis d'espace intuitif, dont on aperçoit, sur ce point peut-être encore mieux que sur les autres, combien hétérogènes et sources de contradictions sont les réalités qu'il recouvre. Perceptivement, les rapports euclidiens sont effectivement assez précoces, mais sans doute pas primitifs non plus, puisqu'ils ne se stabilisent qu'avec l'organisation de la constance perceptive des grandeurs (seconde moitié de la première année). Mais sur le plan représen-

tatif (intuition imagée puis opérations concrètes) les schèmes déjà construits par la perception et par l'intelligence sensori-motrice (notamment le schème de l'objet permanent, lié à la fois à la constance perceptive des grandeurs et au groupe pratique des déplacements) sont tous à reconstruire et leur nouvelle élaboration procède selon le même ordre que sur le plan initial : ce n'est donc qu'une fois achevées et groupées opératoirement les intuitions topologiques que les opérations euclidiennes se constituent en corrélation avec les opérations projectives.

La meilleure preuve du caractère tardif des opérations euclidiennes — et aussi de l'opposition qualitative fondamentale qui sépare les intuitions imagées de départ des mécanismes opératoires concrets, confondus avec elles sous le nom d' « intuition » représentative — et que, durant toute la période de la pensée intuitive comprise entre 2-3 et 6-7 ans, le sujet ne parvient pas à concevoir la conservation nécessaire des rapports fondamentaux de distance, de longueur, de surface, etc. ; il admet que la distance entre deux objets se modifie sitôt qu'on intercale un troisième objet entre eux (les premiers restant immobiles) ; que deux tiges, reconnues de mêmes longueurs lorsque leurs extrémités coïncident, cessent d'être égales lorsque l'on déplace l'une des deux en l'avançant de quelques cm ; qu'une surface change de valeur totale si l'on arrange différemment ses éléments ; que les surfaces restantes ne sont pas équivalentes lorsque l'on a enlevé en des régions distinctes de deux mêmes aires totales deux surfaces partielles égales, etc. Ce n'est que vers 7-8 ans que ces diverses formes de conservation sont reconnues comme nécessaires [1].

Or, il tombe sous le sens que cette conservation des longueurs, surfaces, etc., n'est pas un résultat de la mesure, mais au contraire la condition préalable de toute opération de mesure ; il est, en effet, impossible de comparer deux grandeurs en déplaçant l'une pour l'appliquer sur l'autre, si le mouvement modifie la première et que l'égalité constatée par superposition ne signifie plus rien une fois les termes séparés ; et il est encore impossible de les comparer par l'intermédiaire d'une commune mesure, si le mètre servant de moyen terme se dilate ou se contracte en cours de route. Il est donc nécessaire d'admettre que la conservation des grandeurs euclidiennes se construit antérieurement à toute métrique et par le seul moyen d'opérations infralogiques de caractère « intensif », C'est bien ce que montre l'observation : c'est en apprenant à réunir les parties en un tout, par une composition réversible ne reposant que sur ces relations de partie à totalité (p. ex. A + A' = B, d'où A < B et A' > B, mais sans mise en relations quantitative entre A et A') que la conservation des grandeurs s'acquiert ; et cela avant que leur mathématisation devienne possible, c'est-à-dire avant que les par-

1. Voir PIAGET, INHELDER et SZEMINSKA, *La géométrie spontanée de l'enfant*, Paris, P.U.F., 1948.

ties (A et A') puissent être comparées entre elles (sous la forme A > A', A < A' ou A = A'), donc avant toute quantification « extensive » ou métrique.

Cette nécessité d'une construction préalable des diverses formes de conservation des grandeurs est ainsi la meilleure preuve de l'existence génétique des opérations infralogiques de caractère intensif. Sur le terrain euclidien (c'est-à-dire donc de la coordination des objets, par opposition à celle des points de vue), ces opérations infralogiques intensives consistent essentiellement à réunir les éléments en totalités (additives ou multiplicatives), et à les placer selon un ordre de succession (ou plusieurs ordres simultanés de placement), mais en faisant porter ces réunions ou ces relations d'ordre aussi bien sur les emplacements immobiles (rapportés à des éléments de référence supposés fixes) que sur les grandeurs mobiles. D'où, en premier lieu la construction des systèmes élémentaires de coordonnées, lesquels consistent, antérieurement à toute métrique, en simples correspondances de partitions ordonnées selon deux ou trois dimensions ; et, en second lieu, la composition des « déplacements », qui apparaissent avant leur quantification métrique, comme de simples changements d'ordre ou de « placement » [1].

§ 8. LA CONSTRUCTION DE LA MESURE ET LA MATHÉMATISATION DE L'ESPACE PAR QUANTIFICATION EXTENSIVE ET MÉTRIQUE. — Les opérations concrètes infralogiques, dont la description précède et qui donnent sa forme définie à ce que les mathématiciens appellent l' « intuition » de l'espace, sont donc entièrement comparables aux opérations logiques concrètes, concernant les classes et les relations ; la seule différence est qu'elles portent sur les transformations de l'objet et non pas sur les réunions ou sériations d'objets discrets, l'addition des classes prenant de ce fait la forme de la partition et de l'addition des parties, et celle des relations asymétriques la forme d'opérations de placement et de déplacement. Or, nous avons vu (chap. I, § 6) comment le nombre entier résultait de la fusion opératoire des « groupements » de classes et de relations asymétriques en un seul « groupe » présentant, dans le fini, un caractère simultanément cardinal et ordinal. On peut donc s'attendre, si la correspondance des deux systèmes logique et infralogique est exacte, à ce que la

1. PIAGET et INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, PIAGET, INHELDER et SZEMINSKA, *La géométrie spontanée chez l'enfant* et PIAGET, *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Paris, P.U.F.

mesure (laquelle équivaut dans le domaine spatial à ce qu'est le nombre sur le terrain des ensembles discontinus) résulte de même d'une fusion des opérations de partition et de déplacement. On peut s'attendre également à ce que la quantification « extensive » résulte d'une généralisation, s'étendant aux rapports entre les parties d'un même tout, des relations établies par les opérations « intensives » entre les parties et le tout comme tel.

I. Qu'est-ce d'abord, du point de vue génétique, que la mesure d'une longueur ? Partons de l'un des axiomes métriques les plus intuitivement évidents, appelé depuis Eudoxe le postulat d'Archimède. Soit un segment de droite AB et un point C, situé au-delà de B : quelle que soit la position de C, on pourra toujours, en reportant successivement un certain nombre de fois la longueur AB, dépasser le point C. Demandons-nous maintenant si un sujet, en possession des seules intuitions spatiales imagées et préopératoires, ou des seules opérations concrètes de caractère « intensif », décrites au § 7, saisira un tel axiome ? Au niveau des simples intuitions imagées, il n'en sera rien : non seulement les jeunes sujets croient qu'une longueur déplacée ne se conserve pas, mais encore, en voulant reporter un certain nombre de fois le segment AB, ils construisent en général des segments A'B' > AB puis A"B" > A'B' en partant de l'idée que, en s'ajoutant aux précédents, ces nouveaux intervalles deviennent eux-mêmes plus grands. Au niveau des opérations intensives concrètes, par contre, ils sont capables de vérifier par superposition la congruence de deux longueurs quelconques (non successives)

$$A_1B_1 = A_2B_2 \quad \text{et} \quad A_2B_2 = A_3B_3$$

et d'en tirer la conclusion $A_1B_1 = A_3B_3$. Mais cette double découverte de l'égalité par congruence et de la transitivité des congruences ne suffit point encore psychologiquement à constituer la mesure : il ne s'agit toujours que d'opérations infralogiques « intensives », comparables aux opérations simplement logiques, et cela tant que n'intervient pas l'itération d'une unité comme dans l'axiome d'Archimède :

$$AB + AB = 2\,AB\,; \quad 2\,AB + AB = 3\,AB\,; \text{ etc.}$$

Or, l'expérience montre qu'il existe un décalage appréciable entre le moment où devient accessible l'emploi d'une « commune mesure » qualitative (transitivité des congruences) et le report d'un segment-unité AB, c'est-à-dire d'une partie donnée appliquée sur les autres parties du même tout, jusqu'à épuisement de la totalité considérée alors comme un multiple de la partie choisie comme unité.

C'est que, dans les opérations infralogiques décrites précédemment, il n'intervient qu'un seul type de rapports quantitatifs : ce sont les rapports « intensifs » de partie à tout [1], soit

$$A < B \text{ et } A' < B \text{ si } B = A + A',$$

1. Dans ce qui suit, le symbole A représente, p. ex., un segment de droite et le symbole B un segment plus grand que A et comprenant A lui-même.

mais sans quantification de la relation entre une partie (A) et les autres (A'). Dès lors, à s'en tenir à ces rapports « intensifs », ils n'existe que deux sortes d'opérations possibles de départ (plus celles qui en sont tirées directement, par multiplication, etc.) : la partition, qui consiste à décomposer B en A et A' (ou à recomposer B en réunissant A et A') et le placement qui consiste à situer A avant A' ou sur A', etc. (ou le déplacement qui situe A après A' ou sous A', etc.). Mais il n'existe pas de groupement opératoire « intensif » dont les opérations puissent engendrer simultanément une partition et des déplacements, parce que l'addition partitive revient à réunir les uns aux autres des éléments d'objets, indépendamment de leur ordre de succession, et que le déplacement consiste (antérieurement à toute métrique) à modifier précisément les relations d'ordre. Au contraire, mesurer le tout B au moyen de la partie A consiste simultanément à répartir le tout en éléments (dont la partie A), et à déplacer la partie A sur la partie restante A', de manière à comparer l'élément A choisi comme unité avec la différence B - A : il en résulte le rapport B = *n* A (p. ex. B = 2 A si A = A'), lequel implique effectivement une partition et un déplacement réunis, tous deux fusionnés en une nouvelle opération. Cette opération nouvelle n'est autre que la comparaison des parties A et A' par déplacement de l'une sur l'autre, et une telle comparaison diffère à la fois de la simple relation d'inclusion A < B et du simple déplacement de A par rapport à A', qui caractérisaient les partitions et placements de caractère intensif. Constitutive d'une partie unité, la comparaison métrique est, en effet, source d'itération, par opposition aux emboîtements immobiles de la partition pure, et aux déplacements sans partition ; et cette itération atteste à elle seule la synthèse réalisée entre les deux sortes d'opérations, opérations d'emblée complémentaires, mais demeurant jusque-là distinctes. Seulement la construction d'une partie susceptible d'itération, et servant ainsi d'unité, supprime par le fait même les qualités différentielles attachées auparavant aux parties non rapportées les unes aux autres, résultant de la partition « intensive ».

On voit ainsi combien la construction de la mesure est parallèle, logiquement comme génétiquement, à celle du nombre lui-même, bien que celle-là ne résulte pas d'une simple application de celui-ci aux grandeurs spatiales. Dans les deux cas il y a d'abord élaboration des opérations qualitatives intensives : addition des classes et des relations asymétriques, d'une part, addition partitive et addition des déplacements d'autre part. D'où la possibilité de compositions transitives, et réversibles, se traduisant dans le domaine logique par les premières déductions concrètes cohérentes (avec conservation des ensembles considérés) et, dans le domaine infralogique, par l'utilisation de moyens termes servant à la comparaison par congruence simple (A = B ; B = C d'où A = C). Les groupements logiques une fois constitués, les correspondances numériques opératoires résultant de leur

synthèse s'ensuivent sans plus (par opposition aux nombres intuitifs allant de 1 à 5-6 et qui ne sont pas susceptibles de transformations opératoires tant qu'ils reposent sur de simples configurations imagées). Dans le domaine de la mesure, au contraire, le passage de la transitivité des congruences à l'itération et au fractionnement de l'unité prend encore un certain temps, occupé précisément à la fusion progressive de la partition et du déplacement : ce retard (de 1 à 2 ans) de l'achèvement des opérations proprement métriques sur la constitution du nombre entier opératoire est dû aux difficultés intuitives plus grandes de concevoir un continu comme formé par l'itération de l'une de ses propres parties alors que cette partie n'est pas délimitée d'avance par une coupure perceptible. Ce décalage entre les stades terminaux du développement du nombre entier et de la mesure rend d'autant plus frappant le parallélisme des mécanismes formateurs, en montrant ainsi à la fois leur indépendance relative et leur convergence finale.

II. Mais la mathématisation de l'espace ne consiste pas seulement en une construction de la quantité métrique. Entre les parties A et A' d'un même tout B, il peut y avoir comparaison sans que A' soit réduit à un multiple de A, c'est-à-dire sans que A soit constitué en une unité itérable. Il suffit alors d'établir les relations $A < A'$ ou $A' < A$, et que cette différence entre A et A' soit susceptible de report ou de transformation régulière dans le cas des emboîtements suivants (entre B et B' au sein de C, puis entre C et C'au sein de D, etc.) : nous parlerons en ce cas de quantification « extensive » en général (la quantité métrique étant un simple cas particulier des quantités extensives).

Or, l'analyse génétique montre que la quantité extensive apparaît en même temps que la quantification métrique de l'espace, et même souvent quelque peu auparavant (entre l'achèvement des groupements intensifs et la constitution de la mesure). L'exemple le plus simple en est le dessin de verticales de mêmes hauteurs et espacées à distances égales, mais vues en profondeur. En ce cas, les éléments présentent les rapports suivants (si nous appelons A le terme le plus éloigné et A', B', C', etc., les différences entre A et B, B et C, C et D, etc.) :

$$A < B < C < D \ldots \text{ et } A' = B' = C' \text{ etc.}$$

ou même $A' < B' < C'$, etc. (avec par exemple égalité des différences entre les différences). Nous avons observé aux mêmes niveaux génétiques l'apparition de la quantification extensive dans le développement des réactions aux questions de similitude, de transformations affines du losange, etc. [1]:

1. PIAGET et INHELDER, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, Paris, P.U.F., chap. XI et XII.

On sait que toutes les branches de la géométrie dans lesquelles n'intervient pas le mouvement (topologie, géométries projective et affine, similitudes) sont dites « qualitatives », car les relations en jeu peuvent y être engendrées indépendamment de toute métrique. En réalité, elles ne sont nullement qualitatives dans le sens des opérations simplement logiques ou infralogiques, dont la quantification se réduit aux rapports « intensifs » entre la partie et le tout, et elles font nécessairement intervenir cette quantification extensive due aux relations entre les parties d'un même tout, dont nous venons de rappeler la formation génétique. Qu'il s'agisse des rapports anharmoniques, intervenant en géométrie projective, des affinités et similitudes ou proportions, etc., il est évident que leur construction, même purement graphique dans le sens où von Staudt a opposé les méthodes graphiques qualitatives aux méthodes métriques, suppose des rapports précis entre les parties elles-mêmes. C'est ainsi qu'en une proportion telle que $A_1/B_1 = A_2/B_2$ il ne suffit pas de savoir que les segments partiels A_1 et A_2 sont inférieurs à leurs totalités respectives B_1 et B_2, mais il s'agit de préciser de combien. Ou bien alors on traduira la proposition en rapports métriques, ou bien on construira les demi-droites B_1 et B_2 à partir de leur point d'intersection, ainsi que les segments successifs A_1 et A'_1 ($= B_1 — A_1$) ; A_2 et A'_2 ($= B_2 — A_2$) : le segment A_1 se trouvera en ce cas dans le même rapport à l'égard de B_1 que A_2 à l'égard de B_2, si les différences A'_1 et A'_2 sont également proportionnelles, et cette égalité des rapports se reconnaît graphiquement au fait que les droites reliant les extrémités de A_1 et de A_2 ainsi que de A'_1 et A'_2 sont parallèles entre elles. La construction graphique des proportions met ainsi *ipso facto* les parties A_1 et A_2 [*] en relation avec leurs parties complémentaires A'_1 et A'_2 : c'est ce qui atteste la nature « extensive » des proportions[1], par opposition à un « corrélat » logique intensif ne connaissant que les rapports de partie à tout, p. ex. « L'Ile de France est à la France comme le Latium à l'Italie. » Il est clair que cette quantification extensive se retrouve en topologie, dans la définition des points de condensation (« tout entourage » dans le postulat de Weierstrass signifie des entourages de plus en plus petits) ; dans le postulat des intervalles emboîtés de Cantor, etc.

1. Ces rapports extensifs sont spontanément découverts par l'enfant au niveau des opérations concrètes, sitôt achevée l'élaboration des opérations intensives. Voir PIAGET et INHELDER, *Représentation de l'espace chez l'enfant*, chap. XII.

[*Note FJP : Nous avons substitué A_1 et A_2 à A'_1 et A'_2.]

§ 9. LES OPÉRATIONS FORMELLES ET LA GÉOMÉTRIE AXIOMATIQUE. — Nous venons de voir (§ 7 et 8) que la notion confuse désignée par les mathématiciens sous le nom d' « intuition » spatiale recouvre déjà deux réalités bien distinctes, l'une consistant en représentations imagées inaptes à traduire les transformations, l'autre consistant en opérations concrètes, c'est-à-dire en actions intériorisées, et devenues susceptibles de compositions transitives, réversibles et associatives, soit infralogiques et intensives (comme les opérations logiques), soit extensives et métriques. Or, entre ces deux paliers « intuitifs » de la connaissance spatiale (l'un préopératoire et l'autre opératoire mais concret) et la géométrie axiomatique, au sens moderne du terme, s'intercale encore un troisième niveau, qui, comme nous l'avons vu (§ 6), correspond à la géométrie déductive et formelle des Grecs, mais qui fait aujourd'hui figure de construction demeurée intuitive, quoiqu'en un sens supérieur. Ce troisième palier est caractérisé génétiquement par la constitution des opérations « formelles » opposées aux opérations « concrètes » examinées jusqu'ici.

Les opérations concrètes portent directement sur les objets manipulables, ou sur leurs symboles représentatifs, tels que les figures pouvant être dessinées et schématisées à des degrés divers. Elles n'en sont pas moins des actions ou des opérations du sujet, et le problème épis–témologique demeure entier de savoir quelles sont en elles la part du sujet lui-même, et celle de l'expérience, ainsi que de déterminer si cette expérience est comparable à l'expérience physique ou comporte d'autres rapports entre le sujet et l'objet (voir § 12). Mais les opérations concrètes sont des actions proprement dites, matérielles ou mentalisées, et c'est ce qui leur vaut le qualificatif équivoque d' « intuitives ». Les opérations formelles, au contraire, portent sur des propositions, c'est-à-dire sur des hypothèses, et non plus sur des objets, ce qui semble au premier abord marquer une coupure extrêmement nette correspondant historiquement à l'opposition de la géométrie déductive grecque, de Pythagore à Euclide et à ses continuateurs, par rapport à la géométrie dite « empirique » des arpenteurs égyptiens.

Mais tant l'analyse génétique que l'analyse axiomatique tendent à atténuer cette distinction de nature entre les opérations concrètes et les opérations formelles initiales, à tel point que la coupure paraît aujourd'hui s'être déplacée, et séparer fondamentalement l'axiomatique des Anciens et celle des contemporains. Un tel changement de perspective est d'ailleurs à lui seul de nature à mettre en garde une épistémologie génétique quant à la valeur relative et mouvante des antithèses, considérées

d'abord comme définitives, et c'est ce que nous verrons tout à l'heure. Pour le moment, il s'agit de comprendre le pourquoi de cette continuité, rétablie après coup entre les opérations concrètes et les opérations formelles élémentaires. Du point de vue de l'axiomatique contemporaine, la déduction formelle propre à Euclide est encore intuitive, pour cette raison bien simple que les propositions entrant à titre de composantes dans le mécanisme déductif des raisonnements sont choisies en fonction de leur signification concrète, c'est-à-dire de leur contenu lui-même, rapporté à des figures réelles ou possibles. L'un des créateurs de l'axiomatique moderne, Pasch, réclamait dès 1882 des procédés de raisonnements indépendants de la signification des concepts géométriques, seules les relations entre ces concepts étant appelées à intervenir : la géométrie déductive des Grecs, quoique formelle en son mécanisme opératoire, s'est au contraire attachée d'abord aux significations des concepts eux-mêmes, d'où son caractère encore semi-intuitif.

Du point de vue génétique, le passage continu des opérations concrètes aux opérations formelles n'est pas moins évident qu'historiquement et éclaire les remarques précédentes. Chacune des opérations concrètes examinées aux § 7 et 8 devient, en effet, susceptible vers la fin de l'enfance (dès les environs de 12 ans), de se traduire sous la forme de simples propositions. Ce n'est pas à dire que ces opérations, au niveau des systèmes concrets (de 7 à 11 ans) ne consistaient pas en jugements exprimant déjà, par le moyen de propositions, des actions extérieures possibles, mais intériorisées en simples schèmes opératoires. Seulement, il s'agissait de jugements ou de propositions intervenant seulement à l'occasion d'une manipulation réelle, d'une construction graphique ou d'une représentation imagée symbolisant ces réalités. Au contraire, les propositions sur lesquelles vont porter les opérations formelles se détachent de l'action, même possible, ou, plus précisément, commencent à la dépasser indéfiniment : c'est ainsi que la partition d'un continu aboutit, sur le plan concret, à des éléments finis « points » en nombre limité, etc.), tandis que vers 12 ans l'enfant reconnaîtra la possibilité de continuer sans fin une telle partition, l'opération formelle s'affirmant ainsi d'emblée irréalisable et substituant l'hypothèse à l'objet représentable. C'est pourquoi, sur le plan formel, toute distinction disparaît entre les opérations infralogiques, portant sur l'objet continu et les opérations logico-arithmétiques portant sur les objets discontinus réunis en classes, sériés en relations asymétriques : le continu devient susceptible d'un traitement logico-arithmétique et les relations spatiales s'insèrent dans le cadre des relations en général. Tout se passe donc comme si le mécanisme opératoire constitué par les opérations concrètes, une fois les intuitions initiales suffisamment articulées, se libérait au niveau formel grâce à la mobilité nouvelle que permet la formulation abstraite de la déduction pure.

Il s'agit donc de comprendre ce qu'est cette logique des propositions, qui se superpose, à partir du présent niveau, à celle des opérations concrètes (infralogiques aussi bien que logiques), car c'est cette logique des propositions qui, par son développement autonome, conduira jusqu'à l'axiomatique proprement dite.

Or, la logique des propositions diffère de celle des opérations concrètes par le fait qu'elle est doublement opératoire, consistant ainsi en opérations au second degré ou opérations effectuées sur d'autres opérations. En effet : 1° Toute proposition est en son contenu une opération (intrapropositionnelle), mais énoncée verbalement ou lieu d'être exécutée en action[1] : p. ex., des axiomes d'Euclide tels que « deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles (ax. I), le tout est plus grand que la partie (ax. VIII), deux grandeurs pouvant s'appliquer l'une sur l'autre par congruence sont égales (ax. V), deux parties égales enlevées à des totalités égales laissent des restes égaux, etc., sont des vérités que l'enfant découvre vers 7-8 ans par le moyen d'opérations concrètes (après les avoir ignorées et même niées auparavant, au niveau des intuitions imagées initiales) et que la pensée formelle énonce simplement à titre de propositions verbales, pour raisonner par leur intermédiaire, comme le raisonnement concret les appliquait à l'action sans les formuler explicitement ; 2° Les propositions qui sont ainsi déjà opératoires en leurs contenus respectifs sont ensuite combinées entre elles selon un ensemble d'opérations interpropositionnelles (implications, incompatibilités, alternatives, etc.), lesquelles ne portent plus sur les classes et les relations intérieures à chaque proposition mais sur les liaisons des propositions entre elles : ce sont donc des opérations qui portent (mais au second degré) sur les opérations primaires énoncées par les propositions.

Rappelons d'abord que ces opérations interpropositionnelles peuvent être réduites les unes aux autres grâce en particulier au jeu des disjonctions ($\vee$), et des conjonctions ($\cdot$), c'est-à-dire des « formes normales » disjonctives ou conjonctives. D'autre part, les deux opérations fondamentales ($p \vee q$) et ($\overline{p} \cdot \overline{q}$) constituent l'opération directe et inverse du système (loi de dualité). En outre, pour comprendre ce qu'est l'implication, il suffit de remarquer que deux propositions qui s'impliquent mutuellement

1. Il faut d'ailleurs distinguer le contenu logique de la proposition, lequel consiste en opérations logiques portant sur les classes ou les relations en jeu, et le contenu extralogique auquel se réfère ce contenu logique : ce sont les actions possibles, dont ces opérations de classes ou de relations constituent l'intériorisation.

sont équivalentes : si A implique B et que B implique A, A et B sont équivalents. Si donc A implique B sans que la réciproque soit vraie, A n'est que partiellement équivalent à B : en affirmant B, on affirme alors A ou autre chose. Appelons A' cette autre proposition que B peut entraîner : il s'ensuit que B implique A ou A' et réciproquement [$B \supsetneq (A \vee A')$], c'est-à-dire que B est équivalent à « A ou A' », P. ex. la proposition « *x* est une ellipse » implique « *x* est une section conique », mais la proposition « *x* est une section conique » implique « *x* est, soit une ellipse, soit une section conique autre que l'ellipse ». L'implication entre propositions suppose donc une classification préalable correspondant à leur contenu intra-propositionnel. Il en est ainsi des incompatibilités, etc., et de la contradiction elle-même : « *X* est à la fois A et A' » est contradictoire en tant que A et A' partagent B en deux sous-classes complémentaires [1].

De ces remarques résulte le fait que les propositions s'emboîtent les unes dans les autres à la manière des classes logiques elles-mêmes, c'est-à-dire par divisions dichotomiques successives. Un système de propositions peut donc être disposé sous forme de « groupement » : A implique une suite de propositions emboîtées B, C, D… etc., et est incompatible avec les propositions complémentaires A', B', C'… etc., respectivement emboîtées aussi en B, C, D ... Un système de propositions constitue donc un ensemble opératoires [2], dont l'opération fondamentale est l'implication $p \supset q$ toujours réductible à la forme : $p \vee p' = q$.

On comprend ainsi comment la logique des propositions, qui caractérise la pensée formelle, est elle-même une logique opératoire, mais au second degré : les propositions sur lesquelles elle porte ne sont pas autre chose que des opérations, isomorphes aux opérations concrètes, mais généralisées et exprimées par un ensemble de signes au lieu d'être effectuées en action ; et le système comme tel des propositions est à son tour un ensemble opératoire, puisque ces propositions sont, en tant que propositions, reliées par des opérations interpropositionnelles, c'est-à-dire par des opérations semblables à celles qui permettent la construction des groupements de classes ou de relations.

Mais comment le mécanisme des opérations formelles, qui prolonge ainsi, de la façon la plus continue, celui des opérations concrètes et a pu, par conséquent, porter si longtemps sur des propositions à contenu « intuitif » évident, a-t-il abouti, en fin de compte, à cette inversion de sens que marque l'axiomatique contemporaine ? La logique utilisée par l'axiomatique moderne ne diffère point en effet, fondamentalement, nous ne disons pas de la logique classique (ou logique des théoriciens) mais de la logique formelle spontanée et vivante, donc de cette logique

1. Cf. GONSETH, *Fondements*, p. 228.
2. Voir notre *Traité de logique*, § 39.

des opérations formelles que la logistique a explicitée sous le nom de calcul des propositions et dont nous venons de constater les attaches avec le concret : tout au plus, y a-t-il eu progrès dans la formulation, c'est-à-dire dans la technique logistique, mais cette technique n'a pas modifié en son fonctionnement même le raisonnement humain. Elle en a fourni une expression axiomatique sur son terrain propre, ce qui est autre chose, et a, par conséquent, affiné grandement l'analyse logique, c'est-à-dire la réflexion de la pensée logique sur elle-même. Mais il n'y a pas plus d'écart entre la technique logistique et le raisonnement formel spontané des géomètres, qu'entre celui-ci et les opérations concrètes. Comment donc les opérations formelles ont-elles finalement engendré l'axiomatique géométrique actuelle ?

Comparée à la déduction formelle et pseudo-axiomatique pratiquée par Euclide et par la géométrie classique, la méthode axiomatique des géomètres contemporains présente essentiellement ce caractère nouveau que, s'astreignant à tout démontrer déductivement en procédant d'axiomes aussi élémentaires que possible, et à tout définir au moyen des notions adoptées à titre d'indéfinissables, elle ne se borne plus à suivre les implications dans leur déroulement progressif à partir de propositions initiales intuitivement évidentes, mais elle cherche à analyser régressivement les implications de départ en dissociant toujours davantage les unes des autres les propositions choisies comme axiomes. Remontant ainsi à la source, par analyse réflexive systématique, elle est conduite à poser ses axiomes, non plus en vertu de leur évidence intrinsèque — l'évidence étant le dernier résidu intuitif hérité des niveaux de pensée précédents — mais dans la mesure où ils peuvent servir de support à une construction déductive telle qu'aucun lien n'échappe plus à la formulation. La pensée axiomatique ne constitue donc pas, par elle-même, un nouveau système d'opérations intellectuelles : elle recueille tel quel l'héritage des opérations formelles, mais les applique selon une autre direction, orientée vers l'origine et non plus dans le sens de la seule construction.

Or, une constatation importante, du point de vue de la psychologie de la pensée et de l'épistémologie génétique, doit être faite à ce sujet : c'est qu'une telle recherche de dissection purement formelle des sources, au lieu de s'éloigner de ce qui est psychologiquement primitif, comme la technique d'apparence artificielle de l'axiomatique pourrait le faire craindre, elle s'en rapproche au contraire bien davantage que l'axiomatique d'Euclide, fondée sur l'évidence, mais sur une évidence qui cons-

titue en réalité le produit d'une longue évolution de pensée par opposition aux points de départ réels.

D'une part, en effet, la logique d'Aristote (que L. Brunschvicg compare avec raison à la géométrie d'Euclide) est beaucoup plus éloignée des démarches de la pensée réelle que la logique moderne (laquelle constitue sur son terrain propre une vraie axiomatique), parce que la première ne porte que sur les concepts du langage, tandis que la seconde atteint les opérations formatrices de ces concepts. C'est pourquoi les lois des « groupements » que l'on peut former au moyen de ces opérations se trouvent être en même temps les lois d'équilibre de la pensée, dès le niveau des opérations concrètes, et il en est notamment ainsi de la réversibilité, qui commande l'évolution entière de l'intelligence dès le niveau sensori-moteur jusqu'aux opérations interpropositionnelles (formelles) inclusivement.

D'autre part, en ce qui concerne la géométrie elle-même, les axiomes d'Euclide expriment des vérités logiques ou métriques acquises au niveau seulement des opérations concrètes et sans signification générale dans les domaines antérieurs, tandis que l'axiomatique véritable des modernes atteint les racines psychologiques de l'espace, en particulier sur le terrain topologique. Dans leur bel ouvrage sur la *Topologie* Alexandrof et Hopf introduisent p. ex. un ensemble d'axiomes successifs conduisant par paliers des notions fondamentales à un espace coordonnable, Or, il est frappant de constater combien cette succession correspond à l'ordre génétique : sont ainsi introduits en premier lieu des « Berührungspunkte », ou points de contact, après lesquels apparaît le « voisinage », mais sans encore de « séparation », puis vient celle-ci, etc. comme s'il s'agissait de reconstituer la genèse réelle de l'espace sur le palier perceptif aussi bien que sur les paliers ultérieurs. Il subsiste naturellement cette différence essentielle que la quantification extensive de ces notions est immédiatement introduite (avec la définition des points d'accumulation, etc.), mais, une telle quantification mise à part, cette axiomatique peut fournir un fil conducteur à la recherche génétique, tandis que les axiomes d'Euclide servent tout au plus, du point de vue psychologique, à déceler des rapports devenus évidents à partir d'un certain niveau mental et qui ne le sont nullement au départ.

Or, cette convergence relative entre l'analyse axiomatique et l'analyse génétique va de soi si, comme nous avons cherché à le montrer plus haut (chap.I § 7), les notions choisies comme indéfinissables et les propositions choisies comme indémontra-

bles (axiomes sur lesquels repose la construction axiomatique) constituent en réalité un noyau opératoire irréductible, caractérisé par certaines implications implicites entre opérations (par opposition aux implications entre propositions) et dû par conséquent à certaines abstractions à partir des coordinations inhérentes aux actions du sujet. Les axiomes géométriques de Hilbert sont aussi révélateurs à cet égard que les axiomes ordinaux de Peano discutés à propos du nombre entier. Lorsque Hilbert se donne p. ex. l'axiome d'ordre selon lequel, si B est situé entre A et C il l'est aussi entre C et A, il est clair que, même sans aucun appel à l' « intuition » spatiale ou temporelle, et en ne considérant que cette pure symétrie formelle de la relation « entre », par opposition à l'asymétrie des relations de succession AC et CA, l'axiome en question implique lui-même la possibilité de distinguer deux sens de parcours de la suite ABC : or, si un sens de « parcours » ne correspond pas à un mouvement dans le temps ou dans l'espace, il suppose tout au moins une opération logique d'énumération, c'est-à-dire une action orientée dont on pourrait expliciter toutes les conditions (et qui correspond à une opération concrète bien définie comme nous l'avons vu au § 7). De même les axiomes sur la congruence des segments admettent p. ex. (ax. III) la possibilité de reporter, à partir d'un point déterminé, un segment A'B' congruent à un segment donné AB, ce qui implique l'itération possible de cette opération ; ils admettent ainsi l'égalité des segments totaux A'C' et AC si les segments partiels de l'un A'B' et B'C' sont congruents aux segments partiels de l'autre, AB et BC (ax. IV) ce qui implique une addition partitive et une mise en correspondance bi-univoque possible des points ABC et A'B'C', ainsi que des segments compris entre les points. Or, se donner l'addition des parties en un tout, ainsi que l'itération du report d'un segment (laquelle réapparaît dans l'axiome d'Archimède, également choisi par Hilbert), c'est évidemment se donner dès le départ un ensemble déjà fort complexe d'implications entre opérations ; cela est fort légitime et n'entame en rien la rigueur des propositions ultérieures, fondée sur l'implication entre seules propositions, mais cela suffit à rendre indémontrable, par une méthode d'analyse logique directe, la compatibilité des axiomes admis, puisque ces axiomes impliquent déjà toute la logique (ordre et addition des parties en un tout) ainsi que l'itération elle-même. Il est donc évident que l'axiomatique géométrique repose sur un cercle opératoire préalable, que ne rompt en rien la constitution de métathéories, puisque celles-ci introduisent de nouveaux axiomes chargés de

toutes leurs implications logiques propres : ce cercle consiste en un ensemble d'implications mutuelles entre opérations (au sens du § 7 du chap, I) et suppose par conséquent une suite indéfinie d'abstractions à partir des coordinations antérieures de l'action du sujet. Mais c'est pourquoi, d'autre part, l'analyse axiomatique converge, beaucoup plus que l'on n'aurait pu s'y attendre, avec l'analyse génétique.

Cela dit, on voit en quels termes va se poser génétiquement le problème central des rapports entre la géométrie axiomatique et ce que les mathématiciens appellent globalement l' « intuition », c'est-à-dire l'ensemble des niveaux compris entre l'espace perceptif et les opérations formelles initiales. A cet égard, il faut noter l'existence de trois sortes de solutions, chez les mathématiciens eux-mêmes. Pour les partisans exclusifs de la méthode axiomatique, celle-ci est aux antipodes de l'intuition, et elle ne lui doit rien ou du moins s'efforce, avec un succès croissant (dont on extrapole le passage à la limite) de ne plus rien lui devoir. Pour les empiristes, comme E. Borel, et les intuitionnistes, l'axiomatique est une traduction après coup et toujours un peu artificielle, des résultats obtenus au préalable par la pensée non axiomatique, c'est-à-dire par l' « intuition » sensible ou « rationnelle ». Pour F. Gonseth, enfin, l'axiomatique est un « schéma », mais présentant cette particularité d'être déjà en germe, à des degrés divers, dans l'intuition elle-même, tandis qu'il demeure de l'intuitif, également à des degrés divers, en toute axiomatique (du moins en toute axiomatique « efficace », par opposition à celle de Zermelo, p. ex., qui ne correspondrait à plus rien de tel). Mais c'est, en général, à l' « intuition » envisagée plus ou moins en bloc, qu'est opposée l'axiomatique, soit pour la défendre, soit pour la dévaluer, soit pour la situer en tant que science « abstraite » en regard des méthodes intuitives ou expérimentales. Même Gonseth distingue sans doute trop peu les divers paliers hétérogènes de l'intuition et ne souligne point assez l'aspect opératoire des formes supérieures de cette connaissance non axiomatique de l'espace (voir plus loin § 11).

Nous accordons pleinement à Gonseth le caractère de « schéma » de toute axiomatique à l'égard de la science réelle correspondante (nous avons défendu ce point de vue quant aux rapports entre la logistique et les mécanismes de la pensée, et le retrouverons au chap. XII). Mais, si ce terme de schéma prend ainsi tout son sens en tant que relatif à une analyse méthodologique, il recouvre par contre une série de problèmes, au point de vue génétique : dans la mesure, en effet, où comme l'admet

Gonseth lui-même, il existe dans l' « intuition » une série de paliers différents, il s'agit alors à la fois de caractériser, sur chacun d'eux, le rapport entre les actions du sujet et les objets de cette activité, et d'analyser de ce même point de vue le mécanisme opératoire rendant possible chacun de ces niveaux. Or, tout schématisme présente deux pôles, l'un d'assimilation à l'activité du sujet, l'autre d'accommodation au réel. En tant que mécanisme assimilateur, l'essentiel de sa construction tient à une abstraction à partir des coordinations de l'action ; en particulier, un schéma axiomatique étant réflexif autant que constructif, c'est-à-dire remontant aux sources autant qu'il reconstruit l'ensemble, la question est alors d'expliquer ses connexions avec les coordinations antérieures. D'autre part, en tant qu'accommodation au réel, le schématisme spatial aboutit à une adéquation de plus en plus générale : les schèmes initiaux étant centrés sur l'activité du sujet, il s'agit de comprendre comment celui-ci parvient à les décentrer, jusqu'à construire des schémas adéquats à toute expérience possible.

Or, à envisager les rapports entre chacun des paliers, envisagés en ce chapitre, et son successeur, on assiste à un double processus, qui se renouvelle périodiquement lors de chaque nouveau passage. C'est ce double processus qui aboutit précisément, en fin de compte, à la construction du « schéma » axiomatique. D'une part, tout système de schèmes constituant un cercle d'actions ou d'opérations interdépendantes, il y a, lors de chaque passage d'un niveau déterminé au suivant, élargissement et articulation plus mobile du cercle antérieurement plus étroit et plus rigide, et c'est en cette articulation, tendant vers la réversibilité complète, que se trouve l'explication de la décentration des schèmes initiaux ; d'autre part, lors de chaque élargissement des schèmes antérieurs, les articulations nouvelles qui en résultent rejaillissent sur les coordinations de départ et les intègrent dans le nouveau cercle : c'est pourquoi le processus évolutif est toujours réflexif autant que constructif.

Ainsi, le point de départ de chaque palier (sans jamais de commencement absolu, puisque les coordinations organiques précèdent elles-mêmes les coordinations mentales), est toujours conditionné par un cercle, que forment les connaissances ou les actions, au niveau considéré et dont le sujet ne peut sortir, parvenant seulement à l'élargir et à l'assouplir en lui assimilant de nouveaux éléments. Ce cercle est dû au fait que la connaissance est nécessairement une assimilation de l'objet aux activités du sujet, et que celles-ci constituent un tout fermé comme l'organisation réflexe et organique elle-même. Toute prise de contact avec le milieu (et ceci intéresse l'épistémologie entière et pas seulement celle de l'espace), de la plus simple des sensations aux reconstructions les plus « abstraites » est donc toujours relative à une action du sujet et c'est le

schématisme de ces actions, aptes à se reproduire et à se généraliser qui constitue les premiers schèmes spatiaux. La différenciation des données de l'expérience n'est donc jamais due (à tous les niveaux) qu'à une accommodation de ces schèmes d'assimilation, accommodation de plus en plus précise et générale, mais d'abord à peine différenciée de l'assimilation elle-même.

Il est donc clair que les schèmes initiaux sont centrés sur le sujet lui-même et tout l'espace perceptif, puis sensori-moteur, commence par relever de cet égocentrisme spatial. Mais, après avoir tout rapporté à son corps, le sujet en arrive à situer au contraire celui-ci « dans » un espace de plus en plus décentré. Cette décentration, qu'amorce déjà l'espace sensori-moteur et qui occupe toute l'élaboration représentative des rapports spatiaux jusqu'aux opérations concrètes, puis formelles, est l'œuvre de l'articulation progressive des schèmes et de la réversibilité opératoire qui en marque l'équilibre. Le schème perceptif est essentiellement rigide et étroit ; assoupli et élargi par le schème sensori-moteur, il aboutit à cette première décentration qu'est la construction de l'objet et du groupe pratique des déplacements. Le schème imagé est plus vaste, mais encore statique, avant que son articulation aboutisse aux compositions mobiles, transitives et réversibles du schème opératoire concret, et que le cercle limité de ces opérations concrètes conduise enfin à celui des opérations formelles, c'est-à-dire au seuil du schéma axiomatique.

Or, si nous rappelons ici l'ensemble de cette succession pour interpréter la construction des schémas abstraits ou axiomatiques, c'est que, associés par couples, ces niveaux de l'élaboration progressive du mécanisme opératoire forment comme une suite de rapports proportionnels, et que cette suite marque la continuité complète de ce processus général de décentration et d'articulation des schèmes, ainsi que d'élargissement graduel des cercles constitués sur chaque palier successif. On peut dire, en effet, que les schémas axiomatiques sont aux schèmes formels ce que ceux-ci sont aux opérations concrètes ; que ces dernières sont aux schèmes intuitifs imagés ce que ceux-ci sont aux schèmes sensori-moteurs, etc. [1] : chacun des seconds termes de ces rapports constituent un équilibre mobile et assoupli des totalités plus étroites et plus rigides représentées par le premier

1. Si ces comparaisons peuvent paraître étranges du point de vue de la durée, à ne considérer que le développement individuel des sujets vivant actuellement dans nos sociétés, il suffit de penser à l'histoire sociologique pour trouver des périodes de longueurs homogènes : si l'axiomatique stricte est récente, les opérations formelles datent sans doute des Grecs ; les opérations concrètes se montrent aux civilisations analogues à celle de l'Egypte ancienne ; l'intuition imagée caractérise la « mentalité primitive » et l'intelligence sensori-motrice les sociétés antérieures au langage, comme celles des anthropoïdes.

terme, et chaque passage d'un niveau au suivant marque un affranchissement du mécanisme actif puis opératoire appuyé sur les coordinations du niveau précédent.

S'il est donc vrai, comme nous le supposions au début de ce paragraphe (et du § 7 du chap. I) que les notions indéfinissables et les propositions indémontrables, servant de point de départ à toute axiomatique, plongent leurs racines en un système d'opérations, dont les implications, irréductibles à la formulation explicite et complète, reposent elles-mêmes sur des coordinations antérieures (tel le cercle des opérations logiques à compatibilité indémontrable, sinon par elles-mêmes), les attaches qui relient l'axiomatique à la pensée concrète ne sont pas à chercher dans leur contenu, c'est-à-dire dans une correspondance entre l' « abstrait » et la réalité extérieure actuelle (par rapport à la théorie considérée) : c'est dans la forme même, c'est-à-dire à l'intérieur du sujet, donc dans la filiation entre les coordinations formelles axiomatisées et les coordinations dont elles procèdent génétiquement, qu'est le lien entre l'abstrait et le concret, car l' « abstrait » résulte, en ce cas, d'une abstraction par rapport aux coordinations de l'action et non pas d'une abstraction par rapport à l'objet.

En effet, ce qui donne sa vraie signification au processus de décentration des schèmes, dans la direction de la mobilité réversible, c'est que, aux étapes de la construction génétique que nous venons de rappeler, correspondent des étapes corrélatives dans le sens « réflexif », c'est-à-dire dans le sens d'une intégration des schèmes du niveau précédent, mais avec remaniement de leurs propres connexions et abstraction des éléments généralisables de leurs propres coordinations. C'est sur ce point que se marque, le plus nettement, la différence entre la notion d'un simple « schéma », conçu comme une adaptation « sommaire » au réel, et le système des schèmes relatifs à l'activité propre du sujet, car, à chaque nouveau palier, le rôle de cette activité devient de plus en plus grand dans le sens de la coordination nécessaire par opposition à l'adéquation expérimentale. Or, cette coordination, qui se reconnaît à la nécessité hypothético-déductive des constructions (cette nécessité que les idéalistes considèrent comme *a priori,* tandis qu'elle se constitue par équilibration progressive au cours du développement sans être donnée toute faite au départ) n'est pas autre chose que la coordination propre aux actions du sujet, à l'œuvre dès l'assimilation la plus primitive, mais décentrée, ou rendue réversible, par le processus que l'on a vu et « réfléchie » par le processus que nous allons décrire maintenant.

En effet, une action n'étant jamais isolée, il est impossible que le sujet assimile une donnée nouvelle à son activité sans qu'intervienne une coordination antérieure. Repartons à cet égard, de deux des catégories d'axiomes qu'utilise Hilbert pour sa reconstruction abstraite de l'espace : les axiomes d'ordre, d'une part, et celui que nous rattachions plus haut à l'addition partitive (si les segments A'B' et B'C' constituant un segment total A'C' sont respectivement égaux aux segments AB et BC, le total A'C' l'est aussi au total AC) [1]. Il est clair que ces axiomes quoique indémontrables dans le système considéré, c'est-à-dire précisément choisis comme propositions premières, s'appuient eux-mêmes, grâce au jeu des « implications non explicites entre opérations » (que nous opposions aux implications entre propositions) sur les opérations formelles de la logique, dont les notions d'ordre et de réunion des parties en un tout sont des éléments constitutifs nécessaires. Mais les opérations formelles tirent elles-mêmes leurs matériaux, par abstraction à partir des coordinations antérieures, des opérations concrètes, tout en recombinant ces matériaux sous une forme nouvelle. Quant aux opérations concrètes, qui connaissent déjà les compositions d'ordre et d'addition partitive (voir § 7 et 8), elles les ont constituées par une nouvelle élaboration d'éléments empruntés (également par abstraction à partir des coordinations antérieures), aux intuitions imagées initiales. Celles-ci ne les ont pas créées, mais réélaborées à partir de matériaux empruntés (à nouveau selon le même mode d'abstraction implicite) à l'ordre et à la partition sensori-motrices et perceptives. Quant aux compositions sensori-motrices, qui connaissent effectivement un certain ordre intervenant dans les suites de mouvements et une certaine participation perceptive, elles consistent en reconstructions, sur un nouveau plan, de matériaux tirés des coordinations réflexes (lesquelles s'appuient sur des coordinations organiques de divers degrés).

Les opérations d'ordre et d'addition partitive intervenant en une axiomatique aussi abstraite que celle de Hilbert plongent donc leurs racines, par implications préalables et abstraction à partir des coordinations antérieures, jusque dans le fonctionnement le plus élémentaire de la vie mentale et organique. C'est ce que Hilbert exprime en parlant d'un résidu *a priori* irréductible (voir § 6), mais cela ne revient alors qu'à baptiser la difficulté. En réalité, aucun indice génétique ne nous conduit à considérer les notions d'ordre et de partition comme préformées ou préexistantes au point de départ des activités psychobiologiques : elles ne s'élaborent que très progressivement et nous avons assez vu la complication de leur construction chez l'enfant (§ 7). Mais elles ne se construisent pas avec rien et ne consistent qu'en

1. Nous n'envisageons dans ce qui suit que le rapport AB + BC = AC, indépendamment des congruences comme telles.

réélaborations de matériaux (formes élémentaires d'ordre non réversible, partition imprécise et irréversible, etc.) qui seuls sont fournis d'avance. En outre ces matériaux ne sont pas abstraits des coordinations antérieures à la manière dont des caractères donnés sont abstraits de l'objet : c'est dans l'action sur les objets actuels que les nouvelles compositions s'élaborent, qui utilisent en les retravaillant les schèmes précédents ainsi différenciés, et c'est la continuité de ce processus d'assimilation qui relie sans cesse les coordinations présentes au schématisme antérieur. Il y a donc à la fois construction non préformée et assimilation à un passé qui se réélabore au cours de la construction même, mais il n'y a ni *a priori* ni commencement actuel absolu.

On conçoit alors comment la pensée axiomatique, située au sommet (actuel) de l'échelle, puisse être caractérisée par un progrès réflexif en même temps que par sa mobilité constructive. Bien plus, on comprend pourquoi le retour vers les sources effectué par les axiomatiques modernes présente deux aspects corrélatifs : d'une part, la redécouverte des relations spatiales élémentaires, telles que les rapports topologiques, qui sont primitifs du point de vue de la genèse comme de celui des axiomes ; d'autre part, la prise de conscience des coordinations logiques, données sous la forme d'un cercle dont le sujet ne saurait sortir, puisqu'on ne peut pas démontrer logiquement la compatibilité des axiomes de la logique. Nous reviendrons au § 10 sur le retour aux notions initiales. Quant au cercle logique, nous venons de voir comment il s'appuie de proche en proche sur celui des coordinations motrices et organiques elles-mêmes. En effet, si, du point de vue structural, la logique n'est pas innée mais se construit peu à peu (comme tout le développement de l'enfant le démontre), il n'en reste pas moins que cette structuration progressive n'est pas due à l'objet physique, mais aux activités du sujet portant sur un objet quelconque, et que celles-ci témoignent, à tous les niveaux, d'une fonction invariante de cohérence, débutant avec la morphogenèse organique et les coordinations motrices héréditaires, pour se continuer au travers de l'organisation des schèmes sensori-moteurs et intuitifs jusqu'aux opérations concrètes et formelles. Or, l'espace, avons-nous vu aux § 7 et 8, n'est qu'un système d'actions et d'opérations infralogiques, portant sur l'objet comme tel et non pas sur les classes d'objets discontinus, et d'actions isomorphes aux actions et opérations logiques et numériques. L'existence d'une logique nécessaire, dont il est à jamais impossible de sortir, bien que sa structuration puisse se

poursuivre encore et donner lieu à de nouveaux progrès, est donc liée à une réflexion sur les conditions mêmes des activités du sujet : or, ces activités forment un cercle de schèmes assimilateurs, et un cercle directement issu de tous les cycles antérieurs par élargissements successifs.

§ 10. LA GÉNÉRALISATION GÉOMÉTRIQUE ET L'ORDRE DE SUCCESSION DES DÉCOUVERTES HISTORIQUES. — Le double processus constructif et réflexif qui caractérise ainsi la construction de l'espace permet d'expliquer ce que l'on pourrait appeler le paradoxe génétique de la géométrie : l'ordre de succession des découvertes historiques se trouve être, en effet, sinon exactement inverse, du moins orienté en sens inverse de l'ordre de succession des étapes psychogénétiques elles-mêmes.

Notons d'abord que cette inversion de sens entre la genèse et l'histoire, tout en se rencontrant en d'autres domaines, n'est pas générale. Sur le terrain du nombre, p. ex., on peut dire que la construction historique débute par le nombre entier positif, avant de découvrir les nombres fractionnaires et surtout les nombres négatifs, à la manière dont l'enfant construit son arithmétique. Il est vrai que la notion de correspondance bi-univoque, qui est à la source du nombre entier, n'est affectivement devenue objet de réflexion scientifique que fort tard, ce qui constitue sur ce point particulier une inversion de sens comparable à celle que présente l'histoire de la géométrie. Mais cette inversion porte ici sur les coordinations opératoires formatrices du nombre et non pas sur les nombres eux-mêmes, tandis que, dans le domaine de l'espace, ce sont les différentes structures spatiales qui donnent lieu à l'inversion. Dans un autre domaine, comme celui des principes de conservation physique dont nous parlerons au chap. V, il y a également correspondance partielle entre l'histoire et la genèse : la conservation de la substance précède dans les deux cas celle du poids et celle-ci précède à son tour celle des volumes corpusculaires.

Dans le domaine de l'espace, au contraire, nous avons constaté le primat, tant sur le terrain du développement perceptif que sur celui de la formation de la pensée, des structures topologiques par rapport aux structures projectives et euclidiennes, ces deux dernières apparaissant en second lieu et en solidarité les unes des autres. Or, historiquement la géométrie euclidienne a précédé de beaucoup la constitution de la géométrie projective, et celle-ci a précédé de beaucoup la découverte de la topologie.

Que l'espace euclidien se constitue seulement au terme des pro-

cessus psychogénétiques, nous avons vu pourquoi il en est ainsi. Sur le terrain de la perception, elle suppose la constitution d'une sorte de métrique perceptive fondée sur un invariant relatif (élaboré qualitativement) : la constance perceptive des grandeurs malgré l'éloignement. Or, la construction d'un tel invariant est liée à celle de l'objet et du groupe pratique des déplacements. Sur le terrain de la pensée, la structure euclidienne aboutit à la mesure, c'est-à-dire à une synthèse opératoire des opérations de partition et de déplacement, et rejoint ainsi le nombre entier et fractionnaire, constituant une structure achevée en parallélisme avec celle de l'arithmétique.

C'est sans doute à ces circonstances que la géométrie euclidienne a dû sa primauté historique, sur le plan de la pensée formelle socialisée et donnant lieu à l'essor d'une recherche scientifique collective. Mais la considération de la mesure n'explique pas tout et il est remarquable qu'Euclide n'énonce même pas explicitement (sans parler des notions topologiques de voisinage, d'ordre, de continu, etc.) des axiomes relatifs au déplacement et à ce que Helmholtz appelait la « libre mobilité » des figures. C'est que les Grecs s'attachaient à l'objet et non pas à l'action, à la figure plus qu'à l'opération, c'est-à-dire au résultat de la construction et non pas à la construction elle-même. C'est pourquoi il y a inversion de l'ordre génétique, mais cette inversion, dans le cas des rapports entre la structure euclidienne et les structures topologiques, est consolidée par l'intérêt attaché aux considérations métriques : la mesure est conçue comme l'expression des propriétés de l'objet lui-même.

La géométrie analytique, déjà entrevue chez les Grecs par Pappus d'Alexandrie à propos de sa théorie des lieux n'a trouvé sa forme systématique qu'avec la constitution de l'algèbre, ce qui va de soi, mais soulève, quant au caractère tardif de l'algèbre elle-même, un problème dépassant le cadre de l'espace et que nous retrouverons au chap. III, à propos de la prise de conscience des opérations en général.

Quant à la géométrie projective, qui est génétiquement solidaire de l'espace euclidien, elle aurait donc pu, si ce qui précède est exact, être découverte par les Grecs eux-mêmes, et effectivement, elle a été entrevue par Appolonius de Perge à l'occasion de ses travaux sur les sections coniques. Sa construction plus tardive, liée aux débuts de la géométrie moderne (XVI^{e} et surtout XVII^{e}-XIX^{e} siècles) est sans doute due au primat initial de l'objet : la perspective apparaît comme une déformation de l'objet en fonction des points de vue du sujet bien avant que les trans-

formations liées aux changements de point de vue soient considérés comme pouvant donner lieu à une recherche objective comme une autre. Il s'y ajoute, ici encore, la question de la mesure, dont la portée est secondaire en une géométrie qui ne conserve ni les angles ni les distances. Au contraire, du point de vue génétique, la coordination des points de vue du sujet soulève un problème d'opérations concrètes aussi important que celui de la coordination des objets, et l'absence de métrique projective accessible au niveau concret facilite au contraire la découverte des rapports projectifs (intensifs et extensifs) élémentaires.

Enfin, vient l'immense essor de la géométrie au cours du XIX^e^ siècle, dont tous les aspects sont remarquables quant à l'inversion de sens de l'histoire et de la genèse, ainsi que relativement au processus réflexif de la découverte (ce processus dont le prolongement aboutit précisément aux axiomatiques de la période contemporaine).

Tout d'abord, l'histoire de la découverte des géométries non euclidiennes a été bien souvent écrite. Après les travaux de Wallis (1663) montrant que le postulat des parallèles est lié à la théorie des similitudes, de G. Saccheri, cherchant à prouver le postulat par la construction d'un quadrilatère (à trois angles droits et dont il voulait démontrer que le quatrième ne peut être ni aigu ni obtus), après ceux de Lambert (1768) sur le même sujet, Gauss, Lobatschevski et Bolyai aux environs de 1830, puis Riemann, montrèrent le caractère cohérent de géométries qui n'admettraient par le V^e^ postulat d'Euclide. Quels ont donc été les mobiles de ces recherches, qui ont eu un si grand retentissement, tant du point de vue de l'épistémologie scientifique que de la géométrie elle-même ? Ils ont été de deux types, dont la corrélation effective est d'un grand intérêt génétique. Le premier de ces mobiles est la réflexion régressive sur les principes, qui est au point de départ réel de l'axiomatique moderne : le V^e^ postulat résistant à la démonstration bien qu'imposé par la perception, à son échelle grossière d'approximation, et par l'intuition imagée dont les inexactitudes sont courantes, l'inversion réflexive a consisté à chercher à quels résultats aboutirait une construction faisant abstraction de lui. Or, c'est selon cette méthode qu'ont été faites depuis lors nombre de découvertes, dues à l'élimination, non pas seulement de postulats indémontrables, mais d'axiomes évidents : p. ex. la géométrie non-archimédienne de G. Veronese, qui écarte une relation métrique élémentaire. Mais le second mobile, auquel ont obéi Gauss et Lobatschevski, complète le premier d'une manière extrêmement

instructive : soupçonnant la liaison du postulat des parallèles avec une certaine échelle d'approximation de nos perceptions et de nos représentations imagées, ces géomètres se sont demandé si une échelle plus précise, fournie par des mesures de triangulation en montagne ou par la détermination de triangles interstellaires confirmeraient le caractère euclidien du réel. Cette préoccupation n'enlève naturellement rien au caractère d'anticipation du cadre mathématique non euclidien par rapport à la physique moderne, mais montre assez que la régression réflexive dans la direction des principes est corrélative d'un effort supérieur de prise de possession de l'objet.

La constitution de la théorie géométrique des groupes (F. Klein, S. Lie, etc.), par prise de conscience du caractère opératoire des déplacements et des transformations en général, en opposition avec les figures statiques des Anciens ou avec leur simple expression analytique, et surtout l'analyse du continu, point de départ de la topologie et de la découverte des aspects qualitatifs élémentaires de l'espace, attestent aussi de façon frappante l'inversion de sens entre la genèse réelle et l'ordre de succession historique des découvertes. Il est impossible, en effet, de comprendre pourquoi l'intervention de la notion de groupe se soit produite si tard, alors qu'il s'agit d'une notion première du point de vue de la construction opératoire réelle de l'espace, et pourquoi la découverte des caractères topologiques ait suivi de tant de siècles au lieu de précéder celle des relations projectives et euclidiennes, alors qu'ils sont primitifs psychologiquement comme axiomatiquement, sans admettre que les processus formateurs d'un système de notions scientifiques soient simultanément constructifs et réflexifs et que la prise de conscience régressive accompagne toute construction nouvelle, mais en sens inverse de cette dernière.

Il reste il est vrai à expliquer pourquoi cette inversion est plus importante dans le domaine de l'espace qu'en d'autres : mais c'est que (nous l'avons vu au § 9) la construction géométrique suppose une continuelle décentration des structures par rapport à l'égocentrisme spatial initial. Or l'égocentrisme étant inconscient, et la décentration supposant une inversion de sens laborieuse, procédant par mise en relation des points de vue divers et insertion des rapports apparents et immédiats dans le système des transformations possibles, il va de soi que ce passage des faux absolus initiaux à la relativité de l'espace joue un rôle particulièrement important dans le paradoxe génétique discuté précédemment.

C'est pourquoi nous ne saurions nous satisfaire d'un système d'explication génétique qui, comme celui d'Enriques, serait fondé sur l'analyse des sensations et sur l'abstraction intellectuelle à partir des seules données sensorielles : si la topologie correspond, comme il le dit, aux sensations tactilomusculaires générales, la métrique au tact spécialisé et la géométrie projective aux sensations visuelles, on ne comprend pas pourquoi, génétiquement comme historiquement, les trois sortes d'espaces et de géométries ne se sont pas développées simultanément. Au contraire, la chose s'explique en fonction d'une élaboration active et opératoire continue, avec progrès simultanément constructif et réflexif, et décentration indispensable à toute généralisation.

Mais il y a plus. La succession historique des grandes étapes de la pensée géométrique révèle ainsi la double nature d'un processus génétique circulaire, qui relie l'articulation toujours plus étendue et mobile des schèmes opératoires à une réflexion atteignant toujours plus profondément les éléments, en ordre inverse de celui de leur intégration : or, le processus généralisateur comme tel, en jeu dans les opérations géométriques, manifeste l'existence du même cercle, et cela n'est pas surprenant, puisque les découvertes qui jalonnent l'histoire de la géométrie résultent précisément de généralisations successives.

Poincaré, entre autres, a montré que l'on peut construire les géométries non euclidiennes au moyen des seuls éléments euclidiens : cependant la géométrie euclidienne n'est qu'un cas particulier de cet ensemble. Or, la réciproque est vraie et l'on peut, en s'appuyant sur les travaux de Cayley et de Klein reconstruire l'espace euclidien au moyen d'éléments non euclidiens. « Le paradoxe est donc parfaitement symétrique, dit p. ex. Gonseth : de deux quelconques de nos géométries, chacune paraît tour à tour être contenue dans l'autre ou la contenir » *(Fondements*, p. 93). Or, un tel cercle paraîtrait insupportable à la logique s'il n'exprimait précisément le double processus d'assimilation constructive et d'incorporation rétroactive des matériaux antérieurs dans la composition nouvelle, double processus qui caractérise la construction opératoire elle-même. Contrairement à la généralisation simple, qui englobe une loi spéciale dans une loi plus générale, la généralisation opératoire procède en effet de la manière suivante. Après avoir engendré un premier système, elle lui emprunte certains éléments pour construire, au moyen de compositions nouvelles, un second système, qui déborde le premier et le comprend à titre de cas particulier : la réciproque peut alors être vraie puisque, au moyen de certains des matériaux

du second système, les opérations du premier reconstruiront celui-ci à son tour. Comme il ne s'agit pas de simples implications entre propositions, auquel cas deux systèmes s'impliquant mutuellement se confondraient l'un avec l'autre, mais bien de compositions effectuées au moyen d'éléments qui ne les comportent pas d'avance, ces compositions forment un cercle tel que l'on puisse passer d'un système à l'autre, selon le choix des axiomes, sans que leurs inclusions réciproques aboutissent à une fusion.

Un tel cercle opératoire finit d'ailleurs par embrasser toute la géométrie. Le groupe fondamental de la topologie (groupe des homéomorphies) contient, en effet, comme sous-groupe le groupe fondamental de la géométrie projective (avec conservation de la droite et des rapports anharmoniques), lequel contient lui-même, à titre de sous-groupe celui des affinités (avec conservation des parallèles) ; ce dernier contient à titre de sous-groupe le groupe des similitudes (avec conservation des angles) et celui-ci enfin contient à titre de sous-groupe celui des déplacements (avec conservation des distances). Mais ce groupe fondamental de la géométrie euclidienne, se relie, nous venons de le rappeler, aux géométries non euclidiennes, et, de cet ensemble, on peut remonter au groupe de la « métrique générale » qui se rattache lui-même de façon directe à celui de la topologie. L'ensemble des groupes opératoires constitutifs de l'espace forme ainsi un cercle tel que l'on peut passer de l'un des systèmes à l'autre, soit par l'adjonction soit par la suppression de l'un des invariants caractéristiques des sous-groupes.

Il existe donc une interdépendance complète entre toutes les transformations possibles de l'espace et c'est cette interdépendance qui manifeste au-dehors le cercle des implications entre opérations préalable à toute construction axiomatique. Or, ce cercle lui-même constitue, nous l'avons vu, la forme la plus évoluée des coordinations successives atteintes par l'analyse génétique et dont l'axiomatique est ainsi solidaire, mais du dedans et par l'intermédiaire des notions opératoires de départ.

§ 11. L'ÉPISTÉMOLOGIE GÉOMÉTRIQUE DE F. GONSETH. — L'exposé qui précède revient à attribuer la formation de l'espace, comme des opérations logico-arithmétiques elles-mêmes, à la coordination progressive des actions exercées par le sujet sur les objets. Au lieu de procéder par construction de collections discontinues d'objets, fondée sur les schèmes logiques de ressemblances et de différences (ou sur les schèmes numériques qui

unissent en un seul tout la classe et la relation asymétrique), les opérations spatiales partent il est vrai de la continuité, des voisinages et des différences d'ordre (puis de la mesure qui réunit la partition et le placement) mais pour rejoindre tôt ou tard les opérations formelles générales qui s'appliquent simultanément au discontinu numérique ou logique et au continu spatial. Ainsi le formel qui fonde les constructions axiomatiques se dégage peu à peu des actions et opérations du sujet, en dissociant l'espace géométrique de l'espace physique ou expérimental et en dépassant l' « intuition » à laquelle il est relié par tous les intermédiaires.

On voit la parenté de certaines de ces conclusions avec plusieurs des vues développées depuis plus de vingt ans par F. Gonseth. Aussi nous semble-t-il indispensable, avant de conclure, de prendre position à l'égard de la philosophie géométrique et de l'épistémologie entière de ce mathématicien, de manière à marquer simultanément les convergences et les points de bifurcation possibles. Une telle discussion ne nous sera pas seulement utile pour préparer la conclusion du présent chapitre : elle introduira en même temps à l'étude des questions plus larges abordées au chap. III, c'est-à-dire à l'analyse du mode d'existence propre aux connexions mathématiques.

L'ambition de Gonseth dépasse, en effet, le cadre de l'épistémologie géométrique. Il s'agit d'une théorie de la connaissance scientifique, en général, et cela — comme jadis le positivisme classique, puis comme celui de Mach, etc., comme la gnoséologie de F. Enriques, comme l'épistémologie « unitaire » du cercle de Vienne et comme l'épistémologie génétique que nous défendrons ici — en se plaçant exclusivement sur le terrain des sciences et de leur développement, sans aucun appel aux cadres préalables des philosophies d'école ou des épistémologies métaphysiques : « concevoir tout d'abord les rapports de l'abstrait et du concret sur l'exemple privilégié des mathématiques et de leur application, étendre ensuite cette conception à tous les ordres de la pensée » [1], tel est le dessein.

Quant à la méthode, elle consiste d'abord à écarter deux sortes de préjugés : celui des faits irréductibles, car les progrès de la connaissance physique renouvellent sans cesse nos visions de l'objet *(M.R.,* p. 375) et celui de la vérité absolue (p. 376), car il n'est point de critère du vrai qui ne soit lui-même sujet à révision. La refonte de nos intuitions les plus élémentaires par la microphysique et la crise de la vérité mathématique ouverte par Brouwer sont ainsi deux « leçons » appelées à orienter toute l'épistémologie, en la mettant simultanément en garde contre le réalisme empiriste et le réalisme platonicien. Les connaissances initiales

1. *Les mathématiques et la réalité*, Paris, P.U.F., p. 337-338. Nous désignerons cet ouvrage par les lettres *M.R.*

demeurent donc essentiellement « sommaires » et l'accroissement des connaissances consiste en un passage du plus au moins sommaire : il n'existe que des concepts « en devenir », et « ouverts vers leur avenir » *(M.R.,* p. 28). Cette position de départ est donc identique à celle de L. Brunschvicg, p. ex. (voir plus loin § 12 et chap. VIII § 7) et à celle que nous défendons ici. Mais, chose curieuse, Gonseth, tout en recourant sans cesse lui-même à l'histoire des sciences ainsi qu'à la psychologie de l'enfant, prétend se désolidariser de la méthode historico-critique de Brunschvicg et de la méthode proprement psychologique, et cela pour deux raisons un peu surprenantes, car elles semblent contradictoires. La méthode historico-critique est insuffisante parce qu' « il y a un *élément instantané* que l'histoire prépare et soutient, mais ne détermine pas ... Il est donc tout naturel de se demander, avant de se tourner vers l'histoire, comment se constituent les instantanés dont la succession fait l'histoire. Or, c'est justement ce que la méthode historique n'explique pas » *(M.R.,* p. 47). Mais, si Gonseth se refuse à voir dans les « instantanés » les produits du déroulement historique lui-même, il ne songe pas, pour les expliquer, à la psychologie seule : « Elle ne s'occupe guère, en effet, que de phénomènes de pensée plus ou moins instantanés, que d'idées simples et brèves. Elle évite les grandes constructions mentales où tout un passé d'efforts fructueux est inscrit » *(ibid.,* p. 29). La méthode de Gonseth consistera donc à partir de l'analyse du savoir intuitif, c'est-à-dire, si nous comprenons bien, des connaissances élémentaires ni trop, ni trop peu « instantanées » et à chercher comment s'en dégage l'abstraction scientifique.

Il convient ainsi, dès le départ, de distinguer deux aspects dans l'épistémologie de Gonseth, aspects dont l'intérêt respectif est d'ailleurs bien différent : une recherche des fondements de la mathématique et de la pensée scientifique elle-même, et une analyse du mécanisme de la pensée spontanée ou préscientifique, c'est-à-dire des sources intuitives. Celles-ci sont envisagées comme suit : « Tout cet amas de connaissances fondamentales et imparfaites ; toutes ces vues justes, mais seulement de façon approchée ; toutes ces idées inachevées sur lesquelles s'exerce notre activité mentale, nous voulons les appeler les *éléments de la connaissance intuitive » (M.R.,* p.15). Mais l'importance de l'épistémologie géométrique de Gonseth justifie une discussion de ses idées sur le développement mental lui-même, car en un tel domaine toutes les suggestions d'un mathématicien, quel que soit leur degré d'approximation psychologique, sont aujourd'hui précieuses, tant la philosophie mathématique s'est détournée du concret, sous la double influence du réalisme platonicien et du nominalisme logistique.

Dans son premier ouvrage [1], tout entier consacré à l'analyse de la pensée mathématique et physico-mathématique (et qui est sans doute le meilleur qui soit sorti de sa plume), Gonseth est déjà parvenu à sa thèse centrale. D'une part, les mathématiques procèdent de l'expérience : une

1. *Les fondements des mathématiques,* Gauthier-Villars, 1926, que nous désignerons par *F.M.*

démonstration comme celle du théorème selon lequel on peut, par un point, mener une et une seule perpendiculaire à une droite est « une simple description, à peine idéalisée, d'une expérience physiquement réalisable » *(F.M.,* p. 4). A la réflexion, ce caractère expérimental de la géométrie élémentaire dans son ensemble devient tout à fait saisissant » (p. 4). Bien plus, « il n'est point de domaine des mathématiques, si petit soit-il, où l'axiomatique puisse se suffire à elle-même » (p. 13). Mais inversement, l'expérience ne peut jamais être interprétée, et en mathématiques encore moins qu'ailleurs, sans se référer à un « schéma », « Il est donc impossible de prouver expérimentalement que l'espace est euclidien » (p. 103), car « on n'expérimente jamais sans idée préconçue, de même que notre corps ne peut se mouvoir que selon les normes intuitives inscrites dans nos centres nerveux » (p. 104), ces normes consistant en partie dans le groupe expérimental des déplacements, décrit par H. Poincaré. Bref, « à la base de toute expérimentation, il y a un canevas abstrait, sur lequel se bâtit une image à la ressemblance du monde », mais « dans toute construction abstraite il y a un résidu intuitif qu'il est impossible d'éliminer » *(F.M.,* p. 105).

Ainsi « la distinction entre l'abstrait et l'expérience n'est que de tendances, non d'essence » *(F.M.,* p. 107), car « notre intuition n'est pas un ensemble cristallisé de règles immuables » (p. 109), cependant que l'abstraction se développe paliers par paliers. En quoi consiste cette évolution ? « Toute science abstraite ne peut se fonder que par la méthode axiomatique ... D'autre part, les axiomes eux-mêmes, si l'on remonte assez haut, échappent à l'empire de la logique formelle » (p. 204). La solution est donc à chercher dans l'analyse du processus de schématisation qui constituera la source de l'axiomatisation comme telle, mais à partir de « schémas » déjà en jeu dans l'intuition elle-même.

Ici débute l'analyse contenue dans « Les Mathématiques et la Réalité ». L'observation nous met d'abord en présence d'une série d'étages successifs. Il y a au point de départ les jugements intuitifs élémentaires, « ébauches encore en constant état de devenir » (p. 15) et dont « les critères de l'objectivité sont en dernière instance la convenance à nos propres fins et le succès de nos actions », car « la pensée imite l'action et l'action réalise la pensée » (p. 17). Puis il y a la réflexion de la pensée sur les connaissances initiales, devenant elles-mêmes « un objet de connaissance » (p. 18) et ainsi de suite en une hiérarchie de jugements sans fin, mais qui « se résolvent pour une part, en jugements intuitifs sur la validité ou l'inexactitude desquels il ne peut y avoir aucun doute » (p. 23), dans les limites naturellement de la sphère d'activité propre à chacun (p. 19). Mais sur quoi s'appuie ce développement ? Non pas sur une réalité toute faite donnée en dehors de nous, car « la réalité *telle que nous l'apercevons* est une construction plus ou moins autonome de notre esprit, dont les fins essentielles sont l'action possible » (p. 54). Non pas non plus sur des structures *ne varietur* de l'esprit, puisque celui-ci est en constante évolution, mais sur le « processus mental » lui-même qui les engendre, en corrélation avec la « construction

de la réalité » (p. 53). Or, ce processus mental consiste en une schématisation continue, analogue p. ex. à celle qui constitue la droite, en tant qu' « image sommaire, schématique et provisoire » (p. 59) tirée de notre perception des arêtes d'un cristal (arêtes dont l'examen microscopique donnerait une toute autre vision).

La clef du développement mental serait donc à chercher dans la schématisation. La schématisation élémentaire est elle-même constituée par les « formes intuitives » et voici comment Gonseth explique la « forme intuitive relative à la notion d'espace ». Supposons un automate doté d'un appareil enregistrant les positions lumineuses, et d'un appareil moteur « accordé sur l'appareil visuel » rendant possible le mouvement de la main jusqu'à la source lumineuse. Ajoutons-y maintenant la conscience humaine : « nous avons conscience de la position de la source lumineuse dans l'espace. L'enregistrement visuel, de même que l'exercice musculaire sont comme connectés tous les deux à un *champ de moments de conscience.* Celui-ci est une *totalité mentale* à laquelle il faut attribuer une existence objective et une certaine structure » (p. 63). « En d'autres termes ... l'espace de nos représentations est une réalité purement mentale : c'est quelque chose comme *la trace sur notre conscience actuelle du champ virtuel des moments de conscience* » (p. 63). Et la « forme intuitive » ainsi construite n'est pas autre chose que le complexe de tous les moments de conscience actuels ou virtuels relatifs à l'idée de l'espace » (p. 63). D'autre part, « le complexe des moments de conscience reliés au phénomène couleur, envisagé dans sa totalité, sera dit aussi la *forme intuitive relative à la couleur* » (p. 64). En résumé, les formes intuitives peuvent être comparées à « des représentations partielles et schématiques d'une réalité qui, d'ailleurs ne nous est point donnée autrement. Elles nous fournissent les premiers éléments pour la construction de toute réalité » (p. 65).

Après quoi, « l'introduction des repères marque le passage de l'intuitif à l'expérimental » (p. 67), les variations externes pouvant, grâce à eux, s'accorder aux variations de l'organisme percepteur, à la condition que l'organisme sache « situer l'état actuel de cet organe par rapport à la totalité de ses états virtuels » (p. 70). Le « processus de schématisation » ainsi mis en branle permet alors la conquête du réel : « Le concret n'est jamais donné en lui-même ... Le réel ne se laisse serrer de près qu'à l'aide de l'idéal et du schématique » (p. 72). La plus importante de ces schématisations est celle qui engendre la géométrie élémentaire : « C'est pourquoi nous appellerons « schématisation axiomatique » le processus mental dont les notions géométriques sont l'aboutissement. Axiomatique parce que les premiers rapports qu'on aperçoit entre les éléments de ce schéma sont les axiomes de la géométrie » (p. 77). Après quoi « l'introduction des relations logiques n'est pas autre chose qu'une nouvelle schématisation axiomatique » (p. 82). Ainsi les notions de point, de droite, etc., nées de l'intuition « ne prennent leur aspect rationnel que du fait de l'axiomatisation, c'est-à-dire de l'acte mental qui aboutit à la création du *schéma abstrait* » (p. 88). De façon générale, « l'idée de l'ordre rationnel et la méthode

déductive ne sauraient être que des liens idéaux imitant schématiquement certaines liaisons concrètes, certaines lois profondes du réel » (p. 120).

C'est selon le même « processus mental » que Gonseth explique l'idée de nombre entier et les lois de la logique elle-même. Le nombre suppose la répartition des objets « en classes et en sous-classes » (p. 123), ainsi qu' « un certain ordre de succession, où chaque objet n'intervient qu'une fois » (p. 124), comme l'observation de l'enfant permet de l'établir. Comme tel, nous dit Gonseth, « le nombre est comparable à toute autre *qualité sensible,* telle que grand, jaune ou pesant. Un groupe d'objets a la qualité *trois,* p. ex., comme l'un d'eux a peut-être la *qualité rouge* ou la propriété d'être transparent. En un mot : *Le nombre, dans sa signification primitive et dans son rôle intuitif, est une qualité physique des groupes d'objets »* (p. 127). Quant à la logique elle-même, elle est « la physique de l'objet quelconque » (p. 155). Une étude subséquente de Gonseth [1] a précisé qu'elle n'était pas que cela et comporte également un rôle normatif, etc. Mais en sa source, elle s'appuie sur l'objet. Or, la notion d'objet n'est pas donnée d'emblée chez l'enfant : elle est « un abstrait schématisant » (p. 161), c'est-à-dire une « forme primaire » (p. 169), de la connaissance mais construite et non pas imposée de façon définitive (comme le prouve la microphysique). Cela admis, les rapports logiques élémentaires sont ceux des objets entre eux : ils n'expriment « pas la nécessité abstraite d'une logique donnée et formée d'avance, mais les nécessités telles que les présente le monde des objets physiques, et telles qu'elles entrent dans l'idée générale de la *loi naturelle »* (p. 170). Mais, outre les « formes mathématiques de l'objet, du nombre et de l'espace » (p. 175), les formes intuitives relatives aux qualités de l'objet conduisent à une logique de l'objet qualifié : la logique des classes d'Aristote, qui s'est « donnée pour une théorie abstraite de l'être et des essences quand elle n'était qu'une esquisse schématique d'une théorie de ce genre » (p. 190).

Au total, l'existence mathématique pose « le dilemme que voici : ou bien la justification des notions premières et de leurs rapports est fournie par leur genèse et leur évolution ; ou bien les mathématiques sont condamnées à fonder leur autonomie sur l'abstrait », mais « si l'on écarte systématiquement le problème de l'adéquation ... à l'instant où il se pose naturellement, c'est-à-dire lors de l'introduction des notions fondamentales, les difficultés écartées, mais non résolues, réapparaissent sous une autre forme : la question laissée sans réponse des relations extérieures fait simplement place à une question de politique intérieure II (p. 361).

Nous avons tenu à faire une large place à l'exposé de cette épistémologie mathématique, tant le point de vue génétique auquel recourt Gonseth pour expliquer l'adéquation de l'espace et du nombre à la réalité physique converge en principe avec celui

1. *Qu'est-ce que la logique ?*, Paris, Hermann.

que nous défendons ici. Il est donc d'une certaine importance de chercher à déterminer si la théorie proposée de la schématisation suffit à remplir le programme tracé, notamment en ce qui concerne la formation de l'espace.

Il convient, à cet égard, d'envisager séparément les réflexions portant sur le fondement des mathématiques en général et les aperçus de Gonseth sur le processus génétique lui-même. Sur le premier terrain, on ne peut que sympathiser avec la manière à la fois subtile et vigoureuse dont il a repris et développé les thèses de Poincaré et de Brunschvicg sur la nature psychologique des notions scientifiques de départ en opposition à la fois avec le réalisme platonicien ou le formalisme logistique et avec l'empirisme. Les notions essentielles selon lesquelles l'abstraction et le concret sont toujours interdépendants, à la manière d'un schématisme et du réel correspondant, ni l'un ni l'autre de ces deux termes ne pouvant être isolés à aucun niveau du développement, et selon lesquelles l'axiomatique la plus épurée n'est jamais que le résultat d'un processus réflexif prolongeant le schématisme mental lui-même, renouvellent de façon frappante la grande tradition que l'on pourrait appeler psychogénétique dans l'éternelle question du fondement des mathématiques.

C'est assez dire combien nous nous trouvons en complet accord avec Gonseth sur sa position du problème et sur l'esprit essentiellement génétique, critique et antimétaphysique qui anime son épistémologie. Mais la question des sources « intuitives » elles-mêmes peut-elle être considérée comme résolue par la conception particulière de la schématisation et des « formes intuitives » défendue par ce mathématicien ? Sur ce point délicat nous sommes un peu embarrassés car, après tout, ce n'est pas la faute de F. Gonseth si en 1926 et en 1936, date de la parution de ses deux principaux ouvrages, la psychologie de l'enfant, qu'il invoque si souvent, ne pouvait lui fournir ce qu'il en attendait quant au développement de l'espace, du temps, du nombre et surtout des opérations logiques. Aussi bien est-il intéressant de noter les fluctuations de sa pensée en ce qui concerne l'apport de la psychologie à l'épistémologie. En 1926 *(F.M.*, p. 105) il note, au sujet des rapports entre l'intuitif et l'abstrait que « ces questions, dont les racines plongent pour une part dans la psychologie, sont d'une extrême complication ». En 1936, sans doute déçu entre-temps par le manque d'indications précises de la psychologie expérimentale, il formule les propos désabusés cités plus haut *(M.R.*, p. 29) comme si les recherches génétiques évitaient les « grandes constructions mentales » ! En 1944, par contre,

rassuré au vu de quelques résultats, il décerne au psychologue ce certificat précieux de la part d'un spécialiste de l'axiomatique : « Un certain accord de tendances, un certain parallélisme de vues entre le généticien et le philosophe de la connaissance devient ainsi — chose peut-être imprévue — une condition *sine qua non* de la légitimité de la systématique de ce dernier : la génétique devient juge de l'authenticité de la philosophie » [1].

Nous devrions donc ne pas insister sur la psychologie de départ de F. Gonseth, d'autant plus qu'il a modifié nettement son point de vue initial et que l'on ne saurait demander à un mathématicien d'être en même temps psychologue expérimental (chacun sait d'ailleurs combien la réciproque est vraie). Mais si *amicus Gonselh, magis amica veritas,* et il est un problème de principe qui se pose ici quant aux méthodes et à l'avenir même de l'épistémologie scientifique.

Ce problème est le suivant. Une fois sortie du cadre de la déduction mathématique et logistique, l'analyse de la pensée intuitive, de la perception, de la motricité et de tout ce qui conditionne le « processus mental » conduisant à l'abstrait, donc de la « schématisation elle-même » peut-elle être conduite autrement que par les méthodes précises de la neurologie et de la psychologie génétique, sans parler de la sociologie ethnographique et de l'histoire ? Si oui, nous retombons inévitablement dans la pure discussion d'idées ou la simple analyse réflexive, et l'épistémologie scientifique, qui prétendait se garder de la philosophie d'école, devient ni plus ni moins une philosophie parmi les autres (nous craignons que Gonseth glisse sur cette pente dès qu'il se laisse aller à baptiser son système personnel, car l' « idonéisme » fût-il l'absence de tout système, c'est lui donner une dangereuse apparence que d'éveiller par son nom même le soupçon du contraire). Sinon, c'est exclusivement à l'étude des faits qu'il faut s'adresser et non pas à la construction conceptuelle, si concrète et intelligente soit-elle. Or, il est de toute évidence que cette étude expérimentale, dont la psychologie génétique fait sa spécialité, non seulement vise l'analyse des « grandes constructions mentales » qu'est le développement individuel et collectif de la pensée, mais encore et surtout englobe l' « instantané » autant que le développement. N'est-ce pas, d'ailleurs, une attitude un peu précritique que de vouloir isoler l'instantané lui-même, et un « processus mental » est-il vraiment

1. F. GONSETH, Psychologie et logistique (à propos de l'ouvrage récent de J. Piaget : classes, relations et nombres), *Archives de Psychologie,* Genève, t. XXX (1944), p. 199.

une succession d'états « instantanés » ? Si l'on entend par là des états d'équilibre, c'est précisément l'objet de la psychologie génétique que de nous en décrire la constitution progressive. Si l'on entend simplement un état quelconque, la victoire de l'analyse moderne sur les arguments de Zénon trouve son parallèle même en psychologie.

Cela dit, une première constatation s'impose quant à la reconstruction « schématique » du développement mental que nous offre Gonseth : c'est qu'il s'est en fait tout accordé dès le départ lui-même, le mode de construction auquel il recours consistant ainsi davantage en une explication graduelle de ce qui est implicitement contenu dans l'élémentaire qu'en une construction réelle. Qu'est-ce, en effet, que la « forme intuitive » qui serait a la source de tout le processus de schématisation ? C'est « la trace, sur notre conscience actuelle, du champ virtuel des moments de conscience » *(M.R.*, p. 63), champ qui comprend « la totalité de ses états virtuels » (p. 70). Mais qui ne voit qu'un être assez bien doué pour tenir déjà compte de tout le champ perceptif virtuel en chacune de ses perceptions est d'avance en état de résoudre l'ensemble des problèmes de la déduction et de l'axiomatisation ! La formule n'en est pas moins intéressante, car il est évident que c'est cette intervention du virtuel qui marque le passage de la perception pure à l'activité intelligente (sensori-motrice ou réflexive) ; seulement ce passage, au lieu d'être instantané, occupe un certain nombre de bonnes années, car il s'agit psychologiquement de conquérir peu à peu le maniement du virtuel ! Sur le terrain de la perception visuelle, p. ex., il est facile de montrer que des enfants de 5-7 ans encore ne perçoivent que fort peu en fonction du virtuel, puisqu'il leur arrive de *voir* (non pas de juger par raisonnement, mais de voir, au sens strictement perceptif du terme) trois objets disposés à quelque distance les uns des autres comme s'ils présentaient simultanément les rapports A = B, B = C et A > C ; B étant situé entre A et C ils perçoivent bien l'égalité A = B, ainsi que l'égalité B = C, mais en comparant directement A à C ils perçoivent un rapport A > C sans se soucier des déplacements virtuels du moyen terme B ! Quant à la coordination entre les localisations visuelles et la motricité, que Gonseth s'accorde, d'ailleurs avec la même générosité que Poincaré, il va de soi que sa signification épistémologique dépend essentiellement de la manière dont elle s'élabore : selon qu'elle est innée (et encore s'agirait-il dans ce cas de savoir si elle est due à une mutation fortuite, à une influence du milieu, etc.), acquise en fonction de l'expérience seule, ou

due à une interaction d'éléments innés et acquis, elle conduira à une notion toute différente du schématisme spatial. Il ne suffit donc pas d'invoquer cette coordination à titre de fait constatable pour en tirer une théorie de la schématisation, mais bien de déterminer son mécanisme génétique. Or, tout semble indiquer, en l'état actuel des connaissances, que l'aspect sensoriel joue essentiellement, en de telles coordinations, un rôle de signalisation tandis que l'aspect moteur est déterminant : le passage du moteur à l'opération constitue alors le vrai problème de la constitution de l'intuition de l'espace et l'on ne saurait le considérer comme résolu en dehors d'une analyse psychogénétique décrivant avec précision les étapes réelles d'un tel développement.

Nous voici conduits à la question centrale de l'épistémologie géométrique de Gonseth : quelle est la signification de la notion de « schéma » ? Fidèle à sa méthode d'approximations successives, Gonseth se garde de s'enfermer d'avance en une définition, et si nous lui demandions pourquoi il n'a jamais circonscrit de façon limitative l'emploi de ce concept, il nous répondrait sans doute qu'il entend respecter le devenir imprévisible du schématisme lui-même et ne point procéder par construction conceptuelle. Mais c'est exclusivement sur le terrain du développement que nous nous placerons pour demander, soit un choix, soit une conciliation, entre les deux significations possibles, génétiquement et épistémologiquement bien différentes, de ce terme essentiel, qui réapparaît presque en chacune des pages de l'œuvre de Gonseth : ou bien, en effet, le « schéma » est un « schème », au sens d'une structure inhérente à l'activité sensori-motrice ou intellectuelle du sujet, ou bien il est une image schématisée d'un objet, d'un ensemble d'objets ou d'un secteur quelconque de réalité, ou bien encore il est les deux à la fois. Mais, s'il est l'un ou l'autre, on ne peut passer de l'un des deux sens au second, et, s'il est l'un et l'autre, il s'agit de comprendre pourquoi il réunit ces deux sens et par conséquent de dégager le rapport entre les facteurs qui interfèrent en son élaboration.

Nous appelons, pour notre part [1], « schème » d'action ou d'opération le produit de la production active d'actions de tout genre, de la conduite sensori-motrice à l'opération intériorisée, et qu'il s'agisse d'actions simples (p. ex. le schème de la préhension) ou de coordinations entre actions (p. ex. le schème de la réunion ou de la sériation). Ainsi défini en fonction de l'activité du sujet, le rôle du « schème » est essentiellement d'assurer

1. Voir *La naissance de l'intelligence chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé.

l'incorporation ou l'assimilation de nouveaux objets à l'action elle-même : et celle-ci, par sa répétition en des conditions renouvelées et généralisées, acquiert de ce seul fait un caractère schématique. S'appliquant nécessairement à une matière[*] donnée, le schème est en outre susceptible d'accommodation et ses accommodations successives donnent effectivement lieu à des connaissances « sommaires », sujettes à constantes révisions, comme le dit bien Gonseth. Ce schématisme assimilateur peut donc rendre compte de tout ce que Gonseth attribue aux « schémas », mais c'est à la condition de préciser que l'accommodation de tout « schème » à une réalité extérieure s'appuie sur une assimilation préalable.

Or, si l'on distingue dans le schème ces deux pôles d'assimilation et d'accommodation, l'un source de coordinations et l'autre d'applications aux données de l'expérience, on se trouve en présence, non pas seulement d'un type unique, mais de deux sortes bien distinctes d'abstractions, et celles-ci nous paraissent précisément différencier tout ce qui oppose le « schéma » (dans le sens de l'image-canevas d'une réalité perceptible) au « schème » en tant qu'expression de l'activité du sujet. Il y a en premier lieu l'abstraction à partir de l'objet, laquelle consiste à extraire de celui-ci des caractères plus ou moins généraux (la couleur, etc.), fournissant la matière de cette connaissance sommaire et schématique due à l'accommodation plus ou moins poussée des schèmes d'assimilation. Mais il y a en second lieu une abstraction à partir de l'activité du sujet : ce second type d'abstraction consiste à dissocier des aspects particuliers de l'action considérée certains mécanismes coordinateurs généraux (p. ex. réunir deux actions en une seule, inverser les actions, etc.) et à construire de nouveaux schèmes au moyen des éléments ainsi extraits (c'est-à-dire différenciés) des actions comme telles.

On voit d'emblée l'importance de cette distinction eu égard à la construction de l'espace, car les difficultés propres à l'épistémologie de Gonseth tiennent sans doute au passage continuel de l'un des sens à l'autre, lorsqu'il s'agit d'expliquer les « schémas » logiques, numériques ou spécifiquement spatiaux. Quand Gonseth nous dit, p. ex., que la logique élémentaire est, entre autres, une « physique de l'objet quelconque », ne faut-il pas préciser qu'elle est auparavant la coordination des actions rendant possible la constitution d'une telle physique, autrement dit qu'elle constitue plutôt une « action sur l'objet quelconque » ? Or, la nuance est appréciable, car, si la notion d'objet se construit, comme Gonseth le soutient, au lieu d'être donnée toute faite, il est clair que les

[*Note FJP : nous avons substitué « matière » à « manière ».]

coordinations entre actions intervenant dans cette construction constituent pour la logique un point de départ antérieur aux combinaisons des rapports entre les objets, c'est-à-dire aux résultats de cette construction elle-même. L'objet est un « abstrait schématisé », avant d'être « schématisant », et c'est la coordination même des actions ayant schématisé le réel en objets qu'il faut donc invoquer en premier lieu (ce qui nous ramène aux difficultés signalées plus haut en ce qui concerne la genèse des « formes intuitives »).

Mais il y a plus. C'est évidemment faute de distinguer l'abstraction par rapport à l'objet et l'abstraction par rapport à l'action que Gonseth en arrive à cette assimilation paradoxale du nombre intuitif à une « qualité physique », telle que la couleur, le poids ou la transparence. Cette opinion surprenante semble l'indice que, parti d'une notion du « schéma » voisine du « schème » d'action, mais sans souligner suffisamment l'aspect actif et opératoire de tout schème (à tous les niveaux de l'évolution), le système de Gonseth a glissé dans la direction du schéma conçu comme une image simplifiée ou un canevas de la réalité extérieure. Or, si la psychologie peut rendre le moindre des services au mathématicien, c'est en lui démontrant que les actions de réunir « en classes et en sous-classes » ainsi que de sérier, invoquées par Gonseth lui-même pour expliquer la construction du nombre, sont d'une nature bien différente de la perception d'une couleur ou d'un poids : essentiellement motrices, par opposition aux images qualitatives susceptibles de leur servir de signaux ou de symboles, ces actions ne tirent pas le nombre de l'objet, comme la vision ou l'acte de soupeser en extraient la couleur et le poids, mais elles lui imposent un schème de dénombrement qui, devenu mobile et réversible, engendre les opérations axiomatisables.

Pour ce qui est alors de l'espace opératoire lui-même, il est clair que l'essentiel de l'opposition entre le réalisme physique, d'une part, et l'activité déductive, d'autre part, va se retrouver à l'intérieur de la notion de « schéma », puisque le schéma géométrique, comme les schémas numériques et logiques, peut être considéré à tour de rôle comme une image « sommaire » abstraite des objets, et comme un schème d'opérations, élémentaires ou axiomatisées, extrait de la coordination des actions exercées sur ces objets. Le grand service que nous rend l'épistémologie géométrique de Gonseth est d'avoir atténué la virulence de ce conflit entre l'empirisme et le formalisme, là même où elle semblait faire obstacle à toute conciliation, c'est-à-dire sur le terrain des structures supérieures de la pensée géométrique.

Mais le problème n'est que déplacé, et se retrouve dans le domaine de la pensée « intuitive » c'est-à-dire, en fait, de tout le développement intellectuel précédant la phase terminale d'axiomatisation.

En résumé, il nous paraît subsister deux difficultés dans l'épistémologie de Gonseth. La première est que, faute d'une position génétique assez nette, le « schématisme » y demeure trop statique et passe ainsi à côté de ce qui fait l'essentiel du fonctionnement des schèmes sensori-moteurs et intellectuels : la transformation de l'action en opérations grâce au jeu des coordinations réversibles. D'où, en second lieu, l'assimilation un peu rapide du logique et du mathématique au physique, tandis que le point de vue opératoire conduit à distinguer deux plans différents dans les actions mêmes que le sujet exerce sur le réel : les coordinations comme telles, qui engendrent la logique et les mathématiques, et les actions particulières, différenciées selon les divers champs qualitatifs de l'objet et qui constituent le début des connaissances physiques. Or, la meilleure preuve que l'on ne peut échapper à une telle distinction est que Gonseth lui-même est obligé de reconnaître une dualité entre les « formes mathétiques » et les qualités physiques (*M.R.*, p. 175-176), et surtout entre l' « analogie » principe de déduction, et la causalité (p. 306). « La condition, pour que notre intervention dans le monde naturel soit efficace, c'est que les règles intrinsèques de l'entendement aient, comme signification extérieure, celle des lois naturelles » (p. 307) : la reconnaissance d'un tel dualisme montre assez la nécessité d'en assurer l'explication dès les processus formateurs du schème d'action lui-même. Entièrement d'accord avec l'épistémologie de Gonseth dans la mesure où il lie la formation des axiomatiques aux lois du développement mental tout entier, nous croyons donc trouver une explication de ce développement, plus adéquate au but poursuivi, dans la théorie des schèmes d'action et du passage de l'action à l'opération elle-même. Or, une telle position du problème est susceptible de conduire jusqu'à un renversement complet des relations ordinairement établies entre la géométrie et le réel : dans la mesure où les coordinations élémentaires font appel à des mécanismes proprement héréditaires (et Gonseth n'en nie nullement l'éventualité), le lien entre les opérations logico-mathématiques et le monde extérieur peut être assuré d'abord du dedans par l'intermédiaire de l'organisation vivante qui se trouve elle-même, et dès ses formes les plus élémentaires, en interaction avec la réalité physique, sans qu'il soit besoin d'assimiler l'expérience logique et mathématique à l'expérience physique de l'individu. C'est même cette connexion

intérieure entre l'esprit et l'univers, s'établissant au travers des mécanismes les plus fondamentaux de la morphogenèse vitale, qui est sans doute seule à rendre compte des anticipations possibles de la connaissance logico-mathématique sur la connaissance physique, alors que ces anticipations demeureraient inexplicables si les « schémas » mathématiques se construisaient simplement *a posteriori*, en fonction du contact actuel et extérieur de l'action avec les êtres matériels.

§ 12. CONCLUSION : L'ESPACE, LE NOMBRE ET L'EXPÉRIENCE ; L'INTERPRETATION DE L. BRUNSCHVICG. — Comme nous le rappelions au début de ce chapitre, rien ne paraît plus différent au sens commun que l'espace et les êtres logico-arithmétiques, l'espace étant situé par lui dans les objets et les classes ou les nombres paraissant n'exprimer que des collections d'objets artificiellement construites. Que l'espace soit lié à l'objet et que les opérations logico-arithmétiques portent sur les ensembles d'objets, c'est bien ce que confirme l'analyse génétique. Mais la grande illusion du sens commun est de croire qu'on s'installe dans l'objet ou qu'on saisit l'objet par des voies plus directes qu'on ne constitue des réunions d'objets. Or, génétiquement, la notion générale de l'objet s'élabore exactement de la même manière que les collections d'objets et cette construction n'est ni plus aisée ni plus précoce dans un cas que dans l'autre. Le nourrisson n'a pas davantage la notion de la permanence des objets que celle de la conservation des totalités d'éléments perceptivement constatées, et les étapes de la structuration de l'objet spatial complexe sont exactement les mêmes que celles de la structuration des opérations logiques et du nombre.

Au niveau perceptif, il n'y a pas plus d'espace unique que les collections discontinues, perçues comme des pluralités plus ou moins riches, ne constituent des classes logiques ou des nombres. Au niveau sensori-moteur, les déplacements joints aux perceptions permettent certaines coordinations organisant un espace proche, avec conservation pratique de l'objet, mais sans espace représentatif dépassant les limites de l'action : de même les schèmes sensori-moteurs constituent l'équivalent pratique des concepts logiques, avec un début de quantification (répétitions cumulatives, etc. dont les rythmes permettent certaines estimations quantitatives dans l'action), mais également sans représentation. Au niveau de la pensée intuitive péopératoire, il se constitue des images spatiales statiques et une imagination de certaines actions relatives aux transformations possibles des objets, mais sans conservation ni réversibilité : du point de vue de la logique et du nombre, il apparaît également des intuitions préconceptuelles et prénumériques, mais sans conservation

des ensembles ni inversion possible des configurations. Au niveau des opérations concrètes, les premières opérations transitives et réversibles s'organisent dans le domaine de l'espace, .de façon entièrement isomorphe aux premières opérations logico-arithmétiques. Au niveau des opérations formelles enfin, une logique formelle et hypothético-déductive embrasse simultanément les transformations spatiales et numériques.

Ce parallélisme génétique étroit conduit à une interprétation extrêmement simple : l'espace est le système des transformations intérieures à l'objet, si l'on entend par objet une totalité unique considérée en fonction du voisinage de ses éléments, tandis que la logique et le nombre constituent le système des transformations portant sur les collections d'objets (ou sur les relations entre objets), ceux-ci étant considérés comme invariants et caractérisés par leurs ressemblances ou leurs différences indépendamment de leurs voisinages. C'est ainsi que, dès l'action élémentaire, quelques cailloux consistent, du point de vue du nombre, en unités « distinctes », c'est-à-dire indépendantes les unes des autres et invariantes, que les opérations arithmétiques réunissent et ordonnent à la fois (ou que la classe réunit simplement, et que les relations asymétriques sérient) ; les mêmes cailloux sont, au contraire, du point de vue de l'espace, les éléments d'un objet unique, éléments reliés par des rapports intérieurs à la figure qu'ils forment à eux tous : voisinage, séparation, etc., ou distance, position en fonction d'axes de référence, etc., ou encore perspective, etc. Que l'on déplace les cailloux, leur nombre en reste le même, mais l'objet total qu'ils constituent change de forme ou de « figure », et ses transformations constituent les rapports spatiaux comme tels. Dès lors, si le nombre apparaît comme le produit des opérations logico-arithmétiques, c'est-à-dire des opérations portant soit sur les ressemblances (classes) soit sur les différences (relations asymétriques) soit sur les deux à la fois (classes et relations asymétriques fusionnées en systèmes d'unités numériques), l'espace est à concevoir génétiquement de même comme le résultat des opérations infralogiques portant sur les transformations de l'objet comme tel. Mais ces deux systèmes d'opérations, quoique distincts et quoique se traduisant finalement en un système unique de propositions axiomatisables, sont constamment isomorphes : la partition du continu et la réunion des enveloppements topologiques correspondent ainsi à l'emboîtement des classes logiques ; les opérations d'ordre (placement et déplacement) correspondent aux opérations de sériation logique et la mesure, synthèse des deux précédentes, se construit parallèlement au nombre lui-même,

synthèse des groupements de classes et de relations asymétriques.

Or, il est d'un grand intérêt de constater que cette parenté génétique étroite se trouve en plein accord avec le parallélisme des notions mathématiques elles-mêmes. Le nombre entier, d'un côté, et le continu spatial, de l'autre, constituent les deux pôles de la pensée mathématique, entre lesquels une série d'échanges croissants tissent une série inextricable de symétries et de réciprocités. Le nombre a fourni à l'espace le détail de sa métrique, mais l'espace lui a rendu le nombre irrationnel, destiné à construire numériquement un continu correspondant au continu spatial. Le calcul infinitésimal a été inspiré par les transformations spatiales peu après que la géométrie analytique eu reçu de l'algèbre le moyen de mettre les courbes en équations. Le domaine du nombre a prêté à la topologie l'usage de la théorie des ensembles, mais la topologie a répondu par une promesse de topologisation de la théorie des fonctions. Quant aux fondements des mathématiques, il est une école, de Kronecker à Brouwer et à Weyl, dont l'arithmétisation des mathématiques constitue l'idéal, tandis que le continu spatial est considéré par d'autres comme la source de tous les progrès. Bref, le continu et le nombre entier apparaissent bien comme deux réalités indépendantes, mais dont les relations aboutissent à une interaction intime.

Il y a donc là, tant du point de vue de l'embryologie des connaissances que de leur état d'achèvement provisoire en la période de l'histoire des sciences que nous vivons aujourd'hui, une donnée fondamentale, qui atteste à la fois l'unité de la pensée mathématique en sa double conquête de l'objet et des collections possibles d'objets, et la nature essentiellement opératoire et assimilatrice de l'espace comme du nombre. Le parallélisme de ces deux sortes de schèmes opératoires est ainsi de nature à faciliter la discussion finale à laquelle il faut en venir maintenant quant à la situation de l'espace dans les interactions entre le sujet et les objets, autrement dit dans les interactions entre la construction active ou déductive et l'expérience.

Nous pouvons partir, sur ce point, des conclusions auxquelles a abouti L. Brunschvicg dans sa célèbre analyse des « racines de la vérité géométrique » [1]. Nous nous sommes trop peu référé, jusqu'ici, à la position qu'a prise ce philosophe dont la pénétration génétique et historico-critique n'a d'égale que sa pénétration mathématique. Mais c'est parce

1. L. BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, chap. XXII.

que nous nous rencontrions de trop près avec ses thèses pour les sentir comme extérieures : le rôle fondamental que notre maître Brunschvicg fait jouer, dans la genèse de l'espace, aux opérations concrètes telles que la pratique du dessin, engendrant la notion du contour de l'objet et les figures en général, la visée déterminant la ligne droite, les rotations et translations, etc., n'a pas été pour peu dans l'investigation systématique que nous avons tentée au sujet du développement des représentations spatiales chez l'enfant, et ses vues sur ce point se sont révélées étonnamment conformes aux résultats de l'expérience. « Il est clair qu'il n'y a pas d'autre perception effective de l'espace que celle des corps qui le remplissent », soutient d'abord Brunschvicg (p. 498), d'où le rôle décisif de l'action : « C'est notre action qui sous-tend aux états de conscience un réseau d'objectivité » (p. 499). L'action constitue ainsi un « faisceau de sensations » en relation avec le mouvement, « et ce faisceau, en tant qu'il est précisément le but atteint par opposition aux moyens mis en œuvre, aux mouvements volontaires qui ont été effectués, c'est *l'objet* » (p. 500). En quoi consistent alors ces actions, formatrices de l'espace ? C'est d'abord le dessin, qui fixe « l'indéformabilité du contour » (p. 501) : « quelque paradoxal que soit un pareil énoncé, ce n'est pas en contemplant l'objet que l'on est arrivé à poser comme règle de vérité l'immutabilité du contour, c'est en agissant pour en reconstituer artificiellement l'aspect » (p. 502). C'est ensuite la visée, qui engendre l'alignement rectiligne (p. 503-504). C'est surtout le déplacement : si comme disait Montesquieu, avant que les cercles fussent tracés, les rayons en étaient égaux, c'est simplement que « l'égalité des rayons, inhérente au mouvement de rotation de la droite génératrice, est constitutive du cercle » (p. 505). De même les parallèles sont engendrées par la translation d'une tige droite normalement à sa longueur (p. 506), etc. « Nous voyons maintenant par quels degrés l'esprit se rend capable de constituer l'expérience arithmético-géométrique qui a fait de la science de la mesure spatiale la base d'une science universelle » (p. 507).

Mais en quoi consiste cette « expérience » ? « La suggestion de l'expérience est nécessaire à la constitution de l'espace ; mais l'expérience ne suffit pas à nous apporter d'elle-même un espace constitué. » Car « ce que nous voyons est dans l'espace ; mais nous ne voyons pas l'espace. Le lieu de toute intuition n'est nullement objet d'intuition. L'espace a sa racine dans l'expérience ; il a son achèvement dans la raison » (p. 514). L'espace est ainsi le « produit de la collaboration entre l'esprit et les choses » (p. 520), mais d'une collaboration dans laquelle « il n'y a pas à concevoir les collaborateurs hors de l'œuvre de collaboration » (p. 521).

Seulement ces formules, auxquelles nous ne saurions que nous rallier entièrement, sont finalement prises par L. Brunschvicg dans le sens d'une assimilation complète de l'expérience géométrique à l'expérience physique. C'est sur ce point qu'il s'agit, nous semble-t-il, de faire porter la discussion et de nous demander si le rôle de l'action et de l'expérience spatiales entraîne

nécessairement jusqu'à cette conséquence réaliste ce que l'on a parfois appelé l'idéalisme brunschvicgien.

Nous avons été conduits, au chap. I, à admettre que les structures logiques et numériques n'étaient pas abstraites de l'objet à la manière des rapports physiques, mais résultaient de la coordination des actions du sujet exercées sur les collections d'objets. A tous les niveaux de la conduite, en effet, les actions effectuées sur les objets supposent une coordination préalable entre les schèmes d'assimilation, de même que l'organisme ne saurait assimiler le milieu extérieur et par conséquent réagir sur lui sans constituer lui-même un processus cyclique imprimant sa forme aux substances et aux énergies externes interagissant avec lui. Des schèmes sensori-moteurs aux opérations réversibles, c'est donc cette coordination des actions qui permet les classements, les mises en relations, et par conséquent les quantifications et dénombrements nés de la synthèse de ces deux sortes de structures. Cela ne signifie nullement, ni que la logique ni que le nombre entier soient préformés à titre de structures *a priori* dans la constitution mentale du sujet : il n'existe point de structures *a priori*, car toutes les structures se construisent. Mais toute structuration implique un fonctionnement antérieur à elle, car sans un fonctionnement continu, lié en son point de départ à l'organisation biologique même, aucune action n'est possible (cette organisation pose de son côté un problème épistémologique dont nous n'avons pas à traiter ici et que nous retrouverons aux chap. IX et X). Ce fonctionnement se poursuit au travers de structures successives, dont chacune tire ses éléments par une sorte d'abstraction, des structures précédentes, tout en les regroupant selon une forme d'équilibre supérieure. Cette abstraction, dont sont tirés les êtres logiques et arithmétiques, est donc une abstraction à partir de l'action ou même des coordinations de l'action, et il faut la distinguer soigneusement de l'abstraction à partir de l'objet, car elle ne revient pas à considérer l'action comme un objet et se borne à en extraire (par la simple continuité du processus assimilateur) ses éléments opératifs et non pas des qualités quelconques : c'est ainsi que les schèmes sensori-moteurs supérieurs tirent des schèmes initiaux (réflexes et perceptifs) leurs possibilités d'anticipation et de reconstitution partielles, pour les prolonger et les regrouper en conduites de détours et de retours ; que les schèmes intuitifs retiennent des schèmes sensori-moteurs leurs assimilations et leurs accommodations imitatives, pour les prolonger en représentations imagées plus ou moins articulées et que les schèmes opératoires abstraient

de celles-ci leurs articulations pour les prolonger en compositions réversibles, etc. Bref, la logique et le nombre sont dus aux coordinations des actions comme telles du sujet, et ne sont pas extraits de l'objet, quand bien même ce n'est qu'à l'occasion des actions sur les objets que ces coordinations se manifestent ; et la construction des structures logiques et numériques successives est due simultanément à une abstraction à partir du fonctionnement antérieur de l'action et à des généralisations opératoires rendant toujours plus mobiles et réversibles les compositions qui portent sur les éléments ainsi abstraits de l'action (réunions, sériations, etc.).

Les connaissances physiques sont dues, au contraire, aux actions différenciées et particulières, par opposition à la coordination générale des actions : actions de soupeser, de pousser, d'accélérer ou de freiner, etc. ; et elles abstraient ainsi leurs éléments des objets sur lesquels portent ces actions (étant entendu que ces objets sont toujours connus au travers seulement de leur assimilation à ces actions particulières), et non plus des coordinations de ces mêmes actions, comme la logique et l'arithmétique. Seulement, comme les actions particulières, différenciées en fonction de l'accommodation aux objets variés, et la coordination générale des actions, accommodée de façon permanente aux objets quelconques, sont toujours unies et demeurent indissociables en fait, il va de soi que les opérations logico-arithmétiques seront reliées de la façon la plus continue aux opérations physiques, sans pour autant se confondre avec elles.

Qu'en est-il alors des structures spatiales ou géométriques ?

Tiennent-elles comme la logique et le nombre aux coordinations comme telles des actions, ou, comme les connaissances physiques, aux contenus particuliers de celles-ci ? Deux faits sont ici décisifs : d'une part, l'étroit parallélisme génétique entre le développement de l'espace et celui du nombre, notamment entre les opérations constitutives du premier et les opérations logico-arithmétiques ; d'autre part, la continuité historique d'une géométrie déductive indéfiniment féconde, par opposition à la soumission constante de la déduction physique au contrôle de l'expérience.

Du point de vue génétique, déjà, la nature des actions puis des opérations formatrices de l'espace montre assez qu'elles relèvent, comme les opérations logico-arithmétiques, des coordinations générales de l'action par opposition aux actions particulières. La seule différence entre les rapports topologiques élémentaires d'enveloppement ou d'ordre et les classes logiques

ou les nombres est que, en ces derniers cas, les éléments sont reliés indépendamment de leurs voisinages et par conséquent de façon discontinue, tandis que, dans le premier cas, les éléments sont reliés en un objet total grâce à leurs voisinages ordonnés selon des relations continues. Or, le voisinage et la continuité sont des caractères généraux de l'action autant que l'emboîtement fondé sur les ressemblances ou la sériation des différences, qui caractérisent tous deux l'assimilation la plus élémentaire elle-même : l'action procède, en effet, de proche en proche et de façon continue, aussi bien qu'elle réunit en totalités ou met en relation les éléments des situations discontinues sur lesquelles elle procède. Ce n'est même que très lentement et très progressivement que ces caractères de voisinage et de non-voisinage, c'est-à-dire les aspects spatiaux et logico-arithmétiques de l'action, se différencient l'un de l'autre : en fait, c'est à partir seulement du niveau des opérations concrètes réversibles (7-8 ans), tandis que toutes les intuitions imagées préopératoires portent sur des configurations en partie spatiales, même lorsqu'il s'agit de collections prélogiques ou prénumériques (voir chap. l, § 12). D'autre part, la source psychologique des « homéomorphies » topologiques est à chercher dans la correspondance qualitative permettant de discerner des ressemblances formelles indépendamment de la constance des dimensions et des formes elles-mêmes ; or, ces correspondances sont en étroite parenté avec les assimilations formatrices des classes logiques.

Quant à la coordination des points de vue, source de la géométrie projective, et à celle des mouvements, source de la métrique euclidienne, ce sont là également des coordinations générales, quoique déjà moins que les coordinations ou assimilations topologiques initiales. Ainsi l'espace, comme la logique et le nombre, tient aux coordinations les plus élémentaires de l'action et son évolution procède donc par restructurations successives au moyen d'abstractions à partir de ces coordinations elles-mêmes : c'est ce qui explique la capacité des opérations spatiales, une fois constituées, de donner prise à une déduction indéfinie.

Historiquement, l'opposition relative entre la géométrie et la physique parle exactement dans le même sens. Alors que toute déduction physique pure conduit à des indéterminations, nécessitant le recours à l'expérience, et que la généralisation simple portant sur des caractères abstraits de l'objet aboutit tôt ou tard à des théories chimériques et incompatibles avec les faits, la déduction géométrique est indéfiniment féconde et assurée de

sa vérité intrinsèque. On répondra qu'une phase empirique a précédé la déduction, en géométrie comme en tout chapitre de physique : mais nous avons vu (chap. I, § 1-2) qu'expérience ne signifie pas nécessairement abstraction à partir de l'objet, et que le sujet peut expérimenter sur ses propres actions au moyen d'objets quelconques, sans aboutir à autre chose qu'à découvrir les coordinations nécessaires des premières, par opposition aux caractères particuliers des seconds. On dira aussi que la géométrie est en accord perpétuel avec l'expérience, ce qui semble lui conférer un caractère physique supérieur à celui de la physique elle-même. Mais c'est que, précisément, les coordinations les plus générales de l'action aboutissent à une accommodation permanente à l'objet quelconque, une fois susceptibles de compositions réversibles, puisque l'action porte toujours sur des objets, et que cette accommodation stable se distingue des accommodations particulières, autant que les coordinations entre actions diffèrent de celles-ci envisagées en leurs diversités.

Seulement, si l'espace est ainsi comparable à la logique et au nombre, il existe cependant une différence importante entre les opérations logico-arithmétiques et les opérations spatiales, du point de vue de leurs rapports respectifs avec l'expérience. Mais cette divergence tient précisément et même exclusivement à l'intervention des rapports de voisinage dans les relations spatiales, par opposition aux ressemblances, différences et équivalences entre unités distinctes, qui caractérisent la logique et le nombre. Relativement à une certaine échelle d'observation, les objets physiques sont, en tant même que physiques, plus ou moins voisins les uns des autres, exactement comme ils sont plus ou moins ressemblants, ou différents, ou fréquents, etc. Or, si ressemblants, différents ou dénombrables qu'ils soient, ils ne constituent des classes, des séries ou des ensembles dénombrés qu'après avoir été effectivement classés, sériés ou comptés par le sujet (l'expression même de « dénombrable » indique cette propriété de l'objet de se prêter à une action virtuelle de dénombrement, sans pour autant présenter par lui-même un caractère numérique actuel). Au contraire, deux objets physiques peuvent présenter entre eux un rapport de voisinage (ou de distance, etc.) en tant que physiques, indépendamment des structures spatiales mathématiques que nous construisons en agissant sur eux. La raison en est que les objets agissent les uns sur les autres de proche en proche, donc en fonction du voisinage, tandis que les ressemblances et différences ne s'influencent pas à distance (contrairement à ce qu'admet la causalité magique !) pour constituer

des classes, etc., indépendantes du contact spatial. Il intervient donc, à côté de l'espace mathématique, dû aux coordinations du sujet lui-même, un espace physique ou espace de l'expérience portant sur les objets différenciés par leurs caractères propres. Autrement dit, parmi plusieurs formes élaborées grâce à l'activité du sujet, les unes peuvent mieux convenir que d'autres à tel système d'objets spécifiques, déterminés par leurs propriétés physiques, c'est-à-dire par les actions particulières s'appliquant à eux (en opposition avec les coordinations générales de l'action) [1].

Mais s'il existe ainsi un espace physique distinct de l'espace mathématique, tandis qu'il n'existe pas de logique ou de nombres physiques, parce que le voisinage intervient au sein des relations causales, mais que les ressemblances, différences ou équivalences n'agissent pas à distance, il ne s'ensuit nullement que l'espace physique corresponde terme à terme à l'espace mathématique. D'une part, en effet, l'espace physique est plus pauvre que l'espace construit par le sujet. D'autre part et surtout (cette seconde raison commande sans doute la première), toute propriété de l'espace réel est solidaire des autres qualités physiques. C'est ainsi que la mesure d'une distance physique consiste à déplacer un mètre en réalité et non pas en pensée, et que ce déplacement dépend alors de la masse des objets, du champ gravifique, etc. : il constitue de ce fait un mouvement réel, impliquant le temps et la vitesse. L'espace physique n'est donc pas une propriété des objets dissociable sans plus de son contexte : il n'est pas un contenant, séparé et homogène, mais ne fait qu'un avec son contenu hétérogène lui-même. Néanmoins, par le fait que toutes les opérations caractérisant l'activité du sujet déterminent des transformations possibles de l'objet, les propriétés de l'espace physique peuvent se traduire en espace mathématique. Mais la réciproque n'est pas vraie, et celui-ci demeure plus riche que celui-là, car toute transformation logiquement possible n'est pas physiquement réalisable.

C'est ainsi que (nous l'avons vu au § 7) la notion de dimension apparaît génétiquement en fonction des actions d'enveloppement, chaque système d'enveloppement pouvant donner lieu à la libération d'un élément intérieur selon une dimension nouvelle,

1. P. ex. si la réunion de deux micro-objets et de deux autres en venait à donner 3 ou 5 micro-objets, on corrigerait plutôt la notion d'objet que la relation 2 + 2 = 4, tandis que, si la somme des trois angles d'un triangle ne donne pas deux droits, on adaptera un espace non euclidien à cette constatation physique.

suivant que cet élément traverse un point, une ligne, un plan, etc., pour devenir extérieur. Or, c'est l'expérience physique qui nous apprend que, dans le monde réel des actions à notre échelle, l'espace n'a que trois dimensions : on ne peut en effet sortir un objet d'une boîte fermée, ni transformer un gant gauche en un gant droit, etc. (ce qui montre assez combien l'espace physique est plus pauvre que le mathématique !). Mais ces trois dimensions sont alors une propriété physique des objets sur lesquels s'exercent nos actions particulières, et non plus une propriété de la coordination générale des actions. Il est possible qu'il intervienne en outre ici un facteur d'hérédité, puisque nous ne pouvons même pas intuitionner (par opposition à percevoir ou à concevoir) un espace à quatre dimensions. Mais il s'agirait alors d'un fait d'hérédité « spéciale », c'est-à-dire d'une propriété chromosomique des lignées humaines (ou des Mammifères supérieurs, etc.) par opposition à l'hérédité générale (hérédité cytoplasmique) des êtres vivants : il s'agirait donc à nouveau d'actions particulières, par rapport aux coordinations communes à tous les organismes. — De même, si l'espace physique est euclidien à l'échelle de nos actions ordinaires, c'est que, pour nos instruments habituels de mesure, les angles d'un triangle sont égaux à deux droits. Mais la mesure des angles à une autre échelle, comme les fameuses mesures du ds^2 dans la physique relativiste, peut aboutir à la détermination d'autres formes spatio-physiques. En particulier, si, au lieu de vivre à nos petites vitesses, nous devions agir quotidiennement sur un monde à grandes vitesses, les courbures du contenu spatio-temporel auquel devraient s'accommoder nos actions seraient sans doute sensibles à nos organes.

Du point de vue des rapports entre l'activité du sujet et le réel, il résulte de cette distinction entre l'espace physique et l'espace mathématique que, outre les relations spatiales découvertes grâce aux coordinations de l'action, un grand nombre de connaissances géométriques peuvent être suggérées par l'expérience physique, c'est-à-dire par une abstraction relative à l'objet et aux actions particulières exercées sur lui, et non pas seulement relative aux coordinations générales des actions du sujet. Mais, ce qui est remarquable, c'est qu'alors l'expérience agit par suggestion plus que par contrainte, autrement dit que l'accommodation aux données extérieures est plus aisée que dans le cas d'une loi physique quelconque, puisque nous pouvons reconstruire par nous-mêmes ce que cette expérience nous propose. Dans un passage célèbre, Poincaré a écrit : « Le seul objet naturel de la pensée mathématique, c'est le nombre entier. C'est le monde extérieur qui

nous a imposé le continu, que nous avons inventé sans doute, mais qu'il nous a forcés à inventer » *(Val. sc.*, p. 149). Nous ne croyons d'ailleurs pas que le continu soit sans racines internes dans la coordination des actions, car si le groupe des déplacements émane de l'activité du sujet, comme l'admet Poincaré lui-même, il n'est pas concevable sur le plan sensori-moteur lui-même sans intervention de la continuité (d'autre part la théorie de la *Gestalt* nous a appris le caractère élémentaire du continu dans les « formes » perceptives et motrices). Mais, si la formule de Poincaré est trop restrictive pour le contenu lui-même, elle est valable dans un grand nombre d'autres cas : il existe de nombreuses inventions géométriques que l'expérience nous a forcés à faire, quand bien même nous aurions pu les tirer des schèmes relatifs à la coordination de nos actions. Il faut simplement dire, en ces cas, que les découvertes faites sur l'espace physique ont précédé les inventions de l'espace mathématique, tandis qu'en un non moins grand nombre d'autres cas c'est la marche inverse qui s'est produite. L'essentiel n'est d'ailleurs pas là : il est dans la convergence nécessaire entre les deux sortes de structures. Or cette convergence va de soi, puisque nous ne connaissons les objets physiques qu'au travers des actions particulières s'exerçant sur eux (l'espace physique étant toujours lui-même relatif à l'échelle de ces actions), et que les coordinations générales de l'action, qui engendrent l'espace mathématique, seront toujours en accord avec ces actions particulières, tout en les dépassant.

Or, cette dualité et cette convergence de l'espace physique et de l'espace mathématique, comparées à l'unicité du système des opérations logico-arithmétiques, sont extrêmement révélatrices quant aux interactions entre le sujet et les objets. Nous avons distingué les opérations spatiales des opérations logico-arithmétiques en ce que les premières sont constitutives de l'objet lui-même, tandis que les secondes concernent les réunions ou relations entre objets discontinus. Portant sur l'objet, en tant que totalité quelconque d'un seul tenant, il est alors évident que l'espace intéresse l'objet physique, en même temps qu'il traduit la coordination des actions effectuées sur lui, puisque cet objet physique est toujours donné en fonction des actions particulières s'appliquant à lui et que ces actions particulières sont indissociables de leurs coordinations générales. Il en serait de même des constructions logico-arithmétiques, si les ressemblances, différences ou équivalences entre éléments des ensembles d'objets présentaient une signification physique indépendante de l'espace

(donc des voisinages, des distances, etc.), mais elles n'en ont pas, ou du moins n'en ont plus dans la physique moderne (comparée à l'ontologie logico-physique d'Aristote), parce que les objets physiques des divers ordres (jusqu'à l'univers physique entier, considéré comme objet total) relèvent précisément des opérations constitutives de l'objet, et non pas des opérations indépendantes de l'espace (sauf, verrons-nous, aux limites mêmes des actions particulières, c'est-à-dire en microphysique). Il en résulte que les opérations spatiales, quoique exactement isomorphes en leur genèse et en leur achèvement aux opérations logico-arithmétiques, assurent d'une manière particulièrement étroite le contact entre le sujet et l'objet, les « opérations constitutives de l'objet » qui engendrent l'espace relevant de la coordination des actions du sujet, et l'objet physique, avec l'espace physique lui-même, relevant des actions particulières du sujet sur les objets.

Cette interaction intime entre le sujet et l'objet qu'assurent ainsi les opérations logico-arithmétiques, l'espace mathématique, qui leur est isomorphe, et l'espace physique (solidaire de l'objet physique en chacun de ses aspects), explique alors de la façon la plus simple le développement à la fois génétique et historique de l'espace, quant aux relations entre la déduction et l'expérience. Comme nous l'avons vu plus haut (fin du § 6), il n'est guère possible de maintenir avec Gonseth un parallélisme entre les trois aspects intuitif, déductif et expérimental de l'espace, parce que, génétiquement et historiquement, l'espace intuitif qui englobe d'abord tout, se résorbe peu à peu, en se dissociant en deux domaines dont l'importance respective s'accroît à ses dépens : l'espace formalisé et l'espace expérimental. Or, la chose s'éclaire dès que l'on pose le problème en termes de relations entre les actions particulières, sources de la connaissance physique, (y compris l'espace physique) et la coordination générale des actions, sources de la connaissance logico-mathématique (y compris l'espace géométrique) : partant du point de jonction entre ces actions à peine différenciées et les coordinations les plus élémentaires, l'espace en sa genèse psychologique commence par être simultanément physique et mathématique, c'est-à-dire par relever simultanément de l'objet et du sujet (que l'intuition confond en un bloc indifférencié) ; mais l'évolution même des notions spatiales, qui seule est décisive pour une épistémologie génétique, montre au contraire une dissociation graduelle entre les opérations spatiales d'un côté (donc les opérations constitutives de l'objet en général, relevant des coordinations opératoires du sujet, toujours mieux épurées et

formalisées), et l'espace expérimental de l'autre (donc l'espace de l'objet physique, relevant des actions toujours plus différenciées par accommodation à la variété des objets et à la multiplicité de leurs qualités physiques, dont l'espace de l'expérience est solidaire). Historiquement il en va exactement de même : alors que la géométrie d'Euclide veut être simultanément une déduction logique et une physique (comme la logique d'Aristote d'ailleurs), la géométrie axiomatique de Hilbert et la géométrie des champs gravifiques d'Einstein marquent au contraire la dissociation, et la convergence partielle, qu'assure la différenciation achevée entre les coordinations générales ou logico-mathématiques de l'action et les actions particulières sur lesquelles s'appuie la connaissance physique.

CHAPITRE III.

LA CONNAISSANCE MATHÉMATIQUE ET LA RÉALITÉ

Après avoir examiné la genèse des rapports numériques et spatiaux, il convient de chercher quelle est la direction de pensée que suit le développement de la connaissance mathématique. S'interdisant de juger une fois pour toutes de ce qu'est l'esprit et de ce qu'est la réalité, l'épistémologie génétique ne saurait, en effet, étudier la relation entre les mathématiques et cette réalité, qu'en tentant de dégager la direction suivie par la connaissance mathématique au cours de son évolution historique, et en se référant seulement aux divers types de réalités successivement admises par la pensée scientifique à chacune de ses principales étapes. Or, le mécanisme essentiel qui se dégage de tout examen de l'histoire des mathématiques est assurément celui de la prise de conscience graduelle des opérations, puisque les géomètres grecs croyaient contempler sans opérer, tandis que l'analyse et la géométrie modernes se donnent comme une étude des « transformations », D'où le problème du rôle effectif des opérations, qui nous conduira à la question du raisonnement mathématique et, finalement, à celle des rapports entre le sujet et l'objet dans la construction opératoire des êtres mathématiques.

§ 1. LA PRISE DE CONSCIENCE HISTORIQUE DES OPÉRATIONS. A) LES MATHÉMATIQUES GRECQUES. — On a souvent noté que, par-delà les philosophies individuelles qui en constituent plus ou moins le reflet, le sens commun ou, pourrait-on aller jusqu'à dire, la « conscience collective » des mathématiciens a singulièrement varié d'un siècle à l'autre quant à la nature ou à l'objet de leur science. Rien n'est plus instructif, à cet égard, que de méditer sur l'opposition fondamentale qui sépare la conception mathématique des Grecs de celle des modernes, même si la métaphysique platonicienne, que le génie grec a construite pour

justifier le réalisme des formes, réapparaît périodiquement au cours de l'histoire. Or, cette opposition pourrait bien tenir à une conscience insuffisante du rôle des opérations, laquelle caractériserait la conception mathématique des Grecs, et, à partir du XVII[e] siècle, à une prise de conscience du mécanisme opératoire de la pensée. Si cette thèse était exacte, l'histoire des mathématiques grecques constituerait la plus intéressante des expériences épistémologiques : l'expérience d'une pensée qui construit, bien qu'elle s'ignore en tant que constructive, puis qui cesse de construire, faute de cette connaissance de son propre pouvoir. On connaît assez, en effet, les destinées de la science antique qui, après le « miracle » de son apparition (si miracle il y a eu) et après la plénitude d'une période d'apogée, a cessé mystérieusement d'être féconde pour avorter dans la décadence de la période alexandrine. Or, les circonstances sociales, à elles seules, ne sauraient rendre compte de cette courbe historique, sauf à montrer comment l'absence d'une liaison suffisante avec les techniques (autres que celles de l'architecte) a pu encourager les géomètres grecs en leurs tendances contemplatives et anti-opératives. Le principe de cette stérilité finale, que de nombreux auteurs ont cherché à expliquer, ne tiendrait-il donc pas à un réalisme par refus, si l'on peut dire, de reconnaître l'activité du sujet, tandis que la fécondité de la science moderne s'expliquerait alors par le dynamisme du mécanisme opératoire, devenu conscient de ses possibilités internes ?

Si divers qu'aient été les problèmes abordés par les mathématiciens grecs, dans les travaux desquels on peut retrouver les germes de presque toutes les grandes découvertes modernes, la partie de leur science qu'ils se sont trouvés d'accord à consacrer ou à codifier n'en est pas moins considérablement plus restreinte en son domaine que la mathématique moderne : seules l'arithmétique et cette variété de géométrie que nous appelons aujourd'hui euclidienne (par opposition à la géométrie projective et à la topologie) ont eu droit de cité, sans parler de la statique d'Archimède, dont la méthode éclaire à bien des égards l'idéal scientifique des Grecs, mais qui n'appartient pas aux mathématiques pures. Cependant les Grecs connaissaient une sorte d'algèbre (Diophante d'Alexandrie employait des signes abrégés pour exprimer les puissances, etc.) ainsi qu'une « logistique » ou art du calcul, mais qu'ils considéraient comme de simples techniques utilitaires et non pas comme des sciences (ainsi que la géodésie ou mesure géométrique concrète). Ils se sont rapprochés, d'autre part, du calcul infinitésimal, avec la « méthode d'exhaustion »

d'Antiphon et d'Eudoxe, et surtout avec les procédés subtils employés par Archimède dans ses recherches sur l'évaluation des aires et des volumes, mais qu'il a voulu subordonner à la méthode géométrique. De même, on a souvent rapproché les fameux paradoxes de Zénon d'Elée de l'intervention des séries infinies dans la mathématique moderne, Seulement, que Zénon ait voulu prouver l'impossibilité rationnelle du mouvement, ou simplement son irréductibilité à l'égard d'une pluralité discontinue, il n'en reste pas moins que son intention était essentiellement négative et critique, par opposition au rôle constructif que joue l'infini des modernes.

Bien plus, la géométrie même des Grecs s'est volontairement limitée, de la manière la plus curieuse, à un nombre de notions et de figures plus restreint que celles dont les géomètres avaient effectivement connaissance. On sait, p. ex., que les courbes appelées « mécaniques », telles que la quadratrice de Hippias, la conchoïde de Nicomède, la cissoïde de Dioclès, etc., ne figurent pas dans les formes envisagées par la géométrie d'Euclide, comme s'il existait des formes rationnelles et d'autres étrangères à la raison géométrique (à la manière dont Aristote admet une distinction entre les mouvements « naturels » et les mouvements « contre nature » ou « violents »). Les seules figures reconnues par cette géométrie sont, en effet, celles que l'on peut construire au moyen de la règle et du compas, c'est-à-dire au moyen de droites et de cercles (ou de rotations autour d'une droite), par opposition aux autres formes, relevant précisément de procédés « mécaniques » et par conséquent suspectes d'irrationalité. Pour la même raison ne trouve-t-on pas dans la géométrie grecque, une théorie du déplacement, malgré l'usage effectif qu'Euclide se permet de cette opération dans les décompositions et les recompositions de figures. On ne peut parler non plus d'une analyse systématique du continu, malgré l'axiome dit d'Archimède (par allusion à ses méthodes d'exhaustion), et cette timidité à l'égard du continu s'accompagne d'une prudence générale en ce qui concerne l'infini sous toutes ses formes, analytiques ou géométriques [1].

Quelle que soit l'opposition fondamentale qui sépare la pensée formelle des Grecs des opérations concrètes, en jeu dans la science utilitaire des Egyptiens, le raisonnement déductif demeure donc chez eux essentiellement statique. C'est ainsi que le choix

1. L. BRUNSCHVICG remarque avec raison (*Etapes*, p. 155) que les passages curieux relevés chez Aristote par Moritz Cantor au sujet du continu et de l'infini sont de signification seulement métaphysique et n'ont donné lieu à aucune application d'ordre proprement scientifique ou technique.

même des constructions par la règle et le compas à l'exclusion des autres procédés constructifs possibles pour engendrer les figures montre assez que la figure n'est pas conçue comme relative à l'opération qui la détermine, et que celle-ci ne possède donc pas le pouvoir logique d'être généralisée en elle-même : c'est la figure qui seule constitue la réalité mathématique objective, tandis que la construction demeure inhérente au sujet et par conséquent sans valeur de connaissance scientifique. De même, les Pythagoriciens découvrant les nombres irrationnels par généralisation de l'opération d'extraction de la racine (dans le cas de la diagonale $\sqrt{2}$ d'un carré ayant une unité de côté) n'en concluent pas à la légitimité de cette notion en tant que généralisation opératoire du nombre, mais commencent par l'écarter comme un scandale intellectuel et une sorte d'impiété : il a fallu la réflexion platonicienne sur les rapports entre le commensurable et l'incommensurable pour que celui-ci acquière droit de cité dans la géométrie. Mais, même sans généraliser le nombre jusqu'à le faire correspondre au continu spatial (idée réservée à la science opératoire des modernes depuis l'arithmétique universelle de Newton), les Grecs auraient pu tirer de la réflexion sur les incommensurables une étude quantitative des figures géométriques. Tout au contraire, comme L. Brunschvicg et P. Boutroux l'ont bien montré, ils ont toujours cherché à subordonner le raisonnement à la qualité, à faire une « étude qualitative de la quantité » [1], à éviter non seulement le calcul des grandeurs concrètes mais même celui des grandeurs abstraites [2], p. ex. en remplaçant la mesure des angles par une construction conservant la forme qualitative de la figure [3].

Au total, comme tous les spécialistes de l'histoire des sciences l'ont fait voir, l'idéal de la mathématique grecque est essentiellement contemplatif, c'est-à-dire réaliste dans le sens du primat de l'objet et de la dévaluation ou même de l'ignorance presque voulue de l'activité du sujet. Pour Pythagore le nombre est dans les choses, c'est-à-dire que le nombre entier était considéré comme le principe de la réalité spatiale (comprise comme la plus extérieure à nous), jusqu'à la découverte des incommensurables. Après quoi, il subsiste en soi dans le monde des Idées ou des Formes, comme les figures dont la beauté et l'harmonie intrinsèque sont l'objet même de la connaissance rationnelle. Le

1. L. BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, p. 97.
2. P. BOUTROUX, *L'idéal scientifique des mathématiciens*, p. 70.
3. *Ibid*., p. 75-76.

« théorème » est une vision rationnelle, détachée du « problème » et des constructions qui rendent sa démonstration possible. Bref, en tous ses aspects, le raisonnement statique et qualitatif du mathématicien grec est suspendu à la réalité, indépendante de nous, propre à l'Objet.

Or, comme chacun l'a vu également, c'est cet idéal même de perfection théorique qui a été cause de la faiblesse, puis de la décadence terminale, de la mathématique grecque : la stérilité dont elle a fini par faire preuve, après des siècles d'éclat, a tenu ainsi à des raisons internes, et non pas externes, c'est-à-dire aux limites mêmes qu'elle s'était imposées. Faut-il, avec A. Reymond [1], voir en ce fait capital l'expression d'une logique plus exigeante que la nôtre, renonçant aux notions de mouvement, d'infini, et à l'analyse inépuisable du continu parce que les sentant suspectes de contradiction à la suite des *apories* de Zénon d'Elée ? Mais pourquoi l'Eléatisme a-t-il pu introduire un tel effet d'inhibition, alors que, de notre temps comme aux débuts de l'analyse infinitésimale, les « crises » des mathématiques n'affectent que la discussion des fondements sans jamais stériliser la technique ? Un tel fait nous pousserait au contraire à parler d'une logique plus courte que celle des modernes, parce que plus statique, et moins apte à assimiler les données du réel, parce que moins consciemment opératoire.

Le problème psychologique et génétique que soulève la structure des mathématiques grecques est donc d'expliquer une telle logique, en référence avec les opérations concrètes du calcul « utilitaire » qui les a précédées, d'une part, et avec la logique du XVI^e^ et du XVII^e^ siècle, d'autre part. Or, il est vraisemblable que les opérations formelles aient été les mêmes chez les Grecs que chez les modernes, et bien distinctes, chez les premiers autant que chez les seconds, des opérations concrètes du niveau précédent (mesures et calcul empiriques), ainsi que des opérations concrètes en jeu dans la construction même des figures. Autrement dit, du point de vue de la structure formelle, il va sans dire que la logique des mathématiciens grecs est celle des propositions et des implications purement déductives » [2], au même titre que celle

1. A. REYMOND, *Histoire des sciences exactes et naturelles dans l'antiquité gréco-romaine*, Paris, Blanchard.

2. Il est cependant à noter combien souvent on a l'impression, dans les Dialogues de PLATON, que les interlocuteurs ont une connaissance pour ainsi dire fraîche et récente du raisonnement formel, tant Socrate met de soin à leur expliquer p. ex. qu'un frère est toujours le frère de quelqu'un ou que l'intelligence ne voit pas de contradiction à ce que le nombre 6 soit à la fois plus grand que 4 et plus petit que 8 !

des géomètres du XVII[e] siècle (et indépendamment du fait que le contenu des prémisses ou des axiomes demeure intuitif, en opposition avec l'axiomatique contemporaine). Mais tout se passe comme si les Anciens, dans leur découverte du raisonnement formel, n'avaient point encore pris conscience de son caractère constructif ou opératoire, autrement dit n'établissaient point la même ligne de démarcation entre l'objet et l'activité du sujet que les fondateurs de la géométrie analytique ou du calcul infinitésimal, faute de réflexion sur cette activité comme telle. Ce serait alors à cause de ce défaut de prise de conscience, et, par conséquent, à cause des limites imposées par le réalisme découlant d'un tel fait, que leur pensée formelle n'aurait point atteint le développement illimité auquel on était en droit de s'attendre.

La question de la prise de conscience du mécanisme de la construction intellectuelle et le problème psychologique de la délimitation établie par la pensée spontanée entre l'activité du sujet et son objet sont d'une grande importance pour toute l'épistémologie. Si le réalisme est tellement mieux enraciné dans le sens commun que l'idéalisme, cela tient, en effet, sans doute à des mécanismes psychiques élémentaires, qu'il est nécessaire de chercher à atteindre. L'expérience historique des Grecs constitue à cet égard un fait crucial, qu'il convient d'analyser en s'aidant du plus grand nombre de références possible.

Or, l'étude du .développement mental montre, avec toute la clarté désirable, non seulement que la délimitation communément admise entre le sujet et l'objet est essentiellement variable d'un niveau à l'autre, mais encore qu'elle dépend d'un phénomène constant, ou constamment renouvelé : la difficulté à prendre conscience des mécanismes internes de l'activité intellectuelle, en particulier lorsqu'elle se présente sous des formes récemment acquises.

Il n'est pas besoin de rappeler qu'au niveau perceptif et sensori-moteur la construction, si lente et si laborieuse, de l'objet pratique suppose elle-même une phase préliminaire au cours de laquelle il n'existe aucune délimitation entre le sujet et les objets, donc aucun objet permanent et par conséquent aucun sujet conscient de lui-même à titre de sujet ; l'univers est alors « adualistique », comme l'a si bien dit J. M. Baldwin, c'est-à-dire que tout ce qui est senti et perçu est mis sur un seul et même plan, sans distinction entre un monde extérieur et un monde intérieur. Ce n'est qu'avec la construction des objets que cet univers indifférencié initial commence à se dissocier en une activité propre et en ses objectifs extérieurs, si relative que soit sans doute encore la conscience de cette activité propre avant l'apparition de la pensée.

Avec les débuts de la pensée, sous sa forme intuitive et préopératoire, la différenciation des signifiants collectifs (signes verbaux) ou individuels (images) et des significations élaborées grâce à eux marque naturellement un progrès considérable dans le sens à la fois de l'intériorisation du sujet et de l'extériorisation de l'objet. Ce dernier est alors davantage détaché du moi, puisque demeurant un objet de pensée même en l'absence de toute action proche. Quant à la pensée, elle est mieux intériorisée que l'intelligence sensori-motrice, puisque rendue indépendante de l'action immédiate, et s'éloignant par conséquent de la surface de friction entre cette action et les choses. Mais ce double progrès est immédiatement payé par un retour de réalisme, si nous définissons le réalisme comme étant une confusion du sujet et de l'objet, et ce retour se produit sur le terrain même nouvellement conquis par la pensée, c'est-à-dire celui des signes et des significations. C'est ainsi que les enfants et les primitifs s'imaginent que les noms sont dans les choses et présentent une existence extérieure indépendante du sujet qui parle (d'où les tabous liés à certains noms sacrés, etc.) ; les rêves sont des images données matériellement, que l'on regarde comme on « voit » les objets ; la pensée elle-même consiste en souffle et en air [1], etc. Bref, le sujet et l'objet sont départagés tout autrement que chez l'adulte civilisé.

Au niveau des opérations concrètes, la conquête de systèmes opératoires portant sur les classes, les relations et les nombres marque à la fois une nouvelle étape de l'intériorisation de la pensée, puisque le sujet découvre son pouvoir de classer, de relier et de compter, et un nouveau progrès dans l'extériorisation, puisque les réalités ainsi coordonnées sont d'autant plus stables et plus objectives. Mais il s'ensuit une nouvelle forme de réalisme, faute de dissociation suffisante entre le sujet et les objets ; les classifications ou sériations sont senties comme imposées une fois pour toutes par l'objet, sans une marge suffisante de liberté ou de choix, et les nombres sont attachés aux choses comme si, en dénombrant, le sujet se bornait à lire des chiffres tout faits, à la manière dont on constate l'existence de propriétés inhérentes au réel.

Enfin, lors de l'apparition des opérations formelles, il n'est aucune raison qu'il n'en soit pas de même. Autre chose est, en effet, de parvenir à lier entre eux des jugements ou des propositions hypothétiques par des opérations se traduisant sous la forme d'implications, d'alternatives, d'incompatibilités, etc., et autre chose est de prendre conscience de la relativité de telles connexions par rapport au système adopté des notions premières et aux axiomes choisis, c'est-à-dire par rapport aux constructions dues à l'activité formalisante de la pensée. C'est du degré de cette prise de conscience, en tant que processus réflexif, que dépendent les divers paliers d'axiomatisation signalés au chap. II

1. Voir notre étude sur *La représentation du monde chez l'enfant*, Paris, P.U.F., nouv. éd. 1948, chap. I-III.

(§ 9), ainsi que l'opposition entre l'axiomatique insuffisante, parce que encore trop intuitive, des Grecs et la formalisation toujours plus poussée des contemporains. La projection du nombre entier dans les choses, par les Pythagoriciens, peut être un héritage du niveau des opérations concrètes. Mais le réalisme général de la pensée, pourtant formelle, des mathématiciens grecs ultérieurs comporte la plus naturelle des explications si l'on se réfère aux transformations continues des divers modes de réalisme au cours des niveaux précédents : le réalisme étant l'expression d'une indifférenciation entre le sujet et l'objet et la différenciation entre eux ne s'effectuant que progressivement, le sujet pensant ne se sent jamais d'emblée agir par sa pensée, lorsqu'il parvient sur un nouveau palier de l'élaboration intellectuelle, mais il commence toujours par prendre conscience des résultats de cette pensée avant d'en saisir réflexivement les mécanismes. Toute la philosophie de la connaissance chez les Grecs témoigne de ce primat de l'Objet, par opposition au *Cogito* qui inaugure la réflexion épistémologique moderne : du prétendu « matérialisme » des présocratiques à la réminiscence platonicienne des vérités suprasensibles, de la logique ontologique d'Aristote à l'intuition plotinienne la pensée grecque n'a cessé de croire saisir ou contempler des réalités toutes faites, faute de découvrir qu'elle opérait sur elles. Seuls les sceptiques et les sophistes ont prêté au sujet une activité effective dans le processus cognitif, mais en se bornant à mettre au compte des constructions de la pensée la relativité déformante ou l'erreur, et non pas la cohérence nécessaire ou l'objectivité.

On comprend alors la vraie raison psychologique de ce caractère statique du raisonnement mathématique grec, et cela chez ses créateurs eux-mêmes, dont le dynamisme intellectuel contraste de façon si surprenante avec l'immobilité de la vision des choses à laquelle ils aboutissaient. La « logistique » ou l'algèbre ne font pas partie, pour eux, de la science proprement dite, parce que inhérentes aux démarches mentales du sujet, tandis que la connaissance arithmétique et géométrique porte sur des objets idéaux détachés du processus constructif de la pensée. La construction géométrique se réduit à celle des cercles et des droites, parce que ce sont là des objets sentis comme indépendants de cette construction même, à la manière dont les chefs-d'œuvre de l'architecte entrent dans le règne de la beauté éternelle une fois libérés de la règle et du compas qui ont permis d'en élaborer le plan. Au contraire, les courbes mécaniques n'ont pas le droit de cité parce que demeurant relatives à cette élaboration active. Les séries

infinies de Zénon n'acquièrent pas de signification positive, parce que le dynamisme opératoire qu'elles manifestent ne suffit point à garantir leur objectivité, faute d'une prise de conscience suffisante de sa généralité, et le continu apparaît comme une propriété de l'objet étrangère à ce dynamisme même. L'incommensurable est d'abord regardé comme illégitime parce que relatif à l'opération qui l'a engendré, après quoi il devient légitime lorsqu'il en est détaché. Le mouvement n'appartient pas au monde des rapports mathématiques, parce que inhérent à l'action du sujet ; les relations projectives demeurent elles aussi étrangères aux êtres géométriques, parce que relatives aux points de vue que l'on a sur l'objet et non pas à l'objet comme tel. Bref, dans la mesure où sont aperçus certains aspects opératoires de la construction intellectuelle, ce qui est senti comme opératoire est dissocié de l'objet et dévalorisé, tandis que dans la mesure où cette prise de conscience demeure incomplète, le résultat des opérations est dissocié du sujet et projeté en un objet conçu comme subsistant en lui-même.

C'est ce dualisme, inhérent à une prise de conscience insuffisante du caractère opératoire propre à la pensée formelle elle-même, qui explique donc à la fois le réalisme statique de la mathématique grecque à son apogée, et les raisons de son déclin final.

§ 2. LA PRISE DE CONSCIENCE HISTORIQUE DES OPERATIONS. B) LES MATHÉMATIQUES MODERNES. — Dans son beau livre sur l'*Idéal scientifique des mathématiciens*, P. Boutroux distingue, après la « période contemplative » propre aux mathématiques grecques, deux grandes périodes dans l'histoire des mathématiques modernes : l'une serait caractérisée par le triomphe des synthèses opératoires, tandis que la dernière marquerait une sorte de retour à l'objet, sous la forme de ce que l'auteur appelle de façon très suggestive une « objectivité intrinsèque ». En ce qui concerne la « période synthétiste », caractérisée par la constitution de l'algèbre comme science théorique, par celle de la géométrie analytique et par celle du calcul infinitésimal, nous ne saurions qu'être d'accord avec P. Boutroux : l'idéal de vérité mathématique propre à cette période consisterait, en effet, selon lui, en une construction opératoire indéfinie et autonome, ce qui nous permettra de parler d'une prise de conscience historique des opérations par opposition aux lacunes de la prise de conscience caractérisant l'attitude contemplative des Grecs. Par contre, la manière dont l'éminent historien de la pensée mathématique conçoit la dernière des trois périodes ainsi distinguées nous paraît

appeler quelques réserves. Cette période, déjà différenciée au cours du XIX^e^ siècle et dans laquelle l'époque contemporaine se trouverait encore à plein, est caractérisée par le sens de la complication croissante des chemins possibles, et par la nécessité d'un choix et d'une exploration proprement dite. Mais le problème est de savoir si cette consistance ou même cette résistance croissantes de la réalité mathématique à la synthèse opératoire simple impliquent l'intervention d'une sorte de domaine transopératoire, pour ainsi parler, ou si la complexité croissante des êtres découverts par le mathématicien ne traduit pas sans plus l'indéfinie variété des opérations possibles. Or, la question ne se pose pas qu'en termes théoriques : elle comporte un aspect historico-critique, et par conséquent génétique, dont l'évidence apparaît à la manière même dont on enchaîne cette « période analytique », comme l'appelle P. Boutroux, à la « période synthétiste ». Faut-il considérer, avec cet auteur, l'avènement de la théorie des groupes ainsi que le mouvement logistique ou « algébrico-logique » comme des effets, directs ou indirects, de l'idéal « synthétiste », ou au contraire comme des expressions révélatrices de l' « objectivité intrinsèque » caractéristique de la troisième période ? C'est ce qu'il s'agit d'examiner, car, selon que l'on détermine la filiation des idées de l'une de ces manières ou de l'autre, cette « objectivité intrinsèque » peut apparaître soit comme un retour au réalisme, soit comme le terme ultime du vaste développement historique qui mène de l'inconscience relative des opérations à leur découverte et finalement à leur coordination en totalités résistantes, s'imposant à l'esprit avec la même force d'objectivité qu'une réalité toute faite et tout organisée.

L'algèbre, héritée de l'Orient et exclue de la science par les Grecs, a été pour ainsi dire réincorporée en elle dès le XVI^e^ siècle et surtout au XVII^e^, lorsque Descartes lui assigne enfin la situation théorique à laquelle elle a droit. Or, la technique algébrique ne saurait assurément être conçue comme une discipline mathématique — par opposition à un ensemble de simples procédés de calcul — qu'à la condition d'accorder aux opérations comme telles une valeur de connaissance proprement dite. Dans l'arithmétique des Anciens, le nombre est une réalité existant en elle-même, indépendamment des opérations qui assurent sa formation, et les opérations d'addition, de duplication et de dimidiation, etc., sont considérées comme l'expression des relations données éternellement entre eux. Ces relations permettent au mathématicien de les retrouver et correspondent donc à un procédé subjectif de construction analogue aux procédés qui interviennent dans celle des figures géométriques. Mais l'opération n'est, ni dans un cas ni dans l'autre, reconnue comme constructive, au sens fort du mot : elle est construction sans création,

en tant qu'activité du sujet, et création sans construction, en tant que relation entre les objets. L'algèbre remplace au contraire le nombre par une quantité abstraite, correspondant à des nombres quelconques, et tout l'accent est mis ainsi sur les transformations mêmes de ces quantités, c'est-à-dire sur les opérations comme telles. L'emploi des méthodes algébriques implique donc bien la prise de conscience des opérations ; celles-ci ne sont alors plus conçues comme étant, soit des relations entre objets, mais indépendantes de la pensée, soit une activité de la pensée, mais atteignant simplement et ne transformant pas son objet : l'opération algébrique constitue les deux à la fois, parce qu'elle est une relation objective, mais entre objets relatifs à leur construction même. On sait assez comment la philosophie réflexive de Descartes consacre cette prise de conscience de l'activité du sujet.

Mais il y a plus. La découverte de la géométrie analytique étend ce mécanisme opératoire à l'espace lui-même, en mettant en évidence le parallélisme absolu de la quantité algébrique et de la longueur rectiligne. Cette idée avait été entrevue par les Grecs, mais sans être exploitée de façon systématique faute précisément d'une mise en valeur des opérations comme telles : Descartes, au contraire, conçoit l'algèbre comme précédant la géométrie, et la géométrie analytique comme une application de l'algèbre à la géométrie. La construction géométrique elle-même, grâce au système des coordonnées cartésiennes, devient ainsi opératoire, ce qui lève du coup l'ensemble des restrictions que la science grecque imposait à la construction des figures et à la délimitation des notions ayant droit de cité en mathématique. Le mouvement, en particulier, défini comme le fait « que les corps passent d'un lieu en un autre et occupent successivement tous les espaces qui sont entre eux » [1] devient, non seulement une notion géométrique essentielle, mais l'une des deux notions fondamentales de cette mathématique universelle à laquelle Descartes rêve de réduire la science tout entière.

Si Descartes continue à admettre, avec les Grecs, le caractère intuitif des vérités mathématiques, cette intuition n'est donc plus une contemplation : il s'agit au contraire de désarticuler les totalités fournies par l'intuition, en les réduisant à des éléments simples que l'algèbre se charge de recomposer opératoirement. « Dès lors la science, dit P. Boutroux, au lieu d'être comme le croyaient les anciens, une contemplation d'objets idéaux, se présentera comme une construction de l'esprit » (p. 109).

Quant à la géométrie des indivisibles de Cavalieri, défendue par Pascal, et au calcul infinitésimal de Leibniz et de Newton, P. Boutroux est certainement fondé, en un sens, à en interpréter la constitution, d'ailleurs avec Newton lui-même, Euler et Lagrange, comme une algèbre de l'infini prolongeant celle du fini. D'où l'intérêt de ce texte de Lagrange : « Les fonctions représentent les diverses *opérations* qu'il faut faire sur les quantités connues pour obtenir les valeurs de celles que l'on cherche, et elles ne sont proprement que le dernier résultat de ce

1. Edition ADAM-TANNERY, XI, p. 39.

calcul » (cité par P. Boutroux, p. 129). Mais il faut ajouter que, en répétant une infinité de fois les combinaisons du calcul algébrique, ce prolongement de l'algèbre en théorie des séries infinies et en analyse infinitésimale a ajouté à la prise de conscience des opérations une signification renouvelée : celle du dynamisme intellectuel qui atteint l'infini et la continuité ; « la réalité ultime, chez Leibniz, c'est la raison conçue comme le progrès illimité d'un développement ordonné ; et, avec cette conception, l'intellectualisme achève de prendre conscience de lui-même » (L. Brunschvicg, *Etapes*, p. 209).

Or, si le renversement des perspectives est ainsi complet, entre une mathématique réaliste et statique, aboutissant à la contemplation par défaut de prise de conscience des opérations, et une mathématique opératoire, dont le dynamisme se prolonge même en ce rêve d'une combinatoire universelle dans laquelle Leibniz espérait généraliser les découvertes de son génie, comment expliquer que l'évolution ultérieure des mathématiques n'ait pas suivi cette direction simple marquée par le déroulement des opérations finies et infinies formulées au XVII^e^ siècle ? Tel est l'intéressant problème soulevé par P. Boutroux et dont nous aimerions brièvement discuter la solution qu'il en a donnée.

A l'idéal qu'il appelle « synthétiste », selon lequel les mathématiques seraient donc l'expression d'une construction opératoire de nature « algébrico-logique », P. Boutroux rattache successivement le développement des nombres complexes, comme résultant de la combinaison formelle des opérations algébriques, la découverte des groupes de substitutions, celle des géométries non euclidiennes, le mouvement axiomatique contemporain, et enfin le mouvement logistique lui-même. Seulement l'aboutissement historique de ces divers courants ne lui apparaît pas comme un épanouissement, mais bien comme un déclin : « Pour donner aux théories mathématiques une structure solide, nous avons décidé de lui donner la forme de systèmes logiques ; mais, constatant que ces systèmes sont artificiels et peuvent d'ailleurs être diversifiés à l'infini, nous comprenons qu'ils ne constituent ni toute la Mathématique, ni le principal de cette science. Derrière la forme logique, il y a autre chose. La pensée mathématique ne se borne pas à déduire et à construire » (p. 170).

Ce serait la découverte de cette autre chose qui marquerait, selon P. Boutroux, la troisième des grandes périodes de l'histoire des mathématiques, caractérisée par un « idéal » dont les signes annonciateurs se font percevoir dès les débuts du XIX^e^ siècle et dont les manifestations typiques sont actuelles. Or, la qualité « transopératoire », si l'on peut dire, que P. Boutroux semble accorder à ce troisième idéal nous paraît

au contraire la manifestation la plus décisive, précisément, de la réalité des opérations.

Le développement de la théorie des fonctions, nous dit P. Boutroux, a abouti à une complexité qui défie l'analyse algébrique (p. ex. lorsque intervient une infinité de séries convergentes) et qui ne permet la construction, « si l'on peut dire, qu'en puissance » (p. 175). Comparée à celle des époques antérieures, la mathématique de notre temps a perdu sa belle simplicité pour s'engager dans l'imprévu des détours et des changements de frontières. Déjà Abel a démontré l'impossibilité d'exprimer les racines de l'équation du 5e degré en fonction algébrique des coefficients, d'où la théorie des équations donnée par Galois et par Abel lui-même, qui « rebondissait dans une direction nouvelle et prenait une importance plus grande que jamais » (p. 186). De même, dans le domaine des équations différentielles, les méthodes se multiplient et se diversifient de la façon la moins prévisible : « On va chercher dans une partie des mathématiques fort éloignée des équations différentielles un nouvel instrument de calcul : la fonction *automorphe*, *fuchsienne* ou *kleinienne* », dont l'existence fut démontrée par Poincaré en 1881, etc. (p. 188-189). D'où l'idée que se faisait Galois du travail des analystes : « ils ne déduisent pas, ils combinent, ils comparent ; quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de côté et d'autre qu'ils y sont tombés » (p. 191). La vérité est donc que l'analyste moderne a plus de peine à choisir qu'à construire (p. 192) : la réalité mathématique résiste à ses efforts et ne peut plus être regardée, selon P. Boutroux, « comme le résultat pur et simple de ses constructions » (p. 193).

D'où la conclusion : pour expliquer « cette résistance opposée par la matière mathématique à la volonté du savant, nous sommes obligés de supposer l'existence de *faits mathématiques*, indépendants de la construction scientifique, nous somme forcés d'attribuer une objectivité véritable aux notions mathématiques : objectivité que nous appellerons intrinsèque pour indiquer qu'elle ne se confond pas avec l'objectivité relative à la connaissance expérimentale » (p. 203).

Cette remarquable analyse, dont les conclusions convergent certainement avec les convictions de la plupart des mathématiciens, lorsqu'ils ne sont pas tentés de réduire leur science à un simple langage ou même à une « syntaxe », nous paraît cependant soulever un problème épistémologique essentiel : la « résistance » que rencontre la « volonté du savant », dans le maniement et le choix de ses opérations, se rencontre-t-elle au-delà de ces opérations, comme semble le croire P. Boutroux, ou à l'intérieur même du champ opératoire ? Nous avons parlé d'une prise de conscience des opérations pour caractériser la constitution de l'algèbre, de la géométrie analytique et de l'analyse elle-même sous ses formes de début. Mais cette prise de conscience s'effectue par étapes, en procédant de la surface au centre : c'est tout

d'abord le résultat de l'activité de l'esprit, qui est aperçu le premier, indépendamment de cette dernière, dont il est alors détaché (cf. la contemplation hellénique) ; puis ce sont les manifestations les plus simples et les plus directes de cette activité qui sont aperçues dans ce qu'elles ont de mobile et de libre : telles sont les opérations élémentaires constitutives de l'algèbre et des séries infinies qui la prolongent. Que de telles opérations soient senties comme soumises à la « volonté » propre, c'est qu'elles demeurent encore proches de la frontière du champ opératoire, au lieu de pénétrer à son intérieur : preuve en soit qu'elles n'ont pas été d'emblée conçues comme constituant des ensembles fermés et articulés sous la forme de « groupes ». Mais, à cette seconde étape, il est normal qu'il en succède une troisième : celle de la prise de conscience des systèmes d'ensemble eux-mêmes que constituent les opérations, c'est-à-dire des connexions nécessaires entre les transformations opératoires, par opposition au maniement de certaines opérations isolées, qui semblent alors soumises à la simple « volonté du savant », C'est cette troisième phase de la prise de conscience historique des opérations, qui nous paraît caractériser la troisième des périodes distinguées par P. Boutroux, si l'on serre d'un peu plus près les critères invoqués par cet auteur.

Pour caractériser les débuts de sa troisième période, P. Boutroux invoque, en effet, la révolution opérée par Galois dans la solution des équations dépassant le 4^{e} degré : mais cette solution est précisément fondée sur la théorie des groupes ; il en est également ainsi de la fonction automorphe, citée par l'auteur. Or, que dans la théorie des groupes l'esprit ne construise plus « à volonté », mais explore, selon la description de Galois, et se trouve en présence d'une « objectivité intrinsèque », selon la très heureuse formule de P. Boutroux, c'est ce que tous les spécialistes de ce domaine difficile s'accordent à affirmer. Il suffit, à cet égard, de relire les belles pages que G. Juvet consacre à l'harmonie intérieure des groupes, notion qui lui paraissait servir de substructure à l'ensemble des êtres mathématiques : « Le roc que l'esprit a trouvé pour fonder ses conceptions, c'est encore le groupe, qui semble donc bien être l'archétype même des êtres mathématiques » [1].

Mais alors, pourquoi situer la construction de la théorie des groupes dans la période « synthétiste », c'est-à-dire la deuxième, et non pas précisément la troisième, puisque la méthode de

1. G. JUVET, *La structure des nouvelles théories physiques*, 1933, p. 60.

résolution des équations supérieures au 4 e degré est donnée comme le premier exemple de l'apparition de cette troisième période ? C'est ici que l'on croit deviner un certain parti pris réaliste chez P. Boutroux : ne pouvant nier la nature opératoire des groupes de substitution, il en situe la découverte dans sa seconde période, quitte à couper artificiellement cette conquête de celle de la résolution de l'équation du 5e degré, c'est-à-dire d'un « fait mathématique » dont l'objectivité intrinsèque appartient à la troisième période. Tout semble indiquer, au contraire, que c'est justement la découverte de l'existence des groupes de transformations, qui inaugure le règne de l' « objectivité intrinsèque ». Il en est de même de la construction des géométries non euclidiennes, dont l'objectivité intrinsèque repose elle aussi sur des groupes bien définis. Quant aux axiomatiques, qui sont des recherches techniques particulièrement poussées dans la direction de cette même objectivité, G. Juvet également supposait, dans un très remarquable article posthume, que leur non-contradiction est conditionnée par leur subordination à des « groupes » : « Il n'y a pas de théorie déductive qui ne soit la représentation d'un certain groupe » [1]. Il n'est pas jusqu'à la logistique dont on ne puisse contester que certaines écoles (p. ex. polonaise) ont cru à son objectivité intrinsèque. Or, si les formes les plus simples et les plus purement qualitatives (au sens d'intensif) des opérations logistiques constituent déjà, comme nous avons essayé de le montrer (chap. I, § 3 et 6), des systèmes d'ensemble bien définis caractérisés par leur composition réversible, on retrouve ainsi, même sur le terrain des opérations logiques, ce qui nous paraît être le mécanisme commun des constructions de la troisième période : la coordination opératoire sous forme de systèmes d'ensemble dont la cohérence résiste à la « volonté du savant ». Nous avons, en particulier, retrouvé au sein même de la logique des propositions le « groupe » bien connu des « quatre transformations » [2].

Bref, de ce qu'après avoir cru pouvoir construire librement l'ensemble des mathématiques au moyen de quelques opérations maniées à volonté l'esprit ait découvert l'existence de totalités opératoires obéissant à leurs lois propres et caractérisées par une certaine objectivité intrinsèque, il y a là un fait d'une importance décisive pour l'épistémologie. P. Boutroux se défend de préciser en quoi consiste cette objectivité par rapport à l'activité

l. *Actes du Congrès intern. de phil. scient.*, Paris, 1936, VI, p. 31.

2. Voir notre *Traité de logique*, § 31, théor. VI.

de l'esprit. Il est dans la logique même de la notion d'opération de conduire à une telle objectivité parce que les opérations sont nécessairement solidaires les unes des autres en des totalités dont l'esprit ne saurait prendre conscience directement, mais laborieusement, par tâtonnements successifs et en procédant de l'extérieur à l'intérieur, c'est-à-dire des résultats à leurs sources, selon la loi de toute prise de conscience.

Mais dire que ces totalités constituent la structure même de l'esprit n'avancerait guère les choses, car rien ne prouve que l'activité du sujet soit achevée, ou, pour mieux dire, qu'elle consiste simplement à puiser sans fin en une source inépuisable déjà contenue en lui. La prise de conscience, et c'est par là qu'il faut conclure, constitue au contraire en elle-même une construction : on ne prend conscience d'un mécanisme intérieur qu'en le reconstruisant sous une forme nouvelle, qui le développe en l'explicitant, et tout processus réflexif se trouve ainsi, par le fait même, doublé d'un processus constructif, qui prolonge, en le reconstituant, le mécanisme interne dont il y a prise de conscience. Or, cette reconstitution, non seulement est analogue à l'activité au moyen de laquelle nous interprétons une expérience extérieure, mais encore n'est possible qu'à l'occasion d'un rapport entre l'activité du sujet et les objets eux-mêmes.

C'est pourquoi le problème de l'objectivité intrinsèque des schèmes mathématiques est si difficile à résoudre. De le centrer sur la coordination opératoire est une première étape qui permet d'éviter à la fois la réduction empiriste de ce type d'objectivité à l'objet comme tel, et sa réduction aprioriste à des structures transcendentales toutes faites. Mais il reste à montrer comment les totalités opératoires, dont la richesse cohérente suffit à expliquer les résistances qui caractérisent cette objectivité intrinsèque, se constituent sans préexister, sous une forme achevée, à leur élaboration réflexive, et se construisent sans que cette construction soit pour autant arbitraire (c'est-à-dire relevant de la volonté individuelle du savant) ni déterminée du dehors par une voie expérimentale.

L'analyse de la notion d'opération, c'est-à-dire du mode de nécessité inhérente aux totalités opératoires, est donc au cœur du problème. C'est à l'étude du raisonnement mathématique que nous allons dès lors recourir, pour continuer cette discussion, puisque la rigueur et la fécondité réunies de ce mode de raisonnement enveloppent toutes les relations qu'il s'agirait de dégager entre le sujet et les objets.

§ 3. LE RAISONNEMENT MATHEMATIQUE. A) DE POINCARÉ À GOBLOT. — Rigueur et fécondité, tels sont, en effet, les deux aspects indissociables du raisonnement mathématique que tous les auteurs se sont efforcés de concilier. Mais à vouloir les harmoniser en droit sans se borner à constater leur mutuelle dépendance, le danger est, ou de sacrifier la fécondité à la rigueur, en accentuant la part des prestations du sujet, ou de subordonner la rigueur à la fécondité en recourant à une participation excessive de l'objet. C'est assez dire que le problème du raisonnement mathématique réunit en lui toutes les questions relatives à la nature des opérations logiques ou mathématiques, en tant que les opérations impliquent un sujet qui agit et des objets sur lesquels elles portent. On peut d'ailleurs analyser le raisonnement mathématique à deux points de vue principaux : ses ressemblances ou différences à l'égard du raisonnement logique non mathématique (Poincaré, Goblot et les logisticiens ont surtout envisagé ce premier aspect), ou le dosage qui intervient à son égard entre les apports respectifs de l'esprit et du réel (E. Meyerson discute surtout cette question). Bien qu'ayant étudié précédemment le premier de ces deux problèmes [1], nous y reviendrons ici dans le mesure où sa solution conditionne celle du second.

1. *La solution de H. Poincaré*. — Dès 1894, Poincaré opposait dans les termes suivants la structure du raisonnement mathématique à celle des raisonnements non mathématiques. Ces derniers sont de deux sortes : le syllogisme, qui est rigoureux mais stérile, ne découvrant en ses conclusions que ce qui était inclus dans ses prémisses, et l'induction expérimentale, qui est féconde parce que aboutissant à la découverte de conclusions nouvelles, mais non rigoureuse parce que incomplète. Le raisonnement mathématique est au contraire à la fois rigoureux et fécond : les conclusions qu'il obtient sont toujours nouvelles et plus riches que les prémisses, et cependant elles sont certaines et non pas simplement probables. La raison en est qu'il procède par récurrence, selon le principe d'induction complète dû à Maurolico : si une propriété est vraie de $n = 0$ (ou $n = 1$) et si l'on établit que sa vérité pour n entraîne sa vérité pour $n + 1$ alors elle est vraie de tous les nombres entiers. À quoi Russel et Goblot se sont trouvés d'accord pour objecter que le raisonnement par récurrence repose lui-même sur des notions plus simples. Selon le premier elle résulte directement de la définition des nombres inductifs ou

1. Voir notre *Traité de logique*, chap. VIII.

entiers : l'hérédité qui assure le transfert des propriétés d'un nombre à l'autre traduit ainsi la génération même de ces nombres. Goblot, d'autre part, objecte que le raisonnement par récurrence suppose une démonstration préalable (celle du transfert de la vérité de la propriété pour n à sa vérité pour $n + 1$) et que cette démonstration est une construction. Mais Poincaré considérait comme évidente cette intervention de la construction ; il la reconnaissait même comme nécessaire, mais non pas comme suffisante, car il s'agit en plus de relier ensuite les constructions successives par une formalisation en quoi consiste précisément le raisonnement par récurrence. Comme le disent fort justement Daval et Guilbaud, il « considère la récurrence comme une sorte de raisonnement sur le raisonnement, ou de raisonnement au second degré » [1] (ce qui rentre dans la formule que nous donnions chap. II, § 9, de la pensée formelle : un système d'opérations portant sur des opérations). Le raisonnement par récurrence est donc une construction opératoire liée à la construction même des nombres, puis réfléchie sous la forme d'opérations formelles permettant de condenser ces constructions en un seul tout sans être obligé de les refaire successivement pour chaque cas nouveau. La fécondité du raisonnement mathématique tiendrait ainsi, en dernière analyse, à l'intuition du nombre pur, en tant qu'irréductible à la classe logique et par conséquent en tant qu'irréductible au syllogisme, et sa rigueur proviendrait du fait que les opérations constructives, initiales ou formalisées, sont enchaînées, non pas par une suite finie de syllogismes, mais par une infinité de syllogismes (ce qui, remarquent Daval et Guilbaud à l'intention de Goblot, n'est pas la même chose), c'est-à-dire à nouveau par l'intuition d'un pouvoir de répétition dépassant le syllogisme et se ramenant à celle du nombre pur.

La valeur de la solution de Poincaré est donc suspendue à celle de l'hypothèse d'une intuition du nombre pur. Or, cette hypothèse soulève deux questions, correspondant précisément aux deux questions distinctes que recouvre le problème du raisonnement mathématique : celle de l'irréductibilité du nombre à la logique, et celle de la nature de l'acte au moyen duquel nous saisissons le nombre pur, c'est-à-dire un nombre quelconque en tant que produit de l'itération illimitée dont notre esprit détient le pouvoir.

Sur le premier point, nous avons déjà pris position (chap. 1,

1. R. DAVAL et G. T. GUILBAUD, *Le raisonnement mathématique*, Paris, P.U.F., 1945, p. 18.

§ 6) : sans être réductible à aucun des éléments logiques particuliers, le nombre constitue cependant leur synthèse, c'est-à-dire qu'il est plus proche d'eux que ne le voulait Poincaré. On peut aussi bien considérer, il est vrai, les classes et les relations asymétriques comme résultant d'une dissociation du nombre en ses composantes, que le nombre entier lui-même comme une synthèse des classes et des relations asymétriques ; mais, dans les deux cas, il n'y a pas une intuition du nombre radicalement distincte de celle des classes ou des relations. Il s'agit donc, pour comprendre en quoi le raisonnement mathématique est plus fécond que le syllogisme, de comparer la structure des nombres ou des êtres mathématiques à celle des classes et des relations logiques : or, la quantification extensive et numérique explique à elle seule cette différence de fécondité par rapport à la quantification intensive des seconds (voir pour ces trois sortes de quantifications le chap, I, § 3) : si dans une suite d'emboîtements les parties peuvent être comparées entre elles, autant qu'avec les totalités successives, les combinaisons sont infiniment plus nombreuses que si l'on considère seulement les rapports de partie à tout. La structure numérique invoquée par la récurrence n'a pas d'autre sens. Mais le principe est valable aussi pour le raisonnement géométrique de caractère extensif, d'où sa fécondité égale.

Quant à l'intuition du nombre pur, en tant que pouvoir de se représenter qu' « une unité peut toujours être ajoutée à une collections d'unités » [1], il est clair que le problème qu'elle soulève est celui du schème opératoire lui-même. Etant donné l'opération initiale + l, élément du groupe additif des nombres entiers, dire que nous avons l'intuition du nombre pur revient à affirmer que la suite des opérations groupées constitue un schème anticipateur et que nous n'avons pas besoin de monnayer le détail des opérations successives pour en saisir la succession possible, non pas comme un tout statique, mais comme un dynamisme fait d'opérations virtuelles. L'hypothèse d'une intuition du nombre pur se ramène en ce sens à cette autre supposition fondamentale de Poincaré que la notion de groupe est donnée *a priori* dans l'esprit et qu'elle constitue donc aussi une intuition rationnelle (des déplacements pour l'espace et de l'addition de l'unité pour le nombre) : c'est ce qui explique le parallélisme entre le raisonnement géométrique et le raisonnement analytique, sans qu'il soit besoin, pour raisonner de façon rigoureuse et féconde

l. H. POINCARÉ, *La valeur de la science*, p. 22.

sur les figures, d'avoir à évoquer l'infinité des nombres. Mais pourquoi parler d'intuition ou d'*a priori* ? D'une part, il y a construction génétique du groupe des nombres comme de celui des déplacements, et, d'autre part, c'est l'acte même de l'intelligence, en son noyau opératoire le plus essentiel, qui est alors qualifié d'intuitif, par opposition au déroulement détaillé des opérations particulières. Nous sommes donc, sur ce point, au cœur même de la question de la nature des objets mathématiques, et appeler intuition cette prise de possession de leur objectivité intrinsèque a plutôt pour effet de voiler la difficulté que de nous en livrer le secret.

2. *La solution de E. Goblot.* — L'interprétation du raisonnement mathématique fournie par Poincaré a trouvé deux sortes de contradicteurs : les logisticiens et Edm. Goblot. L'analyse des premiers, plus profonde que celle du second, exige un examen attentif, que nous ferons plus loin (§ 5). Elle aboutit, en effet, à sacrifier délibérément la fécondité à la rigueur, au point qu'il est aujourd'hui passé de mode et qu'il semble même, à certains, dénué de signification que de soulever encore le problème de la productivité du raisonnement. Mais à supposer que la question ne se pose vraiment plus en ce qui concerne la structure formelle de la déduction, elle réapparaît sitôt que l'on cherche à déterminer les rapports entre cette structure et la réalité. D'autre part, il suffit de chercher à exprimer une telle structure en termes d'opérations, même purement propositionnelles, pour que s'impose à nouveau la différence entre les inférences mathématiques spécifiques et la déduction bivalente en général. C'est pourquoi il importe de rappeler aussi la solution de Goblot, dont les lacunes mêmes sont instructives en ce qui concerne les exigences d'une solution opératoire complète : si les logisticiens de l'école de Vienne ont en effet éliminé la fécondité au profit de la rigueur, l'effort de Goblot a porté essentiellement sur l'explication de la fécondité et l'on peut se demander s'il ne lui a pas sacrifié la rigueur.

Déduire, c'est construire, redécouvre E. Goblot (un matin de février 1906, précise-t-il même, tant cette illumination lui paraît décisive). Mais construire, c'est : 1° effectuer des opérations concrètes, telles que des constructions graphiques, etc., qui selon Goblot constituent l'essentiel du raisonnement lui-même ; 2° combiner des propositions, en tant qu'elles traduisent ces opérations concrètes. Comment expliquer alors que la construction soit rigoureuse et non pas simplement approchée, comme

celles des sciences expérimentales ? C'est que cette construction est réglée grâce aux propositions antérieurement admises, qu'applique le syllogisme, tandis que, dans l'induction, les propositions antérieures laissent une marge plus ou moins grande d'indétermination nécessitant le recours au contrôle empirique. Les règles de la construction ne sont pas celles de la logique, sans quoi les conclusions seraient à concevoir comme comprises d'avance dans les propositions antérieures ; les règles se réduisent à ces propositions elles-mêmes, dans leur contenu et en tant que ce contenu impose certaines conditions restrictives à des constructions par ailleurs nouvelles.

Deux auteurs de talent, Daval et Guilbaud, ont récemment montré [1] que la notion de construction propre à Goblot demeure insuffisamment élaborée, et que, une fois analysée, elle n'ajoute rien de nouveau à la solution de Poincaré, mal comprise par son continuateur. Dans la théorie de Poincaré, en effet, il intervient également une construction opératoire initiale, Source de raisonnement de départ, puis une sorte de raisonnement au second degré, qui généralise cette construction en la réfléchissant. Mais, tandis que ce raisonnement au second degré est constitué, chez Poincaré, par le mécanisme de la récurrence, l'originalité de la conception de Goblot est de chercher à tirer des opérations primaires elles-mêmes, l'explication de la rigueur spéciale à la déduction : le raisonnement déductif reviendrait simplement à soumettre ces opérations à un ensemble de règles constituées par les « propositions antérieurement admises ». Cette détermination est-elle suffisante ?

Nous ne ferons pas grief à Goblot d'avoir appelé indifféremment « construction » les opérations concrètes, effectuées matériellement ou mentalement, et les propositions traduisant ces actions. Ce sont là, nous l'avons assez vu au cours du chap. II, deux paliers successifs de la pensée mathématique aussi essentiels l'un que l'autre [2] et il existe une logique des opérations concrètes comme une logique propositionnelle. En affirmant que la fécondité du raisonnement mathématique tient à la construction des rapports initiaux, et non pas à l'agencement des propositions qui les expriment, Goblot se rencontre même, en un sens, avec certaines thèses logistiques récentes, selon lesquelles l'arith-

l. DAVAL et GUILBAUD, *Le raisonnement mathématique*, Paris, P.U.F., 1945, chap. III.

2. « En mathématique, et en mathématique seulement, on peut dire que la réflexion de la pensée sur elle-même est une opération mathématique », disent à cet égard DAVAL et GUILBAUD (p. 73), assertion que nous accepterons à la condition d'y adjoindre la logistique.

métique et le raisonnement par récurrence demeurent irréductibles au calcul des propositions et font, de ce point de vue, intervenir un mécanisme extra-logique d'inférence. Tant l'induction complète de Poincaré que les « constructions » concrètes de Goblot relèveraient ainsi de la logique des classes, des relations et des nombres, et non pas de celle de la déduction pure. En d'autres termes, il serait légitime d'admettre avec Goblot que les constructions sont réglées par le contenu même des « propositions antérieurement admises » et non pas par les lois de la logique en tant que structure formelle de la déduction propositionnelle.

Mais il demeure un problème essentiel, et c'est sur ce point que subsiste, nous semble-t-il, une lacune surprenante dans la théorie de Goblot. Si concrètes qu'elles soient, les opérations inhérentes à la « construction » des rapports de départ supposent elles-mêmes une logique : non pas celle des propositions comme telles, mais précisément celle du contenu des propositions, si l'on peut dire, puisque ce contenu se réduit toujours à un système de classes, de relations ou de nombres. Qu'elles soient matérielles ou mentales, les opérations concrètes sont, en effet, réglées, non pas du dehors et par des « propositions antérieurement admises » quelconques, mais du dedans et par une logique opératoire se réduisant à des groupements de classes et de relations ou à des groupes spatiaux et numériques. C'est ce réglage interne des opérations qui manque à la solution de Goblot alors que, dans celle de Poincaré, il est assuré par le mécanisme même de la récurrence, c'est-à-dire, en fait, par le groupe des opérations itérées d'addition de l'unité qui constituent la suite des nombres.

Si des propositions antérieures quelconques constituaient le seul réglage des constructions nouvelles, on se trouverait, en effet, devant l'alternative suivante : ou bien les conclusions obtenues se trouvent déjà comprises dans les propositions antérieures et alors il y a réglage complet, mais ces conclusions ne sont pas nouvelles et la déduction n'est pas constructive ; ou bien les conclusions sont nouvelles, c'est-à-dire non contenues dans les propositions antérieures, mais alors celles-ci ne règlent qu'incomplètement la construction. Plus précisément, les propositions antérieures ne sauraient régler la construction que dans la mesure où les résultats ne sont pas nouveaux ; par contre dans la mesure où la construction est nouvelle, ces propositions constitueront tout au plus des barrières extérieures, qu'il est interdit de franchir, mais à l'intérieur desquelles la construction demeure contingente et échappe à tout réglage. C'est du moins

ainsi que les choses se passeraient s'il s'agissait de propositions quelconques, c'est-à-dire non choisies expressément en vue de l'ajustement réciproque des opérations.

Or, en fait, les premières « propositions admises », c'est-à-dire les définitions et les axiomes, constituent précisément un système de règles opératoires qui déterminent la manière dont les opérations vont se combiner entre elles. C'est ainsi que les axiomes de Peano concernant le nombre entier (voir chap. I, § 7) introduisent les notions de successeur ou de « suivant », de zéro et de l'égalité de deux nombres, de manière à pouvoir engendrer la suite caractérisée par l'addition + 1, + 1… : la construction est alors réglée parce que les opérations mêmes sont astreintes à une composition qui ne laisse place à aucun flottement. Le réglage est donc interne et non pas externe ; c'est une loi de composition qui le constitue et non pas un système de propositions antérieures quelconques. Et, s'il en est ainsi, c'est que les propositions de départ ont été choisies justement dans ce but : c'est parce que les opérations + 1, – 1 et 0 forment entre elles un « groupe », et sont ainsi réglées par leur propre transitivité et leur propre réversibilité, que les axiomes mis à la source de la construction sont formulés de manière à retrouver une telle structure et à la régler explicitement et non plus seulement implicitement.

Bref, si, même sur le plan des opérations concrètes, la « construction » qui engendre le raisonnement est d'emblée réglée, c'est en vertu des lois de composition réversible qui caractérisent les opérations comme telles, et c'est ce réglage interne qui dirige le choix des propositions de départ. A négliger l'existence de cette composition réversible des opérations, la solution de Goblot s'avère insuffisante pour concilier la fécondité et la rigueur, parce qu'elle aboutit alors à confondre les opérations avec des actions matérielles (ou mentalisées) quelconques.

Si nous en revenons maintenant à la logique, nous constatons qu'elle-même ne procède pas autrement, et cela déjà avant qu'intervienne la formalisation propre à la logistique propositionnelle. Déduire par syllogismes, c'est également « construire », aussi bien que lorsque l'on raisonne mathématiquement, et les règles de cette construction sont à nouveau des lois de composition opératoire, et non pas des propositions antérieures quelconques. Tout syllogisme suppose, en effet, un système préalable de classes ou de relations emboîtées et ce système suppose une construction dont les lois sont celles des « groupements ». Dès lors la question posée par Goblot, après Poincaré, de savoir pourquoi le raisonnement mathématique est plus fécond que

le raisonnement logique se retrouve de la manière suivante, mais déplacée sur le terrain du réglage interne : pourquoi les compositions réglées propres aux mathématiques sont-elles plus nombreuses que celles de la logique ? Pourquoi un groupement logique ne conduit-il qu'à quelques compositions restreintes, tandis que les « groupes » algébriques ou géométriques peuvent conduire à un nombre inépuisable de compositions ? La réponse ne peut tenir, on le voit, qu'à la structure même des totalités opératoires assurant simultanément la possibilité et la rigueur des compositions, et non pas à la notion beaucoup trop vague de simple « construction ».

§ 4. LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE. B) L'INTERPRÉTATION D'EMILE MEYERSON. — L'interprétation d'ensemble qu'E. Meyerson a donnée du raisonnement mathématique mérite un examen spécial, d'une part, à cause de la netteté incisive de son analyse, et, d'autre part, en raison de l'insistance avec laquelle il oppose sans cesse l'esprit — défini par l'identification — et le réel, réduit au « divers ». Cette antithèse un peu « rigide », comme il le dit lui-même, présente le grand avantage de constituer une solution simple et claire, à l'égard de laquelle les faits psychogénétiques peuvent répondre par oui ou par non ; et cela d'autant mieux qu'E. Meyerson lui-même situe toujours la discussion sur le terrain de la pensée commune et réelle, du « cheminement de la pensée », ce qui appelle immédiatement la vérification génétique.

Pourquoi le raisonnement mathématique est-il à la fois rigoureux et fécond, se demande à son tour E. Meyerson ? On peut concevoir les mathématiques comme aprioriques, ce qui expliquerait leur rigueur, mais la pensée rationnelle sous sa forme pure et logique ne crée rien puisqu'elle se réduit à l'identité : à elle seule, elle demeure « quiescente ». On peut concevoir aussi les mathématiques comme dues à l'expérience, ce qui expliquerait alors leur fécondité, mais contredirait leur rigueur. Ainsi « la conclusion semble s'imposer que ni l'apriori ni l'aposteriori purs ne peuvent être invoqués en l'espèce, mais qu'il doit s'agir plutôt de quelque chose d'intermédiaire entre l'un et l'autre, ou peut-être d'un mélange, assez malaisément séparable, de l'un et de l'autre » (*C.P.* [1], p. 328).

En effet, « le nombre est un concept abstrait du réel » (*C.P.*, p. 322) et l'égalité mathématique qui intervient dans les équations n'est pas une pure identité, mais une identification, c'est-à-dire une identité seulement partielle (p. 333-335). L'opération numérique 7 + 5 = 12 est une

1. Nous désignerons sous *C.P.* « *Le cheminement de la pensée* », Alcan, 1931.

synthèse, comme le voulait Kant, parce que « du nouveau a été créé » (p. 335) : il faut dire « sept et cinq font douze », l'expression « font » désignant en fait « un véritable acte accompli » (p. 336). De même, « le signe algébrique est le symbole d'une opération, d'un *acte* » (p. 338). Goblot a donc raison, contre Poincaré, de voir dans l'opération l'essentiel du raisonnement (p. 339-341), et si jadis Bradley avait déjà parlé d'opérations de l'esprit, « la conception de M. Goblot, en son vigoureux réalisme, semble bien plus satisfaisante » (p. 341) : elle en appelle, en effet, à des actions réelles, mais imaginées, comme les *Gedanken experimente* de Wundt et de Kroman (p. 343-344) grâce à la mémoire des expériences réelles antérieures (p. 346-347).

Mais, si tel est le rôle du réel dans la construction du nombre (et il est *a fortiori* au moins semblable dans la construction de l'espace : p. 308), l'expérience n'est pas seule en jeu, bien au contraire. Dans l'opération elle-même, quelque active que Meyerson la reconnaisse, « l'esprit n'opère qu'à l'aide de notions abstraites, notions qu'il a créées lui-même ; mais cette opération même, il ne peut l'observer que dans le réel, l'emprunter au réel. Il reste donc que l'opération logique soit la traduction, dans la pensée, d'une opération, d'un acte réel, ayant pour points de départ, pour substrats, non pas des objets réels, mais des concepts, des idées » (*C.P.*, p. 349). Là est la clef de l'énigme, si « paradoxal » que soit ce va-et-vient entre le réel et l'esprit : 1° l'esprit crée donc des notions abstraites, « quoique, bien entendu, à l'aide de matériaux venus du dehors, fournis par la sensation » (p. 370) ; 2° « l'intellect possède cette curieuse aptitude (laquelle conditionne en même temps une propension quasi irrésistible) de projeter en dehors de soi les êtres créés par lui-même… et de muer ainsi en choses réelles les choses de la pensée » (p. 370), d'où la projection du nombre dans le réel, puisque le concept du nombre est, lui aussi, *abstrait* du réel (p. 370) ; 3° par conséquent, en opérant numériquement sur des objets, des cailloux, p. ex., «nous n'avons donc, à bien prendre les choses, opéré que sur ce nombre seul… car les objets réels, les cailloux, ne font manifestement que représenter le concept abstrait, qui est le nombre » (p. 350). Bref, « nous avons créé un genre » (p. 351), le nombre, et l'avons projeté à titre d'objet : nous avons « hypostasié ce concept, replacé l'abstrait dans le réel, feint, si l'on veut, qu'il était réel, afin de pouvoir agir sur lui de manière réelle, observer comment il se comportait dans le réel » (p. 353). Nous ne faisons d'ailleurs pas autre chose dans la perception d'un objet quelconque, d'un fauteuil, p. ex. (p. 357), qui est la projection d'un concept dans la sensation, parce que, « à tous les instants de notre vie, nous ne sommes occupés qu'à rechercher les causes extérieures de nos sensations, c'est-à-dire à *constituer ces sensations en concepts, d'abord, et en objets, ensuite* » (p. 362. C'est nous qui soulignons). « Cette métamorphose instantanée d'un concept en un réel situé en dehors du moi est assurément merveilleuse, paradoxale » (p. 361).

Tous les nombres, de l'entier positif au fractionnaire, au négatif, à l'irrationnel et même à l'imaginaire (p. 370-377), procèdent également

d'opérations étendues indéfiniment à des concepts abstraits, réintroduits dans le réel. Il en est de même des hyperespaces (p. 380), mais les êtres ainsi créés par la collaboration de l'esprit et du réel « ressemblent de moins en moins à ceux que connaît le sens commun » (p. 386).

On comprend alors, en fin de compte, la double nature du raisonnement mathématique : il est fécond parce qu'il repose sur des genres toujours abstraits du réel et sur lesquels des opérations actives sont possibles, mais il est rigoureux parce que, dès l'abstraction initiale jusqu'aux opérations les plus complexes, c'est l'identité qui est en œuvre. La mathématique n'est ainsi qu'une vaste identification procédant au travers d'abstractions, puis d'opérations sur les notions abstraites replacées dans le réel. Plus précisément, la rigueur est due au fait que « nous sommes en mesure d'accomplir un acte sans troubler l'identité entre l'antécédent et le conséquent » (p. 396). C'est ce qui est visible dans les opérations spatiales, comme dans la réunion initiale servant à la constitution du nombre concret, parce que, dans ces deux cas, « l'acte est un *déplacement*, qui n'altère donc pas l'identité des objets déplacés » (p. 396).

Qu'on nous permette, pour examiner maintenant la valeur de ces différentes hypothèses, de commencer par la fin pour n'en venir qu'ensuite à la genèse. Tout se tient si bien, en effet, dans la thèse meyersonienne, que les réserves sérieuses imposées par les faits psychogénétiques en ce qui concerne la formation présumée des schèmes de l'objet, de l'espace et du nombre correspondent à des difficultés que l'on retrouve jusque dans la synthèse de l'identique rationnel et du divers réel attribuée au raisonnement mathématique lui-même. C'est donc de cette conception finale que l'on peut partir pour éclairer tout le reste.

Une telle antithèse entre l'identité logique et la réalité expérimentale met, en effet, à nu, avec une singulière clarté, les raisons de l'alternative à laquelle nous venons de constater (§ 3) qu'aboutit la théorie de Goblot : si l'on n'assure pas le réglage interne des opérations constitutives du raisonnement, c'est seulement dans la mesure où les conclusions nouvelles d'une construction mathématique sont contenues d'avance dans les propositions de départ que les conclusions sont rigoureuses, tandis que dans la mesure où les conclusions sont nouvelles elles échappent à toute rigueur. Or, Meyerson admet bien un réglage interne des opérations, mais il le réduit à l'identification seule. Il en résulte un déplacement du problème à l'intérieur même de la construction opératoire, et un renforcement de la difficulté dans laquelle s'enfermait déjà la thèse de Goblot. D'une part, les opérations sont rigoureuses, et cela dans l'exacte mesure où elles se bornent à « déplacer » de l'identique au cours des transformations successives s'étendant de l'abstraction initiale jusqu'aux plus hauts

sommets de la déduction : mais si la rigueur, c'est-à-dire le réglage des opérations, tient à l'identité seule, ce qui est rigoureux dans le mécanisme opératoire est nécessairement infécond. D'autre part, les opérations créent du neuf, puisque 12 n'est pas contenu dans 7 et 5, puisque le carré de l'hypoténuse n'est pas entièrement « la même chose » que le carré des deux autres côtés et qu'un espace à 34 dimensions n'est pas identique à un espace tridimensionnel. Mais si, grâce à l' « identité partielle », la construction est en partie rigoureuse, ce n'est qu'en partie seulement et dans l'unique mesure où elle ne dépasse pas l'identité pure : dans la mesure, au contraire, où il y a nouveauté, c'est qu'il y a apport du réel, donc du « divers » ou de l' « irrationnel », et alors il n'y a plus rigueur.

Certes, le mécanisme invoqué est bien plus subtil, puisqu'il consiste en une navette perpétuelle entre le réel et l'esprit : celui-ci emprunte à celui-là de quoi construire des êtres idéaux qu'il lui renvoie pour les retrouver en lui, etc. Mais, avant d'examiner le détail de ce jeu délicat, il importe de soulever d'emblée les deux questions essentielles : que les éléments composants de la construction soient « déplacés » dans un sens ou dans l'autre, il s'agit de savoir et d'où ils viennent, et s'ils s'enrichissent en cours de route. Or, si la rigueur est assurée par l'identité seule, ils ne peuvent provenir que d'une source étrangère à cette rigueur — le réel — et ne s'enrichir en chemin qu'aux dépens de cette même rigueur. Si la raison se réduit à l'identification, on n'en sortira donc pas : ou bien le raisonnement mathématique est une suite d'identités pures, et alors il est entièrement rigoureux mais stérile, ou bien il est fécond, c'est-à-dire qu'il est davantage qu'une simple identification et englobe du divers sans se réduire à l'identité pure, mais alors il n'est pas entièrement rigoureux et cesse de l'être dans la mesure précise où il dépasse l'identité seule.

E. Meyerson a bien vu cette difficulté puisqu'il tente de réduire les opérations numériques elles-mêmes aux déplacements qui interviennent dans la réunion ou la dissociation des unités, et que le déplacement est le principe de toute explication rationnelle, parce que n'altérant pas la nature des éléments déplacés (*C.P.*, p. 396). Autrement dit, la construction mathématique emprunterait ses éléments au réel, mais resterait néanmoins rigoureuse parce que ces éléments seraient simplement « déplacés ». Seulement, indépendamment de la question de savoir si toute opération est réductible à un déplacement, il reste que les composantes s'enrichissent au cours du déplacement lui-même et que

le problème de la rigueur se retrouve au cours du va-et-vient entre l'esprit et le réel : si 7 objets rapprochés de 5 engendrent cette nouveauté qu'est le nombre 12, c'est alors dans la mesure seulement où les 12 éléments du nombre 12 sont les mêmes que les 12 éléments dissociés en collections de 7 et de 5, que la construction de ce nombre 12 est rigoureuse ; dans la mesure, au contraire, où le nombre 12 est autre chose que les nombres 7 et 5, c'est-à-dire dans la mesure où le déplacement a ajouté du nouveau à la simple conservation des éléments, ce début de fécondité échappe déjà à la rigueur, puisqu'il dépasse l'identité pure (et effectivement il reste à comprendre pourquoi 12 est divisible par 2, 3, 4 et 6, tandis que le « déplacement » de 7 et 6 unités donnerait le nombre 13, qui est premier).

Pour prendre un exemple moins élémentaire, et par conséquent plus parlant, on sait que les géométries non euclidiennes peuvent être construites avec des matériaux euclidiens : cependant, une fois construites, elles comprennent la géométrie euclidienne à titre de simple cas particulier. Il faudrait donc dire, si la rigueur n'est due qu'à l'identification, que les éléments euclidiens restés identiques au cours de la transformation sont seuls à assurer la rigueur, tandis que les combinaisons nouvelles de ces éléments demeurent contingentes. Or, le paradoxe serait d'autant plus fort que la situation est, en fait, réciproque : chacune des géométries en jeu peut être construite avec les matériaux de l'une des autres, tout en la comprenant à titre de cas particulier (voir plus haut, chap. II, § 10). Le résultat d'une construction n'étant ainsi jamais identique à ses matériaux de départ, il est clair que l'identification ne saurait à elle seule assurer la rigueur, puisqu'elle est sans cesse débordée par la nouveauté.

Plus précisément, si le rationnel se réduit à l'identique et que le divers émane d'un réel, irrationnel en tant même que divers, la rigueur du raisonnement mathématique ne peut être qu'approchée. Meyerson eût admis, d'ailleurs, cette conséquence évidente de son hypothèse centrale : « Le raisonnement ne saurait être entièrement rationnel », dit-il de façon générale (*C.P.*, p. 180, § 169). Mais, s'il en est ainsi, un raisonnement est d'autant moins rigoureux qu'il est plus fécond, et c'est ce rapport inversement proportionnel entre la fécondité et la rigueur qui constitue la difficulté centrale de la thèse meyersonienne. Une deuxième difficulté s'ajoute alors nécessairement à la précédente : si la fécondité des mathématiques tient aux emprunts qu'elles font au réel, cette fécondité devrait être d'autant plus grande que les

notions considérées sont plus proches de l'expérience de départ, et diminuer en raison directe de leur éloignement par rapport à elle. Or, est-ce bien le cas ? L'exemple des généralisations de la géométrie est précisément instructif à cet égard. Admettons que la géométrie euclidienne à trois dimensions soit tirée du réel perçu, par abstractions et généralisations identificatrices. Les « genres » ainsi constitués seraient alors, selon la description de Meyerson, projetés à nouveau dans la réalité dont ils sont abstraits, puis soumis à une trituration opératoire pour voir « comment ils se comportent dans le réel » ; ces combinaisons permettraient enfin de dépasser la réalité elle-même et de construire des schémas de plus en plus abstraits. Mais alors, plus on s'éloigne du réel et plus le schéma formel devrait s'appauvrir, puisque la raison ne crée rien et se borne à transférer certaines des données initiales au cours des opérations « sans troubler l'identité entre l'antécédent et le conséquent » : plus le schéma est « abstrait » et moins il contient donc de données réelles initiales. Or, il se trouve que le schème final est, au contraire, bien plus riche que le schéma initial, puisque celui-ci est ramené au rang de simple cas particulier : c'est donc que l'acte opératoire crée du nouveau en fonction des distances et non pas de sa proximité par rapport au réel, autrement dit, une fois de plus, qu'il est irréductible à une simple abstraction identificatrice.

Nous retrouvons ici le problème que nous connaissons bien par ailleurs [1] : peut-on ramener l'abstraction, au moyen de laquelle nous croyons extraire de la réalité les nombres entiers ou les formes géométriques, etc., à une simple abstraction à partir de l'objet ? C'est en une telle affirmation que consiste, nous semble-t-il, l'erreur courante des épistémologies réalistes, inspirées par la philosophie aristotélicienne des « genres ». Or, indépendamment des faits génétiques sur lesquels nous allons revenir, la question est susceptible de solution directe sur le terrain mathématique, lorsqu'on la pose sous la forme suivante : une notion abstraite est-elle plus pauvre ou plus riche que la réalité correspondante ? La réponse ne semble pas douteuse : si la notion abstraite est plus pauvre en ce sens qu'elle se construit à un point de vue spécial en négligeant les autres (p. ex. en se plaçant au point de vue de la forme et en écartant le poids, la couleur, etc.), elle est, par contre, à ce point de vue spécial *immédiatement* plus riche que la réalité concrète, parce que la soi-disant abstraction consiste à ajouter, et non pas à enlever, quelque chose à l'objet,

1. Voir plus haut, chap. I, § 2 et 12.

tout en choisissant le point de vue auquel elle ajoute. C'est ainsi qu'en comptant quelques boules on leur ajoute un lien qui n'existait pas entre elles, au lieu d'extraire le nombre de leur collection, et qu'en abstrayant une droite de l'arête d'un cristal on relie les molécules discontinues et irrégulièrement disposées le long de cette arête par une ligne idéale qu'elles ne comportaient pas. L'abstraction est donc une articulation ou, si l'on préfère, une structuration accordée au réel, et consistant en *relations nouvelles* qui n'étaient pas encore contenues dans le donné concret. C'est pourquoi les êtres mathématiques « abstraits » sont infiniment plus riches que les êtres mathématisables concrets : ceux-ci sont finis et ceux-là dépassent ce fini de toute la puissance des diverses sortes d'infinis.

E. Meyerson a d'ailleurs fort bien vu la chose et le jeu subtil des concepts « hypostasiés » dans le réel, après avoir été tirés de lui, ne peut avoir d'autre signification que d'expliquer cet enrichissement de la réalité, auquel aboutit finalement la soi-disant « abstraction » à partir de l'objet. Seulement, comme la structuration et les relations nouvelles que l'esprit apporte au réel se réduisent, en définitive, selon cet auteur, à de l'identité pure et simple, mélangée aux données extraites de l'objet, il va de soi que cet apport est nul, du point de vue de la fécondité, et qu'il est seulement valable du point de vue de la rigueur.

Ce que nous venons de voir conduit au contraire à admettre qu'en mathématiques (et en logique, mais à degré notablement inférieur) les opérations sont simultanément sources de nouveauté et de rigueur, sans que cette dernière se réduise à l'identité simple. Autrement dit, l'apport de l'esprit au réel déborde les cadres de l'identification. Les structures essentielles de la pensée logico-arithmétique sont les classes, les relations asymétriques et les nombres. Une classe est caractérisée par la ressemblance entre les individus qui la composent, donc, en compréhension, par leurs qualités communes : c'est ici que joue l'identification, source de l'équivalence qualitative, etc. Il en est de même des relations symétriques, qui expriment la co-appartenance à une même classe. Mais les relations asymétriques, au contraire, expriment la différence ordonnée entre les objets, et c'est grâce à ces différences seules (de grandeur, de position, etc.) que l'on peut les sérier. Dira-t-on que la différence est encore un « genre », c'est-à-dire que l'esprit identifie ce qu'il y a de commun aux diverses différences pour en extraire la notion de différence ? Sans doute, et en cela la différence devient un concept comme un autre, et permet de définir une classe comme une autre : la classe

des différences conçues à titre d'éléments équivalents entre eux (en tant que co-appartenant à la même classe). Mais il y a beaucoup plus : la différence joue, dans les relations asymétriques et les opérations de sériation qualitative, le même rôle formel que la ressemblance dans les classes, ou les relations symétriques, et dans leurs emboîtements. Les « groupements » additifs et multiplicatifs de relations asymétriques sont même exactement isomorphes aux « groupements » correspondants de classes, à cette seule nuance près que l'addition n'y est pas commutative, précisément parce qu'elle réunit des différences ordonnées et non pas des ressemblances. Dira-t-on alors que la ressemblance exprime l'activité identificatrice de l'esprit, tandis que les différences proviennent du réel, comme cela résulterait de l'antithèse meyersonienne ? Mais il est tout aussi essentiel au fonctionnement de l'esprit de différencier que d'identifier, et ces deux activités n'ont même de signification qu'appuyées l'une sur l'autre. Qu'elles supposent toutes deux un réel à la fois unifiable et diversifiable auquel elles s'appliquent, cela est clair, mais elles sont l'une et l'autre inhérentes au sujet et s'exercent parallèlement en donnant lieu à deux sortes de structures formelles se correspondant terme à terme.

Quant au nombre entier, il est comme nous l'avons vu (chap. 1, § 6) une synthèse de la classe et de la relation asymétrique, donc de la ressemblance et de la différence, les unités composant un nombre étant à la fois équivalentes et distinctes. Dirons-nous alors que le nombre est un produit de l'esprit, dans la mesure où il y a équivalence, et du réel dans la mesure où les unités sont distinctes ! Autrement dit, l'unité 1 serait l'expression de l'esprit, tandis que le nombre 2 (1+1) émanerait du réel puisque, l'unité y étant additionnée à elle-même, il y a ainsi différence entre ces deux unités ?

Du point de vue génétique, toute relation établie entre les objets résulte donc d'une activité de l'esprit consistant à différencier aussi bien qu'à identifier et, par conséquent, tout système d'opérations, en tant que « groupement » de relations, est constructif en même temps qu'il assure sa propre rigueur grâce au mode de composition qu'il constitue. A cet égard, l'équivalent génétique de la fonction qu'E. Meyerson veut faire jouer à l'identité, c'est la réversibilité. Or, la réversibilité, qu'il cherche fréquemment à réduire elle-même à l'identité, est bien plus qu'une identification : elle est le déroulement d'un acte dans les deux sens de telle sorte que cet acte, tout en étant constructif, est assuré de sa cohérence interne par la garantie de retrouver son point de

départ : l'identité est alors le produit d'une opération directe par son inverse et ne se confond pas avec la réversibilité comme telle.

L'esprit est donc activité, ou pouvoir d'opérer, et si toute action ou toute opération suppose, en son point de départ, un lien indissociable entre le sujet et l'objet, il est artificiel d'attribuer l'identité seule au sujet et la différence à la réalité seule. Sans doute lorsque l'on réunit deux éléments concrets, cette addition ne serait pas possible si ces éléments n'étaient pas donnés dans le réel. Mais sont-ils donnés à l'état distincts, ou selon le même degré de distinction que nous introduisons entre eux ? Et, si c'était le cas, la réalité suffirait-elle à expliquer l'opération, ou celle-ci ne suppose-t-elle pas un acte qui relie ? Or, que cet acte soit une soustraction qui dissocie ou une sériation qui marque les différences, l'intervention du sujet y est aussi nécessaire que dans l'identification.

Mais alors où est la limite exacte entre le sujet et l'objet, si l'on renonce au critère net et clair de l'identité pure ? C'est ici que réapparaît la nécessité du point de vue génétique, qui impose une rectification continuelle des frontières alors que les philosophies d'ensemble souhaitent un état fixe. Il n'existe pas, en effet, de limite statique ou donnée une fois pour toutes, entre le sujet et l'objet, parce que l'esprit se construit peu à peu et qu'aux différents niveaux de cette construction la délimitation est alors à refaire (nous verrons d'ailleurs, en ce qui concerne la pensée physique, qu'il en est précisément de même du « réel » comme tel, et que Meyerson lui-même a donné les meilleurs arguments en faveur d'un réalisme en quelque sorte vicariant). Au niveau des réflexes et des premières manifestations sensori-motrices, on peut appeler « sujet » les mouvements innés ou acquis, et c'est bien par leur intermédiaire que se manifeste, en effet, l'activité du sujet vue sous l'angle du comportement. Mais, du point de vue du sujet lui-même, correspondant à ce comportement, il n'y a encore aucune différenciation entre le subjectif et l'objectif puisqu'il n'y a encore ni objets extérieurs ni sujet distinct de la réalité vécue par lui à chaque instant considéré. Au niveau de l'intelligence sensori-motrice, les premiers objets sont construits, en même temps que le sujet commence à se distinguer d'eux. Aux divers niveaux intuitifs et opératoires, cette élaboration du réel se poursuit, mais au moyen d'instruments subjectifs façonnés en même temps que lui, de telle sorte que, sur chaque palier successif, la délimitation est à réviser entre le sujet et l'objet : l'activité du sujet augmente avec l'extension des opérations, tandis que le réel s'objective en s'organisant. Il est donc exclu d'assigner une fois pour toutes au sujet ou à l'objet une structure définissable en termes statiques, telle que l'identique appartiendrait définitivement à l'un et le divers à l'autre. Si l'on veut les opposer en une formule valable pour tous les niveaux, celle-ci ne saurait être que

fonctionnelle et non pas structurale. L'identification meyersonienne sera alors à remplacer par une assimilation de l'objet au sujet, assimilation d'abord sensori-motrice, puis représentative et opératoire, mais englobant les opérations de différenciation autant que d'identification ; le réel, inversement, ne sera définissable qu'en fonction d'accommodations variées, modifiant les schèmes d'assimilation mais sans se réduire une fois pour toutes au « divers » irrationnel.

La vraie source des difficultés de la thèse meyersonienne est donc la position antigénétique qu'il a adoptée et qui se manifeste notamment dans son interprétation des notions (ou « genres ») élémentaires, et avant tout du schème de l'objet permanent. On a remarqué l'étonnante complication (et dans le style lui-même, habituellement si limpide, de l'auteur) du noyau de la démonstration résumée au début de ce § (voir la citation de la p. 349 de *C.P.*) : l'esprit crée des notions abstraites en les extrayant du réel ; puis il les retransforme en choses par une projection *sui generis* ; après quoi seulement il opère sur ces abstraits redevenus concrets, d'où il résulte que les opérations portent, non pas sur le réel lui-même, mais sur les « genres » hypostasiés dans le réel. L'exemple le plus simple de ce processus serait fourni par la notion de l'objet lui-même : due à une identification des sensations (« genre ») conduisant à l'idée de permanence substantielle, cette notion replacée dans le réel par une hypostase immédiate et « paradoxale » en constituerait le ciment causal le plus important. Or, tant cette thèse générale que son application à la notion d'objet (et par conséquent d'espace, de nombre, etc.) soulèvent les plus sérieuses difficultés génétiques dès que l'on réduit l'activité du sujet à l'identification.

La raison de ces difficultés est bien claire. Elle tient au fait que Meyerson, avec presque tous les auteurs dont nous avons été conduit à nous séparer, conçoit l'esprit comme composé de sensations ou de perceptions, d'un côté, et d'une intelligence achevée, à l'autre extrême, avec tout au plus, entre deux, une mémoire et des souvenirs-images : on oublie ainsi simplement l'action et la motricité, dont cependant H. Poincaré a pressenti le rôle épistémologique capital dans la formation de l'espace. Sauf erreur, la motricité est à peu près complètement absente de l'œuvre d'E. Meyerson (sauf quelques remarques à propos de Bergson), alors qu'il y est question des aspects les plus variés de la pensée (y compris une discussion sur la métaphysique). Or, loin d'impliquer l'adoption d'un pragmatisme utilitaire, de l' « empirisme radical » de James ou du bergsonisme, l'intervention de l'action aboutit sans plus à un déplacement des problèmes,

que l'on retrouve sur un plan inférieur et partant plus facile à analyser. L'action est une forme de l'intelligence parmi d'autres, et une forme qui prépare la pensée, puisque entre la perception et l'intelligence réflexive il y a l'intelligence sensori-motrice, l'intelligence intuitive ou intériorisation représentative de l'action et tout le système des opérations liées à l'intelligence opératoire concrète.

Or, si l'on se place sur le terrain de l'action et notamment de cette intelligence sensori-motrice en dehors de laquelle le mécanisme des perceptions reste incompréhensible, les choses se simplifient notablement. On s'aperçoit alors que le schéma de Meyerson, relatif aux abstraits projetés dans le réel et sur lesquels l'intelligence opère, correspond à un processus essentiel (comme tous les schémas meyersoniens), mais permettant l'économie du jeu de navette trop compliqué imaginé par le philosophe entre le réel et l'esprit.

En fait : 1° Toute action conduit à des schématisations, c'est-à-dire que les mouvements et les perceptions coordonnés par elle constituent des « schèmes sensori-moteurs » susceptibles de s'appliquer à des situations nouvelles » ces schèmes sont l'équivalent actif des concepts ou des « genres », mais ce sont des concepts pratiques et non pas réfléchis. 2° Sans quitter le terrain de l'action exercée sur l'objet, et sans donc avoir besoin de venir se localiser dans la pensée pour être en retour projetés dans le réel, ces schèmes structurent le donné en l'assimilant à l'action du sujet » ils impriment donc une certaine forme à l'objet tout en l'incorporant dans les activités propres et en l'enrichissant ainsi d'une série de relations nouvelles. 3° En coordonnant les schèmes entre eux, l'action constitue, d'autre part, l'équivalent de ce que seront plus tard les opérations ; celles-ci dérivent donc de l'action et, si elles s'exercent, comme le dit Meyerson, sur des genres hypostasiés dans l'objet, et non pas sur l'objet lui-même, c'est que l'objet est, dès l'abord, structuré et complété par l'action dont procèdent les opérations. Meyerson a donc bien raison de voir dans l'exercice des opérations plus que ne comporte le réel à lui seul, mais l'interaction du sujet et de l'objet s'explique par un processus continu, se poursuivant de l'action la plus simple à l'opération la plus formelle, sans qu'il soit nécessaire de faire appel à un système de navettes imaginé pour remédier à l'insuffisance d'une définition de l'activité propre par la seule identification.

C'est en particulier sur ce mode actif et non pas noétique que se constitue l'objet permanent. Si la thèse meyersonienne

était vraie, il devrait y avoir objet partout où il y a perception, et c'est bien ainsi que l'entend l'auteur. Or, le bébé n'a pas là notion d'objet avant 8-10 mois, alors qu'il perçoit fort bien et reconnaît les personnes et les choses ; mais il ne voit que des figures ou des tableaux perceptifs sans leur attribuer encore de permanence substantielle. Un chien courant après un lièvre n'a pas non plus la notion d'objet, malgré E. Meyerson, parce qu'il n'est pas capable d'imaginer le lièvre ni de le situer quelque part dans l'espace, en dehors de l'acte même de la poursuite ainsi que des perceptions olfactives et visuelles qui lui sont attachées. Par contre, en prolongement des schèmes pratiques initiaux, une coordination plus complexe des actions permet de constituer la notion de l'objet, à partir du moment où les déplacements commencent à être « groupés » en systèmes d'ensemble caractérisés par leur composition réversible. Ce seul fait montre la filiation des opérations spatiales ultérieures par rapport à l'action et à l'intelligence sensori-motrices. Sans parler de l'aspect physique de la question, sur lequel nous reviendrons (chap. V, § 1), cet exemple illustre ainsi les difficultés d'une thèse d'où l'action est absente et qui est obligée de remplacer le passage de la motricité à l'opération par un jeu compliqué d'identifications rationnelles et de projections appelées à intervenir dès la perception.

§ 5. L'INTERPRETATION LOGISTIQUE DU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE. — L'emploi de cet admirable instrument de dissection axiomatique, et même de critique épistémologique, que constitue le calcul logistique, a abouti, en ce qui concerne l'interprétation du raisonnement mathématique, à trois prises de position essentielles, correspondant à trois phases distinctes de l'histoire de la logistique. La première et la troisième de ces positions sont caractérisées par des découvertes techniques, qui ont enrichi notre savoir logique et, par conséquent, épistémologique, la seconde est surtout intéressante par la théorie de la connaissance logico-mathématique qu'elle a conduit à formuler, sans d'ailleurs que cette théorie soit nécessairement liée à l'emploi des techniques logistiques.

On peut dire, en effet, qu'au cours d'une première phase de la logistique, une formule a été donnée du raisonnement par récurrence, qui permet de faire l'économie d'un principe spécial, tel celui invoqué par Poincaré, et qui lie l'axiome d'induction complète à la construction elle-même des nombres inductifs. On peut caractériser cette première période par les noms de

Morgan (à titre de précurseur), de Peano et de Russell (en ses premiers écrits). Au cours d'une seconde phase, l'assimilation de la logique et des mathématiques a conduit v. Wittgenstein et l'école de Vienne à une conception purement tautologique du raisonnement mathématique, celui-ci devenant la syntaxe d'un langage destiné à exprimer simplement des « faits » (physiques ou expérimentaux). En une troisième phase, débutant avec la théorie de la démonstration de Hilbert, les progrès de la logique des propositions ont abouti à la découverte, par Goedel, d'une irréductibilité entre le système constitué par l'arithmétique (y compris le raisonnement par récurrence) et la structure du calcul propositionnel (bivalent), ainsi qu'à une recherche, par Heyting et par l'école polonaise (Lukasiewicz, Tarski, etc.), d'une logique polyvalente et générale susceptible de répondre aux diverses exigences des positions prises dans les questions du fondement des mathématiques. Sans entrer dans l'exposé technique des travaux logistiques propres à ces trois phases, il importe cependant d'en dégager succinctement la portée en ce qui concerne l'épistémologie proprement dite.

I. « L'emploi de l'induction mathématique dans les démonstrations, écrit B. Russell [1], était autrefois quelque chose comme un mystère. On ne doutait pas que ce fût une méthode convenablement probante, mais personne ne savait bien comment elle était fondée… Poincaré considérait qu'il y avait là un principe de la plus haute importance, au moyen duquel un nombre infini de syllogismes pouvait être condensé dans un raisonnement unique. Nous savons maintenant que toutes ces vues sont erronées et que l'induction mathématique est une définition et non un principe. Il y a des nombres auxquels on peut l'appliquer et il y en a d'autres [les cardinaux transfinis] qui sont rebelles à son emploi. Nous définissons les « nombres naturels » comme ceux que l'on peut établir grâce à l'induction mathématique, c'est-à-dire comme ceux qui possèdent toutes les propriétés inductives. Par suite, ces déterminations peuvent être employées pour les nombres naturels non pas en raison de quelque intuition mystérieuse, d'un axiome ou d'un principe, mais elles se présentent comme une simple propriété littérale. Si nous définissons les « quadrupèdes » comme des animaux qui ont quatre pieds, il s'ensuivra que tout animal qui aura quatre pieds sera un

1. B. RUSSELL, *Introduction à la philosophie mathématique*, Payot (trad. MOREAU), p. 41.

quadrupède ; le cas des nombres soumis au régime de l'induction mathématique est exactement le même. »

Ce passage significatif de Russell se fonde sur la définition des classes « héréditaires » (telles que si *n* en est membre, *n* + 1 en fait aussi partie), ainsi que sur les notions de successeur ou de prédécesseur, de zéro et de « postérité de zéro », etc. (voir chap. I, § 7, les notions premières de Peano, qui sont reprises et précisées par Russell en fonction de sa réduction du nombre entier aux classes). Cela revient à dire, et telle est la simplification essentielle que la logistique a introduite au cours de sa première phase, que le principe d'induction mathématique résulte sans plus de la construction des nombres entiers (finis). Que l'on admette la réduction des cardinaux aux classes logiques et des ordinaux aux relations asymétriques, ou que l'on se borne, avec Peano, à adjoindre l'axiome d'induction à ceux qui déterminent la succession des nombres, le raisonnement par récurrence devient ainsi l'expression même de cette construction des entiers finis.

Mais, s'il y a là un progrès par rapport à l'interprétation de Poincaré, B. Russell exagère cependant quelque peu en comparant la suite des nombres à la classe des quadrupèdes… En effet, « définir » la première consiste à l'engendrer au moyen d'une loi de composition opératoire, relevant d'une structure de groupe, tandis que « définir » la seconde ne suppose que l'intervention d'une simple réunion d'individus, et non pas d'unités itérées. Dès lors, sans avoir à revenir à l' « intuition du nombre pur », le principe particulier de l'induction complète demeure irréductible à la logique des classes. C'est pourquoi le raisonnement par récurrence reste plus fécond que le syllogisme : il permet de généraliser de zéro, ou de un à « tous », des propriétés non attribuées d'avance à tous les nombres, tandis que le syllogisme se borne à inclure les unes dans les autres des classes dont les parties et le « tout » résultent de simples emboîtements. Aussi bien, cette fécondité inhérente au raisonnement par récurrence a-t-elle été reconnue et maintenue par la plupart des logisticiens eux-mêmes.

II. Mais l'essai, réussi ou manqué (voir chap. I, § 4), de réduction des êtres mathématiques aux classes et aux relations logiques portait en lui un germe d'unification, qui a abouti à la seconde phase de l'analyse logistique. De ce que les êtres logiques, considérés isolément (par opposition aux « groupements » sur lesquels nous avons insisté § 3 du chap. 1), se réduisent

sent à l'identité, et de ce que la mathématique semblait elle-même réductible à la logique pure, on en est venu à conclure au caractère « tautologique » de tout raisonnement logico-mathématique. La logique et les mathématiques se borneraient ainsi à constituer la syntaxe d'un langage destiné exclusivement à exprimer des « faits », c'est-à-dire des constatations expérimentales, et demeureraient radicalement infécondes en tant que pures syntaxes.

Partons de ce qu'on appelle des « propositions élémentaires », p. ex. « cet arbre est vert », proposition ne comportant aucune généralisation et se bornant à attribuer une propriété à un objet. On peut même distinguer, à l'intérieur de telles propositions, ce que Russell appelle « propositions atomiques », c'est-à-dire indécomposables en propositions plus simples (ce sont les *Sachlagen* de Wittgenstein) et qui résultent simplement de l'application de la négation à certaines données immédiates (« ceci n'est pas rouge »). Il existera alors des « propositions moléculaires », ou propositions résultant de l'application des opérations d'incompatibilité aux propositions atomiques, et les « propositions élémentaires » se réduiront, par définition, à des propositions atomiques et moléculaires prises ensemble. Cela dit, une proposition élémentaire peut être mise sous la forme d'une fonction propositionnelle : « x est vert » ou « $f(a)$ » et d'autres objets que « cet arbre » peuvent convenir au prédicat f ; d'autre part, « cet arbre » lui-même peut comporter d'autres prédicats que f. Sans jamais quitter le terrain des « faits » on pourra ainsi, en substituant les données les unes aux autres à l'intérieur de la proposition, engendrer le calcul des classes et des relations, et, en combinant les propositions entre elles, développer le calcul propositionnel.

La « classe » devient dès lors, dans la conception tautologique, une simple juxtaposition d' « arguments » satisfaisant le même « énoncé ». Il est intéressant à cet égard de noter l'évolution de la logistique en ce qui concerne les êtres abstraits. En 1911 encore, B. Russell pouvait écrire un chapitre sur « le monde des universaux », dont la théorie imitait «l argement celle de Platon, avec les modifications seulement que le temps a montrées nécessaires » (p. 97). Il y soutenait que « toutes les vérités impliquent des universaux, et toute connaissance de vérités implique la connaissance directe d'universaux » (p. 100), et admettait tout au plus que l'existence des universaux constitués par les « relations » est plus facile à « prouver strictement » que celle des entités représentées par des adjectifs et des substantifs (p. 102). Et il concluait

1. B. RUSSELL, *Les problèmes de la philosophie*, trad. RENAULD, Alcan, 1923, ouvrage paru en 1911 en anglais.

qu'une relation comme « au nord de » n'est « ni dans l'espace ni dans le temps, ni matérielle ni mentale » (p. 105) : elle « subsiste » au lieu d' « exister » (p. 107). En 1919, au contraire, il cherche à montrer [1] « pourquoi les classes ne peuvent pas être regardées comme partie de l'ameublement dernier du monde » (p. 216) et pense que « nous approcherons plus nettement d'une théorie satisfaisante si nous essayons d'identifier les classes avec les fonctions propositionnelles » (p. 218).

Or, une fonction propositionnelle est un simple schéma d'énoncé possible : f (x) ou (y) f (x). Lorsqu'il est saturé par deux variables il constitue une relation, et lorsqu'il l'est par une seule, les valeurs transformant la fonction en proposition vraie constituent une classe. Mais, dans ces relations comme dans ces classes, il n'y a rien de plus que des énoncés virtuels, correspondant à des données concrètes et directement vérifiables : à des « faits » expérimentaux. Le calcul des classes et des relations n'est donc que la syntaxe d'un langage qui énonce des faits. Quant aux nombres cardinaux ou « classes de classes », aux nombres ordinaux ou « classes de relations », et aux divers types d'êtres mathématiques, ils n'ajoutent rien de plus aux « faits » que les êtres logiques, et se bornent, eux aussi, malgré leur complexité apparente, à relier tautologiquement entre eux des schèmes de constatations possibles.

Pour ce qui est du calcul des propositions, qui combine entre eux les énoncés pris en bloc, il en va exactement de même. Une implication telle que $p \supset q$ signifie simplement que si un objet quelconque présente cette propriété énoncée par la proposition p il présentera aussi la propriété énoncée par la proposition q. Les rapports quantitatifs envisagés par logique classique et opposant le « tous » au « quelques » et à l' «aucun » se réduisent sans plus au fait, pour une fonction propositionnelle saturée par certaines classes de variables, d'être « toujours » vraie, « parfois » vraie ou « jamais » vraie. Quant au calcul fondé sur les combinaisons du vrai et du faux, il n'introduit aucune construction réelle et se borne lui aussi à une combinatoire toute tautologique, combinatoire bivalente ou polyvalente selon les modes de raisonnement mathématique ou physique envisagé, mais qui se réduit encore à une simple syntaxe formelle.

Dépourvues de toute fécondité, les structures logico-mathématiques sont même, à proprement parler, étrangères à la vérité. Ramenées au rang de purs moyens d'expression, elles permettent d'énoncer des vérités réelles, lesquelles sont fécondes parce que physiques et expérimentales, mais ces structures ne dépassent la réalité physique que dans la mesure où une syntaxe constitue le cadre vide des énoncés véritables dont le langage en acte se servira tôt ou tard. Il est vrai que cette syntaxe est réglée en vertu des propositions premières et d'un jeu de significations symboliques. Mais, selon : Wittgenstein, les propositions premières s'imposent avec évidence parce que résultant de l'épuisement des combinaisons symboliques possibles. Quant aux symboles eux-mêmes,

1. B. RUSSELL, *Introduction à la philosophie mathématique*, trad. MOREAU, Payot, 1928.

ce sont des images, c'est-à-dire des faits « ressemblant » à d'autres faits et le sens de ces « images logiques » résulte donc lui aussi d'une simple constatation.

Ainsi, après avoir appuyé la fécondité des mathématiques sur un univers quasi platonicien des idées générales, l'épistémologie logistique en est venue à la nier radicalement : réduisant le symbolisme logico-mathématique à une vaste tautologie, elle double ce nominalisme d'une assimilation de la connaissance réelle à la simple constatation du donné sensible, et aboutit en fin de compte à ce que Wittgenstein appelle lui-même une sorte de solipsisme, conséquence inévitable de l' « empirisme logique ».

Mais il est clair que, si précises et, à certains égards sans doute définitives, que soient les découvertes techniques du calcul logistique, l'emploi de ce calcul ne comporte pas *ipso facto* l'adoption de l'épistémologie viennoise. Que cet emploi soit ruineux pour un certain mode métaphysique de penser par concepts impropres à toute formulation, nous l'accorderons volontiers, et suivrons même entièrement le mouvement du Cercle de Vienne lorsqu'il limite les modes effectifs de connaître à deux types seulement : l'expérience et la formalisation. Seulement, entre la réalité physique et la déduction logistique, il intervient nécessairement le fait mental. Dans l'exacte mesure où l'on renonce au platonisme initial de B. Russell, il s'agit donc d'appuyer le formalisme logique sur l'activité intellectuelle, et la question est alors de savoir si la psychologie de Wittgenstein et des Viennois suffit à cette mise en correspondance.

Il importe d'abord de souligner de la manière la plus nette que, en marge de leur formulation logistique, les Viennois ont adopté ou, construit une certaine psychologie des fonctions intellectuelles : le contact entre le symbolisme et les « faits » n'a pu être assuré que moyennant deux sortes d'affirmations, les unes concernant la connaissance (perception et intelligence), les autres relatives à la fonction symbolique (rôle du signe et rôle de la « syntaxe » ou du langage en général). Or, si la formulation logique est affaire de pur calcul ou de pure axiomatisation, ces affirmations psychologiques relèvent par contre de l'expérience seule, c'est-à-dire de l'expérimentation psychologique elle-même, et aucune déduction logistique ne suffit à trancher de telles questions de fait. C'est donc sur le terrain des faits mentaux qu'il convient de se placer pour éprouver la valeur de l'épistémologie « viennoise », en distinguant soigneusement cette question de celle de la valeur de la logistique comme telle.

Or, si l'on cherche à déterminer à quels « faits » psycholo-

giques correspondent les « énoncés » formulés par les propositions « atomiques » et les structures formelles de divers ordres, on est obligé de reconnaître que, loin d'être en présence de simples constatations au cours desquelles le sujet enregistrerait les données extérieures en demeurant lui-même passif, on retrouve constamment une action réelle du sujet, qui opère sur le donné au lieu de l'accepter tel quel : il s'ensuit que les « énoncés » correspondent à des opérations psychologiques autant qu'à des « faits » physiques et que, par conséquent, le mécanisme opératoire refoulé de la « tautologie » logique doit, ou bien être intégré au réel lui-même en tant qu'énoncé, ou bien être réintégré dans l'interprétation des symboles logistiques en tant qu'énonçants.

Qu'est-ce, en effet, que la lecture d'une donnée immédiate ? S'il s'agit de perception, il se présente aussitôt une difficulté centrale : comme nous avons cherché à le montrer ailleurs (voir chap. II, § 3-4), la perception demeure irréductible à toute forme logique, parce que les rapports perceptifs sont incomposables entre eux de façon transitive, irréversibles, non associatifs et étrangers à la conservation des parties et du tout. Modifiés par chaque comparaison et ne comportant qu'un mode de composition statistique et non pas rationnel, les rapports perceptifs ne sauraient donc, à eux seuls, fournir la moindre base à une construction logique : pour qu'ils puissent donner lieu à des « énoncés » susceptibles de composition syntactique, il s'agit qu'ils soient d'abord structurés par des schèmes sensori-moteurs tels que celui de l'objet permanent, et ensuite conceptualisés par l'intégration dans un système symbolique et représentatif. Or, l'une et l'autre de ces deux transformations du perceptif en un schématisme logicisable suppose l'action ou l'opération.

Pour ce qui est de la notion d'objet, essentielle à l'énoncé des propositions les plus élémentaires, c'est une erreur psychologique manifeste de croire qu'il y a objet dès qu'il y a perception : la notion de l'objet constitue le plus simple des schèmes de conservation, mais cette conservation, loin de résulter d'une pure identification intellectuelle (voir § précédent), suppose une coordination des actions de détour et de retour, et une organisation spatiale des déplacements (annonçant une structure de groupe opératoire). Eu égard à l'objet, la perception ne joue ainsi elle-même qu'un rôle d'indice et en reconnaissant un objet par la vue ou le toucher on ne se borne pas à le voir ou à le sentir : l'on voit ou l'on touche seulement une partie de l'objet, partie servant d'indice à l'égard du tout, et se référant donc à un schème d'ensemble construit et non pas donné. L' « énoncé » logique le plus simple, la proposition la plus « atomique », telle que « ceci… rouge », etc., énonce donc une série d'actions virtuelles et non pas un donné perceptif. Au reste, l'intuition logistique souvent étonnante de Wittgenstein va beaucoup plus profond que sa psychologie : lorsque cet auteur caractérise les « énoncés » les plus primitifs par des négations (« pas rouge », « pas vert », etc.) il avoue par cela

même l'existence de la construction opératoire sous-jacente aux soi-disant « faits » que ces énoncés signifieraient.

Si l'on en vient maintenant à des « énoncés » plus complexes (bien que caractérisant toujours des « propositions élémentaires » à argument individuel, tel que « cet arbre est vert », il intervient toute une conceptualisation et une symbolisation, dont il est encore bien plus aisé d'apercevoir le caractère psychologiquement opératoire et non pas simplement « donné ». Commençons par examiner le prédicat : « vert » (ou « blanc », etc.). Au temps où B. Russel était platonicien, il a écrit que « l'acte de pensée d'un homme est nécessairement une chose différente de l'acte de pensée d'un autre homme ; l'acte de pensée d'un homme à un certain moment est nécessairement une chose différente de l'acte de pensée du même homme à un autre moment. Donc, si la blancheur était la pensée en tant qu'opposée à son sujet, deux hommes différents ne pourraient pas la penser, et le même homme ne pourrait pas la penser deux fois. Ce que beaucoup de différentes pensées de blancheur ont en commun est leur *objet*, et cet objet est différent d'elles toutes. Ainsi les universaux ne sont pas des pensées, quoique, quand ils sont connus, ils soient les objets des pensées »1. Il est clair que ces objections de Russell sont irréfutables en ce qui concerne la blancheur perceptive, qui est à la fois incommunicable et dénuée de toute conservation ou réversibilité mentales. Mais elles valent tout autant contre la permanence de la blancheur physique, car jamais les mêmes ondes lumineuses ne se reproduisent deux fois dans les mêmes circonstances. « Penser » la blancheur ou la verdeur, etc., c'est donc construire un concept : si on le veut stable et susceptible d'entrer en des « énoncés » logiques, il faut alors, ou bien recourir au platonisme, à l'intelligence divine, etc., ou bien, si l'on n'est pas métaphysicien, reconnaître à la pensée le pouvoir de conserver ses idées par des opérations réversibles et de les échanger par coopération sociale, c'est-à-dire à nouveau par des opérations réversibles, mais avec correspondances interindividuelles. En ce cas seulement l'énoncé « cet arbre est vert » aura quelque signification logistique.

Quant au sujet ou argument de la proposition, il est clair que, si l'on prête à un objet la qualité d'être un « arbre », on l'incorpore également dans un schème opératoire en dehors duquel l'énoncé perd toute signification. Désignons par f (a) la proposition « cet arbre (a) est vert (f) », Or, plus encore que la stabilité du prédicat (f), la désignation de l'argument (a) suppose une construction. Appeler l'objet (a) un arbre, c'est en effet se référer à d'autres objets (b, c, etc.) susceptibles de vérifier avec lui certaines fonctions propositionnelles, c'est-à-dire de présenter avec lui certaines qualités communes (d'être vivace, d'avoir un tronc, etc.) définissant la notion d'arbre. En dehors d'une telle référence, implicite ou explicite, il est dépourvu de sens de traiter cet objet (a) d' « arbre » et une telle désignation dépasse donc nécessairement le donné actuel pour

1. *Les problèmes de la philosophie (op. cit.),* p. 106-107.

le relier à un ensemble d'autres « faits » comparés entre eux. Que cette comparaison ou ces relations se réduisent, au point de vue logistique, à la possibilité de substituer (b) ou (c) à l'argument (a) de la proposition f (a), cela n'exclut en rien le caractère opératoire de l'acte psychologique permettant de telles substitutions : une opération de réunion ou de mise en relation intervient ainsi en toute fonction propositionnelle susceptible de déterminer une classe ou une relation, et tout énoncé portant sur un objet conceptualisé suppose de tels rapports.

Il reste le point central pour une interprétation nominaliste ou « syntactique » des structures logico-mathématiques : qu'est-ce qu'un symbole et comment les propositions réduites à un pur langage symbolique, désigneront-elles le réel correspondant ? Que l'on définisse le symbole comme une « image », avec Wittgenstein, et que l'on s'accorde à voir dans l'image un « fait » qui « ressemble » aux faits signifiés par elle, cela n'enlève rien à la nature essentiellement mentale du fait-signifiant, désigné par les symboles. Même à admettre que la logique soit simplement un langage, il reste qu'un langage se construit et ne se découvre pas par simple constatation extérieure, et qu'un langage suppose des sujets psychologiques capables de parler entre eux et de se représenter quelque chose au moyen de signes ainsi élaborés. Psychologiquement, la fonction symbolique (ou capacité de représenter au moyen de signes et d'images) explique, si l'on veut, la pensée, mais elle la suppose en retour : plus précisément elle ne l'explique qu'à la condition d'en impliquer les attributs essentiels et, si la pensée n'est qu'un langage, c'est que le langage est un instrument conceptuel. Loin de supprimer l'opération, un système symbolique exact est donc doublement opératoire : il représente au moyen d'opérations symboliques un jeu, non pas de réalités toutes faites, mais d'opérations réelles. C'est pourquoi, de réduire les structures logico-mathématiques à une syntaxe n'exclut en rien leur fécondité opératoire. Il demeure en particulier cette opposition frappante que le langage proprement mathématique, dont on veut nous faire admettre le caractère tautologique, est infiniment plus riche que la syntaxe exclusivement logique : pourquoi donc les « tautologies » de la logique formelle sont-elles malgré tout si courtes, tandis que les « tautologies » propres à la théorie des nombres, à l'analyse ou à la géométrie exigent des volumes entiers pour y être transcrites et des siècles d'invention ininterrompue pour être développées ?

Au total, il semble donc impossible de nier que la construction opératoire, écartée de la logique pure et des mathématiques par l'épistémologie viennoise au cours de cette deuxième période de l'histoire des théories logistiques, ne réapparaisse nécessairement sur le terrain psychologique, ce qui réintroduit nécessairement le problème de sa formalisation logistique. Entre le symbole logistique et le « fait » physique, il intervient une action du sujet et l'opération se présente ainsi à titre de lien indispensable entre le premier et le second. C'est d'ailleurs ce qu'avouent les « Vien-

nois » en partie, pour ce qui est du fait de conscience : logiquement « tautologiques », les mathématiques sont vécues psychologiquement comme constructives et fécondes. Mais faut-il alors considérer ce sentiment comme une illusion subjective, ou bien est-il épistémologiquement nécessaire de conférer au sujet une activité réelle pour unir les « faits » à leurs « symboles » ?

Trois raisons paraissent imposer cette seconde manière de voir. La première est la convergence progressive entre l'analyse psychologique et l'analyse logistique. Tout le développement de l'intelligence se ramène à un passage de l'action irréversible aux opérations réversibles et ces opérations se constituent psychologiquement sous la forme de systèmes d'ensemble bien définis : or, ces systèmes correspondent, selon les opérations en jeu, soit à des « groupes » mathématiques (la suite des nombres, les déplacements dans l'espace, etc.), soit aux « groupements » plus élémentaires de classes et de relations dont nous avons vu la structure (chap. 1, § 3). Cette marche de la pensée vivante et des processus intellectuels concrets dans la direction de systèmes constituant leurs formes d'équilibre et se trouvant, par ailleurs, directement axiomatisables en structures logistiques, est un fait dont l'importance épistémologique ne saurait être négligée : ce sont ces données génétiques qui doivent être retenues si l'on veut parler vraiment d'une « unité de la science », par opposition à la psychologie un peu rudimentaire dont l' « empirisme logique » se contente.

En second lieu, du point de vue strictement logistique, on ne saurait réduire les mathématiques et la logique à une vaste tautologie que si tous les rapports en jeu dans les structures logico-mathématiques étaient assimilables à l'identité pure. Or, il n'en est rien et l'illusion contraire est née d'un procédé d'analyse essentiellement atomistique : lorsque Russell, p. ex., réduit à l'identité la correspondance biunivoque d'un terme à un autre, il néglige les divers modes possibles de correspondance considérés en tant que systèmes d'ensemble [1] (d'où son assimilation du nombre cardinal à une classe de classes). Si l'on analyse au contraire les totalités comme telles, ce n'est pas l'identité qui constitue le rapport logique fondamental, mais bien la réversibilité, et l'identité se réduit alors au produit des relations directes et inverses. Or, la réversibilité est une notion essentiellement opératoire et qui converge, nous venons de le voir, avec la forme même de l'équilibre des processus mentaux correspondants.

1. Voir plus haut, chap. l, § 4.

Une troisième raison de se refuser à réduire la logique et les mathématiques à une pure et simple tautologie est fournie par l'évolution même des travaux logistiques, à partir de la seconde période que nous considérons ici. L'hypothèse épistémologique de la tautologie générale propre aux « syntaxes » logico-mathématiques suppose, en effet, au *minimum* la réduction possible de tous les procédés d'inférence ou de raisonnement au schéma purement logique du calcul propositionnel. Elle implique tout au moins la possibilité de reconstruire les mathématiques à titre de système formel unique. Or, c'est précisément cette unicité qui est ébranlée par les travaux de la troisième période et notamment par ceux de Hilbert et de Goedel, dont nous allons voir maintenant les répercussions.

III. La troisième période de la logistique marque un renouvellement à la fois du point de vue de la réduction des mathématiques à la logique et en ce qui concerne la nature, tautologique ou non, des unes ou de l'autre. Préparée par les travaux de Hilbert sur l'axiomatisation de l'arithmétique, une crise proprement dite s'est produite avec les découvertes de Goedel, en 1929, et elle a obligé les anciens membres du cercle de Vienne lui-même à assouplir leur position jusqu'à faire de la logique une syntaxe de toutes les syntaxes (comme le soutient aujourd'hui Carnap), par opposition à la langue élémentaire au nom de laquelle on espérait d'abord supprimer les problèmes et « fermer » les axiomatiques.

Après avoir démontré la non-contradiction de la géométrie en s'appuyant sur celle de l'arithmétique, Hilbert a tenté, dès 1904, de démontrer la non-contradiction de l'arithmétique elle-même. Mais les résistances rencontrées l'ont conduit à modifier sur deux points essentiels la position initiale de Russell, développée par les Viennois : (1) En premier lieu, il a vite renoncé à une réduction pure et simple du mathématique au logique. Au contraire, en passant de la logique à l'arithmétique et de celle-ci à l'analyse, il introduit chaque fois de nouvelles variables et de nouveaux axiomes. Pour formaliser l'arithmétique il se donne p. ex. le calcul des propositions, les axiomes de l'égalité, les axiomes de récurrence pour l'addition et la multiplication et un axiome voisin de l' « axiome de choix ». Il n'y a donc plus réduction du supérieur à l'inférieur, p. ex. du nombre à la classe ou du raisonnement par récurrence à des enchaînements purement logiques d'inclusions ou de relations asymétriques : il y a au contraire subordination du mathématique simple au « méta-

mathématique », c'est-à-dire à une discipline reconstruisant simultanément le logique et le mathématique et dont l'objet est de démontrer la non-contradiction et l'achèvement des axiomes de la mathématique formalisée. (2) En second lieu, et *a fortiori*, Hilbert renonce à toute interprétation tautologique de la logique et des mathématiques, et se trouve comme malgré lui replongé dans le problème de la fécondité. En effet, les trois critères qu'il assigne à toute axiomatique achevée sont l'indépendance des axiomes, leur non-contradiction et la saturation, c'est-à-dire la démonstratibilité de toutes les conséquences que l'on en peut tirer. Or, l'indépendance des axiomes s'est révélée si grande que, même sur le terrain de l'arithmétique pure, il n'est parvenu à démontrer ni la non-contradiction ni la saturation ! C'est assez dire que, sur le terrain proprement axiomatique lui-même, on ne saurait plus parler légitimement de la nature tautologique des connexions logico-mathématiques : les opérations dont nous venons de voir (sous II) qu'elles s'interposent nécessairement entre les « faits » et les énoncés logiques, se trouvent être si riches que les axiomes « indépendants » propres à l'axiomatique arithmétique elle-même n'ont point encore pu être démontrés compatibles entre eux… [1].

En effet, le problème soulevé par Hilbert s'est révélé bien plus complexe encore que l'illustre inventeur de la méthode métamathématique ne l'avait supposé. Sur ce point comme toujours, la crise ainsi ouverte s'est montrée plus féconde que tous les dogmatismes. De 1929 à 1934 les efforts pour démontrer la non-contradiction de l'arithmétique et notamment l'axiome général d'induction complète se sont, en effet, enrichis des travaux de Herbrand, de Goedel et de Gentzen qui ont à bien des égards renouvelé les questions sans pour autant parvenir aux résultats proposés.

L'essai de Herbrand [2] a consisté à réduire les opérations d'une démonstration à des opérations de plus en plus simples jusqu'à trouver une forme directement vérifiable. Procédant par disjonction finie de termes ne contenant plus de variables, jusqu'à décider si cette disjonction est une identité logique, il aboutit ainsi à démontrer un certain nombre de compatibilités, mais

1. Cela n'empêche pas certains des tenants et aboutissants de la logistique viennoise de maintenir leur conception tautologiste. En 1948 encore, M. BOLL (*Manuel de logique scientifique*, p. 523), écrit que l'arithmétique est un « immense prolongement de la logique » et d'une logique conçue comme tautologique !

2. J. HERBRAND, *Recherches sur la théorie de la démonstration*, thèse de Paris, 1930.

échoue devant l'axiome général d'induction complète, irréductible à cette méthode dite des champs.

En 1929, Goedel marque un tournant décisif en fournissant la raison positive de ces résistances. D'un théorème, devenu célèbre, portant sur un système de relations récurrentes, il déduit ce résultat essentiel que la non-contradiction d'une théorie ne se laisse pas démontrer au moyen des seuls éléments de cette théorie ni ne se laisse réduire à la non-contradiction d'une théorie plus simple. La non-contradiction de l'arithmétique n'est donc pas démontrable logiquement, et, dans l'état actuel des connaissances, elle ne saurait être appuyée que sur une démonstration métamathématique recourant aux instruments transfinis. Il en résulte que la légitimité du raisonnement par récurrence ne saurait relever de la logique, non seulement faute d'une réduction directe possible, mais encore faute de pouvoir « saturer » le système des vérités arithmétiques : autrement dit la généralisation à tous les nombres d'une propriété vérifiée pour 0 et pour le suivant d'un nombre donné si elle est vraie pour ce nombre, ne peut être démontrée vraie ou fausse par le simple secours de la logique.

Après quoi Gentzen en 1934, par une méthode voisine de celle de Herbrand, parvient bien à démontrer la non-contradiction de l'arithmétique et à y englober l'axiome général d'induction. Mais c'est à la condition d'incorporer le transfini à son raisonnement et, comme il le dit lui-même, de recourir à « des moyens qui dépassent l'arithmétique » [1].

Or, ces développements de la métamathématique hilbertienne sont gros d'enseignements logiques et épistémologiques. Que l'on ne puisse pas démontrer la non-contradiction de l'arithmétique en appliquant le critère classique (p. $\overline{p} = 0$), sans s'appuyer sur un ordre de vérités supérieur à l'arithmétique (et qui la suppose par conséquent), cela prouve assurément, ou bien l'insuffisante cohérence des mathématiques ou bien l'insuffisance des procédés dont dispose actuellement la formalisation logistique. Or, il est extrêmement remarquable de constater que personne ne songe le moins du monde à mettre en doute la cohérence interne des mathématiques, bien qu'il soit actuellement impossible de les réduire à un système formel unique. Il ne reste donc qu'à s'engager dans la direction d'un perfectionnement de la logique, puisque les systèmes opératoires caractéristiques de l'arithmétique elle-même ne peuvent être démontrés non contradictoires au moyen

1. Cité par LAUTMAN, *Les schémas de genèse*, Hermann, 1938, p. 148.

des systèmes opératoires propres à la seule logique classique.

Ce réajustement de la logique a été entrepris ou peut être conçu de trois manières, qui sont d'ailleurs susceptibles de se rejoindre un jour. On a, en premier lieu, tenté de considérer la logique classique, qui est bivalente, comme un simple cas particulier de logiques plus générales à trois valeurs (par admission d'un tiers non exclu), à quatre valeurs ou même à une infinité de valeurs : l'effort d'extension porte alors sur le principe du tiers exclu jusqu'à en faire un principe du n^{e} exclu, dans l'idée plus ou moins explicite, d'aboutir ainsi à une logique de l'infini mieux adaptée aux mathématiques que celle des ensembles finis. En second lieu on peut perfectionner les métathéories jusqu'à construire des systèmes formels imitant avec toujours plus de précision les théories mathématiques elles-mêmes, ce qui tend en fin de compte à faire de la mathématique sa propre logique. Enfin on pourrait — mais cette troisième solution ne semble pas avoir été tentée — élargir le principe même de la non-contradiction : pourquoi l'expression $p \,.\, \overline{p} = 0$, qui repose sur la simple complémentarité de p et de $\overline{p}$ dans l'univers du discours ne suffit-elle pas à assurer la non-contradiction de l'arithmétique ? Ne serait-ce pas qu'un système d'emboîtements susceptibles d'assurer une induction complète et reposant sur les groupes et le corps des nombres réels ne saurait être enfermé dans un système d'emboîtements simplement intensifs, c'est-à-dire définis par de pures complémentarités ? Ces trois solutions reviennent donc à dépasser de trois manières différentes le cadre de la logique bivalente, étant reconnue son insuffisance à absorber les mathématiques ou même à fournir, lorsque les structures logiques et mathématiques sont simplement mêlées les unes aux autres, le critère de la non-contradiction du mixte ainsi formé.

Les premières attaques contre la logique bivalente sont issues de l'intuitionnisme brouwerien. Résolu à n'admettre que les êtres mathématiques effectivement construits, Brouwer a été conduit à réexaminer la valeur des raisonnements portant sur les ensembles infinis et l'utilisation des démonstrations par l'absurde. Réduisant alors la logique à une simple classification verbale des ensembles finis, il a résolument mis en doute l'emploi du tiers exclu dans l'infini, en admettant la possibilité d'un *tertium* : l'indémontrable, situé entre le vrai, ou effectivement construit, et l'absurde. Après que Wavre eut montré la possibilité de formaliser un tel point de vue, Heyting a effectivement construit une logique trivalente susceptible de s'adapter à l'intuitionnisme. Outre la logique probabiliste polyvalente de

Reichenbach et plusieurs autres essais (Gonseth, etc.), l'école polonaise, avec Lucasiewicz et Tarski, a généralisé ces tentatives jusqu'à construire un principe du n^e^ exclu et une logique d'une infinité de valeurs. Il y a là un effort d'un haut intérêt et dont la portée effective n'a certainement pas encore été épuisée. Néanmoins deux circonstances la restreignent jusqu'ici. D'une part, si de nouveaux cadres sont ainsi préparés, qui sembleraient notamment pouvoir s'ajuster un jour aux problèmes de récurrence, aucune application décisive n'a encore justifié aux yeux de tous de tels élargissements et bien des auteurs conservent l'impression d'une réduction possible de la polyvalence à la bivalence simple. D'autre part, une logique à une infinité de valeurs n'est point encore une logique de l'infini et une « logique générale » n'a pas été dégagée, le problème subsistant entièrement de savoir si elle est possible.

En second lieu, l'élargissement de la logique s'effectue au sein des théories métamathématiques elles-mêmes. A côté de la logique purement intensive représentée par les classes et les relations indépendamment du nombre et par la logique des propositions bivalentes, on peut concevoir une logique des mathématiques consistant en un mélange d'axiomes strictement logiques et d'axiomes empruntés à l'arithmétique, à l'analyse ou surtout aux structures transfinies. De tels agrégats qui caractérisent précisément les théories métamathématiques sont alors susceptibles de perfectionnements indéfinis, et c'est d'eux que l'on attend en général l'achèvement des formalisations mathématiques. Mais, même en dépassant ainsi la logique pure, et sans revenir à l'idéal illusoire de la réduction simple du mathématique au logique, on ne parvient à démontrer la non-contradiction des systèmes arithmétiques qu'en s'appuyant, nous l'avons vu, sur des axiomes d'ordre supérieur : plus encore que l'échec de la réduction russellienne du supérieur à l'inférieur, cette résistance à l' « achèvement » de la formalisation montre alors l'hétérogénéité du logique et du mathématique. Il y a donc autonomie relative des paliers supérieurs et par conséquent nécessité de construire une logique spécifique s'adaptant toujours mieux à eux par incorporations successives d'axiomes nouveaux étrangers à la logique pure. Or, plus cette logique mixte est développée sur le plan métamathématique et plus elle imite la mathématique elle-même jusqu'à la doubler avec un mimétisme croissant. Si l'on peut parler à ce sujet d'une assimilation progressive du logique et du mathématique, cette assimilation est en ce cas réciproque, et revient comme toujours à enrichir l'inférieur au

moyen du supérieur aussi bien qu'à traduire celui-ci dans les structures de celui-là. Un exemple fera comprendre la chose. Hilbert démontre le principe du tiers exclu en s'appuyant sur un certain axiome de choix transfini : A (t A) ⊃ A (a) signifiant que si la propriété A convient à l'objet choisi (t A) elle convient alors à tous les (a). L'exemple donné dans le fini est le suivant : si A est la propriété d'être corruptible et que l'objet choisi (t A) soit le plus incorruptible des hommes, alors tous les hommes (a) sont corruptibles. Or, il est clair qu'en se donnant la possibilité de retrouver parmi l'ensemble des hommes le plus incorruptible d'entre eux, on s'attribue par cela même le pouvoir de sérier tous les hommes en les comparant deux à deux (ou classes à classes) du point de vue de la relation asymétrique transitive : « plus (ou moins) incorruptible ». Appliquer ce même pouvoir aux ensembles transfinis signifie alors s'accorder le droit de les ordonner tous (non pas nécessairement selon le rapport « bien ordonné » mais selon un ordre simple ou un jeu d'intersections préalables). Bref, introduire un tel axiome revient à se donner plus qu'il n'en faut pour logiciser un secteur mathématique particulier, mais, précisément, en se donnant trop, on enrichit d'autant l'inférieur au lieu de lui réduire le supérieur : c'est en quoi la logique élargie des métathéories est appelée à doubler les mathématiques en insérant la logique dans une métalogique, plus que l'inverse ; et cela jusqu'à faire des mathématiques elles-mêmes leur propre logique. Le principe d'induction complète reste, en ce cas aussi, à concevoir comme un mode d'inférence spécifique, irréductible à la seule logique bivalente.

En troisième lieu, on pourrait imaginer une solution revenant à élargir la notion de la non-contradiction elle-même, jusqu'à faire de la non-contradiction propre à la logique bivalente un simple cas particulier du non-contradictoire caractérisant la logique des opérations réversibles en général. En effet, que signifie l'expression classique $p \cdot \overline{p}$, symbole de la contradiction inter-propositionnelle ? Tout simplement ceci, que l'univers du discours (appelons-le z) est partagé en deux classes de valeurs, les unes vérifiant la proposition p, les autres la proposition $\overline{p}$ et que ces deux classes correspondant à p et à $\overline{p}$ sont complémentaires sous z. On aura donc, par définition :

$$(1)\ p \cdot \overline{p} = 0 \qquad (2)\ p \vee \overline{p} = z$$

$$(3)\ \overline{p} = z \cdot \overline{p} \qquad (4)\ p = z \cdot \overline{\overline{p}}$$

Si p. ex. p signifie « x est vivant », tous les x se répartiront en vivants et non-vivants ($\overline{p}$) et la non-contradiction ($p \cdot \overline{p} = 0$)

reviendra à affirmer qu'aucun x ne saurait être à la fois vivant et non-vivant, puisque, par définition, non-vivant est complémentaire de vivant. Il en résulte que les vivants seront tous les z qui ne sont pas non-vivants (4) et que les non-vivants seront tous les z qui ne sont pas vivants (3).

Mais un tel critère ne relève que de la complémentarité simple, c'est-à-dire qu'il est de caractère purement intensif [1] et ne suppose que les rapports d'emboîtement de la partie dans le tout : la seule relation connue entre l'une des parties (correspondant à p) et l'autre partie (correspondant à $\overline{p}$) est, en effet, une relation de complémentarité, c'est-à-dire une relation se référant au tout : $p = z \cdot \overline{\overline{p}}$. Faut-il alors s'étonner qu'une telle définition exclusivement intensive de la non-contradiction ne suffise plus à rendre compte de la cohérence propre aux systèmes extensifs et numériques ? Il est au contraire évident que de tels systèmes débordent le cadre intensif et relèvent par conséquent d'un critère plus délicat de la non-contradiction.

Supposons, p. ex., qu'en vertu des axiomes choisis mais en maintenant les définitions ordinaires des nombres 2, 4 et 5, on obtienne en un système arithmétique une proposition telle que $2 + 2 = 5$. Si nous faisons correspondre $2 + 2$ à la proposition p et 5 à la proposition $\overline{p}$, la question est alors de savoir pourquoi elles sont contradictoires ? Est-ce à nouveau simplement parce que l'ensemble (infini) des nombres entiers se partage en deux sous-ensembles complémentaires, dont l'un comporte les rapports $0 + 4 = 4$; $1 + 3 = 4$; $2 + 2 = 4$; etc. et dont l'autre contient toutes les autres relations vraies concernant les 5, 6, 7, … , de telle sorte qu'il n'existe pas d'équation comportant à la fois $2 + 2$ dans un membre et un nombre autre que 4 dans l'autre membre ? Il est clair que, à raisonner d'une façon aussi simple, on n'arrivera jamais non pas seulement à démontrer mais même à assurer intuitivement la non-contradiction du système. Or, c'est à peu près ce que l'on fait en voulant soumettre l'arithmétique à la logique. La non-contradiction arithmétique tient au contraire au fait que les opérations génératrices des nombres entiers positifs et négatifs forment un groupe, tel que l'opération directe + 1 soit annulée par l'opération inverse –1, sous la forme : $+ 1 - 1 = 0$. C'est cette composition de l'opération directe + 1 et de l'inverse – 1 en l'identique 0 qui constitue le correspondant réel, sur le plan des nombres entiers, de

1. Pour les définitions de l' « intensif » et de l' « extensif », voir chap. I, § 3.

ce qu'est l'équation logique $p \cdot \overline{p} = 0$. Sera contradictoire, par conséquent, toute équation numérique dans laquelle les opérations directes et inverses ne s'annuleront pas l'une l'autre : soit $+n - n \gtrless 0$. Il en résulte que la non-contradiction arithmétique comporte un autre critère, et beaucoup plus fin, que la non-contradiction simplement logique ou intensive, relevant de la seule complémentarité.

Mais quel est alors le rapport entre ces deux sortes de non-contradictions ? Il tient précisément au jeu des opérations directes et inverses et l'on peut définir de façon générale la non-contradiction par la réversibilité, tout en différenciant les paliers distincts de non-contradictions selon la nature des systèmes opératoires tous caractérisés par leur composition réversible. En particulier, la non-contradiction logique $p \cdot \overline{p} = 0$ n'est pas autre chose qu'une composition réversible particulière consistant à annuler une opération directe (ou affirmation) par son inverse (ou négation), ce qui équivaut à l'opération identique 0.

En effet, comme nous l'avons montré ailleurs [1] en nous appuyant sur la règle bien connue de dualité $\overline{p \vee q} = \overline{p} \cdot \overline{q}$ et $\overline{\overline{p} \cdot \overline{q}} = p \vee q$, toute la logique des propositions est réductible à un « groupement » unique (voir pour la notion de « groupement » le chap. I, § 3), dont l'opération directe est la disjonction $p \vee q$ et l'opération inverse la négation conjointe $\overline{p} \cdot \overline{q}$. L'opération identique générale étant (v) 0 et les identiques spéciales étant $(p \vee q = p)$ et $(p \vee z = z)$ on peut tirer toute la logique des propositions des équations (1) à (4) : $p \cdot \overline{p} = 0$; $p \vee \overline{p} = z$; $p = z \cdot \overline{\overline{p}}$ et $\overline{p} = z \cdot \overline{p}$. Or, un « groupement » constituant le seul système de compositions réversibles compatibles avec les rapports purement intensifs d'inclusion de la partie dans le tout et de complémentarité, il en résulte que la non-contradiction logique $p \cdot \overline{p} = 0$ exprime simplement la réversibilité inhérente à un tel système. Il va donc de soi qu'elle ne saurait suffire à démontrer la non-contradiction de l'arithmétique, puisque cette démonstration reviendrait alors à réduire les rapports extensifs (de partie à partie) et notamment les rapports numériques (itération de l'unité et induction complète) aux seuls rapports intensifs (de complémentarité et d'inclusion) !

Au contraire, si la non-contradiction en général se ramène à la réversibilité en général, chaque ensemble de groupes enveloppe sa non-contradiction et comporte son critère spécial de

1. *Traité de logique*, § 39.

contradiction, en référence avec l'opération identique du système. De ce point de vue encore, la logique des mathématiques se réduit aux structures mathématiques elles-mêmes.

IV. Or, des considérations qui précèdent, il est possible de tirer une interprétation du raisonnement mathématique qui concilie sa fécondité et sa rigueur, tout en le distinguant du raisonnement simplement logique.

Le raisonnement logique est déjà fécond, parce que deux opérations logiques quelconques composées entre elles donnent une opération nouvelle non contenue dans les composantes. Soit p. ex. la conjonction $(p \cdot q)$: elle affirme simplement la vérité de certaines combinaisons de valeurs admettant simultanément p vraie et q vraie (p. ex. $p = x$ est Mammifère et $q = x$ est Vertébré). Si nous affirmons, d'autre part $(\overline{p} \cdot q)$, nous admettons la conjonction possible de q avec non-p (p. ex. si x est un Oiseau il est à la fois non-Mammifère et Vertébré, soit $\overline{p} \cdot q$). Or, la réunion de $(p \cdot q)$ et de $(\overline{p} \cdot q)$ sous la forme $[(p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot q)]$ contient plus que $(p \cdot q)$ et que $(\overline{p} \cdot q)$ pris chacun à part : cette réunion disjonctive signifie, en effet, que q peut être affirmée indépendamment de la vérité ou de la fausseté de p. Ajoutons encore la vérité de $\overline{p} \cdot \overline{q}$ (ni Mammifère ni Vertébré) et nions celle de $p \cdot \overline{q}$ (Mammifère et non-Vertébré) : cette réunion $[(p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})]$, avec exclusion de $(p \cdot \overline{q})$, signifie alors que p implique q (soit $p \supset q$), c'est-à-dire affirme un rapport essentiel entre p et q, non contenu ni dans $(p \cdot q)$, ni dans $(\overline{p} \cdot q)$ ni même dans $[(p \cdot q) \vee (\overline{p} \cdot \overline{q})]$. Ainsi la fécondité de la logique tient à ses compositions opératoires, que suppose toute déduction, aussi tautologique soit-elle d'apparence.

Quant à la rigueur du raisonnement logique, elle tient à la réversibilité des compositions possibles, puisque (nous venons de le voir) le critère de la non-contradiction $(p \cdot \overline{p} = 0)$ n'est autre que la réversibilité elle-même. La rigueur de la logique des propositions provient donc du fait que ses compositions constituent, non pas seulement un réseau ou lattice, mais bien un « groupement » unique, c'est-à-dire un lattice rendu réversible par ses complémentarités hiérarchiques, et dont l' « opération identique » fondamentale est précisément $(p \cdot \overline{p} = 0)$ [*]. La rigueur ne tient donc ni à l'identité simple $p = p$, ni à la non-contradiction conçue comme une forme statique indépendante, mais à la réversibilité du système d'ensemble, dont les compositions non identiques expliquent par ailleurs la fécondité [1].

1. Un tel fait rencontre donc l'effort des logiques actuelles dites dialectiques, pour dépasser le point de vue de l'identité ou de la non-contradiction simples, au profil des transformations liées à un système d'ensemble.

[*Note FJP : nous avons substitué $(p \cdot \overline{p} = 0)$ à $(p \cdot \overline{q} = 0)$.]

Si de la logique, nous passons au raisonnement mathématique, nous comprenons alors pourquoi la fécondité en est décuplée, quoique la rigueur y repose sur un principe équivalent, mais d'application plus affinée.

La fécondité du raisonnement mathématique dépasse sans commune mesure celle du raisonnement logique pour cette raison bien simple qu'au lieu d'emboîter sans plus la partie dans le tout ou de ne relier les parties entre elles que par complémentarité ou intersection (celle-ci étant à nouveau une inclusion), le raisonnement mathématique construit un ensemble toujours plus riche de relations entre les parties, considérées en elles-mêmes et sans passer par l'intermédiaire du tout (produits, correspondances bi-univoques, etc.). S'il s'est avéré impossible de « fonder » le principe général d'induction complète au moyen des seules ressources de la logique, c'est, en effet, que toute récurrence numérique suppose des relations directes entre les parties des totalités envisagées et qu'il est exclu de réduire de telles relations aux seuls rapports des parties avec le tout (inclusion et complémentarité). Dans la mesure où le nombre déborde la classe intensive, dans cette même mesure et pour les mêmes raisons le raisonnement par récurrence ne peut que demeurer irréductible aux compositions opératoires de la logique bivalente des propositions. L'extension considérable de fécondité que marque le passage du logique au mathématique tient donc à toute la différence qui sépare du simple « groupement » (ou composition réversible des relations de partie à tout), les groupes numériques, algébriques et géométriques fondés sur les relations directes des parties entre elles.

Or, c'est précisément cette structure fondamentale de groupe qui assure la rigueur du raisonnement mathématique (sitôt dépassés les rapports élémentaires de partie à tout qui se retrouvent dans la théorie des ensembles). Si la non-contradiction repose sur la réversibilité, on retrouvera ainsi, à partir de la non-contradiction logique, une suite de paliers de non-contradiction liés à des formes de réversibilité toujours plus affinées en fonction de la différenciation même des systèmes. Comme y a déjà insisté G. Juvet, c'est seulement en découvrant le « groupe fondamental » sur lequel repose une théorie, que l'on est certain de la cohérence interne de celle-ci [1]. C'est assez dire que la rigueur du raisonnement mathématique ne saurait faire qu'un avec sa

1. G. JUVET, L'axiomatique et la théorie des groupes, *Actes du Congrès inlern. de Philos. scientif.*, VI., Paris, Hermann, 1936.

fécondité : plus exactement dit, la fécondité tient au caractère illimité des compositions opératoires dont la réversibilité assure la rigueur.

De la sorte, l'analyse du raisonnement mathématique prépare et préfigure la solution à donner au problème des êtres abstraits : dans la mesure où le mathématique déborde le logique, l'existence opératoire s'avère, en effet, d'autant plus effective, qu'elle est ainsi doublement irréductible à la tautologie pure.

§ 6. LES THÈSES DE J. CAVAILLÈS ET D'A. LAUTMAN. — L'évolution des rapports entre la logistique et les mathématiques, durant la troisième des trois périodes distinguées à l'instant, a conduit deux mathématiciens philosophes, J. Cavaillès et A. Lautman, à une réflexion d'ensemble sur la nature des opérations et des êtres mathématiques. Or, les deux œuvres [1] de ces auteurs, parues la même année (1938), sont d'autant plus intéressantes à rapprocher que, tout en s'orientant en des directions très différentes au premier abord, elles convergent en réalité sur les affirmations essentielles de la spécificité du devenir mathématique et sur cette sorte de dialectique opératoire, invoquée par l'un sur le plan du développement de la conscience, ou par l'autre sur les deux plans corrélatifs de l'histoire et des essences platoniciennes, pour expliquer la connexion des constructions génétiques avec les formes d'équilibre « globales ».

« Si féconde soit-elle, si intimement unie avec la pensée mathématique véritable, la méthode axiomatique peut-elle la fonder ? En tant que caractéristiques d'un procédé opératoire, les axiomes d'un système ne font que le décrire », dit Cavaillès (p. 79) et malgré les analogies entre l'effort de Hilbert et le logicisme, les résistances rencontrées dans le problème de la saturation empêchent de les identifier. « De toute façon, l'axiomatisation se réfère donc doublement à un donné : extérieurement, donné du système auquel elle emprunte ses concepts ; intérieurement, donné d'une unité opératoire qu'elle ne fait que caractériser » (p. 88). Ce donné intérieur ne serait réductible que si l'on parvenait à prouver la saturation. Or, « on n'aperçoit pas dans la logique ordinaire un moyen quelconque de la prouver qui lui donne un sens effectif ; celui qu'elle a est, en réalité, emprunté à l'intuition de l'unité du processus opératoire caractérisé par les axiomes » (p. 89).

Mais, depuis que Hilbert a reconnu l'impossibilité de réduire l'arithmétique à la logique et n'a ambitionné d'atteindre qu'une « réédification simultanée de la mathématique et de la logique » (p. 90), depuis que

1. CAVAILLÈS, *Méthode axiomatique et formalisme*, Hermann, 1938, et A. LAUTMAN, *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique*, Hermann, 1938.

Carnap lui-même a renoncé à la syntaxe unique pour admettre que « la mathématique exige une suite infinie de langues toujours plus riches » (p. 166), on ne peut plus espérer une réduction pure et simple du mathématique au logique : « L'étroit corselet des règles de la logique classique n'enserre que de façon incommode les expériences imprévisibles faites sur les formules… La formalisation complète aboutit paradoxalement à supprimer les indépendances opératoires que la méthode axiomatique aurait eu pour but de sauvegarder » (p. 175). La logique, comme Brouwer l'a définitivement établi, selon Cavaillès, ne porte que sur le discours et non sur les enchaînements.

En particulier, toutes les démonstrations de non-contradiction « échouent également devant l'axiome général d'induction complète » (p. 143). Tant les résultats de Gentzen (avec son recours à une induction transfinie) que ceux que de Goedel (p. 164-165) empêchent la logique de « fonder » les mathématiques. Même du logicisme correspondant à la nouvelle manière de Carnap « aucune solution au problème du fondement ne peut être attendue » (p. 169).

Ainsi ni l'expérience au sens physique, ni aucun *a priori* logique ne sauraient fonder les mathématiques (p. 179-180). Quant au brouwerisme « la question du sens d'une opération telle que la posent les intuitionnistes émane du préjugé — d'ontologie non critique — que l'objet doit être défini antérieurement à l'opération, alors qu'il en est inséparable » (p. 178). En quoi consiste alors le fondement réel ? En une dialectique, mais se confondant avec le devenir général de la conscience, c'est-à-dire si nous comprenons bien, avec la genèse et l'histoire opératoire elles-mêmes.

Cette genèse n'est pas à chercher dans l'analyse des stades initiaux : « Quant à l'application des mathématiques à la « réalité », c'est-à-dire au système d'interactions vitales entre homme et choses, il est visible d'après ce qui précède qu'elle n'intéresse plus le problème du fondement des mathématiques : l'enfant devant son boulier est mathématicien, et tout ce qu'il y peut faire n'est que mathématique » (p. 180). C'est à l'histoire opératoire ultérieure qu'il faut donc recourir, comme p. ex., au « triple rôle de la généralisation… : libération d'opérations de conditions extrinsèques de leur accomplissement, dissociation ou identification de processus accidentellement unis ou distingués, enfin position de nouveaux objets comme corrélats d'opérations reconnues autonomes. Dans tous les cas la fécondité du travail effectif est obtenue par ces ruptures dans le tissu mathématique, ce passage dialectique d'une théorie portant en elle-même ses bornes à une théorie supérieure qui la méconnaît quoique et parce qu'elle en procède » (p. 172). Et encore : « l'élargissement de la conscience et le développement dialectique de l'expérience coïncident. Ils donnent lieu à l'engendrement indéfini des objets dans ce que nous appellerons le *champ thématique* : on a vu quelques-uns de ces processus d'engendrement, les différentes sortes de généralisations, les formalisations auxquelles s'ajoute la *thématisation* proprement dite : transformation d'une opération en élément d'un champ opératoire

supérieur, exemple topologie des transformations topologiques (essentielles d'une façon générale en théorie des groupes). Trois sortes de moments dialectiques… La nécessité de l'engendrement d'un objet n'est jamais saisissable qu'à travers la constatation d'une réussite ; l'existence dans le champ thématique n'a de sens que corrélat d'un acte effectif » (p. 177).

« Quant au moteur du processus, il semble échapper à toute investigation. C'est ici le sens plein de l'expérience, dialogue entre l'activité consciente en tant que pouvoir de tentatives soumises à des conditions et ces conditions mêmes » (p. 178). « Le champ thématique n'est donc pas situé hors du monde mais est transformation de celui-ci : la pensée effective (exigeant une conscience plus complète) des choses est pensée de ses objets (la pensée adéquate d'une pluralité est pensée de son nombre). S'il reste un élément inéliminable d'incertitude… son action ne porte pas vers l'arrière, les gestes accomplis effectivement restant valables (validité définitive des énoncés), mais vers l'avant pour une transformation de ce qui est posé (modification des notions) » (p. 179).

On voit combien cette thèse converge avec la position génétique. Il n'est qu'un point où nous invoquerions les faits contre Cavaillès, mais cela en faveur de Cavaillès lui-même : si l'enfant, en présence de son boulier, est déjà mathématicien, c'est qu'il est simultanément occupé à construire le nombre et la logique entière, et cela parce que son champ thématique est déjà la transformation d'un monde. « On ne voit absolument pas la raison, écrivait Fraenkel en 1928, pourquoi les lois de l'arithmétique formelle correspondent exactement aux expériences de l'enfant devant son boulier » (p. 168). La réponse à ce problème n'est pas seulement à chercher au cours de l'histoire opératoire des niveaux supérieurs : elle peut être aussi trouvée dès l'analyse des formes les plus humbles de l'activité. La seule vraie méthode dialectique est ainsi la méthode génétique elle-même.

Or, si platonicien qu'il se dise, A. Lautman ne s'oppose nullement à ce génétisme opératoire de Cavaillès à la manière dont un Russell (au temps où il croyait aux universaux) différait d'un L. Brunschvicg : il ajoute simplement à la reconnaissance du devenir de la conscience — à nouveau conçu comme une genèse essentiellement opératoire — la considération des formes d'équilibre ; et c'est faute de savoir où situer ces dernières dans l'interprétation du développement, qu'il les appuie sur une sorte de devenir supra-historique, au lieu de chercher leur explication dans le mécanisme même du processus génétique, jusqu'en ses racines proprement infrahistoriques.

Le développement des mathématiques témoigne de l'existence d'une certaine réalité (p. 7) et Brunschvicg plus que quiconque a développé

l'idée que cette « objectivité… était l'œuvre de l'intelligence, dans son effort pour triompher des résistances que lui oppose la matière sur laquelle elle travaille » (p. 9). Or la philosophie mathématique de Brunschvicg, à laquelle Lautman se réfère ainsi de la manière la plus significative, ne se réduit nullement à une psychologie de l'invention. Elle écarte simplement toute déduction *a priori*. « Entre la psychologie du mathématicien et la déduction logique, il doit donc y avoir une place pour une caractérisation intrinsèque du réel. Il faut qu'il participe à la fois du mouvement de l'intelligence et de la rigueur logique, sans se confondre ni avec l'un ni avec l'autre, et ce sera notre tâche que d'essayer cette synthèse » (p. 10). Ainsi posé, le problème est donc de « développer une conception de la réalité mathématique où s'allient la fixité des notions logiques et le mouvement dont vivent les théories » (p. 12). En effet, « les théories mathématiques sont susceptibles d'une double caractérisation, l'une qui porte sur le mouvement propre de ces théories, l'autre sur les liaisons d'idées qui s'incarnent dans ce mouvement. Ce sont là deux éléments distincts dont la réunion constitue, à notre avis, la réalité inhérente aux mathématiques » (p. 147).

Cette dualité est attestée en particulier par l'état actuel du problème de la formalisation. « Pour formaliser l'analyse il faut pouvoir appliquer l'axiome de choix, non seulement à des variables numériques, mais à une catégorie plus élevée de variables, celle où les variables sont des fonctions de nombres. Les mathématiques se présentent ainsi comme des synthèses successives où chaque étape est irréductible à l'étape antérieure. De plus, et ceci est capital, une théorie ainsi formalisée est incapable d'apporter avec elle la preuve de sa cohérence interne ; il faut lui superposer une métamathématique qui prend la mathématique formalisée comme objet et l'étudie du double point de vue de la non-contradiction et de l'achèvement » (p. 11). Mais, Lautman y insiste, « ce n'est là qu'un idéal… et l'on sait à quel point cet idéal apparaît actuellement comme difficile à atteindre » (p. 12-13). Il y a donc dualité entre la mathématique et la métamathématique, cette dernière envisageant « certaines structures parfaites, réalisables éventuellement par des théories mathématiques effectives, et ceci indépendamment du fait de savoir s'il existe des théories jouissant des propriétés en question » (p. 13). Or, c'est précisément cette opposition entre l'effectif en devenir et l'idéal demeurant supérieur à lui qui justifie selon Lautman la dialectique du mouvement mathématique et de l'immobilité logique. Il faut reconnaître à la fois « l'irréductibilité des mathématiques à une logique *a priori* et leur organisation autour de pareils schémas logiques » (p. 147-148). « On peut même dire qu'une dialectique qui s'engagerait dans la détermination des solutions que ces problèmes logiques peuvent comporter, se verrait entraînée à constituer tout un ensemble de distinctions subtiles et d'artifices de raisonnement qu'imiteraient à ce point les mathématiques qu'elle se confondrait avec les mathématiques elles-mêmes. Tel est le sort de la logique mathématique dans ses développements les plus récents. Il est impossible de concevoir ce qu'est le problème de la non-contradic-

tion de l'arithmétique sans refaire toute l'arithmétique, mais dès qu'on essaie d'établir une démonstration effective de la non-contradiction de l'arithmétique, on est obligé d'employer dans cette démonstration des moyens mathématiques qui dépassent en richesse ceux de la théorie dont on cherche à garantir la validité. Ces résultats, dus à K. Goedel, montrent de façon définitive que la non-contradiction de l'arithmétique ne se laisse pas ramener à la non-contradiction d'une théorie plus simple, et, dans l'état actuel de la science, toute démonstration métamathématique de la non-contradiction de l'arithmétique emploie forcément des moyens transfinis. Il semblait donc que ce problème eût perdu tout intérêt logique, jusqu'à ce que M. Gentzen ait su l'envisager sous un autre aspect : « Il est parfaitement concevable, écrit-il, que l'on démontre la non-contradiction de l'arithmétique avec des moyens qui dépassent l'arithmétique mais qui néanmoins peuvent passer pour plus assurés que les parties discutables de l'arithmétique pure elle-même. » On voit de cette façon comment le problème de la non-contradiction a un sens, alors même que l'on ignorerait les moyens mathématiques nécessaires pour le résoudre » (p. 148-149).

Le schéma fondamental de l'interprétation de Lautman est donc la subordination du devenir opératoire à un idéal de connexions qui le dépassent. Mais, avant de conclure de là au platonisme, Lautman se livre à une analyse profonde des aspects les plus généraux des « structures » mathématiques et c'est cette caractérisation structurelle qui donne son sens réel à une telle conclusion.

Il y a tout d'abord dualité de points de vue entre une méthode « locale », ou atomistique, procédant de l'élément à la totalité, et la méthode « globale » procédant du tout à la partie. « L'étude globale cherche au contraire à caractériser une totalité indépendamment des éléments qui la composent ; elle s'attaque d'emblée à la structure de l'ensemble, assignant ainsi une place aux éléments avant même que d'en connaître la nature ; elle tend surtout à définir les êtres mathématiques par leurs propriétés fonctionnelles, estimant que le rôle qu'ils jouent leur confère une unité bien plus assurée que celle qui résulte de l'assemblage des parties » (p. 19). Le rôle des totalités opératoires est ainsi fondamental dans la pensée mathématique actuelle, où les deux problèmes se retrouvent sans cesse de partir de la structure totale pour déterminer les conditions à remplir par les éléments pour s'y intégrer ou de partir des propriétés des éléments et de chercher « à lire dans ces propriétés locales la structure de l'ensemble en lequel ces éléments se laissent ranger » (p. 29). D'où, dans les deux cas, la manifestation d'une « influence organisatrice du tout » (p. 29). Lautman fait, à ce propos, l'aveu d'une préoccupation extrêmement révélatrice, à la fois quant aux implications sous-jacentes de son système et au rôle de l'idée de totalité dans la pensée mathématique contemporaine : « Nous rencontrons ainsi en mathématiques des considérations qui peuvent à première vue paraître étrangères aux mathématiques et y apporter comme le reflet de certaines conceptions propres à la biologie ou à la sociologie. Il est évident que l'être

mathématique tel que nous le concevons n'est pas sans analogie avec un être vivant ; nous croyons cependant que l'idée de l'action organisatrice d'une structure sur les éléments d'un ensemble est pleinement intelligible en mathématiques, même si transportée en d'autres domaines, elle perd de sa limpidité rationnelle » (p. 29). Cette « solidarité du tout et de ses parties » se trouve notamment dans les notions de groupe et de corps [1] : « en se donnant les axiomes auxquels obéissent les éléments d'un groupe ou d'un corps, ou se donne par là même, d'un coup, la totalité souvent infinie des éléments du groupe ou du corps » [2]. Il existe en ce cas une véritable « implication du tout dans la partie » (p. 30).

Or, ce rôle fondamental des totalités opératoires (ainsi que la distinction entre les « propriétés intrinsèques » d'un être mathématique et les « propriétés induites » à partir du système ambiant) renouvelle la question des rapports entre la logique et les mathématiques et permet de dépasser définitivement le logicisme. « Les logiciens ont toujours voulu (depuis la découverte des paradoxes russelliens) interdire les définitions non prédicatives, c'est-à-dire celles où les propriétés d'un élément sont solidaires de l'ensemble auquel cet élément appartient. Les mathématiciens n'ont jamais voulu admettre la légitimité de cette interdiction, montrant à juste titre la nécessité de faire parfois appel, pour définir certains éléments d'un ensemble, à des propriétés globales de cet ensemble » (p. 39). La logique « n'est, en effet, qu'une discipline mathématique parmi les autres, et les genèses qui s'y manifestent sont comparables à celles que nous observons ailleurs (p. 83).

Le rapport entre la logique et les mathématiques se précise notamment dans le processus que Lautman appelle la « montée vers l'absolu » (chap. III) après l'avoir annoncé par l'expression plus précise : « la montée vers l'achèvement » (p. 14). Il s'agit, p. ex. dans l'ordre des groupes algébriques de Galois, du fait que l' « imperfection » d'un élément de base, par rapport au corps donné, se réfère nécessairement à la structure opératoire d'ensemble, qui seule est achevée. Or, seuls ces « essais d'organisation structurale… confèrent aux êtres mathématiques un mouvement vers l'achèvement par quoi on peut dire qu'ils existent. Mais cette existence ne se manifeste pas seulement en ce que la structure de ces êtres imite les structures idéales auxquelles ils se laissent comparer ; il se trouve que l'achèvement d'un être soit en même temps genèse d'autres êtres, et ce sont là des relations logiques entre l'essence et l'existence où s'inscrit le schéma de créations nouvelles » (p. 80). Ainsi «les théories mathématiques se développent par leur propre force, dans une étroite solidarité réciproque et sans référence aucune aux Idées que leur mouvement rapproche » (p. 139). En effet « les schémas logiques que nous avons décrits ne sont pas antérieurs à leur réalisation au sein d'une théorie » (p. 149). « Le sort du problème des rapports du tout et de la partie, de la réduction des propriétés extrinsèques en propriétés intrinsèques, de

1. Un corps est un système de deux groupes, l'un additif et l'autre multiplicatif.

2. A. LAUTMAN, *Essai sur l'unité des sciences mathématiques*, p. 9.

la montée vers l'achèvement, la constitution de nouveaux schémas de genèse dépendent du progrès des mathématiques elles-mêmes ; le philosophe n'a ni à dégager des lois ni à prévoir une évolution future » (p. 149). « Toute tentative logique qui prétendrait dominer *a priori* le développement des mathématiques méconnaît donc la nature essentielle de la vérité mathématique, car celle-ci est liée à l'activité créatrice de l'esprit, et participe de son caractère temporel » (p. 147).

On ne saurait ainsi accepter qu'un seul *a priori* : c'est uniquement la possibilité d'éprouver le souci d'un mode de liaison entre deux idées et de décrire phénoménologiquement ce souci, indépendamment du fait que la liaison cherchée peut être ou n'être pas opérable » (p. 149). Mais c'est en cela qu'il existe une réalité ou une objectivité mathématique qui transcende le temps et le mouvement. En accord, sur cette thèse générale, avec P. Boutroux, Lautman se sépare cependant de lui sur le point essentiel que « le problème de la réalité mathématique ne se pose ni au niveau des faits, ni à celui des êtres, mais à celui des théories. A ce niveau, la nature du réel se dédouble » (p. 146-147) en un mouvement propre aux théories et en liaisons d'idées s'incarnant en elles. Mais, répétons-le, cette incarnation ne résulte pas d'une préformation.

C'est ici que se précise le platonisme de Lautman, platonisme en quelque sorte dynamique ou dialectique : « au-delà des conditions temporelles de l'activité mathématique, mais au sein même de cette activité apparaissent les contours d'une réalité idéale qui est dominatrice par rapport à une matière mathématique qu'elle anime, et qui pourtant, sans cette matière, ne saurait révéler toute la richesse de son pouvoir formateur » (p. 150). Cette réalité ne serait cependant pas elle-même le siège d'une progression sans fin : « La métamathématique qui s'incarne dans la génération des idées et des nombres ne saurait donner lieu à son tour à une méta-métamathématique ; la régression s'arrête dès que l'esprit a dégagé les schémas selon lesquels se constitue la dialectique » (p. 153).

Sans cet arrêt final, nous accepterions intégralement le néo-platonisme apparent de Lautman, tant il est, non seulement peu contradictoire avec le génétisme opératoire, mais encore complémentaire de l'idée même de construction temporelle. Il est clair, en effet, que toute analyse génétique ou historico-critique met en évidence une continuelle dualité de plans, sur laquelle nous avons été conduits à insister dès le départ (voir Introduc. § 5) et tant à propos de l'espace que du nombre : le développement réel ou temporel des opérations, et les formes d'équilibre vers lesquelles il tend, cet équilibre enveloppant lui-même un ensemble toujours plus riche de transformations virtuelles. Que l'on décrive cette réalité idéale, impliquée en tout équilibre opératoire, dans le vocabulaire du platonisme, peu importe tant que l'on respecte les deux conditions soulignées par Lautman lui-même : ni *a priori*

structural, ni extériorité de l'idéal par rapport au développement réel.

Il est extrêmement frappant, en particulier, de constater combien l'argumentation de Lautman traduit, en un autre langage, ce que nous avons observé sans cesse dans la genèse elle-même, quant au double rôle des totalités opératoires. D'une part, ces totalités constituent les conditions de la structuration réelle des opérations logico-mathématiques et en représentent ainsi les formes d'équilibre nécessaires, à tous les niveaux et dès le palier concret : c'est pourquoi la comparaison des relations de partie à tout en mathématique avec les totalités organiques est plus qu'une simple image et exprime une liaison psychologique fondamentale entre l'organisation vivante et l'organisation opératoire. Mais, d'autre part, ces totalités jouent un rôle normatif : celui de l'idéal ou du virtuel, dont l'incorporation au réel est logiquement nécessaire à son achèvement.

Pourquoi donc, si la thèse d'A. Lautman est aussi proche de ce que nous apprend l'analyse génétique (des niveaux les plus élémentaires jusqu'à la formalisation métamathématique), en venir à cette sorte d'arrêt final qui est la seule part de platonisme métaphysique se mêlant à ce que l'on pourrait appeler le platonisme génétique de l'auteur ? Deux des intuitions platoniciennes fondamentales sont celles de la réminiscence et de la participation. Si les totalités opératoires s'apparentent bien aux totalités organiques, on pourrait traduire la réminiscence dans le langage génétique d'une régression sans fin à des coordinations toujours plus primitives, dont les opérations abstraireraient leurs éléments ; et c'est bien ce qu'a senti Lautman. Mais en ce cas la participation n'a de son côté aucune raison d'être limitée par un achèvement immobile : c'est au contraire, grâce à une suite de constructions, d'équilibre croissant, que peut être conçue la marche vers l'idéal. L'achèvement ne serait autre, alors, que la fermeture à la fois régressive et progressive, du cercle des connaissances dont A. Lautman a, trop brusquement, voulu s'évader. C'est ce qu'il nous reste à montrer.

§ 7. CONCLUSIONS : LA NATURE DES ÊTRES ET DES OPÉRATIONS MATHÉMATIQUES. — Conformément au principe de l'épistémologie génétique, la question de la nature des êtres mathématiques ne saurait être résolue qu'en fonction de leur développement et en comparant ce dernier à celui de la pensée physique ou de la biologie. Or, on peut résumer comme suit ce que nous a appris l'examen de cette évolution et de la direction dans laquelle elle s'est engagée :

1. En leur source, les opérations logico-mathématiques procèdent des actions les plus générales que nous pouvons exercer sur les objets ou sur les collections d'objets : actions qui consistent à réunir ou à dissocier, à ordonner ou à changer d'ordre, à mettre en correspondance, etc. Or, dès ce niveau de départ, on peut distinguer en de telles actions deux pôles demeurant d'ailleurs indifférenciés du point de vue du sujet lui-même. D'une part, ces actions comportent un aspect physique, plus ou moins spécialisé en fonction des objets eux-mêmes : ainsi les actes de réunir ou de dissocier, d'ordonner ou de changer d'ordre, etc. consistent d'abord en mouvements réels, effectués matériellement ou imaginés en pensée, etc. D'autre part, ces actions font intervenir également des coordinations générales, reliant entre eux les actes dont il vient d'être question : pour réunir ou séparer des objets, les ordonner ou les déplacer, etc., il faut que les actions elles-mêmes qui s'appliquent à ces objets soient réunies les unes aux autres, ou dissociées, soient ordonnées, mises en correspondance, etc. C'est en cet aspect d'activité coordinatrice des actions physiques elles-mêmes qu'il faut chercher la racine des opérations logico-mathématiques et, si les coordinations générales de l'action et les actions spécialisées sont, au début, indifférenciées les unes des autres, cela ne prouve en rien que l'on puisse dériver les premières des secondes.

2. En effet, les phases ultérieures du développement génétique font assister à une différenciation croissante et rapide entre les opérations physiques, de plus en plus spécialisées en fonction des objets, et les opérations logico-mathématiques, dont le sujet dégage toujours mieux le caractère nécessaire au fur et à mesure qu'il les élabore au moyen d'éléments abstraits des coordinations initiales de l'action. C'est ainsi qu'au niveau des opérations concrètes déjà (7-8 ans), les groupements logiques et les structures numériques et spatiales sont constitués en systèmes déductifs distincts des opérations physiques dont ils demeuraient en partie indifférenciés au niveau de la pensée intuitive.

3. Dès le niveau des opérations formelles, les structures logico-mathématiques, non seulement continuent de se différencier par rapport aux opérations physiques, mais encore débordent de tous côtés la réalité expérimentale. D'une part, elles introduisent des généralisations opératoires sans signification concrètes immédiates (généralisations du nombre, etc.). D'autre part, et en prolongement des opérations concrètes, elles entraînent, dès le début de leur formalisation, une extension à l'infini qui marque

d'emblée et de la façon la plus nette la libération de ces structures par rapport à l'expérience.

4. Enfin les constructions axiomatiques qui généralisent la construction formelle sont élaborées indépendamment de l'expérience. Elles consistent, en particulier, à écarter telle propriété opératoire ou telle obligation d'opérer qui semblent imposées par la réalité expérimentale (p. ex. le cinquième postulat d'Euclide ou l'axiome d'Archimède), de manière à faire des coordinations usuelles un simple cas particulier des coordinations possibles. Or, il arrive fréquemment que le résultat de ce travail d'épuration aboutisse à la construction de structures rencontrant, non plus l'expérience telle qu'elle se présente aux débuts de l'élaboration des notions scientifiques, mais bien l'expérience affinée et imprévisible due aux techniques physiques les plus élaborées.

Déterminée par ces quatre régions, la courbe du développement des êtres mathématiques suit donc une direction à la fois nette et paradoxale : procédant de la coordination des actions exercées par le sujet sur l'objet, elle s'éloigne toujours plus de cet objet immédiat, mais sans cesser de conserver le pouvoir de le rejoindre, et en le retrouvant en fait à tous les niveaux de profondeur ou d'extension, auxquels son analyse physique peut conduire. D'où les deux problèmes essentiels que soulève la pensée mathématique : pourquoi cette pensée est-elle constructive, et pourquoi tout en dépassant sans cesse le réel, est-elle cependant en constant accord avec lui ?

Réexaminons, pour tenter de résoudre ces questions, (I) les stades initiaux, (II) les stades ultérieurs, puis nous analyserons (sous III) les rapports de la mathématique avec la physique et la biologie.

I. La pensée mathématique est féconde parce que, étant une assimilation du réel aux coordinations générales de l'action, elle est essentiellement opératoire.

Elle est féconde d'abord parce que les compositions d'opérations constituent de nouvelles opérations et que ces compositions, dont le raisonnement mathématique dégage les structures, se confondent en leur source avec la coordination même des actions. Il est remarquable, à cet égard, que les structures abstraites constituées par les « groupes » mathématiques et les « groupements » logistiques correspondent aux formes les plus élémentaires de la coordination psychologique des conduites. Quelles sont, en effet, les conditions d'équilibre d'un système de conduites, qu'il s'agisse de mouvements réels exécutés par le sujet, ou d'actions quelconques effectuées sur les objets ? C'est d'abord de pouvoir combiner deux actions ou deux mouvements en un seul ; c'est

ensuite de pouvoir revenir au point de départ (retour) ; c'est aussi de s'abstenir d'agir (cette abstention équivalant au produit d'un déplacement avec son inverse) ; c'est de pouvoir choisir entre plusieurs itinéraires conduisant au même but (détours) ; c'est enfin de distinguer entre des actions à effet cumulatif (p. ex. faire plusieurs pas successifs) et celles dont la répétition n'ajoute rien à l'action initiale (p. ex. relire deux fois son journal ou redire les mêmes paroles). Or, il est visible que les quatre premiers de ces cinq caractères les plus généraux de l'action constituent ce qu'il y a de commun aux groupes et aux groupements : la composition de deux opérations en une seule opération nouvelle appartenant au même système, la conversion des opérations directes en opérations inverses (retour), l'opération identique générale (opération nulle), l'associativité (détours) ; quant à la distinction entre les opérations cumulatives (en particulier l'itération) et la tautologie (identiques spéciales), c'est elle qui oppose précisément les groupes mathématiques aux groupements logiques. — La réversibilité, en particulier, qui constitue la propriété la plus caractéristique des transformations opératoires, mathématiques et logiques est, par ailleurs, la loi d'équilibre essentielle qui distingue l'intelligence de la perception ou de la motricité élémentaire de l'habitude. Tout le développement de l'intelligence est même caractérisé par un passage de l'irréversibilité, propre aux actions primitives, à la réversibilité opératoire marquant l'état d'achèvement des processus intellectuels. Il est d'un grand intérêt pour situer le mécanisme opératoire logico-mathématique dans son contexte génétique réel, de noter ces convergences entre les coordinations psychologiques de l'action (avec la réversibilité comme critère de l'équilibre) et les structures logiques et mathématiques essentielles.

Mais une opération comme telle est déjà une création du sujet, puisqu'elle est une action exercée par celui-ci sur les choses. Il est donc inexact de dire que la formation de la pensée mathématique soit due à une abstraction à partir de l'objet, comme si les matériaux de cette pensée étaient déjà contenus tels quels dans la réalité extérieure et qu'il suffise de les extraire pour engendrer les relations spatiales ou numériques. L'action, en quoi consiste l'opération à sa naissance, ajoute au contraire des éléments nouveaux à la réalité, et c'est en cette adjonction que consiste le début de la création propre aux mathématiques. Réunir des objets en une collection ou les en dissocier est un enrichissement apporté par l'action aux objets, car si la nature constitue à elle seule des ensembles ou les disloque, ce n'est pas à la manière d'une action libre (libre au sens où Brouwer caractérise le continu comme une suite de choix libres), mobile et réversible comme celles qui caractérisent la manipulation ou la pensée. De même, construire ou mesurer des figures sont des actions qui ajoutent quelque chose à la réalité, car celle-ci en ignore les éléments les

plus simples, tels les droites ou les plans et ne connaît, à une certaine échelle, que discontinuité et fluctuations.

Seulement la réalité extérieure se prête toujours à ces opérations ou à ces constructions, et c'est son accord sans cesse renouvelé qui motive la renaissance continuelle du réalisme. Là est le second caractère de la pensée mathématique : si elle est création, par rapport à la réalité physique et qu'elle ajoute quelque chose à cette dernière au lieu d'en abstraire ou d'en extraire sa matière, cependant dans la mesure où elle s'applique à la réalité, qu'elle dépasse par ailleurs considérablement (partout, p. ex. où intervient l'infini), l'expérience se trouve en accord avec le schème mathématique. Cet accord pose donc un deuxième problème, qu'il importe de résoudre dès le cas des opérations les plus simples, pour comprendre ce que sera une telle convergence lorsque la pensée mathématique anticipera des expériences à des années souvent de distance et leur fournira des cadres avant que l'idée même de telles expériences ait germé dans la pensée. Ces sortes d'anticipations montrent, en effet, que la rencontre entre les opérations mathématiques et le réel n'est pas nécessairement due à un ajustement réciproque, comme l'accord entre un principe de physique mathématique et les données expérimentales. Cherchons donc en quoi elle consiste dans les cas les plus élémentaires, c'est-à-dire dans ceux où l'ajustement réciproque semble évident, ce qui pourrait n'être qu'une apparence : p. ex. lorsqu'une collection de cailloux fournit le même nombre 10 quel que soit l'ordre dans lequel on les compte ou lorsqu'un triangle rectangle dessiné sur le papier présente effectivement une égalité approchée entre le carré de l'hypoténuse et celui des deux autres côtés.

Les solutions classiques de l'épistémologie philosophique s'enfermaient dans le dilemme : ou la réalité mathématique s'impose *a priori* à la réalité physique, ou la première s'extrait *a posteriori* de la seconde. La plupart des contemporains, tels Poincaré ou Meyerson, invoquent au contraire une troisième solution : mélange d'éléments empruntés au réel et de construction due au sujet pensant. A la limite de cette position, les logisticiens issus du cercle de Vienne réduisent l'apport du sujet à la seule syntaxe du langage destiné à exprimer le réel, tandis que tout ce qui dépasse la tautologie pure consiste en constatation de la réalité. Or, l'hypothèse d'une assimilation du réel aux opérations issues de l'action nous paraît comporter une quatrième solution, consistant à n'attribuer les rapports mathématiques ni au sujet seul (a priorisme), ni à l'objet seul (empi-

risme), ni à une interaction actuelle entre le sujet et l'objet extérieur à lui, mais à une interaction entre eux deux, demeurant intérieure au sujet lui-même.

Une image fera comprendre la différence entre cette quatrième possibilité et les trois autres. Supposons que l'objet, donc le monde physique, soit différent de ce qu'il est : les mathématiques et la logique demeureraient-elles alors identiques à ce que sont les nôtres ? Oui, selon l'apriorisme ; l'empirisme et les solutions du troisième type répondront au contraire que non. Mais pourquoi non ? Parce que l'expérience physique, seule source (selon l'empirisme) ou source partielle (selon la troisième solution) de la connaissance mathématique, imposera à cette dernière une structure différente. La quatrième solution consiste au contraire à admettre que ce n'est pas l'expérience physique, donc l'action extérieure de l'objet sur le sujet, qui imposerait cette modification, puisque la logique et les mathématiques sont issues de la coordination des actions du sujet et non pas des actions particulières le reliant aux objets. Or, si le monde physique était autre qu'il n'est ; ces coordinations mêmes en seraient modifiées pour une raison bien plus profonde que celle de l'expérience physique actuelle faite par chaque sujet : c'est parce que dans un monde différent, les structures mentales et physiologiques du sujet en général seraient autres, et que la vie elle-même serait issue d'une structure physico-chimique distincte de la nôtre. C'est donc de l'intérieur, et dans la mesure où le sujet tire son fonctionnement du réel par ses racines biologiques et physico-chimiques, et non pas au cours du déploiement de ses activités extérieures, que le sujet est en interaction avec l'objet en ce qui concerne les coordinations générales des actes, et c'est pourquoi ces coordinations s'accordent toujours avec le réel dont elles procèdent en leur source. Mais il reste à insister sur le fait que les coordinations élémentaires ne contiennent pas d'avance toutes les mathématiques (ce que nous verrons dans la suite) et surtout qu'elles interviennent seulement à l'occasion des actions sur l'objet, c'est-à-dire dans la mesure où elles coordonnent les actions physiques entre elles.

Pour mieux comprendre la signification de cette quatrième solution, rappelons encore la grande différence qui existe entre les positions du problème ne considérant que les sensations, d'une part, ou la pensée d'autre part, et la situation caractérisant l'adaptation motrice et opératoire. Si les données disponibles se répartissaient nécessairement en sensations (ou images-souvenirs, etc.) et en pensée, il va de soi qu'il serait difficile d'interpréter la naissance d'une notion, comme celle du

continu spatial, p. ex., sans invoquer, à titre de matériaux dont l'idée est progressivement « abstraite », le continu sensible tel qu'il est donné dans les perceptions les plus élémentaires : d'où, comme la sensation n'est alors suspendue qu'à elle-même ou à l'objet, l'hypothèse que cette perception du continu sensible provient du réel. Mais, ainsi que tant d'auteurs l'ont soutenu, de Helmholtz à Piéron, la sensation n'est qu'un indice ou un symbole, et il s'agit alors de déterminer ce qu'elle symbolise. Or, la sensation ou la perception est toujours partie intégrante d'un schème sensori-moteur, tel que l'élément sensible y constitue le signifiant, tandis que le signifié, c'est-à-dire la signification elle-même, est déterminé par l'élément moteur, autrement dit par ce facteur d'action que néglige l'antithèse sensations × pensée. Il en résulte que l'essentiel du continu, p. ex., passe du côté du sujet, puisque le mouvement continu du regard ou de la main, etc., qui suit l'objet est une action du sujet et que cette action est simplement accommodée à l'objet sans en dériver directement. A plus forte raison, dans les actions de réunir ou de dissocier, de placer (ordonner) ou de déplacer, etc., la perception des objets comme tels ne fournit que des indices accommodateurs, tandis que l'essentiel est l'acte lui-même, en sa réversibilité opératoire.

Cela rappelé, constatons à nouveau que les opérations logico-mathématiques sont précisément des actions qui n'empruntent pas leur contenu au détail des objets : ce ne sont pas seulement, en effet, des transformations caractérisant une « physique de l'objet quelconque », mais des « actions exercées sur l'objet quelconque », parce qu'elles portent sur les divers assemblages discontinus (logico-arithmétiques) ou continus (spatiaux) qu'il est possible de construire avec des objets quelconques, y compris leurs éléments. Comme l'a dit Poincaré, la géométrie commence avec la distinction des changements de position et des changements d'état, ceux-ci concernant la physique. Or, si cette distinction doit être construite, car les coordinations générales de l'action ne sont pas d'emblée dissociables des actions particulières qui sont coordonnées, elle marque bien le caractère des opérations spatiales, rendues indépendantes des transformations physiques de l'objet dans la mesure où le sujet parvient à différencier ce qui relève de ses actions particulières et ce qui intéresse leur coordination. A plus forte raison en est-il de même des opérations logico-arithmétiques, qui sont indépendantes des changements de position autant que d'état (sauf que, à nouveau, elles commencent par rester indifférenciées, au point de vue du sujet, des opérations spatiales, avant d'en être peu à peu dissociées).

Encore faut-il dissiper deux équivoques essentielles : d'une part, c'est toujours à l'occasion d'actions particulières exercées sur les objets que les coordinations élémentaires se manifestent,

mais, de ce que ces coordinations coordonnent entre elles des actions physiques, cela ne signifie pas que la coordination comme telle de ces actions dérive d'elles ni des objets coordonnés par leur intermédiaire ; d'autre part et conséquemment, c'est toujours l'expérience qui enseigne à l'enfant les premières vérités logico-mathématiques, mais l'intervention de l'expérience ne signifie pas que ces vérités soient extraites des objets, car le résultat d'une expérience ne consiste pas nécessairement en une lecture de propriétés extraites de l'objet et il se réduit au contraire, dans le cas des expériences logico-mathématiques, à découvrir des liaisons nécessaires propres à la coordination des actions du sujet. Qu'il s'agisse donc des rapports entre la coordination générale des actes et les actions physiques particulières coordonnées par elle, ou entre l'expérience logico-mathématique et l'expérience physique, l'analyse génétique nous met en présence, dans les deux cas, d'une indifférenciation initiale et d'une différenciation toujours plus poussée dans la suite, mais les éléments d'abord indifférenciés, puis différenciés, n'en dérivent pas pour autant les uns des autres : la coordination logico-mathématique ne procède pas des actions physiques, ni l'inverse, et l'expérience logico-mathématique ne dérive pas de l'expérience physique, ni l'inverse.

Il est clair, en effet, que durant toutes les périodes sensori-motrices et intuitives (au sens où nous avons parlé d'intuition préopératoire), l'expérience est nécessaire à la formation des opérations elles-mêmes. C'est par l'expérience que l'enfant découvre, avant que ces vérités deviennent opératoires et déductives, que six jetons bleus correspondent encore bi-univoquement à six jetons rouges, lorsque l'on déplace les éléments de l'une des deux collections correspondantes (en les serrant ou en les espaçant), et que, si la collection A = la collection B, et si B = C, alors A = C ; et ces expériences supposent un déplacement d'objets solides et pesants, donc un « travail » (= déplacement d'une force), c'est-à-dire une action physique s'exerçant dans un champ gravifique caractérisé lui-même par un certain espace solidaire de la gravitation comme telle. Mais, en coordonnant ainsi des actions physiques au cours d'expériences proprement dites l'enfant n'a pas découvert, ou ne s'est pas borné à découvrir les caractères physiques des objets et de leur champ : il s'est attaché à lire le résultat de la coordination de ses propres actions. Aussi l'expérience, si paradoxale que soit cette affirmation, n'a pas consisté, ou n'a pas seulement consisté, en un rapport de l'objet au sujet, mais en une utilisation des objets par le sujet au cours d'essais que le sujet a faits en réalité sur ses propres actions. Ce que lui ont essentiellement appris les objets, c'est que la coordination des opérations réussit, que 6 font toujours 6 et que le rapport d'égalité est transitif, tandis qu'en cherchant p. ex. comment les corps se comportent sous

l'effet de la pesanteur ou d'une force centrifuge, l'enfant aurait extrait réellement sa connaissance de l'objet. Constater que la composition des actions réussit, présente en effet, une toute autre signification que de prendre acte de l'existence d'une propriété physique : cela signifie que la réalité est en accord avec cette composition, et non pas qu'elle produit un résultat extérieur aux actions elles-mêmes. En retrouvant les égalités 6 = 6, ou 6 (A) = 6 (B) = 6 (C), le sujet découvre simplement que ses actions de dénombrer (1, 2… 6), ou de mettre en correspondance, etc., enrichissent les objets de relations nouvelles, auxquelles ils se prêtent, et que ces relations peuvent être conservées et même composées de façon transitive indépendamment des déplacements : l'expérience conduit ainsi le sujet à dissocier la coordination de ses actions des propriétés physiques de l'objet, tandis qu'en imprimant un mouvement rapide de rotation à une masse de grandeur moyenne, il aurait découvert un effet physique dû à l'objet comme tel. De même, en retournant successivement de 180° derrière un écran une tige de fer traversant trois objets A, B et C, l'enfant découvre par expérience, avant de le déduire, que l'ordre direct ABC s'inverse en CBA, que l'ordre CBA s'inverse à son tour en ABC, et surtout que, si A et C se trouvent alternativement en tête, cela n'arrive jamais à B. C'est donc à nouveau l'expérience qui enseigne au sujet des résultats qu'il déduira dès 7-8 ans sous la forme opératoire suivante : l'inversion de l'opération inverse ramène nécessairement l'opération directe, et, si B est situé entre A et C, il l'est aussi nécessairement entre C et A. Cependant, ici encore, l'expérience a moins porté sur le réel que sur la coordination des actions du sujet, car cette coordination a ajouté quelque chose aux objets, qui est la composition réversible : le réel n'est, en effet, pas réversible, mais seulement renversable, comme l'a dit Duhem, et il n'est jamais nécessaire, mais seulement déterminé à des degrés divers. Pour retourner une tige, il a fallu faire intervenir des forces, subir un léger changement de température (tel qu'une partie de l'énergie s'est dissipée en chaleur), etc., mais ce ne sont pas sur ces aspects physiques, en partie irréversibles, qu'a porté l'expérience : c'est sur la coordination réversible des actions du sujet, à laquelle le réel s'est prêté dans les grandes lignes et à la condition de n'y pas regarder de trop près ; et c'est cette coordination qui a engendré la nécessité des rapports construits par elle, car rien n'est moins nécessaire que la cohésion molaire de solides entourant une tige métallique. Les opérations forment donc, ici encore, un schème d'assimilation assez exactement accommodé, au réel, à une certaine échelle, mais ne provenant pas de lui. Et c'est bien pourquoi, dans la suite, l'action matérielle deviendra inutile au mécanisme opératoire, lequel fonctionnera, avec beaucoup plus de précision, symboliquement et en pensée.

Mais tous ceux des épistémologistes qui réduisent la connaissance aux deux seuls pôles de la pensée et de la sensation répondront que l'action est extérieure à la pensée et appartient déjà à la réalité sensible : l'action, dit-on couramment, est une donnée

de l'expérience, sans doute en partie psychique et non pas seulement physique, mais d'une expérience étrangère à la pensée réflexive et connue uniquement grâce aux sensations internes ou musculaires, c'est-à-dire reposant, comme l'expérience physique, sur de pures sensations. C'est bien là qu'est le nœud de la question. Si l'on méconnaît le rôle essentiellement symbolique des sensations, ainsi que la continuité donnée entre les mouvements de l'organisme et les opérations de la pensée, il va de soi que l'action est à situer dans la réalité expérimentale et que les mathématiques proviennent en partie de cette réalité. Mais si l'on reconnaît en l'action sensori-motrice le point de départ de la pensée, en distinguant le mouvement lui-même de son signifiant symbolique qu'est la sensation kinesthésique, peu importe que nos mouvements et leur coordination soient connus de nous subjectivement (de même que le mécanisme psychologique de l'intelligence logique est inutile à introspecter pour régler son bon fonctionnement, et demeure en bonne partie « inconscient ») : l'action est alors l'expression du sujet connaissant, et non pas des réalités extérieures à la pensée, et l'opération mathématique est un schème d'assimilation active, simplement accommodé au réel et non pas extrait de lui.

Bref, en leur source les schèmes coordinateurs d'actions suffisent à engendrer les opérations logiques et mathématiques sans emprunter leur matière à l'objet. Ils sont cependant constamment accommodés au réel, mais par une accommodation active et non pas passive, c'est-à-dire qu'ils complètent la réalité physique en lui fournissant un système de rapports qui s'accordent avec elle sans être tirés d'elle. Et, s'il en est ainsi, c'est que les opérations logico-mathématiques agissent sur le réel sans transformer l'état des objets, parce qu'elles se limitent aux modifications (réelles ou virtuelles) de position ou d'assemblage, et qu'elles restent indépendantes des actions physiques en jeu, simplement coordonnées par de telles opérations et non pas rendues solidaires de cette coordination même.

II. Cela dit, les deux mêmes problèmes de la construction des êtres logico-numériques ou géométriques et de leur accord avec le réel se retrouvent à tous les étages du développement de l'édifice mathématique et non pas seulement au point de départ ; mais, à partir d'un certain niveau, ils se posent de façon bien plus paradoxale puisque, d'une part, cette construction dépasse de plus en plus le réel, et que, d'autre part, parmi les cadres ainsi engendrés par voie déductive, il s'en trouve qui

rejoignent le réel lors des progrès ultérieurs de l'expérience physique, c'est-à-dire avec une anticipation souvent considérable du cadre sur son contenu et sans qu'aucun fait extérieur n'ait pu servir de modèle au moment de la création du premier.

Comment, tout d'abord, les êtres logico-mathématiques en viennent-ils à dépasser le réel s'ils ont pour source les coordinations les plus générales de nos actions ? On le comprend en droit, puisque, si ces coordinations relient entre elles des actions exercées sur la réalité, la coordination comme telle n'emprunte pas ses éléments aux objets eux-mêmes, en tant que physiques. Que l'expérience soit nécessaire, au début, pour le développement de ces coordinations ne prouve pas, comme nous venons de le voir, que le schème de ces actions soit extrait du réel : l'expérience concrète est indispensable en fait, à la manière dont une figure aide à la compréhension d'une démonstration. Si la coordination logico-mathématique constitue des schèmes d'actions efficaces sur la réalité effective, telle qu'on la découvre peu à peu sous les apparences sensibles, il faut, à cet égard, renverser le rapport que l'on a coutume d'établir entre la notion « abstraite » qui constituerait un « schéma », c'est-à-dire un signifiant, et la réalité sensible qui serait le modèle et le signifié auquel correspond ce schéma : en fait, c'est le sensible (dans la perception, l'image et la représentation intuitive) qui constitue le symbole, c'est-à-dire le signifiant, tandis que le schème moteur ou opératoire qui atteint le réel par-delà le sensible, est le signifié lui-même. Dès lors, il est naturel que, ayant atteint un degré suffisant d'élaboration, le système des opérations puisse fonctionner sans symbolisme sensible, c'est-à-dire en dépassant les réalités perçues elles-mêmes. C'est ce qu'on voit se préparer à toutes les étapes du développement opératoire de l'individu et ce que l'histoire des mathématiques montre à chaque nouveau palier de son déroulement.

Mais, comment expliquer le détail d'une telle élaboration opératoire, de plus en plus différenciée et complexe ? Les coordinations élémentaires ne contiennent, en effet, nullement d'avance l'ensemble des êtres logico-mathématiques à l'état préformé, et l'on ne saurait identifier le noyau fonctionnel donné dans l'organisation psycho-physiologique à un *a priori* transcendantal, dont les structures formelles seraient toutes préparées, quittes à ne se révéler que progressivement. Les coordinations élémentaires de l'action ne comportent, en effet, qu'un schématisme pratique, sources de concepts ou relations moteurs (si l'on peut s'exprimer ainsi par analogie avec les concepts représentatifs), d'une quantification très courte fondée sur le rythme de l'action, et d'une organisation spatiale tendant vers la forme de groupe. De ces éléments sensori-moteurs, la pensée représentative tire ensuite un schématisme de classes et de

relations, le nombre entier et certaines structures spatiales. Mais, dès ce passage du sensori-moteur au conceptuel, qui précède de beaucoup l'avènement de la pensée scientifique, on constate déjà de la façon la plus claire que les structures du palier supérieur ne sont point préformées sur le palier inférieur : ce que la pensée naissante tire des coordinations motrices, ce sont exclusivement certains rapports fonctionnels d'emboîtement ou d'ordre, mais non articulés et qui servent d'éléments à une construction nouvelle. Il y a donc simultanément abstraction réflexive de matériaux empruntés au palier inférieur et élaboration d'une structure qui les englobe en les articulant et en les généralisant selon des modes opératoires nouveaux. Or, ce processus génétique d'abstraction à partir de l'action, ainsi que de réflexion (au sens propre) et de construction combinées correspond précisément à ce que l'on retrouve sur tous les paliers de la généralisation mathématique elle-même. Les généralisations du nombre ne sont pas contenues d'avance dans le nombre entier, mais procèdent de l'organisation des opérations (+ et – pour le nombre négatif, × et : pour le nombre fractionnaire n^n et $\sqrt{}$ pour les imaginaires, etc.), c'est-à-dire de structurations nouvelles que l'on construit en abstrayant du nombre entier certains de ses éléments opératifs découverts par dissection réflexive. Ce n'est pas autrement que le nombre entier lui-même a été tiré des classes et relations réunies et que tous trois ont été construits à partir d'éléments sensori-moteurs. Il serait donc absurde de considérer le nombre complexe ($a + bi$) comme préformé dans les exercices réflexes d'un nouveau-né et cependant un processus continu d'abstraction réflexive et de construction opératoire relie les coordinations motrices initiales aux structurations logico-mathématiques supérieures. Ce qui parait paradoxal dans le domaine de l'analyse et du nombre est d'ailleurs beaucoup plus facilement accepté sur le terrain de l'espace, où les généralisations non euclidiennes et la multiplication des dimensions sont assurément à situer dans le prolongement de l'organisation sensori-motrice initiale, sans qu'il faille pour autant considérer les hyper-espaces comme préformés dans les mouvements ou les perceptions du fœtus.

Bref, la construction inépuisablement féconde des mathématiques tient à un double mouvement de généralisation opératoire qui crée les structures nouvelles au moyen d'éléments antérieurs, et d'abstraction réflexive ou de différenciation qui tire ces éléments du fonctionnement propre aux paliers inférieurs. Rudimentaires et approximatives en leur point de départ, les coordinations pratiques qui sont à la source de la pensée se prolongent ainsi en coordinations toujours mieux formalisées et de plus en plus abstraites ; parce que l'abstraction qui les caractérise est une abstraction à partir des opérations et même des actions antérieures et non pas une abstraction à partir de l'objet. Il n'en reste pas moins, naturellement, que c'est toujours à l'occasion

d'une action sur l'objet que les premières coordinations se structurent et que ce n'est pas en vertu d'un déroulement fatal ou d'une succession d'actes gratuits que ce progrès à la fois réflexif et généralisateur s'accomplit. C'est seulement une fois la science constituée, que les actes gratuits deviennent possibles. Et encore, il est, dans l'histoire des mathématiques une foule de découvertes qui ont eu pour occasion des problèmes concrets posés au mathématicien par l'expérience physique ou même chimique, biologique et économique. C'est cette connexion si fréquente entre les coordinations nouvelles et l'action expérimentale qui donne l'illusion que les structures mathématiques consistent en modèles simplifiés ou schémas d'une réalité donnée, car effectivement la théorie est parfois édifiée dans le but précis de construire de tels schémas. Mais si une coordination intellectuelle relie toujours entre elles des actions réelles ou possibles, ce n'est pas à dire que la coordination ait été tirée de l'expérience : ce que nous avons rappelé (sous I) de la genèse des êtres mathématiques élémentaires vaut *a fortiori* pour les schèmes supérieurs. Lorsque le mathématicien reçoit un problème de la part du physicien et s'efforce de trouver un instrument opératoire adapté aux transformations du réel pour en sembler constituer une copie, c'est à la manière dont le peintre ou le musicien puise son inspiration dans la réalité : celle-ci lui « donne des idées » comme on dit familièrement, mais, si réaliste soit-il, il n'en tire précisément que des « idées », c'est-à-dire que, au lieu d'enregistrer sans plus des photographies ou des disques sonores, il reconstruit le réel en l'assimilant à lui.

Ceci nous conduit au second problème : d'où vient cet accord permanent entre les opérations logico-mathématiques et les transformations du réel, au point que les premières puissent imiter les secondes, et comment se fait-il que dans les cas, bien plus nombreux encore, où le cadre mathématique dépasse le réel actuel, il puisse être rempli après coup grâce à des expériences nouvelles ? Malgré cette libération graduelle à l'égard de la réalité physique et même, dirait-on, à cause de cette libération, certaines structures mathématiques élaborées par pur souci déductif de généralisation abstraite, sans aucune considération expérimentale, se trouvent, en effet, rejoindre après coup la réalité : elles se trouvent « préadaptées », comme disent les biologistes, à des résultats d'expérience impossibles à prévoir au moment de leur construction. C'est ce problème crucial de l'anticipation du réel par les cadres logico-mathématiques abstraits, si voisin (du point de vue d'une épistémologie génétique) de la

question biologique que Guyénot a appelée celle du « fonctionnement prophétique » [1] de l'organisme et Cuénot de l' « ontogenèse préparante du futur », qui nous paraît constituer comme la pierre de touche de toute interprétation de la nature des êtres mathématiques.

La solution habituelle de cette question centrale consiste à dire que les mathématiques empruntant à l'expérience certains de ses éléments lors de la genèse des êtres abstraits, il est naturel qu'elles retrouvent l'expérience en fin de compte. Mais il est difficile de ne pas voir le caractère superficiel de cette réponse, puisqu'il ne s'agit précisément pas de la même expérience au départ et à l'arrivée : l'expérience, anticipée sans le savoir, qui vient remplir, après coup, un cadre mathématique contredit, en effet, les expériences initiales d'où l'on prétend tirer les notions primitives. C'est ainsi que la rencontre entre l'espace non archimédien et certaines données microphysiques ne saurait être expliquée par l'hypothèse que le continu archimédien ou métrisable serait extrait de l'expérience sensible, puisque justement l'expérience microphysique contredit sur un tel point l'expérience immédiate : de ce que Véronèse a pu construire un continu en écartant l'axiome d'Archimède (selon lequel, en reportant un certain nombre de fois le segment AB le long d'une droite, on dépassera toujours à un moment donné un point quelconque C situé sur cette ligne au-delà de B), et que ce modèle ait été employé comme représentation microphysique, cela ne saurait être dû au fait que l'enfant ou le sens commun aient tiré de l'expérience physique (macroscopique) l'idée que toute droite est mesurable par itération de l'un de ses segments ! Au contraire, c'est en se libérant de la réalité donnée que le modèle non archimédien a pu constituer un cadre préadapté à un secteur d'expérience contredisant cette réalité habituelle.

Pour expliquer la convergence, après anticipations involontaires, entre les mathématiques et le réel, il faut donc supposer entre ces deux termes des rapports bien plus profonds que ceux dont dispose l'expérience physique propre à chaque sujet. Faire intervenir l' « hérédité de l'acquis » affaiblirait encore l'hypothèse, car, à supposer que l'expérience géométrique des Vers ou des Mollusques se soit transmise à l'homme (par une hérédité de l'acquis bien peu vraisemblable en un tel cas particulier), elle nous aurait peut-être aidé à concevoir un espace à deux dimen-

1. E. GUYÉNOT, La vie comme invention, in *L'invention* (IX[e] Semaine intern. de Synthèse), Alcan, 1938, p. 188.

sions seulement, mais n'aurait expliqué ni Riemann ni Lobatschevski. C'est ici que l'indissociable connexion entre le sujet et l'objet, intérieure au sujet lui-même, assure un lien entre eux deux plus solide que celui dû à l'accommodation seule. A n'invoquer que l'accommodation au réel des schèmes d'actions ou de pensée, il serait paradoxal que la déduction géométrique, en contredisant les données perceptives et représentatives qui ont caractérisé ses accommodations initiales, finisse par construire des cadres correspondant à une réalité extérieure plus profonde et plus générale que celle de notre milieu ambiant avec ses approximations limitées. L'accommodation des schèmes spatiaux porte, en effet, sur un milieu caractérisé par une certaine échelle de grandeurs et de vitesses : comment expliquer alors que leur généralisation, en les faisant sortir de ce cadre, rejoigne une autre réalité, déterminée par une autre échelle et insoupçonnée au moment des accommodations primitives ? En admettant au contraire que le contact entre le sujet et le réel est assuré dès le départ, non pas grâce aux expériences individuelles ni à une problématique transmission de l'expérience ancestrale, mais parce que la structure psycho-physiologique du sujet plonge ses racines dans la réalité physique tout en étant à la source des coordinations sensori-motrices puis intellectuelles qui aboutissent à la déduction logico-mathématique. Le cerveau et la pensée peuvent, il est vrai, imaginer autant d'idées fausses que de vraies en ce qui concerne le réel, tout en étant réglés eux-mêmes par des lois biologiques et physicochimiques ; par contre, lorsqu'il s'agit, non pas de penser les objets particuliers, mais d'appliquer les procédés généraux de coordination caractérisant toute composition motrice ou mentale, une fois parvenue à l'état d'équilibre, il est évident que plus ces coordinations seront générales et mieux elles s'adapteront au réel parce qu'elles émanent elles-mêmes de la réalité physique par l'intermédiaire de la réalité biologique.

On répondra sans doute qu'alors s'impose l'alternative suivante : ou bien ces coordinations, qui plongent dans le réel par l'intérieur du sujet en général et retrouvent le réel dans les activités extérieures de chaque sujet individuel, se réduisent à un *a priori* et à l' « harmonie préétablie » invoquée par Hilbert dans la solution de ce problème, ou bien ces coordinations ne contiennent pas d'avance toutes les opérations logico-mathématiques et elles n'expliquent en ce cas pas mieux l'accord final des mathématiques et du réel que ne le fait l'hypothèse d'une accommodation individuelle à l'expérience.

On se rappelle (chap. II, § 6) comment Hilbert, après avoir noté qu'il existe un « parallélisme important entre la nature et la pensée » (*art. cité*, p. 26), l'explique par une harmonie pré-établie : un certain résidu intuitif constituerait ainsi un *a priori* pour la pensée tout en correspondant aux lois les plus profondes du réel : « On a, p. ex., aperçu que, dans la vie quotidienne déjà, il est fait emploi de méthodes et de notions exigeant une grande abondance d'abstractions, et qui ne sont compréhensibles que comme application inconsciente de la méthode axiomatique » (*ibid.*, p. 25). N'est-ce pas là, en d'autres mots, exactement ce que nous soutenons quant aux coordinations psychophysiologiques, qui constituent simultanément le point de jonction intérieur du sujet et de la « nature » ainsi que le point de départ de la construction logico-mathématique ? Certainement non, car les notions d'*a priori*, d'harmonie préétablie et d'application inconsciente de la méthode axiomatique impliquent un double réalisme statique : les mathématiques et la logique seraient à la fois immanentes à la réalité physique et données toutes faites au point de départ de la vie mentale. Or, dans notre hypothèse, les opérations logico-mathématiques s'appliquent au réel donné dans l'expérience et l'enrichissent sans y être contenues, et elles procèdent des coordinations mentales et physiologiques par un processus à la fois constructif et régressif, sans être préformées au départ.

Mais alors réapparaît la seconde branche de l'alternative : n'étant pas préformées dans les coordinations initiales, comment les généralisations mathématiques supérieures, qui dépassent la réalité perçue ou conçue lors des stades inférieurs, rejoindront-elles le réel lors d'expériences physiques plus approfondies ? La chose semble tenir à trois raisons conjointes dont les deux premières ont déjà été examinées sous (I). La première est que les coordinations mentales qui engendrent les opérations logico-mathématiques élémentaires sont elles-mêmes le résultat d'une réorganisation d'éléments empruntés à des structures antérieures, et cela indéfiniment (cette continuité étant assurée par celle des cycles assimilateurs eux-mêmes), jusqu'aux interactions élémentaires de la morphogenèse organique et de la réalité physique : le point de départ organique de la construction mentale, si indépendant soit-il de l'expérience individuelle, plonge ainsi dans l'univers physique, sans que nous sachions d'ailleurs selon quelles modalités tant que les problèmes biologiques centraux ne sont pas résolus. La seconde raison est que la construction mathématique s'avère toujours à la fois constructive et régressive, toute généralisation nouvelle s'appuyant sur une réélaboration

des axiomes de départ : or, plus ce processus réflexif remonte haut, plus la reconstruction axiomatique converge avec l'analyse génétique. Ainsi les constructions nouvelles s'accordant de façon imprévue avec l'expérience physique sont dues à une recombinaison d'éléments opératoires génétiquement de plus en plus primitifs, que les actions plus simples sur la réalité immédiate avaient conduits d'abord à organiser autrement. Il s'ajoute alors un troisième facteur aux deux précédents. A la fois constructive et réflexive, c'est-à-dire progressive et régressive, l'élaboration des opérations ou notions logico-mathématiques procède par équilibrations successives, et, si une forme d'équilibre constituée par un système opératoire supérieur n'est pas contenue dans un système inférieur plus restreint et moins équilibré, le passage de l'inférieur au supérieur est cependant conditionné par la nécessité d'intégrer certains des éléments du premier dans le second et de réaliser un équilibre plus large et plus mobile tout en remontant plus haut dans l'analyse des éléments. Chaque nouveau système opératoire est donc caractérisé par une forme d'équilibre plus large, englobant de nouvelles opérations virtuelles (dans le sens où l'on parle de « mouvements virtuels », en plus de celles qui ont été effectivement réalisées : sans que ce fait implique une préformation des systèmes nouveaux dans ceux de départ, il suppose cependant une certaine ligne directrice, déterminée par l'obligation de conserver ces derniers à titre de cas particuliers, et cette ligne est parcourue dans les deux sens de la construction généralisatrice et de l'analyse régressive. L'accord final avec le réel est ainsi explicable par une sorte d' « orthogenèse », comme on dit en biologie, mais impossible à caractériser d'avance, sinon par un accroissement de réversibilité, puisque la seule règle commune imposée aux constructions nouvelles est de s'intégrer les précédentes par un lien de réciprocité (donc de réversibilité), ce qui constitue la condition fonctionnelle de tout équilibre.

On comprend ainsi pourquoi les opérations logico-mathématiques sont accommodées de façon permanente aux objets en même temps qu'elles les assimilent au sujet : c'est que le cycle d'assimilation constitué par les coordinations initiales d'où procèdent ces opérations est au point de jonction entre les lois fonctionnelles les plus générales de l'organisme et les caractères les plus généraux des objets. Le corps propre est, en effet, simultanément un objet comme les autres, déterminé par les lois du réel et le centre d'une assimilation des autres objets à son activité. Dès lors, dans la mesure où il agit selon les formes les plus élé-

mentaires de composition (emboîtements, ordre, etc.), ses actions expriment à la fois les exigences de l'univers, qui le détermine du dedans par sa constitution d'être vivant, et l'organisation imposée par l'action et la pensée à l'univers qu'elles assimilent : et, tandis que cette organisation opératoire est appliquée à l'univers extérieur au cours des actions portant sur lui, les lois générales de l'univers, dont ces actions sont par ailleurs le produit, sont analysées de l'intérieur, par la coordination même des actes et non pas du dehors par la pression des objets. C'est pourquoi la connaissance logico-mathématique constitue une espèce unique : d'une part, assimilation des objets à la coordination des actions du sujet, elle est, d'autre part, accommodation permanente aux objets, parce que cette coordination des actions du sujet consiste en actions générales convergeant avec les transformations quelconques de l'univers, dont le corps vivant émane avec ses lois d'assimilation coordinatrice. Et, comme le propre de l'assimilation est l'incorporation des objets à un cycle d'actions essentiellement fermé et continu, il ne saurait y avoir à ce processus de commencement absolu, d'où la démarche d'abstraction réflexive ou régressive propre à toute construction opératoire. Comme, d'autre part, l'équilibre entre l'assimilation et l'accommodation est la source de la réversibilité mentale, la construction, sous son aspect progressif, est ainsi dirigée par cette exigence même de réversibilité, condition générale de tout équilibre et lien permanent entre le point d'arrivée des constructions et leur point de départ commun et sans cesse reculé.

Au total, le problème du contact entre les mathématiques et le réel est donc susceptible d'une solution qui lierait leur « objectivité intrinsèque » à l'objectivité physique ou extrinsèque mais par l'intermédiaire des coordinations psychophysiologiques intérieures au sujet. Comme nous l'avons vu (§ 2 de ce chap. III), l'acceptation entière de cette notion d'objectivité intrinsèque n'a rien de contradictoire avec l'interprétation opératoire des mathématiques. Une opération n'est pas une action isolée et arbitraire, témoignant simplement de l'activité combinatrice du sujet individuel, mais elle est toujours liée à un système d'ensemble, qui a donc ses lois propres et son objectivité en tant que système. Expliquer le développement des mathématiques par des schèmes d'action se prolongeant en systèmes opératoires revient donc à respecter jusqu'en ses extrêmes limites la cohérence interne des principes et des théorèmes de toutes les parties des mathématiques. Mais c'est en même temps rattacher cette objectivité intrinsèque à un principe d'équilibre, c'est-à-dire

de réversibilité, susceptible de relier l'évolution des opérations concrètes et abstraites au développement mental lui-même : caractérisé en chacune de ses phases par un passage de l'irréversibilité à la réversibilité.

III. Mais, pour situer dans sa véritable perspective cette interprétation des connexions entre les mathématiques et le réel, par l'intermédiaire des structures psychobiologiques du sujet lui-même, il est nécessaire d'écarter simultanément trois sortes de réalismes possibles, mathématique, physique et physiologique, qui sont peut-être incompatibles entre eux mais n'en faussent que davantage, par leur action alternée, toute interprétation d'ensemble. Il convient donc, pour conclure, de se placer dans le cercle même des sciences, que nous continuerons d'analyser sur les terrains physiques et biologiques, au cours des chapitres suivants.

Que veut-on dire, tout d'abord, lorsque l'on affirme l'accord des mathématiques avec la réalité physique ? On entend exprimer ce fait que les actions portant sur les changements de position des objets ou sur leurs assemblages peuvent se composer entre elles sans que ces compositions soient contredites par les constatations expérimentales, et que les actions portant sur les changements d'état des objets peuvent elles-mêmes être mises en correspondance avec les opérations de déplacement ou de rassemblement. Or, le fait important est que la constitution de cet accord, dont nous venons de rappeler le caractère de plus en plus anticipateur, s'accompagne toujours d'une transformation du réel lui-même. En effet, il se produit tôt ou tard, dans le cas de ces convergences obtenues après coup avec la réalité matérielle, un processus essentiel, sur lequel nous aurons à revenir à propos de la connaissance physique : c'est que l'appareil opératoire s'adapte de si près au phénomène dont il est appelé à fournir la mesure qu'il en devient partie intégrante ; le phénomène physique se révèle alors comme indissociable de l'opérateur qui en constitue un aspect. Ainsi donc, non seulement il y a adéquation de l'instrument intellectuel à l'objet, même quand le premier est préparé de façon anticipatrice et que le second est découvert avec retard par rapport aux moyens de connaissance servant après coup à le structurer, mais encore il est de moins en moins possible de savoir ce qu'est la réalité physique en dehors de cette structuration mathématique : il se produit une assimilation si complète du réel aux schèmes opératoires que la réalité physique est peu à peu transformée en relations spatiales et métriques et que, à la

limite du pouvoir de l'action (comme nous le verrons à propos de la microphysique), l'opération du sujet devient solidaire de l'objet.

Et cependant, malgré ce déplacement constant du réel dans le sens du mathématique, la grande majorité des physiciens demeurent convaincus de l'existence objective des êtres matériels : l'objet n'est connu qu'au travers des instruments intellectuels du sujet, mais il reste objet. Et, si ce réalisme donne lieu à des glissements et à des variations, il se renforce au fur et à mesure que l'on se rapproche des faits chimiques et biologiques. En effet, s'il existe quelques physiciens idéalistes, dans les secteurs extrêmes relatifs aux échelles astronomiques ou microphysiques (Jeans et Eddington), le réalisme se consolide en présence des cornues du chimiste et on ne trouvera plus aucun biologiste pour douter de la réalité des êtres organisés.

Or, c'est précisément sur le terrain de l'organisme vivant qu'une seconde incurvation remarquable nous paraît se produire dans la courbe reliant le sujet et l'objet. Tout en présentant une tendance constante à s'assimiler l'objectivité extrinsèque de la réalité physique, l'objectivité intrinsèque des mathématiques retrouve l'objet à l'intérieur du sujet, si l'on peut dire, dans l'exacte mesure où les processus mentaux qui engendrent les êtres logico-mathématiques sont eux-mêmes liés aux processus physiologiques caractérisant l'organisation vitale et dont dépendent les fonctions sensori-motrices.

Nous avons constaté plus haut combien la construction des êtres mathématiques est toujours corrélative d'une prise de conscience des racines propres aux totalités opératoires dont ces êtres sont extraits. La théorie des ensembles nous ramène, p. ex., aux opérations élémentaires de correspondance connues des primitifs, de l'enfant, et même, en un sens sensori-moteur, de l'animal lui aussi (cf. l'exemple cité des poules ne piquant que les grains pairs ou impairs d'une suite rectiligne) ; la topologie fait appel à des rapports de voisinage, de frontière, d'enveloppement, etc., qui sont les plus simples que connaisse la perception ou l'action, et la théorie des groupes s'appuie sur des compositions opératoires qui, sous leur forme la plus générale, correspondent aux coordinations les plus élémentaires de l'action. Le progrès mathématique étant toujours, à la fois réflexif et constructif, il comporte un facteur d'analyse régressive qui remonte jusqu'aux racines sensori-motrices de toute opération. Or, jusqu'où ces racines plongent-elles ?

Le propre du point de vue génétique, en épistémologie, est de se refuser à poser d'avance un sujet pourvu d'une structure

intellectuelle toute faite, et constituant un point de départ en soi. Ce sont exactement les mêmes raisons qui empêchent d'accepter l'existence d'objets posés d'avance en eux-mêmes, indépendamment des activités du sujet, et qui obligent à expliquer ces activités en fonction de leur déroulement, progressif et régressif, ce qui revient à reculer sans cesse leur point d'origine apparent. Or, si le sujet semble constituer un commencement absolu, à l'égard des structures logiques et mathématiques, c'est dans la mesure seulement où l'on interrompt l'analyse régressive au niveau de la psychologie et, plus précisément, dans la mesure où l'on cède aux illusions d'une psychologie introspective, au lieu de se placer au point de vue de la conduite. Effectivement, la vie mentale n'est pas suspendue dans le vide. Recourir à l'action, et singulièrement aux mouvements, pour expliquer la genèse des opérations logico-mathématiques, c'est se référer nécessairement à la vie organique, et c'est donc s'engager dans une voie qui conduit en deçà du sujet apparent ou conscient, parce que la vie organique plonge ses racines dans la réalité physique elle-même. Dans l'exacte mesure où l'analyse des formes de pensée supérieures semble parler en faveur de l'idéalisme, en rendant l'objet solidaire des activités du sujet, l'analyse des sources de l'intelligence ramène le sujet à l'objet par l'intermédiaire de l'organisme. Si la physique éclaire l'une des zones de jonction entre le sujet et l'objet, c'est donc à la biologie à nous fournir la lumière sur la zone symétrique, en nous expliquant la genèse du sujet à partir de l'objet. De même que la physique contredit l'empirisme, en nous montrant combien l'objet est assimilé aux opérations du sujet, de même la biologie contredit l'apriorisme en reliant les opérations aux processus physiologiques. Il apparaît ainsi que l'empirisme et l'apriorisme sont nés l'un et l'autre d'une vision statique des choses, comme si le sujet et l'objet étaient donnés une fois pour toutes : génétiquement, au contraire le sujet et l'objet actuels consistent en tranches singulièrement étroites par rapport à l'histoire intellectuelle et biologique dans laquelle nous les découpons, et il s'agirait de reconstituer intégralement cette histoire, comprenant celle de la vie entière, pour pouvoir résoudre le problème épistémologique sous sa forme générale.

En effet, en réduisant la réversibilité opératoire à la réversibilité croissante des mécanismes mentaux, on soulève un problème biologique d'une importance que suffit à attester l'histoire des idées sur la réversibilité ou l'irréversibilité vitales. Que la vie échappe aux emprises du deuxième principe de la thermodynamique, comme l'ont cru de nombreux

auteurs, de Helmholtz à Ch. E. Guye, ou qu'elle y soit soumise comme les autres phénomènes physico-chimiques, il reste à relier la réversibilité mentale aux mécanismes nerveux : ou bien alors cette forme de réversibilité apparaîtra comme préparée par les processus vitaux les plus généraux, ou bien au contraire elle se présentera comme une forme d'équilibre particulière entre l'organisme et le milieu, impossible à atteindre sur certains secteurs, mais réalisée par les coordinations cognitives. En ce dernier cas, celles-ci n'en seraient pas moins solidaires des coordinations organiques, dont elles représenteraient un niveau supérieur d'équilibration. Dans les deux cas, il est donc permis de se demander si les structures opératoires les plus générales ne sont pas conditionnées par certaines nécessités fonctionnelles propres à toute organisation vivante. Les emboîtements et les sériations, les compositions ou coordinations, les détours et retours, etc., quoique structurés différemment aux divers niveaux du développement mental, n'en expriment pas moins des caractères communs à tous les modes de fonctionnement assimilateur : toute assimilation suppose la conservation d'un cycle se refermant sans cesse sur lui-même, et c'est en un tel fonctionnement, propre à la vie, que tient peut-être le secret de la construction indéfinie des schèmes mentaux et finalement logico-mathématiques, dont Lautman lui-même a souligné la parenté avec les notions de totalité organique.

Nous ne pensons pas résoudre par ces remarques la moindre question positive, mais simplement montrer une partie du programme qui reste à remplir avant que l'épistémologie puisse prendre position quant aux relations entre le sujet et l'objet, lorsque ces relations sont intérieures à l'organisme et non pas seulement données dans l'action extérieure de chaque sujet. A cet égard, le rapport entre un acte de compréhension intelligente, caractérisée par ses combinaisons réversibles, les mécanismes nerveux du cerveau et les processus physico-chimiques ou même microphysiques se déroulant dans la substance cérébrale serait aussi indispensable à connaître, pour traiter des relations entre le sujet et l'objet, que le rapport entre l'acte d'intelligence et l'objet physique extérieur à l'organisme, sur lequel il porte.

Mais si nos connaissances sur les rapports entre les structures intellectuelles et la vie elle-même sont encore singulièrement rudimentaires, notamment en ce qui concerne les structures logico-mathématiques, il n'en est pas moins certains faits déjà analysés qui donnent à réfléchir. C'est ainsi que la psychologie humaine fournit un grand effort pour réduire les éléments de l'espace, du nombre ou des classes et des relations, aux conduites sensori-motrices de la première année ou aux structures per-

ceptives, etc. Mais ces comportements sensori-moteurs sont eux-mêmes précédés par des montages héréditaires ou réflexes, dont les manifestations sont vite intégrées chez l'homme dans les constructions acquises, mais qui s'épanouissent sous une forme bien plus pure et plus riche dans l'instinct animal. Or, il y aurait à faire toute une géométrie et une analyse logico-arithmétique des conduites et des constructions instinctives. Des alvéoles d'un rucher, des figures multiples d'une toile d'araignée aux relations d'ordre, aux emboîtements de schèmes d'action et aux quantifications elles-mêmes que suppose la succession des conduites réflexes propres à tous les instincts constructeurs, on trouverait les éléments, non pas d'*opérations* logico-mathématiques, mais d'une *structuration sensori-motrice héréditaire* de caractère logico-mathématique singulièrement poussé. Rien ne serait plus impressionnant, du point de vue épistémologique, que cette étude des structures prémathématiques instinctives.

Or, lorsque l'intelligence construit des « formes », qui sont celles des divers systèmes opératoires, ces formes paraissent immatérielles dans la mesure où les conduites propres aux opérations concrètes s'intériorisent en structures formelles à point d'appui purement symbolique. Mais les « formes » élaborées par l'instinct sont, en même temps que des formes de conduites, des « formes » liées à la structure des organes eux-mêmes. L'instinct est la logique des organes, et, si l'on peut parler à son sujet de structurations logico-mathématiques, il s'agit d'un prolongement des structures organiques elles-mêmes. C'est ainsi que les mouvements des pattes, des ailes ou des nageoires, des appareils buccaux, des organes copulateurs, etc., sont déterminés par des structures anatomiques précises et que, si l'on voulait dégager la géométrie ou la cinématique de tels mouvements, il faudrait partir de la caractérisation spatiale de ces structures elles-mêmes. Or, c'est précisément sur ce point que les mathématiques rencontrent la biologie de la façon la plus directe et la plus naturelle, et il faut regretter que nous ne possédions pas davantage de mathématiques biologiques que celle dont on use pour les besoins de la biométrie appliquée à l'étude de la variation ou des lois de l'hérédité. Il n'en faut signaler qu'avec plus d'intérêt l'étude remarquable du célèbre biologiste d'Arcy Thomson [1] sur les rapports géométriques qui caractérisent la structure des organismes les plus divers, et notamment les formes

1. D'ARCY THOMSON, *On Ground and Form*, Cambridge, 1942.

d'espèces, genres ou familles voisins. On trouve, en particulier dans l'ouvrage d'Arcy Thomson, les vues les plus suggestives sur les transformations géométriques marquant le passage d'une structure à une autre : p. ex. des étirements ou contractions topologiques ou affines reliant des formes des poissons métriquement différents, mais par ailleurs homéomorphes, etc. Une telle analyse appliquée, non seulement aux formes anatomiques, mais aux « formes » de comportement héréditaire ou instinctif (comportement moteur ou constructions), fournirait un apport essentiel à l'étude de la source biologique des structures mentales et par conséquent cognitives, y compris des structures logico-mathématiques [1].

Mais, s'il n'est donc pas chimérique de songer à une analyse régressive des activités du sujet jusque sur le terrain des conduites instinctives et même de la morphogenèse organique en général, on s'engage évidemment dans un cercle. Le fait biologique est une variété particulière des faits physico-chimiques ou physiques, et tout un chapitre de la science s'écrit aujourd'hui sur les rapports de la microphysique et de la biologie. Si les mathématiques et la logique sont en accord constant avec la réalité physique extérieure au sujet, et expliquent cette réalité physique en l'assimilant toujours plus intimement à elles, les structures logico-mathématiques pourraient un jour paraître conditionnées par un fonctionnement organique qui plonge lui-même ses racines dans l'univers physico-chimique. A supposer que l'explication biologique atteigne tôt ou tard un caractère de précision et de construction théorique rigoureuse qui lui manque encore presque totalement, on se trouverait donc en présence d'un cercle réel.

Dans l'état actuel des connaissances, il ne s'agit par contre que d'un cercle idéal, faute de pouvoir dominer les rapports entre le mental et le biologique, d'une part, et entre le biologique et le physique d'autre part (deux sortes de rapports qui pourraient d'ailleurs bien interférer un jour). Il n'en reste pas moins que, du point de vue épistémologique, la ou les lacunes mêmes de ce cercle correspondent à un point d'importance capitale : les zones de jonction entre le sujet et l'objet ne sont pas seulement à situer sur le terrain frontière entre les mathématiques et la physique, mais aussi, et symétriquement, sur celui des rapports entre la biologie (ou la psychobiologie) et la phy-

1. Voir également, au sujet de la convergence entre les formes mathématiques et les structures morphogénétiques, la curieuse remarque de HILBERT, citée chap. II, § 6, sur les lois de l'hérédité et les axiomes de congruence linéaire.

sique. Or, ces rapports peuvent comporter les combinaisons les plus différentes entre le sujet et l'objet. En rattachant au fonctionnement de la vie elle-même les mécanismes essentiels de l'intelligence et de la connaissance, on recule simplement la question centrale des relations entre le sujet et l'objet, devenue la question du rapport entre l'organisme et le milieu, mais on laisse ouverte la série des solutions épistémologiques possibles (dont nous verrons plus tard qu'elles correspondent terme à terme aux solutions du problème biologique de l'adaptation et de la variation). Rien, en effet, dans les connaissances biologiques contemporaines, ne nous oblige à considérer l'organisme comme passivement soumis aux actions du milieu, et rien ne nous contraint non plus à le regarder comme une expression directe des processus physico-chimiques actuellement connus. C'est le jour seulement où nous saurons caractériser les rapports exacts entre la vie et la matière inorganisée, d'une part, entre le fonctionnement organique et le milieu extérieur, d'autre part, que nous pourrons construire une épistémologie précise des rapports « intérieurs » entre le sujet et l'objet (par opposition aux rapports extérieurs entre l'activité opératoire et le monde physique sur lequel portent nos actions).

L'analyse que nous avons tentée de la connaissance mathématique, en cette première Partie de notre ouvrage, réclame donc, à titre de complément indispensable, une étude des rapports entre la pensée mathématique et la connaissance physique (Partie II), mais aussi une enquête sur la portée épistémologique de la connaissance biologique (Partie III), avant de pouvoir revenir aux problèmes propres à la connaissance psychosociologique (Partie IV).

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE DE LA PREMIÈRE ÉDITION 5

PRÉFACE DE LA SECONDE ÉDITION 7

INTRODUCTION. — Objet et méthodes de l'épistémologie génétique. .. 13

§ 1. L'épistémologie considérée comme une science 13
§ 2. La méthode génétique en épistémologie 18
§ 3. L'épistémologie psychologique de F. Enriques 23
§ 4. Les diverses interprétations épistémologiques et l'analyse génétique 30
§ 5. Devenir mental et permanence normative 38

§ 6. Equilibre et « limite ». Le cercle des sciences et les deux directions de la pensée scientifique 42
§ 7. Epistémologie génétique restreinte et généralisée 49

PREMIÈRE PARTIE

LA PENSÉE MATHÉMATIQUE

CHAPITRE PREMIER. — La construction opératoire du nombre 61

§ 1. Les théories empiristes du nombre : A) L'explication du nombre cardinal par l' « expérience mentale » 62
§ 2. Les théories empiristes du nombre : B) L'explication du nombre ordinal par l'expérience intérieure de la succession des états de conscience (Helmholtz) 71
§ 3. Qualité et quantité ; les « groupements » propres aux opérations logiques élémentaires 77
§ 4. La réduction du nombre cardinal aux classes logiques et du nombre ordinal aux relations asymétriques 88
§ 5. L'intuition rationnelle du nombre 94

§ 6. Classes, relations et nombres 97
§ 7. L'axiomatique du nombre entier 105
§ 8. Le nombre négatif et le zéro 110
§ 9. Le nombre fractionnaire et le nombre irrationnel 115
§ 10. Les nombres complexes, les quaternions et les opérateurs 121
§ 11. L'infini et la nature opératoire du nombre 126
§ 12. Conclusion : Le problème épistémologique du nombre. . 131

CHAPITRE II. — La construction opératoire de l'espace 143

§ 1. Classification des interprétations épistémologiques de l'espace 145
§ 2. L'espace perceptif : A) Le «nativisme » et 1'« empirisme » Hérédité et sensation 152
§ 3. L'espace perceptif : B) L'interprétation « gestaltiste » des formes géométriques 164
§ 4. L'espace perceptif : C) L' « activité perceptive » et l'épistémologie génétique de la perception 172
§ 5. L'espace sensori-moteur. Les interprétations de H. Poincaré sur le caractère a priori de la notion de groupe et la nature conventionnelle de l'espace euclidien à trois dimensions . 182
§ 6. Le point de vue de D. Hilbert et le problème de l' « intuition »géométrique 194
§ 7. L'intuition imagée et les opérations spatiales concrètes de caractère « intensif » 201
§ 8. La constitution de la mesure et la mathématisation de l'espace par quantification extensive et métrique 212
§ 9. Les opérations formelles et la géométrie axiomatique 217
§ 10. La généralisation géométrique et l'ordre de succession des découvertes historiques 230
§ 11. L'épistémologie géométrique de F. Gonseth 235
§ 12. Conclusion : L'espace, le nombre et l'expérience ; l'interprétation de L. Brunschvicg 248

CHAPITRE III. — La connaissance mathématique et la réalité. 261

§ 1. La prise de conscience historique des opérations : A) Les mathématiques grecques 261
§ 2. La prise de conscience historique des opérations : B) Les mathématiques modernes 269
§ 3. Le raisonnement mathématique : A) De Poincaré à Goblot 277

§ 4. Le raisonnement mathématique : B) L'interprétation d'Emile Meyerson 284
§ 5. L'interprétation logistique du raisonnement mathématique…….. 295
§ 6. Les thèses de J. Cavaillès et de A. Lautman 315
§ 7. Conclusions : La nature des êtres et des opérations mathématiques 322