Benoît Rittaud

La Géométrie classique

objets et transformations

Quatre à Quatre

Éditions
Le Pommier

Benoît Rittaud

La Géométrie classique
objets et transformations

à Quatre
Quatre

Éditions
Le Pommier

BENOÎT RITTAUD
Agrégé de mathématiques, il est maître de conférences à l'université Paris-XIII. Il collabore à la revue *Tangente*, de culture et de vulgarisation des mathématiques.

Je tiens à remercier les personnes qui, par leurs conseils avisés et leurs encouragements, m'ont aidé dans la rédaction de ce livre.
Mes pensées vont à Valérie Laurent, qui a eu la patience de relire de nombreuses fois les épreuves et y a apporté beaucoup.
Merci également à Miguel Degoulet et à Christophe Juillot, qui ont su me donner de précieuses suggestions.

ISBN 2-7465-0037-X

Les mathématiques dans « Quatre à Quatre » première année

Après la philosophie et les sciences du vivant, « Quatre à Quatre » vous propose un nouveau défi : comprendre les mathématiques. Ce défi est de taille, car nous sommes nombreux à éprouver face aux mathématiques une peur enfantine de l'échec s'exprimant par un mystérieux « blocage » à l'égard de tout ce qui a trait à cette discipline. Or, nous savons tous que le blocage en question n'émane pas d'une limitation de nos compétences intellectuelles.

Ces livres ont pour mission première de vous familiariser à nouveau avec une discipline fascinante tout autant par sa créativité que par sa rigueur. Ils s'adressent principalement aux adultes, seuls capables de maîtriser un concept abstrait, susceptible d'engendrer une infinité de questions d'ordre épistémologique, méthodologique, voire métaphysique.

Quatre livres vous sont proposés cette année. Ils constituent tous une introduction, aussi élémentaire que possible, au monde des mathématiques :

Qu'est-ce que les mathématiques ?

La Géométrie classique : objets et transformations

Le Monde des nombres

La Logique ou l'art de raisonner

Chacun de ces livres peut, bien entendu, être lu indépendamment des autres. Mais l'ensemble des quatre titres peut être considéré comme un tout. D'ailleurs, certains thèmes sont présents dans deux ou trois ouvrages : il ne s'agit point de redondances, mais bien de différences de perspective. Notre conseil est, dans tous les cas, de les lire dans l'ordre mentionné plus haut. Cet ordre définit une double hiérarchie : une généralité décroissante et une difficulté croissante.

Qu'est-ce que les mathématiques ? donne une vision générale et panoramique des disciplines mathématiques, mais aussi des problèmes que rencontrent les hommes (et les femmes) qui les font. *La Géométrie classique* est une introduction à la géométrie qui permet de *re*faire connaissance avec celle des Anciens, et de s'approcher un peu de celle des Modernes. *Le Monde des nombres* constitue une introduction aux différents types de nombres, ainsi qu'aux manières de les utiliser et de les justifier mathématiquement. Enfin, dans *La Logique ou l'Art de raisonner*, le lecteur pourra se familiariser – d'une manière graduelle – avec les fondements formels et symboliques de la logique moderne.

Ces livres constituent une véritable initiation aux mathématiques, et l'usage du papier et du crayon (pour les calculs), la mémorisation des symboles (pour la logique), parfois même une nouvelle lecture peuvent être particulièrement utiles à qui souhaite prendre au sérieux cet apprentissage d'un nouveau genre. Comme toujours, bibliographie, glossaire et index sont là pour vous apporter aide et assistance.

Bonne lecture !

Sommaire

Avant-propos

« Science de toutes les espèces d'espace » selon Kant, la géométrie est, à l'origine, l'étude des propriétés et des relations entre diverses figures composées de droites, de triangles, de cercles, etc. Cette géométrie donne un cadre simple à l'intérieur duquel il est possible de mettre en valeur toute la richesse d'une définition, d'un raisonnement ou d'un théorème mathématique.

S'il existe une quantité potentiellement infinie de questions à se poser à partir d'une situation géométrique élémentaire (le triangle, pour ne citer que lui, est une mine de problèmes, qui vont de la localisation de son centre de gravité au cercle d'Euler, en passant par la droite de Simpson), la géométrie a toutefois profondément changé depuis ses origines, et son évolution ne se résume pas à un simple progrès dans la compréhension de ses objets fondamentaux sur lesquels, avec les siècles, on sait dire de plus en plus de choses : la mutation de la géométrie vient surtout d'un changement de perspective qui a vu les figures perdre leur rôle central au profit des transformations.

Le présent ouvrage se décompose en cinq parties. Le premier chapitre introduit les acteurs de base de la géométrie, comme les points et les droites. Il est construit de façon à contenir aussi peu de difficultés mathématiques que possible : son objectif est surtout de mettre en place quelques principes fondamentaux, comme le postulat des parallèles ou la question de l'égalité géométrique.

Le chapitre II s'intéresse aux objets « classiques » de la géométrie (angles, triangles, cercles...). Nous avons tenté, pour chaque notion et pour chaque résultat, de donner une application concrète ou, au moins, une vision intuitive « parlante ». Ce chapitre contient plusieurs démonstrations : certains lecteurs trouveront peut-être inutiles certaines d'entre elles, en ce qu'elles nécessitent parfois des détours et des efforts pour obtenir une preuve logique qui peut sembler moins convaincante qu'une simple figure. C'est là une subtile difficulté des mathématiques : le raisonnement qui permet d'aboutir à une certitude est parfois plus tortueux que l'intuition du résultat, et ne l'éclaire pas toujours dès la première lecture.

Le troisième chapitre concerne les théorèmes de Thalès et de Pythagore, exposés, démontrés et appliqués à certaines situations.

Au chapitre IV, nous entamons l'étude des transformations (rotations, translations...), qui constituent un concept clé de la géométrie. Là encore, nous avons tenté, au travers d'exemples tirés de différents contextes, d'indiquer en quoi les transformations peuvent être utiles, dans des situations variées.

Le dernier chapitre constitue une ouverture sur d'autres façons de faire de la géométrie. Toujours bien vivantes aujourd'hui, les mathématiques se déploient dans des directions encore nouvelles, et constituent une œuvre éternellement en mouvement.

CHAPITRE I

Premiers éléments

Pour donner une analogie un peu simpliste avec le spectacle, une discipline comme la géométrie se développe à partir d'un contexte et de protagonistes (les objets mathématiques) ; la trame, jamais achevée, est constituée des relations qu'entretiennent entre eux ces différents personnages.

Le théâtre de la géométrie se joue traditionnellement sur deux scènes différentes. La première est celle où tous les objets se situent dans un même plan fixé au départ, comme celui de la feuille : on parle alors de géométrie *plane*. L'autre scène est celle de l'*espace* : bien que de portée plus générale, et même si dans l'espace deux droites peuvent n'être ni sécantes ni parallèles, la manière de raisonner est la même. Dans cet ouvrage, nous nous placerons en général dans le cadre de la géométrie plane.

LE POINT, ATOME DE LA GÉOMÉTRIE

Le premier acteur de la géométrie est le POINT, qui en est l'objet *élémentaire*, ce dernier terme étant pris dans son sens de « composant de base ». Pour le géomètre grec Euclide, « un point est ce dont il n'y a aucune partie » (notons le singulier). C'est un *atome*, au sens étymologique d'« objet insécable ». Cette définition – négative – n'en est pas une à proprement parler, puisqu'elle se réfère à la notion de partie, elle-même non définie. Il faut dire que ce premier acteur n'est pas simple à cerner : il incarne un objet qui ne possède aucune structure, abstraction dans une certaine mesure comparable au zéro, l'analogie n'étant toutefois que partielle, le zéro étant, lui, l'expression d'un *non-être*.

Alors, comment commencer ? Toute définition fait nécessairement référence à des concepts antérieurs et, puisqu'il n'est pas possible de poursuivre ainsi indéfiniment, on est obligé d'accepter que les notions premières se réfèrent à des concepts eux-mêmes mal définis. Cet échec apparent, problématique quand on s'intéresse aux questions plus philosophiques des fondements des mathématiques, ne doit pourtant pas faire oublier que bien des objets mathématiques ont pu être correctement manipulés avant d'avoir reçu de définition précise.

En ce qui nous concerne, nous utiliserons le point comme l'ont toujours utilisé les géomètres : à partir de notre perception usuelle. Le point est à l'espace ce que l'instant est à la durée : on peut l'imaginer mais pas le matérialiser ; c'est peut-être un pur produit de l'imagination, qui apaise notre esprit en nous donnant à croire en cette ultime poupée russe qui ne s'ouvre pas sur une poupée plus petite.

La droite ou l'irruption du continu

On appelle généralement DROITE toute ligne prolongée indéfiniment des deux côtés de façon rectiligne. Parler rigoureusement de la structure et des propriétés qui définissent une droite étant long et délicat, nous n'en donnons ici qu'une brève description.

L'une des caractéristiques essentielles d'une droite est d'être un *continu*. Cette notion rend compte du fait qu'une droite est « sans trou » ; cette propriété est plus forte, plus contraignante que celle qui dit qu'« entre deux points d'une droite, il y en a toujours un troisième ». C'est la continuité qui assure que deux points situés de part et d'autre d'une droite ne peuvent être joints sans la couper (en géométrie plane). Bien que nous ayons tous une perception intuitive nous permettant souvent de raisonner de manière à peu près correcte sur la continuité, l'analyse de cette notion est difficile.

La continuité ne suffit pas à caractériser une droite : un segment, un cercle ou une courbe sont eux aussi des continus. Ce qui distingue géométriquement une droite est son caractère *géodésique*, en vertu duquel dans un plan, la ligne droite est le plus court chemin entre deux points. Pour cette dernière définition, nous utilisons implicitement le concept de *distance*, sur lequel nous aurons à revenir.

Alignement

Deux points sont toujours alignés : il existe obligatoirement une droite les contenant tous les deux. Mais peut-il y en avoir une seconde ? La réponse est oui lorsque les deux points sont confondus (et dans ce cas, il y en a même une infinité). En revanche, lorsque les deux points sont distincts, nous postulerons qu'il n'y a qu'une seule droite qui les contient : cette affirmation, dont la véracité ne semble pas poser question, provient du *postulat des parallèles* (*cf.* p. 18).

Trois points ne sont pas toujours alignés : si l'on assimile le Soleil, la Terre et la Lune à trois points, supposer qu'ils sont alignés revient à dire qu'on est dans une situation d'éclipse de Lune ou de Soleil, suivant l'ordre des points. Or tel n'est pas toujours le cas.

Prenons un instant le point de vue de la géométrie spatiale. Si trois points ne sont pas systématiquement alignés, ils sont en revanche toujours *coplanaires*, c'est-à-dire qu'il existe un PLAN les contenant tous les trois. On peut se contenter, pour la notion de plan, de l'analogie avec une feuille de papier sans épaisseur, prolongée indéfiniment dans toutes ses directions, mais on peut aussi donner une définition rigoureuse à l'aide de la propriété suivante : un plan contenant deux points contient toute la droite qui les porte. (Cette propriété est utilisée par les ajusteurs pour contrôler si une surface donnée est plane ou non.)

Exprimons pour trois points non alignés et un plan l'équivalent de l'énoncé donné pour deux points non confondus et une droite : par trois points non alignés passe un plan et un seul. C'est ainsi qu'un trépied peut s'équilibrer sur n'importe quelle surface, alors qu'une table à quatre pieds est souvent légèrement branlante.

Deux points étant fixés, la portion de droite située entre les points est appelée SEGMENT. La droite qui la contient est la droite *portante.* Une DEMI-DROITE est une droite limitée d'un côté par un point qui en constitue l'*extrémité.*

DROITES ENTRE ELLES

En géométrie plane, dessiner deux droites peut produire trois configurations bien connues. Le premier cas, que l'on rencontre le plus souvent, est celui de droites SÉCANTES. Elles se coupent en un unique *point d'intersection.*

Le deuxième cas est celui de deux droites PARALLÈLES, sans point commun (elles sont *disjointes*). Le dernier cas est celui où les droites sont les mêmes (elles sont *confondues*). On peut considérer que des droites confondues sont parallèles, ou leur refuser ce statut en imposant à toutes droites parallèles d'être disjointes, c'est une question de convention. Dans la pratique, suivant les énoncés que l'on veut donner, on choisit la convention qui permet la formulation la plus élégante (nous illustrerons cela p. 18).

La disjonction n'est pas la « vraie » définition du parallélisme (même s'il est toujours possible de confondre ces deux notions en géométrie plane). Dans l'espace, une telle définition impliquerait de considérer comme parallèles n'importe quelles droites non sécantes, comme par exemple sur un terrain de football l'un des poteaux (verticaux) d'un but et la barre transversale (horizontale) de l'autre but. Par ailleurs, il est des contextes où ce qu'on appelle des parallèles peuvent se rencontrer, comme en géométrie sphérique (*cf.* chap. V).

En géométrie spatiale, on peut dire que deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont disjointes *et* qu'il existe un plan les contenant toutes les deux, ce qui revient à poser que deux droites parallèles sont deux droites ayant même direction, tels deux rails de chemin de fer.

Le postulat des parallèles

« Une droite et un point étant fixés, il existe une droite et une seule passant par ce point et parallèle à la droite. » Cet énoncé est l'une des versions du célèbre *postulat des parallèles*, ou postulat d'Euclide. Euclide avait utilisé une formulation différente ; celle que nous donnons est appelée *axiome de Playfair*. Ici, deux droites confondues sont considérées comme parallèles : si tel n'était pas le cas, il faudrait supposer le point hors de la droite pour que l'énoncé reste correct.

Pendant des siècles, on a pensé pouvoir *démontrer* le postulat des parallèles. Toutes les tentatives ont pourtant échoué car, malgré le caractère de pure évidence de l'énoncé, il n'est possible ni de le démontrer ni de démontrer son contraire, ce qui signifie que l'on peut le considérer comme vrai... ou faux. Ce second point de vue, assez étrange, a permis de fonder de nouvelles géométries, plus exotiques que celle à laquelle nous sommes accoutumés (*cf.* chap. V).

Pour notre part, nous nous intéresserons à la *géométrie euclidienne*, à savoir celle qui accepte le postulat d'Euclide et constitue la géométrie la plus naturelle à l'échelle humaine.

La question de l'égalité

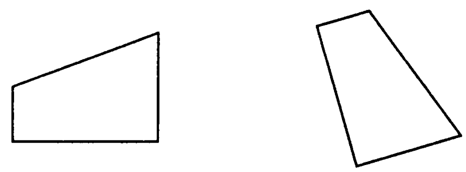
Deux droites, même non confondues, ont une propriété de « ressemblance » qui fait qu'on est tenté de les considérer comme équivalentes : il n'y en a pas une « plus grande » que l'autre, ou dirigée dans une direction privilégiée.

L'intérêt de disposer de deux objets équivalents réside en partie dans le fait qu'étudier l'un dispense d'étudier l'autre : ainsi, pour connaître les propriétés géométriques des droites, il suffit d'en observer une seule. Il en va de même pour les plans ; c'est ainsi que la géométrie plane est la géométrie *du plan* plutôt que celle *d'un plan*.

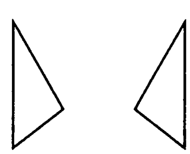
Mettons toutefois l'accent sur une chose : l'équivalence entre deux objets (des droites, par exemple) est toujours subordonnée à un contexte. C'est ainsi que deux droites ne pourront être considérées comme équivalentes que parce que nous nous placerons dans le cadre de la géométrie plane ou spatiale. Pour reprendre l'exemple précédent, dans le cadre de l'astronomie mathématique, une droite orientée nord-sud et une droite orientée est-ouest ne peuvent plus être considérées comme équivalentes.

En réalité, deux choses n'en font qu'une seulement lorsqu'elles sont équivalentes dans tout contexte (lorsqu'il n'y a pas moyen de les distinguer l'une de l'autre). L'équivalence des figures dans le contexte de la géométrie plane est appelée ÉGALITÉ.

Nous dirons, de façon intuitive, que deux figures géométriques (segments, droites ou autres) sont *égales* lorsqu'il est possible de faire glisser l'une sur l'autre de façon à ce qu'elles se recouvrent exactement. Ainsi des figures suivantes.



Soulevons pour commencer la question de la terminologie. Il faut avoir à l'esprit que l'égalité n'est pas l'identité. Le fait que les hommes soient égaux ne signifie pas qu'ils soient tous une seule et même personne : de la même façon, deux figures égales peuvent être distinctes. On rencontre parfois les termes de figures « superposables », ou encore « isométriques », pour exprimer la notion d'égalité géométrique. « Superposable » renvoie au concept de « poser dessus », qui nécessite dans sa réalisation matérielle une troisième dimension. « Isométrique » concerne la préservation des longueurs des parties définissant une figure. Pour nous, il s'agit de « faire glisser », opération purement bidimensionnelle qui interdit les retournements.



Les deux figures ci-dessus, que l'on peut retourner l'une sur l'autre pour les faire coïncider, sont dites SYMÉTRIQUES. On peut, comme certains ouvrages le font, décider que deux figures symétriques sont égales (au sens d'équivalentes) : cette convention présente l'inconvénient de « dissoudre » dans le vocabulaire l'importante question de l'orientation.

Pour en finir avec ces questions de vocabulaire, indiquons que le contraire de « deux figures sont égales » est : « deux figures sont différentes ». Tout comme il convient de distinguer « égaux » et « confondus », il ne faut pas confondre « différents» et « distincts ».

Notons enfin que notre définition de l'égalité n'est pas pleinement satisfaisante, car nous n'avons pas clarifié l'expression « faire glisser ». On peut considérer qu'il s'agit là d'une subtilité excessive, de la même façon que l'intuition la plus élémentaire nous assure de l'existence et de l'unicité d'une parallèle à une droite donnée passant par un point fixé. Cette remarque met en lumière la difficulté qu'il y a à vouloir rendre rigoureux ce que nous concevons si bien de façon intuitive. Les lecteurs qui le désirent peuvent passer outre ce problème logique, nous en donnerons toutefois quelques justifications plus loin (*cf.* chap. IV).

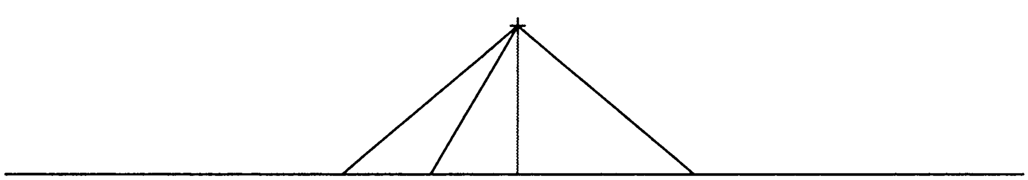
Longueur, distance

Pour ne pas trop compliquer les choses, nous allons ici faire une nouvelle entorse à la rigueur mathématique au sujet de la *longueur* d'un segment, notion essentielle en géométrie que nous ne considérerons que de manière intuitive. Dans la pratique, pour mesurer des longueurs, on utilise comme étalon une règle graduée. Cette manière de procéder fait implicitement référence au déplacement sans déformation d'une règle, c'est-à-dire d'un segment.

Pour faire une mesure, il faut se fixer au préalable une unité, par exemple le mètre. On ne devrait donc pas dire « un segment de longueur 4 », puisque se pose alors la question de l'unité de référence. Toutefois, pour plus de clarté, nous nous autoriserons à utiliser des longueurs sans spécifier l'unité dans laquelle elles sont exprimées, étant implicitement convenu que cette unité est toujours la même.

Nous considérons d'autre part que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points (*cf.* p. 15), ce qui donne corps à la notion de distance d'un point à un autre. Si cet énoncé revêt un caractère d'évidence, chacun sait pourtant que, dans la vie courante, un détour peut faire gagner du temps suivant la praticabilité des chemins. Dans cet ouvrage, nous n'aurons pas à nous préoccuper de ces questions.

Par définition, la distance d'un point à une droite est la longueur du plus court segment joignant ce point à un point de la droite.



Remarquons brièvement que la droite portant ce segment le plus court est perpendiculaire à l'autre : c'est là une bonne définition de l'angle droit (*cf.* chap. II).

On appelle milieu d'un segment l'unique point de ce segment qui est à égale distance de ses extrémités. Un point O et un nombre (positif) r étant donnés, l'ensemble des points à distance r de O est un CERCLE, dont O est le centre et r le RAYON. En géométrie dans l'espace, l'ensemble des points à distance r d'un centre donné est une sphère.

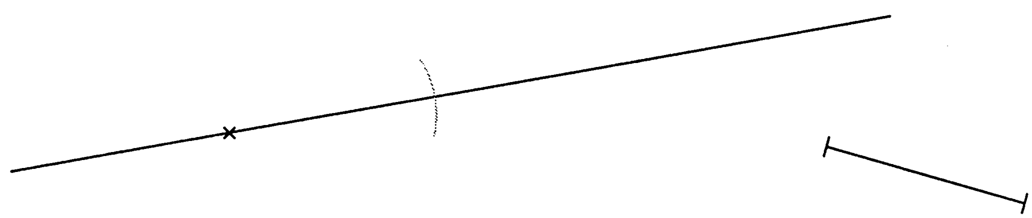
LE PHYSIQUE ET LE GÉOMÉTRIQUE

Il existe une distinction irréductible entre les objets géométriques, comme les points ou les droites, et les figures physiques avec lesquelles on les représente : un point fait au crayon n'est jamais parfaitement ponctuel, une portion de droite n'est jamais dessinée de façon rigoureusement rectiligne. On peut ainsi, à la suite de Platon, considérer tout dessin, ou toute représentation physique, comme essentiellement *imparfait* puisque infidèle aux objets mathématiques qu'il représente ; cependant, on peut aussi avoir la position contraire et affirmer que les notions de point ou de droite sont d'abord issues de nos observations du monde physique, et que ce sont donc les objets mathématiques qui sont une *idéalisation* et une *simplification* de la réalité. En ce qui nous concerne, nous nous occupons des objets de la géométrie mathématique et non de ceux du monde physique, ce sont donc les figures qu'il nous faut considérer avec prudence.

INSTRUMENTS

L'outil le plus important pour dessiner une situation géométrique est le compas. En fixant sa pointe sur la feuille et en faisant tourner le crayon à écartement constant des deux branches, on dessine un cercle dont le centre est à la pointe et dont le rayon est la longueur du segment constitué par les deux extrémités du compas.

Le compas permet également de reporter des longueurs. Par exemple, imaginons un segment fixé et une droite quelconque sur laquelle on se donne un point. Comment localiser un second point sur la droite de telle sorte que sa distance au premier soit donnée par la longueur du segment ?



Pour cela, on fait coïncider les extrémités du compas avec celles du segment, ce qui fixe l'écartement des branches à la bonne longueur. Il suffit ensuite, sans changer cet écartement, de poser la pointe du compas sur le point considéré, et d'amener l'autre extrémité au contact de la droite : le point désigné vérifie la condition posée.

Le second outil du géomètre est la règle, qui permet de tracer des portions de droite. La règle peut être munie de graduations dont l'espacement est l'unité de mesure : en conséquence, on ne peut pas estimer n'importe quelle longueur avec la règle graduée, seules peuvent l'être celles valant un nombre entier de fois l'unité de mesure (le demi-millimètre, par exemple). En cela, le compas se substitue avantageusement à la règle, même graduée, puisque le report d'une longueur au compas (comme celui réalisé plus haut) ne nécessite ni la connaissance chiffrée de cette longueur, ni même que cette longueur soit un nombre entier de fois l'unité de mesure.

Ainsi, contrairement à ce que l'on pourrait croire, le compas est plus important que la règle pour localiser des points sur une figure. On peut même montrer (nous ne le ferons pas ici) que tout point localisable à l'aide d'une règle et d'un compas peut être atteint avec le compas seul !

Indiquons deux autres instruments classiques de la boîte à outils du géomètre : l'équerre et le rapporteur. Une équerre est constituée de deux règles fixées l'une à l'autre à angle droit, et permet de tracer des morceaux de droites perpendiculaires. Le rapporteur, lui, est un objet en forme de demi-cercle, dont le centre est bien localisé, qui permet de tracer et de mesurer des angles de différentes grandeurs. Ces notions seront introduites au chapitre suivant.

D'un point de vue pratique se pose la question de la fabrication des outils du géomètre : quel procédé un fabricant de règles ou de compas doit-il suivre pour que ce qu'il fabrique soit d'une bonne qualité théorique ? Est-on bien sûr qu'avec les outils à notre disposition, les cercles seront vraiment circulaires et les droites vraiment rectilignes ?

Pour fabriquer un compas, la contrainte est minime, il suffit de bien lier les extrémités des branches, et ces dernières n'ont nullement besoin d'être droites : un morceau de bois en Y dont l'une des branches est taillée en pointe et l'autre enduite de peinture permet de tracer des cercles parfaits (de rayon fixe), puisque seul compte l'écartement entre les extrémités.

Encadré 1 : QUELQUES NOTATIONS

Un point sera désigné par une lettre majuscule, tel le point A ci-dessous.

× A

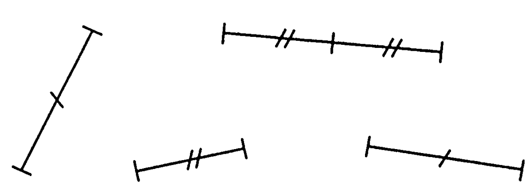
Pour une droite, on pourra choisir une lettre, comme Δ (delta majuscule), ou utiliser le fait que par deux points distincts passe une droite et une seule : une droite étant ainsi *définie* (on dit plutôt *caractérisée*) par deux de ses points A et B, quelconques non confondus, la droite peut être notée (AB) (attention, plusieurs noms peuvent ainsi désigner la même droite). Enfin, on peut nommer une droite par ses branches infinies, notées par des minuscules, comme pour la droite (*xy*) ci-dessous.

Cette notation quelque peu allusive sert lorsqu'on considère des angles, elle évite d'avoir à rajouter des points aux figures pour préciser lequel des deux côtés d'une droite est envisagé.

On note [AB] le segment dont les extrémités sont les points A et B ; sa longueur est AB. Conventionnellement, A et B font partie de [AB] : le segment est *fermé*.

La demi-droite d'extrémité A et contenant B est notée [AB) : le crochet désigne la limitation au point A, alors que la parenthèse indique que le point B ne constitue pas une extrémité à la demi-droite. Tout comme pour une droite, on peut désigner par une lettre minuscule, *x* par exemple, la branche infinie, ce qui permet de noter [A*x*).

Pour signifier l'égalité des longueurs de deux (ou plusieurs) segments, on inscrit sur chacun d'eux un même signe.



Le cas de la règle est plus délicat. La première idée est de tailler une planche en utilisant un modèle de ligne que l'on sait être droite. Mais où trouver un tel modèle ? La nature n'en produit pas d'exemple simplement exploitable, en dehors du fil tendu ou du fil à plomb (la ligne de l'horizon marin est un exemple tentant mais faux de ligne droite, la Terre étant sphérique). La question a été un réel problème, résolu au XIXe siècle à l'aide de diverses constructions mécaniques établies à partir de considérations géométriques (inverseur de Peaucellier, inverseur de Hart...), rendant ainsi la règle complètement inutile... d'un point de vue théorique, tout du moins.

CHAPITRE II

Objets classiques

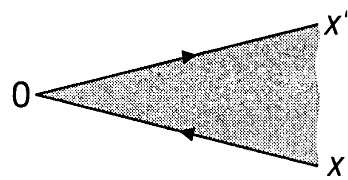
Bien des ensembles de lignes droites et courbes, même s'ils sont liés par des rapports complexes, sont susceptibles d'être analysés géométriquement grâce aux concepts élémentaires d'angle, de triangle ou de cercle. Il est donc naturel de commencer par étudier ces notions, à partir desquelles on peut s'intéresser à des figures plus élaborées.

ANGLES

L'ANGLE est la première figure géométrique composée, dérivée des notions de point et de droite. Il semble que Thalès ait été le premier, vers 600 av. J.-C., à avoir envisagé les angles en tant qu'objets géométriques à part entière.

Outils universels et irremplaçables, les angles sont un concept fondamental de la géométrie. Il est à peine exagéré de dire que notre perception visuelle est conditionnée par cette notion : ce sont les rapports angulaires entre les objets et le centre de notre vision qui déterminent ce qui nous est visible et ce qui nous est caché. C'est l'angle que font entre elles les directions de nos deux yeux fixant un même objet qui nous donne une idée de son éloignement. C'est l'angle, encore, sous lequel nous apparaît un objet qui nous permet de nous faire une idée de son volume. C'est l'angle, toujours, qu'un bateau fait avec la direction du nord qui détermine son cap. C'est l'angle, enfin, que fait le Soleil avec l'horizon qui détermine la quantité de chaleur délivrée en un point donné (et permet d'expliquer le cycle des saisons).

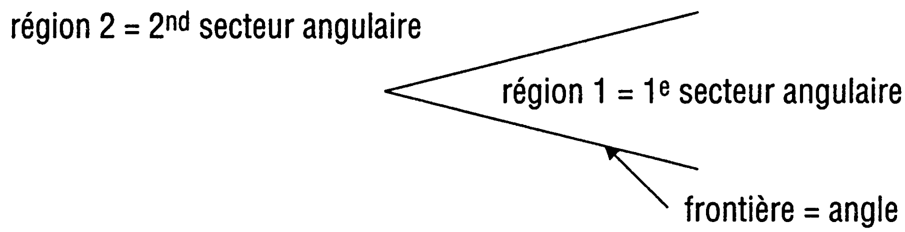
Un angle est la donnée d'un point (le *sommet*) et de deux demi-droites dont ce point constitue l'extrémité (les *côtés*). Une illustration simple de ce concept est donnée par la trajectoire d'une bille qui roule vers un mur et qui rebondit contre lui.



On note ∠AOB l'angle défini par les demi-droites [OA) et [OB), ∠xOx' celui défini par [Ox) et [Ox') (la lettre du milieu désigne toujours le sommet de l'angle).

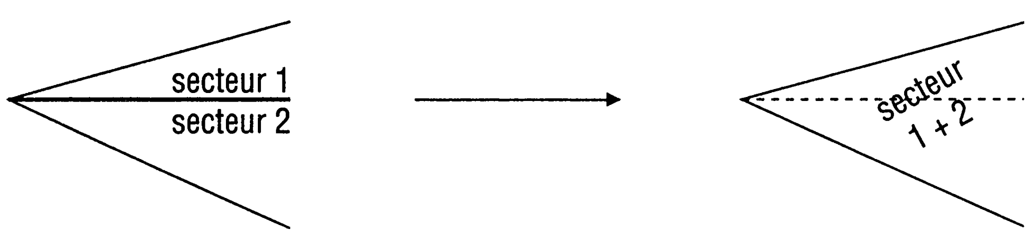
Il peut sembler que notre définition ne rende pas entièrement compte de l'idée que l'on se fait d'un angle, puisque à aucun moment n'est intervenue la détermination d'une région du plan : en effet, l'angle ∠xOx' précédent doit-il être associé au domaine grisé ou bien à l'autre portion du plan, laissée blanche ?

Chacune de ces régions est en fait un SECTEUR ANGULAIRE. Un angle en définit donc deux (un petit et un grand). Une autre manière d'expliquer la distinction entre angle et secteur angulaire est de dire que l'angle est la frontière, et que les secteurs angulaires que cet angle définit sont les deux territoires disjoints limités par cette frontière.



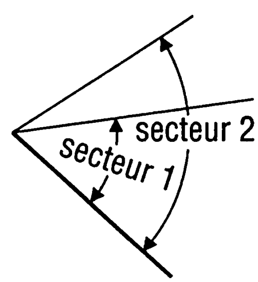
Malgré la différence, on confond parfois les deux notions, en appelant « angles » des secteurs angulaires. Cette dénomination éloigne du concept premier, mais simplifie le langage sans grand inconvénient et, surtout, elle est universellement employée aujourd'hui. Pour ne pas nous couper de l'usage, c'est donc cette terminologie que nous emploierons, sauf dans le paragraphe suivant, où faire la distinction présente un intérêt conceptuel.

AJOUTER, COMPARER, ORIENTER DES ANGLES. Deux secteurs angulaires de même sommet sont ADJACENTS lorsque leur intersection est une demi-droite. On peut alors en faire la somme, laquelle est le secteur angulaire obtenu par réunion. On peut également comparer deux secteurs angulaires adjacents, l'un étant dit plus petit que l'autre lorsqu'il lui est inclus.



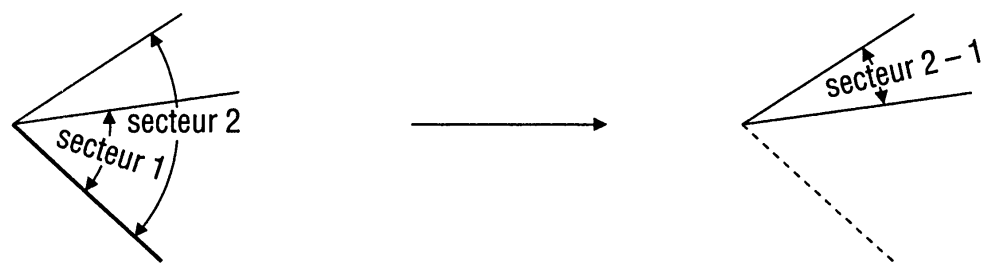
C'est un intérêt majeur des secteurs angulaires que de pouvoir être sommés et comparés. En général, on peut dire que deux figures géométriques sont égales ou différentes, mais il n'y a pas de sens à dire que l'une est « plus grande » que l'autre, pas plus qu'il n'y en a à les « ajouter ». *(Lequel serait « le plus grand » d'une droite et d'un* angle ? Quel serait le résultat de l'« addition » d'un cercle et d'un segment ?) C'est ainsi que les secteurs angulaires définis par une figure peuvent en constituer des éléments décisifs, puisqu'on peut travailler sur eux en disposant d'une structure très riche, comparable à celle des segments (qu'on peut aussi ajouter entre eux, et dont on peut comparer les longueurs).

Le concept de somme justifie que l'on étudie les secteurs angulaires de préférence aux angles. En effet, avec nos définitions, il est impossible de définir la somme de deux angles de façon satisfaisante, dans la mesure où on ne peut déterminer si deux angles sont en position d'être sommés : le seul fait qu'ils ont une demi-droite en commun ne le garantit pas.



Pour remédier à ce problème, on peut considérer des angles *orientés*, c'est-à-dire pour lesquels les demi-droites sont *ordonnées*. Jusque-là, nous ne faisions pas de distinction entre les angles $\angle xOy$ et $\angle yOx$. Si, maintenant, on décide que ces deux angles sont différents, c'est-à-dire qu'un angle n'est pas seulement la donnée de deux demi-droites, mais d'une première demi-droite (la trajectoire de la bille avant le choc contre le mur) et d'une seconde (la trajectoire après le choc), alors on peut définir la somme de deux angles tels que la première demi-droite de l'un coïncide avec la seconde de l'autre (de tels angles sont dits adjacents). On pourrait montrer que raisonner sur les secteurs angulaires ou sur les angles orientés revient au même.

On peut aussi soustraire deux secteurs angulaires dont l'un est inclus dans l'autre et tels que les angles qu'ils définissent ont leur sommet et une demi-droite en commun. Le procédé de soustraction tient en une figure.

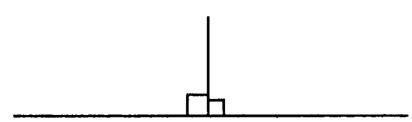


On peut ainsi interpréter l'intérêt des secteurs angulaires par rapport aux angles en disant que, lorsque deux angles sont adjacents, on ne sait pas s'ils sont en position d'être sommés ou bien soustraits.

ANGLES PARTICULIERS. Nous confondons désormais les angles avec les secteurs angulaires. Pour que soit levée toute ambiguïté dans les notations, le secteur angulaire associé à un angle donné est toujours le plus petit des deux possibles. (Lorsque les deux sont égaux, le contexte explicite toujours le côté auquel on s'intéresse.)

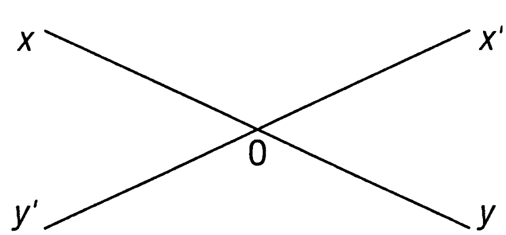
Deux demi-droites confondues définissent *l'angle nul* (que l'on peut envisager comme *plein*, suivant le secteur angulaire que l'on considère), équivalent du zéro pour les angles car élément neutre pour l'addition : en effet, ajouter l'angle nul à un angle quelconque ne modifie pas ce dernier. Dès lors, deux angles sont égaux si, et seulement si, leur différence est égale à l'angle nul.

Lorsque les demi-droites sont les deux parties complémentaires d'une même droite, l'angle est *plat*. En coupant un angle plat en deux angles égaux, on obtient des angles *droits*, dont on use abondamment tant en géométrie que dans la vie courante (on désigne l'angle droit par un trait anguleux).



Les angles droits sont tous égaux entre eux, de même que les angles plats. Deux droites se coupant à angle droit sont dites *perpendiculaires* (ou *orthogonales*).

RENCONTRES ENTRE DROITES. La situation la plus simple de la géométrie plane qui présente de l'intérêt est celle de deux droites sécantes.



Ces droites définissent quatre angles. Chacun d'eux est adjacent à deux autres, et *opposé par le sommet* au troisième. Le résultat que l'on peut obtenir de cette situation est que les angles opposés par le sommet sont égaux.

La démonstration de ce résultat n'est pas difficile, son intérêt est surtout de mettre en valeur l'utilité de pouvoir ajouter et soustraire des angles comme on le fait avec des nombres.

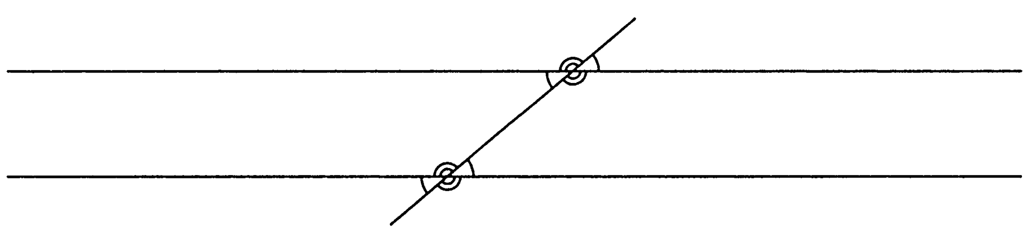
La somme des angles $\angle xOx'$ et $\angle x'Oy$ est un angle plat, ainsi que la somme de $\angle y'Ox$ et $\angle xOx'$. On peut donc écrire l'égalité suivante :

$\angle xOx' + \angle x'Oy = \angle xOx' + \angle y'Ox.$

Tout comme pour une égalité entre nombres, on peut retrancher membre à membre, en remarquant que l'angle $\angle xOx'$ se retrouve à l'identique de chaque côté de l'égalité. Cela donne $\angle x'Oy = \angle y'Ox$, ces deux angles opposés par le sommet sont donc égaux. Un raisonnement analogue montre qu'on a aussi $\angle yOy' = \angle xOx'$.

Deux angles dont la somme est un angle plat, comme $\angle xOx'$ et $\angle x'Oy$ sur la figure précédente, sont dits SUPPLÉMENTAIRES.

Compliquons un peu la situation en ajoutant une troisième droite. Nous considérons la configuration suivante, où deux droites (et seulement deux) sont parallèles :

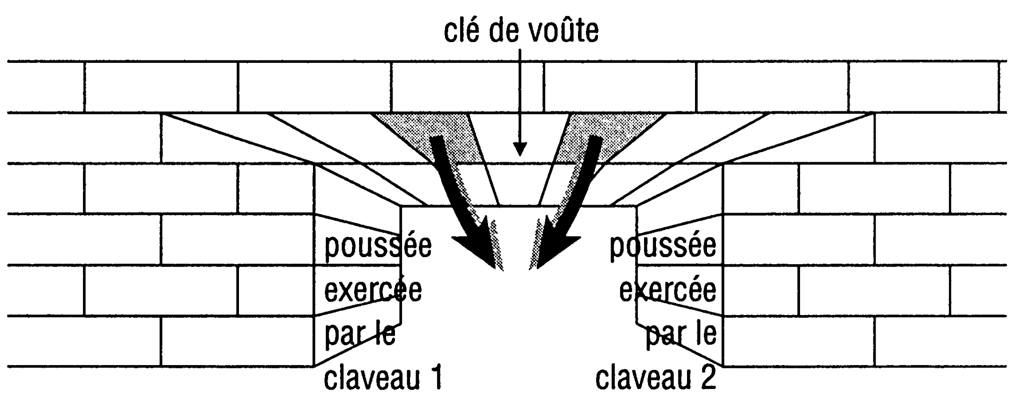


On démontre que, dans la figure précédente, tous les angles représentés par le même nombre de traits sont égaux. Le lecteur pourra s'en assurer en considérant le résultat d'égalité des angles opposés par le sommet, ainsi que des déplacements sans déformation des angles.

À l'intérieur de la bande définie par les deux droites parallèles, il y a donc deux paires d'angles égaux. Chaque paire constitue un couple d'angles dits *alternes-internes*. Dans la bande, on trouve aussi deux paires d'angles qui « regardent du même côté » (vers la gauche ou vers la droite). Chacune de ces paires constitue un couple d'angles supplémentaires dits *intérieurs du même côté*.

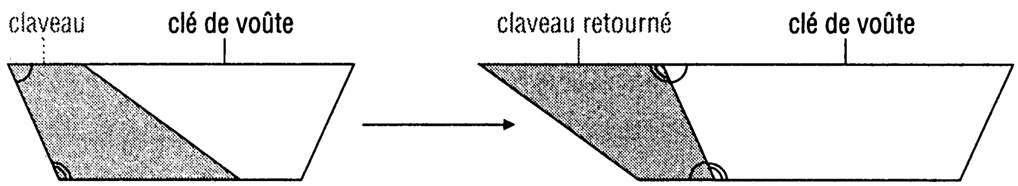
Supposons un instant que, dans la figure précédente, on ignore si les deux droites horizontales sont parallèles mais que, pour une raison quelconque, on soit assuré des égalités d'angles représentées sur cette figure. On peut alors montrer (avec le postulat des parallèles) que ces deux droites sont effectivement parallèles. Il s'agit là d'un résultat réciproque du précédent, dont un cas particulier est que deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles.

La configuration des angles alternes-internes, connue depuis l'Antiquité, a notamment été utilisée par Villard de Honnecourt, un architecte du XIII^e siècle, qui a donné une méthode pour la taille des pierres *(claveaux)* d'une voûte plate.



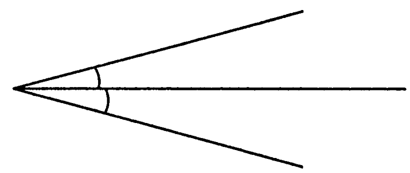
Pour une telle construction, il n'est évidemment pas raisonnable d'utiliser des pierres taillées à angles droits, même fixées à l'aide de mortier. L'idée consiste à tailler chaque claveau selon un angle tel qu'il repose en partie sur celui qui lui est adjacent, la *clé de voûte* étant le claveau central équilibrant les poussées exercées des deux côtés.

Le problème est donc de tailler chaque claveau selon un angle supplémentaire à celui du claveau adjacent. Pour le faire avec précision, le moyen employé par Villard de Honnecourt était, un premier claveau étant donné (la clé de voûte), de tailler le suivant en le superposant au précédent suivant l'angle intérieur du même côté, ce qui garantit géométriquement la précision de la fabrication.



Un résultat dont la preuve utilise la structure ordonnée des angles est qu'une droite Δ et un point A de Δ étant fixés, il existe une unique droite perpendiculaire à Δ passant par A. Même évident, ce résultat demande une démonstration, qui s'effectue en se fixant Δ, en faisant « tourner » autour de A une droite contenant A et en montrant qu'il y a une position qui produit un angle droit (existence), mais qu'il n'y en a pas d'autre (unicité). Ce résultat est vrai aussi si A n'est pas un point de Δ.

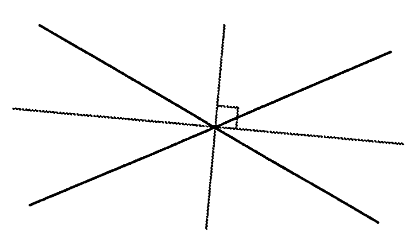
DIVISER UN ANGLE. Un angle étant donné, on appelle BISSECTRICE la demi-droite qui a le sommet de l'angle pour extrémité et qui partage l'angle en deux angles égaux. La bissectrice est à l'angle ce que le milieu est à un segment.



La bissectrice existe toujours, et elle est toujours unique : la démonstration est analogue à celle de l'existence et de l'unicité de la perpendiculaire à une droite passant par un point donné de cette droite.

De la même manière, on appelle *trissectrices* les deux demi-droites partageant un angle en trois parties égales. On peut continuer de la sorte et, si anodine que paraisse cette construction, elle n'en permet pas moins de définir la notion de division d'un angle par un nombre entier positif. (On pourrait de même définir la multiplication.) Ces deux opérations augmentent la richesse structurelle des angles ; elles s'étendent aux autres nombres que les entiers, mais nous allons ici nous contenter de l'étude des bissectrices. Notons qu'il n'y a pas de sens à vouloir multiplier des angles entre eux.

On peut démontrer, nous laissons cela à l'initiative du lecteur, que lorsque deux droites sont sécantes, les quatre bissectrices des angles définis par ces droites forment deux droites perpendiculaires.



UNITÉS. L'unité de mesure des angles la plus courante est le DEGRÉ. Par définition, un degré est la 1/90e partie de l'angle droit. L'angle plat mesure donc 180 degrés, notés 180°. Un angle plein mesure 360°. Ce choix, essentiellement arbitraire, nous vient des Babyloniens et de la base 60 qu'ils utilisaient pour leur système de numération.

La soixantième partie d'un degré définit la *minute d'arc*. Enfin, la soixantième partie d'une minute d'arc est une *seconde d'arc*. Pour considérer des angles encore plus petits, on parle simplement de dixième de seconde d'arc, de centième, de millième, etc. Un angle mesurant 1 degré, 13 minutes et 43 secondes se note 1°13'43".

Le *grade* est une autre unité de mesure des angles, aujourd'hui tombée en désuétude, qui consiste en un découpage *décimal* des angles plutôt que *sexagésimal* (*i.e.* en base soixante) comme les degrés. L'angle droit mesure 100 grades (gr). L'angle plat mesure donc 200 gr, l'angle plein 400 gr. Les subdivisions du grade sont décimales : dixième de grade, centième...

On utilise aussi parfois comme unité le *millième*, qui est l'angle sous lequel on voit un objet de 1 mètre situé à une distance de 1 kilomètre.

Il existe une dernière unité, le RADIAN, qui se définit à partir du cercle, et que nous verrons p. 71.

TRIANGLES

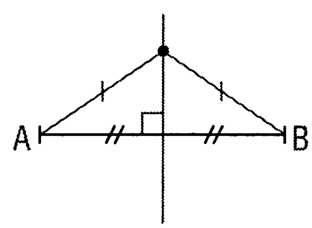
Trois points (non alignés) reliés entre eux par des segments constituent un *triangle*. Le triangle est un condensé extraordinaire de la géométrie. La liste de toutes ses propriétés est immense, celle de ses applications pratiques ne l'est pas moins. Le lien entre ses côtés et ses angles est à la base de la TRIGONOMÉTRIE. L'étude des triangles permet des mesures indirectes, dont nous verrons des exemples avec les théorèmes de Thalès et de Pythagore (*cf.* chap. III). Les premières mesures de la longueur des méridiens terrestres ont utilisé la *triangulation*, qui permet d'évaluer de très grandes longueurs auxquelles on ne peut avoir accès directement.

Une propriété du triangle à la fois immédiate et profonde est l'*inégalité triangulaire*. Celle-ci indique que la longueur d'un côté est toujours inférieure à la somme des longueurs des deux autres. Cette propriété définit en fait la notion de distance. Elle reste vraie même dans des contextes où la ligne droite n'est pas le plus court chemin entre deux points. Un tel contexte est par exemple donné par un réseau ferroviaire où tous les trains vont à la même vitesse : le trajet le plus court pour joindre deux villes n'est en général pas rectiligne, mais il n'est jamais plus rapide d'aller de A à B puis de B à C que d'aller directement de A à C.

MÉDIATRICES, CERCLE CIRCONSCRIT. Considérons trois coureurs qui, partis d'un même endroit, doivent chacun atteindre une destination différente. Ces buts (non alignés) étant fixés, nous allons déterminer un point de départ équitable pour les trois coureurs, c'est-à-dire à égale distance des trois points d'arrivée.

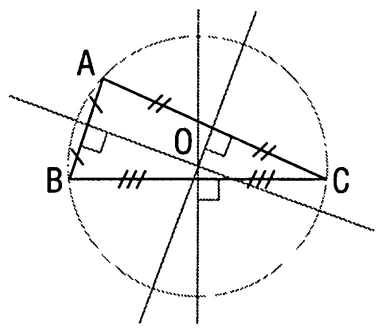
Plus mathématiquement, trois points A, B et C étant fixés (qui forment un triangle), nous nous posons la question de trouver un point O tel que OA = OB = OC. Rien ne dit *a priori* qu'un tel point existe, ni qu'il n'y en a qu'un seul ; tel est pourtant le cas.

Pour trouver un point à égale distance de A, B et C, une étape préliminaire consiste à trouver d'abord un point à égale distance de A et de B, question plus facile à résoudre et qui fait intervenir la notion de MÉDIATRICE d'un segment. Par définition, la médiatrice de [AB] est l'ensemble des points à égale distance de A et de B (on dit *équidistants*). Nous admettrons que la médiatrice de [AB] est la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de [AB]. La ligne centrale d'un terrain de basket est ainsi la médiatrice du segment formé par les deux paniers.



Un point équidistant de A, de B et de C est donc nécessairement sur la médiatrice de [AB]. Mais, bien entendu, il doit également être sur la médiatrice de [AC] et sur celle de [BC].

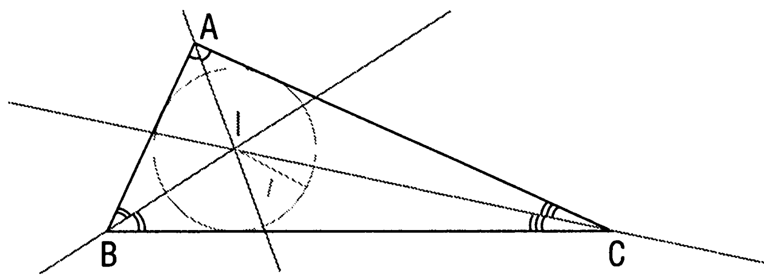
La médiatrice de [AB] et celle de [AC] sont sécantes en un point O (dès lors que A, B et C ne sont pas alignés). Ce point est l'unique candidat plausible pour être équidistant de A, B et C, puisqu'il est seul à remplir les deux conditions nécessaires qui sont d'être à égale distance de A et B et à égale distance de A et C. C'est là qu'intervient l'argument décisif : puisque OB = OA et que OA = OC, on a aussi OB = OC (transitivité de l'égalité : si $x = y$ et $y = z$, alors $x = z$), c'est-à-dire que O est sur la médiatrice de [BC]. Ce point O est donc le point de départ équitable pour les coureurs. Mathématiquement, nous venons de montrer que les médiatrices des côtés d'un triangle se coupent en un même point : elles sont dites *concourantes*.



Le *cercle circonscrit* au triangle (ABC) est le cercle (unique) de centre O et de rayon $r = OA = OB = OC$, qui passe donc par les trois sommets du triangle. On déduit de ce qui précède que par trois points non alignés passe un cercle et un seul.

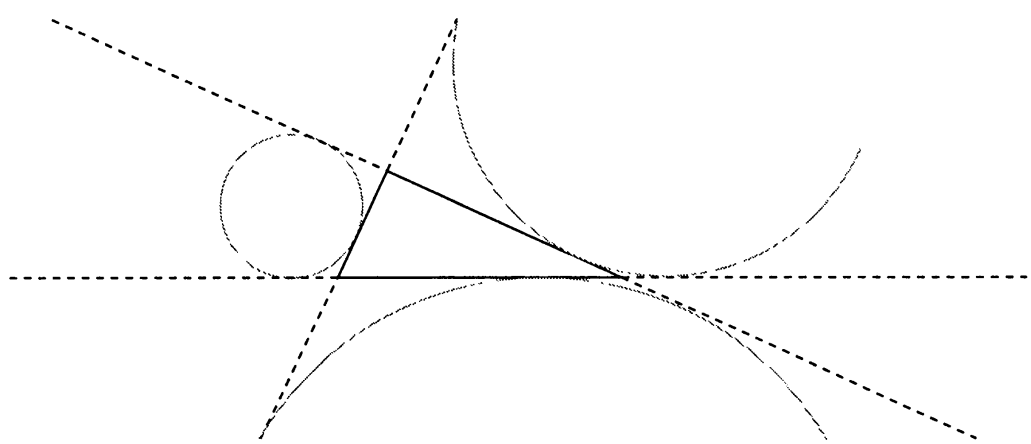
BISSECTRICES, CERCLE INSCRIT, CERCLES EXINSCRITS. Imaginons à présent que nos trois coureurs doivent chacun, non pas atteindre un point, mais franchir une ligne. Les trois lignes forment les côtés d'un triangle dont les sommets sont les intersections de ces lignes. Le contexte est donc légèrement modifié : on doit cette fois considérer des distances non plus aux sommets mais aux côtés du triangle. Les outils qui s'imposent à la place des médiatrices des côtés sont alors les bissectrices des angles du triangle : il se trouve en effet que tout point de la bissectrice d'un angle est à égale distance des demi-droites définissant cet angle.

Une étude identique sur le fond à celle des médiatrices du triangle produit un résultat « jumeau » : les bissectrices d'un triangle sont concourantes. Autrement dit, si trois coureurs sont entourés par trois lignes d'arrivée, il y a un unique point de départ équitable.



Le cercle de centre I et de rayon *r* est le cercle *inscrit* au triangle (ABC). Il ne touche chacun des segments qu'en un point : il est *tangent* aux trois (*cf.* p. 68).

Lorsque les trois coureurs ne sont pas entourés par les lignes d'arrivée, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas à l'intérieur du triangle qu'elles forment, il existe tout de même un point de départ équitable. Plus précisément, il en existe un pour chacune des trois régions du plan extérieures au triangle en contact avec les trois lignes : ces points sont les centres des cercles *exinscrits*.

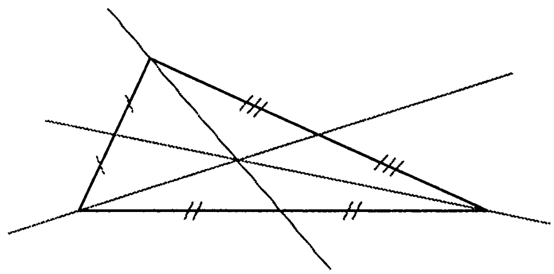


Nous avons indiqué que la démonstration du concours des bissectrices d'un triangle suivait le même cheminement que celle du concours des médiatrices : dans les deux cas, on utilise la propriété de transitivité de l'égalité des distances, seule étant modifiée la nature des objets desquels on est distant (des points pour les médiatrices, des droites pour les bissectrices).

On peut donner un résultat plus général : si l'on définit la distance d'un point à un objet géométrique quelconque (un cercle, une droite, un triangle ou autre) comme la longueur du plus petit segment joignant ce point à un point de l'objet, alors on peut écrire une démonstration inspirée de celle concernant les médiatrices ou les bissectrices pour affirmer que, trois objets étant fixés, il existe un point à égale distance des trois. Mettons toutefois deux bémols à cette affirmation : d'abord, ce point n'est pas nécessairement unique (dans le cas de trois droites, il y a le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits), ensuite, l'énoncé n'est correct que sous une hypothèse, peu restrictive il est vrai, sur les positions relatives des trois objets. Pour reprendre le cas de trois droites, il faut supposer qu'elles ne sont pas parallèles.

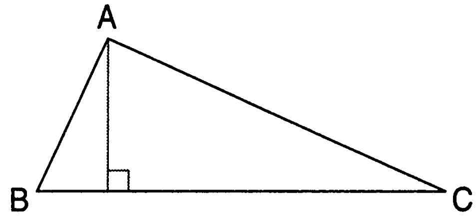
HAUTEURS, MÉDIANES. Ce qui précède a mis en scène médiatrices et bissectrices, deux notions qui existent en dehors du triangle (l'une se réfère à un seul segment, l'autre à un seul angle). À l'inverse, les deux définitions qui suivent ne prennent sens que lorsqu'un triangle (ABC) est donné.

Si, sur un plan rigide de masse nulle, on dispose une masse au niveau de chaque sommet d'un triangle, alors il existe un unique point où il convient de placer une pointe pour maintenir le plan en équilibre : le *centre de gravité*, ou ISOBARYCENTRE du triangle. Il se trouve au point de concours de trois segments, les MÉDIANES, joignant les sommets du triangle aux milieux des côtés opposés. On peut montrer que les trois médianes sont concourantes.



Notons que, pour un triangle *plein* (une pièce solide en forme de triangle) à l'intérieur duquel la masse est répartie de façon homogène, le point d'équilibre est également le point de concours des médianes, ce qui n'est pas le cas, en revanche, pour un triangle dont la masse est uniformément répartie sur les côtés (comme dans l'instrument de musique du même nom).

Le plus court chemin menant du sommet A à la droite (BC) est la HAUTEUR issue de A. C'est la perpendiculaire à (BC) passant par A, utile pour déterminer l'AIRE d'un triangle. L'intersection de la hauteur avec [BC] est le *pied*.



Le lecteur s'attend probablement à l'énoncé suivant : les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, en un point appelé *orthocentre*. Nous admettons ce résultat, indiqué pour mémoire.

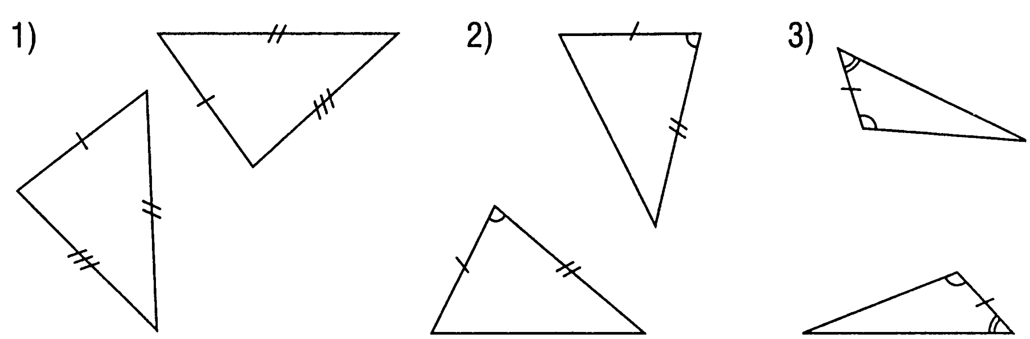
CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES. Il est facile de se convaincre que les trois angles et les trois côtés d'un triangle ne peuvent pas être choisis n'importe comment : avec trois segments de longueurs 2, 3 et 4, par exemple, on ne peut faire que deux triangles (symétriques). On appelle *cas d'égalité des triangles* les configurations où, certaines des six variables (côtés + angles) d'un triangle étant fixées, les autres en découlent nécessairement. Les cas d'égalité des triangles sont au nombre de trois, on les comprend facilement avec des figures. Nous y reviendrons également plus loin (*cf.* p. 65).

Deux triangles (ABC) et (A'B'C') sont égaux ou symétriques dans chacun des cas suivants :

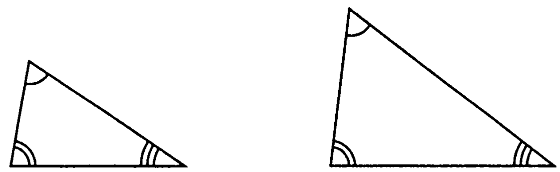
1) leurs côtés sont égaux (*i.e.* AB = A'B', AC = A'C' et BC = B'C') ;

2) deux de leurs côtés sont égaux, ainsi que les angles que ces côtés définissent ;

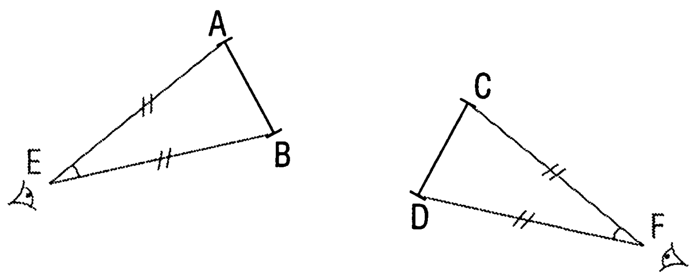
3) deux de leurs angles sont égaux ainsi que les côtés communs à ces deux angles.



Trois des six variables d'un triangle peuvent donc suffire à le définir. Notons qu'aucun cas d'égalité n'est garanti pour des triangles dont les angles sont deux à deux égaux.



Les cas d'égalité des triangles servent à montrer de façon indirecte l'égalité de deux longueurs ou de deux angles. Par exemple, on peut considérer que notre vue utilise le deuxième cas d'égalité des triangles pour estimer si deux longueurs sont égales ou non. Imaginons que nous ayons à comparer les longueurs de deux segments, [AB] et [CD], placés en deux endroits bien différents.

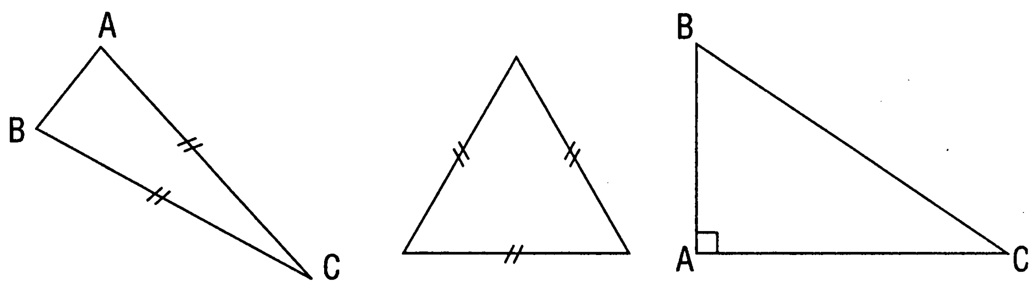


Si l'on se place en un point E, l'objet [AB] nous apparaîtra suivant l'angle $\angle AEB$. Généralement, on regarde un objet de face, c'est-à-dire qu'on prend EA = EB. Une fois l'angle $\angle AEB$ estimé, on se place en F pour regarder [CD]. Une fois encore, nous regardons l'objet de face, donc FC = FD. Si l'on se place aussi loin de [CD] qu'on s'était placé de [AB], on a FC = FD = EA = EB. Ce que le deuxième cas d'égalité des triangles nous permet d'affirmer, c'est que si l'angle $\angle CFD$ est égal à l'angle $\angle AEB$, alors les segments [AB] et [CD] ont même longueur. Dit autrement :

deux objets vus (séparément) de la même distance et de face ont même taille si leur taille apparente est la même. Dans ce cas, donc, les apparences ne sont pas trompeuses : sous les conditions posées, si les longueurs *semblent* être les mêmes, alors *elles le sont.*

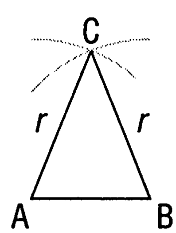
TRIANGLES PARTICULIERS. Un triangle est ISOCÈLE si deux de ses côtés sont égaux (le troisième côté est la BASE). C'est lorsque le triangle formé par nos deux yeux et un point est isocèle qu'on dit que ce point est « en face » de nous.

Un triangle est ÉQUILATÉRAL lorsque ses trois côtés sont égaux, c'est un cas particulier de triangle isocèle. Enfin, un triangle est RECTANGLE lorsqu'un de ses angles est droit.



Triangle isocèle en C Triangle équilatéral Triangle rectangle en A

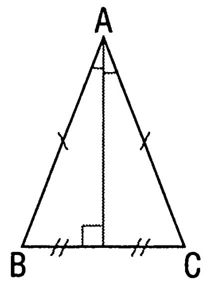
Pour dessiner un triangle isocèle à l'aide d'un compas, on se donne sa base [AB] et on trace deux cercles de même rayon r, de centre A et B (en prenant $r > AB/2$).



Tout point d'un des cercles est à distance r du centre de ce cercle. Si un point C appartient simultanément aux deux, alors il est à distance r de A et de B, et le triangle (ABC) est isocèle en C.

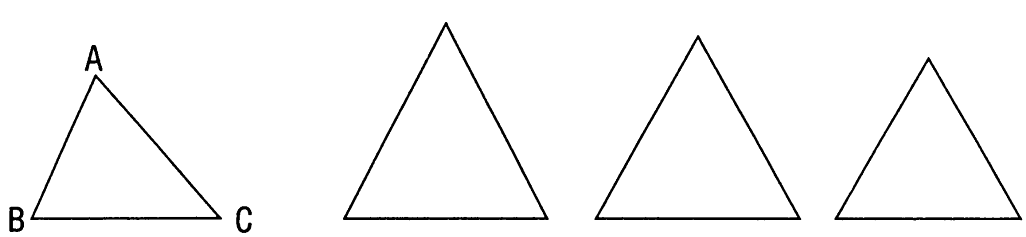
Le même principe vaut pour un triangle équilatéral, avec la contrainte supplémentaire que $r = AB$.

Considérons un triangle (ABC) isocèle en A.



Seul un triangle isocèle possède la propriété suivante, que le lecteur pourra démontrer : la médiatrice de [BC], la bissectrice de $\angle BAC$, la hauteur issue de A ainsi que la médiane issue de A sont toutes confondues.

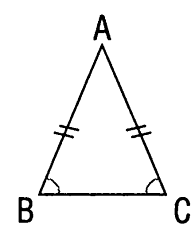
Dans le triangle équilatéral, isocèle en chacun de ses sommets, les trois médiatrices se confondent donc avec les trois bissectrices, les trois hauteurs et les trois médianes. Le centre du cercle circonscrit est alors aussi centre du cercle inscrit, orthocentre et isobarycentre. Cela donne un assez bon moyen pour repérer à l'œil nu un triangle équilatéral. Notre œil n'est pas très efficace pour comparer les longueurs de segments penchés différemment (on en tire d'intéressantes illusions d'optique). La définition d'un triangle équilatéral n'est donc guère utilisable en tant que telle : à l'œil nu, lequel de ces triangles a ses trois côtés égaux ?



Il est clair que ce n'est pas celui de gauche, en raison de sa dissymétrie que l'on peut traduire en disant que le pied de la hauteur issue de A n'est pas le milieu de [BC] (la hauteur n'est pas la médiane), ou que la hauteur issue de A et la médiatrice de [BC] ne sont pas confondues.

Nous pouvons assez bien tracer mentalement une perpendiculaire et repérer le milieu d'un segment, donc imaginer hauteurs et médianes. En effectuant cette opération pour chacun des sommets des triangles précédents, le lecteur parviendra peut-être à se persuader que seul le dernier est équilatéral (tous les autres sont isocèles, y compris le premier). Pour le mesurer effectivement, il convient bien entendu d'utiliser le compas plutôt que la règle.

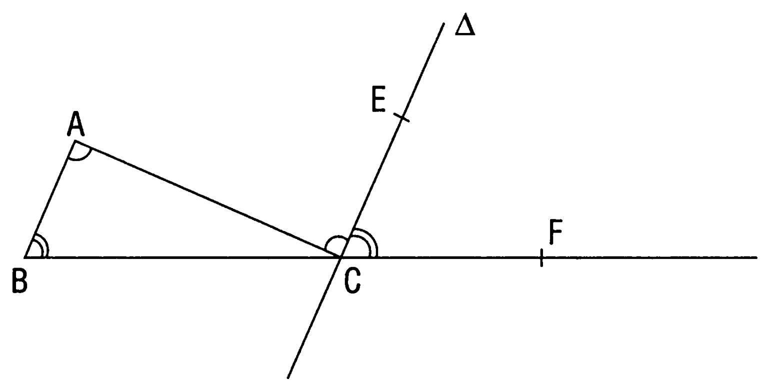
On démontre que si (ABC) est un triangle isocèle en A, alors les angles $\angle ABC$ et $\angle ACB$ sont égaux (on utilise pour cela la hauteur issue de A pour couper (ABC) en deux triangles symétriques), et que seuls les triangles isocèles ont deux de leurs angles égaux.



Somme des angles d'un triangle. Outre les résultats de concours des lignes remarquables, le triangle possède une propriété capitale : la somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat. Nous en donnons la démonstration ci-dessous. Cet énoncé est équivalent au postulat des parallèles, c'est-à-dire que chacun de ces deux énoncés peut se démontrer en supposant l'autre vrai.

Ce théorème sur les angles d'un triangle permet de montrer le résultat réciproque sur les angles alternes-internes (et sur les angles intérieurs du même côté) énoncé page 36. Notons enfin que, dans un triangle équilatéral, tous les angles mesurent 60°.

Voici la démonstration du résultat : soit (ABC) un triangle, soit Δ la droite parallèle à (AB) passant par C, soient E un point de Δ et F un point de (BC) ainsi disposés :

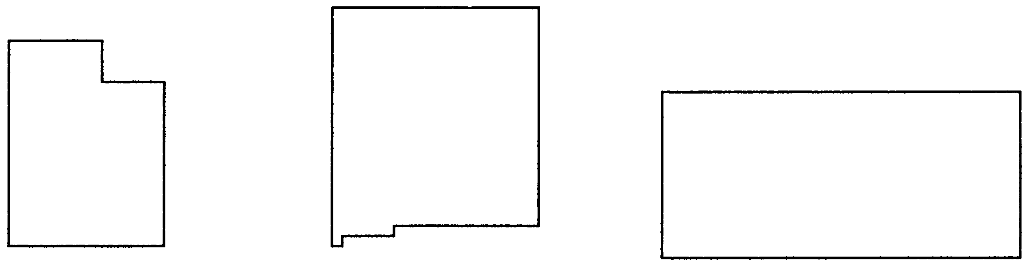


Les angles $\angle BAC$ et $\angle ACE$ sont alternes-internes, donc égaux. D'autre part, les angles $\angle ECF$ et $\angle ABC$ sont égaux, Δ étant parallèle à (AB). La somme $\angle BCA + \angle ACE + \angle ECF$, égale à l'angle plat $\angle BCF$, est donc égale à $\angle BCA + \angle BAC + \angle ABC$, la somme des angles du triangle est donc bien égale à un angle plat.

QUADRILATÈRES, POLYGONES RÉGULIERS, POLYÈDRES

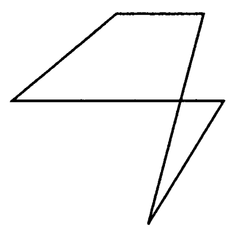
Un POLYGONE est une figure géométrique constituée de segments mis bout à bout pour former une boucle fermée.

Des exemples sont donnés par les frontières de certains États de l'ouest des États-Unis.



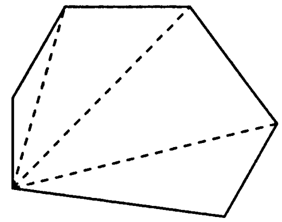
Utah Nouveau-Mexique Colorado

Nous ne considérerons que des polygones pour lesquels il n'y a pas de croisement entre les segments, comme dans le cas ci-dessous :



Les polygones ont un grand intérêt pratique, ils forment une classe de figures à la fois suffisamment simples pour qu'on puisse facilement calculer l'aire de la surface qu'elles entourent et suffisamment variées pour approcher n'importe quelle courbe fermée (c'est-à-dire la frontière de n'importe quel pays ou terrain). Le fait de qualifier la France (métropolitaine) d'« hexagone » relève de cette approximation, qu'il est possible d'affiner avec des polygones plus complexes.

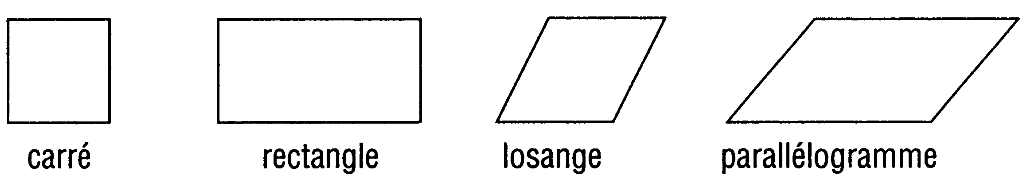
Une large part des démonstrations sur les polygones utilise des propriétés du plus élémentaire d'entre eux, le triangle (notamment les cas d'égalités mentionnés plus haut). Une méthode générale consiste à décomposer un polygone en plusieurs triangles, comme la figure ci-contre en donne un exemple.



En travaillant sur chacun de ces triangles, on peut espérer, de proche en proche, obtenir des résultats sur le polygone. Par exemple, puisque nous savons que la somme des angles d'un triangle mesure 180°, la figure précédente nous montre que la somme des angles d'un polygone à n côtés mesure $180n$ - 360 degrés.

On étudie rarement les polygones en toute généralité. Même dans le cas le plus simple, celui des quadrilatères, on se donne quelques hypothèses supplémentaires, sans lesquelles on serait souvent ramené à une simple transposition des résultats sur les triangles.

AVEC QUATRE CÔTÉS. L'hypothèse la plus classique sur un QUADRILATÈRE, polygone à quatre côtés, consiste à supposer que ses côtés opposés (c'est-à-dire non adjacents) sont parallèles. On obtient alors quatre types de quadrilatères :



Chacun des trois premiers est un cas particulier du dernier, le PARALLÉLOGRAMME, nom générique de tout quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

LE CARRÉ, RÉSERVOIR DE PROPRIÉTÉS. Le plus particulier des quadrilatères est le CARRÉ, dont voici une définition :

quadrilatère dont les côtés sont égaux et dont les angles sont égaux. On en déduit plusieurs choses simples :

– d'abord, les côtés se coupent à angle droit (la somme des angles d'un quadrilatère mesure 360°, donc chaque angle du carré mesure 360/4 = 90°) ;

– ensuite, les côtés opposés sont parallèles (deux droites perpendiculaires à une même troisième étant parallèles), autrement dit le carré est bien un parallélogramme (ce qui n'est pas directement donné par notre définition) ;

– enfin, les diagonales sont perpendiculaires, de même longueur, se coupent en leur milieu et sont les bissectrices des angles du carré.

Le carré est sans doute l'une des plus anciennes figures géométriques que l'on ait étudiées. Une tablette babylonienne contient le dessin d'un carré et de sa diagonale, avec l'estimation de la longueur de cette dernière par rapport à la longueur du côté.

Notons que nous aurions tout aussi bien pu définir un carré comme un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires, de même longueur et se coupent en leur milieu : le lecteur pourra montrer qu'un tel quadrilatère a forcément angles et côtés égaux.

Il y a toujours un aspect arbitraire dans la définition du carré, ou plus généralement dans celle d'un objet dont il existe plusieurs caractérisations. Le choix d'une définition se fait généralement sur la base de la simplicité : il est bien entendu qu'on envisage rarement le carré de la dernière manière décrite. Il n'en reste pas moins que, d'une part elle est mathématiquement satisfaisante, et, d'autre part, il est tout à fait concevable que, dans certaines situations, la démonstration qu'un quadrilatère est un carré consiste en l'étude de ses diagonales.

À cela s'ajoute que nous n'avons pas prouvé l'existence de ce que nous avons défini. Pour expliquer ce problème, supposons qu'au chapitre sur les triangles nous ayons, en parlant de triangles particuliers, défini ce qu'on pourrait appeler un « triangle trirectangle », triangle « dont les trois angles sont droits ». Or nous savons que la somme des angles d'un triangle mesure 180°, un triangle trirectangle ne peut donc pas exister. Mais après tout, avant d'avoir vu le résultat sur la somme des angles d'un triangle, rien, si ce n'est notre perception usuelle, ne nous empêchait de l'imaginer, de débattre de ses propriétés… et de parler ainsi dans le vide.

Il convient donc, en toute rigueur, de s'assurer de la possibilité de réalisation d'un carré. Les Grecs résolvaient ce genre de problèmes en effectuant des constructions à la règle et au compas (comme celle que nous avons vue plus haut pour le triangle équilatéral, et qui montrait l'existence de ce dernier) : nous le ferons en montrant plus loin (*cf.* p. 59) que, pour tout entier n, il existe un polygone régulier à n côtés (pour le carré, $n = 4$).

RECTANGLES ET LOSANGES, DES FIGURES « RÉCIPROQUES ». Le RECTANGLE est un quadrilatère dont les quatre angles sont égaux. Comme l'indique l'étymologie, ses angles sont droits (même démonstration que pour le carré), ce qui fait du rectangle un simple carré privé de sa propriété d'égalité des côtés. La figure du rectangle est courante entre toutes : feuilles de papier, murs, terrains de sport, écrans...

Plus général que le carré, le rectangle a donc des propriétés moins fortes. Il n'est pas difficile de montrer que ses côtés opposés sont parallèles (le rectangle est donc bien un parallélogramme) et de même longueur, et que ses diagonales ont même longueur et se coupent en leur milieu.

Un grand intérêt des rectangles est de constituer une « brique » fondamentale pour la notion d'AIRE : pour être bref, l'aire d'un rectangle est définie par le produit de sa longueur par sa largeur et, pour déterminer une aire quelconque, on recouvre la surface par des rectangles (en nombre éventuellement infini), ce qui fait prendre tout son sens au terme de « brique » employé plus haut. Cette idée est à la base du calcul intégral tel que l'a imaginé Bernhard Riemann, au XIXe siècle.

Plutôt que d'ôter au carré l'égalité de ses côtés, on peut lui ôter celle de ses angles, ce qui définit un LOSANGE : quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux, sorte de « carré aplati ». Moins présent dans la vie courante que le rectangle, le losange a tout de même un intérêt mathématique, en plus d'être la forme des calissons (spécialité pâtissière d'Aix-en-Provence) et celle du logo d'un constructeur automobile.

Le fait que le losange soit un parallélogramme est un peu moins évident à prouver que pour le carré ou le rectangle ; la preuve utilise des cas d'égalité de triangles bien choisis et des angles intérieurs du même côté (ou alternes-internes).

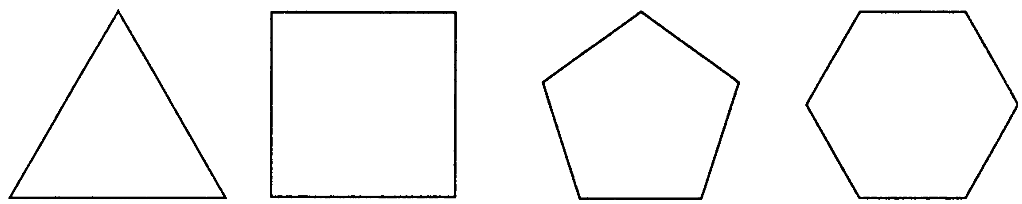
Le losange est en quelque sorte « réciproque » du rectangle. Ses propriétés font écho à celles du rectangle, mais leur sont plus ou moins inverses. En particulier, si les diagonales du rectangle ont même longueur et se coupent en leur milieu, celles du losange, elles, sont perpendiculaires et sont les bissectrices des angles (seules les diagonales d'un carré ont les quatre propriétés à la fois). Les diagonales des rectangles ont pour propriété d'être égales, ce qui caractérise les côtés du losange, alors que les diagonales des losanges ont pour propriété d'être orthogonales, ce qui est aussi le cas des côtés des rectangles.

Rectangles et losanges ont plusieurs propriétés en commun : côtés opposés égaux et parallèles, angles opposés égaux et diagonales se coupant en leur milieu. Il est donc raisonnable de penser que ces propriétés ne sont ni les unes ni les autres tributaires de l'égalité des 4 côtés ou des 4 angles : « dénominateur commun » du rectangle et du losange, elles caractérisent en fait les parallélogrammes.

PARALLÉLOGRAMMES. Le parallélogramme, défini au début de ce chapitre, est « le plus général des quadrilatères particuliers » (on peut contester cette phrase en considérant les *trapèzes*, que nous n'introduirons pas). Le fait d'avoir ses côtés opposés égaux, comme indiqué plus haut, est à la base de la notion de TRANSLATION (*cf.* p. 92).

Un parallélogramme peut être envisagé comme un carré vu en perspective. Les résultats sur ses diagonales et le parallélisme de ses côtés opposés sont ainsi une manifestation du fait que la représentation en perspective cavalière (*cf.* p. 116) n'altère ni le parallélisme entre deux droites, ni le milieu d'un segment. En revanche, le plus souvent, angles et longueurs sont modifiés.

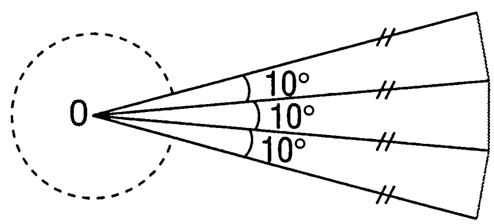
POLYGONES RÉGULIERS. Un polygone est *régulier* lorsque tous ses côtés ont même longueur et que tous les angles (constitués par les segments adjacents) sont égaux. Le bâtiment abritant l'état-major des armées américaines, par exemple, est un pentagone régulier, d'où son nom.



Par définition, un polygone régulier est *convexe*, c'est-à-dire que les droites portant les côtés ne se croisent qu'aux sommets du polygone. Sans cette hypothèse, on devrait tenir compte des polygones réguliers étoilés, comme l'étoile à cinq branches avec laquelle Faust repousse Méphistophélès.

Un polygone dont tous les segments ont même longueur n'est pas forcément régulier (exemple : le losange), un polygone dont tous les angles sont égaux non plus (exemple : le rectangle). Le cas du triangle est le seul pour lequel l'une des deux conditions implique automatiquement l'autre.

Comme nous l'avons mentionné à propos du carré, il convient de s'assurer que nous ne parlons pas dans le vide. Pour cela, nous allons montrer que quel que soit le nombre n, il existe un polygone régulier à n côtés. La preuve calque le procédé de montage rayon par rayon d'une grande roue. Prenons par exemple $n = 36$ (certaines grandes roues ont effectivement 36 nacelles). Soit un triangle isocèle en O, d'angle en O égal à 10°. Soit un autre triangle isocèle en O, égal au premier et ayant un côté commun avec celui-ci. Répliquons ainsi 36 fois le premier triangle : la somme des angles en O est un angle plein (36 fois 10°), et les 36 bases des triangles isocèles constituent le polygone régulier à 36 côtés (on vérifie facilement que les angles du polygone sont bien tous égaux).



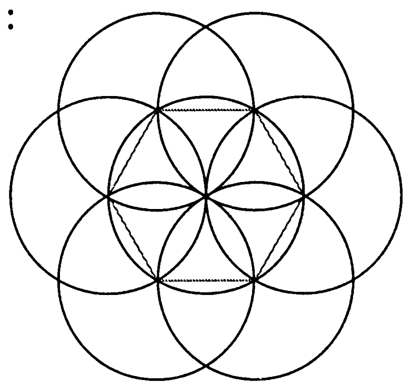
Pour un polygone régulier à n côtés (où n est quelconque), le procédé fonctionne en remplaçant simplement 10° par $360/n$ degrés.

Les polygones que nous avons construits dans la démonstration précédente sont tous inscrits dans un cercle : les sommets sont tous à une même distance du point O, qu'on appelle pour cette raison le *centre* du polygone.

La perception que l'on a de la « rigidité » des polygones réguliers laisse fortement présager que, à nombre fixe de côtés, il n'y a qu'un angle possible entre les côtés adjacents. On peut être plus précis et démontrer que l'angle formé par deux côtés adjacents d'un polygone régulier à n côtés est de $180 - 360/n$ degrés. Lorsque $n = 3$ ou 4, on retrouve bien les angles de 60° et 90° des triangles équilatéraux et des carrés. La formule montre aussi le résultat intuitif selon lequel plus on augmente le nombre de côtés d'un polygone régulier, plus l'angle entre deux de ses côtés s'approche de l'angle plat.

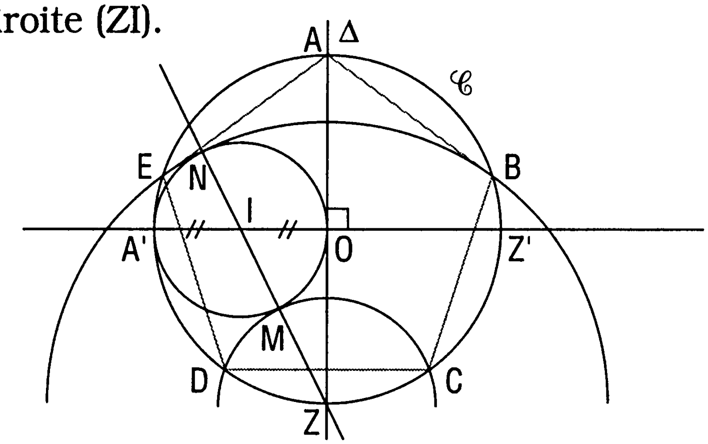
Le résultat précédent donne lieu à cette conséquence intéressante : tout polygone régulier est inscrit dans un cercle. En effet, un nombre n de côtés étant imposé, si un segment est fixé, un segment adjacent du polygone fait avec lui un angle de $180-360/n$ degrés, et ainsi de suite. Quand la longueur des côtés est fixée, il n'y a aucune liberté : la « construction d'une grande roue » est donc la seule possible, autrement dit, les polyèdres réguliers à n côtés sont égaux dès lors que la longueur de leurs côtés est la même.

DESSINER DES POLYGONES RÉGULIERS. Tous les élèves ont un jour tracé au compas la figure suivante, où tous les cercles ont même rayon :



On peut montrer que cela matérialise un hexagone régulier.

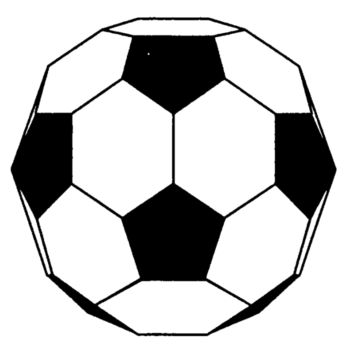
Voici un procédé de construction du pentagone régulier : soit un cercle C de centre O, soient Δ et Δ' deux droites perpendiculaires passant par O. On note A et Z les points d'intersection de Δ avec le cercle, A' et Z' les intersections du cercle avec Δ', I le milieu de [OA'] et M et N les points d'intersection du cercle de centre I et de rayon IO avec la droite (ZI).



Les points d'intersection de C avec les cercles de centre Z et de rayon ZM et ZN, notés B, C, D et E, forment le pentagone régulier ABCDE (nous l'admettons).

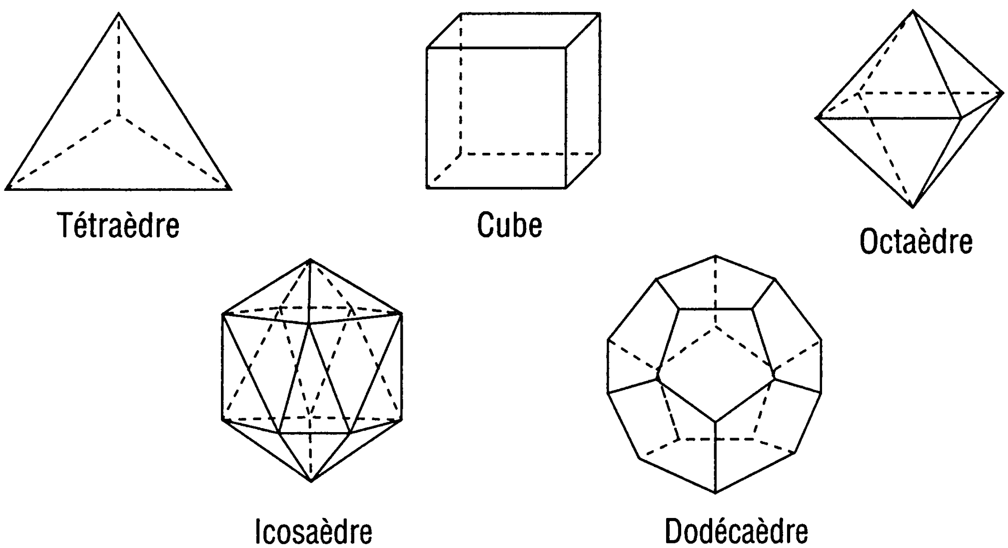
La règle et le compas ne sont pas toujours suffisants pour dessiner des polygones réguliers. À l'aide de notions algébriques, on sait montrer par exemple qu'ils ne permettent pas de matérialiser un heptagone régulier (sept côtés), non plus qu'un nonogone régulier (neuf côtés).

DANS L'ESPACE : LES POLYÈDRES. Un *polyèdre*, généralisation du polygone à l'espace, est un solide constitué de faces polygonales. Un exemple intéressant de polyèdre est le ballon de football, constitué de 20 hexagones et de 12 pentagones (tous réguliers) : c'est l'*icosaèdre tronqué*, qui possède 60 sommets.



On appelle *régulier* tout polyèdre constitué de polygones réguliers égaux faisant entre eux des angles égaux. Contrairement aux polygones réguliers, leur nombre est limité : cinq en tout, qu'on appelle aussi *solides de Platon*, le philosophe s'en étant servi dans l'un de ses dialogues (*Timée*) pour élaborer un modèle de structure de la matière.

Les amateurs de jeux de rôles connaissent bien ces solides, dés exotiques à 4, 8, 12 et 20 faces qui s'ajoutent au dé classique en forme de cube.



Pour retrouver le ballon de football, prenons un icosaèdre et pratiquons une coupe rectiligne au niveau de chacun de ses sommets. Chaque sommet bordant cinq faces, les troncatures remplacent les 12 sommets par 12 petits pentagones. D'autre part, chaque face triangulaire de l'icosaèdre étant sectionnée au niveau de chacun de ses (trois) sommets, la troncature la transforme en hexagone. Voilà donc l'icosaèdre tronqué, très proche d'une sphère et qui nécessite relativement peu de coutures. Le

Encadré 2 : PAVAGES DU PLAN

Un sol carrelé l'est généralement à l'aide de carrés, mais on peut utiliser d'autres polygones pour faire ce qu'on appelle un *pavage du plan*.

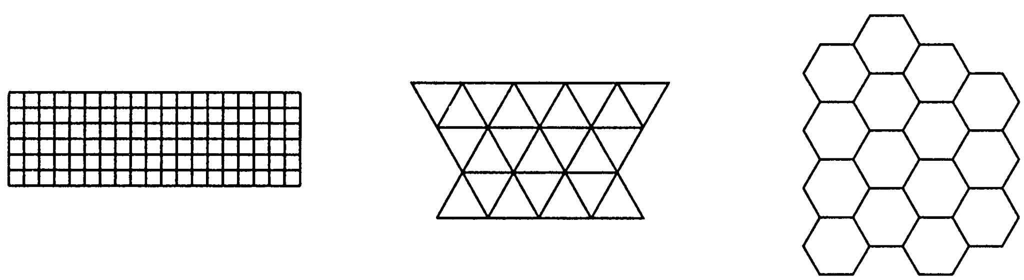
Donnons-nous plusieurs exemplaires d'un même polygone régulier à n côtés, et voyons si nous pouvons paver le plan avec. Pour cela, supposons le pavage effectué et plaçons-nous au sommet de l'un des polygones, pour compter le nombre k de polygones qui l'ont pour sommet. Puisque la somme des angles qui arrivent sur le sommet fait un angle plein, on a, d'après un résultat précédent :

$k(180 - 360/n) = 360,$

d'où l'on tire, à l'aide de manipulations algébriques :

$2/n + 2/k = 1.$

Il est remarquable que n et k jouent des rôles tout à fait symétriques. On vérifie alors que les solutions entières de cette équation donnent trois pavages.



Le pavage carré, celui du jeu d'échecs, est le plus courant. Le pavage hexagonal est celui utilisé par les abeilles : c'est celui qui utilise le polygone le plus proche du cercle et (donc) celui qui est le plus économe en cire pour délimiter une aire donnée.

Les pavages hexagonal et triangulaire se correspondent. On les retrouve sur certains jeux de plateau : l'hexagonal quand les pièces du jeu se déplacent de case en case, le triangulaire pour des mouvements de sommet en sommet.

L'étude des pavages avec plusieurs polygones réguliers différents est analogue. On retrouve ainsi des classiques comme carrés + octogones, mais aussi des pavages plus originaux.

« ballon rond » n'a pas toujours eu cette forme : sans remonter jusqu'à l'Antiquité (où l'on s'est servi du dodécaèdre), on utilisait il y a quelques décennies encore des modèles bien moins appropriés.

LE CERCLE

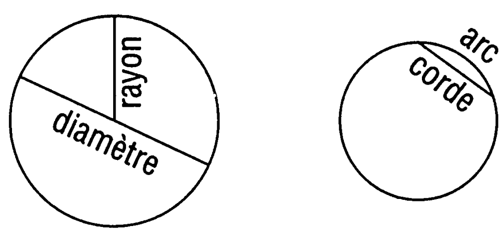
Très présent dans notre quotidien, ne serait-ce qu'au travers de cet instrument vital qu'est la roue, le cercle a souvent été associé à l'idée d'harmonie, en partie pour des raisons astronomiques : les « luminaires » (le Soleil et la Lune) ont une forme ronde, les planètes et les étoiles semblent tourner autour de la Terre en un mouvement circulaire.

Nous avons tous une forte perception intuitive du cercle : si chacun peut prolonger mentalement un segment pour imaginer la droite qui le porte, tout le monde sait également imaginer le contour originel d'une tarte circulaire dont on a mangé une part. Cela dit, ce qui nous permet de le faire est moins la définition du cercle (ensemble de points à égale distance d'un centre) que l'une de ses propriétés caractéristiques que nous n'indiquons que pour mémoire (et sans définition précise) : le cercle est l'unique courbe plane à *courbure constante*.

Dans les chapitres précédents, nous avons déjà eu affaire à des cercles particuliers (comme le cercle circonscrit à un triangle), essentiellement pour valoriser l'une ou l'autre des propriétés d'autres figures (le cercle circonscrit, par exemple, nous « rappelle » qu'il existe un point à égale distance de trois points fixés). Nous allons ici étudier les relations qu'entretiennent les cercles entre eux et avec d'autres objets de la géométrie.

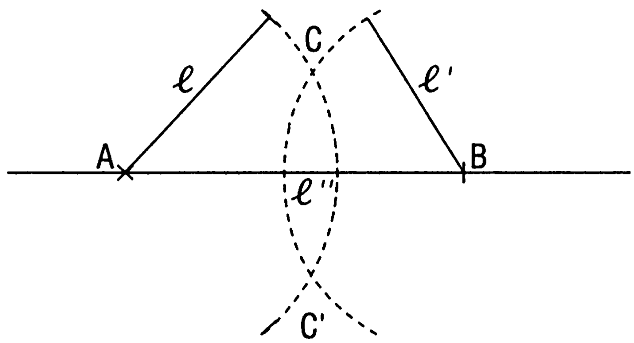
DIAMÈTRE, RAYON, CORDE, ARC. On appelle DIAMÈTRE d'un cercle tout segment joignant deux points du cercle et passant par le centre. Un RAYON est un segment joignant le centre à un point du cercle : les rayons d'une roue de bicyclette correspondent (à peu près) à cette définition.

Tout segment joignant deux points du cercle est une *corde* ; un diamètre en est un cas particulier. Une corde sépare le cercle en deux portions, une petite et une grande, qu'on appelle *arcs de cercle*. Il n'est sans doute pas nécessaire d'insister sur le lien avec l'instrument permettant de décocher des flèches.



RETOUR SUR LES CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES. Les énoncés d'égalité ou de symétrie des triangles ont été mentionnés précédemment (*cf.* p. 46). Nous y revenons à présent, pour les rapprocher des relations entre cercles, entre droites, et entre cercle et droite.

Le premier résultat d'égalité des triangles concernait le cas où les longueurs sont deux à deux égales. Comment s'assure-t-on qu'il n'y a que deux façons (symétriques) de construire un triangle avec des segments de longueurs l, l' et l'' fixées ? Soit [AB] un segment de longueur l'' : un point C tel que CA = *l* et CB = *l'* est à l'intersection du cercle de centre A et de rayon *l* et du cercle de centre B et de rayon *l'*.

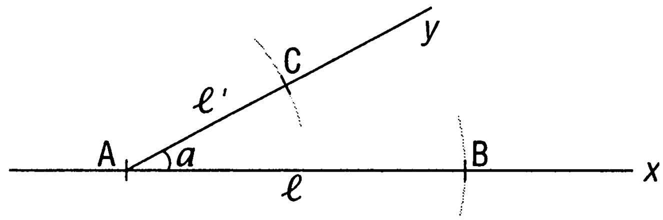


C'est donc le fait que deux cercles distincts ont au plus deux points en commun qui garantit le résultat d'égalité ou de symétrie des triangles : chacun des deux points, C et C', produit les deux seuls triangles possibles de longueurs *l*, *l'* et *l''* (à un glissement près), et ces triangles sont symétriques.

L'affirmation « deux cercles ont au plus deux points en commun » est une conséquence du fait qu'il existe un unique cercle passant par trois points donnés : le cercle circonscrit au triangle formé par ces points.

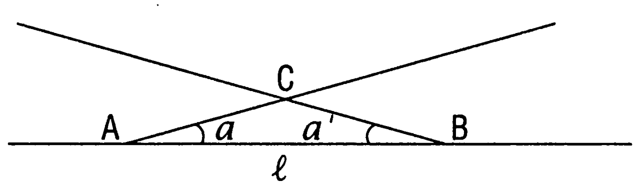
Le deuxième cas d'égalité des triangles dit que, si deux côtés de deux triangles ont mêmes longueurs *l* et *l'* et définissent des angles égaux de mesure *a*, alors les triangles sont égaux ou symétriques.

Cette fois-ci, fixons un point A et des demi-droites [A*x*) et [A*y*) formant l'angle de mesure *a*. Le point B, sur [A*x*), est à l'intersection de la demi-droite [A*x*) avec le cercle de centre A et de rayon *l*. De même, le point C est à l'intersection de [A*y*) avec le cercle de centre A et de rayon *l'*.



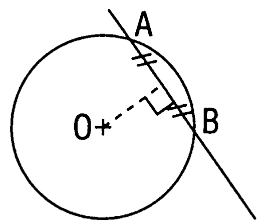
Démontrer ce cas d'égalité ou de symétrie des triangles revient à montrer qu'il n'y a qu'un couple de points possibles (en cherchant B sur [Ay) et C sur [Ax), on construit le triangle symétrique). Parcourons la demi-droite [Ax) en partant de A : la distance qui nous sépare de A croît continûment, il n'y a donc qu'un point B pour lequel AB = l, ce qui prouve ce que l'on cherche. Ce qui est en jeu ici est le fait qu'un cercle et une demi-droite dont le centre de l'un est l'extrémité de l'autre ont au plus un point en commun. On peut tirer de la preuve précédente qu'une droite et un cercle ont au plus deux points en commun.

Dernier cas d'égalité des triangles : lorsqu'ils ont deux angles égaux, de mesures a et a' et dont les côtés communs sont égaux, de longueur l. Fixons un segment [AB] de longueur l. Le point C qui termine le triangle est à l'intersection de deux demi-droites : l'une partant de A et formant avec (AB) un angle de mesure a, l'autre partant de B et formant avec (AB) un angle de mesure a' (en échangeant a et a', on construit le triangle symétrique).



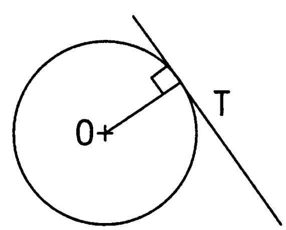
Le cas d'égalité est donc assuré par le fait que deux demi-droites ont (au plus) un point en commun.

RELATION ENTRE CERCLES ET DROITES. Lorsqu'un cercle de centre O rencontre une droite selon deux points A et B, la perpendiculaire à (AB) passant par O passe par le milieu de [AB].



Ce résultat n'a rien d'étonnant si l'on se souvient (*cf.* p. 41) que la médiatrice du segment [AB] (lieu des points à égale distance de A et de B, auquel appartient donc O) est précisément la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de [AB].

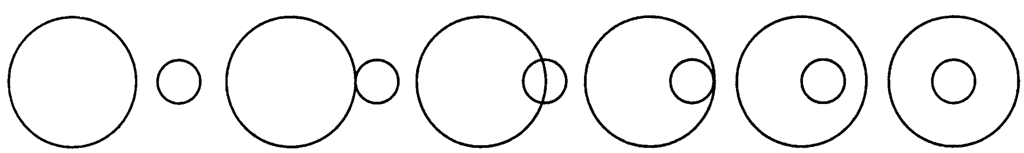
Faisons à présent glisser la droite portant A et B parallèlement à (AB), en l'éloignant du centre du cercle : les points d'intersection vont se rapprocher l'un de l'autre, jusqu'à cet instant critique où ils seront confondus en un point T.



La droite est alors TANGENTE au cercle en T. Le point T est le *point de tangence.* Lorsqu'une pierre s'échappe d'une fronde animée d'un mouvement circulaire, elle suit une direction tangente au cercle, le point de tangence T étant celui où la pierre quitte la fronde. Cette direction est déterminée par la perpendiculaire à (OT) passant par T, ce qui nous montre au passage qu'il n'y a qu'une tangente à un cercle donné passant par un point fixé du cercle (ce qui n'est pas pour nous surprendre). On tire de cela un procédé pratique pour dessiner une tangente à un cercle de centre O : si T est un point du cercle, la perpendiculaire à la droite (OT) passant par T est la tangente au cercle en T. La véritable notion de tangente à une courbe est plus complexe et apporte rarement des méthodes de tracé aussi immédiates.

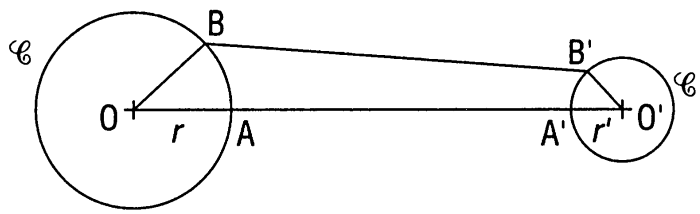
RELATION ENTRE CERCLES, LIGNE DES CENTRES. Pour étudier les rapports entre deux cercles, il est intéressant d'utiliser la *ligne des centres*, droite joignant les centres de deux cercles.

Prenons deux cercles distincts, C et C', de centres respectifs O et O' et de rayons r et r'. Le « film » de leur rencontre ressemble à celui d'une éclipse, même si en toute généralité les cercles qui se rencontrent peuvent avoir des rayons différents (ceux du Soleil et de la Lune sont toujours voisins).



Le premier dessin est celui de deux cercles *extérieurs* l'un à l'autre. La question qui intéresserait un Robinson se trouvant sur une île circulaire et désirant nager jusqu'à une autre île consisterait à se demander quel serait le segment le plus court permettant de joindre les deux cercles. Nous allons montrer que ce plus court segment est porté par la ligne des centres. Pour cela, on utilise le fait que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points.

Notons A et A' l'intersection de C et C' avec la droite (OO') : il est clair que AA' = OO' – r – r'.



Prenons à présent B sur C et B' sur C'. Puisque la ligne droite est le plus court chemin entre deux points, la somme OB + BB' + B'O' est supérieure à OO'. Or, OB = r et B'O' = r'. On en tire que BB' est supérieure à OO' – r – r', qui vaut AA', donc que AA' est bien le plus court segment joignant C à C'.

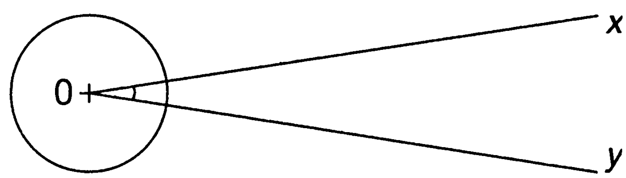
Lorsqu'on rapproche les deux centres, les deux cercles finissent par se toucher en un point T qui est le point de tangence. Les cercles sont alors *tangents extérieurement*. Les points A et A' du cas précédent se confondent à présent en T, le point de tangence est alors sur la ligne des centres. De plus, puisque les tangentes en T à C et C' sont respectivement perpendiculaires à (OT) et à (OT') et que ces deux droites sont les mêmes, deux cercles tangents extérieurement en T ont même tangente en T.

Poursuivons le rapprochement des centres des deux cercles : ils ont maintenant deux points en commun, et on peut vérifier que la ligne des centres est la médiatrice du segment joignant les points d'intersection.

Lorsque les deux rayons sont différents, rapprocher encore les deux centres conduit à la configuration où les cercles sont *tangents intérieurement*. Là encore, le lecteur pourra se persuader que le point de tangence est sur la ligne des centres et que les cercles ont même tangente en leur point d'intersection. Rapprochons encore les deux centres : les cercles deviennent *intérieurs l'un à l'autre.* Comme pour deux cercles extérieurs, la ligne des centres porte le plus court segment joignant les deux cercles.

Vient un moment où les centres se confondent : si les rayons sont différents, les cercles sont alors *concentriques*, comme les vaguelettes produites par une pierre lancée dans l'eau.

CERCLES ET ANGLES, RADIANS, CERCLES ET TRIANGLES. Donnons-nous un angle $\angle xOy$ et un cercle de centre O.



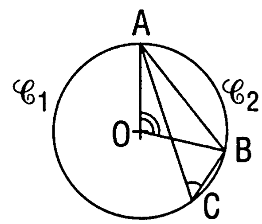
L'angle intercepte une corde du cercle. Réciproquement, à toute corde est associé un unique angle de sommet O (un *angle au centre*). Le lien entre angle et arc de cercle est fondamental, il permet de développer la trigonométrie dans toute sa généralité, en tant que discipline qui « établit le lien entre le droit et le courbe » : si A et B sont les intersections du cercle avec l'angle, la longueur AB est liée à la longueur de l'arc de cercle délimité par A et B par une fonction qu'on appelle le *sinus*.

Le lien entre angle et arc donne également l'unité de mesure des angles la moins arbitraire : le RADIAN. Par définition, la valeur en radians d'un angle donné est la longueur de l'arc du cercle de rayon 1 qu'il intercepte : en particulier, puisque la circonférence d'un cercle de rayon

1 est égale à 2π (*cf.* p. 73), l'angle droit vaut $\pi/2$ radians, l'angle plat π radians, etc.

Toutes les opérations que nous avons définies sur les angles (addition, soustraction, multiplication et division par des entiers) peuvent être visualisées à partir d'arcs de cercle de rayon 1.

Le lien très fort entre triangle et cercle est mis en évidence par la configuration du cercle circonscrit à un triangle. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Tout triplet de points A, B, C sur $\mathcal{C}$ constitue un triangle dont $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit. Fixons A et B : le cercle $\mathcal{C}$ est alors partagé en deux arcs de cercle, notés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.



Faisons alors varier C sur $\mathcal{C}_1$. Un joli théorème, le *théorème de l'angle inscrit*, affirme que l'angle $\angle$ACB est égal à la moitié de l'angle $\angle$AOB, en particulier qu'il ne dépend pas de la position de C sur $\mathcal{C}_1$. Lorsque C parcourt $\mathcal{C}_2$, l'angle $\angle$ACB vaut alors le supplémentaire de la moitié de $\angle$AOB.

Si O est le centre de notre vision et le segment [AB] un objet, qui occupe l'angle $\angle$AOB dans le champ visuel, alors, pour que cet angle apparent soit divisé par deux, c'est-à-dire pour que l'objet [AB] nous semble deux fois plus petit, il faut, d'après le théorème de l'angle inscrit, se placer sur le cercle de centre O et de rayon OA (tout cela suppose tout de même que OA = OB).

LE NOMBRE π ET LA QUADRATURE DU CERCLE. Il n'est pas possible de parler du cercle sans parler du nombre π (pi), célèbre entre tous, et dont voici une approximation décimale :

$\pi \approx 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399.$

C'est la longueur théorique d'une ficelle faisant le tour d'un cercle de diamètre 1, c'est aussi l'aire d'un disque délimité par un cercle de rayon 1 (nous l'admettons).

Le nombre π possède de multiples propriétés, qui ressortent davantage de la théorie des nombres que de la géométrie. On le rencontre dans des contextes extrêmement variés et inattendus. Il possède une infinité de chiffres après la virgule, et l'on sait montrer que la succession de ses décimales est *apériodique*, c'est-à-dire qu'elle n'est pas la répétition des mêmes chiffres dans un même ordre (une façon équivalente de le dire est que π n'est pas égal à la division de deux nombres entiers, quels qu'ils soient).

Le nombre π est *transcendant* : une calculatrice de précision infinie uniquement munie des chiffres de 0 à 9, des quatre opérations et d'une touche permettant d'extraire des racines carrées, cubiques, etc., ne permet pas d'atteindre π, quelles que soient les opérations effectuées (la transcendance est même une propriété un peu plus forte).

La découverte de la transcendance de π (Lindemann, 1882) a définitivement clos le problème de la *quadrature du cercle*, si célèbre que l'expression est restée pour désigner une question insoluble. Ce problème détient un record d'ancienneté : deux millénaires et demi de mathématiques se sont écoulés avant qu'on y apporte une réponse. Il s'agissait de savoir s'il était possible de dessiner, à l'aide d'une règle et d'un compas, un carré ayant même aire qu'un disque donné (ce qui revient à tracer un segment de longueur $\sqrt{\pi}$). Un peu comme notre calculatrice ne peut atteindre π, la règle et le compas constituent des outils insuffisants pour réaliser la quadrature du cercle (tout comme pour dessiner un heptagone régulier, comme nous l'avons signalé plus haut).

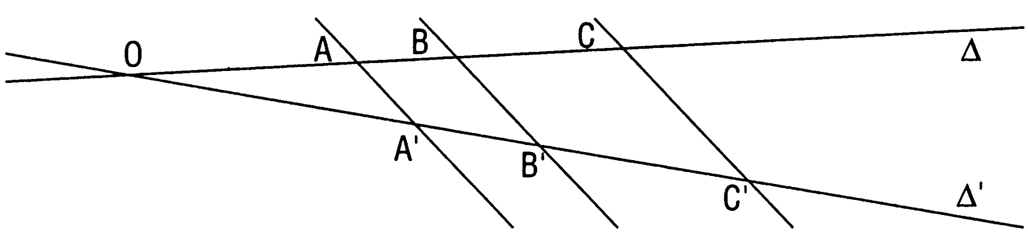
CHAPITRE III

Deux grands théorèmes

LE THÉORÈME DE THALÈS

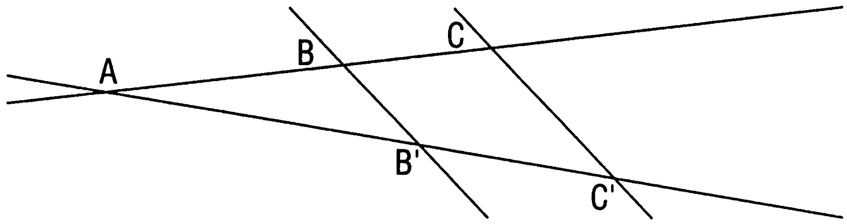
Le théorème de Thalès est l'un des plus anciens résultats mathématiques connus. Le Grec Thalès de Milet (vers 600 av. J.-C.) se serait servi de l'une de ses conséquences pour effectuer une brillante estimation de la hauteur de la pyramide de Khéops. D'un point de vue plus théorique, le théorème de Thalès est un tremplin pour les notions d'HOMOTHÉTIE et de VECTEUR (*cf.* chap. IV).

ÉNONCÉ. Si deux droites sécantes Δ et Δ' coupent toutes deux trois droites parallèles en A, A', B, B', C et C', alors on a la relation suivante : AB/BC = A'B'/B'C'.



Avant d'aborder la démonstration, nous allons nous intéresser au sens de l'énoncé et étudier quelques-unes de ses applications.

Pour donner une idée de ce que signifie le théorème de Thalès, on peut énoncer le cas particulier suivant : si deux droites sécantes en A rencontrent deux parallèles en B, B', C et C', alors AB/AC = AB'/AC'.



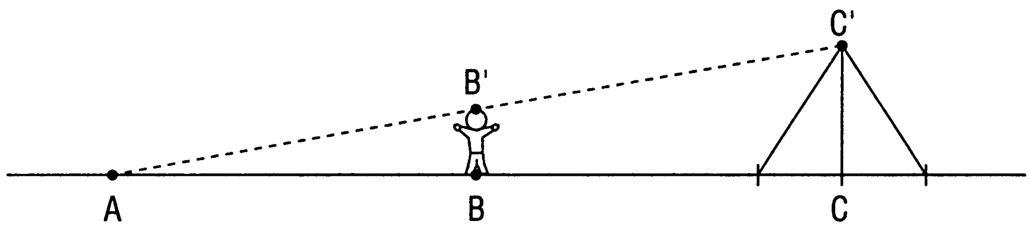
Envisageons (BB') et (CC') comme deux routes parallèles, que deux coureurs partis ensemble de A atteignent successivement en suivant chacun une des deux sécantes. Supposons qu'en courant chacun à leur vitesse ils atteignent B et B' en même temps. Alors, ils atteindront aussi C et C' au même instant.

Le théorème de Thalès admet une réciproque : Si deux sécantes coupent trois droites en A, A', B, B', C et C' tels qu'on ait la relation AB/BC = A'B'/B'C', alors les trois droites sont parallèles.

Un important corollaire du théorème de Thalès est que, dans la configuration précédente, on a la relation AB/AC = BB'/CC' (admise).

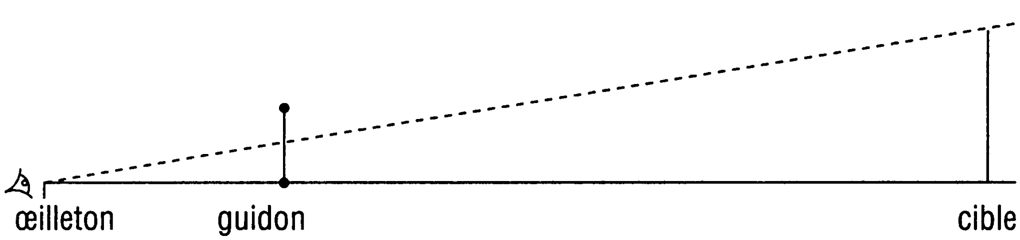
UTILISATIONS. Bien que nous n'ayons aucun témoignage direct de l'expérience, il semble que Thalès ait mesuré la Grande pyramide en utilisant un cas particulier du corollaire précédent. Pour estimer la hauteur de l'édifice, il n'était pas possible d'effectuer une mesure directe. En effet, il aurait été possible, à la rigueur, d'envisager de tirer une corde le long d'une face, mais celle-ci n'aurait mesuré que la taille du côté, et non la hauteur au sol. L'observation de l'ombre de la pyramide apporte une solution au problème.

Une personne debout se place de telle sorte que son ombre soit juste recouverte par celle de la pyramide, ce qu'on peut représenter par le dessin suivant :



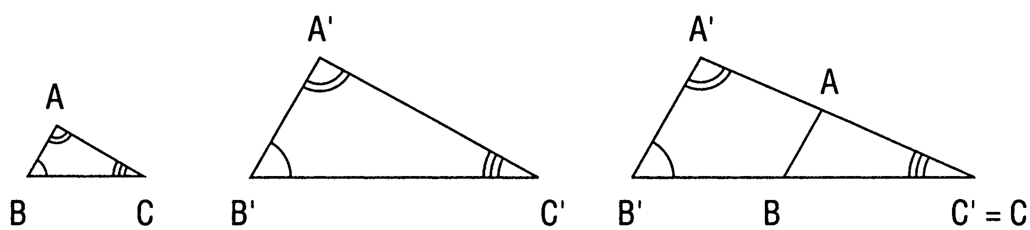
Si l'on mesure les longueurs AB, BB' et AC, on en déduit CC', qui est la hauteur de la pyramide. Notons que la détermination de la longueur AC est un peu compliquée, puisqu'on ne peut accéder directement au point C. Ce problème ne se pose pas pour estimer la taille d'un bâtiment élevé à angle droit.

Un soldat peut tirer parti du théorème de Thalès pour estimer à quelle distance se trouve une cible : un fusil d'assaut comporte un œilleton et un guidon, qui permettent la visée. L'œilleton est un petit objet qui permet de placer l'œil, le guidon est un mince segment vertical situé plus loin sur le fusil. Suivant l'éloignement de la cible, sa taille apparente varie par rapport à celle du guidon. Dans la figure ci-dessous, elle en est la moitié.

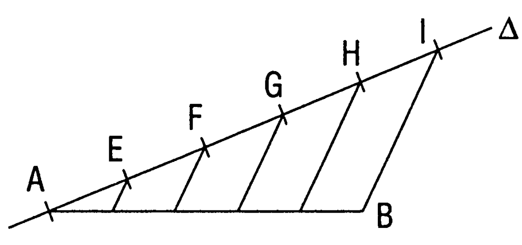


Un tireur connaît préalablement la distance d'une cible d'une certaine hauteur, dont la taille apparente est la même que celle du guidon (disons que cet éloignement est de 150 mètres pour une cible de 2 mètres de haut). Il peut alors en déduire que, si la taille apparente de la cible est la moitié de celle du guidon, alors son éloignement est de 300 mètres, et ainsi de suite.

De façon plus géométrique, le corollaire donné du théorème de Thalès permet de préciser les liens entre des triangles ayant leurs angles égaux deux à deux. Nous avons vu au chapitre II que de tels triangles n'étaient pas nécessairement égaux ou symétriques. Le théorème de Thalès, dans son corollaire, indique que de tels triangles ont des côtés proportionnels, c'est-à-dire que l'un est un simple « grossissement » de l'autre. On dit qu'ils sont *semblables*, ou *homothétiques* (*cf.* chap. IV).



Une autre conséquence du théorème de Thalès est qu'il permet de diviser un segment à la règle et au compas. Partageons par exemple un segment [AB] en cinq parts égales.

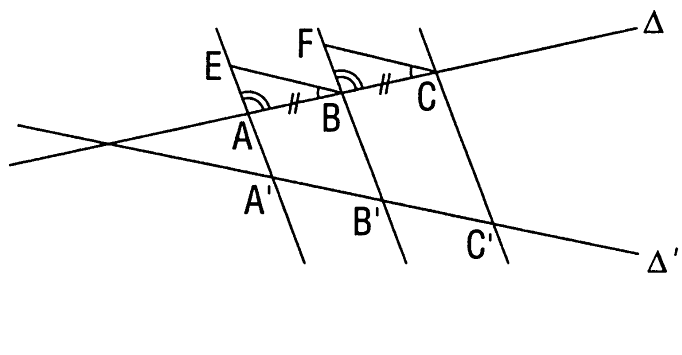


Le segment [AB] étant fixé, on trace une droite quelconque Δ passant par A (ne portant pas [AB]). On fixe un écartement quelconque du compas, à partir duquel on construit sur Δ les points E, F, G, H et I, qui, avec A, sont à égale distance les uns des autres. On mène ensuite la droite (IB), puis les parallèles à (IB) passant par E, F, G et H : d'après le théorème de Thalès, les intersections de ces droites avec [AB] découpent ce segment en cinq parts égales.

On peut exprimer ce dernier résultat en disant que toute longueur s'exprimant comme une fraction de deux nombres entiers peut être construite à l'aide d'une règle et d'un compas.

DÉMONSTRATION. La preuve que nous allons donner du théorème de Thalès s'effectue en quatre temps. Elle utilise les cas les plus particuliers (les plus faciles) comme tremplin pour les cas plus généraux. Le lecteur pourra rapprocher les étapes de démonstration de ce théorème de celles qui permettent la construction des nombres réels comme limites de nombres rationnels (c'est-à-dire de fractions de nombres entiers).

1re étape – Cas d'égalité des longueurs

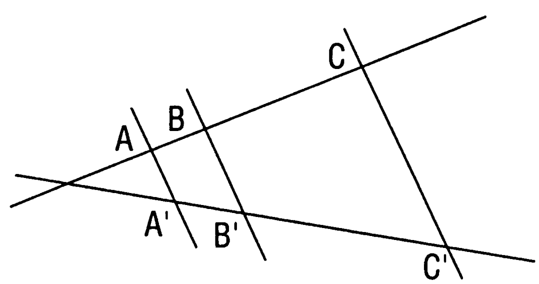


Supposons que AB = BC. Notons E le point d'intersection avec (AA') de la parallèle à (A'B') passant par B, et F celui avec (BB') de la parallèle à (B'C') passant par C. Les quadrilatères (A'B'BE) et (B'C'CF), qui ont leurs côtés opposés parallèles, sont deux parallélogrammes. En conséquence, on a BE = A'B' et CF = B'C'.

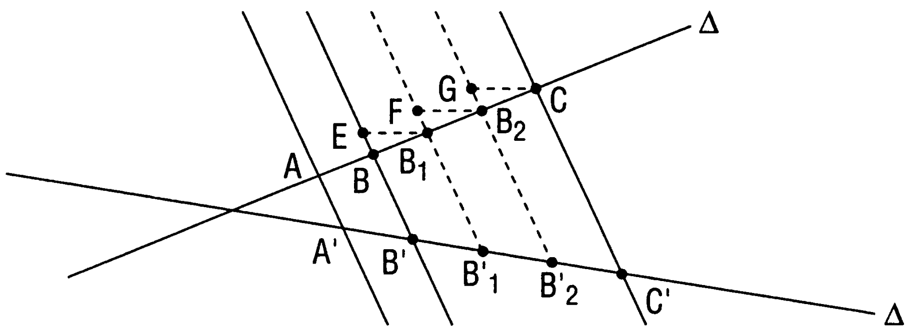
Or les triangles (ABE) et (BCF) sont égaux : en effet, les angles ∠EBA et ∠FCB sont égaux, ainsi que les angles ∠BAE et ∠CBF (*cf.* la configuration des angles alternes-internes et intérieurs du même côté, p. 36) et les côtés AB et BC, on est donc dans le troisième cas d'égalité des triangles.

Puisque les triangles (ABE) et (BCF) sont égaux, les longueurs BE et CF sont égales. Or nous avons vu plus haut que BE = A'B' et CF = B'C'. On en déduit que A'B' = B'C', donc que AB/BC = A'B'/B'C' = 1.

2e étape – Passage aux entiers



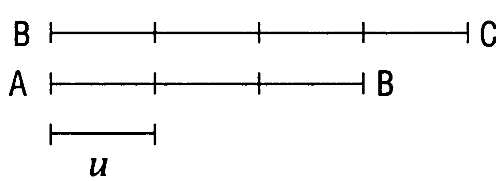
Supposons maintenant que la longueur BC ne soit plus égale à la longueur AB, mais en soit un multiple entier, comme sur la figure précédente où BC = 3AB. Il s'agit alors de montrer qu'on a aussi B'C' = 3A'B'. Pour le faire, il suffit de « répliquer » l'étape antérieure autant de fois que BC vaut AB, en traçant des droites parallèles intermédiaires entre (BB') et (CC'). Pour la configuration dessinée ci-dessus, il faudra donc deux droites.



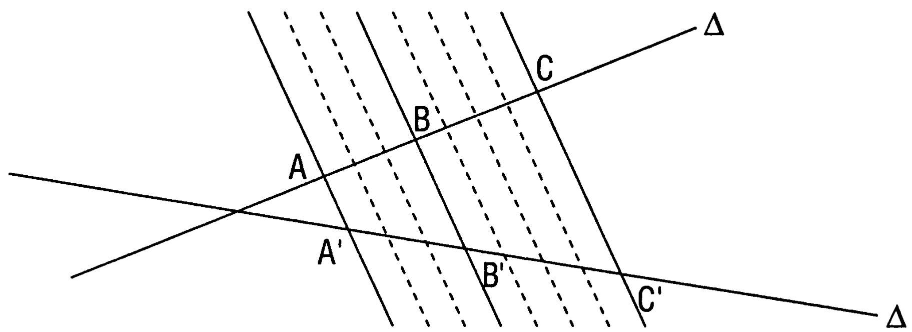
Puisque nous savons déjà, d'après l'étape 1, que $EB_1 = B'B_1'$, $FB_2 = B_1'B_2'$ et $GC = B_2'C'$, on en déduit facilement que B'C' = 3A'B'.

3e étape – Passage aux rationnels

Nous allons maintenant étudier un cas encore plus général, celui où BC/AB est une valeur rationnelle, comme 5/2 ou 4/3, c'est-à-dire une valeur qui s'exprime comme la division de deux entiers. Dans un tel cas de figure, il existe un segment qui mesure à la fois AB et BC, autrement dit une unité de mesure dans laquelle les longueurs AB et BC s'expriment comme des entiers. Pour expliquer cela, prenons l'exemple de cas où BC/AB = 4/3. Si l'on prend comme unité de mesure u une longueur valant le tiers de AB, alors AB vaut bien sûr $3u$ et, puisque BC/AB = 4/3, BC a une mesure égale à $4u$.



On dit que le segment de longueur u *mesure* [AB] et [BC]. Nous allons revenir sur cette notion. Pour l'instant, remarquons que si BC/AB = 4/3, alors il suffit de reproduire l'étape 2, non pas en divisant [BC] autant de fois que [AB] est compris dedans, mais en divisant à la fois [AB] et [BC] en autant de fois que chacun d'eux contient un segment de longueur u les mesurant tous les deux, comme dans la figure ci-dessous où nous considérons le cas BC/AB = 4/3.



Le lecteur pourra alors s'assurer que les égalités s'obtiennent toujours de la même manière.

4e étape – Argument de continuité

L'étape précédente donne déjà une vaste généralité au théorème de Thalès, mais ne le démontre pas entièrement. Il fut un temps où l'on pensait que tous les nombres s'exprimaient sous forme de fractions, autrement dit, dans le langage géométrique des anciens Grecs, qu'il existait toujours un segment mesurant deux segments donnés. Tel n'est pas le cas, comme nous l'avons évoqué pour π (*cf.* chap. II) et comme nous y reviendrons (*cf.* p. 88). Notre preuve du théorème de Thalès n'est donc pas complète.

Même si tous les nombres ne peuvent pas s'écrire sous forme de fractions de nombres entiers, tous peuvent *s'approcher* par des fractions, avec autant de précision que l'on veut : c'est l'une des manières, un peu naïve mais que l'on sait aujourd'hui exprimer rigoureusement, de définir l'ensemble des nombres « réels », autrement dit, d'un point de vue géométrique, l'« ensemble des longueurs possibles ».

C'est avec cette façon d'envisager les longueurs qu'on peut achever la preuve du théorème de Thalès. Supposons BC/AB égal à un nombre quelconque, différent de toute fraction. Approchons ce nombre par une fraction : on en déduira alors un segment d'une certaine longueur *u*, qui ne mesurera pas à la fois AB et BC (sinon le rapport des longueurs serait une fraction de nombres entiers), mais qui le fera « presque » : l'erreur sera d'autant plus petite que l'approximation de BC/AB par notre fraction sera bonne.

Cette longueur *u* va concerner non pas les segments [AB] et [BC] mais des segments très voisins, pour lesquels l'étape 3 nous a déjà donné l'égalité du théorème de Thalès. On établit donc que, quelle que soit la précision avec laquelle nous mesurons les segments, la relation de Thalès est vérifiée. Le mathématicien n'en demande pas plus : si un écart est plus petit que n'importe quelle quantité, c'est que cet écart est nul. La relation de Thalès est donc vraie dans tous les cas.

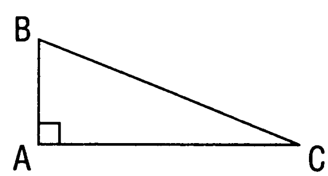
Le théorème de Pythagore

Le théorème qui est sans doute le plus célèbre des mathématiques ne porte pas très bien son nom. D'une part parce qu'il semble que son énoncé était déjà connu des Babyloniens, et d'autre part parce que, s'il revient bien aux pythagoriciens d'avoir analysé le résultat, sans se contenter de quelques observations empiriques, il n'est pas sûr du tout que ce soit Pythagore lui-même qui soit l'auteur de la première démonstration (laquelle pourrait même n'avoir été menée que par Euclide, plus de deux siècles plus tard).

Contrairement à ce que l'expression « théorème de Pythagore » laisse parfois croire, Pythagore n'était pas un mathématicien mais un religieux mystique, du VI^e siècle avant notre ère, fondateur d'une société secrète « éclairée » pour laquelle « tout est nombre ».

ÉNONCÉ. Dans un triangle (ABC) rectangle en A, les longueurs AB, AC et BC sont liées par la relation suivante :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

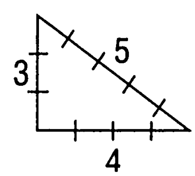


Le plus grand des trois segments d'un triangle rectangle, opposé à l'angle droit ([BC] dans le cas précédent), est appelé HYPOTÉNUSE. On peut ainsi énoncer le théorème de Pythagore en disant que « le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux autres côtés ». Le théorème de Pythagore admet une réciproque, à savoir : si un triangle (ABC) est tel que ses longueurs vérifient $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors ce triangle est rectangle en A.

Tout comme pour le théorème de Thalès, nous allons nous intéresser à la signification et aux implications du résultat avant d'aborder sa démonstration.

Le théorème de Pythagore donne une relation métrique entre les côtés d'un triangle rectangle. En soi, le fait que la longueur de deux côtés fixe celle du troisième n'est pas étonnant (c'est le deuxième cas d'égalité des triangles). Ce qui est frappant, c'est que l'hypoténuse soit liée de façon si simple aux deux autres côtés.

TRIPLETS PYTHAGORICIENS. Égyptiens et Babyloniens n'ont pas attendu Pythagore pour donner des exemples de longueurs possibles pour un triangle rectangle. Le plus fameux d'entre eux est celui où les deux petits côtés mesurent respectivement 3 et 4 et où l'hypoténuse mesure (donc) 5.

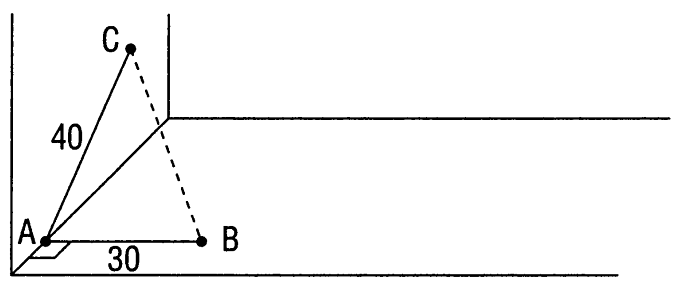


On a bien, en effet, $9 + 16 = 25$, c'est-à-dire $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pour cette raison, la suite de nombres (3, 4, 5) est appelée *triplet pythagoricien*. Plus généralement, est triplet pythagoricien toute suite de trois nombres entiers a, b et c telle que $a^2 + b^2 = c^2$, c'est-à-dire, d'après le théorème de Pythagore et sa réciproque, telle que a, b et c soient les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. Un autre exemple est le triplet (5, 12, 13).

Nous n'allons pas déterminer tous les triplets pythagoriciens, même si la solution est connue au moins depuis Diophante d'Alexandrie. On sait montrer qu'ils sont une infinité, et on peut aussi, avec les outils de l'arithmétique, en donner la liste complète.

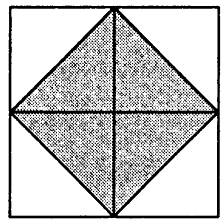
INTÉRÊTS PRATIQUES. Le seul résultat quantitatif que nous avions donné jusque-là portait sur la somme des angles d'un triangle, qui permet, deux angles étant connus, de connaître la mesure du troisième. À présent, nous disposons d'une estimation de longueurs.

On peut l'utiliser pour mesurer des longueurs de façon indirecte, mais sa réciproque peut également servir pour vérifier qu'un angle est droit (une alternative à l'équerre), comme pour contrôler qu'un mur est bien vertical (notons en passant que deux plans sécants contiennent toujours des droites perpendiculaires, autrement dit, on peut toujours ajuster une équerre contre deux murs, même si ces murs ne sont pas perpendiculaires).



Par un point A au pied du mur, mener un segment [AB] le long de du sol, de longueur 30 cm, perpendiculairement à la droite d'intersection du mur et du sol. Ensuite, mener un segment [AC] au mur (peu importe de quelle manière) de longueur 40 cm. Alors, le mur est bien droit (ou le sol bien horizontal) si, et seulement si, la longueur BC est égale à 50 cm.

LA DIAGONALE DU CARRÉ. Si l'on se donne un carré de côté 1, le théorème de Pythagore indique immédiatement que la diagonale du carré est de mesure $\sqrt{2}$. En fait, il est possible de s'en rendre compte de façon plus élémentaire à l'aide d'une figure.



Si chaque petit carré est de côté 1, le grand carré est d'aire 4. D'autre part, le carré grisé construit sur la diagonale d'un petit carré a une aire qui est la moitié de celle du grand carré, puisqu'il contient la moitié de chaque petit carré constitutif du grand. L'aire du carré grisé est donc de 2 et, puisque l'aire d'un carré est le carré de son côté, la diagonale du petit carré mesure $\sqrt{2}$.

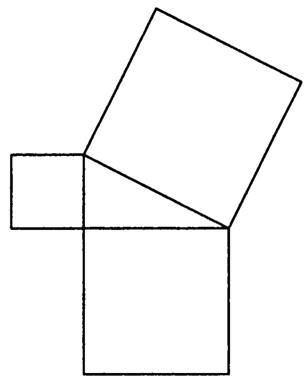
Cette construction est celle que Socrate fait découvrir à un esclave, dans le dialogue *Ménon*. Ce fut une illustration de la *maïeutique*, Socrate jouant dans le dialogue le rôle de celui qui fait accoucher l'esclave d'une connaissance qu'il était censé posséder sans s'en souvenir (du grec *maieutikê*, art de faire accoucher).

La construction précédente réalise la *duplication du carré*, c'est-à-dire répond au problème qui consiste à trouver un segment permettant de construire un carré d'aire double du premier. C'est sous cette forme que Socrate pose le problème à l'esclave de *Ménon*.

Les pythagoriciens ont démontré que la diagonale du carré ne s'exprime pas sous forme de fraction de nombres entiers, elle est *irrationnelle* (ou *incommensurable* au côté du carré). On peut dire que cette découverte a été faite « à leur corps défendant », car ils n'avaient jamais envisagé cette possibilité, et une partie de leur vision du monde se structurait autour de l'idée de rapports entre nombres entiers, comme la gamme pythagoricienne en produit l'une des plus belles applications. On ignore quel pythagoricien est l'auteur de la découverte des quantités irrationnelles et, même s'il est difficile d'estimer à quel point elle les a surpris, elle a pu être considérée comme un « scandale » et donner lieu à une sorte de crise. Notons que l'absence de documents d'époque sur cette découverte fait que l'on ignore si c'est bien la diagonale du carré qui a donné le premier nombre irrationnel. Certains auteurs ont suggéré que le nombre d'or, qui est le rapport entre deux longueurs du pentagone régulier, a pu la précéder.

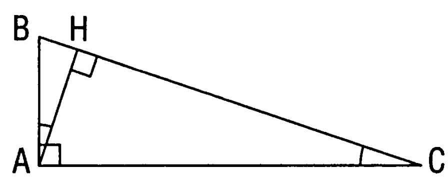
AVEC DES AIRES. Nous avons démontré plus haut que la diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$. Cette preuve a utilisé de façon déterminante la notion d'aire, qui déborde du cadre de cet ouvrage. Toutefois, le fait bien connu que l'aire d'un carré est le carré de son côté permet de représenter de façon élégante le théorème de Pythagore.

Dans la figure ci-contre, on a dessiné trois carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle. D'après le théorème de Pythagore, la somme des aires des deux petits carrés est égale à l'aire du troisième carré.



DÉMONSTRATION. Il existe de multiples preuves du théorème de Pythagore. Celle que nous donnons utilise le théorème de Thalès dans l'une de ses conséquences : deux triangles qui ont leurs trois angles deux à deux égaux ont leurs côtés proportionnels (*cf.* p. 78).

Considérons un triangle (ABC) rectangle en A, et soit H le pied de la hauteur issue de A.



Il est intéressant en soi de constater que les triangles (ABC), (ABH) et (ACH) sont semblables, au sens de la définition donnée p. 78. En effet, pour (ABC) et (ABH), par exemple, l'angle en B est commun et ils ont tous deux un angle droit, le troisième angle est donc aussi commun (la somme mesurant 180°).

Puisque des triangles semblables ont leurs côtés proportionnels, on obtient facilement que BH/BA = AB/BC : les rapports entre petite longueur et hypoténuse sont égaux.

Une autre façon d'écrire cette relation est :

$AB^2 = BC \times BH$.

De la même manière, partant des triangles (ABC) et (ACH), on obtient la relation suivante :

$AC^2 = BC \times CH$.

Il ne reste alors qu'à ajouter ces deux égalités :

$AB^2 + AC^2 = (BC \times BH) + (BC \times CH)$

$= BC \times (BH + CH)$

$= BC \times BC$

$= BC^2$.

Le théorème est démontré. Notons enfin que l'égalité BH + CH = BC n'est vraie que parce que H est sur [BC] : on peut montrer que le pied de la hauteur issue de l'angle droit d'un triangle rectangle appartient toujours au segment opposé (ce n'est pas le cas pour tous les triangles).

CHAPITRE IV

Transformations

La géométrie a longtemps été définie comme l'étude des figures, planes ou spatiales. En cela, les chapitres précédents constituent la base de la géométrie « classique », compilée par Euclide et poussée à un très grand degré de raffinement pendant les deux millénaires qui ont suivi. De nombreuses figures ont été étudiées ; on peut citer le cas des CONIQUES (intersection d'un cône et d'un plan), si bien décrites géométriquement depuis Apollonius au début du IIe siècle av. J.-C. qu'elles étaient déjà très connues lors de la découverte de leur rôle en physique au XVIIe siècle (orbites planétaires autour du Soleil, trajectoire d'un projectile).

Cependant, la géométrie a beaucoup changé de nature depuis la fin du XVIIIe siècle. En effet, la figure géométrique a perdu son statut d'objet de base, désormais attribué aux TRANSFORMATIONS. La si brillante géométrie des Grecs avait cette lacune d'être essentiellement statique : on n'y déplaçait pas les points.

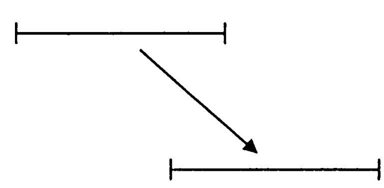
Les précurseurs de l'idée de transformation furent les artistes qui, à partir du XVe siècle, se posèrent la question de représenter « fidèlement » une situation spatiale sur un cadre plan. C'est la question de la perspective, dont Girard Desargues, au XVIIe siècle, énonça une mathématisation. Le caractère central des transformations en géométrie a été défini dans la seconde moitié du XIXe siècle par Felix Klein dans son « Programme d'Erlangen ».

Glisser et tourner

Sans le dire explicitement, nous avons déjà utilisé à de nombreuses reprises les notions de ROTATION et de TRANSLATION. Si le terme de rotation est couramment employé, celui de translation est plus spécifique aux mathématiques, alors même que l'action qu'il désigne est on ne peut plus commune : translater un objet consiste à le faire glisser en ligne droite, sans le faire pivoter.

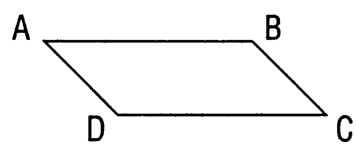
Étudier translations et rotations revient donc à s'intéresser à ces glissements sans déformation évoqués au chapitre I et que, tel monsieur Jourdain, nous avons abondamment employés sans les nommer.

RETOUR SUR LE PARALLÉLOGRAMME. Considérons un segment, matérialisé par une règle, que l'on fait glisser sans tourner.



Le dessin ci-dessus représente les positions initiale et finale du segment. Comme on le constate, les deux segments ainsi représentés sont deux côtés opposés d'un parallélogramme (éventuellement aplati), même si, pour l'affirmer en toute rigueur, il faudrait démontrer que les deux autres côtés du quadrilatère sont bien parallèles.

Prenons à présent le point de vue inverse, en nous donnant un parallélogramme.

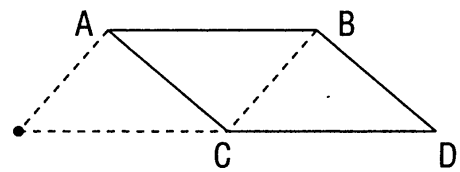


Le côté [CD] peut s'envisager comme le côté [AB] que l'on aurait fait glisser sans le faire tourner. Il y a ainsi une profonde identité entre la notion de parallélogramme et celle de translation : l'une peut définir l'autre.

L'ordre logique impose que nous commencions par définir ce qu'est la translation d'un point. « Faire glisser » un point peut être assimilé à ce que l'on fait lorsqu'on trace au crayon un segment à l'aide d'une règle : parti d'un point initial, on suit la direction imposée par la règle jusqu'à ce que le crayon atteigne un nouveau point à distance voulue du premier. Dans ce procédé, la règle joue le rôle de support matériel de la direction à suivre. Le point final est le *translaté* du point initial, le segment constitué par le trait représentant la « trajectoire » du point. Nous voyons donc que la translation d'un point est déterminée par deux données : la distance à parcourir et la direction à suivre.

Pour mathématiser cette idée, considérons un segment [AB], fixé une fois pour toutes, et un point C quelconque. Translater le point C selon [AB], c'est tracer un segment partant de C, de même longueur que [AB] et de même direction, un peu comme si [AB] était notre règle de tout à l'heure. Le point D final est alors tel que le quadrilatère (ABDC) soit un parallélogramme.

Bien entendu, dans la construction précédente, il faut s'être mis d'accord au préalable sur un sens de parcours. En effet, un segment et un point étant donnés, il existe *deux* parallélogrammes les contenant, suivant que l'on place D « à droite » ou « à gauche » de C.



LES VECTEURS, MATÉRIALISATION DES TRANSLATIONS. On appelle BIPOINT, et on note **AB** (en caractères gras), le segment orienté [AB], avec pour origine le point A et pour extrémité le point B. C'est ainsi que, si les segments [AB] et [BA] sont identiques, les bipoints **AB** et **BA** sont, eux, distincts : on les dit *opposés*.

En fait, si nous en restions là sur ces nouveaux objets, il n'y aurait pas de réelle différence avec les segments. Par exemple, avec ce que nous avons donné comme définition d'un bipoint, **AB** et **BA** sont en fait égaux (même s'ils sont distincts) : il suffit de retourner le segment [AB] sur lui-même pour amener l'origine A de **AB** sur l'origine B de **BA**, ce qui prouve l'égalité géométrique.

C'est Leibniz qui, vers 1679, a imaginé cette construction de bipoints, qu'il généralisait à plusieurs points et qu'il voulait utiliser pour fonder une « géométrie des situations ». L'outil s'est révélé inadapté car, pour donner de l'intérêt à la notion de bipoint, il convient de définir l'égalité d'une manière différente de celle qu'on utilise pour des segments. On dit ainsi que les bipoints **AB** et **CD** sont ÉQUIPOLLENTS (et on note **AB** = **CD**) lorsque le quadrilatère (ABDC) est un parallélogramme – notons qu'il s'agit de (ABDC) et non de (ABCD) –, et seulement dans ce cas. Il s'agit donc d'une nouvelle sorte d'égalité entre objets, plus restrictive que l'égalité géométrique.

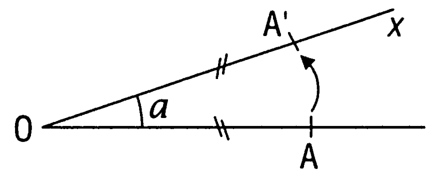
L'ensemble de bipoints équipollents au bipoint **AB** est un VECTEUR, dont **AB** est un *représentant*. Dans la suite, nous nous conformons à l'usage qui confond vecteurs et représentants, et qualifions de vecteur un bipoint **AB**.

Les vecteurs sont les « parfaits outils » pour rendre compte de la notion de translation : on appelle *translation de vecteur* **AB** l'opération qui consiste à « envoyer » tout point C du plan sur l'unique point D tel que **CD** = **AB** (« vecteur » vient du latin *vehere*, « conduire »).

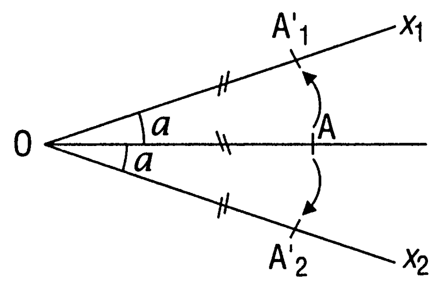
On peut également translater des triangles, des cercles, ou toute autre figure, en translatant chacun des points constitutifs de cette dernière ; le translaté d'une figure est une figure égale.

FAIRE TOURNER. La seconde manière de déplacer un objet consiste à le faire tourner, sur lui-même ou autour d'un objet quelconque. Quelle que soit la manière de s'y prendre, une rotation s'effectue toujours autour d'un centre, immobile, et selon un certain angle.

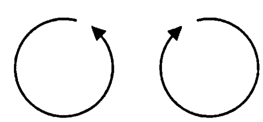
Pour faire tourner le point A autour du point O selon un angle de a degrés, on trace la demi-droite [OA), puis la demi-droite [Ox) telle que $\angle AOx$ soit de mesure a. Le point d'arrivée est le point A' de [Ox) tel que OA' = OA.



Pour que la rotation soit bien définie, il est indispensable de se fixer un sens de parcours. Sans cela, tout comme pour les translations, il y aurait deux façons d'effectuer le déplacement du point A.



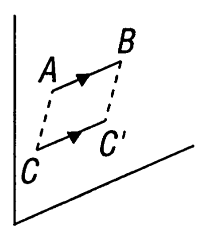
L'angle qui définit la rotation est donc un angle orienté (*cf.* chap. II). Généralement, on choisit une fois pour toutes un sens de parcours parmi les deux possibles.



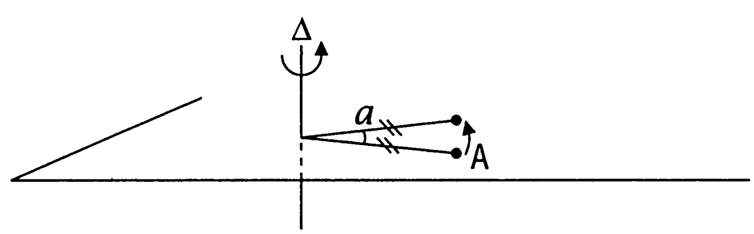
Le premier des deux est le sens *direct*, ou *trigonométrique*. C'est le sens de rotation de la Terre vue du dessus du pôle Nord. L'autre sens est dit *inverse*, ou *antitrigonométrique* (ou encore *horaire :* c'est le sens des aiguilles d'une montre). D'une manière générale, on choisit le sens direct.

De même que pour les translations, la rotation d'une figure transforme celle-ci en une figure égale. En fait, si nous avions voulu élaborer la géométrie de façon véritablement rigoureuse, énoncer que rotations et translations transforment une figure en une figure égale n'aurait pas été considéré comme une propriété des translations et des rotations, mais comme une définition de l'égalité des figures géométriques.

DANS L'ESPACE. La notion de translation n'est pas plus compliquée à définir dans l'espace que dans le plan, seule la visualisation en est un peu plus difficile. Un vecteur se définit de la même manière que dans le plan, l'égalité entre vecteurs également. On remarque que la translation d'un point C par le vecteur **AB** de l'espace est un point qui appartient au plan défini par le triplet A, B et C.



La notion de rotation nécessite, elle, d'être légèrement aménagée pour prendre sens dans l'espace. En trois dimensions, ce n'est pas un simple point central qui permet la rotation, mais une droite, qu'on appelle *axe* de la rotation. L'axe défini par un tournevis est celui de la rotation imprimée à la vis : la rotation d'un point A suivant l'axe Δ et selon un angle de mesure *a* s'explique en un dessin.



Une fois encore, nous devons apporter une précision concernant le sens de rotation. En effet, si lorsque le plan contenant A est regardé « du dessus », la rotation a lieu dans le sens direct, elle semble en revanche avoir lieu dans le sens inverse en regardant « du dessous ». En particulier, suivant le côté de la porte où l'on se trouve, le sens de rotation de la poignée que l'on pousse vers le bas n'est pas le même.

L'axe de la rotation doit donc être orienté, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de décider quel côté doit être considéré comme le « haut ». Par convention, vu du haut, le sens de rotation doit être direct, tout comme c'est le cas pour la rotation de la Terre vue du dessus du pôle Nord.

DES FIGURES IMMOBILES. Une figure est dite INVARIANTE par une transformation donnée lorsque cette dernière ne déplace aucun des points de cette figure : par exemple, l'axe d'une rotation dans l'espace est invariant.

Si les cercles ont joué un rôle si essentiel dans les cosmologies anciennes, c'est en partie pour l'une de leurs propriétés caractéristiques : la rotation d'un cercle autour de son centre laisse le cercle *globalement invariant*, c'est-à-dire que la rotation (quel que soit son angle) le « transforme en lui-même » même si chacun de ses points est déplacé. La rotation apparente des étoiles autour de la Terre matérialise bien ce fait : chacune d'elles se déplace, mais selon un cercle qui, lui, est toujours le même.

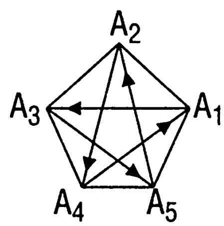
C'est ainsi que, dans les visions antiques du monde, on considérait que la forme de l'Univers était une sphère, seule forme à pouvoir tourner (comme étoiles, planètes, Lune et Soleil semblent le faire) selon n'importe quel axe sans « déborder » au-delà d'elle-même.

Notons qu'une figure invariante est toujours globalement invariante : autrement dit, si aucun point ne bouge, alors la figure entière ne bouge pas. En revanche, une figure globalement invariante n'est pas toujours invariante, comme par exemple un cercle que l'on fait tourner sur lui-même : l'ensemble des points du cercle est envoyé par la rotation sur ce même ensemble, mais chacun de ses points est, lui, déplacé.

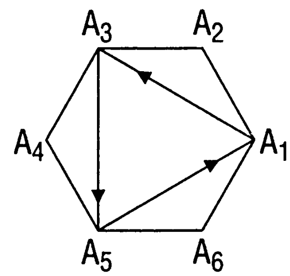
Les cercles de centre O sont les seules figures globalement invariantes par toutes les rotations de centre O. Le carré, lui, est globalement invariant par rotation d'angle droit autour de son centre. Plus généralement, on peut facilement démontrer que les polygones réguliers à n côtés sont globalement invariants par rotation d'angle multiple de $360/n$ degrés (autour de leur centre). C'est en fait de cette manière que nous les avons construits au chapitre II.

Supposons un point A_1 donné, et considérons une rotation de centre O. Si l'angle de la rotation est de $360/n$ degrés, alors A_1 est envoyé sur un point A_2, lequel est à son tour envoyé sur A_3, et ainsi de suite, jusqu'au point A_n qui se confond avec A_1. Supposons à présent qu'on tourne non pas de $(360/n)$ mais de $2\times(360/n)$ degrés. Deux choses peuvent alors se produire, suivant que n est pair ou non.

Lorsque n est impair, tous les sommets du polygone à n côtés sont atteints. Lorsque n est pair, la moitié seulement des sommets du polygone à n côtés sont atteints, on construit le polygone régulier à $n/2$ côtés. Ce que l'on voit dans la figure ci-dessous est une matérialisation *géométrique* d'une propriété *arithmétique* du nombre n.



n impair



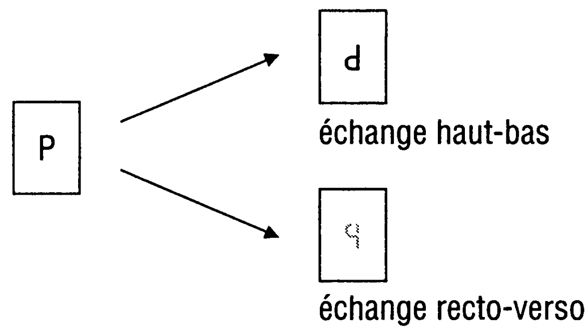
n pair

Dans l'espace, lier rotations et polyèdres est plus difficile. C'est à partir de cette idée qui consiste à rechercher les transformations laissant globalement invariantes des figures géométriques qu'on démontre en toute rigueur qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers (mais il existe aussi une approche plus intuitive de ce fait).

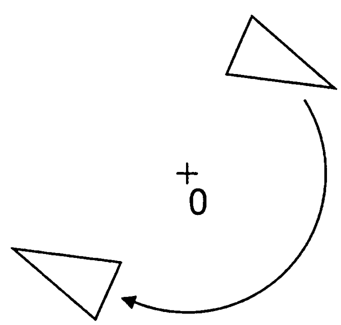
Symétries

Tout comme une rotation, une symétrie est une transformation qui s'opère autour de quelque chose. Ainsi, tourner la page d'un livre est une opération qui s'effectue à l'aide de la reliure, laquelle permet le retournement de chaque feuille.

Il y a une petite ambiguïté dans le terme « retournement » : pour reprendre l'exemple d'une feuille, la retourner peut consister à échanger recto et verso ou à échanger haut et bas. Ces deux façons de faire définissent les deux symétries du plan.



AUTOUR D'UN CENTRE. Dans le plan, on appelle SYMÉTRIE CENTRALE la transformation qui consiste, un point O étant fixé (le *centre de symétrie*), à effectuer un demi-tour autour de O.



Cette définition fait de la symétrie centrale un cas particulier d'une transformation que nous connaissons déjà : la rotation de centre O et d'angle plat. En fait, il n'est pas réellement nécessaire de parler de rotation : chaque point A est envoyé sur le point B (unique) tel que O soit le milieu de [AB]. On évite ainsi toute référence aux angles : si le rapporteur est en général indispensable pour effectuer des rotations, il ne l'est pas pour la symétrie centrale.

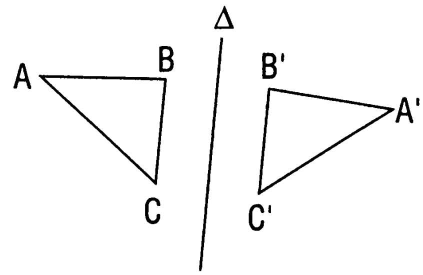
Notons que le lien entre symétrie centrale et rotation indique que toute figure est envoyée par symétrie centrale sur une figure qui lui est *égale*. En particulier, puisque le produit de la rotation d'une droite est une droite, la symétrie centrale envoie une droite Δ sur une droite Δ' qui lui est parallèle (si le point B leur est commun et que A est le point de Δ envoyé sur B, alors le point O ne peut être milieu de [AB] que s'il appartient à Δ, d'où $\Delta = \Delta'$). Ce résultat est intuitivement moins clair sans référence à une rotation.

Pour visualiser la symétrie centrale, on peut considérer l'exemple d'une carte à jouer. En dehors des basses cartes et des as, il n'y a pas de sens à dire qu'une carte est prise à l'envers : qu'on la prenne d'un côté ou de l'autre, on voit la même chose. Mathématiquement, on dit qu'une carte à jouer est globalement invariante par symétrie autour de son centre.

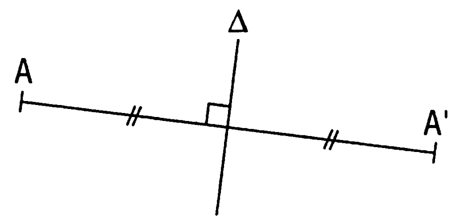
Le cercle est également une figure globalement invariante par symétrie autour de son centre. C'est aussi le cas pour tous les polygones réguliers ayant un nombre pair de côtés.

La symétrie centrale est une INVOLUTION, ce qui signifie que, appliquée deux fois, elle ramène les points à leur position initiale. Autrement dit, appliquer une rotation d'angle $2\times180 = 360°$ autour d'un certain point revient à ne rien bouger.

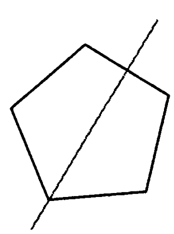
AUTOUR D'UN AXE. Le reflet est sans doute l'exemple qui illustre le mieux la notion de SYMÉTRIE AXIALE. Donnons-nous une droite Δ et un triangle (ABC). Si Δ est envisagée comme un « miroir », le reflet de (ABC) est un triangle (A'B'C').



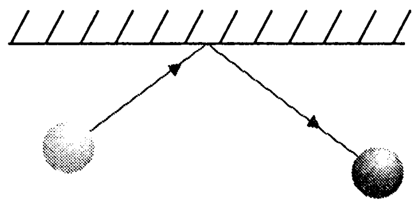
Pour faire des figures correctes, il est nécessaire de donner une définition mathématique rigoureuse : chaque point A est envoyé par symétrie autour de l'axe Δ sur l'unique point A' tel que Δ soit la médiatrice de [AA'].



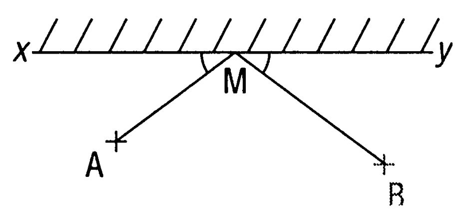
Tout comme la symétrie centrale, la symétrie axiale est une involution. Un cercle est évidemment invariant par symétrie axiale dont l'axe passe par son centre. Les polygones réguliers le sont aussi, dès lors que l'axe passe par le centre et par l'un des sommets ou par un milieu d'un côté (contrairement à ce qui se passe pour une symétrie centrale, il n'y a pas de restriction aux polygones ayant un nombre pair de côtés).



UN PROBLÈME DE BILLARD. Voici une question classique qui fait intervenir une symétrie axiale : considérons une boule blanche à laquelle on se propose de donner une impulsion pour qu'elle rebondisse d'abord contre l'une des bandes avant de cogner une boule rouge. Comment doit-on orienter la queue pour que la trajectoire de la boule blanche soit celle voulue (sans que soit donné d'effet particulier à la boule blanche) ?



Une loi physique indique que l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence, autrement dit que l'angle que fait la trajectoire avec la bande avant le rebond est égal à celui qu'elle fait après le rebond.

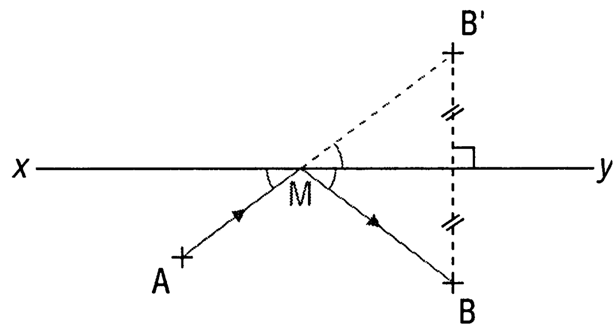


Tout le problème est donc de localiser le point M pour lequel $\angle AMx = \angle BMy$.

Bien entendu, si A et B sont à la même distance de la bande, l'intuition géométrique la plus élémentaire indique que M est simplement le « point milieu », c'est-à-dire, en termes plus mathématiques, l'intersection de (xy) avec la médiatrice de [AB]. Qu'en est-il en général ?

Considérons la symétrie d'axe (xy), qui envoie le point B sur le point B'. Le point M que nous cherchons est alors l'intersection des droites (xy) et (AB'). En effet, l'angle

$\angle$AMx est égal à l'angle $\angle$B'My (ils sont opposés par le sommet), ce dernier étant lui-même égal à l'angle $\angle$BMy (l'un est le reflet de l'autre). On a donc bien $\angle AMx = \angle BMy$, donc M est bien le point cherché.

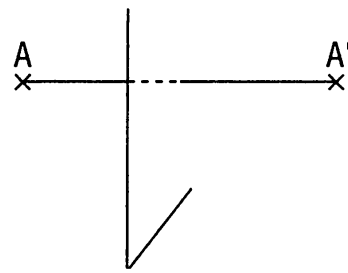


Le point M possède une autre propriété : il minimise la longueur à parcourir pour un cavalier qui part de A, qui va faire boire son cheval au cours d'eau (xy) et qui rejoint ensuite le point B. En effet, considérons un point P sur (xy) : avec la symétrie d'axe (xy), on a PB = PB', d'où AP + PB = AP + PB'. L'intérêt de cette égalité est qu'elle ramène la question à la recherche du point de (xy) par lequel passe le plus court chemin de A à B'. Or ce plus court chemin est donné par la droite (AB') : le point M construit plus haut réalise donc bien le minimum de longueur.

DANS L'ESPACE. Dans l'espace, la notion de symétrie centrale est plus complexe, car on ne peut plus la définir à partir d'une rotation. En effet, toute symétrie centrale est caractérisée par un centre, c'est-à-dire par un point. Or dans l'espace, une rotation s'effectue autour d'un axe. Une rotation dans l'espace n'est donc pas la « bonne » extension tridimensionnelle de la symétrie centrale.

La manière dont il convient d'envisager la symétrie centrale dans l'espace consiste à fixer un centre, O, et à envoyer chaque point A sur l'unique point B tel que O soit milieu de [AB]. Il ne s'agit plus d'une rotation d'angle plat car, si tel était le cas, seul l'axe de rotation et les droites qui lui sont sécantes et perpendiculaires seraient invariants. Ici, toutes les droites passant par O sont invariantes.

La généralisation à l'espace de la symétrie axiale est la SYMÉTRIE PLANE, pour laquelle la représentation intuitive à l'aide d'un miroir prend pleinement son sens.

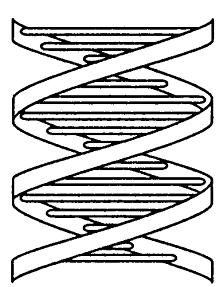


MAIN DROITE, MAIN GAUCHE. La symétrie centrale dans l'espace, la symétrie axiale et la symétrie autour d'un plan ont un point en commun : toutes trois envoient une figure sur une autre qui ne lui est pas égale mais symétrique, contrairement à ce qui se passe pour toutes les autres transformations que nous avons vues. L'image ne peut pas être obtenue par déplacement de l'original (translations et rotations), il faut un retournement. C'est là une remarque importante, qui rejoint les considérations d'orientation que nous avons déjà soulevées.

Une illustration classique est donnée par nos deux mains, droite et gauche, posées à plat. Chacune d'elles est le « reflet » de l'autre par symétrie plane, et on ne peut faire coïncider les deux, quelle que soit la manière dont on les dispose l'une par rapport à l'autre. Les deux mains sont dites *énantiomorphes*. Une main est un objet *chiral*, c'est-à-dire que son reflet dans un miroir ne lui est pas géométriquement égal (le mot vient du grec *kheiros*, « main »). À l'inverse, un cube, une bouteille ou une chaise sont des objets invariants par symétrie autour d'un plan : on les dits *achiraux*.

Il pourrait sembler que deux énantiomorphes sont des manifestations d'un même objet, et qu'ils disposent donc de propriétés identiques. On rencontre en fait dans la nature des cas où la chiralité n'est pas une propriété neutre. Le *limonène*, par exemple, est une molécule dont il existe deux énantiomorphes (on dit *énantiomères* pour des molécules), appelés "+" et "-". Il se trouve que l'un d'entre eux a un goût d'orange, et l'autre de citron. Cela est dû aux récepteurs responsables de la sensation gustative : si, de manière schématique, on les imagine comme des pièces de puzzle qui fixent les autres pièces de puzzle que sont les molécules ingérées, on comprend bien que les deux énantiomères du limonène ne seront pas fixés par les mêmes récepteurs, et qu'il nous est donc possible de faire une différence gustative entre les deux.

La différence entre deux objets chiraux peut aller plus loin. L'ADN, acide désoxyribonucléique, support de l'hérédité, est une macromolécule en forme de double hélice.



Cette figure, qui est aussi celle du double escalier du château de Chambord, est chirale : elle n'est pas superposable à son image dans un miroir. On pourrait s'attendre à ce que les deux énantiomères se rencontrent en proportions plus ou moins égales dans la nature. Il n'en est rien : pour toutes les créatures vivantes sur la Terre, c'est toujours le même énantiomère de la double hélice que l'on rencontre, sans que l'on ait donné d'explication satisfaisante à cette discrimination. De la même façon, la coquille des escargots tourne toujours dans le même sens, à d'exceptionnelles mutations génétiques près (une sur 7000 pour les escargots de Bourgogne).

Le tire-bouchon est un autre exemple classique de figure chirale : les gauchers savent bien que l'outil ne leur est pas adapté, qu'il tourne « dans le mauvais sens » pour leur main dominante. Contrairement aux escargots, la queue des cochons, en forme de tire-bouchon, est *racémique,* c'est-à-dire qu'elle n'a pas de sens privilégié : les cochons dont la queue tourne à gauche et ceux dont la queue tourne à droite sont en proportion égale.

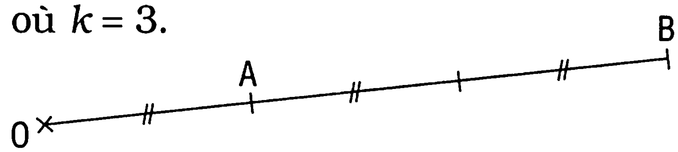
GROSSIR, RÉDUIRE

La transformation géométrique qui correspond au grossissement à la loupe, ou au contraire à la réduction, s'appelle HOMOTHÉTIE. Contrairement aux précédentes, ce n'est pas une ISOMÉTRIE, c'est-à-dire qu'elle modifie la longueur des segments. En revanche, elle préserve les angles.

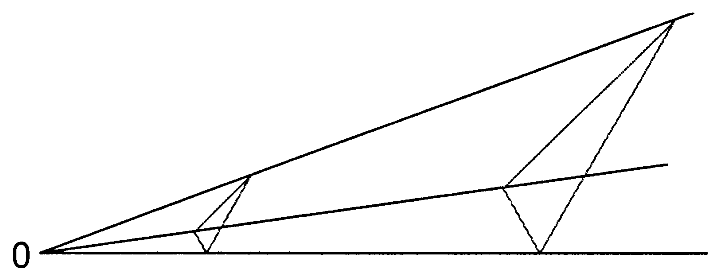
Pour définir une homothétie, on se donne un point O qui sera le centre de l'homothétie, ainsi qu'un nombre k

appelé *rapport*, qui peut être quelconque mais que nous prendrons strictement positif pour la commodité de l'explication.

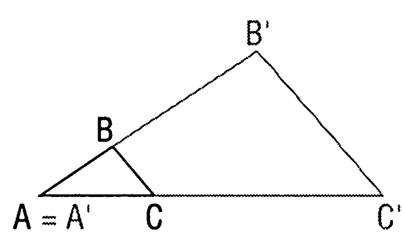
Par l'homothétie de centre O et de rapport k, le point A est envoyé sur le point B tel que O, A et B soient alignés dans cet ordre et tel que OB/OA = k. Voici un exemple dans le cas où $k = 3$.



Si on applique l'homothétie à toute une figure géométrique, un triangle par exemple, le résultat est le suivant.

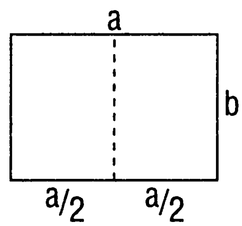


Bien sûr, le fait que l'homothétie envoie une droite sur une droite, ou un cercle sur un cercle, mérite une démonstration. Dans le cas du triangle, cette démonstration utilise le théorème de Thalès, ce qui rejoint ce que nous avons dit plus haut sur le fait que deux triangles semblables sont aussi qualifiés d'homothétiques. Dans la configuration de Thalès des triangles semblables, on peut imaginer que l'un est le grossissement de l'autre selon l'homothétie de centre A et de rapport AC'/AC.



Notons que la notion d'homothétie se définit de la même manière dans l'espace.

LE FORMAT 21 × 29,7. Considérons un rectangle dont le grand côté mesure a et le petit mesure b.



La question que l'on se pose est de savoir quelle relation doivent entretenir les valeurs a et b entre elles pour que soit vérifiée la propriété suivante : la moitié gauche du rectangle précédent est homothétique du rectangle tout entier. Autrement dit, le petit rectangle est un « modèle réduit » du grand (et pivoté d'un quart de tour).

Cette question, qui s'exprime en des termes purement géométriques, a en fait une réponse donnée par l'algèbre.

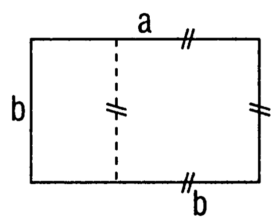
Le petit rectangle sera homothétique au grand si, et seulement si, il existe un nombre k qui soit égal à la fois au rapport des longueurs et au rapport des largeurs des deux rectangles. En conséquence, on doit avoir :

$a/b = k = b/(a/2)$.

Par des opérations algébriques élémentaires que nous ne détaillerons pas, l'équation $a/b = b/(a/2)$ se ramène à l'équation $a^2 = 2b^2$, qu'on peut aussi écrire $a/b = k = \sqrt{2}$. Une fois la longueur a choisie, il n'existe donc, d'après l'équation précédente, qu'une seule largeur b pour laquelle le pliage reproduira une feuille dont le format sera homothétique de la feuille initiale.

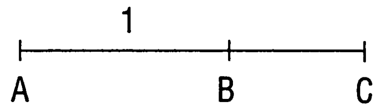
Un aspect intéressant de cette construction est qu'une fois le pliage fait, on peut le refaire et que la propriété est préservée. C'est ainsi que le format courant des feuilles de papier (21 cm de large, 29,7 cm de long), dit A4, est homothétique du format A3, lui-même homothétique du format A2, puis du format A1, et enfin du format A0 qui, par convention, mesure 1 m².

LE NOMBRE D'OR. Le problème des *rectangles d'or* est voisin de celui du format des feuilles A4. La question consiste à trouver les proportions d'un rectangle tel que, lorsqu'on lui ôte le plus gros carré qu'il contient, le petit rectangle restant se trouve dans les mêmes proportions.



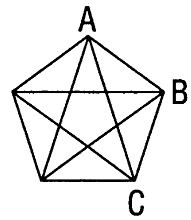
Là encore, le problème se ramène à une équation purement algébrique : si l'on égale les rapports des longueurs aux largeurs, on arrive à l'équation $a/b = b/(a - b)$. Des manipulations algébriques nous ramènent alors à l'équation $r^2 - r - 1 = 0$, où r est le rapport a/b (avec $r>1$). La résolution de cette équation est un peu plus difficile que dans le cas du format A4, où l'on avait simplement $r = \sqrt{2}$, mais il existe tout de même une méthode pour déterminer les valeurs possibles de r. Pour notre problème, on peut démontrer que $r = (1 + \sqrt{5})/2$, une quantité qui vaut à peu près 1,618. C'est le *nombre d'or*. Tel π, le nombre d'or intervient dans des situations variées, bien que lui ne soit pas transcendant et qu'on puisse le construire à la règle et au compas.

Un problème équivalent à celui des rectangles d'or consiste à se donner un segment [AB] de longueur 1 et à chercher la position de l'unique point C pour lequel AB/AC = BC/AB : « Le grand est au moyen ce que le moyen est au petit. »



On appelle ce découpage le *partage en moyenne et extrême raison.* On peut démontrer que le point C précédent, pour vérifier la condition d'égalité posée, doit se trouver à distance $(1 + \sqrt{5})/2$ du point A. Certains tests statistiques semblent indiquer que, lorsqu'on demande à différents individus de couper un segment [AC] « au hasard », ils ont assez naturellement tendance à le couper selon la « proportion dorée », c'est-à-dire au niveau du point B, pour des raisons d'« harmonie ». En fait, même si l'on retrouve dans de nombreuses œuvres architecturales ou picturales des lignes en proportion dorée (c'est notamment le cas chez Le Corbusier, qui attachait une grande importance au nombre d'or), il est quelque peu naïf d'envisager le nombre d'or comme la « mathématisation » d'une certaine esthétique qui se retrouverait partout.

Nous avons mentionné plus haut le fait que $\sqrt{2}$, rapport de la diagonale du carré à son côté, pourrait avoir été le premier nombre identifié comme irrationnel. Il a été envisagé que le nombre d'or pourrait l'avoir précédé, en remarquant qu'on le retrouve dans le *pentagramme*, figure très prisée des pythagoriciens.



On peut démontrer, sans utiliser d'outils élaborés, que le rapport AC/AB est irrationnel (il est égal au nombre d'or).

PROBLÈMES D'ÉCHELLES. Nous avons vu au chapitre I pourquoi on parle de la géométrie *du* plan plutôt que *d'un* plan. D'un autre côté, nous avons aussi parlé *du* carré ou *du* cercle, alors que tous les carrés (et tous les cercles) ne sont pas égaux. Sans être égaux, ils sont cependant tous homothétiques, comme on le montre facilement. Même si l'abus de langage n'a pas eu de conséquence sur notre manière d'étudier la géométrie, le fait de confondre des figures homothétiques et pas seulement géométriquement égales est un changement important de point de vue, qui n'est rien de moins qu'un changement de géométrie (nous y reviendrons au chapitre suivant).

De la même façon que pour la symétrie plane ou axiale, on peut s'interroger sur l'influence des homothéties dans la nature. Par exemple, que se passerait-il si, comme dans certains ouvrages de science-fiction, on imaginait un appareil capable de réduire ou d'agrandir l'être humain ? Dans ce genre de fictions, il s'agit bien de réaliser une homothétie, car on considère pour ainsi dire toujours que les proportions sont respectées. Qu'adviendrait-il d'un être humain ainsi transformé en géant (ou en lilliputien) ?

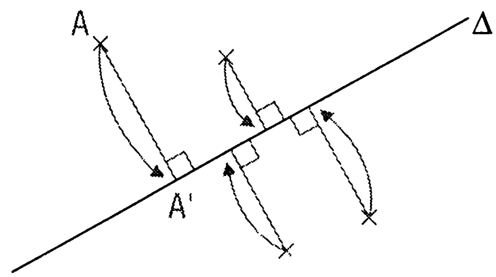
La réponse à cette question que s'était déjà posée Galilée est que le géant ainsi constitué ne serait pas viable, pour plusieurs raisons provenant du fait qu'augmenter la taille a pour effet d'augmenter le *volume* du corps par rapport à sa *surface* et à la *longueur* de ses os. Dans le cas le plus élémentaire d'un être en forme de sphère de rayon r, le volume est donné par la formule $V = (4\pi/3)r^3$ et la surface par $S = (4\pi)r^2$. Le rapport V/S vaut donc $r/3$, il n'est donc pas invariant par homothétie. Si l'on considère que la quantité de chaleur produite par le corps est proportionnelle à son volume et que celle qu'il évacue est proportionnelle à sa surface, on comprend aisément qu'un géant étouffera tandis qu'un lilliputien aura toujours trop froid (pensons au pelage des souris, ou aux oreilles des éléphants qui leur permettent de s'aérer). Plus grave, le squelette humain transposé tel quel à un géant serait insuffisamment solide pour lui permettre de tenir debout.

On peut traduire ces phénomènes en disant que l'être humain n'est pas *invariant d'échelle* : pour l'agrandir ou le rapetisser, il faut changer sa forme.

Projections, inversions

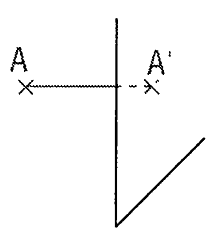
Toutes les transformations que nous avons vues jusque-là ont une propriété commune : elles préservent les angles, c'est-à-dire qu'un angle de x degrés est envoyé par l'une quelconque de ces transformations sur un angle de x degrés : ces transformations sont dites *conformes*. En dehors des homothéties, toutes ces transformations préservent aussi les longueurs, ce sont des isométries.

Il existe bien entendu de nombreuses autres manières de déplacer les points du plan ou de l'espace. L'une d'elles est la PROJECTION ORTHOGONALE, qui consiste à envoyer tous les points du plan sur une seule et même droite de la façon représentée sur la figure suivante.



Si Δ est la droite sur laquelle on projette, alors le point A est envoyé sur le point A' de Δ tel que (AA') soit perpendiculaire à Δ. Une autre manière de le dire, qui fonctionne aussi lorsque A est un point de Δ, est que le point A' est le point de Δ le plus proche de A.

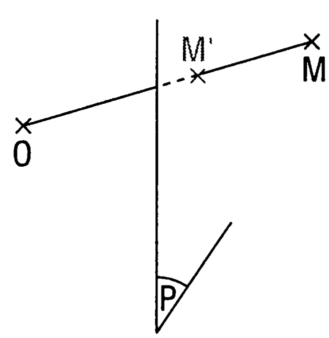
La projection orthogonale de l'espace se définit de manière analogue, mais celle-ci peut avoir lieu sur une droite ou sur un plan.



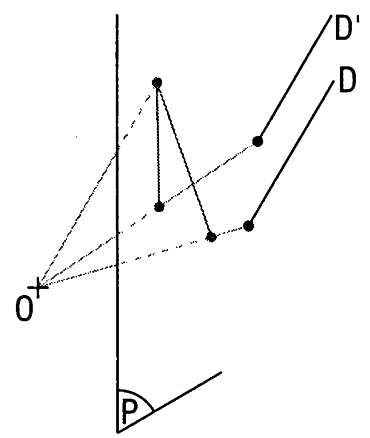
La projection orthogonale n'est pas exactement une transformation du plan ou de l'espace, car ce terme implique une propriété de *bijection* : pour une rotation, par exemple, on peut toujours considérer la rotation d'angle opposé, qui « annule » la première. Une projection, elle, n'est pas réversible, il y a plusieurs points qui sont envoyés sur A' et l'on ne peut donc pas, à partir de la figure du haut de la page précédente, retrouver le point A uniquement à partir de son projeté sur Δ. C'est une perte d'information analogue qui fait que nous sommes parfois troublés lorsqu'à la télévision, nous voyons une balle s'élever en l'air sans que nous parvenions à savoir exactement quelle est sa trajectoire.

VOIR EN RELIEF. Le grand intérêt de la projection est qu'elle permet, quitte à sacrifier une partie de l'information, de représenter l'espace dans un plan : c'est avec des projections orthogonales que nous avons pu représenter les polyèdres du chapitre II. Cette représentation constitue la *perspective cavalière*.

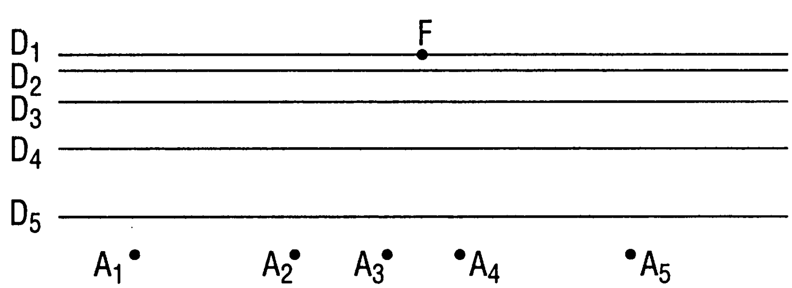
La perspective cavalière n'est pas la seule manière possible de représenter le relief. La *projection centrale* en est une autre. Donnons-nous un point de l'espace, O, ainsi qu'un plan P ne contenant pas O : le point O peut être vu comme l'« œil » du peintre et le plan P comme le « tableau » qui va être réalisé à partir d'une figure géométrique de l'espace.



La projection centrale de centre O sur le plan P envoie tout point M sur l'unique point M' de P tel que O, M et M' soient alignés. On peut montrer que deux demi-droites parallèles D et D' situées « derrière » le plan P par rapport à O (et dont les droites portantes coupent P) sont envoyées par la projection centrale sur deux segments de P qui ont une extrémité en commun. Cette extrémité est un *point de fuite*, il représente sur le plan P le « point à l'infini » des demi-droites D et D'.



Dans la figure suivante est représentée une projection centrale (dont le centre est l'œil du lecteur et le plan celui de la feuille) de deux séries de demi-droites parallèles : la première série, parallèle au plan de la feuille, est envoyée sur un ensemble de droites parallèles D_1, D_2,..., D_5. L'autre série, perpendiculaire au plan de la feuille, est envoyée sur un ensemble de segments $[A_1F]$,..., $[A_5F]$ dont le point de fuite F est une extrémité commune.



La projection centrale étant bien plus fidèle à notre perception oculaire que ne l'est la perspective cavalière, la figure précédente donne ainsi une meilleure sensation de relief.

L'INVERSION, OU COMMENT CHANGER UNE DROITE EN UN CERCLE. Une homothétie consiste en un grossissement d'une figure à partir d'un centre. Comme toutes les autres transformations que nous avons vues (la projection n'en étant pas une), même si elle déplace et modifie les figures, elle n'en change pas la nature : un cercle est envoyé sur un autre cercle, un carré sur un autre carré, et ainsi de suite.

L'INVERSION est une opération géométrique qui peut modifier profondément la figure à laquelle on l'applique. On appelle *inversion de centre O et de rapport k* l'opération qui consiste à envoyer tout point A sur le point A' de [OA) tel que OA × OA' = k. Par exemple, si A est à distance 10 de O, alors le point A' sera à distance $k/10$ de O.

L'inversion possède plusieurs caractéristiques assez particulières. D'abord, on ne peut l'appliquer au point O lui-même, d'après la définition. Ensuite, plus le point A s'approche de O, plus il est envoyé loin de O par l'inversion, et réciproquement (notons aussi que l'inversion est une involution). Par extension, on pourrait mettre en forme l'idée que l'inversion envoie le point O sur un point à l'infini.

Un grand intérêt de l'inversion de centre O est qu'elle transforme tout cercle passant par O (auquel on exclut O lui-même) en une droite, ce que nous admettons. C'est à partir de ce constat que se construit l'inverseur de Peaucellier que nous avons mentionné au chapitre I. Il s'agit d'une construction mécanique qui permet de dessiner le résultat de l'inversion d'une figure. Si cette figure est un cercle passant par O, alors l'inverseur produira une droite, résolvant du même coup le problème de produire une ligne rigoureusement rectiligne que nous avions évoqué.

CHAPITRE V

D'autres géométries

De nouveaux points de vue ont, notamment à partir du XIX^e siècle, profondément modifié la manière d'envisager la géométrie et ses outils. Nous avons mentionné au chapitre précédent le rôle qu'y ont pris les transformations. C'est ainsi que Felix Klein, dont nous avons déjà parlé, définissait la géométrie comme l'étude « des êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations », ce qui revient, selon la terminologie que nous avons employée, à choisir une définition de l'égalité entre figures.

On peut alors parler *des* géométries : la géométrie que nous avons étudiée au chapitre II s'élabore à partir de la définition qui pose comme égales toutes figures qui se déduisent les unes des autres par translations et rotations. On peut l'appeler *géométrie des déplacements*, sa caractéristique principale étant que les transformations qui la définissent préservent les longueurs et l'orientation. Mais on peut considérer que deux figures homothétiques sont aussi égales : l'un des effets de ce changement de point de vue est que l'on dispose d'un quatrième cas d'égalité des triangles, puisque sont reconnus comme égaux les triangles dont les trois angles sont deux à deux égaux. Et on peut étendre encore : c'est l'une des justifications à l'étude, que nous ne pouvons développer, de la *théorie des groupes*, qui donne un cadre mathématique aux ensembles de transformations pouvant définir une géométrie.

Plus modestement, nous allons ici brièvement présenter quelques points qui peuvent faire suite aux chapitres précédents. Bien entendu, chacun d'eux mériterait de longs développements pour être présenté complètement ; notre but n'est ici que d'en donner un aperçu.

Sur la sphère

En dehors de la géométrie plane ou spatiale, la géométrie sphérique est la plus ancienne qui ait été étudiée. Son intérêt provient notamment de l'astronomie : dans les anciens modèles de l'Univers où la Terre est au centre de ce dernier, les astres se déplacent sur des sphères, selon des mouvements complexes. La géométrie sphérique s'impose donc naturellement dans ces théories.

Sur une sphère, les objets et les conceptions de la géométrie doivent être revus. En particulier, il est bien entendu qu'on ne peut y envisager d'objet rectiligne, d'où l'impossibilité de parler de droites. On remplace cette notion par celle de géodésique, plus court chemin entre deux points. On peut démontrer que les géodésiques de la sphère, ses « droites », sont les *grands cercles*, c'est-à-dire les cercles de même rayon que la sphère.

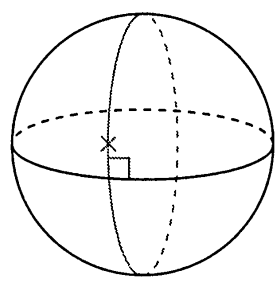
Sur la sphère terrestre, les méridiens sont des exemples de géodésiques (par « méridien » nous entendons un grand cercle, mais, en pratique, on réserve l'appellation aux demi-cercles limités par les pôles). En revanche, les « parallèles » n'en sont pas, à l'exception de l'équateur (ne pas confondre les parallèles qui recouvrent la Terre avec la notion mathématique de droites parallèles). À la Révolution française, où il fut décidé d'uniformiser les unités de mesure des longueurs, l'étalon choisi a été la dix-millionième partie d'un quart de méridien, avec l'argument d'« universalité » selon lequel les hommes sont égaux devant l'étalon puisque tout lieu est traversé par un méridien (contrairement à ce qui se passe pour l'équateur).

Il n'est pas difficile d'imaginer un intérêt pratique à la détermination des géodésiques de la sphère : leur connaissance permet de minimiser la distance à parcourir pour joindre deux endroits du globe trop éloignés l'un de l'autre pour qu'on puisse négliger la courbure de notre planète. Le fait que les géodésiques soient les grands cercles indique en particulier que la route la plus courte joignant deux points n'est pas, comme on pourrait le croire, celle à cap constant (le cap étant l'angle entre la direction suivie et le nord magnétique).

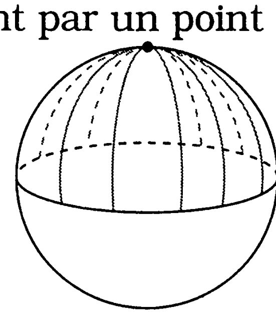
Sous les latitudes moyennes, la représentation plane la plus courante de la Terre est la projection de Mercator. Il est à noter que, dans cette représentation, le plus court chemin qui joint deux villes n'est pas un segment de droite : c'est ainsi que le chemin le plus court qui joint Paris à Vancouver passe par le Groenland, ce dont on ne se rend pas compte avec une carte classique.

Une différence essentielle avec le plan ou l'espace est que, sur la sphère, deux géodésiques se coupent forcément. Autre problème : par deux points il peut passer plusieurs géodésiques, comme c'est le cas sur la Terre pour les pôles, traversés par une infinité de méridiens (les points diamétralement opposés, c'est-à-dire distants d'un diamètre, sont les seuls couples par lesquels passent plusieurs géodésiques – en fait, une infinité).

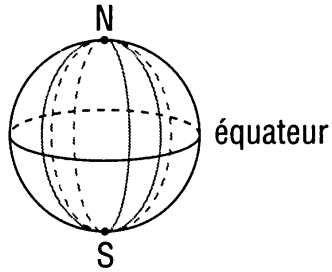
Pour la notion d'orthogonalité, l'approche la plus simple consiste à ne plus considérer des angles, mais le fait que la perpendiculaire à une droite passant par un point donné est celle qui porte le plus court chemin joignant ce point à la droite.



Bien entendu, si de tels chemins sont plusieurs, il y aura plusieurs géodésiques orthogonales à une même géodésique et passant par un point fixé...

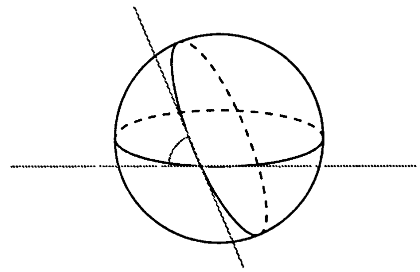


Pour définir le parallélisme sur la sphère, on peut utiliser l'orthogonalité. Nous savons que, dans le plan, deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles entre elles. En envisageant cet énoncé comme une définition du parallélisme plutôt que comme une propriété des droites parallèles, on peut poser que deux géodésiques de la sphère sont parallèles dès lors qu'elles sont orthogonales à une même troisième. C'est ainsi que les méridiens, tous orthogonaux à l'équateur, sont un ensemble de géodésiques parallèles passant toutes par les deux points que sont les pôles (et donc toutes sécantes).



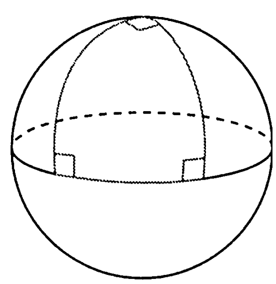
Il n'y a donc pas de pendant sphérique au postulat des parallèles. Il pourrait sembler étrange que, jusqu'au XIX^e^ siècle, des géomètres se soient acharnés à chercher une preuve du postulat d'Euclide (*cf.* chap. I), alors que la sphère, étudiée depuis si longtemps, produit un exemple si simple où celui-ci est faux. Pour comprendre ce point, il convient de savoir qu'avant le XIX^e^ siècle, une figure donnée de l'espace n'était pas considérée comme formant un ensemble à l'intérieur duquel on pouvait définir une structure. Envisager les géodésiques comme les « droites » d'une surface (comme la sphère) remplaçant le plan est une idée moderne.

Pour définir des angles sur la sphère, on peut considérer les droites tangentes aux géodésiques (les géodésiques sont des cercles, chacune d'elles est donc incluse dans un plan ; dans ce plan, en un point donné du cercle, on peut tracer une droite tangente), et définir l'angle entre deux géodésiques comme l'angle fait par les deux tangentes :



Sur Terre, le *degré de méridien* d'un lieu donné est l'angle fait par le méridien du lieu avec celui de Greenwich.

La notion d'angle étant ainsi redéfinie, on peut reprendre une étude géométrique comme celle que nous avons menée dans les premiers chapitres, en la « corrigeant » au vu des nouveaux postulats qui régissent la géométrie sphérique. Par exemple, dans cette géométrie, la somme des angles d'un triangle est supérieure à 180°, quel que soit le triangle. Sur la sphère, il existe des triangles dont les trois angles sont droits :



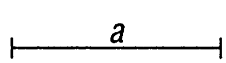
La sphère constitue donc un monde dans lequel l'intuition géométrique héritée de notre perception spatiale doit être corrigée. Les mathématiciens ont imaginé d'autres structures mathématiques sur lesquelles on observe des phénomènes encore moins conformes à l'intuition géométrique élémentaire. Outre la difficulté qu'il y a à devoir renoncer au sens commun pour appréhender ces constructions, il n'est pas toujours possible de donner une représentation à partir d'un ensemble de points de l'espace, comme nous l'avons fait pour la sphère.

En quatre dimensions

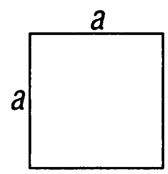
Une droite est un objet que l'on dit en une dimension, la « longueur ». Un plan est en deux dimensions : longueur et largeur. L'espace tout entier, quant à lui, est en trois dimensions : longueur, largeur, hauteur.

On ne peut pas représenter physiquement l'opération qui consiste à « continuer », à ajouter une quatrième dimension aux trois premières : notre univers quotidien est fondamentalement tridimensionnel. Pourtant, dans plusieurs domaines scientifiques distincts est apparu le besoin d'imaginer un espace en quatre dimensions, voire plus (et il est même des espaces à une infinité de dimensions).

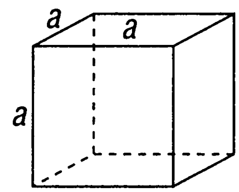
Visualisons le problème : soit un nombre positif a donné. On peut représenter ce nombre par un segment de longueur a.



Le résultat de la multiplication de a par lui-même est le nombre $a \times a$, noté a^2 et appelé carré de a. Cette dénomination s'explique par le fait que a^2 est l'aire du carré de côté a.



Multiplions à présent a^2 par a : le nombre obtenu, a^3, est le cube de a. C'est le volume du cube dont les arêtes sont de longueur a.



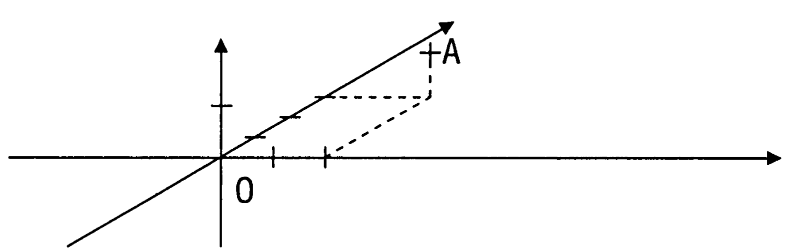
Si notre monde tridimensionnel nous interdit d'aller plus loin, il n'y a pourtant aucune objection mathématique à effectuer l'opération $a^3 \times a$, dont le résultat est a^4, la puissance quatrième de a. Le changement dans le type de dénomination traduit le fait qu'on ne peut pas rendre géométriquement compte de l'opération effectuée. Omar Khayyam, au XIIe siècle, mentionne ainsi dans son *Traité en algèbre et en al-muqabala* (cité dans *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, 1987) que :

> « *...si l'algébriste emploie le carré-carré [la puissance quatrième] dans des problèmes de géométrie, c'est métaphoriquement, et non pas proprement, puisqu'il est impossible que le carré-carré soit au nombre des grandeurs. Ce qui fait partie des grandeurs, c'est d'abord une seule dimension, c'est-à-dire la racine, ou, rapporté à son carré, le côté. Puis les deux dimensions, c'est-à-dire la surface. [...] Enfin, les trois dimensions, c'est-à-dire le corps ; [...]* »

D'Alembert, six siècles plus tard, suggère dans l'*Encyclopédie* que le temps pourrait être envisagé comme une quatrième dimension. S'il ne mentionne l'idée que très brièvement, il a tout de même le mérite de reconnaître la possibilité concrète d'une quatrième dimension, et non plus seulement « métaphorique » comme pour Omar Khayyam. Toutefois, la recherche d'une réalité matérielle d'un monde à quatre dimensions n'a pas été le moyen par lequel les mathématiciens ont pu élaborer une théorie qui rende compte de cette idée.

L'obstacle psychologique à un espace en quatre dimensions, qui ne correspond à aucune réalité géométrique, a été franchi au XIX[e] siècle. Pour les différents auteurs et précurseurs de la dimension 4, les idées sont davantage venues de problèmes algébriques que géométriques. Les premiers à avoir franchi le pas de façon décisive sont Herman Grassmann et Arthur Cayley, dans les années 1840.

Pour comprendre la structure d'un espace à quatre dimensions, on peut utiliser la *méthode des coordonnées*. Dans notre espace habituel, on localise un point à partir de trois nombres (les coordonnées) indiquant chacun la distance à un point de référence en longueur, largeur et hauteur. C'est ainsi que, dans le dessin qui suit, si O est le point de référence, le point A est de coordonnées (2, 3, 1).



On réalise ainsi une identification (on dit *isomorphisme*) entre l'espace et l'ensemble des triplets de nombres. Cela constitue une « algébrisation » de la géométrie : l'espace perd son caractère intuitif (ensemble de points), pour devenir une réalité purement algébrique (ensemble de triplets de nombres).

Une fois ce pas franchi, on peut réinterpréter la notion de droite, de cercle ou de plan en des termes qui ne font plus référence à la géométrie telle que nous l'avons étudiée ; un plan devient un ensemble de triplets vérifiant une certaine équation, un cercle est un ensemble de triplets vérifiant d'une part l'équation du plan dans lequel le cercle est contenu, d'autre part une certaine équation du second degré.

Une fois la contrainte géométrique supprimée, plus rien n'empêche de s'intéresser à l'ensemble des quadruplets de nombres, comme (x, y, z, t). Cet ensemble réalise mathématiquement un espace à quatre dimensions. On peut imaginer que x, y et z constituent les trois données usuelles de localisation d'un point dans l'espace, et que t représente l'instant auquel ce point est localisé (pour un point en mouvement, la nécessité de la donnée t est évidente). Il reste que, d'un point de vue mathématique, il n'est pas indispensable de chercher une telle assise physique à la quatrième dimension. À partir de là, on peut poursuivre le procédé et regarder des espaces à 5 dimensions, ou plus.

L'analogie avec les dimensions 2 et 3 est un moyen performant pour étudier les propriétés de base de l'espace quadridimensionnel. Par exemple, un point permet de séparer une droite en deux parties disjointes. Dans le plan, un point ne suffit plus : il faut une droite pour le partager en deux. Dans l'espace, la droite à son tour ne suffit plus, il faut un plan. En quatre dimensions, de la même façon, un plan ne sépare pas l'Univers en deux, il faut un « hyperplan », un « plan en trois dimensions » (un exemple d'hyperplan est donné par l'espace dans lequel nous vivons). Autre exemple, dans un espace à 4 dimensions, deux plans peuvent n'être ni sécants ni parallèles.

En fait, aucun résultat dans un espace quadridimensionnel n'est vraiment étonnant : pour y travailler, il faut surtout s'habituer au fait qu'il existe un nouveau degré de liberté. De nouvelles directions sont possibles, de la même façon que lorsque l'on passe de la dimension 2 à la dimension 3.

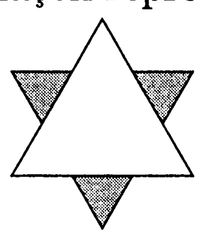
Flatland, d'Edwin Abbott, est un petit livre qui raconte les voyages extraordinaires d'un « carré », habitant d'un monde en deux dimensions qui découvre d'autres mondes, en une ou plusieurs dimensions (voire aucune dimension : un monde réduit à un point). Les analogies que développe le narrateur doivent permettre au lecteur de comprendre ce qui se passe dans 4 dimensions.

Par exemple, s'il est possible dans un univers quadridimensionnel de voir le chocolat même s'il est dans son emballage, c'est parce que, de manière analogue, nous pouvons, en trois dimensions, voir chaque recoin d'une feuille de papier (mathématiquement : en trois dimensions, on peut voir toute la surface d'un carré, même si ses côtés sont opaques ; en quatre dimensions, on peut voir l'intérieur d'un cube, même si ses faces sont opaques).

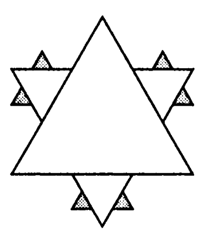
De nouvelles formes : les fractales

La découverte des formes fractales date du début de ce siècle, même si le mot, introduit par Benoît Mandelbrot en 1975, est beaucoup plus récent. Leur étude nécessite l'abandon complet de ces outils traditionnels de la géométrie que sont la règle, le compas et autres, qui nous ont servi tout au long des chapitres précédents.

Une manière possible de définir le mot fractale est de dire qu'il s'agit d'une figure invariante d'échelle : d'aussi près qu'on la regarde, on voit toujours la même chose. L'exemple le plus simple d'une telle figure est une ligne droite, mais il en existe d'autres. L'un des plus anciens exemples est appelé le flocon de neige de von Koch, imaginé par son auteur en 1904. En voici le procédé de construction : soit un triangle équilatéral de côté a. Sur chacun de ses côtés, on accole un petit triangle équilatéral, de côté $a/3$, de la façon représentée ci-contre.



Sur chaque segment du bord de la figure ainsi obtenue, on accole de nouveau un triangle équilatéral dont le côté est le tiers du segment. Et l'on poursuit ainsi, à l'infini.



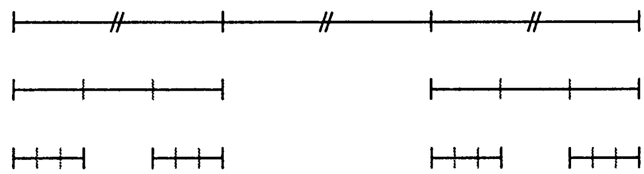
On peut démontrer que, loin de finir par englober la totalité du plan, le « bourgeonnement » initial va progressivement dessiner les contours d'une courbe qui est, par définition, le flocon de neige de von Koch.

La construction n'est pas, contrairement aux figures classiques de la géométrie, une répétition finie de certaines opérations avec du matériel approprié : une représentation matérielle de la courbe de von Koch n'est possible que de manière approchée, puisque la figure se définit comme une limite de figures, un objet que l'on n'atteint qu'à l'infini.

Les propriétés de cette courbe sont extraordinaires. Tout d'abord, bien qu'elle entoure un domaine du plan dont l'aire est finie, le périmètre de la courbe est, lui, infini.

Cette courbe est invariante d'échelle : d'aussi près qu'on la regarde, elle semble toujours aussi irrégulière, et elle se ressemble à elle-même vue de plus loin (tout comme c'est le cas pour une droite).

D'autres constructions mathématiques tout aussi étranges ont été réalisées. Ainsi celle de Peano, qui permet de recouvrir entièrement l'intérieur d'un carré à l'aide d'une courbe (appelée la courbe de Peano), montrant par là même qu'une surface et une droite ont « autant de points » l'une que l'autre, ce qui a profondément surpris les mathématiciens d'alors. Ou encore l'*ensemble de Cantor*, que l'on construit en ôtant le tiers central d'un segment, puis le tiers central de chacun des segments restants et ainsi de suite : ce qui reste est l'ensemble de Cantor.

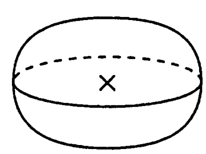


Cet ensemble résiduel possède de nombreuses propriétés exotiques, comme celle de contenir autant de points qu'une droite tout entière et d'être pourtant de longueur totale nulle.

Depuis que les fractales se sont révélées d'utiles modélisations de phénomènes naturels (le flocon de von Koch pour les côtes maritimes, l'ensemble de Cantor pour des irrégularités dans des lignes de transmissions électriques, entre autres), le terme s'est popularisé, d'autant qu'il est possible, avec l'outil informatique, d'en produire d'esthétiques spécimens.

Dans quel monde vivons-nous ?

Il fut un temps où les hommes pensaient la Terre plate. Mais, depuis l'Antiquité grecque, nous savons que sa forme est plutôt sphérique. Plus précisément, en raison de sa rotation, notre planète ressemble à un *ellipsoïde de révolution*.

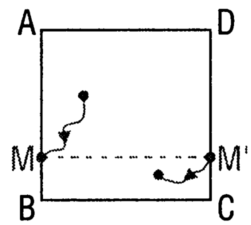


Au début du XX^{e} siècle, c'est au tour de l'Univers de voir sa forme mieux comprise. Celle-ci s'est révélée plus complexe que l'espace à trois dimensions de la géométrie classique. Comment a-t-on pu le savoir ? Une méthode expérimentale est suggérée par la lumière, qui suit toujours une trajectoire géodésique. Si l'on observe que la lumière ne se déplace pas toujours de façon rectiligne, alors on peut affirmer que notre Univers ne s'identifie pas complètement à l'espace usuel à trois dimensions auquel notre perception nous a habitués (de la même façon que la Terre s'est révélée sphérique, en contradiction avec notre perception de tous les jours du « plat »).

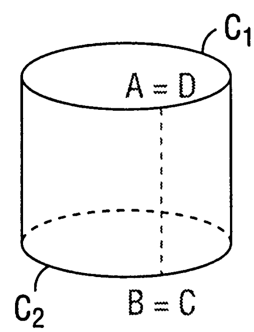
Historiquement, la première expérience de ce type a été menée au cours de l'éclipse de Soleil de 1919, lors de laquelle l'astronome Arthur Eddington a pu constater que la position apparente d'une étoile située juste derrière le Soleil ne correspondait pas aux prévisions, confirmant ainsi la théorie d'Einstein selon laquelle l'espace est courbe au voisinage de la matière. Pour donner du sens à cette idée de courbure de l'espace, il faut se représenter l'Univers dans un espace à 4 dimensions : l'ajout d'une dimension permet de rendre compte du paradoxe apparent qui fait que le plus court chemin entre deux points n'est pas rectiligne. D'une manière analogue, l'existence de triangles trirectangles sur la Terre ne peut s'expliquer qu'en supposant la surface de notre planète courbée dans la troisième dimension.

Quelle est donc la forme de l'Univers ? La question n'est pas (encore) résolue. À l'échelle humaine, bien sûr, le problème ne se pose pas : *localement*, la forme de l'Univers est celle d'un banal espace à trois dimensions. Pourtant, même des situations simples peuvent parfois conduire à envisager des mondes dans lesquels la géométrie n'est pas celle à laquelle nous sommes habitués.

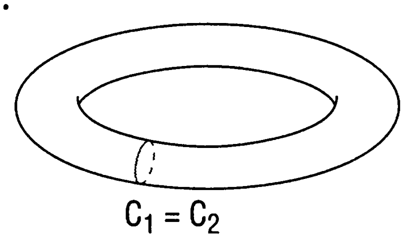
Un exemple est donné par le *tore*, carré (plein) ABCD sur lequel on suppose que tout point se déplaçant et atteignant le côté [AB] en M ressort automatiquement de l'autre côté, en M' (même chose pour [AD] et [BC]).



Un tel contexte est celui du jeu vidéo « Pac-Man ». L'étude des géodésiques du tore est plus difficile que celle des géodésiques de la sphère : elle fait appel à des notions algébriques. Une vision plus géométrique du tore consiste à se le représenter « plongé » dans l'espace : les points M et M' de la figure précédente devant être considérés comme identiques, on peut courber le carré précédent pour coller les côtés [AB] et [CD] et obtenir le cylindre suivant :



Pour que les points des segments [AD] et [BC] puissent être recollés de la même façon, on tord le cylindre de la manière suivante :



On obtient alors une forme identique à celle d'une chambre à air (l'espace contenu à l'intérieur ne fait pas partie du tore lui-même).

Ainsi le monde des formes a bien changé. À lire les questions de la géométrie contemporaine, on a bien du mal à établir le lien avec les objets traditionnels de la géométrie plane, plusieurs fois millénaire.

ANNEXES

Bibliographie

Ouvrages

Bouvier, A. et Richard, D. *Groupes*, Hermann, 1974.

Carrega, J.-C. *Théorie des corps : La Règle et le Compas*, Hermann, 1989.

Cleyet-Michaud, M. *Le Nombre d'or*, Presses Universitaires de France, 1995.

Gleick, J. *La Théorie du chaos*, Flammarion, 1991.

Godeaux, L. *Les Géométries*, Jacques Gabay, 1997.

Hadamard, J. *Leçons de Géométrie élémentaire - Géométrie plane*, Jacques Gabay, 1988.

Mattei, J.-F. *Pythagore et les pythagoriciens*, Presses Universitaires de France, 1996.

Platon *Timée/Critias*, Flammarion, 1992.

Platon *Ménon*, Flammarion, 1993.

Géométrie au Bac (ouvrage collectif), Hors-série *Tangente* n°8, Archimède, 1999.

Articles

Bechmann, R. « L'art du trait au XIIIe siècle », Hors-série, *Pour la science*, 1996.

Gale, D. « Avoiding numbers », *The Mathematical Intelligencer*, Vol. 18, n°3, 1996.

Lubczanski, J. « Et vice versa... », *Tangente* n°21, Archimède, 1991.

Rittaud, B. « Voyage dans la quatrième dimension », *Tangente* n°48, Archimède, 1996.

Rittaud, B. « Problèmes d'échelle », *Tangente* n°58-59, Archimède, 1997.

Rittaud, B. « Polyèdres réguliers », *Tangente* n°62, Archimède, 1998.

Rittaud, B. « Les mathématiques du *Ménon* », *Science et Infos Prépas* n°5, Archimède, 1999.

Russo, F. « Géométrie », *Encyclopædia Universalis*, Encyclopaedia Universalis, 1998.

Von Fritz, K. « The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum », *Annals of Mathematics*, Vol. 46, n°2, 1945.

Glossaire

Adjacents (secteurs angulaires). Deux secteurs angulaires sont dits adjacents lorsqu'ils ont pour seul partie commune les points de l'un de leurs côtés.
Aire. L'aire d'une région du plan limitée par une courbe fermée simple est la mesure de la « taille » de cette région. Par exemple, l'aire de la partie du plan délimitée par un rectangle est le produit de sa longueur par sa largeur.
Angle. Un angle est la donnée de deux demi-droites ayant leur extrémité en commun. L'usage veut que l'on confonde les angles avec les secteurs angulaires, dont la définition est cependant différente.
Angle droit. Moitié d'un angle plat.
Angle plat. Angle que font entre elles deux demi-droites qui sont les parties complémentaires de la même droite.

Base (d'un triangle isocèle). Un triangle isocèle possède deux côtés égaux ; la base est le troisième côté.
Bipoint. Deux points A et B étant donnés, on appelle bipoint et on note **AB** le segment [AB] dont A est l'origine et B l'extrémité. On ne se sert pas de l'égalité géométrique pour identifier des bipoints (sinon, les bipoints **AB** et **BA** seraient égaux), mais de la notion d'équipollence.

Bissectrice. La bissectrice d'un secteur angulaire $\angle xAy$ est l'unique demi-droite [Az) partageant le secteur angulaire en deux secteurs égaux.

Cercle. Dans le plan, ensemble des points à égale distance d'un même point appelé centre.

Carré. Il existe plusieurs façons de définir un carré, la plus courante étant de dire qu'un carré est un quadrilatère dont les côtés et les angles sont égaux (autrement dit, un carré est un polygone régulier à 4 côtés).

Centre de gravité. Voir « isobarycentre ».

Concourantes (droites). Droites admettant un même point d'intersection. C'est le cas des hauteurs d'un triangle, ainsi que des médianes, des médiatrices ou encore des bissectrices.

Conique. Une conique est une courbe obtenue comme intersection d'un cône et d'un plan. Il existe trois types de coniques : l'ellipse, la parabole et l'hyperbole. Le cercle est un cas particulier d'ellipse.

Degré. Le degré est une unité de mesure des angles. Par définition, un angle droit mesure 90° : on en déduit que l'angle plat mesure 180°, que l'angle plein est de 360°, que la somme des angles d'un triangle mesure 180°, que les angles d'un triangle équilatéral mesurent 60°, etc.

Demi-droite. Une droite (xy) étant donnée et un point A étant fixé dessus, la demi-droite [Ax) est l'ensemble des points de la droite situés du côté x par rapport à A. Le point A est l'extrémité de la demi-droite.

Diamètre. Un cercle étant fixé, un diamètre est un segment joignant deux points du cercle et passant par le centre.

Droite. Selon Euclide, une droite est « une ligne que l'on peut prolonger indéfiniment et continûment ». Il existe une unique droite passant par deux points distincts (du moins dans le cadre de la géométrie euclidienne), elle relie ces points suivant la trajectoire géodésique, c'est-à-dire la plus courte. Lorsque A et B sont deux points distincts, la notation (AB) désigne la droite passant par A et B. On peut aussi noter une droite par (xy), où x et y sont deux « branches infinies » du plan.

Égalité géométrique. Deux figures géométriques sont dites égales lorsqu'il est possible de déplacer l'une sur l'autre (à l'aide de translations et de rotations) de façon à ce qu'elles se recouvrent exactement.

Équilatéral (triangle). Un triangle est équilatéral s'il a ses trois côtés égaux ou, de façon équivalente, ses trois angles égaux.

Équipollence. Deux bipoints **AB** et **CD** sont équipollents lorsque le quadrilatère ABDC est un parallélogramme. L'équipollence remplace, pour les bipoints, la notion d'égalité géométrique.

Fractale. Il n'y a pas de définition standard de la notion de fractale. Une manière de voir consiste à dire qu'un objet est fractal lorsqu'il est invariant d'échelle.

Hauteur. La hauteur issue de A d'un triangle (ABC) est la droite perpendicualire à (BC) passant par A. L'intersection de (BC) avec cette hauteur est le pied.
Homothétie. Une homothétie est une transformation (du plan ou de l'espace) correspondant à l'idée de « grossissement » des figures. Un centre O étant fixé et un nombre k étant donné (le rapport, que nous prenons positif), tout point A est envoyé sur l'unique point B de la demi-droite [OA) tel que OB/OA = k.
Hypoténuse. Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand des trois côtés.

Invariante (figure). Une figure est invariante pour une transformation donnée lorsque aucun de ses points ne bouge sous l'effet de cette transformation. L'axe d'une symétrie axiale, par exemple, constitue une droite invariante pour cette symétrie axiale. Une figure est dite globalement invariante lorsque ses points, bien qu'éventuellement déplacés sous l'effet de la transformation considérée, ne sortent pas de la figure. C'est le cas d'un cercle, globalement invariant par toute rotation autour de son centre.
Inversion. Dans le plan ou l'espace, l'inversion de centre O et de rapport k (nombre positif) envoie tout point A (différent de O) sur le point B de [OA) tel que OB = k/OA. C'est une involution, elle transforme les droites passant par O en des cercles, et inversement.
Involution. Une involution est une transformation qui, appliquée deux fois à un point, fait revenir au point de départ : ainsi d'une rotation d'angle plat, où d'une symétrie axiale dans le plan.

Isobarycentre. L'isobarycentre de trois points A, B et C est le point de concours des médianes du triangle (ABC). Si l'on dispose des masses identiques en A, B et C, l'isobarycentre est le point équilibrant les masses : on parle donc aussi de centre de gravité.
Isocèle (triangle). Un triangle est isocèle si deux de ses côtés sont de même longueur. De façon équivalente, un triangle est isocèle si deux de ses angles sont égaux. Lorsque les trois côtés (ou, de façon équivalente, les trois angles) sont égaux, on parle de triangle équilatéral.
Isométrie. Toute transformation (du plan ou de l'espace) qui respecte les longueurs, c'est-à-dire que si A et B sont deux points à distance l l'un de l'autre, alors les images A' et B' de A et B doivent également être à distance l l'un de l'autre. Les translations, les rotations et les symétries (centrales, axiales, planes) sont des isométries.

Losange. Quadrilatère dont tous les côtés sont égaux. C'est un parallélogramme.

Médiane. Dans un triangle de sommets A, B et C, la médiane issue de A est la droite passant par A et rencontrant le milieu de [BC]. Les trois médianes que définit un triangle sont concourantes, en un point appelé isobarycentre, ou centre de gravité.
Médiatrice. La médiatrice d'un segment [AB] est l'ensemble des points (du plan) à égale distance de A et de B. De façon équivalente, c'est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de [AB].

Parallèles (droites). En géométrie plane, deux droites sont dites parallèles lorsqu'elles n'ont aucun point commun. Dans l'espace, on dit que deux droites sont parallèles lorsqu'elles n'ont pas de point commun et qu'il existe un plan les contenant toutes les deux.

Parallélogramme. Quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. De façon équivalente, un parallélogramme est un quadrilatère (convexe) dont les côtés opposés sont de même longueur.

Plan. Un plan peut-être caractérisé par trois points non alignés pris dedans et la propriété suivante : quels que soient les deux points (distincts) que l'on se donne sur le plan, la droite portant ces points est tout entière incluse dans le plan.

Point. « Un point est ce dont il n'y a aucune partie », selon Euclide. Le point est la partie la plus élémentaire du plan ou de l'espace. L'intersection de deux droites est un point.

Polygone. Un polygone est la donnée de points, les sommets, reliés entre eux par des segments, les côtés. Le plus souvent, on considère des polygones dont les côtés ne se chevauchent pas. Un polygone est régulier lorsque tous ses côtés sont égaux et font entre eux des angles égaux (triangle équilatéral, carré, pentagone régulier, etc.).

Projection orthogonale. La projection orthogonale consiste, dans le plan, à envoyer tous les points sur une seule et même droite fixée. L'image d'un point A par la projection orthogonale est l'intersection de la droite fixée avec la perpendiculaire à cette droite passant par A. Dans l'espace, la même notion a cours, en projetant éventuellement sur un plan.

Quadrilatère. Polygone à quatre faces. Parmi les quadrilatères les plus intéressants figure le parallélogramme, dont le rectangle, le losange et le carré sont des cas particuliers.

Radian. Unité de mesure des angles la moins arbitraire. Pour mesurer la valeur en radians d'un secteur angulaire $\angle xAy$, on considère le cercle de centre A et de rayon 1 : la mesure en radians du secteur angulaire considéré est, par définition, la longueur de l'arc de cercle intérieur au secteur angulaire (pour éviter toute référence à une unité de longueur, on peut aussi exprimer les grandeurs en termes de rapports). La circonférence totale d'un cercle de rayon 1 étant égale à 2π, l'angle plein mesure 2π radians, l'angle droit $\pi/2$ radians, etc.

Rayon. Un cercle étant fixé, un rayon est un segment joignant un point du cercle à son centre. La longueur commune à tous les rayons du cercle est également appelée rayon.

Rectangle. Quadrilatère dont les quatre angles sont égaux (donc droits). C'est un cas particulier de parallélogramme.

Rectangle (triangle). Un triangle est rectangle lorsque l'un de ses angles est droit.

Sécantes (droites). Deux droites sont dites sécantes lorsqu'elles ont un point en commun. En géométrie plane, le contraire de « sécantes » est « parallèles ». En revanche, dans l'espace, deux droites peuvent n'être ni sécantes ni parallèles.

Secteur angulaire. Deux demi-droites ayant leur extrémité commune partagent le plan en deux régions disjointes. La donnée de ces demi-droites constitue un angle, chacune des deux régions du plan dont l'angle est la frontière constitue un secteur angulaire. Malgré la différence entre les deux notions, on appelle généralement « angles » des secteurs angulaires. Les demi-droites bordant un secteur angulaire en sont les côtés.

Segment. Deux points A et B étant fixés, le segment [AB] est la portion de la droite (AB) comprise entre les points A et B. Par convention, A et B appartiennent au segment, ils en constituent les extrémités.

Supplémentaires (angles). Deux angles sont supplémentaires si leur somme est égale à un angle plat.

Symétrie axiale. Transformation du plan. Une droite étant fixée (l'axe), l'image d'un point A du plan par la symétrie axiale est l'unique point B pour lequel l'axe est la médiatrice du segment [AB]. La symétrie axiale envoie les figures sur des figures symétriques (qui ne sont pas égales, en général).

Symétrie centrale. Transformation (du plan ou de l'espace), définie par un point O (le centre). Tout point A est envoyé par la symétrie sur l'unique point B tel que O soit milieu de [AB]. Dans le plan, cela correspond à une rotation de centre O et d'angle plat. Dans l'espace, l'image d'une figure par une symétrie centrale est une figure qui ne lui est pas égale, mais symétrique.

Symétrie plane. Transformation de l'espace qui correspond à l'action d'un miroir. Un plan étant fixé (le plan de symétrie, c'est-à-dire le « miroir »), l'image d'un point

A par la symétrie plane est l'unique point B tel que le plan de symétrie soit le plan médiateur du segment [AB] (l'ensemble des points de l'espace à égale distance de A et de B : c'est l'équivalent spatial de la notion de médiatrice).

Symétriques (figures). Deux figures sont symétriques lorsqu'on ne peut passer de l'une à l'autre que par un retournement (par une symétrie axiale en géométrie plane, par une symétrie centrale ou autour d'un plan en géométrie dans l'espace).

Tangente. Une droite tangente à un cercle est une droite touchant ce cercle en un seul point. Le point de contact est le point de tangence.

Transformation. On appelle transformation (du plan ou de l'espace) un procédé permettant de modifier la position des points. Opérer un glissement, pivoter, grossir à la loupe ou encore considérer l'image dans un miroir sont quelques-unes des façons de réaliser une transformation du plan. La plupart du temps, on s'intéresse à l'effet d'une transformation sur une figure géométrique, et non sur le plan (ou l'espace) tout entier.

Translation. Transformation (du plan ou de l'espace) correspondant intuitivement à l'idée de « glissement ». Elle se définit à partir d'un vecteur **AB**. L'image d'un point C par la translation de vecteur **AB** est l'unique point D tel que le quadrilatère (ABDC) soit un parallélogramme. Cette définition vaut aussi bien dans le plan que dans l'espace.

Trigonométrie. Étude des rapports entre les angles et les longueurs. D'après le premier cas d'égalité des triangles, fixer les longueurs des trois côtés d'un triangle fixe ce triangle, et donc en particulier ses angles. La trigonométrie permet de quantifier ces liens, essentiellement au travers des fonctions sinus et cosinus.

Vecteur. Un bipoint **AB** étant fixé, on appelle vecteur l'ensemble des bipoints équipollents à **AB**. L'usage confond la notion de vecteur avec celle de bipoint.

Index